(10) Sia V_4 uno spazio vettoriale 4-dimensionale. Stabilire, motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

10.1 • Esistono due sottospazi U e W entrambi di dimensione 3 che si intersecano in un sottospazio 1-dimensionale.

10.2 • Se U e W sono due sottospazi distinti e non banali di V_4, entrambi di dimensione pari, allora la loro somma è un sottospazio di V_4 di dimensione 3.

10.3 • Esistono due sottospazi non banali U e W di V_4, uno di dimensione pari e l'altro di dimensione dispari, la cui somma sia un sottospazio di dimensione 3.

Applicazione della formula di Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

10.1 RISPOSTA DA DARE : VERO

$$\dim(U+W) = 3 + 3 - 1 = 5$$

10.2 RISPOSTA DA DARE : FALSO

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W)$$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) =$ potrebbe essere nulla !!

10.3 RISPOSTA DA DARE : VERO

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$3 = 2 + 1 - \dim(U \cap W)$$

$$= 2 + 1 - 0$$

Es. numerico $U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

$W = \langle (0,0,1) \rangle$

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra

Prova Intercorso 02-05-2022

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ una base di V.

(1) È vero che l'insieme $S = \{\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3, \underline{e}_1 - \underline{e}_2 + \underline{e}_4, \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 + \underline{e}_4\}$ è linearmente indipendente?

(2) Determinare una base di V che contenga il vettore $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$.

• Il primo punto ci chiede di verificare se i vettori di S sono linearmente indipendenti

$\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$, $\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + \underline{e}_4$, $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 + \underline{e}_4$

(o per colonne, per il calcolo del rango è indifferente)

Consideriamo la matrice che ha per righe le coordinate del sistema di 3 vettori dati rispetto alla base canonico

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_1+R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -R_2+R_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è pari a 2 (e non 3!), perciò i vettori sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^4$, e quindi l'insieme S è linearmente dipendente.

• Il secondo punto ci chiede di determinare una base di V contenente il vettore $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$

ad esempio $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$

dove

$\underline{v}_1 = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$

$\underline{v}_2 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \longrightarrow$ non posso scegliere contemporaneamente $\underline{e}_1$ e $\underline{e}_3$ altrimenti $\underline{v}_1$ diventa lin. dip.

$\underline{v}_3 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$

$\underline{v}_4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$

Esercizio 2 (5 punti)

Sia $X = \{ax^{40} + bx^2 + ax + b \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

- Determinare un complemento ad X in $\mathbb{R}[x]$.
- Determinare due basi distinte per X.

- Per determinare un complemento a X in $\mathbb{R}[X]$ notiamo che

$$X = \{ax^{40} + bx^2 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(x^{40}+x) + b(x^2+1) : a, b \in \mathbb{R}\} \rightarrow$$ contiene le combinaz. lineari dei vettori $x^{40}+x$, x^2+1
$$= L(x^{40}+x, x^2+1)$$

NOTA: Ogni polinomio può essere sempre scritto come un vettore numerico

es.
$$x^{40}+x \longrightarrow (\overset{x^{40}}{1}, \overset{x^{39}}{0}, 0, \underset{\text{tutti zero}}{\dots}, \overset{x^2}{0}, \overset{x^1}{1}, \overset{x^0}{0})$$
$$x^2+1 \longrightarrow (0, 0, 0, \underset{\text{tutti zero}}{\dots}, 1, 0, 1)$$
$$1 \longrightarrow (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$$

Quello che dobbiamo fare è aggiungere i vettori della base canonica dello spazio dei polinomi fino a completarlo (facendo sempre attenzione che i vettori restino lin. indip. fra loro):

- "1" è un vettore della base canonica che non dipende linearmente da $x^{40}+x$ e x^2+1
  perciò posso aggiungerlo al complemento
- "x" stessa cosa si può dire di "x" che non dip. lin. da $\langle x^{40}+x, x^2+1, 1\rangle$ per cui può essere aggiunto al complemento

NOTA Non possiamo aggiungere al complemento "x^2" perché dipende da $\langle x^{40}+x, x^2+1, x, 1\rangle = \langle x^{40}, x^2, x, 1\rangle$

$\Rightarrow$ In definitiva il complemento è formato da tutti i vettori che abbiamo aggiunto: $\langle 1, x, x^3, x^4, x^5, \dots, x^{38}, x^{39}\rangle$

- Due basi sono ad es. $B' = \{x^{40} + x,\ x^2 + 1\}$

$B'' = \{x^{40} + x^2 + x + 1,\ x^2 + 1\}$

Esercizio 3   (3 punti)

Sia V_4 uno spazio vettoriale di dimensione 4. Esistono due sottospazi U e W di dimensione 3 (entrambi) che si intersecano in uno di dimensione 1?

È un'applicazione della formula di Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\overset{!}{=} 3 + 3 - 1$$

$$\overset{!}{=} 5$$

Esistono se la dimensione del sottospazio somma è pari a 5

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $V = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle$ uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $m = \dim(V)$. È possibile che risulti $n < m$? Nel caso fornire un esempio.

$n \rightarrow$ n° di generatori
$m \rightarrow$ dimensione dello sp. vettoriale

Non può risultare $n < m$ perché se la dimensione dello spazio è m, allora m è già il minimo numero di generatori possibili!

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $H = \langle (1,2,3),(1,2,4) \rangle$ e $K = \langle (0,0,1),(1,3,2) \rangle$. Trovare una base per $H \cap K$.

5) Sia $H = \langle (1,2,3),(1,2,4) \rangle$ e $K = \langle (0,0,1),(1,3,2) \rangle$

Trovare una base del sottospazio intersezione

• Per prima cosa calcoliamo una base di H e K

Se i vettori di H e K sono già lin. indipendenti, forniscono già una base.

Verifico se i vettori di H sono lin indip.

$$\alpha(1,2,3) + \beta(1,2,4) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \cancel{2\alpha + 2\beta = 0} \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \\ -3\beta + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

I vettori di H sono già lin. indipendenti e quindi sono una base per H

Stesse cose si può verificare per i vettori di K, che quindi a loro volta sono una base per K

• Per definizione di intersezione un qualsiasi vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $H \cap K$ se e solo se $\underline{v} \in H$ e $\underline{v} \in K$, cioè se il vettore $\underline{v}$ può essere espresso come comb. lineare dei vettori della base di H e come comb. lineare dei vettori della base di K

$\underline{v} = \alpha_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4)$ e $\underline{v} = \alpha_2(0,0,1) + \beta_2(1,3,2)$

→ impongo l'uguaglianza delle componenti del vettore $\underline{v}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \beta_2 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 = 3\beta_2 \\ 3\alpha_1 + 4\beta_1 = \alpha_2 + 2\beta_2 \end{cases} \rightarrow$$

devo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\beta_1 - 3\beta_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\beta_1 - \alpha_2 - 2\beta_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

sfruttiamo la matrice associata al sistema e la riduciamo a gradini per semplificare i calcoli

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2R_1+R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ R_3 \\ R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -3R_1+R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema quindi diventa

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \beta_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

β_1 è un parametro

Se

$$\underline{v} = \alpha_2(0,0,1) + \beta_2(1,3,2) = \beta_1(0,0,1) + 0(1,3,2)$$

risulta che

$$B_{H\cap K} = \{(0,0,1)\}$$

NOTA: Se scegliete

$$\underline{v} = \alpha_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4)$$ il risultato non cambia

risulta che

$$\underline{v} = -\beta_1(1,2,3) + \beta_1(1,2,4) = -(1,2,3) + (1,2,4)$$

$$\Rightarrow B_{H\cap K} = \{(0,0,1)\}$$

Lemma di Steinitz

Un sistema di generatori ha sempre un numero di elementi maggiore, o al più uguale, di un sistema di vettori linearmente indipendenti.

Base

L'insieme $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ è una base di uno sp. vettoriale V se

① $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ è un sistema di generatori per V

② i vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ sono lin. indip. tra loro

Una base è un INSIEME MASSIMALE di vettori linearmente indipendenti di V (cioè ogni insieme contenente più di n vettori di V è linearmente dipendente)

Esercizio 6 **(5 punti)**

Dimostrare che due basi hanno lo stesso numero di oggetti

Si vuole dimostrare che due basi distinte B e B' di uno stesso spazio vettoriale abbiano lo stesso numero di oggetti

DIM Siano $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_H\}$ e $B' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_K\}$ vogliamo dimostrare che $H = K$

Per assurdo $K > H$:

poichè per ipotesi i vettori della base B sono lin. indipendenti, i vettori di B' dovrebbero essere lin. dipendenti, ma ciò è assurdo perchè per ipotesi anche B' è una base.

Similmente se per assurdo $H > K$:

si arriva alla stessa contraddizione

$\Rightarrow$ Perciò necessariamente si dovrà avere $H = K$

Esercizio 7 **(3 punti)**

Dimostrare che la base di una somma diretta è l'unione delle base degli addendi.

Somma diretta $\oplus$

Uno spazio vettoriale V è somma diretta di due suoi sottospazi se e solo se la loro intersezione contiene ESCLUSIVAMENTE il vettore nullo e la loro somma coincide con l'intero spazio.

$V = S \oplus T \iff \begin{cases} S \cap T = \{0\} \\ S + T = V \end{cases}$ $\rightarrow$ condizione necessaria ma NON SUFFICIENTE

Sia V uno sp. vettoriale e siano S e T due suoi sottospazi

Supponiamo che $V = S \oplus T$, vogliamo dimostrare che se B' è una base di S e B'' è una base di T

allora $B = B' \cup B''$ è una base di V

DIM. Siano $B' = \{b_1', \dots, b_n'\}$ e $B'' = \{b_1'', \dots, b_k''\}$

1- Per prima cosa dobbiamo dimostrare che $B = B' \cup B''$ è un sistema di generatori di V, semplicemente facendo vedere che gli elementi di B possono essere scritti come combinazione lineare di quelli di B' e B''.

Se $v \in V$ allora $v = s + t$ con $s \in S$ e $t \in T$

(ciò deriva dalla definizione della somma di sottospazi)

perciò se $s = \lambda_1 b_1' + \dots + \lambda_n b_n'$ e $t = \mu_1 b_1'' + \dots + \mu_k b_k''$

v si ottiene come combinazione lin. di elementi di B' e B'':

$v = \lambda_1 b_1' + \dots + \lambda_n b_n' + \mu_1 b_1'' + \dots + \mu_k b_k''$

2- $B = B' \cup B''$ è quindi un insieme di generatori di V, per dimostrare che sia una base devo vedere se i suoi vettori sono lin. indip.

Sia $v = \lambda_1 b_1' + \dots + \lambda_n b_n' + \mu_1 b_1'' + \dots + \mu_k b_k'' = 0$

Poiché per ipotesi i b_i' e i b_j'' sono indipendenti, in quanto rispettivamente una base di S e di T, risulta che tutti i coeff. λ_i sono zero, così come i coeff. μ_j $\Rightarrow$ B è una base di V

Esercizio 4

Fissata la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$. Provare che $V = \{X \in \mathbb{R}_{2,2} \mid AX = XA\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{2,2}$.

Determinare un supplementare W di V in $\mathbb{R}_{2,2}$.

V è l'insieme delle matrici quadrate 2x2 tali che la generica matrice X_{2x2} commuta con la matrice A.
Per provare che V è un sottospazio vettoriale, si va a dimostrare che V è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari (appartenenza del vett. nullo banale):

- per dimostrare la chiusura rispetto alla somma si considerano 2 generiche matrici X_1 e X_2 appartenenti a V, cioè che commutano con A

$$A(X_1+X_2) = \underbrace{AX_1 + AX_2 = X_1A + X_2A}_{\text{per ipotesi appartengono a V, quindi commutano con A}} = (X_1+X_2)A$$

perciò anche la matrice "somma" X_1+X_2 commuta con A e appartiene a V

- per dimostrare la chiusura rispetto al prodotto si considera una generica matrice X_1 appartenente a V, cioè che commuta con A e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda X_1) = \lambda AX_1 = \lambda X_1A = (\lambda X_1)A$$

perciò anche la matrice "prodotto con uno scalare" commuta con A e appartiene a V

- per determinare un sottospazio W supplementare a V in $\mathbb{R}_{2x2}$ bisogna ricordare che i due sottospazi sono supplementari solo se $V+W = \mathbb{R}_{2x2}$ e se $V \cap W = \{0\}$

Per prima cosa si deve calcolare la dimensione e una base di V; per fare ciò scriviamo esplicitamente le soluzioni di V imponendo la condizione $XA = AX$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ chiaramente si devono svolgere due prodotti righe per colonne

$$XA = \begin{pmatrix} a0 + b1 & a1 + b1 \\ c0 + d1 & c1 + d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0a + 1c & 0b + 1d \\ 1a + 1c & 1b + 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$XA = AX = \begin{cases} c = b \\ a+b = d \\ d = a+c \\ c+d = b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = b \\ d = a+b \end{cases} \Rightarrow$$ gli elementi di V sono del tipo $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

ovvero $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} b \Rightarrow$ V ha dimensione 2 e una sua base è data proprio da queste due matrici

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Poiché V ha dimensione 2, il suo sottospazio supplementare W dovrà avere dimensione 2, in quanto $\mathbb{R}_{2 \times 2}$ ha dimensione 4

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\rightarrow$ sfrutto la base canonica per scegliere le due matrici di B_W che siano indipendenti da quelle di B_V

Verifica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ matrice a gradini con 4 pivot $\Rightarrow$ rango max $\Rightarrow$ vettori lin. indip.