COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare i valori reali del parametro λ per cui il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +\lambda x_3 & = & -1. \end{cases}$$

2. Cosa vuol dire che uno spazio vettoriale V è finitamente generato su un campo K? Cosa è la dimensione di V? Nell'ipotesi che V abbia dimensione 4, rispondere alle seguenti domande:

(a) È vero che un qualsiasi insieme di 5 vettori di V è linearmente *dipendente*? ○ Sì ○ No Perché?

(b) È vero che un qualsiasi insieme di 2 vettori di V è linearm. *indipendente*? ○ Sì ○ No Perché?

3. Nello spazio vettoriale dei vettori liberi del piano della geometria elementare, si considerino due vettori u_1, u_2 linearmente indipendenti.

(i) È vero che i vettori u_1 e u_2 non sono paralleli? ○ Sì ○ No Perché?

(ii) Posto $w = 4u_2 + 7u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente? ○ Sì ○ No Perché?

4. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi vettoriali $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ e $Z = \mathcal{L}((1,1,1,1),(0,1,1,0))$.

(i) Dimostrare che $Z \subset W$.

(ii) Determinare una base di W e una base di Z.

(iii) Dire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $Ker(f) = Z$ e $Im(f) = W$.

5. Siano V uno spazio vettoriale reale, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ un suo riferimento ed f l'endomorfismo di V tale che $f(v_1) = v_1 - v_2 + v_3$, $f(v_2) = 2v_2 + v_3$, $f(v_3) = v_2 - v_3$. Scrivere la matrice A associata a f nel riferimento $\mathcal{B}$ e dire se f è iniettiva.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare autovalori ed autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la retta r per i punti $A(3,-2)$ e $B(2,-4)$ e calcolare la distanza tra r e la retta $s : \begin{cases} x &= & 2+t \\ y &= & -3+2t \end{cases}$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano date le rette $r : \begin{cases} x-y+z &= & 0 \\ x+y-2z &= & 1 \end{cases}$ e $s : (x,y,z) = (2,2,1) + t(1,1,1)$.

(i) Determinare il piano ortogonale a r e passante per il punto medio del segmento di estremi $A(1,2,3)$ e $B(-1,2,1)$.

(ii) Determinare un piano che contenga s e che sia parallelo alla retta r.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 15 febbraio 2017

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Cosa vuol dire che un insieme di vettori $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di uno spazio vettoriale V su un campo K è un sistema di generatori di V? Rispondere anche alle seguenti domande:
(a) È vero che $\{(1,0,2),(1,1,1)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$? ∘ Sì ∘ No Perché?
(b) Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$? (i) $\{(1,1),(2,2)\}$; (ii) $\{(1,1),(0,1),(2,2)\}$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali? Perché?
$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = y + z = 0\}$;
$Y = \{\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + (1, -1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;
$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $f((1, 0, 0)) = (2, 1)$, $f((0, 1, 0)) = (1, 1)$, $f((0, 0, 1)) = (1, 1)$.

(i) Determinare la matrice associata a f nei riferimenti $\mathcal{B} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 2))$ di $\mathbb{R}^2$.
(ii) Dire se f è iniettiva e se f è suriettiva.
(iii) È vero che il vettore $(1, -1, 0)$ appartiene al nucleo di f? Sì $\circ$ No Perché?

5. Dire cosa sono autovettori e autovalori di un endomorfismo $f : V \to V$.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare autovalori ed autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare in forma parametrica e in forma cartesiana non parametrica la retta r con vettore direzionale $v(3,-4)$ e passante per il punto $A(-2,1)$. Determinare un punto che abbia distanza 2 da r.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la rette $r: \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x-y-2z &= 1 \end{cases}$ e il piano $\alpha : 2x-y+z+3=0$.

(i) Determinare una delle infinite rette parallele al piano α e incidenti r.

(ii) Determinare *una* retta ortogonale al piano α e sghemba con la retta r.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 26 giugno 2017

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare una base del sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(i) Determinare una base del sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}(e_1 + e_2, e_e + e_3, e_1 - e_3)$.

(ii) È vero che i sottospazi $X = \mathbf{L}(2e_1 + e_4, e_2 - e_1)$ e $Y = \mathbf{L}(e_1 + e_4 + e_2, 2e_2 + e_4)$ sono uguali?

3. Completare in una base quelli tra i seguenti sottoinsiemi di vettori che risultano essere linearmente indipendenti:

$S = \{(1, -2, 2), (2, 0, 1), (1, 2, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

$T = \{1 + x, x - x^2 - 2x^3\} \subseteq \mathbb{R}^3[x]$;

$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((x, y, z, t)) = (x+y-2z+t, 2x-y-z, x-2y+z-t)$.

(i) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}((2, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 1))$, determinare $T(W)$.

5. Dire cosa è il rango di una matrice su un campo ed esibire una matrice reale di tipo 3×4 che abbia rango 2.

6. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

(i) Cosa sono autovettori e autovalori di T?
(ii) Determinare autovalori e autospazi di T.
(iii) Se T è diagonalizzabile, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale,

(i) rappresentare due rette distinte che siano tra loro parallele;

(ii) determinare una circonferenza di raggio 2 che sia tangente alla retta $r : -x + 2y + 3 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la rette $r : \begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= -1 \end{cases}$ e il piano $\alpha : x - 2y + 2z - 3 = 0$.

(i) Determinare la distanza tra r e α.

(ii) Determinare *una* retta parallela al piano α e incidente alla retta r.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare una base del sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0. \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(i) Determinare una base del sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}(e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 - e_2)$.

(ii) È vero che i sottospazi $X = \mathbf{L}(2e_1 + e_4, e_2 - e_1)$ e $Y = \mathbf{L}(e_1 + e_4 + e_2, 2e_2 + e_4)$ sono uguali?

3. Completare in una base quelli tra i seguenti sottoinsiemi di vettori che risultano essere linearmente indipendenti:

$S = \{(1, -2, 2), (2, 0, 1), (1, 2, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

$T = \{1 + x, x - x^2 - 2x^3\} \subseteq \mathbb{R}^3[x]$;

$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((x, y, z, t)) = (x+y-2z+t, 2x-y-z, x-2y+z-t)$.

(i) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}((2, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 1))$, determinare $T(W)$.

5. Dire cosa è il rango di una matrice su un campo ed esibire una matrice reale di tipo 4×3 che abbia rango 2.

6. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) Cosa sono autovettori e autovalori di T?
(ii) Determinare autovalori e autospazi di T.
(iii) Se T è diagonalizzabile, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale,

(i) rappresentare due rette distinte che siano tra loro parallele;

(ii) determinare una circonferenza di raggio 2 che sia tangente alla retta $r : 2x - y + 3 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la rette $r : \begin{cases} x - 2y + z & = & 1 \\ 2x - y + 2z & = & -1 \end{cases}$ e il piano $\alpha : x - 2y + 2z - 3 = 0$.

(i) Determinare la distanza tra r e α.

(ii) Determinare *una* retta parallela al piano α e incidente alla retta r.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Dire, giustificando la risposta, se il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$ è compatibile o incompatibile e calcolarne l'insieme delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & 5x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un insieme di vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Esibire un insieme di tre vettori di $\mathbb{R}^4$ che sia linearmente indipendente.

3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 1)$, $u_3 = (3, 1, 0, 3)$.

(i) Determinare la dimensione e una base di U.

(ii) Si dica per quale valore del parametro reale t il vettore $v = (t, 1 + t, 1, t)$ appartiene a U.

4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((1, 1, 0, 0)) = (1, 2, 0)$, $T((0, 1, 1, 0)) = (0, 1, -1)$, $T((0, 0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$, $T((0, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0)$.

(i) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(T)$ e una base di $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Scrivere la matrice associata a T nei riferimenti canonici di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

5. Verificare che la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ è invertibile e determinare la sua inversa.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T.

7. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale nel piano della geometria elementare, si consideri la retta $r : 3x + 2y - 3 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $P(1, 1)$.

(ii) Determinare la distanza tra la retta r e la retta $s : -3x - 2y + 4 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri il piano $\pi : 2x - y + 3z - 3 = 0$.

(i) Determinare *un* piano ortogonale a π e passante per il punto $A(1, 1, -1)$.

(ii) Determinare *una* retta r parallela al piano π e passante per il punto $B(1, -1, 0)$. È vero che r è contenuta in π?

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 13 ottobre 2017

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Se il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$ è compatibile, calcolarne l'insieme delle soluzioni con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & & = & 2 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa è un sistema i generatori di V? Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$?

$S = \{(2,1),(-2,-1)\}$, $T = \{(1,1),(0,0),(2,2)\}$, $X = \{(1,1),(0,0),(-1,1)\}$.

3. Determinare una base e la dimensione per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ che risulta essere un sottospazio vettoriale.

$S = \{\alpha(1,-2,1,0) + \beta(0,2,1,1) + (-1,1,1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$T = \{(a, ab, b, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = c + d = 0\}$

$U = \{\alpha(1,-2,1,0) + \beta(0,2,1,1) + \gamma(1,1,2,1) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $T(x, y, z) = (2y - z, x + y - z, x - y, x + y)$.

(i) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(T)$ e una base di $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Scrivere la matrice associata a T nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e nel riferimento di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B}' = ((1,0,1,0), (0,1,1,0), (1,0,0,0), (0,0,1,1))$.

5. Per quali valori reali del parametro t la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T.

7. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale nel piano della geometria elementare, si consideri la retta $r : x + 2y - 2 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $P(1, -1)$.

(ii) Determinare la distanza tra la retta r e la retta $s : -3x - 2y + 4 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri il piano $\pi : 2x - y + 3z - 3 = 0$ e il punto $A(1, 1, -1)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a π e passante per A.

(ii) Determinare il piano parallelo al piano π e passante per A.

(iii) Determinare la retta parallela sia a π sia al piano $\alpha : x + y - 2z + 2 = 0$ e passante per A.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 4 incognite sul campo dei numeri reali

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -2 \end{cases}.$$

2. Cosa è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V su un campo K? Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$?

$S_1 = \{(1,2,-1),(1,0,-2),(0,2,1)\}$

$S_2 = \{(1,1,1),(0,1,2),(0,0,0),(0,1,1)\}$

$S_3 = \{(1,-1,1),(0,1,2),(-1,2,1),(0,0,0)\}$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,-1,0,0))$.

(i) Determinare una base di W.

(ii) Il vettore $(2,-1,1,1)$ appartiene a W? ∘ Si ∘ No Perché?

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x,y)) = (2x-y, 2x+y, 4x+y)$.

(i) Determinare una base di $Ker\ T$ e una base di $Im\ T$ e dire se T è iniettiva e suriettiva.

(ii) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Dato un endomorfismo $T : V \to V$ di uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è un autovettore di T? È vero che un autovettore di T è autovettore della funzione composta $T \circ T$?
○ Si ○ No Perché?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T.

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,2)$ e $B(-1,3)$.

(i) Determinare la retta passante per A e B.
(ii) Determinare una retta ortogonale al segmento AB.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $s : \begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ x + y + z & = & -1 \end{cases}$ e $r := (0,0,1) + (1,1,0)t$.

(a) Le rette s ed r sono sghembe? ◦ Si ◦ No Perché?
(b) Determinare la comune perpendicolare a s ed r.
(c) Determinare un piano parallelo sia a r sia a s.

GEOMETRIA Napoli, 26 febbraio 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

◯ Gr. 1 - R. Trombetti (A-G) ◯ Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Si consideri il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$, al variare del parametro reale λ:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +\lambda x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +\lambda x_2 & +3x_3 & = & -1 \end{cases} .$$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, calcolarne le soluzioni quando $\lambda = 1$.

(ii) Esiste un valore di λ per cui il sistema Σ_λ è incompatibile? ◦ Sì ◦ No Perché?

2. Sia V uno spazio vettoriale V su un campo K e $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un insieme di t vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Quale dei seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente?

$S_1 = \{(1, 2, -1), (1, 0, -2), (0, 2, 1)\}$
$S_2 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$
$S_3 = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2)\}$

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3).

(i) Esibire una base di V che contenga i vettori $e_1 - e_3$ e $e_1 + 2e_3$.

(ii) Esibire un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2.

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x, y, z, t)) = (2x + y + t, 2x + z + t, z - y - t)$.

(i) Determinare una base di $Ker\ T$ e una base di $Im\ T$ e dire se T è iniettiva e suriettiva.

(ii) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Quale matrice ha rango 0?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano della geometria elementare, si considerino il punto $A(-2,3)$ e la retta $r : 2x - 3y + 2 = 0$.

(i) Determinare la retta passante per A e parallela a r.
(ii) Determinare un punto che abbia distanza 2 da r.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $r : \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+2z = 0 \end{cases}$ e il piano $\alpha : 2x + 2y - z + 2 = 0$.

(a) La retta r e il piano α sono paralleli? ○ Si ○ No Perché?
(b) Determinare la distanza tra r e α.
(c) Determinare un piano ortogonale a α.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 25 giugno 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Considerato il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -1 \end{cases},$$

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, calcolarne l'insieme delle soluzioni;

(ii) è vero che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ○ Sì ○ No Perché?

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa è un sistema di generatori di V?

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$ che sia un sottospazio vettoriale:
$X = \{\alpha(2,1,0,3,3) + \beta(0,1,2,5,5) + \gamma(-1,0,1,1,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
$Y = \{(a+b, 2b+a-2, b-a+2, a, b) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x,y,z,t)) = (2x-y+t, x+3z+t, x-y-3z)$.

(i) T è iniettiva? È suriettiva?

(ii) Determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1), (0,1,1), (0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Spiegare cosa è un autovalore di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V su un campo K.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino le rette $r : -2x + y + 5 = 0$ e $s : x - 2y - 4 = 0$.

(i) Le rette r e s sono parallele? ○ Si ○ No Perché?

(ii) Determinare una retta che sia incidente r e ortogonale a s.

8. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano α : $2x - y + z - 3 = 0$ e la retta $r : \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & +2z & = & -1 \\ x & -2y & -z & = & 2 \end{array} \right.$. Rappresentare

(i) una retta s parallela a r e contenuta in α, se esiste;

(ii) la retta ortogonale ad α e passante per l'origine del riferimento,

(iii) la distanza tra α ed r.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 19 luglio 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x_1 & & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 1. \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa vuol dire che un insieme S di vettori di V è linearmente indipendente? Per quali valori del parametro reale α l'insieme di vettori $\{(\alpha, 2, 1), (0, 1, \alpha), (0, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente?

3. Completare in una base di $\mathbb{R}^4$ ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che sia linearmente indipendente:
$S = \{(2, 1, 0, 3), (0, 1, 2, 5), (-1, 0, 1, 1)\}$
$T = \{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, -1)\}$.

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T((x, y, z)) = (x + z, x + y - z, 2x + y, y - 2z)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T;

(ii) determinare la matrice associata a T fissati il riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e il riferimento $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Esibire un esempio di matrice 3×3 che abbia rango 2.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(2,3)$ e $B(1,-2)$.

(i) Determinare la retta passante per A e B.

(ii) Determinare una retta ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB}$ e che abbia distanza 1 dal punto A.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette s : $\begin{cases} x-y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$ e $r := (0,1,1)+(1,1,0)t$.

(a) Le rette s ed r sono sghembe? ○ Si ○ No Perché?

(b) Determinare una retta ortogonale sia a s sia a r.

(c) Determinare un piano parallelo sia a r sia a s.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 12 settembre 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Cosa vuole dire che di V è finitamente generato? Cosa è la dimensione di V?

3. Esibire un sottospazio vettoriale U di dimensione 2 e un sottospazio vettoriale W di dimensione 3 dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Può accadere che si abbia $U \cap W = \{\underline{0}\}$? ◦ Sì ◦ No Perché?

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T((x, y, z)) = (x + z, -x + y + z, y + 2z, -2x + y)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T;

(ii) determinare la matrice associata a T fissati il riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e il riferimento $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo K è invertibile? La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile? ○ Sì ○ No Perché?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si consideri la retta $r : 3x - 4y + 5 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $A(1, 1)$.

(ii) Determinare la distanza tra r e il punto $B(2, -1)$.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino il piano α : $2x - y + z - 2 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

(a) Rappresentare la retta parallela a r e passante per il punto $A(1, -2, 1)$.

(b) Le retta r e il piano α sono ortogonali? ○ Si ○ No Perché?

(c) Determinare una retta contenuta in α che sia ortogonale a r.

GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 11 ottobre 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo in 5 variabili su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & & = & 0 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa è un sottospazio vettoriale di V? Esibire un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$.

3. Completare in una base di $\mathbb{R}^4$ ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ che risulta essere linearmente indipendente.

$X = \{(1, -2, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (3, 1, 2, 1)\}$
$Y = \{(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\}$
$Z = \{(0, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 0)\}$

4. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Si consideri l'applicazione Data $T : V \to \mathbb{R}^4$ tale che $T(u_1) = (1, 0, -1, 1)$, $T(u_2) = (1, 1, -2, 1)$ e $T(u_3) = (0, 1, -1, 0)$.

(i) Determinare nucleo e immagine di T.

(ii) Determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(4,3)$ e $B(2,1)$.

(i) Rappresentare la retta passante per A e B.

(ii) Determinare un punto C che abbia distanza 2 dalla retta per A e B.

7. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si determini il piano passante per il punto $P(1,-2,2)$ e contenente la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z &= 1 \\ x - z &= -1 \end{cases}$.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare,

(a) rappresentare la retta s per $A(1,0,2)$ ortogonale e incidente $r : x + y - 2z + 1 = -x + 2y - z = 0$;

(b) rappresentare due piano distinti passanti per l'origine e ortogonali al piano $\alpha : -x + 2y + 2z = 0$.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo in 4 variabili su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa vuol dire che un insieme $X = \{u_1, \ldots, u_t\}$ di t vettori di V è linearmente indipendente?

3. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = ((1,0,1,-2),(1,2,0,-2),(-1,2,-2,2))$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Determinare

(i) una base di W;
(ii) una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga una base di W;
(iii) un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che abbia dimensione 2 e intersezione nulla con W.

4. Data l'applicazione lineare $T : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x+y, 2x-y, y) \in \mathbb{R}^3$,

(i) dire se l'applicazione T è iniettiva e suriettiva;
(ii) determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B}$ canonico di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,0),(-1,2,1),(0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : 2x + 3y - 5 = 0$ e il punto $A(2, -1)$.

(i) Rappresentare la retta parallela a r e passante per A.

(ii) Determinare la circonferenza che sia tangente a r e abbia centro in A.

7. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si determini un piano parallelo alla retta $r : \begin{cases} 2x - 2y + z & = & 1 \\ x - y - z & = & -1 \end{cases}$.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $s : (x, y, z) = (1, 1, 0) + (2, -1, 1)t$ e $r : \begin{cases} x + 2y & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{cases}$.

(a) cosa vuol dire che due rette sono sghembe? Le rette r e s sono sghembe?
(b) Determinare la distanza tra r e s.
(c) Determinare un piano ortogonale sia a r sia a s, se esiste.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, verificare che il seguente sistema lineare in 5 variabili su $\mathbb{R}$ è compatibile e determinarne l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni. È vero che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale? ◦ Si ◦ No Perché?

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K che ha una base ordinata $B = (e_1, \dots, e_n)$.

(i) Cosa è il vettore delle componenti di un vettore u di V in B?

(ii) Determinare il vettore delle componenti di $(3, -5) \in \mathbb{R}^2$ in $B = ((1, -1), (-1, 2))$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti e perché? Completare i sottoinsiemi linearmente indipendenti in una base di $\mathbb{R}^4$.

$T = \{(3,1,0,1),(1,0,-3,-3),(2,1,3,4)\}$
$S = \{(1,2,0,-2),(1,0,1,-2)\}$
$X = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

4. Data l'applicazione lineare $T : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, 2x-y, y, x+z) \in \mathbb{R}^4$,

(i) dire se l'applicazione T è iniettiva e suriettiva;
(ii) determinare il sottospazio vettoriale $\mathrm{Im}(T)$ e un sistema lineare omogeneo di cui esso è l'insieme delle soluzioni.
(iii) È vero che il vettore $(1,0,1,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$?

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Esibire una matrice di tipo 4×3 con rango 2.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -6 & -8 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è diagonalizzabile?

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano euclideo, si considerino la retta $r : 2x + 3y - 5 = 0$ e il punto $A(3, -2)$.

(i) Rappresentare la retta ortogonale a r e passante per A.

(ii) Determinare una retta s cha abbia distanza 2 dal punto A.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\mathcal{H} : 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 = 0$.

(a) Determinare la giacitura del piano $\mathcal{H}$.

(b) Determinare una retta contenuta nel piano $\mathcal{H}$ e passante per il punto $A(0, -1 - 1)$, se esiste.

(c) Determinare una piano ortogonale a $\mathcal{H}$.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. L'insieme $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ◦ Si ◦ No Perché?

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & -x_5 & = & -1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un insieme di t vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Per quali valori del parametro reale α il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ $\{(-1, \alpha, 2), (\alpha, \alpha, 0), (0, -\alpha, \alpha)\}$ è linearmente indipendente?

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulta sottospazio vettoriale del suo spazio ambiente:

$Y = \{(2,1,-2) + \alpha(1,0,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Z = \{\alpha(2,1,-2) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,-3) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. Data l'applicazione lineare $T : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 + a_1, 2a_0 - a_2) \in \mathbb{R}^2$,

(i) determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di T e spiegare se T è iniettiva e/o suriettiva;

(ii) scrivere la matrice associata a T nelle basi ordinate $(1, x, x^2)$ e $((1,-2),(2,-1))$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e di $\mathbb{R}^2$, rispettivamente. Che rango ha questa matrice?

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata su un campo K è invertibile? Verificare se la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3). Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $T : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \to (\alpha - \beta)e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \gamma)e_3 \in V$. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di V rispetto a T.

7. In uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n, cosa è la distanza tra due punti? Fissato un riferimento cartesiano in un piano euclideo, si considerino i punti $A(3,-5)$ e $B(-1,-2)$. Determinare:

(i) la distanza tra i punti A e B

(ii) la distanza tre la retta passante per i punti A e B a la retta ad essa parallela e passante per l'origine del riferimento.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino il piano $\mathcal{H}: 2x - y + 3z = 4$ e il punto $Q(-1,2,1)$. Rappresentare

(a) sia in forma parametrica sia in forma cartesiana una retta parallela ad $\mathcal{H}$ e passante per Q

(b) un piano ortogonale a $\mathcal{H}$ e passante per Q.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Applicare il metodo di Gauss-Jordan per determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni del seguente sistema lineare in 6 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} +x_2 +x_3 -2x_4 +x_5 -x_6 = 0 \\ x_1 +x_2 +2x_3 +x_4 +x_6 = 0 \\ -x_1 -2x_2 -3x_3 +x_4 -x_5 = 0 \\ x_1 -x_2 +2x_4 -x_5 +x_6 = 0 \end{cases}$$

2. Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ una sua base ordinata. Cosa sono le componenti di un vettore v di V in $\mathcal{B}$? Determinare le componenti di $v = (-4, 7)$ nella base ordinata $\mathcal{B} = ((-2, 1), (1, 3))$ di $\mathbb{R}^2$.

3. Completare ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulti essere linearmente indipendente in una base del suo spazio ambiente.

$Y = \{(2, 1, -2) + \alpha(1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Z = \{(2, 1, -2), (1, 0, 1), (1, 1, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. Data l'applicazione lineare $T : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a - b + c, -2a + b - c, a + c, a - b, -b - c) \in \mathbb{R}^5$,

(i) spiegare se T è iniettiva e suriettiva

(ii) rappresentare l'immagine di T, ossia determinare un sistema di equazioni lineari il cui insieme delle soluzioni coincida con l'immagine di T.

5. Cosa è un autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su un campo K?

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3). Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $T : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \to (\beta+\gamma)e_1 + (2\alpha+2\gamma)e_2 + (-2\alpha+2\beta)e_3 \in V$. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di V rispetto a T.

7. Fissato un riferimento cartesiano in un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,-5)$ e $B(-1,1)$.

(i) Rappresentare la retta per A e B sia in forma parametrica sia in forma cartesiana.

(ii) Rappresentare la retta per l'origine dl riferimento che sia parallela alla retta passante per i punti A e B.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette $r : (x,y,z) = (1,0,1) + (2,1,1)t$ e $r' : \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ -2x & -y & +3z & = & -2 \end{array} \right.$

(i) Verificare se le rette sono parallele incidenti o sghembe.

(ii) Rappresentare, se esiste, la retta incidente sia r sia r' e passante per il punto $A(0,1,1)$.

(iii) Rappresentare il piano per l'origine del riferimento che sia ortogonale a r.

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ del seguente sistema di equazioni lineari in 5 variabili su $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & = & 0 \end{cases}$

È vero che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ∘ Sì ∘ No Perché?

2. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è un suo sistema di generatori? Esibire un sistema di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 nella variabile x.

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:
$Y = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : a_1 - 2a_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$
$Z = \{\alpha(1, -1, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(1, -1, 1, 0) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x_1, x_2)) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T e spiegare se T è iniettiva e suriettiva
(ii) determinare la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata su un campo K è invertibile? Per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è invertibile?

$$\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 2, si considerino le rette $s : 2x - 4y = 3$ ed $r : 2x + y = 1$. Dire se esse sono incidenti, parallele, sghembe, ortogonali. Nel caso in cui siano incidenti, calcolarne l'intersezione.

8. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le due rette
$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 3 \\ 2x + y & = & 3 \end{array} \right.$ e $r' : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - t' \\ y & = & 1 + t' \\ z & = & t' \end{array} \right.$

(i) E' vero che r ed r' sono sghembe? Determinare una retta perpendicolare ad entrambe.
(ii) Rappresentare un piano che sia parallelo sia a r sia a r'.

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2021-2022
Laurea in Informatica

Napoli, 9 maggio 2022

COMPITO 1

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare la dimensione e una base del sottospazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}.$$

2. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, si determini

(i) un insieme di tre vettori non nulli che sia linearmente dipendente;

(ii) una base che contenga i vettori $v = u_3 - u_2$ e $w = u_1 + u_2$.

3. Esibire un esempio di matrice su $\mathbb{R}$ di tipo 4×3 che abbia rango 2.

4. Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, 2x + y - z, y + z, x - z) \in \mathbb{R}^4$,

(i) dire se T è iniettiva e/o suriettiva e determinare una base del nucleo e una base dell'immagine

(ii) dire se il vettore $(1, 1, 0, 0)$ appartiene all'immagine

5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ una sua base. Esibire un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $u_1 \in \mathrm{Im}(f)$.

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2021-2022
Laurea in Informatica

Napoli, 10 giugno 2022

COMPITO 2

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Dati i riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e $\overline{\mathcal{B}} = ((1,-1),(1,1))$ di $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice di passaggio P da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ e la matrice di passaggio Q da $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

2. Considerato l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ nella base canonica, determinare autovalori e autospazi di T. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ e una matrice che diagonalizza A.

3. (i) Cosa è un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n e cosa sono le coordinate in $\mathcal{R}$ di un punto P di $\mathcal{E}$? (ii) Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ in un piano euclideo, rappresentare la retta r per i punti $P(2,-1)$ e $Q(1,3)$ e la retta s ortogonale a r per l'origine del riferimento.

4. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $r : \begin{cases} x - y & = & 1 \\ x + y + z & = & -1 \end{cases}$ e $r' : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (1, -1, 0)t'$.

(a) Cosa sono due rette sghembe? Stabilire se r e r' sono sghembe.
(b) Determinare il piano π contenente r e parallelo a r' e la distanza tra r' e π.

Esercizi 1

1. Considerati due insiemi non vuoti A e B, dire cosa è una relazione di A in B, cosa è un'applicazione di A in B e cosa è una relazione di equivalenza su A.

2. Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, determinare la relazione inversa di ciascuna delle seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ di A in B e spiegare quali di esse sono applicazioni:

$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$

3. Spiegare quali tra le seguenti relazioni sono riflessive, simmetriche, transitive:

$h_1 \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_1y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$h_2 \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_2y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$h_3 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad xh_3y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di x (ossia, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y = nx$).

4. Determinare le classi di equivalenza della relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{N}$ tale che:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ è pari.}$$

5. Spiegare quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive e determinarne l'immagine:

$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N} \to 2x - 1 \in \mathbb{N}$
$p : x \in \mathbb{N} \to x - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$q : y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \to \begin{cases} -\frac{y+1}{2}, & \text{se } y \text{ è dispari} \\ \frac{y}{2}, & \text{altrimenti} \end{cases} \in \mathbb{Z}$$

6. Per quale delle seguenti equazioni lineari la quaterna $(1, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione?
(a) $x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5 = 1$; (b) $-2x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$; (c) $x_1-2x_2-x_3+x_4 = 2$.

Quale delle seguenti n-uple di numeri reali è una soluzione dell'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$?
(a) $(0, 3, 0, -1)$; (b) $(1, -2, 0)$; (c) $(1, 0, 1, 0)$; (d) $(1, 2, 4, 1, 1)$.

Esercizi 2

1. Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione interna $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia: $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che -2 è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. È vero che questa operazione non è associativa?

2. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà sono soddisfatte da queste operazioni?

3. Cosa è una struttura algebrica? Cosa è un gruppo? Cosa è un gruppo abeliano? Cosa è un campo? Quali esempi conosci?

4. Cosa è uno spazio vettoriale su un campo $(K, +, \cdot)$? Quali esempi di spazio vettoriale conosci?

5. Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

6. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa vuol dire che un sottoinsieme W di V è linearmente chiuso? Cosa è un sottospazio vettoriale di V?

7. Dati t vettori $v_1, \ldots, v_t$ di uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa vuol dire che un vettore v è combinazione lineare dei vettori assegnati?

8. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$X = \{\alpha(2, 1, -1) + (1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
$U = \{(0, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$
$Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$
$T = \{a + (a + b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$.
$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$
$N = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

9. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è un sistema di generatori di V? Cosa vuol dire che uno spazio vettoriale è finitamente generato su un campo K?

Esercizi 3

1. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K e un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ di vettori di V, cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che S è linearmente dipendente?

2. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2.

(ii) Dire se S è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?

(iii) È vero che il vettore $w = (0, 0, 1)$ è combinazione lineare dei vettori di S? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, w?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da S? Il sistema S è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$?

3. Dati i sottoinsiemi $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ e $T = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 0)\}$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, dimostrare che ciascun vettore di S è combinazione lineare dei vettori di T e che ciascun vettore di T è combinazione lineare dei vettori di S. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che S e T generano lo stesso spazio vettoriale?

4. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.

(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.

(iii) I vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli?

5. Cosa è una base di uno spazio vettoriale su un campo K? Cosa è la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato?

6. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;

$L((0, 1, 0, 0, 0,), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

7. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si determini:

(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente *indipendente*;

(ii) un insieme di tre vettori che sia linearmente *dipendente.*;

(iii) un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2;

(iv) una base di V che contenga i vettori $u = e_1 + 2e_3$ e $v = e_2 - e_3$.

Vedere se l'insieme $S = \{2e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_2, e_2 + e_1\} \subseteq V$ è una base di V.

Esercizi 4

1. Fissato una base ordinata $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

Se V ha dimensione finita n, quali proprietà sono soddisfatte dall'applicazione $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ che ad ogni vettore di V associa il vettore delle sue componenti in $\mathcal{B}$?

2. Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nelle basi ordinate fissate:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),0,1,0))$.

(iii) $3 - 2x + x^2 - x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ in $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - 2x, 1 + x^2, x + x^3, x^3 - x^4)$.

3. Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0,1,0,1),(1,1,0,1),(2,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

(v) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

4. Dati p sottospazi vettoriali $W_1, \ldots, W_p$ di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma. Cosa vuol dire che un sottospazio somma è una somma diretta? Quali proprietà delle somme dirette conosci?

5. Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2,1,2,-1),(1,1,1,1),(0,-1,0,3))$ di $\mathbb{R}^4$, determinare un sottospazio vettoriale U tale che $W + U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

(Suggerimento: trovare una base di W, completarla in una base di $\mathbb{R}^4$ e considerare il sottospazio vettoriale generato dai vettori aggiunti alla base di W)

6. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$W_1 = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,-1,1),(1,-1,0,1))$,

$W_2 = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,0,1,1))$.

Determinare i sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

7. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 5 su un campo $\mathbb{K}$ e siano H e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 4$. Quali valori può assumere $dim(H \cap W)$?

ESERCIZI 5

1. Dati due spazi vettoriali V e W su uno stesso campo K, dire cosa è un'applicazione lineare f di V in W. Quali proprietà delle applicazioni lineari conosci?

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché f non è un'applicazione lineare.

3. Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a + 2b, a - b + 1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore (x_1,x_2,x_3) di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore u di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che
$f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2), \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.
Determinare Imf. Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a Imf? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore (x_1,x_2,x_3) tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x,y,z,t)) = (x+y-z-t, -x+z, 2y-2t)$. Determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1,2,-2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

ESERCIZI 6

1. Cosa vuol dire che una matrice A su un campo K è ridotta a gradini? Descrivi il metodo di Gauss per ridurre una matrice a gradini con l'uso delle trasformazioni elementari.

2. Cosa è il rango di una matrice A su un campo K? Qual è il rango di una matrice ridotta a gradini? Dimostra che le operazioni elementari (sulle righe) non cambiano lo spazio generato dalle righe della matrice e, quindi, non cambiano il rango.

3. Determinare l'isomorfismo associato alla base ordinata $\mathcal{B} = (1+2x, 1-x, 1-x^2)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$. Usare questo isomorfismo per studiare la lineare indipendenza dell'insieme $S = \{1 - x + x^2, 2 + x + 2x^2, 3x\}$ mediante i vettori delle componenti in $\mathcal{B}$.

4. Ridurre a gradini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Come si definisce il prodotto righe per colonne tra matrici? Quali proprietà di questa operazione conosci?

6. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti AB, BA, AC, BD, BE, CB, CC, DE, ED, $(AB)D$, $A(BD)$.

7. Sia Σ un sistema di m equazioni lineari su un campo K in n incognite.

(i) Cosa è una soluzione di Σ?
(ii) Cosa vuol dire che Σ è compatibile?
(iii) Conosce un criterio che caratterizza la compatibilità di Σ?
(iv) Se Σ' è un altro sistema di equazioni lineari su K nello stesso numero n di incognite, cosa vuol dire che Σ e Σ' sono equivalenti?
(v) Dimostrare che, se Σ è omogeneo, l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n.

8. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

ESERCIZI 7

1. Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ determinarne una rappresentazione cartesiana e una parametrica:

$H = \mathcal{L}((2,1,2,3),(0,1,2,2))) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U = \mathcal{L}((1,1,-1,1,0),(-1,-1,1,-1,0),(0,2,1,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^5$
$X = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,1,-1,1),(-1,4,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$

2. Determinare il sottospazio intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \mathcal{L}((2,1,1,2),(0,1,0,1),(1,2,0,-1)), \qquad W_2 : \begin{cases} x_1 & -x_2+ & 2x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$

3. Studiare le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci? Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -4 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Data un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a T in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

7. Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nelle basi fissate:

$$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\geq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$$

$$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x], \quad \mathcal{R} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$$

8. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1,0,1)) = -1 + 2x - x^2 + x^3$, $f((1,1,2)) = 4x + x^3$ e $f((0,0,1)) = 2x - x^2$, scrivere la matrice associata a f nelle basi ordinate $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,0,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1+x, -x^2, x+x^3)$.

ESERCIZI 8

1. Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,2,1),(0,0,1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0,-1,1),(0,1,1),(1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella Q da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y+z, x+y+z)$, determinare la matrice A associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $\bar{A}$ associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $Q = P^{-1}$ e ovviamente $P = Q^{-1}$. Inoltre si ha che $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}\bar{A}P$.

2. Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo T? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a T in un riferimento fissato? Come si calcolano?

3. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

4. Se $\mathcal{B} = (u,v,w)$ è una base di V di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di V tale che $f(u) = u+w$, $f(v) = -u+v+w$ e $f(w) = v+2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u+v-w$ è autovettore di f;
(ii) spiegare perché f non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice A associata a f nella base ordinata $\mathcal{B}$.

5. Determinare la matrice A associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (4x+3y-3z, 6x+y-3z, 12x+6y-8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1))$.

Calcolare autovalori e autospazi dell'endomorfismo f.

6. Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile? Cosa è una base spettrale per un endomorfismo?

7. Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \text{per ogni } k \in \mathbb{R}.$$

In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.

8. Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se A è diagonalizzabile. In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.

9. Sia F_A l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se F_A è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di F_A.
(iii) La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.

ESERCIZI 9

1. Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?

2. Spiegare quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ sono un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

(i) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

(ii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3a_2 b_2$

(iii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

3. Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(i) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;

(ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore $(1, -1, 2)$.

4. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare numerico. Determinare il complemento ortogonale di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:

$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0), (1, 0, 2, -1)$

$U = \mathcal{L}((3, 4, 2, -1))$

$Z = \mathcal{L}((2, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 2))$

5. Spiegare cosa è uno spazio vettoriale euclideo orientato. In uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3, spiegare cosa è il prodotto vettoriale tra due vettori dati.

6. Dire cosa è uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) e quali proprietà conosci. Quali esempi conosci?

7. Dato uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) di dimensione finita su un campo K, cosa è un suo riferimento cartesiano? Cosa sono le coordinate di un punto di uno spazio affine in un riferimento cartesiano fissato?

ESERCIZI 10

1. Dato uno spazio euclideo di dimensione finita e un suo riferimento cartesiano, spiegare come si rappresenta un suo sottospazio euclideo nel riferimento cartesiano fissato.

2. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,-1,2)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,1,2)$. Tenendo conto del fatto che due vettori sono paralleli se formano un insieme linearmente dipendente,

(i) determinare *un* punto D tale che il vettore $\overrightarrow{CD}$ sia parallelo al vettore $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Determinare *il* punto E tale che il vettore $\overrightarrow{CE}$ sia *uguale* al vettore $\overrightarrow{AB}$.

3. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri la retta r passante per il punto $P(2,1,0)$ e con giacitura $\overrightarrow{r} = \mathcal{L}(u)$, dove u è il vettore di componenti $(3,-2,1)$.

(i) Determinare la giacitura di un piano che sia parallelo a r.

(ii) Determinare la giacitura di un piano che *non* sia parallelo a r.

4. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Determinare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{BC}$. Dire se A, B e C sono allineati (tre punti si dicono allineati se appartengono a una stessa retta).

5. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 2, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.

(2) Rappresentare la retta r per B e D.

(3) Rappresentare la retta s per C di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$ (ossia, la sua giacitura è generata da $\mathbf{v}$).

(4) Rappresentare la retta per D con stessa giacitura della retta s.

6. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 3:

(1) rappresentare la retta passante per $P(1,3,-2)$ e con giacitura $\mathcal{L}(v(2,0,1)$;

(2) rappresentare il piano (sottospazio di dimensione 2) per il punto $Q(2,1,1)$ e giacitura $\mathcal{L}(u(3,1,2), u'(1,1,1))$; dimostrare che la giacitura della retta considerata nel punto (1) è contenuta nella giacitura di questo piano;

(3) rappresentare la retta s per $C(2,1,0)$ e con giacitura $\mathcal{L}(v(2,3,1)$; determinare l'intersezione di questa retta con il piano considerato al punto (2).

7. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta $s : \begin{cases} x+z+2 &= 0 \\ -x+2y+1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di s.

(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con s (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).

(c) Determinare il piano per B contenente s. Questo piano è parallelo a s'?

(d) Determinare una retta r passante per B e incidente s. Rappresentare il piano che contiene r ed s.

ESERCIZI 11

1. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,1,3)$ e $B(1,1,2)$. Determinare un punto C tale che il triangolo di vertici A, B e C sia rettangolo in B.

2. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a s passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a s passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

3. Dato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette

$$s : \begin{cases} x + z + 2 & = & 0 \\ -x + 2y + 1 & = & 0 \end{cases} \quad \text{e } s' : \begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e il punto } B(1,0,1).$$

(a) Calcolare un vettore direzionale di s.
(b) Dire se s e s' sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra s e s'
(c) Determinare il piano per B contenente s. Questo piano è parallelo a s'?
(d) Determinare una retta r passante per B e incidente s. Rappresentare il piano che contiene r ed s.

4. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori AB e AC sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto D tale che AD sia ortogonale a AB.

5. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1,-1,0)$.
(1) Determinare il piano per A parallelo a π.
(2) Determinare la retta ortogonale a π e passante per $P(-1,0,0)$.
(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a π.
(4) Determinare un piano ortogonale a π e passante per A.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : x - y + 4 = 0$ e il punto $A(0,2)$.
(i) Determinare la retta ortogonale a r e passante per A.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da r.

7. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino

$$\text{la retta } s : \begin{cases} x - y + 2z & = & 1 \\ x + y + z & = & -1 \end{cases} \quad \text{e il punto } P(1,-1,0).$$

(a) Determinare il piano α ortogonale a s e passante per P.
(b) Determinare la distanza tra s e P.
(c) Determinare una retta r incidente s e una retta ortogonale sia a r sia a s.
(d) La retta $r' : (x,y,z) = (1,0,1) + (1,2,2)t$ è sghemba con s? Determinare la distanza tra r' e s. Determinare un piano parallelo sia a r' sia a s.

8. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, determinare due rette sghembe e calcolarne la distanza.

9. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $P(2,-3,2)$ e $Q(0,1,1)$ e sia r la retta passante per P e Q.
(i) Rappresentare la retta r.
(ii) Rappresentare l'asse del segmento di estremi P e Q.
(iii) Rappresentare un piano parallelo alla retta r.
(iv) Rappresentare una retta ortogonale a r e passante per Q.
(v) Rappresentare il piano passante per P, Q e l'origine del riferimento.

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni del seguente sistema lineare in 4 incognite su $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere, e spiegare perché $\mathcal{S}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +x_4 & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un insieme di vettori di V. Cosa vuol dire che S è un sistema di generatori di V?

3. Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x + y - z, 2x - y + t, x - 2y + z + t) \in \mathbb{R}^3$,

(i) determinare una base e la dimensione del nucleo e una base e la dimensione dell'immagine;

(ii) completare in una base di $\mathbb{R}^4$ la base del nucleo determinata in (i);

(iii) spiegare se T è iniettiva e suriettiva.

α **4.** Spiegare cosa vuol dire che due matrici quadrate su un campo K sono simili.

A e B su $\mathbb{K}$ sono simili se $\exists$

5. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, esibire una matrice che diagonalizza A.

6. Fissato un riferimento cartesiano del piano euclideo, si considerino i punti $A(2,-3)$ e $B(2,1)$.

(i) Rappresentare la retta passante per A e per B.

(ii) Determinare una retta che sia ortogonale alla retta per A e B.

(i) NON

7. Cosa vuol dire che due rette sono sghembe? Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, verificare se le rette $s : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, 2, 1)$ e $r : \begin{cases} x + 2y & = 1 \\ x - y + z & = 1 \end{cases}$ sono sghembe.

se non sono parallele e non si

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino il punto $P(1,-1,2)$ e il piano $\mathcal{H}: \ 2x - y + z - 3 = 0$.

(a) Rappresentare il piano parallelo ad $\mathcal{H}$ e passante per P e calcolare la sua distanza da $\mathcal{H}$.

(b) Rappresentare un piano ortogonale a $\mathcal{H}$ e passante per P.

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 21 aprile 2023

COMPITO 1

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & & = & -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & -1 \\ -x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 2 \end{cases}$$

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

(i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (1, 2, 4, -2)$

(ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha\delta = 1\}$

$Y = \{\alpha(1, -1, 0, 1) + (\beta + \gamma)(-2, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{\alpha(1, -1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\beta(2, 1, 0, 1) : \beta \in \mathbb{R}\}$

3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

4. Spiegare cosa è il nucleo di un'applicazione lineare $T : V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W su un campo K.
Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x - 2y + z - t, x + y - z, x - y - t) \in \mathbb{R}^3$,

(i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva

(ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva

(iii) dire se il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene all'immagine.

23

NOME: D[redacted] COGNOME: [redacted] MATRICOLA: [redacted]

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 21 aprile 2023

COMPITO 1.7

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

6

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

SONO PRESENTI ERRORI DI SEGNO.

SVOLGO IL SISTEMA DI EQ. LIN. NON OMOGENEO CON MATRICE ASSOCIATA.

$$A \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

SVOLGO LE TRASFORMAZIONI PER RIDURRE A => SCALINI LA MATRICE =>

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & \frac{47}{9} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{39}{9} & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

MOLTI, MOLTI ERRORI di calcolo.

L'idea è corretta

RIVEDO COMPLETAMENTE

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{9} & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{35}{9} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{9} & 0 \end{array}\right]$$

RANGO $(A) = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{53}{9}x_5 - 3 \\ x_2 = \frac{35}{9}x_2 + 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{8}{9}x_5 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{53}{9}x_5 - 3, \frac{35}{9}x_2 + 2, 0, \frac{8}{9}x_5, x_5 \right) \,\middle|\, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

2

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

4 (i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (3, 2, 0, -2)$

3 (ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{(0,1,1,3), (-1,1,2,4), (0,0,0,0)\}$

$Y = \{\alpha(1,-1,0,1) + (\beta+1)(-2,1,0,1) + \beta(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{\alpha(1,-1,0,1) + \beta(2,1,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(i) $(V, K, +, \cdot) \in \mathbb{R}^4$ $(S, K, +, \cdot) \in \mathbb{R}^3$

$S \subseteq V \iff$ 1) $\forall u \in V$, $1 \cdot u = u$

2) $\forall u, v \in V$, $u + v \in V$

3) $\forall u \in V, \forall \alpha \in K$, $\alpha \cdot u \in V$

$S = \mathcal{L}((3,2,0,-2), (0,0,1,0), (0,1,0,0))$ ok

$\alpha(3,2,0,-2) + \beta(0,0,1,0) + \gamma(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$

$(3\alpha, 2\alpha + \gamma, \beta, -2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ LIN. INDIPENDENTI QUINDI OK

X: È SOTTOSPAZIO POICHÉ AMMETTE NEUTRO (VETTORE NULLO). non è sufficiente che il vettore nullo ...

Y: NON È SOTTOSPAZIO POICHÉ NON RISPETTA LE PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI

Z: SOTTOSPAZIO VETT. POICHÉ AMMETTE LE PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI

2 3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

PRESA UNA MATRICE $A_{m \times n}$ SU CAMPO K IL SUO RANGO È LA ~~GRANDEZZA~~ DIMENSI...
DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATA DALLE COLONNE DI A:

$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$.

... ai padri dei ...

8

4. Dati due spazi vettoriali V e W su un campo K, spiegare cosa è un'applicazione lineare $T : V \to W$.
Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x - 2y + z - t, x + y - z, 2x - y - t) \in \mathbb{R}^3$,

3 (i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva
3 (ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva
2 (iii) dire se il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene all'immagine.

(i) $\text{Im}\,T = W \Rightarrow$ SURIETTIVA

$B((0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0))$ base di $\mathbb{R}^4$

$\mathcal{L}((-1,0,-1),(1,-1,0),(-2,\cancel{1},-1),(1,\cancel{1},2)) = \text{Im}\,T$

$B_{\text{Im}\,T} = ((-1,0,-1),(1,-1,0))$ ok

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ESEGUO LE TRASFORMAZIONI}} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RANGO$(A) = 2$

NO SURIETTIVA ok

(ii) $\text{Ker}\,T = \{0_V\} \Rightarrow$ INIETTIVA

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{SVOLGO} \\ \text{I PASSAGGI} \\ \text{DEL SISTEMA LIN.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z + t \\ y = \dfrac{2z - t}{3} \\ t = \dfrac{-8 + 4z}{3} + 2t - 2t \end{cases}$$

(AVREI VOLUTO SVOLGERE CON MATRICE SVOLGO CON SISTEMA PER QUESTIONE DI TEMPO)

$\text{Ker}\,T = \{(2y - z + t, \frac{2z - t}{3}, z, \frac{-8+4t}{3} + 2t - 2t)\}$ $z, t \in \mathbb{R}$

NO INIETTIVA

(iii) CONTROLLO IMM. CON MATRICE:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

attenzione

RANGO $= 2$ NON APPARTIENE POICHÉ DIPENDENTE

allora appartiene!!!

ATTENZIONE!!!

[redacted] 29

NOME [redacted] COGNOME [redacted] MATRICOLA [redacted]

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 21 aprile 2023

COMPITO 1.1

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

7- **1.** Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & & = & -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ -x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$$e\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \underline{e}^2 \to \underline{e}^2 - \underline{e}^1 \\ \underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - 2\underline{e}^1 \\ \underline{e}^4 \to \underline{e}^4 + \underline{e}^1 \end{array} \quad e' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$e' \quad \begin{array}{l} \underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^2 \\ \underline{e}^4 \to \underline{e}^4 + 2\underline{e}^2 \end{array} \quad e'' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \underline{e}^3 \leftrightarrow \underline{e}^4 \quad e''' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Riduciamo completamente la matrice.

$$\begin{array}{l} \underline{e}^3 \to -\frac{1}{2}\underline{e}^3 \\ \underline{e}^2 \to -\underline{e}^2 \end{array} \quad e^{IV} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ SI} \quad \begin{array}{l} \underline{e}^2 \to \underline{e}^2 - 3\underline{e}^3 \\ \underline{e}^1 \to \underline{e}^1 - \underline{e}^3 \end{array} \quad e^{V} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underline{e}^1 \to \underline{e}^1 - 2\underline{e}^2 \quad e^{VI} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}.$$

$e \Rightarrow e^{VI}$

ricavo

$$\begin{cases} x_1 = -3\bar{x}_3 + \frac{4}{3}\bar{x}_5 + 3 \\ x_2 = 2\bar{x}_3 - \frac{5}{2}\bar{x}_5 - 2 \\ x_4 = \frac{1}{2}\bar{x}_5 \end{cases}$$

x_3, x_5 variabili libere e le parametrizzo bene metto

$$S = \left\{ \left(-3\bar{x}_3 + \frac{7}{3}\bar{x}_5 \mp 3,\ 2\bar{x}_3 \pm \frac{5}{2}\bar{x}_5 \mp 2,\ \bar{x}_3,\ \frac{1}{2}\bar{x}_5,\ \bar{x}_5\right) \middle|\ \bar{x}_3, \bar{x}_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

ok

attenzione

$5\frac{1}{2}$ **2.** Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((-1,1),(1,2))$ e $\overline{\mathcal{B}} = ((2,1),(1,1))$ di $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

$\alpha(2,1)+\beta(1,1) = (a,b) = (2\alpha+\beta, \alpha+\beta)$ $\quad \begin{cases} a = 2\alpha+\beta \\ b = \alpha+\beta \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2\alpha+b-\alpha \\ \beta = b-\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a-b \text{ ok} \\ \beta = \boxed{b}-a+\boxed{b}_{2b} \end{cases}$

attenzione

$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}}\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \mapsto (a-b, -a) \in \mathbb{R}^2$

errori di calcolo

$(-1,1) =_{\overline{\mathcal{B}}} (-1-1, 1) = (-2,1)$?

$(0,1) =_{\overline{\mathcal{B}}} (-1,0)$

$$M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$6\frac{1}{2}$ **3.** Fissato un riferimento cartesiano in un piano euclideo, si considerino i punti $A(2,-1)$ e $B(1,1)$.

(i) Determinare la retta r passante per A e B e la retta s per A ortogonale a r.

(ii) Determinare un punto che abbia distanza 2 da r.

$\overrightarrow{AB}\ (1-2, 1+1) = (-1, 1)$ 2 $\boxed{SI}$

attenzione ai calcoli! errori di calcolo

$\begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x+y+k = 0$

$1+1+k=0 \Rightarrow k=-2$

$r: x+y-2=0$

siccome r è perpendicolare allora $(1,1)$ è vettore ortogonale

$\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x-y+k=0$

$2+1+k=0 \Rightarrow k=-3$

$s: x-y-3=0$ SI

Siccome r è perpendicolare uso la formula:

$$d(r,P) = \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}} = 2$$

$|x+y+2| = 2\sqrt{2}$ ad esempio $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y=-2 \end{cases}$ soddisfa l'equaz.

$P(2\sqrt{2}, 2)$ OK, tenendo conto dell'errore precedente

8 **4.** Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette $r: \begin{cases} x \quad -z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$ e $r': (x,y,z) = (1,1,0) + t'(1,0,-1)$.

(i) Le rette r ed r' sono sghembe?

(ii) Determinare il piano $\mathcal{H}$ parallelo sia a r sia a r' e passante per $P(2,1,-1)$.

(iii) Determinare una retta ortogonale sia a r sia a r'.

$r: \begin{cases} x \quad -z = 1 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z+1 \\ z+1+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow 2z+y=-2,\ 2z=-y-2$

$\begin{cases} z = \frac{-y-2}{2} \\ x = \frac{-y-2}{2}+1 = -\frac{y}{2} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} t=y \\ x=-\frac{t}{2} \\ z=-\frac{t}{2}-1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=t \\ x=-\frac{t}{2} \\ z=-1-\frac{t}{2} \end{cases}$

$(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ non è propor. a $(1,0,1)$ quindi $r \not\parallel r'$

intersezione: $\begin{cases} -\frac{t}{2} = 1+t' \\ t=1 \\ t' = 1+\frac{t}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ INCOMPATIBILE

Le rette non sono sghembe? ???

$\overrightarrow{\mathcal{H}} = \mathcal{L}((1,0,-1), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}))$ $\quad \left|\begin{pmatrix} x & 1 & -\frac{1}{2} \\ y & 0 & 1 \\ z & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| =$

$= z+\frac{1}{2}y+x+\frac{1}{2}y = x+y+z+k=0$

$2+1-1 = -k \Rightarrow k=-2$

$\mathcal{H}: x+y+z-2=0$

Siccome $\mathcal{H}$ è parallelo sia a r sia a r' allora il suo complemento ortogonale sarà una retta ortogonale sia a r sia a r'

È vero, ma si può dire meglio

$(1,1,1)$ complemento ortogonale di $\mathcal{H}$ è generato da questo vettore poiché $\mathcal{H}$ è un piano

$q: \begin{cases} x=0+1t \\ y=0+1t \\ z=0+1t \end{cases}$ ho scelto di farla passare per l'origine

Geometria - Cioffi - Prima prova intercorso - 21 Aprile 2023

COMPITO 1

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

(i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (3, 2, 0, -2)$

(ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{(0,1,1,3), (-1,1,2,4), (0,0,0,0)\}$

$Y = \{\alpha(1,-1,0,1) + (\beta+1)(-2,1,0,1) + \beta(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{\alpha(1,-1,0,1) + \beta(2,1,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

4. Data un'applicazione lineare $T : V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W su un campo K, spiegare cosa è l'immagine di T.

Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x - 2y + z - t, x + y - z, 2x - y - t) \in \mathbb{R}^3$,

(i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva

(ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva

(iii) dire se il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene all'immagine.

16

MATRICOL

…1 aprile 2023

COMPITO 1 4

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei calcoli effettuati e fornendo spiegazioni chiare ed essenziali.

$3\frac{1}{2}$

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

?

perché ???

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^2 \to a^2 + a^4 \ ?? \\ \boxed{a^3 \to a^3 + 2a^4} \ ? \\ \boxed{a^4 \to a^4 + a^1} \ \text{ok} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^3 \to a^3 - a^2 \\ a^1 \to a^1 - a^4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^3 \to \frac{1}{2}a^3 \\ a^4 \to \frac{1}{2}a^4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^3 \to a^3 - a^2 \\ a^4 \to a^4 - a^2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^2 \to a^2 - a^3 \\ a^3 \to -\frac{1}{2}a^3 \\ a^1 \to a^1 - (2)a^2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad a^1 \to a^1 + a^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -11/2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad a^4 \to \frac{3}{2}a^4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a^1 \to a^1 + a^4 \\ a^4 \to \frac{2}{3}a^4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -19/4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad a^3 \to a^3 + \frac{1}{2}a^4 \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -19/4 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{4}x_5 - 4x_6 \\ x_2 = 3x_5 + x_6 \\ x_3 = \frac{3}{4}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$?

???

$$S = \left\{\left(-\frac{19}{4}x_5 - 4x_6,\ 3x_5 + x_6,\ \frac{3}{4}x_5,\ \frac{1}{2}x_5,\ x_5,\ x_6\right) \mid x_5, x_6 \in \mathbb{R}\right\}$$

L'idea c'è, ma anche molta confusione e molta distrazione.

??? queste variabili da dove sbuca?

3 **2.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

(i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (1, 2, 4, -2)$

(ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$X = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha\delta = 1\}$$
$$Y = \{\alpha(1, -1, 0, 1) + (\beta + \gamma)(-2, 1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$Z = \{\alpha(1, -1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\beta(2, 1, 0, 1) : \beta \in \mathbb{R}\}$$

i) $(V, K, +, \cdot)$ $\quad W \subseteq V$

$W = \mathcal{L}\{(1,2,4,-2), (0,3,5,7), (9,11,13,17)\}$

Z è sottospazio vettoriale NO

3 **3.** Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne della matrice

$A = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \subseteq K^n$

3 **4.** Dati due spazi vettoriali V e W su un campo K, spiegare cosa è un'applicazione lineare $T : V \to W$.
Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \to (x - 2y + z - t, x + y - z, x - y - t) \in \mathbb{R}^3$,

1 (i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva

1 (ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva

1 (iii) dire se il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene all'immagine.

Un'applicazione lineare $T: V \to W \iff$

(i) $\forall u, v \in V: T(u+v) = T(u) + T(v)$ OK

(ii) $\forall u \in V, \forall \lambda \in K: T(\lambda u) = \lambda T(u)$

---

i) $x(1,1,1)$ $\quad (x - 2y + z - t, x + y - z, x - y - t) \in \mathbb{R}^3$

$y(-2,1,-1)$

$z(1,-1,0)$

$t(-1,0,-1)$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \to x - y - y + z - t = 0 \to (x - y - t) - (y - z) = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x - (y + z) = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases} \to x - (\cancel{} - y + z) = 0 \to \begin{cases} -y + z = 0 \\ x = 0 \\ -y - t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ -t = -z \to t = z \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y = t \\ z = t \end{cases} \quad \mathrm{Ker}_T = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(1,1,1)\ ?$$

$\subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \not\subseteq \mathbb{R}^4$

questo è vero — T Non è iniettiva

T suriettiva $=$ [redacted] $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^5$?

$\mathrm{Im}\, T = T(\mathcal{L}(B)) = \mathcal{L}(T(B))$ $\quad B = \{e^1, e^2, e^3, e^4\} \subseteq \mathbb{R}^4$

è vero

$\mathcal{L}\{(1,1,1), (-2,1,-1), (1,-1,0), (-1,0,-1)\}$

T non è suriettiva — no, perché?

(iii) $(0,1,1)$ appartiene all'immagine

sì, è vero, perché?

(27)

COGNOME [redacted] NOME: [redacted] MATRICOL [redacted]

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 9 giugno 2023

COMPITO 2 2

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

7

1. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nel riferimento canonico.

(i) Determinare autovalori e autospazi di T.

(ii) È vero che T è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale relativa a T e una matrice che diagonalizza A.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(-\lambda^2 - \lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$
$$-(\lambda^2 + \lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

OK SI
$\boxed{ma(-2) = 1} = mg(-2)$
$ma(1) = 2$

$$\Phi_B(V_{-2}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}(X) = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0;\ x_3 = x_2 - 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 2x_2 = -x_2 \\ x_1 = x_2 - 2x_1 + 2x_2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_2 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$\{(\bar{x}_2, \bar{x}_2, -\bar{x}_2) \mid \bar{x}_2 \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathcal{L}(1, 1, -2) \Rightarrow \dim V_{-2} = 1 \neq$ (-1)
$\neq mg(-2)$ = 1

non è diagonalizzabile ~~VERA~~

$$\Phi_B(V_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}(X) \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2;\quad x_1 = -x_2 + x_3 \\ \cancel{x_3 = x_1 + x_2} \\ \cancel{x_3 = x_1 + x_2} \end{cases}$$

attenzione una svista?

$\{(-\bar{x}_2 + \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \mid \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbb{R}\} = ; (\bar{x}_1, 0, \bar{x}_1) + (0, \bar{x}_2, \bar{x}_2)$

$= \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,1)) \Rightarrow \Phi_B^{-1}(\mathcal{L}((1,0,1),(0,1,1)) = \mathcal{L}((1,0,1)(0,1,1))$

↑
base canonica

7

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

4 (i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (1,2,0,-2)$

3 (ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$X = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha\delta = 0\}$$
$$Y = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha - 2\gamma = \beta + \delta = 0\}$$
$$Z = \{(1,-1,0,1),(2,1,0,1)\}$$

(i) $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $u \in W$ e $\dim W = 3$

$u = (1,2,0,-2)$, $B_W = \{e_1, e_2, e_4\} \subseteq B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ← Base canonica

quindi so per certo che B_W è una base

$u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_4 \iff (1,2,0,-2) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,0,1)$

$(1,2,0,-2) = (\alpha,\beta,0,\gamma) \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 2\\ \gamma = -2\end{cases} \Rightarrow u \in \mathcal{L}(B_W) = W$ OK

(ii) $Z = \{(1,-1,0,1),(2,1,0,1)\}$ non è un sottospazio vettoriale perché:

$u + v \notin Z$, infatti $u + v = (1,-1,0,1) + (2,1,0,1) = (3,0,0,2) \notin Z$ SI

$Y = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^3 : \alpha - 2\gamma = \beta + \delta = 0\}$ attenzione: $Y \subseteq \mathbb{R}^4$!!!

$\alpha = 2\gamma$, $\beta = -\delta$; $(2\gamma, -\delta, \gamma, \delta) = (2\gamma, \gamma) + (-\delta, \delta) =$

$= \gamma(2,1) + \delta(-1,1)$. Quindi $Y = \mathcal{L}((2,1)(-1,1))$. I due vettori sono indipendenti perché hanno la seconda componente della n-upla uguale, ma la prima componente diversa.

Quindi Y è un sottospazio vettoriale, perché le chiusure lineari lo sono per definizione.

X ~~è~~ non è un sottospazio vettoriale perché è composto da vettori del tipo $(0,\beta,\gamma,\delta)$ e $(\alpha,\beta,\gamma,0)$

la somma tra loro $(0,\beta,\gamma,\delta) + (\alpha,\beta,\gamma,0) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \notin X$ perché X non è linearmente chiuso e quindi NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

3

3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

In una matrice del tipo $m \times n$, il rango della matrice è la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di A.

$$A_{m,n}(K) = \begin{pmatrix} e_1^1 & \cdots & e_n^1 \\ \vdots & & \\ e_1^m & \cdots & e_n^m \end{pmatrix}, \quad \text{rango} = \dim(\mathcal{L}(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)) \subseteq \mathbb{R}^m$$

SI

quest è vero

12

3 4. Dati due spazi vettoriali V e W su un campo K, spiegare cosa è un'applicazione lineare $T : V \to W$.
Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x - 2y + z, x + y - z, 2x - y, 3y - 2z) \in \mathbb{R}^4$,

3 (i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva

3 (ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva

3 (iii) dire se il vettore $(1, 1, 0, 0)$ appartiene all'immagine.

$(V, K, +, \cdot)$, $(W, K, +, \cdot)$. $T: V \to W$ è definita appl. lineare se:

- $\forall u, v \in V$, $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
- $\forall \alpha \in K, \forall u \in V$, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$;

(i)

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^3 \underset{\text{teorema dimostrato}}{\Rightarrow} T(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(T(B))$; $= \operatorname{Im} T$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,1,2,0)$, $T(e_2) = (0,1,0) = (-2,1,-1,3)$,
$T(e_3) = T(0,0,1) = (1,-1,0,-2)$

$\operatorname{Im} T = \mathcal{L}((1,1,2,0), (-2,1,-1,3), (1,-1,0,-2))$; I vettori non sono proporzionali a due a due. Controllo se un vettore si può scrivere come combinazione lineare degli altri due.

$(-2,1,-1,3) = \alpha(1,1,2,0) + \beta(1,-1,0,-2) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha, -2\beta)$

$\begin{cases} \alpha+\beta = -2 \\ \alpha-\beta = 1 \\ 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ -2\beta = 3 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$; $\alpha + \beta = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow -2 = -2$

Quindi $\mathcal{L}((1,1,2,0), (1,-1,0,-2)) \ni (-2,1,-1,3)$; $B_{\operatorname{Im} T} = ((1,1,2,0), (1,-1,0,-2))$ SI

T suriettiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^4$, ma $\dim \operatorname{Im} T = 2$ e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, quindi $2 \neq 4$ e

T non è suriettiva. SI

(ii)

Analisi dimensionale: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} = 3 - 2 = 1$

T iniettiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} = 0$. Quindi T non è iniettiva

$\operatorname{Ker}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid T(u) = \underline{0}\}$; ovvero quando $(x-2y+z, x+y-z, 2x-y, 3y-2z) = \underline{0}$

$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \Rightarrow x - 4x + 3x = 0 \Rightarrow x - x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \Rightarrow z = 3x \\ 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \\ 3y - 2z = 0 \Rightarrow 6x - 6x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

SI

$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

(iii)

$(1,1,0,0) = \alpha(1,1,2,0) + \beta(1,-1,0,-2) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha, -2\beta)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \Rightarrow 0 = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \Rightarrow 0 = 1 \\ 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{cases}$

Impossibile.

OK

$(1,1,0,0) \notin \operatorname{Im} T$. $(1,1,0,0)$ non appartiene all'immagine.

23

NOME: D[redacted] COGNOME: [redacted] MATRICOLA: [redacted]

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 21 aprile 2023

COMPITO 1.7

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

6

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

SVOLGO IL SISTEMA DI EQ. LIN. NON OMOGENEO CON MATRICE ASSOCIATA.

SONO PRESENTI ERRORI DI SEGNO.

$$A \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

SVOLGO LE TRASFORMAZIONI PER RIDURRE A SCALINI LA MATRICE

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & \frac{47}{9} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{39}{9} & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

MOLTI, MOLTI ERRORI di calcolo.

RIDUCO COMPLETAMENTE

L'idea è corretta

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{9} & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{35}{9} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{9} & 0 \end{array}\right]$$

RANGO $(A) = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{53}{9}x_5 - 3 \\ x_2 = \frac{35}{9}x_2 + 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{8}{9}x_5 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{53}{9}x_5 - 3, \frac{35}{9}x_2 + 2, 0, \frac{8}{9}x_5, x_5 \right) \middle| x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

4 (i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (3, 2, 0, -2)$

3 (ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{(0,1,1,3), (-1,1,2,4), (0,0,0,0)\}$

$Y = \{\alpha(1,-1,0,1) + (\beta+1)(-2,1,0,1) + \beta(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{\alpha(1,-1,0,1) + \beta(2,1,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(i) $(V, K, +, \cdot) \in \mathbb{R}^4$ $\quad (S, K, +, \cdot) \in \mathbb{R}^3$

$S \subseteq V \iff$ 1) $\forall u \in V,\ 1 \cdot u = u$

2) $\forall u, v \in V,\ u + v \in V$

3) $\forall u \in V, \forall \alpha \in K,\ \alpha \cdot u \in V$

$S = \mathcal{L}((3,2,0,-2), (0,0,1,0), (0,1,0,0))$ ok

$\alpha(3,2,0,-2) + \beta(0,0,1,0) + \gamma(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$

$(3\alpha, 2\alpha + \gamma, \beta, -2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ LIN. INDIPENDENTI QUINDI OK

X: È SOTTOSPAZIO POICHÉ AMMETTE NEUTRO (VETTORE NULLO). non è sufficiente il vettore nullo

Y: NON È SOTTOSPAZIO POICHÉ NON RISPETTA LE PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI

Z: SOTTOSPAZIO VETT. POICHÉ AMMETTE LE PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI.

2 3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

PRESA UNA MATRICE $A_{m \times n}$ SU CAMPO K IL SUO RANGO È LA ~~GRANDEZZA~~ DIMENSI[ONE] DELLA SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATA DALLE COLONNE DI A:

$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$.

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

(i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (3, 2, 0, -2)$

(ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{(0, 1, 1, 3), (-1, 1, 2, 4), (0, 0, 0, 0)\}$

$Y = \{\alpha(1, -1, 0, 1) + (\beta + 1)(-2, 1, 0, 1) + \beta(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Z = \{\alpha(1, -1, 0, 1) + \beta(2, 1, 0, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(12)

NOME: [redacted] COGNOME: [redacted] MATRICOLA: [redacted]

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

Napoli, 21 aprile 2023

COMPITO 1.6

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei calcoli effettuati e fornendo spiegazioni chiare ed essenziali.

4 =

1. Con il metodo di Gauss-Jordan determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, mettendo bene in evidenza le variabili che risultano libere

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & +3 & +2 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_2 \leftrightarrow a_1$
$a_3 \leftrightarrow a_4$ perché?
$a_2 \to a_2 - 2a_1$
$a_4 \to a_4 - 3a_1$
$a_4 \to a_4 - a_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & +3 & +2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_3 \to a_3 - a_2$
$a_3 \to -\frac{a_2}{2}$
$a_2 \to -a_2$
$a_1 \to a_1 - a_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & +3 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_2 \to a_2 + 5a_3$
$a_1 \to a_1 - 3a_3$

RIDOTTA A GIANN

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2} \;(5/2) & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VARIABILI LIBERE: x_3, ~~x_4~~, x_5 ok

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_1	0	$-2x_3$	+ ~~[illegible]~~	$+\frac{1}{2}x_5$	=	-2
0	x_2	$3x_3$	0	$-\frac{3}{2}x_5$	=	3
0	0	0	x_4	$-\frac{1}{2}x_5$	=	0
0	0	0	0	0	=	0

E le soluzioni?

$\{ x_1$

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si determini

(i) un sottospazio vettoriale di dimensione 3 che contenga il vettore $u = (2, 2, 0, -2)$

(ii) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$X = \{\alpha(1, 0, 1, 2) + \beta(2, 2, -1, 0) + (\alpha + \beta)(0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$Y = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha - 2\gamma = \beta + \delta = 1\}$

$Z = \{(1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -1)\}$

3

3. Spiegare cosa è il rango di una matrice su un campo K.

IL RANGO È LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE SI

GENERATO DALLA COLONNA A: $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \subseteq K^n$

ES: $A\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim \mathcal{L}(2,0,1), (0,1,0), (0,0,1) = 3 = \text{RANGO}(A)$

IL RANGO LO POSSIAMO TROVARE ANCHE CON IL NUMERO DI PIVOT.

5

4. Data un'applicazione lineare $T : V \to W$ tra due spazi vettoriali V e W su un campo K, spiegare cosa è l'immagine di T.

Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x - 2y + z, x + y - z, 2x - y, x + z) \in \mathbb{R}^4$,

2 (i) determinare una base dell'immagine di T e dire se T è suriettiva

3 (ii) determinare il nucleo di T e dire se T è iniettiva

(iii) dire se il vettore $(0, 1, 1, 0)$ appartiene all'immagine.

$S = \{e_1, e_2, e_3\} \in \mathbb{R}^3$ $\quad$ $e_1 = 100$, $e_2 = 010$, $e_3 = 001$

$T(1,0,0) = \cancel{f}(1, 2, 2, 1)$

$T(0,1,0) = \cancel{f}(-2, +1, -1, 0)$

$T(0,0,1) = \cancel{f}(2, -1, 0, 1)$

$\mathrm{Im}\, f\, \mathcal{L}((1,1,2,1), (-2,+1,-1,0), (1,-2,0,1))$ L INDIP. è vero, perché?

~~L'IMMAGINE È SURIETTIVA : LA BASE È $\mathbb{R}^4$~~ L'appl. non è suriettiva

$\mathrm{Ker} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2y + z,\ x + y - z,\ 2x - y,\ x + z) = (0,0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - 2y + z = 0 \\ -z + y - z = 0 \\ -2z - y = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

L'applicazione ~~IL NUCLEO~~ È INIETTIVA: $x, y, z = 0$

$\mathrm{Ker}\{+2, 0, 0, 0\}$?

$D(A)$

UN PO' DI CONFUSIONE

21

Geometria a Informatica, 2022-2023, Seconda verifica intercorso

REGOLE D'ESAME

i) Sono vietati libri e calcolatrici. Si usa solo la penna!

ii) Telefoni cellulari, smartphones, tablets etc **rigorosamente** spenti.

iii) È consentito un foglio A4 fronte retro di appunti scritti a mano in un carattere *ragionevole.*

iv) Le risposte vanno giustificate (esempio: *"per la formula di cambio base..." "calcoliamo l'inversa con l'eliminazione di Gauss..." "per il criterio di diagonalizzabilità..."*).

v) Per prendere 30 è sufficiente fare correttamente uno tra gli esercizi 5-6 e altri tre esercizi.

vi) Tempo a disposizione: **110 minuti**.

1. Consideriamo gli endomorfismi $T_k, S_k \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definiti da

$$T_k\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y+z\\2x+z\\2x+ky-2z\end{pmatrix},\quad T_k\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\x+y\\kx+y+z\end{pmatrix}.$$

- Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ i morfismi $T_k \circ S_k$ e $S_k \circ T_k$ sono invertibili.
- Per $k = 1$ mostrare che $T_1 \circ S_1 \neq S_1 \circ T_1$.

2. Consideriamo l'endomorfismo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[t])$ definito da

$$T(p) = p(t) - (p(1) + p(-1))(1 + t + t^2).$$

- Mostrare che T è invertibile.
- Calcolare la matrice $(T^{-1})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{B}$ è la base $\{1 - t^2, 1 + t^2, t\}$.

3. Consideriamo la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix}-1 & k-2\\1 & -1\end{pmatrix}$$

Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $L_{A_k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile.

4. Consideriamo il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ su $\mathbb{R}^3$ definito nella base canonica dalla matrice

$$A_g = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & k+1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il prodotto è definito positivo.
- Per $k = 1$ determinare una base del sottospazio $W^{\perp}$, dove $W = \mathrm{Span}(1, 2, -1)$.

5. Consideriamo le due matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Mostrare che esiste al più un singolo $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k può essere simile a A'.[1]
- Mostrare che A' è diagonalizzabile e trovare una base di autovettori per A'.
- Determinare se esiste un $k \in \mathbb{R}$ per cui le matrici A_k e A' sono simili.

6. Consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard, e

$$W : x - y + z = 0, \quad v_k = (-1, 1, k).$$

- Trovare una base ortogonale di W.
- Trovare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su W nella base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- Determinare tutti i $k \in \mathbb{R}$ per cui la distanza tra v_k e W è uguale a 1.

[1] Ricordiamo che due matrici A, A' sono simili se e solo se esiste B invertibile tale che $A = B^{-1}A'B$, o equivalentmente se rappresentano la stessa applicazione lineare in due basi diverse.

TEST 1

4

1. Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *indipendente*.

4 −

2. Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa vuol dire che un vettore $u \in V$ è combinazione lineare dei vettori di S?

4

3. Cosa è una base di uno spazio vettoriale V su un campo K?

4

4. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:  ok

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per 2 quello già disegnato:  ok

4

5. Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1,2,1),(1,3,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(0,0,2)$; (b) $(0,1,-1)$; (c) $(0,1,2)$; (d) $(1,0,0)$.

sì

4

6. Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(1,0),(0,0)\}$; (b) $\{(1,2)\}$; (c) $\{(0,2),(1,-1)\}$; (d) $\{(3,1),(1,1),(-1,1)\}$.

sì

6

7. Nello spazio vettoriale **V** dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare, si considerino due vettori u_1, u_2 linearmente indipendenti.

(1) Preso il vettore $w = 4u_2 + 7u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente?
∘ Sì ∘ No ok

(2) Gli insiemi $\{u_1, u_1 + 3u_2\}$ e $\{u_1 - u_2, u_2\}$ generano lo stesso sottospazio vettoriale?
∘ Sì ∘ No ok

23

NOME [redacted] COGNOME [redacted] MATRICOLA [redacted]

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

4 **1.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *dipendente*.

S è linearmente dipendente $\iff \exists\, a_1, \dots, a_n \in K$:
$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \underline{0}$
con $a_1, a_2, \dots, a_n$ NON tutti nulli. SI

4 **2.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è un sistema di generatori di V.

S è un sistema di generatori di $V \iff \mathcal{L}(S) = V$

OK

4 **3.** Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, cosa è la dimensione di V?

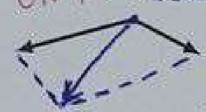
$\dim(V) = |B|$ dove B è una base qualsiasi di V

SI

4- **4.** Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

UN PO' IMPRECISO, ma può andare

metodo del parallelogramma



Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per 3 quello già disegnato:

• stesso verso
• stessa direz.
• 3 volte il modulo

0 **5.** Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1,4,-2), (0,1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(1,3,0)$; (b) $(0,1,5)$; (c) $(1,-1,0)$; (d) $(1,2,0)$.

NO

4 **6.** Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(0,0),(0,1)\}$; (b) $\{(-1,1),(1,0)\}$; (c) $\{(2,1)\}$; (d) $\{(1,1),(1,-1),(1,3)\}$.

SI

3 **7.** Nello spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori liberi della geometria elementare, siano u_1, u_2 due vettori linearmente indipendenti.

(1) L'insieme $\{u_1, 2u_1\}$ è linearmente indipendente?
○ Sì ☒ No

(2) L'insieme $\{u_1 - u_2, u_2\}$ è linearmente chiuso?
☒ Sì ○ No

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

1

1. Dato un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *indipendente*.

QUALI VETTORI

$(V, k, +, \cdot)$ si dice linearmente indipendenti se si possono esprimere i vettori come combinazione lineare di scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, tutti nulli. Del tipo: $\rightarrow$ e che diano il vettore nullo come risultato.

MA questo è SEMPRE VERO

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \ldots + \lambda_n v_n = \underline{0}$$

NECESSARIAMENTE

ATTENZIONE UN PO' DI CONFUSIONE

4

2. Dato un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è un sistema di generatori di V.

$(V, k, +, \cdot)$ $S \subseteq V$ e $\mathcal{L}(S) = V$ — chiusura lineare

S è un sistema di generatori se posso esprimere i vettori V come combinazione lineare dei vettori di S e che sia: $\mathcal{L}(S) = V$. OK

4

3. Cosa è una base di uno spazio vettoriale V su un campo K?

Una base è un sistema di generatori linearmente indipendente.
Infatti un sistema di gen. di questo tipo contiene una base e la si può estrarre grazie ad un teorema.

4

4. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

OK

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per 3 quello già disegnato:

4

5. Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(2,1,1), (3,1,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(0,0,2)$; ~~(b)~~ $(1,0,-1)$; (c) $(1,0,2)$; (d) $(0,1,0)$.

SI

4

6. Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(0,0),(0,1)\}$; ~~(b)~~ $\{(-1,1),(1,0)\}$; (c) $\{(2,1)\}$; (d) $\{(1,1),(1,-1),(1,3)\}$.

SI

0

7. Nello spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori liberi della geometria elementare, siano u_1, u_2 due vettori linearmente indipendenti.

(1) L'insieme $\{u_1, 3u_2\}$ è linearmente indipendente?
○ Sì ✗ No

(2) Gli insiemi $\{u_1, 3u_1\}$ e $\{u_1 - u_2, u_2\}$ generano lo stesso sottospazio vettoriale?
✗ Sì ○ No

30

NOME: [redacted] COGNOME: [redacted] MATRICOLA: [redacted]

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

4 **1.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *dipendente*.

scriver (meglio)

S è linearmente dipendente se il vettore nullo si può comporre come combinazione lineare tra i vettori $v_1 \dots v_n$ e n scalari non tutti nulli OK

4 **2.** Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è una combinazione lineare di n vettori $v_1, \dots, v_n$ di V?

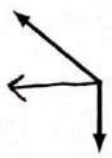
Una combinazione lineare è il risultato dell'operazione

$\cdot\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ VA BENE

con $\alpha_1 \dots \alpha_n$ scalari in K, $n \in \mathbb{N}^*$ e $v_1 \dots v_n$ vettori di V

4 **3.** Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, cosa è la dimensione di V?

La dimensione di uno spazio vettoriale V è la cardinalità di una sua base SI



SI

4 **4.** Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -2 quello già disegnato: 

4 **5.** Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1,1,2), (0,1,3)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(2,0,0)$; (b) $(2,0,1)$; ~~(c)~~ $(-1,0,1)$; (d) $(0,1,0)$.
SI

4 **6.** Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
~~(a)~~ $\{(1,-1),(0,1)\}$; (b) $\{(1,0),(2,0)\}$; (c) $\{(2,1)\}$; (d) $\{(1,0),(-1,1),(3,2)\}$.
SI

6 **7.** Nello spazio vettoriale **V** dei vettori liberi della geometria elementare, siano u_1, u_2 due vettori linearmente indipendenti.

(1) Preso il vettore $z = u_1 - 3u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, z\}$ è linearmente dipendente?
~~o~~ Sì o No OK

(2) L'insieme $\{\alpha u_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di **V**? ~~o~~ Sì o No

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

4 **1.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *dipendente*.

S è lin dip se esistono n scalari ~~...~~ $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ (non tutti nulli) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ OK

4= **2.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa vuol dire che un vettore $u \in V$ è combinazione lineare dei vettori di S?

che u si può scrivere come $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m v_m$ | $\lambda_1 \dots \lambda_m \in K$, $u_1 \dots v_m \in S$, $m \in \mathbb{N}^*$ questo è forzato

4 **3.** Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, cosa è la dimensione di V?

dim $V = n$ se $[S \subseteq V \quad \mathcal{L}(S) = V \quad S = \{u_1, \dots, u_t\} \quad t = n]$

(la dim di V è la cardinalità ~~delle~~ delle basi) dim $V = |B|$ OK

(Una base è un sistema di generatori lin indip)

4 **4.**

SI

Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per 2 quello già disegnato:

4 **5.** Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1,1,2),(0,1,3)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(2,0,0)$; (b) $(2,0,1)$; ~~(c)~~ $(-1,0,1)$; (d) $(0,1,0)$.

SI

4 **6.** Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(1,0),(0,0)\}$; (b) $\{(1,2)\}$; ~~(c)~~ $\{(0,2),(1,-1)\}$; (d) $\{(3,1),(1,1),(-1,1)\}$.

SI

6 **7.** Nello spazio vettoriale **V** dei vettori liberi della geometria elementare, siano u_1, u_2 due vettori linearmente indipendenti.

(1) Preso il vettore $z = u_1 - 3u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, z\}$ è linearmente dipendente?
☒ Sì ○ No

(2) L'insieme $\{u_1, u_2\}$ è linearmente chiuso? OK
○ Sì ☒ No

Non è uscito alle lezioni

17

NOME [redacted] COGNOME [redacted] MATRICOLA [redacted]

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

0 **1.** Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *indipendente*.

~~[illegible]~~ PRESO $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ E' LINEARMENTE INDIPENDENTE SE E SOLO SE $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ CON ALCUNI SCALARI NULLI

NO

$v_1\lambda_1 + \dots + v_n\lambda_m \neq 0$

2. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è una combinazione lineare di n vettori $v_1, \dots, v_n$ di V?

3. Cosa è una base di uno spazio vettoriale V su un campo K?

UN PO' IMPRECISO
ma l'idea c'è

3 **4.** Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:
Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -2 quello già disegnato: 

4 **5.** Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1, 2, 1), (1, 3, 0)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(0, 0, 2)$; (b) $(0, 1, -1)$; (c) $(0, 1, 2)$; (d) $(1, 0, 0)$.
SI

4 **6.** Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(1, -1), (0, 1)\}$; (b) $\{(1, 0), (2, 0)\}$; (c) $\{(2, 1)\}$; (d) $\{(1, 0), (-1, 1), (3, 2)\}$.
SI

6 **7.** Nello spazio vettoriale **V** dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare, si considerino due vettori u_1, u_2 linearmente indipendenti.

(1) Preso il vettore $w = 4u_2 - 7u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente?
○ Sì ⊗ No

ok

(2) Gli insiemi $\{u_1, u_2\}$ e $\{u_1 - u_2, u_2\}$ generano lo stesso sottospazio vettoriale?
⊗ Sì ○ No

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 1

3

1. Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa significa che S è linearmente *dipendente*.

PRESO UN INSIEME $S = \{v_1, \dots v_m\}$ DI VETTORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V, QUESTO SI DICE LINEARMENTE DIPENDENTE SE E SOLO SE PRESI $\lambda_1, \dots \lambda_m \in K$ NON TUTTI NULLI
$u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \dots + u_m\lambda_m = 0$

ESISTONO

0

2. Dato un insieme $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K, spiegare cosa è la chiusura lineare di S.

LA CHIUSURA LINEARE DI S $\mathcal{L}(S)$ È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DELLO SPAZIO VETTORIALE $(V, K, +, \cdot)$

NO, ATTENZIONE

4

3. Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, cosa è la dimensione di V?

LA DIMENSIONE DI V ($\dim(V)$) È LA CARDINALITÀ DI OGNI BASE DI V

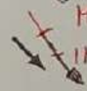
SI

1

4. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

NO (attenzione al verso)

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -3 quello già disegnato:



MOLTO IMPRECISO

0

5. Quale dei seguenti vettori appartiene al sottospazio vettoriale generato da $S = \{(1, 4, -2), (0, 1, -1)\}$ in $\mathbb{R}^3$? (a) $(1, 3, 0)$; (b) $(0, 1, 5)$; (c) $(1, -1, 0)$; (d) $(1, 2, 0)$.

NO

0

6. Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$?
(a) $\{(1, 3), (0, 0)\}$; (b) $\{(1, 1), (-1, 1), (3, 1)\}$; (c) $\{(1, 2)\}$; (d) $\{(1, -1), (0, 1)\}$.

NO

6

7. Nello spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori liberi della geometria elementare, siano u_1, u_2 due vettori linearmente indipendenti.

(1) L'insieme $\{u_1, 2u_1\}$ è linearmente indipendente? LA MIA RISPOSTA È NO
NO ~~Sì~~ ☒ No

(2) L'insieme $\{\beta u_2 : \beta \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$? ☒ Sì ○ No OK

26 → 30

NOME: [redacted] COGNOME: [redacted] MATRICOLA: [redacted]

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 2

4 =

1. Cosa è un *autovalore* di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V su un campo K?

Sia $\lambda \in K$ $\quad V_\lambda = \{ u \in V \mid T(u) = \lambda u \ \cancel{\forall u \in V} \}$

Se $\{\underline{0}\} \subsetneq V_\lambda$ allora λ si dice autovalore di T

4 =

2. Cosa vuol dire che un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V di dimensione n su un campo K è *diagonalizzabile*?

T è diagonalizzabile $\iff$ ogni sua matrice è diagonalizzabile

è diagonalizzabile $\iff$

$A = M_B(T)$ $\quad \tilde{A}$ diagonale $\quad \exists P \in Gl_n(K)$: $A = P^{-1} \tilde{A} P$

B base di V

più ordine, ordine mi un po' confuso

5

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione n. Cosa è un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di E? Cosa sono le coordinate di un punto P di E in $\mathcal{R}$?

$\mathcal{R} = (O, B)$ dove $O \in \mathcal{E}$ (origine del riferimento) e B è una ~~una~~ base $\boxed{\text{ortonormale}}$

$P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots x_n)$ componenti in B del vettore $\vec{OP}$

4

4. Quale delle seguenti matrici è l'inversa di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

SI

4

5. Quale delle seguenti matrici è la matrice di passaggio tra due basi ordinate di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

SI

4

6. Quale dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ è autovettore dell'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (-x, y, y + 3z)$? (a) $(1, 1, 0)$; (b) $(0, 1, 1)$; (c) $(1, 0, 0)$; (d) $(3, 0, 2)$.

SI

4

7. Quale dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ ha lunghezza 1 rispetto al prodotto scalare numerico?
(a) $(1, 0, 1)$; (b) $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$; (c) $(2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 0)$

SI

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo DF-M) A.A. 2022-2023
Laurea in Informatica

TEST 2

1. Cosa è un *autospazio* di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V su un campo K?

2. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A di ordine n su un campo K è *diagonalizzabile*?

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione n. Cosa è un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di E? Cosa sono le coordinate di un punto P di E in $\mathcal{R}$?

4. Quale delle seguenti matrici è l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Quale delle seguenti matrici è la matrice di passaggio tra due basi ordinate di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Quale dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ è autovettore dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ determinato dalla matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$? (a) $(2,1)$; (b) $(-2,1)$; (c) $(1,-1)$; (d) $(0,3)$.

7. Quale delle seguenti basi di $\mathbb{R}^2$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare numerico?
(a) $\{(1,1),(0,-1)\}$; (b) $\{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\}$; (c) $\{(1,\sqrt{2}),(-1,1/\sqrt{2})\}$

TEST 2 1

endomorf. $T: V \to V$ 2 **1.** Cosa è un *autovalore* di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V su un campo K?

PRESO $\lambda \in K$ ~~[illegible]~~ QUESTO SI DEFINISCE AUTOVALORE LO SCALARE λ:

$T(u) \mapsto \lambda u$ e poi?

2 **2.** Cosa vuol dire che un $\boxed{\text{endomorfismo } T}$ di uno spazio vettoriale V di dimensione n su un campo K è *diagonalizzabile*?

UNA MATRICE $A \in M_n(K)$ ~~[illegible]~~ SI DEFINISCE DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ È SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE

OVVERO PRESA UNA MATRICE ~~D~~IAGONALE A E UNA MATRICE $\bar{A}$, QUESTA È DEFINITA DIAGONALIZZ. SE $P^{-1}AP = \bar{A}$ SI e l'endomorfismo? Attenzione alla domanda!!

3 **3.** Sia E uno spazio euclideo di dimensione n. Cosa è un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di E? Cosa sono le coordinate di un punto P di E in $\mathcal{R}$? punto di origine

+1 UN RIFERIMENTO CARTESIANO IN E È UN INSIEME $R(O, B)$ DOVE $O \in E$ E B È UNA BASE ORDINATA (ortonormale) DI $\vec{E}$

LE COORDINATE DI UN PUNTO P cosa sono?

4. Quale delle seguenti matrici è l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$; ~~(b)~~ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ~~(c)~~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

NO

4 **5.** Quale delle seguenti matrici è la matrice di passaggio tra due basi ordinate di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; ~~(b)~~ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

SI

1 **6.** Quale dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ è autovettore dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ determinato dalla matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$? ~~(a)~~ $(2, 1)$; (b) $(-2, 1)$; ~~(c)~~ $(1, -1)$; (d) $(0, 3)$.

7. Quale delle seguenti basi di $\mathbb{R}^2$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare numerico?
(a) $\{(1,1), (1,-1)\}$; (b) $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$; ~~(c)~~ $\{(1, \sqrt{2}), (-1, 1/\sqrt{2})\}$

NO