56. Il normale orario di percorrenza di un treno, prevede una partenza da una località A alle ore 10.00, e l'arrivo ad una località B alle ore 12.00. È noto che esso parte sempre con 15 minuti di ritardo, e il tempo (aleatorio) T impiegato per andare da A a B ha la seguente distribuzione

$$f(t) = \begin{cases} \exp(2-t) & \text{per } t \geq 2 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove t è espresso in ore. Calcolare la probabilità p che il treno arrivi entro le ore 13.00.

Nome data

1. Un ladro sa che in una cassetta di sicurezza sono custoditi due anelli ciascuno dei quali può essere l'esemplare originale o una copia senza valore. Si supponga che siano ciascuna uguale a 1/3 le probabilità che entrambi gli anelli siano esemplari originali, che siano entrambi copie, che siano di tipo misto.
   Aperta la cassetta, il ladro prende un anello e si accorge che si tratta di un falso. Qual è la probabilità che l'altro anello sia falso?

2. Una variabile aleatoria X ha la seguente densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx + q & , \quad \text{per} \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   a) Sapendo che il valore atteso di $\mathrm{E}[X] = \frac{14}{9}$, determinare k e q.
   b) Calcolare la funzione di distribuzione di X.
   c) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $Y = 9X - 10$.

3. Enunciare le proprietà della funzione di distribuzione e dimostrarne una.

4. Il rischio quadratico medio e classificazione degli stimatori in base in esso.
   Sia $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un campione estratto da una popolazione avente genitrice bernoulliana di parametro p incognito. Considerati $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $S = \frac{X_1 + X_2}{2}$ come stimatori del valore atteso della popolazione, confrontarli in termini di rischio.

19. In una fase finale dei campionati del mondo, Italia e Francia si affrontano in uno scontro ad eliminazione diretta. Persistendo il risultato di parità fino alla fine del secondo tempo supplementare, le due squadre procedono alla routine dei calci di rigore. Sapendo che ogni giocatore francese ha probabilità $p_F = 0.8$ di segnare, mentre ogni giocatore italiano ha probabilità $p_I = 0.6$, calcolare la probabilità P che, dopo due tiri dal dischetto effettuati da ogni squadra, il risultato sia ancora di parità.

UNICO DATO FORNITO

$$X \sim N(2,4)$$

> NOTA: NON ERA FORNITA QUESTA ESPLICITAZIONE

$$N(2,4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 4}} e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$$

a) $P(0 < x \le 5) = P\left(0 < \frac{x-4}{\cancel{8}} \le \frac{5-4}{\cancel{8}}\right)$

$$= P\left(0 < \frac{x-2}{\cancel{4}} \le \frac{3}{\cancel{4}}\right) =$$

$$P(0 < x-2) + P(x-2 \le 3)$$
$$- P(0 < x-2)P(x-2 \le 3)$$

$$= P(2 < x) + P(x \le 5) -$$
$$P(2 < x)\, P(x \le 5)$$

$$= P(1-(x \le 2)) + P(x \le 5)$$

$$- P(1-(x \le 2))\, P(x \le 5)$$

FINE; IL RESTO SPIEGATO

ORALMENTE

b) $P(X=2 \mid 0<X\leq 5) =$

$$\frac{P(0<X\leq 5 \mid X=2)\,\underbrace{P(X=2)}_{0}}{P(0<X\leq 5)} = 0$$

VITALE

Sia X un v.a. discreta che assume i valori
$x = -4, -2, -1, 1, 2, 4$ con probabilità:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{|x|}{14} \quad \text{per } x = (-4, -2, -1, 1, 2, 4),$$

Calcolare la distribuzione di probabilità
di $Y = \log_2 |X|$.

$\cancel{\mathbb{P}(Y = x) = \log_2 |x|}$

μ σ^2

ORO

Sia $X \sim \mathcal{N}(1,4)$. Si determini

(i) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3)$

$X = 1$

(ii) $\mathbb{P}(X = 1 \mid 0 \leq X \leq 3) =$

$E = \cancel{(E \cap F) \,\dot\cup\, (E \cap F^c)}$ F $\dot\cup$ G

$\mathbb{P}(F) > 0$

$\mathbb{P}(G) > 0$

$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$

$\Omega = \dot\bigcup_{i=1}^{m} E_i$

$E_i \cap E_j = \emptyset \quad i \neq j$

$\mathbb{P}(E_i) > 0, \quad i = \{1, 2, \ldots, m\}$

$A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega)$$

$$= \mathbb{P}\left(A \cap \left(\dot\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\dot\bigcup_{i=1}^{m} (A \cap E_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\mathbb{P}(A \cap E_i)}{\mathbb{P}(E_i)} \cdot \mathbb{P}(E_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A \mid E_i) \cdot \mathbb{P}(E_i)$$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $\quad y$

$d(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ funzione di distanza

$$d_r = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x)^r}$$

$$\xi_r(y) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\ d_r(x, y)$$

CAROFANO

$\alpha > 0$, X è una v.a. continua con

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\alpha}, & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}}$$

Si determini, se esistenti:

$K \in \mathbb{N}$, $\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$

$$f_X(x) = \frac{d \cdot F_X(x)}{dx} \longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} +\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X^k] = \phi_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha \int_1^{+\infty} x^k \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} \, dx$$

$$= \alpha \int_1^{\infty} x^{k-\alpha-1} \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha}\Big|_1^{\infty}$$

METODO DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un c.c.s. con funzione di densità di probabilità congiunta $f_{\underline{X}}(\underline{y} \mid \theta)$ dove $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sono i possibili valori che possono assumere le n° v.a. del c.c.s. e Θ è il parametro incognito da stimare della genitrice della distribuzione del c.c.s.

Il MMV enuncia che la funzione di densità, anche detta di verosimiglianza $f_{\underline{X}}(\underline{y} \mid \theta)$ ~~...~~ lo stimatore di max. verosimiglianza è quello stimatore $\hat{\Theta}_{MV}$ che massimizza la funzione f_X (o $\log_e(f_X)$).

DETTA FUNZIONE DI LOG-VEROSIMIGLIANZA

$$\hat{\Theta}_{MV} := \cancel{\frac{d}{d\theta_0}\left(\log_e\left(f_{\underline{X}}(\underline{y} \mid \theta)\right)\right)}$$

$$\operatorname{argmax} \log_e \boxed{f_{\underline{X}}(\theta ; \underline{x})}$$

$$\theta \in H$$

MANNO ORDCE

Il metodo dei momenti

$\underline{\theta} \in \Theta$

$\mu'_h = f(\theta_1, \dots, \theta_N)$

q momenti

$\mu'_1 = H_1(\theta_1, \dots, \theta_R)$

$\mu'_2 = H_2(\theta_1, \dots, \theta_R)$

$\vdots$

$\mu'_q = H_q(\theta_1, \dots, \theta_R)$

$\theta_1 = G_1(\mu'_1, \dots, \mu_q)$

$\theta_2 = G_2(\mu'_1, \dots, \mu_q)$

$\vdots$

$\theta_R = G_R(\mu' \dots \mu_q)$

$$\boxed{\hat{\theta}_1 = g_1(\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}_q)}$$

$\hat{\mu}'_1 = \cancel{\frac{X_1 + X_2 \dots X_n}{n}}$

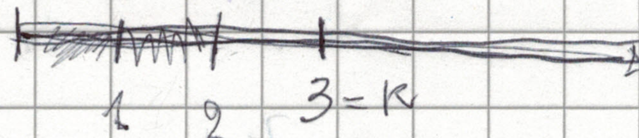
$\cancel{E(X^3)}$

(2)

Collegamento tra legge ~~esponenziale~~ esponenziale e legge geometrica

$\alpha > 0$

$X \sim Exp(\alpha)$ a.c.



$Y = \lfloor X \rfloor + 1$

$y = k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = k) =$$

$$= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k-1) =$$

$$= \mathbb{P}(k-1 < X \leq k) = \int_{k-1}^{k} f_X(x)\, dx$$

$$= F_X(k) - F_X(k-1)$$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) =$$

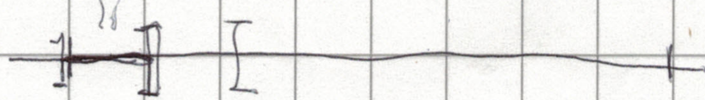
③

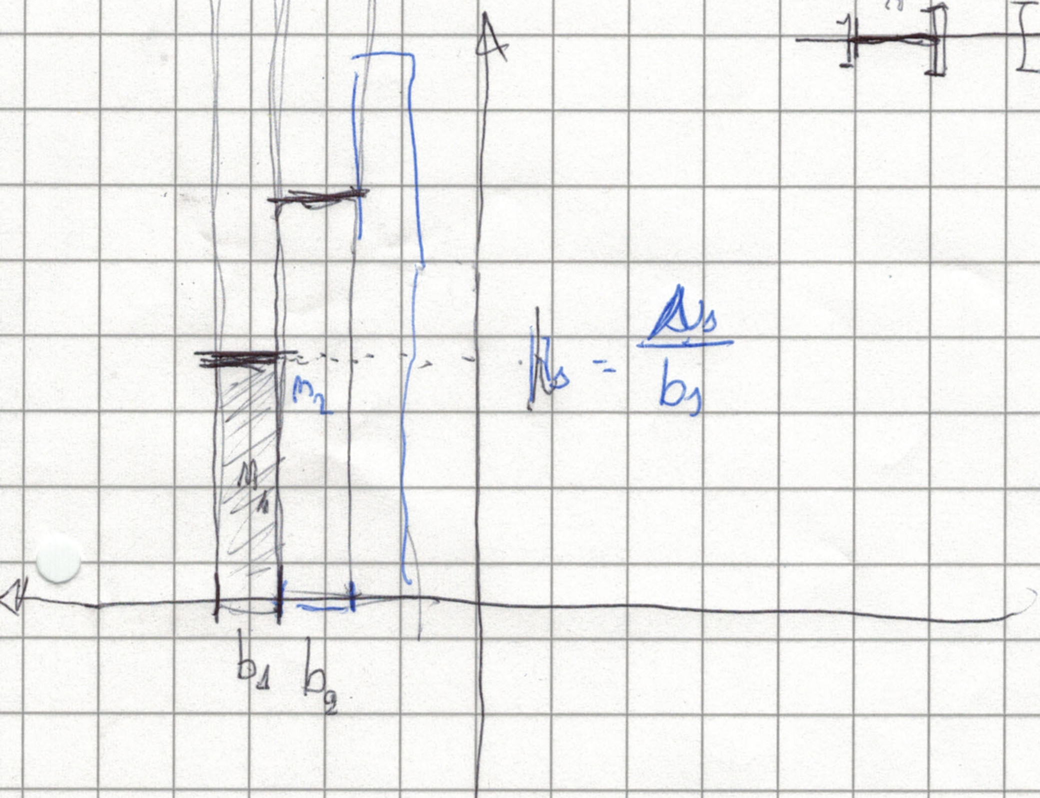
MANNO

Istogramme

$y_1, y_2, \ldots, y_N$

	n
C_1	n_1
C_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
C_K	n_K





$$h_j = \frac{\Delta_j}{b_j}$$

$X \sim Esp(1/2)$. Posto $Y = (X+2)^2$,

determinare

$$\mathbb{E}(Y) = \text{[redacted]}$$

		Y		
		0	1	2
X	0	1/18	1/12	1/4
	1	1/12	1/18	1/12
	2	1/4	1/12	1/18

PROB. DI UN ev. Condizionato

Calcolare

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 1) \rightarrow P(A|B$$

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{X=1\} \cap \Omega)$$

$$= \mathbb{P}\left[\{X=1\} \cap \left[\{Y=0\} \cup \{Y=1\} \cup \{Y=2\}\right]\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\{X=1\} \cap \{Y=0\} \cup \{X=1\} \cap \{Y=1\} \cup \{X=1\} \cap \{Y=2\}\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\{X=1\} \cap \{Y=0\}\right] + \mathbb{P}\left[\{X=1\} \cap \{Y=1\}\right] + \mathbb{P}\left[\{X=1\} \cap \{Y=2\}\right]$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$$

ESERCIZIO SCRITTO 1

MANNO

Sia X una v.a. discreta con spettro $S = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$. Inoltre, $x \in S$, $\mathbb{P}(X = x) = c|x|$.

Si determini

a) la costante c di normalizzazione,

b) la funzione di distribuzione di $Y = \log_2 |X|$.

a) Noi sappiamo che la S è lo spettro della funzione allora sappiamo che $\sum_{s}^{m} (P(X = x)) = 1$, $x \in S$

ALLORA

$$1 = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=-4) =$$

= Siccome la $P(X=1) = P(X=-1)$ perché x è in valore assoluto ovvero $c|-1| = c \cdot |1| =$

ALLORA LE PROBABILITA' SONO UGUALI QUINDI

$$1 = 2 \cdot \mathbb{P}(x=1) + 2\,\mathbb{P}(x=2) + 2 \cdot \mathbb{P}(x=4)$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \cdot c \cdot |1| + 2 \cdot c \cdot |2| + 2 \cdot c \cdot |4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \cdot c\,(1+2+4) \Rightarrow 1 = 2 \cdot c \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{14}$$

b) $\mathbb{P}(x = x) = \frac{1}{14}|x| \qquad x \in S$

DETERMINIAMO LA CORR DELLA y in funzione della X

Abbiamo quindi

$y = 0$ quando X assume valori 1 e -1 ovvero

$y=0 \Rightarrow \log_2 |1| = 0 = \log_2 |-1|$

$y = 1$ quando x assume valori 2 e -2 ovvero

$y=1 \Rightarrow \log_2 |2| = 1 = \log_2 |-2|$

$y = 2$ quando X assume valori $X = 4$ e -4

$y = 2 \qquad \log_2 |4| = 2 = \log_2 |-4|$

Quindi abbiamo lo spettro di y ovvero

$S_y \in (0, 1, 2)$ col calcolo la probabilità in funzione della probabilità di X

$$\mathbb{P}(y=0) = \mathbb{P}(x=1) + \mathbb{P}(x=-1) =$$

$$= \frac{|1|}{14} + \frac{|1|}{14} = \frac{1}{7}$$

$$\mathbb{P}(y=1) = \mathbb{P}(x=2) + \mathbb{P}(x=-2) =$$

$$= \frac{|2|}{14} + \frac{|-2|}{14} = \frac{2}{7}$$

$$\mathbb{P}(y=2) = \frac{|4|}{14} + \frac{|-4|}{14} = \frac{4}{7}$$

Possiamo quindi dire che

$$P(y=y) = \left(\frac{2^y}{7}\right) \quad \text{con } y \in (0,1,2)$$

NANNO ORDCE (1)

Il metodo dei momenti

$\underline{\Theta} \in \Theta$

$$\mu'_h = h(\theta_1, \dots, \theta_N)$$

$\boxed{\hat{\theta}_1 = g_1(\hat{\mu}'_1 \dots \hat{\mu}'_q)}$

q momenti

$$\mu'_1 = H_1(\theta_1, \dots, \theta_R)$$

$$\mu'_2 = H_2(\theta_1, \dots, \theta_R)$$

$$\vdots$$

$$\mu'_q = H_q(\theta_1, \dots, \theta_R)$$

$$\hat{\mu}'_1 = \frac{1}{n}\cancel{X_1 + X_2 \dots X}$$

$\cancel{E(X^3)}$

$$\theta_1 = G_1(\mu'_1 \dots \mu_q)$$

$$\theta_2 = G_2(\mu'_1 \dots \mu_q)$$

$$\vdots$$

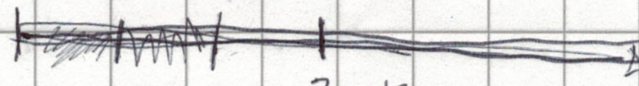
$$\theta_R = G_R(\mu' \dots \mu_q)$$

Collegamento tra legge ~~esponenziale~~ esponenziale e legge geometrica

$\alpha > 0$

$X \sim Exp(\alpha)$

a.c.



$Y = \lfloor X \rfloor + 1$

$y = k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = k) =$$

$$= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k-1) =$$

$$= \mathbb{P}(k-1 < X \leq k) = \int_{k-1}^{k} f_X(x)\, dx$$

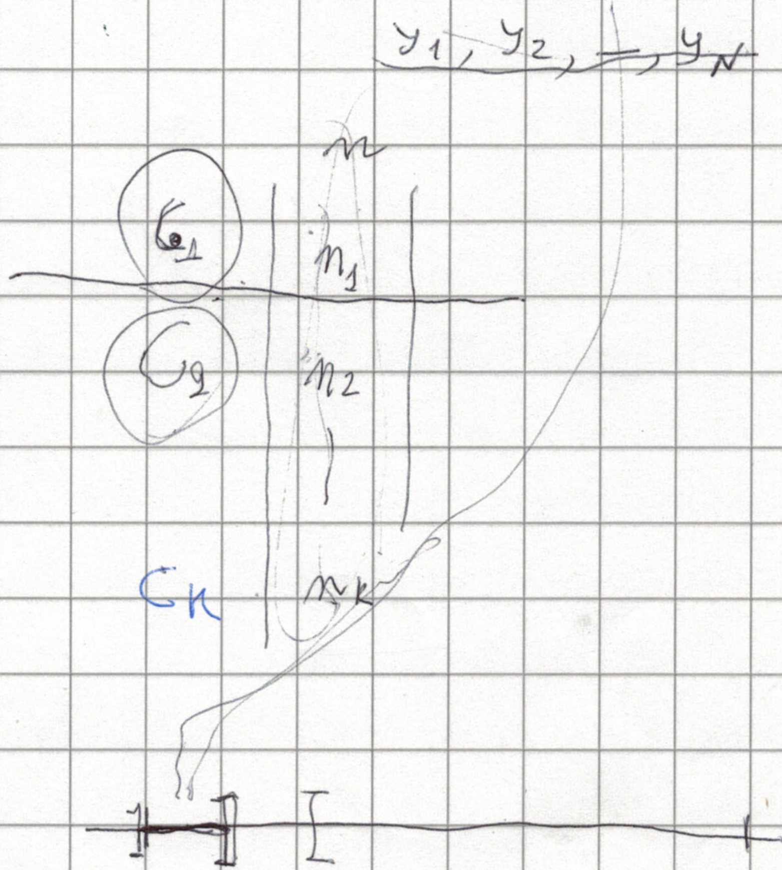
$$= F_X(k) - F_X(k-1)$$

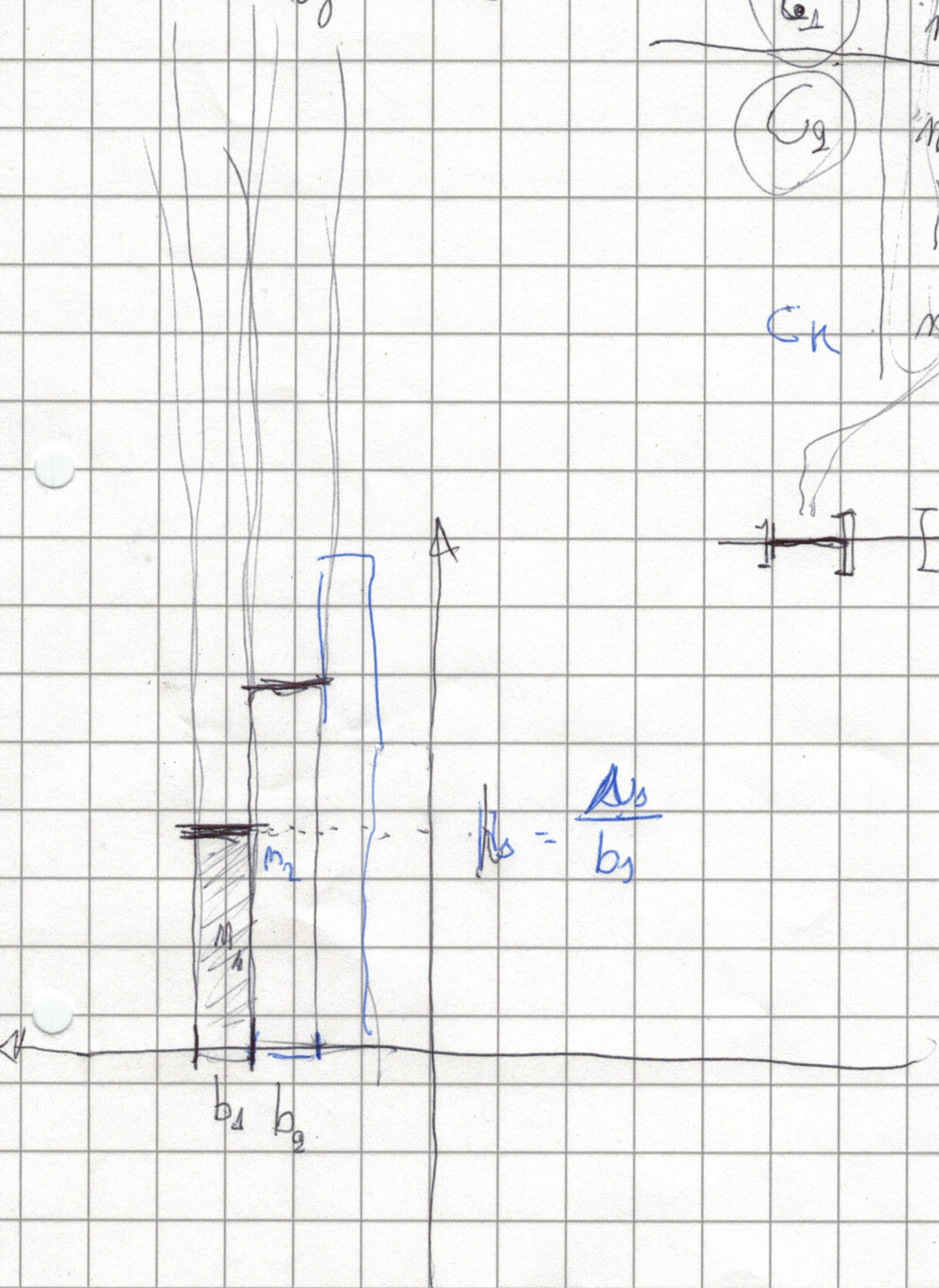
$\mathbb{P}(a < X \leq b) =$

③ MANNO

$y_1, y_2, \ldots, y_N$

Istogramma





TRACCIA:
Considerando Z una Normale standardizzata, calcolare “a” sapendo che P(-a, Z, a) = 0,95

SOLUZIONE:

Sono andata a vedere nella tabella il valore corrispondente a 0,95, era tipo 0,82 e poi ho fatto 0,82 - (1-0,82) e ho ottenuto il valore,
sarebbe la formuletta di De Moivre La Place

PROVA SCRITTA + DOMANDE PROVA ORALE CPS 12/01/2023

1 - Sia X una variabile aleatoria distribuita secondo legge uniforme di parametri (0,1)
Sia Y una variabile aleatoria continua tale Y=X+2X^2, si calcoli il valore E[Y]

[RISULTATO = 7/6]

PROVA ORALE

1 - Definizione di varianza e come si calcola la somma di varinza tra due variabili aleatorie [Var(X+Y)], e concetto di covarianza
2 - Disegnare il diagramma BoxPlot e spiegarne il significato
3 - Definzione e spiegazioni di indici di dispersione e indici di posizione
4 - Enunciato e dimostrazione di : -la funzione di distribuzione è non decrescente
-la funzione di distribuzione è continua a destra

GIORDANO

È dato un quadrato Q con lato $L \sim U(0,2)$

Posto $A = \text{Area}(Q)$ si determini

1) $\mathbb{P}(A \leq a)$ per $a \in \mathbb{R}$

2) $\mathbb{E}(A)$

1) SIA (X, Y) UNA COPPIA DI VARIABILI ALEATORIE AVENTI LA SEGUENTE DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

Y\X	1	2	3	4
1	0,1	0,15	0	0,25
2	0,1	0	0,1	0,1
3	0,05	0,05	0,1	0

(a) CALCOLARE LA MASSA MARGINALE DI X_1 E DI X_2

(b) VERIFICARE SE SONO INDIPENDENTI

(a) $x_1 = 0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,25$

$x_2 = 0,15 + 0 + 0,05 = 0,2$

2) SIA $X \sim \Pi(\lambda)$ CON $E[X] = 3$

(a) CALCOLARE $\mathbb{P}(X < 2{,}8 \mid X > 1{,}5)$

(b) $Y = (X-1)^2 \rightarrow$ CALCOLAE $E[Y]$

Luglio 2023 1)

$E[X] = \lambda$

$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$

$X \sim \pi(\lambda)$

$Y = 3X + \lambda \rightarrow E[Y^2] = ?$

$E[Y] = E[3X + \lambda] = E[3X] + E[\lambda] = 3E[X] + \lambda =$

$= 3\lambda + \lambda = 4\lambda$

$E[Y^2] = E[9X^2 + \lambda^2 + 6X\lambda] = 9E[X^2] + \lambda^2 + 6\lambda E[X] =$

$= 9\lambda^2 + 9\lambda + \lambda^2 + 6\lambda^2 = 16\lambda^2 + 9\lambda$

Y \ X	0	1	2	TOT
0	0.1	0.4	0.1	0.6
1	0.2	0.2	0	0.4
TOT	0.3	0.6	0.1	1

1) Distrib. condizionata $\mathbb{P}(X = x \mid Y = 1)$
2) Distr. $T = X \cdot Y$
3) $E[T]$

1) $\mathbb{P}(X = x \mid Y = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = 1$

$\mathbb{P}(X = x \cap Y = 1) = 0.2 + 0.2 = 0.4$

$\mathbb{P}(Y = 1) = 0.4$

2) $T = X \cdot Y$ $F_T(X \cdot Y) = \mathbb{P}(\cancel{X} \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y) = 1\ ?$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=0}^{2} p(x_i) = 1$

$\mathbb{P}(Y \leq y) = \sum_{i=0}^{1} p(y_i) = 1$

3) $E[T] =$

$E[X] =$

$E[Y] =$

$E[T] = 0$

$\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2}$

3) $E[T] = E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

$E[X] = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot P(X = x_i) = 0 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$

$E[Y] = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot P(Y = y_i) = 0 + 1 \cdot 0.4 = 0.4$

$E[T] = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

$9x^2+1+18x$

$\cancel{D^2(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda}$

$E[X] = \lambda$

$E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$

$X \sim \pi(\lambda)$

$Y = 3x+1 \rightarrow E[Y]$

1

2

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.4	0.1
4	0.2	0.2	0

1. DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA $P(X=x \mid Y=1)$
2. DISTRIBUZIONE $T=XY$
3. $E[T]$

1) Sia (X, Y) una coppia di variabili aleatorie aventi la seguente distribuzione congiunta:

$p_{X_1,X_2}(0,0) = 0.5$; $p_{X_1,X_2}(0,1) = 0.16$; $p_{X_1,X_2}(1,0) = 0.2$; $p_{X_1,X_2}(1,1) = 0.14$.

a) Calcolare le masse di probabilità marginali di X_1 e X_2;
b) verificare se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

2) Sia $X \sim \Pi(\lambda)$, con $\mathbb{E}[X] = 2$.

a) Calcolare $\mathbb{P}(2X < 6 | 3X > 5)$;
b) Sia $Y = (X - 3)^2$, calcolare il valore medio di Y