

Marco Abate
Chiara de Fabritiis

Geometria analitica con elementi di algebra lineare

Terza edizione

McGraw-Hill Education

Milano • New York • Bogotá • Lisbon • London
Madrid • Mexico City • Montreal • New Delhi
Santiago • Seoul Singapore • Sydney • Toronto

Copyright © 2015, 2010, 2006 McGraw-Hill Education S.r.l.
Via Ripamonti, 89 – 20141 Milano



I diritti di traduzione, di riproduzione, di memorizzazione elettronica e di adattamento totale e parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della Legge 22 aprile 1941, n. 633.

Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARED, Corso di Porta Romana 108, Milano 20122, e-mail info@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

Nomi e marchi citati nel testo sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

Publisher: Paolo Roncoroni
Acquisition Editor SEM & HSSL: Barbara Ferrario
Produzione: Donatella Giuliani
Realizzazione editoriale: M.T.M.
Grafica di copertina: Feel Italia, Milano
Immagine di copertina: *Edifici de gas natural*, Barcellona, © 2009, Marco Abate
Stampa: LaLitotipo, Settimo Milanese (MI)

Printed in Italy
ISBN 978-88-386-6881-4
123456789LITLIT098765

Indice

Prefazione	VIII
Gli Autori	X
Guida al testo	XI
Ringraziamenti dell'Editore	XIV
1 Nozioni preliminari	
1.1 Insiemi e funzioni	1
1.2 Logica elementare	2
1.3 Numeri e operazioni	6
1.4 Prerequisiti	11
Esercizi	15
	16
2 Vettori geometrici	
2.1 Vettori applicati	19
2.2 Coordinate	20
2.3 Equazioni di rette e piani	24
Complementi	28
2C.1 Vettori liberi	32
Esercizi	32
	36
3 L'eliminazione di Gauss	
3.1 Esempi e definizioni	39
3.2 Sistemi triangolari superiori	40
3.3 Il metodo d'eliminazione di Gauss	44
Esercizi	47
	53
4 Spazi vettoriali	
4.1 Spazi e sottospazi	57
4.2 Combinazioni lineari	58
4.3 Indipendenza lineare e basi	62
4.4 Esistenza delle basi	64
4.5 Somma e intersezione di sottospazi	68
4.6 Numeri complessi	75
4.7 Potenze e radici	77
Complementi	81
4C.1 Il teorema fondamentale dell'Algebra	84
Esercizi	84
	87

5 Applicazioni lineari	91
5.1 Esempi e definizioni	92
5.2 Nucleo e immagine	97
Esercizi	103
6 Sistemi lineari	107
6.1 Sistemi a scala	108
6.2 La riduzione a scala	110
6.3 Tecniche di calcolo	113
6.4 Equazioni parametriche e cartesiane	116
6.5 Sottospazi affini	120
Esercizi	123
7 Matrici e applicazioni lineari	127
7.1 Composizione e isomorfismi	128
7.2 Prodotto di matrici	133
7.3 Matrici invertibili	135
Esercizi	139
8 Cambiamenti di base	143
8.1 Matrice di cambiamento di base	144
8.2 Matrice associata a un'applicazione lineare	149
Esercizi	156
9 Determinanti	161
9.1 Esistenza e unicità del determinante	162
9.2 Sviluppi di Laplace	171
9.3 Teorema di Binet	175
9.4 Teorema degli orlati	177
Esercizi	180
10 Geometria affine	185
10.1 Equazioni di rette e piani	186
10.2 Punti e rette	189
10.3 Punti e piani	193
10.4 Rette e rette	195
10.5 Rette e piani	198
10.6 Piani e piani	202
10.7 Sistemi di riferimento affini	204
10.8 Orientazione	206
Complementi	208
10C.1 Affinità	208
10C.2 Geometria proiettiva	212
Esercizi	219

11 Prodotti scalari	223
11.1 Definizioni ed esempi	224
11.2 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz	231
11.3 Basi ortogonali	235
11.4 Proiezioni ortogonali	240
11.5 Prodotti scalari e matrici	243
11.6 Endomorfismi simmetrici e isometrie	246
Esercizi	250
12 Geometria euclidea	253
12.1 Angoli e ortogonalità	254
12.2 Distanze	259
12.3 Il prodotto vettore	263
Complementi	267
12C.1 Isometria	267
12C.2 Isometrie lineari nello spazio	269
Esercizi	272
13 Autovalori e autovettori	275
13.1 Definizioni ed esempi	276
13.2 Il polinomio caratteristico	281
13.3 Molteplicità	284
Esercizi	289
14 Il teorema spettrale	293
14.1 Basi ortonormali di autovettori	294
14.2 Endomorfismi triangolabili	299
14.3 Un criterio di positività	302
Esercizi	305
15 Coniche e quadriche	309
15.1 Coniche	310
15.2 Classificazione affine di coniche e quadriche	318
15.3 Fasci di coniche	333
15.4 Coni, cilindri e sfere	336
Esercizi	342
Appendice A. Soluzione di una parte degli esercizi proposti nel testo	345
Commiato	371
Indice analitico	373

Prefazione

Un po' emozionato per l'inizio di una nuova fase della tua vita, un po' orgogliosa per aver scelto di iscriverti a un corso di laurea notoriamente difficile come quelli di Ingegneria o di Scienze, incuriosito dai nuovi colleghi e dalle nuove colleghe con cui dividerai questa avventura, pronta a criticare o ammirare i nuovi professori e le nuove professoresse che stai per incontrare (sei all'università, ora!), affronti le prime lezioni di un corso chiamato *Geometria* aspettandoti di rivedere quadrati e triangoli, o magari sperando di imparare finalmente qualcosa su sfere e parallelepipedi. E invece nel giro di poche settimane ti trovi immerso in nozioni astruse tipo "spazi vettoriali di dimensione n ", o peggio ancora in manipolazioni apparentemente prive di senso di tabelle di numeri chiamate per qualche misterioso motivo "matrici". Ti viene promesso che un giorno tutto ciò ti sarà utile, ma per il momento a volte non capisci neppure se c'è una relazione fra quanto studiato per anni e la serie di concetti astratti propinati spesso quasi senza motivazioni.

Eppure la relazione c'è, forte, e anche l'utilità è indubbia. Il corpo di argomenti che viene tradizionalmente insegnato nel primo corso di Geometria delle università italiane è stato creato pazientemente negli ultimi due secoli per rispondere a problemi ben precisi, sia applicativi sia interni alla Matematica, e molti di questi problemi sono di interesse immediato anche per uno studente del primo anno. Per esempio, lo studio dei sistemi lineari conduce in maniera naturale agli spazi vettoriali e alle applicazioni lineari; lo sforzo di astrazione viene poi ripagato da risultati quali il teorema di Rouché-Capelli o il teorema della dimensione che, affiancati da appropriate tecniche di calcolo sullo stile dell'eliminazione di Gauss, permettono di risolvere efficacemente problemi che tu stessa ti eri posta sui sistemi lineari. E una volta entrati all'interno della teoria diventa facile trovare ulteriori motivazioni per proseguire, vedendo da prospettive nuove e illuminanti quanto conoscevi già.

Dopo un simile preambolo non ti sarà difficile immaginare qual è una delle caratteristiche principali di questo testo: l'abbondanza di motivazioni ed esempi. Ogni nuovo concetto è collegato a qualcosa che già conosci, e che ne giustifica l'introduzione; e numerosi esempi vengono discussi per darti la possibilità di vedere in concreto il significato delle nuove nozioni e i possibili fenomeni che si possono presentare. Una certa enfasi è posta anche sulle tecniche di calcolo, con l'obiettivo di fornirti prima possibile i mezzi per operare autonomamente con i nuovi concetti; ma tutte le tecniche sono rigorosamente dimostrate e inquadrate nel contesto, in modo da evitare che divengano delle semplici macchinette da utilizzare anche a sproposito senza capirne davvero il funzionamento.

Un altro problema che si deve affrontare studiando argomenti matematici (di qualunque livello, non solo al primo anno d'università) è che la semplice lettura del testo non basta: Un ragionamento matematico è per sua stessa natura una successione logica di argomenti; viene quindi naturale seguire i singoli passaggi senza porsi problemi (del resto, è tutto logico) per poi ritrovarsi in fondo al capitolo e accorgersi: primo, di non saper risolvere un solo esercizio; secondo, di non aver minimamente capito perché siano stati fatti certi ragionamenti piuttosto che altri; terzo, di non essere assolutamente in grado di ricostruirli. Per cercare di prevenire il

problema questo testo (prefazione compresa...) è stato scritto con uno stile che invita a una lettura attiva. In punti strategici ti sarà chiesto di verificare subito se hai capito il motivo di certi passaggi; e abbiamo sistematicamente preferito dimostrazioni che mostrano chiaramente cosa sta accadendo, e perché, ad altre magari più brevi o eleganti ma più oscure. Inoltre, per invogliarti ulteriormente a interagire con ciò che leggi, il testo (come avrai già notato) si rivolge al lettore direttamente in seconda persona. Infine, ciascun capitolo è corredata da numerosi esercizi per permettere di verificare la comprensione sia teorica che pratica di quanto studiato (e in appendice troverai anche le soluzioni di alcuni esercizi scelti. Ma mi raccomando: prima prova tu da sola a risolvere l'esercizio, e solo quando sarai convinto di aver trovato la soluzione, o almeno ci avrai tentato fino a strapparti i capelli dalla testa, solo allora vai a guardare la soluzione. Vedere la soluzione senza aver provato prima a risolvere l'esercizio non ti aiuta a imparare la materia).

Gli argomenti presentati sono stati scelti fra quelli che hanno dimostrato sul campo la loro importanza per la preparazione di qualsiasi ingegnere o scienziato: vettori applicati, sistemi lineari, spazi vettoriali, applicazioni lineari, matrici, determinanti, prodotti scalari, autovalori e autovettori, teorema spettrale, geometria affine e metrica. L'idea di fondo è, tutto sommato, quella originale di Cartesio: la scelta di un sistema di riferimento permette di trattare con tecniche algebriche problemi geometrici. Come tutte le grandi idee, si è sviluppata ben oltre quanto il suo stesso creatore avesse immaginato, e le tecniche di Algebra Lineare che imparerai in questo testo hanno applicazioni in quasi ogni campo della Scienza e dell'Ingegneria. E permettono una trattazione elegante ed efficiente della Geometria Analitica, come vedremo parlando di rette e piani, distanze e angoli, coniche e quadriche, giustificando ampiamente anche nel loro alveo natale lo sforzo di astrazione che (indubbiamente) ti sarà richiesto per imparare a padroneggiarle. Ma il risultato finale ricompenserà ampiamente lo sforzo, sia per te che riterrai la Matematica un utile strumento da usare quando serve, sia per te che ne sarai affascinato e la esplorerai proseguendo ben oltre il contenuto di questo testo introduttivo.

In questa terza edizione, come accennato prima, parte degli oltre 500 esercizi consigliati presenti nel testo sono stati corredati dalla soluzione in appendice; abbiamo sviluppato, inoltre, un corposo numero di esercizi completamente nuovi disponibili sulla piattaforma web dell'Editore chiamata Connect. Tale strumento permette ai docenti di confezionare, assegnare e valutare test in modo semplice e agli studenti di esercitarsi valutando la propria preparazione in modo autonomo. Segnaliamo, in aggiunta, l'intervento sulla veste grafica che ha reso ancora più efficace e chiaro lo studio degli argomenti presentati.

È alfine giunto il momento, inevitabile quanto gradito, dei ringraziamenti. Se questo libro ti piacerà, ti sarà utile, o almeno non ti annoierà troppo, il merito è (anche...) di Barbara Ferrario, Adele Manzella, Francesca Tovena – e, soprattutto, di tutti i nostri studenti di questi anni. Infine, vogliamo dedicare questo libro a Pino Abate, che è riuscito nell'incredibile impresa di continuare a insegnare a suo figlio a scrivere anche dopo che questi si era messo a fare il matematico, trasmettendogli il suo amore per i libri, e per la vita.

*Marco Abate
Chiara de Fabritiis*

Gli Autori

Marco Abate ha ottenuto il Perfezionamento in Matematica dalla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1988. Nel 1994 è diventato professore ordinario di Geometria, prima presso l'Università di Ancona, poi presso l'Università di Roma Tor Vergata e, dal 2001, presso l'Università di Pisa. Ha passato periodi di ricerca in molte delle più prestigiose università mondiali. È stato coordinatore nazionale dei corsi di studio in Matematica ed è direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, membro della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana e rappresentante dei professori ordinari dell'area matematica e informatica nel Consiglio Universitario Nazionale.

È autore di un centinaio di pubblicazioni scientifiche, pubblicate nelle principali riviste internazionali del settore; svolge anche attività di divulgazione della matematica. Per McGraw-Hill Education ha pubblicato i testi *Matematica e Statistica. Le basi per le scienze della vita*, *Geometria*, *Algebra lineare*, *Esercizi di geometria* (con C. de Fabritiis) e *Calcolo differenziale e integrale* (con G. F. Simmons).

I suoi principali interessi comprendono (ma non si limitano a) la dinamica olomorfa, la teoria geometrica delle funzioni, la geometria differenziale complessa, la scrittura (fumetti ma non solo) e il viaggiare per il mondo (avendo già visitato l'Antartide, il suo prossimo obiettivo è la luna).

Chiara de Fabritiis ha ottenuto il Perfezionamento in Matematica dalla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1994. È stata ricercatore di Geometria alla Scuola Internazionale di Studi Superiori e Avanzati di Trieste e all'Università di Bologna, professore associato presso l'Università Politecnica delle Marche, dove nel 2005 è diventata professore ordinario.

Ha passato periodi di ricerca negli USA, in Germania e in Spagna. È stata direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università Politecnica delle Marche.

È autore di una quarantina pubblicazioni scientifiche; svolge anche attività di divulgazione della matematica e collabora attivamente con un compositore e violinista per la stesura tramite tecniche matematiche di partiture musicali ispirate a opere d'arte.

Per McGraw-Hill Education ha pubblicato *Esercizi di geometria* (con M. Abate).

I suoi principali interessi comprendono la dinamica olomorfa, la teoria geometrica delle funzioni, la geometria differenziale complessa, la musica e la montagna.

Guida al testo

Sommario

- 10.1** Equazioni di rette
- 10.2** Punti e rette
- 10.3** Punti e piani
- 10.4** Rette e rette
- 10.5** Rette e piani

metria affine

10

In questo capitolo imparerai a recuperare dati come identificare le posizioni reciproche di parametriche sia cartesiane si tratta di una nuova linea. Discuteremo anche il concetto di orientazione, infine, i compiti e ad alcuni concetti di geometria per

In questo capitolo toriamo come identificare le posizioni reciproche di parametriche sia cartesiane si tratta di una nuova linea. Discuteremo anche il concetto di orientazione, infine, i compiti e ad alcuni concetti di geometria per

Figure
Il testo è ampiamente corredata di figure, strumenti imprescindibili per comprendere meglio alcuni concetti in modo specifico e puntuale.

12.2 Distanze - 261

per cui

$$d(P_0, \pi) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Passiamo ora alla distanza fra un punto e un piano.

Definizione 12.13

Sia π un piano e P_0 un punto. La *distanza* $d(P_0, \pi)$ fra il punto e il piano è la distanza fra P_0 e la sua proiezione ortogonale su π .

Considera ora un punto P_0 di coordinate (x_0, y_0, z_0) , e π un piano di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$. Sia H la proiezione ortogonale di P_0 su π indichiamo con r la retta ortogonale a passante per P_0 te H vedi la Figura 12.5.

Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e r la retta del piano π indichiamo con θ l'angolo fra il vettore $v_1 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$ e il vettore $v_2 = (a, b, c)$ che è un vettore diretore della retta r a meno di moltiplicare per -1 (l'equazione del piano π può supporre che $a \in [0, z/2]$). Allora considerando il triangolo rettangolo di vertici P_0, P_1 e H vediamo che

$$d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = d(P_0, P_1) \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow d(P_0, \pi)^2 = d(P_0, P_1)^2 \cos^2(\theta)$$

Sia ora il fatto che P_1 è π si dice che $d(P_0, \pi) = d(P_0, r)$.

Osservazione 12.4

Una formula evidentemente banale (in cui non compare ci formare la distanza fra un punto e una retta del piano) è quella

La distanza fra una retta e un piano, o fra due piani, è nula se il piano e il piano (o i due piani) sono incidenti, la distanza è zero se invece

Figura 12.5 - La distanza fra un punto e un piano.

Figura 72.5 - La distanza fra un punto e un piano.

Sommario
Ogni capitolo si apre con la struttura degli argomenti dei vari paragrafi e con un breve testo introduttivo che illustra i concetti chiave che verranno affrontati, costituendo quindi un aiuto per visualizzare il percorso tematico prima di iniziare lo studio.

162 Capitolo 9 - Determinanti

9.1 Esistenza e unicità del determinante

Nell'Esercizio 7.19 abbiamo visto che una matrice

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

è invertibile se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Pertanto le $\langle A, A^{-1} \rangle$ di A sono linearmente indipendenti e fatto ciò si può trovare una funzione di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che i vettori indipendenti se e solo se $\langle v, w \rangle \neq 0$ è la funzione

$$d\left(\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1w_2 - v_2w_1.$$

Osservazione 9.1

Esiste un'altra interpretazione della funzione di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, indichiamo le loro coordinate rispettivamente $v, w \in \mathbb{R}^2$, indichiamo il parallelogramma P di vertici $O, v, w, v+w$; tutte le coordinate di v e w sono positive (vedi la Figura 9.1).

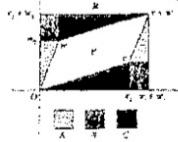


Figura 9.1 Il determinante come area parallelogramma.

Se indichiamo con R il rettangolo di vertici opposti $O, v+w, w, v$, vediamo dalla figura che R può venire suddiviso in sette parti: un parallelogramma (P), due rettangoli congruenti (Q) e due coppie di triangoli congruenti (A e C). Quindi

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(R) - 2 \cdot \text{Area}(A) - 2 \cdot \text{Area}(B) - 2 \cdot \text{Area}(C).$$

Siccome si ha $\text{Area}(R) = (v_1 + w_1)(v_2 + w_2)$, $\text{Area}(B) = w_1v_2$, $\text{Area}(A) = v_1w_2/2$, e $\text{Area}(C) = v_1w_2/2$, allora $\text{Area}(P) = v_1v_2 + w_1w_2 = d(v, w)$. La funzione d coincide così con l'area del parallelogramma generato da v e w . Ciò meglio, con l'area orientata del parallelogramma $d(v, w) \propto \text{Area}(P)$ se per soddisfare da v e w si ruota in senso antiorario, come nella Figura 9.1). $d(v, w) = -\text{Area}(P)$ afferma (verifica che questo è effettivamente quanto accade). In particolare, dimostriamo nuovamente che d si annulla se e solo se v e w sono linearmente dipendenti: infatti in tal caso il "parallelogramma" da esso generato ha area nulla - è un segmento.

Osservazione 9.1

Esiste un'altra interpretazione della funzione di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, indichiamo le loro coordinate rispettivamente $v, w \in \mathbb{R}^2$, indichiamo il parallelogramma P di vertici $O, v, w, v+w$; tutte le coordinate di v e w sono positive (vedi la Figura 9.1).

Osservazioni

Evidenziano ragionamenti, argomenti e fatti che è utile tenere presenti.

Definizioni
Introducono termini, concetti e simboli importanti che verranno usati più volte nel testo.

Definizione 11.5

Sia V uno spazio vettoriale, se $V^\perp = \{O\}$; degenero.

Nota che $\langle O, O \rangle = 0$ per

Definizione 11.6

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow$ se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito

Nota che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito

228 Capitolo 11 - Prodotti scalari

Esempio 11.1
Il prodotto scalare canonico è chiaramente un prodotto scalare definito.

Esempio 11.2
Consideriamo l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\langle v, w \rangle = 2v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + v_2w_2$.

È facile verificare che si tratta di un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 considerato come spazio normato ($\|\cdot\|$), quello per cui questa applicazione è definita. Per fissare le idee, quella che resta nulla c'è ogni volta che è presente un termine del tipo v_iw_j , cioè quando lo stesso coefficiente v_iw_j è nullo, esattamente con lo stesso coefficiente. Non sono riusciti dicendo che questo prodotto scalare $\langle v, w \rangle = v^T S w$ dove S è la matrice antisimmetrica (vedi in

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questo prodotto scalare è definito positivo: infatti $\langle v, v \rangle$ è sempre maggiore o uguale a zero, cioè se e solo se $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, cioè se e solo se $v = 0$.

Esempio 11.3
Consideriamo invece l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 = v^T S w$, dove stavolta S è la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso è chiaro che si tratta di un prodotto scalare ma, contrariamente a prima, è solo semidefinito positivo. Infatti, $\langle v, v \rangle = (v_1 + v_2)^2 + v_3^2 \geq 0$, ma $\langle v, v \rangle = 0$ non è solo se $v_1 + v_2 = v_3 = v_4 = 0$ che non implica $v = 0$, in quanto certuni dei vettori non nulli tali che $\langle v, v \rangle = 0$: per esempio, $v = (1, -1, 0, 0)$.

Esempio 11.4
L'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\langle v, w \rangle = -2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3 + v_4w_4 = v^T S w$, dove stavolta S è la matrice

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è un prodotto scalare, ma definito negativo. Infatti, $\langle v, v \rangle = -v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + 3v_3^2 - v_4^2 = 4v_2v_1 - 2v_1^2 + 3v_3^2 - v_4^2 \leq 0$.

Esempio 11.2
Consideriamo l'applicaz
È facile verificare che s
consideriamo le coor
grado senza t

Esempi

Sono un punto nevralgico poiché costituiscono il luogo in cui la teoria diventa pratica ed è possibile vedere concetti e formule applicati in modo chiaro e immediato.

Appendice A

Soluzioni di una parte degli esercizi proposti nel testo

Esercizi 12

1 - Notioni preliminari

1.1. Calcola $\det C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.2. Presa una retta $r \subset \mathbb{P}^2$ passante per l'origine, dimostra che la Definizione 12.1 di proiezione ortogonale su r coincide con quelli data nel Paragrafo 1.1. Si è anche presa per l'origine O della retta r la stessa cosa facendo in \mathbb{P}^1 (vedi Q 1).

1.3. Presa un punto P passante per l'origine, dimostra che la Definizione 12.1 di proiezione ortogonale su P coincide con quella data nel Paragrafo 1.1.

1.4. Nel ricavare la formula (1.6) dell'appunto, fra due rette r_1 e r_2 , abbiamo supposto che le loro rette $r_1 \cap r_2$ è a distanza composta dall'arco dell'angolo $r_1 \cap r_2 = \pi/2 - \theta$. Dimostra che sono davvero composta.

1.5. Calcola il coseno dell'angolo tra le rette r_1 e r_2 , fatteché le loro proiezioni su $r_1 \cap r_2$ sono perpendicolari. $r_1: z = 2x - 3y + 1$, $r_2: x = 4z - 5y + 1$, $r_1 \cap r_2 = \pi/2 - \theta$.

1.6. Calcola il coseno dell'angolo fra le rette r_1 e r_2 definite a loro piacimento di equazioni cartesiane $r_1: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z - 2x + 4 = 0 \end{cases}$.

1.7. Trova equazioni parametriche per $r_1 \subset \mathbb{P}^2$ passante per l'origine, per i punti $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$.

1.8. Scrivere equazioni per la proiezione ortogonale su r_1 delle rette r_2 e r_3 definite a loro piacimento di equazioni cartesiane.

1.9. Determina $\det A$.

1.10. Determina $\det B$.

2 - Vettori geometrici

2.1. Presa una retta $r \subset \mathbb{P}^2$ passante per l'origine, dimostra che la proiezione ortogonale per r di un punto P è il punto P' tale che $P \in P' \perp r$.

2.2. Presa un piano $\pi \subset \mathbb{P}^3$ passante per l'origine, dimostra che la proiezione ortogonale per π di un punto P è il punto P' tale che $P \in P' \perp \pi$.

12.1 Presa una retta proiezione ortogonale passa per l'origine

12.2 Preso un piano π proiezione ortogonale

12.3 Nel ricavare la citamente a

Esercizi
Accanto alla teoria anche la pratica: ogni capitolo si conclude con una ricca sezione di esercizi che danno la possibilità di allenarsi, ragionare e comprendere meglio i concetti appresi.

Nell'Appendice a fine libro ci sono le soluzioni di una parte degli esercizi proposti.

Per gli studenti che intendono potenziare il loro allenamento per questo insegnamento, è possibile completare la preparazione con l'eserciziario dei medesimi autori: *Esercizi di geometria*, McGraw-Hill Education S.r.l. (Italy), ISBN 978-88-386-0800-1.

Per i docenti che adottano il testo è possibile scaricare dall'area riservata del sito del libro (www.ateneonline.it/abate3e) le figure del libro da utilizzare in aula.



McGraw-Hill Connect è una piattaforma web per l'assessment. Inoltre, consente al docente di interagire con la classe e di gestire il proprio corso con un enorme risparmio di tempo, permettendo allo studente di avere a disposizione ulteriori strumenti di apprendimento.

Assessment

McGraw-Hill Connect consente ai docenti di elaborare con facilità test ed esercizi attingendo a un vastissimo test bank e di somministrarli online agli studenti attraverso la piattaforma. Gli esercizi sono costruiti a partire dal libro di testo e sono perfettamente coerenti con la trattazione svolta dal manuale.

Connect può essere impostato per fornire al docente un feedback con dati statistici sul livello di preparazione degli studenti.

Gli studenti hanno inoltre la possibilità di svolgere esercizi di autovalutazione.

Come si accede a Connect?

I docenti possono collegarsi per testare le funzionalità della piattaforma al seguente indirizzo:
<http://connect.mcgraw-hill.com>

Ringraziamenti dell'Editore

L'Editore ringrazia i docenti che con le loro preziose indicazioni hanno contribuito a fornire utili suggerimenti per una migliore edizione di questo testo.

Fulvio Bisi, Università degli Studi di Pavia

Simone Borghesi, Università degli Studi di Milano - Bicocca

Vincenzo Giordano, Politecnico di Bari

Paolo Piccinni, Sapienza - Università di Roma

L'Editore ringrazia, inoltre, i docenti che con le loro indicazioni hanno contribuito alla realizzazione della seconda edizione del testo.

Rita Capodaglio, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Stefano Capparelli, Sapienza - Università di Roma

Maria Virginia Catalisano, Università degli Studi di Genova

Michele Mulazzani, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Andrea Sambusetti, Sapienza, Università di Roma

Mauro Zannetti, Università degli Studi dell'Aquila

Nozioni preliminari

1

Sommario

- 1.1 Insiemi e funzioni**
- 1.2 Logica elementare**
- 1.3 Numeri e operazioni**
- 1.4 Prerequisiti**

Esercizi

Per cominciare lo studio di un nuovo argomento è utile fissare un punto di partenza. Bisogna stabilire un linguaggio comune, definire i termini di uso frequente e convenire in anticipo su cosa sia supposto noto. Per i nostri scopi, un buon punto di partenza è la teoria ingenua⁽¹⁾ degli insiemi. Probabilmente l'avrai già incontrata nei tuoi studi precedenti; per ogni evenienza questo capitolo comincia richiamandone i concetti di base. Si prosegue con una breve discussione dei numeri e relative operazioni, sempre con l'intento di ripassare alcuni concetti fondamentali e fissare una volta per tutte la terminologia. Il capitolo si conclude con un veloce riepilogo dei concetti matematici che si suppone tu abbia imparato alle scuole superiori.

⁽¹⁾ Così chiamata per distinguerla dalla ben più complicata e interessante teoria assiomatica degli insiemi.

1.1 Insiemi e funzioni

Cominciamo introducendo brevemente alcune notazioni e un po' di terminologia (ovvero qualche simbolo e non pochi nomi). Se A è un insieme, scriveremo $a \in A$ per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme A , e $a \notin A$ per indicare che a non appartiene ad A . Se B è un altro insieme i cui elementi appartengono tutti anche ad A , diremo che B è un *sottoinsieme* di A (o che è *contenuto* in A), e scriveremo $B \subseteq A$ (oppure $A \supseteq B$, che si legge “ A contiene B ”). Se inoltre B è effettivamente diverso da A – cioè A contiene degli elementi che non appartengono a B – diremo che B è un *sottoinsieme proprio* di A , e scriveremo $B \subset A$ (o $A \supset B$). L'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, sarà indicato con \emptyset . Essendo privo di elementi, l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme.

Una situazione che capiterà spesso sarà quella di dover considerare “il sottoinsieme B degli elementi dell'insieme A che godono della proprietà tale”. In simboli, questa definizione sarà abbreviata in

$$B = \{a \in A \mid a \text{ gode della proprietà tale}\}.$$

Per esempio, se indichiamo con \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, il sottoinsieme B dei multipli di 3 può essere rappresentato da $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisibile per } 3\}$, o anche da $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}$.

Siano ora A e B due insiemi qualunque.

- ◆ L'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme contenente solo gli elementi che stanno sia in A sia in B (vedi la Figura 1.1.(a)). Se $A \cap B = \emptyset$, diremo che gli insiemi A e B sono *disgiunti*.
- ◆ L'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A assieme a tutti gli elementi di B (vedi la Figura 1.1.(b)).
- ◆ La *differenza* $A \setminus B$ di A e B è l'insieme che contiene esattamente quegli elementi di A che non stanno in B (vedi la Figura 1.1.(c)).

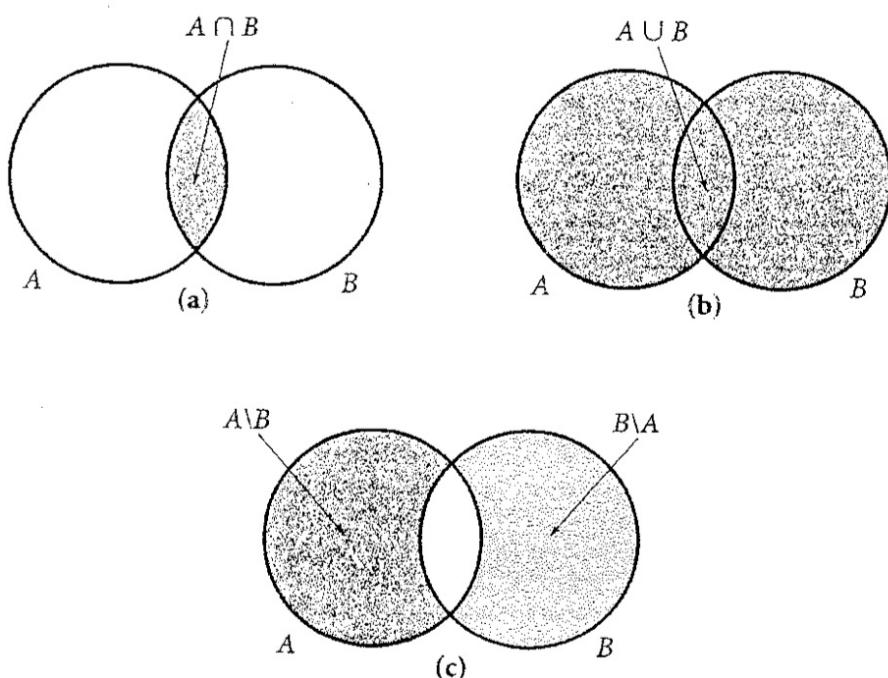


Figura 1.1 – Operazioni fra insiemi.

- ◆ Il *prodotto cartesiano* $A \times B$ di A e B è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) , dove a è un qualunque elemento di A e b è un qualunque elemento di B .

Se esiste un concetto che caratterizza la matematica moderna è il concetto di funzione. Praticamente tutta la matematica (e la geometria non è da meno) ne fa un uso continuo. Non ti sorprenderà quindi scoprire che il resto di questo primo paragrafo è dedicato a una discussione delle funzioni e delle loro proprietà.

Definizione 1.1

Una *funzione* (o *applicazione*) fra due insiemi A e B è una legge che associa a ciascun elemento di A *uno e un solo* elemento di B . L'insieme di partenza A è il *dominio* della funzione; l'insieme di arrivo B il *codominio*. In simboli, una funzione f di dominio A e codominio B verrà indicata con $f: A \rightarrow B$. Se la funzione f manda l'elemento $a \in A$ nell'elemento $b \in B$, scriveremo⁽²⁾ $b = f(a)$, e diremo che b è *immagine di a tramite f*. L'insieme degli elementi di B che sono immagine tramite f di elementi di A è l'*immagine di f*, e viene indicata con $\text{Im } f$ oppure con $f(A)$; in simboli

$$f(A) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A\} = \{f(a) \in B \mid a \in A\}.$$

Osservazione 1.1

Possiamo pensare la funzione $f: A \rightarrow B$ come una specie di scatola nera, con un ingresso e un'uscita (vedi la Figura 1.2). Ogni volta che in ingresso entra un elemento del dominio, la scatola nera – la funzione – lo elabora e poi emette dall'uscita un elemento del codominio. Non è importante la natura degli elementi del dominio e del codominio (possono essere numeri, rette, patate, cavalleggeri prussiani o qualsiasi altra cosa) né il tipo di processi digestivi che avvengono all'interno della scatola. Somme, prodotti, classifiche o formine da sabbia, tutto è ammissibile, *purché il procedimento usato sia sempre lo stesso*: ogni volta che in ingresso infiliamo la stessa patata, in uscita dobbiamo ottenere la stessa cipolla – a ogni elemento del dominio viene associato uno e un solo elemento del codominio, appunto.



Figura 1.2 - Una funzione come scatola nera.

Questa analogia ci permette di dire quando due funzioni sono uguali. Per i nostri scopi, due scatole nere che producono sempre lo stesso oggetto quando in ingresso ricevono lo stesso elemento sono indistinguibili: non potendo vedere come sono fatte dentro, se si comportano nello stesso modo per noi coincidono.

Definizione 1.2

Due funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$ (con lo stesso dominio e lo stesso codominio, s'intende) sono *uguali*, e scriveremo $f = g$ oppure $f \equiv g$, se e solo se $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$.

Vediamo ora qualche esempio.

⁽²⁾ Oppure $a \xrightarrow{f} b$, o semplicemente $a \mapsto b$, se il contesto individua chiaramente di quale funzione si tratta.

Esempio 1.1

Se A è un insieme, la funzione $\text{id}_A: A \rightarrow A$ che associa a ogni elemento di A se stesso (cioè $\text{id}_A(a) = a$ per ogni $a \in A$) è la funzione *identità* di A . \square

Esempio 1.2

Siano A e B insiemi, e $b_0 \in B$ un elemento dato. La legge $f: A \rightarrow B$ che associa b_0 a ogni elemento di A (in simboli, $f(a) = b_0$ per ogni $a \in A$) è una funzione, detta *funzione costante* di valore b_0 . \square

Esempio 1.3

Siano A e B gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$. La legge $f: A \rightarrow B$ data da $f(1) = b, f(2) = a, f(3) = d, f(4) = b$ è una funzione. Possiamo rappresentarla con un disegno come in Figura 1.3.

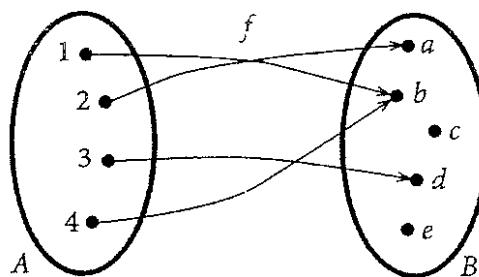


Figura 1.3 - Rappresentazione grafica di una funzione.

Definizione 1.3

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione. Se $A_1 \subseteq A$ è un sottoinsieme di A , l'*immagine di A_1 tramite f* è l'insieme $f(A_1) \subseteq B$ delle immagini degli elementi di A_1 (vedi la Figura 1.4.(a)). Viceversa, se $B_1 \subseteq B$, l'insieme degli elementi di A la cui immagine tramite f appartiene a B_1 (vedi la Figura 1.4.(b)) si chiama *immagine inversa $f^{-1}(B_1)$ di B_1 tramite f* ; in simboli,

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} \subseteq A.$$

Chiaramente, $f^{-1}(B) = A$ per qualunque funzione $f: A \rightarrow B$ (perché?).

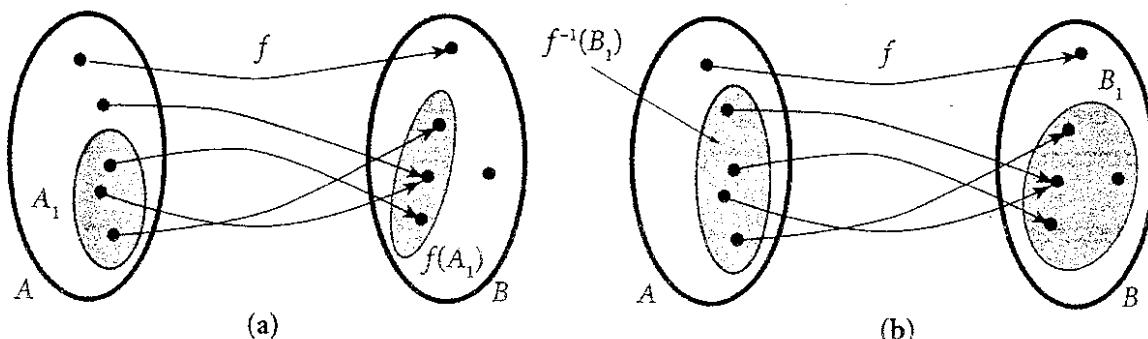


Figura 1.4 - (a) Immagine; (b) immagine inversa.

Esempio 1.4

Sia $f: A \rightarrow B$ di nuovo la funzione definita nell'Esempio 1.3, e poniamo $A_1 = \{2, 4\}$ e $B_1 = \{b, d, e\}$. Allora $f(A_1) = \{a, b\}$ e $f^{-1}(B_1) = \{1, 3, 4\}$. \square

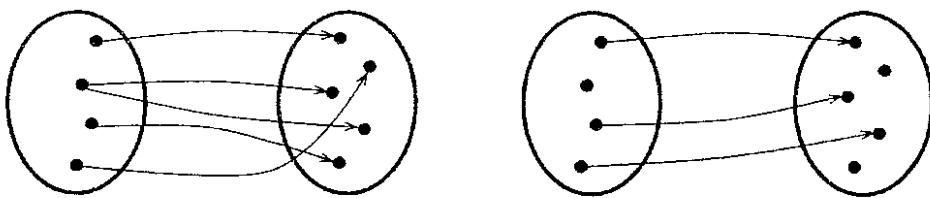


Figura 1.5 - Leggi che non rappresentano funzioni.

Esempio 1.5

La classifica della quinta giornata del girone d'andata del campionato di serie A del 2015/2016 è una funzione che associa a ogni squadra di serie A un numero naturale: il suo punteggio. Da questo punto di vista, il campionato consiste nel cambiare funzione ogni domenica. □

Ogni funzione in cui sia il dominio sia il codominio sono costituiti da un numero finito di punti può essere visualizzata con un disegno simile alla Figura 1.3: l'essenziale è che da *ogni* punto del dominio parta *una e una sola* freccia. Per intenderci, i due disegni della Figura 1.5 *non* rappresentano funzioni: il primo perché a un elemento del dominio vengono associati due elementi del codominio, e il secondo perché a un elemento del dominio non viene associato alcun elemento del codominio.

Esempio 1.6

Il prezzo al litro della benzina dal benzinaio all'angolo è una funzione che associa a ogni giorno degli ultimi tre anni un numero – ed è una funzione sfortunatamente non decrescente. □

Esempio 1.7

La legge che associa a ogni giorno dell'anno 2015 il prezzo al litro della benzina in Italia *non* è una funzione. Infatti, il prezzo cambia da benzinaio a benzinaio, per cui non si può associare a ciascun giorno dell'anno un unico prezzo. □

Esempio 1.8

Un tipo particolare di funzioni è costituito dai polinomi. Un *polinomio* (a coefficienti reali, in una variabile⁽³⁾) è una funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (1.1)$$

dove \mathbb{R} indica l'insieme dei numeri reali, $n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale detto *grado* del polinomio, e $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sono numeri reali, i *coefficienti* del polinomio. In particolare, a_0 è detto *termine noto*, e $a_n \neq 0$ *coefficiente direttivo*. I polinomi di grado zero sono esattamente le costanti. Per noi, un polinomio sarà *sempre* una funzione, e *mai* una misteriosa combinazione formale di lettere e numeri. Indicheremo con $\mathbb{R}[t]$ l'insieme di tutti i polinomi (a coefficienti reali, in una variabile), e con $\mathbb{R}_n[t]$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}$. □

Esempio 1.9

Le funzioni trigonometriche seno e coseno sono funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , come pure l'esponenziale; il logaritmo invece è una funzione che ha l'insieme dei numeri reali positivi come dominio ed \mathbb{R} come codominio. □

⁽³⁾ Una volta vista la definizione dovrebbe essere chiaro come costruire polinomi in più variabili, e vedremo fra poco che ne esistono anche con altri tipi di coefficienti.

Definizione 1.4

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione da A a B . Se A_1 è un sottoinsieme di A , la funzione f chiaramente determina anche una legge che a ogni elemento di A_1 associa un elemento di B (la stessa legge di prima), e quindi una funzione da A_1 a B . Questa nuova funzione si chiama *restruzione* di f ad A_1 , e si indica con $f|_{A_1}$. Se capiterà, scriveremo $f(A_1)$ e non $f|_{A_1}(A_1)$ per indicare l'immagine di f ristretta ad A_1 , in modo da non complicare troppo le formule.

Esempio 1.10

La funzione $f = p|_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa a ogni numero naturale il suo successore è la restruzione a \mathbb{N} del polinomio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dato da $p(t) = t + 1$.

Ovviamente, non tutte le funzioni godono delle stesse proprietà. Per esempio, non sempre tutti gli elementi del codominio di una funzione sono immagine di elementi del dominio; in generale, l'immagine è un sottoinsieme proprio del codominio. Le funzioni per cui ciò non accade meritano un nome speciale.

Definizione 1.5

Se la funzione $f: A \rightarrow B$ è tale che ogni elemento del codominio arriva da uno del dominio – cioè $\text{Im } f = B$ – diremo che f è *surgettiva*.

In termini della rappresentazione grafica introdotta nell'Esempio 1.3, una funzione è surgettiva se ogni elemento del codominio è raggiunto da almeno una freccia: nella Figura 1.6 la funzione a sinistra è surgettiva, quella a destra no.

Un'altra cosa che può accadere è che a due elementi diversi del dominio una funzione associ la stessa immagine; le funzioni per cui questo non è vero hanno un nome.

Definizione 1.6

Se la funzione $f: A \rightarrow B$ associa elementi diversi del codominio a elementi diversi del dominio – cioè se $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$ – diremo che la funzione f è *iniettiva*.

In termini della solita rappresentazione grafica, una funzione è iniettiva se su ogni elemento del codominio arriva al più una freccia (ma può anche non arrivarne alcuna): nella Figura 1.7 la funzione a sinistra è iniettiva e quella a destra no.

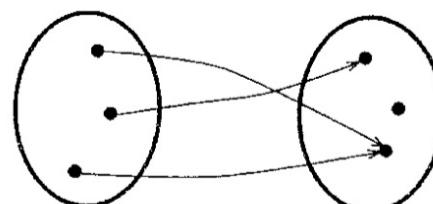
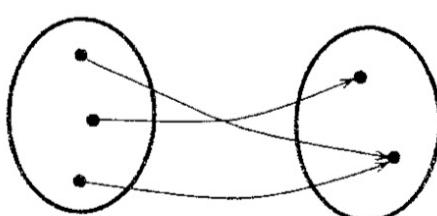


Figura 1.6 - Funzioni surgettive e non surgettive.

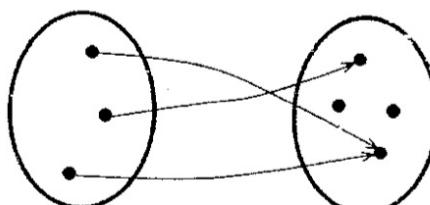
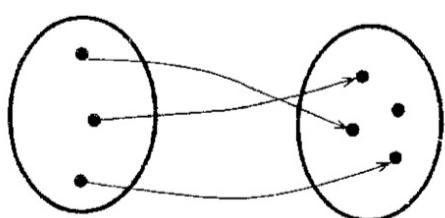


Figura 1.7 - Funzioni iniettive e non iniettive.



Figura 1.8 - Una funzione bigettiva e la sua inversa.

Definizione 1.7

Una funzione $f: A \rightarrow B$ sia iniettiva sia surgettiva verrà detta *bigettiva* (o *bijettiva*, o *biunivoca*). Una funzione bigettiva associa a ciascun elemento del codominio uno e un solo elemento del dominio⁽⁴⁾; se $b \in B$, esiste un unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Questo ci permette di definire una funzione da B ad A , la *funzione inversa* $f^{-1}: B \rightarrow A$, ponendo $f^{-1}(b) = a$, dove $a \in A$ è quell'unico elemento tale che $f(a) = b$. Le funzioni bigettive si dicono anche *invertibili*.

Usando di nuovo la rappresentazione grafica dell'Esempio 1.3, una funzione è bigettiva se su ogni elemento del codominio arriva esattamente una freccia, e in tal caso la funzione inversa si ottiene invertendo il senso delle frecce. Per intenderci, nessuna delle funzioni nelle Figure 1.6 e 1.7 era bigettiva, mentre la Figura 1.8 ce ne mostra una invertibile (a sinistra) assieme alla sua inversa (a destra).

Osservazione 1.2

Attenzione a non confondere i concetti di funzione inversa e di immagine inversa. La funzione inversa f^{-1} associa a ogni elemento del codominio di f un elemento del dominio di f , ed esiste soltanto quando la funzione f è bigettiva. L'immagine inversa, invece, associa a un sottoinsieme del codominio un sottoinsieme del dominio – per cui *non* è una funzione definita sul codominio – ed esiste sempre, anche quando la funzione f non è bigettiva.

Osservazione 1.3

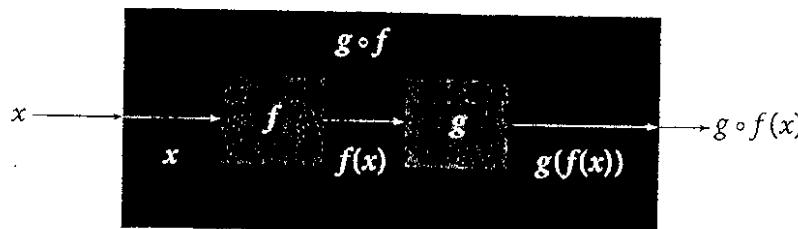
Attenzione anche a non confondere i concetti di funzione e di funzione iniettiva. Una funzione $f: A \rightarrow B$ associa sempre *a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B*; per una funzione iniettiva invece *ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A*, che è un concetto ben diverso. In una funzione qualunque, da ogni elemento del dominio *parte* esattamente una freccia; in una funzione iniettiva, su ogni elemento del codominio *arriva* al più una freccia. Tra parentesi, una funzione $f: A \rightarrow B$ è surgettiva se *ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A*, e bigettiva se *ogni elemento di B è immagine di uno e un solo elemento di A*.

Definizione 1.8

Supponiamo di avere due funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, dove il codominio di f coincide col dominio di g . In tal caso possiamo definire una nuova funzione, la *composizione* $g \circ f: A \rightarrow C$ delle funzioni f e g , tramite la formula

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)). \quad (1.2)$$

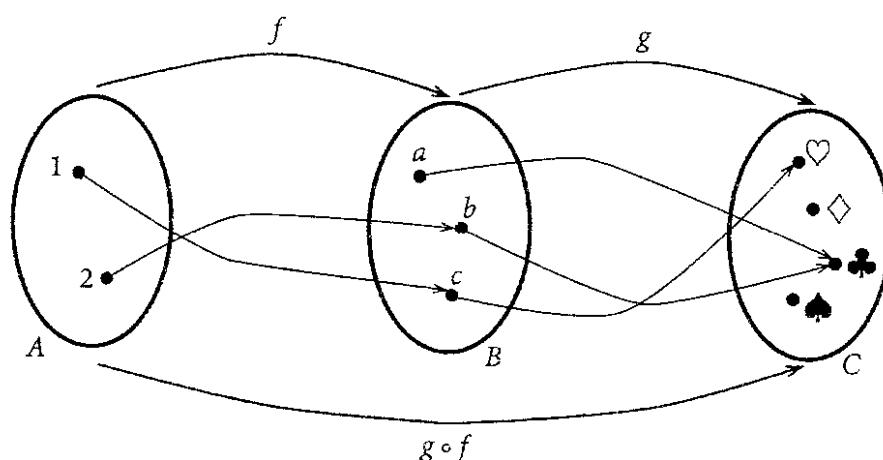
⁽⁴⁾ In un certo senso, questo vuol dire che il dominio e il codominio hanno lo stesso numero di elementi: in A ce ne sono tanti quanti in B .

**Figura 1.9** - Composizione di funzione come scatole nere.

La (1.2) definisce effettivamente una funzione: infatti f associa a ciascun $a \in A$ un unico elemento di B , e g associa a quest'ultimo un unico elemento di C , per cui $g \circ f$ è una legge che a ciascun elemento di A associa uno e un solo elemento di C (vedi la Figura 1.9).

Esempio 1.11

Dati i tre insiemi $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, definiamo le funzioni $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ con $f(1) = c$, $f(2) = b$, $g(a) = \clubsuit = g(b)$, e $g(c) = \heartsuit$. Allora la composizione di f e g è la funzione $g \circ f: A \rightarrow C$ definita da $(g \circ f)(1) = \heartsuit$ e $(g \circ f)(2) = \clubsuit$ (vedi la Figura 1.10). \square

**Figura 1.10** - Composizione di funzioni.**Esempio 1.12**

Siano $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni date da $f(n) = 2n + 3$ e da $g(x) = 2^x$. Allora la composizione di f e g è la funzione $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n + 3) = 2^{2n+3}.$$

Nota che l'immagine di $g \circ f$ è contenuta in \mathbb{N} , anche se l'immagine di g è ben più grande (è l'insieme di tutti i numeri reali positivi). \square

1.2 Logica elementare

Fare della matematica vuol dire giungere a determinate conclusioni tramite certi ragionamenti⁽⁵⁾. Capita dunque spesso di usare frasi come “implica”, “per ogni” o simili; per risparmiare tempo sono stati inventati dei simboli che le rappresentano. Invece di

⁽⁵⁾ Lo studio della struttura di questi ragionamenti è compito della logica matematica.

“implica” capiterà di scrivere “ \Rightarrow ”, mentre “è equivalente a” sarà talvolta sostituito da “ \Leftrightarrow ”. Può succedere che “tale che” sia sostituito da due punti “:” o da una barra verticale “|”. Invece di “per ogni” a volte scriveremo “ \forall ”, e al posto di “esiste” a volte scriveremo “ \exists ”. Un esempio per chiarire: se P è l’insieme dei numeri pari, e \mathbb{N} l’insieme dei numeri naturali, la frase “per ogni numero pari a esiste un numero naturale m tale che $a = 2m$ ” diventa

$$\forall a \in P \quad \exists m \in \mathbb{N} : a = 2m.$$

Capiterà talvolta anche di scrivere “ $\exists!$ ”, che significa “esiste unico”. Per esempio, se volessimo sottolineare che esiste un *unico* numero naturale m tale che $a = 2m$ potremmo scrivere

$$\forall a \in P \quad \exists! m \in \mathbb{N} : a = 2m.$$

Esempio 1.13

Proviamo a scrivere con questi simboli le definizioni di funzione e di funzione bigettiva. La legge $f: A \rightarrow B$ è una funzione se

$$\forall a \in A \quad \exists b \in B : b = f(a);$$

una funzione $f: A \rightarrow B$ è bigettiva se e solo se

$$\forall b \in B \quad \exists! a \in A : b = f(a).$$

□

Osservazione 1.4

Non si possono scambiare impunemente i simboli \forall ed \exists ; la formula

$$\forall a \in P \quad \exists m \in \mathbb{N} : a = 2m$$

significa una cosa ben diversa dalla formula

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall a \in P \quad a = 2m.$$

La prima formula vuol dire “per ogni numero pari a esiste un numero naturale m (che dipende da a) tale che $a = 2m$ ”, che è ovviamente vero. La seconda formula invece vuol dire che “esiste un numero naturale m (uno solo, ben determinato) tale che per ogni numero pari a si ha $a = 2m$ ”, ovvero ogni numero pari è il doppio del nostro m , lo stesso qualunque sia il numero pari considerato, affermazione chiaramente falsa.

Capiterà più volte in seguito di dover negare una frase che comincia con “per ogni” o con “esiste”. La negazione esatta di “per ogni a succede questo” è “non per ogni a succede questo”, ovvero “esiste un a per cui non succede questo”, che è ben diverso dal dire “per ogni a non succede questo”. Analogamente, la negazione esatta di “esiste un b per cui succede questo” è “non esiste un b per cui succede questo”, cioè “per ogni b non succede questo”.

Esempio 1.14

Vogliamo negare la frase “tutti i gatti sono verdi” (che è un modo più corretto grammaticalmente di dire “per ogni gatto succede che il gatto è verde”). Come abbiamo appena osservato, la negazione esatta è “non tutti i gatti sono verdi”, ovvero “esiste almeno un gatto che non è verde”. La frase “nessun gatto è verde” (cioè “non esiste un gatto verde”) pur essendo vera *non* è la negazione del nostro enunciato originale “tutti i gatti sono verdi”; è un’affermazione molto più forte, e molto più difficile da verificare (per far vedere che

“tutti i gatti sono verdi” è falsa basta trovare *un solo* gatto non verde; per far vedere che “nessun gatto è verde” è vera devi controllare il colore di tutti i gatti sulla terra). □

Esempio 1.15

Qual è la negazione della frase “esiste vita sugli altri pianeti del sistema solare”? La risposta corretta è “non esiste vita sugli altri pianeti del sistema solare”, cioè “tutti gli altri pianeti del sistema solare sono privi di vita”. L'affermazione “esiste un pianeta del sistema solare privo di vita” non esclude che ci sia un altro pianeta ancora su cui esiste la vita, per cui non è la risposta corretta. □

Come forse già sai, una parte notevole della matematica consiste nel decidere se certe affermazioni sono vere o false. In alcuni casi, per stabilirlo basta un esempio; in altri, invece, anche diecimila esempi sono inutili, ed è necessario un ragionamento che copra in una volta sola tutti i casi possibili (in altre parole, è necessaria una *dimostrazione*). Un tipico problema dello studente novizio è esattamente capire quando è necessaria una dimostrazione, e quando invece è sufficiente un esempio. L'idea di fondo è che la dimostrazione è legata al “per ogni”, mentre l'esempio all’“esiste”. Per vedere se l'affermazione “per ogni a succede questo” è vera, devi *dimostrarlo* con un ragionamento valido per ogni valore di a . Invece, per vedere se l'affermazione “esiste un b per cui succede questo” è vera, ti basta trovare un singolo esempio (un singolo valore di b) per cui è vera.

Esempio 1.16

Supponiamo di voler vedere se l'affermazione “ogni *marine* americano possiede una divisa verde” è vera. In questo caso gli esempi sono inutili: anche dopo aver controllato gli indumenti di migliaia di *marine* non potremmo ancora escludere l'esistenza di un *marine* senza divise verdi. Ci serve un ragionamento generale; possiamo per esempio dire che il regolamento militare prescrive senza eccezioni che ogni *marine* abbia una divisa verde, e così *dimostrare* la verità della nostra affermazione senza bisogno di esempi. □

Esempio 1.17

Adesso vogliamo invece stabilire la verità dell'affermazione “talvolta piove di domenica”. In questo caso basta un esempio; è sufficiente una domenica di pioggia per verificare che l'affermazione è corretta. □

Riassumendo: quando ti viene chiesto di decidere se l'affermazione “per ogni a succede questo” è vera o falsa, hai due possibilità: se pensi sia vera, devi dimostrarlo per qualunque valore di a ; se invece pensi sia falsa (cioè che sia vero che “esiste un a per cui questo non succede”), ti basta trovare un esempio in cui è falsa. Analogamente, per far vedere che l'affermazione “esiste un b per cui succede questo” è vera basta trovare un esempio, cioè un b specifico per cui “questo” succede; se invece ritieni sia falsa, devi dimostrare che per ogni valore di b “questo” non accade.

Un'altra frase che compare spesso in matematica è “se succede A allora capita anche B ”, che si abbrevia⁽⁶⁾ in “ A implica B ” o addirittura in “ $A \Rightarrow B$ ”. È importante rendersi conto che una frase del genere non dice nulla su B quando A non si verifica. Un esempio per chiarire: anche se la frase “se le squadre di calcio schierano in campo quindici giocatori allora il Pontedera è in testa alla classifica del campionato di

⁽⁶⁾ Si dice anche che A è *condizione sufficiente* perché accada B , e che B è *condizione necessaria* perché succeda A .

serie A” fosse vera, non sapremmo nulla sulla effettiva posizione in classifica del Pontedera, in quanto le squadre di calcio schierano in campo 11 giocatori, non 15. In particolare, la frase “se succede A allora capita anche B ” è falsa se e solo se contemporaneamente A è vera e B è falsa (le squadre di calcio hanno 15 giocatori e il Pontedera non è in testa alla classifica di serie A). Dunque la negazione di “ A implica B ” è “ A non implica B ”, cioè “capita che A sia vera e B sia falsa”.

1.3 Numeri e operazioni

Per i nostri scopi alcuni insiemi sono più importanti di altri e si meritano un nome e un simbolo specifici. Prima di tutto abbiamo l’insieme \mathbb{N} dei *numeri naturali*:

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Poi troviamo l’insieme \mathbb{Z} dei *numeri interi* (o *numeri relativi*):

$$0, +1, -1, +2, -2, \dots$$

Subito dopo viene l’insieme \mathbb{Q} dei *numeri razionali*, ovvero le frazioni:

$$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$$

Come speriamo ricorderai, i numeri razionali corrispondono ai numeri decimali periodici. L’insieme di tutti i numeri decimali, periodici e no, è l’insieme dei *numeri reali*, e verrà indicato con \mathbb{R} . Non ci interessa qui una definizione formalmente corretta dei numeri reali; è importante però che tu abbia ben presente due cose. Prima di tutto, numeri come π , e , $\sqrt{2}$ e simili sono tutti numeri reali. In secondo luogo, una volta fissata un’origine e un’unità di misura, i numeri reali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: a ogni numero reale corrisponde uno e un sol punto della retta, e viceversa.

Ognuno di questi insiemi numerici è un’estensione del precedente (nel senso che lo contiene come sottoinsieme proprio); per l’esattezza, si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Più avanti (nel Capitolo 4) incontreremo i *numeri complessi*, un altro insieme numerico (che verrà indicato con \mathbb{C}) contenente propriamente i numeri reali. Infine, l’insieme dei numeri naturali (rispettivamente dei numeri interi, razionali, reali) non nulli verrà indicato con \mathbb{N}^* (rispettivamente \mathbb{Z}^* , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^*), e l’insieme dei numeri razionali (rispettivamente dei numeri reali) positivi con \mathbb{Q}^+ (rispettivamente \mathbb{R}^+).

Se a e b sono due numeri reali, sappiamo stabilire qual è il più grande e qual è il più piccolo. Scriveremo $a \leq b$ (oppure $b \geq a$) se a è minore o uguale a b (se b è maggiore o uguale ad a), che è vero anche in caso sia $a = b$. Se invece vogliamo dire che a è strettamente minore di b (ovvero che b è strettamente maggiore di a) scriveremo $a < b$ (rispettivamente, $b > a$). Infine, indicheremo con $\max\{a, b\}$ il *massimo* (cioè il più grande) fra a e b , e con $\min\{a, b\}$ il *minimo* (cioè il più piccolo) fra a e b .

In tutti i nostri insiemi numerici sono definite due operazioni, la somma (+) e il prodotto (\cdot), che godono di alcune delle seguenti proprietà:

(1) *proprietà associativa della somma*:

$$\forall a, b, c \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

(2) *esistenza dell’elemento neutro per la somma*:

$$\exists a_0: \forall a \quad a + a_0 = a_0 + a = a$$

e di solito si scrive 0 al posto di a_0 per indicare l’elemento neutro;

12 Capitolo 1 – Nozioni preliminari

(3) esistenza dell'opposto:

$$\forall a \exists a': a + a' = a' + a = a_0$$

e di solito si scrive $-a$ invece di a' per indicare l'opposto;

(4) proprietà commutativa della somma;

$$\forall a, b \quad a + b = b + a$$

(5) proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto:

$$\forall a, b, c \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

(6) proprietà associativa del prodotto:

$$\forall a, b, c \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(7) esistenza dell'elemento neutro per il prodotto:

$$\exists a_1: \forall a \quad a \cdot a_1 = a_1 \cdot a = a$$

e di solito si scrive 1 al posto di a_1 per indicare l'elemento neutro;

(8) esistenza dell'inverso:

$$\forall a \neq a_0 \exists \tilde{a}: a \cdot \tilde{a} = \tilde{a} \cdot a = a_1$$

e di solito si scrive a^{-1} invece di \tilde{a} per indicare l'inverso;

(9) proprietà commutativa del prodotto:

$$\forall a, b \quad a \cdot b = b \cdot a$$

A queste proprietà sono associate alcune definizioni.

Definizione 1.9

Un *gruppo* è un insieme G in cui è data un'operazione (che può essere indicata con il segno $+$ o con il segno \cdot o anche con simboli più esoterici come \star o \circ) che soddisfa le proprietà (1)-(3); se vale anche la (4), G è detto *gruppo commutativo*. Invece, un è un insieme \mathbb{K} dotato di due operazioni (di solito indicate con i simboli $+$ e \cdot) per cui valgono tutte le proprietà (1)-(9).

Gli insiemi \mathbb{Z} con la somma o \mathbb{R}^* col prodotto (ma non \mathbb{R} col prodotto, o \mathbb{N} con la somma; perché?) sono gruppi commutativi. Vedremo più avanti un esempio naturale di gruppo non commutativo (l'insieme delle matrici quadrate invertibili col prodotto righe per colonne). Inoltre, \mathbb{Z} non è un campo, mentre \mathbb{Q} e \mathbb{R} (e, quando lo incontrerai, anche \mathbb{C}) lo sono.

Osservazione 1.5

Se \mathbb{K} è un campo, possiamo considerare l'insieme $\mathbb{K}[t]$ dei *polinomi a coefficienti in \mathbb{K}* (e in una variabile). La definizione è la stessa di quella per i polinomi a coefficienti reali vista nell'Esempio 1.8; infatti per farla funzionare ci basta saper effettuare somme e moltiplicazioni – cioè ci basta essere in un campo qualunque. In questo libro ci serviranno in maniera particolare i polinomi a coefficienti reali e i polinomi a coefficienti complessi; ma anche i polinomi a coefficienti razionali hanno una teoria ricca e interessante.

1.4 Prerequisiti

Molti degli argomenti che hai studiato alle scuole superiori sono utili anche per la comprensione di questo libro, e devi averli ben presenti. Questo paragrafo contiene l'elenco di tutto ciò che è necessario tu sappia prima di proseguire con la lettura.

Algebra

Prima di tutto devi conoscere e saper utilizzare i numeri: naturali, interi, razionali e reali. Quindi nessuna esitazione è ammessa nel fare i conti con le frazioni, e nel saper riconoscere un numero decimale⁽⁷⁾ periodico. Non è necessario che tu conosca una definizione formalmente corretta dei numeri reali, ma devi saperli identificare come numeri decimali (periodici e no), e ricordarti che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta. Conviene anche che tu abbia presente i concetti di: numero primo; divisione col resto fra numeri interi; massimo comune divisore e minimo comune multiplo di numeri interi, coi relativi metodi di calcolo (l'algoritmo di Euclide).

Sicuramente devi avere una buona dimestichezza col calcolo algebrico elementare (utilizzo di lettere per indicare costanti e variabili, operazioni con lettere e numeri, prodotti notevoli, operazioni con potenze anche non intere). In particolare, devi avere ben presenti le formule

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Devi saper sommare e moltiplicare polinomi, e devi conoscere un qualche metodo per effettuare la divisione con resto fra polinomi. Mi raccomando, tieni ben distinto il concetto di polinomio (che, come abbiamo visto nell'Esempio 1.8, è una funzione) da quello di equazione (che invece è un problema che si vuole risolvere; se ci pensi bene, trovare le soluzioni di un'equazione del tipo $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio, equivale a trovare l'immagine inversa di $\{0\}$ tramite la funzione p).

Devi saper risolvere le equazioni di primo grado e di secondo grado. Una certa dimestichezza con i sistemi lineari potrà essere utile ma non è strettamente necessaria: verranno trattati ampiamente in questo libro. Ti deve essere chiaro che le proporzioni sono soltanto un modo diverso per scrivere le frazioni, e si risolvono come equazioni di primo grado (o secondo grado, se l'obiettivo è trovare il medio proporzionale fra due numeri). La formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ è

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ è detta *discriminante* dell'equazione. Se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni (chiamate anche *radici*) distinte; se $\Delta = 0$ l'equazione ha un'unica soluzione (talvolta si dice che ha due soluzioni coincidenti, o che ha "una soluzione di molteplicità due"); se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali.

Geometria euclidea

La cosa principale che devi aver assorbito dalla geometria euclidea è l'abitudine a ragionare in termini di assiomi, teoremi, dimostrazioni, ipotesi e tesi. Ci serviranno anche alcuni concetti generali e alcuni teoremi specifici della geometria del piano. Come concetti:

⁽⁷⁾ In questo libro utilizzeremo il punto decimale, e non la virgola decimale. Per esempio, $1/2$ sarà scritto come 0.5 e non come 0,5.

parallelismo e perpendicolarità fra rette e fra segmenti; definizione di triangoli isosceli, equilateri, rettangoli, e di parallelogrammi, rettangoli e quadrati; congruenza di figure (possibilmente collegata ai concetti di moto rigido, rotazione, traslazione e simmetria rispetto a punti e a rette); similitudine fra figure (possibilmente collegata al concetto di omotetia); angoli, lunghezze e aree (comprese le formule per il calcolo dell'area di triangoli, rettangoli e parallelogrammi); proporzionalità fra grandezze; segmenti orientati e vettori (rappresentanti grandezze dotate di lunghezza, direzione e verso).

Inoltre, devi conoscere i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi seguenti.

Teorema 1.1

La somma degli angoli interni di un triangolo è 180° .

Teorema 1.2 (Pitagora)

L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Teorema 1.3 (Talete)

Tre rette parallele tagliano rispettivamente su due rette trasversali coppie di segmenti di lunghezza proporzionale.

Teorema 1.4

Un quadrilatero è un parallelogramma se e soltanto se ha due lati opposti paralleli e congruenti.

Utilizzeremo invece molto poco della geometria euclidea dello spazio. Alcuni concetti (parallelismo, congruenza, moti rigidi) sono identici a quelli visti nel piano; sarà utile avere un'idea della forma dei parallelepipedi e delle sfere, e in un caso potrà essere d'aiuto conoscere come si calcola il volume di un parallelepipedo.

Geometria analitica

Di nuovo, la cosa fondamentale è una certa dimestichezza con i concetti di base: assi cartesiani, coordinate cartesiane (ovvero come identificare ciascun punto del piano con una coppia ordinata di numeri reali, e ciascun punto dello spazio con una terna ordinata di numeri reali), grafici di funzioni (alla funzione f a valori reali viene associato il sottoinsieme del piano composto dai punti di coordinate $(x, f(x))$, dove x varia nel dominio della funzione f).

È necessario sapere che il grafico di polinomi di primo grado (cioè di funzioni della forma $f(x) = ax + b$, che forse sei più abituato a scrivere come $y = ax + b$) è sempre una retta, e viceversa che ogni retta (tranne quelle parallele all'asse delle ordinate) è il grafico di un polinomio di primo grado. Può essere utile saper scrivere l'equazione della retta passante per due punti dati, e del segmento che li collega. Devi essere in grado di calcolare, usando le coordinate cartesiane, la distanza (euclidea) fra due punti nel piano e nello spazio.

Devi sapere quale relazione c'è fra il risolvere un'equazione della forma $f(x) = 0$ e l'intersezione fra il grafico di f e l'asse delle ascisse. Devi sapere che l'insieme delle soluzioni di equazioni del tipo $f(x, y) = 0$ è un sottoinsieme del piano cartesiano; in particolare, devi ricordarti che le rette del piano sono soluzione di equazioni del tipo $ax + by + c = 0$. Sarebbe utile sapere che i piani dello spazio si possono rappresentare come soluzione di equazioni del tipo $ax + by + cz + d = 0$. Devi saper tracciare il grafico di polinomi di secondo grado, e saper riconoscere una parabola. Sarebbe anche utile conoscere l'equazione di iperboli ed ellissi.

Trigonometria

Devi conoscere le formule per la lunghezza di una circonferenza e per l'area del cerchio; devi essere abituato a considerare π un numero (reale, irrazionale, decimale non periodico) come tutti gli altri, ricordandoti che π non è uguale a 3.14, ma è *circa* 3.14. Un *radiane* è quell'angolo che in una circonferenza di raggio unitario sottende un arco di lunghezza unitaria. Quindi per misurare l'ampiezza in radienti di un angolo basta misurare la lunghezza dell'arco sotteso: un angolo giro corrisponde a 2π radienti, un angolo piatto a π radienti, un angolo retto a $\pi/2$ radienti e così via. In questo libro misureremo gli angoli quasi esclusivamente in radienti, e quasi mai in gradi. Devi conoscere definizioni e grafici delle funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e delle loro inverse (arcoseno, arcocoseno e arcotangente). Per il resto è sufficiente che ricordi la formula fondamentale⁽⁸⁾

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

le formule di periodicità

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + \pi/2) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,\end{aligned}$$

e le formule di addizione

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Da queste si ricavano tutte le altre formule trigonometriche, ricordandosi ovviamente che $\tan x = \sin x / \cos x$.

Analisi matematica

I prerequisiti sono minimi: sapere cosa vuol dire a^x quando a è un numero reale positivo e x un numero reale qualunque, e conoscere definizione e grafico delle funzioni esponenziale e logaritmo. Utilizzeremo soltanto i logaritmi naturali (indicati con "log"), cioè quelli in base e , dove e è il numero di Nepero che vale circa 2.71.

Per capire meglio alcuni esempi potrà essere utile saper calcolare la derivata di un polinomio, e sapere che la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate (ma la derivata del prodotto non è uguale al prodotto delle derivate). Infine, nei Complementi al Capitolo 4 per dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra avremo bisogno di sapere che i polinomi sono funzioni continue, che le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato ammettono sempre massimo e minimo, e che una successione limitata di numeri reali ammette sempre una sottosuccessione convergente (Teorema di Weierstrass). Se non li conoscevi già, questi risultati ti saranno certamente illustrati nei corsi di Analisi matematica.

⁽⁸⁾ In questo libro la funzione seno sarà indicata con "sin", e non con "sen".

Esercizi

1

1.1 Consideriamo gli insiemi $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{3, 6, 7\}$. Quali sono gli elementi di $A \cap B$? E di $A \cup C$? E di $B \setminus C$? E di $C \setminus B$? E di $A \times C$? E di $(A \cup B) \cap C$?

1.2 Se A è l'insieme dei numeri naturali minori di 10, e B è l'insieme dei numeri naturali dispari, determina $A \cap B$, $A \setminus B$, $\mathbb{N} \setminus B$ e $\mathbb{N} \setminus (A \cap B)$.

1.3 Se $A = \{1, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, determina $A \times B$ e $B \times A$.

1.4 Dimostra che le operazioni di intersezione e unione fra insiemi sono associative e commutative.

1.5 Dimostra che

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \\ A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$

quali che siano gli insiemi A , B e C .

1.6 In un campione di 300 studenti universitari è emerso che tutti conoscono almeno una lingua straniera fra inglese, francese e tedesco, che 225 conoscono l'inglese, 80 il francese, e 33 sia l'inglese sia il francese. Inoltre, 40 studenti conoscono il tedesco, e nessuno di questi conosce il francese. Quanti studenti del campione conoscono sia l'inglese sia il tedesco?

1.7 Siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$ tre funzioni, con dominio e codominio scelti in modo da poter considerare le composizioni $g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$, $h \circ g$ e $(h \circ g) \circ f$. Dimostra che $h \circ (g \circ f): A \rightarrow D$ e $(h \circ g) \circ f: A \rightarrow D$ sono la stessa funzione (si dice che *la composizione è associativa*).

1.8 Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B' \rightarrow C$ due funzioni tali che l'immagine $\text{Im } f$ di f sia contenuta nel dominio B' di g . Convinciti che la formula (1.2) definisce ancora una funzione $g \circ f: A \rightarrow C$.

1.9 Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione bigettiva, e $f^{-1}: B \rightarrow A$ la sua inversa, dimostra che $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$, dove id_A e id_B sono le funzioni identità di A e B , definite come nell'Esempio 1.1.

1.10 Dimostra che una funzione $f: A \rightarrow B$ è bigettiva se e solo se esistono due funzioni $g_1, g_2: B \rightarrow A$ tali che $f \circ g_1 = \text{id}_B$ e $g_2 \circ f = \text{id}_A$, e in tal caso $g_1 = g_2$.

1.11 Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, e $A_1, A_2 \subseteq A$ due sottoinsiemi di A . Dimostra che si ha $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ ma che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Trova un esempio in cui $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

- 1.12** Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione *iniettiva*, e $A_1, A_2 \subseteq A$ due sottoinsiemi di A . Dimostra che $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
- 1.13** Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, e $A_1, A_2 \subseteq A$ due sottoinsiemi di A . Dimostra che $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$. Trova un esempio in cui $f(A_1) \setminus f(A_2) \neq f(A_1 \setminus A_2)$.
- 1.14** Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, e $B_1, B_2 \subseteq B$ due sottoinsiemi di B . Dimostra che $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ e anche che $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
- 1.15** Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, e $A_1 \subseteq A$ un sottoinsieme qualsiasi di A . Dimostra che $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$, e trova un esempio in cui non vale l'uguaglianza.
- 1.16** Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, e $B_1 \subseteq B$ un sottoinsieme qualsiasi di B . Dimostra che $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$, e trova un esempio in cui non vale l'uguaglianza.
- 1.17** Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio di secondo grado, $p(t) = at^2 + bt + c$. Per quali valori di a , b e c il polinomio è iniettivo? E per quali valori è surgettivo?
- 1.18** Quali delle seguenti funzioni non sono iniettive, e perché?
- a) $f_1(x) = 3x + 2$;
 - b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2} + x^4$;
 - c) $f_3(x) = x^3 - 2$;
 - d) $f_4(x) = \sqrt[5]{x}$;
 - e) $f_5(x) = 6x^2 - 3$.
- 1.19** a) È vero che per ogni funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che $x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) < f(x_2)$? Se è vero spiega perché, se è falso trova un controesempio.
b) Trova una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- 1.20** Per le seguenti coppie di funzioni f e g reali di variabile reale, scrivi l'espressione di $f \circ g$ e di $g \circ f$, e determinane il dominio.
- a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ e $g(x) = 4x^3 - 3$;
 - b) $f(x) = x^3 - 4$ e $g(x) = x^2 - x + 2$;
 - c) $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 3x^3 - 3x$;
 - d) $f(x) = 1/x$ e $g(x) = x^2$;
 - e) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ e $g(x) = x - 3$;
 - f) $f(x) = x^{-2}$ e $g(x) = x^2 + 2$;
 - g) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x/(x - 1)$.
- 1.21** Indichiamo con $P(x)$ la proprietà “ $x + 2 > 10$ ”.
- a) È vero o falso che $\forall x \in \mathbb{N} P(x)$?
 - b) È vero o falso che $\exists x \in \mathbb{N} P(x)$?
 - c) Determina (se possibile) un'insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ per cui l'affermazione “ $\forall x \in A P(x)$ ” risulti vera.
 - d) Determina (se possibile) un'insieme $B \subseteq \mathbb{N}$ per cui l'affermazione “ $\exists x \in B : P(x)$ ” risulti vera.
- 1.22** Scrivi la negazione della frase “Tutti i giovani amano le canzoni dei Beatles”.

- 1.23** Scrivi la negazione della frase “Alcuni bambini delle scuole materne credono a Babbo Natale”.
- 1.24** Scrivi la negazione della frase “Se domani piove allora dormo fino a tardi”.
- 1.25** Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni tali che $g \circ f$ sia iniettiva. Dimostra che f è iniettiva e trova un esempio in cui $g \circ f$ è iniettiva ma g non lo è.
- 1.26** Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni tali che $g \circ f$ sia surgettiva. Dimostra che g è surgettiva e trova un esempio in cui $g \circ f$ è surgettiva ma f non lo è.
- 1.27** Cosa devi fare per dimostrare che l'affermazione “In ogni giorno della settimana esiste un minuto in cui Leonardo dorme” è vera? E per dimostrare che l'affermazione “Esiste un giorno della settimana in cui Jacopo studia ogni minuto della giornata” è falsa? E per verificare se la frase “Se Niccolò si sveglia presto la mattina allora ha fame prima di mezzogiorno” è vera o falsa?
- 1.28** Posto $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è multiplo di } 6\}$, determina quali delle seguenti affermazioni sono vere.
- a) $x \in A \implies \forall h \in \mathbb{Z} \ x = 6h$; d) $x \in A \implies \exists h \in \mathbb{Z} : x = 12h$;
 b) $x \in A \implies \exists h \in \mathbb{Z} : x = 3h$; e) $\exists h \in \mathbb{Z} : x = 2h \implies x \in A$;
 c) $x \in A \implies \exists h \in \mathbb{Z} : x = 6h$; f) $\exists h \in \mathbb{Z} : x = 12h \implies x \in A$.
- Fra le implicazioni a)-f), ce n'è una che esprime il fatto che:
1. condizione necessaria affinché un numero sia multiplo di 6 è che sia multiplo di 3?
 2. condizione sufficiente affinché un numero sia multiplo di 6 è che sia multiplo di 12?
- 1.29** Se $p \in \mathbb{R}[t]$ è un polinomio, indicheremo con $\deg p$ il suo grado. Per convenzione diremo che il polinomio costante 0 ha grado $-\infty$. Dimostra che
- $$\deg(p_1 p_2) = (\deg p_1) + (\deg p_2) \quad \text{e} \quad \deg(p_1 + p_2) \leq \max\{\deg p_1, \deg p_2\}$$
- per ogni coppia di polinomi $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[t]$, dove s'intende che $n + (-\infty) = -\infty$ e $\max\{n, -\infty\} = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine, trova due polinomi p_1, p_2 tali che si abbia $\deg(p_1 + p_2) = -\infty < \max\{\deg p_1, \deg p_2\}$.
- 1.30** Di che proprietà (fra quelle elencate nel Paragrafo 1.3) godono le usuali somma e moltiplicazione dell'insieme $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti reali in una variabile?
- 1.31** Sia $n > 0$ un numero naturale e poniamo $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Se $a, b \in \mathbb{Z}_n$, definiamo $a \oplus b$ come il resto della divisione di $a + b$ per n . Dimostra che \mathbb{Z}_n con la “somma” \oplus è un gruppo commutativo. (Suggerimento: se $x \in \mathbb{N}$ indichiamo con $[x]$ il resto della divisione di x per n . Dimostra prima di tutto che $[x+y] = [x] \oplus [y]$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.)
- 1.32** Sia $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x = a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ l'insieme dei numeri reali della forma $a + b\sqrt{3}$, con $a, b \in \mathbb{Q}$. Dimostra che $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, con la somma e il prodotto usuali, è un campo.

Vettori geometrici

2

Sommario

2.1 Vettori applicati

2.2 Coordinate

2.3 Equazioni di rette e piani

Complementi Vettori liberi

Esercizi

In questo capitolo studieremo i vettori applicati nel piano e nello spazio con gli obiettivi di evidenziare gli aspetti che hanno portato allo sviluppo della teoria generale e di fornire esempi concreti che facilitino la comprensione degli argomenti più astratti. Come vedrai, l'idea di fondo è riprendere l'intuizione di Cartesio, ripresentandola in uno stile più consono alla matematica moderna: l'introduzione di un sistema di coordinate permette di sviluppare tecniche algebriche per risolvere efficacemente problemi geometrici (e, talvolta, viceversa).

2.1 Vettori applicati

Indichiamo con \mathcal{A}^1 (rispettivamente, \mathcal{A}^2 e \mathcal{A}^3) la retta euclidea (rispettivamente, il piano e lo spazio euclideo). Nel seguito parleremo principalmente del piano, ma tutto quanto detto si applicherà allo spazio, e sarà spesso banale per la retta. Come già accennato nel Paragrafo 1.3, fissando sulla retta \mathcal{A}^1 un punto O e un'unità di misura, cioè un segmento \overline{OA} , otteniamo un'applicazione bigettiva fra i punti della retta e i numeri reali; in un certo senso identifichiamo la retta \mathcal{A}^1 e l'insieme \mathbb{R} . Ciò introduce su \mathcal{A}^1 una somma e un prodotto che lo rendono un campo.

Vogliamo vedere se e quanto sia possibile ripetere questa costruzione nel caso del piano e dello spazio. Procediamo un passo per volta, e cominciamo col fissare un punto $O \in \mathcal{A}^2$ (oppure $O \in \mathcal{A}^3$). Adesso ogni punto del piano (o dello spazio) può venire considerato non soltanto per conto suo ma anche in relazione al punto fissato O ; e questo ci porta al concetto di vettore applicato.

Definizione 2.1

Un *vettore applicato* in O è un segmento orientato con primo estremo il punto $O \in \mathcal{A}^2$ (rispettivamente, $O \in \mathcal{A}^3$) e secondo estremo un altro punto $A \in \mathcal{A}^2$ (rispettivamente, $A \in \mathcal{A}^3$). Questo vettore sarà disegnato come una freccia che parte da O e giunge ad A , e indicato con \overrightarrow{OA} (Figura 2.1). L'insieme dei vettori applicati in O sarà indicato con \mathcal{V}_O^2 (o con \mathcal{V}_O^3 nello spazio); il punto O è l'*origine* di \mathcal{V}_O^2 (o di \mathcal{V}_O^3). Nota che possiamo definire una funzione bigettiva $\Phi_O: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{V}_O^2$ (e una analoga da \mathcal{A}^3 a \mathcal{V}_O^3) ponendo $\Phi_O(A) = \overrightarrow{OA}$ per ogni $A \in \mathcal{A}^2$; al punto A viene associato il vettore applicato in O che termina in A . In particolare, all'origine O si associa il vettore \overrightarrow{OO} , detto *vettore nullo*.

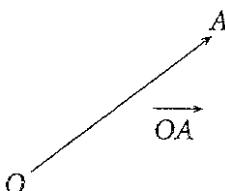


Figura 2.1 - Il vettore \overrightarrow{OA} .

Osservazione 2.1

A volte, fissata l'origine, identifieremo i punti del piano con i vettori applicati nell'origine: useremo cioè Φ_O senza dirlo esplicitamente.

In Fisica i vettori servono tra l'altro a indicare le forze che agiscono su un corpo. La regola che descrive il comportamento di un corpo sottoposto all'azione di più forze contemporaneamente è nota come *regola del parallelogramma* e ci suggerisce come introdurre una somma nel nostro insieme \mathcal{V}_O^2 .

Definizione 2.2

Presi due vettori applicati \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , la loro somma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è il vettore applicato \overrightarrow{OC} , dove C è il quarto vertice del parallelogramma individuato da O , A e B (Figura 2.2); il punto C pertanto è il secondo estremo del vettore applicato in B parallelo, congruente e con lo stesso verso di \overrightarrow{OA} . Quest'ultima caratterizzazione funziona bene per definire la somma anche quando O , A e B sono allineati (Figura 2.3).

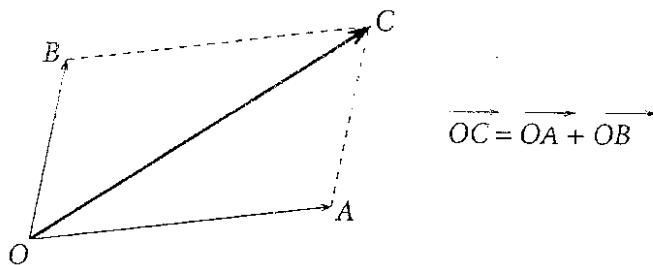


Figura 2.2 - La somma di due vettori non allineati.

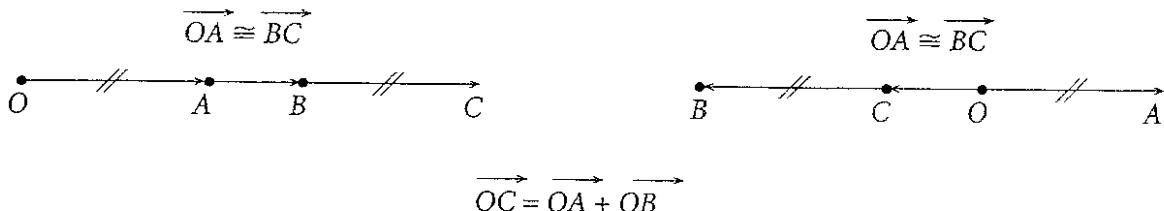


Figura 2.3 - La somma di due vettori allineati.

Per meritare il nome di “somma”, questa operazione dovrebbe godere almeno di alcune delle proprietà elencate nel capitolo precedente; e infatti

Proposizione 2.1

\mathcal{V}_O^2 con la somma descritta nella Definizione 2.2 è un gruppo commutativo.

Dimostrazione

Dobbiamo verificare le proprietà (1)-(4) del Paragrafo 1.3; cominciamo con quelle più semplici. L’elemento neutro è il vettore nullo: infatti, dalla definizione segue (controlla) che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA}$ per ogni $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O^2$. Anche l’opposto si trova facilmente: l’opposto del vettore \overrightarrow{OA} è proprio (esercizio) il vettore $\overrightarrow{OA'}$, dove A' è il simmetrico di A rispetto a O sulla retta passante per O e A (Figura 2.4).

La proprietà commutativa è pure di facile dimostrazione. Se O, A e B non sono allineati, allora $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ segue dal fatto che i punti O, A e B e i punti O, B e A identificano lo stesso parallelogramma. Se invece i tre punti in questione sono allineati, la commutatività segue dalle proprietà della congruenza fra segmenti orientati (esercizio). Rimane da dimostrare la proprietà associativa. Consideriamo allora tre vettori applicati $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ e $\overrightarrow{OA_3}$; supponiamo per il momento che fra i punti O, A_1, A_2 e A_3 non ce ne siano tre allineati (Figura 2.5). Poniamo $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$ e $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OA_3} = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OA_3}$.

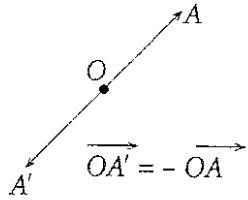


Figura 2.4 - L’opposto di un vettore.

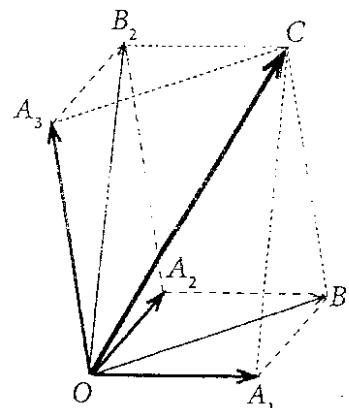


Figura 2.5 - La proprietà associativa.

Dobbiamo dimostrare che $\overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OC}$. Prima di tutto, siccome OB_1CA_3 è un parallelogramma, vediamo che il segmento $\overline{B_1C}$ è parallelo e congruente al segmento $\overline{OA_3}$. Ma anche $OA_3B_2A_2$ è un parallelogramma; quindi il segmento $\overline{OA_3}$ è parallelo e congruente al segmento $\overline{A_2B_2}$. Dunque $\overline{B_1C}$ è parallelo e congruente a $\overline{A_2B_2}$; ne segue (Teorema 1.4) che $A_2B_1CB_2$ (avendo i due lati opposti paralleli e congruenti) è un parallelogramma, per cui $\overline{B_2C}$ è parallelo e congruente ad $\overline{A_2B_1}$.

Ora notiamo che anche $OA_1B_1A_2$ è un parallelogramma, per cui $\overline{A_2B_1}$ è parallelo e congruente a $\overline{OA_1}$. Quindi $\overline{B_2C}$ e $\overline{OA_1}$ sono paralleli e congruenti; da questo si deduce subito (ancora grazie al Teorema 1.4) che OA_1CB_2 è un parallelogramma, ovvero che $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2}$, come volevamo dimostrare.

Rimane da controllare la proprietà associativa nel caso in cui tre dei punti O, A_1, A_2 e A_3 siano allineati; l'idea è praticamente la stessa, ed è un esercizio per te (Esercizio 2.1). \square

La somma non è l'unica operazione che possiamo fare con i vettori applicati; possiamo anche moltiplicarli per un numero reale.

Definizione 2.3

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O^2$, allora il *prodotto* di λ per \overrightarrow{OA} è il vettore $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA}$, dove C è il punto sulla retta passante per O e A tale che il rapporto fra la lunghezza del segmento \overline{OC} e quella del segmento \overline{OA} sia esattamente $|\lambda|$. Inoltre, C è sulla semiretta OA se λ è positivo, e sulla semiretta opposta se λ è negativo. In altre parole, $\lambda \overrightarrow{OA}$ ha la stessa direzione di \overrightarrow{OA} , lunghezza moltiplicata per $|\lambda|$ e verso uguale od opposto a seconda del segno di λ (Figura 2.6).

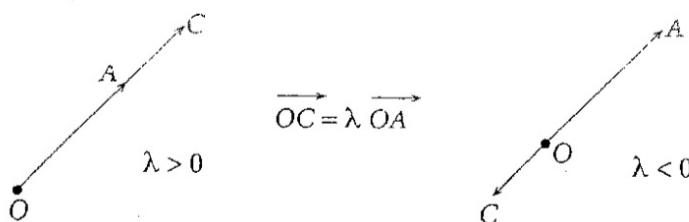


Figura 2.6 - Il prodotto di un vettore per un numero reale.

Chiaramente, $0 \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$, $(-2)\overrightarrow{OA} = (-\overrightarrow{OA}) + (-\overrightarrow{OA})$, $3\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}$ e così via, qualunque sia \overrightarrow{OA} . Le proprietà di questa operazione sono contenute nella seguente proposizione.

Proposizione 2.2

Siano λ e μ due numeri reali, e $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ due vettori applicati. Allora:

- (1) $\lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$;
- (2) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OA}$;
- (3) $(\lambda\mu)\overrightarrow{OA} = \lambda(\mu \overrightarrow{OA})$;
- (4) $1 \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$ e $0 \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$.

Dimostrazione

Di nuovo, le proprietà (2)–(4) sono ovvie (vero?); l'unica che richiede qualche parola è la (1). Se O, A e B sono allineati, è di nuovo tutto banale (verificalo); supponiamo quindi che non lo siano, e cominciamo col prendere $\lambda > 0$, per cui ci troviamo nella situazione rappresentata nella Figura 2.7.

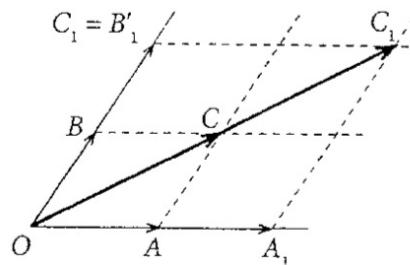


Figura 2.7 - La proprietà distributiva.

Poniamo $\overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = \lambda \overrightarrow{OB}$, e $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; dobbiamo provare che $\lambda \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Consideriamo le rette passanti per A e A_1 parallele al segmento \overline{OB} ; queste intersecano la retta passante per O e C rispettivamente nei punti C e C_1 . Per il Teorema di Talete (Teorema 1.3), il rapporto fra le lunghezze dei segmenti $\overline{OA_1}$ e \overline{OA} (che è per definizione λ) è uguale al rapporto fra le lunghezze dei segmenti $\overline{OC_1}$ e \overline{OC} ; quindi il vettore $\overrightarrow{OC_1}$ è proprio $\lambda \overrightarrow{OC}$.

Tracciamo ora le rette passanti per C e C_1 parallele al segmento \overline{OA} . La retta per C interseca la retta passante per O e B nel punto B , in quanto $OACB$ è un parallelogramma; la retta per C_1 invece interseca la retta passante per O e B in un punto che chiameremo B_1' . Sempre il Teorema di Talete ci dice che il rapporto fra le lunghezze dei segmenti $\overline{OC_1}$ e \overline{OC} (che abbiamo visto essere λ) è uguale al rapporto fra le lunghezze dei segmenti $\overline{OB_1'}$ e \overline{OB} ; quindi $\overrightarrow{OB_1'}$ è proprio $\lambda \overrightarrow{OB}$, cioè $B_1' = B_1$. Allora $OA_1C_1B_1$ è un parallelogramma e dunque $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1'}$. Il caso $\lambda < 0$ è analogo, e lo lasciamo come esercizio (Esercizio 2.2). \square

Come vedremo nel Paragrafo 4.1, il contenuto delle Proposizioni 2.1 e 2.2 si può riassumere dicendo che \mathcal{V}_O^2 è un esempio di spazio vettoriale su \mathbb{R} .

C'è anche un altro modo di considerare le operazioni appena introdotte. Fissato un vettore $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O^2$, tramite la somma con \overrightarrow{OA} possiamo definire un'applicazione $\tau_{\overrightarrow{OA}}: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}^2$ associando al punto $B \in \mathcal{A}^2$ il punto $C = \tau_{\overrightarrow{OA}}(B) \in \mathcal{A}^2$ tale che $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (vedi la Figura 2.8). In formule, $\tau_{\overrightarrow{OA}}(B) = \Phi_O^{-1}(\overrightarrow{OA} + \Phi_O(B))$. Guardando la Figura 2.8, ti renderai conto che $\tau_{\overrightarrow{OA}}$ non è altro che una traslazione: *la somma di un vettore corrisponde a una traslazione del piano*.

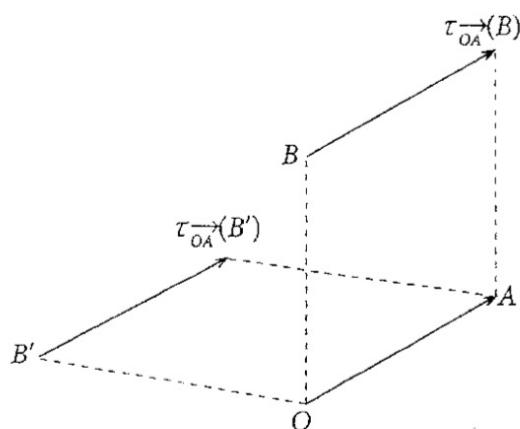


Figura 2.8 - La somma come traslazione del piano.

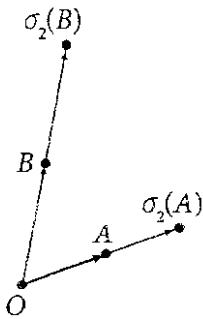


Figura 2.9 - Il prodotto per un numero reale come omotetia.

Interpretiamo in modo analogo il prodotto per uno scalare. Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo definire un'applicazione $\sigma_\lambda: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}^2$ associando al punto $A \in \mathcal{A}^2$ l'unico punto $B = \sigma_\lambda(A) \in \mathcal{A}^2$ tale che $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$ (vedi la Figura 2.9). In formule,

$$\sigma_\lambda(A) = \Phi_O^{-1}(\lambda \Phi_O(A)).$$

Questa volta σ_λ è una omotetia (o similitudine) di centro O e scala (o ragione) $|\lambda|$, seguita eventualmente da una simmetria rispetto a O se λ è negativo: *il prodotto per un numero reale corrisponde a una omotetia del piano*.

2.2 Coordinate

Prendiamo ora un singolo vettore $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1} \in \mathcal{V}_O^2$ e consideriamo la retta r_1 passante per O e A_1 . Tutti i vettori di questa retta (cioè, tutti i vettori applicati in O il cui secondo estremo appartiene alla retta) sono della forma $t\vec{i} = t\overrightarrow{OA_1}$ per un appropriato $t \in \mathbb{R}$, ovvero sono un *multiplo* di \vec{i} . In questo modo abbiamo definito una coordinata sulla retta r_1 : fissate un'origine O e un vettore unitario (il vettore \vec{i}) a ogni punto P della retta possiamo associare uno e un solo numero reale t tale che $\overrightarrow{OP} = t\vec{i}$; il numero reale t è la *coordinata* di \overrightarrow{OP} rispetto a \vec{i} .

Ora, ci troviamo sul piano; quindi non tutti i vettori di \mathcal{V}_O^2 stanno sulla retta r_1 . Prendiamone allora uno che non vi appartiene, $\vec{j} = \overrightarrow{OA_2}$. Tutti i vettori della retta r_2 per O e A_2 (o, come diremo, tutti i vettori *proporzionali* a \vec{j}) sono multipli di \vec{j} . In questo modo possiamo esprimere in termini di \vec{i} e \vec{j} tutti i vettori delle due rette r_1 ed r_2 . E gli altri vettori del piano? La risposta è contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 2.3

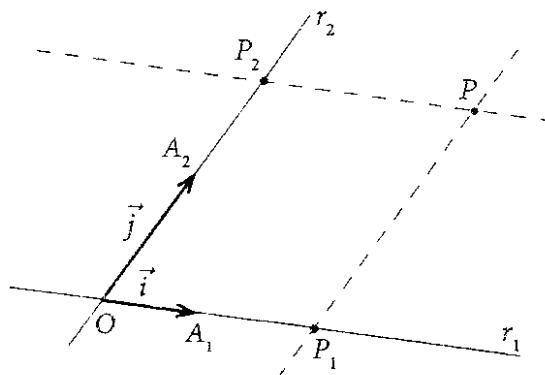
Siano $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OA_2}$ due vettori non proporzionali di \mathcal{V}_O^2 . Allora per ogni vettore $\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O^2$ esistono due numeri reali $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}. \quad (2.1)$$

Inoltre, x_1 e x_2 sono unici, nel senso che se x'_1 e x'_2 sono due altri numeri reali tali che $\overrightarrow{OP} = x'_1 \vec{i} + x'_2 \vec{j}$, allora $x'_1 = x_1$ e $x'_2 = x_2$.

Dimostrazione

Cominciamo con l'esistenza (vedi la Figura 2.10). Indichiamo con r_1 (rispettivamente, r_2) la retta passante per O e A_1 (rispettivamente, A_2). Tracciamo la parallela a r_2 passante per P ; questa interseca r_1 in un punto P_1 . Analogamente, tracciamo la parallela a r_1 passante per P ; interseca r_2 in un punto P_2 . Per costruzione, OP_1PP_2 è un parallelogramma; quindi $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$. D'altra parte, P_1 è sulla retta per O e A_1 ; quindi esiste un

Figura 2.10 - Coordinate in V_O^2 .

$x_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP_1} = x_1 \vec{i}$. Analogamente troviamo un $x_2 \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OP_2} = x_2 \vec{j}$, e l'esistenza è fatta.

Per l'unicità, da $x'_1 \vec{i} + x'_2 \vec{j} = \overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$, usando la Proposizione 2.2.(2), otteniamo $(x'_1 - x_1) \vec{i} = (x_2 - x'_2) \vec{j}$. Il vettore a primo membro è un multiplo di \vec{i} , per cui appartiene a r_1 . Il vettore a secondo membro, invece, appartiene a r_2 ; siccome sono uguali, devono stare nell'intersezione delle due rette, che è il solo vettore nullo \overrightarrow{OO} . Dunque dev'essere $(x'_1 - x_1) \vec{i} = \overrightarrow{OO} = (x_2 - x'_2) \vec{j}$, che può succedere se e solo se (Esercizio 2.4) si ha $x'_1 - x_1 = 0$ e $x_2 - x'_2 = 0$. \square

Dunque una volta scelti due vettori non proporzionali \vec{i} e \vec{j} di V_O^2 (o, come diremo, una volta fissata una base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ di V_O^2), a ogni vettore di V_O^2 possiamo associare in modo unico una coppia di numeri reali, le sue *coordinate* rispetto alla base B . Abbiamo quindi definito un'applicazione $F_B: V_O^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (dove $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali) che associa a ogni vettore \overrightarrow{OP} la coppia

$$F_B(\overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix},$$

dove x_1 e x_2 sono gli unici numeri reali che verificano (2.1). Nota che gli elementi di \mathbb{R}^2 verranno scritti per colonna, non per riga.

Esempio 2.1

Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di V_O^2 , e prendiamo il vettore $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$. Le coordinate di \overrightarrow{OC} sono, per definizione, 2 e -4; in altre parole abbiamo $F_B(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix}$. Sia $\overrightarrow{OD} = -\vec{i} + 4\vec{j}$; le sue coordinate sono $\begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$. Per trovare le coordinate di $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= (2\vec{i} - 4\vec{j}) + (-\vec{i} + 4\vec{j}) = (2\vec{i} - \vec{i}) + (-4\vec{j} + 4\vec{j}) \\ &= (2 - 1)\vec{i} + (-4 + 4)\vec{j} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i} \end{aligned}$$

(dove abbiamo usato le Proposizioni 2.1 e 2.2), per cui $F_B(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$. \square

Osservazione 2.2

La funzione F_B (o, se preferisci, le coordinate di un vettore) dipende dalla base scelta: cambiando base, le coordinate cambiano. Per esempio, siano $\vec{i}, \vec{j} \in V_O^2$ due vettori non proporzionali, e consideriamo $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ e $B' = \{2\vec{i}, \vec{j}\}$; siccome $2\vec{i}$ e \vec{j} continuano a es-

sere non proporzionali, sia \mathcal{B} sia \mathcal{B}' sono basi di \mathcal{V}_O^2 . Ora prendiamo il vettore $\overrightarrow{OP} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Le coordinate di \overrightarrow{OP} rispetto alla base \mathcal{B} sono chiaramente 4 e -3; invece, le sue coordinate rispetto alla base \mathcal{B}' sono 2 e -3 (perché?). Quindi

$$F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix} = F_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{OP}).$$

Sulla retta, a ogni numero reale corrispondeva uno e un solo punto; la funzione coordinata era bigettiva. La stessa cosa accade qui.

Proposizione 2.4

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Allora l'applicazione $F_{\mathcal{B}}: \mathcal{V}_O^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è bigettiva.

Dimostrazione

Prima di tutto, è surgettiva; infatti, dati due qualsiasi numeri reali $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ abbiamo $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = F_{\mathcal{B}}(x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}) \in \text{Im } F_{\mathcal{B}}$. È iniettiva; infatti $F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ})$ implica che $\overrightarrow{OP} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} = \overrightarrow{OQ}$, e ci siamo. \square

Dunque ci sono tanti vettori in \mathcal{V}_O^2 (e quindi – ricordi Φ_O ? – tanti punti in \mathcal{A}^2) quanti elementi in \mathbb{R}^2 ; come insieme, \mathbb{R}^2 ha la stessa struttura di \mathcal{V}_O^2 . Ora, in \mathcal{V}_O^2 abbiamo definito delle operazioni (grazie alle quali abbiamo potuto introdurre l'applicazione $F_{\mathcal{B}}$); è naturale quindi cercare di scoprire come $F_{\mathcal{B}}$ si comporta rispetto a queste operazioni. Cominciamo col prodotto per scalari.

Se $F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$, vuol dire che $\overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$; quindi $\lambda \overrightarrow{OP} = (\lambda x_1) \vec{i} + (\lambda x_2) \vec{j}$, per cui le coordinate di $\lambda \overrightarrow{OP}$ sono

$$F_{\mathcal{B}}(\lambda \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Vediamo invece la somma. Se $\overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ e $\overrightarrow{OQ} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j}$, allora (confronta con l'Esempio 2.1) abbiamo $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (x_1 + y_1) \vec{i} + (x_2 + y_2) \vec{j}$, per cui

$$F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

A questo punto viene (o dovrebbe venire) naturale un'idea: possiamo definire su \mathbb{R}^2 una somma e un prodotto per un numero reale ponendo

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{vmatrix}.$$

È ora immediato (anche per l'associatività!) verificare che queste operazioni soddisfano le proprietà elencate nelle Proposizioni 2.1 e 2.2, dove l'elemento neutro e l'opposto ora sono dati da

$$O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad - \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{vmatrix}.$$

Inoltre, le (2.2) e (2.3) divengono

$$F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) + F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ}), \quad F_{\mathcal{B}}(\lambda \overrightarrow{OP}) = \lambda F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}). \quad (2.4)$$

In altri termini, F_B trasforma le operazioni di \mathcal{V}_O^2 nelle operazioni di \mathbb{R}^2 , e viceversa. Siccome F_B è bigettiva, in un certo senso questo vuol dire che \mathcal{V}_O^2 ed \mathbb{R}^2 hanno la stessa struttura algebrica; diremo che sono *isomorfi*, e che F_B è un *isomorfismo*.

Riassumiamo cos'è successo. Siamo partiti dal piano euclideo \mathcal{A}^2 ; fissando un punto O , abbiamo trovato \mathcal{V}_O^2 , con la relativa struttura algebrica; scegliendo due vettori non proporzionali \vec{i} e \vec{j} siamo arrivati a \mathbb{R}^2 . Il tutto tramite applicazioni bigettive; quindi \mathbb{R}^2 è un *modello numerico* del piano euclideo \mathcal{A}^2 . Il vantaggio di questo procedimento è che lavorare e fare i conti in \mathbb{R}^2 è molto più facile che in \mathcal{A}^2 ; possiamo fare somme e moltiplicazioni con la calcolatrice invece di dover usare riga e compasso. Inoltre – e questo è un punto fondamentale – il modello *non è unico*: possiamo scegliere l'origine O e i vettori \vec{i} e \vec{j} in modo tale da adattarli al problema che stiamo affrontando. Viene quindi naturale introdurre la seguente definizione.

Definizione 2.4

L'insieme formato da un punto $O \in \mathcal{A}^2$ e da due vettori non proporzionali $\vec{i}, \vec{j} \in \mathcal{V}_O^2$ si chiama (*sistema di riferimento affine*) $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ del piano. Se $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OA_2}$ scriveremo anche $RA(O, A_1, A_2)$ invece di $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$. Infine, le *coordinate* di un punto $P \in \mathcal{A}^2$ rispetto a un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ sono le coordinate di \overrightarrow{OP} rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Nello spazio \mathcal{V}_O^3 , invece, due vettori non bastano; i vettori della forma $x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ sono tutti e soli quelli del piano per O, A_1 e A_2 – che chiameremo *piano generato* o *span* dei vettori \vec{i} e \vec{j} e che indicheremo con il simbolo

$$\text{Span}(\vec{i}, \vec{j}) = \{x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} \in \mathcal{V}_O^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Prendendo invece un terzo vettore $\vec{k} = \overrightarrow{OA_3}$ non appartenente al piano generato da \vec{i} e \vec{j} si dimostra in maniera analoga a prima (vedi la Figura 2.11) che qualunque vettore di \mathcal{V}_O^3 si scrive in modo unico come $\overrightarrow{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$.

Stavolta una *base* \mathcal{B} di \mathcal{V}_O^3 è composta da tre vettori $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ non complanari; le *coordinate* relative a una base sono una terna di numeri reali; e un *sistema di riferimento affine* verrà indicato con $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ o con $RA(O, A_1, A_2, A_3)$. Infine, in questo caso possiamo introdurre lo spazio \mathbb{R}^3 delle terne di numeri reali e costruire un isomorfismo $F_B: \mathcal{V}_O^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ esattamente come prima; i dettagli sono un esercizio (Esercizio 2.5).

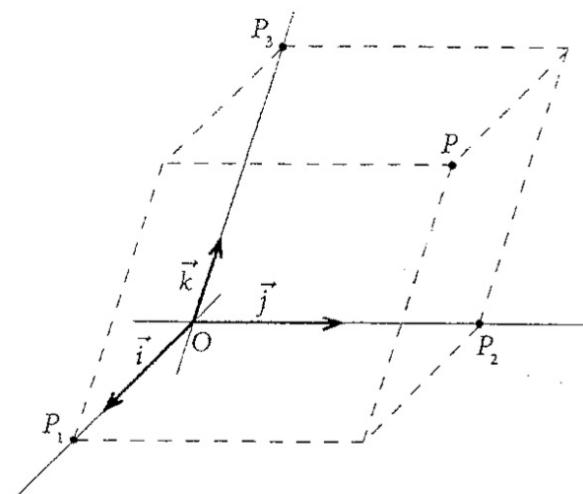


Figura 2.11 - Le coordinate nello spazio.

2.3 Equazioni di rette e piani

Gli elementi fondamentali della geometria del piano \mathcal{A}^2 sono i punti e le rette. Con quanto abbiamo visto finora, per descrivere una retta in \mathcal{A}^2 dobbiamo dare due dei suoi punti. Il che è meglio che elencarli tutti, ma può essere scomodo (per esempio, trovare l'intersezione di due rette in questi termini non è certo un'operazione semplice). In \mathcal{V}_O^2 possiamo invece fornire una procedura operativa per descrivere tutti i punti della retta a partire da due di essi. Se la retta r in questione passa per l'origine O , è tutto molto facile: preso un altro punto $Q \in r$, un punto P del piano appartiene alla retta r se e solo se $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OQ}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Se la retta r invece è qualunque, prendiamo un punto $P_0 \in r$, e sia r_0 la retta parallela a r passante per O (Figura 2.12). Allora un punto $P \in \mathcal{A}^2$ appartiene alla retta r se e solo se il segmento $\overline{P_0P}$ è parallelo alla retta r_0 , cioè se e solo se (perché?) il vettore $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$ appartiene a r_0 . Preso un punto $Q \in r_0$ diverso dall'origine, questo vuol dire che P appartiene a r se e solo se $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t \overrightarrow{OQ}$, cioè se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \overrightarrow{OQ} \quad (2.5)$$

(equazione vettoriale di una retta) per un qualche $t \in \mathbb{R}$. Il vettore \overrightarrow{OQ} è detto *vettore direttore* della retta; chiaramente non è unico, ma due vettori direttori di r sono sempre proporzionali (perché?).

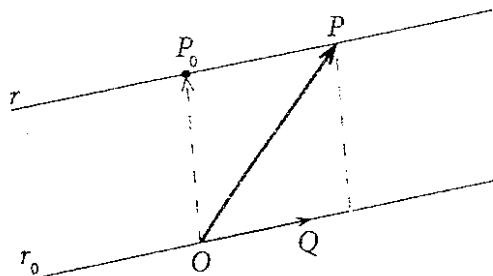


Figura 2.12 - Equazione vettoriale di una retta.

A questo punto è immediato scrivere l'equazione vettoriale della retta r passante per due punti P_1 e P_2 . Infatti, il vettore $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ è parallelo a r (perché?), per cui possiamo prenderlo come vettore direttore; quindi un punto P del piano appartiene alla retta per P_1 e P_2 se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}). \quad (2.6)$$

Osservazione 2.3

Dunque al variare di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione (2.5) – o, se preferisci, l'equazione (2.6) – descrive tutti i punti di una retta nel piano. Ma lo stesso ragionamento che ci ha portato a queste equazioni funziona pari pari nello spazio. Quindi (2.5) e (2.6) descrivono anche tutti i punti di una retta nello spazio; basta considerare ovunque vettori di \mathcal{V}_O^3 .

In maniera analoga possiamo ottenere l'equazione vettoriale di un piano π nello spazio \mathcal{V}_O^3 . Prendiamo un punto $P_0 \in \pi$, e sia π_0 il piano parallelo a π passante per l'origine. Scegliamo una base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ di π_0 ; allora un punto $P \in \mathcal{A}^3$ appartiene al piano π se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s\vec{i} + t\vec{j} \quad (2.7)$$

(equazione vettoriale del piano, vedi la Figura 2.13) per qualche $s, t \in \mathbb{R}$. I vettori \vec{i} e \vec{j} , che non sono per nulla univocamente determinati, si chiamano *vettori di giacitura* del piano π .

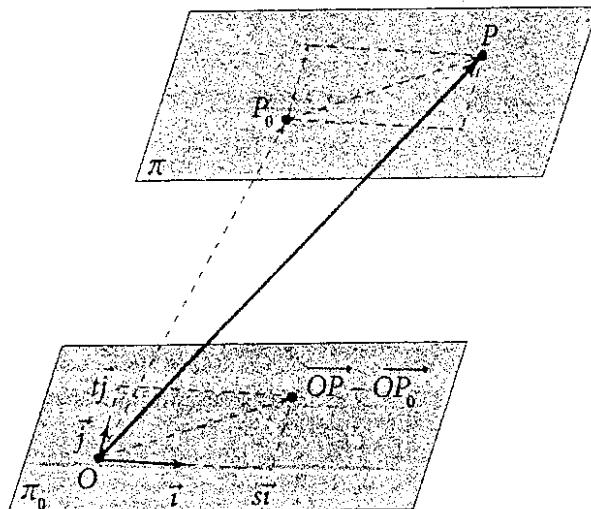


Figura 2.13 - Equazione vettoriale di un piano.

Osservazione 2.4

Il nome “equazione vettoriale” (e più oltre quello di “equazione parametrica”) è lievemente fuorviante. Qui non c’è nessuna incognita da trovare; i numeri s e t che appaiono in queste formule (detti *parametri*) possono assumere qualunque valore. Le formule (2.5)-(2.7) sono *funzioni*, non equazioni: per esempio, la (2.5) descrive la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}_O^2$ data da $f(t) = \overrightarrow{OP_0} + t \overrightarrow{OQ}$. Il senso di tali equazioni è che l’oggetto (la retta, il piano) viene descritto come l’*immagine della funzione* indicata: per esempio, la (2.5) ci dice che la retta cercata è $f(\mathbb{R})$.

Torniamo alle rette, e vediamo se l’equazione vettoriale ci aiuta a trovare l’intersezione di due rette. Sia r una retta passante per P_0 con vettore direttore \overrightarrow{OQ} , e r' una retta passante per P'_0 con vettore direttore \overrightarrow{OQ}' . Le due rette si intersecano nel punto X se e solo se esistono $t, t' \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{OP_0} + t \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP'_0} + t' \overrightarrow{OQ}'$, che può succedere se e solo se esistono $t, t' \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{OP'_0} - \overrightarrow{OP_0} = t \overrightarrow{OQ} - t' \overrightarrow{OQ}'. \quad (2.8)$$

In altri termini, abbiamo dimostrato che le rette r e r' si intersecano se e solo se il vettore $\overrightarrow{OP'_0} - \overrightarrow{OP_0}$ appartiene al piano generato dai vettori direttori \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OQ}' (vedi la Figura 2.14). Questo risultato vale sia nel piano \mathcal{V}_O^2 sia nello spazio \mathcal{V}_O^3 , in quanto segue dall’equazione vettoriale di una retta, che è la stessa in entrambi i casi.

Abbiamo quindi trovato un criterio che ci dice esattamente quando due rette si intersecano. Nel piano, se i due vettori direttori \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OQ}' non sono proporzionali (ovvero, se le rette non sono *parallele*) allora formano una base di \mathcal{V}_O^2 , per cui (ricordati la Proposizione 2.3) la condizione è sempre soddisfatta – e infatti due rette non parallele nel piano s’intersecano sempre. Nello spazio, invece, due vettori non bastano per generare tutto \mathcal{V}_O^3 – e infatti esistono le rette *sgembe*, che né sono parallele né si intersecano.

Rimane però ancora aperto il problema di trovare il punto d’intersezione di due rette. Per risolverlo, passiamo in \mathbb{R}^2 , ovvero fissiamo un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$. In esso, chiamiamo $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ le coordinate del punto P_0 , $\begin{vmatrix} l \\ m \end{vmatrix}$ le coordinate del punto Q , e $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ le coordinate del punto generico P – in altri termini scriviamo $\overrightarrow{OP_0} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$ e così via.

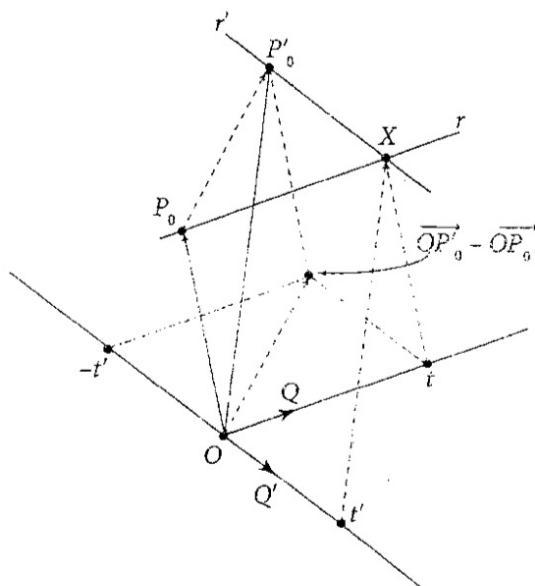


Figura 2.14 - Intersezione di due rette.

Ora applicando F_B all'equazione vettoriale (2.5) si ha

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} l \\ m \end{vmatrix},$$

cioè P appartiene alla retta se e solo se le sue coordinate sono date da

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \end{cases}$$

(equazioni parametriche di una retta nel piano) per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Nello spazio, dato il riferimento $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, applicando F_B a (2.5) si ha

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix},$$

cioè P appartiene alla retta se e solo se le sue coordinate sono date da

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases}$$

(equazioni parametriche di una retta nello spazio) per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente otteniamo le equazioni parametriche di un piano

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} l \\ m \\ n \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix},$$

cioè P appartiene al piano se e solo se le sue coordinate sono date da

$$\begin{cases} x = x_0 + sl + tl', \\ y = y_0 + sm + tm', \\ z = z_0 + sn + tn', \end{cases}$$

(equazioni parametriche di un piano nello spazio) per qualche $s, t \in \mathbb{R}$.

A questo punto possiamo affrontare il problema di come trovare l'intersezione di due rette. Per semplicità supporremo di essere nel piano, ma lo stesso metodo può essere applicato nello spazio. Prendiamo di nuovo una retta r passante per P_0 con vettore direttore \overrightarrow{OQ} , e una retta r' passante per P'_0 con vettore direttore $\overrightarrow{OQ'}$. Fissiamo un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ rispetto al quale P_0 abbia coordinate $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, P'_0 coordinate $\begin{vmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}$, Q coordinate $\begin{vmatrix} l \\ m \end{vmatrix}$ e Q' coordinate $\begin{vmatrix} l' \\ m' \end{vmatrix}$. Applicando F_B all'equazione si ha che le rette si intersecano se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} lt - l't' = x'_0 - x_0, \\ mt - m't' = y'_0 - y_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

nelle incognite t e t' ammette soluzione. Ma questo è un sistema che nei casi concreti possiamo risolvere anche a mano; e se (t_0, t'_0) è la soluzione del sistema, allora il punto d'intersezione X ha coordinate

$$\begin{vmatrix} x_0 + lt_0 \\ y_0 + mt_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_0 + l't'_0 \\ y'_0 + m't'_0 \end{vmatrix}$$

(perché?). In altri termini, il punto X è dato da

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + t_0 \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'_0} + t'_0 \overrightarrow{OQ'}$$

Esempio 2.2

Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ in \mathcal{A}^2 , vogliamo trovare il punto d'intersezione fra la retta r passante per il punto di coordinate $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ con vettore direttore $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ e la retta r' passante per $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ con vettore direttore $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Per quanto abbiamo visto dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2t - 0t' = 2 - 1, \\ 1t - 1t' = 0 - 1, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2t = 1, \\ t - t' = -1, \end{cases}$$

che ha ovviamente come unica soluzione $t = 1/2$ e $t' = 3/2$. Quindi le coordinate del punto d'intersezione X sono $\begin{vmatrix} 2 \\ 3/2 \end{vmatrix}$, per cui $\overrightarrow{OX} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$. ◻

Dunque il passare da \mathcal{A}^2 (o \mathcal{A}^3) a \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^3) tramite la scelta di un sistema di riferimento affine trasforma problemi geometrici in problemi relativi alla soluzione di sistemi lineari che nel prossimo capitolo inizieremo a studiare organicamente.

Complementi

2

2C.1 Vettori liberi

Finora abbiamo considerato vettori applicati in un punto fissato (l'origine). Ora, se prendiamo due vettori applicati in punti diversi ma paralleli, congruenti e con lo stesso verso, questi vettori hanno qualcosa in comune; in un certo senso, a parte il fatto di essere applicati in origini distinte, sono lo *stesso* vettore. Diremo che entrambi sono rappresentanti dello stesso vettore libero; ma per spiegare cosa ciò significa ci serve un breve inciso.

Definizione 2C.1

Sia A un insieme. Una *relazione* su A è un sottoinsieme \mathcal{R} di $A \times A$. Se la coppia (a_1, a_2) appartiene a \mathcal{R} , diremo che a_1 è *in relazione \mathcal{R}* con a_2 e scriveremo $a_1 \mathcal{R} a_2$. Una *relazione d'equivalenza* su un insieme A è una relazione su A , di solito indicata con \sim , che soddisfa le seguenti proprietà:

- (1) *riflessività*: $a \sim a$ per ogni $a \in A$;
- (2) *simmetria*: $a_1 \sim a_2$ implica $a_2 \sim a_1$ per ogni $a_1, a_2 \in A$;
- (3) *transitività*: $a_1 \sim a_2$ e $a_2 \sim a_3$ implicano $a_1 \sim a_3$ per ogni $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Esempio 2C.1

La relazione di parallelismo fra rette è una relazione d'equivalenza; la relazione di incidenza fra rette no (è riflessiva e simmetrica, ma non transitiva). □

Esempio 2C.2

Sia A l'insieme degli abitanti di Nuoro. Allora la relazione “essere parente di” è una relazione d'equivalenza. Invece la relazione “essere genitore di” non è una relazione d'equivalenza (non è né riflessiva, né simmetrica, né transitiva). □

Esempio 2C.3

La relazione “essere multiplo di” su \mathbb{N} è riflessiva e transitiva (controlla), ma non simmetrica. □

Quando si ha una relazione d'equivalenza, viene naturale mettere assieme tutti gli elementi equivalenti in un unico sottoinsieme.

Definizione 2C.2

Sia A un insieme su cui è data una relazione d'equivalenza \sim . Se $a \in A$, la *classe d'equivalenza* $[a] \subseteq A$ di a è il sottoinsieme di tutti gli elementi di A equivalenti ad a . Se

$b \in [a]$, diremo che b è un *rappresentante* di $[a]$. L'insieme di tutte le classi d'equivalenza si chiama *insieme quoziente* e viene indicato con A/\sim . L'applicazione $\pi: A \rightarrow A/\sim$ che a ogni elemento $a \in A$ associa la sua classe d'equivalenza $\pi(a) = [a]$ si chiama *applicazione quoziente*.

Le classi d'equivalenza dividono l'insieme A in sottoinsiemi a due a due disgiunti.

Proposizione 2C.1

Sia A un insieme su cui è data una relazione d'equivalenza \sim , e $a, b \in A$. Allora o $[a] = [b]$ (che accade se e solo se $a \sim b$), oppure $[a] \cap [b] = \emptyset$. In particolare, A è l'unione delle classi d'equivalenza, che sono a due a due disgiunte.

Dimostrazione

Prima di tutto notiamo che $a \in [a]$, grazie alla riflessività. La simmetria poi ci dice che se $b \in [a]$ (che accade se e solo se $b \sim a$) allora $a \in [b]$ (in quanto $a \sim b$). Inoltre, se $b \in [a]$ allora $[b] \subseteq [a]$: infatti, se $c \in [b]$ vuol dire che $c \sim b$ e, per la transitività, $c \sim a$. Analogamente segue che $[a] \subseteq [b]$, per cui $b \sim a$ implica $[b] = [a]$.

Supponiamo esista $c \in [a] \cap [b]$. Allora $c \sim a$ e $c \sim b$; la simmetria ci dice $b \sim c$, e la transitività $b \sim a$, per cui possiamo concludere che $[b] = [a]$. Quindi o $[a] \cap [b] = \emptyset$ oppure $[a] = [b]$, come desiderato. In particolare, le classi d'equivalenza sono a due a due disgiunte; siccome $a \in [a]$, l'unione di tutte le classi d'equivalenza contiene tutti gli elementi di A , e abbiamo finito. \square

Cosa c'entra tutto ciò con i vettori? Il fatto è che i vettori liberi possono essere definiti come classi d'equivalenza di vettori applicati.

Definizione 2C.3

Indichiamo con \tilde{V}^2 l'insieme di tutti i vettori applicati del piano, qualunque sia la loro origine. Diremo che due vettori applicati \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{O'A'}$ sono *equivalenti*, e scriveremo $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$, se sono paralleli, congruenti e hanno lo stesso verso. In altre parole, $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ se e solo se $OO'A'A$ è un parallelogramma (vedi la Figura 2.15), cioè se e solo se $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO'}$.

Verifichiamo che si tratta di una relazione d'equivalenza. Chiaramente, ogni vettore applicato è equivalente a se stesso, per cui \sim è riflessiva. Se $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$, allora $OO'A'A$ è un parallelogramma; dunque anche $O'OAA'$ è un parallelogramma e $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$. Infine, se $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ e $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{O''A''}$ (Figura 2.16), allora $OO'A'A$ e $O'O''A''A'$ sono parallelogrammi, per cui anche $OO''A''A$ lo è, e $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O''A''}$.

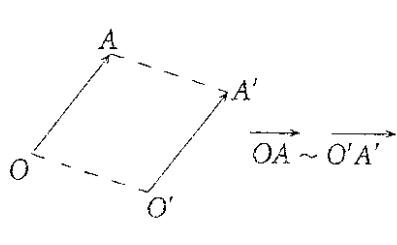


Figura 2.15 - Vettori applicati equivalenti.

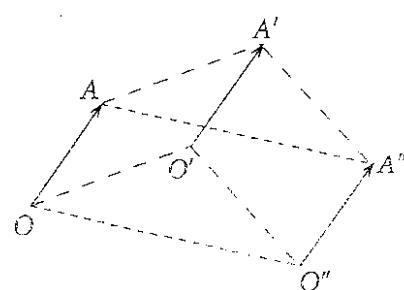


Figura 2.16 - La proprietà transitiva.

I vettori liberi sono le classi d'equivalenza rispetto a questa relazione.

Definizione 2C.4

Un vettore libero è una classe d'equivalenza per la relazione \sim su \mathcal{V}^2 . L'insieme quoziente \mathcal{V}^2/\sim di tutti i vettori liberi si indica con \mathcal{V}^2 .

Due vettori applicati sono equivalenti se e solo se hanno uguale lunghezza, direzione e verso, pertanto questa definizione esprime l'idea intuitiva di vettore libero.

Osservazione 2C.1

Se $v \in \mathcal{V}^2$ è un vettore libero e $O \in \mathcal{A}^2$ è un punto del piano, allora esiste un unico punto $A \in \mathcal{A}^2$ tale che $v = [\overrightarrow{OA}]$, cioè esiste un unico vettore applicato in O che rappresenta v . Infatti, se $\overrightarrow{O'B}$ è un qualunque rappresentante di v , allora esiste un unico punto A tale che $OO'BA$ sia un parallelogramma: A è dato da $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO'}$. Quindi ciascuna classe d'equivalenza interseca ciascun \mathcal{V}_O^2 in esattamente uno e un solo vettore applicato.

Anche sui vettori liberi possiamo definire le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, utilizzando in maniera appropriata dei rappresentanti.

Definizione 2C.5

Siano $v, w \in \mathcal{V}^2$ due vettori liberi, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Scegliamo un punto $O \in \mathcal{A}^2$, e sia \overrightarrow{OA} (rispettivamente, \overrightarrow{OB}) l'unico (vedi l'Osservazione 2C.1) rappresentante di v (rispettivamente, w) applicato in O . Definiamo la *somma* dei vettori liberi v e w ponendo $v + w = [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}]$, e il *prodotto per scalari* ponendo $\lambda v = [\lambda \overrightarrow{OA}]$.

In questa definizione compare un punto arbitrario O ; dobbiamo verificare che cambiando punto la classe d'equivalenza ottenuta non cambia. Cominciamo con la somma. Prendiamo quattro vettori applicati $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \mathcal{V}_O^2$ e $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'} \in \mathcal{V}_{O'}^2$, e poniamo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$. Supponiamo (Figura 2.17) che $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ e $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$; dobbiamo dimostrare che $\overrightarrow{OC} \sim \overrightarrow{O'C'}$. Per ipotesi, $OO'B'B$ è un parallelogramma; quindi $\overrightarrow{OO'}$ è parallelo e congruente a $\overrightarrow{BB'}$. Poi, \overrightarrow{BC} è parallelo e congruente a \overrightarrow{OA} , che a sua volta è parallelo e congruente a $\overrightarrow{O'A'}$, che a sua volta è parallelo e congruente a $\overrightarrow{B'C'}$; quindi $BB'C'C$ è un parallelogramma, per cui $\overrightarrow{BB'}$ è parallelo e congruente a $\overrightarrow{CC'}$. In conclusione $\overrightarrow{OO'}$ è parallelo e congruente a $\overrightarrow{CC'}$, per cui $OO'C'C$ è un parallelogramma, e $\overrightarrow{OC} \sim \overrightarrow{O'C'}$.

Il caso del prodotto è più semplice. Prendiamo due vettori applicati equivalenti \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{O'A'}$, e poniamo $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{O'B'} = \lambda \overrightarrow{O'A'}$; dobbiamo dimostrare che $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$. Grazie alla definizione di prodotto per scalari, \overrightarrow{OB} e $\overrightarrow{O'B'}$ hanno la

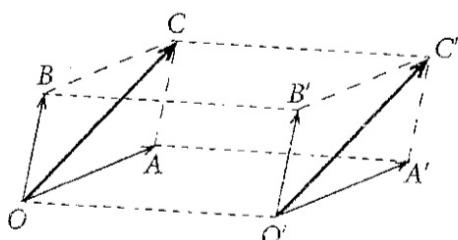


Figura 2.17 - La somma di vettori liberi.

stessa lunghezza (quella di \overrightarrow{OA} moltiplicata per $|\lambda|$), la stessa direzione (quella di \overrightarrow{OA}) e lo stesso verso (quello di \overrightarrow{OA} se $\lambda > 0$, quello opposto se $\lambda < 0$), per cui sono equivalenti.

Dunque abbiamo definito le operazioni di somma e prodotto per scalari anche sui vettori liberi. Potremmo dimostrare direttamente che queste operazioni hanno le solite proprietà, ma è più istruttivo procedere in modo lievemente diverso.

Fissiamo un punto $O \in \mathcal{A}^2$, e consideriamo l'applicazione $\pi: \mathcal{V}_O^2 \rightarrow \mathcal{V}^2$ che a ogni vettore applicato in O associa il vettore libero corrispondente (in altre parole, π è la restrizione a \mathcal{V}_O^2 dell'applicazione quoiente introdotta nella Definizione 2C.3). Prima di tutto, l'Osservazione 2C.1 ci assicura che π è bigettiva. Inoltre, noi abbiamo definito somma e prodotto per scalari in modo che

$$\pi(\overrightarrow{OA}) + \pi(\overrightarrow{OB}) = \pi(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad \text{e} \quad \lambda \pi(\overrightarrow{OA}) = \pi(\lambda \overrightarrow{OA})$$

per ogni $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \mathcal{V}_O^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi π è un'applicazione bigettiva che conserva le operazioni, proprio come l'applicazione $F_B: \mathcal{V}_O^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ introdotta nel Paragrafo 2.2. In particolare possiamo concludere che somma e prodotto per scalari in \mathcal{V}^2 hanno le stesse proprietà che avevano in \mathcal{V}_O^2 , senza bisogno di dimostrarlo nuovamente. Possiamo quindi parlare di basi e coordinate anche per i vettori liberi come per i vettori applicati. Nel Capitolo 4 riassumeremo tutto ciò dicendo che \mathcal{V}^2 è un altro esempio di spazio vettoriale.

Esercizi 2

2.1 Dimostra che $(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$ quando tre dei punti O, A_1, A_2, A_3 sono allineati.

2.2 Dimostra la Proposizione 2.2.(1) nel caso $\lambda < 0$.

2.3 Definisci la somma di vettori e il prodotto per scalari in \mathcal{V}_O^2 , e dimostra le Proposizioni 2.1 e 2.2 per vettori di \mathcal{V}_O^3 .

2.4 Siano $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O^2$ un vettore non nullo, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostra che $\lambda \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$ se e solo se $\lambda = 0$. (Suggerimento: moltiplica per λ^{-1} .)

2.5 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una terna di vettori non complanari in \mathcal{V}_O^3 . Seguendo la traccia di quanto fatto nel piano, definisci un'applicazione $F_{\mathcal{B}}: \mathcal{V}_O^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e una somma e un prodotto per scalari su \mathbb{R}^3 in modo che $F_{\mathcal{B}}$ risulti un'applicazione bigettiva tale che valga l'equivalente di (2.4) per tutti i vettori $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in \mathcal{V}_O^3$ e tutti i numeri reali $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.6 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Dimostra che $F_{\mathcal{B}}(\vec{i}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ e $F_{\mathcal{B}}(\vec{j}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

2.7 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{i} - 2\vec{j}$, trova le coordinate di

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OD_2} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

2.8 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} - \vec{j}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j}$, verifica che il vettore $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ è il vettore nullo e che $\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ è un multiplo di \vec{i} .

2.9 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 7\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ e $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - \vec{j}$, determina quali sono i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OC}$ è un multiplo di \vec{j} .

2.10 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 8\vec{i} + 7\vec{j}$ e $\overrightarrow{OC} = a\vec{i} + 9\vec{j}$, determina quali sono i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ è un multiplo di $\vec{i} - \vec{j}$.

2.11 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 e considera i vettori $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Verifica che \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} non sono proporzionali, e trova le coordinate di $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$.

2.12 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_O^2 e considera $\overrightarrow{OA_a} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Trova per quali valori di a i due vettori non sono proporzionali, e per quei valori calcola le coordinate di $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_a = \{\overrightarrow{OA_a}, \overrightarrow{OB}\}$.

2.13 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di \mathcal{V}_O^3 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, trova le coordinate dei vettori $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

2.14 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di \mathcal{V}_O^3 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, verifica che anch'essi formano una base di \mathcal{V}_O^3 .

2.15 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di \mathcal{V}_O^3 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, verifica che sono complanari.

2.16 Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di \mathcal{V}_O^3 . Dati i vettori $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ e $\overrightarrow{OC} = a\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ sono complanari.

2.17 Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, considera le rette r_0 e r_1 di equazioni parametriche

$$r_0 : \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t + 3, \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_1 : \begin{cases} x = t' + 4, \\ y = 2 - t', \\ z = t' + 3. \end{cases}$$

Dimostra che le due rette si intersecano, e trova il punto d'intersezione.

2.18 Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, considera le rette r_0 e r_1 di equazioni parametriche

$$r_0 : \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 2t + 1, \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_1 : \begin{cases} x = 1 - t', \\ y = 3 - t', \\ z = 3 - 2t'. \end{cases}$$

Dimostra che le due rette coincidono.

2.19 Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, considera i vettori $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e il piano $\pi = \text{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Verifica che la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - 2, \\ y = 3t - 1, \\ z = 2t + 1, \end{cases}$$

è contenuta in π .

2.20 Dimostra che l'equazione vettoriale del piano π passante per tre punti non allineati P_1, P_2 e P_3 è $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + s(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) + t(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1})$.

2.21 Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, consideriamo i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{j} + 3\vec{k}$. Sia $\pi = \text{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ il piano generato da questi due vettori. Dimostra che $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \in \pi$ mentre $\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \notin \pi$.

- 2.22** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, consideriamo i vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$. Sia $\pi = \text{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ il piano generato da questi due vettori. Trova per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) il piano π contiene la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 8 + 4t, \\ y = 10 + 5t, \\ z = 2a + at. \end{cases}$$

- 2.23** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano, sia r_a la retta di equazioni parametriche $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 \\ a \end{vmatrix}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Trova per quali valori di a (se ne esistono) si ha $O \in r_a$.

- 2.24** Dato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, trova l'equazione parametrica della retta r per $\begin{vmatrix} 1 \\ e \\ \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 \\ 3e \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \end{vmatrix}$. Verifica se $\begin{vmatrix} 3 \\ -e \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix} \in r$.

- 2.25** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano, considera le rette r_0 ed r_1 di equazioni parametriche

$$r_0 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + t, \end{cases} \quad \text{e} \quad r_1 : \begin{cases} x = -1 + t', \\ y = -1 + 2t'. \end{cases}$$

Dimostra che r_0 ed r_1 si intersecano, e trova il punto d'intersezione.

- 2.26** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano, sia r_1 la retta passante per $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, ed r_2 la retta per $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$. Dimostra che r_1 ed r_2 si intersecano, e trova il punto d'intersezione.

- 2.27** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano, considera la retta r di equazioni parametriche $x = 1 - 3t$ e $y = 2 + t$, e la retta s_a passante per i punti $\begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$, dove $a \in \mathbb{R}$. Trova per quali valori di a le rette r ed s_a si intersecano, e determina le coordinate del punto d'intersezione (quando esiste).

- 2.28** Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio, sia r la retta passante per $\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix}$, e sia r' la retta passante per $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}$. Dimostra che le due rette si intersecano, e trova il punto d'intersezione.