3.2 $K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ è lin. chiuso

- Sicuramente $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$, basta scegliere $a = b = 0$

- chiusura rispetto alla somma SI

considero $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & y_1 \\ x_1-y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} x_2+y_2 & y_2 \\ x_2-y_2 & x_2 \end{pmatrix} \in K$

e ne calcolo la somma

$$\bar{v}+\bar{w} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 + x_2+y_2 & y_1+y_2 \\ x_1-y_1 + x_2-y_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) & (y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)-(y_1+y_2) & (x_1+x_2) \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta rispetta la condizione imposta da K
infatti ponendo

$\begin{cases} x = x_1+x_2 \\ y = y_1+y_2 \end{cases}$ si ottiene $\bar{v}+\bar{w} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ x-y & x \end{pmatrix} \in K$

- chiusura rispetto al prodotto SI

considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & y_1 \\ x_1-y_1 & x_1 \end{pmatrix} \in K$ e ne calcolo il prodotto

$$\lambda\bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda x_1+\lambda y_1 & \lambda y_1 \\ \lambda x_1-\lambda y_1 & \lambda x_1 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta rispetta la condizione imposta da K
infatti ponendo

$\begin{cases} x = \lambda x_1 \\ y = \lambda y_1 \end{cases}$ si ottiene $\lambda\bar{v} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ x-y & x \end{pmatrix} \in K$

4) $X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ => non è un sottosp. vettoriale

- vettore nullo SI

Sicuramente $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$, basta scegliere $a = b = 0$

- chiusura rispetto alla somma NO

considero $\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} a_2 b_2 & b_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in X$

e ne calcolo la somma

$$\bar{v} + \bar{w} = \begin{pmatrix} \underline{a_1 b_1 + a_2 b_2} & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & 0 \end{pmatrix} \notin X$$

avrei dovuto avere $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$

mi potrei fermare

- chiusura rispetto al prodotto NO

Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e 1 generico vettore $\in X$: $\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$

e ne calcolo il prodotto

$$\lambda \bar{v} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 b_1 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda a_1 b_1} & \lambda b_1 \\ \lambda a_1 & 0 \end{pmatrix} \notin X$$

avrei dovuto avere $\lambda a_1 \lambda b_1$

5) $Z = \{ a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$

- vettore nullo SI

prendendo $a = b = c = 0$ si vede subito che $(0,0,0) \in Z$

- chiusura rispetto alla somma SI

Considero 2 generici vettori $\in Z$: $\bar{u} = a_1(1,0,1) + b_1(0,1,1) + c_1(1,1,2)$

$\bar{w} = a_2(1,0,1) + b_2(0,1,1) + c_2(1,1,2)$

e ne considero la somma

$\bar{u} + \bar{w} = (a_1 + a_2)(1,0,1) + (b_1 + b_2)(0,1,1) + (c_1 + c_2)(1,1,2) \in Z$

(basta porre $\begin{matrix} a_1 + a_2 = a \\ b_1 + b_2 = b \\ c_1 + c_2 = c \end{matrix}$)

- chiusura rispetto al prodotto SI

Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e 1 generico vettore $\bar{u} \in Z$

e ne calcolo il prodotto

$\lambda \bar{u} = \lambda [a_1(1,0,1) + b_1(0,1,1) + c_1(1,1,2)]$

$= \lambda a_1 (1,0,1) + \lambda b_1 (0,1,1) + \lambda c_1 (1,1,2) \in Z$

(basta porre $\begin{matrix} \lambda a_1 = a \\ \lambda b_1 = b \\ \lambda c_1 = c \end{matrix}$)

NOTA: Z è un sottospazio vettoriale generato dai vettori

$(1,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,2)$

$Z = \langle (1,0,1), (0,1,1), (1,1,2) \rangle$

Chiusura lineare

Dato un sottoinsieme X dello sp. vettoriale V, si definisce la chiusura lineare di X, $L(X)$, l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di vettori di X:

$$L(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{v}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \bar{v}_i \in X,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

NOTA: La chiusura lineare $L(X)$ COINCIDE con il sottospazio generato da X, $\langle X \rangle$, e che per definizione è l'intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti X.

OSS.: la chiusura lineare di un dato vettore $\bar{v}$ altro non è che l'insieme dei vettori proporzionali a $\bar{v}$

$$L(\bar{v}) = \{ \lambda \bar{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

e geometricamente rappresenta una retta passante per l'origine

es. $\bar{v} = (1,0,0) \rightarrow L(1,0,0) = \{ \lambda(1,0,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda,0,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

identifica l'asse delle ascisse

OSS.: la chiusura lineare di due dati vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ altro non è che $L(\bar{u}, \bar{v}') = \{ \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

e geometricamente rappresenta un piano

es. $\bar{u} = (1,0,0)$ $\quad L[(1,0,0),(0,1,0)] = \{ \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$

$\bar{v} = (0,1,0)$ $\quad = \{ (\lambda,\mu,0) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$

identifica il "piano xy"

Sistema di generatori

Un sottoinsieme X di uno spazio vettoriale V è detto sistema di generatori per V se e solo se ogni vettore $\bar{v} \in V$ può essere ottenuto tramite le combinazioni lineari dei vettori di X, cioè se

$\forall \bar{v} \in V$ esistono $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

tali che $\bar{v} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$

NOTA: Ogni sp. vettoriale ammette SEMPRE almeno un sist. di generatori SE STESSO: $L(V) = V$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

- I vettori $v_1, \dots, v_n$ di uno sp. vettoriale V sono lin. DIPENDENTI se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$ altrimenti sono detti lin. indipendenti

  NOTA: Due o più vettori sono lin dip. se uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti

- I vettori $v_1, \dots, v_n$ di uno sp. vettoriale V sono lin. INDIPENDENTI se ogni volta che c'è una combinazione lineare $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$ gli scalari sono tutti nulli $(\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0)$

  NOTA: Un solo vettore è lin. indip. se e solo se è diverso da $\bar{0}$

Base

È un insieme di vettori che non solo generano lo spazio vettoriale, ma sono anche indipendenti. Una base contiene quindi il MINIMO numero di vettori necessari a generare tutto lo spazio vettoriale (il n° di vettori che la costituisce è la dimensione dello sp. vettoriale).

NOTA: Se ai vettori della base ne aggiungiamo un altro (o più) otteniamo ancora un sistema di generatori, però i vettori che lo costituiscono saranno sicuramente lin. dipendenti (perchè i vettori "aggiunti" potranno sempre essere scritti come combinazione lineare dei vettori della base).

Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali

- $W_1 = \{(1,0,-1,-1),(1,0,1,1),(0,1,1,0),(2,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- $W_2 = \langle (5,0,-3,1),(0,2,3,1),(4,1,0,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
- $W_3 = \langle (0,0,0),(1,1,1),(2,2,2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
- $W_4 = \langle (0,0),(-1,1),(5,-5) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.
- $W_5 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 - x_2 - x_3 = x_5 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$.
- $W_6 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2 + x_2 - x_3 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- $W_7 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 + x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$.
- $W_8 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 = 0;\ x_3 + x_4 = -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- $W_9 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = 2x_2 - x_3;\ x_4 = x_5 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- $W_{10} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2 = x_2;\ x_3 + x_4 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

$W_2, W_3, W_4 \rightarrow$ ci sono le parentesi angolari
sono sottospazi generati e per definizione
sono appunto sottospazi

$W_8 \rightarrow$ non vi appartiene il vettore nullo ($x_3 + x_4 = -1$ non è omogenea)
sicuramente non è un sottospazio

$W_6, W_{10} \rightarrow$ c'è il quadrato di x_1 (x_1^2)
sicuramente non ci sarà la chiusura della
somma e del prodotto

10. Dati i sottoinsiemi $S = \{\overset{s_1}{(1,1,0)}, \overset{s_2}{(0,1,1)}\}$ e $T = \{\overset{t_1}{(1,2,1)}, \overset{t_2}{(1,0,-1)}, (0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, dimostrare che ciascun vettore di S è combinazione lineare dei vettori di T e che ciascun vettore di T è combinazione lineare dei vettori di S. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che S e T generano lo stesso spazio vettoriale?

- Dimostro che ciascun vettore di S è comb. lineare dei vettori di T

$$\alpha(1,2,1)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,0,0)=(1,1,0)$$

$$\begin{cases}\alpha 1+\beta 1+\gamma 0=1\\ \alpha 2+\beta 0+\gamma 0=1\\ \alpha 1-\beta 1+\gamma 0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=1\\ 2\alpha=1\\ \alpha-\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=\alpha\\ \gamma=0\end{cases} \qquad (1,1,0)=\frac{1}{2}(1,2,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$\alpha(1,2,1)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,0,0)=(0,1,1)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha=1\\ \alpha-\beta=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \alpha=\frac{1}{2}\\ \gamma=0\end{cases} \qquad (0,1,1)=\frac{1}{2}(1,2,1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)$$

- Dimostro che ciascun vettore di T è comb. lineare dei vettori di S

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)=(1,2,1)$$

banale $\alpha=\beta=1$ $\qquad (1,2,1)=1(1,1,0)+1(0,1,1)$

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)=(1,0,-1)$$

banale $\alpha=1$, $\beta=-1$ $\qquad (1,0,-1)=1(1,1,0)-1(0,1,1)$

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$$

banale $\alpha=\beta=0$ $\qquad (0,0,0)=0(1,1,0)+0(0,1,1)$

- Stabilire se $L(S)=L(T)$ cioè se S e T generano lo stesso spazio vettoriale

Poiché abbiamo dimostrato che ogni vettore di S può essere scritto come comb. lineare dei vettori di T e viceversa:

- i vettori di S, s_1 e s_2 dipendono da t_1 e t_2 $\Rightarrow L(s_1,s_2)\subseteq L(t_1,t_2)$
- i vettori di T, t_1 e t_2 dipendono da s_1 e s_2 $\Rightarrow L(t_1,t_2)\subseteq L(s_1,s_2)$

$\Rightarrow$ data la doppia inclusione otteniamo l'uguaglianza $L(S)=L(T)$ S e T generano lo stesso sp. vett.

Si provi che il sottoinsieme

$$\mathcal{S} = \{2 - x, 1 + x, x^2 + x^3, 1 - x + x^4, x^3\}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_4[x]$ dei polinomi di grado al più 4 è linearmente indipendente ed è un sistema di generatori per lo spazio stesso. Si scriva il polinomio $1 + x^2$ come combinazione lineare dei polinomi di $\mathcal{S}$.
Infine, descrivere il sottospazio vettoriale generato dai vettori $2 - x$ e $1 + x$.

- Dimostro che S è linearmente indipendente:

Considero $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ e verifico se l'unica quintupla di scalari che annulla la comb. lineare

$$\alpha(2-x) + \beta(1+x) + \gamma(x^2+x^3) + \delta(1-x+x^4) + \varepsilon(x^3) = 0$$

è proprio $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$

Svolgim.

$$2\alpha - \alpha x + \beta + \beta x + \gamma x^2 + \gamma x^3 + \delta - \delta x + \delta x^4 + \varepsilon x^3 = 0$$

$$(2\alpha + \beta + \delta) + x(-\alpha + \beta - \delta) + x^2(\gamma) + x^3(\gamma + \varepsilon) + x^4(\delta) = 0$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \delta = 0 \\ -\alpha + \beta - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \gamma + \varepsilon = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + 0 = 0 \\ -\alpha + \beta - 0 = 0 \\ \gamma = 0 \\ 0 + \varepsilon = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$\Uparrow$ S è un sottoinsieme LIN. INDIPEND.

- Dimostro che S è un sistema di generatori di $\mathbb{R}_4[x]$:

I polinomi dati generano lo sp. vett. $\mathbb{R}_4[x]$ se e solo se ogni polinomio $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$ (con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$) può essere scritto come una loro combinazione lineare.

A questo punto (STRADA SCONSIGLIATA) si potrebbe procedere verificando se il sistema ammette soluzioni, tuttavia SE SI NOTA CHE i 5 vettori (polinomi) di S sono LIN. INDIP., questi costituiscono proprio un sistema di generatori di $\mathbb{R}_4[x]$

- Si scriva il polinomio $1+x^2$ come comb. lineare dei polinomi di S

$$\alpha(2-x)+\beta(1+x)+\gamma(x^2+x^3)+\delta(1-x+x^4)+\varepsilon(x^3)=1+x^2$$

$$(2\alpha+\beta+\delta)+x(-\alpha+\beta-\delta)+x^2(\gamma)+x^3(\gamma+\varepsilon)+x^4(\delta)=1+x^2$$

per il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\delta=1 \\ \beta-\alpha-\delta=0 \\ \gamma=1 \\ \gamma+\varepsilon=0 \\ \delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+0=1 \\ \beta-\alpha-0=0 \\ \gamma=1 \\ \varepsilon=-\gamma \\ \delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=1 \\ \beta=\alpha \\ \gamma=1 \\ \varepsilon=-1 \\ \delta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ \beta=\frac{1}{3} \\ \gamma=1 \\ \varepsilon=-1 \\ \delta=0 \end{cases}$$

perciò

$$1+x^2=\frac{1}{3}(2-x)+\frac{1}{3}(1+x)+1(x^2+x^3)+0(1-x+x^4)-1(x^3)$$

- Descrivere il sottospazio vettoriale generato dai vettori $2-x$ e $1+x$

Osserviamo che il sottospazio $\langle 2-x, 1+x\rangle$ è uguale banalmente $\langle 3, 1+x\rangle$ basta osservare che i vettori di uno dipendono dagli altri e viceversa, proprio come nell'es. precedente:

$$\alpha(2-x)+\beta(1+x)=3 \longrightarrow \alpha=\beta=1 \longrightarrow 3=1(2-x)+1(1+x)$$

$$\alpha(2-x)+\beta(1+x)=1+x \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix} \longrightarrow 1+x=0(2-x)+1(1+x)$$

A sua volta $\langle 3, 1+x\rangle$ è uguale banalmente a $\langle 1, x\rangle$ che è lo spazio dei polinomi di grado al più 1

$$\alpha(3)+\beta(1+x)=1 \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=0\end{matrix} \longrightarrow 1=\frac{1}{3}(3)+0(1+x)$$

$$\alpha(3)+\beta(1+x)=x \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=-\frac{1}{3}\\ \beta=1\end{matrix} \longrightarrow x=-\frac{1}{3}(3)+1(1+x)$$

9. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2.

(ii) Dire se S è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?

(iii) È vero che il vettore $w = (0,0,1)$ è combinazione lineare dei vettori di S? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, w?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da S?

- Verifico se $v_3 = (1,0,-2)$ è comb. lineare di v_1 e v_2

$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)=(1,0,-2)$

$$\begin{cases}1\alpha+0\beta=1\\2\alpha+1\beta=0\\0\alpha+1\beta=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\\beta=-2\end{cases} \Rightarrow$$

v_3 è comb. lin di v_1 e v_2

$v_3 = 1\cdot v_1 - 2\cdot v_2$

$(1,0,-2)=1(1,2,0)-2(0,1,1)$

- Stabilisco se S è lin. indipendente o lin. dipendente:

Poichè v_3 è comb. lin. di v_1 e v_2, i 3 vettori sono LIN. DIPEND. e di conseguenza S è LIN. DIPENDENTE

- Vediamo in quanti modi $(0,0,0)=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$

$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,-2)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}1\alpha+0\beta+1\gamma=0\\2\alpha+1\beta+0\gamma=0\\0\alpha+1\beta-2\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\2\alpha+\beta=0\\\beta=2\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\2\alpha+2\gamma=0\\\beta=2\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\gamma\\\beta=2\gamma\\\gamma=\gamma\end{cases}$$

il n° di eq. lin. indip. è inferiore al n° di incognite (ciò non ci sorprende perchè v_1, v_2, v_3 sono LIN DIP)

Il sistema ha infinite soluzioni, perciò ci sono infiniti modi per ottenere il vettore nullo come comb. lineare dei vettori dati.

- Verifichiamo se il vettore $\bar{w}=(0,0,1)$ è comb. lin di $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,-2)=(0,0,1)$

Impossibile

w non è comb. lineare

$$\begin{cases}1\alpha+0\beta+1\gamma=0\\2\alpha+1\beta+0\gamma=0\\0\alpha+1\beta-2\gamma=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\2\alpha+\beta=0\\\beta=1+2\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\2\alpha+1+2\gamma=0\\\beta=1+2\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\2(\alpha+\gamma)=-1\\\beta=1+2\gamma\end{cases}$$

- Vediamo in quanti modi $(0,0,0) = \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{\omega}$

$\alpha(1,2,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Poiché la soluzione del sistema è unica c'è un unico modo per scrivere il vettore nullo come comb. lineare di $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{\omega}$

(ciò non ci sorprende perché v_1, v_2 e ω sono 3 vettori linearmente indipendente)

- Qual'é lo spazio $L(S)$ generato da S?

Poiché S è LIN DIP (abbiamo dimostrato che v_3 è comb. lin di v_1 e v_2)

$$S = \langle v_1, v_2, \underset{\uparrow}{v_3} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

in realtà v_3 lo possiamo togliere propio perché è LIN DIP

Perciò lo spazio generato da S è

$L(S) = \langle a v_1 + b v_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \rangle$

che è ISOMORFO a $\mathbb{R}^2$ (STESSA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^2$)

Come si calcola il rango di una matrice (per il momento)

È il numero di pivot di una riduzione a scala della matrice stessa, dove per pivot si intende il primo elemento non nullo che si incontra su ogni riga (leggendola da sinistra)

es. $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$ → sono i pivot della matrice a scalini

Ma vedremo anche il metodo del minore fondamentale

RICORDA: Il teorema di Rouché-Capelli ci permette di stabilire se un sistema lineare ammette soluzioni:

se $\rho(A) < \rho(A|b)$ → sistema impossibile

se $\rho(A) = \rho(A|b) = n$ = numero di incognite → sistema ammette 1 sola soluzione

se $\rho(A) = \rho(A|b) < n$ → sistema ammette ∞ soluzioni che dipendono da $n - rK(A)$ parametri

Risoluzione di sistemi di eq. lineari (mediante riduzione a gradini)

1) $$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = -2 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa $(A|b)$ associata al sistema e la riduciamo a scala

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -\underbrace{\tfrac{2}{3}}R_1 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ -\frac{3}{7}R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} -2R_2 + R_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & 0 & -\frac{9}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{8}{7} \end{array}\right)$$

rango

la matrice completa ha 2 pivot perciò $\rho(A|b) = 2 = \rho(A)$ e poiché è pari al n° di incognite (erano 2, x e y)

Quindi per il th. Rouché-Capelli il sistema ammette un'unica soluzione

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -\frac{9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{9}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = -1 \\ x + y + z = -4 \\ 5x + 4y + 7z = -9 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa associata al sistema e la riduciamo a scala