Richiami sugli insiemi

$\mathbb{N}$ -> insieme dei numeri <u>naturali</u> $(1; 2; 3; \dots)$

$\mathbb{Z}$ -> insieme dei numeri <u>interi</u> $(\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots)$

$\mathbb{Q}$ -> insieme dei numeri <u>razionali</u> $(\dots; -1; \dots; -\frac{2}{3}; 0; \frac{8}{9}; \dots; 7; \dots)$

$\mathbb{R}$ -> insieme dei numeri <u>reali</u> $(\dots; -12,\overline{25}; -1; \dots; -\frac{2}{3}; \dots; 0; \dots; \pi; \dots)$
(include pure i numeri che non possono essere espressi mediante una frazione)

$\mathbb{C}$ -> insieme dei numeri <u>complessi</u> $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Simboli del linguaggio matematico

$\exists$ esiste	$\exists!$ esiste un unico	$\nexists$ non esiste
$\forall$ per ogni	$\mid$ tale che	$:$ tale che
$\Rightarrow$ implica	$\Leftarrow$ è implicato da	$\Leftrightarrow$ se e solo se
$\in$ appartiene	$\subseteq$ è incluso in	$\supseteq$ contiene

Le parentesi graffe { } si usano per definire gli insiemi

es. $\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \geq 0\}$ è "l'insieme dei numeri reali x tali che $\operatorname{sen} x \geq 0$"

Sul prodotto righe x colonne

È un'operazione tra 2 matrici che può essere eseguita a patto che il n° di colonne della prima matrice sia pari al n° di righe della seconda matrice. La matrice prodotto avrà un numero di righe pari a quello della 1ª matrice e un n° di colonne pari a quello della 2ª matrice.

- $\cdot : R_{n,m} \times R_{m,l} \rightarrow R_{n,l}$

$[(a_{ij}), (b_{ij})] \longrightarrow (c_{ij})$

dove $c_{ij} = \underline{a_i} \cdot \underline{b}^j \longrightarrow$ (<u>prodotto scalare</u> tra l'i-esima riga di A e la j-esima colonna di B)

Dimostrazione della distributività destra del prodotto righe per colon.

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}_{n,m}$ e $\forall\ C \in \mathbb{R}_{m,q}$ $\qquad (A+B)\,C = AC + BC$

DIM $\quad A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ke}) \quad C = (c_{op})$

$$\underbrace{(a_{ke} + b_{ke})}_{d_{ke}}\, c_{ij} = \underline{d}_i \cdot \underline{c}^j = (\underline{a}_i + \underline{b}_i) \cdot \underline{c}^j = (\underline{a}_i \cdot \underline{c}^j) + (\underline{b}_i \cdot \underline{c}^j)$$

$$= AC + BC$$

Esercizi sul prodotto righe per colonne

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 5\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 0\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 2 + (-3)\cdot 1 & 1\cdot 0 + (-3)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$C_{3\times 2}$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ non si può svolgere

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{2\times 2} \cdot B_{2\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{2\times3} \cdot B_{3\times4} = C_{2\times4} =$

$$\begin{pmatrix} 5\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot0 & 5\cdot0+(-1)\cdot2+2\cdot(-1) & 5\cdot3+(-1)\cdot0+2\cdot0 & 5\cdot(-1)+(-1)\cdot2+2\cdot0 \\ 0\cdot2+2\cdot1+3\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot2+3\cdot(-1) & 0\cdot3+2\cdot0+3\cdot0 & 0\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -4 & 15 & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizi su funzioni e relazioni

RICORDA: h_1 è una applicazione se $\forall a \in A \ \exists! \, b \in B : (a, b) \in h_1$

1) Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni

$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\} \longrightarrow$ NO perché non vale $\forall a \in A$

$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\} \rightarrow$ SI

$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\} \rightarrow$ SI

$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\} \longrightarrow$ NO perché $\nexists! \, b \in B$ ....

$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\} \rightarrow$ SI

RICORDA: Una relazione binaria su due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, costituito dalle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Una relazione è:

- RIFLESSIVA se $(a, a) \in R \ \forall a \in A$
- SIMMETRICA se $\forall (a, b) \in R$ si ha $(b, a) \in R$
- TRANSITIVA se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ allora $(a, c) \in R$

2) Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive

2.1 $\forall x, y \in \mathbb{Q} \qquad x \, h_1 \, y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

2.2 $\forall x, y \in \mathbb{Q} \qquad x \, h_2 \, y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

2.3 $\forall x, y \in \mathbb{N} \qquad x \, h_3 \, y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di x $(\exists m \in \mathbb{N} : y = mx)$

2.1 $R = \{(x,y) \in \mathbb{Q} : x+y \in \mathbb{Z}\}$

↳ è riflessiva : $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x+x \in \mathbb{Z}$

↳ è simmetrica: se $(x+y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x+y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z}$

↳ è transitiva: se $x+y \in \mathbb{Z}$ e se $y+z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+z \in \mathbb{Z}$

2.2 $R = \{(x,y) \in \mathbb{Q} : x-y \in \mathbb{Z}\}$

↳ è riflessiva : $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x-x = 0 \in \mathbb{Z}$

↳ è simmetrica: se $(x-y) \in \mathbb{Z}$ allora anche $-(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x \in \mathbb{Z}$

↳ è transitiva: se $(x-y) \in \mathbb{Z}$ e se $(y-z) \in \mathbb{Z}$

se considero la somma $\underbrace{x-\cancel{y}}_{\mathbb{Z}} + \underbrace{\cancel{y}-z}_{\in \mathbb{Z}} = x-z \in \mathbb{Z}$

2.3 $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} : y$ è un multiplo di $x\}$

↳ è riflessiva : ogni numero è multiplo di se stesso

↳ NON è simmetrica: es. se 4 è multiplo di 2 non è vero che 2 è multiplo di 4

↳ transitiva: se y è multiplo di x e z è multiplo di y

$\Rightarrow$ allora z sarà anche multiplo di x

RICORDA h è iniettiva se $\forall a, a' \in A$ con $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
(quindi se $a = a' \Rightarrow f(a) = f(a')$)

h è suriettiva se $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

h è biunivoca se $\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$

3) Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniett., suriett., biun.

3.1 $f : x \in \mathbb{Z} \longrightarrow 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$

↳ suriettiva NO

$y = x^2 + 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - y = 0 \qquad \Delta = 4 + 4y$

Affinché ci siano soluzioni $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4 + 4y \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+y}$$

L'applicazione non è suriettiva in $\mathbb{Z}$
(è suriettiva solo nell'insieme $[-1; +\infty)$)

↳ iniettiva NO

$f(0) = 0$

$f(-2) = 2(-2) + (-2)^2 = 0$

$f(a) = f(a')$ anche se $a \neq a'$

↳ biettiva NO

3.2 $g : x \in \mathbb{Z} \rightarrow (x-1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ "funzione che associa ad ogni numero intero x la coppia $(x-1, 2)$"

↳ suriettiva NO

Considero una generica coppia (u, v) e la eguaglio a $f(x) = (x-1, 2)$

$(u, v) = (x-1, 2) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} u = x - 1 \\ v = 2 \end{matrix}$ ma la coppia era generica!!

↳ iniettiva SI

$f(x) = (x-1, 2) = (y-1, 2) = f(y)$ poiché sono coppie il 1° el di ogni coppia dovrà coincidere

$x - 1 = y - 1 \quad \Rightarrow \quad x = y$

3.3 $h: x \in \mathbb{N} \to 2x-1 \in \mathbb{N}$

↳ suriettiva NO

$y = 2x-1 \Rightarrow 2x-1-y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$

affinché esistano soluzioni in $\mathbb{N}$
y deve essere un numero dispari
l'applicaz. non è suriettiva in $\mathbb{N}$

$y=1 \to x=1$ OK
$y=2 \to x=\frac{3}{2}$ NON OK
$y=3 \to x=2$ OK
$y=4 \to x=\frac{5}{2}$ NON OK
....

↳ iniettiva SI

sfrutto la definizione
se $f(x)=f(y)$ allora $x=y$

$f(x) = 2x-1 = 2y-1 = f(y) \Rightarrow 2x-1 = 2y-1 \Leftrightarrow x=y$

es. $f(1)=1$
$f(3)=5$

↳ biettiva NO

3.4 $p: x \in \mathbb{N} \to x-1 \in \mathbb{N}_0$

↳ suriettiva SI

$y = x-1 \Rightarrow x = y+1$

affinché esistano soluzioni in $\mathbb{N}_0$
y può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{N}_0$
l'applicazione è suriettiva in $\mathbb{N}_0$

se $y=0 \to x=1$ ok
$y=1 \to x=2$ ok
- - - -

↳ iniettiva SI

sfrutto la definizione se $f(x)=f(y)$ allora $x=y$

$f(x) = x-1 = y-1 = f(x) \Rightarrow x-1=y-1 \Leftrightarrow x=y$

es. $f(1)=0$
$f(2)=1$

↳ biettiva SI perché è sia iniettiva che suriettiva

Esercizio sulle strutture algebriche

RICORDA L'elemento neutro E rispetto a una generica op $(\cdot)$ è quell'elemento tale che $E \cdot q = q = q \cdot E$ per ogni razionale $q \in \mathbb{Q}$

Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia $\underline{x \star y = x + y + |xy|}$

Dopo aver osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che -2 è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$ [Infatti quest'operazione non è associativa]

- Osservo che 0 è elemento neutro per star $\star$:

$$0 \star q = \cancel{0} + q + \cancel{|0 \cdot q|} = q + \cancel{0} + \cancel{|q \cdot 0|} = q \star 0 = q \qquad \text{OK}$$

- Dimostro che -2 è simmetrico sia di se stesso sia di $\frac{2}{3}$ OK

devo dimostrare $-2 \star -2 = -2 \star \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \star -2$

$$-2 \star -2 = -2 + (-2) + |(-2)(-2)| = -2 -2 + |4| = -2 - 2 + 4 = 0$$

$$-2 \star \frac{2}{3} = -2 + \frac{2}{3} + \left|(-2)\left(\frac{2}{3}\right)\right| = -2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{2}{3} \star -2 = \frac{2}{3} - 2 + \left|\left(\frac{2}{3}\right)(-2)\right| = \frac{2}{3} - 2 + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

- Dimostro che $\star$ non è associativa OK

cerco 3 numeri $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tali che

$$\underline{(x \star y) \star z} \neq \underline{x \star (y \star z)}$$

- $(x + y + |xy|) \star z = x + y + |xy| + z + |(x + y + |xy|)z|$

- $x \star (y + z + |yz|) = x + y + z + |yz| + |x(y + z + |yz|)|$

es. $x = -1 \quad y = 3 \quad z = \frac{1}{2}$

- $-1+3+|-1\cdot3|+\frac{1}{2}+\left|\left(-1+3+|-1\cdot3|\right)\frac{1}{2}\right| = 2+3+\frac{1}{2}+\left|(2+3)\frac{1}{2}\right| = 5+\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = 8$
- $-1+3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\left|-1\left(3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\right| = 4+5=9$