Richiami:

Campo

Un **campo** $(K, +, \cdot)$ è una struttura algebrica composta da un insieme non vuoto (K) e da due operazioni binarie (somma $+$ e prodotto $\cdot$)

NOTA: Nel campo le operazioni sono solo tra scalari

Spazio vettoriale

Uno **sp. vettoriale su un campo K** è un insieme non vuoto di vettori V dotato di 2 OPERAZIONI binarie, addizione tra vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare che verificano le proprietà:

- COMMUTATIVA

$\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ con $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$

- ASSOCIATIVA

$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

- ESISTENZA VETTORE NULLO

$\exists \bar{0} \in V \mid \bar{v} + \bar{0} = \bar{v} = \bar{0} + \bar{v}$

- ESISTENZA VETTORE OPPOSTO

$\forall \bar{v} \ \exists -\bar{v} \in V \mid \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

- PRODOTTO DI UNO SCALARE per UN VETTORE

$(a \underset{\uparrow}{\cdot} b) \underset{\uparrow}{\cdot} \bar{v} = a \cdot (b \cdot \bar{v})$ con $a, b \in K$

prodotto fra scalari — prodotto di uno scalare per un vettore

- PROPRIETA' DISTRIBUTIVA

$(a+b) \cdot \bar{v} = a \cdot \bar{v} + b \cdot \bar{v}$

$a(\bar{v} + \bar{w}) = a \cdot \bar{v} + a \cdot \bar{w}$

- ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE

$1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

NOTA: Gli elementi di uno spazio vettoriale possono anche non essere "vettori" => possono essere matrici (es. $\mathbb{R}^{m,n}$ spazio vett. con op. di somma di matrici ad elementi reali e prodotto di una mat. per un numero reale), funzioni o polinomi (es. $\mathbb{R}[t]$ vedi dopo)

1) Dimostrare che $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale, cioè lo spazio vettoriale dei polinomi sul campo $\mathbb{R}$

Sia $R[x]$ l'insieme dei polinomi nella variabile x a coeff. reali

$$R[x]=\{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n \mid n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha_i\in\mathbb{R}\}$$

le operazioni di somma di polinomi e prodotto di polinomio per un numero reale conferiscono a $R[x]$ la struttura di sp. vettoriale reale:

- SOMMA TRA POLINOMI

sommando due polinomi di grado $\leq m$ ottengo ancora un polinomio di grado $\leq m$

$p=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n$ $\quad p=1+x+x^2$ $\quad$ ipotizzo $n\leq m$

$q=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_m x^m$ $\quad q=2+x+3x^2+x^3$

$$p+q=(\alpha_0+\beta_0)+x(\alpha_1+\beta_1)+x^2(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+x^n(\alpha_n+\beta_n)+x^{n+1}\beta_{n+1}+\ldots+x^m\beta_m$$

$$(1+2)+x(1+1)+x^2(1+3)+x^3$$

- PRODOTTO PER UNO SCALARE

LAMBDA

moltiplicando un polinomio di grado $\leq n$ per una costante ottengo ancora un polin. di grado $\leq n$

$$\lambda\cdot p=\lambda\cdot(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n)=\lambda\alpha_0+\lambda\alpha_1 x+\lambda\alpha_2 x^2+\ldots+\lambda\alpha_n x^n$$

$\Rightarrow$ $R[x]$ è chiuso rispetto alle due operazioni

- ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO PER LA SOMMA:

ed è pari al polinomio nullo, quello in cui tutti i coefficienti $\alpha_i=0$ (e quindi la somma è commutativa)

- ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO PER IL PRODOTTO

ed è pari al polinomio in cui $\alpha_{i=1,\ldots,n}=0$ e $\alpha_0=1$

- ESISTE IL POLINOMIO OPPOSTO

$p=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n$

$-p=-\alpha_0-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\ldots-\alpha_n x^n$

- mancano proprietà associativa e distributiva

basta prendere polinomi generici e verificare con i conti

2) Dati t vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo $\mathbb{R}$, cosa vuol dire che un vettore $\bar{v}$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

Vuol dire che esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ (scalari) tali che il vettore $\bar{v}$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t$ mediante quegli scalari:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_t \bar{v}_t \qquad \text{con } \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$$

Sottospazio vettoriale

Un sottoinsieme W di uno sp. vettoriale V $(W \subseteq V)$ è un sottospazio vettoriale di V se W è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V, ossia se è CHIUSO rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalari definite in V, cioè

- $\bar{0} \in W$ (appartenenza del vett. nullo)
- $\forall \bar{x}, \bar{y} \in W \rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in W$ (chiusura rispetto alla somma)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{x} \in W \rightarrow \lambda \bar{x} \in W$ (chiusura risp. al prodotto con uno scalare)

3) Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo $\mathbb{R}$, cos'è un sottospazio vettoriale di V?

Se W è un sottoinsieme non vuoto dello spazio vettoriale V e se risulta che $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in W$ $\forall \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$ (chiusura somma)

e che $\lambda \bar{w} \in W$ $\forall \bar{w} \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ch. prodotto)

Allora W è un sottospazio vettoriale di V

NOTA: Il fatto che W debba essere non vuoto può anche essere rimpiazzato con la richiesta che il vettore nullo debba appartenervi

Esercizi sugli insiemi linearmente chiusi

Un insieme W è chiuso rispetto a un'operazione se applicando l'operazione a qualsiasi elemento dell'insieme, l'elemento risultante appartiene ancora all'insieme.

1) Quali dei seguenti sottoinsiemi dello sp. vett. numerico $\mathbb{R}^3$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

1.1 $X = \{\alpha(2,1,-1)+(1,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ => non è linearm. chiuso

$\{(2\alpha+1, \alpha, 1-\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

NOTA: il sottoinsieme in questione rappresenta una retta passante per il punto $P(1,0,1)$ di direzione $(2,1,-1)$ => non passa per l'origine

- vettore nullo $\notin X$, infatti

$$\begin{cases} x = 2\alpha+1 \\ y = \alpha+0 \\ z = -\alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha+1 \\ 0 = \alpha \\ 0 = -\alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

ho 3 risultati diversi è imp.
⇓
sicuramente non sarà un sottospazio

- Chiusura rispetto alla somma NO

Scelgo 2 vettori generici $\in X$ ad es.

vettori

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u} = \alpha_1(2,1,-1)+(1,0,1) \\ \bar{w} = \alpha_2(2,1,-1)+(1,0,1) \end{array}\right\} \in X$$

e ne calcolo la somma, per verificare se anche $\bar{u}+\bar{w} \in X$

$\bar{u}+\bar{w} = (\alpha_1+\alpha_2)(2,1,-1) + \underline{(2,0,2)} \notin X$

↳ avrei dovuto avere $(1,0,1)$

- Chiusura rispetto al prodotto NO

Scelgo uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico vettore $\bar{u} \in X$ e ne calcolo il prodotto, per poter verificare se anche $\lambda\bar{u} \in X$

$\lambda\bar{u} = \lambda\alpha_1(2,1,-1) + \underline{\lambda(1,0,1)} \notin X$

↳ avrei dovuto avere $(1,0,1)$ e non $\lambda \cdot (1,0,1)$

1.2 $Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- vettore nullo $\notin Y$

poiché scegliendo $a = b = 0$ si ottiene $0=1$ impossibile!

in alternativa si può osservare che $a+b=1$ non è una retta

che passa per l'origine $\Rightarrow$ Y non è un sottosp. vettoriale sicuramente non è linearmente chiuso $\Rightarrow$ continuiamo per completezza

- chiusura rispetto alla somma NO

Scelgo 2 vettori generici $\in Y$ ad es. $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1) \mid x_1 + y_1 = 1$

$\bar{w} = (x_2, y_2, z_2) \mid x_2 + y_2 = 1$

verifico se $\bar{u} + \bar{w} \in Y$

$\bar{u} + \bar{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \mid \overbrace{x_1 + y_1}^{1} + \overbrace{x_2 + y_2}^{1} = 2$

$\underbrace{x_1 + x_2}_{a} + \underbrace{y_1 + y_2}_{b} = 2$ $\Rightarrow$ avrei dovuto avere 1

$\bar{u} + \bar{w} \notin Y$

- chiusura rispetto al prodotto NO

Scelgo uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico vettore $\bar{u} \in Y$

e ne calcolo il prodotto, per poter verificare se anche $\lambda \bar{u} \in Y$

$\lambda \bar{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ $\quad \bar{u} = (x_1, y_1, z_1) \mid x_1 + y_1 = 1$

$\lambda(\underbrace{x_1 + y_1}_{1}) = \lambda \cdot 1 = \lambda$ $\Rightarrow$ avrei dovuto avere 1

es. numerico $\quad \bar{u} = (3, -2, 1) \quad \lambda = 2$

$\lambda \bar{u} = 2(3, -2, 1) = (6, -4, 2)$

ma $a + b = 1$

$6 + (-4) = 2$ $\Rightarrow$ e non 1

$\underline{1.3}$ $W = \{\alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- vettore nullo $(0,0,0) \in W$

  semplicemente scegliendo $\alpha = \beta = 0$

  in alternativa

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 0 = -\alpha + \beta \\ 0 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \alpha = \beta \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

$\Rightarrow$ W potrebbe essere un sottospazio

- <u>chiusura rispetto alla somma</u> SI

Scelgo 2 vettori generici $\in W$ ad es. $\bar{u} = \alpha_1(1,-1,2) + \beta_1(2,1,1)$

$\bar{\omega} = \alpha_2(1,-1,2) + \beta_2(2,1,1)$

verifico se $\bar{u} + \bar{\omega} \in W$

$$\bar{u} + \bar{\omega} = (\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\in \mathbb{R}})(1,-1,2) + (\underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\in \mathbb{R}})(2,1,1) \in W$$

(basta porre $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$)

- <u>chiusura rispetto al prodotto</u> SI

Scelgo uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico vettore $\bar{u} \in W$

e ne calcolo il prodotto, per poter verificare se anche $\lambda \bar{u} \in W$

$$\lambda \bar{u} = \lambda[\alpha_1(1,-1,2) + \beta_1(2,1,1)]$$
$$= \underbrace{\lambda\alpha_1}_{\in \mathbb{R}}(1,-1,2) + \underbrace{\lambda\beta_1}_{\in \mathbb{R}}(2,1,1)$$

(basta porre $\alpha = \lambda\alpha_1$, $\beta = \lambda\beta_1$)

2) Quale dei seguenti sottinsiemi del sostegno R[t] dello sp. vettoriale dei polinomi a variabile t a coeff. in $\mathbb{R}$ è lineam. chiuso rispetto alle operazioni definite su R[t]?

2.1 $Z = \{ at + a^2t^2 \mid a \in \mathbb{R} \}$

- vettore nullo $\in Z$ $\Rightarrow$ potrebbe essere un sottospazio

  prendo $a = 0$ si vede subito che $0 \in Z$

- chiusura rispetto alla somma NO

  Considero 2 generici polinomi $\in Z$ $\quad p(t) = a_1 t + a_1^2 t^2$

  $q(t) = a_2 t + a_2^2 t^2$

  e verifico se $p(t) + q(t) \in Z$

  $p(t) + q(t) = (a_1 + a_2)t + \underline{(a_1^2 + a_2^2)t^2}$

  ↳ avrei dovuto avere un quadrato di binomio $(a_1 + a_2)^2$

- chiusura rispetto al prodotto NO

  Scelgo uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico polinomio $p(t) \in Z$ e ne calcolo il prodotto, per poter verificare se anche $\lambda p(t) \in Z$

  $\lambda p(t) = \lambda(a_1 t + a_1^2 t^2) = \lambda a_1 + \underline{\lambda a_1^2 t^2}$

  ↳ avrei dovuto avere $(\lambda a_2)^2$

  (basta porre $a = \lambda a_1$, $a^2 = \lambda^2 a_1^2$)

2.2 $T = \{ a + (a+b)t + bt^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

- vettore nullo

  $a = b = 0$ si vede subito che $\in T$ ⇒ potrebbe essere un sottospazio

- chiusura rispetto alla somma SI

  Considero 2 generici polinomi $\in T$ $p(t) = a_1 + (a_1 + b_1)t + b_1 t^2$

  $q(t) = a_2 + (a_2 + b_2)t + b_2 t^2$

  e verifico se $p(t) + q(t) \in T$

  $$p(t) + q(t) = (a_1 + a_2) + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)t + (b_1 + b_2)t^2$$
  $$= (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + b_1 + b_2)t + (b_1 + b_2)t^2 \in T$$

  (basta porre $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$)

- chiusura rispetto al prodotto SI

  Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico polinomio $\in T$

  e verifico se $\lambda p(t) \in T$

  $$\lambda p(t) = \lambda [a_1 + (a_1 + b_1)t + b_1 t^2] = \lambda a_1 + (\lambda a_1 + \lambda b_1)t + (\lambda b_1)t^2 \in T$$

  (basta porre $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$)

  (T è un sottosp. vettoriale)

3) Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $M_{2x2}(\mathbb{R})$ dello sp. vettoriale delle matrici su $\mathbb{R}$ di tipo 2x2 è lin. chiuso rispetto alle operazioni definite su $M_{2x2}(\mathbb{R})$?

3.1 $H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$

- vettore nullo $\in H$ basta scegliere $a=b=0$

- chiusura rispetto alla somma NO

Scelgo 2 generiche matrici $\in H$ $A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & y_1 \\ x_1-y_1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x_2y_2 & y_2 \\ x_2-y_2 & 0 \end{pmatrix}$

e verifico se $A+B \in H$

$$A+B = \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 & y_1+y_2 \\ x_1-y_1+x_2-y_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x_1y_1+x_2y_2} & y_1+y_2 \\ (x_1+x_2)-(y_1+y_2) & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta non rispetta la condizione imposta da H se ad es. poniamo

$a = x_1+x_2$
$b = y_1+y_2$ si ottiene $\begin{pmatrix} \cancel{x_1y_1+x_2y_2} & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix}$ sarebbe dovuta essere $(x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$

- chiusura rispetto al prodotto NO

Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in H$ e verifico se $\lambda A \in H$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} x_1y_1 & y_1 \\ x_1-y_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda x_1y_1} & \lambda y_1 \\ \lambda x_1 - \lambda y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

avrei dovuto avere $\lambda x_1 \lambda y_1 = \lambda^2 x_1y_1$

La matrice ottenuta non rispetta la condizione imposta da H ponendo

$$\begin{cases} a = \lambda x_1 \\ b = \lambda y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{\frac{1}{\lambda}ab} & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \notin H$$

3.2 $K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

- vettore nullo

- chiusura rispetto alla somma

- chiusura rispetto al prodotto

Esercizi sui sottospazi vettoriali

Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

1) $Y = \{a_0 + a_1 x + a_0 a_1 x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2[x]$

- vettore nullo SI

  se prendo $a_0 = a_1 = 0$ si vede subito che $0 \in Y$

- chiusura rispetto alla somma NO

  Considero 2 generici polinomi $\in Y$ $\quad p(t) = a + bx + abx^2$

  $q(t) = c + dx + cdx^2$

  e ne considero la somma

  $$p(t) + q(t) = (\underbrace{a+c}_{a_0}) + (\underbrace{b+d}_{a_1})x + (\overbrace{ab + cd}^{\neq\, a_0 \cdot a_1})x^2 \notin Y \Rightarrow$$

  NON è un sottospazio vettoriale

  ↳ avrei dovuto avere $(a+c)(b+d)$

- chiusura rispetto al prodotto

  Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico polinomio $\in Y$ $\quad p(t)$

  e ne considero il prodotto

  $$\lambda p(t) = \lambda[a + bx + abx^2] = \underbrace{\lambda a}_{a_0} + \underbrace{\lambda b}_{a_1}x + \overbrace{\lambda ab}^{\neq\, a_0 \cdot a_1}x^2$$

  ↳ avrei dovuto avere $\lambda a \lambda b = \lambda^2 ab$

2) $T = \{(0, \alpha+\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ => è un sottospazio vettoriale

- vettore nullo SI

  ad es. scelgo $\alpha = \beta = 0$ si vede subito che $(0,0,0) \in T$

- chiusura rispetto alla somma SI

  Considero 2 generici vettori $\in T$: $\bar{u} = (0, \alpha_1 + \beta_1, \beta_1)$

  $\bar{\omega} = (0, \alpha_2 + \beta_2, \beta_2)$

  e ne considero la somma

  $\bar{u} + \bar{\omega} = (0, \alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2, \beta_1+\beta_2) = (0, (\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2), (\beta_1+\beta_2)) \in T$

  (basta porre $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$)

- chiusura rispetto al prodotto SI

  Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e un generico vettore $\bar{u} \in T$

  e verifico se $\lambda \bar{u} \in T$

  $\lambda \bar{u} = \lambda(0, \alpha_1+\beta_1, \beta_1) = (0, \lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1, \lambda\beta_1) \in T$

  (basta porre $\alpha = \lambda\alpha_1$, $\beta = \lambda\beta_1$)

3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

- vettore nullo SI

scelgo $a = b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

- chiusura rispetto alla somma SI

Considero 2 generiche matrici $\in W$ $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$

e verifico se $A + B \in W$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

(basta porre $\begin{matrix} a = a_1 + a_2 \\ b = b_1 + b_2 \end{matrix}$)

- chiusura rispetto al prodotto SI

Considero $\lambda \in \mathbb{R}$ e una generica matrice $A \in W$

e verifico se $\lambda A \in W$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ \lambda b_1 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

(basta porre $\begin{matrix} a = \lambda a_1 \\ b = \lambda b_1 \end{matrix}$)

4) $X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2\times2}(\mathbb{R})$

- vettore nullo

- chiusura rispetto alla somma

- chiusura rispetto al prodotto

5) $Z = \{ a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$

- vettore nullo

- chiusura rispetto alla somma

- chiusura rispetto al prodotto