Teorema nullità più rango

Se T è una applicazione lineare fra gli spazi vettoriali V e W

$T: V \to W$

allora vale la seguente relazione:

$$\underbrace{\dim(Ker(T))}_{\text{NUCLEO}} + \underbrace{\dim(Im(T))}_{\text{IMMAGINE}} = n = \dim(V)$$

Un'applicazione è

- iniettiva se $\dim(Ker(T)) = 0$, cioè se $Ker(T) = \{0\}$
- suriettiva se $\dim(Im(T)) = \dim(W)$
- biettiva se è sia iniettiva che suriettiva

Un'applicazione biettiva è invertibile.

Nota:

fin'ora abbiamo sempre sistemato i vettori <u>PER RIGA</u> all'interno di una matrice (cosa che vi consiglio di fare sempre, anche se per dimensione e rango è indifferente) invece negli esercizi in cui si va a costruire una matrice associata o una matrice di passaggio i vettori vanno sistemati <u>PER COLONNA</u>.

Esercizi sulle applicazioni lineari

1) Sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$T(x,y) = (x+y,\ 2x,\ x-y)$$

- Verificare che T è lineare

Si deve verificare che : 1) $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$ OK $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$

2) $T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$ OK $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Siano $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$

1) $T(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2,\ 2x_1+2x_2,\ x_1+x_2-y_1-y_2)$

$T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) = (x_1+y_1, 2x_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, 2x_2, x_2-y_2)$

$= (x_1+y_1+x_2+y_2,\ 2x_1+2x_2,\ x_1-y_1+x_2-y_2)$

2) $T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1,\ 2\lambda x_1,\ \lambda x_1 - \lambda y_1)$

$\lambda T(x_1,y_1) = \lambda(x_1+y_1, 2x_1, x_1-y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1,\ \lambda 2x_1,\ \lambda x_1 - \lambda y_1)$

$\Rightarrow$ L'applicazione T è lineare

- Determinare nucleo Ker(T)

$Ker(T) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^2 \mid T(\underline{v}) = 0\}$ → per determ. il nucleo devo cercare le soluzioni del sist. omogeneo

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y, 2x, x-y) = (0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow Ker(T) = \{(0,0)\}$$

- Determinare immagine Im(T)

$Im(T) = \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$= \{(x+y, 2x, x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(1,2,1)x + (1,0,-1)y \mid x,y \in \mathbb{R}^2\}$

$= \langle (1,2,1), (1,0,-1) \rangle$ → sistema di generatori

- Determinare una base di Im(T) → studiamo se il sist. di generatori è lin. indipendente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 2$$

Il rango è MAX ed è pari al n° di vettori
perciò i 2 vettori sono lin indip
quindi costituiscono già una base
$B(Im(T)) = \{(1,2,1), (1,0,-1)\}$

- Determinare la matrice A <u>associata</u> a T rispetto alle basi canoniche

La matrice A ha per COLONNE le immagini dei vettori della base di $\mathbb{R}^2$ espressi come combinazione lineare della base di $\mathbb{R}^3$

$$T(\underline{e}_1) = T(1,0) = (1,2,1)$$
$$T(\underline{e}_2) = T(0,1) = (1,0,-1) \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = (x+y,\ 2x,\ x-y)$$

Notiamo che: $Im(T)$ = spazio generato dai vettori colonna di A
$Ker(T)$ = soluzione del sistema omogeneo associato ad A

2) Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x,y,z) = (x-y,\ 2x-3y)$$

- Dire se T è iniettiva e/o suriettiva
- Trovare le dimensioni di $Ker(T)$ e $Im(T)$

RICORDA: Il teorema nullità più rango ci dice che

↳ T è iniettiva se $Ker(T) = \{(0,0)\}$, ovvero se $\dim(Ker(T)) = 0$

↳ T è suriettiva se $Im(T) = \mathbb{R}^n$, ovvero se $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^n)$

GENERICO SPAZIO DI ARRIVO

Risolvo ambo i quesiti calcolando la matrice A associata all'applicazione T: A è data dalle immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,2)$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (-1,-3) \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0)$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-(-2) = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 2$$

$\Rightarrow \dim Im(T) = \rho(A) = 2$

poichè $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow T$ è suriettiva

$\Rightarrow$ per trovare $\dim Ker(T)$ sfrutto il th. nullità più rango

$$\dim Ker(T) = \underset{\text{sp. partenza}}{\dim \mathbb{R}^3} - \dim Im(T)$$

$$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow T \text{ non è iniettiva}$$

4. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $f((x, y, z)) = (x - 2z, 2y + 2z, x + 4y + 2z, x + 2y)$
(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se f è iniettiva e/o suriettiva;
(iii) il vettore $(1, 0, 1, 0)$ appartiene a Imf? Perché?

RICORDA:
1) $Im(f)$ è generata dai vettori $\langle f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)\rangle$
2) $\rho(A)$ ci restituisce la dimensione di $Im(f)$
3) un generico vettore $\underline{v}$ appartiene a $Im(f)$ se $\underline{v} \in \langle f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)\rangle$

Risolvo i quesiti calcolando la matrice A associata all'applicazione f: A è data dalle immagini degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1, 0, 1, 1)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (0, 2, 4, 2)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (-2, 2, 2, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{-R_1+R_4}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2 \Rightarrow \dim Im(f) = 2$

- Poiché $\dim Im(f) = 2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow f$ non è suriettiva

Una base di $Im(f)$ sarà
$B[Im(f)] = \{f(e_1), f(e_2)\} = \{(1,0,1,1), (0,2,4,2)\}$

- Dal th. nullità più rango

$\dim Ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Im(f)$ (sp. partenza)
$= 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ non è iniettiva

- Per determinare una base del nucleo si devono ricavare le soluzioni del sistema omogeneo associato a f:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow B[\mathrm{Ker}(f)] = \{(2,-1,1)\}$$

In alternativa si può risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A già ridotta a gradini

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \rightarrow \text{stesso risultato}$$

- Per verificare se il vettore $\underline{v} = (1,0,1,0) \in \mathrm{Im}(f)$ si deve verificare se il sistema $(x-2z, 2y+2z, x+4y+2z, x+2y) = (1,0,1,0)$ è compatibile, cioè se

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{ammette soluzione}$$

ATTENZIONE: Stavolta non possiamo usare la matrice A già ridotta a gradini (perché il sistema non è più omogeneo) $\Rightarrow$ si deve far riferimento alla "mat. iniziale"

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[-R_1+R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[-R_1+R_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_2+R_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ poiché $\rho(A|b) = 3$ e $\rho(A) = 2$ il sistema non è compatibile (non ammette soluzione)

perciò $\underline{v} \notin \mathrm{Im}(f)$

$(1,0,1,0) \notin \mathrm{Im}(f)$

4. Data l'applicazione lineare $T : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + y, 2x - y, y) \in \mathbb{R}^3$,

(i) dire se l'applicazione T è iniettiva e suriettiva;

(ii) determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B}$ canonico di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,0), (-1,2,1), (0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

simultaneamente

- Rispondiamo al quesito (i) calcolando la matrice A associata all'applicazione T

$$T(e_1) = T(1,0) = (1,2,0)$$
$$T(e_2) = T(0,1) = (1,-1,1)$$
$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

nota: questa è la matrice associata a T nel riferimento B canonico

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = 2$$

- $\dim \operatorname{Im}(T) = \rho(A) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ non è suriettiva
- th. nullità più rango

$$\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Im}(T) = 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T \text{ è iniettiva e } \operatorname{Ker}(T) = \{(0,0)\}$$

- Per determinare la matrice M associata a T nei riferimenti B e B' simultaneamente, quello che si deve fare è prendere le immagini degli elementi della base canonica e scriverle come combinazione lineare dei vettori di B'

① $T(1,0) = (1,2,0) = x(1,1,0) + y(-1,2,1) + z(0,0,1)$

② $T(0,1) = (1,-1,1) = x(1,1,0) + y(-1,2,1) + z(0,0,1)$

Devo quindi risolvere 2 sistemi

① $$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 1 + y + 2y = 2 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 3y = 1 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$
② \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 1 + y + 2y = -1 \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ 3y = -2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \\ z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}
$$

In definitiva $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

(54) Data l'applicazione

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, 2x + 3z, 3x + y + 3z) \in \mathbb{R}^3,$$

determinare se è suriettiva, iniettiva e se il vettore $(0, 0, 1)$ appartiene all'immagine di $\mathbb{R}^3$ tramite f. Scrivere inoltre la matrice associata ad f nel riferimento

$$\mathcal{R}' = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)).$$

Rispondiamo ai quesiti calcolando la matrice A associata all'applicazione f

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,3)$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0,1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,3,3) \qquad \rho(A) = 2$$

- poichè $\dim \operatorname{Im}(f) = \rho(A) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ non è suriettiva
- poichè $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(f) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ non è iniettiva
- per verificare se $(0,0,1) \in \operatorname{Im}(f)$ devo vedere se $(x+y, 2x+3z, 3x+y+3z) = (0,0,1)$ è compatibile

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 3x + y + 3z = 1 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \\ -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -R_2+R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Poichè $\rho(A|b) = 3$ e $\rho(A) = 2$ il sistema non è compatibile perciò $(0,0,1) \notin \operatorname{Im}(f)$

• La matrice M associata a f rispetto alla base R' è data esprimendo immagini degli elementi di R' attraverso f, in funzione della base R'.

1) Calcoliamo le immagini dei 3 vettori di R' attraverso f

$$f(1,1,0) = (2,2,4)$$
$$f(0,1,1) = (1,3,4)$$
$$f(1,1,1) = (2,5,7)$$

vettori di R' $\qquad (x+y,\ 2x+3z,\ 3x+y+3z)$

2) Dopodiché per esprimere tali immagini in funzione della base R' si dovranno risolvere i 3 sistemi:

① $x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1) = f(2,2,4)$

② $x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1) = f(1,3,4)$

③ $x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,1,1) = f(2,5,7)$

Per facilitare i conti riduciamo la matrice associata

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & ① & ② & ③ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow -R_1+R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

$$-R_2+R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

I sistemi sono quindi

① $\begin{cases} x+z=2 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+z=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x+z=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$f(1,1,0)=(-2,0,4)_{R'}$

$f(1,1,1)=(-2,3,4)_{R'}$

$f(0,1,1)=(-1,2,2)_{R'}$

$\Rightarrow$ La matrice M avrà per colonne i 3 vettori che ci siamo ricavati

$$M=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$