

Frequenza: N. lezioni su 14 =

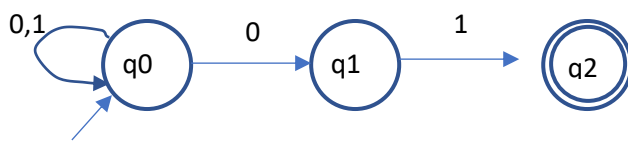
Cognome

Nome

Matricola

**Il punteggio totale dell'esame è di 30 su 34 punti! Tempo 1h e 45minuti**

Es. 1 [4] Dato il seguente NFA, a) descriverlo in forma matematica (formale), b) definire il linguaggio da esso accettato e c) convertirlo in un DFA utilizzando la procedura di conversione mostrata a lezione.



Es. 2 [3] Scrivere un NFA che riconosce il linguaggio L costituito dalla sola parola vuota  $\epsilon$ . Si può fare con un DFA (argomentare)? [Si consideri un alfabeto qualsiasi, per esempio l'alfabeto  $\{0,1\}$ ]

Es. 3 [5] Costruire un NFA/DFA (specificare indicandolo chiaramente) che riconosca il seguente linguaggio  $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contiene un numero pari di 0, e soltanto una o due occorrenze di 1}\}$ . Mostrare poi l'espressione regolare del linguaggio L. [0 è un numero pari]

Es. 4 [4] Utilizzando il pumping lemma, si mostri che il seguente linguaggio non è regolare  $L = \{1^n x x 0^n \mid \text{con } n \geq 0 \text{ e } x=0 \text{ oppure } x=1\}$ .

Es. 5 [4] Quali di questi linguaggi di parole binarie può essere riconosciuto da un NFA e dire intuitivamente perché (anche senza usare pumping lemma).

- Il linguaggio delle parole con lo stesso numero di occorrenze di 0 e di 1
- Il linguaggio delle parole con un numero di 0 doppio rispetto al numero degli 1
- Il linguaggio delle parole che terminano con 0
- Il linguaggio delle parole che dopo uno 0 devono sempre vedere un 1

Es. 6 [3] Scrivere una CFG per il linguaggio delle espressioni aritmetiche binarie, per esempio:  $((110x10)-(11x10))$ . Dunque, le espressioni conterranno gli 8 elementi: **( , ) , 0 , 1 , + , x , - , :**

Es. 7 [3] Data la seguente grammatica

$$S \rightarrow aSb \mid bY \mid Ya$$

$$Y \rightarrow bY \mid aY \mid \epsilon,$$

scrivere il PD che riconosce il linguaggio che essa genera.

Es. 8 [3] Scrivere un automa PDA che riconosca il linguaggio  $L = \{1^n x x x 0^n \mid \text{con } n \geq 0 \text{ e } x=0 \text{ oppure } x=1\}$ . [Si noti che 111000000 appartiene a L, mentre 111010000 non appartiene a L, ovvero i valori al centro "xxx" devono essere tutti 0 o tutti 1]

Es. 9 [5] Scrivere un automa PDA per il linguaggio  $L = \{ww^Ryy^R \mid w, y \in \{0,1\}^*\}$  (R sta per reverse).

20/01/2023

Esame di Elementi di Informatica Teorica - Prof. Aniello Murano

Cognome e Nome

Matricola

- 1) (4pt) Siano  $L_1$  e  $L_2$  due linguaggi regolare su  $\Sigma$ , si può dire che anche  $L_1 \setminus L_2$  è regolare?
  - 2) (12 pt) Si definisca un NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{a, b, c\}$  che accetti il linguaggio  $L$  di tutte le parole dove la lettera  $a$  o la lettera  $b$  sono presenti almeno due volte. Per esempio,  $L$  contiene  $aba$  e  $bacbbab$ , ma non  $abc$ , né  $abcc$ . Si scriva anche il DFA equivalente, usando la costruzione per sottoinsiemi
  - 3) (8 pt) Provare che il linguaggio  $L = \{x^k \mid k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}\}$ , ovvero  $L$  contiene  $x$ ,  $xxx$ ,  $xxxxxxx$ , non è regolare.
  - 4) (8 pt) Scrivere una CFG che generi parole su  $\Sigma = \{0, 1\}$  che contengano più occorrenze di 1 rispetto a 0. Per esempio 100111010
- .....

- 1) (12pt) Rispondere alle seguenti domande (argomentando, un semplice sì/no non sarà accettato):
  - a. Dare la definizione di Turing riconoscibile e co-Turing riconoscibile. Che succede se un linguaggio appartiene ad entrambi?
  - b. Esistono linguaggi che non sono né Turing e né co-Turing riconoscibili, se si indicarne uno?
  - c. I linguaggi decidibili sono chiusi rispetto all'intersezione?
  - d. Sia  $M$  un automa linear bounded (LBA). Quante configurazioni sono possibili su un input  $w$ , con  $|w| = n$ ?
  - e.  $ALBA = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is an LBA that accepts } w \}$  è decidibile?
- 2) (10pt) Sia  $\Sigma = \{0, 1, -, a\}$ , e  $L = \{w-a^n \mid w \in \{0, 1\}^* \text{ tale per cui } w \text{ è una rappresentazione binaria di } n\}$ , per esempio,  $00011-aaa \in L$  ma non le parole  $101-aa$  né  $001-aaa$ . Si costruisca una macchina di Turing che decida  $L$ .
- 3) (10pt) Si provi che il seguente linguaggio è indecidibile. Si può usare una riduzione da ATM o da altri problemi noti essere indecidibili  
 $L = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ è una TM e } M \text{ accetta la stringa } 001 \}$

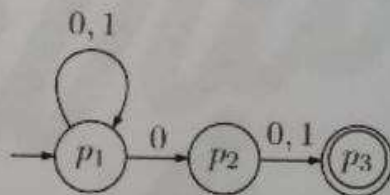
27/02/2023

Esame di Elementi di Informatica Teorica - Prof. Aniello Murano

Cognome e Nome

Matricola

- 1) [6pt] Descrivere formalmente (un pagina) la macchina di Turing e la sua versione multi-nastro. Cosa significa che un linguaggio è riconoscibile/decidibile? Rispondere poi alle seguenti domande argomentando la risposta:
- a) Ogni sottoinsieme di un insieme decidibile è a sua volta decidibile?
  - b) Esistono linguaggi riconoscibili ma non decidibili?
  - c) L'insieme dei linguaggi riconoscibili è chiuso rispetto al complemento?
  - d) L'insieme dei linguaggi decidibili è chiuso rispetto al complemento?
- 2) [6pt] Si consideri il seguente NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Si dia una definizione formale in notazione tupla. Fornire un DFA equivalente utilizzando la costruzione per sottoinsiemi.



- 3) [4 pt] Si costruisca l'automa che riconosce il linguaggio delle parole sull'alfabeto  $\{0,1,2\}$  che contenga la sottosequenza 0012, oppure 0021, dire se è un NFA o DFA.
- 4) [4 pt] Si provi utilizzando il pumping lemma che il linguaggio  $L = \{a^n b^{n+1} \mid n > 0\}$  non è regolare.
- 5) [4 pt] Si provi utilizzando il pumping lemma che il linguaggio  $L = \{a^n b^m \mid m = n^2\}$  non è context-free
- 6) [4 pt] Convertire la seguente grammatica in un PDA. La grammatica ha come simboli non terminali l'insieme  $\{E, T, F\}$ , terminali  $\{+, \times, (, ), a\}$ , simbolo iniziale E, e produzioni:

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

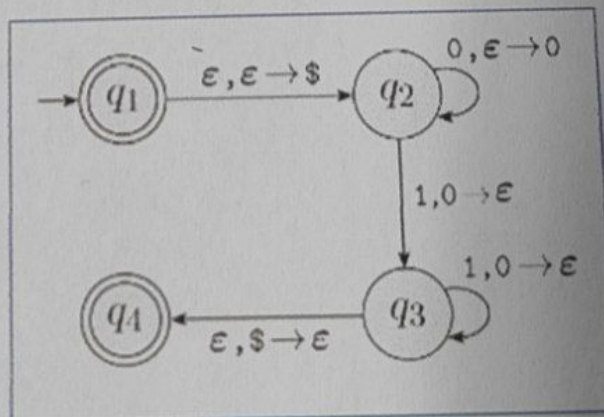
$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid a$$

- 7) [4 pt] Costruire una CFG per il seguente linguaggio  $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 0\}$



- 1) [12] Disegnare un NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  per ognuno dei linguaggi che seguono, specificando chi sono  $Q$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$ ,  $q_0$  e  $F$  per il DFA.:
  - a. [2] il Linguaggio  $L_1$  delle stringhe che hanno il terzultimo e l'ultimo simbolo uguale a 0.
  - b. [2] il linguaggio di numeri binari non negativi divisibili per 8 scritti in binario, con il bit meno significativo per primo.
  - c. [1] Il linguaggio vuoto
  - d. [1] Il linguaggio composto dalla sola parola vuota
  - e. [1] Il linguaggio  $\Sigma^*$
  - f. [1] Il linguaggio  $\Sigma^* \setminus \Sigma$
- 2) [4] Scrivere la grammatica per il linguaggio  $L = \{0^{3n}1 \mid n \geq 0\}$
- 3) [6] Si parli brevemente della numerabilità/non-numerabilità di  $Q$  e di  $R$  e come questo concetto può essere utilizzato per dimostrare l'indecidibilità di alcuni problemi della Macchina di Turing
- 4) [12] Il lemma 2.27 del Sipser riporta: Se un pushdown riconosce un linguaggio  $L$ , allora  $L$  è un CFL.
  - a. Si descriva la prova del Lemma
  - b. Utilizzando la costruzione descritta nella prova del lemma 2.27, si scriva la grammatica CFL del linguaggio accettato dal seguente PDA:



11/01/2024

Esame di Elementi di Informatica Teorica (34/30) - Prof. Aniello Murano

Cognome e Nome

Matricola

- 1) (4 punti) Dare la definizione induttiva di espressione regolare su formale su  $\Sigma=\{0,1\}$ . Che collegamento c'è tra espressioni regolari e automi (max 10 righe).
- 2) (6 punti) Per ognuno dei linguaggi che segue, costruire un automa che lo riconosce. Definire l'automa completo indicando ogni suo elemento (le transizioni possono essere date sul grafo) e indicare se l'automa è deterministico o meno:
  - a.  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : \text{ogni 'a' in } w \text{ è immediatamente preceduta e seguita da 'b'}\}$
  - b.  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ ha abab come sottostringa}\}$ .
- 3) (4 punti) Per ognuno dei linguaggi che seguono, scrivere una CFG che li generi:
  - a. [2] Il linguaggio  $L_1$  di tutte le parole palindrome su  $\Sigma = \{a, b\}$  che non contengono la sottostringa aa.
  - b. [2] Il linguaggio  $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{la lunghezza di } w \text{ è dispari e il simbolo centrale è } 0\}$
- 4) (4 punti) Si provi usando il pumping lemma che il linguaggio  $L = \{a^i b^j c^k \mid j < i, j < k\}$  non è context-free.
- 5) (4 punti) Costruire un Pushdown che riconosca il linguaggio L delle parentesi quadre ben bilanciato. Dunque,  $\Sigma = \{ [ , ] \}$  e per esempio  $[[[[[[]]]]]] \in L$ .
- 6) (12 punti) Dopo aver ricordato brevemente la definizione di Macchina di Turing deterministica e non deterministica, di Turing-decidibile e Turing-riconoscibile (max 1 pagina)[4], si consideri il seguente linguaggio  $\text{REJECT}_{\text{TM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ è una TM e } M \text{ rigetta } w \}$  e si provi che
  - a. [4]  $\text{REJECT}_{\text{TM}}$  è riconoscibile.
  - b. [4]  $\text{REJECT}_{\text{TM}}$  è indecidibile utilizzando il metodo della diagonalizzazione oppure una riduzione da  $A_{\text{TM}}$ .

Prova Edit del 25/04/2024

[34 punti]

[Tempo: 2 ore e 15 minuti]

- 1) [6] Descrivere un NFA che accetti il linguaggio costituito da tutte e sole le stringhe binarie contenenti un numero pari di simboli 0 oppure esattamente due simboli 1. Convertire l'automa ottenuto in un DFA con la tecnica della costruzione per sottoinsiemi
- 2) [6] Definire le grammatiche per i seguenti due linguaggi
  - a) il linguaggio costituito da tutte e sole le stringhe binarie contenenti almeno tre simboli 1.
  - b) Il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^m : n > 0, m > 0\}$
- 3) [6] Dopo aver formalizzato il pumping lemma, si provi utilizzando lo stesso che il seguente linguaggio  $L$  non è regolare.  $L = \{x2y : x, y \in \{0,1\}^* \text{ e il numero di 0 in } x \text{ è uguale al numero di 1 in } y\}$ .
- 4) [4] Definire un automa PDA per la seguente grammatica:  $S \rightarrow aAA, A \rightarrow aS, A \rightarrow bS, A \rightarrow a$ .
- 5) [12] Dopo una breve ma formale introduzione della macchina di Turing deterministica e nondeterministica,
  - a) si definisca una macchina di Turing  $T$  con un solo nastro che, data in input la rappresentazione binaria di due numeri interi non negativi  $x$  e  $y$ , produca in output la rappresentazione binaria del minimo tra  $x$  e  $y$
  - b) Si definisca una macchina di Turing  $T$  con 3 nastri che calcoli la somma di due numeri interi non negativi codificati in binario
  - c) Si dimostri che l'insieme di tutte le stringhe infinite binarie non è numerabile.



Prova Edit del 12/06/2024

[34 punti]

[Tempo: 2 ore e 15 minuti]

- 1) [6] Descrivere un NFA che accetti il linguaggio costituito da tutte e sole le stringhe binarie contenenti un numero dispari di simboli 1 e non contenga due simboli 0 consecutivi. Convertire l'automa ottenuto in un DFA con la tecnica della costruzione per sottoinsiemi
- 2) [6] Definire le grammatiche per i seguenti due linguaggi
  - a) il linguaggio costituito da tutte e sole le stringhe binarie contenenti almeno due simboli 1 e un simbolo 0.
  - b) Il linguaggio  $L = \{a^n b^m c^n : n > 0, m > 0\}$
- 3) [6] Dopo aver formalizzato il pumping lemma, si provi che il linguaggio b) dell'esercizio 2 non è regolare.
- 4) [6] Definire un automa PDA per il linguaggio b) dell'esercizio 2).
- 5) [5] Dopo una breve ma formale introduzione della macchina di Turing deterministica e nondeterministica, si definisca una macchina di Turing T con un solo nastro che, data in input la rappresentazione binaria di un numero x, produca in output la rappresentazione binaria per il suo doppio
- 6) [5] Dopo aver riportato l'enunciato del teorema di Rice, si provi che il linguaggio  $Useless_{TM} = \{\langle M, q \rangle \mid q \text{ è uno stato inutile}\}$  è indecidibile.



Prova Edit del 04/07/2024

[32 punti]

[Tempo: 2 ore]

- 1) [12] Disegnare un NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  per ognuno dei linguaggi che seguono, specificando chi sono  $Q$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$ ,  $q_0$  e  $F$ :
  - a. [2] il Linguaggio  $L$  delle stringhe che hanno il terzultimo e il penultimo simbolo uguale a 1.
  - b. [3] il linguaggio  $L$  di numeri binari non negativi divisibili per 4 scritti in binario, con il bit meno significativo per primo.
  - c. [1] Il linguaggio vuoto
  - d. [2] Il linguaggio  $L = H \cdot H$  dove  $H$  è il linguaggio composto dalla sola parola vuota
  - e. [1] Il linguaggio  $\Sigma^*$  meno la parola vuota
  - f. [3] Il linguaggio  $\Sigma^* \setminus \Sigma \cdot \Sigma$
- 2) [4] Scrivere la grammatica per il linguaggio  $L = \{0^{3n}1^n \mid n \geq 0\}$
- 3) [6] Dopo aver formalizzato il pumping lemma, si provi utilizzando lo stesso che il seguente linguaggio non è un CFL:  $\{00^n11^n00^n \mid n \geq 0\}$
- 4) [4] Si parli brevemente della numerabilità/non-numerabilità di  $R$  e come questo concetto può essere utilizzato per dimostrare l'indecidibilità di alcuni problemi della Macchina di Turing.
- 5) [6] Dopo una breve ma formale introduzione della macchina di Turing deterministica e nondeterministica[2pt], si parli del problema del vuoto di una macchina di Turing ( $E_{TM}$ )[2pt]. Si argomenti infine sul vuoto dei DFA/NFA[2pt].

Prova Edit del 06/09/2024

[32 punti]

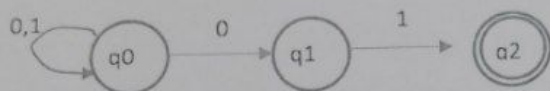
[Tempo: 2 ore]

- 1) [4] Disegnare un NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  per il Linguaggio L delle stringhe che hanno il terzultimo e l'ultimo simbolo diversi. Si specifichi chi sono Q,  $\Sigma$ ,  $\delta$ ,  $q_0$  e F.
- 2) [4] Si provi formalmente che dati due automi NFA la loro unione è ancora un NFA. Si dia anche un esempio di costruzione.
- 3) [3] Scrivere la grammatica per il linguaggio  $L = \{0^{3n}21^{2n} \mid n \geq 0\}$ . Esempio di parole contenute in L: 000211 | 00000021111
- 4) [4] Dopo aver formalizzato il pumping lemma, si provi utilizzando lo stesso che il seguente linguaggio non è un CFL:  $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$
- 5) [3] Si mostri che le grammatiche Context Free sono chiuse rispetto all'unione, alla concatenazione e alla star.
- 6) [6] Si considerino i seguenti due problemi:
  - a. [4] Determinare se una MdT a due nastri legge l'input sul primo nastro e se accettato scrive un simbolo diverso da blank sul secondo. Si formuli il problema come linguaggio e si provi che è indecidibile.
  - b. [2] Determinare se "una MdT riesce ad accettare il suo input senza mai muovere la testina a sinistra". Questo problema è decidibile?
- 7) [4] Si parli di  $(N, +)$  e si provi la sua decidibilità.
- 8) [4] Si parli del PCP e, in una pagina, (i) si sintetizzino i passaggi principali per provare che è indecidibile, (ii) si descriva un caso particolare in cui il PCP è decidibile.



Il punteggio totale dell'esame è di 32 punti. Tempo 2h

Es. 1 [4] Dato il seguente NFA, a) descriverlo in forma matematica (formale), b) definire il linguaggio da esso accettato e c) convertirlo in un DFA utilizzando la procedura di conversione mostrata a lezione.



Es. 2 [3] Scrivere un NFA che riconosce il linguaggio costituito dalla sola parola vuota  $\epsilon$ . Si può fare con un DFA (argomentare)?

Es. 3 [5] Costruire un NFA che riconosca il seguente linguaggio  $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ contiene un numero pari di } 0, \text{ e soltanto una o due occorrenze di } 1\}$ . Mostrare poi l'espressione regolare del linguaggio  $L$ .

Es. 4 [4] Utilizzando il pumping lemma, si mostri che il seguente linguaggio non è regolare  $L = \{1^n 2^m 0^n \mid n, m > 0\}$ .

Es. 5 [3] Data la seguente grammatica

$$S \rightarrow aSb \mid bY \mid Ya$$

$$Y \rightarrow bY \mid aY \mid \epsilon,$$

scrivere il PD che riconosce il linguaggio che essa genera.

Es. 6 [5] Scrivere un automa PD per il linguaggio  $L = \{ww^R yy^R \mid w, y \in \{0,1\}^* \text{ (R sta per reverse)}\}$ .

Es. 7 [8] Parlare delle macchine di Turing deterministiche e non deterministiche. Parlare del problema della fermata e dimostrare che esso è indecidibile.



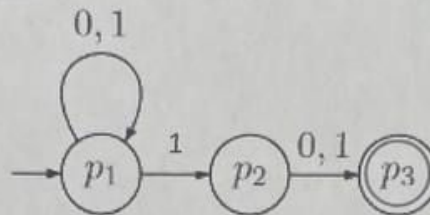
09/01/2025

Esame di Elementi di Informatica Teorica - Prof. Aniello Murano

Cognome e Nome

Matricola

- 1) [6pt] Dopo aver spiegato brevemente cosa si intende per automa NFA, DFA e linguaggio regolare (max mezza pagina), si consideri il seguente NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  e si dia una definizione formale in notazione tupla. Fornire inoltre un DFA equivalente utilizzando la costruzione per sottoinsiemi.



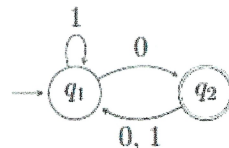
- 2) [4 pt] Si costruisca l'automa che riconosce il linguaggio delle parole sull'alfabeto  $\{0,1\}$  che siano divisibili per 3 (dalla meno significativa alla più significativa).
- 3) [4 pt] Si costruiscano graficamente gli automi corrispondenti a:
- $L_1 = \emptyset$
  - $L_2 = \{\epsilon\}$
  - $L_3 = L_1 \cup L_2$
  - $L_4 = \Sigma^* \setminus L_2$
- 4) [4 pt] Si provi utilizzando il Pumping Lemma che il linguaggio  $L = \{a^n ab^{n+2} \mid n \geq 0\}$  non è regolare. Si dia una prova formale completa con una breve descrizione dei passaggi.
- 5) [4 pt] Si definisca una CFG (formale e completa) per il linguaggio al punto 4).
- 6) [4pt] Si costruisca una PDA per il seguente linguaggio  $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \geq 0\}$
- 7) [4pt] Si descriva formalmente (max una pagina) la Macchina di Turing, nella versione deterministica a singolo nastro, spiegando formalmente cosa significa che una parola è accettata/non accettata e che un linguaggio è Turing riconoscibile/co-Turing riconoscibile/Turing decidibile. Che possiamo dedurre se un linguaggio è sia Turing riconoscibile e co-Turing riconoscibile (dare una risposta formale).
- 8) [4pt] Si descriva formalmente (max una pagina) cosa si intende per LBA e il problema dell'accettazione rispetto ad una Macchina di Turing classica.

Prova Edit del 13/02/2025

[32 punti]

[Tempo: 2 ore]

- 1) [6] Dopo una breve introduzione sugli automi a stati finiti, disegnare un NFA sull'alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  per il Linguaggio L delle stringhe che hanno il terzultimo e l'ultimo simbolo uguali oppure il penultimo e l'ultimo simbolo diversi. Disegnare un NFA nel caso in cui al caso precedente "oppure" sia sostituito da "e". Si definiscano formalmente chi sono  $Q, \Sigma, \delta, q_0$  e  $F$ .
- 2) [4] Si provi formalmente che dati due automi NFA la loro intersezione è ancora un NFA. Si dia anche un esempio di costruzione.
- 3) [4] Si trasformi il seguente DFA in un'espressione regolare, applicando l'algoritmo visto a lezione



- 4) [4] Scrivere la grammatica CFG per il linguaggio  $L = \{a^n b^n c^m : m \geq n, n \geq 0\}$
- 5) [4] Scrivere il PDA per il linguaggio  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ e si verifica che } i = j \text{ oppure } j = k\}$
- 6) [4] Dopo aver formalizzato il pumping lemma, si provi utilizzando lo stesso che il seguente linguaggio non è un CFL:  $\{00^n 11^n 00^n \mid n \geq 0\}$
- 7) [6] Si parli del PCP e, in una pagina, (i) si sintetizzino i passaggi principali per provare che è indecidibile, (ii) si descriva un caso particolare in cui il PCP è decidibile.