

Esercizi

13

13.1 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V , e $\lambda \in \text{sp}(T)$. Dimostra che V_λ è un sottospazio vettoriale di V . Se $V_\lambda = V$, che cosa puoi dire su T ?

13.2 Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A_k = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad B_k = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & k \end{vmatrix}, \quad C_k = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k^2 - 3 \end{vmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

13.3 Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A_k = \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad B_k = \begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad C_k = \begin{vmatrix} k & 1 & 2k - 3 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

13.4 Determina per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ le matrici

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 2i & k^3 \end{vmatrix}, \quad B_k = \begin{vmatrix} k^2 & 0 \\ k^2 - 2i & 2k - 2 \end{vmatrix},$$

$$C_k = \begin{vmatrix} 2(k-1) - 6i & 2 - k + 3i \\ -4 - 12i & 4 + 6i \end{vmatrix}, \quad D_k = \begin{vmatrix} 2k - 1 - 2i & 4 + 2(2k - k^2 - 1)i \\ 1 + ik & k^2 - 2k + 2i \end{vmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

13.5 Determina per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ le matrici

$$A_k = \begin{vmatrix} k & -2k^2 & 4k - i + 1 \\ 0 & -k & 2 + 2i \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \quad B_k = \begin{vmatrix} i - k & -2k^2 - (1+i)k & 1 - i + 4k \\ -2 - 2i & (2i-1)k - 1 & 2 + 2i \\ (1-i)k & (i-1)k^2 & 1 + (2+i)k \end{vmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

13.6 Trova autovalori e autospazi degli endomorfismi rappresentati, su \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , dalle matrici

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -11 & -24 & -18 \\ 8 & 17 & 12 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

e determina se sono diagonalizzabili su \mathbb{R} o su \mathbb{C} .

13.7 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostra che A e A^T hanno gli stessi autovalori, ma non necessariamente gli stessi autovettori.

13.8 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n . Una *bandiera per T* è una bandiera V_0, \dots, V_n dello spazio V (vedi l'Esercizio 4.34) tale che $T(V_i) \subseteq V_i$ per $i = 0, \dots, n$. Una *base a bandiera per T* è una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che, posto $V_i = \text{Span}(v_1, \dots, v_i)$ per $i = 1, \dots, n$, allora V_1, \dots, V_n è una bandiera per T . Dimostra che T è triangolabile se e solo se esiste una bandiera per T . (Suggerimento: rispetto a una base a bandiera T è rappresentato da una matrice di forma particolare.)

13.9 Sia $T: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo dato da $T(p) = tp'$, dove p' è la derivata di p . Trova autovalori e autospazi di T .

13.10 Sia $T: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo dato da $T(p)(t) = p'(t) + p''(t^2)$, dove p' e p'' sono la derivata prima e la derivata seconda di p . Trova autovalori e autospazi di T e stabilisci se sia diagonalizzabile.

13.11 Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo $T_a: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$ ponendo $[T_a(p)](t) = tp'(t-a)$. Determina per quali $a \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile.

13.12 Data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

considera l'endomorfismo lineare $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ dato da $T(X) = AX$. Determina autovalori e autospazi di T e stabilisci se sia diagonalizzabile.

13.13 Data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

considera l'endomorfismo lineare $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ definito stavolta da $T(X) = AX - XA$. Determina autovalori e autospazi di T e stabilisci se sia diagonalizzabile.

13.14 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che $\text{sp}(T) = \{\lambda_0\}$. Dimostra che T è diagonalizzabile se e solo se $T = \lambda_0 \text{id}_V$.

13.15 Siano $S, T: V \rightarrow V$ due endomorfismi. Dimostra che $\text{sp}(S \circ T) = \text{sp}(T \circ S)$. (Suggerimento: se $(S \circ T)(v) = \lambda v$ allora $(T \circ S)(T(v)) = \lambda T(v)$.)

- 13.16** Trova due matrici $A, A' \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ che non siano simili ma che abbiano uguali polinomio caratteristico, autovalori, determinante e traccia.
- 13.17** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n . Dimostra che esiste un polinomio p di grado n^2 tale che $p(T) = O$. (Suggerimento: gli endomorfismi $\text{id}, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ sono $n^2 + 1$ elementi dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(V, V)$, che ha dimensione n^2 .)
- 13.18** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} , e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gli autovalori di T . Dato un polinomio $p \in \mathbb{K}[t]$, dimostra che se T è diagonalizzabile allora anche $p(T)$ lo è. È vero il viceversa?
- 13.19** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} , e $U \subseteq V$ un sottospazio di V tale che $T(U) \subseteq U$. Dimostra che il polinomio caratteristico della restrizione $T|_U$ di T a U divide p_T . In particolare, se T ha tutti gli autovalori in \mathbb{K} anche $T|_U$ li ha. (Suggerimento: usa l'Esercizio 9.12.)
- 13.20** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} , e $U \subseteq V$ un sottospazio di V tale che $T(U) \subseteq U$. Supponiamo che T sia diagonalizzabile. Dimostra che esiste un supplementare $W \subseteq V$ di U in V tale che $T(W) \subseteq W$.
- 13.21** Trova un endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^2$ tali che si abbia $T(U) \subseteq U$ ma $T(W) \not\subseteq W$ per ogni supplementare W di U in \mathbb{R}^2 .
- 13.22** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} , e $U \subseteq V$ un sottospazio di V tale che $T(U) \subseteq U$. Supponiamo che T sia diagonalizzabile. Dimostra che anche l'endomorfismo $T|_U: U \rightarrow U$ restrizione di T a U è diagonalizzabile.
- 13.23** Siano $S, T: V \rightarrow V$ due endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} tali che $S \circ T = T \circ S$. Sia $\lambda \in \text{sp}(S)$ un autovalore di S , e V_λ il relativo autospazio. Dimostra che $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
- 13.24** Siano $S, T: V \rightarrow V$ due endomorfismi diagonalizzabili di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Dimostra che esiste una base di V composta da vettori che sono autovettori sia per T che per S se e solo se $S \circ T = T \circ S$. (Suggerimento: usa i due esercizi precedenti.)
- 13.25** Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $a_{i1} + \dots + a_{in} = 1$ per $i = 1, \dots, n$. Dimostra che $1 \in \text{sp}(L_A)$.
- 13.26** Siano $A, A' \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici simili su \mathbb{C} , cioè supponiamo che esista $\tilde{B} \in GL_n(\mathbb{C})$ con $A' = \tilde{B}^{-1}A\tilde{B}$. Dimostra che A e A' sono simili su \mathbb{R} , cioè che si può trovare una matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $A' = B^{-1}AB$. (Suggerimento: scrivi $\tilde{B} = P + iQ$, dove $P, Q \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, e dimostra che esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $B = P + rQ$ sia come richiesto.)
- 13.27** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che $T^2 = T$. Dimostra che T è diagonalizzabile. (Suggerimento: vedi l'Esercizio 7.7.)
- 13.28** Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che $T^2 = \text{id}_V$. Dimostra che T è diagonalizzabile. (Suggerimento: rifletti sull'Esercizio 5.16.)

[13.29] Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che $T^r = O$ per qualche $r \in \mathbb{N}$; si dice che T è *nilpotente*. Dimostra che T è diagonalizzabile se e solo se $T = O$.

[13.30] Sia $v_0 \neq O$ un autovettore di un endomorfismo $T: V \rightarrow V$ relativo a un autovalore non nullo. Dimostra che $v_0 \in \text{Im } T$. Deduci che se T è diagonalizzabile allora $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$. È vero il viceversa?

Il teorema spettrale

14

Sommario

- 14.1 Basi ortonormali di autovettori
- 14.2 Endomorfismi triangolabili
- 14.3 Un criterio di positività

Esercizi

In questo capitolo continuiamo lo studio di autovettori e autovalori, trattando il caso degli spazi vettoriali metrici. Il problema principale stavolta è determinare quando esiste una base *ortonormale* che diagonalizzi o triangolarizzi un dato endomorfismo. Vedremo che una base ortonormale di autovettori esiste se e solo se l'endomorfismo è simmetrico, risultato che va sotto il nome di *teorema spettrale*. Usando il fatto che su ogni spazio vettoriale è possibile introdurre una struttura di spazio vettoriale metrico, dimostreremo poi che esiste una base ortonormale che triangolarizza un dato endomorfismo se e solo se l'endomorfismo ha tutti gli autovalori reali. Infine, presenteremo un criterio di positività per prodotti scalari in termini degli autovalori della matrice simmetrica associata.

14.1 Basi ortonormali di autovettori

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato un criterio necessario e sufficiente perché un endomorfismo $T: V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale qualunque fosse diagonalizzabile. Supponiamo invece che V sia uno spazio vettoriale metrico reale; è naturale chiedersi quando esiste una base *ortonormale* di autovettori di T . Come vedremo, la risposta consistrà in un criterio molto semplice da verificare.

Per capire da dove partire, supponiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base ortonormale di autovettori per un endomorfismo $T: V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale metrico V . Indichiamo con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ l'autovalore relativo a v_j , in modo che $T(v_j) = \lambda_j v_j$ per $j = 1, \dots, n$. Prendiamo $v, w \in V$; sappiamo che rispetto alla base \mathcal{B} i vettori v e w si scrivono come

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i, \quad \text{e} \quad w = \sum_{j=1}^n \langle w, v_j \rangle v_j.$$

Applicando T troviamo

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v, v_i \rangle v_i \quad \text{e} \quad T(w) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle w, v_j \rangle v_j.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \langle T(v), w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v, v_i \rangle v_i, \sum_{j=1}^n \langle w, v_j \rangle v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \langle v, v_i \rangle \langle w, v_j \rangle \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v, v_j \rangle \langle w, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v, v_i \rangle \langle w, v_j \rangle \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle w, v_j \rangle v_j \right\rangle = \langle v, T(w) \rangle, \end{aligned} \tag{14.1}$$

dove abbiamo usato la Proposizione 11.4 e il Corollario 11.5.

Dunque l'esistenza di una base ortonormale di autovettori implica che necessariamente si deve avere $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$ per ogni $v, w \in V$, e quindi T deve essere un endomorfismo simmetrico.

In questo paragrafo dimostreremo il famoso *Teorema spettrale*, il quale dice esattamente che, viceversa, la simmetria assicura l'esistenza di una base ortonormale di autovettori; in particolare, gli endomorfismi simmetrici hanno tutti gli autovalori nel campo reale.

La dimostrazione di questo teorema si basa su due passaggi chiave. Il primo, di dimostrazione semplice, consiste nel far vedere che autovettori relativi ad autovalori distinti d'un endomorfismo simmetrico sono automaticamente ortogonali. Il secondo, cruciale (infatti l'aggettivo "spettrale" attribuito al teorema viene da questo), consiste nel far vedere che un endomorfismo simmetrico ha sempre *almeno un* autovalore reale. Una volta ottenuto questo, l'ortogonalità degli autovettori permetterà di ricondursi a uno spazio d'dimensione inferiore, e la dimostrazione si concluderà usando il principio d'induzione.

Ma vediamo i dettagli, cominciando con la seguente proposizione.

Proposizione 14.1

Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico. Allora autovettori di T relativi ad autovalori distinti sono automaticamente ortogonali.

Dimostrazione

Infatti, prendiamo $v \in V_\lambda$ e $w \in V_\mu$. Abbiamo allora che

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle,$$

grazie al fatto che T è simmetrico e che il prodotto scalare è bilineare. Ma allora da $\lambda \neq \mu$ segue subito che $\langle v, w \rangle = 0$. \square

Questo è sufficiente per diagonalizzare endomorfismi simmetrici di spazi vettoriali metrici di dimensione 2.

Esempio 14.1

Sia V uno spazio vettoriale metrico di dimensione 2, e $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico. Per diagonalizzare T , dobbiamo per lo meno sapere se ha tutti gli autovalori reali. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta T rispetto a una base ortonormale di V ; in particolare, A è simmetrica, cioè

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T risulta allora essere

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2.$$

Il discriminante Δ di p_T vale

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$$

ed è pertanto sempre maggiore o uguale a zero. Se $\Delta = 0$ allora $b = 0$ e $a = d$, per cui T è un multiplo dell'identità e ogni base di V è una base di autovettori. Se invece $\Delta > 0$, allora T ha due autovalori distinti entrambi reali, e possiamo applicare la proposizione precedente per ottenere una base ortonormale di autovettori. \square

Per procedere in modo induttivo, avremo bisogno di sapere che gli endomorfismi simmetrici mandano vettori ortogonali in vettori ortogonali.

Proposizione 14.2

Siano $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico V e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V tale che $T(U) \subseteq U$. Allora $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Dimostrazione

Preso $w \in U^\perp$ dobbiamo dimostrare che $T(w) \in U^\perp$. Ma infatti per ogni $u \in U$ si ha

$$\langle T(w), u \rangle = \langle w, T(u) \rangle = 0,$$

dove la prima uguaglianza è conseguenza del fatto che T è simmetrico e la seconda del fatto che T manda U in se stesso. Ma allora $T(w)$ è ortogonale a ogni vettore di U , e quindi $T(w) \in U^\perp$, come voluto. \square

Vediamo come questo risultato ci permette di usare l'Esempio 14.1 per diagonalizzare un endomorfismo simmetrico T di uno spazio vettoriale metrico V di dimensione 3. Siccome il polinomio caratteristico di T ha grado 3, deve avere almeno una radice reale, e quindi T ha almeno un autovalore reale. Sia allora v_1 un autovettore di norma 1 relativo a tale autovalore, e sia W l'ortogonale del sottospazio generato da v_1 . Grazie alla proposizione precedente, W è uno spazio vettoriale metrico di dimensione 2 su cui la restrizio-

ne di T agisce come un endomorfismo simmetrico; quindi l'Esempio 14.1 ci fornisce una base ortonormale $\{v_2, v_3\}$ di W composta da autovettori di T , e quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale di V composta da autovettori di T .

È ora chiaro come mai per ripetere il ragionamento in dimensione qualsiasi sia essenziale sapere che un endomorfismo simmetrico ha sempre almeno un autovalore reale. Mentre prima di vedere come si procede in generale esaminiamo un esempio concreto.

Esempio 14.2

L'endomorfismo $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è simmetrico, in quanto A lo è. Per trovare una base ortonormale di autovettori di L_A cominciamo col calcolare il polinomio caratteristico; troviamo

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda,$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$. L'autospazio V_{λ_1} è il nucleo della matrice A , per cui

$$V_{\lambda_1} = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente reso di lunghezza unitaria il vettore della base. Il secondo autospazio è invece il nucleo della matrice

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{vmatrix} -1 - \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \sqrt{2} \end{vmatrix},$$

per cui

$$V_{\lambda_2} = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{vmatrix}\right);$$

nota che, coerentemente con la Proposizione 14.1, V_{λ_1} e V_{λ_2} sono automaticamente ortogonali. Agendo nello stesso modo troviamo V_{λ_3} , che risulta essere

$$V_{\lambda_3} = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{vmatrix}\right).$$

Anche in questo caso si verifica facilmente che V_{λ_3} è ortogonale sia a V_{λ_1} sia a V_{λ_2} . La base ortonormale cercata quindi è

$$\left\{\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{vmatrix}\right\}.$$

È infine giunto il momento di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 14.3 (spettrale)

Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale metrico V . Allora esiste una base ortonormale \mathcal{B} di V composta da autovettori di T se e solo se T è simmetrico.

Dimostrazione

Supponiamo che esista una base ortonormale \mathcal{B} di autovettori di T ; allora (14.1) mostra che T è simmetrico.

Viceversa, supponiamo T simmetrico, e procediamo per induzione sulla dimensione di V . Se $\dim V = 1$ non c'è nulla da dimostrare; sia allora $\dim V = n > 1$, e supponiamo l'asserto vero per tutti gli spazi vettoriali metrici di dimensione $n - 1$.

Il passo cruciale è dimostrare che T ammette almeno un autovalore reale. Fissiamo una base ortonormale \mathcal{B} qualsiasi di V , e indichiamo con A la matrice associata a T rispetto a \mathcal{B} . Poiché T è un endomorfismo simmetrico, anche la matrice A è simmetrica. Dato che per definizione $p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$, basta dimostrare che p_A ha una radice reale.

Prendiamo l'applicazione lineare complessa $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ data da $L_A(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$. La matrice che rappresenta L_A rispetto alla base canonica di \mathbb{C}^n è nuovamente A . Se $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A (e, grazie al Teorema fondamentale dell'Algebra, almeno uno c'è) e $v_1 \neq 0$ è un autovettore relativo a tale autovalore, abbiamo la seguente catena di uguaglianze, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ indica il prodotto hermitiano canonico su \mathbb{C}^n (vedi la Definizione 11.8) e $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ denota la norma associata:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \|v_1\|_{\mathbb{C}}^2 &= \langle \lambda_1 v_1, v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle L_A(v_1), v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = v_1^H (Av_1) \\ &= v_1^H A^H v_1 = (Av_1)^H v_1 = \langle v_1, L_A(v_1) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1, \lambda_1 v_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda_1} \|v_1\|_{\mathbb{C}}^2,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che la matrice A è simmetrica e reale (per cui si ha $A^H = A^T = A$), e le proprietà del prodotto hermitiano canonico. Essendo il vettore v_1 non nullo, $\|v_1\|_{\mathbb{C}} \neq 0$, e quindi $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$; pertanto λ_1 è un autovalore reale della matrice A (e quindi dell'endomorfismo T).

Sia allora $v_1 \in V$ un autovettore di T relativo a $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ di lunghezza unitaria. Sia $W = \text{Span}(v_1)^\perp$; la Proposizione 14.2 dà $T(W) \subseteq W$. Dunque $T|_W: W \rightarrow W$ è un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico di dimensione $n - 1$. Per ipotesi induttiva esiste una base ortonormale $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W composta da autovettori di T ; e dunque $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V composta da autovettori di T . \square

Applicando il Teorema spettrale al caso particolare di \mathbb{R}^n dotato del prodotto scalare canonico, per cui l'endomorfismo T è della forma L_A per un'opportuna matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, otteniamo il seguente corollario.

Corollario 14.4

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata a coefficienti reali. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^n composta da autovettori di L_A ;
- (2) esiste una matrice ortogonale $U \in O(n)$ tale che $U^{-1}AU = U^TAU$ è diagonale;
- (3) A è simmetrica.

Dimostrazione

L'equivalenza di (1) e (3) segue dal Teorema 14.3 e dal fatto che A rappresenta L_A rispetto alla base canonica (ortonormale per il prodotto scalare canonico). Poi, la matrice di

cambiamento di base dalla base canonica a una base ortonormale \mathcal{B} contiene per colonne i vettori di \mathcal{B} , per cui è necessariamente ortogonale (Corollario 11.19); l'equivalenza di (1) e (2) segue allora da (8.5). \square

Il Teorema 14.3 è il principale motivo dell'importanza degli endomorfismi simmetrici: sono gli unici endomorfismi diagonalizzabili su \mathbb{R} tramite basi ortonormali.

Osservazione 14.1

Questo risultato ci permette di semplificare un poco i calcoli che abbiamo effettuato nell'Esempio 14.2. Infatti, essendo A simmetrica, una base ortonormale di autovettori di L_A deve esistere. Quindi non appena abbiamo trovato un autovettore v_1 relativo a λ_1 di norma unitaria, e un autovettore v_2 relativo a λ_2 di norma unitaria, il vettore $v_1 \wedge v_2$, essendo ortogonale a v_1 e v_2 e di norma unitaria, deve necessariamente essere (perché?) un autovettore di L_A relativo a λ_3 .

Esempio 14.3

Prendiamo la matrice simmetrica $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, che ora sappiamo essere diagonalizzabile; vogliamo una base ortonormale di autovettori. Prima di tutto troviamo gli autovalori:

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 5] = (1 - \lambda)(1 + \sqrt{5} - \lambda)(1 - \sqrt{5} - \lambda)$, per cui $\text{sp}(A) = \{1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$. Risolvendo i relativi sistemi troviamo

$$V_1 = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right), \quad V_{1+\sqrt{5}} = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{vmatrix} \right), \quad V_{1-\sqrt{5}} = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{vmatrix} \right).$$

Nota che, come osservato sopra, possiamo anche limitarci a risolvere i primi due sistemi, ottenendo un terzo autovettore come prodotto vettore dei primi due. In conclusione, una base ortonormale di autovettori di A è

$$\left\{ \begin{vmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \right\}. \quad \square$$

Osservazione 14.2

Ovviamente esistono anche endomorfismi diagonalizzabili non simmetrici; semplicemente, la base di autovettori non è mai ortonormale.

Esempio 14.4

L'endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

è diagonalizzabile, in quanto ha due autovalori distinti ($\text{sp}(T) = \{3, 2\}$), ma non è simmetrico. Una base di autovettori è data per esempio da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}. \quad \square$$

14.2 Endomorfismi triangolabili

Se l'endomorfismo $T: V \rightarrow V$ non è simmetrico, una base ortonormale di autovalori non esiste. Una variante della tecnica utilizzata nella dimostrazione del Teorema 14.3 ci permette però di trovare una base ortonormale che triangolarizza T non appena tutti gli autovalori sono nel campo.

Teorema 14.5

Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V sul campo reale. Allora T è triangolabile se e solo se ha tutti gli autovalori in \mathbb{R} . Inoltre, se V è uno spazio vettoriale metrico la base che triangolarizza T può essere scelta ortonormale.

Dimostrazione

Se T è triangolabile sappiamo già che deve avere tutti gli autovalori in \mathbb{R} (Lemma 13.4); quindi dobbiamo dimostrare solo il viceversa.

Siccome (Proposizione 11.15) è sempre possibile mettere su V un prodotto scalare definito positivo, possiamo direttamente supporre V metrico e cercare una base ortonormale che triangolarizzi T .

Posto $n = \dim V$, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gli autovalori di T , ripetuti secondo la rispettiva molteplicità algebrica. Vogliamo una base ortonormale $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che si abbia $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e

$$T(v_{j+1}) - \lambda_{j+1} v_{j+1} \in V_j \quad (14.2)$$

per $j = 1, \dots, n-1$, dove $V_j = \text{Span}(v_1, \dots, v_j)$. Questo basta per ottenere la tesi; infatti (14.2) vale se e solo se esistono $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tali che

$$T(v_{j+1}) = \lambda_{j+1} v_{j+1} + a_{1,j+1} v_1 + \cdots + a_{j,j+1} v_j,$$

e quindi la matrice che rappresenta T rispetto a \mathcal{B} è triangolare superiore.

Come v_1 prendiamo un autovettore di T relativo a λ_1 di norma unitaria. Supponiamo ora di aver determinato v_1, \dots, v_j come richiesto; vogliamo trovare v_{j+1} . Sia $W_j = V_j^\perp$; indichiamo con $P_j: V \rightarrow W_j$ la proiezione ortogonale su W_j , e definiamo $T_j = P_j \circ T|_{W_j}: W_j \rightarrow W_j$. Se $\{w_{j+1}, \dots, w_n\}$ è una base qualunque di W_j , rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_j, w_{j+1}, \dots, w_n\}$ di V l'endomorfismo T è rappresentato da una matrice della forma

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right|,$$

dove $A \in M_{j,j}(\mathbb{R})$ è triangolare superiore con $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ sulla diagonale principale. Siccome $P_j(v_h) = O$ per $1 \leq h \leq j$ e $P_j(w_k) = w_k$ per $j+1 \leq k \leq n$, si verifica facilmente (esercizio) che C è la matrice che rappresenta T_j rispetto alla base $\{w_{j+1}, \dots, w_n\}$ di W_j . Grazie all'Esercizio 9.12 vediamo che

$$(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) \det(C - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_j - \lambda) p_{T_j}(\lambda);$$

quindi gli autovalori di T_j sono $\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$. Prendiamo allora $v_{j+1} \in W_j$ un autovettore dell'endomorfismo T_j relativo all'autovalore λ_{j+1} di norma unitaria. In particolare abbiamo che $P_j(T(v_{j+1})) = \lambda_{j+1} v_{j+1}$, cioè (per definizione di proiezione ortogonale) $T(v_{j+1}) - \lambda_{j+1} v_{j+1} \in W_j^\perp = V_j$, come voluto. Procedendo in questo modo costruiamo la base cercata. \square

Osservazione 14.3

In maniera del tutto analoga (vedi l'Esercizio 14.18) si dimostra che *ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale su \mathbb{C} è triangolabile*.

Corollario 14.6

Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) L_A è triangolabile;
- (2) L_A ha tutti gli autovalori in \mathbb{R} ;
- (3) esiste una matrice invertibile $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $B^{-1}AB$ sia triangolare superiore;
- (4) esiste una matrice ortogonale $U \in O(n)$ tale che $U^{-1}AU = U^T AU$ sia triangolare superiore.

Dimostrazione

Come nel Corollario 14.4 segue tutto subito dal Teorema 14.5. □

La dimostrazione del Teorema 14.5 suggerisce anche una tecnica per trovare una base che triangolarizza un dato endomorfismo.

Esempio 14.5

Vogliamo trovare una base $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico che triangolarizzi l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Cominciamo col cercare gli autovalori di T . Si ha

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda)^2,$$

per cui $\text{sp}(T) = \{0, 1\}$. L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1; l'autovalore 1 invece ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, in quanto

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

In particolare, T non è diagonalizzabile. Per determinare una base ortonormale che triangolarizzi T cominciamo col trovare un autovettore relativo all'autovalore 1. Risolvendo il sistema $Ax = x$ otteniamo

$$V_1 = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \right),$$

per cui possiamo prendere come primo vettore della nostra base

$$\nu_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

Ora, l'Esercizio 11.21 ci dice che la matrice che rappresenta rispetto alla base canonica la proiezione ortogonale su V_1 è $v_1 v_1^T$ (nota che $v_1^T v_1 = \|v_1\|^2 = 1$); quindi la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale P_1 su $W_1 = V_1^\perp$ è $I_3 - v_1 v_1^T$ (in quanto la somma delle due proiezioni ortogonalì deve dare l'identità). Quindi la matrice che rappresenta $T_1 = P_1 \circ T$ è

$$A_1 = (I_3 - v_1 v_1^T)A = \begin{vmatrix} 5/9 & 4/9 & 2/9 \\ 4/9 & 5/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 8/9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5/9 & 5/9 & 0 \\ 4/9 & 4/9 & 0 \\ 2/9 & 2/9 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora un autovettore v_2 di T_1 relativo a $\lambda_2 = 1$ di norma unitaria; nota che siccome

$$v_2 = \lambda_2^{-1} P_1(T(v_2)) \in \text{Im } P_1 = V_1^\perp,$$

il vettore v_2 è automaticamente ortogonale a v_1 . Calcolando l'autospazio relativo a 1 di A_1 troviamo

$$v_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Posto $V_2 = \text{Span}(v_1, v_2)$, l'Esercizio 11.21 dice che la matrice associata alla proiezione ortogonale su V_2 è BB^T , dove $B = [v_1 \ v_2]$ (nota che $B^T B = I_2$ perché $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di V_2). Quindi la matrice associata a $T_2 = P_2 \circ T$ è

$$A_2 = (I_3 - BB^T)A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & -2/5 & 4/5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questo vuol dire (perché?) che $\text{Im } T \subseteq V_2$; quindi il terzo vettore della base cercata può essere un qualunque vettore di lunghezza unitaria ortogonale a V_2 . Per trovarlo, prendiamo $w_3 \notin V_2$ qualunque; allora $v_3 = P_2(w_3)/\|P_2(w_3)\|$ è come voluto. Per esempio, se $w_3 = e_3$ troviamo

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Nota che il vettore v_3 , dovendo essere di lunghezza unitaria e ortogonale a v_1 e v_2 , si poteva ottenere anche come prodotto vettore di v_1 e v_2 . Rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice

$$A' = C^{-1}AC = C^TAC = \begin{vmatrix} 1 & 9/\sqrt{5} & 16/(3\sqrt{5}) \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dove

$$C = \begin{vmatrix} 2/3 & 5/(3\sqrt{5}) & 0 \\ -2/3 & 4/(3\sqrt{5}) & -1/\sqrt{5} \\ -1/3 & 2/(3\sqrt{5}) & 2/\sqrt{5} \end{vmatrix}.$$

Osservazione 14.4

In generale non c'è alcuna relazione fra la matrice triangolare ottenuta nel Teorema 14.5 (matrice strettamente legata a T come endomorfismo) e quella che si ottiene effettuando un'eliminazione di Gauss su una matrice che rappresenta T rispetto a qualche base. L'eliminazione di Gauss cambia drasticamente l'immagine della matrice, e quindi non c'è nulla con la triangolabilità di un endomorfismo. In particolare, i pivot e gli autovalori di una matrice hanno poco a che spartire.

Osservazione 14.5

In realtà, si può fare più di quanto indicato nel Teorema 14.5. Non solo esiste una base che triangolarizza l'endomorfismo T , ma possiamo scegliere questa base in modo che la matrice associata a T abbia come elementi non nulli fuori dalla diagonale principale soltanto degli 1 posti nella diagonale subito soprastante, come succede per esempio nella matrice

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right|.$$

Inoltre questa matrice è univocamente determinata (a meno dell'ordine dei blocchi), ed è detta *forma canonica di Jordan* dell'endomorfismo T . I dettagli li puoi trovare nei complementi al Capitolo 15 del testo *Geometria* di M. Abate, edito dalla McGraw-Hill Italia.

Esempio 14.6

Vogliamo ora sfruttare il contenuto del Teorema 14.5 per ottenere un interessante risultato sulle matrici triangolabili. Data una matrice triangolabile $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori, ripetuti secondo la loro molteplicità algebrica. Allora

$$\sum_{l=1}^n |\lambda_l|^2 \leq \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{hk}|^2.$$

Infatti, sia $U \in O(n)$ una matrice ortogonale (che esiste grazie al Teorema 14.5) tale che $S = U^T A U = U^{-1} A U$ sia triangolare superiore. Allora S e A hanno gli stessi autovalori, e inoltre (vedi l'Esercizio 7.25)

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{hk}|^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(S^T S) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n |s_{hk}|^2;$$

quindi è sufficiente dimostrare la tesi per S . Ma per le matrici triangolari superiori la diseguaglianza è ovvia, in quanto gli autovalori sono proprio gli elementi sulla diagonale principale. \square

14.3 Un criterio di positività

Se ti ricordi, nel Capitolo 11 era rimasto aperto un problema: come stabilire se un prodotto scalare è definito positivo semplicemente guardandone la matrice associata. Il Teorema spettrale è esattamente lo strumento che ci serve per risolverlo.

Teorema 14.7

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V , e S la matrice che lo rappresenta rispetto a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V . Allora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo se e solo se tutti gli autovalori di $L_S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono positivi.

Dimostrazione

Supponiamo che il prodotto scalare sia definito positivo; in particolare $x^T S x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Allora se $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ è un autovettore di L_S relativo all'autovalore λ si ha

$$\lambda \|x_0\|^2 = \lambda x_0^T x_0 = x_0^T (\lambda x_0) = x_0^T S x_0 > 0,$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^n , e quindi $\lambda > 0$, come voluto.

Viceversa, supponiamo che tutti gli autovalori dell'endomorfismo L_S siano positivi. Essendo S una matrice simmetrica, il Corollario 14.4 ci assicura che esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) $\{y_1, \dots, y_n\}$ di \mathbb{R}^n composta da autovettori di L_S ; sia $C = \{w_1, \dots, w_n\}$, con $w_j = (F_B)^{-1}(y_j)$, la corrispondente base di V . Preso $v \in V \setminus \{O\}$ scriviamo $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$; allora $F_B(v) = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$, per cui

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n)^T S (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_h a_k y_h^T S y_k = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k a_h a_k y_h^T y_k \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k a_h a_k \delta_{hk} = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^2 > 0 \end{aligned} \tag{14.3}$$

come voluto, dove abbiamo usato (nell'ordine) il fatto che gli y_j sono autovettori di L_S , che formano una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) di \mathbb{R}^n , e che tutti i λ_j sono positivi. \square

Osservazione 14.6

Più in generale si può dimostrare che il segno (ma non il valore) degli autovalori di L_S è una caratteristica intrinseca del prodotto scalare e non dipende dalla base scelta (*Teorema di Sylvester*; vedi l'Esercizio 14.32).

Osservazione 14.7

Vale la pena notare una conseguenza di (14.3). Essendo i λ_j tutti positivi, hanno una radice quadrata positiva; quindi possiamo scrivere

$$\langle v, v \rangle = (\lambda_1^{1/2} a_1)^2 + \dots + (\lambda_n^{1/2} a_n)^2.$$

Ora, a_1, \dots, a_n erano le coordinate di v rispetto alla base C , e quindi sono combinazioni lineari delle coordinate di v rispetto alla base B originale. Quindi abbiamo dimostrato che la norma al quadrato di un prodotto scalare definito positivo si può sempre scrivere come somma di quadrati di un'opportuna combinazione lineare delle coordinate.

Il Teorema 14.7 è estremamente elegante e pulito; ma giustamente potresti obiettare che per applicarlo è necessario conoscere gli autovalori di L_S , e, come già osservato, questo non è sempre possibile.

Fortunatamente, le cose non stanno proprio così. Infatti, per usare il Teorema 14.7 basta conoscere il segno degli autovalori di L_S – e questa informazione si può ricavare semplicemente guardando i coefficienti del polinomio caratteristico. Artefice del miracolo è il Criterio di Cartesio, che adesso passiamo a enunciare.

Teorema 14.8 (Criterio di Cartesio)

Sia $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_d t^d$ un polinomio di grado n a coefficienti reali con $0 \leq d \leq n$ e $a_d \neq 0$. Supponiamo che tutte le radici di p siano reali. Allora:

- (1) 0 è radice di p se e solo se $d \geq 1$, e in tal caso è una radice di molteplicità esattamente d .
- (2) p ha tante radici positive, contate con la relativa molteplicità, quante sono le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p .

La parte (1) di questo teorema è ovvia; la dimostrazione della parte (2), invece, sfortunatamente esula da quanto possiamo trattare in questo libro (ma la puoi trovare nei complementi al Capitolo 16 del testo *Geometria* di M. Abate, edito da McGraw-Hill Education S.r.l. (Italy)).

Osservazione 14.8

Il numero delle radici negative del polinomio p non è il numero delle non-variazioni (o permanenze) di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p . Il numero delle radici negative lo si trova sottraendo al grado del polinomio il numero delle radici positive o nulle.

Se S è una matrice simmetrica sappiamo già che il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici reali (in quanto L_S è diagonalizzabile); quindi il Criterio di Cartesio è ideale per stabilire se un prodotto scalare è definito positivo.

Esempio 14.7

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$S_a = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & a \end{vmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$. Vogliamo trovare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare è definito positivo. Il polinomio caratteristico di L_{S_a} è

$$\det(S_a - \lambda I_3) = -\lambda^3 + (a+5)\lambda^2 + (13-5a)\lambda + (3a-16).$$

Per esempio, per $a = -5$ abbiamo

$$\det(S_{-5} - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 38\lambda - 31,$$

per cui la sequenza dei coefficienti non nulli è $(-1, 38, -31)$ che varia due volte di segno. Dunque S_{-5} ha due autovalori positivi e, essendo $\det S_{-5} \neq 0$, uno negativo, per cui $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-5}$ non è definito positivo. Invece per $a = 6$ abbiamo

$$\det(S_6 - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 17\lambda + 2,$$

per cui abbiamo tre variazioni e conseguentemente tre autovalori positivi: $\langle \cdot, \cdot \rangle_6$ è definito positivo. Ripetendo queste considerazioni per ogni valore di a troviamo che S_a ha due autovalori positivi e uno negativo per $a < 16/3$, due autovalori positivi e uno nullo per $a = 16/3$, e tre autovalori positivi per $a > 16/3$; quindi $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ è definito positivo se e solo se $a > 16/3$. □

Esercizi 14

14.1 Per ciascuna delle seguenti matrici trova, se esiste, una base ortonormale di \mathbb{R}^3 che la diagonalizzi:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ \frac{1}{529} \left| \begin{array}{ccc} -110 & -450 & 282 \\ -450 & 227 & 288 \\ 282 & 288 & 941 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|. \end{array}$$

14.2 Trova un esempio di endomorfismo *non* simmetrico $T: V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale metrico V tale che se $v_0 \neq O$ è un autovettore di T e $W_0 = \text{Span}(v_0)^\perp$ allora $T(W_0)$ *non* è contenuto in W_0 .

14.3 Dimostra che lo spettro di un endomorfismo ortogonale è incluso in $\{1, -1\}$.

14.4 Dimostra che una matrice ortogonale $A \in O(n)$ è diagonalizzabile se e solo se $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \{1, -1\}$, dove $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ indica lo spettro di $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

14.5 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico. Dimostra che per ogni $v \in V$ con $\|v\| = 1$ si ha

$$\min \{\lambda \mid \lambda \in \text{sp}(T)\} \leq \langle T(v), v \rangle \leq \max \{\lambda \mid \lambda \in \text{sp}(T)\}.$$

14.6 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Dimostra che esiste un prodotto scalare definito positivo su V rispetto a cui T è simmetrico.

14.7 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Dimostra che

$$p_A(\lambda) = (-1)^n p_A(-\lambda),$$

e deduci che se n è dispari allora $\det A = 0$.

14.8 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico tale che $T^k = \text{id}_V$ per qualche $k \geq 1$. Dimostra che $T^2 = \text{id}_V$.

14.9 Sia $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale metrico tale che $T^r = O$ per qualche $r > 0$. Dimostra che $T = O$.

[14.10] Dimostra che l'unica matrice antisimmetrica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizzabile è la matrice nulla. (*Suggerimento:* se A fosse diagonalizzabile su \mathbb{R} , necessariamente $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Ma allora sarebbe possibile trovare una matrice ortogonale $U \in O(n)$ in modo che la matrice $U^T A U$ risulti triangolare superiore.)

[14.11] Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Dimostra che se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è autovalore di A , allora $\lambda_0 = 0$. (*Suggerimento:* l'endomorfismo L_A dell'autospazio relativo a λ_0 è ancora antisimmetrico; applica l'esercizio precedente.)

[14.12] Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Dimostra che se $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ è un autovalore non nullo di $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ allora λ_0 è immaginario puro. (*Suggerimento:* A^2 è simmetrica, per cui $\lambda_0^2 \in \text{sp}(A^2) \subset \mathbb{R}$.)

[14.13] Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice non nulla tale che $A^T = cA$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$. Dimostra che $c = \pm 1$.

[14.14] Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $\langle L_A(v), v \rangle = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Dimostra che A è antisimmetrica.

[14.15] Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostra che esiste una matrice simmetrica $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $B^3 = A$. Trova una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simmetrica per cui non esista una matrice $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $C^2 = A$.

[14.16] Trova, se esistono, basi ortonormali di \mathbb{R}^n rispetto al prodotto scalare canonico che triangolarizzino le matrici:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

[14.17] Trova per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici sono triangolabili (diagonalizzabili, diagonalizzabili da una base ortonormale) su \mathbb{R} , e ove possibile determina una matrice ortogonale che le triangolarizzi (o diagonalizzi):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a & 0 \\ a & a & -1 \end{vmatrix}.$$

[14.18] Dimostra che ogni endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale complesso è triangolabile.

[14.19] Per ogni $p \in \mathbb{R}^*$ trova una matrice quadrata $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ su cui si possa effettuare l'eliminazione di Gauss senza scambi di righe con pivot $p_1 = p$ e $p_2 = 2/p$ e tale che $\text{sp}(A) = \{1, 2\}$.

[14.20] Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Dimostra che se $\det A < 0$ allora A è necessariamente diagonalizzabile, e che se $\det A = 0$ allora A è necessariamente triangolabile. Trova due matrici $B, C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che B sia non triangolabile e abbia $\det B > 0$, e C sia non diagonalizzabile e abbia $\det C = 0$.

- 14.21** Sia V uno spazio vettoriale metrico, e $u \in V$ con $\|u\| = 1$. La *riflessione* rispetto all'iperpiano $V_1 = \text{Span}(u)^\perp$ è l'endomorfismo $S_u: V \rightarrow V$ dato da

$$S_u(v) = v - 2\langle v, u \rangle u.$$

Dimostra che S_u è simmetrico, che è un'isometria, e trova una base ortonormale di autovettori per S_u .

- 14.22** Scrivi la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ associata (rispetto alla base canonica) alla riflessione (vedi l'esercizio precedente) $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto al piano π_1 di equazione cartesiana $x + 2y - z = 0$, e trova una matrice ortogonale $U \in O(3)$ tale che $U^T A U$ sia diagonale.

- 14.23** Dopo aver riletto l'Osservazione 13.8, dimostra che se $T: V \rightarrow V$ è un endomorfismo triangolabile di uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{K} allora $p_T(T) = O$. (*Suggerimento:* se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è una matrice triangolare superiore che rappresenta T rispetto a un'opportuna base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V , dimostra per induzione su j che $(A - \lambda_1 I_n) \cdots (A - \lambda_j I_n)v = O$ per ogni $v \in V_j = \text{Span}(v_1, \dots, v_j)$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli elementi sulla diagonale di A .)

- 14.24** Dimostra il *Teorema di Hamilton-Cayley*: se $T: V \rightarrow V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} allora $p_T(T) = O$. (*Suggerimento:* vedi l'esercizio precedente).

- 14.25** Sia V lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine 3, e indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito positivo dell'Esempio 11.8. Sia $T: V \rightarrow V$ l'endomorfismo dato da $T(X) = AX + XA$, dove $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ è la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dimostra che T è simmetrico rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e determina una base ortonormale di autovettori per T .

- 14.26** Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice con tutti gli autovalori non negativi. Dimostra la *dissugaglianza di Hadamard*: $n^n \det A \leq (\text{tr } A)^n$.

- 14.27** Studia il segno dei prodotti scalari su \mathbb{R}^2 dati da

$$\langle x, y \rangle_1 = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 \quad \text{e} \quad \langle x, y \rangle_2 = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

- 14.28** Trova per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & a & 1+a \\ 4 & 1+a & 5+a \end{vmatrix}$$

è definito positivo.

- 14.29** Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Per $k = 1, \dots, n$ la *sottomatrice principale* $\mathcal{A}_k \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ di *ordine* k di A è la sottomatrice ottenuta considerando le prime k righe e colonne di A . Dimostra che A è definita positiva se e solo se $\det \mathcal{A}_k > 0$

per $k = 1, \dots, n$. (Suggerimento: procedi per induzione su n , notando che A_k definisce un prodotto scalare su $\text{Span}(e_1, \dots, e_k)$, e che se A è definita positiva su un sottospazio di dimensione k allora ha almeno k autovalori positivi, per il Teorema 14.7.)

- [14.30] Siano $A, A' \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ due matrici congruenti. Dimostra che $\det A$ e $\det A'$ hanno lo stesso segno.
- [14.31] Dimostra che se $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sono due prodotti scalari su V , con $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ definito positivo, allora esiste una base \mathcal{B} di V che è contemporaneamente ortonormale per $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ e ortogonale per $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.
- [14.32] Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V , e S la matrice che lo rappresenta rispetto a una base \mathcal{B} . Indichiamo poi con i_+ (rispettivamente, i_-) il numero degli autovalori positivi (rispettivamente, negativi) di S . Dimostra che:
- (1) esiste un sottospazio vettoriale di V di dimensione i_+ (rispettivamente, i_-) su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo (rispettivamente, negativo);
 - (2) se W è un sottospazio di V su cui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo (rispettivamente, negativo), allora $\dim W \leq i_+$ (rispettivamente, $\dim W \leq i_-$);
 - (3) se S' è la matrice che rappresenta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto a un'altra base, allora S' ha esattamente i_+ autovalori positivi e i_- autovalori negativi (Teorema di Sylvester).
- [14.33] Dimostra che una matrice simmetrica $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se esiste una matrice simmetrica $C \in GL_n(\mathbb{R})$ invertibile tale che $S = C^2$.

Coniche e quadriche

15

Sommario

- 15.1 Coniche
- 15.2 Classificazione affine di coniche e quadriche
- 15.3 Fasci di coniche
- 15.4 Coni, cilindri e sfere

Esercizi

Questo capitolo è dedicato alle coniche in \mathbb{R}^2 e alle quadriche in \mathbb{R}^3 , cioè a quegli oggetti geometrici che si ottengono come luoghi di zeri di polinomi di secondo grado. Nel primo paragrafo daremo una presentazione di tipo geometrico delle coniche piane, mentre nel secondo vedremo come classificare coniche e quadriche da un punto di vista affine. Il terzo paragrafo conterrà materiale sui fasci di coniche, utili per costruire coniche con caratteristiche prefissate, mentre l'ultimo parlerà di altre superfici notevoli nello spazio.

15.1 Coniche

Rette e piani non sono i soli oggetti studiati dalla geometria metrica; ve ne sono moltissimi altri, fra cui i più importanti sono senza dubbio le coniche, a cui è dedicato questo paragrafo. Cominciamo col caso più semplice e noto.

Definizione 15.1

Una circonferenza X di centro $C \in \mathcal{E}^2$ e raggio $r > 0$ è il luogo⁽¹⁾ dei punti $P \in \mathcal{E}^2$ che distano esattamente r da C . In simboli,

$$X = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, C) = r\}.$$

È facile trovare equazioni cartesiane e parametriche di una circonferenza. Scelto un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = RC(O, A_1, A_2)$ di \mathcal{E}^2 , supponiamo che C abbia coordinate $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Allora il punto P di coordinate (x, y) appartiene alla circonferenza di centro C e raggio r se e solo se

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2. \quad (15.1)$$

Dividendo (15.1) per r^2 troviamo che il punto di coordinate $((x - c_1)/r, (y - c_2)/r)$ dista esattamente 1 dall'origine, per cui è della forma $(\cos t, \sin t)$ per qualche $t \in \mathbb{R}$, e le equazioni parametriche della circonferenza sono (vedi la Figura 15.1)

$$\begin{cases} x = c_1 + r \cos t, \\ y = c_2 + r \sin t. \end{cases} \quad (15.2)$$

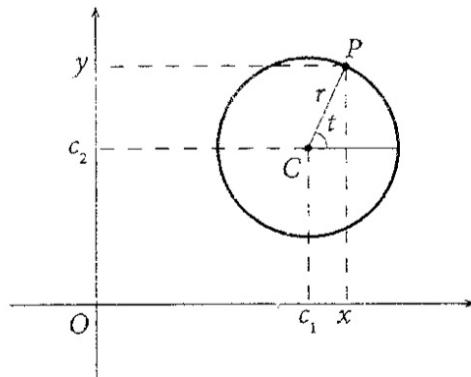


Figura 15.1 - La circonferenza.

La circonferenza è un tipo particolare di ellisse.

Definizione 15.2

Un'ellisse E di fuochi $F, F' \in \mathcal{E}^2$ e semiasse $a > 0$ è il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}^2$ tali che somma delle distanze di P da F ed F' sia la costante $2a$, cioè

$$E = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F) + d(P, F') = 2a\}.$$

Il *centro* dell'ellisse è il punto medio del segmento $\overline{FF'}$. Gli *assi* dell'ellisse sono la retta che congiunge i due fuochi e la retta ortogonale a quest'ultima passante per il centro. I due fuochi coincidono otteniamo una circonferenza di centro $F = F'$ e raggio a (e tal caso il concetto di asse non si applica).

⁽¹⁾ “Luogo” è il sinonimo di “insieme” tradizionalmente usato in questo contesto.

In modo analogo possiamo definire l'iperbole.

Definizione 15.3

Un'iperbole I di fuochi $F, F' \in \mathcal{E}^2$ e semiasse $a > 0$ è il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}^2$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P da F ed F' sia la costante $2a$, cioè

$$I = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid |d(P, F) - d(P, F')| = 2a\}.$$

Il *centro* e gli *assi* di un'iperbole si definiscono come per le ellissi. Inoltre, se $d(F, F') = 2\sqrt{2}a$ allora l'iperbole è detta *equilatera* (vedi l'Osservazione 15.3).

Osservazione 15.1

La diseguaglianza triangolare ci dice che

$$|d(P, F) - d(P, F')| \leq d(F, F') \leq d(P, F) + d(P, F');$$

quindi se $2c = d(F, F') \geq 0$ è la distanza fra i due fuochi troviamo che per un'ellisse si deve avere $a \geq c$, mentre per un'iperbole si deve avere $a \leq c$. Se $a = c$, i punti F , P ed F' sono allineati; l'ellisse si riduce allora al segmento $\overline{FF'}$, mentre l'iperbole si riduce al complementare di questo segmento sulla retta passante per F ed F' .

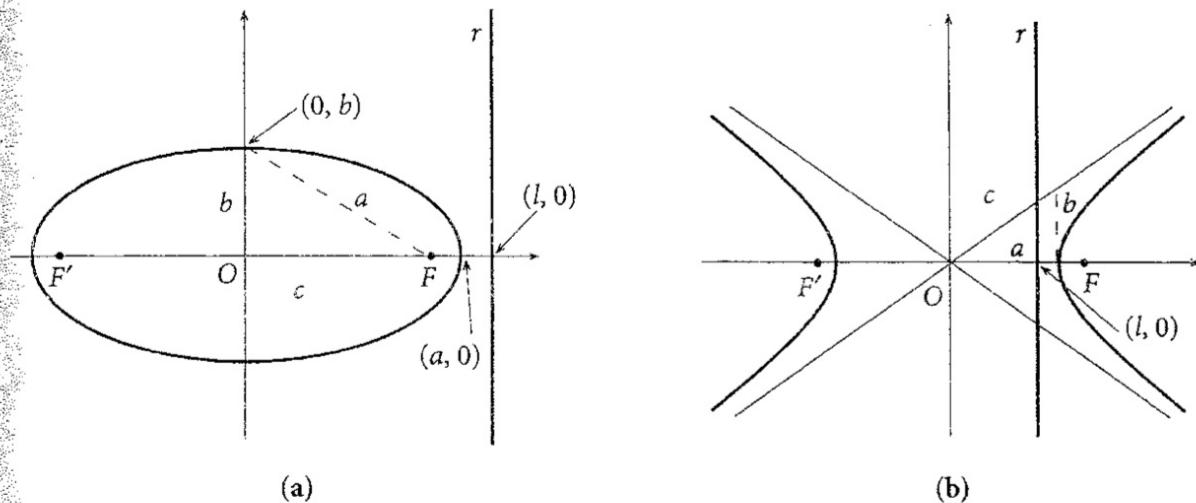


Figura 15.2 - (a) L'ellisse. (b) L'iperbole.

Vogliamo ora trovare equazioni cartesiane di ellissi e iperbolici. Per semplificare i conti, scegliamo un sistema di riferimento cartesiano adattato alla situazione (Figura 15.2). Per l'esattezza, prendiamo il sistema $\mathcal{R} = RC(O, A_1, A_2)$, dove O è il centro dell'ellisse o iperbole, cioè il punto medio del segmento $\overline{FF'}$, e OA_1 è parallelo a $\overline{FF'}$, con verso che punta da F' a F . Rispetto a \mathcal{R} , il fuoco F ha coordinate $(c, 0)$, mentre F' ha coordinate $(-c, 0)$.

Indichiamo con (x, y) le coordinate del punto $P \in \mathcal{E}^2$ rispetto a questo sistema di riferimento cartesiano. Allora P appartiene all'ellisse E se e solo se

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando otteniamo che $P \in E$ se e solo se

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = -\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\sqrt{(x + c)^2 + y^2};$$

elevando di nuovo al quadrato e risemplificando troviamo che $P \in E$ se e solo se

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

ovvero se e solo se (ricordando che $a > c$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (15.3)$$

dove $b^2 = |a^2 - c^2|$.

Analogamente, P appartiene all'iperbole I se e solo se

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Procedendo come prima troviamo che $P \in I$ se e solo se

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

ovvero se e solo se (ricordando che stavolta $a < c$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (15.4)$$

dove di nuovo $b^2 = |a^2 - c^2|$.

Da queste equazioni è semplice ricavare delle equazioni parametriche. Nel caso dell'ellisse, (15.3) implica che

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad (15.5)$$

sono equazioni parametriche di E . Per l'iperbole, ci serve una definizione.

Definizione 15.4

Le funzioni *coseno iperbolico* $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e *seno iperbolico* $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono definite da

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

La Figura 15.3 contiene i grafici del seno iperbolico e del coseno iperbolico.

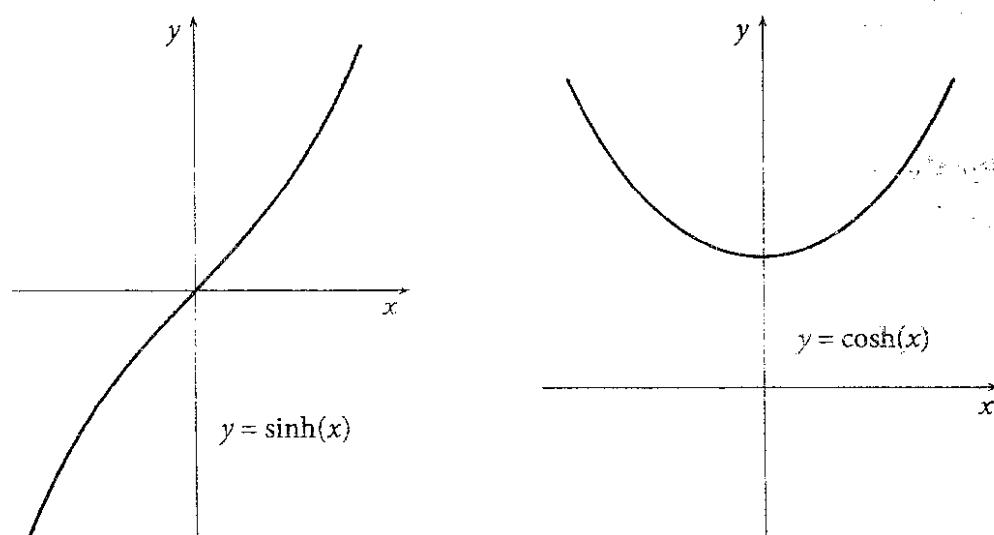


Figura 15.3 - Seno e coseno iperbolici.

È facile verificare che $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$. Viceversa, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $x^2 - y^2 = 1$, poniamo

$$t = \log(y + \sqrt{1 + y^2});$$

allora $\sinh t = y$, e $1 + y^2 = (\cosh t)^2$, per cui $x = \pm \cosh t$. Dunque le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x^2 - y^2 = 1$ sono tutte e sole quelle della forma $(\pm \cosh t, \sinh t)$, e quindi (15.4) ci dice che equazioni parametriche dell'iperbole sono

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t, \\ y = b \sinh t. \end{cases} \quad (15.6)$$

Osservazione 15.2

L'iperbole è fatta da due rami separati; conseguentemente per descriverla servono due equazioni parametriche distinte (una col segno più, l'altra col segno meno), una per ciascun ramo.

Osservazione 15.3

Se $(x, y) \in I$, le formule (15.6) implicano che

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \frac{\sinh t}{\cosh t} = \pm \frac{b}{a} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \pm \frac{b}{a} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}.$$

Questa quantità tende a $\pm b/a$ per $t \rightarrow \pm\infty$. In altre parole, andando verso l'infinito l'iperbole tende ad avvicinarsi alle rette $y = \pm(b/a)x$, dette *asintoti* dell'iperbole (vedi la Figura 15.2). Inoltre, i due asintoti sono ortogonali se e solo se (vedi il Paragrafo 12.1) $a^2 = b^2$, cioè se e solo se (ricordando che $b^2 = c^2 - a^2$ per l'iperbole) $c = \sqrt{2}a$, ovvero se e solo se l'iperbole è equilatera.

Un'altra curva parente stretta di iperboli ed ellissi è la parabola.

Definizione 15.5

Una *parabola* C di fuoco $F \in \mathcal{E}^2$ e direttrice r è il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}^2$ la cui distanza da r è uguale alla distanza da F , cioè

$$C = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, r) = d(P, F)\}.$$

Il numero $p = d(F, r)/2$ è detto *parametro* della parabola; l'*asse* della parabola è la retta passante per F e ortogonale a r , e il *vertice* della parabola è il punto medio del segmento \overline{FH} , dove H è la proiezione ortogonale di F su r , cioè l'intersezione fra l'asse e la direttrice della parabola.

Per trovare un'equazione cartesiana della parabola, scegliamo di nuovo opportunamente il sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = RC(O, A_1, A_2)$. Sia H la proiezione ortogonale di F su r ; prendiamo come origine il vertice della parabola, cioè il punto medio O del segmento \overline{FH} , e poi scegliamo $\overrightarrow{OA_1}$ parallelo a r e $\overrightarrow{OA_2}$ ortogonale a r diretto verso F (vedi la Figura 15.4).

In questo sistema di riferimento il fuoco F ha coordinate $(0, p)$ dove $p > 0$ è il parametro della parabola, e la direttrice r ha equazione cartesiana $y = -p$. Dunque il punto $P \in \mathcal{E}^2$ di coordinate (x, y) appartiene alla parabola C se e solo se si ha $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$, ovvero $P \in C$ se e solo se

$$y = \frac{1}{4p} x^2. \quad (15.7)$$

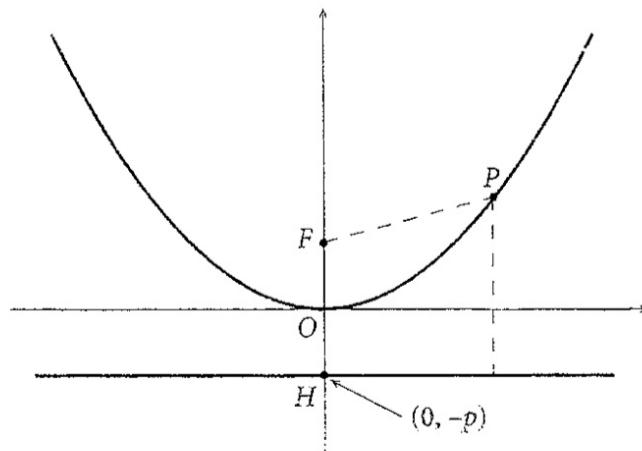


Figura 15.4 - La parabola.

Le equazioni parametriche sono ora ovvie:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2/4p. \end{cases} \quad (15.8)$$

Osservazione 15.4

Le equazioni (15.3), (15.4) e (15.7) sono equazioni cartesiane di ellissi, iperboli e parabole in sistemi di riferimento cartesiani particolari. Per scoprire che aspetto hanno le equazioni cartesiane di ellissi, iperboli e parabole in un sistema di riferimento cartesiano qualsiasi basta cambiare coordinate. All'inizio del Paragrafo 12.1 abbiamo visto che i cambiamenti di coordinate sono della forma

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix};$$

quindi sia per le ellissi sia per iperboli e parabole (e circonferenze) otteniamo un'equazione cartesiana del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (15.9)$$

per opportuni $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Nel prossimo paragrafo vedremo dei metodi per stabilire esattamente che tipo di curva è rappresentato da un'equazione della forma (15.9).

Osservazione 15.5

Non è un caso che ellissi, iperboli e parabole siano tutte quante rappresentabili da equazioni dello stesso tipo; infatti, si può dimostrare che si ottengono tutte intersecando un cono circolare retto⁽²⁾ con un piano. Per questo motivo ellissi, iperboli e parabole sono collettivamente note come *sezioni coniche* o, più semplicemente, *coniche*.

Un'ulteriore conferma del fatto che ellissi, iperboli e parabole sono strettamente imparentate è data dal teorema seguente, in cui si mostra come sia possibile dare una definizione unificata di tutte le coniche usando il concetto di eccentricità.

⁽²⁾ Vedi il Paragrafo 15.4 per una definizione precisa di cono circolare retto.

Teorema 15.1

Siano dati una retta r , un punto $F \notin r$ e un numero $e > 0$. Sia $X \subset \mathbb{E}^2$ il luogo dei punti $P \in \mathbb{E}^2$ tali che

$$d(P, F) = e d(P, r). \quad (15.10)$$

Allora X è un'ellisse se $e < 1$, una parabola se $e = 1$, un'iperbole se $e > 1$. Viceversa, ogni conica (che non sia una circonferenza) si ottiene in questo modo.

Definizione 15.6

Il numero e è detto *eccentricità* della conica, la retta r *direttrice* e il punto F *fuoco*.

Dimostrazione del Teorema 15.1

Se $e = 1$ non c'è nulla da dimostrare; supponiamo quindi $e \neq 1$.

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2)$ in modo che il vettore $\overrightarrow{OA_1}$ sia ortogonale a r , il vettore $\overrightarrow{OA_2}$ sia parallelo a r , e il fuoco F abbia coordinate $(c, 0)$, con

$$c = \frac{e^2}{|1 - e^2|} d > 0,$$

dove $d = d(F, r)$; inoltre, scegliamo l'origine e il verso di $\overrightarrow{OA_1}$ in modo che F si trovi fra O e la direttrice se $e < 1$, mentre sia r a trovarsi fra O ed F se $e > 1$ (è la situazione rappresentata nella Figura 15.2); nota che $d < c$ quando $e > 1$. In particolare la direttrice ha equazione cartesiana $x = l$, con

$$l = \begin{cases} c + d & \text{se } e < 1, \\ c - d & \text{se } e > 1. \end{cases}$$

Rispetto a questo sistema di riferimento cartesiano, un punto $P \in \mathbb{E}^2$ di coordinate (x, y) appartiene a X se e solo se

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = e|x - l|.$$

Elevando al quadrato e notando che c è stato scelto in modo che si abbia sempre $c = e^2 l$, troviamo che $P \in X$ se e solo se

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = e^2 l^2 - c^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2},$$

cioè se e solo se

$$\frac{(1 - e^2)^2}{e^2 d^2} x^2 + \frac{1 - e^2}{e^2 d^2} y^2 = 1,$$

che è proprio l'equazione di un'ellisse se $e < 1$, e di un'iperbole se $e > 1$.

Viceversa, consideriamo un'ellisse (o un'iperbole) di semiasse $a > 0$ e distanza fra i fuochi $2c > 0$. Abbiamo visto che in tal caso l'equazione è data da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1;$$

allora per dimostrare che ogni conica (che non sia una circonferenza) si scrive come in (15.10) ci basta trovare $e, d > 0$ tali che

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{e} \quad a^2 - c^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}. \quad (15.11)$$

Le uguaglianze (15.11) implicano che

$$1 - e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad \text{per cui } e = \frac{c}{a},$$

e quindi

$$d^2 = \frac{1 - e^2}{e^2} (a^2 - c^2) = \frac{(a^2 - c^2)^2}{c^2} \quad \text{per cui } d = \frac{b^2}{c},$$

dove come al solito $b^2 = |a^2 - c^2|$. □

Osservazione 15.6

In un certo senso, le circonferenze possono essere considerate come il caso limite di coniche con eccentricità zero e direttrice la retta all'infinito (vedi il Paragrafo 10C.2).

Concludiamo questo paragrafo studiando le possibili posizioni reciproche di una retta e una conica. Sia r una retta di equazione parametrica

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} l \\ m \end{vmatrix}, \quad (15.12)$$

e prendiamo una conica X di equazione cartesiana (15.9). Sostituendo (15.12) in (15.9) troviamo che il punto $(x_0 + tl, y_0 + tm) \in r$ appartiene alla conica se e solo se $t \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} & (al^2 + 2blm + cm^2)t^2 + 2(alx_0 + bly_0 + bmx_0 + cmy_0 + dl + em)t \\ & + (ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f) = 0. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Questa è un'equazione (al massimo) di secondo grado nell'incognita t , per cui può avere zero, una o due (o infinite, se tutti i coefficienti sono nulli) soluzioni reali, che corrispondono a zero, uno o due (o infiniti) punti d'intersezione fra la retta e la conica.

Definizione 15.7

Un vettore $v_0 = (l, m) \neq (0, 0)$ tale che $al^2 + 2blm + cm^2 = 0$ è detto *vettore asintotico* della conica di equazione (15.9). Una retta di vettore direttore un vettore asintotico è detta *retta asintotica* della conica. Se r è una retta asintotica tale che anche il coefficiente di t in (15.13) si annulla, diremo che r è un *asintoto* della conica se il termine noto in (15.13) è diverso da zero, e che è *contenuta* nella conica se il termine noto in (15.13) è nullo.

Definizione 15.8

Diremo che una retta non asintotica è *secante* (rispettivamente, *tangente a*, *esterna a*) una conica X se interseca la conica in due punti (rispettivamente, un punto, nessun punto).

Supponiamo che il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenga alla conica X , cioè si abbia

$$ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = 0. \quad (15.14)$$

Allora una retta di equazione parametrica (15.12) è tangente alla conica se e solo se $al^2 + 2blm + cm^2 \neq 0$ e (15.13) ha come unica soluzione $t = 0$, che accade se e solo se si ha

$$(ax_0 + by_0 + d)l + (bx_0 + cy_0 + e)m = 0. \quad (15.15)$$

Questa equazione ha sempre almeno uno dei coefficienti non nulli (e quindi lo spazio delle soluzioni ha sempre dimensione 1) tranne nel caso in cui si abbia

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0, \\ bx_0 + cy_0 + e = 0, \\ dx_0 + ey_0 + f = 0, \end{cases}$$

dove la terza equazione è conseguenza delle prime due e di (15.14). Questo succede se e solo se $(x_0, y_0, 1)$ appartiene al nucleo della matrice

$$A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}. \quad (15.16)$$

Definizione 15.9

Una conica per cui si abbia $\text{Ker } A = \{O\}$, dove A è la matrice data in (15.16), è detta *non degenera*.

Dunque abbiamo dimostrato che *per ogni punto di una conica non degenera passa una e una sola retta tangente*, il cui vettore direttore è soluzione di (15.15). Come vedremo in seguito, le coniche non degeneri sono esattamente le ellissi, le iperboli e le parabole.

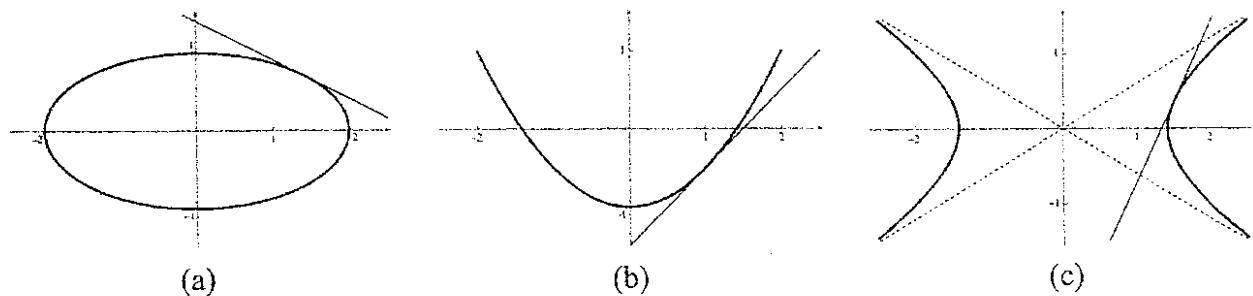


Figura 15.5 - (a) Retta tangente a un'ellisse; (b) retta tangente a una parabola; (c) asintoti e retta tangente a un'iperbole.

Esempio 15.1

Vediamo quali sono (e se esistono) le rette tangenti e asintotiche per ellissi, iperboli e parabole (vedi la Figura 15.5). Si verifica subito che un'ellisse non possiede rette asintotiche di alcun genere. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ appartiene all'ellisse E di equazione (15.13), allora ogni vettore direttore della retta tangente a E passante per P_0 soddisfa l'equazione

$$\frac{x_0}{a}l + \frac{y_0}{b}m = 0.$$

In particolare, se l'ellisse è una circonferenza (cioè $a = b$) allora la retta tangente è sempre perpendicolare al raggio.

Per una parabola C di equazione (15.7) le rette ortogonali alla direttrice sono rette asintotiche (ma non asintoti); in particolare, la retta asintotica passante per il fuoco è l'asse della parabola, e il punto in cui interseca la parabola è il vertice della parabola. Oggi vettore direttore della retta tangente alla parabola nel punto $(x_0, y_0) \in C$ soddisfa l'equazione

$$\frac{x_0}{2p} l - m = 0.$$

Infine, un'iperbole I di equazione (15.13) ammette (a meno di multipli) due vettori asintotici: $(1, b/a)$ e $(1, -b/a)$. In particolare, si verifica facilmente che l'iperbole ammette esattamente due asintoti, che sono le rette di equazione cartesiana $y = \pm(b/a)x$, con già anticipato nell'Osservazione 15.3. Infine, ogni vettore direttore della retta tangente a l'iperbole nel punto $(x_0, y_0) \in I$ soddisfa l'equazione

$$\frac{x_0}{a} l - \frac{y_0}{b} m = 0.$$

15.2 Classificazione affine di coniche e quadriche

Nei Capitoli 10 e 12 abbiamo studiato insiemi (rette e piani) che possono essere descritti come luogo di zeri di equazioni (o sistemi) di primo grado. In questo paragrafo classificheremo invece i luoghi di zeri dei polinomi di secondo grado nel piano (le *coniche*) nello spazio (le *quadriche*).

Ma cosa significa classificare coniche e quadriche? Prima di tutto, dobbiamo decidere quando due coniche (o due quadriche) sono essenzialmente due incarnazioni diverse dello stesso oggetto. Per esempio, se ruotiamo e trasliamo una conica ne otteniamo un'altra che è essenzialmente uguale a quella di partenza, in quanto ne differisce solo per la posizione; quindi sicuramente possiamo considerare equivalenti due coniche (o due quadriche) che si ottengono l'una dall'altra tramite un'isometria. Più in generale, considereremo equivalenti due coniche (o quadriche) che si ottengono l'una dall'altra tramite un'affinità in quanto in tal caso hanno essenzialmente la stessa forma.

Una volta stabilito quale relazione di equivalenza usare, classificare le quadriche vuol dire:

- (1) trovare una procedura efficace per decidere se due quadriche sono equivalenti;
- (2) preparare una lista di quadriche a due a due non equivalenti e tali che ogni altra quadrica sia equivalente a una di quelle presenti nella lista.

Il passo (1) di solito viene risolto tramite gli invarianti. Detto alla buona, un *invariante* è una funzione che associa a ogni quadrica un numero in modo che a due quadriche equivalenti venga sempre associato lo stesso numero. Il passo (1) viene allora considerato soltanto se si riesce a trovare un insieme di invarianti tali che due quadriche siano equivalenti se e solo se hanno esattamente gli stessi invarianti. La lista del passo (2) allora deve contenere una quadrica per ogni possibile valore degli invarianti; queste quadriche si chiamano di solito *forme canoniche*.

Chiarito questo, cominciamo a lavorare definendo ufficialmente cos'è una quadrica. Daremos la definizione in \mathbb{R}^n , ma da un certo punto in poi ci concentreremo soprattutto sui casi $n = 2$ ed $n = 3$.

Definizione 15.10

Indichiamo con $\mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali in n variabili di grado minore o uguale a 2. Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio di secondo grado. La quadrica \mathcal{Q}_p di *equazione* p è il luogo dei punti di \mathbb{R}^n le cui coordinate soddisfano l'equazione $p(x_1, \dots, x_n) = 0$. In altri termini

$$\mathcal{Q}_p = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid p(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Quando $n = 2$, la quadrica \mathcal{Q}_p sarà detta *conica* di equazione p e indicata con \mathcal{C}_p .

Esempio 15.2

Se $p(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1$, la conica \mathcal{C}_p è la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Se invece $p(x, y) = y^2 + 2x$, la conica \mathcal{C}_p è la parabola di equazione $x = -y^2/2$. □

Ora dobbiamo decidere quando due polinomi di secondo grado p e q determinano quadriche equivalenti. Vi è una situazione ovvia in cui questo accade: se esiste un $\sigma \neq 0$ tale che $q = \sigma p$, è evidente che \mathcal{Q}_q e \mathcal{Q}_p sono proprio lo stesso insieme.

Ma questo non è l'unico caso. Una quadrica è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , con una sua forma e un suo aspetto geometrico indipendente da dove si trova in quel momento – ovvero indipendente dal sistema di coordinate scelto. In altri termini, se cambiamo coordinate l'equazione che descrive la quadrica può mutare, ma la quadrica come insieme rimane essenzialmente la stessa. Dunque se due polinomi sono ottenuti l'uno dall'altro tramite un cambiamento di coordinate affine (o metrico), allora descrivono essenzialmente la stessa quadrica. Ricordando i Paragrafi 10.7 e 12.1 siamo quindi portati alla seguente definizione.

Definizione 15.11

Due polinomi $p, q \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ sono *affinamente equivalenti* se esistono $\sigma \in \mathbb{R}^*$, $B \in GL_n(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$q(x') = \sigma p(Bx' + c);$$

in tal caso $p(x) = \sigma^{-1}q(B^{-1}x - B^{-1}c)$. Se inoltre $B \in O(n)$ è ortogonale, diremo che p e q sono *metricamente equivalenti*. Se p e q sono affinamente (metricamente) equivalenti, diremo anche che le quadriche \mathcal{Q}_p e \mathcal{Q}_q sono *affinamente (metricamente) equivalenti*.

In altri termini, due quadriche sono affinamente (metricamente) equivalenti se esiste un cambiamento affine (metrico) di coordinate che porta l'equazione della prima in un multiplo dell'equazione della seconda.

Osservazione 15.7

Due quadriche metricamente equivalenti sono sempre affinamente equivalenti, ma il viceversa non è vero. Per esempio, vedremo tra poco che l'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ è affinamente ma non metricamente equivalente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Osservazione 15.8

La fondamentale differenza fra l'equivalenza metrica e quella affine è che due quadriche metricamente equivalenti sono a tutti gli effetti lo stesso insieme disegnato in posti diversi di \mathbb{R}^n , mentre due quadriche affinamente equivalenti hanno soltanto la stessa “forma”.

Infatti, l'equivalenza metrica conserva tutte le proprietà metriche (distanze fra punti, angoli, eccetera), mentre l'equivalenza affine conserva solo le proprietà affini (appartenenza, limitatezza, numero di pezzi, allineamenti, eccetera). Per esempio, due circonferenze di raggio diverso sono affinamente equivalenti (hanno essenzialmente la stessa forma) ma non sono metricamente equivalenti (hanno raggi diversi).

Osservazione 15.9

La definizione da noi scelta privilegia l'equivalenza *algebrica* delle equazioni sull'equivalenza *geometrica* degli insiemi: se esiste (a sistema di coordinate fissato) un'isometria (o un'affinità) che porta la quadrica Q_p nella quadrica Q_q allora le due quadriche sono metricamente (o affinamente) equivalenti; il viceversa, in alcuni casi degeneri, non è vero. Il problema è dovuto al fatto che siccome siamo sui numeri reali l'equazione $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ potrebbe non avere soluzioni. Per esempio, vedremo che le coniche di equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$ e $x^2 + 1 = 0$ non sono neppure affinamente equivalenti, anche se entrambe descrivono l'insieme vuoto (in quanto nessun punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfa alcuna delle due equazioni).

Osservazione 15.10

Se le precedenti osservazioni ti risultano per il momento oscure, rileggile dopo aver finito di studiare questo paragrafo; a quel punto saranno (speriamo...) molto più chiare.

Il nostro obiettivo è classificare le quadriche in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 rispetto all'equivalenza affine. Dunque vogliamo associare ai polinomi di secondo grado degli invarianti affini, e trovare una lista di quadriche in forma canonica, a cui tutte le altre siano equivalenti. Per dare un'idea degli insiemi di cui stiamo parlando, elenchiamo subito quelle che risulteranno essere le forme canoniche affini delle coniche in \mathbb{R}^2 e delle quadriche in \mathbb{R}^3 .

Esempio 15.3

Le coniche tipo, a cui cercheremo di ricondurre tutte le altre, sono:

- (a) l'*ellisse reale*, di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- (b) l'*iperbole*, di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
- (c) la *parabola*, di equazione $x^2 - y = 0$;
- (d) l'*ellisse immaginaria*, di equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
- (e) le *rette reali incidenti*, di equazione $x^2 - y^2 = 0$;
- (f) le *rette complesse incidenti*, di equazione $x^2 + y^2 = 0$;
- (g) le *rette reali parallele*, di equazione $x^2 - 1 = 0$;
- (h) le *rette complesse parallele*, di equazione $x^2 + 1 = 0$;
- (i) le *rette coincidenti*, di equazione $x^2 = 0$.

Come vedremo, le coniche di tipo (a)–(d) sono *non degeneri*, e le altre *degeneri*. L'ellisse immaginaria e le rette complesse parallele descrivono in realtà entrambe l'insieme vuoto, come anticipato nell'Osservazione 15.9; le rette complesse incidenti sono un punto, e le rette coincidenti sono l'asse y "contato due volte". Le altre coniche in forma canonica affine sono mostrate nella Figura 15.6. □

Osservazione 15.11

Il motivo per cui abbiamo voluto chiamare "ellisse reale" la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ è che, come vedremo, tutte le ellissi sono affinamente (ma non metricamente) equivalenti a essa. La Figura 15.6.(a) rappresenta proprio la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$, mentre la Figura 15.6.(a') rappresenta un'ellisse la cui equazione non è in forma canonica affine.

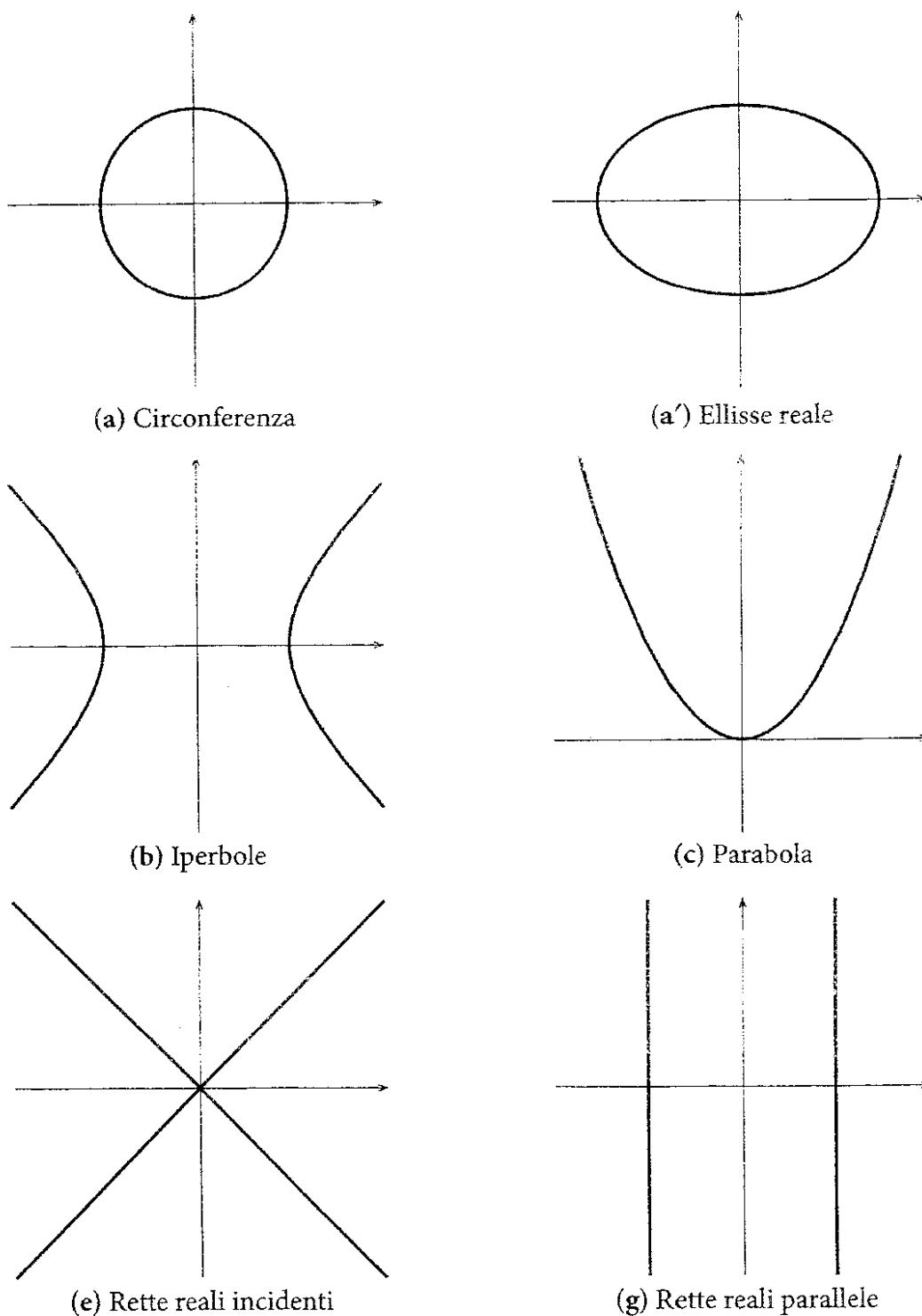


Figura 15.6 - Coniche in forma canonica affine.

Osservazione 15.12

La conica di equazione $x^2 + y^2 = 0$ è chiamata "rette complesse incidenti" perché il polinomio $x^2 + y^2$ si spezza nel prodotto $(x + iy)(x - iy)$ di due fattori lineari a coefficienti complessi che si annullano nell'origine, esattamente come il polinomio $x^2 - y^2$ definente le "rette reali incidenti" si spezza nel prodotto $(x - y)(x + y)$ di due fattori lineari a coefficienti reali che si annullano entrambi nell'origine. L'origine del nome "rette complesse parallele" per la conica di equazione $x^2 + 1 = 0$ è analogo: il polinomio $x^2 + 1$ si fattorizza come prodotto $(x + i)(x - i)$ di due polinomi lineari a coefficienti complessi senza zeri in comune, proprio come $x^2 - 1$ si fattorizza come prodotto $(x - 1)(x + 1)$ di due polinomi lineari a coefficienti reali senza zeri in comune.

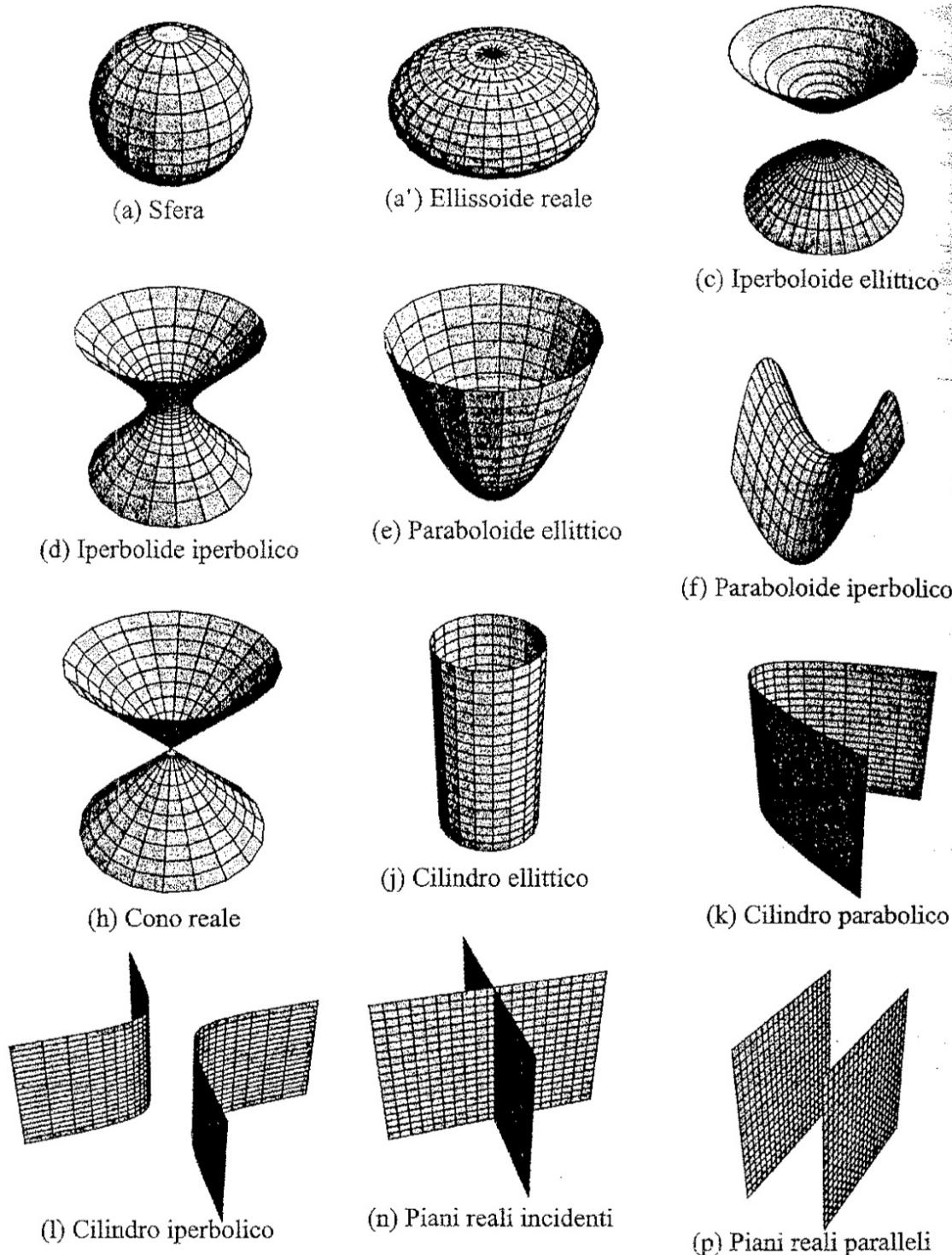


Figura 15.7 - Quadriche in forma canonica affine.

Esempio 15.4

La lista delle quadriche tipo in \mathbb{R}^3 è sensibilmente più lunga. Si tratta di:

- l'*ellissoide reale*, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;
- l'*ellissoide immaginario*, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$;
- l'*iperboloide ellittico*, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$;
- l'*iperboloide iperbolico*, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;
- il *paraboloide ellittico*, di equazione $x^2 + y^2 - z = 0$;

- (f) il *paraboloido iperbolico*, di equazione $x^2 - y^2 - z = 0$;
- (g) il *cono immaginario*, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
- (h) il *cono reale*, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
- (i) il *cilindro immaginario*, di equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
- (j) il *cilindro ellittico*, di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- (k) il *cilindro parabolico*, di equazione $x^2 - y = 0$;
- (l) il *cilindro iperbolico*, di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
- (m) i *piani complessi incidenti*, di equazione $x^2 + y^2 = 0$;
- (n) i *piani reali incidenti*, di equazione $x^2 - y^2 = 0$;
- (o) i *piani complessi paralleli*, di equazione $x^2 + 1 = 0$;
- (p) i *piani reali paralleli*, di equazione $x^2 - 1 = 0$;
- (q) i *piani coincidenti*, di equazione $x^2 = 0$.

Alcune di queste quadriche sono rappresentate nella Figura 15.7.



Osservazione 15.13

In modo analogo a quanto fatto per ellissi e circonferenze, abbiamo chiamato “ellissoide reale” la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Un esempio di ellissoide non in forma canonica affine è nella Figura 15.7.(a’).

Un polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ di secondo grado in n variabili si può scrivere

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^n a_{j,n+1} x_j + a_{n+1,n+1}, \quad (15.17)$$

con $a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j = 1, \dots, n$. Vogliamo scrivere p in maniera più compatta ed espansiva. Al polinomio p (e quindi alla quadrica \mathcal{Q}_p) associamo la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R}),$$

e la sua sottomatrice

$$\mathcal{A}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

Allora possiamo scrivere (esercizio)

$$p(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & & & \\ x_1 & \cdots & x_n & 1 \\ \vdots & & & \\ x_n & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{vmatrix},$$

o anche

$$p(x) = \tilde{x}^T A \tilde{x}, \quad (15.18)$$

dove useremo sempre la convenzione che se $x \in \mathbb{R}^n$ allora $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ è ottenuto da x aggiungendo 1 come ultima coordinata.

Inoltre, se indichiamo con

$$p^{(2)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

la *parte quadratica* di p , abbiamo anche che

$$p^{(2)}(x_1, \dots, x_n) = x^T A_n x.$$

Poniamo inoltre

$$b = \begin{vmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \alpha = a_{n+1,n+1},$$

in modo da poter scrivere la matrice A nella forma

$$A = \left| \begin{array}{c|c} A_n & b \\ \hline b^T & \alpha \end{array} \right|$$

e il polinomio p nella forma

$$p(x) = x^T A_n x + 2b^T x + \alpha.$$

Definizione 15.12

La matrice A è detta *associata* alla quadrica Q_p (o al polinomio p). Diremo che la quadrica è *degenere* se $\det A = 0$, e *non degenere* altrimenti. Gli *assi* della quadrica sono gli autovettori di A_n .

Osservazione 15.14

La matrice A è l'*unica* matrice simmetrica per cui vale (15.18), e quindi grazie alla quale possiamo studiare le quadriche con le tecniche fornite dal Teorema spettrale. È per questo motivo che associamo al polinomio p proprio la matrice A e non un'altra.

Ora, a un cambiamento di coordinate affine (o metrico) $x = Bx' + c$ possiamo associare la matrice

$$\tilde{B} = \left| \begin{array}{c|c} B & c \\ \hline O & 1 \end{array} \right| \in GL_{n+1}(\mathbb{R}), \quad (15.19)$$

in modo da avere $x = Bx' + c$ se e solo se

$$\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{x}'.$$

La condizione di equivalenza fra due polinomi $p(x) = \tilde{x}^T A \tilde{x}$ e $q(x') = (\tilde{x}')^T A' \tilde{x}'$ diventa allora

$$(\tilde{x}')^T A' \tilde{x}' = q(x') = \sigma p(Bx' + c) = \sigma p(x) = \tilde{x}^T \sigma A \tilde{x} = (\tilde{x})^T (\sigma \tilde{B}^T A \tilde{B}) \tilde{x}'.$$

Dunque due quadriche di matrici associate A e A' sono equivalenti se e solo se

$$A' = \sigma \tilde{B}^T A \tilde{B}, \quad (15.20)$$

e abbiamo dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 15.2

Due quadriche di matrici associate A e A' sono affinamente equivalenti se e solo se esiste $\sigma \in \mathbb{R}^*$ tale che σA e A' siano congruenti tramite una matrice della forma (15.19). Le due quadriche sono metricamente equivalenti se e solo se esiste $\sigma \in \mathbb{R}^*$ tale che σA e A' siano congruenti tramite una matrice della forma (15.19) con B ortogonale.

Nota anche che (15.20) implica (esercizio)

$$A'_n = \sigma B^T A_n B, \quad b' = \sigma B^T (A_n c + b) \quad \text{e} \quad \alpha' = \sigma p(c). \quad (15.21)$$

In particolare abbiamo il seguente corollario.

Corollario 15.3

Se le quadriche \mathcal{Q}_p e $\mathcal{Q}_{p'}$ di matrice associata rispettivamente A e A' sono affinamente equivalenti, allora $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ e $\operatorname{rg} A_n = \operatorname{rg} A'_n$. Inoltre, se n è dispari allora $\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\det A')$, mentre se n è pari $\operatorname{sgn}(\det A_n) = \operatorname{sgn}(\det A'_n)$. Infine, una quadrica degenere e una non degenere non possono essere affinamente equivalenti, come pure una quadrica in cui A (o A_n) sia una matrice simmetrica semidefinita con una in cui A (oppure A_n) sia una matrice simmetrica indefinita.

Dimostrazione

È immediato vedere che A e $\tilde{B}^T A \tilde{B}$ (come pure A_n e $B^T A_n B$) hanno uguale rango e uguale segno del determinante, e che una induce un prodotto scalare semidefinito (rispettivamente, indefinito) se e solo se l'altra lo fa. Siccome moltiplicare per $\sigma \neq 0$ non cambia il rango, moltiplica il segno del determinante per il segno di σ elevato alla dimensione della matrice, e manda matrici semidefinite (rispettivamente, indefinite) in matrici semidefinite (rispettivamente, indefinite), ci siamo. \square

Ricordando quanto detto all'inizio di questo paragrafo, possiamo dire che *il rango della matrice A associata a una quadrica e quello della sottomatrice A_n sono invarianti affini delle quadriche; il segno del determinante di A è un invariante affine se n è dispari, mentre se n è pari lo è il segno del determinante di A_n .*

Osservazione 15.15

Contrariamente a quanto si potrebbe immaginare, la matrice \tilde{B} può *non* essere ortogonale anche se B è ortogonale; quindi gli autovalori di A *non* sono invarianti metrici delle quadriche.

Sia allora \mathcal{Q}_p una quadrica di equazione $p(x_1, \dots, x_n) = 0$, dove p è espresso come in (15.18); vogliamo vedere quanto riusciamo a semplificare p con cambiamenti metrici e affini di coordinate.

Cominciamo col semplificare la parte quadratica di p . Siccome A_n è una matrice simmetrica, il Corollario 14.4 ci fornisce una matrice ortogonale $B \in O(n)$ tale che $A'_n = B^T A_n B$ sia diagonale; possiamo anche supporre che gli elementi sulla diagonale di A'_n (che sono gli autovalori di A_n) siano ordinati mettendo prima tutti quelli positivi, poi tutti quelli negativi e infine quelli nulli. Allora effettuando il cambiamento metrico di coordinate $x = Bx'$ troviamo che il polinomio p è metricamente equivalente a un polinomio della forma

$$p_1(x'_1, \dots, x'_n) = \lambda_1(x'_1)^2 + \dots + \lambda_r(x'_r)^2 + 2(b')^T x' + \alpha, \quad (15.22)$$

dove $r = \operatorname{rg} \mathcal{A}_n = \operatorname{rg} \mathcal{A}'_n$

$$b' = B^T b = \begin{vmatrix} a'_{1,n+1} \\ \vdots \\ a'_{n,n+1} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori non nulli di \mathcal{A}_n . Inoltre, come detto, a meno dell'ordine possiamo anche supporre che $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\rho > 0 > \lambda_{\rho+1} \geq \dots \geq \lambda_r$, dove $\rho \geq 0$ è il numero di autovalori positivi di \mathcal{A}_n .

Passiamo ai termini di primo grado. Ricordando (15.21) si vede subito che una traslazione $x' = X' + c$ elimina i termini di primo grado in p_1 se e solo se $c \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema $\mathcal{A}'_n x = -b'$. L'esistenza di una tale soluzione è una caratteristica affine delle quadriche.

Lemma 15.4

Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio di secondo grado, e $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ la sua matrice associata. Allora:

- (1) $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) \leq \operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 2$;
- (2) il sistema $\mathcal{A}_n x = -b$ ammette soluzione se e solo se $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$;
- (3) se $q \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ è un polinomio affinamente equivalente a p di matrice associata $A' \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$, allora il sistema $\mathcal{A}_n x = -b$ ammette soluzione se e solo se il sistema $\mathcal{A}'_n x' = -b'$ ammette soluzione.

Dimostrazione

Indichiamo con \tilde{A} la matrice completa del sistema $\mathcal{A}_n x = -b$. Siccome \tilde{A} si ottiene da \mathcal{A}_n aggiungendo una colonna, e A si ottiene da \tilde{A} aggiungendo una riga, è chiaro che

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) \leq \operatorname{rg}(\tilde{A}) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{rg}(\tilde{A}) \leq \operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\tilde{A}) + 1;$$

in particolare (1) segue immediatamente. Se il sistema $\mathcal{A}_n x = -b$ ha soluzione, il Teorema di Rouché-Capelli ci dice che $\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n)$, per cui $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$. Viceversa, se il sistema non ha soluzione necessariamente $\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$. Ma allora la matrice composta dalle prime n colonne di A (matrice che è la trasposta di \tilde{A}) ha rango $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$; se a questa aggiungiamo l'ultima colonna in modo da ottenere A , il rango aumenta ancora di 1, in quanto l'ultima colonna è linearmente indipendente dalle prime n (essendolo in \tilde{A}). Dunque se il sistema non ha soluzione necessariamente $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 2$, e anche (2) è dimostrata.

Se q è affinamente equivalente a p , si ha $\operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(A)$ e $\operatorname{rg}(\mathcal{A}'_n) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n)$, per cui (3) è conseguenza di (2), e abbiamo finito. \square

Definizione 15.13

Sia \mathcal{Q}_p una quadrica di matrice associata $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$. Diremo che \mathcal{Q}_p è a centro se il sistema $\mathcal{A}_n x = -b$ ammette una soluzione; altrimenti diremo che \mathcal{Q}_p è un paraboloid. Ogni soluzione del sistema $\mathcal{A}_n x = -b$ è detta centro della quadrica. Nota che il Lemma 15.4 ci dice che \mathcal{Q}_p è a centro se e solo se $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$, e che è un paraboloid se e solo se $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_n) + 2$.

Osservazione 15.16

L'origine di questa terminologia è la seguente: se \mathcal{Q}_p è a centro, e $c_0 \in \mathbb{R}^n$ è una qualunque soluzione del sistema $\mathcal{A}_n x = -b$, allora \mathcal{Q}_p è simmetrica rispetto a c_0 . Per dimostrar-

lo, effettuiamo il cambiamento di coordinate $x = x' + c_0$ che porta c_0 nell'origine, e indichiamo con $q \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ il polinomio dato da $q(x') = p(x' + c_0)$; chiaramente, \mathcal{Q}_p è simmetrica rispetto a c_0 se e solo se \mathcal{Q}_q è simmetrica rispetto all'origine. Ora, le formule (15.21) ci dicono che

$$q(x') = (x')^T \mathcal{A}_n x' + p(c_0);$$

in particolare, $q(-x') = q(x')$. Dunque $x' \in \mathcal{Q}_q$ se e solo se $-x' \in \mathcal{Q}_q$, cioè \mathcal{Q}_q è simmetrica rispetto all'origine.

Proseguiamo nello studio della quadrica \mathcal{Q}_p considerando prima di tutto il caso in cui sia a centro. Eravamo arrivati a dimostrare che \mathcal{Q}_p è metricamente equivalente a \mathcal{Q}_{p_1} , dove p_1 è dato da (15.22). Allora effettuando un cambiamento di coordinate del tipo

$$x' = X' + c_0,$$

dove $c_0 \in \mathbb{R}^n$ è un centro di \mathcal{Q}_{p_1} , il polinomio p_1 si trasforma in

$$p_2(X'_1, \dots, X'_n) = \lambda_1(X'_1)^2 + \dots + \lambda_r(X'_r)^2 + \alpha',$$

dove $\alpha' = p_1(c_0)$. A questo punto dobbiamo considerare due sottocasi.

(I) $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_n)$. In questo caso si deve necessariamente avere $\alpha' = 0$ (perché?). Dunque p è equivalente a un polinomio della forma

$$p_2(X'_1, \dots, X'_n) = \lambda_1(X'_1)^2 + \dots + \lambda_r(X'_r)^2,$$

con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\rho > 0 > \lambda_{\rho+1} \geq \dots \geq \lambda_r$. Ora, il cambiamento di coordinate affine

$$X''_j = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_j|} X'_j & \text{per } j = 1, \dots, r, \\ X'_j & \text{per } j = r+1, \dots, n \end{cases}$$

trasforma il polinomio p_2 nel polinomio

$$p_0(X''_1, \dots, X''_n) = (X''_1)^2 + \dots + (X''_\rho)^2 - (X''_{\rho+1})^2 - \dots - (X''_r)^2 \quad (15.23)$$

dove ρ è il numero di autovalori positivi di A . Inoltre, a meno di moltiplicare per -1 possiamo anche supporre che $\rho \geq r - \rho$, cioè che il numero dei segni $+$ sia maggiore o uguale al numero dei segni $-$.

(II) $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$. In questo caso (perché?) $\alpha' \neq 0$. Dividiamo allora p_2 per $|\alpha'| > 0$ ed effettuiamo il cambiamento affine di coordinate

$$X''_j = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_j| / |\alpha'|} X'_j & \text{per } j = 1, \dots, r, \\ X'_j & \text{per } j = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

In questo modo vediamo che p è affinamente equivalente a un polinomio della forma

$$p_\pm(X''_1, \dots, X''_n) = (X''_1)^2 + \dots + (X''_\rho)^2 - (X''_{\rho+1})^2 - \dots - (X''_r)^2 \pm 1, \quad (15.24)$$

dove ρ è il numero di autovalori positivi di \mathcal{A}_n , e possiamo di nuovo supporre che $\rho \geq r - \rho$.

Osservazione 15.17

Se $\rho = r - \rho$ allora il polinomio p_+ è metricamente equivalente a p_- : infatti il cambiamento metrico di coordinate

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} X''_{j+\rho} & \text{se } 1 \leq j \leq \rho, \\ X''_{j-\rho} & \text{se } \rho + 1 \leq j \leq 2\rho = r, \\ X''_j & \text{se } 2\rho + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

trasforma il polinomio p_+ nel polinomio $-p_-$.

Esempio 15.5

Le coniche di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$ e $x^2 - y^2 + 1 = 0$ sono metricamente equivalenti: basta scambiare x con y e moltiplicare per -1 . □

Riassumendo, abbiamo dimostrato che *ogni quadrica a centro è affinamente equivalente a una delle quadriche Q_{p_0} , Q_{p_+} o Q_{p_-}* . In particolare, le coniche a centro degeneri sono affinamente equivalenti a coppie di rette (reali o complesse, incidenti, parallele o coincidenti); le coniche a centro non degeneri sono affinamente equivalenti a ellissi (reali o immaginarie) o a iperboli. Nello spazio le quadriche a centro degeneri sono affinamente equivalenti a coni (reali o immaginari), a cilindri (immaginari, ellittici, o iperbolici), o a coppie di piani (reali o complessi, incidenti, paralleli o coincidenti); e le quadriche a centro non degeneri sono affinamente equivalenti a ellissodi (reali o immaginari) o a iperbolidi (iperbolici o ellittici).

Osservazione 15.18

Di fatto abbiamo dimostrato che se Q_p è una quadrica a centro allora tramite cambiamenti affini di variabile e moltiplicazione per numeri positivi il polinomio p è affinamente equivalente a un polinomio della forma (15.23) o (15.24), dove $\rho \geq 0$ è il numero degli autovalori positivi di A_n (ma non stiamo supponendo $\rho \geq r - \rho$). Quindi le operazioni effettuate non hanno modificato il segno dei determinanti di A e di A_n .

Il caso dei paraboloidi è sensibilmente più complicato; qui ci limiteremo a trattare i casi più importanti per le applicazioni, cioè le coniche in \mathbb{R}^2 e le quadriche in \mathbb{R}^3 , lasciando lo studio generale agli esercizi (vedi l'Esercizio 15.21).

(III) *Paraboloidi in \mathbb{R}^2* . Siccome il rango di A è al massimo $n + 1 = 3$, affinché la conica C_p sia un paraboloide si deve avere $\operatorname{rg} A_2 = 1$. Quindi p è metricamente equivalente al polinomio

$$p_1(x'_1, x'_2) = \lambda_1(x'_1)^2 + 2b'_1 x'_1 + 2b'_2 x'_2 + \alpha',$$

con $b'_2 \neq 0$, perché altrimenti la conica sarebbe a centro, e $\lambda_1 > 0$. Dividiamo allora per $-2b'_2$ ed effettuiamo il cambiamento affine di coordinate

$$\begin{cases} X'_1 = \sqrt{\lambda_1/2|b'_2|}x'_1, \\ X'_2 = x'_2, \end{cases}$$

in modo da ricondurci a un polinomio della forma

$$p_2(X'_1, X'_2) = \pm(X'_1)^2 + 2b''_1 X'_1 - X'_2 + \alpha''.$$

Infine, con il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X''_1 = X'_1 \mp b''_1, \\ X''_2 = \pm X'_2 \mp \alpha'' + (b''_1)^2, \end{cases}$$

e moltiplicando se necessario per -1 , otteniamo che p è affinamente equivalente al polinomio

$$p_*(X''_1, X''_2) = (X''_1)^2 - X''_2.$$

In altre parole, ogni conica non a centro è affinamente equivalente a una parabola.

(IV) *Paraboloidi in \mathbb{R}^3* . Dobbiamo considerare due casi.

(IV.1) $\operatorname{rg} A = 3$ e $\operatorname{rg} \mathcal{A}_3 = 1$. In questo caso p è metricamente equivalente al polinomio

$$p_1(x'_1, x'_2) = \lambda_1(x'_1)^2 + 2b'_1 x'_1 + 2b'_2 x'_2 + 2b'_3 x'_3 + \alpha',$$

con $(b'_2, b'_3) \neq (0, 0)$, perché altrimenti la quadrica sarebbe a centro, e $\lambda_1 > 0$. Le formule (15.21) ci dicono (perché?) che possiamo trovare una matrice ortogonale $B \in O(3)$ tale che il cambiamento di coordinate $x' = Bx''$ trasformi p_1 in un polinomio della forma

$$p_2(x''_1, x''_2, x''_3) = \lambda_1(x''_1)^2 + 2b''_1 x''_1 + 2b''_2 x''_2 + \alpha'',$$

con $b''_2 \neq 0$. Allora possiamo procedere come nel caso (III) senza più toccare la terza coordinata, e p risulta essere affinamente equivalente al polinomio

$$p_*(X''_1, X''_2, X''_3) = (X''_1)^2 - X''_2.$$

Dunque in questo caso \mathcal{Q}_p è affinamente equivalente a un cilindro parabolico.

(IV.2) $\operatorname{rg} A = 4$ e $\operatorname{rg} \mathcal{A}_3 = 2$. In questo caso p è metricamente equivalente al polinomio

$$p_1(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + 2b'_1 x'_1 + 2b'_2 x'_2 + 2b'_3 x'_3 + \alpha',$$

con $b'_3 \neq 0$, perché altrimenti la quadrica sarebbe a centro, e $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Prima di tutto, applicando il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X'_1 = x'_1 + b'_1/\lambda_1, \\ X'_2 = x'_2 + b'_2/\lambda_2, \\ X'_3 = x'_3, \end{cases}$$

e poi dividendo per $-2b'_3$ trasformiamo p_1 in un polinomio della forma

$$p_2(X'_1, X'_2, X'_3) = \lambda'_1(X'_1)^2 + \lambda'_2(X'_2)^2 - X'_3 + \alpha'',$$

con $\lambda'_1 \lambda'_2 \neq 0$. Effettuando poi il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} X''_1 = \sqrt{|\lambda'_1|} X'_1, \\ X''_2 = \sqrt{|\lambda'_2|} X'_2, \\ X''_3 = X'_3 - \alpha'', \end{cases}$$

vediamo che p è affinamente equivalente a un polinomio della forma

$$p_3(X''_1, X''_2, X''_3) = \pm(X''_1)^2 \pm (X''_2)^2 - X''_3.$$

Infine, moltiplicando per -1 e cambiando di segno la terza coordinata, vediamo che l'unica cosa che conta è se i coefficienti dei due termini quadrati sono concordi o discordi, per cui p è affinamente equivalente a

$$p_{*\pm}(X''_1, X''_2, X''_3) = (X''_1)^2 \pm (X''_2)^2 - X''_3.$$

Dunque in questo caso \mathcal{Q}_p è affinamente equivalente a un paraboloide ellittico o iperbolico.

Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 15.5

Ogni conica è affinamente equivalente a una di quelle elencate nell’Esempio 15.3, e ogni quadrica nello spazio è affinamente equivalente a una elencata nell’Esempio 15.4. Inoltre, le coniche elencate nell’Esempio 15.3 e le quadriche elencate nell’Esempio 15.4 sono a due a due non affinamente equivalenti.

Dimostrazione

Abbiamo appena visto che ogni conica o quadrica nello spazio è affinamente equivalente a una di quelle elencate negli Esempi 15.3 e 15.4. Siccome il Corollario 15.3 permette (vedi gli Esercizi 15.5 e 15.6) di distinguere tutte le coniche dell’Esempio 15.3, e tutte le quadriche dell’Esempio 15.4, abbiamo finito. \square

Osservazione 15.19

In pratica, per determinare la forma canonica affine di una quadrica \mathcal{Q}_p nel piano o nello spazio si procede in questo modo. Prima di tutto si confronta il rango di A con il rango di \mathcal{A}_n per decidere se si tratta di una quadrica a centro o un paraboloide. In quest’ultimo caso, se $\text{rg}(\mathcal{A}_n) = 1$ abbiamo finito; se $\text{rg}(\mathcal{A}_n) = 2$ si usa il Criterio di Cartesio (Teorema 14.8) per stabilire se gli autovalori di \mathcal{A}_n sono concordi o discordi.

Se invece \mathcal{Q}_p è a centro, si usa il Criterio di Cartesio su \mathcal{A}_n per stabilire il numero ρ di autovalori positivi di \mathcal{A}_n . Se $\rho < \text{rg}(\mathcal{A}_n) - \rho$, moltiplichiamo il polinomio p per -1 . Se $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_n)$ abbiamo finito; se invece $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_n) + 1$, applichiamo il Criterio di Cartesio ad A per stabilire il segno del termine noto (positivo se A ha un autovalore positivo in più rispetto ad \mathcal{A}_n , negativo altrimenti). Nota che se A è non-degenera per stabilire il segno del termine noto basta confrontare il segno del determinante di A con il segno del determinante di \mathcal{A}_n (dopo aver moltiplicato p per -1 in caso fosse necessario; confronta con l’Osservazione 15.18).

Questa procedura è particolarmente semplice per le coniche ($n = 2$) non degeneri, in quanto per stabilire se gli autovalori di \mathcal{A}_2 sono concordi o discordi (o nulli) basta guardare il segno del determinante. Quindi una conica non degenera ($\det A \neq 0$) è un’iperbole se $\det \mathcal{A}_2 < 0$, una parabola se $\det \mathcal{A}_2 = 0$ e un’ellisse se $\det \mathcal{A}_2 > 0$ (reale se inoltre $\det A < 0$ e immaginaria se $\det A > 0$)."

Esempio 15.6

Vogliamo trovare la forma canonica affine della conica di equazione

$$p(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 32 = 0.$$

Le matrici associate a questa conica sono

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 32 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Abbiamo $\det A = -128$ e $\det \mathcal{A}_2 = 16$, per cui la conica è a centro e non degenera. Il polinomio caratteristico di \mathcal{A}_2 è $p_{\mathcal{A}_2}(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 16$, per cui \mathcal{A}_2 ha due autovalori positivi. Inoltre $\det A$ è discorde da $\det \mathcal{A}_2$, per cui possiamo concludere che la forma canonica affine è $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, cioè \mathcal{C}_p è un’ellisse reale (vedi la Figura 15.8). \square

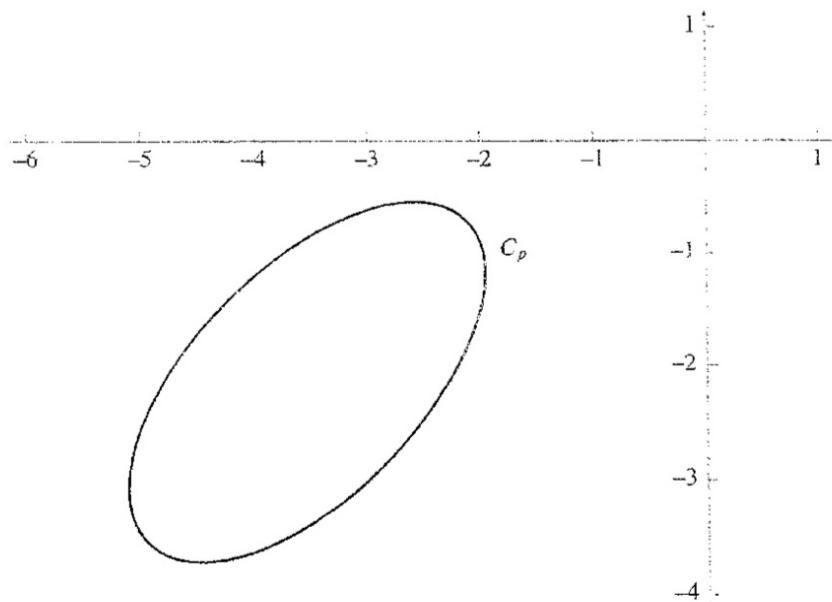


Figura 15.8 - Ellisso reale.

Esempio 15.7

Vogliamo studiare la famiglia di coniche C_{p_k} associate ai polinomi

$$p_k(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2kx_1x_2 - 2kx_1 - 2x_2 + 1,$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Le matrici simmetriche associate $A(k)$ e $\mathcal{A}_2(k)$ sono date rispettivamente da

$$A(k) = \begin{vmatrix} 1 & k & -k \\ k & 2 & -1 \\ -k & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_2(k) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{vmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $\mathcal{A}_2(k)$ è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - k^2$. Quindi se $|k| < \sqrt{2}$ ci sono 2 variazioni, ovvero 2 autovalori positivi; se $|k| > \sqrt{2}$ c'è una sola variazione, e dunque un autovalore positivo e uno negativo; e se $|k| = \sqrt{2}$ la matrice $\mathcal{A}_2(k)$ ha rango 1 con un autovalore positivo. Inoltre $\det A(k) = 1 - k^2$, ed è quindi positivo se e solo se $|k| < 1$, mentre è negativo se e solo se $|k| > 1$.

Dunque: se $|k| < 1$ la conica è a centro, la parte quadratica ha 2 autovalori positivi e il determinante di $A(k)$ è positivo, per cui siamo in presenza di un'ellisse immaginaria; se $|k| = 1$ la parte quadratica ha ancora 2 autovalori positivi mentre il determinante di $A(k)$ è nullo, per cui si tratta di rette complesse incidenti. Se poi $1 < |k| < \sqrt{2}$, la parte quadratica ha sempre 2 autovalori positivi, mentre $\det A(k)$ è negativo, per cui siamo in presenza di un'ellisse reale; nel caso $|k| = \sqrt{2}$ abbiamo $\operatorname{rg} A(k) = \operatorname{rg} \mathcal{A}_2(k) + 2$, per cui C_{p_k} è una parabola; infine se $|k| > \sqrt{2}$ la parte quadratica è indefinita non degenere e $A(k)$ è non degenere, per cui abbiamo un'iperbole (vedi la Figura 15.9). □

Esempio 15.8

Consideriamo la quadrica $\mathcal{Q}_p \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$p(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2z + 4 = 0.$$

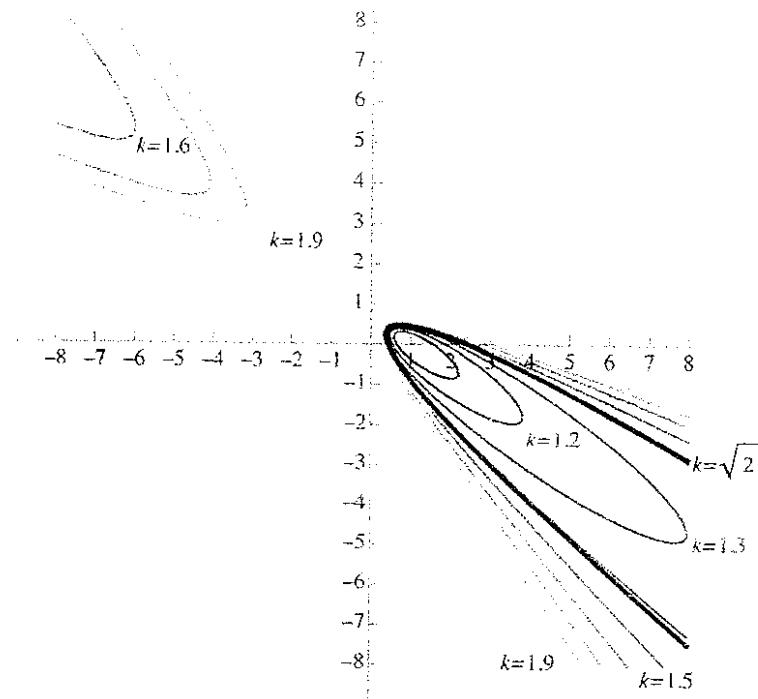


Figura 15.9 - Famiglia di coniche.

Le matrici associate sono

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

calcolando i polinomi caratteristici e applicando il Criterio di Cartesio vediamo subito che $\operatorname{rg}(A) = 3$ e $\operatorname{rg}(A_3) = 1$. Dunque si tratta di un paraboloido degenere, di forma canonica affine $X^2 - Y = 0$, cioè un cilindro parabolico (vedi la Figura 15.10). □

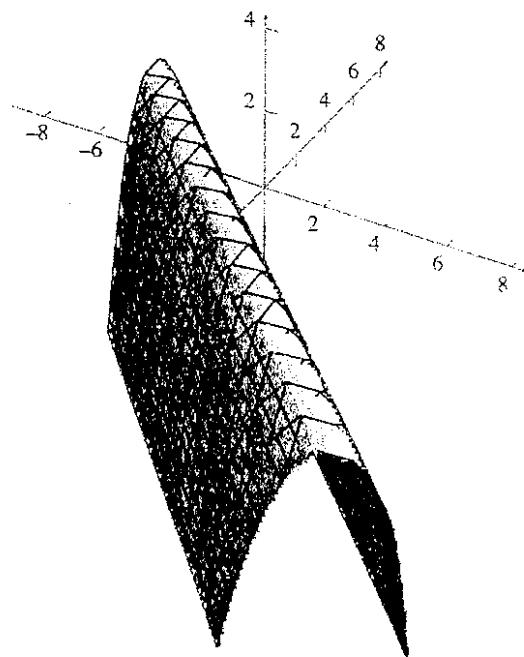


Figura 15.10 - Cilindro parabolico.

15.3 Fasci di coniche

Un tipico problema che può capitare di dover risolvere consiste nel trovare una conica che soddisfi certe condizioni. Per esempio, potremmo aver bisogno di una conica passante per alcuni punti dati, o che sia tangente a una retta data.

Osservazione 15.20

In generale, occorrono cinque punti per determinare una conica. Infatti richiedere che la conica di equazione $p(x, y) = 0$, dove p è dato da (15.9), passi per il punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ equivale a richiedere che i coefficienti della conica soddisfino l'equazione lineare omogenea $p(x_0, y_0) = 0$. Siccome i coefficienti della conica sono 6, ma coefficienti proporzionali identificano la stessa conica, occorrono cinque equazioni lineari omogenee indipendenti per determinare in modo unico la conica. Infatti lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di cinque equazioni indipendenti in sei incognite ha dimensione uno, per cui individua un'unica conica.

Osservazione 15.21

Richiedere che una data retta sia tangente in un dato punto a una conica equivale a scrivere due equazioni lineari omogenee che devono essere soddisfatte dai coefficienti della conica. Infatti, a meno di cambiamenti di coordinate possiamo supporre che il punto sia l'origine e che la retta abbia equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = lt, \\ y = mt. \end{cases}$$

Allora se la conica ha equazione $p(x, y) = 0$ data da (15.9), l'origine appartiene alla conica se e solo se

$$f = 0;$$

inoltre, in questo caso l'equazione $p(lt, mt) = 0$ ha un'unica soluzione (o infinite soluzioni) se e solo se

$$ld + me = 0, \quad (15.25)$$

per cui i coefficienti della conica devono soddisfare due equazioni lineari omogenee.

Per determinare la conica che soddisfa certe condizioni non sempre conviene scrivere direttamente le condizioni e risolvere il sistema; lo studio dei fasci di coniche fornisce un altro metodo possibile.

Definizione 15.14

Siano \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q due coniche distinte. Il fascio di coniche generato da \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q è l'insieme delle coniche di equazione

$$\lambda p(x, y) + \mu q(x, y) = 0. \quad (15.26)$$

ai variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. La Figura 15.11 mostra un tipico fascio di coniche.

Osservazione 15.22

Come al solito, coppie (λ, μ) proporzionali determinano la stessa conica, per cui le coniche del fascio dipendono essenzialmente da un solo parametro, il rapporto μ/λ .

Osservazione 15.23

L'equazione (15.26), per certi valori di λ e μ , potrebbe non essere l'equazione di una conica, come succede nell'esempio seguente.

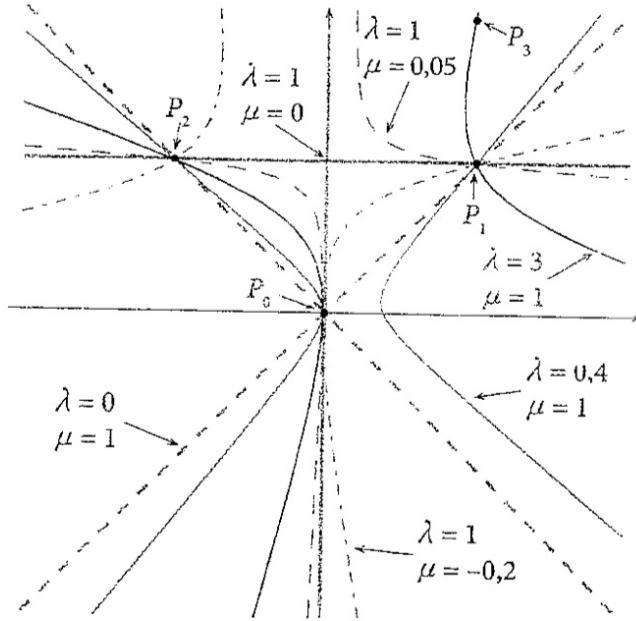


Figura 15.11 - Un fascio di coniche.

Esempio 15.9

Sia $p(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ e $q(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$. Allora la generica conica del fascio generato da \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q ha equazione

$$(\lambda + \mu)x^2 - (\lambda + \mu)y^2 - \mu x - \mu y - \lambda = 0.$$

Se $\lambda = -\mu = 1$ questa equazione però diventa $x + y - 1 = 0$, che è l'equazione di una retta. □

Definizione 15.15

Un fascio di coniche si dice *improprio* se per certi valori dei parametri l'equazione della conica del fascio non è più di secondo grado.

Consideriamo il fascio generato dalle coniche \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q . È evidente che se un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ appartiene a entrambe le coniche – cioè soddisfa $p(x_0, y_0) = 0$ e $q(x_0, y_0) = 0$ – allora appartiene a tutte le coniche del fascio. Analogamente se una retta r_0 è tangente sia a \mathcal{C}_p sia a \mathcal{C}_q nello stesso punto P_0 allora è tangente in quel punto a tutte le coniche del fascio: infatti, supposto (come possiamo) $P_0 = O$, se la condizione (15.25) è soddisfatta sia da p sia da q è chiaramente soddisfatta anche da tutte le combinazioni lineari di p e q .

Questa osservazione suggerisce un metodo alternativo per trovare le coniche soddisfacenti certe condizioni; vediamolo all'opera su un paio di esempi.

Esempio 15.10

Vogliamo la conica passante per cinque punti dati P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 . Cominciamo scrivendo l'equazione della conica degenere composta dalle rette passanti rispettivamente per P_1 e P_2 , e per P_3 e P_4 ; poi scriviamo l'equazione della conica degenere composta dalle rette passanti rispettivamente per P_1 e P_3 e per P_2 e P_4 . Consideriamo poi il fascio generato da queste due coniche; la conica cercata è allora la (di solito unica) conica del fascio che passa anche per P_5 . Vediamo un esempio numerico. Siano $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (-1, -1)$, $P_4 = (1, -1)$ e $P_5 = (2, 0)$. La retta passante per P_1 e P_2 ha equazione

$y - 1 = 0$; la retta passante per P_3 e P_4 ha equazione $y + 1 = 0$. Quindi la prima conica del fascio è definita dal polinomio

$$p(x, y) = (y - 1)(y + 1) = y^2 - 1.$$

La retta passante per P_1 e P_3 ha equazione $x - y = 0$; la retta passante per P_2 e P_4 ha equazione $x + y = 0$. Quindi la seconda conica del fascio è definita dal polinomio

$$q(x, y) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Dunque dobbiamo trovare per quali $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la conica definita dal polinomio

$$\lambda p(x, y) + \mu q(x, y) = \mu x^2 + (\lambda - \mu)y^2 - \lambda$$

passa per P_5 . Perché ciò accada λ e μ devono soddisfare $4\mu - \lambda = 0$, per cui la conica cercata ha (vedi la Figura 15.12) equazione

$$x^2 + 3y^2 - 4 = 0.$$

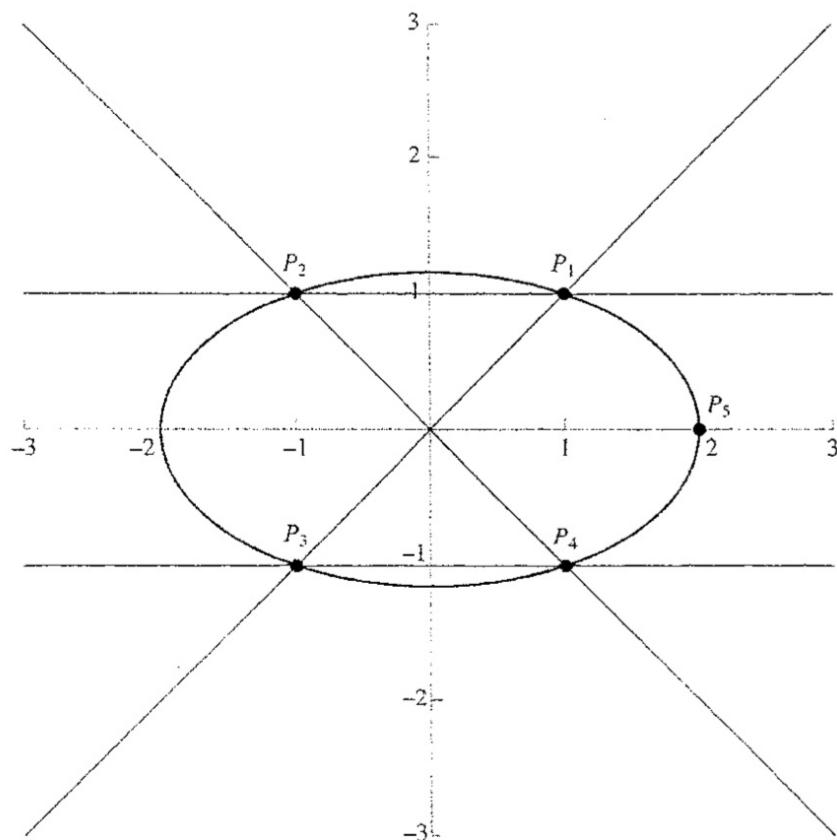


Figura 15.12 - Conica per cinque punti.

Esempio 15.11

Vogliamo la conica passante per tre punti P_1, P_2, P_3 e tangente in P_0 alla retta r . Stavolta prendiamo come prima conica degenere quella composta dalla retta r e dalla retta passante per P_1 e P_2 . Come seconda conica degenere prendiamo quella composta dalla retta passante per P_0 e P_1 e dalla retta passante per P_0 e P_2 (nota che ogni retta passante per P_0 è tangente a questa conica degenere). Allora la conica cercata sarà la conica del fascio generato da queste due che passa per P_3 .

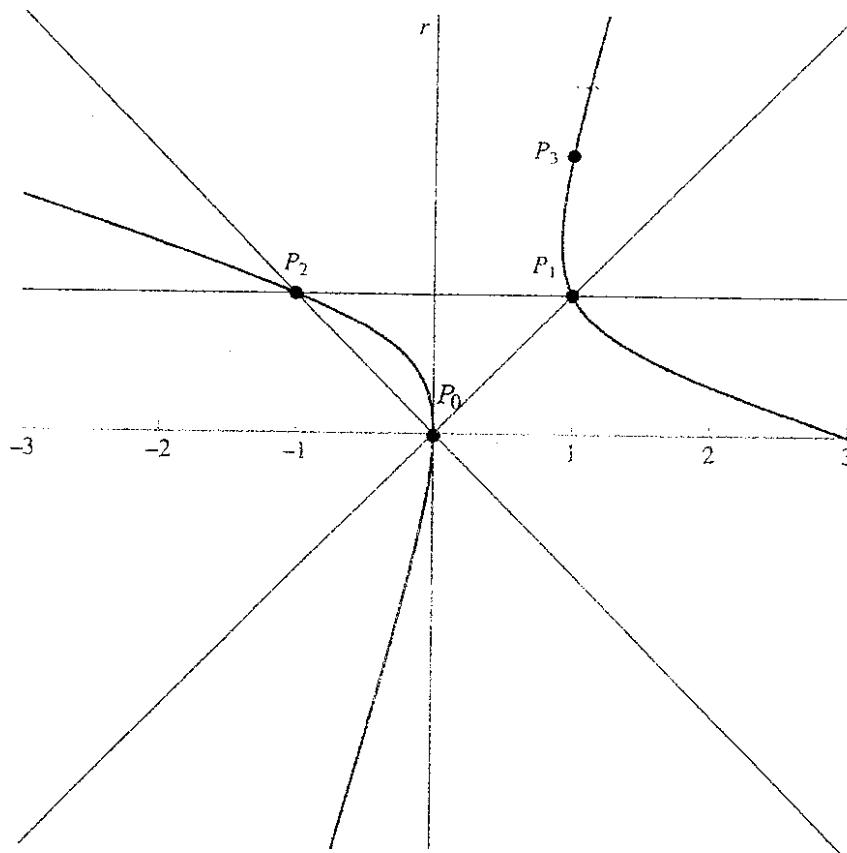


Figura 15.13 - Conica per tre punti e tangente a una retta.

Vediamo un esempio numerico. Vogliamo trovare la conica passante per $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$ e $P_3 = (1, 2)$, e tangente in $P_0 = (0, 0)$ alla retta $x = 0$. La retta passante per P_1 e P_2 ha equazione $y - 1 = 0$, per cui la prima conica degenere è definita dal polinomio

$$p(x, y) = x(y - 1) = xy - x.$$

La retta passante per P_0 e P_1 ha equazione $x - y = 0$, mentre la retta passante per P_0 e P_2 ha equazione $x + y = 0$; quindi la seconda conica degenere è definita dal polinomio

$$q(x, y) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 0.$$

La generica conica del fascio (rappresentato nella Figura 15.11) è dunque data dal polinomio

$$\lambda p(x, y) + \mu q(x, y) = \mu x^2 - \mu y^2 + \lambda xy - \lambda x.$$

Questa conica passa per P_3 se e solo se $\lambda - 3\mu = 0$, e quindi la conica cercata (vedi la Figura 15.13) ha equazione

$$x^2 - y^2 + 3xy - 3x = 0.$$

15.4 Coni, cilindri e sfere

Concludiamo il capitolo studiando un po' più in dettaglio coni, cilindri e sfere in \mathcal{E}^3 .

Definizione 15.16

Sia $\pi \subset \mathcal{E}^3$ un piano, $\sigma \subset \pi$ una curva e $r \subset \mathcal{E}^3$ una retta non parallela a π . Il *cilindro* di base σ e asse r è l'insieme delle rette parallele a r passanti per i punti di σ .

Definizione 15.17

Sia $\pi \subset \mathcal{E}^3$ un piano, $\sigma \subset \pi$ una curva e $P_0 \notin \pi$ un punto esterno a π . Il *cono di base* γ e *vertice* P_0 è l'insieme delle rette congiungenti P_0 ai punti di σ .

Il cilindro e il cono più noti sono quelli *circolari retti*, in cui la base è una circonferenza, e (per il cilindro) l'asse è ortogonale al piano π , o (per il cono) la proiezione ortogonale del vertice P_0 sul piano π è il centro della circonferenza. Ne esistono però molti altri; la Figura 15.14 contiene alcuni esempi.

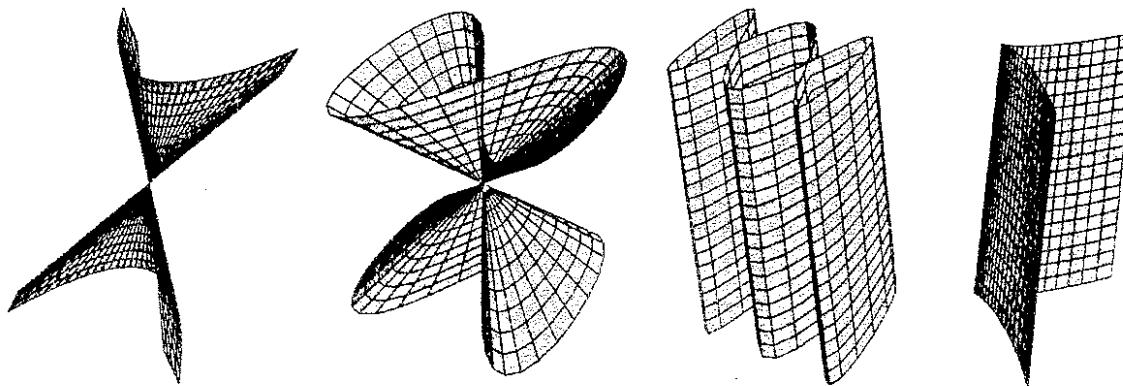


Figura 15.14 - Esempi di coni e cilindri.

È facile trovare le equazioni parametriche di cilindri e coni; cominciamo coi cilindri. Scegliamo il sistema di riferimento cartesiano in modo che il piano π abbia equazione $z = 0$, e l'asse r passi per l'origine. In questo sistema la curva σ avrà equazioni parametriche del tipo

$$\sigma(t) = (f(t), g(t), 0)$$

per opportune funzioni f, g , e quindi il cilindro avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(t) + sl, \\ y = g(t) + sm, \\ z = sn, \end{cases} \quad (15.27)$$

dove (l, m, n) con $n \neq 0$ sono le coordinate di un vettore direttore di r .

Per i coni, poniamo l'origine nel vertice, e facciamo in modo che il piano π abbia equazione $z = 1$. Stavolta la curva σ avrà equazioni parametriche del tipo

$$\sigma(t) = (f(t), g(t), 1),$$

per cui il cono avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = sf(t), \\ y = sg(t), \\ z = s. \end{cases} \quad (15.28)$$

Vediamo ora le equazioni cartesiane, cominciando nuovamente dai cilindri. Il sistema di riferimento cartesiano scelto è sempre quello di prima. Supponiamo che la curva σ abbia equazione cartesiana $F(x, y) = 0$; in particolare $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che

$$F(f(t), g(t)) \equiv 0.$$

Da (15.27) ricaviamo $s = z/n$, $f(t) = x - ls$ e $g(t) = y - ms$, per cui le equazioni cartesiane del cilindro sono

$$F(x - (l/n)z, y - (m/n)z) = 0. \quad (15.29)$$

In maniera assolutamente analoga troviamo che equazioni cartesiane per il cono dato da (15.28) sono

$$F(x/z, y/z) = 0. \quad (15.30)$$

Osservazione 15.24

In particolare, le formule (15.29) e (15.30) ci dicono che coni e cilindri aventi per base una conica sono quadriche nello spazio. Viceversa, non è difficile verificare (Esercizio 15.29) che il cono e i cilindri elencati nell'Esempio 15.4, come pure ogni altra quadrica affinamente equivalente a essi, sono coni e cilindri anche secondo le Definizioni 15.16 e 15.17. Ovviamente, coni e cilindri di base una curva che non sia una conica in generale non sono quadriche.

Esempio 15.12

Vogliamo equazioni parametriche e cartesiane del cilindro circolare retto. Prendiamo come base σ la circonferenza di raggio $\rho > 0$ e centro nell'origine che ha equazione parametrica $\sigma(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$ ed equazione cartesiana $x^2 + y^2 = \rho^2$. Un vettore direttore dell'asse del cilindro retto è e_3 ; quindi otteniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos t, \\ y = \rho \sin t, \\ z = s, \end{cases} \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

come equazioni parametriche e cartesiane del cilindro circolare retto. Più in generale, se il cilindro non è retto, cioè se il vettore direttore del cilindro ha coordinate (l, m, n) con $(l, m) \neq (0, 0)$, troviamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos t + sl, \\ y = \rho \sin t + sm, \\ z = sn, \end{cases} \quad \text{e} \quad \left(x - \frac{l}{n} z \right)^2 + \left(y - \frac{m}{n} z \right)^2 = \rho^2.$$

Osservazione 15.25

Ogni punto di \mathbb{R}^3 è contenuto in un unico cilindro circolare retto con base una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = \rho^2$. In altre parole, per ogni $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esistono (e sono unici se $x^2 + y^2 > 0$) numeri $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

I tre numeri (ρ, θ, z) sono le *coordinate cilindriche* del punto $P \in \mathbb{R}^3$ (vedi la Figura 15.15).

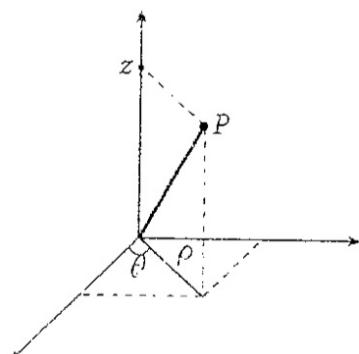


Figura 15.15 - Coordinate cilindriche.

Esempio 15.13

Vogliamo equazioni parametriche e cartesiane del cono circolare retto. Le equazioni della base σ sono come nell'esempio precedente; quindi otteniamo

$$\begin{cases} x = s\rho \cos t, \\ y = s\rho \sin t, \\ z = s, \end{cases}$$

come equazioni parametriche, e $(x/z)^2 + (y/z)^2 = 1$, o meglio

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

come equazioni cartesiane. Più in generale, se il cono non è retto, cioè se la circonferenza σ ha centro nel punto $(x_0, y_0, 1)$ con $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, troviamo

$$\begin{cases} x = s(\rho \cos t + x_0), \\ y = s(\rho \sin t + y_0), \\ z = s, \end{cases}$$

come equazioni parametriche, e $((x/z) - x_0)^2 + ((y/z) - y_0)^2 = 1$, cioè

$$(x - x_0 z)^2 + (y - y_0 z)^2 = z^2,$$

come equazioni cartesiane. □

Concludiamo parlando della sfera.

Definizione 15.18

La sfera S di centro $C \in \mathcal{E}^3$ e raggio $r > 0$ è il luogo dei punti di \mathcal{E}^3 che sono a distanza r dal centro C , cioè

$$S = \{P \in \mathcal{E}^3 \mid d(P, C) = r\}.$$

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano qualunque. L'equazione cartesiana della sfera di centro $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e raggio $r > 0$ è ovviamente

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Per trovare le equazioni parametriche, scriviamo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 - (z - z_0)^2$$

con $z - z_0 \in [-r, r]$. Ora, esiste un unico $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che $z - z_0 = r \sin \theta$; ma allora $r^2 - (z - z_0)^2 = r^2 \cos^2 \theta$ e quindi il punto (x, y) appartiene alla circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $r \cos \theta$. Questo implica che

$$(x - x_0, y - y_0) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi)$$

per qualche $\varphi \in [0, 2\pi]$, da cui deduciamo che le equazioni parametriche della sfera S di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio r sono

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi + x_0, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi + y_0, \\ z = r \sin \theta + z_0. \end{cases}$$

Osservazione 15.26

Ciascun punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a un'unica sfera di centro l'origine; quindi esistono (unici se il punto P non appartiene all'asse z) numeri $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases}$$

I tre numeri (r, θ, φ) sono le *coordinate sferiche* del punto $P \in \mathbb{R}^3$; θ è la *latitudine*, e φ è la *longitudine* di P (vedi la Figura 15.16).

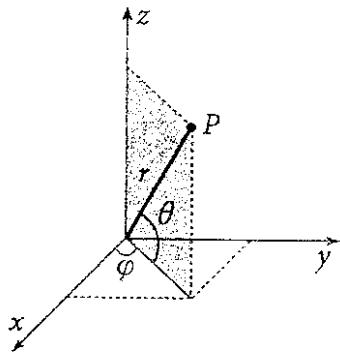


Figura 15.16 - Coordinate sferiche.

Vediamo infine in quali posizioni reciproche si possono trovare un piano π e una sfera S (vedi la Figura 15.17). Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'origine sia il centro di S , in modo che quest'ultima abbia equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sia $P = P_0 + sv_1 + tv_2$ un'equazione parametrica del piano π , dove possiamo supporre che $\{v_1, v_2\}$ sia una base ortonormale del sottospazio di giacitura di π . Sostituendo l'equazione parametrica del piano nell'equazione cartesiana della sfera e sviluppando i conti troviamo

$$(s + \langle v_1, P_0 \rangle)^2 + (t + \langle v_2, P_0 \rangle)^2 = r^2 - \|P_0\|^2 + \langle v_1, P_0 \rangle^2 + \langle v_2, P_0 \rangle^2.$$

Questa è l'equazione di una circonferenza in π se il secondo membro è positivo (e in tal caso diremo che il piano è *secante* alla sfera); di un punto di π se il secondo membro è nullo (e in tal caso il piano è *tangente* alla sfera); e non è mai soddisfatta se il secondo membro è negativo (il piano è *esterno* alla sfera). In particolare, se $P_0 \in S$ (cioè se $\|P_0\|^2 = r^2$) l'intersezione si riduce al solo punto P_0 se e solo se il piano π è ortogonale a $\overrightarrow{OP_0}$ (cioè al raggio della sfera). In particolare, il piano tangente alla sfera S , avente centro l'origine e raggio $r > 0$, nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ ha equazione

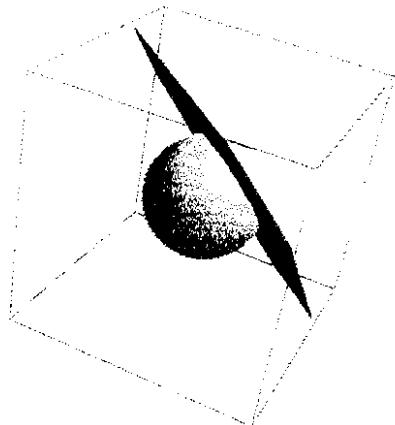
$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0,$$

cioè

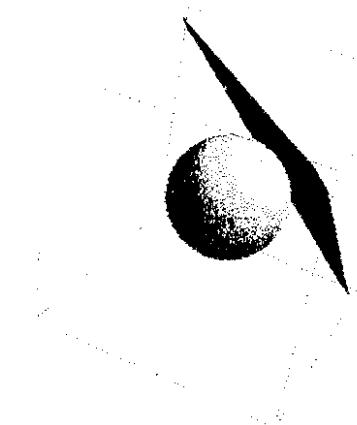
$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$$

dove $r > 0$ è il raggio della sfera. Più in generale, prendiamo una sfera S di centro $C = (a, b, c)$ e raggio $r > 0$. Il piano tangente a S in un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ è il piano π ortogonale al raggio della sfera terminante in P_0 , che ha equazione

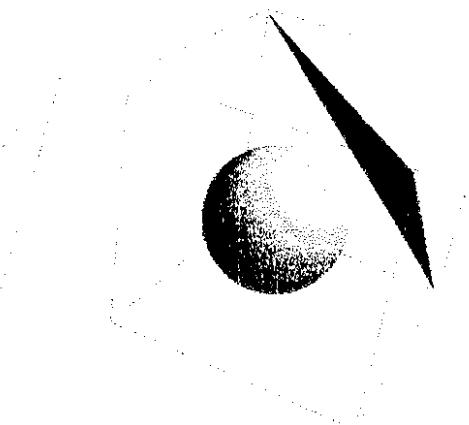
$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = 0.$$



(a)



(b)



(c)

Figura 15.17 - (a) Piano secante; (b) piano tangente; (c) piano esterno.

Esercizi 15

- 15.1** Scrivi un'equazione per le seguenti coniche:
- la circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio 3 ;
 - la parabola di asse $x = 0$, vertice $(0, -4)$ e passante per $(-2, 0)$;
 - l'ellisse di fuochi $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ ed eccentricità $4/5$;
 - l'iperbole con gli assi coordinati come asintoti e passante per il punto $(3, -2)$.
- 15.2** Determina la retta tangente:
- alla circonferenza del precedente esercizio passante per il punto $(4, 2)$;
 - alla parabola del precedente esercizio passante per il punto $(-2, 0)$;
 - all'ellisse del precedente esercizio passante per il punto $(5/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$;
 - all'iperbole del precedente esercizio passante per il punto $(3, -2)$.
- 15.3** Sia $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica tale che $\text{sp}(S) = \{0\}$. Dimostra che S è la matrice nulla. Deduci che se $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ è un polinomio di secondo grado di matrice associata A , allora \mathcal{A}_n ha sempre un autovalore non nullo.
- 15.4** Scopri quali delle coniche elencate nell'Esempio 15.3 e quali delle quadriche elencate nell'Esempio 15.4 sono a centro, e quali dei paraboloidi.
- 15.5** Per tutte le coniche dell'Esempio 15.3 calcola rango e determinante di A e di \mathcal{A}_2 , e determina se il prodotto scalare rappresentato da A su \mathbb{R}^3 e quello rappresentato da \mathcal{A}_2 su \mathbb{R}^2 sono semidefiniti o indefiniti. Deduci che le coniche dell'Esempio 15.3 sono tutte a due a due non affinamente equivalenti.
- 15.6** Per tutte le quadriche dell'Esempio 15.4 calcola rango e determinante di A e di \mathcal{A}_3 , e determina se il prodotto scalare rappresentato da A su \mathbb{R}^4 e quello rappresentato da \mathcal{A}_3 su \mathbb{R}^3 sono semidefiniti o indefiniti. Deduci quindi che le quadriche dell'Esempio 15.4 sono tutte a due a due non affinamente equivalenti.
- 15.7** Determina centro e assi delle coniche di equazione $x^2 + 3xy + y^2 + 8x + 7y = 0$ e $2x^2 + 5xy + 14y^2 - 3x + 18y = 0$.
- 15.8** Trova un cambiamento di coordinate che riduca in forma canonica affine la conica di equazione $x^2 + 4xy + 2y^2 - x - y - 1 = 0$.
- 15.9** Determina la forma canonica affine della conica di equazione

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$$

individuandone se possibile centro e assi.

15.10 Trova la forma canonica affine delle coniche di equazione

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2 &= 0; & xy + x - 3y + 4 &= 0; \\ x^2 + 6xy + 2y^2 + 4y - 1 &= 0; & 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

15.11 Al variare del parametro reale k stabilisci quando la conica descritta dall'equazione $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$ è non degenere e determina la sua forma canonica affine.

15.12 Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determina la forma canonica affine delle coniche di equazione:

$$\begin{aligned} (k+1)x^2 + (k-1)y^2 + 2kx + 2y - 1 &= 0; & x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 &= 0; \\ kx^2 + 2\sqrt{k}xy + 3y^2 + 2\sqrt{k}x + k &= 0; & kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

15.13 Trova la forma canonica affine delle quadriche di equazione

$$\begin{aligned} 5x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x - 2z &= 0; & x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + \sqrt{2}x + 2y + 3\sqrt{2}z + 3 &= 0; \\ x^2 + 2yz - 2x + 2z - 1 &= 0; & x^2 + 6xy + 2y^2 + 4yz + 2x - 2y + 4 &= 0; \\ 5x^2 + 6xy + y^2 - 4xz - z^2 - 6x - 4y + 2z + 1 &= 0; \\ x^2 - 2xy + 4yz + 2x - 2y - 3 &= 0; & 3x^2 + 2xy + 4y^2 - 7z^2 - 6x - 4y + 2z - 13 &= 0. \end{aligned}$$

15.14 Trova la forma canonica affine delle quadriche di equazione

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x - 2z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + \sqrt{2}x + 2y + 3\sqrt{2}z + 3 = 0,$$

e successivamente trova cambiamenti di coordinate che le riducano in forma canonica affine.

15.15 Al variare di $k \in \mathbb{R}$ trova la forma canonica affine della quadrica di equazione

$$x^2 + 2yz - 2x + 2z - k = 0.$$

15.16 Al variare di $k \in \mathbb{R}$ trova la forma canonica affine della quadrica di equazione

$$x^2 + 4kxy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0.$$

15.17 Dato il polinomio $p(x, y, z) = x^2 + 2xz - z^2 + 2x - 4y + 4z$, trova la forma canonica affine della quadrica $\mathcal{Q}_p \subset \mathbb{R}^3$, e determina la forma canonica affine delle coniche che si ottengono intersecando \mathcal{Q}_p con i piani coordinati.

15.18 Al variare di $k \in \mathbb{R}$ trova la forma canonica affine della conica ottenuta intersecando il piano π_k di equazione $x - ky - z = k$ con la quadrica di equazione $x^2 + 2xz - y^2 + 2z - 5 = 0$.

15.19 Stabilisci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2xz + 4yz - kz^2 + 2x - 4y + 8z - 3 = 0$$

è a centro.

15.20 Stabilisci per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione

$$4xy + 3y^2 + 6xz + 4kyz - z^2 + 6x + 2x + 5 = 0$$

è a centro.

15.21 Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio di secondo grado in n variabili. Indichiamo con A e \mathcal{A}_n le matrici simmetriche associate, e siano r il rango di \mathcal{A}_n e $\rho \geq 0$ il numero di autovalori positivi di \mathcal{A}_n . Dimostra che p è affinamente equivalente a uno dei seguenti polinomi.

$$p_0(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\rho^2 - x_{\rho+1}^2 - \dots - x_r^2;$$

$$p_\pm(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_\rho^2 - x_{\rho+1}^2 - \dots - x_r^2 \pm 1;$$

$$p_*(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_\rho^2 - x_{\rho+1}^2 - \dots - x_r^2 - x_{r+1}^2.$$

15.22 Disegna le coniche appartenenti al fascio dell’Esempio 15.9 per diversi valori dei parametri λ e μ , cercando di capire come cambia la conica quando il valore del rapporto λ/μ tende a -1 .

15.23 Dimostra che il fascio di coniche generato dalle coniche \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q è improprio se e solo se $q^{(2)} = \sigma p^{(2)}$ per qualche $\sigma \in \mathbb{R}^*$.

15.24 Siano \mathcal{C}_{p_1} e \mathcal{C}_{q_1} due coniche distinte del fascio generato da \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q . Dimostra che l’insieme delle coniche del fascio generato da \mathcal{C}_{p_1} e \mathcal{C}_{q_1} coincide con l’insieme delle coniche del fascio generato da \mathcal{C}_p e \mathcal{C}_q .

15.25 Trova la conica passante per i punti $(0, 0)$, $(2, 7)$, $(7, 2)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$.

15.26 Trova la conica passante per i punti $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 7)$ e tangente alla retta di equazione $2x - y - 1 = 0$ nel punto $(0, -1)$.

15.27 Trova la conica passante per i punti $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$.

15.28 Trova la conica passante per i punti $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -3)$ e tangente alla retta di equazione $3x - 2y + 1 = 0$ nel punto $(0, 1)$.

15.29 Dimostra che il cono e i cilindri elencati nell’Esempio 15.4, come pure ogni altra quadrica affinamente equivalente a essi, sono coni e cilindri anche secondo le Definizioni 15.16 e 15.17.

15.30 Trova per quali valori di k il piano di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - k = 0$ è tangente alla sfera di equazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 6x_3 - 8 = 0$.

15.31 Trova l’espressione delle coordinate cilindriche e sferiche di un punto di \mathbb{R}^3 in termini delle coordinate cartesiane.

Appendice A

Soluzioni di una parte degli esercizi proposti nel testo

Capitolo 1 - Nozioni preliminari

- [1.1] $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B \setminus C = \{2, 4, 8\}$; $C \setminus B = \{3, 7\}$; $A \times C = \{(1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 6), (2, 7), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (5, 3), (5, 6), (5, 7), (6, 3), (6, 6), (6, 7)\}$; $(A \cup B) \cap C = \{6\}$.
- [1.2] $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{N} \setminus B$ è l'insieme dei numeri naturali pari, $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$.
- [1.6] 12.
- [1.13] Se $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$, poiché $b \in f(A_1)$ esiste $a_1 \in A_1$ tale che $b = f(a_1)$. Inoltre $a_1 \notin A_2$, perché altrimenti si avrebbe $b \in f(A_2)$; pertanto $b = f(a_1)$ con $a_1 \in A_1 \setminus A_2$. Se $A = B = \mathbb{R}$, $A_1 = [-2, +\infty)$, $A_2 = (-\infty, -1]$, $f(x) = x^2$ allora $f(A_1) = [0, +\infty)$, $f(A_2) = [1, +\infty)$, $f(A_1) \setminus f(A_2) = [0, 1)$ e $f(A_1 \setminus A_2) = [0, +\infty)$.
- [1.17] È iniettivo se e solo se è surgettivo se e solo se $a = 0$ e $b \neq 0$, indipendentemente dai valori di c .
- [1.18] Non sono iniettive b) ed e), in quanto in entrambi i casi $f(1) = f(-1)$; le altre tre sono iniettive.
- [1.25] Se $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$ allora $g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$ e quindi $g \circ f$ non sarebbe iniettiva. Se $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ hai che f e $g \circ f$ sono iniettive, mentre g non lo è.
- [1.28] Sono vere b), c), f). La risposta a 1. è b), la risposta a 2. è f).

Capitolo 2 - Vettori geometrici

[2.7] $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}; F_B(\overrightarrow{OD_2}) = \begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix}$.

[2.10] $a = 20$.

[2.12] Non sono proporzionali per $a \neq -2$. Per questi valori di a si ha

$$F_{B_a}(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 3 \\ \frac{a+2}{a-4} \\ \frac{a+2}{a+2} \end{vmatrix}.$$

2.16 $a = 4$.

2.17 Le due rette si intersecano nel punto $\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$, che si ottiene per $t = 1$ e $t' = -2$.

2.22 $a = 15$.

2.27 Le rette r e s_a si intersecano quando $a \neq -1/3$, e in tal caso il punto di intersezione è $\begin{vmatrix} (6a-14)/(3a+1) \\ (5a+7)/(3a+1) \end{vmatrix}$.

Capitolo 3 - L'eliminazione di Gauss

3.7 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$. Il secondo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{vmatrix}$.

3.9 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/18 \\ 1/18 \\ -2/9 \\ 0 \end{vmatrix}$. Il secondo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{vmatrix}$.

3.12 Il primo sistema per $k \neq 0, \pm 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$; per $k = 0$ il sistema ha

una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t; \end{cases}$

retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 1-t, \\ x_3 = t; \end{cases}$ per $k = -2$ il sistema ha

una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 2-t, \\ x_2 = 1-t, \\ x_3 = t. \end{cases}$ Il secondo sistema per

$k \neq -\frac{4}{3}$, 1 ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21/(3k+4) \\ -19/(6k+8) \\ 33/(3k+4) \end{vmatrix}$; per $k = -4/3$ non ammette

soluzioni; per $k = 1$ risulta avere una retta di soluzioni, di equazioni parametriche

$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 - \frac{1}{2}t, \\ z = t. \end{cases}$ Il terzo sistema per $k \neq 1$ non ammette soluzioni, mentre per $k = 1$ ha

una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = t. \end{cases}$

3.13 Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k} + 5 - \frac{5}{2}k - k^2 \\ k - \frac{1}{2} \\ -3 - \frac{1}{k} \\ k + 1 \end{vmatrix}; \text{ per } k = 0 \text{ il si-}$$

stema non ammette soluzioni; per $k = 1$ il sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni

parametriche $\begin{cases} x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}t, \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \\ z = 2 - 3t, \\ w = t. \end{cases}$

3.14 La prima matrice è singolare, mentre la seconda non lo è.

3.22 Calcolo dei pivot senza scambi di righe:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & -3 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -13 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -14 \end{array} \right|$$

per cui i pivot sono $p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = -14$, la loro somma è $p_1 + p_2 + p_3 = -15$ (e il loro prodotto è $p_1 p_2 p_3 = 28$). Calcolo dei pivot scambiando la prima e la terza riga:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & -3 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 2 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 2 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & 13/2 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 2 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{array} \right|,$$

per cui i pivot sono $q_1 = 2, q_2 = -4, q_3 = 7/2$, la loro somma è $q_1 + q_2 + q_3 = 3/2$ (e il loro prodotto è $q_1 q_2 q_3 = -28$). In particolare, nei due casi la somma dei pivot è completamente diversa (mentre il prodotto dei pivot è lo stesso cambiato di segno, come previsto in quanto abbiamo effettuato uno scambio di righe).

3.26 La prima matrice è singolare per $k = 6$. La seconda matrice è singolare per $k = 0, -1 + \sqrt{5}$ e $-1 - \sqrt{5}$.

3.29 Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ il membro sinistro diventa $1 + q$ e il membro destro diventa $(1 - q^2)/(1 - q)$, per cui l'affermazione segue subito dal prodotto notevole $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$ applicato con $a = q$. Supponiamo allora che l'affermazione sia vera per n , cioè che si abbia

$$(1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^n}) = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}$$

Allora

$$\begin{aligned} (1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^{n+1}}) &= [(1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^n})](1 + q^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1 - q^{2^{n+1}})}{1 - q} (1 + q^{2^{n+1}}) = \frac{1 - q^{2^{n+2}}}{1 - q}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi induttiva nella seconda eguaglianza, e lo stesso prodotto notevole di prima applicato con $a = q^{2^{n+1}}$ nella terza uguaglianza. Dunque la nostra affermazione è vera per $n = 0$, e se è vera per n è vera anche per $n + 1$; per il principio di induzione, la nostra affermazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Capitolo 4 - Spazi vettoriali

4.3 Se $\lambda = 0$, dall'assioma (7) nella Definizione 4.2 segue che $\lambda v = O$. Se $v = O$, sempre dagli assiomi si ottiene $\lambda O = \lambda(O + O) = \lambda O + \lambda O$ da cui, usando l'assioma (3), segue $\lambda O = O$. Se viceversa $\lambda v = O$ e $\lambda \neq 0$, allora

$$v = 1 \cdot v = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \right) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda v) = \frac{1}{\lambda} \cdot O = O.$$

4.8 Se e solo se $c = 0$.

4.11 Le coordinate del primo vettore sono rispettivamente $\begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$; quelle del secondo $\begin{vmatrix} 3 \\ -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$; quelle del terzo $\begin{vmatrix} 14 \\ -21 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{35}{3} \\ \frac{28}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 \\ 0 \end{vmatrix}$; quelle dell'ultimo $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$.

4.12 Da $\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_3) = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ per cui i vettori di \mathcal{B}_1 sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di \mathbb{R}^3 , e quindi sono una base di \mathbb{R}^3 . I vettori di \mathcal{B}_2 non sono una base di \mathbb{R}^3 perché sono linearmente dipendenti dato che $1 \cdot (e_1 + e_2) + 1 \cdot (e_1 + 2e_2 + e_3) - 1 \cdot (2e_1 + 3e_2 + e_3) = O$.

4.13 $\begin{vmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$.

4.14 $t \neq \pm 2$.

4.16 Da $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t + (\lambda_2 - \lambda_3)t^2 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ per cui i polinomi dati sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di $\mathbb{R}_2[t]$, e

pertanto formano una base di $\mathbb{R}_2[t]$. Le coordinate di q_1 rispetto a essa sono $\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$, mentre quelle di q_2 sono $\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$.

4.21 Se $\{w_1, \dots, w_p\}$ fosse un sistema di generatori di V potresti (Teorema 4.8) estrarre da esso una base, che quindi conterebbe meno di n vettori, contraddicendo il fatto che ogni base di V deve contenere n vettori, in quanto $\dim V = n$.

4.29 $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{N}\}$ è chiuso rispetto alla somma ma non rispetto al prodotto per scalari; $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non rispetto alla somma.

4.31 Per esempio $\mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \mathbb{R} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix}, \mathbb{R} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$, e ce ne sono infiniti altri: basta prendere $\mathbb{R}v_1$ dove v_1 non è un multiplo di v_0 .

4.36 $-1; 1; -8; -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

4.41 Scrivendo $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ l'equazione diventa

$$|z|^4 (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)) = |z|(\cos \theta - i \sin \theta),$$

da cui segue subito che $|z| = 0$ (e quindi $z = 0$) oppure $|z| = 1$. In quest'ultimo caso moltiplicando entrambi i membri per $\cos \theta + i \sin \theta$ otteniamo

$$\cos(5\theta) + i \sin(5\theta) = 1,$$

da cui segue che z è una radice quinta dell'unità, ovvero $z = \cos(2k\pi/5) + i \sin(2k\pi/5)$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Riassumendo, le soluzioni sono $z = 0$ e $z = \cos(2k\pi/5) + i \sin(2k\pi/5)$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Capitolo 5 - Applicazioni lineari

5.3 $k = -2$

5.4 $k = 1$; $\text{Ker } T_1 = \mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$.

5.7 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Se $T(x) = O$, in particolare si deve avere $x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$, da cui $x_1 = x_2 = 0$ e quindi T è iniettiva.

5.11 Si ha

$$\begin{aligned} T\left(\lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}\right) &= T \begin{vmatrix} \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f \\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h \end{vmatrix} \\ &= \lambda a + \mu e - 2(\lambda b + \mu f) + \lambda c + \mu g - (\lambda d + \mu h) \\ &= \lambda(a - 2b + c - d) + \mu(e - 2f + g - h) \\ &= \lambda \cdot T \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \cdot T \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

per cui T è lineare. Siccome $\text{Im } T \subseteq \mathbb{R}$ e $\text{Im } T \neq \{0\}$ abbiamo $\text{rg } T = 1$. Dal teorema del rango segue allora che $\dim \text{Ker } T = \dim M_{2,2}(\mathbb{R}) - \text{rg } T = 4 - 1 = 3$. Osserva adesso che le tre matrici $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ appartengono a $\text{Ker } T$ perché rispettivamente $1 - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0$, $-1 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 0$ e $2 - 2 \cdot 1 + 0 - 0 = 0$. Imponendo che la loro combinazione lineare con coefficienti α, β, γ sia nulla ottieni $\alpha - \beta + 2\gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$, quindi sono linearmente indipendenti; essendo 3 sono in numero uguale alla dimensione di $\text{Ker } T$ e pertanto ne costituiscono una base.

5.12 Si ha

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t) + \mu q(t)) &= \begin{vmatrix} \lambda p(1) + \mu q(1) \\ \lambda p(0) + \mu q(0) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} p(1) \\ p(0) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} q(1) \\ q(0) \end{vmatrix} \\ &= \lambda T(p(t)) + \mu T(q(t)), \end{aligned}$$

per cui T è lineare. Un polinomio $p \in \mathbb{R}_2[t]$ appartiene a $\text{Ker } T$ se e solo se $p(0) = p(1) = 0$, che accade se e solo se è divisibile per $t(t-1)$, e quindi $\text{Ker } T = \mathbb{R}(t^2 - t)$.

5.13 $\text{Im } T = \text{Im } S_a$ se e solo se $a = 4$. Inoltre $\dim(\text{Im } T \cap \text{Im } S_a)$ è uguale a 2 se $a = 4$, ed è uguale a 1 altrimenti.

5.19 1) Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{vmatrix}$, e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ 3x_4 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente

prendere $T = L_A$, dove $A = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{vmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ è una matrice tale che $A^3 = -A^1$ e $\{A^1, A^2, A^4\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .

2) Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 \end{vmatrix}$ e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente pren-

dere $T = L_A$ con $A = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.

3) Non è possibile trovare applicazioni lineari che soddisfino le condizioni date, perché tali condizioni contraddicono il teorema della dimensione.

5.25 Il rango della prima matrice è 3, il suo nucleo è $\{O\}$ e l'immagine è \mathbb{C}^3 . Il rango della seconda

matrice è 2, il suo nucleo è $\mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}$ e l'immagine è $\text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$. Il rango della terza ma-

trice è 1, il suo nucleo è $\text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} \right)$ e l'immagine è $\mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{vmatrix}$.

5.27 $A = \begin{vmatrix} 4 & i & -2 \\ i & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \end{vmatrix}$. Se $T(z) = 0$ allora $4z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0$, $iz_1 + z_3 = 0$ e $iz_1 - iz_3 = 0$.

Dalla terza equazione ricavi $z_3 = z_1$, sostituendo nella seconda $(1+i)z_1 = 0$, da cui $z_1 = 0$ (e quindi anche $z_3 = 0$). Infine sostituendo tali valori nella prima equazione otteniamo $iz_2 = 0$ che implica $z_2 = 0$, e pertanto T è iniettiva. Oppure puoi ridurre a scala la matrice A , ottenendo

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 4 & i & -2 \\ i & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \end{vmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{vmatrix} 4 & i & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}i \end{vmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{vmatrix} 4 & i & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & -1 - i \end{vmatrix} \end{array}$$

Quindi A è non singolare, per cui $\text{Ker } L_A = \{O\}$ e $T = L_A$ è iniettiva.

Capitolo 6 - Sistemi lineari

6.1 Il primo sistema ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t, \\ y = \frac{1}{3}t - s, \\ z = s, \\ v = -t, \\ w = t. \end{cases}$$

Il secondo sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(1-t), \\ y = \frac{1}{3}(1-4t), \\ z = t. \end{cases}$$

6.4 Il primo sistema ha soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{10}(13-i) \\ -\frac{1}{5}(28+14i) \\ -\frac{1}{2}(1-11i) \end{vmatrix}$. Il secondo sistema non ammette soluzioni.

6.5 Il primo sistema per $k \neq 0, 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 3/k \\ 1+3/k \end{vmatrix}$; per $k=0$ non ammette soluzioni; per $k=2$ ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1-s-t, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k^2+k-2}{k-2} \\ \frac{3k^3+2k^2-k(h+8)+2h}{(k-1)(k-2)} \\ \frac{3k^3+3k^2-k(h+9)+2h}{(k-1)(k-2)} \end{vmatrix};$$

per $k=1$ e $h \neq 3$ non ammette soluzioni; per $k=1$ e $h=3$ ha una retta di soluzioni di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1-t, \\ z = t; \end{cases}$ per $k=2$ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di $h \in \mathbb{R}$. Il terzo sistema per $k \neq 1, -2$ ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k-h^2-h+1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh-h^2+h-1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh^2+h^2-h-1}{(k-1)(k+2)} \end{vmatrix};$$

per $k=1$ e $h \neq 1$ non ammette soluzioni; per $k=h=1$ ha un piano di soluzioni di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1-s-t, \\ y = s, \\ z = t; \end{cases}$ infine, per $k=-2$ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di $h \in \mathbb{R}$.

6.12 $\dim \text{Im } A = 3 = \dim \text{Im } A^T$, $\dim \text{Ker } A = 1$ e $\dim \text{Ker } A^T = 0$. $\text{Im } A$ ha una base formata dalla prima, seconda e quarta colonna di A ; $\text{Ker } A$ è generato da $5e_1 - 4e_2 + 7e_3 \in \mathbb{R}^4$; $\text{Im } A^T$ ha una base formata dalle tre colonne della matrice A^T ; e $\text{Ker } A^T = \{O\}$. Invece, $\dim \text{Im } B = 2 = \dim \text{Im } B^T$, $\dim \text{Ker } B = 0$ e $\dim \text{Ker } B^T = 1$. $\text{Im } B$ ha una base formata dalle due colonne di B ; $\text{Ker } B = \{O\}$; $\text{Ker } B^T$ è generato da $(\pi-1)e_1 - (2\pi-1)e_2 + e_3 \in \mathbb{R}^3$; infine $\text{Im } B^T$ ha una base formata dalle prime due colonne di B^T .

6.14 $\text{Ker } T = \{O\}$; una base di $\text{Im } T$ è $\{e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_4, e_1 - e_2 + e_3\} \subset \mathbb{R}^4$; $T(U) \cap T(W)$ ha dimensione 1 ed è generato da $4e_2 - e_3 + 4e_4 \in \mathbb{R}^4$.

6.15 Per $\alpha \neq 0, -4$ si ha $\text{Im } A_\alpha = \mathbb{R}^3$ e $\text{Ker } A_\alpha = \{O\}$; quindi $\dim \text{Im } A_\alpha = 3$ e $\dim \text{Ker } A_\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ si ha $\dim \text{Im } A_0 = 2$ e $\dim \text{Ker } A_0 = 1$, una base di $\text{Im } A_0$ è $\{-e_2 + 2e_3, e_1 + 2e_2\}$.

e $\text{Ker } A_0$ è generato da e_2 . Per $\alpha = -4$ si ha $\dim \text{Im } A_{-4} = 2$ e $\dim \text{Ker } A_{-4} = 1$, una base di $\text{Im } A_{-4}$ è $\{e_1, e_2 - 2e_3\}$ mentre $\text{Ker } A_{-4}$ è generato dal vettore $8e_1 - 11e_2 + 4e_3$. Infine, $\mathbb{R}^3 = \text{Im } A_\alpha \oplus \text{Ker } A_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

6.17 Si ha $\dim(U + W) = 4$; quindi $U + W = \mathbb{R}^4$, da cui segue che una base è $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,

possibili equazioni parametriche sono $\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4, \end{cases}$ e l'equazione cartesiana è $0 = 0$. Invece

$\dim(U \cap W) = 2$, una base è $\{15e_1 - 9e_2 + 7e_3 - 38e_4, 30e_1 + 36e_2 + 32e_3 - 13e_4\}$, possibili

equazioni cartesiane per $U \cap W$ sono $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$ e possibili equazioni

parametriche sono $\begin{cases} x_1 = 15t_1 + 30t_2, \\ x_2 = -9t_1 + 36t_2, \\ x_3 = 7t_1 + 32t_2, \\ x_4 = -38t_1 - 13t_2. \end{cases}$

6.24 Per $t \neq 0, -\frac{1}{2}$ si ha $V_t = \mathbb{R}^4$, per cui possibili equazioni parametriche sono $\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_4, \end{cases}$

l'equazione cartesiana è $0 = 0$. Possibili equazioni parametriche per V_0 sono

$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2, \end{cases}$

mentre una possibile equazione cartesiana è $x_1 - x_2 = 0$. Possibili equa-

zioni parametriche per $V_{-\frac{1}{2}}$ sono $\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1 - \frac{1}{2}s_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2 + s_3, \end{cases}$ mentre una possibile equazione

cartesiana è $2x - 2y - 2z - w = 0$.

Capitolo 7 - Matrici e applicazioni lineari

7.2 Si ha $S \circ T \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = S(x + (2y - x)t + zt^2) = \begin{vmatrix} x \\ 2y + z \\ z \end{vmatrix}$. Da questo segue che $\text{Ker}(S \circ T)$ è la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -2t, \end{cases}$ e quindi il Teorema della dimensione implica che $\text{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}^2$.

7.10 La matrice è λI_n .

7.15 Sono tutte e sole le matrici della forma $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

7.17 Se X_1, X_2 appartengono a W abbiamo $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$, per cui $X_1 + X_2 \in W$. Analogamente, se $X \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $A(\lambda X) = \lambda A X = \lambda O = O$, per cui $\lambda X \in W$. Essendo chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, W è un sottospazio. Per definizione, una matrice $X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$ appartiene a W se e solo se

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0, \\ -2x_{11} - 4x_{21} = 0, \\ x_{12} + 2x_{22} = 0, \\ -2x_{12} - 4x_{22} = 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è dunque data da

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$, che ha rango 2. Quindi lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $4 - 2 = 2$; inoltre una base dello spazio delle soluzioni è $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{vmatrix} \right\}$. Di conseguenza $\dim W = 2$ e una sua base è

$$\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{vmatrix} \right\}.$$

7.20

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 6/31 & 2/31 & 5/31 & -4/31 \\ 5/62 & -19/62 & -1/62 & 7/62 \\ -3/31 & -1/31 & 13/31 & 2/31 \\ 3/62 & 1/62 & -13/62 & 29/62 \end{vmatrix}.$$

7.21 La matrice è invertibile per $h \neq \pm\sqrt{2}$, e in tal caso l'inversa è $\frac{1}{h^2 - 2} \begin{vmatrix} h & -2 & h \\ -2 & 2h & -h^2 \\ 1 & -h & h^2 - 1 \end{vmatrix}$.

7.25 Si ha

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(AB) &= (AB)_{11} + \cdots + (AB)_{nn} \\
 &= (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\
 &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{n1}a_{1n}) + \cdots + (b_{1n}a_{n1} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\
 &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\
 &= (BA)_{11} + \cdots + (BA)_{nn} = \text{tr}(BA)
 \end{aligned}$$

Nota: Questa dimostrazione è più chiara usando il simbolo di sommatoria, che sarà introdotto nell'Osservazione 9.5. Infatti si ha

$$\text{tr}(AB) = \sum_{h=1}^n (AB)_{hh} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk}b_{kh} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n b_{kh}a_{hk} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr}(BA).$$

Infine,

$$\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(B^{-1}(AB)) = \text{tr}((AB)B^{-1}) = \text{tr}(A(BB^{-1})) = \text{tr}(A).$$

Capitolo 8 - Cambiamenti di base

8.4 Procediamo come nell'Esempio 8.6, con $B_0 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ come base intermedia. La matrice A (rispettivamente, C) di cambiamento di base da B_0 a \mathcal{B} (rispettivamente, \mathcal{C}) contiene per colonne le coordinate degli elementi di \mathcal{B} (rispettivamente, \mathcal{C}) rispetto alla base B_0 ; quindi le due matrici sono date da

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

La matrice di passaggio da \mathcal{B} a \mathcal{C} è $B = A^{-1}C$, assumendo che (\mathcal{B} sia una base e quindi) A sia invertibile. Con una riduzione a scala troviamo

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right| \\ \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right| \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \\ \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Essendo i pivot di A tutti diversi da 0, ne segue che la matrice A è invertibile (e che \mathcal{B} è una base). Proseguendo come nell'Esempio 8.6 otteniamo

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 5 & 0 & -1/2 & -21/2 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & -24 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \\ \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \\ \xrightarrow{\quad} \left| \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ -1/2 & -13/2 & -5/3 & 1/3 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 25/2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Infine, una riduzione a scala effettuata sulla matrice C (o sulla matrice B) mostra che anche C è invertibile, per cui anche C è una base.

8.10 Procedendo come nell'Esempio 8.2 si trova che $\dim(U + W) = 3$, con base $\{p_1, p_2, q_2\}$, e $\dim(U \cap W) = 1$, con base $\{-6q_2 + q_3 = 6 - 4t + 8t^2\}$.

8.12 L'enunciato di questo esercizio si presta a due interpretazioni diverse; lo risolviamo in entrambi i casi. La prima interpretazione chiede di trovare la matrice che rappresenta L_A (o L_B) rispetto alla base \mathcal{B}_1 in partenza e alla base \mathcal{B}_2 in arrivo. In tal caso la risposta è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27/2 & 9/2 & -1 \\ -7/2 & 5/2 & -3 \\ -19/2 & -7/2 & 1 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \\ -9 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

per L_B . La seconda interpretazione chiede di trovare la matrice che rappresenta L_A (o L_B) sia rispetto alla base \mathcal{B}_1 in partenza e in arrivo, sia rispetto alla base \mathcal{B}_2 in partenza e in arrivo. In tal caso le risposte sono

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16/19 & 23/19 & -24/19 \\ 7/19 & 22/19 & -18/19 \\ 224/19 & 20/19 & 32/19 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36/19 & 2/19 & 2/19 \\ 8/19 & 30/19 & -8/19 \\ 85/19 & -9/19 & 86/19 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

per L_B .

8.14 Una (facilissima) riduzione a scala della matrice $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ mostra che \mathcal{B} è una base.

L'endomorfismo T cercato dev'essere della forma L_A , con $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $AB = C$, do-

ve $C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ contiene i vettori w_1, w_2, w_3 . Quindi

$$A = CB^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questa è anche la matrice associata a T rispetto alla base canonica, mentre la matrice associata a T rispetto alla base \mathcal{B} è

$$B^{-1}AB = B^{-1}(CB^{-1})B = B^{-1}C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.18 Si ha

$$\begin{aligned} T(X_1 + X_2) &= A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = T(X_1) + T(X_2), \\ T(\lambda X) &= A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X), \end{aligned}$$

per cui T è lineare. Rispetto alla base $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ l'endomor-

fismo T è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Riducendo a scala si vede molto facilmente che $\text{Im } A = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e che

$\text{Ker } A = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, da cui si ottiene subito $\text{Im } T = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ e

$\text{Ker } T = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Siccome la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha rango 4, ne segue (perché?) che $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

8.25 La prima coppia di matrici è costituita da matrici simili: infatti, si passa dall'una all'altra scambiando le ultime due coordinate (che è equivalente a prendere come nuova base quella ottenuta scambiando gli ultimi due vettori della base canonica), per cui

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le due matrici nella seconda coppia invece non sono simili. Il modo più veloce per dimostrarlo consiste nel ricorrere all'Esercizio 7.25: la traccia della prima matrice è 6, quella della seconda è 11, e quindi non possono essere simili. Un secondo modo consiste nel notare che la prima matrice è invertibile mentre la seconda non lo è, per cui non possono essere simili. Infine, un terzo modo consiste nel procedere come indicato nell'Osservazione 8.2, dove A è la prima matrice e A' la seconda. Il sistema $BA' - AB = O$ nella matrice incognita B è rappresentato dalla matrice

$$\left| \begin{array}{cccccccccc} 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & -3 & -1 & 5 \end{array} \right|.$$

Una riduzione a scala mostra che questa matrice è invertibile; quindi il sistema $BA' - AB = O$ ammette solo la soluzione nulla, per cui A e A' non sono simili.

- 8.26** Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$. Il teorema della dimensione ci dice che il nucleo di T ha dimensione $n - r$; sia $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\text{Ker } T$, completiamola a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ di V , e poniamo $U = \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$, e $w_j = T(v_j)$ per $j = 1, \dots, r$. Siccome $U \cap \text{Ker } T = \{O\}$, abbiamo che $T|_U$ è iniettivo; quindi $\{w_1, \dots, w_r\}$ sono vettori linearmente indipendenti appartenenti a W . Completiamoli a una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$; si verifica immediatamente che la matrice che rappresenta T rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} è della forma voluta.

Capitolo 9 - Determinanti

- 9.3** I determinanti sono rispettivamente: 6π ; -3 ; -1 .

- 9.5** I determinanti sono rispettivamente: $\frac{3}{2}$; 1 ; -2 .

- 9.7** I determinanti sono rispettivamente: $3(k^2 - 3k - 3)$; $6k^3 - 14k^2 - 89k - 75$.

- 9.8** I determinanti sono rispettivamente: $k + 4 - (k^3 + k^2 + 7k - 3)i$;
 $5k^2 - 2k + 2 + (4k^3 - 9k^2 + k + 3)i$.

- 9.13** Per esempio $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, ma qualunque coppia di matrici della forma

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{vmatrix} \text{ con } a_1 \neq b_1 \text{ e } a_2 \neq 0 \text{ va bene, come pure coppie in cui}$$

$B = -A$ con $\det A \neq 0$, e infinite altre coppie di matrici non diagonali.

- 9.19** La matrice ha determinante $\frac{1}{6\,048\,000} = \frac{1}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7} \neq 0$, e la sua inversa è data da

$$\begin{vmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{vmatrix}.$$

- 9.20** Il primo sistema ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7/22 \\ 17/44 \\ -15/44 \end{vmatrix}$. Il secondo sistema ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 885781 \\ -887112 \\ 0 \end{vmatrix}$.

- 9.24** La matrice ha determinante $-144 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{C}$. Il sistema ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{1}{144} \begin{vmatrix} -(3k^2 + 172k + 481) + (63k^2 + 639k + 350)i \\ 7k^2 + 396k + 845 - (147k^2 + 1283k + 646)i \\ 3[k^2 + 58k + 177 - (21k^2 + 227k + 126)i] \end{vmatrix}.$$

Capitolo 10 - Geometria affine

- 10.3** La prima retta ha vettore direttore $v_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, la seconda retta ha vettore direttore $v_1 = \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix}$; essendo $v_1 = -2v_0$ le due rette sono parallele o coincidenti. Ma il punto $P_1 = \begin{vmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{vmatrix}$ appartiene a entrambe le rette (si ottiene prendendo $t = 3$ e $s = 0$), per cui le due rette sono coincidenti, cioè i due insiemi di equazioni parametriche descrivono la stessa retta. Inoltre, si giunge facilmente alla stessa conclusione anche notando che $\text{rg}[v_0 \ v_1] = 1 = \text{rg}[v_0 \ v_1 \ P_0 - P_1]$, dove $P_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$.

- 10.10** Se $P_0 = P_1$ oppure $P_0 = P_2$, abbiamo in realtà solo tre punti, per cui sono automaticamente complanari, e la matrice $|P_1 - P_0 \ P_2 - P_0 \ P_3 - P_0|$ indicata ha una colonna nulla per cui ha automaticamente determinante nullo. Se invece $P_0 \neq P_1, P_2$ il piano π passante per P_0, P_1 e P_2 ha equazione parametrica $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$. In questo caso i quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono complanari se e solo se $P_3 \in \pi$, cioè se e solo se esistono $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tali che $P_3 = P_0 + s_0(P_1 - P_0) + t_0(P_2 - P_0)$ o, equivalentemente, tali che $P_3 - P_0 = s_0(P_1 - P_0) + t_0(P_2 - P_0)$. Ma questo accade se e soltanto se $P_3 - P_0, P_2 - P_0$ e $P_1 - P_0$ sono linearmente dipendenti, e quindi se e soltanto se abbiamo $\det |P_1 - P_0 \ P_2 - P_0 \ P_3 - P_0| = 0$, come affermato.

- 10.16** La retta passante per P_0 e P_1 ha equazioni parametriche $P = P_0 + t(P_1 - P_0)$, cioè $\begin{cases} x = \pi, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 - t, \end{cases}$ come affermato. Procedendo come nell'Esempio 6.12 troviamo le equazioni cartesiane $\begin{cases} x = \pi, \\ y - z = -2. \end{cases}$

- 10.19** Abbiamo $v_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $P_0 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $v_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $P_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$; quindi $\text{rg}[v_0 \ v_1] = 2$ e $\text{rg}[v_0 \ v_1 \ P_0 - P_1] = 3$, per cui r_0 e r_1 sono sghembe.

10.21 Ponendo $A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $b_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, $b_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$, le equazioni cartesiane delle due rette divengono $A_0x = b_0$ e $A_1x = b_1$. Siccome $\text{rg} \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \end{vmatrix} = 3$ e $\text{rg} \begin{vmatrix} A_0 & b_0 \\ A_1 & b_1 \end{vmatrix} = 4$, le due rette sono sghembe.

10.22 Il sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4, \\ x + y = 0, \\ x - z = 1, \end{cases}$ ammette come unica soluzione $P_0 = \begin{vmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ -5/2 \end{vmatrix}$; quindi π e τ sono incidenti, e si intersecano nel punto P_0 .

10.28 Siccome $\det |A'_1 - O' \quad A'_2 - O' \quad A'_3 - O'| = -1 \neq 0$ e $\det |A''_1 - O'' \quad A''_2 - O'' \quad A''_3 - O''| = -6 \neq 0$,

le quaterne di punti $\{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ e $\{O'', A''_1, A''_2, A''_3\}$ sono non complanari (vedi l'Esercizio 10.10), e quindi \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' sono dei riferimenti affini. La matrice di cambiamento di coordinate affini B' da \mathcal{R}' a \mathcal{R}_0 è $B' = |A'_1 - O' \quad A'_2 - O' \quad A'_3 - O'|$ che abbiamo visto avere determinante negativo; quindi \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}' hanno orientazione opposta. Analogamente, si vede subito che la matrice B'' di cambiamento di coordinate affini da \mathcal{R}'' a \mathcal{R}_0 è data da $B'' = |A''_1 - O'' \quad A''_2 - O'' \quad A''_3 - O''|$, anch'essa con determinante negativo; quindi anche \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}'' hanno orientazione opposta, e di conseguenza \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' hanno la stessa orientazione. La matrice B di cambiamento di coordinate affini da \mathcal{R}' a \mathcal{R}'' è

$$B = (B'')^{-1}B' = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/6 \\ -5/6 & 1/3 & -1/6 \end{vmatrix}$$

(che ha determinante uguale a $1/6$, confermando il fatto che \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' hanno la stessa orientazione).

Siccome $O'' - O' = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$, la formula di cambiamento di coordinate affini da \mathcal{R}' a \mathcal{R}'' è

$$\begin{cases} x''_1 = \frac{1}{3}x'_1 - \frac{1}{3}x'_2 - \frac{1}{3}x'_3 - 1, \\ x''_2 = \frac{1}{6}x'_1 - \frac{2}{3}x'_2 - \frac{1}{6}x'_3 + 2, \\ x''_3 = -\frac{5}{6}x'_1 + \frac{1}{3}x'_2 - \frac{1}{6}x'_3 - 1. \end{cases}$$

Capitolo 11 - Prodotti scalari

11.3 È una forma bilineare: infatti se $p_1, p_2, p, q_1, q_2, q \in \mathbb{R}_n[t]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p_1 + p_2, q \rangle &= (p_1 + p_2)(0)q(0) + \dots + (p_1 + p_2)(n)q(n) = (p_1(0) + p_2(0))q(0) + \dots + (p_1(n) + p_2(n))q(n) \\ &= (p_1(0)q(0) + \dots + p_1(n)q(n)) + (p_2(0)q(0) + \dots + p_2(n)q(n)) = \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle, \\ \langle p, q_1 + q_2 \rangle &= p(0)(q_1 + q_2)(0) + \dots + p(n)(q_1 + q_2)(n) = p(0)(q_1(0) + q_2(0)) + \dots + p(n)(q_1(n) + q_2(n)) \\ &= (p(0)q_1(0) + \dots + p(n)q_1(n)) + (p(0)q_2(0) + \dots + p(n)q_2(n)) = \langle p, q_1 \rangle + \langle p, q_2 \rangle, \\ \langle \lambda p, q \rangle &= (\lambda p)(0)q(0) + \dots + (\lambda p)(n)q(n) = \lambda p(0)q(0) + \dots + \lambda p(n)q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \dots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle, \\ \langle p, \lambda q \rangle &= p(0)(\lambda q)(0) + \dots + p(n)(\lambda q)(n) = p(0)\lambda q(0) + \dots + p(n)\lambda q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \dots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle. \end{aligned}$$

È simmetrica:

$$\langle q, p \rangle = q(0)p(0) + \cdots + q(n)p(n) = p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n) = \langle p, q \rangle$$

(nota che se avessimo verificato prima la simmetria avremmo potuto risparmiarci due delle quattro verifiche della bilinearità). Infine, $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + \cdots + p(n)^2 \geq 0$ sempre, e $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $0, \dots, n$ sono radici del polinomio p ; ma l'unico polinomio di grado al più n con $n+1$ radici è il polinomio nullo, per cui $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $p \equiv 0$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo.

11.8 Si ha

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \end{aligned}$$

Il parallelogramma di vertici O, v, w e $v+w$ ha due lati lunghi $\|v\|$, due lati lunghi $\|w\|$, e le due diagonali lunghe rispettivamente $\|v+w\|$ e $\|v-w\|$; quindi questa uguaglianza dice che la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

11.11 Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai tre generatori di V otteniamo

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{\left\langle \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right\rangle} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \\ w'_3 &= \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix} - \frac{\left\langle \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right\rangle} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} - \frac{\left\langle \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \right\rangle} \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Il fatto che $w'_3 = 0$ significa che il terzo generatore di V si ottiene come combinazione lineare degli altri due; quindi $\dim V = 2$, una sua base ortogonale è data da $\{w_1, w_2\}$, e una base ortonormale è data da $B = \{u_1, u_2\}$ con

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{vmatrix}.$$

Per completare B a una base ortonormale di \mathbb{R}^4 applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$: ricordando che $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ otteniamo

$$w_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{vmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{vmatrix},$$

$$w_4 = e_4 - \langle e_4, u_1 \rangle u_1 - \langle e_4, u_2 \rangle u_2 - \frac{\langle e_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix};$$

il fatto di non aver ottenuto vettori nulli ci conferma che $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ era una base di \mathbb{R}^4 . Quindi $\{u_1, u_2, w_3, w_4\}$ è una base ortogonale di \mathbb{R}^4 , e una base ortonormale di \mathbb{R}^4 che completa $\{u_1, u_2\}$ è $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dove

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{vmatrix} -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{vmatrix}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

11.17 La matrice è $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

11.20 Sia P la proiezione ortogonale sul sottospazio $U = \text{Im } P$. Dati $v, w \in V$, scriviamo $v = P(v) + (v - P(v))$ e $w = P(w) + (w - P(w))$. Per definizione di proiezione ortogonale, $v - P(v)$ e $w - P(w)$ sono ortogonali a tutti gli elementi di U , e quindi in particolare sono ortogonali a $P(v)$ e $P(w)$; quindi

$$\begin{aligned} \langle P(v), w \rangle &= \langle P(v), P(w) + (w - P(w)) \rangle = \langle P(v), P(w) \rangle \\ &= \langle P(v) + (v - P(v)), P(w) \rangle = \langle v, P(w) \rangle, \end{aligned}$$

per cui P è simmetrico.

11.25 Infatti $1 = \det I_n = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2$, dove abbiamo usato il Teorema di Binet e il Corollario 9.7.

11.26 Siccome B_1 e B_2 sono due basi, esiste un'unica matrice $B \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $Bv_j = w_j$ per $j = 1, \dots, n$ (Proposizioni 5.2 e 7.4). Siccome le due basi sono ortonormali, L_B è un'isometria (Proposizione 11.17), e quindi B è una matrice ortogonale (Corollario 11.19).

Capitolo 12 - Geometria euclidea

12.5 Il coseno vale $\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$, dove il segno dipende dall'orientazione scelta.

12.8 Un'equazione cartesiana è $3x - 7y + z = 21$; delle possibili equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = -3s + 7t + 21. \end{cases}$$

12.10 Possibili equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x + 3y - 4z = -20, \\ 8x + y - 3z = -10; \end{cases}$ possibili equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{23}(5t - 10), \\ y = \frac{1}{23}(29t - 150), \\ z = t. \end{cases}$$

12.12 Il coseno vale $\pm \frac{11}{3\sqrt{21}}$, dove il segno dipende dall'orientazione scelta.

12.18 $\frac{\sqrt{97}}{4}$.

12.19 No, perché la distanza di P_0 dal piano è $\frac{20}{\sqrt{62}}$, la distanza di P_0 dall'origine è $\sqrt{29}$, e si ha $\sqrt{29} > \frac{20}{\sqrt{62}}$ in quanto $29 \cdot 62 > 400$.

12.21 $\frac{14}{\sqrt{17}}$.

Capitolo 13 - Autovalori e autovettori

13.2 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 3$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

13.3 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

13.4 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k^3 \neq 1$, cioè se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1 - i$; C_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$; D_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq i$.

13.9 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \text{ Quindi gli autovalori sono } \{0, 1, 2, 3\} \text{ e gli autospazi sono } V_0 = \text{Span}(1),$$

$$V_1 = \text{Span}(t), V_2 = \text{Span}(t^2) \text{ e } V_3 = \text{Span}(t^3).$$

13.10 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Quindi l'unico autovalore è } 0 \text{ e ha molteplicità algebrica } 4 \text{ e geometrica } 1,$$

per cui T non è diagonalizzabile. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è generato dal polinomio 1.

13.12 Rispetto alla base $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ l'endomorfismo T è rappresentato

$$\text{dalla matrice } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}. \text{ Gli autovalori di } T \text{ sono } 1 \text{ e } 9, \text{ entrambi con molteplicità alge-}$$

brica e geometrica 2, per cui T è diagonalizzabile. Una base dell'autospazio relativo all'auto-

valore 1 è data da $\left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\}$; una base dell'autospazio relativo all'autovalore 9 è

data da $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right\}$.

[13.25] Grazie al fatto che $a_{ii} + \dots + a_{in} = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$, il vettore $v_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$ è tale che $Av_0 = v_0$, e quindi è un autovettore di A relativo all'autovalore 1.

Capitolo 14 - Il teorema spettrale

[14.1] Il teorema spettrale (vedi anche il Corollario 14.4) dice che esiste una base ortogonale che diagonalizza una matrice quadrata se e solo se la matrice è simmetrica; quindi nel nostro caso l'unica matrice per cui non esiste è la quarta, l'unica non simmetrica. Per le altre matrici, le basi cercate si ottengono calcolando prima gli autovalori, poi i relativi autospazi, e infine prendendo una base ortonormale di ciascun autospazio (se l'autospazio ha dimensione 1 questo ultimo passaggio si riduce a trovare nell'autospazio un autovettore di lunghezza unitaria). Usando questo procedimento, possibili basi ortonormali che diagonalizzano le matrici indicate sono, nell'ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{12+6\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{12-6\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{42-2\sqrt{21}} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \sqrt{21}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{42+2\sqrt{21}} \\ \sqrt{21}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

[14.3] Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di un endomorfismo ortogonale A , e sia $v \neq O$ un autovettore di autovalore λ . Allora

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2,$$

per cui $\lambda^2 = 1$, cioè $\lambda \in \{-1, 1\}$.

[14.7] Ricordando che il determinante di una matrice è uguale al determinante della sua trasposta otteniamo

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(-A - \lambda I_n) \\ &= \det((-1)(A - (-\lambda)I_n)) = (-1)^n \det(A - (-\lambda)I_n) = (-1)^n p_A(-\lambda). \end{aligned}$$

In particolare abbiamo $\det A = p_A(0) = (-1)^n p_A(-0) = (-1)^n \det A$, e quindi se n è dispari segue che $\det A = 0$.

[14.14] Dall'ipotesi segue che per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L_A(v+w), v+w \rangle = \langle L_A(v), v \rangle + \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle + \langle L_A(w), w \rangle \\ &= \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle = \langle L_A(v), w \rangle + \langle v, L_A(w) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha $w^T A v = -(Aw)^T v = -w^T A^T v$, da cui segue che $-A^T = A$, cioè A è antisimmetrica.

14.17 Ricorda che una matrice: è triangolabile su \mathbb{R} se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali; è diagonalizzabile su \mathbb{R} se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali e con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica; è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se è simmetrica.

Il polinomio caratteristico della prima matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - ab)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $ab \geq 0$, diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = b$, e diagonalizzabile se e solo se $ab > 0$ oppure $a = b = 0$. Se $ab > 0$ una base che la

diagonalizza è $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+(a/b)}} \begin{vmatrix} 0 \\ -\sqrt{a/b} \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+(a/b)}} \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{a/b} \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$; se $a = b$ questa è

anche una base ortonormale che la diagonalizza. Se $b = 0$ la base canonica la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $a = b = 0$). Infine, se $a = 0$ ma $b \neq 0$ una base che la triangolarizza è $\{e_1, e_3, e_2\}$.

Il polinomio caratteristico della seconda matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - (1+a)\lambda + a + b - 1)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $\Delta = a^2 - 2a + 5 - 4b \geq 0$, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = -1$. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b > 0$ e $b \neq 1$ allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b = 1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 (o addirittura 3 se $a = 1$), ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b = 0$ e $b \neq 1$, allora l'autovalore $(1+a)/2$ ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $\Delta > 0$ una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se

$b \neq 1$ e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $b = -1$) è $\left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} & -b \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \sqrt{8+(1-a+\sqrt{\Delta})^2} & 1-a+\sqrt{\Delta} \\ 2 & \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{8+(1-a-\sqrt{\Delta})^2}} & -2 \\ \hline 1 & 1-a-\sqrt{\Delta} \\ \hline 2 & \end{array} \right\}$.

Se $b = 1$ e $a \neq 1$ allora $\Delta = (a-1)^2 > 0$ e una base che la triangolarizza è

$\left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 1-a \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$. Se $b = 1 = a$ allora $\Delta = 0$ e una base che la triangolarizza è

$\left\{ \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$. Infine, se $\Delta = 0$ e $b \neq 1$ allora una base che la triangolarizza è

$\left\{ \begin{vmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 1-a \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$.

Il polinomio caratteristico della terza matrice è $(a-t)(t-2)t$; quindi la matrice è sempre triangolabile, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = 0$. Se $a \neq 0, 2$, allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b \neq 0$ e $a = 0$ oppure $a = 2$, allora l'autovalore a ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se $a \neq 0, 2$, e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $b = 0$) è

$\left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \sqrt{2} & \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \sqrt{b^2+b^2(a-1)^2+a^2(a-2)^2} & \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} a(a-2) & \\ \hline b(a-1) & b \\ \hline b & \end{array} \right\}$. Se $a = 0$ o $a = 2$ una

base che la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $b = 0$) è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Il polinomio caratteristico della quarta matrice è $(b-t)(t^2 - 2t + 1 - a)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $a \geq 0$, e diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = 1$. Se $a > 0$ e $b \neq 1 \pm \sqrt{a}$ i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $a > 0$ e $b = 1 \pm \sqrt{a}$ l'autovalore b ha molteplicità algebrica e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice è ancora diagonalizzabile. Se $a = 0$ e $b \neq 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Infine, se $a = 0$ e $b = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a > 0$ una base che la triangolarizza (e diagonalizza, e diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $a = 1$) è data da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}. \text{ Infine, se } a = 0 \text{ la base canonica la triangolarizza.}$$

Il polinomio caratteristico della quinta matrice è $(a-t)(t^2 - at - a^2 - 1)$; quindi i tre autovalori sono sempre distinti, per cui la matrice è sempre diagonalizzabile, e non è mai diagonalizzabile da una base ortonormale perché non è simmetrica per alcun valore di a . Se $a \neq 0$

$$\text{una base che la diagonalizza è } \left\{ \begin{vmatrix} a^2 + a + 2 \\ -a^2 - 1 \\ a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a + 2 + \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a + 2 - \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{vmatrix} \right\},$$

$$\text{mentre se } a = 0 \text{ una base che la diagonalizza è } \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

14.21 Per ogni $v, w \in V$ abbiamo

$$\langle S_u(v), w \rangle = \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w \rangle = \langle v, w \rangle - 2\langle v, u \rangle \langle u, w \rangle = \langle v, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \langle v, S_u(w) \rangle,$$

per cui S_u è simmetrico. Poi

$$\begin{aligned} \langle S_u(v), S_u(w) \rangle &= \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \\ &= \langle v, w \rangle - 4\langle w, u \rangle \langle v, u \rangle + 4\langle v, u \rangle \langle w, u \rangle \|u\|^2 = \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

per cui S_u è un'isometria. Infine, $S_u(v) = v$ per ogni $v \in V_1$, e $S_u(u) = -u$; quindi una base ortonormale di autovettori di S_u si ottiene aggiungendo u a una base ortonormale di V_1 .

14.26 Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ gli autovalori di A . Allora (Corollario 13.5) $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ e $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Quindi la diseguaglianza di Hadamard è equivalente a

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n),$$

che è la classica diseguaglianza fra la media geometrica (a sinistra) e la media aritmetica (a destra). Per completezza, ne riportiamo qui la dimostrazione. Se anche uno solo dei λ_j è nullo la diseguaglianza è ovviamente verificata; supponiamo allora che siano tutti positivi, e procediamo per induzione su n . Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che la diseguaglianza sia verificata per $n - 1$ numeri, e cerchiamo di dimostrarla per n . Indichiamo con α la media aritmetica di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \alpha$, allora la diseguaglianza è banalmente verificata (ed è anzi un'uguaglianza). Se invece i λ_j non sono tutti uguali, ce ne deve essere uno più grande di α e uno più piccolo di α ; a meno dell'ordine possiamo supporre che $\lambda_n > \alpha > \lambda_{n-1}$. Poniamo $\mu = \lambda_n + \lambda_{n-1} - \alpha$, in modo da avere

$$\mu\alpha - \lambda_{n-1}\lambda_n = (\lambda_{n-1} + \lambda_n - \alpha)\alpha - \lambda_{n-1}\lambda_n = (\lambda_n - \alpha)(\alpha - \lambda_{n-1}) > 0.$$

Siccome $\mu \geq \lambda_n - \alpha > 0$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva agli $n-1$ numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \mu$, ottenendo

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \mu)^{1/(n-1)} \leq \frac{1}{n-1} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2} + \mu).$$

Ora, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2} + \mu = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha$; quindi abbiamo

$$\alpha^{n-1} \geq \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \mu.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\alpha > 0$ e ricordando che $\mu\alpha > \lambda_{n-1}\lambda_n$ otteniamo

$$\alpha^n \geq \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} (\mu\alpha) > \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n,$$

che è la diseguaglianza cercata.

- 14.28** Il polinomio caratteristico della matrice assegnata è il polinomio di terzo grado $p(\lambda) = -\lambda^3 + (2a+9)\lambda^2 - (11a+3)t - 4(a+1)$. Per il Teorema 14.7 e il criterio di Cartesio, la matrice è definita positiva se e solo se i coefficienti di questo polinomio hanno segni alternati. Siccome il coefficiente di t^3 è $-1 < 0$, la matrice è definita positiva se e solo se $2a+9 > 0$, $-(11a+3) < 0$ e $-4(a+1) > 0$. Risolvendo queste disequazioni troviamo $a > -9/2$, $a > -3/11$ e $a < -1$, che sono incompatibili; quindi il prodotto scalare rappresentato da questa matrice non è mai definito positivo.

Capitolo 15 - Coniche e quadriche

15.1 (1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

(2) $y = x^2 - 4$.

(3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(4) $xy = -6$.

15.2 (1) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2 + t. \end{cases}$

(2) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}t, \\ y = -2t. \end{cases}$

(3) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5}t. \end{cases}$

(4) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t, \\ y = -2 + t. \end{cases}$

15.7 Le matrici associate alla prima conica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 3/2 & 1 & 7/2 \\ 4 & 7/2 & 0 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix}$. Sic-

come $\det A = 55/4 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -5/4 < 0$, la conica è un'iperbole. Il suo centro C è la

soluzione del sistema $\mathcal{A}_2 x = -\begin{vmatrix} 4 \\ 7/2 \end{vmatrix}$, e quindi è $C = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}$. Gli assi sono le rette passanti

per C con vettori direttori autovettori di \mathcal{A}_2 ; quindi hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 + t, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 - t. \end{cases}$$

Le matrici associate alla seconda conica sono date da $A = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 14 & 9 \\ -3/2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ e

$$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 14 \end{vmatrix}. \quad \text{Siccome } \det A = -261 < 0 \text{ e } \det \mathcal{A}_2 = 87/4 > 0, \text{ la conica è un'ellisse.}$$

Il suo centro C è la soluzione del sistema $\mathcal{A}_2 x = -\begin{vmatrix} -3/2 \\ 9 \end{vmatrix}$, e quindi è $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gli assi

sono le rette passanti per C con vettori direttori autovettori di \mathcal{A}_2 ; quindi hanno equazioni

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{5}t, \\ y = -1 + t, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = -1 + t. \end{cases}$$

15.10 Le matrici associate alla prima conica sono $A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$. Siccome

$\det A = -17 < 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = 6 > 0$, la conica è un'ellisse reale, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla seconda conica sono date da $A = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 4 \end{vmatrix}$ e

$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = -7/4 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -1/4 < 0$, la conica è un'iperbole, di forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla terza conica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. Siccome

$\det A = 3 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -7 < 0$, la conica è un'iperbole, di forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla quarta conica sono $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Siccome

$\det A = -16 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = 0$, la conica è una parabola, di forma canonica affine $x^2 - y = 0$.

15.14 Le matrici associate alla prima quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 3/2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Siccome $\det A = -6 \neq 0$, la quadrica è non degenere. Siccome $\operatorname{rg} \mathcal{A}_3 = 2$, la quadrica è un paraboloido. Il polinomio caratteristico di \mathcal{A}_3 è $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda$; il criterio di Cartesio allora ci dice che \mathcal{A}_3 ha due autovalori positivi, per cui la quadrica è un paraboloido ellittico, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - z = 0$. Una base ortonormale di autovettori di \mathcal{A}_3 è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \text{effettuando il cambiamento di coordinate } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ dove}$$

$B = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ è la matrice che contiene per colonne i vettori della base trovata,

l'equazione della quadrica diventa

$$6(x')^2 + (y')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{3}{\sqrt{5}}y' - 2z' = 0,$$

dove $\{6, 1, 0\}$ sono gli autovalori di A_3 , e i coefficienti dei termini di primo grado sono ot-

tenuti calcolando $B^T \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} \\ -2 \end{vmatrix}$. Applicando ora il cambiamento di coordinate
 $\begin{cases} X' = x' + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \\ Y' = y' - \frac{3}{2\sqrt{5}}, \\ Z' = z', \end{cases}$ e poi dividendo per 2 come indicato nel caso (IV.2), l'equazione della quadrica diventa

$$3(X')^2 + \frac{1}{2}(Y')^2 - Z' - \frac{3}{8} = 0.$$

Effettuando infine il cambio di coordinate $\begin{cases} X'' = \sqrt{3}X', \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \\ Z'' = Z' + \frac{3}{8}, \end{cases}$ l'equazione della quadrica ar-

riva alla forma canonica affine $(X'')^2 + (Y'')^2 - Z'' = 0$. Riassumendo, un cambio di coordinate che riduce la quadrica in forma canonica affine si ottiene componendo i cambi di coordinati indicati, e quindi è dato da

$$\begin{cases} X'' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \left(2x + y + \frac{1}{2} \right), \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-x + 2y - \frac{3}{2} \right), \\ Z'' = z + \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Le matrici associate alla seconda quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 3\sqrt{2}/2 & 3 \end{vmatrix}$ e
 $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = -2 \neq 0$, la quadrica è non degenere. Siccome

$\text{rg } A_3 = 2$, la quadrica è un paraboloido. Il polinomio caratteristico di A_3 è $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$; il criterio di Cartesio allora ci dice che A_3 ha due autovalori positivi, per cui la quadrica è un paraboloido ellittico, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - z = 0$.

Una base ortonormale di autovettori di A_3 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$; effettuando il

cambiamento di coordinate $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = B^{-1} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, dove $B = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$ è la matrice

che contiene per colonne i vettori della base trovata, l'equazione della quadrica diventa

$$2(x')^2 + (y')^2 + 4x' + 2y' + 2z' + 3 = 0,$$

dove $\{2, 1, 0\}$ sono gli autovalori di A_3 , e i coefficienti dei termini di primo grado sono ot-

tenuti calcolando $B^T \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$. Applicando ora il cambiamento di coordinate dato da

$$\begin{cases} X' = x' + 1, \\ Y' = y' + 1, \\ Z' = z', \end{cases}$$

quadrica diventa

$$-(X')^2 - \frac{1}{2}(Y')^2 - Z' = 0.$$

Moltiplicando per -1 ed effettuando infine il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X'' = X', \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \\ Z'' = -Z', \end{cases}$$

l'equazione della quadrica arriva alla forma canonica affine $(X'')^2 + (Y'')^2 - Z'' = 0$. Riassumendo, un cambio di coordinate che riduce la quadrica in forma canonica affine si ottiene componendo i cambi di coordinati indicati, e quindi è dato da

$$\begin{cases} X'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1, \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + 1), \\ Z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z. \end{cases}$$

15.16 Le matrici associate alla quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Siccome $\det A = 0$, la quadrica è sempre degenere. Inoltre $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_3)$ per ogni valore di k ; quindi la quadrica è sempre a centro. Siccome $\det \mathcal{A}_3 = 4k^2 - 1$, si verifica subito che $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_3) = 3$ se $k \neq \pm 1/2$ e $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_3) = 2$ se $k = \pm 1/2$. Il polinomio caratteristico di \mathcal{A}_3 è $-\lambda^3 + \lambda^2 + (4k^2 + 1)\lambda + 4k^2 - 1$; quindi \mathcal{A}_3 ha un autovalore positivo e due negativi se $4k^2 - 1 > 0$, un autovalore positivo, uno negativo e uno nullo se $4k^2 - 1 = 0$, e due autovalori positivi e uno negativo se $4k^2 - 1 < 0$. Quindi la forma canonica affine è $x^2 + y^2 - z^2$ (cono reale) se $k \neq \pm 1/2$, ed è $x^2 - y^2$ (piani reali incidenti) se $k = \pm 1/2$.

15.18 La conica cercata ha equazioni $\begin{cases} x^2 + 2xz - y^2 + 2z - 5 = 0, \\ x - ky - z = k. \end{cases}$ Ricavando z dalla seconda

equazione e sostituendola nella prima otteniamo che l'equazione della conica nel piano π_k è data da $3x^2 - 2kxy - y^2 + 2(1-k)x - 2ky - 2k - 5 = 0$. (In modo equivalente, potevamo

fare il cambio di coordinate $\begin{cases} X = x, \\ Y = y, \\ Z = z - x + ky + k; \end{cases}$ nelle nuove coordinate, il piano π_k ha

equazione $Z = 0$, per cui la conica cercata è contenuta nel piano coordinato e ha equazione

quella indicata.) Le matrici associate alla conica sono $A = \begin{vmatrix} 3 & -k & 1-k \\ -k & -1 & -k \\ 1-k & -k & -2k-5 \end{vmatrix}$ e

$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & -k \\ -k & -1 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = 5k^2 + 4k + 16$ non si annulla mai, la conica è sempre non degenere. Siccome $\det \mathcal{A}_2 = -k^2 - 3$ è sempre negativo, ne deduciamo che la conica è sempre un'iperbole, con forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

15.26 Procediamo come nell'Esempio 15.11. La prima conica del fascio è composta dalla retta passante per $(0,0)$ e $(1,1)$ e dalla retta tangente; quindi è definita dal polinomio $p(x,y) = (x-y)(2x-y-1)$. La seconda conica del fascio è composta dalla retta passante per $(0,-1)$ e $(0,0)$, e dalla retta passante per $(0,-1)$ e $(1,1)$; quindi è definita dal polinomio $q(x,y) = x(2x-y-1)$. La generica conica del fascio è dunque data dal polinomio

$$\lambda p(x,y) + \mu q(x,y) = (2\lambda + 2\mu)x^2 - (3\lambda + \mu)xy + \lambda y^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda y.$$

Imponendo la condizione di passaggio per $(2,7)$ otteniamo $20\lambda - 8\mu = 0$; prendendo $\lambda = 2$ e $\mu = 5$ troviamo quindi la conica cercata, di equazione

$$14x^2 - 11xy + 2y^2 - 7x + 2y = 0;$$

si tratta allora di una conica degenere data da due rette incidenti, di equazione $2x - y - 1 = 0$ e $7x - 2y = 0$.

Commciato

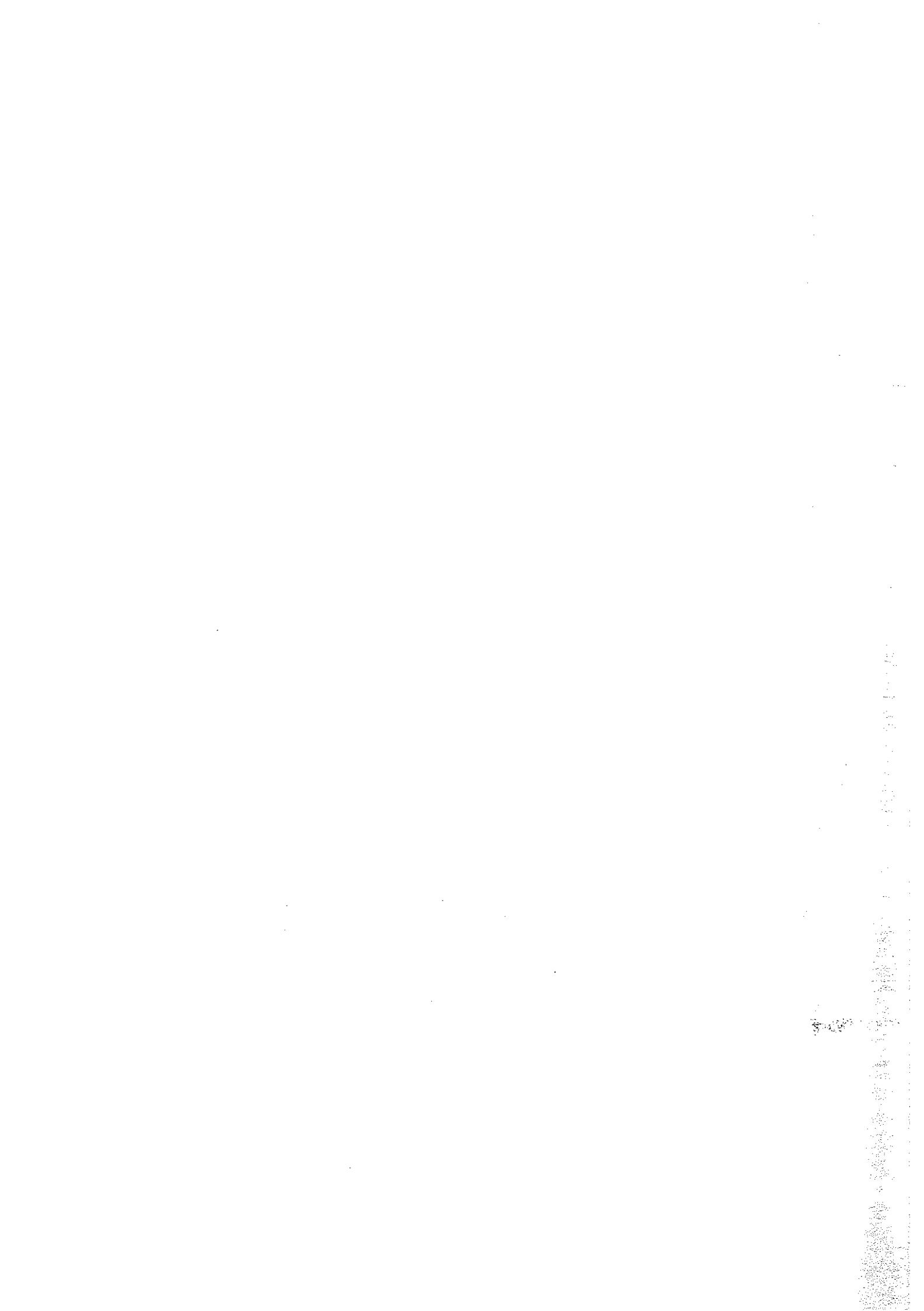
Nel Capitolo 15 abbiamo visto (o meglio, cominciato a vedere) come sia possibile trattare con gli strumenti a nostra disposizione anche oggetti (polinomi, curve, equazioni) di secondo grado. Il passo successivo consisterebbe nel passare al terzo grado, e poi via via a tutti i gradi successivi... Si tratta ovviamente di tutta un'altra storia, che però ha le basi in quanto abbiamo visto: si entra nel reame della *Geometria Algebrica*, una delle branche più vaste e affascinanti della matematica. Se poi sostituiamo ai polinomi funzioni più generali, quali le funzioni trigonometriche, le funzioni esponenziali, o, ancora meglio, funzioni differenziabili qualsiasi, ci troviamo direttamente in mezzo alla *Geometria Differenziale*, il cui studio è tanto appagante quanto pieno di risultati eleganti, inaspettati e con importanti ricadute anche al di fuori della matematica.

Ma questo non è l'unico possibile sbocco degli argomenti trattati in questo libro. Un serio studio degli spazi vettoriali di dimensione infinita porta direttamente all'*Analisi Funzionale*, una teoria con ricchissime applicazioni e vaste implicazioni anche in Fisica e Ingegneria.

Oppure potremmo concentrarci sulle matrici ed esaminare meglio i gruppi di matrici che abbiamo incontrato (le matrici ortogonali, le matrici unitarie...), entrando nella teoria dei *Gruppi e Algebre di Lie*, teoria esteticamente ineccepibile e di vasta portata.

O anche potremmo voler cercare metodi più efficienti per risolvere grossi sistemi lineari, o per trovare le radici di polinomi di grado alto; tutti argomenti di *Analisi Numerica*, disciplina con importanti applicazioni praticamente in qualunque campo della scienza.

Insomma, la Geometria Analitica e l'Algebra Lineare descritte in questo libro sono solo un ingresso a quel vasto (molto più vasto di quanto probabilmente immaginavi solo qualche mese fa), importante e affascinante territorio che è la matematica contemporanea. Forse in futuro diventerai uno degli esploratori di questo nuovo continente, o forse ti limiterai a utilizzare i tesori che ne vengono estratti, o addirittura risalirai sulla tua nave per tornare verso lidi per te più accoglienti; ma in ogni caso ci auguriamo che questa prima passeggiata lungo la spiaggia sia stata sufficientemente istruttiva e, perché no, persino interessante.



Indice analitico

A

- Additività, 226
- Affinità, 209
- Anello, 129
- Angolo, diedro, 256
 - fra piani, 256
 - fra rette, 255
 - fra una retta e un piano, 258
 - fra vettori, 234
- Anti-omogeneità, 231
- Antirotazione, 269
- Applicazione, 3
 - additiva, 93
 - bilineare, 227
 - identica, 94
 - lineare, 93
 - lineare invertibile, 129
 - nulla, 94
 - omogenea, 93
 - quoziente, 33
- Area orientata, 162
- Argomento, 77
- Asintoto, 313, 316
- Asse, 200, 220, 310, 311, 313, 318, 336
- Autospazio, 277
- Autovalore, 277, 302
- Autovettore, 277

B

- Bandiera, 89, 290
- Base, 25, 27, 66, 336, 337
 - a bandiera, 290

- canonica, 66, 67
- di autovettori, 280, 297
- ortogonale, 235
- ortonormale, 235, 238
- Birapporto, 217

C

- Cambiamento di coordinate, affini, 206
 - metrico, 254
- Campo, 12
- Centro, 190, 193, 310, 311, 326, 339
- Cilindro, 336
 - circolare retto, 337
 - ellittico, 323
 - immaginario, 323
 - iperbolico, 323
 - parabolico, 323
- Circonferenza, 117, 310, 320
- Classe
 - di congruenza, 244
 - di equivalenza, 32
 - di similitudine, 155
- Codominio, 3
- Coefficiente, 42
 - di Fourier, 237
 - direttivo, 5
- Colonna, 43
- Combinazione lineare, 62
 - di equazioni, 47
- Complesso coniugato, 80
- Completamento a una base, 71
- Composizione, 7, 16

- di applicazioni lineari, 128
- Condizione**
 - di ortogonalità, 255, 257, 258
 - di parallelismo, 196, 197, 199, 203
- Conica, 314, 319**
 - degenera, 320
 - non degenera, 317, 320
- Coniugio, 80**
- Cono, 337**
 - circolare retto, 337
 - immaginario, 323
 - reale, 323
- Coordinate, 24, 25, 27, 67**
 - affini, 204
 - cilindriche, 338
 - non omogenee, 216, 218
 - omogenee, 216, 218
 - polari, 77
 - sferiche, 340
- Coseno, direttore, 255**
 - iperbolico, 312
- Criterio**
 - di Cartesio, 304
 - di positività, 303, 308
- D**
- Delta di Kronecker, 133**
- Determinante, 165-168, 170, 183**
 - dell'inversa, 176
 - della trasposta, 173
 - di matrici diagonali, 166
 - di matrici triangolari superiori, 166
 - di un endomorfismo, 177
- Diagonale principale, 43**
- Diagramma commutativo, 146**
- Differenza di insiemi, 2**
- Dimensione, 73, 120**
 - infinita, 73
- Dimostrazione**
 - diretta, 44
 - inversa, 44
 - per assurdo, 44
 - per induzione, 45
- Dipendenza lineare, 64**
- Direttrice, 313, 315**
- Discriminante, 13**
- Distanza**
 - fra due piani, 261
 - fra due rette, 262, 265
 - fra una retta e un piano, 261
 - fra un punto e una retta, 259, 265
 - fra un punto e un piano, 261
- Disuguaglianza**
 - di Hadamard, 307
 - triangolare, 81, 233
- Dominio, 3**
- E**
- Eccentricità, 315**
- Elemento**
 - di una matrice, 43
 - neutro, 11-12
- Eliminazione di Gauss, 48-52**
- Ellisse, 310, 312, 320**
 - immaginaria, 320
 - reale, 320
- Ellissoide, 323**
 - immaginario, 322
 - reale, 322
- Endomorfismo, 93, 130, 154**
 - autoaggiunto, 246
 - con tutti gli autovalori nel campo, 299
 - diagonalizzabile, 281, 287, 297
 - hermitiano, 252
 - nilpotente, 292
 - ortogonale, 246
 - simmetrico, 246, 297
 - triangolabile, 281, 299
 - unitario, 252
- Equazione, 42**
 - cartesiana, 117, 118, 121, 186
 - cartesiana di una sfera, 339
 - cartesiana di una parabola, 313
 - cartesiana di un cilindro, 337, 338
 - cartesiana di un cono, 338, 339
 - cartesiana lineare, 118
 - cartesiana di una retta, 186, 187
 - cartesiana di un'ellisse, 312
 - cartesiana di un'iperbole, 312
 - cartesiana di un piano, 186
 - di primo grado, 40
 - parametrica, 29, 117, 121, 187
 - parametrica di una parabola, 314
 - parametrica di una retta, 30, 188-189
 - parametrica di una sfera, 340
 - parametrica di un'ellisse, 312
 - parametrica di un'iperbole, 313
 - parametrica di un cilindro, 337, 338
 - parametrica di un cono, 337, 339

- parametrica di un piano, 30, 188
- vettoriale, 29
- vettoriale di una retta, 28
- vettoriale di un piano, 28
- Esponenziale complesso, 89

F**Fascio**

- di coniche, 333
- di piani, 200, 221
- di rette, 190, 221
- improprio, 220, 221, 334

Forma

- bilineare, 227, 251
- bilineare simmetrica, 227
- canonica, 318
- canonica affine delle coniche, 330
- canonica affine delle quadriche, 330, 344
- trigonometrica dei numeri complessi, 81

Formula

- di De Moivre, 82
- di Parseval, 237
- induttiva, 168
- ricorsiva, 168

Funzione, 3

- bigettiva, 7
- iniettiva, 6
- inversa, 7
- invertibile, 7
- surgettiva, 6

Fuochi, 310, 311, 313, 315

G

Giacitura, 120, 221

Grado di un polinomio, 5, 18

Gruppo, 12

- commutativo, 12

H

Hermitianità, 231

I

Identità, 94

Immagine, 3, 97, 98

- inversa, 4

Incognita, 42

Indice, 43

Indipendenza lineare, 64, 65

Insieme, 2

- disgiunto, 2

- massimale di vettori linearmente indipendenti, 68

- quoziente, 33

- vuoto, 2

Intersezione, 2, 75

- di sottospazi vettoriali, 113, 114

Invariante, 318

Inversa, 129, 135-137

Inverso, 12

Involuzione, 269, 291

Iperbole, 311, 320

- equilatera, 311, 313

Iperboloide

- ellittico, 322

- iperbolico, 322

Iperpiano, 120

Ipotesi induttiva, 45

Isometria, 267, 268

- lineare, 246, 252, 269

Isomorfismo, 27, 130

- canonico, 131

L

Latitudine, 340

Longitudine, 340

Lunghezza, 230

M

Matrice, 43

- a scala, 108

- aggiunta, 102

- antisimmetrica, 104, 245

- associata a un'applicazione lineare, 150

- associata a una forma bilineare, 243

- associata a una quadrica, 324

- che rappresenta un'applicazione lineare, 150

- cofattore, 181

- completa, 42

- congruente, 244

- coniugata, 102

- dei coefficienti, 42

- di cambiamento di base, 146

- di passaggio, 146

- diagonale, 43

- hermitiana, 252

- identica, 132

- invertibile, 135-136
- non singolare, 52
- nulla, 132
- ortogonale, 247, 252
- quadrata, 43
- simile, 154
- simmetrica, 104, 245, 297
- singolare, 52
- trasposta coniugata, 102
- triangolare inferiore, 43
- triangolare superiore, 43
- unitaria, 252
- Minore di una matrice**, 168
- Modulo**
 - di un numero complesso, 80
 - di un vettore del piano, 77
- Molteplicità di una radice**, 84, 85
- Multiplo**, 24

- N**
- Norma**, 224, 226, 230, 232
- Nucleo**, 97, 99, 113
 - di un prodotto scalare, 227
- Numero**
 - complesso, 79
 - complesso in forma trigonometrica, 81
 - immaginario puro, 80
 - intero, 11
 - naturale, 11
 - razionale, 11
 - reale, 11
 - relativo, 11

- O**
- Omogeneità**, 226
- Omotetia**, 24
- Operatore lineare**, 93
- Operazione elementare**, 47, 48
- Opposto**, 12
- Ordine**
 - di una matrice, 43
 - di un sistema lineare, 42
- Orientazione**, 206, 222, 255, 256
- Origine**, 20, 204
- Oltre una sottomatrice**, 177
- Ortogonalità**, 241
- Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**, 237

- P**
- Parabola**, 313, 320
- Paraboloides**, 326
 - ellittico, 322
 - iperbolico, 323
- Parametrizzazione**, 116
 - lineare, 117
- Parametro**, 313
 - di giacitura, 186
 - direttore, 188
- Parte**
 - immaginaria, 80
 - quadratica di un polinomio, 324
 - reale, 80
- Permutazione**, 183
- Piano**, 120
 - affine, 209
 - coincidente, 203, 323
 - complesso incidente, 323
 - complesso parallelo, 323
 - esterno, 340
 - euclideo, 20, 254, 267
 - generato, 27
 - incidente, 202
 - orientato, 256
 - parallelo, 202
 - proiettivo, 218
 - reale incidente, 323
 - reale parallelo, 323
 - secante, 340
 - tangente, 340
- Pivot**, 48, 52, 108, 110, 113, 302
- Polinomio**, 5, 12
 - affinamente equivalente, 319
 - caratteristico, 283
 - metricamente equivalente, 319
 - minimo, 288
- Principio d'induzione**, 45, 46
- Prodotto**, 11
 - cartesiano, 3
 - di matrici, 133
 - hermitiano, 252
 - hermitiano canonico, 230
 - misto, 265
 - per scalari, 22, 26, 58-59
 - per scalari di applicazioni lineari, 128
 - scalare, 227
 - scalare canonico, 226
 - scalare definito negativo, 227

- scalare definito positivo, 227, 303
- scalare degenere, 227
- scalare indefinito, 227
- scalare non degenere, 227
- scalare semidefinito, 227
- vettore, 263
- Proiettività**, 216
- Proiezione**, 95, 139
 - centrale, 212
 - ortogonale, 241, 256, 257
 - parallela, 212
- Proprietà**
 - affine, 208
 - associativa, 11, 12
 - commutativa, 12
 - distributiva, 12
- Punto**
 - all'infinito, 215-216, 218
 - fisso, 269
 - improprio, 216, 218
 - proprio, 216, 218
- Q**
- Quadrica**, 319
 - a centro, 326
 - affinamente equivalente, 319
 - degenere, 324
 - metricamente equivalente, 319
 - non degenere, 324
- R**
- Radiane**, 15
- Radice**
 - di un polinomio, 84
 - n -esima, 82
- Raggio**, 310, 339
- Rango**, 99, 101, 113
- Rapporto semplice**, 208
- Regola del parallelogramma**, 20
- Restrizione**, 6
- Retta**, 120
 - affine, 209
 - all'infinito, 218
 - asintotica, 316
 - coincidente, 196, 320
 - complessa incidente, 320
 - complessa parallela, 320
 - contenuta in una conica, 316
 - e piano incidenti, 198
 - e piano paralleli, 198
 - esterna, 316
 - euclidea, 20, 267
 - incidente, 29, 196
 - orientata, 255
 - parallela, 29, 196
 - per due punti, 191-192
 - proiettiva, 216
 - reale incidente, 320
 - reale parallela, 320
 - secante, 316
 - sghemba, 29, 196
 - tangente, 316
- Riduzione a scala**, 110, 112
- Riflessione**, 269, 307
- Riflessività**, 32
- Riga**, 43
- Risoluzione all'indietro**, 44, 110
- Rotazione**, 249, 269
- S**
- Semiasse**, 310-311
- Seno iperblico**, 312
- Sezione conica**, 314
- Sfera**, 323, 339
- Simmetria**, 32, 269
- Sistema**
 - a scala, 108, 109
 - compatibile, 42, 64, 100
 - di generatori, 66
 - di riferimento affine, 27, 204
 - di riferimento affine contraverso, 206
 - di riferimento affine equiverso, 206
 - di riferimento cartesiano, 254
 - lineare, 42
 - lineare equivalente, 47
 - lineare omogeneo, 61, 65
 - lineare omogeneo associato, 61
 - lineare quadrato, 44
 - triangolare superiore, 44
- Soluzione**, 42
 - di un sistema lineare, 113
- Somma**, 11, 20, 26, 58, 59, 75, 126
 - diretta, 76
 - di applicazioni lineari, 128
 - di sottospazi affini, 126
 - di sottospazi vettoriali, 75, 113
- Sommatoria**, 168
- Sottoinsieme**, 2

- proprio, 2
- Sottomatrice, 177
- principale, 307
- Sottospazio
 - affine, 92, 120
 - affine parallelo, 121
 - di giacitura, 120
 - generato, 62
 - vettoriale, 60, 74
- Span, 27, 62, 113
- Spazio
 - affine, 209
 - delle applicazioni lineari, 128, 152
 - duale, 128
 - euclideo, 20, 254, 267
 - lineare, 59
 - vettoriale, 59
 - vettoriale isomorfo, 130
 - vettoriale metrico, 230
- Spettro, 277
- Stella
 - di piani, 193
 - di rette, 190
- Supplementare, 76
- Supplemento ortogonale, 241
- Sviluppo di Laplace, 168, 171

- T**
- Teorema
 - degli orlati, 178
 - del completamento, 70
 - della dimensione, 99
 - di Binet, 175
 - di Cramer, 176
 - di Grassmann, 75
 - di Grassmann per sottospazi affini, 126

- di Hamilton-Cayley, 307
- di Pitagora, 14
- di Rouché-Capelli, 100
- di struttura, 92
- di Sylvester, 303, 308
- di Talete, 14
- fondamentale dell'algebra, 85
- spettrale, 297
- Termine noto, 5, 42
- Traccia, 104, 281, 283
- Transitività, 32
- Trasformazione lineare, 93
- Traslazione, 23
- Trasposizione, 96
- Trasposta, 96

- U**
- Uguaglianza del parallelogramma, 249
- Unione, 2
- Unità immaginaria, 79

- V**
- Variabile, dipendente, 110
 - libera, 41, 110
- Versore, 235
 - direttore, 255
 - ortogonale, 256
- Vertice, 313, 318, 337
- Vettore, 58, 59
 - applicato, 20
 - asintotico, 316
 - di giacitura, 28, 189
 - direttore, 28, 188, 189
 - nullo, 20, 59
 - proporzionale, 24

Questo volume, sprovvisto del talloncino a fronte, è da considerarsi copia saggio-campione gratuito fuori commercio. Fuori campo applicazione IVA ed esente da bolla di accompagnamento (art. 22 L.67/1987, art. 2, lett. I D.P.R. 633/1972 e art. 4 n. 6 D.P.R. 627/1978).

Marco Abate · Chiara de Fabritis
GEOMETRIA ANALITICA
CON ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE
Terza edizione
McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.
9788838668814