Luigi. M. Ricciardi Silvana Rinaldi

519.07
RIC
1P

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Circa 350 esercizi completamente risolti
ad uso delle Facoltà scientifiche, tecniche ed economiche

SYS: 134911
CDD: 519.076

UNIVERSITA' DI NAPOLI FEDERICO II
BIBLIOTECA CENTRALE
FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

Liguori Editore

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1994

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Febbraio 1994

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2000 1999 1998 1997 1996 1995 1994

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2384-0

INDICE

Premessa vii

Capitolo I
Calcolo combinatorio 1

Capitolo II
Probabilità di eventi 13

Capitolo III
Probabilità condizionate 57

Capitolo IV
Variabili casuali discrete 109

Capitolo V
Variabili casuali assolutamente continue 145

Capitolo VI
Funzioni di variabili casuali 183

Capitolo VII
Momenti di variabili casuali 215

Capitolo VIII
Somme e prodotti di variabili casuali 289

PREMESSA

Questa raccolta di esercizi è destinata principalmente, ma non soltanto, a studenti universitari che intendano acquisire dimestichezza con l'uso degli strumenti di base del calcolo delle probabilità sia a complemento della teoria stessa che al fine di venire in possesso della base indispensabile per un proficuo avviamento all'uso dei metodi della statistica.

Tutti gli esercizi sono stati dettagliatamente svolti affinché il lettore – cui peraltro si raccomanda di tentare sempre, preliminarmente, la ricerca della soluzione in maniera autonoma – possa rendersi pienamente e facilmente conto dei procedimenti risolutivi adottati.

Per la risoluzione degli esercizi è richiesta soltanto dimestichezza con elementi di calcolo combinatorio e con gli strumenti di base del calcolo integrodifferenziale. Ciò è risultato possibile rinunciando, di norma, all'uso della funzione caratteristica ed utilizzando in sua vece la funzione generatrice dei momenti. Sono inoltre state separatamente trattate le variabili casuali discrete e quelle assolutamente continue in modo da escludere l'uso dell'integrale di Stiltjes. Nei rari casi in cui – a titolo esemplificativo e quale stimolo per il lettore – viene fatto ricorso ad elementi della teoria delle funzioni di variabile complessa, chi non disponga delle necessarie conoscenze può direttamente passare al successivo esercizio senza trarne alcun danno. I risultati numerici, tutti approssimati alla quarta cifra significativa, sono talora stati ottenuti con l'ausilio di una normale calcolatrice tascabile ad uso scientifico.

Va segnalato che alcuni esercizi sono stati inclusi allo scopo di indicare l'utilità di strumenti, quali la funzione di Heaviside, solitamente, a molti, poco o per nulla familiari, eppure assai efficaci; altri, ad esempio quelli riguardanti passeggiate aleatorie o la cosiddetta rovina del giocatore, pur essendo di notevole difficoltà risolutiva sono stati inclusi in quanto indicativi dell'uso di metodi generali del calcolo delle probabilità. Questi esercizi non sono, tuttavia, in alcun modo propedeutici ai successivi e quindi, almeno in prima istanza, possono essere ignorati.

In contrasto con la consuetudine anglosassone in materia di esercizi sulla probabilità, si è evitato sistematicamente il ricorso a quesiti coinvolgenti giochi quali Bridge o Poker, a questi preferendo monete, dadi o comunque esempi a tutti maggiormente familiari; si è invece ritenuto opportuno adottare la notazione numerica anglosassone, separando mediante un punto le parti intere da quelle decimali.

Durante la stesura di questo volume ci si è avvalsi della collaborazione di varie persone che è qui un piacere, oltre che doveroso, ringraziare: il Dr Aniello (Nello) Buonocore che, tra l'altro, ci ha iniziati all'uso di applicazioni grafiche; il Dr Antonio Di Crescenzo che ha contribuito ad individuare interessanti tracce e a proporre metodi alternativi di risoluzione fornendo altresì il proprio aiuto anche sotto il profilo grafico; la Prof.ssa Francesca Visentin che ha pazientemente ed efficacemente contribuito ad individuare imprecisioni e refusi tipografici; le Prof.sse Virginia (Nivia) Giorno e Amelia G. Nobile senza la cui preziosa, costante e generosa opera di consulenza scientifica e tecnica questo testo ancora per molto non avrebbe visto la luce.

Gli Autori
Napoli, 31 gennaio 1994

CAPITOLO I

CALCOLO COMBINATORIO

ESERCIZIO 1

Quante permutazioni distinte di lettere possono formarsi con le lettere della parola CARATTERISTICA?

Soluzione

Si tratta di calcolare il numero di permutazioni distinte che si possono realizzare disponendo di $n = 14$ simboli non tutti diversi tra loro. Osserviamo che nella parola CARATTERISTICA vi sono:

3 lettere A 2 lettere C 1 lettera E 2 lettere I

2 lettere R 1 lettera S 3 lettere T.

Quindi il numero di permutazioni possibili è dato dal coefficiente multinomiale

302702400

$$\binom{14}{3\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 3} = \frac{14!}{(2!)^3\,(3!)^2} = 33\,633\,600.$$

ESERCIZIO 2

L'allenatore di una squadra di pallacanestro deve scegliere due attaccanti e due difensori tra cinque attaccanti e quattro difensori disponibili. Si calcoli il numero delle formazioni distinte per attaccanti o per difensori che possono essere realizzate.

Soluzione

Conveniamo che due formazioni con gli stessi due difensori scambiati di posto sono da considerarsi identiche; altrettanto conveniamo per lo scambio di posto dei due attaccanti. Si tratta quindi di calcolare il numero di combinazioni distinte che si ottengono a partire da 5

elementi (attaccanti) scegliendone due. Questo è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Analogamente,

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

fornisce il numero di scelte diverse per i difensori. Il numero di formazioni distinte risulta poi essere dato dal prodotto dei numeri delle possibili scelte differenziate per attaccanti e difensori, ossia $10 \cdot 6 = 60$.

ESERCIZIO 3

Dei prodotti commerciali devono essere codificati mediante sequenze di cui i primi tre simboli sono lettere distinte della parola VERDI, seguiti da due numeri distinti scelti tra i seguenti: $1, 3, 5, 7, 8, 9$. Qual è il massimo numero di prodotti distinti che possono essere così codificati?

Soluzione

Per facilitare la lettura del codice si convenga di considerare identiche sequenze costituite dalle stesse lettere e dagli stessi numeri. I numeri di sequenze alfabetiche e numeriche distinte sono dati, rispettivamente, dai seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10 \quad \text{(sequenze alfabetiche)},$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15 \quad \text{(sequenze numeriche)}.$$

Pertanto, $10 \cdot 15 = 150$ è il numero di prodotti codificabili mediante le sequenze del suddetto codice. Se non si introduce l'ipotesi iniziale di considerare uguali codici costituiti dalle stesse lettere e dalle stesse cifre, il numero di articoli codificabili aumenta in quanto per ogni scelta di lettere e numeri deve tenersi conto delle permutazioni possibili delle lettere e delle cifre scelte. Esso risulta essere:

$$\frac{5!}{2!}\,\frac{6!}{4!} = 1\,800.$$

ESERCIZIO 4

Quanti numeri di tre cifre distinte possono formarsi scegliendo ogni cifra tra i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

Soluzione

Poiché si richiede di formare numeri a tre cifre con la condizione che le tre cifre siano distinte tra loro si può ragionare nel seguente modo. La prima cifra può essere scelta in nove modi distinti; per ciascuno di questi, la seconda cifra si può scegliere in otto modi distinti; infine, per ciascuna scelta della prima e della seconda cifra la terza cifra può essere scelta in sette modi distinti. Il numero complessivo di modi distinti di scelta delle tre cifre è pertanto $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

ESERCIZIO 5

Quanti ambi, terni, quaterne e cinquine possono verificarsi nel gioco del lotto su di una prefissata ruota?

Soluzione

Il numero di ambi è dato dal numero di combinazioni di 90 elementi a due a due:

$$\binom{90}{2} = \frac{90!}{2!\,88!} = 4\,005.$$

Analogamente, il numero di terni è

$$\binom{90}{3} = \frac{90!}{3!\,87!} = 117\,480,$$

il numero di quaterne è

$$\binom{90}{4} = \frac{90!}{4!\,86!} = 2\,555\,190,$$

il numero di cinquine, infine, è

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,85!} = 43\,949\,268.$$

ESERCIZIO 6

Quanti pasti completi distinti potrà servire un ristorante che abbia in menù 4 primi, 5 pietanze, 5 tipi diversi di frutta e 2 tipi di dolci?

Soluzione

Poiché il primo piatto può essere scelto in quattro modi distinti, il secondo piatto in 5 modi distinti e dal momento che frutta e dolce possono essere scelti rispettivamente in 5 e in 2 modi distinti, il numero di pasti distinti che il ristorante ha la possibilità di servire è dato da $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 200$.

ESERCIZIO 7
Ad un rappresentante studentesco è richiesto di formare una delegazione di studenti costituita da 5 ragazzi e da 3 ragazze. Se gli viene fornita una lista di 10 ragazzi e di 7 ragazze, quante possibilità gli si presentano?

Soluzione
Il numero N di possibilità richiesto si ottiene calcolando il numero di combinazioni distinte dei 10 ragazzi in gruppi di 5 e il numero di combinazioni distinte delle 7 ragazze in gruppi di 3. Si ha quindi:

$$N = \binom{10}{5}\binom{7}{3} = 8\,820.$$

ESERCIZIO 8
Sette bambini giocano a girotondo. In quanti modi distinti possono disporsi?

Soluzione
Poiché il numero di permutazioni circolari di n oggetti è $(n-1)!$, i sette bambini possono disporsi in $6! = 720$ modi distinti. Più direttamente, si può ragionare al seguente modo. Si considerino 6 dei 7 bambini e li si pensino allineati. Il numero di formazioni possibili è allora proprio $6!$. L'aver escluso il settimo bambino assicura che queste $6!$ permutazioni risultino tutte distinte quando mediante il settimo bambino la riga venga trasformata in circolo.

ESERCIZIO 9
L'ASCII è un codice ad 8 bits costituito da sequenze di zeri ed uni. Quanti simboli distinti possono venir rappresentati mediante esso?

Soluzione
Poiché per ciascun bit si hanno due possibilità (0 oppure 1), il numero di configurazioni distinte di zeri ed uni è dato dal prodotto del numero di possibili scelte per ciascuno degli 8 bits, ossia 2^8. Un codice binario a 8 bits, consentendo 2^8 configurazioni distinte di simboli binari, può quindi permettere, al più, la rappresentazione di $2^8 = 256$ simboli distinti.

ESERCIZIO 10
In quanti modi distinti può essere compilata la schedina del totocalcio?

Soluzione
Poiché si possono indicare tre risultati distinti $(X, 1, 2)$ per ciascuna delle 13 partite di calcio, il richiesto numero è 3^{13}.

ESERCIZIO 11
Il consiglio di amministrazione di una società per azioni vota a scrutinio segreto per la nomina del presidente, del vicepresidente e del tesoriere. Sapendo che per le tre dette cariche vi sono rispettivamente 3, 4 e 2 candidati, calcolare il numero di modi distinti con cui può essere completata una scheda elettorale nell'ipotesi che ciascun elettore indichi nella propria scheda uno ed un solo candidato per ciascuna delle tre cariche.

Soluzione
È conveniente tener presente il numero di scelte distinte che possono essere effettuate per ciascuna carica. Si osservi che il presidente può essere scelto in tre modi distinti; che, per ciascuno di questi, il vicepresidente può essere scelto in quattro modi distinti e che, infine, per ogni scelta del presidente e del vicepresidente il tesoriere può scegliersi in due modi distinti. Di conseguenza $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ sono i modi distinti di compilare la scheda elettorale.

ESERCIZIO 12
Alla finale di una gara sportiva partecipano 5 atleti rappresentanti rispettivamente i seguenti Paesi: Argentina, U.S.A., Brasile, Giappone e Francia. Si determini:

a) in quanti modi distinti i primi due posti possono essere occupati;
b) in quanti modi distinti possono essere occupati i primi tre posti;
c) in quanti modi distinti potranno classificarsi nei primi tre posti atleti del continente americano.

Soluzione
a) Al primo posto si può piazzare uno qualsiasi dei 5 concorrenti; di conseguenza, il secondo posto potrà essere occupato da uno qualsiasi dei rimanenti 4 concorrenti. Quindi i primi due posti possono essere occupati in $5 \cdot 4 = 20$ modi distinti.

b) Con analogo ragionamento ci si convince che per i primi tre posti possono aversi $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ piazzamenti diversi.

c) Poiché dei 5 atleti solo tre sono americani, il numero di modi possibili in cui questi atleti possono piazzarsi nei primi tre posti è dato dalle $3!$ permutazioni di tre elementi. Quindi il numero di modi distinti in cui possono classificarsi i tre atleti americani nei primi tre posti è 6.

ESERCIZIO 13
Una persona possiede camicie bianche, blu e avorio e cravatte a fondo

bianco, blu e avorio. In quanti modi distinti può abbinare camicie e cravatte in maniera da escludere uno stesso colore per entrambe?

Soluzione

Dal momento che si intende escludere ogni abbinamento camicia–cravatta dello stesso colore, per ognuna delle 3 scelte possibili per la camicia restano solo due possibili scelte per la cravatta. Quindi il numero di abbinamenti distinti è $3 \cdot 2 = 6$.

ESERCIZIO 14

Un insieme è costituito da 68 simboli alfanumerici distinti. Volendo rappresentare ciascuno di questi mediante un codice binario uniforme (cioè di fissata lunghezza) quale deve essere la lunghezza minima delle parole di codice?

Soluzione

Dalla risoluzione dell'Esercizio 9 si evince che mediante un codice binario di lunghezza k si possono rappresentare 2^k simboli distinti. Il nostro problema si traduce quindi nel determinare l'esponente k tale che 2^k risulti almeno uguale a 68, ossia tale da soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$k \geq \log_2 68 = 6.0875.$$

Perciò la risposta al quesito è che la minima lunghezza delle parole di codice è 7.

ESERCIZIO 15

Si sa che in una nazione vi sono 40 milioni di abbonati telefonici. Si determini il numero minimo di cifre presenti in ogni numero telefonico supponendo che questi siano tutti di eguale lunghezza e che la scelta delle cifre sia effettuata nell'insieme $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Soluzione

Il numero di configurazioni distinte che si possono ottenere disponendo su un fissato numero k di posti dieci simboli con possibilità di ripetizione è 10^k (v. anche Esercizio 9). Per determinare il valore minimo di k compatibile con quanto richiesto nell'esercizio, osserviamo che risulta

$$10^7 < 40\,000\,000 < 10^8.$$

Per disporre di almeno 40 milioni di numeri telefonici distinti occorre quindi disporre di almeno 8 cifre per ciascun numero telefonico.

▷ **ESERCIZIO 16**

In un cassetto vi sono monete da $5, 10, 20, 50, 100$ e 500 lire. In quanti modi distinti si può realizzare un totale superiore a 120 lire prelevando tre monete?

Soluzione

Esaminando il taglio delle monete si deduce che combinazioni di tre monete che consentono di superare la somma di 120 lire sono certamente quelle che includono la moneta da 500 lire. Il numero di tali combinazioni è

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

A queste va poi aggiunto il numero

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

di scelte che comprendono la moneta da 100 lire abbinata a due monete scelte nell'insieme dei valori $\{50, 20, 10, 5\}$ eliminando tra queste quell'unica scelta che abbina le monete da 10 lire e da 5 lire. In definitiva, il numero di modi con cui si realizza un valore superiore a 120 lire è $10 + (6 - 1) = 15$.

▷ **ESERCIZIO 17**

In quanti modi possono disporsi 6 libri di matematica e 4 libri di fisica in uno scaffale in maniera che quelli di matematica siano tra loro tutti consecutivi e che anche quelli di fisica siano tra loro tutti consecutivi?

Soluzione

Essendo richiesto che, qualunque sia l'organizzazione dei volumi, tutti i libri di matematica precedano o seguano tutti quelli di fisica, ci si può limitare a considerare, separatamente, le permutazioni dei due gruppi di libri che risulteranno essere $6! = 720$ e $4! = 24$, rispettivamente. Se si fissa come ordine quello che pone i libri di matematica alla destra di quelli di fisica si ottengono $720 \cdot 24 = 17\,280$ modi distinti. Altrettanti se ne ottengono ponendo i libri di matematica alla sinistra di quelli di fisica. Pertanto, i libri possono disporsi in $17\,280 \cdot 2 = 34\,560$ modi distinti soddisfacenti il requisito indicato.

▷ **ESERCIZIO 18**

Un circolo sportivo che dispone di 16 atleti deve costituire una squadra di calcio ed una squadra di pallacanestro. In quanti modi potrà soddisfare questa esigenza?

oluzione

i tratta di effettuare una partizione dei 16 elementi in 2 gruppi di 5)allacanestro) e 11 (calcio) atleti rispettivamente. Ciò può esser fatto ı un numero N di modi distinti che può calcolarsi come segue. Per gni scelta della squadra dei cinque giocatori di pallacanestro rimane n'unica composizione della squadra di calcio. Il numero di squadre istinte di pallacanestro è d'altra parte dato dal numero di combinaioni distinte dei 16 atleti in gruppi di cinque, a ciascuna delle quali è ssociata un'unica squadra di calcio. Il numero N di modi con cui il ircolo sportivo può soddisfare la propria esigenza è dunque:

$$N = \binom{16}{5} = \frac{16!}{5!\,11!} = 4\,368.$$

.o stesso risultato si ottiene calcolando il numero di squadre di calcio listinte che possono formarsi mediante i 16 atleti dal momento che ›er ogni fissata squadra di calcio rimane una squadra di pallacanestro nivocamente determinata.

Jn terzo modo di risoluzione consiste nell'utilizzare la formula multiıomiale in base alla quale il numero N di combinazioni distinte di n elenenti a gruppi di $k_1, k_2, \ldots, k_m$ rispettivamente ($k_1+k_2+\cdots+k_m = ı$) è dato da

$$N = \binom{n}{k_1\ k_2\ \ldots\ k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\cdots\,k_m!}. \tag{1}$$

Per $n = 16$, $k_1 = 5$ e $k_2 = 11$ segue allora il risultato cercato.

ESERCIZIO 19

Si consideri l'insieme $I = \{1,2,3,4,5,6\}$. In quanti modi si possono raggruppare gli elementi di I in maniera tale che il primo gruppo consista di un solo elemento, il secondo di tre elementi ed il terzo di due?

Soluzione

Poiché il numero di elementi a disposizione è 6, la partizione di I in gruppi di 1, 3 e 2 elementi rispettivamente può effettuarsi in

$$\binom{6}{1\ 3\ 2} = \frac{6!}{1!\,3!\,2!} = 60$$

modi, dove si è fatto uso della formula multinomiale (1) dell'Esercizio 18. Alternativamente, si può ragionare come segue. Il primo elemento

può scegliersi in $\binom{6}{1}$ modi distinti; rimangono $6-1=5$ elementi tra i quali possono effettuarsi $\binom{5}{3}$ scelte distinte degli elementi del secondo gruppo; i rimanenti elementi in numero di $5-3=2$ restano infine unicamente determinati. Il numero N di modi distinti è dunque:

$$N = \binom{6}{1}\binom{5}{3} = \frac{6!}{1!\,5!}\,\frac{5!}{3!\,2!} = 60.$$

▷ **ESERCIZIO 20**

Ad una cena in un'ambasciata partecipano 12 diplomatici di nazionalità inglese e 12 diplomatici francesi. In quanti modi distinti i commensali possono sedere intorno al tavolo in maniera tale che le nazionalità siano sempre alternate?

Soluzione

Si consideri una particolare configurazione nella quale i 24 diplomatici siedono in maniera che le nazionalità siano alternate. Il numero complessivo di configurazioni distinte rispettanti detta alternanza può calcolarsi mantenendo fissa la posizione di un particolare diplomatico (ad esempio inglese) e moltiplicando il numero di permutazioni dei rimanenti 11 diplomatici inglesi per il numero di permutazioni dei 12 diplomatici francesi. Il numero richiesto di possibili configurazioni di posti a tavola è dunque $11!\,12! = 1.9120 \cdot 10^{16}$. Si noti come lo stesso tipo di ragionamento porti a concludere che il numero di modi distinti in cui n oggetti di un certo tipo possono alternarsi con n oggetti di un altro tipo in circolo è $(n-1)!\,n!$.

▷ **ESERCIZIO 21**

Una particella viene posta nell'origine di un asse coordinato. Si lancia poi una moneta n volte. All'uscita di "testa" la particella viene spostata di un unità nel senso delle ascisse crescenti mentre ad ogni uscita di "croce" la particella viene spostata di un'unità nel senso delle ascisse decrescenti. Calcolare il numero $N_k(n)$ di traiettorie distinte che portano la particella nella posizione k ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$) dopo che è stato effettuato l'n–esimo lancio.

Soluzione

Fissato k, e detti n_1 e n_2 il numero di teste e di croci rispettivamente negli n lanci, deve aversi:

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = k \\ n_1 + n_2 = n. \end{cases} \tag{1}$$

Di qui segue:

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{k+n}{2} \\ n_2 = \dfrac{n-k}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Poiché n_1 e n_2 sono numeri interi, ne consegue che k e n devono essere entrambi pari o entrambi dispari. Pertanto risulta $N_k(n) = 0$ per n pari e k dispari oppure per n dispari e k pari. Supponiamo ora che n e k siano entrambi pari o entrambi dispari. Il numero $N_k(n)$ di traiettorie distinte coincide con il numero di modi distinti in cui possono scegliersi le n_1 teste e le $n_2 = n - n_1$ croci, con il vincolo $n_1 - n_2 = k$. Poiché le n_1 teste possono scegliersi in $\binom{n}{n_1}$ modi distinti e a ciascuno di questi corrisponde un unico modo di scegliere le $n_2 = n - n_1$ croci, si ha:

$$N_k(n) = \binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}.$$

D'altra parte, poiché come si è detto risulta $n_1 = (k+n)/2$ e $n_2 = n - n_1 = (n-k)/2$, si ha infine:

$$N_k(n) = \binom{n}{(k+n)/2} = \frac{n!}{[(k+n)/2]!\,[(n-k)/2]!}$$
$$(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n),$$

con k ed n entrambi pari o entrambi dispari. Questo risultato si sarebbe potuto ottenere direttamente utilizzando la formula multinomiale (1) dell'Esercizio 18 con $m = 2, k_1 = n_1$ e $k_2 = n_2 = n - n_1$ ed osservando che sussistono i vincoli (1), (2).

ESERCIZIO 22

Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Soluzione

La dimostrazione si effettua immediatamente ricorrendo alla definizione stessa di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!}.$$

▷ **ESERCIZIO 23**

Dimostrare che risulta

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1}$$

Soluzione

La dimostrazione può essere effettuata facendo ricorso alla formula di Newton per il calcolo della potenza n-esima di un binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k.$$

In particolare, per $x = 1$ si ha:

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k. \tag{2}$$

Osserviamo poi che il primo membro della (2) può riscriversi come

$$\begin{aligned}(1+y)^n &\equiv (1+y)^{n-1} + y(1+y)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} y^k.\end{aligned} \tag{3}$$

Dalle (2) e (3) segue allora

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} y^k,$$

ovvero:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} y^k = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] y^k. \tag{4}$$

Imponendo che siano uguali i coefficienti delle potenze dello stesso grado a primo e secondo membro della (4) segue infine la (1).

ESERCIZIO 24
Dimostrare l'identità:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Soluzione
L'identità può essere riguardata come un caso particolare della formula di Newton per il calcolo di $(x+y)^n$ quando $x = y = 1$. È interessante notare che il secondo membro della (1) rappresenta il numero di combinazioni che si possono realizzare a partire da un insieme di n elementi raggruppando tali elementi a gruppi di k, con k variabile da 0 fino ad n. Ne segue che il numero di sottoinsiemi di un insieme di cardinalità n è proprio 2^n, coerentemente con quanto già visto per altra via.

CAPITOLO II

PROBABILITA' DI EVENTI

▷ **ESERCIZIO 1**
Un'urna contiene 8 biglie bianche, 6 rosse e 9 verdi. Scegliendo una biglia a caso, qual è la probabilità che essa sia bianca?

Soluzione
La probabilità P richiesta può calcolarsi come rapporto tra il numero di casi favorevoli all'estrazione di una biglia bianca (8) ed il numero totale di casi $(8+6+9=23)$:

$$P = \frac{8}{23} = 0.3478.$$

▷ **ESERCIZIO 2**
Calcolare la probabilità che su sette lanci di un dado il numero 1 esca due volte e i rimanenti numeri escano una volta ciascuno.

Soluzione
La probabilità P richiesta può essere valutata come rapporto fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili. Questi ultimi sono 6^7, cioè tanti quante sono le sequenze distinte in cui i 6 possibili risultati del singolo lancio possono succedersi in 7 lanci consecutivi. Il numero dei casi favorevoli è dato dal coefficiente multinomiale

$$\binom{7}{2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}$$

che rappresenta il numero di modi distinti in cui nei sette lanci il numero 1 si verifica due volte e ciascuno dei numeri da due a sei si verifica una ed una sola volta. Si ha dunque:

$$P = \frac{\binom{7}{2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}}{6^7} = \frac{35}{3\,888} = 9 \cdot 10^{-3}.$$

▷ **ESERCIZIO 3**
Si calcoli la probabilità che in quattro lanci di un dado il numero 6 si presenti almeno una volta.

Soluzione
Calcoliamo la probabilità P_0 dell'evento complementare, ossia la probabilità che in quattro lanci non si presenti mai il numero 6:

$$P_0 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = 0.4823;$$

quindi la probabilità P dell'evento richiesto è data da:

$$P = 1 - P_0 = 0.5177.$$

Un modo alternativo di procedere (v. Cap V) consiste nel riferirsi ad un esperimento di quattro prove ripetute nel quale l'evento "uscita del numero 6" ha probabilità 1/6 di occorrenza in ogni singola prova. Detta $P_k(4)$ la probabilità che il numero 6 si verifichi k volte nelle 4 prove, si ha allora:

$$\begin{aligned} P = \sum_{k=1}^{4} P_k(4) &= \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k} \\ &= 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &\quad + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ &= \frac{1}{6^4}(4 \cdot 5^3 + 6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1) = \frac{671}{1\,296} = 0.5177. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4
Siano 0.70 e 0.65 le probabilità che uno studente superi rispettivamente un esame di fisica e un esame di matematica. Sia poi 0.68 la probabilità che egli li superi entrambi. Si calcoli la probabilità P che lo studente superi almeno uno dei suddetti esami.

Soluzione
Sia F l'evento "lo studente supera l'esame di fisica"e sia M l'evento "lo studente supera l'esame di matematica". Per ipotesi si ha:

$$P(F) = 0.70, \quad P(M) = 0.65, \quad P(F \cap M) = 0.68.$$

Dal teorema delle probabilità totali segue allora:

$$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0.70 + 0.65 - 0.68 = 0.67.$$

il primo fatto senza aiuto

ESERCIZIO 5
Sia 0.3 la probabilità che di due coniugi il marito resti in vita per 10 anni ancora e sia 0.4 la probabilità che ciò accada per la moglie. Si calcoli la probabilità che entrambi restino in vita ancora per 10 anni sapendo che con probabilità 0.6 almeno uno di essi resta in vita per tale periodo.

Soluzione
Sia A l'evento "il marito resta in vita per 10 anni ancora" e sia B l'evento "la moglie resta in vita per 10 anni ancora". Sappiamo che risulta:

$$P(A) = 0.3, \qquad P(B) = 0.4, \qquad P(A \cup B) = 0.6.$$

L'evento "entrambi i coniugi vivono ancora 10 anni" è l'evento intersezione di A e B. Pertanto la sua probabilità può esprimersi come

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Sostituendo alle probabilità a secondo membro i rispettivi valori si ha:

$$P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.6 = 0.1.$$

ESERCIZIO 6
In una cesta vi sono mele sane e mele marce. Sia 0.5 la probabilità che prendendo due mele a caso esse siano entrambe sane. È possibile che nella cesta vi siano in totale 5 mele?

Soluzione
Se denotiamo con s il numero di mele sane e con m il numero di mele marce, la probabilità P che la prima e la seconda mela estratte siano entrambe sane è

$$P = \frac{s}{s+m} \cdot \frac{s-1}{s+m-1}.$$

Sostituendo in questa relazione $P = 0.5$ e $s + m = 5$, si ha:

$$0.5 = \frac{s}{5}\,\frac{s-1}{4}.$$

Di qui segue

$$s(s-1) = 10.$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado le cui radici, $(1 \pm \sqrt{41})/2$, non sono intere. Pertanto la risposta al quesito è negativa.

coef. angolare della retta tangen. alla curva

▷ **ESERCIZIO 7**

In un cassetto vi sono alla rinfusa calze di colore grigio e calze di colore rosso. Determinare il minimo numero di calze che devono trovarsi nel cassetto sapendo che vale 0.3 la probabilità che estraendo a caso due calze esse siano entrambe rosse.

Soluzione

Se si indica con n_r e n_g rispettivamente il numero di calze rosse ed il numero di calze grigie contenute nel cassetto, la probabilità P dell'evento "estrazione di due calze rosse dal cassetto" è data da

$$P = \frac{n_r}{n_r + n_g} \, \frac{n_r - 1}{n_r + n_g - 1} \, . \tag{1}$$

Dovendo essere per ipotesi tale probabilità uguale a 3/10, bisogna stabilire per quali valori di n_r e n_g ciò accada. Innanzitutto notiamo che ovviamente n_r non può essere inferiore a 2; pertanto esaminiamo la compatibilità della coppia $n_r = 2$, $n_g = 1$. Con tali valori il secondo membro della (1) dà:

$$\frac{2}{3} \, \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{10} \, ,$$

cosicché la coppia $n_r = 2$, $n_g = 1$ va scartata. Proviamo allora con la coppia $n_r = 2$, $n_g = 2$. Il secondo membro della (1) ora diviene:

$$\frac{2}{4} \, \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{10} \, ,$$

cosicché anche questa coppia va scartata. Proseguendo per tentativi, esaminiamo ora la coppia $n_r = 3$, $n_g = 2$. Con questa il secondo membro della (1) diviene:

$$\frac{3}{5} \, \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \, ,$$

cosicché la (1) è soddisfatta. Si conclude che il minimo numero di calze che deve trovarsi nel cassetto è $n_r + n_g = 5$.

Un modo alternativo di risolvere l'esercizio è il seguente. Dalla relazione

$$\frac{n_r}{n_r + n_g} \, \frac{n_r - 1}{n_r + n_g - 1} = \frac{3}{10}$$

segue:

$$n_r \, (n_r - 1) = 3 \, c \tag{2a}$$

$$(n_r + n_g) \, (n_r + n_g - 1) = 10 \, c \tag{2b}$$

dove c denota una costante. Il primo membro della (2a) è il prodotto di due interi consecutivi dei quali quindi uno è dispari e l'altro è pari. Ne segue che la costante c a secondo membro della (2a) è un numero pari che denoteremo con $2k$, cosicché si ha:

$$n_r \, (n_r - 1) = 3 \; 2 \; k$$

il cui minimo si ha per $k = 1$. Dalla (2b) con tale scelta di k segue:

$$(n_r + n_g) \, (n_r + n_g - 1) = 20$$

e quindi $n_r + n_g = 5$.

▷ **ESERCIZIO 8**

Nella sala d'attesa di un ambulatorio vi sono degli uomini e delle donne. Sia 0.4 la probabilità che chiamando i cognomi di due persone a caso queste risultino essere entrambi uomini. Si calcoli il numero N di persone che devono trovarsi nella sala con la condizione che il numero di donne sia minimo.

Soluzione

Siano u il numero di uomini e d il numero di donne. Il quesito richiede che risulti:

$$\frac{u}{u + d} \, \frac{u - 1}{u + d - 1} = \frac{4}{10} \, , \tag{1}$$

ossia:

$$10 \, u \, (u - 1) = 4 \, (u + d) \, (u + d - 1).$$

Sviluppando e ordinando in potenze decrescenti di u si ha:

$$3u^2 - (3 + 4d) \, u + 2 \, d \, (1 - d) = 0.$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado in u. Poiché la somma delle radici è $u_1 + u_2 = (3 + 4d)/3 > 0$ ed il prodotto vale $u_1 \, u_2 = 2 \, d \, (1 - d)/3 < 0$ (si osservi che deve essere $d > 1$ perché la (1) per $d = 1$ fornirebbe $u = 7/3$) occorre considerare la sola radice positiva:

$$u = \frac{3 + 4d + \sqrt{9 + 40 \, d^2}}{6} \, . \tag{2}$$

Dovendo u essere un intero imponiamo che risulti

$$\Delta \equiv 9 + 40 \, d^2 = k^2$$

con k intero. Deve quindi aversi:

$$d = \sqrt{\frac{k^2 - 9}{40}}.$$

Le condizioni che anche d sia intero e che d sia minimo conducono allora al valore $k = 13$ con il quale si ha $d = 2$. Dalla (2) segue allora $u = 4$ e quindi, in conclusione, $N \equiv u + d = 6$. Si noti che lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere con il seguente ragionamento. Scritta la (1) osserviamo che da essa segue:

$$u\,(u-1) = 4\,c$$
$$(u+d)\,(u+d-1) = 10\,c$$

dove c denota una costante. Poiché i primi membri sono prodotti di interi consecutivi dei quali uno è pari e l'altro è dispari e poiché il numero 4 non può scriversi come prodotto di due interi consecutivi, segue $c = (2k-1)$, con k intero positivo, ossia:

$$u\,(u-1) = 4\,(2k-1) \qquad (3a)$$
$$(u+d)\,(u+d-1) = 10\,(2k-1). \qquad (3b)$$

La prima di queste equazioni comporta

a. $u = 4, \quad 2k - 1 = 3$, oppure
b. $u = 5, \quad 2k - 1 = 5$.

Con la scelta a. la (3b) comporta:

$$(4+d)\,(4+d-1) = 30. \qquad (4)$$

Poiché l'unica fattorizzazione di 30 in prodotto di interi consecutivi è $30 = 6 \cdot 5$, dalla (4) segue $d = 2$. Utilizzando invece la scelta b., dalla (3b) segue

$$(5+d)\,(5+d-1) = 50.$$

Questa non ammette soluzioni dal momento che il numero 50 non è fattorizzabile mediante interi consecutivi.

▷ **ESERCIZIO 9**

Tre candidati A, B e C hanno pari titolo ad occupare tre posti dei quali uno è maggiormente desiderabile. Per risolvere il problema in maniera "equa", il candidato A propone di ricorrere ad una decisione di tipo aleatorio procedendo come segue: si lanciano due monete; se il risultato è una doppia "testa" la scelta va al candidato B; se si verificano due "croci" la scelta è del candidato C; nel caso, infine, di una " testa" e una "croce" il candidato A avrà la priorità della scelta. Si ritiene che detta proposta sia realmente "equa"?

Soluzione

La probabilità P_B che la scelta tocchi al candidato B è quella dell'occorrenza di due teste, ossia $P_B = 1/4$. Analogamente, la probabilità P_C di scelta da parte del candidato C è ancora $1/4$. La probabilità P_A, infine, che la sorte favorisca il candidato A coincide con la probabilità che lanciando due monete si verifichi l'evento complementare (uscita di una "testa" e di una "croce"):

$$P_A = 1 - (P_B + P_C) = \frac{1}{2}.$$

Se ne conclude che il proponente il suddetto criterio di decisione in realtà favorisce se stesso.

▷ **ESERCIZIO 10**

Qual è la probabilità P che lanciando due dadi il punteggio complessivo sia 10?

Soluzione

Se si esaminano tutti i possibili risultati della prova "lancio di due dadi" si riscontra quanto segue:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

cioè solo 3 casi sono favorevoli. Pertanto la probabilità dell'evento richiesto è

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Un modo alternativo di ragionare è il seguente. Indichiamo con S il punteggio totale conseguente al generico lancio dei due dadi. Si ha evidentemente:

$$P\{S = 10\} = P\{S \le 10\} - P\{S \le 9\}. \qquad (1)$$

La probabilità $P\{S \le 10\}$ può calcolarsi come somma delle probabilità degli eventi S_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 6;\ i + j = 1, 2, \ldots, 10)$ così definiti:

S_{ij} : "il punteggio del primo dado è i, quello del secondo è j".

Infatti, si ha:

$$P\{S \le 10\} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,10-i)} P\{S_{ij}\} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,10-i)} \frac{1}{36}. \qquad (2)$$

Analogamente risulta:

$$P\{S \le 9\} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,9-i)} P\{S_{ij}\} = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,9-i)} \frac{1}{36}. \qquad (3)$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) si ottiene infine:

$$\begin{aligned} P\{S = 10\} &= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,10-i)} \frac{1}{36} - \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{\min(6,9-i)} \frac{1}{36} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} + \sum_{i=5}^{6} \sum_{j=1}^{10-i} \frac{1}{36} - \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} - \sum_{i=4}^{6} \sum_{j=1}^{9-i} \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{36} \left[24 + \sum_{i=5}^{6} (10-i) - 18 - \sum_{i=4}^{6} (9-i) \right] \\ &= \frac{1}{36} [24 + (5+4) - 18 - (5+4+3)] = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 11**

Lanciando tre dadi simultaneamente è maggiore la probabilità di ottenere in totale 9 punti o 10 punti?

Soluzione

Indichiamo con A l'evento "totale 9" e con B l'evento "totale 10". L'evento A si realizza se e solo se i punteggi (x, y, z) relativi rispettivamente al primo, al secondo e al terzo dado soddisfano la condizione $x+y+z = 9$; l'evento B si realizza invece allorché risulta $x+y+z = 10$. Esaminiamo separatamente i due casi.

a) $x + y + z = 9$.

Ciò accade quando e solo quando i punteggi dei tre dadi sono le

3!	permutazioni dei numeri	1, 2, 6	oppure le
3!	permutazioni dei numeri	1, 3, 5	oppure le
3!/2	permutazioni dei numeri	1, 4, 4	oppure le
3!/2	permutazioni dei numeri	2, 2, 5	oppure le

3!	permutazioni dei numeri	2, 3, 4,	

oppure la terna (3,3,3), per un totale di 25 casi distinti. Poiché il numero di casi possibili è $6^3 = 216$ si ha:

$$P(A) = \frac{25}{216}.$$

b) $x + y + z = 10$.

Ragionando in maniera analoga, ci si convince che la condizione b) è soddisfatta se e solo se i punteggi dei tre dadi sono le

3!	permutazioni dei numeri	1, 5, 4	oppure le
3!/2	permutazioni dei numeri	2, 4, 4	oppure le
3!/2	permutazioni dei numeri	3, 3, 4	oppure le
3!/2	permutazioni dei numeri	6, 2, 2	oppure le
3!	permutazioni dei numeri	6, 3, 1	oppure le
3!	permutazioni dei numeri	5, 3, 2,	

per un totale di 27 casi distinti. Si ha dunque:

$$P(B) = \frac{27}{216}.$$

Si conclude che lanciando tre dadi simultaneamente la probabilità di totalizzare 10 punti è maggiore della probabilità di totalizzarne 9.

▷ **ESERCIZIO 12**

Un giocatore gioca al lotto per 90 settimane consecutive puntando sempre sul primo estratto. Valutare la probabilità che non vinca mai e la probabilità che vinca almeno una volta.

Soluzione

La probabilità che un giocatore che punti sul primo estratto vinca in una singola settimana ("successo") è 1/90 cosicché la probabilità che perda ("insuccesso") è $1 - 1/90$. Poiché tali insuccessi sono eventi tra loro indipendenti ed hanno probabilità costanti in ogni settimana, la probabilità P che il giocatore non vinca mai nelle 90 settimane è

$$P = \left(1 - \frac{1}{90}\right)^{90} \simeq e^{-1} = 0.3679.$$

La probabilità Q che il giocatore vinca almeno una volta può poi calcolarsi come probabilità dell'evento complementare:

$$Q = 1 - P = 1 - \left(1 - \frac{1}{90}\right)^{90} = 0.6321.$$

ESERCIZIO 13

Calcolare la probabilità che nessuna di n persone, con $n \leq 365$, abbia lo stesso compleanno. Valutare in particolare tale probabilità nel caso di 3 persone.

Soluzione

Scelta una tra le n persone, imponiamo che nessuna delle rimanenti $n-1$ abbia lo stesso compleanno della prima. La probabilità p_2 che la seconda persona abbia un compleanno diverso da quello della prima è evidentemente:

$$p_2 = \frac{364}{365}.$$

Analogamente, la probabilità p_3 che la terza persona abbia compleanno distinto da quelli delle prime due persone è:

$$p_3 = \frac{363}{365}.$$

In generale, la probabilità p_k che la k–esima persona abbia compleanno distinto da quello delle precedenti $k-1$ persone è:

$$p_k = \frac{365-k+1}{365} = 1 - \frac{(k-1)}{365} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

La probabilità P richiesta è dunque:

$$P = p_2\, p_3 \ldots p_n = \frac{364}{365}\,\frac{363}{365} \ldots \frac{365-n+1}{365}$$
$$\equiv \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Per $n = 3$ si ha poi, in particolare:

$$P = \frac{364}{365}\,\frac{363}{365} = 0.9918.$$

ESERCIZIO 14

Un cappello contiene 45 foglietti di carta dei quali 15 sono verdi, 15 sono rossi e 15 sono bianchi. Calcolare la probabilità che prendendo simultaneamente tre foglietti a caso dal cappello con essi sia possibile comporre il tricolore italiano.

Soluzione

Perché si riesca a comporre il tricolore italiano è necessario che si estraggano con un ordine qualsiasi un foglietto verde, uno bianco ed uno rosso. La probabilità di questo evento può calcolarsi come rapporto fra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili. Il numero dei casi favorevoli è $\binom{15}{1}\binom{15}{1}\binom{15}{1} = 15^3$, pari al numero di modi in cui si possono scegliere un foglietto verde tra i quindici foglietti verdi, un foglietto rosso tra i quindici rossi ed un foglietto bianco fra i quindici bianchi. Il numero di casi possibili è invece dato dal numero di combinazioni dei 45 foglietti in gruppi di tre ciascuno. In conclusione la probabilità richiesta è:

$$\frac{15^3}{\binom{45}{3}} = \frac{3\,375}{14\,190} = 0.2378.$$

ESERCIZIO 15

In un dipartimento di matematica vi sono 25 professori ordinari, 15 professori associati e 35 ricercatori. Calcolare la probabilità che formando a caso una commissione di 6 membri questa risulti costituita da 2 professori ordinari, 3 professori associati ed 1 ricercatore.

Soluzione

La probabilità P richiesta può essere valutata come rapporto fra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili. Il numero di casi favorevoli è dato dal prodotto dei numeri di modi in cui si possono scegliere 2 professori ordinari tra i 25 presenti, 3 professori associati tra i 15 presenti ed 1 ricercatore tra i 35 presenti. Il numero dei casi possibili è dato dal numero di combinazioni dei $25 + 15 + 35 = 75$ professori e ricercatori presenti in gruppi di 6. Si ha dunque:

$$P = \frac{\binom{25}{2}\binom{15}{3}\binom{35}{1}}{\binom{75}{6}} = \frac{300 \cdot 455 \cdot 35}{201\,359\,550} = 0.0237.$$

ESERCIZIO 16

Le facce di un cubo di legno chiaro vengono dipinte in nero e poi il cubo viene suddiviso in mille cubetti uguali. Calcolare la probabilità che scegliendo uno di questi cubetti a caso esso abbia due facce nere.

Soluzione

Dire che il cubo è stato diviso in mille cubetti uguali equivale a dire che ogni spigolo del cubo è stato suddiviso in 10 parti uguali. I cubetti che ci interessano sono quelli i cui spigoli sono parte degli spigoli del cubo originario perché proprio tali cubetti hanno più di 1 faccia verniciata. Da questi vanno però eliminati quelli contenenti gli 8 vertici del cubo originario perché essi possiedono 3 facce verniciate. Pertanto in corrispondenza di ognuno dei 12 spigoli del cubo si ricavano 8 cubetti con 2 facce nere, per un totale di $12 \cdot 8 = 96$ cubetti. La probabilità richiesta è dunque data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli (96) ed il numero dei casi possibili (1 000), cosicché essa vale 0.096.

ESERCIZIO 17

Se quattro uomini ed una donna si dispongono casualmente in riga per una foto, qual è la probabilità che la donna risulti al centro?

Soluzione

Essendo unica la donna, la probabilità P richiesta è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli, pari al numero delle permutazioni dei quattro uomini avendo fissato al centro la donna, ed il numero di casi possibili, costituito dal numero di permutazioni delle cinque persone. Pertanto la probabilità richiesta è:

$$P = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

ESERCIZIO 18

Un'urna contiene 70 biglie. Di queste 20 sono rosse e sono numerate da 1 a 20; 26 sono nere e sono numerate da 1 a 26; 24, infine, sono gialle e sono numerate da 1 a 24. Calcolare la probabilità che estraendo una biglia a caso questa:

a) sia rossa o gialla;

b) sia nera o rossa e rechi uno dei numeri 14, 19, 25.

Soluzione

Sia p la probabilità che la biglia estratta sia rossa o gialla. Siano inoltre p_r la probabilità che la biglia estratta sia rossa e p_g la probabilità che essa sia gialla. Si ha allora:

$$p = p_r + p_g = \frac{20}{70} + \frac{24}{70} = \frac{22}{35} = 0.6286.$$

Osserviamo poi che il numero di casi favorevoli al verificarsi dell'evento di cui al quesito b) è $3 + 2 = 5$ mentre il numero totale di casi è 70. La probabilità q richiesta è dunque:

$$q = \frac{5}{70} = 0.0714.$$

ESERCIZIO 19

Si sceglie a caso un punto A di un quadrato di lato unitario. Calcolare:

a) la probabilità $P(D \leq x)$ che la distanza D di A da un prefissato lato del quadrato non superi x;

b) la probabilità $P(\Delta \leq x)$ che la distanza Δ di A dal lato più vicino non superi x.

Soluzione

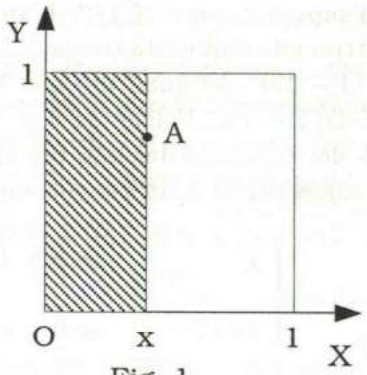


Fig. 1

Consideriamo, evidentemente, il solo caso $x > 0$. Per quanto concerne il quesito a) possiamo riferirci alla Fig. 1 poiché, senza perdita di generalità, si può assumere che il lato prefissato sia quello giacente sull'asse delle ordinate. Ci si convince allora subito che per ogni $x > 1$ risulta $P(D \leq x) = 1$ dal momento che l'ascissa del punto A è certo non superiore ad 1. Se invece è $x \leq 1$, la probabilità $P(D \leq x)$ può calcolarsi come rapporto tra l'area della regione tratteggiata in Fig. 1 e l'area del quadrato che, per ipotesi, è unitaria. In conclusione abbiamo:

$$P(D \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1, \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

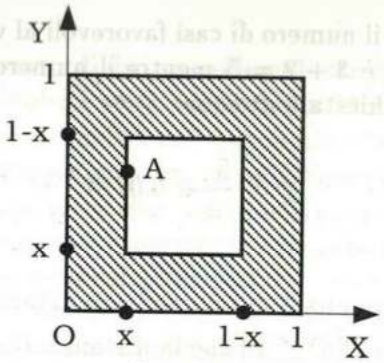


Fig. 2

In relazione al quesito b) riferiamoci alla Fig. 2 nella quale la zona tratteggiata rappresenta il luogo dei punti la cui distanza dal più vicino lato del quadrato non supera x, con $x \leq 1/2$. L'area di tale zona può ad esempio calcolarsi sottraendo dall'unità (ossia dall'area del quadrato di lato unitario) l'area $(1-2x)^2$ del quadrato non tratteggiato, cosicché essa risulta data da $4x(1-x)$. Poiché se è $x > 1/2$ certamente la distanza del punto A del quadrato dal lato più vicino è non maggiore di $1/2$, e quindi non maggiore di x, in conclusione si ha:

$$P(\Delta \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1/2, \\ 4\,x\,(1-x) & \text{se } 0 < x \leq 1/2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 20

Calcolare la probabilità P_N che un numero naturale scelto a caso dall'insieme $\{1, 2, ..., N\}$ sia divisibile per un fissato intero k e determinare il $\lim_{N\to\infty} P_N$.

Soluzione

La probabilità P_N può essere calcolata come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Il numero dei casi favorevoli è dato dal numero dei multipli di k che sono contenuti nell'insieme $\{1, 2, ..., N\}$. Questo è $\lfloor N/k \rfloor$, ossia il massimo intero contenuto in N/k. I casi possibili sono invece N, tanti quanti sono gli elementi dell'insieme considerato. Si ha dunque:

$$P_N = \frac{\lfloor N/k \rfloor}{N}.$$

Segue allora:

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \frac{1}{k}.$$

▷ **ESERCIZIO 21**

Le probabilità di colpire un bersaglio al primo, al secondo e al terzo colpo sono uguali, rispettivamente, a 0.3, 0.6 e 0.8. Determinare la probabilità che uno ed uno solo di questi tre colpi colga il bersaglio.

Soluzione

Consideriamo i seguenti eventi:

$A_1(\overline{A}_1)$: "il primo colpo colpisce (non colpisce) il bersaglio";
$A_2(\overline{A}_2)$: "il secondo colpo colpisce (non colpisce) il bersaglio";
$A_3(\overline{A}_3)$: "il terzo colpo colpisce (non colpisce) il bersaglio";
A : "uno ed uno solo dei tre colpi colpisce il bersaglio".

l'evento A può allora esprimersi nel seguente modo:

$$A = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$$

dove a secondo membro compare l'unione di tre eventi a due a due incompatibili, ciascuno costituito dall'intersezione di eventi tra loro indipendenti. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \\ &= (0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.2) + (0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.2) + (0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.8) \\ &= 0.332. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 22**

Si calcoli la probabilità che estraendo una carta da ciascuno di due mazzi ben mescolati si ottenga almeno una regina di cuori. (Nota: ogni mazzo di carte consiste di 52 carte ed in esso è presente una sola regina di cuori).

Soluzione

L'evento la cui probabilità è richiesta può esprimersi come unione $A \cup B$ di due eventi A e B non incompatibili, dove A è l'evento "estrazione della regina di cuori dal primo mazzo" e B è l'evento "estrazione della regina di cuori dal secondo mazzo". Si ha quindi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} - \frac{1}{52^2} = 0.0381.$$

▷ **ESERCIZIO 23**

Da ciascuno di due mazzi di carte ben mescolati si estrae una carta. Qual è la probabilità che entrambe le carte siano di cuori?

Soluzione
L'evento la cui probabilità è richiesta può essere espresso come intersezione di due eventi A e B indipendenti, dove A è l'evento "estrazione di una carta di cuori dal primo mazzo"e B è l'evento "estrazione di una carta di cuori dal secondo mazzo". Si ha quindi:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = (0.25)^2 = 0.0625.$$

ESERCIZIO 24
In una lotteria di 100 biglietti ve ne sono 10 vincenti. Calcolare la probabilità che acquistando 5 biglietti si vinca almeno un premio.

Soluzione
L'evento A "vincere almeno un premio avendo acquistato 5 biglietti" può essere riguardato come il complemento dell'evento $\overline{A}$ "non vincere alcun premio avendo acquistato 5 biglietti". La probabilità $P(\overline{A})$ che nessuno dei 5 biglietti risulti vincente è

$$P(\overline{A}) = \left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{10}{99}\right)\left(1-\frac{10}{98}\right)\left(1-\frac{10}{97}\right)\left(1-\frac{10}{96}\right)$$
$$\equiv \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = 0.5838.$$

Quindi la probabilità $P(A)$ di vincere almeno un premio avendo acquistato 5 biglietti è ottenibile come

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.4162.$$

ESERCIZIO 25
In un urna vi sono 100 biglie numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo una biglia a caso questa sia contraddistinta da un numero divisibile per 9 o per 18.

Soluzione
Nell'insieme $1, 2, \ldots, 100$ vi sono rispettivamente $\lfloor 100/9 \rfloor = 11$ e $\lfloor 100/18 \rfloor = 5$ multipli dei numeri 9 e 18, dove $\lfloor k \rfloor$ indica il massimo intero contenuto in k. L'evento E di cui si vuole conoscere la probabilità è:

E : "il numero estratto è divisibile per 9 o per 18".

Esso può essere pensato come l'unione dei due eventi

A : "il numero estratto è divisibile per 9",
B : "il numero estratto è divisibile per 18".

Pertanto risulta:

$$P(E) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

dove $A \cap B$ denota l'evento "il numero estratto è divisibile contemporaneamente per 9 e per 18" o, equivalentemente, "il numero estratto è divisibile per 18". Quindi si ha:

$$P(E) = \frac{\lfloor 100/9 \rfloor}{100} + \frac{\lfloor 100/18 \rfloor}{100} - \frac{\lfloor 100/18 \rfloor}{100} = \frac{11}{100}.$$

▷ **ESERCIZIO 26**
Una persona possiede due automobili. Sia 0.1 la probabilità che al mattino entrambe vadano in moto, 0.2 la probabilità che vada in moto solo la seconda e 0.4 la probabilità che nessuna delle due vada in moto. Calcolare la probabilità che solo la prima automobile vada in moto.

Soluzione
Denotiamo con E_1 ($\overline{E}_1$) l'evento "la prima automobile va in moto (non va in moto)"e con E_2 ($\overline{E}_2$) l'evento "la seconda automobile va in moto (non va in moto)". Si ha allora:

$$P(E_1 \cap E_2) = 0.1, \quad P(\overline{E}_1 \cap E_2) = 0.2, \quad P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = 0.4,$$

cosicché

$$P(E_1 \cap \overline{E}_2) = 1 - P(E_1 \cap E_2) - P(\overline{E}_1 \cap E_2) - P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$$
$$= 1 - 0.1 - 0.2 - 0.4 = 0.3.$$

▷ **ESERCIZIO 27**
In un'urna vi sono biglie nere e biglie bianche. Sia 0.5 la probabilità che prendendo due biglie a caso queste siano entrambe nere. Qual è il minimo numero di biglie che devono trovarsi nell'urna?

Soluzione
Si indichino con b ed n rispettivamente i numeri di biglie bianche e nere presenti nell'urna e sia E l'evento "estrazione di due biglie nere dall'urna". Risulta allora:

$$P(E) = \frac{n}{b+n}\,\frac{n-1}{b+n-1} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Determiniamo n e b per tentativi imponendo che essi soddisfino la (1) (escludendo ovviamente i casi $n = 1$ e $b = 0$):

$$n = 2; \quad b = 1 \Rightarrow \text{la (1) non è soddisfatta;}$$
$$n = 3; \quad b = 1 \Rightarrow \text{la (1) è soddisfatta.}$$

Il minimo numero $b + n$ di biglie che l'urna deve contenere è quindi 4. Diamo ora un modo alternativo di risolvere il problema. Tenendo conto di (1) si ha:

$$n(n-1) = c$$
$$(b+n)(b+n-1) = 2c,$$

dove c è una costante. I primi membri di entrambe le relazioni sono prodotti di numeri consecutivi, dei quali quindi uno è dispari e l'altro è pari. La costante c allora deve essere pari, cioè possiamo porre $c = 2k$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 2k \\ (b+n)(b+n-1) &= 4k. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché i numeri 4 e 8 non possono esprimersi come prodotto di due numeri consecutivi, dalla seconda delle due relazioni segue:

$$k = 3, \quad b + n - 1 = 3, \quad b + n = 4.$$

Ciò fornisce già una risposta esauriente al quesito posto. Volendo determinare separatamente il numero di biglie nere e di biglie bianche, basta osservare che, con tale scelta di k, la prima delle (2) comporta:

$$n(n-1) = 6.$$

Si ha allora l'equazione

$$n^2 - n - 6 = 0,$$

che ammette le due soluzioni $n_1 = 3, n_2 = -2$, di cui ovviamente solo la prima è accettabile. Si ha quindi $n = 3$ e $b = 1$.

ESERCIZIO 28

Una dattilografa lavora sei ore al giorno. Si supponga che la probabilità p_k che essa commetta errori di dattilografia durante la k-esima ora sia $p_k = 0.02 \cdot 2^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$. Calcolare la probabilità che non commetta alcun errore durante l'intera giornata lavorativa.

Soluzione

Da quanto asserito si ricavano le probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_6$ di commettere errori nella prima, nella seconda, ..., nella sesta ora:

$$p_1 = 0.02; \; p_2 = 0.04; \; p_3 = 0.08; \; p_4 = 0.16; \; p_5 = 0.32; \; p_6 = 0.64.$$

L'evento "non commettere errori durante l'intera giornata lavorativa" è l'intersezione degli eventi "non commettere errori nella prima, nella seconda, ..., nella sesta ora". La probabilità P di detto evento è dunque:

$$\begin{aligned} P = \prod_{i=1}^{6}(1 - p_i) &= (1 - 0.02)(1 - 0.04)(1 - 0.08) \\ &\quad \times (1 - 0.16)(1 - 0.32)(1 - 0.64) \\ &= 0.1780. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 29**

Siano 0.86, 0.35 e 0.29, rispettivamente, le probabilità che una famiglia scelta a caso in una grande città possieda un televisore a colori, un televisore in bianco e nero o entrambi. Calcolare la probabilità che una famiglia scelta a caso possieda almeno un televisore.

Soluzione

Indichiamo con A e B i seguenti eventi:

A : "una famiglia scelta a caso ha un televisore a colori";
B : "una famiglia scelta a caso ha un televisore in bianco e nero".

Si ha allora:

$A \cap B$: "una famiglia scelta a caso ha entrambi i televisori";
$A \cup B$: "una famiglia scelta a caso ha almeno uno dei due televisori".

La probabilità $P(A \cup B)$ che una famiglia scelta a caso possegga almeno uno dei due tipi di televisori è allora calcolabile come segue:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.86 + 0.35 - 0.29 = 0.92.$$

▷ **ESERCIZIO 30**

In un'urna contenente 150 palline numerate da 1 a 150 si effettui un'estrazione; si calcoli:

a) la probabilità che il numero estratto sia divisibile per 6 e per 8;
b) la probabilità che il numero estratto sia divisibile per 6 o per 8.

Soluzione

Tra gli interi $1, 2, \ldots, 150$ vi sono $\lfloor 150/24 \rfloor$ multipli contemporaneamente di 6 e di 8, dove $\lfloor k \rfloor$ indica il massimo intero contenuto in k. L'evento di cui si vuole conoscere la probabilità in a) è l'evento $E = A \cap B$ dove A e B sono gli eventi:

A : "il numero estratto è divisibile per 6";
B : "il numero estratto è divisibile per 8".

Pertanto risulta:

$$P(E) = P(A \cap B) = \frac{\lfloor 150/24 \rfloor}{150} = \frac{6}{150} = 0.04.$$

La risposta al quesito b) segue analogamente. Invero, tra gli interi $1, 2, \ldots, 150$ vi sono $\lfloor 150/6 \rfloor = 25$ e $\lfloor 150/8 \rfloor = 18$ multipli rispettivamente di 6 e di 8. La probabilità richiesta è quella dell'evento $F = A \cup B$, con A e B sopra definiti. Pertanto:

$$\begin{aligned} P(F) = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{25}{150} + \frac{18}{150} - \frac{6}{150} = 0.2466. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 31**

Una sequenza di tre lettere viene formata a caso utilizzando l'alfabeto italiano. Nell'ipotesi che una qualsiasi sequenza di tre lettere sia una parola, qual è la probabilità che la parola formata contenga solo lettere tutte distinte e comprese tra la A e la L, estremi inclusi?

Soluzione

La valutazione di detta probabilità può essere effettuata determinando il numero dei raggruppamenti possibili dei 21 elementi (lettere dell'alfabeto) a 3 a 3 (casi possibili) ed il numero di quelli che risultano favorevoli all'evento desiderato. Si hanno dunque $\binom{21}{3}$ casi possibili e $\binom{10}{3}$ casi favorevoli di modo che la probabilità P richiesta vale

$$P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{21}{3}} = \frac{12}{133} = 0.0902.$$

▷ **ESERCIZIO 32**

Un cacciatore ha nel carniere 12 capi di selvaggina di tre dei quali la legge fa divieto di caccia. Un guardacaccia effettua un controllo esaminando 3 capi estratti a caso dal carniere. Calcolare la probabilità che egli non abbia individuato nessuno dei capi non consentiti.

Soluzione

La probabilità P richiesta è la probabilità congiunta che né il primo, né il secondo, né il terzo dei tre capi esaminati dal guardacaccia siano non consentiti. Dette p_1, p_2, p_3 tali probabilità si ha evidentemente:

$$p_1 = \frac{9}{12}, \quad p_2 = \frac{8}{11}, \quad p_3 = \frac{7}{10}.$$

Dalla relazione

$$P = p_1 p_2 p_3$$

segue allora:

$$P = \frac{9}{12}\,\frac{8}{11}\,\frac{7}{10} = 0.3818.$$

Alternativamente, P può essere calcolato come rapporto tra il numero di combinazioni dei 9 capi consentiti a gruppi di 3 ed il numero complessivo di terne di capi (di qualsiasi natura) che possono formarsi con 12 elementi:

$$P = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{12 \cdot 11 \cdot 10} = 0.3818.$$

▷ **ESERCIZIO 33**

In un gioco ai dadi consistente nel lancio simultaneo di due dadi un giocatore scommette sull'uscita di 2 (ossia che il punteggio totalizzato sia 2) ed un altro sull'uscita di 3. Quale dei due giocatori ha maggiore probabilità di vincita?

Soluzione

Il primo giocatore vince solo nel caso in cui si verifica l'evento $(1, 1)$, ossia quando ciascuno dei due dadi reca il punteggio di 1. Il secondo giocatore invece vince quando si verifichino gli eventi $(1, 2)$ o $(2, 1)$. Si ha dunque:

$$p_1 = P(1, 1) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$p_2 = P(1,2) + P(2,1) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{2}{36} = 2p_1,$$

dove p_1 e p_2 denotano rispettivamente le probabilità di vincita del primo e del secondo giocatore. Si è così visto che la probabilità di vincita di quest'ultimo è doppia della probabilità di vincita del primo.

ESERCIZIO 34

Se in un'urna contenente 15 palline bianche e 3 nere vengono aggiunte 2 palline nere ed 1 bianca di quanto cambia la probabilità che estraendo una pallina a caso questa sia nera?

Soluzione

Se si indica con p_1 la probabilità di estrarre una pallina nera dall'urna con la prima composizione è facile constatare che risulta:

$$p_1 = \frac{3}{18} = 0.1667.$$

Indicando con p_2 la probabilità dello stesso evento dopo l'alterazione della composizione dell'urna, si ha:

$$p_2 = \frac{5}{21} = 0.2381$$

cosicché la variazione Δp di probabilità è:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 0.0714.$$

ESERCIZIO 35

In una fila di fronte ad un negozio sono presenti m uomini ed n donne. Supponendo che essi siano giunti a caso, calcolare la probabilità che gli uomini presenti nella fila siano tutti in posizioni consecutive.

Soluzione

Poiché tutte le possibili file di $m+n$ persone sono da considerarsi equiprobabili, si può valutare la probabilità P richiesta come rapporto fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili. Il numero dei casi possibili è dato dal numero $(m+n)!$, ossia dal numero delle permutazioni di $m+n$ elementi distinti. Per calcolare il numero di casi favorevoli, ragioniamo al seguente modo. Dal momento che si desidera che gli uomini siano tutti in posizioni consecutive, possiamo riguardare gli m uomini come costituenti un unico blocco e considerare quindi le

$(n+1)!$ permutazioni di $n+1$ elementi. Per ciascuna di queste si ottengono poi $m!$ file distinte, tante cioè quante sono le permutazioni degli m uomini all'interno del blocco. La probabilità richiesta è dunque:

$$P = \frac{m!\,(n+1)!}{(m+n)!}.$$

ESERCIZIO 36

Un questionario consiste di 10 domande ciascuna delle quali prevede 3 possibili risposte di cui una soltanto è esatta. Calcolare la probabilità che riempendo il questionario a caso risulti esatta la risposta a tutte le domande.

Soluzione

Poiché per ciascuna domanda il candidato dispone di 3 possibili risposte il numero di modi possibili di risposta al questionario è 3^{10}. Di questi uno soltanto fornisce la risposta esatta a tutte le domande. La probabilità richiesta è dunque:

$$P = \frac{1}{3^{10}} = 1.6935 \cdot 10^{-5}.$$

ESERCIZIO 37

Un bimbo ha in tasca una moneta da 5 lire, una da 10 lire, una da 20 lire e una da 50 lire. Sedendosi, due monete gli cadono di tasca. Qual è la probabilità che il bimbo abbia perduto più di 50 lire?

Soluzione

Dati i tagli delle monete i casi in cui la perdita è superiore a 50 lire sono quelli in cui una delle monete cadute è proprio quella da 50 lire. Ciò può avvenire in $\binom{3}{1} = 3$ modi distinti su un totale di $\binom{4}{2} = 6$ casi possibili di perdita di due monete qualsiasi. La probabilità P richiesta è dunque:

$$P = \frac{3}{6} = 0.5.$$

ESERCIZIO 38

Un'urna contiene 3 biglie nere, 5 biglie bianche e 4 biglie verdi. Una seconda urna ne contiene 4 nere, 7 bianche e 6 verdi. Qual è la probabilità che scegliendo a caso una biglia da ciascuna urna esse siano a) entrambe bianche, b) entrambe dello stesso colore.

Soluzione
Definiamo i seguenti eventi:

B_1 : "estrazione di biglia bianca dalla prima urna",
B_2 : "estrazione di biglia bianca dalla seconda urna".

Posto $B = B_1 \cap B_2$ si ha:

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\, P(B_2)$$

data l'indipendenza dei due eventi. Quindi, essendo $P(B_1) = 5/12$ e $P(B_2) = 7/17$, si ha:

$$P(B) = \frac{5}{12}\,\frac{7}{17} = \frac{35}{204} = 0.1716.$$

Ciò risponde al quesito a). Per rispondere al quesito b) procediamo in maniera affatto analoga indicando con N_1 ed N_2, V_1 e V_2 gli eventi "estrazione di biglia nera o biglia verde dalla prima e dalla seconda urna". Introduciamo inoltre il seguente evento

C : "estrazione di biglie dello stesso colore dalle due urne".

Si ha evidentemente:

$$C = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (V_1 \cap V_2).$$

Dal momento che i tre eventi a secondo membro sono incompatibili e che ciascuno di essi è l'intersezione di eventi indipendenti risulta:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_1)\, P(B_2) + P(N_1)\, P(N_2) + P(V_1)\, P(V_2) \\ &= 0.1716 + 0.0588 + 0.1176 = 0.3480 \end{aligned}$$

avendo fatto uso delle evidenti relazioni:

$$P(N_1) = \frac{3}{12}, \quad P(N_2) = \frac{4}{17},$$
$$P(V_1) = \frac{4}{12}, \quad P(V_2) = \frac{6}{17}.$$

▷ **ESERCIZIO 39**
Quattro amici decidono di incontrarsi all'hotel X di una certa città in un dato giorno. Se in tale città esistono 4 hotels tutti denominati X, qual è la probabilità che questi amici scelgano ciascuno un hotel diverso?

Soluzione
Ognuna delle quattro persone può scegliere in 4 modi diversi l'hotel X. Pertanto hanno in totale 4^4 possibili scelte. Tra queste 4^4 scelte possibili, vanno individuate quelle che collocano i quattro amici nei quattro hotel diversi. Queste sono 4!, tante, cioè, quante sono le permutazioni di 4 elementi distinti. La probabilità P richiesta vale pertanto

$$P = \frac{4!}{4^4} = \frac{24}{256} = 0.0938.$$

▷ **ESERCIZIO 40**
Un dirigente si avvale dell'opera di due collaboratori X e Y. Sia 0.03 la probabilità che X risulti assente e 0.04 la probabilità che ciò accada per Y. Se 0.01 è la probabilità che entrambi siano assenti, calcolare:

a) la probabilità che in un fissato giorno il dirigente debba avvalersi al più di un collaboratore;
b) la probabilità che possa avvalersi di almeno un collaboratore;
c) la probabilità che debba avvalersi di un solo collaboratore.

Soluzione
Siano A l'evento "si assenta il collaboratore X" e B l'evento "si assenta il collaboratore Y". Dai dati dell'esercizio risulta:

$$P(A) = 0.03;$$
$$P(B) = 0.04;$$
$$P(A \cap B) = 0.01.$$

La probabilità P_1 che in un determinato giorno il dirigente debba avvalersi al più di un collaboratore, coincide con la probabilità dell'evento $A \cup B$ ossia dell'evento "almeno uno dei due collaboratori si assenta". Quindi:

$$\begin{aligned} P_1 \equiv P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.03 + 0.04 - 0.01 = 0.06. \end{aligned}$$

La probabilità che il dirigente possa avvalersi di almeno un collaboratore è poi evidentemente uguale alla probabilità $P(\overline{A \cap B})$ che non si verifichi l'evento $A \cap B$:

$$P_2 \equiv P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.01 = 0.99.$$

Infine, la probabilità P_3 che il dirigente debba avvalersi di un solo collaboratore è uguale alla probabilità che uno ed uno solo dei due collaboratori sia assente:

$$P_3 = P(A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \qquad (1)$$

per la incompatibilità degli eventi $A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cap B$.
Notiamo poi che si ha:

$$A = A \cap \overline{B} \cup A \cap B$$

$$B = \overline{A} \cap B \cup A \cap B$$

e quindi:

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = 0.03 - 0.01 = 0.02 \\ P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = 0.04 - 0.01 = 0.03. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) segue infine:

$$P_3 = 0.02 + 0.03 = 0.05.$$

▷ **ESERCIZIO 41**

Un registratore di cassa contiene m banconote da lire mille, d banconote da lire diecimila e c banconote da lire cinquantamila. Prendendo a caso una banconota dopo l'altra si calcoli la probabilità che il primo prelievo di una banconota da lire diecimila preceda il primo prelievo di una banconota da lire cinquantamila nei seguenti due casi:

a) prelevamento con rimpiazzamento;
b) prelevamento senza rimpiazzamento.

Soluzione

Consideriamo separatamente i due seguenti casi.

a) Prelevamento con rimpiazzamento.

Introduciamo i seguenti eventi:

A_k : "una banconota da diecimila è estratta per la prima volta alla k–esima estrazione e segue l'uscita di $k-1$ banconote da mille",

S : "la prima estrazione di una banconota da diecimila precede la prima estrazione di una banconota da cinquantamila".

Si ha evidentemente:

$$P(A_k) = \left(\frac{m}{m+d+c}\right)^{k-1} \frac{d}{m+d+c} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Inoltre, poiché l'evento S è l'unione degli eventi A_k che sono tra loro incompatibili, abbiamo anche:

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \frac{d}{m+d+c} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+d+c}\right)^{k-1} \\ &= \frac{d}{m+d+c} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{m}{m+d+c}\right)^{r} \\ &= \frac{d}{m+d+c} \frac{1}{1 - \dfrac{m}{m+d+c}} = \frac{d}{d+c}. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Prelevamento senza rimpiazzamento.

Con riferimento agli eventi A_k ed S sopra introdotti dobbiamo ora scrivere:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{d}{m+d+c} \\ P(A_k) &= \left(\frac{m}{m+d+c} \frac{m-1}{m+d+c-1} \cdots \frac{m-k+2}{m+d+c-k+2}\right) \\ &\quad \times \frac{d}{m+d+c-k+1} \qquad (k = 2, \ldots, m+1) \end{aligned}$$

dove il prodotto in parentesi è la probabilità che nelle prime $k-1$ estrazioni si ottengano sempre banconote da mille mentre l'ultimo fattore è la probabilità di ottenere una banconota da diecimila alla k–esima estrazione. Più sinteticamente, possiamo dunque scrivere:

$$P(A_k) = \frac{d\, m!}{(m+d+c)!} \frac{(m+d+c-k)!}{(m-k+1)!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m+1).$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
P(S) &= \sum_{k=1}^{m+1} P(A_k) \\
&= \frac{m!\,d}{(m+d+c)!} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(m+d+c-k)!}{(m-k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(d+c-1)!\,d}{(m+d+c)!} \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+d+c-k}{d+c-1} \\
&= \frac{m!\,(d+c-1)!\,d}{(m+d+c)!} \sum_{r=d+c-1}^{m+d+c-1} \binom{r}{d+c-1},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal cambiamento di indice di somma $m+d+c-k=r$. Quest'ultima sommatoria può poi essere calcolata facendo uso della seguente identità combinatoria:

$$
\sum_{r=n}^{m+n} \binom{r}{n} \equiv \sum_{s=0}^{m} \binom{s+n}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}. \tag{3}
$$

Si ha dunque:

$$
\begin{aligned}
P(S) &= \frac{m!\,(d+c-1)!\,d}{(m+d+c)!} \binom{d+c+m}{d+c} \\
&= \frac{m!\,(d+c-1)!\,d}{(m+d+c)!} \frac{(d+c+m)!}{(d+c)!\,m!} = \frac{d}{d+c}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Si vede così che la probabilità di estrarre per la prima volta una banconota da diecimila precedentemente all'estrazione della prima banconota da cinquantamila è indipendente dal fatto che le estrazioni avvengano con o senza rimpiazzamento. Un modo più diretto di calcolare $P(S)$, che prescinde dall'uso dell'identità combinatoria (3), è il seguente. Si denoti con $\overline{S}$ l'evento complementare di S:

$\overline{S}$: " la prima estrazione di una banconota da cinquantamila precede la prima estrazione di una banconota da diecimila".

Si ha evidentemente:

$$
P(\overline{S}) = 1 - P(S). \tag{5}
$$

D'altro canto, $P(\overline{S})$ si ottiene sostituendo nella (2) d con c e c con d, cosicché si ha:

$$
P(\overline{S}) = \frac{m!\,(c+d-1)!\,c}{(m+c+d)!} \sum_{r=c+d-1}^{m+c+d-1} \binom{r}{c+d-1}. \tag{6}
$$

Dalle (2) e (6) segue allora:

$$
\frac{P(S)}{P(\overline{S})} = \frac{d}{c}.
$$

Quindi, per la (5), si ha anche:

$$
P(S) = [1 - P(S)]\,\frac{d}{c}
$$

da cui segue appunto:

$$
P(S) = \frac{d}{c+d}.
$$

Si noti che questo stesso ragionamento si sarebbe potuto applicare anche nel caso in cui l'estrazione avviene con rimpiazzamento.

▷ **ESERCIZIO 42**

Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sottoinsiemi di uno stesso insieme Ω. Dimostrare che sussiste la seguente identità (anche nota come formula di inclusione–esclusione):

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap \ldots \cap A_n).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Soluzione

Procediamo per induzione. Osserviamo a tal fine che l'identità (1) sussiste per $n=2$. Dimostriamo allora che se essa vale per $n=r$, allora vale anche per $n=r+1$. Infatti, posto:

$$
B_r = \bigcup_{i=1}^{r} A_i
$$

e facendo uso di uno degli assiomi caratterizzanti la misura P segue:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{r+1} A_i\right) \equiv P(B_r \cup A_{r+1}) = P(B_r) + P(A_{r+1}) - P(B_r \cap A_{r+1}).$$

Poiché d'altra parte la (1) è stata assunta vera per $n = r$, si ha anche:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{r+1} A_i\right) &\equiv P(B_r) + P(A_{r+1}) - P(B_r \cap A_{r+1}) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) + P(A_{r+1}) - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) \cap A_{r+1}\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{r} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)\right. \\ &\quad \left. + \cdots + (-1)^{r-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_k \cap \ldots \cap A_r)\right] \qquad (2) \\ &\quad + P(A_{r+1}) - P\left[\bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap A_{r+1})\right]. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, applicando di nuovo l'identità, risulta:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap A_{r+1})\right] &= \sum_{i=1}^{r} P(A_i \cap A_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{i<j} P\left[(A_i \cap A_{r+1}) \cap (A_j \cap A_{r+1})\right] \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P\left[(A_i \cap A_{r+1}) \cap (A_j \cap A_{r+1}) \cap (A_k \cap A_{r+1})\right] + \cdots \\ &\quad + (-1)^{r+1} P\left[(A_1 \cap A_{r+1}) \cap (A_2 \cap A_{r+1}) \cap \cdots \cap (A_r \cap A_{r+1})\right]. \end{aligned}$$

Facendo uso della proprietà commutativa dell'unione ed osservando che l'intersezione di un insieme con se stesso dà l'insieme stesso, si ha poi:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap A_{r+1})\right] &= \sum_{i=1}^{r} P(A_i \cap A_{r+1}) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j \cap A_{r+1}) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{r+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{r+1}). \end{aligned} \qquad (3)$$

Sostituendo la (3) nell'ultima delle (2), si ricava infine la (1) scritta per $n = r + 1$. Ciò completa la dimostrazione.

▷ **ESERCIZIO 43**

Un computer prepara addebiti mensili per n utenti e stampa per ciascuno l'indirizzo su di una busta. A causa di un errore, gli addebiti vengono inseriti ciascuno in una busta a caso. Calcolare la probabilità che almeno un addebito venga inserito nella busta esatta.

Soluzione

Detto E_n l'evento "almeno un addebito viene inserito nella busta esatta" e indicando con A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ l'evento "la i–esima busta contiene l'addebito relativo all'utente in indirizzo", risulta evidentemente:

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Poiché gli eventi A_i non sono mutuamente esclusivi, la probabilità $P(E_n)$ va calcolata facendo uso della formula (1) di inclusione–esclusione dell'esercizio precedente. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} P(E_n) \equiv P(\cup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned} \qquad (1)$$

D'altra parte, è agevole rendersi conto che risulta:

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{1}{n} \equiv \frac{(n-1)!}{n!} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ P(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)!}{n!} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{(n-3)!}{n!} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Infatti, ad esempio, $P(A_i \cap A_j)$ può calcolarsi come rapporto tra il numero $(n-2)!$ di permutazioni di n oggetti 2 dei quali vengono mantenuti fissi ed il numero $n!$ complessivo di permutazioni di n oggetti. In generale, per ogni p intero $(p \leq n)$ si ha:

$$P(A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \cdots \cap A_{s_p}) = \frac{(n-p)!}{n!}.$$

Facendo uso di queste relazioni la (1) diventa:

$$P(E_n) = n\frac{1}{n} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(n-3)!}{n!}$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)(n-2)\quad 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \equiv \sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}. \qquad (2)$$

Si noti che per n abbastanza grande risulta:

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r!} = -\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}$$
$$= -\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!} - 1\right] = 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

ESERCIZIO 44

Si calcoli la probabilità P_n che infilando a caso n lettere in n buste predisposte, nessuna di esse termini nella busta giusta e valutarne il limite per $n \to \infty$.

Soluzione

La probabilità richiesta si ottiene immediatamente dalla (2) dell'Esercizio 43 avendosi:

$$P_n \equiv P(\overline{E}_n) \equiv 1 - P(E_n) = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}.$$

Si ha pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-1} = 0.3679.$$

ESERCIZIO 45

Nel caso dell'Esercizio 43, calcolare la probabilità $P(k,n)$ che esattamente k degli n utenti ricevano l'addebito giusto (è questo un esempio tipico del cosiddetto "problema delle coincidenze").

Soluzione

Supponiamo di ordinare le n buste con un numero progressivo da 1 ad n e denotiamo con A_{kn} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ l'evento "esattamente k degli addebiti sono corretti in k buste fissate". Si hanno $n!$ permutazioni possibili degli addebiti; tra queste sono favorevoli quelle che, tenendo fissi k addebiti nei posti dove esiste coincidenza, permutano gli altri $n-k$ addebiti senza fornire coincidenza. Queste ultime permutazioni sono $(n-k)!\,P_{n-k}$, dove P_{n-k} rappresenta la probabilità di non avere nessuna coincidenza in $n-k$ addebiti. Quindi, facendo uso del risultato dell'Esercizio 44 si ha:

$$P(A_{kn}) = \frac{(n-k)!\,P_{n-k}}{n!} = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^r}{r!}.$$

Poiché esistono $\binom{n}{k}$ modi distinti ed equiprobabili di assegnare k addebiti in maniera corretta, la probabilità $P(k,n)$ che esattamente k degli n utenti ricevano l'addebito giusto risulta essere:

$$P(k,n) = \binom{n}{k}P(A_{kn}) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^r}{r!} = \frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^r}{r!}. \qquad (1)$$

▷ **ESERCIZIO 46**

In una camerata di una caserma sono presenti 50 letti. Supponendo che 50 soldati tornino in caserma ubriachi e che si buttino a caso su di un letto valutare le probabilità P_2 e P_{10} che 2 di essi e 10 di essi rispettivamente si ritrovino nel proprio letto.

Soluzione

Si tratta di un problema di coincidenze. Le probabilità richieste sono quindi immediatamente ottenibili dalla (4) dell'Esercizio 43:

$$P_2 = \frac{1}{2!}\sum_{r=0}^{48}\frac{(-1)^r}{r!}$$
$$P_{10} = \frac{1}{10!}\sum_{r=0}^{40}\frac{(-1)^r}{r!}.$$

Valutazioni di P_2 e P_{10} possono ottenersi allora mediante l'approssimazione

$$\sum_{r=0}^{48}\frac{(-1)^r}{r!} \simeq \sum_{r=0}^{40}\frac{(-1)^r}{r!} \simeq e^{-1} = 0.3679$$

cosicché

$$P_2 \simeq \frac{1}{2!}\, e^{-1} = 0.1840$$

$$P_{10} \simeq \frac{1}{10!}\, e^{-1} = 1.0138 \cdot 10^{-7}.$$

ESERCIZIO 47

Un test di qualità prevede che una confezione di bottiglie di vino possa essere messa in commercio se esaminando metà confezione non più di una bottiglia sia difettosa. Calcolare la probabilità che una confezione contenente 96 bottiglie delle quali 4 sono difettose superi detto test di qualità.

Soluzione

L'evento C "la confezione di 96 bottiglie supera il test", può essere espresso come:

$$C = A \cup B$$

ovvero come unione dei due eventi incompatibili dove A è l'evento "fra le 48 bottiglie esaminate nessuna risulta difettosa" e B è l'evento "una sola delle 48 bottiglie risulta difettosa". Si ha allora

$$P(C) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Le probabilità a secondo membro della (1) sono rispettivamente

$$P(A) = \frac{\binom{92}{48}\binom{4}{0}}{\binom{96}{48}}$$

$$P(B) = \frac{\binom{92}{47}\binom{4}{1}}{\binom{96}{48}}.$$

Quindi

$$P(C) = \frac{\binom{92}{48} + \binom{92}{47}4}{\binom{96}{48}} = 0.3085.$$

▷ **ESERCIZIO 48**

Una clinica odontoiatrica offre vari tipi di prestazioni tra cui: a) pulizia dei denti; b) otturazione di carie e c) incapsulamento di denti. Sia 0.44 la probabilità che un cliente necessiti della prestazione a); 0.24 la probabilità che necessiti di b) e 0.21 la probabilità che abbia bisogno della prestazione c). Calcolare la probabilità che un cliente abbia necessità di almeno una delle tre suddette prestazioni sapendo che la probabilità che necessiti di a) e b) è 0.08; che la probabilità che necessiti di a) e c) è 0.11; che la probabilità che necessiti di b) e c) è 0.07; che, infine, la probabilità che necessiti di tutte e tre le prestazioni è 0.03.

Soluzione

Si considerino i seguenti eventi:

A : "un cliente necessita di pulizia dei denti";
B : "un cliente necessita di otturazione di carie";
C : "un cliente necessita di incapsulamento dei denti ".

In base ai dati dell'esercizio si ha:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.44; \\ P(B) &= 0.24; \\ P(C) &= 0.21; \\ P(A \cap B) &= 0.08; \\ P(A \cap C) &= 0.11; \\ P(B \cap C) &= 0.07; \\ P(A \cap B \cap C) &= 0.03. \end{aligned}$$

L'evento "un paziente ha bisogno di almeno una delle tre prestazioni" è l'unione dei tre eventi semplici indicati con A, B e C.
Utilizzando pertanto la relazione:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

e sostituendo i rispettivi valori si ottiene

$$P(A \cup B \cup C) = 0.44 + 0.24 + 0.21 - 0.08 - 0.11 - 0.07 + 0.03 = 0.66.$$

▷ **ESERCIZIO 49**

Un gioco consiste in quanto segue. In un esperimento di prove ripetute un evento E si verifica con probabilità p. Allorché detto evento si

verifica, il primo di due giocatori guadagna un punto mentre il secondo guadagna un punto ogni volta che E non si verifica. Il gioco termina quando il primo giocatore ha totalizzato m punti oppure quando il secondo giocatore ha totalizzato n punti. La posta in gioco va al giocatore che per primo totalizza il punteggio convenuto. Calcolare la probabilità che la vittoria vada al primo giocatore.

Soluzione

Per fissare le idee assumiamo $m \leq n$; ciò non lede la generalità del discorso perché nel caso $m \geq n$ basta scambiare le denominazioni dei giocatori. Indichiamo i giocatori con A e B rispettivamente. Perché A risulti vincitore, egli deve conseguire m successi senza, però, che il numero di insuccessi raggiunga n perché altrimenti la vittoria verrebbe conseguita da B. È altresì evidente che A non potrà comunque vincere prima che la prova venga ripetuta m volte, ossia prima di m prove. Indichiamo, allora, con E l'evento "il giocatore A consegue m successi". Esso può pensarsi come unione degli eventi "gli m successi sono conseguiti in m prove"; "gli m successi sono conseguiti in $m+1$ prove" (m successi ed un insuccesso); "gli m successi vengono conseguiti in $m+k$ prove" (quindi k insuccessi), e così via finché k non raggiunge il valore $n-1$. Essendo gli eventi suddetti incompatibili, e passando alle rispettive probabilità si ha:

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{m} p^m (1-p)^k.$$

Si noti che le $(m+k)$ prove sono effettuate in condizione di indipendenza statistica, cosicché resta giustificato il prodotto delle probabilità di successo e di insuccesso; il coefficiente binomiale, inoltre, tiene conto del diverso ordine in cui gli m successi possano ottenersi in $(m+k)$ prove. In conclusione, la probabilità che vinca il giocatore A è:

$$P(E) = p^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{m} (1-p)^k;$$

mentre la probabilità che esso perda (e quindi che vinca B) è:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

ESERCIZIO 50

Calcolare la probabilità che lanciando 8 volte una moneta equa l'evento "testa" si verifichi più frequentemente dell'evento "croce".

Soluzione

Un primo ovvio modo di risolvere il problema consiste nell'elencare tutti i risultati possibili ed effettuare il rapporto tra numero di casi favorevoli e numero totale di casi. Procediamo, però, in un modo diverso. Raggruppiamo tutti i possibili risultati in 3 gruppi e definiamo i seguenti eventi:

A : "testa è più frequente di croce";
B : "croce è più frequente di testa";
C : "testa e croce sono ugualmente frequenti".

Evidentemente si ha:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Dall'equiprobabilità di A e B segue poi:

$$2P(A) + P(C) = 1$$

e quindi:

$$P(A) = P(B) = \frac{1 - P(C)}{2}. \tag{1}$$

Per valutare la probabilità di C (4 teste e 4 croci) si osservi che dei $2^8 = 256$ modi in cui possono disporsi con ripetizioni testa e croce su 8 posti ve ne sono $\binom{8}{4\,4} = 70$ nei quali compaiono esattamente 4 teste e 4 croci. Pertanto si ha:

$$P(C) = \frac{70}{256} = 0.2734.$$

Dalla (1) segue infine:

$$P(A) = P(B) = \frac{1 - 0.2734}{2} = 0.3633.$$

▷ **ESERCIZIO 51**

Un treno è composto da 20 carrozze ciascuna delle quali presenta difetti con probabilità 0.2 (indipendentemente dalle altre). Prima della partenza le carrozze vengono controllate da due addetti e la partenza viene ritardata ogni volta che si riscontrano difetti. Supponendo che ciascuno dei controllori individui l'esistenza di difetti con probabilità 0.8 e che essi operino indipendentemente l'uno dall'altro, calcolare le seguenti probabilità:

a) che il treno parta in ritardo;
b) che il treno parta in orario con almeno una carrozza difettosa.

Soluzione

Indichiamo con A l'evento "il treno parte in ritardo" e con B l'evento "il treno parte in orario con almeno una carrozza difettosa". Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{A}$ ("il treno parte in orario"). Per calcolare tale probabilità introduciamo i seguenti eventi:

B_i $(i = 1, 2, \ldots, 20)$: "la i–esima carrozza non è difettosa";
C_i $(i = 1, 2, \ldots, 20)$: "la i–esima carrozza è difettosa e non viene riscontrato il difetto".

Posto

$$E_i = B_i \cup C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 20),$$

(si noti che E_i è l'evento "il treno non subisce ritardo a causa della carrozza i–esima"), si ha evidentemente:

$$\overline{A} = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{20}. \tag{1}$$

Osserviamo ora che si ha:

$$P(B_i \cup C_i) = P(B_i) + P(C_i) = 0.8 + (0.2)^3 = 0.808 \quad (i = 1, 2, \ldots, 20) \tag{2}$$

dove $(0.2)^3$ è la probabilità che la carrozza i–esima sia difettosa e che il difetto non venga individuato dai due controllori. Dalle (1) e (2) segue:

$$P(\overline{A}) = (0.808)^{20} = 0.0141. \tag{3}$$

La probabilità $P(A)$ che il treno parta in ritardo è allora:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.9859.$$

La risposta al secondo quesito può ottenersi osservando che l'evento $\overline{A}$ può pensarsi come unione dei seguenti due eventi incompatibili:

F : "il treno parte in orario con almeno una carrozza difettosa";
G : "il treno parte in orario senza nessuna carrozza difettosa".

Chiaramente si ha:

$$P(G) = (0.8)^{20} = 0.0115. \tag{4}$$

Dalla relazione:

$$P(\overline{A}) = P(F) + P(G)$$

segue allora:

$$P(F) = P(\overline{A}) - P(G).$$

Ricordando le (3) e (4) segue infine:

$$P(F) = 0.0141 - 0.0115 = 0.0026.$$

ESERCIZIO 52

Un'apparecchiatura consiste di tre componenti essenziali. Le probabilità di corretto funzionamento di ciascuno di essi sono rispettivamente 0.9, 0.8 e 0.7. Il primo componente è indispensabile al funzionamento della apparecchiatura mentre al mancato funzionamento del secondo o del terzo consegue soltanto una diminuzione del rendimento dell'apparecchiatura. Il guasto simultaneo del secondo e del terzo elemento arresta il funzionamento dell'apparecchiatura. Calcolare la probabilità di funzionamento dell'apparecchiatura.

Soluzione

Si denoti con A l'evento "l'apparecchiatura resta in funzione con qualsiasi rendimento". Si considerino inoltre i seguenti eventi:

A_1 : "funzionamento del primo componente";
A_2 : "funzionamento del secondo componente";
A_3 : "funzionamento del terzo componente".

L'evento A può esprimersi mediante gli eventi A_1, A_2 e A_3 al seguente modo:

$$A = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)$$

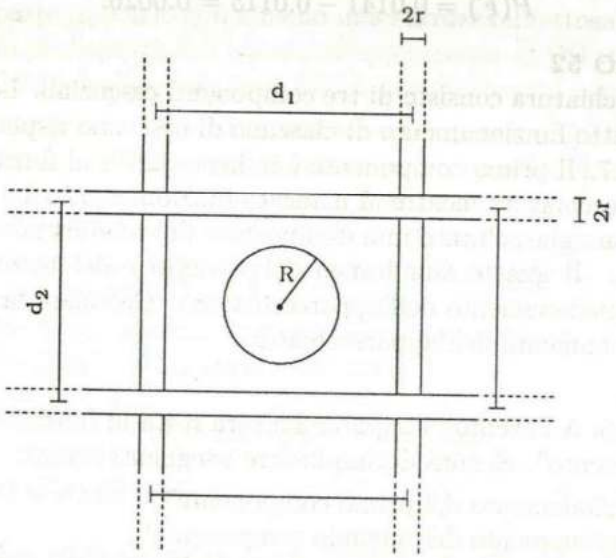
ossia come unione di tre eventi incompatibili. Tenuto conto del fatto che funzionamenti o guasti dei tre componenti sono tra loro indipendenti, si ha:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \\ &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) + P(A_1)\,P(\overline{A}_2)\,P(A_3) \\ &\quad + P(A_1)\,P(A_2)\,P(\overline{A}_3) \\ &= (0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7) + (0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7) + (0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3) \\ &= 0.8460. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 53

Una griglia rettangolare è costituita da sbarrette cilindriche di raggio r. Le distanze tra gli assi di sbarrette consecutive sono rispettivamente d_1 e d_2. Determinare sia la probabilità P che una pallina di raggio R lanciata a caso contro la griglia in direzione ad essa perpendicolare passi attraverso di essa senza urtare le sbarrette che la costituiscono, sia la probabilità che la pallina urti contro la griglia.

Soluzione



Con riferimento alla figura notiamo anzitutto che risulta $P = 0$ se il diametro della pallina è maggiore della minima distanza tra le sbarrette costituenti una singola maglia, ossia se risulta $2R > d_1 - 2r$ oppure $2R > d_2 - 2r$. Supponiamo ora che si abbia $2R < \min(d_1 - 2r, d_2 - 2r)$. I casi favorevoli al passaggio della pallina attraverso la maglia sono quelli per i quali il centro della pallina occupa una posizione tale che le sue distanze dalle sbarrette costituenti i lati di una maglia della griglia siano entrambe maggiori del raggio della pallina. Denotando con N il numero di maglie della griglia, la probabilità P può quindi esprimersi al seguente modo:

$$P = \frac{(d_1 - 2r - 2R)\,(d_2 - 2r - 2R)\,N}{d_1\, d_2\, N} = \left[1 - \frac{2r + 2R}{d_1}\right]\left[1 - \frac{2r + 2R}{d_2}\right].$$

La probabilità di urto contro la griglia è infine data da $1 - P$. Si noti che risulta $P = 0$ nel caso in cui il diametro della pallina è proprio uguale alla distanza fra due lati della maglia.

ESERCIZIO 54

Vengono scagliate tre frecce contro un bersaglio. Si considerino i seguenti eventi:

E_i $(i = 1, 2, 3)$: "la freccia i–esima colpisce il bersaglio";
$\overline{E}_i$ $(i = 1, 2, 3)$: "la freccia i–esima manca il bersaglio".

Supponendo che gli eventi E_1, E_2 ed E_3 siano tra loro indipendenti e che si abbia $P(E_1) = 0.75$, $P(E_2) = P(E_3) = 0.80$, calcolare la probabilità che una ed una sola delle tre frecce colpisca il bersaglio, nonché la probabilità che almeno due frecce colpiscano il bersaglio.

Soluzione

Si indichi con A l'evento "una ed una sola delle tre frecce colpisce il bersaglio" e con B l'evento "almeno due frecce colpiscono il bersaglio". L'evento A può esprimersi mediante gli eventi E_i nella seguente maniera:

$$A = (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) \cup (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3).$$

Poiché i tre eventi a secondo membro sono incompatibili, si ha:

$$P(A) = P(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) + P(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) + P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3).$$

e quindi, per l'indipendenza degli E_i:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1)\,P(\overline{E}_2)\,P(\overline{E}_3) + P(\overline{E}_1)P(E_2)\,P(\overline{E}_3) + \\ &\quad + P(\overline{E}_1)\,P(\overline{E}_2)\,P(E_3) \\ &= 0.75 \cdot (0.20)^2 + 0.25 \cdot 0.80 \cdot 0.20 + 0.25 \cdot 0.20 \cdot 0.80 \\ &= 0.11. \end{aligned}$$

Analogamente, per l'evento B si ha:

$$B = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) \cup (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

e quindi:

$$P(B) = 0.75 \cdot (0.80)^2 + 2(0.75 \cdot 0.80 \cdot 0.20) + 0.25 \cdot (0.80)^2 = 0.88.$$

▷ **ESERCIZIO 55**

Una perdita si verifica in un punto di una condotta idraulica rettilinea lunga $3\,Km$. Calcolare la probabilità che il punto di perdita si trovi ad una distanza non inferiore a $600\,m$ dall'inizio della condotta.

Soluzione
Dal momento che non abbiamo elementi per ritenere che alcuni punti della condotta siano più soggetti a perdita rispetto agli altri, possiamo valutare la probabilità P richiesta come rapporto tra la lunghezza della parte della condotta distante più di $600\,m$ dall'inizio e la lunghezza dell'intera condotta. Pertanto si ha:

$$P = \frac{2.4\ Km}{3\ Km} = 0.8.$$

ESERCIZIO 56
Si spara un proiettile contro un bersaglio costituito da un quadrato suddiviso in n^2 quadratini identici. Detta p_{hk} la probabilità di colpire il quadratino appartenente alla riga h–esima e alla colonna k–esima, calcolare la probabilità che il proiettile colpisca almeno una di due prefissate righe supponendo che il tiratore non manchi mai il bersaglio.

Soluzione
Nell'ipotesi dell'esercizio la probabilità p_{hk} di colpire il quadratino appartenente alla riga h–esima e alla colonna k–esima non dipende dagli indici h e k e si ha:

$$p_{hk} = \frac{1}{n^2} \qquad (h, k = 1, 2, \ \dots\ , n). \tag{1}$$

La probabilità P che il proiettile colpisca almeno una di due prefissate righe r ed s può esprimersi al seguente modo:

$$P = \sum_{k=1}^{n} p_{rk} + \sum_{j=1}^{n} p_{sj}. \tag{2}$$

Infatti la prima somma fornisce la probabilità dell'evento "viene colpito un quadratino della riga r–esima" e la seconda somma dà la probabilità dell'evento "viene colpito un quadratino della riga s–esima", dove tali eventi sono incompatibili. Facendo uso della (1) dalla (2) segue allora:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

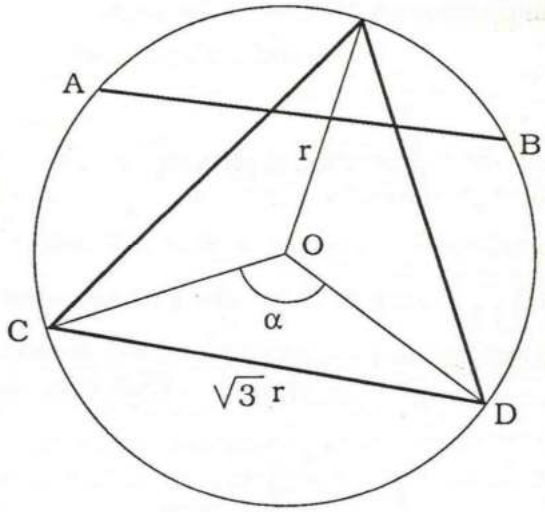
ESERCIZIO 57
Si tracci a caso una corda in un cerchio di raggio r. Si calcoli la probabilità che la sua lunghezza sia inferiore a quella del lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.

Soluzione
Ricordiamo che la lunghezza del lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è $\sqrt{3}r$. L'altezza di tale triangolo è quindi $3r/2$. La distanza di un qualsiasi lato del triangolo dal centro del cerchio è allora $r/2$. Tracciata a caso la corda AB (v. figura), si osservi che la sua distanza dal centro del cerchio varia tra 0 ed r e che risulta:

$$P\left(x \le \sqrt{3}r\right) = P(d \ge \frac{r}{2}), \tag{1}$$

dove con x si è indicata la lunghezza della corda e con d la sua distanza dal centro del cerchio. La probabilità a secondo membro della (1) è allora valutabile come rapporto tra le ampiezze degli intervalli corrispondenti agli eventi favorevoli e agli eventi possibili. Poiché dette ampiezze sono rispettivamente $r/2$ ed r, segue:

$$P\left(x \le \sqrt{3}r\right) = \frac{1}{2}.$$



Notiamo che è possibile però ragionare in un diverso modo che, paradossalmente, porta ad un diverso risultato. Precisamente, si osservi che l'angolo al centro α sotteso dalla corda varia tra 0 e π. Inoltre, quando la lunghezza di questa coincide con la lunghezza del lato del triangolo inscritto nella circonferenza si ha $\alpha = 2\pi/3$ (la terza parte dell'angolo giro). Ciò premesso, poiché α varia in $[0, \pi]$ ed i valori

ppartenenti all'intervallo $[0, 2\pi/3]$ risultano favorevoli all'evento in same, la probabilità desiderata è:

$$P\left(x \leq \sqrt{3}r\right) = \frac{2\pi/3}{\pi} = \frac{2}{3}.$$

N.B. l'esercizio appena discusso è noto quale "paradosso di Bertrand" proprio in quanto i due metodi seguiti per il calcolo della probabilità dell'evento considerato portano a risultati diversi. Questa apparente stranezza sottolinea il rischio esistente nell'estendere la definizione di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili allorché questi sono in numero non finito.

CAPITOLO III

PROBABILITA' CONDIZIONATE

▷ **ESERCIZIO 1**

In tre lanci di una moneta si verificano due teste e una croce. Calcolare la probabilità che il risultato del primo lancio è stato testa.

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi:

A : "due teste ed una croce (con un ordine qualsiasi)";

B : "una testa al primo lancio".

Dalla relazione

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

si ottiene la probabilità $P(B|A)$ richiesta. Osserviamo poi che $P(A)$ può esprimersi come rapporto tra il numero $\binom{3}{2\ 1}$ di modi in cui possono presentarsi due teste ed una croce in tre lanci ed il numero 2^3 di possibili sequenze distinte di teste e croci:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2\ 1}}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

D'altra parte, $P(A \cap B)$ è esprimibile come rapporto tra i due casi favorevoli all'occorrenza di due teste ed una croce con inizialmente testa ed il numero totale di casi che è pari ad otto:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

In definitiva si ottiene:

$$P(B|A) = \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}.$$

Alternativamente, $P(B|A)$ può ottenersi immediatamente osservando che delle tre sequenze TTC, TCT, CTT, caratterizzate da due teste ed una croce, due soltanto sono del tipo desiderato. Data l'equiprobabilità di tali sequenze segue

$$P(B|A) = \frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO 2

Da uno stesso mazzo di carte si estraggono in successione due carte senza rimpiazzamento. Si calcoli la probabilità che queste siano due carte di cuori (Nota: nel mazzo di 52 carte vi sono 13 carte di cuori).

Soluzione

Si tratta di valutare la probabilità composta $P(A \cap B)$, dove con A si è indicato l'evento "la prima carta estratta è di cuori" e con B l'evento "la seconda carta estratta è di cuori". I due eventi non sono indipendenti. Si ha allora:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{13}{52}\,\frac{12}{51} = \frac{1}{17} = 0.0588.$$

ESERCIZIO 3

In un negozio lavorano 6 impiegati e 5 operai. Tre degli impiegati sono uomini e tre degli operai sono donne. Se si sceglie un uomo a caso, qual è la probabilità che si tratti di un operaio?

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi:

U :"la persona scelta è un uomo";
O :"la persona scelta è un operaio".

L'esercizio richiede il calcolo di $P(O|U)$. Per definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(O|U) = \frac{P(U \cap O)}{P(U)}. \tag{1}$$

D'altro canto, dai dati disponibili segue che $P(U \cap O)$ può essere valutata come rapporto tra il numero di operai uomini ed il numero totale di dipendenti, mentre $P(U)$ si può determinare come rapporto tra il numero di dipendenti uomini ed il numero totale di dipendenti. Pertanto risulta:

$$P(U \cap O) = \frac{2}{11}, \qquad P(U) = \frac{3+2}{11} = \frac{5}{11}.$$

Facendo uso della (2) e della (3), dalla (1) segue:

$$P(O|U) = \frac{2/11}{5/11} = \frac{2}{5}.$$

▷ **ESERCIZIO 4**

Calcolare la probabilità che lanciando un dado il risultato sia o il numero 2, o un numero pari o un numero minore di 5.

Soluzione

Si considerino i seguenti eventi:

A : "il risultato del lancio è il numero 2";
B : "il risultato del lancio è un numero pari";
C : "il risultato del lancio è un numero minore di 5".

La probabilità richiesta è allora uguale alla probabilità di occorrenza dell'evento $A \cup B \cup C$. Poiché gli eventi A, B e C non sono a due a due incompatibili, si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Nel nostro caso si ha:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{1}{6}\,1 = \frac{1}{6};$$

$$P(A \cap C) = P(A)\,P(C|A) = \frac{1}{6}\,1 = \frac{1}{6};$$

$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C|B) = \frac{3}{6}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6}.$$

In conclusione, risulta

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Più direttamente, la probabilità $P(A \cup B \cup C)$ si può calcolare osservando che il numero di casi favorevoli all'evento $A \cup B \cup C$ è 5 (uscita di uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 6) mentre il numero di casi totali è evidentemente 6. Un terzo modo di procedere, infine, consiste nell'osservare che l'evento considerato $A \cup B \cup C$ è in realtà l'unione dei soli eventi (non disgiunti) B e C. Infatti $A \subset B$, cosicché si ha:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = B \cup C$$

e quindi:

$$P(A \cup B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

ESERCIZIO 5

Un'indagine tra 100 clienti di un supermarket indica che 60 di essi vi si sono recati a seguito di un annuncio pubblicitario mentre i rimanenti 40 ignoravano l'esistenza di tale annuncio. Dei 100 clienti, 30 hanno effettuato l'acquisto di almeno un prodotto ed hanno visto l'annuncio pubblicitario, mentre 10 hanno effettuato l'acquisto di almeno un prodotto e non hanno visto l'annuncio pubblicitario. Calcolare la probabilità che una persona effettui almeno un acquisto sapendo che non aveva visto (aveva visto) l'annuncio pubblicitario.

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi:

A : "un cliente effettua almeno un acquisto";
V : "un cliente ha visto l'annuncio pubblicitario".

Si ha evidentemente:

$$P(V) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \qquad P(\overline{V}) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5},$$
$$P(A \cap V) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \qquad P(A \cap \overline{V}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Le probabilità richieste risultano pertanto essere

$$P(A|\overline{V}) = \frac{P(A \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4},$$
$$P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}.$$

Notiamo esplicitamente che $P(A|V) + P(A|\overline{V}) \neq 1$. Invero, tali probabilità sono legate tra loro dalla formula delle alternative:

$$P(A|V)\,P(V) + P(A|\overline{V})\,P(\overline{V}) = P(A).$$

▷ **ESERCIZIO 6**

Una moneta truccata viene lanciata fino ad ottenere l'uscita di testa. Sia p la probabilità dell'evento testa. Siano A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ gli eventi "testa esce per la prima volta al k–esimo lancio". Calcolare:

a) la probabilità Q che occorrano più di 4 lanci per l'uscita di testa sapendo che il risultato del primo lancio è croce;
b) la probabilità che testa si verifichi per la prima volta al terzo lancio sotto la condizione che testa si verifica per la prima volta in corrispondenza di un numero dispari di lanci.

Soluzione

a) Denotando con A_k l'evento "testa si verifica al k–esimo lancio" $(k = 1, 2, \ldots)$, la probabilità Q può esprimersi al seguente modo:

$$Q = P\left\{ \bigcup_{k=5}^{\infty} A_k \middle| \overline{A}_1 \right\},$$

ossia come la probabilità che testa si verifica dopo il quarto lancio, condizionata dal non essersi verificato testa al primo lancio. Dalla definizione di probabilità condizionata segue poi:

$$Q = \frac{P\left\{ \left[\bigcup_{k=5}^{\infty} A_k \right] \cap \overline{A}_1 \right\}}{P(\overline{A}_1)} = \frac{P\left\{ \bigcup_{k=5}^{\infty} \left[A_k \cap \overline{A}_1 \right] \right\}}{P(\overline{A}_1)}. \tag{1}$$

Essendo gli eventi $A_k \cap \overline{A}_1$ $(k = 5, 6, \ldots)$ incompatibili, dalla (1) si ricava:

$$Q = \frac{\sum_{k=5}^{\infty} P(A_k \cap \overline{A}_1)}{P(\overline{A}_1)} = \frac{\sum_{k=5}^{\infty} P(A_k)}{P(\overline{A}_1)}. \tag{2}$$

Poiché risulta

$$P(A_k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

a (2) diventa:

$$Q = \frac{\sum_{k=5}^{\infty}(1-p)^{k-1}p}{1-p} = 1 - p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2\right].$$

b) L'evento B "testa si verifica in corrispondenza di un numero dispari di lanci" può esprimersi al seguente modo come unione di eventi incompatibili:

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}.$$

Per rispondere al quesito occorre calcolare $P(A_3|B)$. Dalla definizione di probabilità condizionata segue:

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)}{P(B)}. \tag{2}$$

Poiché, come si è detto, si ha $P(A_3) = p(1-p)^2$ e poiché risulta:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_{2k+1})$$
$$= p\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)^2\right]^k = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p},$$

dalla (2) segue infine:

$$P(A_3|B) = \frac{p\,(1-p)^2}{(2-p)^{-1}} = p\,(2-p)\,(1-p)^2.$$

ESERCIZIO 7

Un'urna contiene 10 palline bianche e 5 nere. Si estraggono 4 palline dall'urna senza rimpiazzamento; calcolare la probabilità che almeno una delle palline estratte sia nera.

Soluzione

Sia A l'evento "almeno una delle quattro palline estratte è nera" e $\overline{A}$ l'evento complementare "nessuna delle quattro palline estratte è nera". Poiché A e $\overline{A}$ sono mutuamente esclusivi e $A \cup \overline{A}$ è l'evento certo, si ha:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Denotando con B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ l'evento "il risultato della i-esima estrazione è una pallina bianca", si ha:

$$P(\overline{A}) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)$$
$$= P(B_1)\,P(B_2|B_1)\,P(B_3|B_2 \cap B_1)\,P(B_4|B_3 \cap B_2 \cap B_1)$$
$$= \frac{10}{15}\,\frac{9}{14}\,\frac{8}{13}\,\frac{7}{12} = \frac{2}{13} = 0.1538$$

e quindi:

$$P(A) = 1 - 0.1538 = 0.8462.$$

▷ **ESERCIZIO 8**

Tre numeri sono scelti a caso dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ senza rimpiazzamento. Calcolare la probabilità condizionata che il terzo numero sia compreso tra i primi due sapendo che il primo estratto è risultato minore del secondo estratto.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

E :"il terzo numero scelto è compreso tra i primi due";
A :"il primo numero scelto è minore del secondo".

La probabilità richiesta è allora $P(E|A)$. Si ha pertanto:

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)}. \tag{1}$$

Denotiamo con n_1,n_2,n_3 i numeri scelti nelle tre estrazioni senza rimpiazzamento. Si ha evidentemente:

$$P(A) \equiv P(n_1 < n_2) = \frac{n\,(n-1)/2}{n\,(n-1)} = \frac{1}{2}, \tag{2}$$

dove il denominatore rappresenta il numero totale di modi in cui si possono scegliere due numeri nell'insieme $1, 2, \ldots, n$ ed il numeratore è il

numero di casi favorevoli all'evento "$n_1 < n_2$". Si noti che, alternativamente, il risultato $P(A) \equiv P(n_1 < n_2) = 1/2$ segue anche osservando che deve aversi $P(n_1 < n_2) + P(n_1 > n_2) = 1$ e che, inoltre, proprio perché la scelta è casuale, deve aversi $P(n_1 < n_2) = P(n_1 > n_2)$. Analogamente, si ha:

$$P(E \cap A) \equiv P(n_1 < n_3 < n_2) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)/6}{n\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{1}{6}, \qquad (3)$$

dove il denominatore esprime il numero di modi in cui nell'insieme $\{1, 2 \ldots, n\}$ si possono scegliere tre numeri senza rimpiazzamento ed il numeratore fornisce il numero di casi favorevoli all'evento "$n_1 < n_3 < n_2$". Si noti che anche qui il risultato $P(n_1 < n_3 < n_2) = 1/6$ può anche ottenersi direttamente osservando che delle 6 possibili terne ordinate equiprobabili di risultati

$$\begin{array}{ll} n_1 < n_2 < n_3, & n_1 < n_3 < n_2 \\ n_2 < n_1 < n_3, & n_2 < n_3 < n_1 \\ n_3 < n_1 < n_2, & n_3 < n_2 < n_1 \end{array}$$

una soltanto si identifica con l'evento $E \cap A$. Sostituendo i valori (2) e (3) in (1) si ottiene infine:

$$P(E|A) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

▷ **ESERCIZIO 9**

Un'urna contiene 100 biglie 8 delle quali sono nere e le rimanenti bianche. Vengono scelte a caso tre biglie. Indicando con A l'evento "le tre biglie scelte sono nere" e con B l'evento "di esse due sono bianche ed una nera". Calcolare $P(A)$ e $P(B)$ sia nel caso in cui la scelta avvenga con rimpiazzamento che senza rimpiazzamento.

Soluzione

Supponiamo che l'estrazione avvenga con rimpiazzamento. In tal caso la probabilità $P(N)$ di estrazione di una biglia nera è 0.08. La probabilità $P(A)$ che tutte e tre le biglie estratte siano nere è allora

$$P(A) = (0.08)^3 = 0.0005.$$

La probabilità $P(B)$ si ottiene poi osservando che ci si trova di fronte ad un esperimento di prove ripetute in cui l'evento "uscita di biglia nera" ha probabilità di occorrenza 0.08. Si ha quindi

$$P(B) = \binom{3}{1}(0.08)^1(1-0.08)^2 = 0.2031.$$

Supponiamo che le estrazioni avvengono senza rimpiazzamento. Introduciamo i seguenti eventi:

$$N_i : \text{"la } i\text{–esima biglia estratta è nera"} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si ha evidentemente:

$$P(A) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)\,P(N_2|N_1)\,P(N_3|N_1 \cap N_2). \qquad (1)$$

Poiché risulta

$$P(N_1) = \frac{8}{100}$$

$$P(N_2|N_1) = \frac{7}{99}$$

$$P(N_3|N_1 \cap N_2) = \frac{6}{98},$$

dalla (1) segue:

$$P(A) = \frac{8}{100}\,\frac{7}{99}\,\frac{6}{98} = 0.0003.$$

Analogamente si calcola $P(B)$:

$$P(B) = P(N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3) + P(\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3) + P(\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3). \qquad (2)$$

Poiché risulta

$$P(N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3) = P(N_1)\,P(\overline{N}_2|N_1)\,P(\overline{N}_3|N_1 \cap \overline{N}_2) = \frac{8}{100}\,\frac{92}{99}\,\frac{91}{98}$$

$$P(\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3) = P(\overline{N}_1)\,P(N_2|\overline{N}_1)P(\overline{N}_3|\overline{N}_1 \cap N_2) = \frac{92}{100}\,\frac{8}{99}\,\frac{91}{98}$$

$$P(\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3) = P(\overline{N}_1)\,P(\overline{N}_2|\overline{N}_1)P(N_3|\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2) = \frac{92}{100}\,\frac{91}{99}\,\frac{8}{98},$$

dalla (2) si ottiene:

$$P(B) = 3\,\frac{8 \cdot 91 \cdot 92}{98 \cdot 99 \cdot 100} = 0.2071.$$

▷ **ESERCIZIO 10**

Sia P la probabilità che il primo giorno dell'anno sia inquinata l'acqua in una fissata zona del golfo di Napoli. Si supponga poi che siano tra loro uguali la probabilità che in un generico giorno l'acqua in quella zona sia pulita se il giorno precedente era inquinata e la probabilità che essa sia invece inquinata nello stesso giorno se il giorno precedente era pulita. Sia q il valore comune di tali probabilità. Calcolare la quantità

$$\lim_{n \to \infty} P_n,$$

dove P_n è la probabilità che, nella predetta zona, l'acqua sia inquinata nell'n–esimo giorno dell'anno.

Soluzione

Siano I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gli eventi "l'acqua è inquinata nel giorno n–esimo. Si noti che per ipotesi risulta:

$$P(\overline{I}_n | I_{n-1}) = P(I_n | \overline{I}_{n-1}) = q\,.$$

La probabilità P_n che l'acqua sia inquinata nell'n–esimo giorno può esprimersi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P(I_n) &= P(I_n \cap I_{n-1}) + P(I_n \cap \overline{I}_{n-1}) \\ &= P(I_{n-1})\, P(I_n | I_{n-1}) + P(\overline{I}_{n-1})\, P(I_n | \overline{I}_{n-1})\,, \end{aligned}$$

da cui segue:

$$P_n = P_{n-1}\,(1-q) + (1 - P_{n-1})\, q, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

con $P_1 \equiv P$. Dalla (1) per iterazione si ricavano le probabilità P_n in funzione della probabilità iniziale P:

$$\begin{aligned} P_n &= (1-2q)^{n-1} P + q \sum_{r=0}^{n-2} (1-2q)^r \\ &= (1-2q)^{n-1} P + q\, \frac{1-(1-2q)^{n-1}}{1-(1-2q)} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto:

$$P_n = (1-2q)^{n-1} P + \frac{1}{2}\,[1 - (1-2q)^{n-1}] \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Passando al limite per $n \to \infty$, dalla (2) otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}\,.$$

Si vede così che la probabilità P_n al crescere di n tende ad un valore limite $(1/2)$ che è indipendente dalla probabilità iniziale P. Alla stessa conclusione si poteva pervenire prendendo direttamente il limite per $n \to \infty$ a primo e secondo membro della (1), avendosi:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (1-q) \lim_{n\to\infty} P_{n-1} + q\,(1 - \lim_{n\to\infty} P_{n-1}). \tag{3}$$

Posto

$$\lim_{n\to\infty} P_n \equiv \lim_{n\to\infty} P_{n-1} = Q$$

dalla (3) segue:

$$Q = (1-q)\, Q + q\,(1-Q),$$

ovvero $Q = 1/2$.

▷ **ESERCIZIO 11**

Un'urna contiene 9 biglie bianche e 4 biglie nere. Calcolare la probabilità che estraendo in successione 5 biglie dall'urna almeno una di esse sia nera. 1 - tutte bianche = 1 - $\frac{\binom{9}{5}}{\binom{13}{5}}$

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

N_i :"alla i–esima estrazione si ottiene una biglia nera" $(i = 1, 2, \ldots, 5)$

A :"almeno una biglia delle 5 estratte è nera".

È evidente che l'evento A, di cui si chiede di calcolare la probabilità $P(A)$, può esprimersi come unione di eventi mutuamente esclusivi. Si ha infatti:

$$A = \bigcup_{i=1}^{2^5-1} T_i$$

dove gli eventi mutuamente esclusivi $T_1, T_2, \ldots, T_{31}$ sono ciascuno un' intersezione del tipo $\beta_1(N_1) \cap \beta_2(N_2) \cap \ldots \cap \beta_5(N_5)$, con $\beta_i(N_i)$ uguale a N_i o a $\overline{N}_i$ con la condizione che almeno uno dei $\beta_i(N_i)$ è uguale a N_i. Pertanto risulta:

$$A = (N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5) \cup \ldots \cup (\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5) \cup \ldots$$

e quindi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{31} P(T_i)\,.$$

A questo punto occorrerebbe calcolare le probabilità $P(T_i)$. Un modo più rapido per ottenere $P(A)$ consiste tuttavia nelll'osservare che risulta:

$$\overline{A} = \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5$$

così che si ha

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{1}$$

La probabilità $P(\overline{A})$ è immediatamente calcolabile, avendosi:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &\equiv P(\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5) \\ &= P(\overline{N}_1)\, P(\overline{N}_2 | \overline{N}_1)\, P(\overline{N}_3 | \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2) \\ &\quad \times P(\overline{N}_4 | \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3)\, P(\overline{N}_5 | \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4) \\ &= \frac{9}{13}\,\frac{8}{12}\,\frac{7}{11}\,\frac{6}{10}\,\frac{5}{9} = 0.0979. \end{aligned}$$

Dalla (1) segue allora:

$$P(A) = 1 - 0.0979 = 0.9021.$$

ESERCIZIO 12

Due persone, M ed N, lanciano a turno un dado. Il primo lancio è effettuato da M. Vince colui che per primo ottiene un numero pari. Si calcolino:

a) la probabilità che il gioco non abbia termine;
b) la probabilità che vinca M;
c) la probabilità che vinca N.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

A : "vittoria di M";
B : "vittoria di N";
C : "il gioco non ha termine".

Si ha evidentemente:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1. \tag{1}$$

Consideriamo ora i seguenti eventi:

D_k: "la prima uscita di un numero pari si ha al lancio k–esimo" $(k = 1, 2, \ldots)$.

Chiaramente risulta $P(D_k) = 1/2^k$. Si ha quindi

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_{2i+1}, \qquad B = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_{2i}$$

così che

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} D_{2i+1}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \frac{2}{3}, \tag{2}$$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} D_{2i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Dalla (1), facendo uso della (2) e della (3) segue infine $P(C) = 0$.

▷ **ESERCIZIO 13**

Per la partecipazione ad un concorso vengono scelte 13 famiglie ciascuna composta da padre, madre, un figlio e una figlia. Tra i 52 componenti di dette famiglie se ne scelgono 5 a caso i cui nomi sono trascritti da un notaio in ordine casuale indicando in rosso i nomi delle femmine ed in nero quelli dei maschi. Uno dei 52 partecipanti riesce ad adocchiare il primo cognome dell'elenco e scopre che si tratta proprio di quello della sua famiglia. Egli si chiede allora quanto valgano:

a) la probabilità che nell'elenco siano presenti almeno due membri della propria famiglia;
b) la probabilità che nell'elenco siano indicati almeno due membri della propria famiglia avendo rilevato che il cognome adocchiato era scritto in nero;
c) la probabilità che nell'elenco siano indicati almeno due membri della propria famiglia avendo preso atto che il nominativo letto era quello della moglie.

Soluzione

Indichiamo con N $(N = 0, 1, 2, 3, 4)$ la variabile casuale che rappresenta il numero dei componenti indicati nell'elenco appartenenti alla famiglia in considerazione.

a) Per rispondere al primo quesito occorre calcolare la probabilità condizionata $P(N \geq 2 | N \geq 1)$. Per definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(N \geq 2 | N \geq 1) = \frac{P(N \geq 2; N \geq 1)}{P(N \geq 1)} = \frac{P(N \geq 2)}{P(N \geq 1)}.$$

La probabilità $P(N \geq 2)$ può calcolarsi come rapporto n_F/n_T tra il numero

$$n_F = \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k}\binom{48}{5-k}$$

di modi in cui tra le 52 persone se ne possono scegliere 5 con la condizione che almeno 2 appartengano alla famiglia considerata, ed il numero $n_T = \binom{52}{5}$ di modi in cui possono scegliersi 5 persone tra le 52.

Analogamente si calcola la probabilità $P(N \geq 1)$ come rapporto tra il numero

$$\overline{n}_F = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k}\binom{48}{5-k} = 886\,656$$

di modi in cui tra le 52 persone se ne possono scegliere 5 con la condizione che almeno 1 appartenga alla famiglia considerata ed n_T. In definitiva si ha:

$$P(N \geq 2|N \geq 1) = \frac{n_F/n_T}{\overline{n}_F/n_T} = \frac{n_F}{\overline{n}_F} = 1 - \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4}}{\overline{n}_F}$$
$$= 1 - \frac{778\,320}{886\,656} = 0.1222.$$

b) Indichiamo con A l'evento "il cognome letto era scritto in nero". La probabilità richiesta si esprime allora come segue:

$$P(N \geq 2|N \geq 1; A) = \frac{P(N \geq 2; N \geq 1; A)}{P(N \geq 1; A)} = \frac{P(N \geq 2; A)}{P(N \geq 1; A)}. \quad (1)$$

Per calcolare $P(N \geq 2; A)$ cominciamo col calcolare il numero di modi in cui nell'ambito della famiglia si possono scegliere almeno 2 membri di cui 1 è maschio. Si ha chiaramente:

1. $\binom{2}{2}$ modi per il caso $m\ m$ (2 maschi);
2. $\binom{2}{1}\binom{2}{1}$ modi per il caso $m\ f$ (1 maschio e 1 femmina);
3. $\binom{2}{2}\binom{2}{1}$ modi per il caso $m\ m\ f$ (2 maschi e 1 femmina);
4. $\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ modi per il caso $m\ f\ f$ (1 maschio e 2 femmine);
5. $\binom{2}{2}\binom{2}{2}$ modi per il caso $m\ m\ f\ f$ (2 maschi e 2 femmine).

Conseguentemente, nei casi 1 e 2 le altre 3 persone possono scegliersi tra le rimanenti 48 in $\binom{48}{3}$ modi distinti; nei casi 3 e 4 le altre 2 persone possono scegliersi in $\binom{48}{2}$ modi distinti; nel caso 5, infine, l'altra persona può scegliersi in $\binom{48}{1}$ modi distinti. Analogamente

al caso a) $P(N \geq 2; A)$ può ora essere calcolata come rapporto tra il numero n_F di casi favorevoli ed il numero totale di casi n_T che non occorre qui esplicitare:

$$P(N \geq 2; A) = \frac{n_F}{n_T} = \frac{1}{n_T}\left[\binom{2}{2}\binom{48}{3} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{48}{3}\right.$$
$$\left. + \binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{48}{2} + \binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{48}{2} + \binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{48}{1}\right]$$
$$= \frac{91\,040}{n_T}. \quad (2)$$

In maniera perfettamente analoga si calcola $P(N \geq 1; A)$ come rapporto tra il numero $\overline{n}_F$ di possibili scelte di 5 persone con la condizione che almeno 1 sia maschio ed appartenente alla famiglia considerata ed il numero n_T di casi complessivi:

$$P(N \geq 1; A) = \frac{\overline{n}_F}{n_T}.$$

Si osservi che per calcolare $\overline{n}_F$ basta aggiungere agli n_F casi prima considerati il numero $\binom{2}{1}\binom{48}{4}$ di possibili scelte delle 5 persone con la condizione che tra esse vi sia 1 solo maschio appartenente alla famiglia considerata. Pertanto si ha:

$$P(N \geq 1; A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{48}{4} + n_F}{n_T} = \frac{2 \cdot 194\,580 + 91\,040}{n_T} \quad (3)$$
$$= \frac{480\,200}{n_T}.$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) si ottiene infine:

$$P(N \geq 2|N \geq 2; A) = \frac{\dfrac{91\,040}{n_T}}{\dfrac{480\,200}{n_T}} = 0.1896.$$

c) Indichiamo con B l'evento "il nominativo adocchiato è quello della moglie". Si ha allora:

$$P(N \geq 2|N \geq 1; B) = \frac{P(N \geq 2; N \geq 1; B)}{P(N \geq 1; B)} = \frac{P(N \geq 2; B)}{P(N \geq 1; B)}. \quad (4)$$

Ragionando in maniera analoga a quanto fatto nel caso b) è facile convincersi che si ha ora:

$$\begin{aligned} P(N \geq 2; B) = \frac{n_F}{n_T} &= \frac{1}{n_T}\left[\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{48}{3} + \binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{48}{2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{1}{1}\binom{3}{3}\binom{48}{1}\right] \\ &= \frac{1}{n_T}\left[3\binom{48}{3} + 3\binom{48}{2} + \binom{48}{1}\right] \\ &= \frac{1}{n_T}(51\,888 + 3\,384 + 48) = \frac{55\,320}{n_T}, \end{aligned} \tag{5}$$

e:

$$\begin{aligned} P(N \geq 1; B) = \frac{\overline{n}_F}{n_T} &= \frac{\binom{48}{4} + n_F}{n_T} \\ &= \frac{194\,580 + 55\,320}{n_T} = \frac{249\,900}{n_T}. \end{aligned} \tag{6}$$

In definitiva, da (4), (5) e (6) segue:

$$P(N \geq 2 | N \geq 1; B) = \frac{55\,320/n_T}{249\,900/n_T} = 0.2214.$$

ESERCIZIO 14

Si considerino tre urne; la prima contiene due biglie bianche e una nera, la seconda tre biglie bianche e una nera e la terza due biglie bianche e due nere. Si scelga a caso un'urna e da essa si estragga una biglia a caso. Calcolare la probabilità che la biglia estratta sia bianca.

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi:

H_i : "si sceglie l'urna i–esima" $(i = 1, 2, 3)$;

B : "la biglia estratta è bianca".

Dal teorema delle alternative si ha:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(H_1)\,P(B|H_1) + P(H_2)\,P(B|H_2) + P(H_3)\,P(B|H_3) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{2}{4} = \frac{23}{36}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 15

Un televisore viene assemblato utilizzando circuiti integrati di due diverse qualità alle quali corrisponde un'affidabilità, in un fissato intervallo di tempo di durata T, rispettivamente del 98% e del 75%. Il 30% dei televisori è assemblato con circuiti di qualità migliore. Preso un televisore a caso e riscontrato che esso funziona correttamente durante un intervallo T di prova, si chiede la probabilità che esso contenga circuiti della qualità migliore.

Soluzione

Definiamo i seguenti eventi:

H_1 : "il televisore contiene circuiti della qualità migliore";

H_2 : "il televisore contiene circuiti della qualità inferiore".

Dai dati del problema si ha:

$$P(H_1) = \frac{30}{100}, \quad P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{70}{100}. \tag{1}$$

Se A denota l'evento "funzionamento corretto per una durata di tempo T", vale la formula delle alternative

$$P(A) = P(A|H_1)\,P(H_1) + P(A|H_2)\,P(H_2). \tag{2}$$

Dai dati del problema si ha poi:

$$P(A|H_1) = \frac{98}{100}, \quad P(A|H_2) = \frac{75}{100}. \tag{3}$$

Sostituendo le (1) e (3) nella (2) segue allora:

$$P(A) = \frac{98}{100}\,\frac{30}{100} + \frac{75}{100}\,\frac{70}{100} = 0.819.$$

In definitiva per il teorema di Bayes si ha:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.819} = 0.3590.$$

ESERCIZIO 16

Di 120 motori funzionanti 45 sono stati costruiti in una fabbrica F_1, 39 in una fabbrica F_2 e 36 in una fabbrica F_3. Sia p_i $(i = 1, 2, 3)$ la probabilità che un motore costruito nella fabbrica F_i superi il collaudo. Calcolare la probabilità P che un motore scelto a caso tra i suddetti 120 superi il collaudo supponendo che si abbia $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.87$ e $p_3 = 0.90$.

Soluzione
Definiamo i seguenti eventi:

H_i : "il motore proviene dalla fabbrica F_i" $(i = 1, 2, 3)$.

Dai dati del problema risulta:

$$P(H_1) = \frac{45}{120}, \quad P(H_2) = \frac{39}{120}, \quad P(H_3) = \frac{36}{120}.$$

Dalla formula delle alternative

$$P = p_1\, P(H_1) + p_2\, P(H_2) + p_3\, P(H_3)$$

segue infine:

$$P = 0.95\,\frac{45}{120} + 0.87\,\frac{39}{120} + 0.90\,\frac{36}{120} = 0.909.$$

ESERCIZIO 17
Un ladro sa che in una cassetta di sicurezza sono custoditi due anelli ciascuno dei quali può essere l'esemplare originale o una copia senza valore. Si supponga che siano ciascuna uguale a 1/3 le probabilità che entrambi gli anelli siano esemplari originali, che siano entrambi copie, che siano di tipo misto. Aperta la cassetta, il ladro prende un anello e si accorge che si tratta di un falso. Qual è la probabilità che l'altro anello sia un falso?

Soluzione
Consideriamo i seguenti eventi

H_i : "la cassetta contiene i anelli falsi" $(i = 0, 1, 2)$,

F_j : "il j-esimo anello scelto è falso" $(j = 1, 2)$.

Per ipotesi si ha:

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

Dalla formula delle alternative segue allora:

$$\begin{aligned} P(F_1) &= P(H_0)\,P(F_1|H_0) + P(H_1)\,P(F_1|H_1) + P(H_2)\,P(F_2|H_2) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove si è posto evidentemente $P(F_1|H_0) = 0$. La probabilità $P(F_2|F_1)$ che anche il secondo anello sia falso è pertanto:

$$P(F_2|F_1) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} \equiv \frac{P(H_2)}{P(F_1)} = \frac{1}{3}\,2 = \frac{2}{3}.$$

▷ **ESERCIZIO 18**
Dodici apparecchi sono in funzione; di essi tre sono fabbricati nello stabilimento 1, quattro nello stabilimento 2 e cinque nello stabilimento 3. Gli apparecchi costruiti nello stabilimento 1 superano il collaudo con probabilità 0.90, quelli dello stabilimento 2 con probabilità 0.80 e quelli dello stabilimento 3 con probabilità 0.75. Determinare la probabilità che un apparecchio scelto a caso superi il collaudo.

Soluzione
Definiamo i seguenti eventi:

H_i: "l'apparecchio è stato fabbricato nello stabilimento i-esimo" $(i = 1, 2, 3)$;

A: "l'apparecchio supera il collaudo".

Per il teorema delle probabilità totali si ha:

UNIVERSITA' DI NAPOLI FEDERICO II BIBLIOTECA CENTRALE FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)\,P(H_i). \tag{1}$$

Dai dati disponibili risulta:

$$P(H_1) = \frac{3}{12}, \quad P(H_2) = \frac{4}{12}, \quad P(H_3) = \frac{5}{12},$$

$$P(A|H_1) = 0.90, \quad P(A|H_2) = 0.80, \quad P(A|H_3) = 0.75.$$

Sostituendo questi valori nella (1) si ottiene:

$$P(A) = \frac{3}{12}\,0.90 + \frac{4}{12}\,0.80 + \frac{5}{12}\,0.75 = 0.8042.$$

▷ **ESERCIZIO 19**
Un'urna A_1 contiene 5 biglie nere e 2 biglie bianche, mentre un'urna A_2 ne contiene 3 nere e 2 bianche. Se si sceglie un'urna a caso qual è la probabilità di estrarre da essa una biglia bianca?

Soluzione
Sia $P(A_i)$ la probabilità di scegliere l'urna A_i $(i = 1, 2)$. Evidentemente risulta $P(A_1) + P(A_2) = 1$. Sia B l'evento "si estre una biglia bianca". Si ha allora:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B).$$

Poiché risulta:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\, P(B|A_i) \qquad (i = 1, 2), \tag{2}$$

dalle (1) e (2) segue:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)\, P(B|A_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{12}{35} = 0.3429.$$

ESERCIZIO 20
Un'urna contiene n biglie numerate da 1 a n. Si estraggono in successione due biglie dall'urna e la prima viene rimessa nell'urna se reca il numero 1. Calcolare la probabilità che la biglia recante il numero 2 sia estratta per seconda.

Soluzione
Sia A l'evento "la biglia recante il numero 2 viene estratta per seconda" e H l'evento "la biglia recante il numero 1 viene estratta per prima". Per il teorema delle probabilità totali si ha:

$$P(A) = P(A|H)\, P(H) + P(A|\overline{H})\, P(\overline{H}), \tag{1}$$

dove $\overline{H}$ denota l'evento complementare di H, ossia l'evento "la biglia recante il numero 1 non viene estratta per prima". Poiché si ha:

$$P(H) = \frac{1}{n}, \qquad P(\overline{H}) = 1 - \frac{1}{n},$$
$$P(A|H) = \frac{1}{n}, \qquad P(A|\overline{H}) = \frac{1}{n-1},$$

dalla (1) segue:

$$P(A) = \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n^2}.$$

ESERCIZIO 21
Il risultato di un esperimento casuale è una coppia (A, B), dove A e B possono assumere ciascuno i valori 0 e 1. Nell'ipotesi che, effettuato l'esperimento, si è avuto $A = 1$, calcolare la probabilità che risulti $B = 1$ sapendo che risulta $P[(A = 1) \cap (B = 1)] = p$, $P[(A = 0) \cap (B = 0)] = q$ e che con uguali probabilità quando A e B assumono valori distinti si ha $A = 0$ ovvero $A = 1$.

Soluzione
Dalla formula delle probabilità condizionate si ha:

$$P(B = 1|A = 1) = \frac{P[(A = 1 \cap (B = 1)]}{P(A = 1)} = \frac{p}{P(A = 1)}. \tag{1}$$

D'altra parte, risulta

$$\begin{aligned} P(A = 1) &= P[(A = 1) \cap (B = 1)] + P[(A = 1) \cap (B = 0)] \\ &= p + P[(A = 1) \cap (B = 0)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Per calcolare $P[(A = 1) \cap (B = 0)]$ osserviamo che deve aversi:

$$\begin{aligned} &P[(A = 1) \cap (B = 0)] + P[(A = 0) \cap (B = 1)] \\ &\quad = 1 - \{P[(A = 0) \cap (B = 0)] + P[(A = 1) \cap (B = 1)]\} \\ &\quad = 1 - (p + q). \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi si ha poi $P[(A = 1) \cap (B = 0)] = P[(A = 0) \cap (B = 1)]$ segue:

$$P[(A = 1) \cap (B = 0)] = P[(A = 0) \cap (B = 1)] = \frac{1 - (p + q)}{2}. \tag{3}$$

Sostituendo le (3) in (2) e ricordando la (1) segue infine:

$$P(B = 1|A = 1) = \frac{p}{\dfrac{(1 + p - q)}{2}} = \frac{2p}{1 + p - q}.$$

ESERCIZIO 22
Tre stabilimenti producono apparecchi televisivi. Questi superano il collaudo con probabilità 0.90, 0.85 e 0.70 rispettivamente. Un rivenditore acquista un lotto di 20 televisori dei quali 12 sono stati prodotti nel primo stabilimento, 6 nel secondo e 2 nel terzo. Calcolare la probabilità che un televisore scelto caso in questo lotto superi il collaudo.

Soluzione
Si indichi con A l'evento "un apparecchio supera il collaudo". Sono valutabili le probabilità $P(A|S_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ di A condizionate dallo stabilimento di provenienza nonché le probabilità $P(S_i)$ $(i = 1, 2, 3)$

con cui un apparecchio del lotto acquistato proviene da ciascuno dei tre stabilimenti. Dai dati dell'esercizio risulta infatti giustificato assumere:

$$P(S_1) = \frac{12}{20}, \quad P(S_2) = \frac{6}{20}, \quad P(S_3) = \frac{2}{20}.$$

Dalla formula delle alternative segue allora:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|S_i)\, P(S_i) = 0.90\,\frac{12}{20} + 0.85\,\frac{6}{20} + 0.70\,\frac{2}{20}$$
$$= 0.865.$$

ESERCIZIO 23

L'unico biglietto vincente di una lotteria si trova in una di due urne. Siano p e $1-p$ le probabilità che esso sia stato collocato rispettivamente nella prima e nella seconda urna. Sia inoltre π, $(\pi < 1)$, la probabilità che venga estratto il biglietto vincente. Potendo effettuare k estrazioni successive (con rimpiazzamento) dalle urne, che strategia conviene seguire nella scelta delle urne in modo da rendere massima la probabilità di estrazione del biglietto vincente?

Soluzione

Introduciamo le seguenti ipotesi:

H_1 : "il biglietto vincente è nella prima urna";
H_2 : "il biglietto vincente è nella seconda urna".

Si ha per ipotesi:

$$P(H_1) = p, \quad P(H_2) = 1 - p.$$

Supponiamo di effettuare r estrazioni dalla prima urna e $k-r$ estrazioni dalla seconda urna. Considerato l'evento:

A : "estrazione del biglietto vincente",

dalla formula delle alternative segue:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) \\ &= p\, P(A|H_1) + (1-p)\, P(A|H_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Poiché risulta:

$$P(A|H_1) = 1 - P(\overline{A}|H_1) = 1 - (1-\pi)^r$$
$$P(A|H_2) = 1 - P(\overline{A}|H_2) = 1 - (1-\pi)^{k-r},$$

dalla (1) si ottiene:

$$P(A) = p\,[1 - (1-\pi)^r] + (1-p)\,[1 - (1-\pi)^{k-r}].$$

Per rendere $P(A)$ massimo, riguardiamo r come variabile continua e determiniamo il valore di r che rende nulla la derivata di $P(A)$ rispetto ad r:

$$\frac{dP(A)}{dr} = -p\,(1-\pi)^r \ln(1-\pi) + (1-p)\,(1-\pi)^{k-r} \ln(1-\pi) = 0, \tag{2}$$

da cui segue:

$$r = \frac{k}{2} + \frac{\ln[(1-p)/p]}{2\ln(1-\pi)} \equiv \overline{r}.$$

È poi facile convincersi che risulta sempre $\overline{r} > 0$. Esaminando il segno del secondo membro nella prima uguaglianza in (2), si vede che la funzione $P(A)$ è crescente per $r < \overline{r}$ ed è decrescente per $r > \overline{r}$. La strategia desiderata consiste pertanto nell'effettuare un numero ρ di estrazioni dalla prima urna e $k - \rho$ estrazioni dalla seconda urna con ρ così specificato:

$$\rho = \begin{cases} \overline{r} \equiv \dfrac{k}{2} + \dfrac{\ln[(1-p)/p]}{2\ln(1-\pi)} & \text{se } \overline{r} \text{ è intero,} \\ r_1 \quad o \quad r_2, & \text{se } \overline{r} \text{ non è intero,} \end{cases}$$

dove r_1 è il massimo intero contenuto in $\overline{r}$ e r_2 è il minimo intero contenente $\overline{r}$. Ovviamente si effettuerà la scelta di r_1 o di r_2 a seconda dei valori che ivi assume $P(A)$. Si noti che nel caso $p = 1/2$ (uguali probabilità che il biglietto vincente sia nella prima o nella seconda urna) risulta $\overline{r} = k/2$. Per $p \neq 1/2$ risulta invece maggiore il numero di estrazioni da effettuarsi dall'urna a maggiore probabilità.

▷ **ESERCIZIO 24**

Si considerino quattro urne U_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ contenenti biglie bianche, nere e rosse con le seguenti composizioni:

prima urna : 5 bianche, 4 nere, 1 rossa
seconda urna : 4 bianche, 3 nere, 6 rosse
terza urna : 1 bianca, 2 nere, 2 rosse
quarta urna : 7 bianche, 3 nere, 0 rosse.

Scelta un'urna a caso, si estrae una biglia e questa viene reinserita nell' urna a meno che non sia bianca. Il processo continua fino a quando non viene estratta una biglia bianca. Calcolare la probabilità che la biglia bianca venga estratta dall'urna i–esima ($i = 1, 2, 3, 4$).

Soluzione

Indicando con B l'evento "estrazione di biglia bianca" e con U_i ($i = 1, 2, 3, 4$) l'evento "viene scelta l'urna i–esima ", per il teorema di Bayes si ha:

$$P(U_i|B) = \frac{P(B|U_i)\,P(U_i)}{P(B)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

con

$$P(B) = P(B|U_1)\,P(U_1) + P(B|U_2)\,P(U_2) + P(B|U_3)\,P(U_3) + P(B|U_4)\,P(U_4).$$

Utilizzando i dati del problema ed assumendo che le urne vengano scelte con uguali probabilità segue allora:

$$P(B) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{10} + \frac{4}{13} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10}\right) = \frac{111}{260},$$

e quindi:

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|1)\,P(1)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{10}\,\frac{1}{4}}{\frac{111}{260}} = 0.2928\,,$$

$$P(U_2|B) = \frac{P(B|2)\,P(2)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}\,\frac{1}{4}}{\frac{111}{260}} = 0.1802\,,$$

$$P(U_3|B) = \frac{P(B|3)\,P(3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}}{\frac{111}{260}} = 0.1171\,,$$

$$P(U_4|B) = \frac{P(B|4)\,P(4)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{10}\,\frac{1}{4}}{\frac{111}{260}} = 0.4099.$$

ESERCIZIO 25

Siano U_1 e U_2 due urne contenenti b_i biglie bianche ed n_i biglie nere ($i = 1, 2$) rispettivamente. Si estraggono due biglie da U_1 senza rimpiazzamento e si pongono in U_2. Dopo il trasferimento delle due biglie

si estrae da U_2 una biglia che risulta bianca. Si definiscano i seguenti eventi:

A : "si estrae una biglia bianca da U_2 dopo il trasferimento"

$T_{1,1}$: "una biglia bianca ed una nera sono trasferite da U_1 a U_2"

$T_{2,0}$: "due biglie bianche sono trasferite da U_1 a U_2"

$T_{0,2}$: "due biglie nere sono trasferite da U_1 a U_2".

Assumendo $n_1 = 3$, $b_1 = 3$, $n_2 = 1$, $b_2 = 2$, calcolare $P(T_{1,1}|A)$, $P(T_{2,0}|A)$ e $P(T_{0,2}|A)$.

Soluzione

Dalla formula delle alternative abbiamo:

$$P(A) = P(T_{2,0})\,P(A|T_{2,0}) + P(T_{0,2})\,P(A|T_{0,2}) + P(T_{1,1})\,P(A|T_{1,1})$$

e quindi:

$$P(A) = \frac{\binom{b_1}{2}}{\binom{n_1+b_1}{2}}\,\frac{\binom{b_2+2}{1}}{\binom{n_2+b_2+2}{1}} + \frac{\binom{n_1}{2}}{\binom{n_1+b_1}{2}}\,\frac{\binom{b_2}{1}}{\binom{n_2+b_2+2}{1}} + \frac{\binom{n_1}{1}\binom{b_1}{1}}{\binom{n_1+b_1}{2}}\,\frac{\binom{b_2+1}{1}}{\binom{n_2+b_2+2}{1}}$$

$$= \frac{3}{15}\,\frac{4}{5} + \frac{3}{15}\,\frac{2}{5} + \frac{9}{15}\,\frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Le probabilità richieste seguono poi dalla formula di Bayes:

$$P(T_{1,1}|A) = \frac{P(A|T_{1,1})\,P(T_{1,1})}{P(A)} = \frac{9/25}{3/5} = \frac{3}{5},$$

$$P(T_{2,0}|A) = \frac{P(A|T_{2,0})\,P(T_{2,0})}{P(A)} = \frac{4/25}{3/5} = \frac{4}{15},$$

$$P(T_{0,2}|A) = \frac{P(A|T_{0,2})\,P(T_{0,2})}{P(A)} = \frac{2/25}{3/5} = \frac{2}{15}.$$

▷ **ESERCIZIO 26**

Da un magazzino contenente 50 lampadine nuove si preleva una lampadina. Questa risulta essere non difettosa. Assumendo che con uguali probabilità risulti non difettoso un qualsiasi numero delle 50 lampadine, si stabilisca quale ipotesi è la più probabile sul numero delle lampadine non difettose in magazzino.

Soluzione
Formuliamo le seguenti ipotesi:

H_i : "i lampadine tra le 50 non sono difettose" $(i = 0, 1, \ldots, 50)$.

Dal testo dell'esercizio risulta:

$$P(H_i) = \frac{1}{51} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 50),$$

avendosi inoltre:

$$\sum_{i=0}^{50} P(H_i) = 1.$$

Denotato con A l'evento "si preleva una lampadina non difettosa", dal teorema di Bayes segue:

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)\,P(H_k)}{P(A)}, \qquad (k = 0, 1, \cdots, 50), \qquad (1)$$

dove $P(A|H_k)$ è la probabilità dell'evento "sapendo che k lampadine sono non difettose, tale risulta quella prelevata". Dalla formula delle alternative si ha:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{50} P(A|H_i)\,P(H_i) = \frac{1}{51}\sum_{i=0}^{50}\frac{i}{50} = \frac{1}{2},$$

come del resto c'era da attendersi. Dalla (1) segue allora:

$$P(H_k|A) = \frac{\frac{k}{50}\,\frac{1}{51}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{50\cdot 51}\,k \qquad (k = 0, 1, \cdots, 50).$$

L'ipotesi più probabile è pertanto che tutte le 50 lampadine siano non difettose.

ESERCIZIO 27
Si considerino 8 urne delle quali 7 contengono 4 palle bianche e 4 palle nere mentre l'ottava contiene 10 palle bianche e 2 palle nere. Si estrae una palla bianca da un'urna scelta a caso. Qual è la probabilità che essa provenga dall'urna contenente 10 palle bianche?

Soluzione
Indichiamo con B l'evento "si estrae una palla bianca da un'urna scelta a caso" e siano U_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ le urne. Dalla formula delle alternative si ha:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{8} P(U_i)\,P(B|U_i) = 7\,\frac{1}{8}\,\frac{4}{8} + \frac{1}{8}\,\frac{10}{12} = \frac{13}{24}.$$

Per calcolare la probabilità $P(U_8|B)$ richiesta, facciamo uso della formula di Bayes:

$$P(U_8|B) = \frac{P(B|U_8)\,P(U_8)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{12}\,\frac{1}{8}}{\frac{13}{24}} = \frac{5}{26}.$$

▷ **ESERCIZIO 28**
Una scatola contiene 999 schede bianche ed 1 scheda rossa. Una seconda scatola contiene 999 schede rosse ed 1 scheda bianca. Estraendo una scheda da una delle scatole scelta a caso si riscontra che essa è bianca. Calcolare la probabilità che la scheda sia stata estratta dalla prima scatola.

Soluzione
Introduciamo i seguenti eventi:

B: "la scheda estratta è bianca";
U_i: "viene scelta la scatola i-esima " $(i = 1, 2)$.

La probabilità richiesta è $P(U_1|B)$. Questa può calcolarsi facendo uso del teorema di Bayes:

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)\,P(U_1)}{P(B|U_1)\,P(U_1) + P(B|U_2)\,P(U_2)}. \qquad (1)$$

Dai dati forniti si ha:

$$P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|U_1) = \frac{999}{1000}, \qquad P(B|U_2) = \frac{1}{1000}.$$

Sostituendo questi valori in (1) segue:

$$P(U_1|B) = \frac{0.999\cdot 0.5}{0.999\cdot 0.5 + 0.001\cdot 0.5} = 0.999.$$

▷ **ESERCIZIO 29**

Il montaggio di un'apparecchiatura è effettuato con componenti di buona qualità o con componenti di qualità mediocre. Nel primo caso la probabilità di funzionamento corretto per una durata di tempo T è di 0.95, mentre nel secondo caso è di 0.70. Il 40% delle apparecchiature contiene componenti di buona qualità. Supponendo che al collaudo un'apparecchiatura funzioni correttamente per la durata T, si calcoli la probabilità che essa sia costituita da componenti di buona qualità.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

F: "l'apparecchiatura al collaudo funziona correttamente per la durata T";

B: "l'apparecchiatura è montata con componenti di buona qualità".

La probabilità da calcolarsi è $P(B|F)$. Utilizzando il teorema di Bayes, si ha:

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)\,P(B)}{P(F|B)\,P(B) + P(F|\overline{B})P(\overline{B})}\,. \tag{1}$$

D'altro canto, risulta:

$$P(F|B) = \frac{95}{100}\,,$$
$$P(B) = \frac{40}{100}\,,$$
$$P(F|\overline{B}) = \frac{70}{100}\,,$$
$$P(\overline{B}) = \frac{60}{100}\,.$$

Sostituendo tali valori in (1) si ottiene:

$$P(B|F) = \frac{95/100 \cdot 40/100}{95/100 \cdot 40/100 + 70/100 \cdot 60/100} = 0.475.$$

▷ **ESERCIZIO 30**

In una comunità di 100 persone vi sono 70 uomini e 30 donne. Sapendo che il 60% degli uomini e il 40% delle donne fumano, calcolare la probabilità che scelta a caso una persona che sta fumando questa sia un uomo.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

U :"una persona scelta a caso risulta essere uomo";

D :"una persona scelta a caso risulta essere donna";

F :"una persona scelta a caso risulta essere fumatore ".

Dai dati forniti si ricava:

$$P(U) = \frac{70}{100}\,,\quad P(D) = \frac{30}{100}\,,\quad P(F|U) = \frac{60}{100}\,,\quad P(F|D) = \frac{40}{100}\,.$$

Facendo uso del teorema di Bayes si ottiene allora:

$$P(U|F) = \frac{P(F|U)\,P(U)}{P(F|U)\,P(U) + P(F|D)\,P(D)}$$
$$= \frac{60/100 \cdot 70/100}{60/100 \cdot 70/100 + 40/100 \cdot 30/100} = 0.7778.$$

▷ **ESERCIZIO 31**

Un messaggio viene trasmesso telegraficamente dopo essere stato codificato in successioni di punti e linee. Si supponga che a causa di disturbi lungo la linea di trasmissione con probabilità 1/10 un punto trasmesso venga ricevuto come linea e con probabilità 3/15 una linea trasmessa venga ricevuta come punto. Supponendo che il tasso di trasmissione dei punti sia quadruplo di quello delle linee, si calcolino le probabilità che il simbolo ricevuto coincida con quello trasmesso nelle ipotesi: a) che il simbolo ricevuto sia un punto e b) che il simbolo ricevuto sia una linea.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

A : "viene ricevuto un punto";

B : "viene ricevuta una linea";

H_1 : "viene trasmesso un punto";

H_2 : "viene trasmessa una linea".

Per calcolare la probabilità che un punto trasmesso venga ricevuto come tale facciamo uso della formula di Bayes:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\,P(H_1)}{P(A)}\,. \tag{1}$$

Occorre pertanto determinare le probabilità a secondo membro.

$P(H_1)$ e $P(H_2)$ sono ricavabili dalle relazioni:

$$\begin{cases} P(H_1) = 4\,P(H_2) \\ P(H_1) + P(H_2) = 1. \end{cases}$$

Si ha così:

$$P(H_1) = \frac{4}{5}, \quad P(H_2) = \frac{1}{5}. \tag{2}$$

Dai dati dell'esercizio si sa che $P(B|H_1) = 1/10$ e $P(A|H_2) = 3/15$. Pertanto abbiamo:

$$P(A|H_1) = 1 - P(B|H_1) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}, \tag{3a}$$

$$P(B|H_2) = 1 - P(A|H_2) = 1 - \frac{3}{15} = \frac{12}{15}. \tag{3b}$$

Resta da calcolare $P(A)$. Questa si ottiene dalla formula delle alternative:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) \\ &= \frac{4}{5}\,\frac{9}{10} + \frac{1}{5}\,\frac{3}{15} = \frac{57}{75}. \end{aligned} \tag{4}$$

Sostituendo in (1) i valori dati dalle (2), (3a) e (4) otteniamo infine:

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{9}{10}\,\frac{4}{15}}{\frac{57}{75}} = \frac{6}{19} = 0.3158.$$

In maniera analoga si risponde al secondo quesito. Dalla formula delle alternative abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(H_1)\,P(B|H_1) + P(H_2)\,P(B|H_2) \\ &= \frac{4}{5}\,\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\,\frac{12}{15} = \frac{6}{25}. \end{aligned} \tag{5}$$

Utilizzando di nuovo la formula di Bayes e ricordando le (2), (3b) e (5) segue:

$$P(H_2|B) = \frac{P(B|H_2)\,P(H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{15}\,\frac{1}{5}}{\frac{6}{25}} = \frac{2}{3} = 0.6667.$$

▷ **ESERCIZIO 32**

Un'urna contiene 3 biglie delle quali 2 sono nere ed 1 è bianca. Si sceglie una biglia a caso. Se essa è bianca la si rimette nell'urna aggiungendovi un'altra biglia bianca mentre se essa è nera la si ripone nell'urna aggiungendovi altre due biglie nere. Calcolare la probabilità che estraendo una seconda biglia questa sia nera. Sapendo poi che la seconda biglia estratta è nera, calcolare la probabilità che anche la prima biglia estratta era nera.

Soluzione

Indichiamo con U la composizione dell'urna originaria e con U_B e U_N, rispettivamente, le composizioni dell'urna dopo l'estrazione di una prima biglia bianca e di una prima biglia nera. Siano inoltre N_i $(i = 1, 2)$ l'evento "la i–esima biglia estratta è nera" e B_i $(i = 1, 2)$ l'evento "la i–esima biglia estratta è bianca". Il primo quesito richiede il calcolo di $P(N_2)$. Dalla formula delle alternative abbiamo:

$$P(N_2) = P(U_B)\,P(N_2|U_B) + P(U_N)\,P(N_2|U_N), \tag{1}$$

dove $P(U_B)$ e $P(U_N)$ sono le probabilità che dopo la prima estrazione l'urna originaria abbia acquisito le composizioni U_B ed U_N, rispettivamente. Queste sono quindi date da:

$$\begin{aligned} P(U_B) &\equiv P(B_1) = \frac{1}{3}, \\ P(U_N) &\equiv P(N_1) = \frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché si ha:

$$P(N_2|U_B) = \frac{1}{2}, \quad P(N_2|U_N) = \frac{4}{5}, \tag{3}$$

dalle (1), (2) e (3) segue:

$$P(N_2) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{4}{5} = 0.7. \tag{4}$$

Per rispondere al secondo quesito occorre calcolare $P(N_1|N_2)$. Dalla formula di Bayes abbiamo:

$$P(N_1|N_2) = \frac{P(N_2|N_1)\,P(N_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{4}{5}\,\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{16}{21} = 0.7619.$$

ESERCIZIO 33

In un locale pubblico entrano n persone ciascuna delle quali è maggiorenne o minorenne con uguali probabilità. Vengono individuate a caso k persone nel locale. Si calcoli la probabilità che nel locale siano presenti soltanto maggiorenni sapendo che nel campione individuato non sono presenti minorenni.

Soluzione

Consideriamo i seguenti eventi:

A : "nel locale sono presenti solo maggiorenni";
B : "nel locale è presente almeno un minorenne";
C : "k maggiorenni costituiscono il campione individuato";
D_s : "nel locale sono presenti s maggiorenni".

Siamo interessati nel calcolo della probabilità $P(A|C)$, ossia della probabilità che nel locale siano presenti solo maggiorenni sapendo che il campione individuato consiste di k maggiorenni. Poiché A e B sono eventi mutuamente esclusivi e costituiscono un sistema completo, possiamo utilizzare il teorema di Bayes nella forma:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C)}\,. \tag{1}$$

Osserviamo poi che risulta: $P(C|A) = 1$. Infatti, questa è la probabilità di estrarre un campione di k maggiorenni da una popolazione costituita da soli maggiorenni. Inoltre, la probabilità che nel locale siano presenti solo maggiorenni è data dal prodotto delle probabilità che ciascuna delle n persone nel locale sia maggiorenne. Quindi, $P(A) = 1/2^n$. Infine, esprimiamo $P(C)$ mediante il teorema delle alternative:

$$P(C) = \sum_{s=0}^{n} P(C \cap D_s) = \sum_{s=0}^{n} P(C|D_s)\,P(D_s).$$

La probabilità $P(D_s)$ può calcolarsi al seguente modo. Fissate n persone presenti nel locale, la probabilità che tra queste ve ne siano s maggiorenni ed $n-s$ minorenni è

$$P(D_s) = \binom{n}{s}\frac{1}{2^s}\,\frac{1}{2^{n-s}} = \binom{n}{s}\frac{1}{2^n}\,. \tag{3}$$

Infatti, $\frac{1}{2^s}\,\frac{1}{2^{n-s}}$ è la probabilità di avere s maggiorenni e $n-s$ minorenni in un fissato ordine (ad esempio i primi s tutti maggiorenni ed i rimanenti $n-s$ tutti minorenni) e quindi la probabilità $P(D_s)$ richiesta è data dalla somma di tutte le $\binom{n}{s}$ distinte combinazioni delle n persone in gruppi di s maggiorenni e $n-s$ minorenni. La probabilità $P(C|D_s)$ si calcola poi al seguente modo. Se vi sono s maggiorenni tra le n persone, la probabilità che il campione di k persone scelto contenga solo maggiorenni è ovviamente nulla per $k > s$, per $k \le s$ essa è invece esprimibile come prodotto della probabilità s/n che il primo elemento sia un maggiorenne, per la probabilità $(s-1)/(n-1)$ che tale sia anche il secondo elemento del campione e così via. Quindi si ha:

$$P(C|D_s) = \frac{s}{n}\,\frac{s-1}{n-1}\,\cdots\,\frac{s-k+1}{n-k+1} = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{n}{k}}\,. \tag{4}$$

Sostituendo le (3) e (4) nella (2) si ottiene:

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{s=k}^{n} P(C|D_s)\,P(D_s) = \sum_{s=k}^{n} \frac{\binom{s}{k}}{\binom{n}{k}}\binom{n}{s}\frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}\,2^n}\sum_{s=k}^{n}\binom{s}{k}\binom{n}{s} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{s=k}^{n}\frac{(n-k)!}{(s-k)!\,(n-s)!}\,. \end{aligned}$$

Cambiando l'indice di somma attraverso la posizione $s-k=j$ si ha poi:

$$P(C) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} = \frac{1}{2^n}\,(1+1)^{n-k} = \frac{1}{2^k}\,.$$

Facendo infine uso della (1) si ottiene:

$$P(A|C) = \frac{1}{2^n}\Big/\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-k}}\,.$$

ESERCIZIO 34

Due tiratori sparano un colpo ciascuno su di un bersaglio. Siano 0.9 e 0.5 le probabilità che essi colpiscano il centro del bersaglio. Calcolare la probabilità che essendo stato colpito il centro del bersaglio una sola volta dopo che ciascun tiratore ha sparando una volta, l'autore di detto centro sia il secondo tiratore.

Soluzione

Si denoti con A l'evento "il centro del bersaglio è colpito una volta sola". Introduciamo poi i seguenti eventi:

H_1 : "i due tiratori non fanno centro",

H_2 : "i due tiratori fanno centro",

H_3 : "il primo fa centro ed il secondo no",

H_4 : "il secondo fa centro ed il primo no".

Per rispondere al quesito del problema si deve valutare $P(H_4|A)$ che, per il teorema di Bayes, può esprimersi come:

$$P(H_4|A) = \frac{P(A|H_4)\,P(H_4)}{P(A|H_4)\,P(H_4) + P(A|H_3)\,P(H_3)}. \tag{1}$$

Si noti che al denominatore intervengono soltanto le ipotesi H_3 ed H_4 dal momento che H_1 ed H_2 sono incompatibili con l'evento A. Poiché si ha:

$$P(H_4) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05, \quad P(H_3) = 0.9 \cdot 0.5 = 0.45,$$

$$P(A|H_4) = 1, \quad P(A|H_3) = 1,$$

dalla (1) segue:

$$P(H_4|A) = \frac{1 \cdot 0.05}{1 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.45} = 0.1.$$

Naturalmente, con probabilità $1 - 0.1 = 0.9$ il bersaglio risulta colpito da parte dell'altro tiratore.

ESERCIZIO 35

In una università studiano matematica il 10% degli uomini iscritti e il 15% delle donne iscritte. Inoltre il 45% degli iscritti è costituito da donne. Si calcoli la probabilità che scelto a caso uno studente di matematica questo sia donna.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

U : "essere studente uomo",

D : "essere studente donna",

M : "essere studente di matematica".

Dal teorema di Bayes segue allora:

$$P(D|M) = \frac{P(M|D)\,P(D)}{P(M|D)\,P(D) + P(M|U)\,P(U)} = \frac{0.15 \cdot 0.45}{(0.15 \cdot 0.45) + (0.1 \cdot 0.55)} = 0.5510.$$

ESERCIZIO 36

Il 30% dei dipendenti di un'azienda sono laureati e di questi l'80% occupa la posizione di dirigente. Tra i non laureati il 10% occupa la posizione di dirigente. Calcolare la probabilità che scelto a caso un dirigente questo sia in possesso di laurea.

Soluzione

Consideriamo i seguenti eventi:

E_1 : "essere dirigente",

E_2 : "essere laureato".

La probabilità che interessa è $P(E_2|E_1)$. Poiché gli eventi E_2 e $\overline{E}_2$ sono ovviamente mutuamente esclusivi, è utilizzabile il teorema di Bayes:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1|E_2)\,P(E_2)}{P(E_1|E_2)\,P(E_2) + P(E_1|\overline{E}_2)\,P(\overline{E}_2)}. \tag{1}$$

Dai dati dell'esercizio si ha:

$$P(E_2) = 0.30, \quad P(\overline{E}_2) = 0.70. \tag{2}$$

Le probabilità condizionate che compaiono nella (1) possono poi immediatamente calcolarsi avendosi:

$$\begin{aligned} P(E_1|E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{24/100}{30/100} = 0.8, \\ P(E_1|\overline{E}_2) &= \frac{P(E_1 \cap \overline{E}_2)}{P(\overline{E}_2)} = \frac{7/100}{70/100} = 0.1. \end{aligned} \tag{3}$$

Sostituendo le (2) e (3) in (1) segue infine:

$$P(E_2|E_1) = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7} = 0.7742.$$

ESERCIZIO 37

In una gara di ciclismo su pista si affrontano atleti italiani e francesi. Sei atleti (3 per nazione) gareggiano in tre successive manches nella prova di velocità individuale. Ad un tifoso che arriva in ritardo un amico riferisce che almeno due atleti italiani hanno vinto le rispettive manches. Qual è la probabilità che tutte le manches siano state vinte dagli Italiani? Se al nostro tifoso viene riferito che le prime due manches sono state vinte dagli Italiani, come cambia la precedente probabilità? (Si supponga che in ogni manche con uguali probabilità possa vincere un atleta italiano o francese.)

Soluzione

Consideriamo gli eventi

$$A = \{III\}, \quad B = \{IIF, IFI, FII, III\}, \quad C = \{IIF, III\},$$

dove I ed F indicano la vittoria di un italiano e di un francese rispettivamente. Risulta evidentemente:

$$\overline{A} = \{IIF, IFI, FII, FFF, FFI, FIF, IFF\}.$$

È inoltre immediato convincersi che si ha:

$$P(B|A) = 1, \quad P(A) = 1/8, \quad P(\overline{A}) = 7/8, \quad P(B|\overline{A}) = 3/7,$$
$$P(C|A) = 1, \quad P(C|\overline{A}) = 1/7.$$

Per il teorema di Bayes si ha allora:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|\overline{A})\,P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{7}\frac{7}{8}} = \frac{1}{4},$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C|A)\,P(A) + P(C|\overline{A})\,P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{7}\frac{7}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi, il sapere che le prime due manches sono state vinte da Italiani, rende doppia la probabilità che anche la terza manche sia stata vinta da un atleta italiano.

▷ **ESERCIZIO 38**

Una lotteria mette in palio m premi abbinati ad m degli n biglietti venduti a persone distinte ($m < n$). Stabilire se la probabilità di vincita è la stessa per tutti i possessori di biglietto e se la probabilità di vincita di una persona dipenda o meno dai risultati delle estrazioni già avvenute.

Soluzione

Introduciamo i seguenti eventi:

A_k: "si ottiene un biglietto vincente alla $(k+1)$-esima estrazione" $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$;

H_{ks}: "di k biglietti estratti s risultano vincenti" $(k = 1, 2, \ldots, m;\ s = 0, 1, \ldots, k)$.

L'insieme $\{H_{ks}\}$, costituito dai $k+1$ eventi H_{ks} al variare di s tra 0 e k, costituisce un sistema completo di alternative. Le probabilità $P(H_{ks})$ possono ottenersi come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili, avendosi:

$$P(H_{ks}) = \begin{cases} \dfrac{\binom{m}{s}\binom{n-m}{k-s}}{\binom{n}{k}} & \text{se } s = 0, 1, \ldots, k, \\ 0 & \text{se } s > m. \end{cases} \tag{1}$$

Per il teorema delle probabilità totali si ha:

$$P(A_k) = \sum_{s=0}^{k} P(A_k|H_{ks})\,P(H_{ks}). \tag{2}$$

Le probabilità $P(A_k|H_{ks})$ possono facilmente calcolarsi. Infatti, l'essersi verificato l'evento H_{ks} significa che sono stati estratti k biglietti dei quali s sono risultati vincenti. Restano $n-k$ biglietti dei quali $m-s$ sono vincenti. Si ha dunque:

$$P(A_k|H_{ks}) = \frac{m-s}{n-k}. \tag{3}$$

Sostituendo le (1) e (3) nella (2) si ottiene:

$$P(A_k) = \sum_{s=0}^{k} \frac{m-s}{n-k} \frac{\binom{m}{s}\binom{n-m}{k-s}}{\binom{n}{k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \frac{m-s}{n-k} \frac{m!}{s!\,(m-s)!} \frac{k!\,(n-k)!}{n!} \binom{n-m}{k-s}$$

$$= \frac{m}{n} \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sum_{s=0}^{k} \binom{m-1}{s} \binom{n-m}{k-s}. \tag{4}$$

Facendo uso dell'identità combinatoria

$$\binom{a+b}{r} = \sum_{r=0}^{p} \binom{a}{r} \binom{b}{p-r},$$

dalla (4) segue:

$$P(A_k) = \frac{m}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

In conclusione, la probabilità che esca un biglietto vincente alla $(k+1)$-esima estrazione non dipende da k. Quindi tutti i partecipanti alla lotteria hanno la stessa probabilità di vincita che non dipende dai risultati delle estrazioni precedenti, ma dipendendo dal numero n di partecipanti e dal numero m di premi in palio.

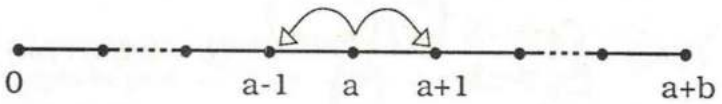
ESERCIZIO 39

Due urne di identico aspetto si trovano in una stanza. Supponiamo che vi siano a biglie nella prima e b nella seconda. Più persone entrano nella stanza e, l'una dopo l'altra, o spostano una biglia dalla prima urna alla seconda o spostano una biglia dalla seconda urna alla prima. Ciascuna di tali operazioni si suppone avvenga con probabilità $1/2$. Ciò prosegue finché una delle urne non contiene più biglie. Si calcolino:

a) la probabilità che venga vuotata la prima urna;
b) la probabilità che venga vuotata la seconda;
c) la probabilità che nessuna delle urne venga vuotata e che quindi si prosegua indefinitamente come sopra descritto.

Soluzione

Volendo rappresentare graficamente la situazione, possiamo riferirci ad un segmento di estremi 0 e $(a+b)$.



Fissiamo la nostra attenzione sulla prima urna. Per comodità possiamo identificare il numero di biglie in essa presenti con la posizione di un puntatore che, posto inizialmente nel punto di ascissa a, ad ogni operazione compiuta da chi entra nella stanza subisce uno spostamento unitario (nel senso di ascisse crescenti se nella prima urna viene aggiunta una biglia, decrescenti se da essa si estrae una biglia). La probabilità p_a che venga vuotata la prima urna è dunque uguale alla probabilità che prima o poi il puntatore raggiunga l'origine; analogamente, la probabilità q_b che venga vuotata la seconda urna coincide con la probabilità che prima o poi il puntatore occupi la posizione $a+b$. La probabilità che nessuna delle urne venga vuotata è infine data da $1 - p_a - q_b$. Per calcolare p_a ragioniamo al seguente modo. Denotiamo con p_k $(k = 0, 1, \ldots, a+b)$ la probabilità che il puntatore raggiunga (prima o poi) l'origine partendo dalla posizione di ascissa k. Si ha evidentemente

$$p_0 = 1, \qquad p_{a+b} = 0. \tag{1}$$

Si ha inoltre:

$$p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1} \qquad (1 \le k \le a+b-1), \tag{2}$$

avendo espresso la probabilità di raggiungere l'origine a partire dal punto di ascissa k come somma delle probabilità dei due seguenti eventi E_1 e E_2 mutuamente esclusivi:

E_1 : "il puntatore si sposta di un'unità a destra partendo dal punto di ascissa k e quindi raggiunge l'origine";

E_2 : "il puntatore si sposta di un'unità a sinistra partendo dal punto di ascissa k e successivamente raggiunge l'origine".

Dalla (2) segue

$$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1} \qquad (1 \le k \le a+b-1),$$

e quindi:

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1} \qquad (1 \le k \le a+b-1). \tag{3}$$

Questa relazione indica che la differenza tra due successive p_k è una costante che denoteremo con c. Dalle (3), posto $k+1 = r$ segue allora:

$$\begin{aligned} p_r - p_{r-1} &= c \\ p_{r-1} - p_{r-2} &= c \\ &\ldots \\ p_1 - p_0 &= c. \end{aligned} \qquad (1 \le r \le a+b),$$

Sommando membro a membro queste relazioni si ottiene:

$$p_r = p_0 + rc \qquad (1 \le r \le a+b)$$

ovvero, ricordando la prima delle (1):

$$p_r = 1 + rc \qquad (0 \le r \le a+b). \tag{4}$$

La costante c può determinarsi in base alla seconda delle (1):

$$0 = 1 + (a+b)c,$$

da cui segue:

$$c = -\frac{1}{a+b}. \tag{5}$$

Sostituendo (5) in (4) si ha:

$$p_r = \frac{a+b-r}{a+b} \qquad (0 \le r \le a+b). \tag{6}$$

La risposta al primo quesito si ottiene ponendo $r = a$ in (6):

$$p_a = \frac{b}{a+b}. \tag{7}$$

La risposta al secondo quesito si ottiene immediatamente osservando che la descrizione della prima urna si identifica con quella della seconda se la posizione iniziale del puntatore coincide con b, avendosi:

$$q_r \equiv p_r = \frac{a+b-r}{a+b} \qquad (0 \le r \le a+b).$$

Pertanto, ponendo $r = b$ in questa relazione segue:

$$q_b \equiv p_b = \frac{a}{a+b}. \tag{8}$$

Dalle (7) e (8) segue infine

$$1 - p_a - q_b = 0;$$

è così nulla la probabilità che nessuna delle due urne prima o poi si svuoti. Si noti che se le due urne vengono interpretate come i portafogli di due giocatori, inizialmente dotati di a e di b lire rispettivamente, ciascuno dei quali con uguali probabilità vince o perde ad ogni posta una lira a beneficio dell'altro, le risposte ai quesiti a) e b) forniscono rispettivamente le cosiddette "probabilità di rovina" del primo e del secondo giocatore. Una situazione un po' più complessa viene discussa nell'esercizio che segue.

▷ **ESERCIZIO 40**

Due giocatori A e B possiedono ciasuno 20 000 lire. Ad ogni ripetizione di un gioco d'azzardo il giocatore A perde 10 000 lire con probabilità p e vince 10 000 lire con probabilità q $(p + q = 1)$. Calcolare:

a) la probabilità che A perda il proprio capitale dopo n ripetizioni del gioco;

b) la probabilità che prima o poi A perda tutto il proprio capitale.

Discutere infine il caso particolare $p = q = 1/2$.

Soluzione

È conveniente esprimere i capitali, vincite e perdite in migliaia di lire. Con riferimento ad un asse cartesiano, possiamo rappresentare il capitale iniziale del giocatore A con il punto di ascissa 2. Dopo la prima giocata, il capitale di A o aumenta di un'unità (il che avviene con probabilità q) o diminuisce di un'unità (il che avviene con probabilità p). Nel primo caso il capitale di A sarà rappresentato dal punto di ascissa 3, nel secondo caso dal punto di ascissa 1. In maniera analoga si rappresenta il capitale di A dopo la seconda ripetizione del gioco. Evidentemente il giocatore A perde il proprio capitale (e quindi il gioco termina) allorché il punto che lo rappresenta assume ascissa uguale a 0. Introduciamo ora le seguenti probabilità:

$$f_k^{(n)} = P\{\text{che essendo inizialmente pari a } k \text{ il capitale di A, questo sia nullo dopo } n \text{ ripetizioni del gioco}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots).$$

Evidentemente si ha:

$$f_k^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \ne 0, \end{cases} \qquad f_0^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \ne 0. \end{cases} \tag{1}$$

Infatti, la probabilità che prima di iniziare il gioco il capitale di A si riduce a 0 è uguale ad 1 se e solo se il capitale di A è zero inizialmente, essendo nullo in tutti gli altri casi. Se, inoltre, inizialmente il capitale di A è nullo, il gioco non inizia e quindi è nulla la probabilità che A perda il proprio capitale in un numero di giocate maggiore di zero. Si ha evidentemente:

$$f_2^{(n)} = p\, f_1^{(n-1)} + q\, f_3^{(n-1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Infatti, il primo membro è la probabilità che, partendo da capitale 2, in n ripetizioni del gioco il capitale di A si annulli. Per il teorema delle probabilità totali, $f_2^{(n)}$ può allora esprimersi come somma delle probabilità dei due seguenti eventi mutuamente esclusivi e costituenti un sistema completo di ipotesi:

H_1 : alla prima giocata A perde (cosicché il suo capitale diviene pari ad 1) e nelle successive $n-1$ ripetizioni del gioco il capitale di A passa dal valore 1 al valore 0);

H_2 : alla prima giocata A vince (cosicché il suo capitale diviene pari ad 3) e nelle successive $n-1$ ripetizioni del gioco il capitale di A passa dal valore 3 al valore 0).

Le probabilità di questi due eventi si fattorizzano poi ciascuno come prodotti di probabilità per l'indipendenza delle giocate. Calcoliamo ora le probabilità $f_1^{(n-1)}$ e $f_3^{(n-1)}$ che compaiono a secondo membro della (1). Si noti che per $n=1$, dalle (1) e (2) segue $f_2^{(1)}=0$, come è ovvio attendersi. Per $n \geq 2$ il secondo membro delle (2) può esprimersi più convenientemente. Invero, con un ragionamento analogo a quello fatto per scrivere le (2) si ottiene:

$$\begin{aligned} f_1^{(n-1)} &= p\, f_0^{(n-2)} + q\, f_2^{(n-2)} \quad (n=2,3,\ldots) \\ f_3^{(n-1)} &= p\, f_2^{(n-2)} + q\, f_4^{(n-2)} = p\, f_2^{(n-2)} \quad (n=2,3,\ldots) \end{aligned} \tag{3}$$

dove si è notato che risulta $f_4^{(n-2)}=0$. Infatti, se il capitale di A diviene pari a 4 vuol dire che il capitale di B è diventato nullo e quindi il gioco è terminato, con la conseguente impossibilità di ulteriori variazioni del capitale di A. Facendo uso delle (3), la (2) diviene:

$$f_2^{(n)} = 2\,p\,q\, f_2^{(n-2)} + p^2\, f_0^{(n-2)} \quad (n=2,3,\ldots). \tag{4}$$

In particolare, per $n=2$ la (4) fornisce:

$$f_2^{(2)} = 2\,p\,q\, f_2^{(0)} + p^2\, f_0^{(0)} = p^2, \tag{5}$$

dove per la (1) si è posto $f_2^{(0)}=0$ e $f_0^{(0)}=1$. Consideriamo ora separatamente i casi di n dispari e di n pari.

i) n dispari. Poniamo dunque $n=2k+1$ $(k=0,1,\ldots)$. In questo caso ci si attende che risulti

$$f_2^{(2k+1)} = 0 \quad (k=0,1,\ldots). \tag{6}$$

Infatti, per il modo con cui il gioco avviene non è possibile che in un numero dispari di ripetizioni $(2k+1)$ si abbia una perdita complessiva di capitale pari a 2 unità. (Detti invero k_1 e k_2 rispettivamente il numero di vincite ed il numero di perdite nelle $2k+1$ ripetizioni del gioco dovrebbe aversi $2+k_1-k_2=0$ e simultaneamente $k_1+k_2=2k+1$. Da queste seguirebbe $k_1=(2k+1)/2-1$ e $k_2=(2k+1)/2+1$, che non sono numeri interi). In maniera più formale, il risultato (6) può ottenersi al seguente modo. Abbiamo già visto che risulta $f_2^{(1)}=0$. Riscriviamo allora la (4) per $n=2k+1$, con $k=1,2,\ldots$:

$$f_2^{(2k+1)} = 2\,p\,q\, f_2^{(2k-1)} + p^2\, f_0^{(2k-1)} \quad (k=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Ricordando la (1), dalla (7) otteniamo:

$$\begin{aligned} f_2^{(2k+1)} &= 2\,p\,q\, f_2^{(2k-1)} \\ &= 2\,p\,q\,[2\,p\,q\, f_2^{(2k-3)}] = (2\,p\,q)^2\, f_2^{(2k-3)} \\ &= \cdots \\ &= (2\,p\,q)^k\, f_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Poiché abbiamo già visto che $f_2^{(1)}=0$, dalla (8) segue la (6).

ii) n pari. Già dalla (5) sappiamo che risulta $f_2^{(2)}=p^2$ Poniamo dunque $n=2k$ $(k=2,3,\ldots)$. Dalla (4) otteniamo:

$$f_2^{(2k)} = 2\,p\,q\, f_2^{(2k-2)} + p^2\, f_0^{(2k-2)} \quad (k=2,3,\ldots)$$

ovvero, per le (1):

$$f_2^{(2k)} = 2\,p\,q\, f_2^{(2k-2)} \quad (k=2,3,\ldots). \tag{9}$$

Dalla (9), per iterazione segue:

$$\begin{aligned} f_2^{(2k)} &= 2\,p\,q\,[2\,p\,q\, f_2^{(2k-4)}] = (2\,p\,q)^2\, f_2^{(2k-4)} \\ &= \cdots \\ &= (2\,p\,q)^{k-1}\, f_2^{(2)} \\ &= (2\,p\,q)^{k-1}\, p^2 \quad (k=2,3,\ldots), \end{aligned} \tag{10}$$

dove l'ultima uguaglianza si è ottenuta facendo uso della (5). In conclusione, raccogliendo i risultati finora ottenuti possiamo affermare che la probabilità $f_2^{(n)}$ che il giocatore A perda il proprio capitale dopo n ripetizioni del gioco è data da:

$$f_2^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots, \\ p^2 (2pq)^{n/2-1} & \text{se } n = 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots. \end{cases} \tag{11}$$

La risposta al quesito a) è così completa. La risposta al quesito b) è poi immediata. Detta infatti P_r la richiesta "probabilità di rovina" del giocatore A, ricordando le (10) e (11) si ha:

$$\begin{aligned} P_r &= \sum_{n=0}^{\infty} f_2^{(n)} = \sum_{n \text{ pari}} f_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_2^{(2k)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (2pq)^{k-1} \\ &= \frac{p^2}{1-2pq}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nel caso particolare $p = q = 1/2$ dalla (11) segue:

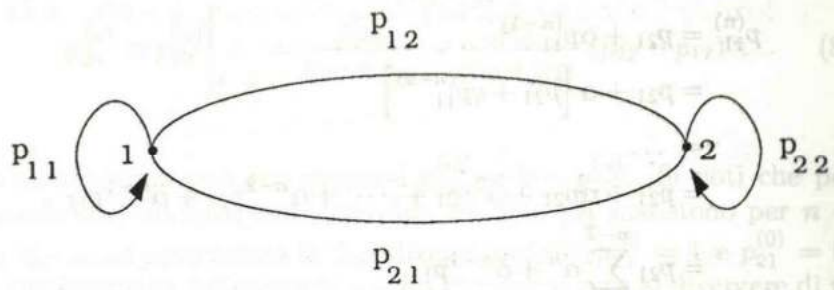
$$f_2^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2+1} & \text{se } n = 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots \end{cases}$$

mentre la probabilità di rovina (12) fornisce $P_r = 1/2$.

ESERCIZIO 41

Una particella situata nel punto 1 (v. figura) nell'unità di tempo successiva resta in 1 con probabilità p_{11} o passa in 2 con probabilità p_{12}. Se essa si trova in 2, nell'unità di tempo successiva vi rimane con probabilità p_{22} o passa in 1 con probabilità p_{21}. Calcolare la probabilità che la particella si trovi in 1 dopo n unità di tempo se a) inizialmente si trova in 1; b) inizialmente si trova in 2. Discutere infine il comportamento di queste probabilità al divergere del numero di unità di tempo.

Soluzione



Denotiamo con $p_{11}^{(n)}$ e $p_{12}^{(n)}$ le probabilità che la particella dopo n unità di tempo si trovi rispettivamente in 1 e in 2. Consideriamo una particella che inizialmente si trovi nel punto 1. Dopo $(n-1)$ unità di tempo essa potrà trovarsi in 1 o in 2 e queste due ipotesi costituiscono un sistema completo. Pertanto:

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)} p_{11} + p_{12}^{(n-1)} p_{21}. \tag{1}$$

Dalla condizione di normalizzazione

$$p_{11}^{(n-1)} + p_{12}^{(n-1)} = 1$$

segue $p_{12}^{(n-1)} = 1 - p_{11}^{(n-1)}$ che, sostituita nella equazione (1), conduce alla seguente:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= p_{11}^{(n-1)} p_{11} + \left[1 - p_{11}^{(n-1)}\right] p_{21} \\ &= p_{11}^{(n-1)} p_{11} + p_{21} - p_{11}^{(n-1)} p_{21} \\ &= p_{21} + \alpha p_{11}^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{2}$$

dove si è posto:

$$\alpha = p_{11} - p_{21}. \tag{3}$$

La relazione (2) esprime la probabilità $p_{11}^{(n)}$ che la particella dopo n unità di tempo si trovi nella posizione di partenza 1 in funzione della

probabilità che la particella dopo $n-1$ unità di tempo si trovi nella posizione iniziale. Dalla (2) per iterazione segue:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= p_{21} + \alpha p_{11}^{(n-1)} \\ &= p_{21} + \alpha \left[p_{21} + q p_{11}^{(n-2)} \right] \\ &= \dots \\ &= p_{21} + \alpha p_{21} + \alpha^2 p_{21} + \cdots + \alpha^{n-2} p_{21} + \alpha^{n-1} p_{11} \\ &= p_{21} \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^k + \alpha^{n-1} p_{11}. \end{aligned}$$

A secondo membro dell'ultima uguaglianza compare la somma dei primi $n-1$ termini di una progressione geometrica di ragione α ($\alpha < 1$). Pertanto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= p_{21} \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} + \alpha^{n-1} p_{11} \\ &= \frac{p_{21}}{1-\alpha} + \alpha^{n-1} \left(p_{11} - \frac{p_{21}}{1-\alpha} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Poiché si ha $p_{11} + p_{12} = 1$, e quindi $1 - p_{11} = p_{12}$, risulta

$$1 - \alpha \equiv 1 - p_{11} + p_{21} = p_{12} + p_{21}. \tag{5}$$

Facendo uso delle (3) e (5), dalla (4) si ha:

$$p_{11}^{(n)} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} + (p_{11}-p_{21})^{n-1} \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} (p_{11}-p_{21}),$$

ovvero:

$$p_{11}^{(n)} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} + \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} (p_{11}-p_{21})^n. \tag{6}$$

Si è così risposto al quesito a). Il calcolo di $p_{21}^{(n)}$ potrebbe effettuarsi in maniera simile al calcolo di $p_{11}^{(n)}$. È tuttavia immediato ottenere $p_{21}^{(n)}$ osservando che risulta $p_{12}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)}$ e che $p_{21}^{(n)}$ si ottiene da $p_{12}^{(n)}$ scambiando i ruoli dei punti 1 e 2, ossia scambiando gli indici 1 con 2 e 2 con 1 nelle probabilità p_{ij} ($i, j = 1, 2$). Più dettagliatamente, ricordando la (6), si ha:

$$p_{12}^{(n)} \equiv 1 - p_{11}^{(n)} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} (p_{11}-p_{21})^n. \tag{7}$$

Scambiando gli indici come prima detto, segue infine:

$$p_{21}^{(n)} \equiv p_{12}^{(n)} \Big|_{\substack{1\to 2 \\ 2\to 1}} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} - \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} (p_{22}-p_{12})^n. \tag{8}$$

Da quest'ultima può poi ricavarsi $p_{22}^{(n)} = 1 - p_{21}^{(n)}$. Si noti che per il modo con cui sono state ricavate, le (6) e (8) sussistono per $n = 0, 1, 2, \dots$ e contengono le "condizioni iniziali" $p_{11}^{(0)} = 1$ e $p_{21}^{(0)} = 0$. Poiché inoltre la differenza $(p_{11} - p_{21})^n$ tende a zero al divergere di n, dalle (6) e (8) segue:

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}.$$

Ciò esprime la circostanza che al crescere di n diminuisce la "memoria" del sistema, ossia la dipendenza delle probabilità $p_{12}^{(n)}$ e $p_{21}^{(n)}$ (e analogamente anche di $p_{11}^{(n)}$ e $p_{22}^{(n)}$) dal punto di partenza della particella per svanire del tutto al limite in cui $n \to \infty$. In altri termini, al crescere indefinito del tempo il sistema considerato tende ad una situazione di equilibrio nella quale le probabilità $p_{12}^{(\infty)}$, $p_{22}^{(\infty)}$, $p_{21}^{(\infty)}$ e $p_{11}^{(\infty)}$ di occupazione dei punti 2 ed 1 sono indipendenti dalla posizione inizialmente occupata dalla particella, avendosi:

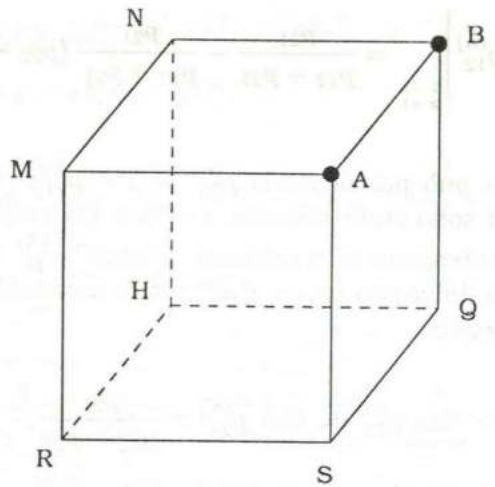
$$p_{12}^{(\infty)} = p_{21}^{(\infty)} = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}},$$
$$p_{11}^{(\infty)} = p_{22}^{(\infty)} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}.$$

▷ **ESERCIZIO 42**

Un bruco si muove lungo gli spigoli di un cubo (v. figura). Allorché raggiunge un vertice, con uguali probabilità, prosegue lungo uno qualsiasi degli spigoli che vi convergono. I vertici A e B sono intrisi di colla. Supponendo che il bruco inizi a muoversi a partire dal vertice R, si calcolino:

a) la probabilità che resti appiccicato nel vertice A;
b) la probabilità che resti appiccicato nel vertice B.

Soluzione



Denotiamo con $P(R \to A)$ la probabilità della transizione $R \to A$, ossia la probabilità che partendo da R il bruco prima o poi pervenga al vertice A; questa è la richiesta probabilità che il bruco resti appiccicato nel vertice A. Con riferimento alla figura, osserviamo che la transizione $R \to A$ può decomporsi nell'unione delle tre seguenti transizioni incompatibili ed esaustive: $R \xrightarrow{(1)} M \to A$ (partendo da R il bruco visita anzitutto il vertice M e poi da M raggiunge A), $R \xrightarrow{(1)} S \to A$ (partendo da R il bruco visita anzitutto il vertice S e poi da S raggiunge A) e $R \xrightarrow{(1)} H \to A$ (partendo da R il bruco visita anzitutto il vertice H e poi da H raggiunge A), dove ad esempio con $R \xrightarrow{(1)} M$ si intende che il vertice M è il primo vertice visitato dal bruco a partire dal vertice R. In altri termini si ha:

$$R \to A = \left(R \xrightarrow{(1)} M \to A\right) \cup \left(R \xrightarrow{(1)} S \to A\right) \cup \left(R \xrightarrow{(1)} H \to A\right)$$

e quindi, passando alle probabilità:

$$P(R \to A) = P\left(R \xrightarrow{(1)} M \to A\right) + P\left(R \xrightarrow{(1)} S \to A\right) + P\left(R \xrightarrow{(1)} H \to A\right).$$

Osserviamo poi che risulta:

$$P\left(R \xrightarrow{(1)} M \to A\right) = P\left(R \xrightarrow{(1)} M\right) P(M \to A) \equiv \frac{1}{3} P(M \to A),$$

$$P\left(R \xrightarrow{(1)} S \to A\right) = P\left(R \xrightarrow{(1)} S\right) P(S \to A) \equiv \frac{1}{3} P(S \to A),$$

$$P\left(R \xrightarrow{(1)} H \to A\right) = P\left(R \xrightarrow{(1)} H\right) P(H \to A) \equiv \frac{1}{3} P(H \to A).$$

Pertanto otteniamo:

$$P(R \to A) = \frac{1}{3} P(M \to A) + \frac{1}{3} P(S \to A) + \frac{1}{3} P(H \to A). \tag{1}$$

Poiché ci troviamo di fronte ad un'unica equazione nelle 4 incognite $P(R \to A)$, $P(M \to A)$, $P(S \to A)$ e $P(H \to A)$, per determinare univocamente la risposta al quesito a) occorre ricavare altre tre equazioni. Con un ragionamento analogo al precedente, otteniamo così

$$\begin{aligned} P(M \to A) &= \frac{1}{3} P(R \to A) + \frac{1}{3} P(N \to A) + \frac{1}{3} P(A \to A) \\ P(N \to A) &= \frac{1}{3} P(M \to A) + \frac{1}{3} P(B \to A) + \frac{1}{3} P(H \to A) \\ P(H \to A) &= \frac{1}{3} P(R \to A) + \frac{1}{3} P(N \to A) + \frac{1}{3} P(Q \to A). \end{aligned} \tag{2}$$

Osservando ancora che risulta:

$$\begin{aligned} P(A \to A) = 1, \qquad & P(B \to A) = 0, \\ P(M \to A) = P(S \to A), \qquad & P(Q \to A) = P(N \to A), \end{aligned} \tag{3}$$

il sistema delle (1) e (2) diviene:

$$\begin{aligned} P(R \to A) &= \frac{2}{3} P(M \to A) + \frac{1}{3} P(H \to A) \\ P(M \to A) &= \frac{1}{3} P(R \to A) + \frac{1}{3} P(N \to A) + \frac{1}{3} \\ P(N \to A) &= \frac{1}{3} P(M \to A) + \frac{1}{3} P(H \to A) \\ P(H \to A) &= \frac{1}{3} P(R \to A) + \frac{2}{3} P(N \to A). \end{aligned} \tag{4}$$

Questo è un sistema di quattro equazioni in quattro incognite. Risolvendolo ad esempio mediante la regola di Kramer o, più convenientemente, triangolarizzando la matrice dei coefficienti, otteniamo:

$$\begin{aligned} P(R \to A) &= \frac{4}{7}, \qquad P(M \to A) = \frac{9}{14}, \\ P(N \to A) &= \frac{5}{14}, \qquad P(H \to A) = \frac{3}{7}. \end{aligned} \tag{5}$$

La probabilità $P(R \to A)$ che il bruco resti appiccicato in A partendo da R è dunque uguale a $4/7$. Per rispondere al secondo quesito ragioniamo in modo analogo ottenendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} P(R \to B) &= \frac{1}{3} P(M \to B) + \frac{1}{3} P(S \to B) + \frac{1}{3} P(H \to B) \\ P(M \to B) &= \frac{1}{3} P(R \to B) + \frac{1}{3} P(N \to B) + \frac{1}{3} P(A \to B) \\ P(N \to B) &= \frac{1}{3} P(M \to B) + \frac{1}{3} P(B \to B) + \frac{1}{3} P(H \to B) \\ P(H \to B) &= \frac{1}{3} P(R \to B) + \frac{1}{3} P(N \to B) + \frac{1}{3} P(Q \to B). \end{aligned} \tag{6}$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} &P(Q \to B) = P(N \to B), \quad P(S \to B) = P(M \to B), \\ &P(B \to B) = 1, \quad P(A \to B) = 0, \quad P(M \to B) = P(H \to B) \end{aligned} \tag{7}$$

dalle (6) e (7) si ha:

$$\begin{aligned} P(R \to B) &= \frac{2}{3} P(M \to B) + \frac{1}{3} P(H \to B) \\ P(M \to B) &= \frac{1}{3} P(R \to B) + \frac{1}{3} P(N \to B) \\ P(N \to B) &= \frac{1}{3} P(M \to B) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} P(H \to B) \\ P(H \to B) &= \frac{1}{3} P(R \to B) + \frac{2}{3} P(N \to B). \end{aligned} \tag{8}$$

Si noti che questo sistema si identifica con il sistema (4) pur di effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} P(H \to B) &\to P(R \to A) \\ P(N \to B) &\to P(M \to A) \\ P(M \to B) &\to P(N \to A) \\ P(R \to B) &\to P(H \to A). \end{aligned} \tag{9}$$

Dalla (5) e dalla (9) segue allora:

$$\begin{aligned} P(H \to B) &= \frac{4}{7} \qquad P(N \to B) = \frac{9}{14} \\ P(M \to B) &= \frac{5}{14} \qquad P(R \to B) = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

La probabilità $P(R \to B)$ che il bruco resti appiccicato in B partendo da R è dunque pari a $3/7$. Si noti che risulta:

$$P(R \to A) + P(R \to B) = 1.$$

In altri termini, con certezza il bruco resterà appiccicato in uno dei due vertici A o B; alternativamente, si può affermare che è nulla la probabilità che il bruco erri indefinitamente lungo gli spigoli del cubo senza transitare mai per A o per B.

CAPITOLO IV

VARIABILI CASUALI DISCRETE

▷ **ESERCIZIO 1**

Una variabile casuale discreta X ha distribuzione di probabilità

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{14} & \text{se } x = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Costruire il grafico della sua funzione di distribuzione.

Soluzione

Sia $F_X(x)$ la funzione di distribuzione di X:

$$F_X(x) \equiv P\{X \leq x\} = \sum_{t \leq x} P_X(t). \tag{1}$$

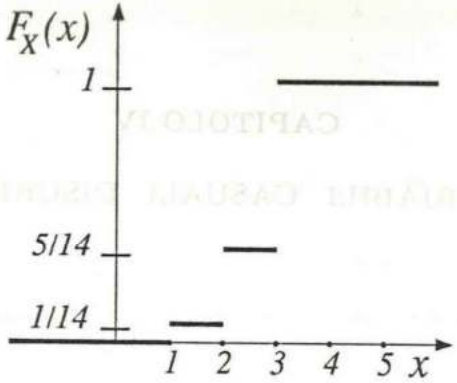
Dai dati del problema si ha:

$$P_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 1, 2, 3, \\ 1/14 & \text{se } t = 1, \\ 4/14 & \text{se } t = 2, \\ 9/14 & \text{se } t = 3. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla (1) e dalla (2) segue allora:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ 1/14 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 5/14 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Il grafico di $F_X(x)$ è riportato in figura.



ESERCIZIO 2

La distribuzione di probabilità $P_X(x)$ di una variabile casuale X è così definita:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = 2, 3, 4, 5, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

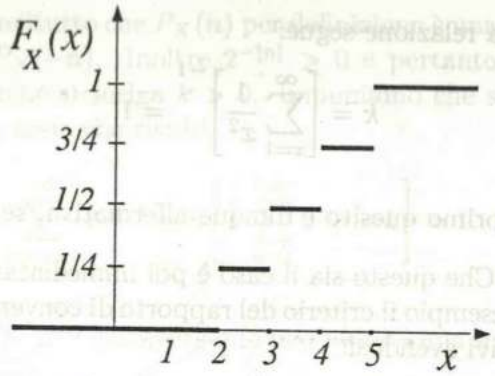
Determinare la funzione di distribuzione $F_X(x)$ di X e costruirne il grafico.

Soluzione

La funzione di distribuzione è definita come $F_X(x) = \sum_{t \le x} P_X(t)$. In questo caso si ha evidentemente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2, \\ 1/4 & \text{se } 2 \le x < 3, \\ 1/2 & \text{se } 3 \le x < 4, \\ 3/4 & \text{se } 4 \le x < 5, \\ 1 & \text{se } x \ge 5. \end{cases}$$

Il grafico di $F_X(x)$ è quindi quello riportato in figura.



▷ **ESERCIZIO 3**

Mediante un fattore moltiplicativo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{se } x \ne 1, 2, \ldots \end{cases}$$

può convertirsi nella distribuzione di probabilità $P_X(x)$ di una variabile casuale i cui valori sono gli interi positivi? In caso affermativo determinare detto fattore moltiplicativo e specificare quindi $P_X(x)$.

Soluzione

Detto k il fattore moltiplicativo (che deve essere positivo dovendo ottenersi una distribuzione di probabilità) deve aversi:

$$P_X(x) = k\, f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{se } x = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{se } x \ne 1, 2, \ldots \end{cases}$$

poiché $P_X(x)$ deve essere una distribuzione di probabilità, deve aversi:

$$\sum_x P_X(x) = 1,$$

ossia:

$$\sum_x k f(x) \equiv \sum_{x=1}^{\infty} \frac{k}{x^2} = 1.$$

Da quest'ultima relazione segue:

$$k = \left[\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\right]^{-1} = 1.$$

La risposta al primo quesito è dunque affermativa, se la serie $\sum_{x=1}^{\infty} x^{-2}$ è convergente. Che questo sia il caso è poi immediatamente verificato applicando ad esempio il criterio del rapporto di convergenza delle serie a termini positivi avendosi:

$$\frac{1}{(x+1)^2} \Big/ \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{x}{x+1}\,\frac{x+1}{x+1} < 1.$$

Poiché è infine noto che

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

possiamo scrivere:

$$k = \frac{6}{\pi^2}$$

e quindi:

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\pi^2 x^2} & \text{se } x = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{se } x \neq 1, 2, \ldots \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 4**

Si determini per quale valore di k la funzione

$$P_X(n) = k\, 2^{-|n|} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

può interpretarsi come distribuzione di probabilità di una variabile casuale X. Si calcoli poi $P\{-2 \leq X \leq 2\}$.

Soluzione

Affinché la $P_X(n)$ possa essere la distribuzione di probabilità della variabile casuale X che assume valori $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, devono essere verificati gli assiomi

1) $P_X(n) \geq 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_X(n) = 1$

3) $P_X(n) \leq 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Osserviamo innanzitutto che $P_X(n)$ per definizione è una funzione pari, ossia $P_X(n) = P_X(-n)$. Inoltre $2^{-|n|} > 0$ e pertanto tale risulterà anche $P_X(n)$ purché si scelga $k > 0$. Imponiamo che sia verificato il secondo assioma, ossia che risulti:

$$k \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} = k\left[2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + 1\right] = 1. \tag{1}$$

Osserviamo che $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ è convergente in quanto è una serie geometrica di ragione $1/2$. Pertanto risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1. \tag{2}$$

Da (1) e (2) segue allora:

$$k = \left[2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + 1\right]^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Si ha quindi:

$$P_X(n) = \frac{1}{3}\, 2^{-|n|} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Si noti che anche il terzo assioma è soddisfatto. Facendo uso della (3) segue infine:

$$P\{-2 \leq X \leq 2\} \equiv \sum_{n=-2}^{2} P_X(n) = \frac{1}{3}\sum_{n=-2}^{2} 2^{-|n|}$$
$$= \frac{1}{3}\left(2\sum_{n=1}^{2} 2^{-n} + 1\right) = \frac{5}{6}.$$

▷ **ESERCIZIO 5**

Stabilire per quali valori di k la funzione

$$f(x) = (1 - k)\, k^x \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

potrebbe essere utilizzata quale distribuzione di probabilità.

Soluzione
Imponiamo innanzitutto che $f(x)$ sia normalizzata:

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} k^x(1-k) = (1-k)\sum_{x=0}^{\infty} k^x$$
$$= (1-k)\,\frac{1}{1-k} = 1, \qquad |k| < 1.$$

La condizione di normalizzazione è dunque soddisfatta se e solo se risulta $|k| < 1$. Dovendo ulteriormente imporre che $f(x)$ assuma valori non negativi e minori dell'unità dovrà risultare $0 < k < 1$. In conclusione $f(x)$ è una distribuzione di probabilità per qualunque valore di k positivo e minore di 1.

ESERCIZIO 6
Il 5% delle lampadine prodotte da una fabbrica risultano difettose. Le lampadine sono vendute all'ingrosso in confezioni di 20 ciascuna. Calcolare:

a) la probabilità che le lampadine di una confezione siano tutte non difettose;
b) la probabilità che sia uguale a 2 il numero di confezioni contenenti lampadine non difettose fra tre confenzioni di lampadine scelte a caso.

Soluzione
Questo può essere riguardato come un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo costante $\vartheta = 0.05$. La distribuzione di probabilità della variabile casuale che rappresenta il numero di lampadine difettose è binomiale con parametri $\vartheta = 0.05$ ed $n = 20$.

a) La probabilità p che una confezione non contenga lampadine difettose è quella di avere zero successi in n prove:

$$p = \binom{20}{0}(0.05)^0(0.95)^{20} = 0.3585.$$

b) L'evento di cui occorre calcolare la probabilità può essere riguardato come prodotto di tre eventi indipendenti A_1, A_2 e A_3, in cui A_i $(i = 1, 2, 3)$ è l'evento "la i-esima confezione scelta non contiene lampadine difettose". La probabilità q richiesta è allora data dal prodotto:

$$q = p^2(1-p) = (0.3585)^2\,(1-0.3585) = 0.0824.$$

ESERCIZIO 7
In un test di resistenza un dispositivo meccanico viene attivato successivamente finché si guasta. Sia 10^{-3} la probabilità (costante) che il dispositivo si guasti ad ogni attivazione. Calcolare la probabilità che il dispositivo funzioni correttamente durante le prime 700 prove di funzionamento.

Soluzione
Si tratta di un esperimento di prove ripetute con $n = 700$ e probabilità di successo $\vartheta = 10^{-3}$ costante. Pertanto la probabilità richiesta coincide con la probabilità $b(700, 0; 10^{-3})$ che non si abbia alcun successo nelle prime 700 iterazioni della prova. Pertanto:

$$b(700, 0; 10^{-3}) = \binom{700}{0}(10^{-3})^0(1-10^{-3})^{700} = \left(\frac{999}{1000}\right)^{700} = 0.4964.$$

ESERCIZIO 8
Si supponga che l'1% dei neonati di una città sia affetto da una certa disfunzione. Calcolare la probabilità che almeno 4 neonati dei 3000 che nascono annualmente siano portatori della disfunzione.

Soluzione
Siamo in presenza di un esperimento di prove ripetute in condizioni di probabilità di successo costante. Se si indica con X la variabile casuale che conta il numero di neonati affetti dalla disfunzione sull'insieme di n neonati, essa ha la distribuzione binomiale p_n $(n = 0, 1, \ldots, 3000)$ con parametri $n = 3000$, $\vartheta = 10^{-3}$. Pertanto si ha:

$$p_0 = \binom{3000}{0}\left(\frac{1}{1000}\right)^0\left(\frac{999}{1000}\right)^{3000} = 0.0497;$$
$$p_1 = \binom{3000}{1}\left(\frac{1}{1000}\right)\left(\frac{999}{1000}\right)^{2999} = 0.1493;$$
$$p_2 = \binom{3000}{2}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\left(\frac{999}{1000}\right)^{2998} = 0.4481;$$
$$p_3 = \binom{3000}{3}\left(\frac{1}{1000}\right)^3\left(\frac{999}{1000}\right)^{2997} = 0.2243.$$

La probabilità p richiesta può ora calcolarsi al seguente modo:

$$p = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 1 - 0.8714 = 0.1286.$$

▷ **ESERCIZIO 9**

Un giardino è infestato da una popolazione di 50 parassiti. Viene effettuato un trattamento antiparassitario tale che con probabilità 0.95 viene eliminato un parassita. Si stabilisca qual è la distribuzione del numero di parassiti sopravvissuti e si valuti la probabilità p che almeno 48 parassiti siano eliminati.

Soluzione

La situazione può essere descritta come esperimento di prove ripetute in cui resta costante, ad ogni prova, la probabilità di successo. La distribuzione della variabile casuale X, numero di parassiti eliminati, è pertanto quella binomiale con probabilità di successo $\vartheta = 0.95$ ed $n = 50$, mentre la distribuzione della variabile casuale che denota il numero di parassiti sopravvissuti è ancora binomiale ma con parametri $\vartheta' = 1 - \vartheta = 0.05$ e $n = 50$. La probabilità p di ottenere almeno 48 successi nelle 50 prove per la variabile X è allora:

$$p = \sum_{k=48}^{50} \binom{50}{k} (0.95)^k (0.05)^{50-k} = 0.5405.$$

▷ **ESERCIZIO 10**

Un revisore viene assunto per ispezionare i documenti contabili di una società. In luogo di esaminarli tutti egli ne prende in considerazione un campione casuale pari al 20% del numero totale di documenti. Si supponga che quest'ultimo sia 100 e che almeno un errore sia presente in 15 di essi. Denotando con X la variabile casuale rappresentante il numero di documenti con errori tra quelli costituenti il campione casuale, si determini:

a) la distribuzione di probabilità di X;

b) la probabilità che 5 documenti del campione siano in errore.

Soluzione

Poiché il numero totale di documenti è 100, il revisore esaminerà 20 documenti in tutto. Assumiamo, per quanto specificato sopra, che la probabilità ϑ di aver almeno un errore in un documento sia $\vartheta = 15/100 = 0.15$.

a) Ci si trova di fronte ad un esperimento di prove ripetute con probabilità costante nelle singole prove. Pertanto la distribuzione della variabile casuale X è quella binomiale con parametri $n = 20$ e $\vartheta = 0.15$.

b) La probabilità p di ottenere 5 successi (ossia documenti contenenti almeno un errore) sui 20 scelti è dunque:

$$p = \binom{20}{5} (0.15)^5 (1 - 0.15)^{15} = 15\,504 \cdot 0.0001 \cdot 0.0874 = 0.1354.$$

▷ **ESERCIZIO 11**

Un test consiste di 12 quesiti per ciascuno dei quali vengono fornite 4 possibili risposte di cui una soltanto è corretta. Si supponga di individuare le risposte con la seguente procedura: per ciascun quesito si estrae una carta da un mazzo di 52 carte da gioco ben mescolate e si scelgono rispettivamente la prima, la seconda, la terza o la quarta risposta a seconda che la carta estratta sia cuori, picche, quadri o fiori. Si calcoli la probabilità che con tale procedura si ottengano almeno 7 risposte esatte.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo costante ed uguale ad 1/4. La distribuzione di probabilità della variabile casuale X, numero di risposte esatte, è binomiale con parametri $n = 12$ e $\vartheta = 1/4$. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= 1 - P(X < 7) = 1 - \sum_{r=0}^{6} P(X = r) \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{6} \binom{12}{r} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{12-r}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} &P(X = 0) = 0.0317, \quad P(X = 1) = 0.1267, \quad P(X = 2) = 0.2323, \\ &P(X = 3) = 0.2581, \quad P(X = 4) = 0.1936, \quad P(X = 5) = 0.1032, \\ &P(X = 6) = 0.0401, \end{aligned}$$

otteniamo:

$$P(X \geq 7) = 1 - 0.9857 = 0.0143.$$

▷ **ESERCIZIO 12**

Si osserva che dopo la somministrazione di un farmaco il 60% dei pazienti di un ospedale manifesta miglioramenti nel giro di 24 ore. Si calcoli la probabilità che 5 di 15 pazienti esaminati manifestino detti miglioramenti.

Soluzione
Il numero dei pazienti che manifestano miglioramenti dopo la somministrazione del farmaco è una variabile casuale binomiale con probabilità di successo $\vartheta = 0.6$. La probabilità richiesta è dunque:

$$b(15,5;0.6) = \binom{15}{5}(0.6)^5(0.4)^{10} = 3\,003 \cdot 0.0778 \cdot 0.0001$$
$$= 0.0245.$$

▷ **ESERCIZIO 13**
Una variabile casuale X è distribuita binomialmente con valor medio $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 3/2$. Calcolare la probabilità che X assuma un valore compreso nell'intervallo $[3,5]$, estremi inclusi.

Soluzione
Ricordiamo che per la distribuzione binomiale media e varianza sono rispettivamente dati da

$$\begin{aligned} \mu &= n\,\vartheta \\ \sigma^2 &= n\,\vartheta\,(1-\vartheta) \end{aligned} \tag{1}$$

dove n denota il numero delle prove e ϑ la probabilità di successo nelle singole prove. Nel nostro caso sono noti μ e σ^2 mentre non lo sono ϑ e n. Tuttavia, ϑ e n si ottengono immediatamente dalle (1) ponendovi $\mu = 2$ e $\sigma^2 = 3/2$. Si trova così:

$$\vartheta = \frac{1}{4}, \qquad n = 8.$$

La probabilità richiesta è ora immediatamente calcolabile:

$$\begin{aligned} P(3 \le X \le 5) &= \sum_{x=3}^{5} \binom{8}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{8-x} \\ &= 0.2076 + 0.0865 + 0.0231 \\ &= 0.3172. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 14**
Si determini il valore del parametro che massimizza la distribuzione di probabilità caratterizzante un esperimento di prove ripetute di tipo binomiale.

Soluzione
La distribuzione di probabilità di una variabile casuale binomiale è:

$$b(n,x;\vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Questa, riguardata come funzione di ϑ, può essere massimizzata. Per determinare il punto di massimo basterà individuare gli zeri della derivata prima rispetto a ϑ e determinare in quali di essa la derivata seconda risulta negativa. Calcoliamo la derivata di b rispetto a ϑ:

$$\begin{aligned} \frac{d\,b(n,x;\vartheta)}{d\vartheta} &= \binom{n}{x}\left[x\,\vartheta^{x-1}(1-\vartheta)^{n-x} - \vartheta^x\,(n-x)\,(1-\vartheta)^{n-x-1}\right] \\ &= \binom{n}{x}\left[(1-\vartheta)^{n-x-1}\,\vartheta^{x-1}(x-n\vartheta)\right] \end{aligned}$$

che si annulla nei punti $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0$ e $\vartheta_3 = x/n$. Calcoliamo ora la derivata seconda di b rispetto a ϑ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\,b}{d\vartheta^2} &= \frac{d}{d\vartheta}\left[\binom{n}{x}(1-\vartheta)^{n-x-1}\,\vartheta^{x-1}(x-n\vartheta)\right] \\ &= \binom{n}{x}\Big[-(n-x-1)\,(1-\vartheta)^{n-x-2}\,\vartheta^{x-1}(x-n\vartheta) \\ &\quad + (1-\vartheta)^{n-x-1}(x-1)\,\vartheta^{x-2}(x-n\vartheta) - n\,(1-\vartheta)^{n-x-1}\vartheta^{x-1}\Big] \\ &= \binom{n}{x}(1-\vartheta)^{n-x-2}\,\vartheta^{x-2}\Big[-(n-x-1)\,\vartheta\,(x-n\vartheta) \\ &\quad + (1-\vartheta)\,(x-1)\,(x-n\vartheta) - n\,\vartheta\,(1-\vartheta)\Big]. \end{aligned}$$

Si vede poi facilmente che tale derivata seconda si annulla in ϑ_1 e ϑ_2, mentre risulta $\left.\dfrac{d^2\,b(n,x;\vartheta)}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_3} < 0$. Quindi il punto di massimo ricercato è $\vartheta_3 = x/n$, ossia coincide con la frequenza del numero di successi nelle n prove.

▷ **ESERCIZIO 15**
Valutare la probabilità P che in un esperimento di un gran numero di prove ripetute non si verifichi mai un evento la cui probabilità di occorrenza ad ogni prova è l'inverso del numero di prove. Calcolare poi la probabilità Q che detto evento si verifichi almeno una volta.

Soluzione

Questo è un esperimento di prove ripetute nel quale la probabilità di successo non è costante ad ogni prova, essendo data da $\vartheta_n = 1/n$ all'n–esima prova ($n = 1, 2, \ldots$). Si ha allora:

$$P = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

dove n denota il numero di prove effettuate. Al tendere di n all'infinito si ha quindi:

$$\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

È pertanto possibile affermare che se il numero di prove è molto grande è lecita l'approssimazione (indipendente da n) $P \simeq e^{-1} = 0.3679$. La probabilità Q si ottiene immediatamente, avendosi:

$$Q = 1 - P = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \simeq 1 - e^{-1} = 0.6321.$$

▷ **ESERCIZIO 16**

In un esperimento di 10 prove ripetute un evento si verifica con probabilità 1/3 in ogni prova. Calcolare la distribuzione di probabilità della frequenza empirica di occorrenza di detto evento nelle 10 prove. In particolare, calcolare la probabilità che detta frequenza empirica sia uguale a 0.5.

Soluzione

La frequenza empirica F di occorrenza dell'evento nelle 10 prove ripetute è una variabile casuale che assume i valori 0, 1/10, 2/10, ..., 10/10. Detta N la variabile casuale che rappresenta il numero di successi nelle 10 prove, si ha evidentemente:

$$P\left(F = \frac{k}{10}\right) = P(N = k) \equiv b\left(10, k; \frac{1}{3}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 10).$$

Poiché risulta:

$$b\left(10, k; \frac{1}{3}\right) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 10),$$

segue anche:

$$P\left(F = \frac{k}{10}\right) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 10).$$

Per $k = 5$ si ha infine:

$$P\left(F = \frac{5}{10}\right) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-5} = 0.1366.$$

Si noti che la variabile casuale discreta F è funzione della variabile casuale discreta N avendosi $F = N/10$.

▷ **ESERCIZIO 17**

Calcolare la probabilità che in n prove ripetute un evento a probabilità p (costante) si verifichi un numero pari di volte.

Soluzione

Denotiamo con p_n ($n = 1, 2, \ldots$) la probabilità che in n prove l'evento si sia verificato un numero pari di volte. Evidentemente, si ha:

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = p^2.$$

Per $n \geq 3$, possiamo espimere p_n in funzione di p_{n-1}, ossia della probabilità che l'evento si sia verificato un numero pari di volte in $n - 1$ prove. Infatti, consideriamo le seguenti alternative (non costituenti un sistema completo!):

H_1 : "all'$(n-1)$–esima prova l'evento si è verificato un numero pari di volte";

H_2 : "all'$(n-1)$–esima prova l'evento si è verificato un numero dispari di volte".

Chiaramente, si ha:

$$P(H_1) = p_{n-1}.$$

Per calcolare $P(H_2)$ osserviamo che all'$(n-1)$–esima prova una ed una soltanto delle seguenti alternative si è verificata:

H_1 : (come sopra definito);

H_2 : (come sopra definito);

H_3 : l'evento in esame non si è mai verificato nelle $n - 1$ prove.

Pertanto, posto per comodità $p_{n-1}^{(d)} = P(H_2)$, risulta:

$$p_{n-1}^{(d)} \equiv P(H_2) = 1 - P(H_1) - P(H_3) = 1 - p_{n-1} - (1-p)^{n-1}. \quad (1)$$

(Si noti che il sistema di alternative H_1, H_2, H_3 è completo). È facile convincersi che sussiste la seguente relazione:

$$p_n = p_{n-1}(1-p) + p_{n-1}^{(d)} p \qquad (n = 3, 4, \ldots)$$

che, per la (1), assume la seguente forma:

$$p_n = p_{n-1}(1-p) + [1 - p_{n-1} - (1-p)^{n-1}]\, p \qquad (n = 3, 4, \ldots)$$

ovvero:

$$p_n = p - p(1-p)^{n-1} + (1-2p)\, p_{n-1} \qquad (n = 3, 4, \ldots). \quad (2)$$

La (2) costituisce un sistema di equazioni alle differenze del primo ordine che può essere risolto ricorsivamente. Si ha invero:

$$\begin{aligned} p_n &= p - p(1-p)^{n-1} + (1-2p)\left[p - p(1-p)^{n-2} + (1-2p)\, p_{n-2}\right] \\ &= p - p(1-p)^{n-1} - p(1-2p)(1-p)^{n-2} \\ &\quad + p(1-2p) + (1-2p)^2 p_{n-2} \qquad (n = 3, 4, \ldots). \end{aligned}$$

Esprimendo tramite la (2) p_{n-2} in termini di p_{n-3}, p_{n-3} in termini di p_{n-4} e così via si giunge in definitiva alla seguente espressione:

$$p_n = p\left[\sum_{k=0}^{n-3}(1-2p)^k - \sum_{k=0}^{n-3}(1-2p)^k(1-p)^{n-k-1}\right] + (1-2p)^{n-2} p_2 \qquad (n = 3, 4, \ldots). \quad (3)$$

Poiché si ha:

$$\sum_{k=0}^{n-3}(1-2p)^k = \frac{1-(1-2p)^{n-2}}{1-(1-2p)} = \frac{1-(1-2p)^{n-2}}{2p};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-3}(1-2p)^k(1-p)^{n-k-1} &= (1-p)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{1-2p}{1-p}\right)^k \\ &= (1-p)^{n-1}\left[1 - \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)^{n-2}\right]\left[1 - \frac{1-2p}{1-p}\right]^{-1} \\ &= \frac{(1-p)^n}{p}\left[1 - \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)^{n-2}\right], \end{aligned}$$

e ricordando che $p_2 = p^2$ la (3) in definitiva diventa:

$$p_n = \frac{1-(1-2p)^{n-2}}{2} - (1-p)^n + (1-2p)^{n-2}\left[(1-p)^2 + p^2\right] \qquad (n = 3, 4, \ldots). \quad (4)$$

Dalla (4) segue anche:

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{(1-2p)^n - 2(1-p)^n}{2} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Si vede così che, come è intuitivo attendersi, il discostamento di p_n da $1/2$ tende a zero al crescere del numero delle prove.

▷ **ESERCIZIO 18**

Un ubriaco ha in tasca un mazzo di 8 chiavi tra cui vi è la sua chiave di casa. Giunto sulla soglia egli cerca di aprire la porta della sua abitazione con la seguente procedura: tenta con una chiave scelta a caso; se la chiave non è quella giusta, la ripone nel mazzo e ne sceglie ancora una a caso e così via fino ad individuare la chiave giusta. Calcolare la probabilità che la chiave giusta venga scelta al primo, al secondo e, in generale, al k–esimo tentativo.

Soluzione

L'esperimento descritto costituisce un esempio di prove ripetute con probabilità $\vartheta = 1/8$ in ciascuna prova. Poiché è richiesta la probabilità di ottenere successo ad un tentativo prefissato, la variabile casuale X che rappresenta il numero di tentativi necessari per conseguire il successo risulta distribuita geometricamente. Pertanto la sua distribuzione di probabilità è:

$$g(x; \vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)^{x-1} \qquad (x = 1, 2, \ldots).$$

Si ha quindi:

$$g\left(1; \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$g\left(2; \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{7}{8} = \frac{7}{64} = 0.1094,$$

e in generale:

$$g(k; \vartheta) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}.$$

Pertanto $g(k; 1/8)$ monotonicamente decresce al crescere di k. È dunque massima la probabilità che la chiave giusta venga individuata proprio alla prima scelta.

ESERCIZIO 19

Uno studente nel perforare delle schede commette un errore di perforazione in ogni battuta con probabilità di $5 \cdot 10^{-2}$. Supponiamo che il programma da perforare richieda 500 battute. Si calcolino la probabilità che lo studente non commetta errori di perforazione e la probabilità che ne commetta almeno uno.

Soluzione

Per ipotesi la probabilità di errore ad ogni battuta è costante e pari a 5/100. La perforazione di un programma di 500 battute costituisce quindi una prova ripetuta 500 volte con probabilità d'errore (successo) costante. La variabile casuale X che rappresenta il numero di errori commessi nelle 500 battute ha distribuzione binomiale. Pertanto la probabilità P di non commettere errori è

$$P = \binom{500}{0} \left(\frac{5}{100}\right)^0 \left(\frac{95}{100}\right)^{500} = 7.2745 \cdot 10^{-12},$$

mentre la probabilità Q che ne commetta almeno uno è data da

$$Q = 1 - P = 1 - 7.2745 \cdot 10^{-12},$$

che, con l'approssimazione numerica qui adottata va considerata unitaria.

ESERCIZIO 20

Supponendo che con probabilità 0.75 un atleta superi nel salto in alto l'asticella posta ad una determinata altezza, si calcoli la probabilità che l'asticella venga superata per la prima volta al terzo tentativo.

Soluzione

Si chiede che, in un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo costante $\vartheta = 0.75$, il successo sia ottenuto al terzo tentativo. La variabile casuale X che rappresenta il numero di tentativi necessari a conseguire il successo ha distribuzione di probabilità geometrica di parametro $\vartheta = 0.75$. Quindi

$$P(X = 3) = g(3; 0.75) = 0.75\,(0.25)^2 = 0.0469.$$

ESERCIZIO 21

Una coppia di dadi viene lanciata fino ad ottenere il risultato di dieci. Calcolare la probabilità che occorrano almeno due lanci e la probabilità che ne occorrano almeno quattro.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo costante ad ogni prova. Pertanto è geometrica la distribuzione di probabilità del numero X di prove necessarie ad ottenere un successo. La probabilità con cui si ha successo è facilmente calcolabile in quanto il risultato 10 può ottenersi soltanto a seguito dell'occorrenza delle cifre $(5,5)$, $(6,4)$ e $(4,6)$. Di conseguenza, la probabilità di successo è $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Detta $g(n;\vartheta)$ la probabilità che il successo si realizzi al lancio n–esimo, come sappiamo risulta:

$$g(n;\vartheta) = \vartheta\,(1-\vartheta)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nel nostro caso abbiamo dunque:

$$g\left(1; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12} = 0.0833$$

$$g\left(2; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\,\frac{11}{12} = 0.0764$$

$$g\left(3; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^2 = 0.0700.$$

Pertanto:

$$P(X \geq 2) = 1 - g\left(1; \frac{1}{12}\right) = 0.9167$$

$$P(X \geq 4) = 1 - g\left(1; \frac{1}{12}\right) - g\left(2; \frac{1}{12}\right) - g\left(3; \frac{1}{12}\right) = 0.7703.$$

ESERCIZIO 22

Uno studente con uguale probabilità supera un esame dopo un numero di tentativi minore o uguale di 2 oppure maggiore o uguale di 2 (ossia la "mediana" del numero di tentativi è 2). Supponendo che sia costante la probabilità di successo ad ogni tentativo, si calcolino:

a) la probabilità che lo studente superi l'esame al secondo tentativo;

b) la probabilità che il numero di tentativi sia almeno 3.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di prove ripetute in cui la variabile casuale N non rappresenta il numero di successi ma il numero di tentativi

necessari ad ottenere un successo. Pertanto la distribuzione della variabile casuale è geometrica con distribuzione di probabilità

$$g(x;\vartheta) = \vartheta\,(1-\vartheta)^{x-1} \qquad (x = 1, 2, \ldots).$$

Non viene fornita la probabilità ϑ del successo ma si sa che risulta:

$$P(N \leq 2) = P(N \geq 2).$$

Si sa quindi:

$$g(1;\vartheta) + g(2;\vartheta) = \sum_{x=2}^{\infty} g(x;\vartheta)$$

ovvero:

$$\begin{aligned}\vartheta + \vartheta\,(1-\vartheta) &= \sum_{x=2}^{\infty} \vartheta\,(1-\vartheta)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} \vartheta\,(1-\vartheta)^{x-1} - \vartheta \\ &= 1 - \vartheta.\end{aligned}$$

Vediamo così che ϑ può determinarsi come soluzione dell'equazione $\vartheta^2 - 3\vartheta + 1 = 0$. Tale equazione ammette le radici $(3+\sqrt{5})/2 = 2.6180$ e $(3-\sqrt{5})/2 = 0.3820$. La prima radice va scartata essendo maggiore di 1. In conclusione, si ha una distribuzione geometrica con parametro $\vartheta = 0.382$. Quindi risulta:

$$g(2;\vartheta) = 0.382 \cdot 0.6180 = 0.2361.$$

Pertanto la probabilità di superare l'esame al secondo tentativo è 0.2361. La probabilità $P(N \geq 3)$ che occorrano almeno 3 tentativi può infine calcolarsi al seguente modo:

$$\begin{aligned}P(N \geq 3) &= 1 - g(1;\vartheta) - g(2;\vartheta) = 1 - \vartheta - \vartheta\,(1-\vartheta) \\ &= 1 - 0.382 - 0.2361 = 0.3819.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 23

Calcolare la probabilità che un prefissato numero compaia con un ritardo di n settimane quando venga considerato come primo estratto al lotto su una determinata ruota. In particolare, si valuti detta probabilità nel caso $n = 10$.

Soluzione

Si consideri la variabile casuale N che rappresenta il ritardo in settimane nell'uscita del numero prefissato. Ci si trova evidentemente di fronte ad una distribuzione di probabilità geometrica di parametro 1/90. Pertanto:

$$P(N = n) \equiv g\left(n+1; \frac{1}{90}\right) = \frac{1}{90}\left(\frac{89}{90}\right)^n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Per $n = 10$ si ha poi:

$$P(N = 10) = \frac{1}{90}\left(\frac{89}{90}\right)^{10} = 0.0099.$$

Si osservi che quest'ultimo valore differisce di soli dodici decimillesimi dalla probabilità $1/90 = 0.0111$ che non vi sia ritardo nell'uscita del numero prefissato.

▷ **ESERCIZIO 24**

In un esperimento di prove ripetute un evento ha probabilità p di occorrenza in ogni prova. L'esperimento casuale viene ripetuto fino a che l'evento si verifica per la prima volta. Sia π la probabilità che ciò richieda un numero dispari di prove. Stabilire quale deve essere il valore di p perché risulti $\pi = 5/6$.

Soluzione

Sia X la variabile casuale che esprime il numero di ripetizioni dell'esperimento necessarie per ottenere un successo. Poiché le ripetizioni avvengono in condizioni di indipendenza, X ha distribuzione di probabilità geometrica:

$$P(X = n) = g(n;p) = p(1-p)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La probabilità π che occorra un numero dispari di prove perché l'evento si verifichi per la prima volta è allora:

$$\begin{aligned}\pi &= \sum_{n=0}^{\infty} g(2n+1;p) = p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{2n} \\ &= p\,\frac{1}{1-(1-p)^2}.\end{aligned}$$

Di qui segue:

$$p = 2 - \frac{1}{\pi}.$$

Ponendo $\pi = 5/6$ si ha infine $p = 0.8$.

▷ **ESERCIZIO 25**

12 di 25 dichiarazioni dei redditi contengono deduzioni illegittime mentre le rimanenti 13 contengono deduzioni legittime. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 8 delle 25 dichiarazioni se ne trovino 2 con deduzioni illegittime?

Soluzione

Denotiamo con

$$h(N,k,n,x) = \frac{\binom{N-k}{n-x}\binom{k}{x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

la distribuzione di probabilità ipergeometrica. Riguardiamo, ad esempio, $h(N,k,n,x)$ come probabilità che in n prove ripetute (a probabilità variabile ad ogni prova) consistenti nell'estrazione senza rimpiazzamento di una biglia da un'urna che ne contiene k nere e $N-k$ bianche se ne abbiamo x nere e $n-x$ bianche. Nel caso dell'esercizio ci si trova di fronte ad uno schema ipergeometrico con $N = 25$, $k = 12$ e $n = 8$. Pertanto la probabilità richiesta è:

$$h(25,12,8,2) = \frac{\binom{13}{6}\binom{12}{2}}{\binom{25}{8}} = 0.1047.$$

▷ **ESERCIZIO 26**

In un supermercato vi sono 100 bottiglie di latte 20 delle quali con data di scadenza già superata. Si calcolino la probabilità che scegliendone 4 a caso queste risultino tutte non scadute e la probabilità che di queste quattro due siano scadute.

Soluzione

La scelta di 4 bottiglie tra le 100 bottiglie presenti nel supermercato può interpretarsi come un esperimento di prove ripetute in cui però la probabilità di successo (ossia di scegliere una bottiglia che reca data di scadenza superata) cambia in ciascuna prova. La distribuzione di probabilità $P_X(x)$ della variabile casuale X che rappresenta il numero di bottiglie scadute tra quelle scelte è ipergeometrica. Si ha dunque:

$$P_X(x) = \frac{\binom{100-20}{4-x}\binom{20}{x}}{\binom{100}{4}} \qquad (x = 0, 1, \ldots, 4)$$

da cui segue:

$$P_X(0) = \frac{\binom{80}{4}\binom{20}{0}}{\binom{100}{4}} = 0.4033.$$

La probabilità $P_X(2)$ che delle quattro bottiglie scelte 2 siano scadute è infine:

$$P_X(2) = \frac{\binom{80}{2}\binom{20}{2}}{\binom{100}{4}} = 0.1531.$$

▷ **ESERCIZIO 27**

Una scorta di 60 dispositivi antifurto ne contiene 3 difettosi. Calcolare la probabilità che uno soltanto di 2 antifurti scelti a caso risulti difettoso.

Soluzione

Si pensi ad uno schema in cui hanno luogo 3 estrazioni con probabilità variabile ad ogni estrazione. In tale schema il risultato di ogni estrazione è la scelta di un dispositivo antifurto che può risultare difettoso o meno. La probabilità richiesta è dunque fornita dalla distribuzione di probabilità ipergeometrica $h(N,k,n,x)$ con $N = 60$, $k = 3$, $n = 2$ e $x = 1$:

$$h(60,3,2,1) = \frac{\binom{57}{1}\binom{3}{1}}{\binom{60}{2}} = 0.0966.$$

Si osservi che una risposta approssimativa al quesito si può fornire considerando costante la probabilità che in ciascuna delle due scelte si ottenga un dispositivo difettoso. Detta p tale probabilità, può ad esempio porsi $p = 3/60$ cosicché $1 - p = 57/60$ è la probabilità (costante) di scegliere un dispositivo non difettoso. La probabilità richiesta può allora valutarsi come $2p(1-p) = 0.0950$ con un errore assoluto pari a $0.0966 - 0.0950 = 0.0016$ rispetto al precedente risultato esatto. Si noti che l'errore relativo commesso è $0.0016/0.0966 = 0.0166$.

▷ **ESERCIZIO 28**

Fra 150 aspiranti ad un lavoro soltanto 70 sono realmente qualificati. Calcolare la probabilità che a seguito di un esame approfondito com-

piuto su 5 dei 150 candidati soltanto due di essi risultino realmente qualificati.

Soluzione

Un modo di ottenere un'approssimazione della probabilità richiesta consiste nel riferirsi ad uno schema di 5 prove ripetute (scelta dei 5 aspiranti) con probabilità costante $p = 70/150$ che in ogni singola prova si ottenga un candidato qualificato. Detta

$$b(n, x; p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \ldots, n)$$

la distribuzione di probabilità di una variabile casuale binomiale in n prove con probabilità p di successo in ogni prova, per $n = 5$ e $p = 70/150$ otteniamo:

$$b\left(2, 5; \frac{70}{150}\right) = \binom{5}{2} \left(\frac{70}{150}\right)^2 \left(1 - \frac{70}{150}\right)^3 = 0.3304.$$

Questa è l'approssimazione desiderata. Il risultato esatto si ottiene invece utilizzando la distribuzione ipergeometrica:

$$h(150, 70, 5, 2) = \frac{\binom{80}{3}\binom{70}{2}}{\binom{150}{5}} = 0.3354.$$

Il valore approssimato dunque è inferiore al valore esatto dello 0.5%.

▷ **ESERCIZIO 29**

Sia 1/5 la probabilità che un bimbo esposto ad una malattia contagiosa la contragga. Qual è la probabilità che il dodicesimo bimbo esposto è il terzo a contrarla?

Soluzione

Ricorriamo alla distribuzione di probabilità di Pascal:

$$P(x, k; \vartheta) = \binom{x-1}{k-1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{x-k} \qquad (x = k, k+1, \ldots).$$

La probabilità richiesta si ottiene da questa ponendovi $x = 12$, $k = 3$ e $\vartheta = 1/5$:

$$P(12, 3; 1/5) = \binom{11}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^9 = 0.0591.$$

▷ **ESERCIZIO 30**

Sia 0.80 la probabilità che un cittadino presti fede ad un'accusa di illecito imputata ad un amministratore pubblico. Si calcoli la probabilità che la settima persona che viene interpellata sia la quarta a crederci.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo costante ad ogni prova ed uguale a 0.8. La variabile casuale che interessa non rappresenta però il numero di successi ottenuti ma il numero di prove necessarie ad ottenere il numero di successi desiderato. La sua distribuzione di probabilità è pertanto quella di Pascal $p(x, k; \vartheta)$ con parametri $x = 7$, $k = 4$ e $\vartheta = 0.8$. Si ha pertanto:

$$p(7, 4; 0.8) = \binom{6}{3} (0.8)^4 (0.2)^3 = 20 \cdot 0.4096 \cdot 0.0080 = 0.0655.$$

▷ **ESERCIZIO 31**

Si supponga che con uguali probabilità una prefissata coppia ottenga ad ogni parto un figlio maschio o femmina. Si calcolino:

a) la probabilità che il loro terzo nato sia il primo maschio;
b) la probabilità che il sesto nato sia la loro terza femmina;
c) la probabilità che l'ottavo nato sia il quinto o il sesto maschio.

Soluzione

Consideriamo il quesito a). Definiamo "successo" la nascita di un figlio maschio. Tale evento ha probabilità 0.5. Se indichiamo con X la variabile casuale che denota il numero delle prove essa è distribuita geometricamente. Pertanto la probabilità richiesta è:

$$g(3, 0.5) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.1250.$$

Passiamo al quesito b). In questo caso il "successo" è la nascita di una femmina. Fissato il numero di successi a 3, si desidera la probabilità che il terzo successo abbia luogo al sesto tentativo. La distribuzione di probabilità è ora quella di Pascal

$$p(x, k; \vartheta) = \binom{x-1}{k-1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{x-k} \qquad (x = k, k+1, \ldots).$$

Pertanto:

$$p(6,3;0.5) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10\,\frac{1}{64} = 0.1560.$$

Rispondiamo al quesito c). A tal fine introduciamo i seguenti eventi:

A_1 : "l'ottavo nato è il quinto maschio";

A_2 : "l'ottavo nato è il sesto maschio".

Occorre calcolare $P(A_1 \cup A_2)$. Poiché sono eventi mutuamenti esclusivi, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle rispettive probabilità. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= p(8,5;0.5) + p(8,6;0.5) \\ &= \binom{7}{4}(0.5)^8 + \binom{8}{5}(0.5)^8 \\ &= 35 \cdot 0.0039 + 56 \cdot 0.0039 = 0.3551. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 32**

Un giocatore lancia un dado ripetutamente fino a quando non esce un numero ≤ 4. Si determini:

a) la distribuzione di probabilità del numero X di lanci effettuati;

b) la probabilità che risulti $X \leq 4$.

Supponendo invece che il giocatore continui a lanciare il dado fino a che per tre volte il risultato sia ≤ 4, si determini la distribuzione di probabilità del numero di lanci necessari perché ciò avvenga.

Soluzione

a) Il numero X di lanci effettuati per ottenere un numero ≤ 4 è una variabile casuale con distribuzione di probabilità geometrica. Infatti, definendo "successo" l'uscita di un numero ≤ 4, la probabilità ϑ di successo è costante ad ogni lancio ed è uguale a $2/3$.

b) Calcoliamo ora $P(X \leq 4)$. Denotata con $g(x,\vartheta) = (1-\vartheta)^{x-1}\vartheta$ la distribuzione di probabilità geometrica di cui al punto a) si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{x=1}^{4} g\left(x;\frac{2}{3}\right) \\ &= \sum_{x=1}^{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{x-1}\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = 0.3210. \end{aligned}$$

La risposta all'ultimo quesito segue osservando che il numero Y di lanci necessari perché si ottenga per 3 volte un risultato ≤ 4 è una variabile casuale con distribuzione di probabilità di Pascal. Infatti si ha un esperimento di prove ripetute con probabilità di successo $\vartheta = 2/3$ in ogni singola prova. Pertanto la distribuzione di probabilità del numero Y di prove necessarie per avere 3 volte un risultato ≤ 4 è:

$$p(y,3;2/3) = \binom{y-1}{2}(1-\vartheta)^{y-3}\vartheta^3 \qquad (y = 3,4,\ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 33**

In una particolare giornata della settimana le 4 linee urbane di trasporto in una cittadina sono caratterizzate dalle seguenti percentuali di utenza:

Linea 1:	50%
Linea 2:	15%
Linea 3:	15%
Linea 4:	20%.

Calcolare la probabilità che scegliendo a caso 10 persone in attesa ad una fermata comune alle 4 linee si abbia che di queste persone 4 scelgono la linea 1, 3 la linea 4, 2 la linea 2 e 1 la linea 3.

Soluzione

Ogni persona può scegliere a priori una qualsiasi delle 4 linee con probabilità $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.15$ e $p_4 = 0.2$, rispettivamente. La probabilità p richiesta si ottiene pertanto dalla distribuzione di probabilità multinomiale:

$$P_n(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}\,p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}p_4^{n_4}$$

con la scelta $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 3$. Si ha pertanto:

$$p = \frac{10!}{4!2!1!3!}\,(0.5)^4\,(0.15)^2\,(0.15)^1\,(0.2)^3 = 0.0213.$$

▷ **ESERCIZIO 34**

Una fabbrica produce fili di rame cilindrici di spessore nominale r. Supponendo che lo spessore s effettivo di un filo scelto a caso sia minore di r con probabilità 0.01, maggiore di r con probabilità 0.04 e uguale ad r con probabilità 0.95, calcolare la probabilità che in un campione casuale di 100 fili cinque abbiano spessore minore di r e cinque uno spessore maggiore di r.

Soluzione

Si ha un esperimento di 100 prove ripetute (la scelta di 100 fili) in cui ad ogni prova si hanno 3 possibili risultati ($s < r$, $s > r$, $s = r$) ciascuno con probabilità costante:

$$p_1 \equiv P(s < r) = 0.01;\ p_2 \equiv P(s > r) = 0.04;\ p_3 \equiv P(s = r) = 0.95.$$

Pertanto, considerata la distribuzione di probabilità multinomiale

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3},$$

la probabilità p richiesta si ottiene come:

$$p = P_{100}(5,5,90) = \frac{100!}{5!\,5!\,90!}\,(0.01)^5\,(0.04)^5\,(0.95)^{90} = 0.442 \cdot 10^{-3}.$$

▷ **ESERCIZIO 35**

Si ripete il lancio di una moneta N volte. Sia T il numero di teste e C il numero di croci. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale $D = T - C$ nell'ipotesi in cui N è una variabile casuale distribuita secondo Poisson con parametro λ.

Soluzione

Dalle relazioni

$$D = T - C$$
$$N = T + C$$

segue in particolare:

$$C = \frac{N - D}{2} \tag{1}$$

ovvero:

$$N = 2C + D = 2\left(C + \frac{D}{2}\right) \tag{2}$$

e:

$$D = N - 2C. \tag{3}$$

Dalla definizione di probabilità condizionata si ha poi:

$$P\{D = d\} = \sum P\{D = d|N = n\}\, P\{N = n\},$$

dove la somma va estesa a tutti i valori di n per i quali risulta:

$$P\{D = d|N = n\} > 0$$

risultando inoltre compatibile la (2) con scelte intere di C e D. Si ha dunque:

$$P\{D = d\} = \sum_{\substack{n=k \\ n-d\ pari}}^{\infty} P\{D = d|N = n\}\, P\{N = n\}, \tag{4}$$

dove $k = \max(0, d/2)$. Osserviamo ora che per la (3) risulta:

$$\begin{aligned} P\{D = d|N = n\} &= P\{N - 2C = d|N = n\} \\ &= P\left\{C = \frac{N-d}{2}\middle| N = n\right\} \\ &= P\left\{C = \frac{n-d}{2}\right\} \\ &= \begin{cases} \dbinom{n}{(n-d)/2}\dfrac{1}{2^n} & \text{se } \dfrac{n-d}{2} \text{ è pari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Ricordando l'ipotesi su N, dalle (4) e (5) segue infine:

$$\begin{aligned} P\{D = d\} &= e^{-\lambda} \sum_{\substack{n=k \\ n-d\ intero}}^{\infty} \binom{n}{(n-d)/2} \frac{1}{2^n}\,\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{\substack{n=k \\ n-d\ intero}}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^n}{\left(\frac{n-d}{2}\right)!\left(\frac{n+d}{2}\right)!}, \qquad k = \max\left(0, \frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 36**

Da valutazioni empiriche risulta che negli USA si verificano 8 incidenti automobilistici mortali l'ora durante i fine settimana. Assumendo che tali incidenti avvengano indipendentemente gli uni dagli altri, calcolare la probabilità

a) che trascorra un'ora senza incidenti;
b) che trascorrano 15 minuti con un solo incidente;
c) che trascorrano quattro intervalli consecutivi di 15 minuti ciascuno con un incidente in ognuno di essi;
d) che si abbiano 4 incidenti in un'ora.

A che cosa è dovuta la differenza tra i risultati di c) e d)?

Soluzione
Sappiamo che gli incidenti si verificano con un tasso di $8/h$ e che ciò che avviene in una determinata ora non ha nessuna influenza sul numero di incidenti relativi agli altri intervalli di tempo. La variabile casuale X che rappresenta il numero di incidenti può pertanto essere riguardata come avente distribuzione di Poisson di parametro uguale ad 8 quando l'intervallo di tempo che si considera ha durata di un'ora.

a) La distribuzione di probabilità poissoniana di parametro λ è:

$$p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Pertanto la probabilità del non verificarsi di alcun incidente in un'ora è data da $p_X(0;8)$. Essendo $\lambda = 8$ si ha:

$$p_X(0;8) = e^{-8} = 0.0003.$$

b) La probabilità che avvenga un solo incidente in 15 minuti è invece esprimibile al seguente modo:

$$p_X(1;8/4) = p_X(1;2) = 0.2707,$$

dal momento che se ci si riferisce ad intervalli di tempo di 15 minuti il tasso originario si riduce di quattro volte.

c) Poiché la probabilità di avere un incidente in un intervallo di tempo di durata 15 minuti è pari a 0.2704 (v. punto b)) e poiché l'ipotesi di distribuzione di Poisson implica che gli eventi occorrenti in intervalli di tempo distinti (consecutivi o meno) sono tra loro indipendenti, la probabilità p richiesta vale:

$$p = (0.2707)^4 = 0.0054.$$

d) La probabilità di avere 4 incidenti in un'ora si ottiene dalla (1) per $x = 4$ e $\lambda = 8$; si ha pertanto:

$$p_X(4;8) = \frac{8^4}{4!}e^{-8} = 0.0573.$$

La differenza tra i risultati di c) e d) si spiega osservando che nel caso d) non è affatto specificata la modalità con cui i 4 incidenti si susseguono nell'ambito del periodo di un'ora mentre nel caso c) si richiedeva che ne avesse luogo uno in ciascun quarto d'ora.

DA QUI POISSON

▷ **ESERCIZIO 37**
Si supponga che il numero di auto usate vendute quotidianamente da un rivenditore sia una variabile casuale poissoniana di parametro $\lambda = 1$/giorno. Si calcoli:

a) la probabilità che siano effettuate tre vendite in un periodo di 2 giorni consecutivi;
b) la probabilità che trascorrano 2 giorni consecutivi senza che si abbiano vendite.

Soluzione
La distribuzione di probabilità di una variabile casuale poissoniana di parametro λ è:

$$p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, \ldots).$$

Nel nostro caso il parametro λ va posto uguale a 2 dal momento che ci si riferisce ad un intervallo di durata pari a 2 giorni. Si ha quindi:

$$p_X(3;2) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0.1804$$

$$p_X(0;2) = e^{-2} = 0.1353.$$

ESERCIZIO 38
Una pagina a stampa di un testo contiene 50 righi ciascuno dei quali è costituito da 70 caratteri (lo spazio tra una parola e l'altra è da considerarsi come un carattere). Si supponga che un tipografo commette, in media, un errore ogni 3 500 caratteri. Assumendo che la distribuzione del numero X di errori per pagina sia poissoniana si determini:

a) la probabilità che una pagina scelta a caso sia senza errori;
b) la probabilità che un capitolo di 20 pagine contenga 5 errori.

Soluzione
Per ipotesi la distribuzione di probabilità della variabile casuale X che rappresenta il numero di errori in una pagina stampata è poissoniana. Nel nostro caso il parametro λ della distribuzione, cioè il numero medio di errori ogni 3 500 caratteri, è unitario. Ciò corrisponde ad avere in media 1 errore per pagina.

a) Dalla distribuzione di Poisson

$$p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, \ldots)$$

segue:

$$p_X(0;1) = e^{-1} = 0.3679.$$

b) Dalle ipotesi fatta segue che il numero di errori Y presenti in un capitolo di 20 pagine è una variabile casuale distribuita secondo Poisson con parametro $\lambda = 20$. Si ha pertanto:

$$p_Y(5;20) = \frac{(20)^5}{5!}\, e^{-20} = 0.0001.$$

ESERCIZIO 39

In media 12 automobili l'ora transitano per un fissato punto di una strada rurale. Supponendo che gli istanti di transito siano tra loro indipendenti e denotando con X il numero di auto che transitano per detto punto durante un intervallo di tempo di 20 minuti, calcolare $P\{X = 0\}$ e $P\{X \geq 2\}$.

Soluzione

Nelle ipotesi dell'esercizio è ragionevole assumere che X sia una variabile casuale distribuita secondo Poisson con parametro $12/3 = 4$. Si ha pertanto:

$$p_X(x;4) = \frac{4^x}{x!}\, e^{-4} \qquad (x = 0, 1, \ldots),$$

da cui si ottiene:

$$P\{X = 0\} = p_X(0;4) = e^{-4} = 0.0183.$$

Si ha infine:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - 0.0183 - 0.0733 = 0.9084. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 40

Si supponga che in un fissato ambiente mediamente siano presenti 220 microrganismi per metro cubo di aria. Utilizzando la distribuzione di Poisson calcolare la probabilità che in un campione casuale di 10 decimetri cubi di aria sia presente almeno 1 microrganismo.

Soluzione

Per ipotesi il numero X di microrganismi per unità di volume ha distribuzione poissoniana:

$$p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, \ldots).$$

Nel nostro caso il numero medio di microrganismi presenti in 10 dm^3 d'aria è $\lambda = 220\,\dfrac{10}{1\,000} = 2.2$. La probabilità richiesta è dunque:

$$1 - p(0;2.2) = 1 - 0.1108 = 0.8892.$$

ESERCIZIO 41

In un industria tessile in media in un'ora di funzionamento il filo di un telaio si spezza 0.3 volte. Calcolare la probabilità che in 10 ore di funzionamento di un telaio il filo si spezzi almeno due volte ma non più di quattro volte.

Soluzione

In questa ipotesi è ragionevole assumere che il numero di volte in cui si spezza il filo è una variabile casuale X poissoniana di media $\lambda = 3$:

$$p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}.$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= p_X(2;3) + p_X(3;3) + p_X(4;3) \\ &= \sum_{x=2}^{4} \frac{3^x}{x!}\, e^{-3} \\ &= 0.2240 + 0.2240 + 0.1680 = 0.616. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 42

Si è valutato che la probabilità che un autoveicolo si guasti all'interno di un certo tunnel è $8 \cdot 10^{-4}$. Si usi l'approssimazione di Poisson di una distribuzione binomiale per calcolare la probabilità che si guasti al più un autoveicolo tra 1 000 che attraversano il tunnel.

Soluzione

Com'è noto una buona approssimazione di una distribuzione binomiale $b(x, n; \vartheta)$ con una distribuzione poissoniana $p_X(x; n\vartheta)$ si ottiene per

$n \geq 20$ e $\vartheta \leq 0.05$ e tale approssimazione diviene ottima per $n \geq 100$ ed $n\vartheta \leq 10$. Nel caso dell'esercizio ci si trova appunto in questa condizione ottimale. La distribuzione di Poisson avrà pertanto parametro $h = n\vartheta = 1\,000 \times 4 \times 10^{-4} = 0.4$. La probabilità che si guasti al più un autoveicolo su 1 000 può ottenersi come somma delle probabilità degli eventi mutuamenti esclusivi "non si guasta nessun autoveicolo" e "se ne guasta uno soltanto". Indichiamo rispettivamente con p_0 e con p_1 le probabilità di questi due eventi. Dalla distribuzione di Poisson si ottiene:

$$p_0 \equiv P_X(0; 0.4) = e^{-0.4} = 0.6703$$

$$p_1 \equiv P_X(1; 0.4) = 0.4 \cdot e^{-0.4} = 0.2681.$$

Pertanto la probabilità richiesta vale $p_0 + p_1 = 0.9384$.

> **ESERCIZIO 43**

Il 2% di un grande carico di confezioni di un genere di abbigliamento contiene prodotti difettosi. Usare l'approssimazione poissoniana per valutare le probabilità che tra 500 confezioni scelte a caso nel carico 15 siano difettose e la probabilità che invece delle 500 confezioni almeno 15 siano difettose.

Soluzione

La scelta di confezioni difettose può pensarsi come uno schema binomiale con probabilità $\vartheta = 0.02$ e $n = 500$. Poiché le condizioni $n \geq 100$ e $n\vartheta \leq 10$ sono soddisfatte, è possibile utilizzare con ottima approssimazione la distribuzione di Poisson $p_X(x; n\vartheta)$ con $\lambda \equiv n\vartheta = 10$:

$$p_X(x; 10) = \frac{10^x}{x!} e^{-10} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si trova quindi:

$$p_X(15; 10) = \frac{10^{15}}{15!} e^{-10} = 0.0347.$$

La probabilità $P\{X \geq 15\}$ può infine calcolarsi al seguente modo:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 15\} &= 1 - \sum_{x=0}^{14} p_X(x; 10) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{14} \frac{10^x}{x!} e^{-10} \\ &= 1 - 0.9166 = 0.0834. \end{aligned}$$

> **ESERCIZIO 44**

Un centralino telefonico riceve chiamate ad un tasso orario pari a λ. Nell'ipotesi che il numero di chiamate relative ad un qualsiasi fissato intervallo di tempo sia una variabile casuale distribuita secondo Poisson, determinare:

a) la probabilità di avere 3 chiamate in 5 minuti;
b) la probabilità che in 5 minuti arrivi almeno una chiamata;
c) la probabilità che in 5 minuti arrivino non meno di 3 chiamate.

Soluzione

La distribuzione di Poisson di parametro λ è:

$$p_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (x = 0, 1, \ldots).$$

Poiché i quesiti a), b) e c) fanno riferimento ad un intervallo di tempo di 5 minuti, occorre riferirsi alla distribuzione di Poisson di parametro $\overline{\lambda} = \dfrac{5\lambda}{60} = \dfrac{\lambda}{12}$:

$$p_X(x; \overline{\lambda}) = \frac{1}{x!} \left(\frac{\lambda}{12}\right)^x e^{-\lambda/12} \qquad (x = 0, 1, \ldots).$$

La probabilità di avere 3 chiamate in 5 minuti è dunque:

$$p_X(3; \overline{\lambda}) = \frac{1}{3!} (\lambda/12)^3 e^{-\lambda/12}.$$

La probabilità che in 5 minuti arrivi almeno una chiamata può poi esprimersi come:

$$1 - p_X(0; \overline{\lambda}) = 1 - e^{-\lambda/12}.$$

La probabilità che in 5 minuti arrivino non meno di 3 chiamate può infine calcolarsi come:

$$\begin{aligned} &1 - [p_X(0; \overline{\lambda}) + p_X(1; \overline{\lambda}) + p_X(2; \overline{\lambda})] \\ &\qquad = 1 - \left[1 + \frac{\lambda}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{12}\right)^2\right] e^{-\lambda/12}. \end{aligned}$$

> **ESERCIZIO 45**

Per una certa sostanza radioattiva avvengono in media 3.87 decadimenti in un intervallo di 7.5 secondi. Valutare che per detta sostanza si abbia almeno un decadimento al secondo.

Soluzione

È noto che il numero di particelle emesse da una sorgente radioattiva può essere riguardato come una variabile casuale distribuita secondo Poisson. Poiché il parametro λ della distribuzione di Poisson ha il significato di numero medio di decadimenti nell'unità di tempo, nel nostro caso risulta (riferendoci ad intervalli di tempo di 1 secondo):

$$\lambda = \frac{3.87}{7.5} = 0.516.$$

La probabilità p richiesta è allora calcolabile come:

$$p = 1 - p_X(0; 0.516) = 1 - e^{-0.516} = 0.4031.$$

ESERCIZIO 46

Determinare una formula che consenta il calcolo iterativo delle distribuzioni di probabilità per una variabile casuale:

a) binomiale;
b) ipergeometrica;
c) poissoniana.

Soluzione

a) Denotiamo con $b(n, x; \vartheta)$ la distribuzione di probabilità della variabile binomiale e valutiamo il rapporto:

$$\frac{b(n, x+1; \vartheta)}{b(n, x; \vartheta)} = \frac{\binom{n}{x+1} \vartheta^{x+1} (1-\vartheta)^{n-x-1}}{\binom{n}{x} \vartheta^{x} (1-\vartheta)^{n-x}}$$

$$= \frac{n-x}{x+1} \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Segue pertanto:

$$b(n, x+1; \vartheta) = b(n, x; \vartheta) \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \frac{n-x}{x+1} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

b) Sia $h_Y(N, M, n, y) = \binom{N-M}{n-y} \binom{M}{y} \Big/ \binom{N}{n}$ con $(y = 0, 1, \ldots, n)$ la distribuzione ipergeometrica. In maniera analoga a quanto visto nel caso a) si trova ora:

$$h_Y(N, M, n, y+1) = \frac{n-y}{N-M-n+y+1} \frac{M-y}{y+1} h_Y(N, M, n, y)$$
$$(y = 0, 1, \ldots, n-1).$$

c) Ricordando infine la distribuzione di probabilità di una variabile casuale di Poisson:

$$p_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

si determina in maniera analoga la seguente relazione:

$$p_X(x; \lambda) = \frac{\lambda}{x} p_X(x-1; \lambda) \qquad (x = 1, 2, \ldots).$$

CAPITOLO V

VARIABILI CASUALI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

▷ **ESERCIZIO 1**

Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^{-3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

può essere considerata come una densità di probabilità.

Soluzione

La risposta è affermativa dal momento che la (1) è non negativa sull'intero asse reale ed è inoltre normalizzata ad 1 avendosi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} 2x^{-3}\,dx = x^{-2}\Big|_{1}^{\infty} = 1.$$

▷ **ESERCIZIO 2**

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1}$$

Determinare il coefficiente a e calcolare la probabilità che la variabile casuale assuma un valore nell' intervallo $(0, \pi/4)$.

Soluzione

Il coefficiente a si ottiene imponendo che $f(x)$ sia normalizzata ad 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2a.$$

Si ha pertanto $a = 1/2$. È infine immediato rispondere al secondo quesito avendosi dalla (1) con $a = 1/2$:

$$P\left\{0 < X < \frac{\pi}{4}\right\} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \cos x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.3536.$$

▷ **ESERCIZIO 3**

Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\,(4x - 2x^2 - m) & \text{se } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \tag{1}$$

con k ed m reali può interpretarsi come densità di probabilità di una variabile casuale. Considerare in particolare i casi:

i) $k = 1$, $m = 1$; ii) $k = 1$, $m = 0$ e iii) $m = 2$.

Soluzione

Perché la funzione $f(x)$ possa interpretarsi come densità di probabilità di una variabile casuale occorre imporre che essa sia non negativa nell'intervallo $(0, 2)$. Essendo $f(x)$ prodotto della costante k per la forma quadratica $g(x) = 4x - 2x^2 - m$, occorre imporre che per $k > 0$ risulti $g(x) \geq 0$ nell'intervallo $(0, 2)$ e che per $k < 0$ risulti $g(x) \leq 0$ nello stesso intervallo. Osserviamo che la funzione $g(x)$ è una parabola avente massimo nel punto $x = 1$ con $g(1) = 2 - m$. Tale parabola è simmetrica intorno all'asse $x = 1$ e assume il valore $-m$ in $x = 0$. Consideriamo separatamente i seguenti due casi:

a) $k > 0$. Affinché sia $g(x) \geq 0$ per $x \in (0, 2)$, deve risultare $m \leq 0$;
b) $k < 0$. Perché risulti $g(x) \leq 0$ per $x \in (0, 2)$, deve risultare $m \geq 2$.

Pertanto concludiamo che condizione necessaria affinché la (1) sia una densità di probabilità è che risulti:

$$m \leq 0, \text{ per } k > 0 \tag{2}$$

oppure

$$m \geq 2, \text{ per } k < 0. \tag{3}$$

Imponendo la condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

si ricava poi la relazione che deve legare i parametri k ed m perché $f(x)$ sia una densità di probabilità:

$$k = \frac{3}{8 - 6m}. \tag{4}$$

Nei casi particolari indicati dal testo dell' esercizio, utilizzando le (2), (3) e (4) si conclude quanto segue:

i) $k = 1$, $m = 1$: $f(x)$ non è una densità di probabilità in quanto sono contraddette le (2) e (4);
ii) $k = 1$, $m = 0$: $f(x)$ non è una densità di probabilità in quanto è contraddetta la (4);
iii) $m = 2$: la funzione $f(x)$ è una densità di probabilità solo se risulta $k = -3/4$.

▷ **ESERCIZIO 4**

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1}$$

la densità di probabilità di una variabile casuale. Determinare la funzione di distribuzione $F(x)$ e costruire i grafici di $f(x)$ e $F(x)$.

Soluzione

La funzione di distribuzione $F(x)$ è data da:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy.$$

Facendo uso della (1) segue allora:

$$F(x) = 0, \qquad x \leq 0, \tag{2}$$

mentre si ha:

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{a}\left(1 - \frac{y}{a}\right) dy = \frac{x}{a}\left(\frac{2a - x}{a}\right), \qquad 0 < x \leq a. \tag{3}$$

Infine risulta:

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy = F(a) + \int_a^x f(y)\, dy = F(a) = 1, \qquad x > a. \tag{4}$$

In Fig. 1 è riportato il grafico di $f(x)$. Si tratta di una spezzata coincidente con l'asse delle ascisse negli intervalli $(-\infty, 0)$ e (a, ∞) e che coincide con la retta di intercette a e $2/a$ nell'intervallo $(0, a)$.

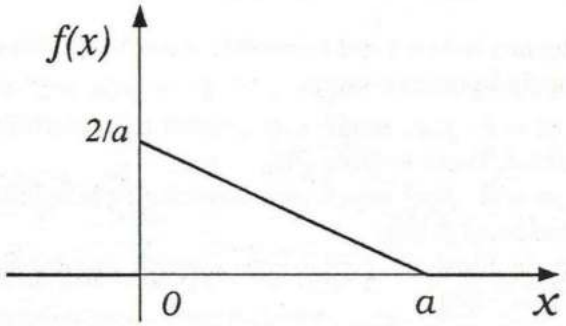


Fig. 1

Utilizzando le (2), (3) e (4) è infine facile costruire il grafico della funzione di distribuzione $F(x)$. Come indicato in Fig. 2, esso è costituito dalla retta $y = 0$ per $x \in (-\infty, 0)$, dalla retta $y = 1$ per $x > a$ e dall'arco di parabola (3) nell'intervallo $(0, a)$. In quest'ultimo intervallo risulta $F''(x) = -2/a^2 < 0$ cosicché $F(x)$ volge la convessità verso l'alto. Si noti che $F(x)$ non è dotata di derivata nell'origine. In tale punto infatti esistono le derivate sinistra e destra ma queste sono distinte tra loro.

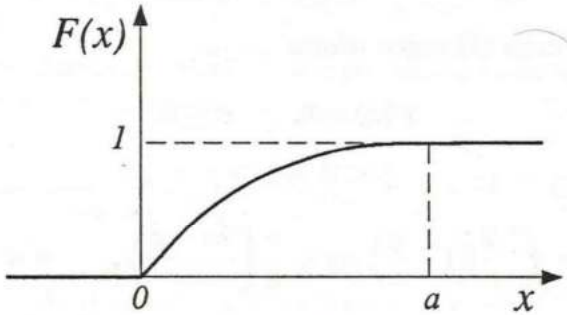


Fig. 2

▷ **ESERCIZIO 5**

Siano $a, b \in R$. Può ritenersi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{se } 0 < x < a + b, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è la densità di probabilità di una variabile casuale uniforme?

Soluzione

È immediato concludere che la risposta è negativa a meno che non sia $a > 0$ e $b = 0$. Infatti per $a < 0$ $f(x)$ è negativa, per $a = 0$ essa non è definita e per $b \neq 0$ non è normalizzata ad 1. Si ricordi comunque che la densità di probabilità di una variabile casuale uniforme nell'intervallo in cui è non nulla deve assumere un valore costante pari all'inverso dell'ampiezza di tale intervallo.

▷ **ESERCIZIO 6**

Si supponga che il tempo di attesa di un viaggiatore in una stazione della metropolitana sia una variabile casuale distribuita uniformemente. Si calcoli la probabilità che il tempo di attesa sia non inferiore a 5 minuti nell'ipotesi che i convogli giungono in stazione ogni dieci minuti.

Soluzione

Detta X la variabile casuale "tempo di attesa del viaggiatore", la sua densità di probabilità è per ipotesi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{se } x \in (0, 10), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

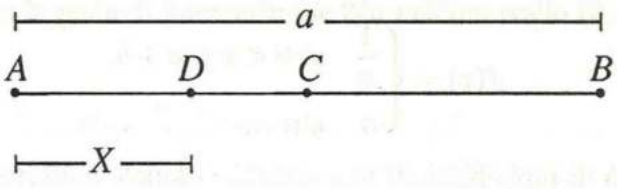
Si ha pertanto:

$$P\{X \geq 5\} = 1 - P\{X < 5\} = 1 - \int_0^5 \frac{1}{10}\, dx = 0.5.$$

▷ **ESERCIZIO 7**

Su di un segmento AB di lunghezza a e punto medio C si sceglie a caso un punto D. Supponendo che la distanza X di D da A sia una variabile casuale a distribuzione uniforme in $(0, a)$, si calcoli la probabilità Q che i segmenti AD, BD e AC possano utilizzarsi per costruire un triangolo.

Soluzione



Perché tre segmenti possano essere considerati lati di un triangolo si richiede che le loro lunghezze soddisfino le seguenti relazioni: ognuna è minore della somma delle altre due ma è maggiore del valore assoluto della loro differenza. In altri termini, nel nostro caso deve aversi:

$$\begin{cases} X > \left|(a - X) - \dfrac{a}{2}\right| \\ X < (a - X) + \dfrac{a}{2}, \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} X > \dfrac{a}{4} \\ X < \dfrac{3}{4}\,a. \end{cases}$$

Pertanto si ha:

$$Q \equiv P\left\{\frac{a}{4} < X < \frac{3}{4}\,a\right\} = \int_{a/4}^{3a/4} \frac{1}{a}\,dx = 0.5.$$

▷ **ESERCIZIO 8**

Si scelgano n punti a caso su di un segmento di lunghezza unitaria. Supponendo che la distanza di ciascun punto da un estremo del segmento sia una variabile casuale uniforme, calcolare la probabilità che almeno uno degli n punti disti meno di 0.25 da un estremo del segmento.

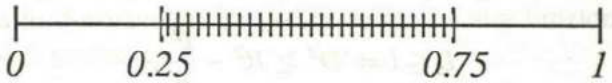
Soluzione

Per ciascun punto i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la probabilità

$$P_i = P\{D_i \geq 0.25\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che la sua distanza D_i dall'estremo più vicino sia maggiore o uguale a 0.25 per l'ipotesi di uniformità vale 1/2. Infatti, tale probabilità può

calcolarsi come rapporto dell'ampiezza dell'intervallo favorevole all'evento $D_i \geq 0.25$ e la lunghezza dell'intero segmento che, per ipotesi, è unitaria (in figura è stato tratteggiato l'intervallo favorevole all'evento).



La probabilità P che almeno uno degli n punti disti da un estremo del segmento meno di 0.25 può allora calcolarsi come complemento ad 1 della probabilità che tutti gli n punti distino dagli estremi più di 0.25:

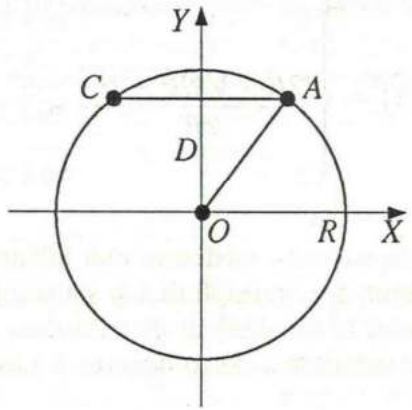
$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pertanto al crescere di n la probabilità P tende esponenzialmente all'unità.

▷ **ESERCIZIO 9**

Nel piano (O, X, Y) si consideri la circonferenza di equazione $X^2 + Y^2 = R^2$ (v. figura). Sia poi $Q = (0, D)$ un punto scelto a caso sul semiasse positivo delle ordinate, con $0 < D < R$ e per esso si conduca la corda perpendicolare all'asse Y. Si determini la funzione di distribuzione della lunghezza L di questa.

Soluzione



Con riferimento alla figura osserviamo che risulta

$$L \equiv \overline{AC} = 2\sqrt{\overline{OA}^2 - D^2}.$$

Pertanto, fissato un generico reale l $(0 \le l \le 2R)$, si ha:

$$L \le l \Rightarrow D^2 \ge R^2 - \frac{l^2}{4},$$

ossia

$$D \le -\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} \quad \text{oppure} \quad D \ge \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

Abbiamo quindi per la funzione di distribuzione $P\{L \le l\}$:

$$\begin{aligned} P\{L \le l\} &= P\left\{D \le -\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\right\} + P\left\{D \ge \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\right\} \\ &= P\left\{D \ge \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

dal momento che D per ipotesi non può assumere valori negativi. Dalla (1) segue poi:

$$\begin{aligned} P\{L \le l\} &= 1 - P\left\{D < \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}\right\} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{R^2 - l^2/4}}{R} = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - l^2}}{2R}. \end{aligned}$$

In conclusione, si ha:

$$P\{\overline{AC} \le l\} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \le 0, \\ \dfrac{2R - \sqrt{4R^2 - l^2}}{2R} & \text{se } 0 < l \le 2R, \\ 1 & \text{se } l > 2R. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 10**

Il peso di un oggetto valutato mediante una bilancia che dispone soltanto di pesi di riferimento multipli di 1 g sia compreso tra k e $k+1$ grammi. Si determini la funzione di distribuzione della variabile casuale errore se si attribuisce a detto oggetto il peso convenzionale di $k + 1/2$ grammi.

Soluzione

Attribuendo all'oggetto il peso di $k+1/2$ grammi si commette un errore che assume valori nell'intervallo $(-1/2, 1/2)$. In assenza di motivazioni che portino a ritenere che tra i valori possibili ne esista qualcuno privilegiato, rappresentiamo l'errore mediante una variabile casuale X distribuita uniformemente in $(-1/2, 1/2)$. La sua funzione densità di probabilità è pertanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi la sua funzione di distribuzione è la seguente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le -\dfrac{1}{2}, \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{se } -\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 11**

In un esperimento si misura la densità di una certa sostanza. Supponendo che detta densità sia una variabile casuale distribuita uniformemente nell'intervallo $(-35 \cdot 10^{-4}, 35 \cdot 10^{-4})$ si calcolino:

a) la probabilità che l'errore sia compreso tra 0.0021 e 0.0048;
b) la probabilità che l'errore ecceda 0.0028.

Soluzione

Detta X la variabile casuale rappresentante la densità della sostanza e denotata con $f_X(x)$ la densità di probabilità di X, risulta per ipotesi:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7 \cdot 10^{-3}} & \text{se } x \in (-35 \cdot 10^{-4}, 35 \cdot 10^{-4}), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} P\{21 \cdot 10^{-4} \le X \le 48 \cdot 10^{-4}\} &= \int_{21 \cdot 10^{-4}}^{48 \cdot 10^{-4}} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{21 \cdot 10^{-4}}^{35 \cdot 10^{-4}} \frac{1}{7 \cdot 10^{-3}}\, dx = 0.2. \end{aligned}$$

Inoltre risulta:

$$P\{X \geq 0.0028\} = \int_{28\cdot 10^{-4}}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{28\cdot 10^{-4}}^{35\cdot 10^{-4}} \frac{1}{7\cdot 10^{-3}}\,dx = 0.1.$$

▷ **ESERCIZIO 12**

Si supponga che l'angolo che l'ago di una bussola forma con una direzione fissata a caso sia una variabile casuale uniforme. Si determini la funzione di distribuzione di detta variabile e se ne costruisca il grafico.

Soluzione

Dal momento che è assegnata una direzione (e non anche un verso) la variabile casuale Φ denotante l'angolo formato tra la direzione dell'ago e quella fissata a caso è una variabile casuale definita in $(0,\pi)$ ed ivi uniformemente distribuita. La sua densità di probabilità è quindi:

$$f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } \phi \in (0,\pi), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

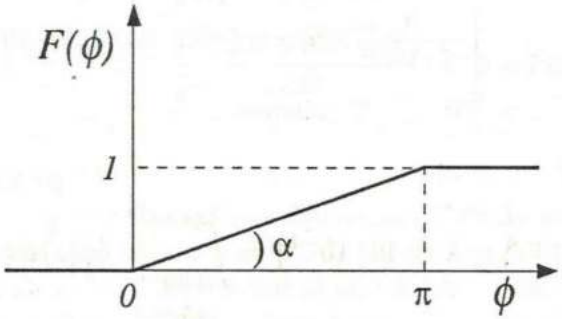
Per definizione, la funzione di distribuzione $F_\Phi(\phi)$ è allora:

$$F_\Phi(\phi) = P\{\Phi \leq \phi\} = \int_{-\infty}^{\phi} f_\Phi(x)\,dx.$$

Si ha quindi:

$$F_\Phi(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi \leq 0, \\ \dfrac{\phi}{\pi} & \text{se } 0 < \phi \leq \pi \\ 1 & \phi > \pi. \end{cases}$$

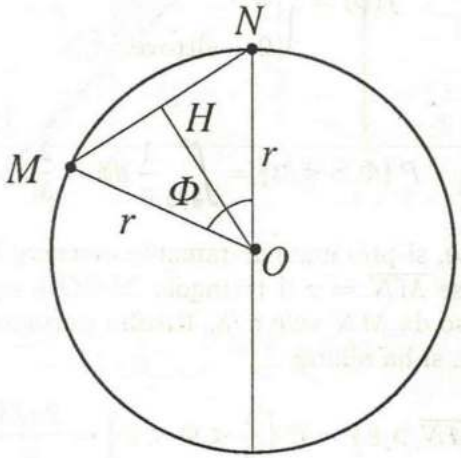
In figura è riportato il grafico di $F_\Phi(\phi)$. Nell'intervallo $(0,\pi)$ la funzione di distribuzione è lineare con coefficiente angolare $\operatorname{tg}\alpha = 1/\pi$.



▷ **ESERCIZIO 13**

Si fissino a caso due punti M e N su di una circonferenza di raggio r in modo tale che l'angolo al centro Φ sia uniformemente distribuito nell'intervallo $(0,\pi)$. Calcolare la probabilità che la lunghezza della corda MN sia maggiore di r.

Soluzione



Si consideri (v. figura) il triangolo isoscele MON formato dalla generica corda e dai raggi OM e ON, e sia Φ $(0 < \Phi < \pi)$ il suo angolo al vertice. La mediana OH divide il triangolo in due triangoli rettangoli i cui angoli acuti sono rispettivamente $\Phi/2$ e $(\pi - \Phi)/2$. Osserviamo che si ha:

$$\overline{MH} = r \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$$

e quindi:

$$\overline{MN} = 2r \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}.$$

Si osservi poi che risulta

$$P\{\overline{MN} > r\} \equiv P\left\{2r \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2} > r\right\} = P\left\{\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2} > \frac{1}{2}\right\}.$$

Poiché $\Phi/2$ varia nell'intervallo $(0,\pi/2)$ ed in questo intervallo la funzione seno è strettamente monotona, si ha anche:

$$P\left\{\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2} > \frac{1}{2}\right\} = P\left\{\frac{\Phi}{2} > \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right\} = P\left\{\frac{\Phi}{2} > \frac{\pi}{6}\right\}$$
$$= P\left\{\Phi > \frac{\pi}{3}\right\},$$

ossia:

$$P\left\{\overline{MN} > r\right\} \equiv P\left\{\Phi > \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Ma per ipotesi Φ è distribuito uniformemente in $(0, \pi)$, cosicché la sua funzione di densità di probabilità $f(\phi)$ è:

$$f(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < \phi < \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$P\left\{\Phi > \pi/3\right\} = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{\pi}\, d\phi = \frac{2}{3}.$$

Alternativamente, si può immediatamente ottenere lo stesso risultato osservando che se $\overline{MN} = r$ il triangolo MNO è equilatero e quindi l'angolo Φ sotteso da MN vale $\pi/3$. Risulta pertanto $\overline{MN} > r$ se Φ è maggiore di $\pi/3$; si ha allora:

$$P\left\{\overline{MN} > r\right\} = P\left\{\frac{\pi}{3} < \Phi < \pi\right\} = \frac{2\pi/3}{\pi} = \frac{2}{3}.$$

▷ **ESERCIZIO 14**

Siano T_1 e T_2, con $T_1 > T_2$ due istanti scelti a caso nell'intervallo di tempo $(0, t)$. Calcolare la probabilità che l'intervallo intercorrente tra T_1 e T_2 sia non inferiore a $t/3$.

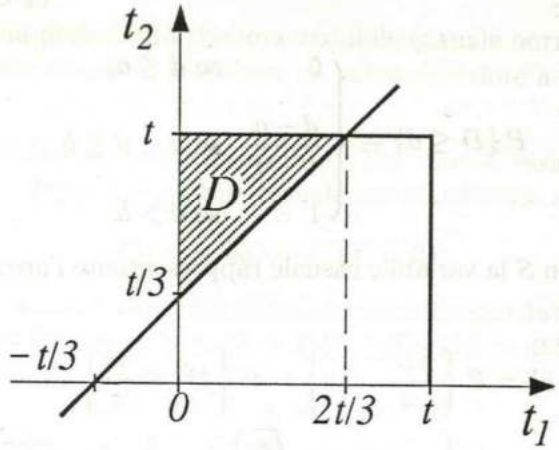
Soluzione

Denotiamo con $f(t_1)$ e con $g(t_2|t_1)$ rispettivamente la densità di probabilità della variabile casuali T_1 e la densità di probabilità della variabile casuale T_2 condizionata da T_1. Assumeremo:

$$f(t_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{se } 0 < t_1 < t, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$g(t_2|t_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{t - t_1} & \text{se } t_1 < t_2 < t, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si vuole determinare $P\left\{T_2 - T_1 \geq t/3\right\}$. Come si vede dalla figura, la zona tratteggiata indica il dominio D in cui risulta $T_2 - T_1 \geq t/3$. Tale dominio è definito infatti al seguente modo:



$$0 \leq t_1 \leq \frac{2}{3}, \qquad t_1 + \frac{t}{3} \leq t_2 \leq t.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} P\left\{T_2 - T_1 \geq \frac{t}{3}\right\} &= \int\int_D f(t_1) g(t_2|t_1)\, dt_1\, dt_2 \\ &= \int_0^{2t/3} \frac{1}{t}\, dt_1 \int_{t_1+t/3}^{t} \frac{1}{t - t_1}\, dt_2 \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2t/3} \frac{t - t_1 - t/3}{t - t_1}\, dt_1 \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2t/3} \left(1 - \frac{t/3}{t - t_1}\right) dt_1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \ln 3 = 0.3005. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 15**

Si determini la distribuzione di probabilità dell'area di un cerchio la lunghezza del cui diametro è una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo (a, b).

Soluzione

Sia D la variabile casuale denotante la lunghezza del diametro. Per

ipotesi risulta:

$$P\{D \le d\} = \begin{cases} 0 & \text{se } d \le a, \\ \dfrac{d-a}{b-a} & \text{se } a < d \le b, \\ 1 & \text{se } d > b. \end{cases}$$

Denotando con S la variabile casuale rappresentante l'area del cerchio, si ha:

$$\begin{aligned} P\{S \le s\} &= P\left\{\frac{\pi D^2}{4} \le s\right\} = P\left\{D^2 \le \frac{4s}{\pi}\right\} \\ &= P\left\{a \le D \le 2\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right\} = \frac{1}{b-a}\left(2\sqrt{s/\pi} - a\right), \\ &\qquad s \in \left(\frac{\pi a^2}{4}, \frac{\pi b^2}{4}\right] \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi di uniformità della variabile casuale D. Inoltre risulta $P\{S \le s\} = 0$ se $s \le \pi a^2/4$ e $P\{S \le s\} = 1$ se $s > \pi b^2/4$.

▷ **ESERCIZIO 16**

Sia X una variabile casuale normale standard. Si calcolino:

a. $P\{X < 2.3\}$;
b. $P\{X < -0.9\}$;
c. $P\{0.8 < X \le 1.5\}$;
d. $P\{-2.6 < X < 1.3\}$.

Soluzione

L'ipotesi che la X sia normale consente di rispondere al quesito direttamente utilizzando le tavole della distribuzione normale standard. Si ha pertanto:

a. $P\{X < 2.3\} = P\{X \le 0\} + P\{0 < X < 2.3\} = 0.5 + 0.4893 = 0.9893$;
b. $P\{X < -0.9\} = 1 - P\{X \le 0.9\} = 1 - P\{X \le 0\} + -P\{0 \le X \le 0.9\} = 1 - 0.5 - 0.3159 = 0.1841$;
c. $P\{0.8 < X \le 1.5\} = P\{X \le 1.5\} - P\{X < 0.8\} = 0.4332 - 0.2881 = 0.1451$;
d. $P\{-2.6 < X < 1.3\} = P\{0 < X < 2.6\} + P\{0 < X < 1.3\} = 0.4953 + 0.4032 = 0.8985$.

▷ **ESERCIZIO 17**

Si determini la probabilità che una variabile casuale normale di media 20 e deviazione standard 9 assuma un valore inferiore a 38.

Soluzione

Sia X la variabile casuale considerata. Per ipotesi essa è $N(20; 81)$. Sia $Y = (X - 20)/9$ la variabile casuale standardizzata si ha:

$$P\{X < 38\} = P\{Y < 2\}.$$

Consultando le tavole della distribuzione normale standard si ha infine: $P\{Y < 2\} = P\{-\infty < Y \le 0\} + P\{0 \le Y < 2\} = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$.

▷ **ESERCIZIO 18**

Sia X una variabile casuale normale standard. Stabilire quale dei due eventi $\{X \le 0.4\}$ e $\{X \ge 0.4\}$ ha probabilità maggiore di occorrenza.

Soluzione

La variabile casuale ha densità di probabilità simmetrica intorno al valore $x = 0$ avendosi:

$$P\{X \le 0\} = P\{X \ge 0\} = \frac{1}{2}.$$

È quindi evidente che risulta $P\{X \le 0.4\} > P\{X \ge 0.4\}$. Alla stessa conclusione si perviene anche osservando che si ha:

$$\begin{aligned} P\{X \le 0.4\} &= P\{X \le 0\} + P\{0 \le X \le 0.4\} \\ &= \frac{1}{2} + P\{0 \le X \le 0.4\}, \end{aligned}$$

mentre risulta:

$$\begin{aligned} P\{X \ge 0.4\} &= P\{X \ge 0\} - P\{0 \le X \le 0.4\} \\ &= \frac{1}{2} - P\{0 \le X \le 0.4\}. \end{aligned}$$

In maniera analoga si conclude che per ogni $\alpha > 0$ si ha:

$$P\{X \le \alpha\} > P\{X \ge \alpha\}.$$

▷ **ESERCIZIO 19**

Si determinino i valori di a e b $(a < b)$ con $\delta = b - a$ fissato a priori che rendono massima $P\{a \le X \le b\}$ nell'ipotesi in cui X è normale con media m e varianza σ^2.

Soluzione

Poiché si ha:

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \qquad (1)$$

ricordando il grafico della densità normale è immediato convincersi che il punto di massimo m deve coincidere con il punto medio dell'intervallo $[a, b]$, ossia deve risultare:

$$a = m - \frac{\delta}{2}, \qquad b = m + \frac{\delta}{2}.$$

Alternativamente, si può procedere osservando che dalla (1) e dall'ipotesi $b - a = \delta$ si ha:

$$P\{a \le X \le a+\delta\} = \int_a^{a+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \qquad (2)$$

Determiniamo a imponendo che sia nulla $\dfrac{\partial P\{a \le X \le a+\delta\}}{\partial a}$. Dalla (2) abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\exp\left[-\frac{(a+\delta-m)^2}{2\sigma^2}\right] - \exp\left[-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\} = 0$$

da cui segue (escludendo il caso banale $\delta = 0$ ossia $a = b$):

$$a = m - \frac{\delta}{2}$$

e quindi:

$$b = m + \frac{\delta}{2}.$$

▷ **ESERCIZIO 20**

Sia X una variabile casuale normale con media m e varianza σ^2. Fissato un arbitrario intervallo $[a, b]$, si determini il valore di σ che massimizza $P\{a \le X \le b\}$.

Soluzione

Denotiamo con $P(\sigma)$ la probabilità $P\{a \le X \le b\}$ che si vuole rendere massima, ossia poniamo

$$P(\sigma) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Con il cambiamento di variabile $y = (x-m)/(\sigma\sqrt{2})$ otteniamo

$$P(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(a-m)/(\sigma\sqrt{2})}^{(b-m)/(\sigma\sqrt{2})} \exp\left(-y^2\right) dy. \qquad (1)$$

Determiniamo il massimo di $P(\sigma)$. Imponendo che risulti $P'(\sigma) = 0$, dalla (1) otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\left\{(a-m)\exp\left[-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}\right] - (b-m)\exp\left[-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\} = 0,$$

da cui segue

$$\exp\left[\frac{(b-m)^2 - (a-m)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{b-m}{a-m},$$

ovvero:

$$\sigma^2 = \frac{(b-m)^2 - (a-m)^2}{2\ \ln\dfrac{b-m}{a-m}}. \qquad (2)$$

Perché risulti $\sigma^2 > 0$, essendo il denominatore nella (2) positivo deve aversi:

$$(b-m)^2 - (a-m)^2 > 0,$$

ovvero:

$$m < \frac{a+b}{2}. \qquad (3)$$

In conclusione, se risulta $m \ge (a+b)/2$ non esiste alcun valore (reale) di σ che rende $P(\sigma)$ massima. Se invece la (3) è soddisfatta – ossia se il punto di massimo della normale è minore del punto medio dell'intervallo $[a, b]$ – la deviazione standard che rende $P(\sigma)$ massima è:

$$\sigma = \left[\frac{(b-m)^2 - (a-m)^2}{2\ln\dfrac{b-m}{a-m}}\right]^{1/2}.$$

Si noti come tale valore di σ corrisponda certamente ad un punto di massimo di $P(\sigma)$ dal momento che $P(\sigma)$ è monotona decrescente al crescere di σ e quindi non possiede punti di minimo al finito.

▷ **ESERCIZIO 21**

Si supponga che durante il periodo di letargo il consumo giornaliero di ossigeno di un rettile si riduca di X *cc*, dove X è approssimabile mediante una variabile casuale normale di media $\mu = 0.3$ *cc/min* e deviazione standard $\sigma = 0.04$ *cc/min*. Calcolare la probabilità che detta riduzione sia:

a) di almeno 0.40 *cc/min*;
b) al più di 0.25 *cc/min*;
c) compresa tra 0.20 *cc/min* e 0.35 *cc/min*.

Soluzione

Introduciamo la variabile casuale Z standard associata ad X:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0.3}{0.04},$$

e facciamo uso delle tavole della distribuzione normale standard. Si ha:

a) $P\{X \geq 0.40\} = P\{Z \geq 2.5\} = 0.5 - P\{0 < Z < 2.5\}$
$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$;
b) $P\{X \leq 0.25\} = P\{Z \leq -1.25\} = P\{Z \geq 1.25\}$
$= 0.5 - P\{0 < Z < 1.25\} = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$;
c) $P\{0.20 \leq X \leq 0.35\} = P\{-2.5 \leq Z \leq 1.25\}$
$= P\{0 \leq Z \leq 2.5\} + P\{0 \leq Z \leq 1.25\}$
$= 0.4938 + 0.3944 = 0.8882$.

▷ **ESERCIZIO 22**

Sia α la probabilità che una variabile casuale normale standard assuma un valore superiore a z_α. Determinare z_α per i seguenti valori di α: 0.0314; 0.0080; 0.0120; 0.5910.

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che, denotando con $\varphi_Z(z)$ la densità di probabilità della variabile casuale normale standard Z, si ha:

$$P\{z_\alpha \leq Z < \infty\} = \int_{z_\alpha}^{\infty} \varphi_Z(z)\,dz = \alpha,$$

e quindi per $z_\alpha > 0$:

$$P\{0 \leq Z \leq z_\alpha\} = \int_0^{z_\alpha} \varphi_Z(z)\,dz = \int_0^{\infty} \varphi_Z(z)\,dz - \alpha.$$

Si ha quindi anche:

$$P\{0 \leq Z \leq z_\alpha\} = \int_0^{z_\alpha} \varphi_Z(z)\,dz = 0.5 - \alpha.$$

Utilizziamo quest'ultima formula per rispondere ai primi tre quesiti dell'esercizio. Imponiamo che risulti:

a) $P\{0 \leq z \leq z_\alpha\} \equiv 0.5 - 0.0314 = 0.4686$. Dalle tavole della distribuzione normale standard vediamo che tale uguaglianza è soddisfatta per $z_\alpha = 1.86$;
b) $P\{0 \leq z \leq z_\alpha\} \equiv 0.5 - 0.0080 = 0.4920$. Dalle tavole si trova che tale uguaglianza è soddisfatta per $z_\alpha = 2.41$;
c) $P\{0 \leq z \leq z_\alpha\} \equiv 0.5 - 0.0120 = 0.4880$. Questa volta le tavole non indicano alcun valore di z_α che rende soddisfatta la precedente uguaglianza. Un valore approssimato si ottiene tuttavia osservando che per $z'_\alpha = 2.26$ si ha $P\{0 \leq z \leq z'_\alpha\} = 0.4881$ che differisce per un decimillesimo dalla probabilità assegnata.

L'ultimo quesito richiede la determinazione del valore di z_α tale che $P\{z > z_\alpha\} = 0.5910$. Poiché tale probabilità è maggiore di 0.5 questa volta risulta $z_\alpha < 0$. Per poter utilizzare le tavole della distribuzione normale standard osserviamo che risulta

$$\begin{aligned} 0.5910 \equiv P\{z > z_\alpha\} &= P\{z_\alpha \leq z \leq 0\} + P\{0 \leq z < \infty\} \\ &= P\{0 \leq z \leq -z_\alpha\} + 0.5. \end{aligned}$$

Si ha quindi $P\{0 \leq z \leq -z_\alpha\} = 0.0910$ e dalle tavole segue $-z_\alpha = 0.23$ e quindi $z_\alpha = -0.23$.

▷ **ESERCIZIO 23**

Una variabile casuale normale a media nulla assume con probabilità 0.7 un valore nell'intervallo $(-10, 10)$. Valutare la sua deviazione standard.

Soluzione

Detta X la variabile casuale, si ha per ipotesi:

$$P\{-10 \leq X \leq 10\} = 0.7$$

ovvero:

$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \equiv 2\int_0^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0.7.$$

Con il cambiamento di variabile $y = x/\sigma$ abbiamo poi:

$$2\int_0^{10/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 0.7$$

ovvero:

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.35 \qquad (1)$$

dove Φ denota la funzione di distribuzione della variabile casuale normale standard (che per brevità chiameremo "distribuzione normale standard")

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Dalle tavole della distribuzione normale standard si vede che la (1) è approssimativamente soddisfatta per $10/\sigma = 1.04$ (con tale valore dell'argomento in luogo di 0.35 si ottiene 0.3508), da cui segue:

$$\sigma = \frac{10}{1.04} = 9.6154.$$

▷ **ESERCIZIO 24**

Calcolare la probabilità che il discostamento di una variabile casuale normale $N(m;1)$ dal suo valore medio sia in valore assoluto minore di $1/2$.

Soluzione

Denotando con X la variabile casuale e con Φ la distribuzione normale standard imponiamo che risulti:

$$P\left\{m - \frac{1}{2} \le X \le m + \frac{1}{2}\right\} = \int_{m-1/2}^{m+1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right] dx.$$

Con il cambiamento di variabile $y = x - m$ si ha poi:

$$P\left\{m - \frac{1}{2} \le X \le m + \frac{1}{2}\right\} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \equiv 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right).$$

Consultando le tavole della distribuzione normale standard ricaviamo poi $\Phi(1/2) = 0.1915$ così che in conclusione si ha:

$$P\left\{m - \frac{1}{2} \le X \le m + \frac{1}{2}\right\} \equiv P\left\{|X - m| < \frac{1}{2}\right\} = 0.383.$$

▷ **ESERCIZIO 25**

Una fabbrica produce lampade fluorescenti la cui durata media di funzionamento è di 1 500 h con deviazione standard di 100 h. Calcolare la probabilità che una lampada scelta a caso abbia una durata di funzionamento compresa tra 1 250 h e 1 310 h nell'ipotesi che la durata di funzionamento sia approssimativamente rappresentabile mediante una variabile casuale normale.

Soluzione

Si indichi con X la variabile casuale che rappresenta la durata di funzionamento in ore di una lampada; essa ha per ipotesi distribuzione $N(1\,500; 10^4)$. Per calcolare $P\{1\,250 \le X \le 1\,310\}$ conviene trasformare tale intervallo in quello corrispondente per la variabile standard associata $Z = (X - 1\,500)/100$ in modo da poter utilizzare le tavole della distribuzione normale standard. Si ha così:

$$\begin{aligned} P\{1\,250 \le X \le 1\,310\} &= P\{-2.5 \le Z \le -1.9\} \\ &\equiv \Phi(-1.9) - \Phi(-2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(1.9) \\ &= 0.4938 - 0.4713 = 0.0225 \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della proprietà $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

▷ **ESERCIZIO 26**

Una cooperativa vinicola mette in commercio damigiane contenenti in media $5\,l$ di vino con una varianza di $0.01\,l^2$. Approssimando il contenuto di ciascuna damigiana mediante una variabile casuale normale, calcolare la probabilità che una damigiana acquistata presso un rivenditore contenga almeno $4.95\,l$ di vino.

Soluzione

Riassumendo i dati del problema possiamo dire che la variabile casuale X rappresentante il contenuto di una damigiana risulta essere $N(5; 0.01)$. Per determinare $P\{X \ge 4.95\}$ ricorriamo alla variabile casuale standard associata $Z = (X - 5)/0.1$:

$$\begin{aligned} P\{X \ge 4.95\} &= P\{Z \ge -0.5\} \\ &= \frac{1}{2} + P\{0 \le Z \le 0.5\}. \end{aligned}$$

Poiché dalle tavole della distribuzione normale standard risulta:

$$P\{0 \le Z \le 0.5\} = \Phi(0.5) = 0.1915,$$

in definitiva si ha:

$$P\{X \ge 4.95\} = 0.6915.$$

▷ **ESERCIZIO 27**

Sia X una variabile casuale normale a media m e varianza σ^2. Utilizzare le tavole della distribuzione normale standard per calcolare le seguenti probabilità:

$$P\{m-\sigma \le X \le m+\sigma\}; \quad P\{m-2\sigma \le X \le m+2\sigma\};$$

$$P\{m-3\sigma \le X \le m+3\sigma\}.$$

Soluzione

Passando alla variabile casuale standard $Z=(X-m)/\sigma$ e denotando con h un intero positivo si ha:

$$P\{m-h\sigma \le X \le m+h\sigma\} = P\{-h \le Z \le h\}$$
$$= \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - \int_{-\infty}^{-h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} + \Phi(h) - \frac{1}{2} + \Phi(h) = 2\Phi(h)$$

dove $\Phi(z)$ rappresenta la distribuzione normale standard. Poiché dalle tavole risulta $\Phi(1)=0.3413$, $\Phi(2)=0.4772$ e $\Phi(3)=0.4987$, si ha in definitiva:

$$P\{m-\sigma \le X \le m+\sigma\} = 0.6826$$
$$P\{m-2\sigma \le X \le m+2\sigma\} = 0.9544$$
$$P\{m-3\sigma \le X \le m+3\sigma\} = 0.9974.$$

Si vede così in particolare che è minore dello 0.3% la probabilità che una variabile casuale normale di media m e varianza σ^2 assuma un valore che cada al di fuori dell'intervallo di semidimensione 3σ avente centro in m. È questa la base della cosiddetta "legge dei tre sigma" secondo cui è altamente improbabile che una variabile casuale normale assuma valori che distano dalla sua media per più di tre deviazioni standard.

▷ **ESERCIZIO 28**

Da una serie di misure effettuate risulta che il punto medio di fusione di un metallo A è di $1\,100\,°C$ con una deviazione standard di $3.5\,°C$. Si supponga che il punto di fusione espresso in $°C$ sia una variabile casuale normale. Effettuando degli esperimenti con un metallo incognito B si trova che il suo punto di fusione è di $1\,118\,°C$. È verosimile assumere che A e B siano lo stesso metallo?

Soluzione

Poiché il valore 1 118 dista dalla media per più di 3σ, in base a quanto visto nel precedente esercizio possiamo concludere che B ed A non sono lo stesso metallo. Più precisamente, poiché la differenza dei punti di fusione dei due metalli è pari a $18\,°C$, e quindi è uguale all'incirca a 5.14 deviazioni standard, la probabilità P che A e B siano lo stesso metallo è certamente minore dello 0.3%.

▷ **ESERCIZIO 29**

Un distributore automatico di caffè dispensa razioni che assumeremo normalmente distribuite con deviazione standard di $2\,g$. Se il 25% delle razioni contiene non meno di $30\,g$ di caffè, si determini il peso medio di dette razioni.

Soluzione

Sia X la variabile casuale che rappresenta il peso in grammi delle razioni di caffè. Per ipotesi X è normale con media μ incognita e varianza 4. Si ha inoltre:

$$P\{X \ge 30\} = 0.25.$$

Pertanto, passando alla variabile casuale standard $Z=(X-\mu)/2$ abbiamo:

$$P\left\{Z \ge \frac{30-\mu}{2}\right\} = P\{X \ge 30\} = 0.25$$

e quindi anche

$$P\left\{Z < \frac{30-\mu}{2}\right\} \equiv 1 - P\left\{Z \ge \frac{30-\mu}{2}\right\} = 0.75.$$

Poiché, dunque, è $P\{Z < (30-\mu)/2\} > 1/2$, ne consegue che la quantità $(30-\mu)/2$ è positiva. Dalla precedente uguaglianza segue allora:

$$P\{Z \le 0\} + P\left\{0 < Z < \frac{30-\mu}{2}\right\} = 0.75$$

cosicché si ha:

$$P\left\{0 < Z < \frac{30-\mu}{2}\right\} = 0.25.$$

Dalle tavole della distribuzione normale standard si vede infine che al valore 0.2486 (il più vicino al valore 0.25) corrisponde l'argomento $z=0.67$. Deve dunque aversi:

$$\frac{30-\mu}{2} = 0.67$$

da cui segue $\mu = 28.66$.

▷ **ESERCIZIO 30**

Si supponga che la domanda di carne in una macelleria in un periodo di 7 giorni sia approssimativamente normalmente distribuita con media di $800\,Kg$ e varianza di $81\,Kg^2$. Se nella macelleria giacciono $850\,Kg$ di carne, qual è la probabilità che tale quantitativo sia eccessivo? Si determini, inoltre, quanta carne debba trovarsi nella macelleria ogni settimana perché essa non risulti esaurita con probabilità del 90%.

Soluzione

Denotiamo con X la variabile casuale rappresentante la domanda di carne in chilogrammi relativa ad un periodo di 7 giorni. Per ipotesi essa è normale con media $\mu = 800\,Kg$ e deviazione standard $\sigma = 9\,Kg$. Come sappiamo dalla legge dei tre sigma (cf. Esercizio 27), è altamente improbabile che la variabile casuale X assuma valori al di fuori dell'intervallo

$$I = (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (773\,Kg\,, 827\,Kg).$$

Possiamo pertanto concludere che è altamente probabile che siano eccessivi gli $850\,Kg$ di carne giacenti nella macelleria. Per rispondere al secondo quesito, denotiamo con q la quantità incognita di carne in Kg nella macelleria. Deve aversi:

$$P\{X < q\} = 0.9.$$

Passando alla variabile casuale standard $Z = (X - 800)/9$ si ha allora:

$$P\left\{Z < \frac{q - 800}{9}\right\} = 0.9$$

da cui segue anche:

$$P\left\{0 < Z < \frac{q - 800}{9}\right\} = 0.4.$$

Dalle tavole della distribuzione normale standard si vede che il valore che meglio approssima 0.4 corrisponde all'argomento 1.28. Imponendo pertanto che risulti:

$$\frac{q - 800}{9} = 1.28$$

si ottiene $q = 811.52$. In conclusione, con probabilità del 90% la scorta settimanale di carne non si esaurisce se detta scorta è pari a $811.52\,Kg$.

▷ **ESERCIZIO 31**

In una misura di distanza di un oggetto da un punto di riferimento si commette un errore sistematico per difetto di $30\,m$. Supponendo che a questo si sovrapponga un errore casuale caratterizzato da una distribuzione normale di varianza $2.5\,Km^2$, calcolare:

a. la probabilità che la distanza venga determinata con un errore in valore assoluto non superiore a $80\,m$;
b. la probabilità che la distanza determinata non superi quella effettiva.

Soluzione

È consuetudine assumere che gli errori casuali di misura siano variabili casuali normali con media zero e varianza assegnata. Nel nostro caso la variabile casuale X denotante l'errore totale espresso in metri è dunque $N(-30; 2500)$. La probabilità che la distanza venga determinata con un errore in valore assoluto non superiore a $80\,m$ è dunque:

$$P\{|X| \le 80\} \equiv P\{-80 \le X \le 80\}.$$

Passando alla variabile casuale standard $Z = (X + 30)/50$, si ha dunque:

$$\begin{aligned} P\{|X| \le 80\} &= P\{-1 \le Z \le 2.2\} \\ &= P\{-1 \le Z \le 0\} + P\{0 < Z \le 2.2\} \\ &\equiv P\{0 \le Z \le 1\} + P\{0 < Z \le 2.2\}. \end{aligned}$$

Utilizzando le tavole della distribuzione normale standard si trova:

$$P\{0 \le Z \le 1\} = 0.3413; \qquad P\{0 < Z \le 2.2\} = 0.4861$$

così che in definitiva si ha:

$$P\{|X| \le 80\} = 0.8274.$$

Per rispondere al secondo quesito osserviamo che la distanza determinata non supera quella effettiva se e solo se l'errore complessivo X non è positivo, ossia se e solo se $-\infty < X \le 0$, ovvero $-\infty < Z \le 0.6$. Utilizzando le tavole della distribuzione normale standard si ha infine:

$$\begin{aligned} P\{-\infty < X \le 0\} &\equiv P\{-\infty < Z \le 0.6\} \\ &= P\{-\infty < Z \le 0\} + P\{0 < Z \le 0.6\} \\ &= 0.5 + 0.2257 = 0.7257. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 32**

In una data regione si verifica una precipitazione annuale media di 52.3 *cm* con deviazione standard di 15.1 *cm*. Si calcoli in quanti anni di uno stesso secolo c'è da attendersi una precipitazione annuale compresa tra 41 *cm* e 62 *cm* nell'approssimazione in cui la precipitazione annuale sia una variabile casuale normale.

Soluzione

La variabile casuale X rappresentante la precipitazione annuale in *cm* è per ipotesi normale con media 52.3 e deviazione standard 15.1. Introducendo la variabile standard $Z = (X - 52.3)/15.1$ si ha allora:

$$\begin{aligned} P\{41 \le X \le 62\} &= P\{-0.7483 \le Z \le 0.6424\} \\ &= P\{0 \le Z \le 0.7483\} + P\{0 \le Z \le 0.6424\} \\ &\simeq 0.2704 + 0.2389 = 0.5093. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un esperimento di 100 prove ripetute ed un evento di probabilità $p \equiv P\{41 \le X \le 62\} = 0.5093$. Ricordando che il valore medio del numero di successi in un esperimento di prove ripetute è dato dal prodotto della probabilità di successo nelle singole prove per il numero di prove, possiamo affermare che tale evento si verifica in media $100 \cdot 0.5093 = 50.93$ volte. Quindi possiamo concludere che all'incirca nella metà degli anni del secolo la precipitazione annuale è compresa tra 41 *cm* e 62 *cm*.

▷ **ESERCIZIO 33**

Calcolare la probabilità che estraendo 100 volte consecutive una carta da un mazzo ben mescolato si ottenga 20 volte una carta di fiori.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di $n = 100$ prove ripetute con probabilità $\theta = 0.25$ di occorrenza dell'evento "carta di fiori" in ogni prova. La probabilità richiesta è dunque

$$b(100, 20; 0.25) = \binom{100}{20}(0.25)^{20}(1 - 0.25)^{80}.$$

Una valutazione immediata di tale probabilità può aversi mediante l'approssimazione normale che è giustificata poiché i prodotti $n\theta$ e $n(1-\theta)$ sono entrambi maggiori di 5. La variabile casuale X normale approssimante ha media $\mu = 25$ e varianza $\sigma^2 = 18.75$ così che si ha:

$$b(100, 20; 0.25) \equiv P\{19.5 \le X \le 20.5\}.$$

Passando alla variabile casuale standard $Z = (X - 25)/4.3301$ si ha infine:

$$\begin{aligned} P\{19.5 \le X \le 20.5\} &= P\{-1.2702 \le Z \le -1.0392\} \\ &= P\{1.0392 \le Z \le 1.2702\} \\ &= P\{0 \le Z \le 1.2702\} - P\{0 \le Z \le 1.0392\} \\ &\simeq 0.3980 - 0.3485 = 0.0495. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 34**

Si supponga che con probabilità 0.09 un uomo dell'età di 40 anni muoia nel corso di un anno. Se una società assicuratrice ha in atto 60 000 polizze di assicurazione sulla vita di uomini di tale età, valutare:

a. la probabilità che 500 indennizzi vengano liquidati in un anno;
b. la probabilità che vengano liquidati almeno 300 indennizzi.

Soluzione

Si tratta di un problema di $n = 60\,000$ prove ripetute con probabilità $p = 0.09$ di occorrenza dell'evento in esame nelle singole prove. La probabilità di cui al punto a) è dunque

$$b(60\,000, 500; 0.09) = \binom{60\,000}{500}(0.09)^{500}(1 - 0.09)^{59\,500}.$$

La probabilità P che vengano liquidati almeno 300 indennizzi è poi:

$$P = \sum_{k=300}^{60\,000} \binom{60\,000}{k}(0.09)^k(1 - 0.09)^{60\,000-k}.$$

Una valutazione di questa probabilità può ottenersi ricorrendo all'approssimazione della distribuzione binomiale. Detto X il numero di indennizzi, definiamo la variabile casuale standard

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - 5\,400}{70.0999}.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} b(60\,000, 500; 0.09) &\simeq P\{499.5 \le X \le 500.5\} \\ &= P\{-69.9074 \le Z \le -69.8931\} \\ &= P\{0 \le Z \le 69.9074\} - P\{0 \le Z \le 69.8931\} \\ &\simeq 0 \end{aligned}$$

Si noti infatti che per valori così grandi dell'argomento la distribuzione normale standard non varia apprezzabilmente. In maniera analoga troviamo:

$$P = P\{X \geq 300\} \equiv P\{Z \geq -72.7533\} \simeq 1.$$

▷ **ESERCIZIO 35**

In un esperimento di tiro al bersaglio la deviazione orizzontale del proiettile (ossia l'ascissa del punto colpito in un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine nel centro del bersaglio) sia una variabile casuale gaussiana con valore medio pari a 15 cm. L'esperienza passata mostra che nel 50% dei tiri effettuati la deviazione orizzontale è inferiore a 9 cm o superiore a 21 cm. Calcolare la varianza della deviazione orizzontale.

Soluzione

Sia D la variabile casuale che denota la deviazione orizzontale. Per ipotesi essa è $N(15; \sigma^2)$. Dal testo dell'esercizio si ha:

$$P\{9 \leq D \leq 21\} = 0.5.$$

Essendo l'intervallo $(9, 21)$ simmetrico intorno alla media, per la simmetria della densità normale segue:

$$P\{9 \leq D \leq 15\} = P\{15 \leq D \leq 21\} = 0.25. \qquad (1)$$

Introducendo la variabile casuale standard $Z = (D - 15)/\sigma$, dalla (1) segue anche:

$$P\left\{-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq 0\right\} = P\left\{0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right\} = 0.25.$$

Dalle tavole della distribuzione normale standard si vede che $Z = 0.67$ è il valore per il quale si ottiene la migliore approssimazione (0.2486) della precedente probabilità. Imponendo allora che risulti:

$$\frac{6}{\sigma} = 0.67$$

segue in definitiva $\sigma = 8.9552$ cm.

▷ **ESERCIZIO 36**

Si effettuano 100 lanci di una moneta. Si utilizzi l'approssimazione normale per valutare:

a. la probabilità di ottenere testa nel 50% dei casi;
b. la probabilità che l'evento "testa" si verifichi almeno 60 volte.

Soluzione

Sia X la variabile casuale che rappresenta il numero di teste ottenute in 100 lanci nell'approssimazione normale e sia

$$Z = \frac{X - 50}{5}$$

la variabile casuale standard associata. La probabilità di ottenere testa nel 50% dei casi è dunque:

$$b\left(100, 50; \frac{1}{2}\right) = P\{49.5 \leq X \leq 50.5\} = P\{-0.1 \leq Z \leq 0.1\}$$
$$= 2\,P\{0 \leq Z \leq 0.1\} = 0.0796.$$

Per calcolare la probabilità P che testa si verifichi almeno 60 volte procediamo in maniera simile:

$$P \simeq P\{X \geq 60\} = P\{Z \geq 2\} = 0.5 - P\{0 \leq Z \leq 2\}$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228.$$

▷ **ESERCIZIO 37**

Due dadi vengono simultaneamente lanciati 40 volte. Calcolare la probabilità che un 6, un 7 o un 8 si presentino almeno 20 volte.

Soluzione

La probabilità che in un singolo lancio dei due dadi si ottenga un punteggio pari a 6, 7 o 8 è $\theta = 4/9$. La probabilità p richiesta è dunque:

$$p = \sum_{k=20}^{40} \binom{40}{k} \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(\frac{5}{9}\right)^{40-k}.$$

Effettuiamo ora il calcolo ricorrendo alla variabile casuale X normale approssimante e alla variabile casuale standard ad essa associata

$$Z = \frac{X - 100\,\theta}{\sqrt{100\,\theta(1-\theta)}}.$$

Abbiamo:

$$p \simeq P\{X \geq 20\} = P\{Z \geq 0.7071\}$$
$$= 0.5 - P\{0 \leq Z \leq 0.7071\} \simeq 0.5 - 0.2580 = 0.2420.$$

▷ **ESERCIZIO 38**

Un elettrodomestico richiede in media una revisione ogni quattro anni. Si calcoli la probabilità che esso funzioni correttamente per almeno sei anni nell'ipotesi che l'intervallo di tempo tra due successive revisioni sia una variabile casuale a distribuzione esponenziale.

Soluzione

Si indichi con T la variabile casuale che denota l'intervallo di tempo in anni intercorrente tra due successive revisioni. Per ipotesi, la sua densità di probabilità è:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{t}{4}\right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La probabilità p desiderata può esprimersi come segue:

$$p = P\{T \geq 6\} = 1 - P\{T < 6\}$$
$$= 1 - \int_0^6 \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{t}{4}\right) dt = \exp\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.2231.$$

▷ **ESERCIZIO 39**

Il chilometraggio che un'auto di una certa serie può compiere senza dover registrare i freni viene riguardato come una variabile casuale esponenziale di parametro $\alpha = 20\,000\,Km$. Calcolare la probabilità che per un'auto di detta serie la registrazione si renda necessaria:

a. non prima di $10\,000\,Km$;
b. prima di $15\,000\,Km$.

Soluzione

Per ipotesi il chilometraggio compiuto è una variabile casuale X di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20\,000}\exp\left(-\frac{x}{20\,000}\right) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dette rispettivamente p e q le probabilità di cui ai quesiti a) e b) si ha allora:

$$p \equiv P\{X \geq 10\,000\} = \int_{10\,000}^{\infty} f_X(x)\,dx = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.6065$$
$$q \equiv P\{X < 15\,000\} = \int_0^{15\,000} f_X(x)\,dx = 1 - \exp\left(-\frac{3}{4}\right) = 0.5276.$$

▷ **ESERCIZIO 40**

Un'azienda ha un fatturato annuo (in milioni di lire) che può considerarsi come una variabile casuale a distribuzione gamma di parametri $\alpha = 160\sqrt{n}$ e $\beta = 4$, dove n rappresenta il numero di dipendenti. Supponendo che il costo annuo per dipendente sia di lire 16 milioni, determinare il numero di dipendenti che rende massimo il profitto medio.

Soluzione

Il profitto P della azienda può esprimersi come differenza del fatturato aziendale F e del costo totale degli n impiegati:

$$P = F - 16\,n.$$

Passando ai valori medi si ha allora:

$$\langle P \rangle = \langle F \rangle - 16\,n = 160\sqrt{n}\,4 - 16\,n,$$

avendo utilizzato l'espressione della media $\langle F \rangle = \alpha\,\beta$ della variabile casuale a distribuzione gamma di parametri α e β. Considerando n come una variabile continua, determiniamo il massimo di $\langle P \rangle$ imponendo l'annullarsi della derivata di $\langle P \rangle$ rispetto ad n:

$$\frac{640}{2\sqrt{n}} - 16 = 0.$$

Di qui segue $n = 400$. Questo è un punto di massimo dal momento che la derivata seconda di $\langle P \rangle$ rispetto ad n è sempre negativa.

▷ **ESERCIZIO 41**

Determinare i parametri di una distribuzione gamma di media 5 e varianza 10.

Soluzione
Si ricordi che per una distribuzione gamma di parametri α e β la media μ e la varianza σ^2 si esprimono al seguente modo:

$$\mu = \alpha\beta; \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2.$$

Da queste relazioni segue:

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{10}{5} = 2$$

e quindi, utilizzando la prima relazione:

$$\alpha = \frac{\mu}{\beta} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Pertanto la distribuzione gamma considerata ha parametri $\alpha = 2.5$ e $\beta = 2$.

▷ **ESERCIZIO 42**
Si supponga che il consumo giornaliero di energia elettrica (in milioni di Kw/h) sia una variabile casuale con distribuzione $\Gamma(2;4)$ e che l'impianto di erogazione cittadino abbia una capacità di erogazione giornaliera di 16 milioni di Kw/h. Calcolare la probabilità che l'energia erogata in un determinato giorno risulti insufficiente.

Soluzione
Sia X la variabile casuale rappresentante il consumo giornaliero di energia in milioni di Kw/h erogata in un determinato giorno. La probabilità che l'energia sia insufficiente può calcolarsi imponendo che il consumo sia maggiore dell'energia erogata:

$$P\{X > 16\} = \int_{16}^{\infty} \frac{1}{4^2\Gamma(2)}\, x \exp\left(-\frac{x}{4}\right) dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_{16}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{4}\right) dx.$$

Calcolando l'integrale per parti, otteniamo infine:

$$P\{X > 16\} = 5\, e^{-4} = 0.0916.$$

▷ **ESERCIZIO 43**
Si supponga che annualmente la frazione delle dichiarazioni dei redditi erronee sia una variabile casuale a distribuzione beta di parametri $\alpha = 3$ e $\beta = 12$. Si calcoli la probabilità che in un dato anno meno del 10% delle dichiarazioni dei redditi siano erronee.

Soluzione
Sia X la variabile casuale rappresentante la frazione delle dichiarazioni dei redditi annualmente erronee. Per ipotesi, la sua densità di probabilità $f(x)$ è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(15)}{\Gamma(3)\,\Gamma(12)}\, x^2(1-x)^{11} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La probabilità richiesta può calcolarsi come probabilità che X assuma un valore inferiore a 0.1:

$$P\{X < 0.1\} = \int_0^{0.1} f(x)\, dx = \frac{14!}{2!\,11!}\int_0^{0.1} x^2(1-x)^{11}\, dx.$$

Con una duplice integrazione per parti si ottiene:

$$\int_0^{0.1} x^2(1-x)^{11}\, dx = 0.0002$$

così che in definitiva si ha:

$$P\{X < 0.1\} = \frac{14!}{2!\,11!}\, 0.0002 = 0.2184.$$

▷ **ESERCIZIO 44**
Si supponga che la percentuale annuale di candidati che supera una particolare prova sia una variabile casuale a distribuzione beta di parametri $\alpha = 5$ e $\beta = 6$. Si calcolino:

a) la percentuale di candidati che mediamente supera la prova in un anno;
b) la probabilità che meno del 20% dei candidati non superi la prova.

Soluzione
Detta X la variabile casuale esprimente la percentuale annuale di candidati che superano la prova e $f(x)$ la sua densità di probabilità, per ipotesi si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(11)}{\Gamma(5)\,\Gamma(6)}\, x^4(1-x)^5 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Poiché per una variabile casuale X a distribuzione beta di parametri α e β risulta

$$\langle X \rangle = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

nel nostro caso si ha:

$$\langle X \rangle = \frac{5}{11} = 45.45\%.$$

Questa è la percentuale di candidati che mediamente supera la prova in un anno. Per rispondere al secondo quesito, osserviamo che la probabilità p richiesta in b) coincide con la probabilità che almeno l'80% dei candidati superi la prova. Si ha pertanto:

$$p \equiv P\{X > 0.8\} = \frac{10!}{4!\,5!}\int_{0.8}^{1} x^4(1-x)^5\,dx.$$

Con successive integrazioni per parti è poi facile verificare che risulta:

$$\begin{aligned}\int_{0.8}^{1} x^4(1-x)^5\,dx &= \frac{(0.2)^6}{6}(0.8)^4 + \frac{4}{6\cdot 7}(0.2)^7(0.8)^3 \\ &+ \frac{4\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 8}(0.2)^8(0.8)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}(0.2)^9(0.8) + \\ &+ \frac{4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}(0.2)^{10} = 5.0549\cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Si ha dunque in definitiva:

$$p \equiv P\{X > 0.58\} = \frac{10!}{4!\,5!}\,5.0549\cdot 10^{-6} = 0.0064.$$

▷ **ESERCIZIO 45**

Discutere se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, x^{\delta-1}\exp\left(-\gamma x^{\delta}\right) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \qquad (1)$$

con α, γ e β reali può interpretarsi come densità di probabilità di una variabile casuale.

Soluzione

Dalla condizione $f(x) \ge 0$, $\forall x \in R$ segue che deve essere $\alpha > 0$. Il valore di α può poi determinarsi imponendo la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \int_{0}^{\infty} \alpha\, x^{\delta-1}\exp\left(-\gamma x^{\delta}\right)dx = 1. \qquad (2)$$

È immediato convincersi che non può aversi $\delta = 0$ dal momento che tale scelta condurrebbe ad una funzione $f(x) = \alpha\, x^{-1}\exp(-\gamma)$, $x \in R^+$ che non è integrabile nell'intervallo $(0,\infty)$, non risultando così soddisfatta la condizione di normalizzazione (2). Analogamente si vede che non può aversi $\gamma = 0$. Consideriamo pertanto separatamente i casi $\gamma > 0$ e $\gamma < 0$.

a) $\gamma > 0$. In tal caso si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\alpha}{\gamma\,|\delta|}\,;$$

da questa e da (2) segue $\alpha = \gamma\,|\delta|$.

b) $\gamma < 0$. In tal caso si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \infty$$

cosicché l'ipotesi $\gamma < 0$ va scartata. In conclusione, la (1) è una funzione densità di probabilità purché risulti $\gamma > 0$ e $\alpha = \gamma\,|\delta|$, con δ reale non nullo. Nel caso $\gamma > 0$, $\delta > 0$ e quindi $\alpha = \gamma\,\delta$ la (1) prende il nome di densità di probabilità di Weibull che indicheremo con la scrittura:

$$W(\gamma,\delta;x) = \begin{cases} (\gamma\,\delta)\,x^{\delta-1}\exp(-\gamma x^{\delta}) & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0. \end{cases} \qquad (\gamma,\delta \in R^+)$$

▷ **ESERCIZIO 46**

Si supponga che la durata di funzionamento in ore di un televisore di mediocre qualità sia una variabile casuale con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 0.015\,t^{-0.5}\exp\left(-0.03\,t^{0.5}\right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \le 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Si calcoli la probalità P che esso continui a funzionare dopo 5 000 ore di già avvenuto funzionamento.

Soluzione
Notiamo incidentalmente (cf. Esercizio precedente) che la (1) può pensarsi così scritta:

$$f(x) = \begin{cases} 0.03 \cdot 0.5\, t^{0.5-1} \exp\left(-0.03\, t^{0.5}\right) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Essa pertanto è una densità di probabilità di Weibull, $W(\gamma, \delta; t)$, con $\gamma = 0.03$ e $\delta = 0.5$. La probabilità P richiesta può calcolarsi come la probabilità che il televisore funzioni per non meno di 5 000 ore:

$$P = \int_{5\,000}^{\infty} f(t)\, dt = \int_{5\,000}^{\infty} 0.015\, t^{-0.5} \exp\left(-0.03\, t^{0.5}\right) dt$$
$$= \int_{5\,000}^{\infty} \frac{d}{dt} \exp\left(-0.03\, t^{0.5}\right) = \exp\left\{-0.03\,(5\,000)^{0.5}\right\} = 0.1199.$$

▷ **ESERCIZIO 47**
La densità di probabilità di Cauchy è definita al seguente modo:

$$f(t) = \frac{1}{\pi\alpha}\left[1 + \left(\frac{t-\mu}{\alpha}\right)^2\right]^{-1}, \qquad -\infty < t < \infty$$

con $\alpha > 0$ e μ reali. Verificare che la densità di probabilità è normalizzata ad 1. Determinarne poi la funzione di distribuzione.

Soluzione
La condizione di normalizzazione segue immediatamente osservando che con il cambiamento di variabile $(t-\mu)/\alpha = x$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\alpha}\left[1 + \left(\frac{t-\mu}{\alpha}\right)^2\right]^{-1} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

Calcoliamo ora la funzione di distribuzione $F(t)$. Per definizione si ha per ogni t reale:

$$F(t) \equiv \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi\alpha}\int_{-\infty}^{t} \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^2\right]^{-1} dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{(t-\mu)/\alpha} \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

dove si è fatto uso del cambiamento di variabile $y = (x-\mu)/\alpha$. Si ha così in definitiva:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{t-\mu}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Poiché $F(\mu) = 1/2$, segue che il parametro μ è la mediana. Dallo studio della densità di probabilità $f(t)$ segue poi facilmente che $f(t)$ è simmetrica intorno a μ e che quest'ultimo è anche il massimo di $f(t)$.

▷ **ESERCIZIO 48**
Stabilire se la funzione

$$f(t) = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|t-\mu|}{\alpha}\right), \qquad -\infty < t < \infty \tag{1}$$

con μ reale arbitrario e α reale positivo, può interpretarsi come densità di probabilità di una variabile casuale.

Soluzione
Poiché $f(t)$ è per ogni t non negativa, occorre solo verificare che è unitario il suo integrale da $-\infty$ a ∞. A tale scopo osserviamo che per l'evidente simmetria di $f(t)$ intorno a μ si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\mu} \exp\left(-\frac{\mu-t}{\alpha}\right) dt$$
$$+ \frac{1}{2\alpha}\int_{\mu}^{\infty} \exp\left(-\frac{t-\mu}{\alpha}\right) dt$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int_{\mu}^{\infty} \exp\left(-\frac{t-\mu}{\alpha}\right) dt$$
$$= -\exp\left(-\frac{t-\mu}{\alpha}\right)\Big|_{\mu}^{\infty} = 1.$$

La densità di probabilità (1) è detta densità di Laplace. Si noti che essa presenta una cuspide nel punto μ e che va esponenzialmente a zero a $\pm\infty$.

CAPITOLO VI

FUNZIONI DI VARIABILI CASUALI

ESERCIZIO 1

Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale $Y = (2 - X)^2$, con X variabile casuale binomiale $b(x, 3; 1/4)$.

Soluzione

Per ipotesi, la variabile casuale X assume i valori $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ con probabilità

$$b\left(0,3;\frac{1}{4}\right) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$b\left(1,3;\frac{1}{4}\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

$$b\left(2,3;\frac{1}{4}\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

$$b\left(3,3;\frac{1}{4}\right) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64},$$

rispettivamente. A tali valori della variabile casuale X corrispondono i seguenti valori per la variabile $Y = (2 - X)^2$:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 1.$$

Possiamo quindi affermare che la variabile casuale Y assume i valori 0, 1, e 4 con le seguenti probabilità:

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 2\} \equiv b\left(2,3;\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X = 1\} + P\{X = 3\} \\ &= b\left(1,3;\frac{1}{4}\right) + b\left(3,3;\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X = 0\} = b\left(0,3;\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}.$$

In conclusione, la variabile casuale Y e la rispettiva distribuzione di probabilità sono rappresentabili mediante lo schema:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{9}{64} & \frac{7}{16} & \frac{27}{64} \end{pmatrix}$$

in cui la seconda riga rappresenta la richiesta distribuzione di probabilità.

▷ **ESERCIZIO 2**

Sia X una variabile casuale binomiale $b(x, 4; 1/2)$. Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale $Y = 1/(X+4)$.

Soluzione

La variabile casuale X assume i valori $x = 0, 1, 2, 3, 4$ con probabilità $b(x, 4; 1/2)$, rispettivamente, dove:

$$b\left(x, 4; \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad (x = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Corrispondentemente, la variabile casuale Y assume i valori

$$y = \frac{1}{x+4} \qquad (x = 0, 1, 2, 3, 4),$$

ossia i valori $y = 1/4,\ 1/5,\ 1/6,\ 1/7,\ 1/8$ con la seguente distribuzione di probabilità:

$$P\left\{Y = \frac{1}{4}\right\} \equiv P\{X = 0\} = \frac{1}{16}$$
$$P\left\{Y = \frac{1}{5}\right\} \equiv P\{X = 1\} = \frac{4}{16}$$
$$P\left\{Y = \frac{1}{6}\right\} \equiv P\{X = 2\} = \frac{6}{16}$$
$$P\left\{Y = \frac{1}{7}\right\} \equiv P\{X = 3\} = \frac{4}{16}$$
$$P\left\{Y = \frac{1}{8}\right\} \equiv P\{X = 4\} = \frac{1}{16}.$$

▷ **ESERCIZIO 3**

Sia X una variabile casuale distribuita secondo Poisson con parametro λ e sia x il generico valore di X. Si denoti poi con Y la variabile casuale così definita:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{per } x \text{ pari o nullo,} \\ 1 & \text{per } x \text{ dispari.} \end{cases}$$

Si determini la distribuzione di probabilità di Y.

Soluzione

Per ipotesi si ha:

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Pertanto risulta:

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} = P\{X = 2n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} \qquad (1) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right\} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) \\ &= \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}. \end{aligned}$$

Per calcolare $P\{Y = 1\}$ osserviamo che si ha:

$$P\{Y = 1\} = 1 - P\{Y = 0\}$$

e quindi, per la (1):

$$P\{Y = 1\} = 1 - \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.$$

In conclusione, la distribuzione di probabilità della variabile casuale Y è:

$$P\{Y=0\} = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2},$$

$$P\{Y=1\} = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}.$$

Si noti che al crescere di λ (ossia all'aumentare della media della variabile casuale poissoniana X) le probabilità $P\{Y=0\}$ e $P\{Y=1\}$ tendono entrambe al valore $1/2$.

ESERCIZIO 4

Determinare la distribuzione di probabilità della variabile casuale

$$Y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}X\right)$$

con X variabile casuale avente distribuzione di probabilità

$$p(x) = \frac{1}{2^x} \qquad (x = 1, 2, \dots).$$

Soluzione

Osserviamo anzitutto che $p(x)$ è una distribuzione di probabilità essendo positiva per tutti gli x interi ed avendosi

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^x} = 1.$$

Determiniamo ora i valori possibili di $Y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}X\right)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&Y = 1 \text{ per } X = 1\\
&Y = 0 \text{ per } X = 2\\
&Y = -1 \text{ per } X = 3\\
&Y = 0 \text{ per } X = 4\\
&Y = 1 \text{ per } X = 5\\
&Y = 0 \text{ per } X = 6\\
&Y = -1 \text{ per } X = 7\\
&Y = 0 \text{ per } X = 8\\
&\dots
\end{aligned}$$

In altri termini Y assume il valore 1 allorché risulta $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, ossia $X = 4k+1$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$; Y assume il valore 0 allorché $\frac{\pi}{2}x = k\pi$ $(k = 1, 2, \dots)$, ossia $X = 2k$ $(k = 1, 2, \dots)$; Y assume il valore -1 allorché $\frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, ossia $X = 3 + 4k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{X = 2k,\ k = 1, 2, \dots\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 2k\}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-1/4} - 1 = \frac{1}{3}\\
P\{Y=1\} &= P\{X = 4k+1,\ k = 0, 1, 2, \dots\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 4k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/16} = \frac{8}{15}\\
P\{Y=-1\} &= P\{X = 3+4k,\ k = 0, 1, 2, \dots\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 3+4k\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3+4k}} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k\\
&= \frac{1}{8}\,\frac{1}{1-1/16} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

In conclusione, la variabile casuale Y è rappresentabile al seguente modo:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

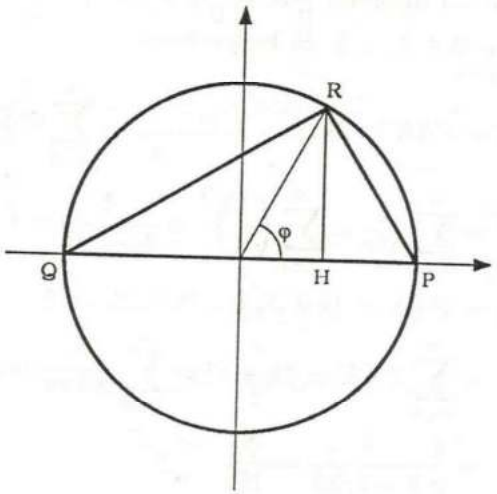
dove la prima riga contiene i valori della variabile casuale Y e la seconda riga le corrispondenti probabilità.

ESERCIZIO 5

Si consideri la circonferenza di raggio unitario con il centro coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali. Siano P e Q

le intersezioni di tale circonferenza con l'asse delle ascisse. Sia R un punto uniformemente distribuito sulla semicirconferenza superiore. Si determini la distribuzione dell'area del triangolo PQR.

Soluzione



Con riferimento alla figura, l'area A del triangolo PQR vale $A = \overline{PQ} \cdot \overline{RH}/2$, ossia $A = \operatorname{sen}\Phi$, con Φ uniformemente distribuito in $(0, \pi)$. Si ha pertanto, per $0 \le a < 1$:

$$P\{A \le a\} = P\{\operatorname{sen}\Phi \le a\} = P\{0 \le \Phi < \operatorname{arcsen} a\} + P\{\pi - \operatorname{arcsen} a < \Phi \le \pi\}. \tag{1}$$

Per l'ipotesi di uniformità della distribuzione di Φ, detta $f(\phi)$ la densità di probabilità di questa variabile casuale risulta:

$$f(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < \phi < \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} P\{0 \le \Phi < \operatorname{arcsen} a\} &= \int_0^{\operatorname{arcsen} a} f(\phi)\, d\phi = \frac{\operatorname{arcsen} a}{\pi}, \\ P\{\pi - \operatorname{arcsen} a < \Phi \le \pi\} &= \int_{\pi - \operatorname{arcsen} a}^{\pi} f(\phi)\, d\phi = \frac{\operatorname{arcsen} a}{\pi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sostituendo le (2) in (1) si ha in definitiva:

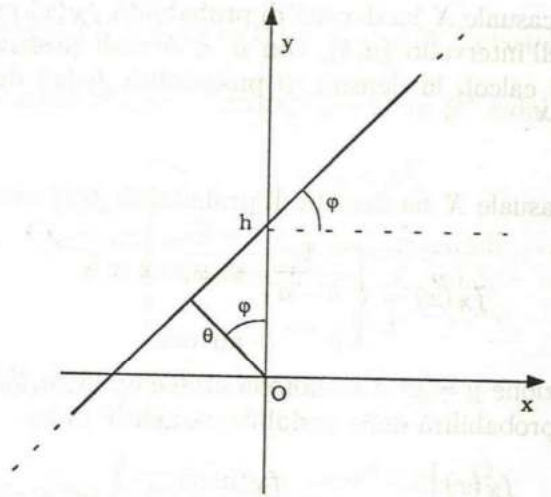
$$P\{A \le a\} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} a \qquad (0 \le a < 1).$$

Infine $P(A \le a) = 0$ se $a < 0$ e $P(A \le a) = 1$ se $a \ge 1$.

▷ **ESERCIZIO 6**

Con riferimento alla figura, si consideri una retta passante per il punto $A \equiv (0, h)$ e tracciata a caso, nel senso che l'angolo Φ è una variabile casuale distribuita uniformemente in $(0, \pi)$. Si calcoli la densità di probabilità della variabile casuale $\Theta = h \cos \Phi$.

Soluzione



Poiché la funzione $h \cos \Phi$ è monotona decrescente, dette $f(\theta)$ e $g(\phi)$ rispettivamente le densità di probabilità delle variabili casuali Θ e Φ, si ha:

$$f(\theta) = \left. \frac{g(\phi)}{\left| \dfrac{d\theta}{d\phi} \right|} \right|_{\phi = \phi(\theta)} \qquad (-h < \theta < h) \tag{1}$$

dove

$$\phi = \arccos \frac{\theta}{h}. \tag{2}$$

Poiché risulta:

$$g(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < \phi < \pi, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{3}$$

e inoltre:

$$\left|\frac{d\theta}{d\phi}\right| = h \operatorname{sen}\phi = h\sqrt{1-\cos^2\phi}, \tag{4}$$

sostituendo le (2), (3) e (4) nella (1) segue in definitiva:

$$f(\theta) = \frac{1/\pi}{h\sqrt{1-\cos^2(\arccos\theta/h)}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{h^2-\theta^2}}, \qquad -h < \theta < h,$$

mentre si ha evidentemente $f(\theta) = 0$ per $\theta \notin (-h, h)$.

> **ESERCIZIO 7**

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_X(x)$ nulla ovunque tranne che nell'intervallo (a, b), con $a < b$ reali positivi, dove vale $(b-a)^{-1}$. Si calcoli la densità di probabilità $f_Y(x)$ della variabile casuale $Y = e^X$.

Soluzione

La variabile casuale X ha densità di probabilità $f(x)$ uniforme:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1}$$

Poiché la funzione $y = e^x$ è monotona crescente in (a, b), detta $f_Y(y)$ la densità di probabilità della variabile casuale Y si ha:

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x=\ln y} = \frac{f_X(\ln y)}{y}, \qquad (e^a < y < e^b). \tag{2}$$

Utilizzando la (1), dalla (2) in definitiva segue:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y\,(b-a)} & \text{se } e^a < y < e^b, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 8

Sia X una variabile casuale uniforme nell'intervallo (a, b) con $a, b \in R^+$. Determinare densità di probabilità e funzione di distribuzione della variabile casuale $Y = X^2$.

Soluzione

Per ipotesi si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x < b, \\ 1 & \text{se } x \ge b. \end{cases} \tag{1}$$

Dalle evidenti relazioni

$$F_Y(y) \equiv P\{Y \le y\} = P\{X \le \sqrt{y}\} \equiv F_X(\sqrt{y})$$

dovute alla monotonicità della funzione $y = x^2$ in R^+ e dalla (1) segue:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < a^2, \\ \dfrac{\sqrt{y}-a}{b-a} & \text{se } a^2 \le y < b^2, \\ 1 & \text{se } y \ge b^2. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla (2), per derivazione, segue immediatamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)\sqrt{y}} & \text{se } a^2 < y < b^2, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

> **ESERCIZIO 9**

Si determinino funzione di distribuzione e densità di probabilità della variabile casuale $Y = \sqrt{X}$, dove X è una variabile casuale uniforme in (a, b), con $a, b \in R^+$.

Soluzione

Per la monotonicità della funzione $y = \sqrt{x}$, si ha:

$$F_Y(y) \equiv P\{Y \le y\} = P\left\{\sqrt{X} \le y\right\} = P\{X \le y^2\} \equiv F_X(y^2).$$

Dalla (1) dell'Esercizio 8 segue allora:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < \sqrt{a}, \\ \dfrac{y^2 - a}{b - a} & \text{se } \sqrt{a} \le y < \sqrt{b}, \\ 1 & y \ge \sqrt{b} \end{cases}$$

e quindi anche:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{b - a} & \text{se } \sqrt{a} < y < \sqrt{b}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 10**

Sia Y una variabile casuale distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. Si determini la densità di probabilità della variabile casuale $X = -\dfrac{1}{k} \ln Y$, con k costante positiva.

Soluzione

Essendo la funzione $x = -\dfrac{1}{k} \ln y$ monotona decrescente in $(0, 1)$, dette $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ rispettivamente le densità di probabilità delle variabili casuali X e Y si ha:

$$f_X(x) = \left. \frac{f_Y(y)}{\left| \dfrac{dx}{dy} \right|} \right|_{y = e^{-kx}} = f_Y(e^{-kx})\, k\, e^{-kx} \qquad (0 < x < \infty). \quad (1)$$

Poiché per ipotesi risulta

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad (2)$$

dalle (1) e (2) segue

$$f_X(x) = \begin{cases} k\, e^{-kx} & \text{se } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si è così visto che nell'ipotesi di uniformità di Y in $(0, 1)$ segue che la variabile casuale $X = -\dfrac{1}{k} \ln Y$ ha densità di probabilità esponenziale.

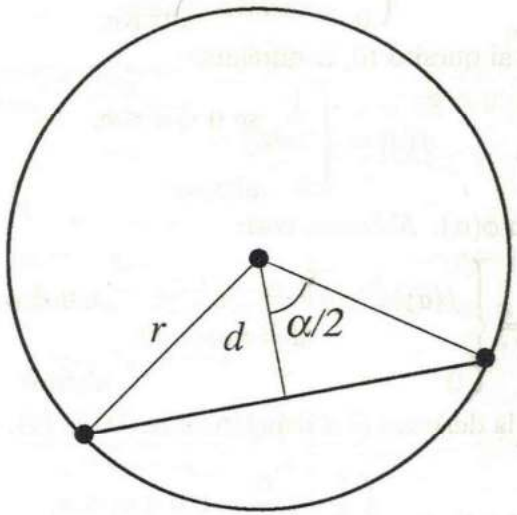
▷ **ESERCIZIO 11**

Si consideri una circonferenza di raggio r e sia α l'angolo al centro sotteso da una corda, arbitrariamente tracciata, intersecante la circonferenza (v. figura). Sia inoltre D la distanza della corda dal centro della circonferenza. Si determinino:

a) la densità di probabilità di D nell'ipotesi in cui α è una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0, \pi)$;

b) la densità di probabilità di α nell'ipotesi in cui D è una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0, r)$.

Soluzione



Consideriamo la relazione che lega D e α:

$$D = r \cos \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Interpretiamo α e D come variabili casuali di densità $\phi(\alpha)$ e $f(d)$, rispettivamente. Nel caso del quesito a) risulta:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < \alpha < \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \qquad (2)$$

Poiché la funzione $r\cos(\alpha/2)$ è monotona decrescente in $(0,\pi)$, si ha:

$$f(d) = \begin{cases} \dfrac{\phi\left[\arccos(2d/r)\right]}{r\,\mathrm{sen}\left[\arccos(d/r)\right]/2} & \text{se } 0 < d < r, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{3}$$

Poiché risulta

$$\mathrm{sen}\left[\arccos\left(\frac{d}{r}\right)\right] = \sqrt{1-\cos^2\left[\arccos\left(\frac{d}{r}\right)\right]} \equiv \sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2},$$

da (2) e (3) segue:

$$f(d) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{r^2-d^2}} & \text{se } 0 < d < r, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{4}$$

Per rispondere al quesito b), assumiamo

$$f(d) = \begin{cases} \dfrac{1}{r} & \text{se } 0 < d < r, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{5}$$

e determiniamo $\phi(\alpha)$. Abbiamo così:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} f(d)\,|d'(\alpha)|\Big|_{d\,=\,r\cos\alpha/2} & \text{se } 0 < \alpha < \pi, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \tag{6}$$

dove d' denota la derivata di d rispetto ad α. Dalle (1), (5) e (6) segue così:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha}{2} & \text{se } 0 < \alpha < \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{7}$$

Si conclude che l'ipotesi di uniformità di α implica che D non è uniformemente distribuita (cf. (4)) mentre l'ipotesi di uniformità di D implica che α non è distribuita uniformemente (cf. (7)). Ricordando l'Esercizio 57 del Capitolo II (Paradosso di Bertrand) concludiamo ora che il doppio risultato allora ottenuto trova giustificazione: in un caso, infatti, si procedeva assumendo implicitamente che D fosse una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0,r)$, mentre nel secondo caso la variabile casuale avente distribuzione uniforme era α. Entrambi i casi sono idonei ad esprimere la casualità della scelta della corda. Come abbiamo ora visto, queste ipotesi però non sono compatibili nel senso che l'uno esclude l'altra.

▷ **ESERCIZIO 12**

Sia X una variabile casuale distribuita uniformemente nell'intervallo $(-\pi/2,\pi/2)$. Si determini la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \mathrm{tg}\,X$.

Soluzione

Detta $f_X(x)$ la densità di probabilità di X, per ipotesi si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1}$$

Poiché inoltre la funzione $y = \mathrm{tg}\,x$ è invertibile, detta $f_Y(y)$ la densità di probabilità di Y sussiste la relazione:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\dfrac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x\,=\,\mathrm{arctg}\,y} \qquad (-\infty < y < \infty). \tag{2}$$

Osserviamo ora che risulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \equiv 1 + \mathrm{tg}^2\,x \tag{3}$$

così che da (1), (2) e (3) segue:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\mathrm{arctg}\,y)}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,y)} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \qquad -\infty < y < \infty. \tag{4}$$

Si riconosce così che la funzione $f_Y(y)$ è la densità di probabilità di Cauchy.

▷ **ESERCIZIO 13**

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & \text{se } x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1}$$

Calcolare la densità di probabilità $g(y)$ della variabile casuale

$$Y = \exp\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\pi}X^2\right)\right].$$

Soluzione

Consideriamo la funzione $y = \exp[2\,\mathrm{sen}(2x^2/\pi)]$ e calcoliamone la derivata:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\cos\left(\frac{2}{\pi}x^2\right)\frac{4x}{\pi}\exp\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\pi}x^2\right)\right]\\ &= \frac{8}{\pi}xy\cos\left(\frac{2}{\pi}x^2\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Si vede così che tale derivata risulta non negativa al variare di x nell'intervallo $(0, \pi/2)$. Pertanto in quest'intervallo la funzione $y = \exp[2\,\mathrm{sen}(2x^2/\pi)]$ è invertibile avendosi:

$$x = \left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

La densità di probabilità $\phi(y)$ della variabile casuale Y è pertanto:

$$\phi(y) \equiv \left.\frac{f_X(x)}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x=\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)^{1/2}}. \tag{4}$$

Poiché da (2) e (3) segue:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)^{1/2}} &= \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)^{1/2} y\\ &\times\cos\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)\right]\\ &= \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)^{1/2} y\left[1-\mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y})\right]^{1/2}\\ &= \frac{8}{\pi}y\left[\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)(1-\ln^2\sqrt{y})\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{5}$$

Dalle (1), (4) e (5) segue in definitiva:

$$\phi(y) = \begin{cases}\dfrac{1}{4y\left[\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{arcsen}\ln\sqrt{y}\right)(1-\ln^2\sqrt{y})\right]^{1/2}} & \text{se } 1 < y < e^2,\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 14**

Sia X una variabile casuale di densità di probabilità esponenziale di parametro α. Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $\ln X$.

Soluzione

Denotiamo con $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ le densità di probabilità delle variabili casuali X e $Y \equiv \ln X$. Per ipotesi si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases}\alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se } 0 < x < \infty,\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

con α costante positiva. Poiché $y = \ln x$ è una funzione monotona crescente che mappa l'intervallo $(0, \infty)$ in $(-\infty, \infty)$, si ha:

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x=e^y} \qquad (-\infty < y < \infty),$$

ovvero:

$$f_Y(y) = \alpha\, e^y \exp(-\alpha\, e^y), \qquad -\infty < y < \infty.$$

▷ **ESERCIZIO 15**

Una variabile casuale X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases}k\, e^{-\alpha x} & \text{se } 0 < x < \pi/4,\\ 0 & \text{altrove}\end{cases} \tag{1}$$

dove k e α sono costanti positive. Determinare k in funzione di α. Determinare inoltre la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \mathrm{sen}\, X$.

Soluzione

La costante k si determina imponendo la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Si ottiene così:

$$k\int_0^{\pi/4} e^{-\alpha x}dx = \frac{k}{\alpha}\left(1-\exp^{-\alpha\pi/4}\right) = 1 \tag{2}$$

da cui segue:

$$k = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha\pi/4}}.$$

Poiché al variare di x in $(0, \pi/4)$ la funzione $y = \operatorname{sen} x$ è monotona crescente ed assume valori in $(0, \sqrt{2}/2)$, detta $f_Y(y)$ la densità di probabilità di Y abbiamo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left.\dfrac{f_X(x)}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x = \operatorname{arcsen} y} & \text{se } 0 < y < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{3}$$

Osservando che risulta

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

e quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = \operatorname{arcsen} y} = \sqrt{1 - y^2}, \tag{4}$$

dalle (3), (4) e (5) segue:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{k \exp(-\alpha \operatorname{arcsen} y)}{\sqrt{1 - y^2}} & \text{se } 0 < y < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con k dato dalla (2).

▷ **ESERCIZIO 16**

Sia V la variabile casuale esprimente il modulo della velocità di una molecola di massa m in un gas a temperatura assoluta T. La densità di probabilità $f_V(v)$ di V è espressa dalla cosiddetta legge di Maxwell-Boltzmann:

$$f_V(v) = \begin{cases} a v^2 \exp\left(-\dfrac{m}{2kT} v^2\right) & \text{se } v > 0, \\ 0 & \text{se } v \le 0 \end{cases}$$

dove k è una costante ed a è un fattore di normalizzazione. Si determini la densità di probabilità $f_E(e)$ dell'energia cinetica $E = mV^2/2$ di una molecola di gas.

Soluzione

Nell'intervallo $(0, \infty)$ la funzione $e = mv^2/2$ è invertibile avendosi:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} e}.$$

Poiché si ha inoltre:

$$\frac{de}{dv} = mv,$$

dalla relazione

$$f_E(e) = \left.\frac{f_V(v)}{\dfrac{de}{dv}}\right|_{v = \sqrt{2e/m}}$$

segue in definitiva:

$$f_E(e) = \begin{cases} \lambda \sqrt{e} \exp(-e/kT) & \text{se } e > 0 \\ 0 & e \le 0 \end{cases}$$

dove $\lambda \equiv \sqrt{2} a / m^{3/2}$ è il fattore di normalizzazione. Si noti che $f_E(e)$ è una densità di probabilità di tipo gamma, ossia del tipo

$$c\, x^{\alpha - 1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

con $\alpha = 3/2$, $\beta = kT$ e c costante positiva.

▷ **ESERCIZIO 17**

Sia X una variabile casuale a valori in R di densità di probabilità $f_X(x)$ e funzione di distribuzione $F_X(x)$. Si determinino la funzione di distribuzione $F_Y(y)$ e la densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile casuale $Y = |X|$. Si consideri infine il caso particolare in cui risulta $f_X(x) = f_X(-x)$.

Soluzione

All'intervallo $(-\infty, \infty)$ della variabile casuale X corrisponde l'intervallo $(0, \infty)$ per la variabile casuale Y. Si ha inoltre:

$$P\{Y \le y\} = P\{-y \le X \le y\} = P\{X \le y\} - P\{X \le -y\}, \quad y \ge 0,$$

da cui segue, per $y \ge 0$:

$$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y). \tag{1}$$

Passando alle derivate, otteniamo poi per $y > 0$:

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y). \tag{2}$$

Nel caso simmetrico $f_X(-x) = f_X(x)$ le (1) e (2) divengono rispettivamente:

$$F_Y(y) = 2F_X(y)$$

e

$$f_Y(y) = 2f_Y(y).$$

▷ **ESERCIZIO 18**

Calcolare la densità di probabilità della variabile casuale

$$Y = \int_0^X z \exp(-\alpha z^2) dz \tag{1}$$

dove X è una variabile casuale di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x^2)^{-1} & \text{se } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{2}$$

con k costante da determinarsi.

Soluzione

Determiniamo anzitutto la costante k in (2) imponendo la condizione di normalizzazione. Si ha:

$$\frac{1}{k} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$k = \frac{2}{\pi}.$$

Calcolando ora l'integrale a secondo membro della (1) otteniamo:

$$Y = \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha X^2}\right).$$

Poiché $f_X(x)$ è non nulla solo in $(0, \infty)$, possiamo limitare le nostre considerazioni a questo intervallo. La funzione $y = \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x^2}\right)$ è monotona crescente in tale intervallo avendosi ivi:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-\alpha x^2} > 0, \tag{3}$$

e:

$$x = \sqrt{-\frac{1}{\alpha}\ln(1-2\alpha y)}, \qquad y \in \left(0, \frac{1}{2\alpha}\right). \tag{4}$$

Si noti che l'argomento del logaritmo è minore dell'unità poiché risulta $y < 1/(2\alpha)$ per ogni $x \in R^+$. Dalle (2), (3) e (4) segue allora:

$$f_Y(y) \equiv \frac{f_X(x)}{\frac{dy}{dx}}\Bigg|_{x = \left[-\alpha^{-1}\ln(1-2\alpha y)\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi[1-\alpha^{-1}\ln(1-2\alpha y)](1-2\alpha y)\sqrt{-\alpha^{-1}\ln(1-2\alpha y)}}$$

per $0 < y < 1/2\alpha$ mentre è nulla altrove.

▷ **ESERCIZIO 19**

Sia X una variabile casuale normale $N(m, \sigma^2)$. Determinare la funzione densità di probabilità della variabile $Y = X^2$ nel caso $m = 0$. Determinare poi la densità di probabilità della variabile casuale $Z = e^X$ per m e σ^2 arbitrari.

Soluzione

Per ipotesi la densità di probabilità $f_X(x)$ è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

a) La funzione $y = x^2$ non è biunivoca avendosi per ogni $y > 0$

$$x = \pm\sqrt{y}. \tag{2}$$

Dalla simmetria di $y = x^2$ segue poi:

$$P\{Y \le y\} = P\{0 \le X \le \sqrt{y}\} + P\{-\sqrt{y} \le X \le 0\}, \qquad y \ge 0,$$

ovvero, per la (1) scritta con $m = 0$:

$$P\{Y \le y\} = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx + \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx, \qquad y \ge 0.$$

Di qui, derivando ambo i membri rispetto a y, segue:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{e^{-y/2\sigma^2}}{2y} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{e^{-y/2\sigma^2}}{-2y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{e^{-y/2\sigma^2}}{y}, \qquad y > 0.$$

È inoltre immediato convincersi che si ha $f_Y(y) = 0$ per $y \le 0$.

b) La funzione $z = e^x$ è positiva e monotona crescente sull'intero asse reale. Poiché risulta:

$$\frac{dz}{dx} = e^x$$

e

$$x = \ln z$$

dalla relazione:

$$f_Z(z) = \left.\frac{f_X(x)}{\dfrac{dz}{dx}}\right|_{x = \ln z}, \qquad 0 < z < \infty$$

segue:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z}\exp\left\{-\frac{(\ln z - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad 0 < z < \infty.$$

Ovviamente si ha poi $f_Z(z) = 0$ per $z \le 0$.

▷ **ESERCIZIO 20**

Si consideri la radice quadrata di una variabile casuale di densità esponenziale e se ne determini la densità di probabilità.

Soluzione

Sia X la variabile casuale distribuita esponenzialmente con parametro α e

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

la sua densità di probabilità. Denotiamo ora con $f_Y(y)$ la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \sqrt{X}$. Si ha evidentemente:

$$P\{Y \le y\} = P\left\{\sqrt{X} \le y\right\} = P\{X \le y^2\}, \qquad y \ge 0.$$

Di qui segue:

$$\frac{d}{dy}P\{Y \le y\} = \frac{d}{dy}P\{X \le y^2\} \equiv \frac{d}{dy}\int_0^{y^2} \alpha e^{-\alpha x}\,dx, \qquad y \ge 0,$$

ovvero:

$$f_Y(y) = 2\,\alpha\, y\, e^{-\alpha y^2}, \qquad y > 0. \tag{2}$$

È poi immediata conseguenza della (1) l'aversi $f_Y(y) = 0$ per $y \le 0$. Si noti che la (2) può scriversi nella forma

$$f_Y(y) = \alpha\,\beta\, y^{\beta-1} e^{-\alpha y^\beta}, \qquad y > 0, \tag{3}$$

con $\beta = 2$, ossia come una particolare densità di Weibull (cf. Esercizio 45 del Cap.V).

▷ **ESERCIZIO 21**

Sia $f_X(x)$ la densità di probabilità della variabile casuale X. Determinare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile casuale Y così definita:

$$Y = \int_{-\infty}^{X} f_X(t)\,dt.$$

Soluzione

Per ogni fissato valore x di X l'integrale a secondo membro si identifica con la funzione di distribuzione $F_X(x) \equiv P\{X \le x\}$. La variabile casuale Y è dunque tale da aversi $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge 1$. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{F_X(X) \le y\} = P\{X \le F_X^{-1}(y)\} \\ &= F_X\left[F_X^{-1}(y)\right] = y, \qquad 0 \le y < 1. \end{aligned}$$

Derivando $F_Y(y)$ rispetto a y si ottiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Tale conclusione poteva comunque raggiungersi osservando che $F_Y(y)$ sopra determinata è la funzione di distribuzione di una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0, 1)$.

▷ **ESERCIZIO 22**

Sia X una variabile casuale con distribuzione esponenziale di parametro λ. Si determinino funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale $Y = \log_a X$, con $0 < a < 1$.

Soluzione

Per ipotesi si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

e quindi:

$$F_X(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\, dz = 1 - e^{-\lambda x} \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Poiché la funzione $y = \log_a x$ è monotona decrescente in $(0, \infty)$ si ha:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y\} &= P\{\log_a X \leq y\} = P\{X \geq a^y\} \\ &= 1 - P\{X < a^y\} = 1 - F_X(a^y). \end{aligned} \tag{3}$$

Ricordando la (2), dalla (3) segue:

$$F_Y(y) = \exp(-\lambda a^y), \qquad -\infty < y < \infty. \tag{4}$$

Dalla (4) segue poi derivando ambo i membri rispetto a y:

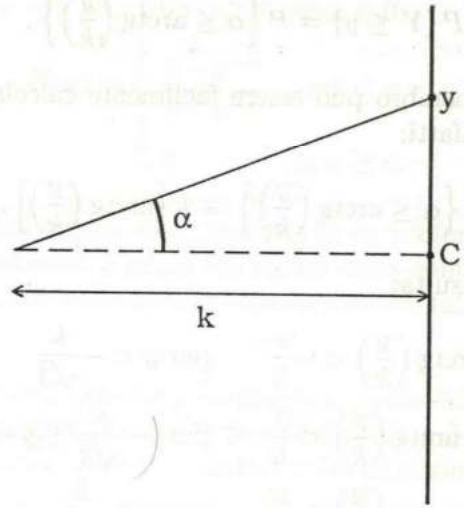
$$f_Y(y) = -\lambda \ln a\, a^y \exp(-\lambda a^y), \qquad -\infty < y < \infty.$$

Si noti che $f_Y(y)$ è positiva per $y \in (-\infty, \infty)$ essendo $\ln a < 0$ per l'ipotesi fatta che $0 < a < 1$.

▷ **ESERCIZIO 23**

Un arciere dista k metri da un bersaglio di centro C. Si consideri un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro C e sia Y la variabile casuale rappresentante l'ordinata del punto colpito nell'ipotesi in cui, allorché viene scoccato, il dardo forma un angolo α con il piano passante per C e perpendicolare al bersaglio e nell'ipotesi che detto angolo sia uniformemente distribuito nell'intervallo $(-\pi/6, \pi/6)$. Si calcolino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità di Y.

Soluzione



Con riferimento alla figura, si ha chiaramente:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y\} &= P\{k \operatorname{tg} \alpha \leq y\} = P\left\{\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{y}{k}\right\} \\ &= P\left\{\alpha \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

D'altra parte, per ipotesi la densità di probabilità $\psi(\alpha)$ della variabile casuale α è così definita:

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi} & \text{se } -\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{6}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La funzione di distribuzione $\Psi(\alpha)$ di α è poi facilmente calcolabile, avendosi:

$$\Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Si ha pertanto:

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < -\dfrac{\pi}{6}, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\alpha}{\pi} & \text{se } -\dfrac{\pi}{6} \leq \alpha < \dfrac{\pi}{6}, \\ 1 & \text{se } \alpha \geq \dfrac{\pi}{6}. \end{cases} \tag{2}$$

Per determinare $P\{Y \le y\}$, ricordiamo che dalla (1) risulta:

$$P\{Y \le y\} = P\left\{\alpha \le \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right)\right\}, \tag{3}$$

dove il secondo membro può essere facilmente calcolato facendo uso della (2). Si ha infatti:

$$P\left\{\alpha \le \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right)\right\} \equiv \Psi\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right)\right]. \tag{4}$$

Osservando che risulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right) &< -\frac{\pi}{6} && \text{per } y < -\frac{k}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\pi}{6} \le \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right) &< \frac{\pi}{6} && \text{per } -\frac{k}{\sqrt{3}} \le y < \frac{k}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right) &\ge \frac{\pi}{6} && \text{per } y \ge \frac{k}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

dalle (2), (3) e (4) segue:

$$\begin{aligned} P\{Y \le y\} &\equiv \Psi\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right)\right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } y < -\dfrac{k}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{k}\right) & \text{se } -\dfrac{k}{\sqrt{3}} \le y < \dfrac{k}{\sqrt{3}}, \\ 1 & \text{se } y \ge \dfrac{k}{\sqrt{3}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

La (5) è la funzione di distribuzione della variabile casuale Y. La densità di probabilità $f_Y(y)$ di Y si ottiene infine dalla (5) per derivazione rispetto a y. Si ottiene così:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi}\dfrac{k}{k^2+y^2} & \text{se } -\dfrac{k}{\sqrt{3}} < y < \dfrac{k}{\sqrt{3}}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 24

Si supponga che in condizioni di scarse precipitazioni atmosferiche il livello dell'acqua in un pozzo di profondità s metri è una variabile casuale di funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-e^{-s}} & \text{se } 0 \le x < s, \\ 1 & \text{se } x \ge s. \end{cases} \tag{1}$$

Come si modifica questa distribuzione se la profondità del pozzo è misurata in centimetri e se ad un metro dalla sommità del pozzo si crea uno scarico che impedisce il superamento di tale livello?

Soluzione

Sia X la variabile casuale rappresentante il livello dell'acqua nel pozzo di profondità s metri. Detta Y la variabile casuale che dà il livello dell'acqua nello stesso pozzo quando l'unità di misura è il centimetro, si ha:

$$Y = 100X.$$

Dette $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ le rispettive funzioni di distribuzioni, si ha:

$$F_Y(y) \equiv P\{Y \le y\} = P\{100X \le y\} = P\left\{X \le \frac{y}{100}\right\} \equiv F_X\left(\frac{y}{100}\right). \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) segue allora:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0, \\ \dfrac{1-e^{-y/100}}{1-e^{-s}} & \text{se } 0 \le y < 100s, \\ 1 & \text{se } y \ge 100s. \end{cases} \tag{3}$$

Creare uno scarico ad un metro dalla sommità del pozzo significa di fatto imporre che la variabile casuale X viene mutata in una nuova varabile casuale Z la cui funzione di distribuzione $F_Z(x)$ vale ancora 0 per $x < 0$, mentre vale 1 per $x \ge s-1$. Per quanto riguarda l'intervallo $[0, s-1)$, è ragionevole ritenere che ivi $F_Z(x)$ sia una funzione dello stesso tipo di $F_X(x)$, ossia proporzionale a $1-e^{-x}$. La costante di proporzionalità che per X è $1/(1-e^{-s})$, dovrà per Z valere $1/[1-e^{-(s-1)}]$ di modo che risulti $\lim_{x \uparrow s-1} F_Z(x) = 1$. In conclusione, per il pozzo con

scarico il livello Z misurato in metri ha funzione di distribuzione

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1-e^{-(s-1)}} & \text{se } 0 \le x < s-1, \\ 1 & \text{se } x \ge s-1. \end{cases}$$

Se tale livello è invece espresso in centimetri, la sua funzione di distribuzione si ottiene dalla (3) cambiando s in $s-1$.

▷ **ESERCIZIO 25**

Una grandezza $x(t)$ varia nel tempo secondo la seguente legge:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\,x(t),$$

$\Rightarrow x' + ax = 0 \Rightarrow \lambda + a = 0$

$\Rightarrow \lambda = -a \Rightarrow \varphi(t) = c\,e^{-\lambda t}$ ma $\varphi(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0$

$\Rightarrow \varphi(t) = x_0\,e^{-at}$

con $a \in R$. Sia inoltre $\varphi(t)$ la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Si determini la densità di probabilità di $y = \varphi(1)$ nell'ipotesi in cui a è una variabile casuale normale di media b e varianza unitaria. Sapendo che $x(0) = x_0$ e che a è una variabile casuale gaussiana di valore medio b e varianza unitaria, calcolare la densità di probabilità della variabile casuale $y \equiv x(1)$.

Soluzione

Risolvendo l'equazione con l'assegnata condizione iniziale si ottiene:

$$\varphi(t) = x_0\,e^{-at}. \tag{1}$$

Detta $f_a(u)$ la densità di probabilità della variabile casuale a, per ipotesi si ha:

$$f_a(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-b)^2}{2}\right], \qquad u \in R. \tag{2}$$

La densità di probabilità $f_y(v)$ della variabile casuale $y = \varphi(1)$ è allora esprimibile al seguente modo:

$$f_y(v) = \left.\frac{f_a(u)}{\left|\dfrac{dv}{du}\right|}\right|_{u=u(v)} \tag{3}$$

dove le variabili u e v sono legate dalla seguente relazione che segue dalla (1) per $t = 1$ e ponendovi $\varphi(1) = v$ e $a = u$:

$$v = x_0\,e^{-u}. \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) segue allora per $v > 0$:

$$f_y(v) = \frac{f_a[-\ln(v/x_0)]}{v},$$

ovvero, facendo uso della (2):

$$f_y(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \exp\left(\ln\frac{v}{x_0} + b\right)^2, \qquad 0 < v < \infty.$$

Per $v \le 0$ si ha invece evidentemente $f_y(v) = 0$. Si noti che $f_y(v)$ è una densità di probabilità lognormale.

▷ **ESERCIZIO 26**

Calcolare la densità di probabilità e la mediana della variabile casuale $Y = \ln X$, dove X è una variabile casuale con densità di probabilità di Pareto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,b^a}{x^{a+1}} & \text{se } b < x < \infty, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1}$$

con a e b reali positivi.

Soluzione

Detta $f_Y(y)$ la densità di probabilità di Y, si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(e^y)}{\dfrac{dy}{dx}} = f_X(e^y)\,e^y. \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) segue allora:

$$f_Y(y) = \begin{cases} a\,e^{-a(y-\ln b)} & \text{se } \ln b < y < \infty, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si noti che Y è una variabile casuale esponenziale, di parametro a, con densità non nulla nell'intervallo $(\ln b, \infty)$. Il calcolo della mediana m si

effettua poi facilmente ricordando che per definizione di mediana deve aversi:

$$P\{Y \le m\} = P\{Y \ge m\} = \frac{1}{2}$$

ossia, ad esempio:

$$\int_m^\infty f_Y(y)dy \equiv \int_m^\infty a e^{-a(y-\ln b)}\, dy = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Dalla (3) segue facilmente:

$$m = \frac{1}{a}\ln 2 + \ln b.$$

▷ **ESERCIZIO 27**

Sia X una variabile casuale normale di media m e varianza σ^2. Si determini la densità di probabilità della variabile casuale

$$Y = \begin{cases} \sqrt{X} & \text{se } X \ge 0, \\ \sqrt{-X} & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

dove si considerano soltanto le radici positive.

Soluzione

Osserviamo che per ogni $y \ge 0$ risulta:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{Y \le y, X > 0\} + P\{Y \le y, X < 0\} \\ &= P\left\{\sqrt{X} \le y, X > 0\right\} + P\left\{\sqrt{-X} \le y, X < 0\right\} \\ &= P\left\{0 < X \le y^2\right\} + P\left\{-y^2 \le X < 0\right\}. \end{aligned}$$

Poiché gli intervalli $(0, y^2)$ e $(-y^2, 0)$ sono disgiunti si ha:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left\{0 < X \le y^2 \text{ oppure } -y^2 \le X < 0\right\} \\ &\equiv P\left\{-y^2 \le X \le y^2\right\} = \Phi(y^2) - \Phi(-y^2), \qquad y \in (0, \infty) \end{aligned} \tag{1}$$

dove

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right] dz.$$

Derivando ambo i membri della (1) rispetto a y segue:

$$\begin{aligned} \frac{dF_Y(y)}{dy} &\equiv f_Y(y) = 2y\frac{d\Phi(y^2)}{dy^2} + 2y\frac{d\Phi(-y^2)}{d(-y^2)} \\ &= \frac{2y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\exp\left[-\frac{(y^2-m)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y^2+m)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2}$$

per ogni $y \in (0, \infty)$. Nel caso particolare in cui $m = 0$ dalla (2) si ottiene:

$$f_Y(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma} y \exp\left(-\frac{y^4}{2\sigma^2}\right), \qquad y \in (0, \infty).$$

▷ **ESERCIZIO 28**

Sia X una variabile casuale di densità di probabilità $f_X(x)$ definita in R e tale che $0 < f_X(0) < \infty$. Determinare la funzione di distribuzione $F_Y(y)$ e la densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile casuale $Y = X^3$. Considerare infine il caso in cui X è $N(0, 1)$.

Soluzione

Poiché la funzione $y = x^3$ è monotona crescente in R, si ha:

$$P\{Y \le y\} = P\left\{X^3 \le y\right\} = P\left\{X \le y^{1/3}\right\}.$$

Si ha quindi:

$$F_Y(y) = F_X\left(y^{1/3}\right), \qquad y \in R. \tag{1}$$

La densità di probabilità $f_Y(y)$ esiste nei punti in cui $F_Y(y)$ è dotata di derivata, ossia in $R - \{0\}$. Si ha quindi da (1):

$$f_Y(y) \equiv \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y\left(y^{1/3}\right) = \frac{f_X\left(y^{1/3}\right)}{3y^{2/3}}, \qquad y \ne 0.$$

Se X è una variabile casuale normale standard si ha poi:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y^{1/3}} e^{-z^2/2}\, dz, \qquad y \in R,$$

mentre risulta:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y^{2/3}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^{2/3}\right\}, \qquad y \in R - \{0\}.$$

Nel punto $y = 0$ la variabile casuale Y non possiede densità di probabilità.

▷ **ESERCIZIO 29**

Si consideri una variabile casuale X avente distribuzione esponenziale di parametro λ. Determinare la densità di probabilità della variabile casuale definita dalla trasformazione $Y = g(X)$, dove $g : R^+ \to R$ è data da:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} \ln \left[2\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right] & \text{se } 0 < x \leq \dfrac{1}{\lambda} \ln 2, \\ \dfrac{\lambda}{\mu} x - \dfrac{1}{\mu} \ln 2 & \text{se } x > \dfrac{1}{\lambda} \ln 2. \end{cases} \qquad (\lambda, \mu > 0)$$

Soluzione

Si noti che $g(x)$ è una funzione continua, strettamente crescente e dotata di derivata continua per $x \in R^+$. Si ha:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} \dfrac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} & \text{se } 0 < x \leq \dfrac{1}{\lambda} \ln 2, \\ \dfrac{\lambda}{\mu} & \text{se } x > \dfrac{1}{\lambda} \ln 2. \end{cases}$$

Tenendo presente che la densità di probabilità di X è data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

e che la trasformazione inversa $X = g^{-1}(Y)$ è data da:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda} \ln \left(1 - \dfrac{e^{\mu y}}{2}\right) & \text{se } y \leq 0, \\ \dfrac{\mu}{\lambda} y + \dfrac{1}{\lambda} \ln 2 & \text{se } y > 0, \end{cases}$$

dal teorema relativo alle trasformazioni di variabili casuali si ha:

$$f_Y(y) = \left. \frac{f_X(x)}{\left| \dfrac{dg(x)}{dx} \right|} \right|_{x = g^{-1}(y)}$$

$$= \begin{cases} \lambda \left(1 - \dfrac{e^{\mu y}}{2}\right) \dfrac{\mu}{\lambda} \dfrac{e^{\mu y}/2}{(1 - e^{\mu y}/2)} & \text{se } y < 0, \\ \dfrac{\lambda}{2} e^{-\mu y} \dfrac{\mu}{\lambda} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\mu}{2} e^{-\mu |y|},$$

che riconosciamo essere la densità di probabilità di una variabile casuale avente distribuzione di Laplace (o "esponenziale doppia") di parametro μ.

CAPITOLO VII

MOMENTI DI VARIABILI CASUALI

▷ **ESERCIZIO 1**

Un'auto di un certo modello costa L. 9 500 000. Sia 0.005 la probabilità che un'auto di detto modello venga perduta dal proprietario, o a seguito di incidente o di furto, nel corso di un anno. Calcolare il valore medio del danno economico in cui incorre il generico acquirente di un'auto del modello menzionato in un anno.

Soluzione

Il danno può riguardarsi come una variabile casuale X che assume i valori 0 e 9 500 000 con probabilità 0.995 e 0.005, rispettivamente. Si ha pertanto:

$$E(X) = 0 \cdot 0.995 + 9\,500\,000 \cdot 0.005 = 47.500.$$

▷ **ESERCIZIO 2**

Una variabile casuale assume con eguali probabilità i valori $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 9$, $x_5 = 12$. Calcolare $E(X)$ e $D^2(X)$.

Soluzione

Per ipotesi si ha:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P\{X = x_i\} = \frac{5+6+4+9+12}{5} = \frac{36}{5} = 7.2$$

$$D^2(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \sum_{i=1}^{5} (x_i - 7.2)^2 P\{X = x_i\}$$

$$= \frac{(5-7.2)^2}{5} + \frac{(6-7.2)^2}{5} + \frac{(4-7.2)^2}{5}$$

$$+ \frac{(9-7.2)^2}{5} + \frac{(12-7.2)^2}{5} = 8.56.$$

▷ **ESERCIZIO 3**

Si consideri la variabile casuale X caratterizzata come segue:

$$P\{X=-1\}=\frac{3}{21}$$
$$P\{X=5\}=\frac{8}{21}$$
$$P\{X=-6\}=\frac{6}{21}$$
$$P\{X=7.2\}=\frac{4}{21}.$$

Calcolarne valore medio, varianza e momento assoluto del secondo ordine.

Soluzione

X è una variabile casuale discreta di cui si conoscono i valori x_i e le relative probabilità. Pertanto si ha:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=-1\frac{3}{21}+5\frac{8}{21}-6\frac{6}{21}+7.2\frac{4}{21}$$
$$=\frac{-3+40-36+28.8}{21}=\frac{29.8}{21}\simeq 1.419.$$

Nota la media della variabile casuale possiamo procedere al calcolo della varianza:

$$D^2(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=\sum_{i=1}^{4}(x_i-1.419)^2p_i$$
$$=(-1-1.419)^2\frac{3}{21}+(5-1.419)^2\frac{8}{21}+(-6-1.419)^2\frac{6}{21}$$
$$+(7.2-1.419)^2\frac{4}{21}=27.8128.$$

Il calcolo del momento assoluto del second'ordine si effettua in maniera analoga. Si ottiene così:

$$E(|X|^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i=(-1)^2\frac{3}{21}+(5)^2\frac{8}{21}+(6)^2\frac{6}{21}+(7.2)^2\frac{4}{21}$$
$$=29.8266.$$

▷ **ESERCIZIO 4**

Un gioco viene detto equo quando è nullo il valore medio del profitto del giocatore. Si supponga che un giocatore paga 10 000 lire ogni volta che nel lancio di un dado si verificano i numeri 1 o 2. Quanto dovrebbe essergli corrisposto all'uscita dei rimanenti numeri perché il gioco sia equo?

Soluzione

Sia x l'incognito premio da corrispondere al giocatore all'uscita dei numeri 3, 4, 5 e 6 perché il gioco sia equo. Convezionalmente, denotiamo la perdita come un profitto negativo. Calcoliamo anzitutto il valore medio $E(P)$ del profitto del giocatore nel lancio del dado. Si ha:

$$E(P)=-10\,000\pi_p+x\pi_v \qquad (1)$$

dove $\pi_p=1/3$ e $\pi_v=2/3$ denotano rispettivamente la probabilità di perdita e di vincita. Imponendo la condizione $E(P)=0$, otteniamo dalla (1):

$$x=10\,000\frac{\pi_p}{\pi_v}=5\,000.$$

Pertanto, per rendere il gioco equo il premio da corrispondere al giocatore in corrispondenza dell'uscita dei numeri 3, 4, 5 e 6 è di lire 5 000.

▷ **ESERCIZIO 5**

Ai fini di un controllo di qualità si scelgono a caso 6 campioni di un prodotto da un lotto di 200 esemplari 15 dei quali sono difettosi. Calcolare il numero medio di prodotti difettosi presenti nel campione.

Soluzione

Il calcolo esatto del richiesto numero medio m andrebbe effettuato calcolando le probabilità $p_0, p_1, \ldots, p_6$ che dei sei campioni scelti a caso ne risultino difettosi rispettivamente $0, 1, 2, \ldots, 6$. Le probabilità p_i $(i=0,1,2,\ldots,6)$ si ottengono dalla distribuzione ipergeometrica avendosi:

$$p_i\equiv h(200,15,6,i)=\frac{\binom{15}{i}\binom{185}{6-i}}{\binom{200}{6}} \qquad (i=0,1,2,\ldots,6). \qquad (1)$$

Poiché risulta

$$\binom{200}{6} = \frac{200!}{6!\,194!} = 8.2408 \cdot 10^{10}, \qquad (2)$$

dalle (1) e (2) si ottiene:

$$p_0 = \frac{1 \cdot 185!}{6!\,179!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{5.1302 \cdot 10^{10}}{8.2408 \cdot 10^{10}} = 0.6225.$$

Analagamente, si ottiene:

$$p_1 = \frac{15!\,185!}{5!\,180!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{2.565 \cdot 10^{10}}{8.2408 \cdot 10^{10}} = 0.3112$$

$$p_2 = \frac{15!}{2!\,13!}\,\frac{185!}{4!\,181!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{4\,960\,096\,050}{8.2408 \cdot 10^{10}} = 0.0602$$

$$p_3 = \frac{15!}{3!\,12!}\,\frac{185!}{3!\,182!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{472\,390\,100}{8.2408 \cdot 10^{10}} = 0.0057$$

$$p_4 = \frac{15!}{4!\,11!}\,\frac{185!}{2!\,183!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{23\,232\,300}{8.2408 \cdot 10^{10}} = 0.0002$$

$$p_5 = \frac{15!}{5!\,10!}\,\frac{185!}{1!\,184!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{555\,555}{8.2408 \cdot 10^{10}}$$
$$= 67\,415.1781 \cdot 10^{-10} \simeq 0$$

$$p_6 = \frac{15!}{6!\,9!}\,\frac{1}{8.2408 \cdot 10^{10}} = \frac{5\,005}{8.2408 \cdot 10^{10}}$$
$$= 607.3439 \cdot 10^{-10} \simeq 0.$$

Si ha pertanto, per il valore medio m:

$$m \equiv \sum_{i=0}^{6} i p_i = \sum_{i=1}^{4} i p_i = 0.3112 + 2 \cdot 0.0602 + 3 \cdot 0.0057 +$$
$$+ 4 \cdot 0.0002 = 0.4495.$$

Un più rapido modo di procedere consiste nell'osservare che, pur avvenendo le scelte dei sei campioni senza rimpiazzamento, le probabilità θ di occorenza di un campione difettoso in ciascuna delle sei scelte può ritenersi approssimativamente costante e pari a $15/200 = 0.075$. Ci si può quindi riferire ad uno schema binomiale di parametri $n = 6$ e $\theta = 0.075$, il cui valore medio è $n\theta = 0.45$. Risulta pertanto $m = 0.45$ nell'ambito dell'approssimazione effettuata. Si noti come tale valore sia in eccellente accordo con quello prima determinato.

▷ **ESERCIZIO 6**

In un borsellino vi sono 9 monete da 10, 5 monete da 50, 12 monete da 100 e 8 monete da 500. Si prende a caso una moneta e poi se ne prende un'altra senza reinserire la prima nel borsellino. Sia X la variabile casuale esprimente il valore complessivo in lire delle due monete. Si chiede di determinare:

a. la distribuzione di probabilità di X;
b. la probabilità che il valore complessivo delle due monete sia superiore a 350 lire;
c. il valore medio di X;
d. la varianza e la deviazione standard di X.

Si supponga che ogni moneta del borsellino abbia la stessa probabilità di essere estratta.

Soluzione

Si tratta di un problema di 2 prove ripetute, ciascuna caratterizzata da più di due possibili risultati. Inoltre, la probabilità dei possibili esiti di ogni prova non è costante. In tali condizioni la distribuzione di X è quella ipergeometrica multivariata. I possibili valori di X sono i valori 20, 60, 100, 110, 150, 200, 510, 550, 600 e 1 000. Essi corrispondono alle seguenti scelte:

$X = 20$: 2 monete da 10;
$X = 60$: 1 moneta da 10 e 1 moneta da 50;
$X = 100$: 2 monete da 50;
$X = 110$: 1 moneta da 100 e 1 moneta da 10;
$X = 150$: 1 moneta da 100 e 1 moneta da 50;
$X = 200$: 2 monete da 100;
$X = 510$: 1 moneta da 500 e 1 moneta da 10;
$X = 550$: 1 moneta da 500 e 1 moneta da 50;
$X = 600$: 1 moneta da 500 e 1 moneta da 100;
$X = 1\,000$ 2 monete da 500.

In corrispondenza di questi valori si determina in base ai dati la distribuzione di probabilità. Poiché nel borsellino vi sono 34 monete, si ha:

$$P(X = 20) = \frac{9 \cdot 8}{34 \cdot 33} = \frac{72}{1\,122}$$

$$P(X = 60) = \frac{5 \cdot 9}{34 \cdot 33} = \frac{46}{1\,122}$$

$$P(X=100) = \frac{5\cdot 4}{34\cdot 33} = \frac{20}{1\,122}$$
$$P(X=110) = \frac{12\cdot 9}{34\cdot 33} = \frac{108}{1\,122}$$
$$P(X=150) = \frac{12\cdot 5}{34\cdot 33} = \frac{60}{1\,122}$$
$$P(X=200) = \frac{12\cdot 11}{34\cdot 33} = \frac{132}{1\,122}$$
$$P(X=510) = \frac{8\cdot 9}{34\cdot 33} = \frac{72}{1\,122}$$
$$P(X=550) = \frac{8\cdot 5}{34\cdot 33} = \frac{40}{1\,122}$$
$$P(X=600) = \frac{12\cdot 8}{34\cdot 33} = \frac{96}{1\,122}$$
$$P(X=1\,000) = \frac{8\cdot 7}{34\cdot 33} = \frac{56}{1\,122}.$$

Il denominatore di ciascuna frazione rappresenta infatti il numero totale di coppie distinte di monete mentre ciascun numeratore rappresenta il numero di scelte favorevoli al corrispondente valore della variabile casuale. Si ha poi:

$$\begin{aligned} P(X>350) &= P(X=510)+P(X=550)+P(X=600) \\ &\quad + P(X=1\,000) \\ &= \frac{8\cdot 9+8\cdot 5+12\cdot 8+8\cdot 7}{34\cdot 33} = \frac{264}{1\,122} = 0.2353. \end{aligned}$$

Calcoliamo il valore medio di X. Per definizione, si ha:

$$\begin{aligned} E(X) &= 20\,P(X=20)+60\,P(X=60)+100\,P(X=100) \\ &\quad + 110\,P(X=110)+150\,P(X=150)+200\,P(X=200) \\ &\quad + 510\,P(X=510)+550\,P(X=550)+600\,P(X=600) \\ &\quad + 1\,000\,P(X=1\,000) \\ &= \frac{1}{1\,122}\big(20\cdot 72+60\cdot 45+100\cdot 20+150\cdot 60+200\cdot 132 \\ &\quad + 510\cdot 72+550\cdot 40+600\cdot 96+1\,000\cdot 56\big) \\ &= \frac{225\,740}{1\,122} = 201.1943. \end{aligned}$$

La varianza $D^2(X)$ può infine calcolarsi o come $E|X-E(X)|^2$ oppure come $E(X^2)-|E(X)|^2$. Seguiamo ad esempio questa seconda strada

e cominciamo col calcolare $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 20^2P(X=20)+60^2P(X=60)+100^2P(X=100) \\ &\quad + 110^2P(X=110)+150^2P(X=150)+200^2P(X=200) \\ &\quad + 510^2P(X=510)+550^2P(X=550)+600^2P(X=600) \\ &\quad + 1\,000^2P(X=1\,000) \\ &= \frac{1}{1\,122}\big(400\cdot 72+3\,600\cdot 45+10\,000\cdot 20+12\,100\cdot 108 \\ &\quad + 22\,500\cdot 60+40\,000\cdot 132+302\,500\cdot 40+360\,000\cdot 96 \\ &\quad + 1\,000\,000\cdot 56\big) \\ &= \frac{129\,714\,800}{1\,122} = 115\,610.3387. \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E(X^2)-|E(X)|^2 = 115\,610.3387-(200.9269)^2 \\ &= 75\,238.71956. \end{aligned}$$

Infine, la deviazione standard $D(X)$ si ottiene come radice quadrata positiva della varianza:

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)} = 274.29677.$$

▷ **ESERCIZIO 7**

Calcolare il numero medio di cittadini italiani presenti in una commissione di 3 persone scelte a caso tra 5 cittadini italiani e 4 cittadini di altra nazionalità.

Soluzione

Denotiamo con X la variabile casuale che rappresenta il numero di cittadini italiani presenti nella commissione. Evidentemente X assume i valori $0,1,2,3$. Poiché il numero di commissioni distinte di 3 componenti ciascuna che possono formarsi con le nove persone è $\binom{9}{3}$, la distribuzione di probabilità di X si calcola facilmente come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili:

$$P(X=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{9}{3}} \qquad (k=0,1,2,3).$$

Si noti che il numeratore fornisce il numero di modi distinti in cui si possono raggruppare k cittadini italiani e $3-k$ cittadini di un'altra nazionalità per ottenere una commissione di 3 persone. Il numero medio richiesto è allora:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{3} k \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{9}{3}} = \sum_{k=1}^{3} k \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} + 2\,\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} + 3\,\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{1}{84}\left(1\cdot 30 + 2\cdot 40 + 3\cdot 10\right) = 1.6667.$$

▷ **ESERCIZIO 8**

Calcolare la vincita media di un giocatore che riceve 160 000 lire ogni volta che si verificano tre teste in tre consecutivi lanci di una moneta.

Soluzione

La vincita del giocatore in lire può riguardarsi come una variabile casuale che può assumere i due valori 160 000 e 0 con probabilità 1/8 e 7/8 rispettivamente. La vincita media (in lire) è dunque:

$$E(X) = 160\,000\,\frac{1}{8} + 0\,\frac{7}{8} = 20\,000.$$

Si noti che il "giocatore" di cui si dice non perde mai!

▷ **ESERCIZIO 9**

Un giocatore vince la somma a^n (a costante positiva) ogni volta che in ripetuti lanci di una moneta si verifica l'evento testa per la prima volta all'n–esimo lancio. Si calcoli la vincita media legata a detto gioco.

Soluzione

La vincita può riguardarsi come una variabile casuale X avente la seguente distribuzione di probabilità:

$$P(X=a^n) = \frac{1}{2^n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

La vincita media è dunque:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n P(X=a^n) = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

Per $a<2$ (si ricordi che per ipotesi è $a>0$) la serie è convergente, trattandosi della serie geometrica di ragione $a/2$ mancante del primo termine. Si ha pertanto:

$$E(X) = \begin{cases} \dfrac{1+a}{2-a} & \text{se } 0<a<2, \\ \infty & \text{se } a \geq 2. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 10**

Una casa farmaceutica mette in commercio un nuovo vaccino dichiarandone l'efficacia nel 95% dei casi. Si calcolino media, varianza e deviazione standard del numero di persone immunizzate a seguito della somministrazione del vaccino a 50 000 persone.

Soluzione

Si tratta di un esperimento di prove ripetute in cui l'evento "il vaccino risulta efficace" ha probabilità costante $p=0.95$. Denotata con X la variabile casuale che rappresenta il numero di persone immunizzate tra le 50 000 persone cui il vaccino è stato somministrato si ha allora:

$$P(X=k) = \binom{50\,000}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,50\,000).$$

Il valore medio $E(X)$ e la varianza $D^2(X)$ sono pertanto:

$$E(X) = 50\,000\,p = 50\,000\,0.95 = 47\,500$$
$$D^2(X) = 50\,000\,p\,(1-p) = 50\,000\cdot 0.95\cdot 0.05 = 2375.$$

La deviazione standard $D(X)$ è infine:

$$D(X) = \sqrt{2375} = 48.7390.$$

▷ **ESERCIZIO 11**

Si supponga che il 50% di un ampio campione di studenti che sostengono per la prima volta un dato esame lo superino con un voto superiore a 24/30. Si valutino numero medio e deviazione standard del numero di studenti che, sostenendo detto esame per la prima volta, lo superano riportando un voto superiore a 24/30.

Soluzione
Denotiamo con X la variabile casuale rappresentante il numero di studenti che sostengono per la prima volta l'esame. L'evento "superare l'esame con un voto superiore a 24/30" ha probabilità di occorrenza $\theta = 0.5$ dal momento che sappiamo che metà degli studenti del campione considerato supera l'esame con voto superiore a 24/30. È pertanto ragionevole fare riferimento ad una schema binomiale in cui la probabilità p_k che k studenti superino l'esame con voto superiore a 24/30 è data da:

$$p_k = \binom{N}{k}(0.5)^N \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Si ha allora:

$$E(X) = 0.5 \cdot N = \frac{N}{2},$$
$$D^2(X) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot N = \frac{N}{4}.$$

Di qui segue la deviazione standard $D(X)$:

$$D(X) = \sqrt{\frac{N}{4}} = \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

▷ **ESERCIZIO 12**
Sia $D^2(X)$ la varianza di una variabile casuale X e sia Y la variabile casuale $X+5$. La varianza di Y risulta maggiore della varianza di X? Che cosa può dirsi se in luogo di Y si considera la variabilie casuale $Z = X - 5$?

Soluzione
Per definizione, si ha:

$$\begin{aligned} D^2(Y) &= E[X+5-E(X+5)]^2 = E[X+5-E(X)-E(5)]^2 \\ &= E[X+5-E(X)-5)]^2 = E[X-E(X)]^2 \equiv D^2(X). \end{aligned}$$

In maniera analoga si vede che risulta $D^2(Z) = D^2(X)$. Più in generale, è facile dimostrare che variabili casuali che differiscono per una costante hanno varianze uguali.

▷ **ESERCIZIO 13**
Sia X una variabile casuale a valore medio 12 e deviazione standard 3. Calcolare $E(X^2)$, $E\left[E(X^2)\right]$, $D^2\left[E(X^2)\right]$ e $D^2\left[D^2(X^2)\right]$.

Soluzione
Dalla relazione

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

segue:

$$E(X^2) = D^2 + [E(X)]^2 = 9 + 144 = 153.$$

Poiché $E(X^2)$ e $D^2(X^2)$ sono delle costanti, si ha:

$$\begin{aligned} E\left[E(X^2)\right] &\equiv E(153) = 153 \\ D^2\left[E(X^2)\right] &\equiv D^2(153) = (153)^2 - (153)^2 = 0 \\ D^2\left[D^2(X^2)\right] &\equiv D^2\left\{E(X^4) - \left[E(X^2)\right]^2\right\} = 0 \end{aligned}$$

dove di nuovo l'ultima uguaglianza segue dall'essere una costante la differenza in parentesi graffa e pertanto dall'essere nulla la sua varianza.

▷ **ESERCIZIO 14**
Si dimostri che il valore medio di una variabile casuale intera positiva X può esprimersi al seguente modo:

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} P(X > k).$$

Soluzione
Per definizione di media abbiamo:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \geq 0} k\, P(X = k) \\ &= 0\, P(X = 0) + 1\, P(X = 1) + 2\, P(x = 2) + \ldots \\ &\quad + k\, P(x = k) + \ldots \end{aligned}$$

ovvero, riscrivendo, in diverso ordine gli addendi:

$$\begin{aligned} E(X) = {} & P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \ldots + P(X=k) + \ldots \\ & + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \ldots + P(X=k) + \ldots \\ & + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + \ldots + P(X=k) + \ldots \\ & \ldots \end{aligned}$$

Il risultato segue allora effettuando la somma a secondo membro per righe. Infatti, la prima riga fornisce $P(X > 0)$, la seconda $P(X > 1)$, la terza $P(X > 2)$ e così via.

▷ **ESERCIZIO 15**

Dimostrare che il valore medio di una variabile casuale assolutamente continua di funzione di distribuzione $F(X)$ può esprimersi al seguente modo:

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} [1 - F(x)]\,dx. \qquad (1)$$

Soluzione

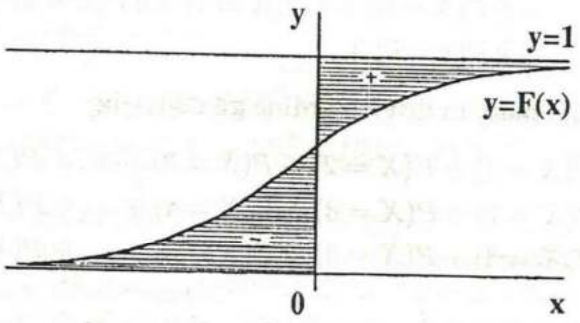
Sia $f(x)$ la densità di probabilità di X. Si ha allora:

$$-\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} y f(y)\,dy. \qquad (2)$$

Analogamente, risulta:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} [1 - F(x)]\,dx &= \int_{0}^{\infty} \left[1 - \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy\right] dx \\ &= \int_{0}^{\infty} dx \int_{x}^{\infty} f(y)\,dy = \int_{0}^{\infty} y f(y)\,dy.\end{aligned} \qquad (3)$$

Sommando membro a membro le (2) e (3) si ritova così la (1). Si noti che la (1) consente d'interpretare il valore di aspettazione di X come differenza tra l'area del rettangolide avente base $(0, \infty)$ relativo alla funzione $1 - F(x)$ e l'area del rettangolide di base $(-\infty, 0)$ relativo alla funzione $F(x)$ (cf. figura). Tale affermazione in realtà vale in generale, qualsiasi sia la variabile casuale X.



▷ **ESERCIZIO 16**

Sia $A \subset \Omega$ un evento e sia $I(\omega)\colon \Omega \to R$ la variabile casuale "indicatore" dell'evento A:

$$I(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \in \overline{A}. \end{cases}$$

Si calcoli il valore medio di I.

Soluzione

$I \equiv I(\omega)$ è una variabile casuale che assume i valori 1 e 0 con probabilità $P(A)$ e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, rispettivamente. Per definizione, il valore medio $E(I)$ di tale variabile casuale è:

$$E(I) = 1\,P(A) + 0\,P(\overline{A}) = P(A).$$

Si noti che questo risultato mostra che la probabilità di un evento può anche riguardarsi come un valore medio.

▷ **ESERCIZIO 17**

Calcolare la varianza della variabile casuale $Y = \alpha X + \beta$ (α, β reali).

Soluzione

Per definizione si ha:

$$\begin{aligned}D^2(Y) \equiv E\left\{[Y - E(Y)]^2\right\} &= E\left\{[\alpha X + \beta - E(\alpha X + \beta)]^2\right\} \\ &= E\left\{[\alpha X + \beta - \alpha E(X) - \beta]^2\right\} = E\left\{\alpha^2 [X - E(X)]^2\right\} \\ &= \alpha^2 E\,[X - E(X)]^2 = \alpha^2 D^2(X).\end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 18**

Una variabile casuale X ha varianza σ^2. Calcolare le varianze delle variabili casuali $X + rX$ e $X - rX$, con $r > 0$.

Soluzione

Per definizione di varianza, si ha:

$$\begin{aligned}D^2(X \pm rX) &= E\,[X \pm rX - E(X \pm rX)]^2 \\ &= E\,[(1 \pm r)X - (1 \pm r)E(X)]^2 \\ &= (1 \pm r)^2 E\,[X - E(X)]^2 = (1 \pm r)^2 D^2(X).\end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 19**

Si consideri una successione di eventi distribuiti nel tempo secondo la legge di Poisson e sia X la variabile casuale che denota l'intervallo di tempo intercorrente tra due successivi eventi. Si determini di questa variabile la densità di probabilità, la funzione di distribuzione, il valore medio e la varianza.

Soluzione

Per ipotesi la probabilità $p_n(T)$ di avere n eventi nell'intervallo di tempi $[0, T)$ è:

$$p_n(T) = \frac{(\alpha T)^n}{n!} e^{-\alpha T} \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

dove $\alpha > 0$ è il tasso di occorenza degli eventi per unità di tempo. La probabilità di non avere eventi nell'intervallo $[0, T)$ è allora:

$$p_0(T) = e^{-\alpha T}.$$

Indichiamo ora con τ l'istante di occorenza di un evento, che chiameremo "primo evento", e con θ $(\theta > \tau)$ un generico istante. La probabilità di non avere eventi nell'intervallo $[\tau, \theta)$ è allora:

$$p_0(\theta - \tau) \equiv e^{-\alpha(\theta-\tau)} \qquad (\theta > \tau).$$

La probabilità di avere almeno un evento in $[\theta, \tau)$ è pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(\theta - \tau) \equiv 1 - p_0(\theta - \tau) = 1 - e^{-\alpha(\theta-\tau)} \qquad (\theta > \tau).$$

Ma questa è anche la probabilità che l'intervallo di tempo X intercorrente tra l'istante τ di occorrenza del primo evento e l'istante di occorrenza del successivo evento sia minore di $\theta - \tau$:

$$P(X < \theta - \tau) = 1 - e^{-\alpha(\theta-\tau)} \qquad (\theta > \tau).$$

Per l'arbitrarietà di θ e τ si ha così:

$$P(X < x) = 1 - e^{-\alpha x} \qquad (x > 0). \tag{1}$$

La (1) fornsce la funzione di distribuzione della variabile casuale X. La densità di probabilità $f_X(x)$ si ottiene allora come derivata della (1) rispetto ad x:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} P(X < x) = e^{-\alpha x} \qquad (x > 0). \tag{2}$$

Si noti che $f_X(x)$ è normalizzata, avendosi:

$$\int_0^{\infty} f_X(x)\, dx = -\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Quindi, l'intervallo di tempo X intercorrente tra due successivi eventi è una variabile casuale esponenziale di parametro uguale al tasso per unità di tempo di occorrenza degli eventi considerati. Si ottiene poi facilmente:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, d(-e^{-\alpha x}) \\ &= -x\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Calcoliamo infine la varianza $D^2(X)$ come differenza tra il momento del secondo ordine di X e il quadrato del valor medio di X. Poiché risulta:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2\, d(-e^{-\alpha x}) \\ &= -x^2\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} x(\alpha\, e^{-\alpha x}) dx = \frac{2}{\alpha} E(X) = \frac{2}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

si ha in definitiva:

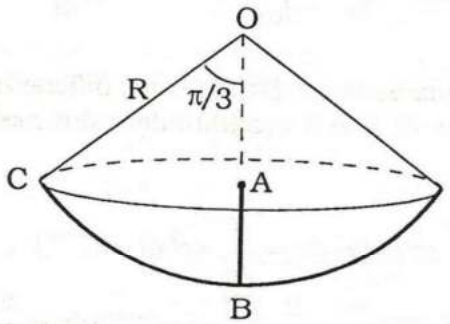
$$D^2(X) \equiv E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Si noti che la densità di probabilità (2) si può anche determinare con il seguente ragionamento. Detto t l'istante di occorrenza di un evento, la probabilità che X assume un valore in $(x, x + dx)$ può scriversi come prodotto della probabilità $e^{-\alpha x}$ di non avere eventi in $[t, t + x)$ per la probabilità $\alpha\, dx$ di avere un evento in $[t + x, t + x + dx)$. Dalla (2), per integrazione, segue poi immediatamente la (1).

▷ **ESERCIZIO 20**

L'esplosione di un missile in volo genera 1 000 frammenti che si suppone si distribuiscano uniformemente in un cono avente vertice nel punto di esplosione ad angolo di apertura $\theta = 2\pi/3$ (v. figura). Calcolare valore medio e varianza del numero di frammenti che transitano attraverso $1\,m^2$ della calotta individuata dal cono sulla superficie sferica avente centro nel punto di esplosione e raggio $R = 600\,m$.

Soluzione



Il numero medio λ di frammenti per unità di superficie è dato dal rapporto tra il numero totale di frammenti prodotti diviso per la superficie S della calotta sferica. Poiché risulta:

$$S = 2\pi R\,\overline{AB} = 2\pi R\,(R - \overline{OA}) = 2\pi R\left(R - R\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\pi R^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi R^2 = 1\,130\,940\,m^2$$

si ha:

$$\lambda = \frac{1\,000}{S} = 9 \cdot 10^{-4}/m^2. \qquad (1)$$

Poiché la probabilità che un fissato frammento passi attraverso una superficie $S_0 = 1\,m^2$ è data da

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\lambda}{1\,000} = 9 \cdot 10^{-7},$$

è ragionevole assumere che la distribuzione del numero di frammenti che transitano attraverso l'unità di superficie della calotta sia del tipo di Poisson con parametro λ dato dalla (1). Quindi si può concludere che, in tale approssimazione, valore medio e varianza richiesti siano entrambi uguali a $9 \cdot 10^{-4}/m^2$.

▷ **ESERCIZIO 21**

Si determini il valore della costante c che rende minimo $E\left[(X-c)^2\right]$, con X variabile casuale arbitraria.

Soluzione

Supponiamo che X sia una variabile casuale discreta con

$$P\{X = x_i\} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha allora:

$$E\left[(X-c)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2 p_i.$$

Imponendo che sia nulla la derivata rispetto a c, dalla (1) segue:

$$0 = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)\, p_i$$

ovvero:

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2c\sum_{i=1}^{n} p_i. \qquad (2)$$

Poiché $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, dalla (2) segue:

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \equiv E(X).$$

È poi immediato verificare che il punto $c = E(X)$ è un punto di minimo per $E\left[(X-c)^2\right]$. Quindi, il valore di c che rende minimo $E\left[(X-c)^2\right]$ è il valore medio di X. In maniera analoga si perviene alla stessa conclusione nel caso in cui X assume un'infinità numerabile di valori. Supponiamo ora che X possegga densità di probabilità $f_X(x)$. Si ha allora:

$$E\left[(X-c)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 f_X(x)\, dx. \qquad (3)$$

Imponendo l'annullarsi della derivata di $E\left[(X-c)^2\right]$ rispetto a c, dalla (3) si ha:

$$0 = -2\int_{-\infty}^{\infty} (x-c)\, f_X(x)\, dx,$$

da cui segue nuovamente:

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \equiv E(X),$$

con c così determinato punto di minimo di $E\left[(X-c)^2\right]$.

▷ **ESERCIZIO 22**

Sia X una variabile casuale continua a valori non negativi di densità di probabilità $f(x)$ e di valore medio $E(X)$. Dimostrare che per ogni costante $\alpha > 0$ risulta:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X).$$

Soluzione

Per definizione di valore medio, essendo X a valori non negativi si ha :

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\, dx.$$

Fissato $\alpha > 0$, si ha allora:

$$E(X) = \int_0^\alpha x f(x)\, dx + \int_\alpha^\infty x f(x)\, dx \geq \int_\alpha^\infty x f(x)\, dx, \qquad (1)$$

dove la disuguaglianza nasce dall'aver trascurato l'addendo non negativo

$$\int_0^\alpha x f(x)\, dx.$$

Poiché nell'intervallo (α, ∞) risulta $x \geq \alpha$, dalla (1) segue:

$$E(X) \geq \alpha \int_\alpha^\infty f(x)\, dx \equiv \alpha P(X \geq \alpha),$$

ovvero:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(X).$$

È questa la cosiddetta disuguaglianza di Markov.

▷ **ESERCIZIO 23**

Si calcolino valore medio, momento del secondo ordine intorno all'origine, varianza, moda e mediana della variabile casuale X avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione

Usando le definizioni di valore medio e momento del second'ordine intorno all'origine, con facili calcoli si ottiene

$$E(X) = \frac{2}{a} \int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{2}{a} \int_0^a x^2\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a^2}{6}.$$

La varianza $D^2(X)$ può allora immediatamente ottenersi come differenza tra il momento del second'ordine e il quadrato del valore medio:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}.$$

Per determinare la moda μ occorre calcolare il punto di massimo della densità di probabilità. Poiché $f(x)$ è monotona decrescente in $(0, a)$ il punto di massimo coincide con l'origine. Quindi $\mu = 0$. Calcoliamo infine la mediana M. Per definizione di mediana, deve aversi:

$$\int_{-\infty}^M f(x)\, dx = \int_M^\infty f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

ovvero, nel nostro caso:

$$\int_0^M \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \int_M^a \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2}.$$

Ad esempio dall'uguaglianza

$$\int_0^M \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2}$$

segue immediatamente:

$$\frac{2}{a}\left(M - \frac{M^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}$$

ovvero:

$$2M^2 - 4aM + a^2 = 0.$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado in M le cui soluzioni sono $(1+1/\sqrt{2})\,a$ e $(1-1/\sqrt{2})\,a$. La prima soluzione va però scartata in quanto è maggiore di a (cf. la definizione di $f(x)$). Si ha dunque:

$$M = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a = 0.2929\, a.$$

> **ESERCIZIO 24**

Sia X una variabile casuale di densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(x-m)} & \text{se } x > m, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

con $\lambda \in R^+$ e $m \in R$. Calcolare valore medio e mediana di X.

Soluzione

Per definizione di valore medio, si ha:

$$E(X) = \int_m^\infty x\lambda\, e^{-\lambda(x-m)}\, dx = \lambda \int_m^\infty x\, e^{-\lambda(x-m)}\, dx.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = -\lambda(x-m)$ si ha poi:

$$E(X) = \lambda \int_0^{-\infty} \left(\frac{m-y}{\lambda}\right) e^y \left(-\frac{1}{\lambda}\right) dy = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{m-y}{\lambda}\right) e^y\, dy$$
$$= \left(\frac{m-y}{\lambda}\right) e^y \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^0 e^y\, dy = m + \frac{1}{\lambda}.$$

Per calcolare la mediana M, ricordiamo che essa è tale da aversi:

$$P(X \le M) = P(X \ge M) = \frac{1}{2}.$$

Imponendo che si abbia $P(X \le M) = 1/2$, otteniamo:

$$\int_m^M \lambda\, e^{-\lambda(x-m)}\, dx = \frac{1}{2}$$

ovvero:

$$-\, e^{-\lambda(x-m)} \Big|_m^M = \frac{1}{2}.$$

Di qui segue:

$$1 - e^{-\lambda(M-m)} = \frac{1}{2},$$

e quindi:

$$M = m + \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

> **ESERCIZIO 25**

Calcolare media e varianza dell'area del triangolo di cui all'Esercizio 5 del Cap.VI.

Soluzione

Con riferimento alla figura del citato esercizio si ha $A = \operatorname{sen}\Phi$, con Φ uniformemente distribuito sulla semicirconferenza superiore. Pertanto, la densità di probabilità $f(\varphi)$ di Φ è:

$$f(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < \varphi < \pi, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha allora:

$$E(A) = \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}.$$

Calcoliamo il momento del secondo ordine:

$$E(A^2) = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\varphi\, f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2}.$$

La varianza $D^2(A)$ è pertanto:

$$D^2(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}.$$

> **ESERCIZIO 26**

Si consideri la famiglia di variabili casuali normali di valore medio m e varianza $2\lambda^2 + \lambda + 1$, con λ variabile nell'intervallo $[a, 2]$, con a reale fissato. Si determini la variabile casuale a varianza minima.

Soluzione

La varianza $D^2(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda + 1$ al variare di λ in R assume il valore minimo in $\overline{\lambda} = -1/4$, dove vale $D^2(\overline{\lambda}) = 7/8$. Pertanto, al variare di λ in $[a, 2]$ si presentano le due seguenti possibilità:

i) $a < \overline{\lambda} < 2$;
ii) $\overline{\lambda} \le a$.

(Si noti che il caso $\overline{\lambda} \ge 2$ va scartato in quanto sappiamo che $\overline{\lambda} < 0$). Nel caso i) la variabile casuale a varianza minima è evidentemente quella la cui densità di probabilità è $N(m, D^2(\overline{\lambda})) = N(m, 7/8)$. Nel caso ii) la variabile casuale a varianza minima ha densità di probabilità $N(m, 2a^2 + a + 1)$.

▷ **ESERCIZIO 27**

Sia X una variabile casuale assolutamente continua con $E|X| < \infty$. Mostrare che il valore d'aspettazione di $|X - c|$, con c costante, è minimo per $c = x_m$, dove x_m è la mediana.

Soluzione

Denotando con $f_X(x)$ la funzione densità di X, per definizione si ha:

$$E[|X-c|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c|\, f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} (c-x)\, f_X(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} (x-c)\, f_X(x)\, dx.$$

Riguardando $E[|X-c|]$ come una funzione del parametro c, determiniamone il minimo imponendo l'annullarsi della sua derivata rispetto a c:

$$0 = \frac{dE[|X-c|]}{dc} = (c-x)\, f_X(x)\Big|_{x=c} + \int_{-\infty}^{c} f_X(x)\, dx$$
$$- (x-c)\, f_X(x)\Big|_{x=c} - \int_{c}^{\infty} f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{c} f_X(x)\, dx - \int_{c}^{\infty} f_X(x)\, dx.$$

Di qui segue:

$$\int_{-\infty}^{c} f_X(x)\, dx = \int_{c}^{\infty} f_X(x)\, dx.$$

Quindi, il punto c che annulla la derivata di $E[|X-c|]$ è proprio la mediana x_m. Che si tratti di un punto di minimo segue poi immediatamente osservando che risulta:

$$\frac{d^2E[|X-c|]}{dc^2}\Big|_{c=x_m} = [f_X(c) + f_X(c)]\Big|_{c=x_m} = 2f_X(x_m) > 0.$$

▷ **ESERCIZIO 28**

Siano Y e X variabili casuali linearmente dipendenti, ossia si abbia $Y = aX + b$, con a e b reali arbitrari. Si determinino a e b sapendo che Y ha media nulla e varianza unitaria.

Soluzione

Imponiamo le condizioni $E(Y) = 0$ e $D^2(Y) = 1$:

$$aE(X) + b = 0$$
$$a^2 D^2(X) = 1.$$

Risolvendo rispetto ad a e b si ottiene:

$$a = \pm\frac{1}{D(X)}$$
$$b = \mp\frac{E(X)}{D(X)}.$$

Otteniamo così:

$$Y = aX + b = \pm\frac{X - E(X)}{D(X)}.$$

Si noti che questo risultato mostra come la standard di una variabile casuale X, ossia $[X - E(X)]/D(X)$, non sia la sola variabile casuale ottenibile da X con una trasformazione lineare e tale da avere media nulla e varianza unitaria: anche l'opposto della standard di una variabile casuale gode della stessa proprietà.

▷ **ESERCIZIO 29**

Dimostrare che per una variabile casuale X normale standard risulta

$$E\left(X^{2k+1}\right) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \quad (1a)$$
$$E\left(X^{2k}\right) = (2k-1)!! \qquad (k = 1, 2, \ldots). \quad (1b)$$

Soluzione

Dalla definizione di momenti intorno all'origine si ha:

$$E\left(X^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Notiamo che per n dispari la funzione integranda è dispari così che l'integrale a secondo membro della (2) è nullo. Resta così dimostrata la (1a). Si ha invece per $k = 1, 2, \ldots$:

$$E\left(X^{2k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\left(e^{-x^2/2}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k-1} e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2k-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2} e^{-x^2/2}\, dx$$

dove è stata effettuata un'integrazione per parti. Poiché la funzione $x^{2k-1}e^{-x^2/2}$ tende a zero per $x \to \pm\infty$, si ha in definitiva:

$$E\left(X^{2k}\right) = (2k-1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k-2} e^{-x^2/2}\, dx \qquad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Poiché l'integrale a secondo membro della (3) è il momento di ordine $2k-2$ intorno all'origine della variabile casuale X, abbiamo ottenuto la relazione ricorsiva:

$$E\left(X^{2k}\right) = (2k-1)E\left(X^{2k-2}\right) \qquad (k = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Ricordando che $E\left(X^0\right) = 1$ (condizione di normalizzazione della densità di probabilità), dalla (4) segue in definitiva la (1*b*).

▷ **ESERCIZIO 30**

Sia Y una variabile casuale $N(0, \sigma^2)$. Calcolare i momenti intorno all'origine di Y.

Soluzione

Notiamo che la variabile casuale:

$$X = \frac{Y}{\sigma} \quad (1)$$

è normale standard. Si ha quindi da (1):

$$E\left(Y^n\right) = E\left[(\sigma X)^n\right] = \sigma^n E\left(X^n\right) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Ricordando le (1*a*) e (1*b*) dell'esercizio precedente, abbiamo in definitiva:

$$E\left(Y^{2k+1}\right) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots)$$
$$E\left(Y^{2k}\right) = \sigma^{2k}(2k-1)!! \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

▷ **ESERCIZIO 31**

Sia Z una variabile casuale $N(m, \sigma^2)$. Calcolarne i momenti intorno all'origine.

Soluzione

Si può seguire un procedimento analogo a quello adottato per la risoluzione del precedente esercizio. Invero, sia X la variabile casuale standard di X:

$$X = \frac{Z - m}{\sigma}.$$

Si ha allora:

$$Z = \sigma X + m.$$

Di qui segue:

$$E\left(Z^n\right) = E\left[(\sigma X + m)^n\right] = E\left[\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sigma^r X^r m^{n-r}\right]$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sigma^r m^{n-r} E\left(X^r\right) \qquad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Poiché come sappiamo dall'Esercizio 29 risulta $E\left(X^r\right) = 0$ per r dispari, la (1) diviene:

$$E\left(Z^n\right) = \sum_{k=0}^{M} \binom{n}{2k} \sigma^{2k} m^{n-2k} E\left(X^{2k}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

dove $M = n/2$ per n pari mentre $M = (n-1)/2$ per n dispari. Ricordando la (1*b*) dell'Esercizio 29, dalla (2) si ha in definitiva:

$$E\left(Z^n\right) = \sum_{k=0}^{M} \binom{n}{2k} \sigma^{2k} m^{n-2k} (2k-1)!! \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

ovvero, più esplicitamente:

$$E\left(Z^{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \sigma^{2k} m^{2n-2k} (2k-1)!! \qquad (n = 1, 2, \dots)$$
$$E\left(Z^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \sigma^{2k} m^{2n+1-2k} (2k-1)!! \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

▷ **ESERCIZIO 32**

Sia X una variabile casuale $N(m, \sigma^2)$. Determinare la relazione esistente tra il generico momento centrale $\mu_r = E\left[(X-m)^r\right]$ ed il momento centrale di ordine $r-2$.

Soluzione

Per definizione di momento centrale di ordine k $(k = 2, 3, \dots)$ per la variabile casuale X considerata si ha:

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \qquad (k = 2, 3, \dots).$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = (x-m)/(\sqrt{2}\sigma)$ si ottiene:

$$\mu_k = \frac{\sigma^k 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-y^2}\, dy$$
$$= \frac{\sigma^k 2^{k/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-1} \left(-\frac{1}{2}\right) de^{-y^2}\, dy \qquad (k = 2, 3, \ldots). \quad (1)$$

Calcolando l'integrale per parti segue:

$$\mu_k = \frac{\sigma^k 2^{(k-2)/2}}{\sqrt{\pi}} \left[y^{(k-1)} e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (k-1) \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2}\, dy \right]$$
$$= \frac{\sigma^k (k-1)\, 2^{(k-2)/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2}\, dy \qquad (k = 2, 3, \ldots). \quad (2)$$

Dalla (2) ponendo $k = r$ si ottiene:

$$\mu_r = \frac{\sigma^r (r-1)\, 2^{(r-2)/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{r-2} e^{-y^2}\, dy \qquad (r = 2, 3, \ldots). \quad (3)$$

D'altra parte, dalla (1) per $k = r-2$ segue:

$$\mu_{r-2} = \frac{\sigma^{r-2}\, 2^{(r-2)/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{r-2} e^{-y^2}\, dy \qquad (r = 2, 3, \ldots). \quad (4)$$

Dal confronto delle (3) e (4) segue infine:

$$\mu_r = \sigma^2 (r-1) \mu_{r-2} \qquad (r = 2, 3, \ldots)$$

che costituisce la relazione desiderata.

▷ **ESERCIZIO 33**

Si calcolino i momenti centrali $\mu_{2k} = E\left[(X-m)^{2k}\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, ed i momenti centrali $\mu_{2k+1} = E\left[(X-m)^{2k+1}\right]$, $k = 0, 1, \ldots$, per una variabile casuale X $N(m, \sigma^2)$.

Soluzione

Dall'esercizio precedente abbiamo:

$$\mu_{2k} = (2k-1)\sigma^2 \mu_{2k-2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Poiché si ha $\mu_0 = 1$, dalla precedente relazione segue:

$$\mu_{2k} = (2k-1)!!\, \sigma^{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \quad (1)$$

In maniera analoga, dalla relazione

$$\mu_{2k+1} = (2k)\sigma^2 \mu_{2k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

e ricordando che risulta $\mu_1 = 0$ segue:

$$\mu_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \quad (2)$$

Si osservi che (1) e (2) possono anche ottenersi per altra via. Ad esempio, ricorrendo alla variabile standard $(Y-m)/\sigma$ ed utilizzando la $(1a)$ dell'Esercizio 29 si ha:

$$0 = E\left(Y^{2k+1}\right) = E\left[\frac{1}{\sigma^{2k+1}} (X-m)^{2k+1}\right] = \frac{1}{\sigma^{2k+1}} \mu_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

ossia $\mu_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Dalla $(1b)$ dello stesso esercizio segue invece:

$$(2k-1)!! = E\left(Y^{2k}\right) = E\left[\frac{1}{\sigma^{2k}} (X-m)^{2k}\right] = \frac{1}{\sigma^{2k}} \mu_{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

ovvero

$$\mu_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 34**

Sia X una variabile casuale $N(0,1)$. Si determini

$$E[X \cos X], \quad E\left(\frac{X}{1+X^2}\right), \quad E[\operatorname{sen} X].$$

Soluzione

Ricordiamo che, detta $\varphi(X)$ una funzione della variabile casuale X, si ha:

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx, \quad (1)$$

dove $f_X(x)$ è la densità di probabilità di X. Nel nostro caso si ha:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Pertanto risulta:

$$E[X \cos X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cos x \, e^{-x^2/2} \, dx, \tag{2a}$$

$$E\left(\frac{X}{1+X^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \, e^{-x^2/2} \, dx, \tag{2b}$$

$$E[\operatorname{sen} X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x \, e^{-x^2/2} \, dx. \tag{2c}$$

Poiché le funzioni integrande nelle (2a), (2b) e (2c) sono funzioni dispari, segue $E[X \cos X] = E\left(\frac{X}{1+X^2}\right) = E[\operatorname{sen} X] = 0$. È facile convincersi di ciò con la seguente osservazione. Consideriamo la (1) e supponiamo che $\varphi(x)$ sia una funzione dispari, ossia che $\forall x \in R$ sia $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Poiché $f_X(x)$ è una funzione pari – ossia $\forall x \in R$ risulta $f_X(-x) = f_X(x)$ – il prodotto $\psi(x) = \varphi(x) f_X(x)$ è essa stessa una funzione dispari, tale cioè da aversi

$$\psi(-x) = -\psi(x) \tag{3}$$

per ogni $x \in R$. Dalla (1) segue dunque:

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} \psi(x) \, dx + \int_{0}^{\infty} \psi(x) \, dx. \tag{4}$$

Effettuiamo ora il cambiamento di variabile $y = -x$ nel primo integrale a secondo membro della (4). Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \psi(x) \, dx &= \int_{\infty}^{0} \psi(-y) \, (-dy) = \int_{0}^{\infty} \psi(-y) \, dy \\ &= -\int_{0}^{\infty} \psi(y) \, dy, \end{aligned} \tag{5}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (3). Dalle (4) e (5) segue allora:

$$E[\varphi(X)] = -\int_{0}^{\infty} \psi(y) \, dy + \int_{0}^{\infty} \psi(x) \, dx = 0.$$

Identificando $\varphi(X)$ con $X \cos X$, $\frac{X}{1+X^2}$ e $\operatorname{sen} X$, rispettivamente, segue infine $E[X \cos X] = E\left(\frac{X}{1+X^2}\right) = E[\operatorname{sen} X] = 0$.

▷ **ESERCIZIO 35**

Sia X una variabile casuale normale standard. Si determini la maggiore tra $D^2(\operatorname{sen} X)$ e $D^2(2X+1)$.

Soluzione

Calcoliamo $D^2(\operatorname{sen} X)$. Poiché si è già visto (cf. Esercizio 34) che la variabile casuale $\operatorname{sen} X$ nelle nostre ipotesi ha media nulla, possiamo scrivere:

$$D^2(\operatorname{sen} X) = E(\operatorname{sen}^2 X) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}^2 x \, f(x) \, dx, \tag{1}$$

dove $f(x)$ è la densità di probabilità normale standard. D'altro canto, si ha:

$$\begin{aligned} D^2(2X+1) &= E\left\{[(2X+1) - E(2X+1)]^2\right\} = \\ &E\left[(2X+1)^2\right] - [E(2X+1)]^2 \\ &= E(4X^2 + 4X + 1) - [2E(X) + 1]^2 \\ &= 4E(X^2) + 4E(X) + 1 - 4E(X)^2 - 4E(X) - 1. \end{aligned}$$

D'altra parte, per le ipotesi fatte su X, si ha $E(X) = 0$, $E(X^2) = 1$, così che otteniamo:

$$D^2(2X+1) = 4. \tag{2}$$

Ritorniamo alla (1), osserviamo che maggiorando $\operatorname{sen}^2 X$ con l'unità si ha:

$$D^2(\operatorname{sen} X) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \equiv 1. \tag{3}$$

Dalle (2) e (3) segue dunque $D^2(2X+1) > D^2(\operatorname{sen} X)$.

▷ **ESERCIZIO 36**

Determinare il massimo tra $D^2(\operatorname{sen} X)$ e $D^2(\cos X)$ per una variabile casuale X normale standard.

Soluzione

Calcoliamo $D^2(\operatorname{sen} X)$ come differenza tra il momento del second'ordine ed il quadrato del momento del prim'ordine:

$$D^2(\operatorname{sen} X) = E(\operatorname{sen}^2 X) - [E(\operatorname{sen} X)]^2. \tag{1}$$

Osserviamo ora che risulta

$$E(\operatorname{sen} X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} t \, e^{-t^2/2} dt \tag{2}$$

e che l'integrale a secondo membro è nullo per essere dispari la funzione integranda (cf. Esercizio 34). Da (1) e (2) segue allora:

$$\begin{aligned} D^2(\operatorname{sen} X) &= E(\operatorname{sen}^2 X) = E(\cos^2 X) - E(\cos 2X) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E(\cos 2X) - E(\cos 2X) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E(\cos 2X), \end{aligned} \tag{3}$$

avendo fatto uso delle identità trigonometriche

$$\begin{aligned} \cos 2X &= \cos^2 X - \operatorname{sen}^2 X \\ \cos^2 X &= \frac{1 + \cos 2X}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Analogamente si ottiene:

$$\begin{aligned} D^2(\cos X) &= E(\cos^2 X) - [E(\cos X)]^2 \\ &= E(\cos 2X) + E(\operatorname{sen}^2 X) - [E(\cos X)]^2 . \end{aligned} \tag{5}$$

Facendo poi uso dell'identità

$$\operatorname{sen}^2 X = \frac{1 - \cos 2X}{2}$$

dalla (5) segue:

$$\begin{aligned} D^2(\cos X) &= E(\cos 2X) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E(\cos 2X) - [E(\cos X)]^2 \\ &= \frac{1}{2} E(\cos 2X) + \frac{1}{2} - [E(\cos X)]^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Osservando allora le relazioni (3) e (6) concludiamo che per calcolare $D^2(\operatorname{sen} X)$ e $D^2(\cos X)$ occorre calcolare $E(\cos X)$ e $E(\cos 2X)$. A tale fine facciamo uso della linearità dell'operatore valore medio dopo aver sviluppato in serie di Mc Laurin le funzioni $\cos X$ e $\cos 2X$:

$$E(\cos X) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} E(X^{2k}), \tag{7a}$$

$$E(\cos 2X) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} X^{2k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} E(X^{2k}). \tag{7b}$$

Ricordando che per una variabile casuale normale standard risulta (cf. Esercizio 29):

$$E(X^{2k}) = (2k-1)!! \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

da (7*a*) e (7*b*) segue:

$$\begin{aligned} E(\cos X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k-1)!! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k!} = e^{-1/2}, \end{aligned} \tag{8}$$

dove si è fatto uso della relazione

$$(2k)!! = 2^k k! \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Analogamente, dalla (7*b*) e facendo uso della (9) si ha:

$$\begin{aligned} E(\cos 2X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} (2k-1)!! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dalle (3) e (10) segue:

$$D^2(\operatorname{sen} X) = \frac{1}{2}(1 - e^2) = 0.4323.$$

Dalle (6), (8) e (10) si ha poi:

$$D^2(\cos X) = \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} - e^{-1} = \frac{1}{2}(e^{-1} - 1)^2 \simeq 0.1997.$$

Si ha quindi

$$D^2(\operatorname{sen} X) > D^2(\cos X).$$

▷ **ESERCIZIO 37**

Si determini la relazione esistente tra il momento intorno all'origine di ordine r $(r = 2, 3, \ldots)$ μ'_r di una variabile X a valore medio $\mu'_1 = \mu$ e i momenti centrali della stessa variabile casuale.

Soluzione
Per definizione di momenti intorno all'origine si ha:

$$\mu'_r = E(X^r) \qquad (r = 2, 3, \ldots).$$

Dall'identità

$$\mu'_r = E\{[(X-\mu)+\mu]^r\} \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

sviluppando la potenza r–esima del binomio con la regola di Newton si ottiene:

$$\begin{aligned}\mu'_r &= E\left[\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\mu^i(X-\mu)^{r-i}\right]\\ &= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\mu^i E\left[(X-\mu)^{r-i}\right]\\ &= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\mu^i\mu_{r-i} \qquad (r = 2, 3, \ldots),\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della linearità dell'operatore di media. Il momento intorno all'origine di ordine r è stato così espresso in termini dei momenti centrali $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$ e del valore medio μ. Poiché d'altra parte $\mu_0 = 1$ e $\mu_1 = 0$, la precedente relazione diviene:

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^{r-2}\binom{r}{i}\mu^i\mu_{r-i} + \mu^r \qquad (r = 2, 3, \ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 38**
Esprimere il momento centrale μ_r di ordine r $(r = 2, 3, \ldots)$ di una variabile casuale X in funzione dei suoi momenti intorno all'origine μ'_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Soluzione
Per definizione si ha:

$$\mu_r = E\left[(X-\mu'_1)^r\right] \qquad (r = 2, 3 \ldots).$$

Sviluppando il binomio a secondo membro con la regola di Newton ed

utilizzando la linearità dell'operatore della media segue:

$$\begin{aligned}\mu_r &= E\left[\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}X^k(-\mu'_1)^{r-k}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\mu'_1)^{r-k}E(X^k)\\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\mu'_1)^{r-k}\mu'_k \qquad (r = 2, 3, \ldots).\end{aligned}$$

Denotando con μ il valore medio μ'_1 della variabile casuale X, si ha in definitiva:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\mu)^{r-k}\mu'_k \qquad (r = 2, 3, \ldots)$$

ovvero, ricordando che $\mu'_0 = 1$:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\mu)^{r-k}\mu'_k + (-\mu)^r \qquad (r = 2, 3, \ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 39**
Sia X una variabile casuale $N(10, 9)$. Calcolare i momenti intorno all'origine del secondo, terzo e quarto ordine esprimendoli in funzione dei momenti centrali.

Soluzione
Dall'Esercizio 37 sappiamo che la relazione intercorrente tra i momenti intorno all'origine μ'_r ed i momenti centrali μ_r è la seguente:

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^{r-2}\binom{r}{i}\mu^i\mu_{r-i} + \mu^r \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

dove $\mu \equiv \mu'_1$. Utilizzando questa relazione segue:

$$\mu'_2 = \mu_2 + \mu \equiv \sigma^2 + \mu^2 \tag{1a}$$
$$\mu'_3 = \mu_3 + 3\mu\sigma^2 + \mu^3 \tag{1b}$$
$$\mu'_4 = \mu_4 + 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\sigma^2 + \mu^4. \tag{1c}$$

Osserviamo che μ e σ^2 sono noti, avendosi $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 9$ per ipotesi; inoltre sappiamo che risulta $\mu_3 = 0$ trattandosi di un momento centrale dispari di una variabile casuale normale. Resta dunque da calcolare μ_4 per poter fornire la risposta al quesito dell'esercizio utilizzando la (1*a*), (1*b*) e (1*c*). A tal fine, applicando il risultato dell'Esercizio 33 per $k = 2$ si ha:

$$\mu_4 = 3\sigma^2.$$

Sostituendo infine nella (1) i valori $\mu = 10$, $\sigma^2 = 9$, $\mu_3 = 0$ e $\mu^4 = 3\sigma^4$ si ha:

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= 9 + 10^2 = 109 \\
\mu_3' &= 3 \cdot 10 \cdot 9 + 10^3 = 1\,270 \\
\mu_4' &= 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 10^2 + 10^4 = 15\,643
\end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 40**

Sia il T il momento centrale di ordine k di una variabile casuale X. Calcolare il momento centrale di ordine k delle variabili casuali cX e $c + X$, dove c e una costante arbitraria non nulla.

Soluzione

Per ipotesi abbiamo

$$T = E\left[(X - \mu)^k\right]$$

dove μ è il valor medio di X. Per la linearità della media si ha allora:

$$\begin{aligned}
E\left\{[cX - E(cX)]^k\right\} &= E\left[(cX - c\mu)^k\right] \\
&= c^k E\left[(X - \mu)^k\right] = c^k T \\
E\left\{[c + X - E(c + X)]^k\right\} &= E\left[(c + X - c - \mu)^k\right] \\
&= E\left[(X - \mu)^k\right] = T.
\end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 41**

Sia X una variabile casuale $N(0, \sigma^2)$. Calcolare la probabilità che il valore σ sia compreso nell'intervallo $I = [|X|, 10|X|]$ nonché la lunghezza media di I.

Soluzione

La probabilità desiderata è $P\{|X| \le \sigma \le 10|X|\}$. Osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned}
P\{|X| \le \sigma \le 10|X|\} &= P\left\{\frac{|X|}{\sigma} \le 1 \le 10\frac{|X|}{\sigma}\right\} \\
&= P\{|Y| \le 1 \le 10|Y|\} \qquad (1)
\end{aligned}$$

dove $Y = X/\sigma$ è la variabile casuale normale standard. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
P\{X \le \sigma \le 10X;\ X \ge 0\} &= P\{Y \le 1 \le 10Y;\ Y \ge 0\} \\
&= P\{0.1 \le Y \le 1\} = 0.3015
\end{aligned}$$

dove si è fatto uso delle tavole della variabile casuale normale standard. Inoltre risulta:

$$\begin{aligned}
P\{-X \le \sigma \le -10X;\ X \le 0\} &= P\{-Y \le 1 \le -10Y;\ Y \le 0\} \\
&= P\{0.1 \le Y \le 1\} = 0.3015.
\end{aligned}$$

In conclusione si ha:

$$\begin{aligned}
P\{|X| \le \sigma \le 10|X|\} &= P\{X \le \sigma \le 10X;\ X \ge 0\} \\
&\quad + P\{-X \le \sigma \le -10X;\ X \le 0\} \\
&= 0.3015 + 0.3015 = 0.6030.
\end{aligned}$$

L'ampiezza $A_I = [|X|, 10|X|]$ dell'intervallo I è la variabile casuale $A_I = 9|X|$. Si ha pertanto:

$$E(A_I) = E(9|X|) = 9E(|X|). \qquad (2)$$

D'altra parte, si ha facilmente:

$$\begin{aligned}
E(|X|) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \qquad (3) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \int_0^{\infty} d\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma.
\end{aligned}$$

Dalle (2) e (3) segue:

$$E(A_I) = 9\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma.$$

▷ **ESERCIZIO 42**

Sia X una variabile casuale normale di varianza V. Se ne determini il valore medio m sapendo che la variabile casuale $Y = e^X$ ha valore medio unitario.

Soluzione
Dalla densità di probabilità di X

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2V}\right], \qquad x \in R$$

e dalla trasformazione monotona

$$Y = e^X$$

è possibile determinare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile casuale Y. Questa densità è nulla per $y \leq 0$. Si ha invece:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{e^x}\Big|_{x=\ln y} = \frac{1}{y\sqrt{2\pi V}} \exp\left[-\frac{(\ln y - m)^2}{2V}\right], \qquad y > 0.$$

Si ha pertanto:

$$E(Y) = \int_0^\infty y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left[-\frac{(\ln y - m)^2}{2V}\right] dy. \quad (1)$$

Con il cambiamento di variabile

$$z = \frac{\ln y - m}{\sqrt{2V}}$$

dalla (1) si ottiene facilmente:

$$E(Y) = \frac{e^m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(z^2-\sqrt{2V}z)}\, dz. \quad (2)$$

Operiamo ora sull'esponente della funzione integranda nella (2) allo scopo di ottenere un quadrato perfetto. Cio è realizzabile aggiungendogli e sottraendogli la quantità $\alpha = \sqrt{V/2}$. Così facendo otteniamo

$$E(Y) = \frac{e^{m+V/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(z^2-\sqrt{V/2})^2}\, dz = \frac{e^{m+V/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\omega^2}\, d\omega, \quad (3)$$

avendo effettuato il cambiamento di variabile $z = \sqrt{V/2} + \omega$. Ricordando che risulta:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega^2}\, d\omega = \sqrt{\pi} \quad (4)$$

dalla (3) segue:

$$E(Y) = e^{m+V/2}.$$

Poiché per ipotesi deve aversi $E(Y) = 1$, segue immediatamente $m = -V/2$. Notiamo che più direttamente lo stesso risultato si ottiene utilizzando la nota formula

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) f_X(x)\, dx \quad (5)$$

per il valore medio di una funzione $\varphi(X)$ di una variabile casuale assolutamente continua. Poiché nel nostro caso si ha $Y = \varphi(X) = e^X$ con X variabile casuale $N(m, V)$, dalla (5) segue:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^\infty e^x f_X(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2V} + x\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{(x-m)^2 - 2Vx}{2V}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{x^2 - 2x(V+m) + m^2}{2V}\right] dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Operando in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, trasformiamo l'esponente della funzione integranda nell'ultimo integrale della (6) in modo da farvi comparire un quadrato perfetto. Si ha così:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{e^{m^2/(2V)}}{\sqrt{2\pi V}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{[x-(V+m)]^2 - (V+m)^2}{2V}\right\} dx \\ &= \frac{e^{m^2/(2V)}}{\sqrt{2\pi V}} e^{(V+m)^2/(2V)} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{[x-(V+m)]^2}{2V}\right\} dx \\ &= \frac{e^{m^2/(2V)}}{\sqrt{2\pi V}} e^{V^2+2mV+m^2/(2V)} \int_{-\infty}^\infty \sqrt{2V} e^{-z^2}\, dz, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso del cambiamento di variabile

$$z = \frac{x-(V+m)}{\sqrt{2V}}.$$

Ricordando la (4) segue in definitiva:

$$E(Y) = e^{m+V/2},$$

che coincide con il risultato già ottenuto con il primo metodo.

▷ **ESERCIZIO 43**

Si calcoli il valore medio di una variabile casuale X avente densità di probabilità di Weibull. Si utilizzi quindi il risultato ottenuto per calcolare la durata media in ore di funzionamento del televisore di cui all'Esercizio 46 del Capitolo V.

Soluzione

Come visto nell'Esercizio 45 del Capitolo V la densità di probabilità di Weibull può esprimersi al seguente modo:

$$W(\gamma,\delta;x) = \begin{cases} \gamma\delta x^{\delta-1}e^{-\gamma x^\delta} & \text{se } x>0 \quad (\gamma,\delta\in R^+), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty \gamma\delta x^{\delta-1}e^{-\gamma x^\delta}\,x\,dx = -\int_0^\infty xD\left(e^{-\gamma x^\delta}\right)dx \\ &= -xe^{-\gamma x^\delta}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\gamma x^\delta}\,dx. \end{aligned}$$

Il primo addendo a secondo membro dà contributo nullo. Utilizzando il cambiamento di variabile $y=\gamma x^\delta$, otteniamo poi:

$$E(X) = \frac{1}{\gamma^{1/\delta}}\frac{1}{\delta}\int_0^\infty y^{1/\delta-1}e^{-y}\,dy = \frac{1}{\gamma^{1/\delta}}\frac{1}{\delta}\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

dove $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma di Eulero. Utilizzando la ben nota proprietà $\alpha\,\Gamma(\alpha)=\Gamma(1+\alpha)$, otteniamo infine:

$$E(X) = \gamma^{-1/\delta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\delta}\right).$$

Per determinare la durata media T in ore di funzionamento del televisore di cui si è detto, basta utilizzare la precedente espressione di $E(X)$ con $\gamma=0.03$ e $\delta=0.5$:

$$T = (0.03)^{-1/0.5}\Gamma(3) = \frac{2}{(0.03)^2} = 2\,222.2222.$$

▷ **ESERCIZIO 44**

Si consideri la variabile casuale avente densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\pi\alpha}\,\frac{1}{1+[(x-\mu)/\alpha)]^2}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Si stabilisca se essa possiede valor medio e varianza.

Soluzione

Dalla definizione di valore medio abbiamo:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\pi\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+[(x-\mu)/\alpha)]^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi\alpha}\lim_{a,b\to\infty}\int_{-a}^{b}\frac{x}{1+[(x-\mu)/\alpha)]^2}\,dx \\ &= \lim_{a,b\to\infty}\left[\frac{\alpha}{\pi}\int_{-a}^{b}\frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{\mu}{\pi\alpha}\int_{-a}^{b}\frac{1}{1+t^2}\,dt\right] \\ &= \lim_{a,b\to\infty}\left[\frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{-a}^{b} + \frac{\mu}{\pi}\operatorname{arctg}(t)\Big|_{-a}^{b}\right] \\ &= \lim_{a,b\to\infty}\left\{\frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right) + \frac{\mu}{\pi}[\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg}(-a)]\right\}. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$ così che concludiamo che la variabile casuale considerata (cui si dà il nome di variabile di Cauchy) non possiede valor medio e quindi neppure varianza.

▷ **ESERCIZIO 45**

Determinare la relazione esistente tra la deviazione media assoluta $E[|X-\mu|]$ e la deviazione standard per una variabile casuale normale di media μ e varianza σ^2.

Soluzione

Per definizione di deviazione media assoluta si ha:

$$\begin{aligned} E[|X-\mu|] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|x-\mu|\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu}|x-\mu|\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu}^{\infty}|x-\mu|\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx. \end{aligned}$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y=-\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ nel primo integrale e nel secondo integrale il cambiamento di variabile $y=\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ otteniamo facilmente:

$$E[|X-\mu|] = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\int_0^\infty ye^{-y^2}\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma.$$

Si ha quindi in definitiva

$$\frac{E[|X-\mu|]}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

▷ **ESERCIZIO 46**

Calcolare valore medio, varianza e mediana della variabile casuale X avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}x\left(1-\frac{x}{2a}\right) & \text{se } 0 < x < a, \\ 1 & \text{se } x \geq a, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la funzione densità di probabilità $f(x)$. Per $0 < x < a$ si ha:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{2}{a} - \frac{2x}{a^2}.$$

Poiché $F(x)$ è costante negli intervalli $x \geq a$ e $x \leq 0$, si ha in definitiva:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Di conseguenza segue facilmente:

$$E(X) = \frac{2}{a}\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{a}{3}.$$

Per calcolare la varianza di X utilizziamo la formula:

$$D^2(X) = E\left\{[X-E(X)]^2\right\} = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Poiché risulta:

$$E(X^2) = \frac{2}{a}\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^2}{6},$$

si ottiene:

$$D^2(X) = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}.$$

Osserviamo ora che $f(x)$ è una retta passante per i punti $(0, 2/a)$ e $(a, 0)$. Pertanto $f(x)$ assume il suo massimo valore $2/a$ nel punto $x = 0$. Quindi la moda di X è proprio il punto $x = 0$. Il calcolo della mediana M si effettua infine imponendo che risulti:

$$\frac{1}{2} = \int_M^\infty f(x)\,dx,$$

ossia:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{a}\int_M^a \left(1-\frac{x}{a}\right)dx = 2 - \frac{2}{a}M - 1 + \frac{M^2}{a^2}.$$

La mediana M è quindi soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\frac{M^2}{a^2} - \frac{2}{a}M + \frac{1}{2} = 0$$

Questa ammette le radici:

$$M_1 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a, \qquad M_2 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a.$$

Di queste la prima va evidentemente scartata in quanto esterna all'intervallo $(0, a)$ nel quale risulta $f(x) \neq 0$.

▷ **ESERCIZIO 47**

Supponendo che la durata di funzionamento di una lampadina sia una variabile casuale distribuita esponenzialmente con parametro λ, si calcoli la durata media di una lampadina e la sua varianza.

Soluzione

Detta X la durata di funzionamento, per ipotesi la sua densità di probabilità è

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con λ parametro positivo. Si ha pertanto:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

Calcoliamo ora il momento del second'ordine intorno all'origine. Per definizione abbiamo:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x^2 d\left(e^{-\lambda x}\right).$$

Integrando per parti otteniamo così:

$$E(X^2) = -e^{-\lambda x}x^2\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx,$$

ovvero

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda}E(X). \tag{2}$$

Dalla relazione

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

facendo uso delle (1) e (2) segue infine:

$$D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

▷ **ESERCIZIO 48**

Nell'ipotesi che la durata di una partita a scacchi sia una variabile casuale di densità esponenziale, si calcoli la probabilità che una partita di scacchi non duri meno del valore medio della durata stessa.

Soluzione

Denotando con λ il parametro della densità esponenziale, già sappiamo (cf. Esercizio 47) che la durata media m della partita a scacchi è data da:

$$m = \frac{1}{\lambda}.$$

Detta T la variabile casuale denotante la durata della partita, si ha allora:

$$P\{T \geq m\} = P\left\{T \geq \frac{1}{\lambda}\right\} = \int_{1/\lambda}^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-1}.$$

Si noti che detta probabilità non dipende dal parametro λ.

▷ **ESERCIZIO 49**

Sia T l'intervallo intercorrente tra l'istante di accensione di una lampadina e l'istante in cui essa si fulmina. Nell'ipotesi che T è una variabile casuale di densità di probabilità esponenziale, si calcoli

$$P\{(T-1)(T-2) \geq 0\}.$$

Quando tale probabilità è minima?

Soluzione

Perché la diseguaglianza $(T-1)(T-2) \geq 0$ sia verificata occorre che T assuma valori esterni all'intervallo $(1,2)$. Poiché $\{T \leq 1\}$ e $\{T \geq 2\}$ sono eventi mutuamente esclusivi, abbiamo:

$$\begin{aligned} P\{(T-1)(T-2) \geq 0\} &\equiv P\{(T \leq 1) \cup (T \geq 2)\} \\ &= P\{T \leq 1\} + P\{T \geq 2\}. \end{aligned}$$

Detto λ il parametro della densità esponenziale si ha allora:

$$\begin{aligned} P\{(T-1)(T-2) \geq 0\} &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,dx + \int_2^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= 1 - e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

Per rispondere all'ultimo quesito consideriamo tale probabilità come funzione del parametro λ:

$$P\{(T-1)(T-2) \geq 0\} \equiv g(\lambda) = 1 - e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}.$$

Poiché risulta:

$$g' = e^{-\lambda} - 2e^{-2\lambda} = 0,$$

esiste un unico punto estremale $\overline{\lambda}$ di $g(\lambda)$ data da:

$$\overline{\lambda} = \ln(2).$$

Questo è proprio un punto di minimo per $g(\lambda)$ avendosi:

$$g''(\lambda)\Big|_{\lambda=\ln(2)} = -e^{-\ln(2)} + 4e^{-2\ln(2)} = \frac{1}{2} > 0.$$

In conclusione, si ha:

$$\min_\lambda P\{(T-1)(T-2) \geq 0\} = g[\ln(2)] = \frac{3}{4}.$$

▷ **ESERCIZIO 50**

Calcolare la varianza della variabile casuale X caratterizzata dalla densità di probabilità di Weibull

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

con α e β reali positivi. Esaminare infine il caso particolare $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Soluzione
Utilizziamo la formula

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{1}$$

ricordando che risulta (cf. Esercizio 43):

$$E(X) = \frac{1}{\alpha^{1/\beta}} \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{2}$$

Calcoliamo ora $E(X^2)$. Per definizione si ha:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}\, dx = \alpha\beta \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-\alpha x^\beta}\, dx.$$

Con il cambiamento di variabile $t = \alpha x^\beta$, dalla precedente relazione otteniamo:

$$E(X^2) = \alpha^{-2/\beta} \int_0^\infty t^{2/\beta} e^{-t}\, dt = \alpha^{-2/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right). \tag{3}$$

Dalla (1), (2) e (3) segue in definitiva:

$$D^2(X) = \alpha^{-2/\beta} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \right\}.$$

Per $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ si ha poi:

$$D^2(X) = \Gamma(2) - \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 1 - \frac{\pi}{4},$$

dove si è fatto uso della nota formula $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

▷ **ESERCIZIO 51**
La seguente funzione densità di probabilita è spesso impropriamente chiamata "distribuzione"di Pareto:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)} & \text{se } \beta \le x < \infty, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con α e β parametri positivi. Calcolare valore medio, varianza e mediana.

Soluzione
Detta X la variabile casuale distribuita secondo la legge di Pareto, si ha:

$$E(X) = \alpha\beta^\alpha \int_\beta^\infty x^{-\alpha}\, dx. \tag{1}$$

Questo integrale è divergente per $\alpha \le 1$. Per $\alpha > 1$ si ha:

$$\int_\beta^\infty x^{-\alpha}\, dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\beta^\infty = \frac{\beta^{1-\alpha}}{\alpha - 1}. \tag{2}$$

In definitiva, abbiamo:

$$E(X) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha - 1} \beta^{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1, \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per calcolare $D^2(X)$ cominciamo con il calcolare $E(X^2)$. Si ha:

$$E(X^2) = \alpha\beta^\alpha \int_\beta^\infty x^{1-\alpha}\, dx. \tag{3}$$

L'integrale a secondo membro è ancora del tipo (2), identificandosi con questo con la sostituzione $\alpha - 1 \to \alpha$. Ne segue che l'integrale (3) è divergente per $\alpha \le 2$ mentre si ha:

$$\int_\beta^\infty x^{1-\alpha}\, dx = \frac{\beta^{2-\alpha}}{\alpha - 2}$$

per $\alpha > 2$. Dalla (3) segue allora per $\alpha > 2$:

$$E(X^2) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha - 2} \beta^{2-\alpha},$$

e quindi, per $\alpha > 2$, si ha:

$$\begin{aligned} D^2(X) \equiv E(X^2) - [E(X)]^2 &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha - 2} \beta^{2-\alpha} - \frac{\alpha^2\beta^{2\alpha}}{(\alpha-1)^2} \beta^{2-2\alpha} \\ &= \alpha\beta^2 \left[\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\right] = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Poiché $E(X^2)$ è divergente per $\alpha \leq 2$, $D^2(X)$ non può esprimersi come differenza tra momento del second'ordine e quadrato del valor medio. D'altra parte, dalla definizione $D^2(X) = E[X - E(X)]^2$ si conclude che $D^2(X)$ esiste e vale ∞ per $1 < \alpha < 2$, mentre non esiste per $\alpha \leq 1$. La mediana M si determina infine imponendo la condizione:

$$\int_\beta^M \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)}\,dx = \frac{1}{2}$$

oppure

$$\int_M^\infty \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Dalla prima condizione, ad esempio, segue:

$$\alpha\beta^\alpha \left.\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_M^\infty = \frac{1}{2},$$

ossia:

$$\beta^\alpha M^{-\alpha} = \frac{1}{2},$$

da cui segue:

$$M = 2^{1/\alpha}\beta.$$

▷ **ESERCIZIO 52**

Calcolare valore medio e varianza di una variabile casuale con distribuzione di Laplace.

Soluzione

Ricordiamo che una variabile casuale X si dice essere distribuita secondo Laplace se la sua funzione di densità di probabilità $f(x)$ è del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha}e^{-|x-m|/\alpha}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

con $\alpha > 0$ e m arbitrario. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x-m|/\alpha}\,dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{m} x e^{-(m-x)/\alpha}\,dx + \int_m^\infty x e^{-(x-m)/\alpha}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\int_0^\infty (m-y)e^{-y/\alpha}\,dy + \int_0^\infty (m+y)e^{-y/\alpha}\,dy\right]
\end{aligned}$$

avendo effettuato nel primo integrale il cambiamento di variabile $y = m - x$ e nel secondo integrale il cambiamento di variabile $y = x - m$. Raccogliendo sotto unico segno di integrale si ha così:

$$E(X) = \frac{1}{2\alpha}2m\int_0^\infty e^{-y/\alpha}\,dy = m\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-y/\alpha}\,dy = m.$$

Quindi il parametro m che compare nelle (1) è proprio il valore medio. Si noti che questo coincide anche con moda e mediana per la simmetria della (1) intorno ad m. Al fine di calcolare la varianza $D^2(X)$ cominciamo col calcolare $E(X^2)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x-m|/\alpha}\,dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{m} x^2 e^{-(m-x)/\alpha}\,dx + \int_m^\infty x^2 e^{-(x-m)/\alpha}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\int_0^\infty (m-y)^2 e^{-y/\alpha}\,dy + \int_0^\infty (m+y)^2 e^{-y/\alpha}\,dy\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty (m^2 - 2my + y^2 + m^2 + 2my + y^2)e^{-y/\alpha}\,dy \\
&= m^2\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}e^{-y/\alpha}\,dy + \int_0^\infty y^2\frac{1}{\alpha}e^{-y/\alpha}\,dy.
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che il primo integrale vale 1 in quanto esprime la condizione di normalizzazione della densità di probabilità di una variabile casuale esponenziale di valore medio α, mentre il secondo integrale vale $2\alpha^2$ in quanto è il momento del second'ordine di tale variabile (cf. Esercizio 47). Abbiamo così ottenuto:

$$E(X^2) = m^2 + 2\alpha^2,$$

da cui segue:

$$D^2(X) \equiv E(X^2) - m^2 = 2\alpha^2.$$

▷ **ESERCIZIO 53**

Calcolare il coefficiente di asimmetria (skewness) di una variabile casuale distribuita secondo la legge di Laplace.

Soluzione

Ricordiamo che la skewness s è definita come rapporto tra il momento centrale del terz'ordine ed il cubo della deviazione standard:

$$s = \frac{E\left\{[X - E(X)]^3\right\}}{[D(X)]^3}.$$

Nel caso della densità di probabilità di Laplace la skewness è ovviamente nulla in quanto dalla simmetria della densità di probabilità intorno al valore medio segue l'annullarsi di tutti i momenti centrali di ordine dispari. D'altronde, si vede subito per via analitica che risulta:

$$\begin{aligned} E\left\{[X - E(X)]^3\right\} &= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^3 e^{-|x-m|/\alpha}\,dx \\ &= \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{m}(x-m)^3 e^{-(m-x)/\alpha}\,dx\right. \\ &\quad \left.+\int_{m}^{\infty}(x-m)^3 e^{-(x-m)/\alpha}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\alpha}\left\{\int_0^{\infty}\left[(-y)^3 + y^3\right]e^{-y/\alpha}\right\}dy = 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 54

Una variabile casuale T ha la seguente densità di probabilità $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \begin{cases} n + n^2 t & \text{per } -\dfrac{1}{n} < t < 0, \\ n - n^2 t & \text{per } 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare il valor medio e la varianza della variabile casuale T e stabilire che cosa accade al limite in cui $n \to \infty$.

Soluzione

Per definizione si ha:

$$\begin{aligned} E_n(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1/n} t f_T(t)\,dt + \int_{-1/n}^{0} t f_T(t)\,dt \\ &\quad + \int_0^{1/n} t f_T(t)\,dt + \int_{1/n}^{\infty} t f_T(t)\,dt \\ &= \int_{-1/n}^{0} t\,(n + n^2 t)\,dt + \int_0^{1/n} t\,(n - n^2 t)\,dt. \end{aligned}$$

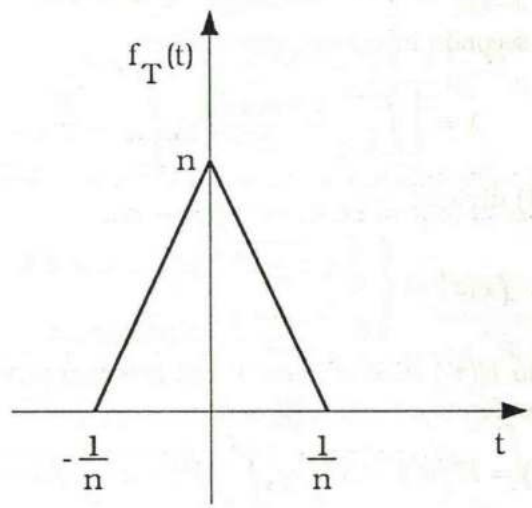
Con il cambiamento di variabile $t \to -t$, il secondo integrale diviene l'opposto del primo, così che segue $E_n(T) = 0$. Ciò poteva peraltro dedursi dalla simmetria di $f_T(t)$ intorno all'origine. La varianza $D^2(T)$ pertanto coincide con il momento del second'ordine:

$$\begin{aligned} D_n^2(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_T(t)\,dt = \int_{-1/n}^{0}(nt^2 + n^2 t^3)\,dt \\ &\quad + \int_0^{1/n}(nt^2 - n^2 t^3)\,dt \\ &= 2\int_{-1/n}^{0}(nt^2 + n^2 t^3)\,dt = \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Per $n \to \infty$ si ha poi:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(T) = \lim_{n\to\infty} D_n^2(T) = 0.$$

Se ne conclude che al limite in cui $n \to \infty$ la variabile casuale T assume con probabilità uno il valore zero. Ciò peraltro segue anche dall'osservazione che la funzione $f_T(t)$ per $n \to \infty$ tende a diventare la funzione $\delta(t)$ (cf. figura).



▷ **ESERCIZIO 55**

Si consideri una circonferenza di raggio unitario avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali giacenti nel piano della circonferenza e sia $P \equiv (X, Y)$ il generico punto della semicirconferenza individuata dalla condizione $Y \geq 0$. Supponendo che X sia una variabile casuale di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

determinare il parametro λ ed il valore medio dell'ordinata del punto P.

Soluzione

Per determinare il parametro λ imponiamo la condizione di normalizzazione:

$$\lambda \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 1.$$

Con il cambiamento di variabile $x = \operatorname{sen} y$, segue poi:

$$\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} \cos y\, dy = 1$$

ovvero:

$$\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y\, dy = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2y}{2}\, dy = 1.$$

Calcolando il secondo integrale segue infine:

$$\lambda = \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2y}{2}\, dy\right]^{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

Pertanto la (1) diviene:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il valore medio $E(Y)$ dell'ordinata Y del generico punto $P \equiv (X, Y)$ della semicirconferenza è infine dato da:

$$\begin{aligned} E(Y) = E\left[\sqrt{1-X^2}\right] &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 56**

Sia X una variabile casuale con densità di probabilità di Cauchy. Si calcoli il valore medio di $Y = \min\{|X|, 1\}$.

Soluzione

Per ipotesi X è una variabile casuale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

La variabile casuale Y assume valori in $[0, 1]$. Invero si ha:

$$Y = \begin{cases} -X & \text{se } -1 \leq X < 0, \\ X & \text{se } 0 \leq X < 1, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che Y è una variabile casuale di tipo misto, ossia in parte continua e in parte discreta. Detta $F_Y(y)$ la funzione di distribuzione di Y, si ha evidentemente per $0 \leq y < 1$:

$$F_Y(y) \equiv P\{Y \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y),$$

dove $F_X(x)$ è la funzione di distribuzione di X:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}^{-1} x.$$

Si ha quindi:

$$F_Y(y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1} y, \qquad 0 \leq y < 1.$$

Nel punto $y = 1$ la funzione di distribuzione di Y presenta una discontinuità di prima specie, dove l'ampiezza della discontinuità rappresenta proprio la probabilità con cui Y assume il valore 1. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &\equiv 1 - P\{Y \neq 1\} \\ &= 1 - P\{0 \leq Y < 1\} \\ &= 1 - F_Y(1) + F_Y(0) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1} 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La funzione di distribuzione di Y nell'intero intervallo $[0,1]$ può in conclusione esprimersi al seguente modo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\, y & \text{se } 0 \le y < 1, \\ 1 & \text{se } y \ge 1. \end{cases} \tag{3}$$

Per calcolare $E(Y)$ facciamo uso della formula (cf. Esercizio 15):

$$E(Y) = -\int_{-\infty}^{0} F_Y(y)\,dy + \int_0^{\infty} [1 - F_Y(y)]\,dy$$

con $F_Y(y)$ data dalla (3). Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\, y\right] dy \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \mathrm{tg}^{-1}\, y\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\ln 2 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è stato calcolato per parti.

ESERCIZIO 57

Calcolare la funzione generatrice dei momenti e i momenti $E(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ di una variabile casuale X che assume i valori 0 e 1 con probabilità p e $1-p$, rispettivamente.

Soluzione

Per definizione di funzione generatrice dei momenti si ha:

$$M(t) \equiv E(e^{Xt}) = p + (1-p)e^t.$$

Facendo uso della relazione

$$E\{X^k\} = \frac{d^k}{dt^k} M(t)\Big|_{t=0} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

segue immediatamente:

$$E\{X^k\} = \frac{d^k}{dt^k}\left[p + (1-p)e^t\right]\Big|_{t=0} = 1 - p \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

ESERCIZIO 58

Sia X una variabile casuale con $P\{X = 1\} = p$, $P\{X = -1\} = q$ e $P\{X = 0\} = 1 - p - q$. Determinare la funzione generatrice dei momenti e, mediante essa, i momenti di X.

Soluzione

Detta $M(t)$ la richiesta funzione generatrice dei momenti, si ha:

$$M(t) \equiv E\left(e^{Xt}\right) = pe^t + qe^{-t} + (1 - p - q).$$

Di qui segue:

$$E(X) \equiv \frac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=0} = p - q$$

$$E\left(X^2\right) \equiv \frac{d^2M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = p + q.$$

In generale risulta:

$$E\left(X^{2k-1}\right) \equiv \frac{d^{2k-1}M(t)}{dt^{2k-1}}\Big|_{t=0} = p - q \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

mentre si ha:

$$E\left(X^{2k}\right) \equiv \frac{d^{2k}M(t)}{dt^{2k}}\Big|_{t=0} = p + q \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 59**

Calcolare valore medio e varianza di una variabile casuale X distribuita secondo la legge geometrica.

Soluzione

Poiché X ha distribuzione geometrica, si ha:

$$P\{X = n\} = p\,(1-p)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dove $p \in (0,1)$ è una costante. Posto $q = 1 - p$, per definizione di valore medio si ha allora:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,p\,(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{n-1} \\ &= p\,\frac{d}{dq}\sum_{n=1}^{\infty} q^n = p\,\frac{d}{dq}\left[\frac{1}{1-q} - 1\right] \\ &= p\,\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\,\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

In maniera analoga si potrebbe procedere per il calcolo di $E(X^2)$ e quindi ricavare infine la varianza attraverso la relazione:

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{1}$$

Risulta tuttavia più semplice effettuare questi calcoli attraverso l'uso della funzione generatrice dei momenti. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} M(t) \equiv E(e^{Xt}) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt} p\, q^{n-1} \\ &= pe^t \sum_{n=1}^{\infty} (e^t q)^{n-1} \\ &= \frac{pe^t}{1-qe^t}\,. \end{aligned}$$

Per la convergenza della serie di potenza si è ovviamente supposto che risulti $e^t q < 1$, ossia $0 < t < -\ln(1-p)$. Si ha pertanto:

$$E(X) \equiv \frac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \left[M(t) + p\,q\,e^{2t}(1-q\,e^t)^{-2}\right]_{t=0} = \frac{1}{p}\,. \qquad (2)$$

Per il momento del second'ordine si ha poi:

$$\begin{aligned} E(X^2) &\equiv \frac{d^2M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\left[p\,q\,e^{2t}(1-q\,e^t)^{-2}\right]\Big|_{t=0} \qquad (3) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2}\,. \end{aligned}$$

Facendo uso infine delle (1), (2) e (3) si ottiene:

$$D^2(X) = \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}\,.$$

▷ **ESERCIZIO 60**

Stabilire se esiste la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale X avente la seguente distribuzione di probabilità:

$$P\{X = r\} = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{r^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Soluzione

Va anzitutto osservato che la (1) è effettivamente una distribuzione di probabilità poiché risulta $P(X = r) \geq 0$ e poiché soddisfa la condizione

di normalizzazione. Di ciò è possibile rendersi conto facendo ricorso alla nota formula

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Per definizione, se esistente la funzione generatrice dei momenti è data da

$$M_X(t) \equiv E\left(e^{Xt}\right) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{rt}}{r^2}\,.$$

Tuttavia la serie a secondo membro è divergente come si vede ad esempio utilizzando il criterio del rapporto. Se ne conclude che la funzione generatrice dei momenti non esiste.

▷ **ESERCIZIO 61**

Si determini la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 1)$. La si utilizzi poi per verificare la condizione di normalizzazione e per calcolarne il valore medio.

Soluzione

La densità di probabilità $f(x)$ della variabile casuale considerata è

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$M(t) \equiv E\left(e^{Xt}\right) = \int_0^1 e^{Xt}\,dx = \frac{1}{t}\,(e^t - 1). \qquad (1)$$

Si noti che $M(t)$ non è definita per $t = 0$; tuttavia essa è ivi definibile per continuità ponendo

$$M(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,(e^t - 1) = 1. \qquad (2)$$

Dalla (1) e (2) segue poi che è soddisfatta la condizione di normalizzazione avendosi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \equiv \lim_{t\to 0} M(t) = 1.$$

Infine, il valore medio $E(X)$ della variabile casuale X considerata si ottiene immediatamente avendosi:

$$E(X) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{dM(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{-e^t + 1 + t\,e^t}{t^2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-e^t + e^t + t\,e^t}{2t} = \frac{1}{2},$$

dove si è fatto uso della regola dell'Hospital.

▷ **ESERCIZIO 62**
Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X di densità di probabilità $f(x)$ esponenziale.

Soluzione
Dalla definizione di funzione generatrice dei momenti, essendo

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{se } x > 0 \quad (\alpha > 0), \\ 0 & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

si ha:

$$M(t) \equiv E\left(e^{Xt}\right) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} e^{xt}\, dx = \frac{\alpha}{\alpha - t}, \qquad t < \alpha.$$

Si noti che per $t \ge \alpha$ la funzione generatrice dei momenti non esiste.

▷ **ESERCIZIO 63**
Si calcolino i momenti intorno all'origine di una variabile casuale X distribuita esponenzialmente.

Soluzione
Assumiamo, per semplicità, che la densità di probabilità di X sia:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_1} e^{-x/t_1} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Come sappiamo dall'Esercizio 47 si ha:

$$E(X) = t_1.$$

La funzione generatrice dei momenti $M(t)$ è inoltre (cf. Esercizio 62):

$$M(t) = \frac{1}{1 - t_1 t}.$$

Calcolando iterativamente le derivate di $M(t)$ rispetto a t è poi facile convincersi che risulta:

$$E(X^n) \equiv \frac{d^n M(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = n!\, t_1^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

▷ **ESERCIZIO 64**
Calcolare il coefficiente di asimmetria s (skewness) ed il coefficiente di piccatezza p di una variabile casuale distribuita con densità di probabilità esponenziale.

Soluzione
Detto λ il parametro della densità esponenziale $f(x)$, risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$$

Per definizione si ha:

$$s = \frac{\mu_3}{[D(X)]^3}, \qquad p = \frac{\mu_4}{[D(X)]^4},$$

dove $\mu_3 \equiv E\left\{[X - E(X)]^3\right\}$ e $\mu_4 \equiv E\left\{[X - E(X)]^4\right\}$ denotano i momenti centrali di X rispettivamente del terzo e del quart'ordine e dove $D(X)$ è la deviazione standard di X. Già sappiamo (cf. Esercizio 47) che risulta

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$D(X) \equiv \sqrt{D^2(X)} = \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

Occorre quindi calcolare μ_3 e μ_4. Dalla definizione di μ_3 e dalla prima delle (1) si ha:

$$\mu_3 = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

ovvero:

$$\mu_3 = \int_0^\infty x^3 \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \frac{3}{\lambda}\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx + \frac{3}{\lambda^2}\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \frac{1}{\lambda^3}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

ovvero ancora:

$$\mu_3 = E(X^3) - \frac{3}{\lambda}E(X^2) + \frac{3}{\lambda^2}E(X) - \frac{1}{\lambda^3}. \qquad (2)$$

D'altro canto, dall'Esercizio 63 per $t_1 = 1/\lambda$ abbiamo:

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \qquad (n = 1, 2, \dots) \qquad (3)$$

così che la (2) diviene:

$$\mu_3 = \frac{3!}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda}\frac{2!}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}$$

e quindi:

$$s \equiv \frac{\mu_3}{[D(X)]^3} = \frac{2/\lambda^3}{1/\lambda^3} = 2.$$

In maniera analoga si procede per il calcolo di μ_4. Questa volta risulta:

$$\mu_4 \equiv \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^4 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\int_0^\infty x^k \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{4-k} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

ovvero:

$$\mu_4 = E(X^4) - \frac{4}{\lambda}E(X^3) + \frac{6}{\lambda^2}E(X^2) - \frac{4}{\lambda^3}E(X) + \frac{1}{\lambda^4}.$$

Facendo nuovemente uso della (3) otteniamo

$$\mu_4 = \frac{9}{\lambda^4}$$

e quindi:

$$p \equiv \frac{\mu_4}{[D(X)]^4} = \frac{9/\lambda^4}{1/\lambda^4} = 9.$$

▷ **ESERCIZIO 65**

Sia $f(x) = 2\,(1/3)^x$ la probabilità che una variabile casuale X assuma i valori $x = 1, 2, \dots$. Calcolare

a. la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale X;
b. i momenti intorno all'origine del primo e del second'ordine di X.

Soluzione

Cominciamo col calcolare la funzione generatrice dei momenti $M(t)$. Per definizione abbiamo:

$$M(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt}\, 2\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{e^t}{3}\right)^x = 2\left[\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{3}\right)^x - 1\right] = \frac{2\,e^t}{3 - e^t}, \qquad t < \ln(3).$$

Facendo uso della funzione generatrice dei momenti otteniamo infine facilmente:

$$E(X) \equiv \frac{dM(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{6\,e^t}{(3-e^t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) \equiv \frac{d^2M(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{54\,e^t - 6\,e^{3t}}{(3-e^t)^4}\bigg|_{t=0} = 3.$$

▷ **ESERCIZIO 66**

Sia $M_X(t)$ la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale X. Si determini la funzione generatrice dei momenti delle variabile casuale $Y = aX + b$ con a, b reali qualsiasi. In particolare si determini detta funzione nell'ipotesi in cui X è una variabile casuale normale di media m e deviazione standard σ e supponendo che sia $a = \sigma^{-1}$, $b = -m\sigma^{-1}$.

Soluzione

Per definizione, dette $M_Y(t)$ e $M_X(t)$ le funzione generatrice dei momenti delle variabili casuali Y e X, si ha:

$$M_Y(t) \equiv E\left(e^{Yt}\right) = E\left[e^{(aX+b)t}\right] = e^{bt}E\left(e^{aXt}\right) = e^{bt}M_X(at). \qquad (1)$$

Se X è normale di media m e deviazione standard σ si ha poi:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{mt+t^2\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\{[x-(m+t\sigma^2)]\}}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= e^{mt+t^2\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\{[x-(m+t\sigma^2)]\}}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= e^{mt+t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla condizione di normalizzazione della densità di probabilità normale di media $m+t\sigma^2$ e varianza σ^2. Infine, per $a=\sigma^{-1}$ e $b=-m\sigma^{-1}$ si ha:

$$Y=\frac{X-m}{\sigma},$$

ossia Y è la variabile standardizzata di X. Poiché, come si è visto, risulta

$$M_X(t)=e^{mt+t^2\sigma^2/2},$$

ricordando la (1) segue:

$$M_Y(t)\equiv M_{(X-m)/\sigma}(t)=e^{-mt/\sigma}e^{(mt/\sigma)+t^2\sigma^2/2\sigma^2}=e^{t^2/2}.$$

▷ **ESERCIZIO 67**

Sia X un variabile casuale e sia $M_X(t)$ la sua funzione generatrice dei momenti. Determinare la funzione generatrice dei momenti delle variabili casuali $3X$, $X+5$ e $4X-1$.

Soluzione

Come si è visto nell'Esercizio 66, detta $M_X(t)$ la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X e posto $Y=aX+b$ $(a,b\in R)$ la funzione generatrice $M_Y(t)$ è data da:

$$M_Y(t)=e^{bt}M_X(at).$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} M_{3X}(t) &= M_X(3t) \\ M_{X+5}(t) &= e^{5t}M_X(t) \\ M_{4X-1}(t) &= e^{-t}M_X(4t). \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 68**

Sia X una variabile casuale di funzione generatrice dei momenti $M(t)$, valore medio $E(X)$ e varianza $D^2(X)$. Dimostrare che risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\ln[M(t)]\Big|_{t=0} &= E(X) \\ \frac{d^2}{dt^2}\ln[M(t)]\Big|_{t=0} &= D^2(X). \end{aligned}$$

Soluzione

Posto

$$\tilde{K}(t)=\ln[M(t)]$$

si ha evidentemente

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}(t)}{dt} &= \frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt} \\ \frac{d^2\tilde{K}(t)}{dt^2} &= \frac{d^2M(t)}{dt^2}\frac{1}{M(t)}-\frac{1}{[M(t)]^2}\left[\frac{dM(t)}{dt}\right]^2. \end{aligned}$$

Queste relazioni per $t=0$ forniscono:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}(t)}{dt}\Big|_{t=0} &\equiv \frac{d}{dt}\ln[M(t)]\Big|_{t=0}=\frac{1}{M(0)}\frac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=0}=E(X) \\ \frac{d^2\tilde{K}(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} &\equiv \frac{d^2}{dt^2}\ln[M(t)]\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{M(0)}\frac{d^2M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}-\frac{1}{[M(0)]^2}\left[\frac{dM(t)}{dt}\right]^2\Big|_{t=0} \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2\equiv D^2(X). \end{aligned}$$

La funzione $\tilde{K}(t)$ risulta particolarmente utile per il calcolo dei coefficienti di asimmetria e piccatezza grazie al sussistere delle relazioni:

$$\begin{aligned} E\{[X-E(X)]^r\} &= \frac{d^r\tilde{K}(t)}{dt^r}\Big|_{t=0} \qquad (r=2,3) \\ E\{[X-E(X)]^4\} &= \frac{d^4\tilde{K}(t)}{dt^4}\Big|_{t=0}+3\left[\frac{d^2\tilde{K}(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}\right]^2. \end{aligned}$$

La prima di esse, per $r=2$, è stata precedentemente dimostrata. In maniera analoga è possibile dimostrare le rimanenti.

▷ **ESERCIZIO 69**

Sia X una variabile casuale distribuita secondo la legge di Poisson con parametro λ. Se ne calcoli la funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$.

Soluzione

Per definizione abbiamo:

$$P\{X = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

e quindi:

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = \exp\left[\lambda\left(e^t - 1\right)\right].$$

▷ **ESERCIZIO 70**

Calcolare media e varianza della variabile casuale X avente la seguente funzione generatrice dei momenti:

$$M(t) = \exp\left[3\left(e^t - 1\right)\right]. \tag{1}$$

Soluzione

Ricorriamo alla funzione generatrice dei cumulanti $\tilde{K}(t)$:

$$\tilde{K}(t) \equiv \ln[M(t)] = 3\left(e^t - 1\right).$$

Abbiamo così (cf. Esercizio 68) :

$$E(X) \equiv \left.\frac{d\tilde{K}(t)}{dt}\right|_{t=0} = 3\,e^t\Big|_{t=0} = 3$$
$$D^2(X) \equiv \left.\frac{d^2\tilde{K}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = 3.$$

Ciò poteva del resto immediatamente dedursi osservando che la (1) è la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale poissoniana di parametro $\lambda = 3$ (cf. Esercizio 69).

▷ **ESERCIZIO 71**

Calcolare i momenti centrali μ_2 e μ_3 di una variabile casuale con distribuzione di Poisson di parametro λ.

Soluzione

Utilizziamo la relazione esistente tra μ_2 e μ_3 ed i momenti assoluti μ'_1, μ'_2 e μ'_3. Calcoliamo preliminarmente μ'_1, μ'_2 e μ'_3. Per ipotesi si ha $\mu'_1 = \lambda$. Inoltre, utilizzando la funzione generatrice dei momenti

$$M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

è facile verificare che si ha:

$$\mu'_2 \equiv M''(0) = \lambda + \lambda^2$$
$$\mu'_3 \equiv M'''(0) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Pertanto abbiamo (cf. Esercizio 38):

$$\mu_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (-\lambda)^{2-k} \mu'_k = \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 = \lambda$$
$$\mu_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-\lambda)^{3-k} \mu'_k$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda^3 + \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = \lambda.$$

Una variabile casuale poissoniana ha dunque media, varianza e momento centrale del terzo ordine coincidenti e dati dal parametro della distribuzione di probabilità.

▷ **ESERCIZIO 72**

Si consideri una successione di prove ripetute, ciascuna caratterizzata da probabilità di successo p. Denotando con X il numero di prove necessarie per ottenere s successi, dimostrare che si ha:

$$P_X(n) = \binom{n-1}{s-1} p^s (1-p)^{n-s}, \qquad n = s, s+1, \dots.$$

Calcolare poi $E(X)$ e $D^2(X)$.

Soluzione

La distribuzione $P_X(n)$ è talora nota come distribuzione di Pascal. Osserviamo anzitutto che la variabile casuale X assume i valori $s, s+1, s+2, \dots$. Definiamo ora i seguenti eventi:

A: "si ottengono $s-1$ successi in $n-1$ prove";

B: "si ottiene un successo alla n-esima prova".
E: "si ottengono $s-1$ successi in $n-1$ prove e un successo all'n-esima prova";

La probabilità $P(A)$ dell'evento A, trattandosi di uno schema binomiale, è

$$P(A) = \binom{n-1}{s-1} p^{s-1}(1-p)^{n-s}$$

mentre ovviamente risulta

$$P(B) = p.$$

Dalla relazione

$$E = A \cap B$$

e dall'indipendenza di A e B segue infine:

$$P(E) = P(A)\,P(B) = \binom{n-1}{s-1} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Per calcolare media e varianza di X, cominciamo con il calcolare la funzione generatrice dei momenti. Per definizione, posto $q = 1-p$, abbiamo:

$$M_X(t) = \sum_{n=s}^{\infty} e^{nt} \binom{n-1}{s-1} p^s p^{n-s} = p^s e^{st} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+s-1}{s-1} (q\,e^t)^r$$

avendo effettuato il cambiamento di indice $r = n-s$. Facendo poi uso della identità

$$\binom{r+s-1}{s-1} = \binom{r+s-1}{r}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= p^s e^{st} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+s-1}{r} (q\,e^t)^r \\ &= p^s e^{st} (1-q\,e^t)^{-s} \end{aligned}$$

dove si è fatto uso dello sviluppo in serie:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots+(\alpha-k+1)}{k!} x^k \quad (|x|<1,\ \alpha \text{ reale}) \end{aligned}$$

avendo posto $\alpha = -s$ e $x = -e^t q$. In definitiva si ha:

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^s, \qquad t < -\ln(q).$$

Di qui segue infine:

$$\begin{aligned} E(X) &\equiv \frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = s\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^s \frac{1}{1-qe^t}\bigg|_{t=0} \\ &\equiv \frac{s}{1-qe^t} M_X(t)\bigg|_{t=0} \\ E(X^2) &\equiv \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{s}{1-qe^t}\left[\frac{dM_X(t)}{dt} + \frac{qe^t}{1-qe^t} M_X(t)\right]\bigg|_{t=0} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E(X) &\equiv \frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{s}{p} \\ D^2(X) &\equiv E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} - \left(\frac{s}{p}\right)^2 = \frac{s\,(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 73**

Calcolare media e varianza di una variabile casuale X avente distribuzione di probabilità gamma.

Soluzione

La densità di probabilità $f(x)$ di X è data da:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & \text{se } x > 0 \qquad (\alpha, \beta > 0), \\ 0 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} M(t) = E(e^{tX}) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1-\beta t}{\beta} x\right) dx. \end{aligned}$$

Effettuando il cambiamento di variabile

$$\frac{1-\beta t}{\beta} x = y$$

e ricordando che risulta

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(\alpha)$$

si ha in definitiva:

$$M(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}.$$

Di qui segue poi facilmente:

$$E(X) \equiv \frac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \alpha\beta$$

$$D^2(X) \equiv \frac{d^2M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} - [E(X)]^2 = \alpha\beta^2.$$

▷ **ESERCIZIO 74**

Determinare la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale $Y = X^2$, con X variabile casuale normale standard. Individuare quindi la densità di probabilità di Y.

Soluzione

Per definizione si ha:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) \equiv E(e^{tX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1-2t}{2}x^2\right]dx.$$

Effettuando il cambiamento di variabile

$$y = \sqrt{\frac{1-2t}{2}}\,x$$

si ha poi:

$$M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-2t)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = (1-2t)^{-1/2}.$$

Si vede così (cf. Esercizio 73) che $M_Y(t)$ è la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale di tipo gamma con parametri $\alpha = 1/2$ e $\beta = 2$ così che la densità di probabilità $f_Y(y)$ di Y è data da:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma(1/2)}\,y^{-1/2}e^{-y/2} & \text{se } y > 0, \\ 0 & \text{se } y \le 0. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 75**

Determinare la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X distribuita uniformemente in un intervallo (a, b), con a e b reali arbitrari. Determinarne infine media, varianza e coefficienti di asimmetria.

Soluzione

Sia $f(x)$ la densità di probabilità della variabile casuale. Per ipotesi risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{xt}\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t\,(b-a)}.$$

Si noti che $M(t)$ non è definita per $t = 0$, ma è ivi definibile per continuità. Si ha infatti

$$\lim_{t\to 0} M(t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}-e^{at}}{t\,(b-a)} = \lim_{t\to 0}\frac{be^{bt}-ae^{at}}{(b-a)} = 1,$$

dove si è fatto uso della regola dell'Hospital.

▷ **ESERCIZIO 76**

Siano $\Phi(u)$ e $M(t)$ rispettivamente la funzione caratteristica e la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale X. La funzione

$$K(u) = \ln[\Phi(u)] \tag{1}$$

è nota quale seconda funzione caratteristica di X. Posto poi (cf. Esercizio 68)

$$\tilde{K}(t) = \ln[M(t)] \tag{2}$$

determinare media, varianza e momento centrale del terzo ordine in termini di $K(u)$ e delle sue derivate. Determinare infine la relazione esistente tra $K(u)$ e $\tilde{K}(t)$.

Soluzione

Cominciamo col calcolare le prime tre derivate di $K(u)$:

$$K'(u) = \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = i\,\frac{E\left(Xe^{iuX}\right)}{\Phi(u)}$$

$$K''(u) = \frac{\Phi''(u)\Phi(u) - [\Phi'(u)]^2}{[\Phi(u)]^2} = \frac{\Phi''(u)}{\Phi(u)} - [K'(u)]^2$$

$$= -\frac{E\left(X^2e^{iuX}\right)}{\Phi(u)} - [K'(u)]^2$$

$$K'''(u) = \frac{\Phi'''(u)}{\Phi(u)} - \frac{\Phi'(u)\Phi''(u)}{[\Phi(u)]^2} - 2K'(u)K''(u)$$

$$= \frac{\Phi'''(u)}{\Phi(u)} - 3K'(u)K''(u) - [K'(u)]^3$$

$$= -i\,\frac{E\left(X^3e^{iuX}\right)}{\Phi(u)} - 3K'(u)K''(u) - [K'(u)]^3.$$

Poiché risulta $\lim_{u\to 0}\Phi(u) = 1$, dalle precedenti tre relazioni segue:

$$\lim_{u\to 0} K'(u) = i\,E(X)$$

$$\lim_{u\to 0} K''(u) = -E\left(X^2\right) + [E(X)]^2 = -D^2(X)$$

$$\lim_{u\to 0} K'''^{(u)} = -i\,E\left(X^3\right) - 3\,i\,E(X)\left[-D^2(X)\right] - [E(X)]^3$$

$$= -i\,E\left\{[X - E(X)]^3\right\}.$$

In conclusione si ha:

$$E(X) = i\,\frac{dK(u)}{du}\bigg|_{u=0}$$

$$D^2(X) = i^2\,\frac{d^2K(u)}{du^2}\bigg|_{u=0}$$

$$E\left\{[X - E(X)]^3\right\} = i^3\,\frac{d^3K(u)}{du^3}\bigg|_{u=0}.$$

Dal confronto delle (1) e (2) segue poi:

$$K(u) = \tilde{K}(-iu)$$

ovvero

$$\tilde{K}(t) = K(it).$$

Da quest'ultima relazione segue anche:

$$\frac{d^n\tilde{K}(t)}{dt^n} = i^n\,\frac{d^nK(t)}{dt^n}.$$

▷ **ESERCIZIO 77**

Sia X una variabile casuale distribuita secondo la legge di Poisson con parametro λ. Dimostare che per grandi valori di λ la standardizzata di X è approssimativamente normale standard.

Soluzione

Poniamo

$$Y = \frac{X - E(X)}{D(X)} = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{X}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}. \tag{1}$$

Detta $\Phi_X(u)$ la funzione caratteristica di X, si ha (cf. Esercizi 69 e 76):

$$\Phi_X(u) = \exp\left[\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right] \tag{2}$$

e quindi la funzione generatrice dei cumulanti $K(u)$ vale:

$$K_X(u) \equiv \ln[\Phi_X(u)] = \lambda\left(e^{iu} - 1\right). \tag{3}$$

Da (1) e (2) segue allora:

$$\Phi_Y(u) \equiv E\left(e^{iYu}\right) = E\left[\exp\left(\frac{iXu}{\sqrt{\lambda}} - i\sqrt{\lambda}u\right)\right] = e^{-i\sqrt{\lambda}u}\Phi_X\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{4}$$

mentre da (2) e (3) si ottiene:

$$\begin{aligned} K_Y(u) &\equiv \ln[\Phi_Y(u)] = \ln\left[\Phi_X\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)\right] - i\sqrt{\lambda}u \\ &= \lambda\left(e^{iu/\sqrt{\lambda}} - 1\right) - i\sqrt{\lambda}u. \end{aligned} \tag{5}$$

Dalla (5) segue poi:

$$K_Y(u) = \lambda\left[\frac{iu}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iu}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{iu}{\sqrt{\lambda}}\right)^3 + \ldots\right] - i\sqrt{\lambda}u$$

$$= -\frac{1}{2}u^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Pertanto, al limite in cui $\lambda \to \infty$ la funzione generatrice dei cumulanti di Y tende alla funzione generatrice dei cumulanti di una variabile casuale $N(0,1)$. Concludiamo che per λ grande Y è approssimativamente normale standard.

▷ **ESERCIZIO 78**

Una variabile casuale assolutamente continua ha funzione caratteristica

$$\Phi(u) = \frac{1}{1 - iu/\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Determinare la densità di probabilità $f(x)$.

Soluzione

Utilizzando il teorema di inversione della funzione caratteristica, abbiamo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \frac{1}{1 - iu/\alpha}\, du. \tag{1}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro, osserviamo che la funzione

$$\Phi(z) = \frac{e^{-zx}}{1 - z/\alpha}$$

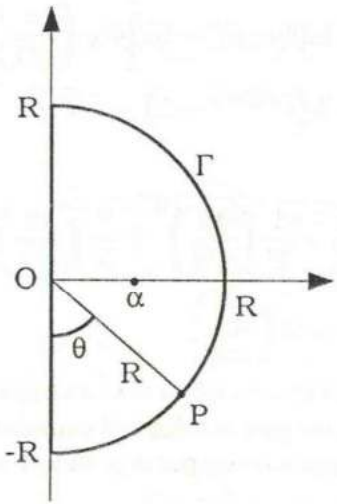
è olomorfa nel piano complesso ad eccezione del punto $z = \alpha$, dove presenta una singolarità polare semplice avente residuo

$$a_{-1} = \lim_{z \to \alpha} \frac{e^{-zx}}{1 - z/\alpha}(z - \alpha) = -\alpha e^{-\alpha x}.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$I = \int_{F\mathcal{D}} \frac{e^{-zx}}{1 - z/\alpha}\, dz$$

dove $\mathcal{D}$ è il dominio delimitato dalla semicirconferenza Γ di raggio $R > \alpha$ indicata in figura e dall'asse delle ordinate.



Per il teorema dei residui si ha:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{-zx}}{1 - z/\alpha}\, dz + i \int_{R}^{0} \frac{e^{-iux}}{1 - iu/\alpha}\, du + i \int_{0}^{-R} \frac{e^{-iux}}{1 - iu/\alpha}\, du$$
$$= -z\pi\alpha e^{-\alpha x}$$

ovvero:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-zx}}{1 - z/\alpha}\, dz - i \left[\int_{0}^{R} \frac{e^{-iux}}{1 - iu/\alpha}\, du + \int_{-R}^{0} \frac{e^{-iux}}{1 - iu/\alpha}\, du \right] = -z\pi\alpha e^{-\alpha x}. \tag{2}$$

Osserviamo ora che il primo integrale tende a zero al limite in cui $R \to \infty$. Infatti tale integrale può scriversi come:

$$i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{e^{-xRe^{i\theta}}}{1 - Re^{i\theta}/\alpha}\, R e^{i\theta}\, d\theta$$

dove la funzione integranda per $x > 0$ tende a zero al divergere di R. Passando al limite per $R \to \infty$, dalla (2) segue dunque:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux}}{1 - iu/\alpha}\, du = 2\pi\alpha e^{-\alpha x}.$$

Ricordando la (1) segue così:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad x > 0,$$

che è la densità di probabilità esponenziale di parametro α.

▷ **ESERCIZIO 79**

Una variabile casuale X assolutamente continua ha densità di probabilità esponenziale di parametro λ. Determinare la funzione caratteristica di X.

Soluzione

Detta $\Phi(u)$ la funzione caratteristica di X, per definizione si ha:

$$\Phi(u) \equiv E\left(e^{iuX}\right) = \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} e^{iux}\, dx$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha - iu} e^{-(\alpha - iu)x}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{1 - iu/\alpha}.$$

▷ **ESERCIZIO 80**

Calcolare la funzione caratteristica di una variabile casuale binomiale e di una variabile casuale di Poisson.

Soluzione
Sia X la variabile casuale binomiale. Abbiamo:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} \qquad (k=0,1,\dots,n)$$

con n e θ parametri fissati. Detta $\Phi_X(t)$ la funzione caratteristica, per definizione si ha:

$$\Phi_X(u)\equiv E\left(e^{iuX}\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}P(X=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\theta e^{iu}\right)^k(1-\theta)^{n-k}=\left[1+\theta\left(e^{iu}-1\right)\right]^n.$$

Analogamente, detta Y la variabile casuale poissoniana per ipotesi si ha:

$$P(Y=k)=\frac{\alpha}{k!}e^{-\alpha} \qquad (k=0,1,\dots),$$

con α reale positivo. Pertanto si ottiene

$$\Phi_Y(u)\equiv E\left(e^{iuY}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk}P(Y=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk}\frac{\alpha}{k!}e^{-\alpha}=e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha e^{iu}\right)^k}{k!}=\exp\left[\alpha(e^{iu}-1)\right].$$

> **ESERCIZIO 81**
Si determinino la funzione caratteristica di una variabile casuale X uniformemente distribuita in $(-1,1)$ e quella di una variabile casuale normale di media m e varianza σ^2.

Soluzione
Per ipotesi X ha la densità di probabilità

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } -1<x<1,\\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$\Phi_X(u)\equiv E\left(e^{iuX}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{iux}\,dx=\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2iu}=\frac{\operatorname{sen}u}{u}.$$

Nel caso della variabile casuale Y abbiamo invece:

$$\Phi_Y(u)\equiv E\left(e^{iuY}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

Con facili calcoli è poi possibile vedere che si ha:

$$\Phi_Y(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left[\frac{(m+iu\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{[x-(m+iu\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\}dx. \tag{1}$$

Effettuando il cambiamento di variabile

$$y=\frac{x-(m+iu\sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma}$$

e ricordando che risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}$$

dalla (1) segue:

$$\Phi_Y(u)=\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2+imu\right).$$

CAPITOLO VIII

SOMME E PRODOTTI DI VARIABILI CASUALI

▷ **ESERCIZIO 1**

Si lancia un dado due volte. Denotato con X il punteggio relativo al primo lancio e con Y il punteggio relativo al secondo lancio, si determini la distribuzione di probabilità del punteggio complessivo.

Soluzione

Denotiamo con $Z = X + Y$ la variabile casuale esprimente il punteggio complessivo. Questa assume i valori $2, 3, \ldots, 12$. Data l'indipendenza di X e Y, per il teorema delle alternative si ha:

$$P\{Z = s\} = \sum_{k=\max(1,s-6)}^{\min(6,s-1)} P\{X = k\}\, P\{Y = s - k\} \quad (s = 2, 3, \ldots, 12).$$

La somma a secondo membro prende il nome di "convoluzione" delle successioni $P\{X = k\}$ e $P\{Y = r\}$. Poiché risulta

$$P\{X = k\} = \frac{1}{6}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 6$$

$$P\{Y = r\} = \frac{1}{6}, \qquad r = 1, 2, \ldots, 6$$

in definitiva si ottiene:

$$P\{Z = s\} = \frac{\min(6, s-1) - \max(1, s-6)}{36} \qquad (s = 2, 3, \ldots, 12).$$

E' immediato verificare che $P\{Z = s\}$ è normalizzata, avendosi:

$$\sum_{s=2}^{12} P\{Z = s\} = \frac{1}{36}\left[(1 + 2 + \ldots + 5) + 6 + (5 + 4 + \ldots + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{1+5}{2}5 + 6 + \frac{5+1}{2}5\right) = 1.$$

▷ **ESERCIZIO 2**

Siano X e Y variabili casuali binomiali indipendenti di parametri $(n; p)$ e $(m; p)$, rispettivamente. Si determini la distribuzione della variabile casuale $X + Y$.

Soluzione

Dette $M_X(t)$ e $M_Y(t)$ le funzioni generatrici dei momenti di X e Y e denotata con $M_Z(t)$ la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale $Z = X + Y$, per l'indipendenza di X e Y risulta:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_X(t)\, M_Y(t) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt} p^k q^{n-k}\right] \left[\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} e^{rt} p^r q^{m-r}\right] \\ &= \left(pe^t + q\right)^n \left(pe^t + q\right)^m = \left(pe^t + q\right)^{n+m}. \end{aligned}$$

Si riconosce così che $M_Z(t)$ è la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale binomiale di parametri $(n+m; p)$.

▷ **ESERCIZIO 3**

Siano P e Q variabili casuali poissoniane indipendenti di parametri λ e μ rispettivamente. Si determini la distribuzione di probabilità $m_R(r)$ della variabile casuale $R = P + Q$.

Soluzione

Siano $m_P(p)$ e $m_Q(q)$ le distribuzioni di probabilità delle variabili casuali P e Q:

$$m_P(p) = \frac{\lambda^p}{p!} e^{-\lambda} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$m_Q(q) = \frac{\mu^q}{q!} e^{-\mu} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per l'indipendenza di P e Q si ha:

$$\begin{aligned} m_R(r) &= \sum_{p+q=r} m_P(p)\, m_Q(q) \\ &= \sum_{p=0}^{r} m_P(p)\, m_Q(r-p) \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{p=0}^{r} \frac{\lambda^p \mu^{r-p}}{p!\,(r-p)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{r!} \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} \lambda^p \mu^{r-p} \\ &= \frac{(\lambda+\mu)^r}{r!} e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

La variabile casuale $P+Q$ è dunque ancora poissoniana, con parametro pari alla somma dei parametri delle variabili P e Q. Alternativamente, denotiamo con $M_P(t)$ e $M_Q(t)$ le funzioni generatrici dei momenti di P e Q:

$$M_P(t) = \exp\{\lambda\,(e^t - 1)\}, \qquad M_Q(t) = \exp\{\mu\,(e^t - 1)\}.$$

Per l'ipotizzata indipendenza di P e Q, la funzione generatrice dei momenti della variabile casuale $R = P + Q$ è:

$$M_R(t) = M_P(t)\, M_Q(t) = \exp\{(\lambda + \mu)\,(e^t - 1)\},$$

che si riconosce essere la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale di Poisson di parametro $\lambda + \mu$.

▷ **ESERCIZIO 4**

Siano X e Y variabili casuali indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo (a, b). Determinare la densità di probabilità della loro somma.

Soluzione

Per ipotesi, dette $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ le densità di probabilità di X e Y, si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < y < b, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dall'indipendenza di X e Y, posto $Z = X + Y$ risulta:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} f_Y(z-x)\, dx \qquad (1)$$

dal momento che $f_X(x)$ è nulla al di fuori dell'intervallo (a, b). Con il cambiamento di variabile $y = z - x$, dalla (1) segue poi:

$$f_Z(z) = \frac{1}{b-a} \int_{z-b}^{z-a} f_Y(y)\, dy. \qquad (2)$$

Distinguiamo ora i seguenti casi:

i) $z-b \le a$ e $z-a \le b$, ossia $z \le a+b$. Dalla (2) si ottiene allora:

$$f_Z(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^{z-a} \frac{1}{b-a}\,dy = \frac{z-2a}{(b-a)^2}\,.$$

ii) $z-b > a$ e $z-a > b$, ossia $z > a+b$. Sempre dalla (2) segue allora:

$$f_Z(z) = \frac{1}{b-a}\int_{z-b}^{b} \frac{1}{b-a}\,dy = \frac{2b-z}{(b-a)^2}\,.$$

Poiché, infine, si ha sempre $2a < X+Y < 2b$, si ha in definitiva:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z-2a}{(b-a)^2} & \text{se } 2a < z < a+b, \\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2} & \text{se } a+b < z < 2b, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 5**

Siano X_1 e X_2 variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite con densità di probabilità

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & t \le 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove λ è un parametro positivo. Si determini la funzione di distribuzione della variabile casuale $Y = X_1 + X_2$.

Soluzione

Per l'indipendenza di X_1 e X_2, dette $f_Y(y)$, $f_{X_1}(x_1)$ e $f_{X_2}(x_2)$ le densità di probabilità delle variabili casuali $Y = X_1 + X_2$, X_1 e X_2 rispettivamente, si ha:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y-x_1)\,dx_1 \qquad (y > 0).$$

Facendo uso della (1) segue poi:

$$f_Y(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda t}\,\lambda e^{-\lambda(y-t)}\,dt = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \qquad (y > 0).$$

Si ha invece, ovviamente, $f_Y(y) = 0$ per $y < 0$. In conclusione,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & \text{se } y > 0, \\ 0 & \text{se } y \le 0. \end{cases}$$

Detta allora $F_Y(y)$ la funzione di distribuzione di Y, per $y \ge 0$ risulta:

$$F_Y(y) \equiv \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy = \int_0^y \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda y}(1+\lambda y)$$

mentre si ha evidentemente $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$.

▷ **ESERCIZIO 6**

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili casuali indipendenti identicamente distribuite con legge esponenziale di parametro λ. Determinare la distribuzione della variabile casuale $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Soluzione

Dette $M_Y(t)$ e $M_{X_i}(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, le funzioni generatrici dei momenti delle variabili casuali Y e X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, per l'assunta indipendenza delle X_i si ha:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = [M_{X_i}(t)]^n\,. \tag{1}$$

D'altra parte si ha facilmente:

$$M_{X_i}(t) \equiv E\left(e^{tX_i}\right) = \int_0^{\infty} e^{tx}\,\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}\,, \tag{2}$$

per $t < \lambda$. Dalle (1) e (2) segue allora

$$M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \qquad (t < \lambda),$$

che è la funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale di tipo gamma di parametri $\alpha = n$ e $\beta = \lambda$.

▷ **ESERCIZIO 7**

Siano X e Y variabili casuali indipendenti di densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{-ax} & \text{se } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

e

$$g(y) = \begin{cases} b\,e^{-bx} & \text{se } 0 < y < \infty, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{2}$$

con a e b reali positivi arbitrari. Si determinino la densità di probabilità e la funzione di distribuzione della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione

Detta $h(z)$ la densità di probabilità di Z, si ha:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(z-x)\,dx. \tag{3}$$

Poiché $f(x) = 0$ per $x \le 0$, dalle (1) e (3) segue:

$$h(z) = \int_0^{\infty} a\,e^{-ax} g(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} a\,e^{-a(z-\omega)} g(\omega)\,d\omega \tag{4}$$

avendo fatto uso del cambiamento di variabile $z - x = \omega$. Poiché g è nulla per valori negativi dell'argomento, dalla (2) e dalla (4) segue:

$$h(z) = \int_0^{z} a\,e^{-a(z-\omega)}\,b\,e^{-b\omega}\,d\omega = a\,b\,e^{-az} \int_0^{z} e^{(a-b)\omega}\,d\omega. \tag{5}$$

Per $a \ne b$ e $0 < z < \infty$ si ha dunque:

$$h(z) = \frac{a\,b}{a-b}\left[e^{-bz} - e^{-az}\right], \tag{6}$$

mentre risulta $h(z) = 0$ per $z \le 0$. Si noti che per $a = b$ dalla (5), ovvero calcolando il limite della (6) per $b \to a$, segue:

$$h(z) = a^2 z\,e^{-az}.$$

In definitiva, per $z > 0$ si ha:

$$h(z) = \begin{cases} a^2 z\,e^{-az} & \text{se } b = a, \\ \dfrac{a\,b}{a-b}\left(e^{-bz} - e^{-az}\right) & \text{se } b \ne a. \end{cases} \tag{7}$$

La funzione di distribuzione $H(z)$ si calcola poi facilmente. Per $b = a$ dalla (7) segue:

$$H(z) = \int_{-\infty}^{z} h(\omega)\,d\omega = \int_0^{z} a^2 \omega e^{-a\omega}\,d\omega = 1 - e^{-az}(1+a).$$

Per $b \ne a$, facendo uso della (7) si ha invece:

$$H(z) = \int_0^{z} \frac{a\,b}{a-b}\left(e^{-b\omega} - e^{-a\omega}\right)d\omega = 1 + \frac{b\,e^{-az} - a\,e^{-bz}}{a-b}.$$

▷ **ESERCIZIO 8**

Sia $\mathbf{X} = (X, Y)$ un vettore casuale distribuito normalmente, ossia con densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}. \tag{1}$$

Determinare la densità di probabilità $g_Z(z)$ della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione

La densità $g_Z(z)$ può esprimersi al seguente modo:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x, z-x)\,dx, \tag{2}$$

dove la funzione integranda è ottenuta a partire dalla (1). L'integrale si calcola con l'usuale espediente consistente nel ridurre la funzione integranda all'esponenziale negativo di un quadrato perfetto che a sua volta, con un cambiamento di variabile, si riconduce in ultima analisi all'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}. \tag{3}$$

Esaminiamo ora il dettaglio del calcolo. Si ha:

$$f_{\mathbf{X}}(x, z-x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{z-x-m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{z-x-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

ovvero:

$$f_{\mathbf{X}}(x, z-x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(x-m_1)^2 \frac{D}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. -2(x-m_1)(z-m_1-m_2)\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2^2} + \frac{(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \qquad (4)$$

dove si è posto $D = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$. L'espressione in parentesi graffe nella (4) può dare luogo ad un quadrato perfetto avendosi:

$$\left[(x-m_1)^2\frac{D}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - 2(x-m_1)(z-m_1-m_2)\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

$$= \left\{\left[(x-m_1)\frac{\sqrt{D}}{\sigma_1\sigma_2} - (z-m_1-m_2)\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_2\sqrt{D}}\right]^2\right.$$

$$\left. + \frac{(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_2^2}\left(1 - \frac{(\sigma_1+\rho\sigma_2)^2}{D}\right)\right\}.$$

Quindi la (4) diviene:

$$f_{\mathbf{X}}(x, z-x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2D}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(x-m_1)\frac{\sqrt{D}}{\sigma_1\sigma_2} - (z-m_1-m_2)\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_2\sqrt{D}}\right]^2\right\}.$$

Integrando ambo i membri da $-\infty$ a ∞ rispetto a x, col cambiamento di variabile

$$y = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\left[(x-m_1)\frac{\sqrt{D}}{\sigma_1\sigma_2} - (z-m_1-m_2)\frac{\sigma_1+\rho\sigma_2}{\sigma_2\sqrt{D}}\right],$$

si ottiene:

$$g_Z(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x, z-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sqrt{D}} e^{-y^2} \exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2D}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left\{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2D}\right\},$$

dove si è fatto uso della (3). Si è così ottenuta una densità di probabilità normale di media $m_1 + m_2$ e varianza D.

▷ **ESERCIZIO 9**

Siano V e Y variabili casuali aventi rispettivamente distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 e distribuzione di Poisson di parametro λ. Si calcoli la densità di probabilità di $X = V + Y$, supponendo V e Y indipendenti.

Soluzione

Le funzioni caratteristiche delle variabili casuali V e Y sono:

$$\Phi_V(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right),$$

$$\Phi_Y(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right].$$

Essendo V e Y indipendenti, la funzione caratteristica di $X = V + Y$ è il prodotto delle funzioni caratteristiche di V e Y. Si ha quindi:

$$\Phi_X(t) = \exp\left[i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \lambda(e^{it} - 1)\right].$$

Per calcolare la densità di probabilità $f_X(x)$ di X si deve calcolare l'antitrasformata di Fourier della funzione caratteristica:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(t)\, e^{-itx}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[it(\mu - x) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \lambda\left(e^{it} - 1\right)\right] dt.$$

Sviluppando in serie di potenze la funzione $\exp\left(\lambda e^{it}\right)$ si ha:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[it(\mu - x + y) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sigma^2 t^2 - 2it(\mu - x + y)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\mu - x + y)^2}{\sigma^2} - \frac{(\mu - x + y)^2}{\sigma^2}\right]\right\} dt$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \exp\left[-\frac{(\mu - x + y)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sigma t - i\frac{(\mu - x + y)}{\sigma}\right]^2\right\} dt.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $\sigma t - i(\mu - x + y)/\sigma = u$, dove si è trattata euristicamente i come una costante, si ottiene:

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \exp\left[-\frac{(\mu - x + y)^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du.$$

L'integrale che compare a secondo membro vale 1 poiché esprime la condizione di normalizzazione della densità di probabilità della variabile casuale normale standard. Si ha dunque:

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \exp\left\{-\frac{[x - (y + \mu)]^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (x \in R).$$

Si noti che è possibile giungere a tale risultato anche operando in maniera diretta. Infatti, per ipotesi

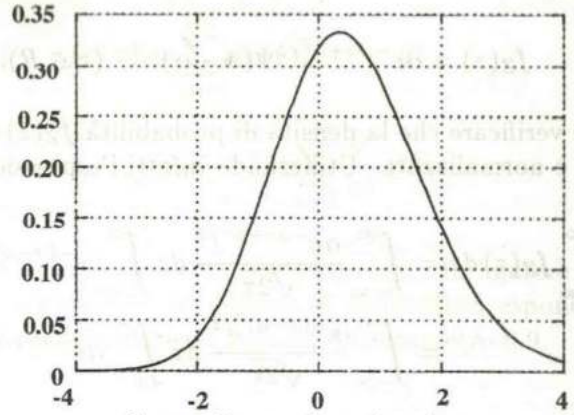
$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(v - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (v \in R)$$

$$p_Y(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \qquad (y = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} f_V(x - y) p_Y(y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \exp\left[-\frac{(x - y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (x \in R). \end{aligned}$$

In figura è riportato il grafico della funzione $f_X(x)$ nel caso di normale standard e di distribuzione di Poisson di parametro 0.5. Si noti la asimmetria della funzione così ottenuta.



Somma di normale e poissoniana

▷ **ESERCIZIO 10**

Sia X una variabile casuale $N(0,1)$ e Y una variabile casuale esponenziale di parametro α. Supponendo X e Y indipendenti, si calcoli la densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione

Detta $f_Z(z)$ la densità di probabilità richiesta, abbiamo:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \alpha e^{-\alpha(z-x)}\, dx \qquad (z \in R),$$

dove si è usata la ormai familiare formula di convoluzione. Portando fuori dell'integrale i termini non dipendenti dalla variabile d'integrazione otteniamo poi:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\alpha e^{-\alpha z}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\alpha x - x^2/2}\, dx \\ &= \frac{\alpha e^{-\alpha z + \alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-(x-\alpha)^2/2}\, dx \qquad (z \in R). \end{aligned} \tag{1}$$

Con il cambiamento di variabile $\omega = x - \alpha$ e indicando con $\Psi(\cdot)$ la funzione di distribuzione della variabile casuale normale standard abbiamo infine:

$$f_Z(z) = \alpha e^{-\alpha z + \alpha^2/2} \Psi(z - \alpha) \qquad (z \in R). \tag{2}$$

È possibile verificare che la densità di probabilità $f_Z(z)$ data dalla (1) o dalla (2) è normalizzata. Utilizzando infatti l'espressione (1) si ha:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{-\alpha z + \alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz \int_{-\infty}^{z} e^{-(x-\alpha)^2/2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-\alpha)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \int_{x}^{\infty} \alpha e^{-\alpha z + \alpha^2/2}\,dz,\end{aligned}$$

dove è stata effettuata l'inversione dell'ordine di integrazione. Calcolando il primo integrale si ottiene così:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz &= e^{\alpha^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x - (x-\alpha)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 11

Sia V una variabile casuale distribuita esponenzialmente con parametro μ e sia Y una variabile casuale distribuita alla Poisson con parametro λ. Nell'ipotesi di indipendenza di X e Y si determini la densità di probabilità della variabile casuale $X = V + Y$.

Soluzione

Per ipotesi la densità di probabilità $f_V(v)$ di V e la distribuzione di probabilità $p_Y(y)$ di Y sono

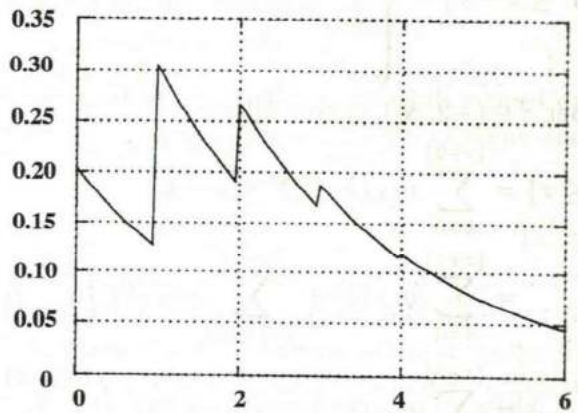
$$f_V(v) = \begin{cases} \mu e^{-\mu v} & \text{se } v > 0, \\ 0 & \text{se } v \le 0, \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} & \text{se } y = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Evidentemente risulta $f_X(x) = 0$ per $x \le 0$. Per l'indipendenza di V e Y, per $x > 0$ si ha invece:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \sum_{y=0}^{\lfloor x \rfloor} p_Y(y) f_V(x - y) \\ &= \mu e^{-\mu x - \lambda} \sum_{y=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^y}{y!} e^{\mu y},\end{aligned}$$

dove $\lfloor x \rfloor$ denota il massimo intero contenuto in x. In figura è riportato il grafico di $f_X(x)$ nel caso di densità di probabilità esponenziale di parametro 0.5 e distribuzione di Poisson di parametro 0.9.



Somma di esponenziale e poissoniana

▷ **ESERCIZIO 12**

Sia X una variabile casuale di funzione massa $m_X(i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ e sia Y una variabile casuale di densità di probabilità $f_Y(y)$ positiva nell'intervallo $(-2, -1)$ e nulla altrove. Si discuta la natura della variabile casuale $Z = X + Y$ e se ne determini la funzione di distribuzione nell'ipotesi di indipendenza di X e Y.

Soluzione

Osserviamo che al variare di X in N_0 e di Y in $(-2,-1)$, la variabile casuale Z assume tutti i valori dell'intervallo $(-2,\infty)$. Inoltre, si ha:

$$P\{Z \le z\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\}\, P\{Y \le z-k\}. \tag{1}$$

Calcoliamo la funzione di distribuzione $P\{Y \le y\}$. Dalle ipotesi fatte segue:

$$P\{Y \le y\} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -2, \\ \displaystyle\int_{-2}^{y} f_Y(u)\,du & \text{se } -2 \le y < -1, \\ 1 & \text{se } y \ge -1. \end{cases}$$

Pertanto, per $z \in (-2,\infty)$ si ha:

$$P\{Y \le z-k\} = \begin{cases} 0 & \text{se } k > z+2, \\ \displaystyle\int_{-2}^{y} f_Y(u)\,du & \text{se } z+1 \le k < z+2, \\ 1 & \text{se } k \le z+1. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla (1) per $z \in (-2,\infty)$, si trae allora:

$$\begin{aligned} P\{Z \le z\} &= \sum_{k=0}^{\lfloor z+2 \rfloor} m_X(k)\, P\{Y \le z-k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor z+1 \rfloor} m_X(k) + \sum_{k=\lfloor z+2 \rfloor}^{\lfloor z+2 \rfloor} m_X(k) \int_{-2}^{z-k} f_Y(y)\,dy \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor z+1 \rfloor} m_X(k) + m_X(\lfloor z+2 \rfloor) \int_{-2}^{z-\lfloor z+2 \rfloor} f_Y(y)\,dy. \end{aligned}$$

Per $z \le -2$ si ha invece evidentemente $P\{Z \le z\} = 0$.

▷ **ESERCIZIO 13**

Una variabile casuale X ha densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Per ogni fissato valore x di X si consideri la variabile casuale Y di densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(0,x)$. Determinare la densità di probabilità $f_Y(y)$ di Y e la probabilità $P\{X+Y \le 2\}$.

Soluzione

Denotiamo con $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ la densità di probabilità della variabile casuale Y. Per ipotesi si ha:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } y \in (0,x), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

La densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$ della coppia di variabili casuali X e Y è allora esprimibile al seguente modo:

$$f_{XY}(x,y) \equiv f_X(x)\, f_{Y|X}(y\,|\,x) = x\,e^{-x}\,\frac{1}{x} = e^{-x}, \tag{2}$$

valida per $x > 0$ e $y \in (0,x)$. Per gli altri valori di x e y risulta invece $f_{XY}(x,y) = 0$. Per determinare $f_Y(y)$ utilizzeremo la (2) unitamente alla relazione

$$f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)\,dx,$$

dove l'integrazione va estesa a tutti quei valori di x per i quali risulta $f_{XY}(x,y) \ne 0$. Dalle condizioni $x > 0$ e $y \in (0,x)$ segue allora:

$$f_Y(y) = \int_y^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_y^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-y}.$$

Osserviamo infine che si ha:

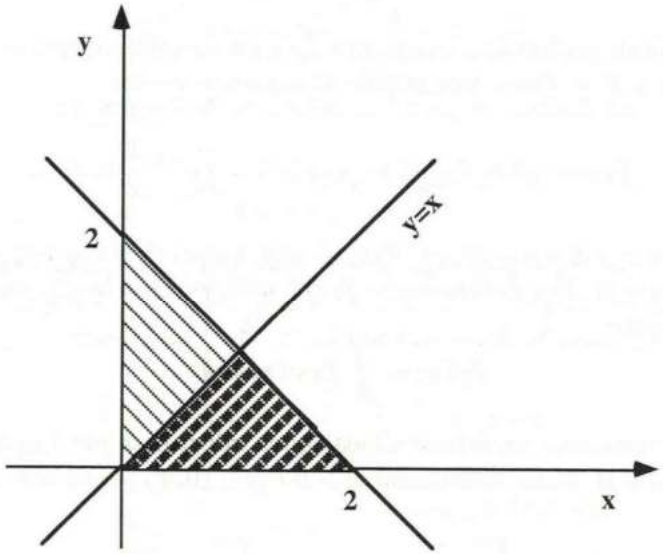
$$P\{X+Y \le 2\} = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f_{XY}(x,y)\,dy, \tag{3}$$

dove $f_{XY}(x,y)$ è però nulla per $y > x$ mentre vale e^{-x} per $x > 0$ e $0 < y < x$. La figura indica tratteggiato il dominio d'integrazione della (3) e più scuro il dominio d'integrazione in corrispondenza del quale risulta $f_{XY}(x,y) \ne 0$. Quest'ultimo può convenientemente riferirsi nell'unione di due domini disgiunti, avendosi:

$$\begin{aligned} &\{(x,y):\ x+y \le 2,\ 0 < x < 2,\ y \in (0,x)\} \\ &\quad = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x\} \\ &\quad \cup \{(x,y):\ 1 < x < 2,\ 0 < y < 2-x\}. \end{aligned}$$

Pertanto dalla (3) segue:

$$P\{X+Y \le 2\} = \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x}\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{-x}\,dy$$
$$= (1-e^{-1})^2 = 0.3996.$$



ESERCIZIO 14

Siano X e Y variabili casuali indipendenti a valori non negativi, di densità di probabilità $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, rispettivamente. Ricavare la densità di probabilità $f_Z(z)$ della variabile casuale $Z = XY$. In particolare, determinare tale densità di probabilità nel caso in cui risulta:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{se } 0 < x < a, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{se } 0 < y < b, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove a e b sono parametri positivi.

Soluzione

Per l'indipendenza delle variabili X e Y e dalla relazione $Z = XY$ segue:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\,dx.$$

Si ha pertanto:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx. \tag{1}$$

Nel caso particolare di cui all'esercizio, dalla (1) segue:

$$f_Z(z) = \int_I \frac{1}{x}\frac{1}{a}\frac{1}{b}\,dx,$$

dove l'intervallo I d'integrazione si determina osservando che per ipotesi deve risultare $x < a$ mentre dall'ipotesi $y < b$ segue $z/x < b$ e quindi $x > z/b$. In definitiva per $0 < z < ab$ abbiamo:

$$f_Z(z) = \frac{1}{ab}\int_{z/b}^a \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{ab}\ln\left(\frac{ab}{z}\right),$$

mentre altrove risulta $f_Z(z) = 0$.

▷ **ESERCIZIO 15**

Sia W la potenza generata da una corrente I che passa attraverso una resistenza R. Come è noto risulta:

$$W = I^2 R.$$

Assumendo che I e R siano variabili casuali indipendenti aventi rispettivamente densità di probabilità

$$f_I(i) = \begin{cases} 12\,i\,(1-i)^2 & \text{se } 0 < i < 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

e

$$f_R(r) = \begin{cases} 3\,r^2 & \text{se } 0 < r < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{2}$$

determinare la densità di probabilità $f_W(w)$ di W.

Soluzione
Poniamo $X = I^2$, così che risulta $W = X\,R$, e determiniamo anzitutto la densità di probabilità $f_X(x)$ di X. Si ha evidentemente:

$$f_X(x) = \frac{f_I(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \begin{cases} 6\,(1-\sqrt{x})^2 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{3}$$

Dalla formula che fornisce la densità di probabilità di una variabile casuale prodotto di due variabili casuali si ricava:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_R\left(\frac{w}{x}\right) \frac{1}{|x|}\, dx\,. \tag{4}$$

Osserviamo che l'espressione $f_X(x)\, f_R(w/x)$, presente nell'integrale a secondo membro della (4), è non nulla per $0 < w < x < 1$. Pertanto, facendo uso delle (2) e (3) nella (4), per $0 < w < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \int_w^1 f_X(x)\, f_R\left(\frac{w}{x}\right) \frac{1}{|x|}\, dx = 18\, w^2 \int_w^1 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}\, dx \\ &= 18 w^2 \int_w^1 \left(x^{-3} - 2\, x^{-5/2} + x^{-2}\right) dx \\ &= 3\,\left(-w^2 + 6\, w - 8\,\sqrt{w} + w\right) \\ &= 3\,\left(\sqrt{w}+3\right)\,\left(1-\sqrt{w}\right)^3, \end{aligned}$$

mentre per $w \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ si ha $f_W(w) = 0$. E' agevole verificare che la funzione $f_W(w)$ è una densità di probabilità. Invero, essa è non negativa e risulta normalizzata, avendosi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_W(w)\, dw = 3 \int_0^1 \left(-w^2 + 6\, w - 8\,\sqrt{w} + 3\right) dw = 1.$$

▷ **ESERCIZIO 16**
Siano X, Y variabili casuali di densità di probabilità congiunta $f(x,y)$. Calcolare la densità di probabilità $g(z)$ della variabile casuale $Z = X\,Y$.

Soluzione
Determineremo anzitutto la funzione di distribuzione $F(z)$ della variabile casuale Z; da questa, per derivazione, si otterrà poi la richiesta

densità di probabilità. A tal fine ricordiamo che per definizione di funzione di distribuzione si ha:

$$F(z) = P\{Z \le z\} = P\{XY \le z\}$$

e quindi:

$$F(z) = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy,$$

avendo indicato con $\mathcal{D}$ la regione del piano xOy in cui risulta $xy \le z$, ossia la regione di piano compresa tra i due rami dell'iperbole di equazione:

$$y = \frac{z}{x}\,.$$

Distinguendo il contributo dei punti ad ascissa negativa da quello dei punti ad ascissa positiva possiamo allora scrivere:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z/x}^{\infty} dy\, f(x,y) + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} dy\, f(x,y).$$

Di qui per derivazione rispetto a z si ottiene il risultato desiderato:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx\,.$$

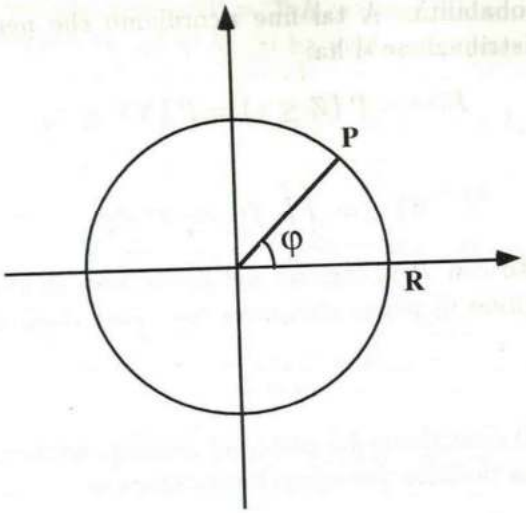
▷ **ESERCIZIO 17**
Si scelga a caso un punto P su una circonferenza di raggio R uniformemente distribuito nell'intervallo (a,b) con $b > a > 0$. Determinare la densità di probabilità dell'area del settore circolare individuato dall'asse delle ascisse e dal raggio passante per P.

Soluzione
Con riferimento alla figura, detta Z la variabile casuale descrivente l'area del settore circolare, si ha $Z = \varphi R^2/2$, ovvero $Z = X\,Y$, dove si è posto $X = R^2$ e $Y = \varphi/2$. Poiché la densità di probabilità di R è per ipotesi

$$f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a < r < b, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

la densità di probabilità di X è data da

$$f_X(x) = \frac{f_R(\sqrt{x})}{2\,\sqrt{x}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,(b-a)\sqrt{x}} & \text{se } a^2 < x < b^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$



Essendo φ una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 2\pi)$, segue che Y è uniformemente distribuita in $(0, \pi)$ e quindi

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{se } 0 < y < \pi, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2}$$

La densità di probabilità di $Z = X\,Y$ è esprimibile come

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\, dx\,, \tag{3}$$

dove il prodotto $f_X(x)\, f_Y(z/x)$ nell'integrale a secondo membro della (3) è non nullo per $a^2 < x < b^2$ e $0 < z < \pi\, x$. Sostituendo pertanto la (1) e la (2) nella (3), nel caso $0 < z < \pi\, a^2$ si ha:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2\,\pi\,(b-a)} \int_{a^2}^{b^2} x^{-3/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\,(b-a)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Nel caso $\pi\, a^2 < z < \pi\, b^2$ si ha invece:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\, dx \\ &= \frac{1}{2\,\pi\,(b-a)} \int_{z/\pi}^{b^2} x^{-3/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi\,(b-a)} \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{1}{b}\right), \end{aligned}$$

mentre per $z \in (-\infty, 0] \cup [\pi\, b^2, \infty)$ risulta $f_Z(z) = 0$. E' facile verificare che la funzione $f_Z(z)$ è normalizzata. Risulta infatti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) dz = \frac{1}{\pi\,(b-a)} \Bigg[&\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \int_0^{\pi\, a^2} dz \\ &+ \int_0^{\pi\, a^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{z}} - \frac{1}{b}\right) dz \Bigg] = 1. \end{aligned}$$

▷ **ESERCIZIO 18**

Si consideri una piramide la cui base è un quadrato avente per lato una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0, a)$ e la cui altezza è una variabile casuale uniformemente distribuita in $(0, b)$. Determinare la densità di probabilità del volume della piramide.

Soluzione

Denotiamo con X il lato della base della piramide e con Y la sua altezza. Il volume è allora espresso dalla variabile casuale $V = X^2 Y/3$. Per determinare la densità di probabilità $f_V(v)$ cominciamo col determinare le funzioni di distribuzione $P(X^2 \le x)$ e $P(Y/3 \le y)$ di X^2 e di $Y/3$, nonché le relative densità di probabilità. Dall'ipotesi di uniformità di X in $(0, a)$ segue:

$$P\left\{X^2 \le x\right\} = P\left\{0 < X \le \sqrt{x}\right\} = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{a} & \text{se } 0 \le x < a^2, \\ 1 & \text{se } x \ge a^2. \end{cases}$$

Per derivazione rispetto a x si ottiene poi la densità di probabilità $f_{X^2}(x)$ di X^2:

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2a\sqrt{x}}\, I_{(0,a^2)}(x),$$

dove $I_{(\alpha,\beta)}(x)$ è la funzione indicatore definita al seguente modo:

$$I_{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (\alpha,\beta), \\ 0 & \text{se } x \notin (\alpha,\beta). \end{cases}$$

Similmente, si ha:

$$P\left\{\frac{Y}{3} \le y\right\} = P\{Y \le 3y\} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0, \\ 3y/b & \text{se } 0 \le y < b/3, \\ 1 & \text{se } y \ge b/3, \end{cases}$$

da cui segue la densità di probabilità

$$f_{Y/3}(y) = \frac{3}{b} I_{(0,b/3)}(y).$$

La densità di probabilità $f_V(v)$ di V è pertanto calcolabile mediante la formula che esprime la densità di probabilità del prodotto delle variabili casuali indipendenti X^2 e $Y/3$:

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{X^2}(x) f_{Y/3}\left(\frac{v}{x}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} \frac{1}{2a\sqrt{x}} I_{(0,a^2)}(x) \frac{3}{b} I_{(0,b/3)}\left(\frac{v}{x}\right) dx \\ &= \frac{3}{2ab} \int_0^{a^2} \frac{1}{\sqrt{x^3}} I_{(0,b/3)}\left(\frac{v}{x}\right) dx. \end{aligned}$$

La funzione integranda è nulla per v/x esterno all'intervallo $(0, b/3)$, così che dovrà imporsi che risulti $x > 3v/b$. Si ha pertanto:

$$f_V(v) = \frac{3}{2ab} \int_{\max(3v/b,0)}^{a^2} x^{-3/2}\, dx = -\frac{3}{ab\sqrt{x}}\Bigg|_{\max(3v/b,0)}^{a^2}.$$

In definitiva, si ottiene:

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{3}{ab}\left[\sqrt{\dfrac{b}{3v}} - \dfrac{1}{a}\right] & \text{se } 0 < v < a^2 b/3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 19

Su una circonferenza di raggio unitario si scelgano a caso indipendentemente due punti P_1 e P_2 di coordinate angolari θ_1 e θ_2. Assumendo che θ_1 e θ_2 siano variabili casuali uniformi in $(0, 2\pi)$, calcolare la densità di probabilità di $Z = \theta_1 - \theta_2$ e $W = |\theta_1 - \theta_2|$.

Soluzione

Con riferimento alla Fig. 1 calcoleremo dapprima le funzioni di distribuzione e poi, da queste, le densità di probabilità richieste.

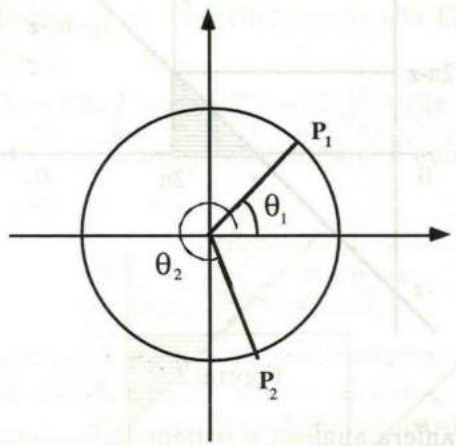


Figura 1

Calcoliamo dunque la funzione di distribuzione $F_Z(z)$ di $Z = \theta_1 - \theta_2$. Al variare di θ_1 e θ_2 in $(0, 2\pi)$, Z varia in $(-2\pi, 2\pi)$. Consideriamo separatamente i casi in cui Z assume valori in $(0, 2\pi)$ e in $(-2\pi, 0)$, osservando che $F_Z(z) = 0$ per $z < -2\pi$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \ge 2\pi$. Supponiamo anzitutto che sia $z \in [0, 2\pi)$. Per definizione di funzione di distribuzione si ha:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{\theta_1 - \theta_2 \le z\} \\ &= P\{\theta_2 \ge \theta_1 - z\}. \end{aligned}$$

Quindi $F_Z(z)$, per $z \in [0, 2\pi)$, può visualizzarsi come il rapporto tra l'area della regione R del piano $\theta_1 O \theta_2$ che giace al di sopra della retta di equazione $\theta_2 = \theta_1 - z$ e che al contempo appartiene al quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, e l'area di quest'ultimo. Con riferimento alla Fig. 2, si vede così che l'area di R si ottiene sottraendo all'area $(2\pi)^2$ del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ l'area del triangolo (tratteggiato in Fig. 2) di vertici $(0, z)$, $(0, 2\pi)$ e $(2\pi - z, 0)$. Quindi, per $0 \le z < 2\pi$ si ha:

$$F_Z(z) = \frac{\text{area}(R)}{(2\pi)^2} = \frac{(2\pi)^2 - (2\pi - z)^2/2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2(2\pi)^2} + \frac{z}{2\pi}.$$

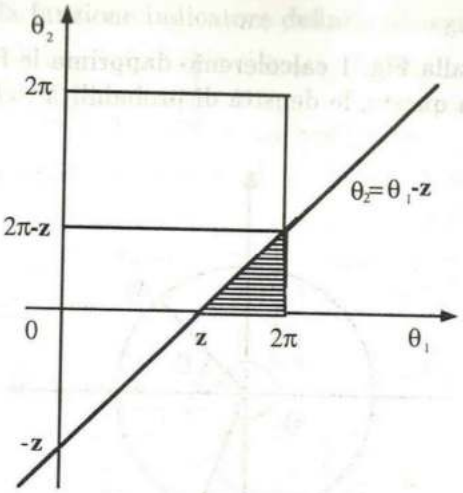


Figura 2

Ragionando in maniera analoga si ottiene la funzione di distribuzione nel caso $z \in [-2\pi, 0)$. In conclusione, si ha:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < -2\pi, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{z^2}{8\pi^2} + \dfrac{z}{2\pi} & \text{se } -2\pi \le z < 0, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{z^2}{8\pi^2} + \dfrac{z}{2\pi} & \text{se } 0 \le z < 2\pi, \\ 1 & \text{se } z \ge 2\pi. \end{cases}$$

Di qui, per derivazione, si ottiene la densità di probabilità $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2\pi + z}{4\pi^2} & \text{se } -2\pi < z < 0, \\ \dfrac{2\pi - z}{4\pi^2} & \text{se } 0 < z < 2\pi, \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

Consideriamo ora la variabile casuale $W = |\theta_1 - \theta_2|$. La sua funzione di distribuzione $F_W(w)$ è evidentemente nulla per $w < 0$ ed unitaria per $w \ge 2\pi$. Determiniamo $F_W(w)$ in $[0, 2\pi)$. A tal fine osserviamo che risulta:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P\{\theta_1 - \theta_2 \le w\} + P\{\theta_2 - \theta_1 \le w\} \\ &= P\{\theta_2 \ge \theta_1 - w\} + P\{\theta_2 \le \theta_1 + w\}. \end{aligned}$$

Quindi $F_W(w)$ può calcolarsi come rapporto $Q/(2\pi)^2$ tra l'area della regione Q del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ delimitata dalle rette di equazioni

$$\theta_2 = \theta_1 - w, \qquad \theta_2 = \theta_1 + w$$

e l'area del quadrato stesso. Con riferimento alla Fig. 3 è facile convincersi che risulta:

$$\text{area}(Q) = (2\pi)^2 - \text{area}(T) = (2\pi)^2 - (2\pi - w)^2,$$

dove con T si è indicata la regione costituita dall'unione dei due triangoli tratteggiati.

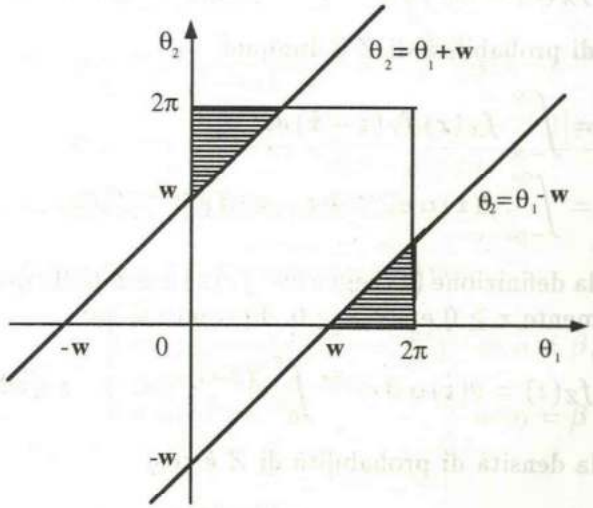


Figura 3

Si ha pertanto:

$$F_W(w) = \frac{(2\pi)^2 - (2\pi - w)^2}{(2\pi)^2} = \frac{w}{4\pi^2}(4\pi - w), \qquad 0 \le w < 1.$$

Infine, per derivazione si ottiene la densità di probabilità $f_W(w)$:

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(1 - \dfrac{w}{2\pi}\right) & \text{se } 0 < w < 2\pi, \\ 0 & \text{altrove}. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 20**

Siano X e Y variabili casuali esponenziali indipendenti, di parametri rispettivamente α e β. Si calcolino densità di probabilità e funzione di distribuzione della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione
Si noti che la soluzione è stata già determinata in passato (cf. Esercizio 7). Indichiamo qui ora una interessante variante del metodo risolutivo. A tal fine, osserviamo che è possibile esprimere le densità di probabilità di X e Y facendo ricorso alla funzione di Heaviside $\vartheta(x)$ così definita:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0, \\ 1 & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Per ogni $x \in \Re$ e $y \in \Re$ si ha quindi:

$$f_X(x) = \vartheta(x)\,\alpha\,e^{-\alpha x}, \qquad f_Y(y) = \vartheta(y)\,\beta\,e^{-\beta y}. \tag{1}$$

La densità di probabilità di Z è dunque:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)\,\alpha\,e^{-\alpha x}\,\vartheta(z-x)\,\beta\,e^{-\beta(z-x)}\,dx, \qquad z \in \Re. \end{aligned}$$

In virtù della definizione (1) segue che $f_Z(z)$ è non nulla quando risulta simultaneamente $x \geq 0$ e $z - x \geq 0$. Pertanto si ha:

$$f_Z(z) = \vartheta(z)\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta z} \int_0^z e^{(\beta-\alpha)x}dx, \qquad z \in \Re.$$

Per $\alpha \neq \beta$ la densità di probabilità di Z è così

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \vartheta(z)\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta z}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\right]_0^z \\ &= \vartheta(z)\,\frac{\alpha\,\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right), \qquad z \in \Re. \end{aligned} \tag{2}$$

La funzione di distribuzione $F_Z(z)$ si ricava poi per integrazione:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \vartheta(z) \int_{-\infty}^{z} f_Z(x)\,dx \\ &= \vartheta(z)\,\frac{\alpha\,\beta}{\beta-\alpha} \int_{-\infty}^{z} \vartheta(x)\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)dx \\ &= \vartheta(z)\,\frac{\alpha\,\beta}{\beta-\alpha} \int_{0}^{z} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)dx \\ &= \vartheta(z)\,\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta\left(1-e^{-\alpha z}\right) - \alpha\left(1-e^{-\beta z}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Passando al limite per $\beta \to \alpha$ nelle (2) e (3) si ottengono le funzioni $f_Z(z)$ e $F_Z(z)$ quando X e Y sono identicamente distribuite. Si ha così:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \lim_{\beta\to\alpha} \vartheta(z)\,\frac{\alpha\,\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right) \\ &= \vartheta(z)\,\alpha^2 \lim_{\beta\to\alpha} \frac{d\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right)/d\beta}{d(\beta-\alpha)/d\beta} \\ &= \vartheta(z)\,\alpha^2\,z\,e^{-\alpha z}, \end{aligned}$$

mentre risulta:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \lim_{\beta\to\alpha} \vartheta(z)\,\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta\left(1-e^{-\alpha z}\right) - \alpha\left(1-e^{-\beta z}\right)\right] \\ &= \vartheta(z) \lim_{\beta\to\alpha} \frac{d\left[\beta\left(1-e^{-\alpha z}\right) - \alpha\left(1-e^{-\beta z}\right)\right]/d\beta}{d(\beta-\alpha)/d\beta} \\ &= \vartheta(z)\left[1 - (\alpha\,z+1)\,e^{-\alpha z}\right]. \end{aligned}$$

In conclusione, per ogni $z \in \Re$ possiamo scrivere:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \vartheta(z)\,\dfrac{\alpha\,\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right) & \text{se } \alpha \neq \beta, \\ \vartheta(z)\,\alpha^2\,z\,e^{-\alpha z} & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$$

e inoltre:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta(z)}{\beta-\alpha}\left[\beta\left(1-e^{-\alpha z}\right) - \alpha\left(1-e^{-\beta z}\right)\right] & \text{se } \alpha \neq \beta, \\ \vartheta(z)\left[1 - (\alpha\,z+1)\,e^{-\alpha z}\right] & \text{se } \alpha = \beta. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 21**
Siano X_1 e X_2 variabili casuali indipendenti di densità di probabilità

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 6\,x\,(1-x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione $F_Z(z)$ della variabile casuale $Z = X_1 + X_2$.

Soluzione
Cominciamo col calcolare la densità di probabilità $f_Z(z)$ di Z (si noti che Z assume solo valori non negativi). A tale fine, introdotta la funzione $\vartheta(x)$ di Heaviside

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

risulta:

$$f_{X_1}(x) = \vartheta(x)\, e^{-x}, \quad x \in R$$
$$f_{X_2}(x) = \vartheta(x)\, \vartheta(1-x)\, 6\, x\, (1-x), \quad x \in R.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)\vartheta(1-x) e^{-x} 6\,(z-x)[1-(z-x)]\, dx \\ &= 6 \int_0^{\min(z,1)} e^{-x}(z-x)[1-(z-x)]\, dx. \end{aligned}$$

Operando il cambiamento di variabile $x = z - y$ si ottiene poi:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= 6e^{-z} \int_0^{\min(z,1)} y e^y\, dy + -6e^{-z} \int_0^{\min(z,1)} y^2 e^y\, dy \\ &= 6e^{-z} \left[x e^x - e^x - x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x \right]_0^{\min(z,1)}, \end{aligned}$$

ovvero:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 6\,(3z - z^2 - 3) + 18e^{-z} & \text{se } 0 < z < 1, \\ 6e^{-z}(3-e) & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infine, per integrazione di $f_Z(z)$ si ricava $F_Z(z)$. Invero, per $0 \leq z < 1$ si ha:

$$\begin{aligned} F_Z(z) \equiv P\{Z \leq z\} &= \int_0^z \left[6\,(3x - x^2 - 3) + 18e^{-x} \right] dx \\ &= 9z^2 - 2z^3 - 18z - 18e^{-z} + 18. \end{aligned}$$

Per $z \geq 1$ si ha invece:

$$\begin{aligned} F_Z(z) \equiv P\{Z \leq z\} &= P\{Z \leq 1\} + P\{1 < Z \leq z\} \\ &= \int_0^1 \left[6(3x - x^2 - 3) + 18e^{-x} \right] dx + \int_1^z 6(3-e)e^{-x}\, dx \\ &= 7 - \frac{18}{e} + 6(3-e)\left(\frac{1}{e} - e^{-z} \right) \\ &= 1 - 6e^{-z}(3-e). \end{aligned}$$

In conclusione,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0, \\ 9z^2 - 2z^3 - 18z - 18e^{-z} + 18 & \text{se } 0 \leq z < 1, \\ 1 - 6e^{-z}(3-e) & \text{se } z \geq 1. \end{cases}$$

▷ **ESERCIZIO 22**
Si faccia uso della funzione di Heaviside per determinare la densità di probabilità della somma di due variabili casuali indipendenti di densità uniforme nell'intervallo (a, b).

Soluzione
Dette X e Y le due variabili casuali e $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ le rispettive densità di probabilità possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \vartheta(x-a)\, \vartheta(b-x)\, \frac{1}{b-a}, \quad x \in \Re \\ f_Y(y) &= \vartheta(y-a)\, \vartheta(b-y)\, \frac{1}{b-a}, \quad y \in \Re, \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\vartheta(\cdot)$ denota la funzione di Heaviside. La densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$ è allora esprimibile al seguente modo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x-a)\, \vartheta(b-x)\, \vartheta(z-x-a)\, \vartheta(b-z+x)\, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \vartheta(z-x-a)\, \vartheta(b-z+x)\, dx. \end{aligned} \tag{2}$$

E' evidente che la funzione integranda è nulla per $z < 2a$ e per $z > 2b$. In tali casi si ha dunque $f_Z(z) = 0$. Per $2a < z < 2b$ si ha invece:

$$f_Z(z) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{\max(a,z-b)}^{\min(b,z-a)} dx$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2} \left[\min(b, z-a) - \max(a, z-b)\right],$$

da cui segue:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z-2a}{(b-a)^2} & \text{se } 2a < z < a+b, \\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2} & \text{se } a+b < z < 2b, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in accordo con quanto visto nell'Esercizio 4. Verifichiamo, infine, che $f_Z(z)$ soddisfa la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz = \int_{2a}^{a+b} \frac{z-2a}{(b-a)^2}\, dz + \int_{a+b}^{2b} \frac{2b-z}{(b-a)^2}\, dz$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2} \left[(a+b)^2 - 2(a+b)^2 + 2a^2 + 2b^2\right]$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2} (b-a)^2 = 1.$$

▷ **ESERCIZIO 23**

Siano X e Y variabili casuali indipendenti di densità di probabilità $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ entrambe non nulle nell'intervallo (a, b) e nulle al di fuori di tale intervallo. Si calcoli la densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione

Se X e Y sono variabili casuali arbitrarie congiuntamente distribuite di densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$, la densità di probabilità $f_Z(z)$ di $Z = X + Y$ è esprimibile al seguente modo:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx.$$

Per la ipotizzata indipendenza di X e Y, la densità di probabilità congiunta si fattorizza poi nel prodotto delle densità marginali, così che si ha:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx. \tag{1}$$

Poiché per ipotesi $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono nulle al di fuori dell'intervallo (a, b), dalla (1) segue che $f_Z(z)$ è non nulla quando risulta simultaneamente $a < x < b$ e $a < z - x < b$. Pertanto si ottiene:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx & \text{se } 2a < z < 2b, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Alternativamente, facendo uso della funzione di Heaviside può scriversi per ogni $z \in \Re$:

$$f_Z(z) = \vartheta(z-2a)\, \vartheta(2b-z) \int_a^b f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx.$$

Valori di $\Psi(z) = \int_0^z (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}\, dx$ per alcuni valori di z.

Ad esempio a $z = 2.54$ (ottenuto come $2.5 + .04$) corrisponde $\Psi(z) = 0.4945$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0474	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

BIBLIOTECA FACOLTA'
SC.MM.FF.NN.
INV. 2361

UNIVERSITA' DI NAPOLI FEDERICO II
BIBLIOTECA CENTRALE