Risoluzione di sistemi di eq. lineari (mediante riduzione a gradini)

[risoluzione esercizi dell'esercitazione 4]

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Scriviamo la matrice completa associata al sistema e la riduciamo a scala

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ci conviene sempre avere come prima riga quella più semplice (quella con più zeri e senza parametri)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matrice completa ha 2 pivot, perciò il rango è 2 (inferiore al n° incogn.) e il sistema lineare diventa

$$\begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ x = x \end{cases}$$

n° di variabili libere

il sistema ammette infinite soluzioni: in particolare ∞^1 solut. che dipendono dall'unica variabile libera x

2) $\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$

Mi accorgo subito che $\mathrm{IV} = 2\,\mathrm{II}$ perciò posso toglierla dal sistema

Scrivo la matrice completa associata al sistema e la riduco a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matrice completa ha 2 pivot, perciò il rango è 2 (inferiore al n° incognite) e il sistema lineare diventa

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -3y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \\ z = 1 - 3x \end{cases}$$

il sistema ammette infinite soluzioni: in particolare ∞^1 solut. che dipendono dall'unica variabile libera x

3) $\begin{cases} x+y+z+t-\omega=-1 \\ 2x+y-2t=0 \\ x+2z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=\omega-t-1 \\ 2x+y=2t \\ x+2z=t \end{cases}$

Scrivo la matrice completa associata al sistema e la riduco a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \omega-t-1 \\ 2 & 1 & 0 & 2t \\ 1 & 0 & 2 & t \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} R_3 \\ \\ R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 2 & 1 & 0 & 2t \\ 1 & 1 & 1 & \omega-t-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 2 & 1 & 0 & 2t \\ 1 & 1 & 1 & \omega-t-1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -2R_1+R_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \omega-t-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \omega-t-1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_1+R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \omega-2t-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \omega-2t-1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_2+R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & t \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & \omega-2t-1 \end{array}\right)$$

la matrice completa ha 3 pivot, perciò il rango è 3 (pari al n° incognite)

$$\begin{cases} x+2z=t \\ y-4z=0 \\ 3z=\omega-2t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t-2z \\ y=4z \\ z=\frac{1}{3}(\omega-2t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t-\frac{2}{3}(\omega-2t-1) \\ y=\frac{4}{3}(\omega-2t-1) \\ z=\frac{1}{3}(\omega-2t-1) \end{cases}$$

Perciò il sistema lineare ammette infinite soluzioni: in particolare ∞^2 soluzioni che dipendono dai due parametri t e ω

Determinare una matrice a gradini equivalente per righe alla seguente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Qual è la dimensione del sottospazio generato dalle righe della matrice A? Qual è invece la dimensione del sottospazio generato dalle colonne? Motivare le risposte.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} R_4 \\ \\ \\ R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}R_1+R_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ R_2+R_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ R_2+R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ R_3+R_4 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

La matrice ha 3 pivot $\Rightarrow$ perciò il rango è pari a 3
Il sottosp. generato dalle righe di A coincide col sottosp. gen dalle righe di A', che ha una base data dalle righe non nulle di A': $(4,0,0,-1), (0,-1,1,-\frac{1}{2}), (0,0,0,\frac{1}{2})$ in cui compaiono i pivot. La dim del sottosp. generato dalle righe di A' è proprio pari al rango per righe, cioè 3. Poichè in una matrice il rango per righe e il rango per colonne COINCIDONO $\Rightarrow$ anche la dim. del sottosp. gen. dalle colonne è 3

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x, siano

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(-x) = p(x)\}$$

e

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(-x) = -p(x)\}.$$

Si risponda vero o falso alle seguenti domande, motivando le risposte.

- U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, ma V non lo è. → RISPOSTA DA DARE: FALSO
- $U \cap V$ è il polinomio nullo. → RISPOSTA DA DARE: VERO
- $\mathbb{R}[x] = U \oplus V$. → RISPOSTA DA DARE: VERO

OSS. U è il sottospazio delle funzioni pari
V è il sottospazio delle funzioni dispari

- Il primo quesito ci chiede di verificare se U e V sono sottosp. vettoriali di R[x] (consiglio: riguardare esercitazione 2)
- Entrambi gli insiemi sono dotati di vettore nullo, pari al polinomio con coeff. tutti nulli $p(x)=0$
- Entrambi gli insiemi sono dotati di chiusura rispetto alla somma e di chiusura rispetto al prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

⇒ U e V sono entrambi sottospazi di R[x]

- Il secondo quesito ci chiede di verificare se $U \cap V = \{0\}$

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n$$

$$-p(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 - \dots - \alpha_n x^n$$

$$p(-x) = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 - \dots - \alpha_n x^n$$

Poiché nel sottosp. intersezione devono valere entrambe le condizioni, cioè $p(-x) = p(x) = -p(x) \Rightarrow U \cap V = \{0\}$

- Poiché ogni polinomio può essere scritto come la somma di una componente pari e di una componente dispari e poiché $U \cap V = \{0\}$

⇒ i sottospazi delle funzioni pari e dispari sono in somma diretta.

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale e sia H un sottoinsieme di V avente un numero finito di oggetti n. Per quali valori di n il sottoinsieme H di V è un sottospazio vettoriale di V?

L'unico sottospazio che ha un numero finito di oggetti è il sottospazio banale $\{0\}$, gli altri infatti, anche se finitamente generati hanno un infinito numero di oggetti (se ad es. in uno spazio vettoriale c'è un vettore $\underline{v} \neq 0$, allora ci saranno anche $2\underline{v}, 3\underline{v}, 4\underline{v}, \ldots$) => perciò l'unica possibilità è che ce ne sia uno solo, l'elemento neutro.

NOTA:

Un insieme di vettori è linearmente indipendente se la matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori ha rango pari al numero di vettori.

Più in dettaglio: $\rho \leq \min\{m; n\}$

Sia M una matrice $m \times n$, con m colonne e n righe. Supponiamo, per ora, che $m \leq n$.

Le colonne di M sono m vettori in uno spazio di dimensione n. Se il rango della matrice M è $k < m$, allora ci sono esattamente k vettori linearmente indipendenti. Se $k = m$, allora i vettori sono tutti indipendenti! Ma $k = m$ è il massimo rango che può avere la matrice (ci sono m colonne). Quindi se i vettori sono indipendenti allora il rango è m e se ho rango m i vettori sono indipendenti.

Nota che se $m > n$ allora abbiamo più colonne che righe. Il rango massimo sarà n, che è minore di m. Quindi le colonne non possono essere indipendenti.

PREMESSA: es. $\mathbb{R}^4$ è uno sp. vettoriale di dimensione 4, dunque sarà generato da un insieme formato da ALMENO 4 vettori

↳ SERVONO 4 vettori lin. indip. per avere una base (sist. generatori minimale)

↳ i 4 vettori lin. indip + n altri vettori lin. dip. sono un sist. di generatori

(5) In $\mathbb{R}^4$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori

$$T_1 = \{(0,1,0,1),(2,0,-1,1),(-2,1,1,0)\}$$

$$T_2 = \{(1,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$$

$$T_3 = \{(1,0,1,0),(1,0,1,-1)\}$$

$$T_4 = \{(-1,0,-2,1),(0,1,-1,0),(1,0,-3,0),(0,0,1,1)\}$$

$$T_5 = \{(1,0,1,0),(0,-2,0,2),(0,0,1,2),(1,0,0,5),(1,0,-1,-1),(0,0,0,1)\}$$

stabilire, giustificando le risposte, se è linearmente dipendente o indipendente; se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$; se è una base di $\mathbb{R}^4$; se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, esibirne una.

- $T_1 = \{(0,1,0,1),(2,0,-1,1),(-2,1,1,0)\}$

Ne consideriamo la matrice associata e ne calcoliamo il rango

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow_{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} R_3 \\ \\ R_1 \end{array}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) T_1 è un sistema di vettori lin. DIPENDENTE, infatti il rango della matrice è pari a 2, e non 3 (rango massimo)

RICORDA: Affinché tutti i vettori siano lin. indip. il rango della matrice dev'essere massimo

2) T_1 non è un sist. di generatori di $\mathbb{R}^4$
infatti poiché il rango è pari a 2, la dim $(T_1) = 2$
e poiché lo spazio vettoriale da generare è $\mathbb{R}^4$ e $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$
risulta chiaro che lo sp. vettoriale $\mathbb{R}^4$ non può essere generato da meno di 4 vettori.

RICORDA: Il rango fornisce la dimensione del sistema di vettori

3) T_1 non è una base di $\mathbb{R}^4$ (T_1 sarebbe dovuto essere un sistema di generatori minimale per essere una base, cioè costituito da 4 vettori lin. INDIPEND).

4) Non ha senso completarlo ad una base di $\mathbb{R}^4$ perché non è un sistema di vettori linearm. indipendenti.

RICORDA: Si possono completare a una base solo i sistemi che risultano essere lin. indip. ma che non risultano basi

- $T_2 = \{(1,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{-R_1+R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 3 => rango massimo e pari al numero di vettori, perciò

1) T_2 è sistema di vettori lin. indipendente
2) T_2 non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ perché
   $\dim \mathbb{R}^4 = 4 > 3 = \dim T_2$
3) T_2 non è una base di $\mathbb{R}^4$ (T_2 sarebbe dovuto essere un sistema di generatori minimale, cioè costituito da 4 vett. lin ind)
4) È possibile completare T_2 a una base di $\mathbb{R}^4$ semplicemente aggiungendo un vettore della base canonica (che ovviamente non sia dipendente da quelli di T_2)
   ad es. $\underline{v} = (0,0,0,1)$
   (lo scelgo facilmente guardando la matrice già ridotta a gradini)

perciò una base sarà:

$B = \{(1,0,0,2),(0,1,0,-2),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$

$$T_3 = \{(1,0,1,0),(1,0,1,-1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -R_1+R_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 (rango massimo), perciò:

1) T_3 è sistema di vettori lin. indipendente

2) T_3 non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ perché
$\dim \mathbb{R}^4 = 4 > 2 = \dim T_3$

3) T_3 non è una base di $\mathbb{R}^4$ (T_3 avrebbe dovuto essere un sistema di generatori minimale, cioè costituito da 4 vett. lin ind)

4) È possibile completare T_3 a una base di $\mathbb{R}^4$
poiché $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, una base di $\mathbb{R}^4$ sarà formata da 4 vettori lin INDIP.

Perciò per completare T_3 a una base di $\mathbb{R}^4$ mi servono 2 vettori $\in \mathbb{R}^4$ tali che
$\{(1,0,1,0),(0,0,0,-1), v_1, v_2\}$ sia linearm. indip.
ad es. $\underline{v_1} = 0,0,1,0$ e $\underline{v_2} = 0,1,0,0$
(ma potrei scegliere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^4$ che non sia combinazione lineare dei vettori di T_3)

Controlliamo :)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ R_4 \\ \\ R_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice ha 4 pivot, il rango è 4 (rango max)
$\Downarrow$
i 4 vettori sono lin indip.

una base è $B = \{(1\,0\,1\,0),(0\,0\,0\,-1),(0\,0\,1\,0),(0\,1\,0\,0)\}$

$$T_4 = \{(-1,0,-2,1),(0,1,-1,0),(1,0,-3,0),(0,0,1,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ R_1+R_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{1}{5}R_3+R_4 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 4 (rango massimo), perciò:

1) T_4 è sistema di vettori lin. indipendente

2) T_4 è un sistema di generatori minimali di $\mathbb{R}^4$ perché $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = 4 = \dim T_4$

3) T_4 è una base di $\mathbb{R}^4$ (T_4 è un sistema di generatori minimali, cioè costituito da 4 vett. lin. ind. => per definizione è una base)

4) È già una base

- $T_5 = \{(1,0,1,0),(0,-2,0,2),(0,0,1,2),(1,0,0,5),(1,0,-1,-1),(0,0,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ -R_1+R_4 \\ -R_1+R_5 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ R_3+R_4 \\ 2R_3+R_5 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -7R_6+R_4 \\ -3R_6+R_5 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\rho \leq \min\{n°\text{righe}, n°\text{colonne}\}$

Il rango della matrice è 4 (rango massimo), perciò:

1) T_5 è sistema di vettori lin. DIPENDENTE
perchè il rango pur essendo massimo è inferiore al numero di vettori di T_5 (sono solo 4 i vettori lin. indip e non tutti e 6)

2) T_5 è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ perchè
$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = 4 = \dim T_5$

3) T_5 non è una base di $\mathbb{R}^4$ (T_5 sarebbe dovuto essere un sistema di generatori minimale, cioè costituito da 4 vett. lin. ind
ma non è minimale perchè ho 6 vettori)
ma è possibile ESTRARRE una base
$B = \{(1\,0\,1\,0),(0\,-2\,0\,2),(0\,0\,1\,2),(0\,0\,0\,1)\}$

(7) Sia $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ un insieme di vettori di uno spazio vettoriale finitamente generato V e sia S un sistema di generatori per V contenente m vettori. Stabilire , motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

7.1 • Se X è linearmente indipendente, allora $t > m$.
7.2 • Se $|X| = |S|$, allora X è linearmente indipendente.
7.3 • Se X è linearmente indipendente, allora contiene al più m vettori.

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ è un sistema di generatori per V
$X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ è un insieme di vettori di V

Questo esercizio è un'applicazione del:

Lemma di Steinitz

Un sistema di generatori ha sempre un numero di elementi maggiore, o al più uguale, di un sistema di vettori linearmente indipendenti.

7.1) RISPOSTA DA DARE: FALSO

Perché un sistema di generatori contiene sempre un indipendente massimale (non è necessariamente lin. indipendente), perciò in realtà $m > t$

7.2) RISPOSTA DA DARE: FALSO

perché non tutti i sistemi di generatori sono indipendenti

NOTA: con il modulo di un insieme di vettori si intende la dimensione dell'insieme

7.3) RISPOSTA DA DARE: VERO

perché da un sistema di generatori si può estrarre un sistema indipendente massimale e quindi la grandezza di un generico sist. indipendente sarà sempre più piccola.

(10) Sia V_4 uno spazio vettoriale 4-dimensionale. Stabilire, motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

10.1 • Esistono due sottospazi U e W entrambi di dimensione 3 che si intersecano in un sottospazio 1-dimensionale.

10.2 • Se U e W sono due sottospazi distinti e non banali di V_4, entrambi di dimensione pari, allora la loro somma è un sottospazio di V_4 di dimensione 3.

10.3 • Esistono due sottospazi non banali U e W di V_4, uno di dimensione pari e l'altro di dimensione dispari, la cui somma sia un sottospazio di dimensione 3.

10.1 RISPOSTA DA DARE:

10.2 RISPOSTA DA DARE:

10.3 RISPOSTA DA DARE: