Consideriamo i due seguenti spazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ $\Lsh$ ogni sottospazio vettoriale è anche sp. vettoriale a sé stante, quindi possono essere chiamati spazi vettoriali

$$U_1 = \langle(1,1,1,1),(0,1,1,1),(22,10,11,5),(0,0,2,0),(0,0,0,5),(3,2,5,8)\rangle$$

e

$$U_2 = \langle(2,0,0,3),(0,0,0,2)\rangle$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da la seguente posizione $f(a,b,c,d) = (a,c,d)$. Determinare la dimensione e una base del seguente spazio vettoriale

$$f((U_1 \cap U_2) + \langle(0,1,0,0)\rangle)$$

di $\mathbb{R}^3$.

Per prima cosa calcoliamo una base di $U_1 \cap U_2$, per far ciò prendiamo una base di U_1 e di U_2

- Base di U_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 22 & 10 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -22R_1+R_3 \\ \\ \\ -3R_1+R_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 12R_2+R_3 \\ \\ \\ R_2+R_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}R_4+R_3 \\ \\ -\frac{3}{2}R_4+R_5 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 4 $\Rightarrow$ il rango è massimo, però è inferiore al n° di vettori

Perciò i vettori di U_1 sono linearmente dipendenti

Poiché U_1 ha dimensione 4 una possibile base sarà formata da 4 vettori lin. INDIPENDENTI:

Ad es. $B_{U_1} = \{(1,1,1,1)(0,1,1,1),(22,10,11,5),(0,0,0,5)\}$

- Base di U_2

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Il rango della matrice è 2 (rango è massimo e pari al n° di vettori)

Perciò i vettori di U_2 sono lin INDIP e i suoi vettori costituiscono già una base: $B_{U_2} = \{(2,0,0,3),(0,0,0,2)\}$

• Base di $U_1 \cap U_2$

Per definizione di intersezione un qualsiasi vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^4$ appartiene a $U_1 \cap U_2$ se e solo se $\underline{v} \in U_1$ e $\underline{v} \in U_2$, cioè se il vettore $\underline{v}$ può essere espresso come comb. lineare dei vettori della base di U_1 e come comb. lineare dei vettori della base di U_2:

$$\underline{v} = \alpha_1(1,1,1,1) + \alpha_2(0,1,1,1) + \alpha_3(22,10,11,5) + \alpha_4(0,0,0,5) \quad e$$

$$\underline{v} = \beta_1(2,0,0,3) + \beta_2(0,0,0,2)$$

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_1 + 22\cdot\alpha_3 = 2\beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 10\cdot\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 11\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4 = 3\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{posso semplificare sfruttando la matrice}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 22 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ -R_2+R_3 \\ -R_2+R_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 22 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 22\alpha_3 = 2\beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 10\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ -5\alpha_3 + 5\alpha_4 = 3\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_4 = 3\beta_1 + 2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \frac{\cancel{5}\alpha_4}{\cancel{5}} = \frac{3\beta_1}{5} + \frac{2\beta_2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\beta_1 \\ \alpha_2 = -2\beta_1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = \frac{3}{5}\beta_1 + \frac{2}{5}\beta_2 \end{cases}$$

Poiché

$$\underline{v} = \beta_1(2,0,0,3) + \beta_2(0,0,0,2) \quad \Rightarrow \quad B_{U_1 \cap U_2} = \{(2,0,0,3),(0,0,0,2)\}$$

- Base di $((U_1 \cap U_2) + \langle(0,1,0,0)\rangle)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Il rango è 3 (max e pari al numero di vettori), perciò i 3 vettori sono lin. INDIP e costituiscono già una base della somma dei sottospazi $(U_1 \cap U_2)$ e $\langle 0,1,0,0 \rangle$

$B = \{(2,0,0,3),(0,0,0,2),(0,1,0,0)\}$

- A questo punto possiamo calcolare l'immagine dei vettori della base B appena trovata attraverso

$f(a,b,c,d) = (a,c,d)$

$f(2,0,0,3) = (2,0,3)$
$f(0,0,0,2) = (0,0,2)$
$f(0,1,0,0) = (0,0,0)$

Il sottospazio vettoriale U generato dai 3 vettori è:

$U = \langle(2,0,3),(0,0,2),(0,0,0)\rangle$
la cui dimensione è $\underline{\underline{2}}$ (il vettore nullo è LIN. DIP.)

perciò una base di U è $B_U = \{(2,0,3),(0,0,2)\}$

Esercizio 2

Per quali valori del parametro reale $h \geq 2$ la funzione

$$f_h : ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow cx^h + bx^{h-1} + ax^{h-2} \in \mathbb{R}_h[x]$$

è invertibile? Determinare la funzione inversa in questi casi. Per quali valori di $h \geq 2$ la funzione è iniettiva?

Questo esercizio va risolto direttamente applicando le definizioni
Ricordiamo che un'applicazione è invertibile se è sia iniettiva che suriettiva

- Studiamo l'iniettività ricordandoci la definizione

Presi due polinomi generici ax^2+bx+c e $a'x^2+b'x+c'$ notiamo che le loro immagini sono sicuramente polinomi distinti perché sono pari a:

$$ax^2+bx+c \to cx^h+bx^{h-1}+ax^{h-2}$$
$$a'x^2+b'x+c' \to c'x^h+b'x^{h-1}+a'x^{h-2}$$

$\Rightarrow$ l'applicazione è iniettiva $\forall h \geq 2$

- Studiamo la suriettività

se $h > 2$

L'immagine del polinomio è sempre $cx^h+bx^{h-1}+ax^{h-2}$
poiché $h>2$ nell'immagine non saranno presenti polinomi costanti $\Rightarrow$ l'applicazione non è suriettiva

se $h = 2$

L'immagine del polinomio è cx^2+bx+a
quindi nell'immagine ci sono ancora tutti i polinomi di grado al più pari a 2 $\Rightarrow$ l'applicazione è suriettiva

- Calcolo della funzione inversa (per $h=2$)

Per $h=2$

$$ax^2+bx+c \to cx^2+bx+a$$

cosa fa l'applicazione? Scambia a e c

Quindi l'inversa è propio sé stessa (perché applicandola 2 volte riscambia a e c)

Esercizio 5 (6 punti)

Sia λ un parametro reale. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (y, \lambda z + \lambda, (\lambda^2 + 1)y) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare per quali valori di λ la funzione è lineare.

$(x,y,z) = (y, \lambda(z+1), (\lambda^2+1)y)$ — 2 possibili risoluzioni

1) Tramite la definizione

- f è lineare se
  1) $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$
  2) $f(K\underline{v}) = K f(\underline{v})$ $\quad K \in \mathbb{R}$

Siano $\underline{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\underline{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

1) $f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (y_1+y_2, \lambda(z_1+z_2+1), (\lambda^2+1)(y_1+y_2))$

$f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) = (y_1, \lambda(z_1+1), (\lambda^2+1)y_1) + (y_2, \lambda(z_2+1), (\lambda^2+1)y_2)$

$= (y_1+y_2, \lambda(z_1+1+z_2+1), (\lambda^2+1)(y_1+y_2))$

Devo trovare un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$\lambda(z_1+z_2+1) = \lambda(z_1+1+z_2+1) \Rightarrow \cancel{\lambda z_1} + \cancel{\lambda z_2} + \lambda = \cancel{\lambda z_1} + \cancel{\lambda z_2} + \lambda 2$

$\lambda = \lambda 2 \Rightarrow 2\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

2) $f(Kx_1, Ky_1, Kz_1) = (Ky_1, \lambda(Kz_1+1), (\lambda^2+1)Ky_1)$ $\Rightarrow$ $\lambda K z_1 + \lambda = \lambda K z_1 + K\lambda$, $\lambda = K\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$

$K f(x_1,y_1,z_1) = K(y_1, \lambda(z_1+1), (\lambda^2+1)y_1) = (Ky_1, K\lambda(z_1+1), (\lambda^2+1)Ky_1)$

2) Se invece ricordiamo che un'applicazione lineare deve necessariamente trasformare il vettore nullo in un altro vettore nullo

$(x,y,z) = (y, \lambda(z+1), (\lambda^2+1)y)$

[bisogna che $f(0,0,0) = (0,0,0)$]

do in ingresso il vettore nullo $(0,0,0) = (0, \lambda(1), 0)$

la domanda diventa:

per quale lambda $f(0,0,0) = (0,\lambda,0) \overset{?}{=} (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda = 0$

(se infatti $\lambda = 0 \longrightarrow f(x,y,z) = (y, 0, y)$
e $f(0,0,0) = (0,0,0)$)

ATTENZIONE $f(\underline{0}) = (\underline{0})$ è condizione NECESSARIA, ma non SUFFICIENTE, tuttavia si verifica facilmente che se $\lambda \neq 0$ non è più lineare:

ad es. $\lambda = 3$ e $K = 2$

considerando linearità del prodotto per uno scalare
$$\begin{cases} 2f(0,0,0) = 2(0,\lambda,0) = (\underline{0,2\lambda,0}) = (0,6,0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ f[2(0,0,0)] = f(0,0,0) = (\underline{0,\lambda,0}) = (0,3,0) \end{cases}$$

sono diversi

infatti f non è lineare se $\lambda \neq 0$

Polinomio caratteristico di una matrice A

è il polinomio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di grado

Autovalori di una matrice A

sono gli zeri del polinomio caratteristico, si determinano perciò risolvendo $\det(A-\lambda I)=0$

Autovettore relativo a un autovalore

è un vettore non-zero $\underline{v}$ tale che $(A-\lambda I)\underline{v} = 0$
(quindi è la soluzione non banale del sistema omogeneo associato a $A-\lambda I$)
L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ forma uno spazio vettoriale, detto autospazio.

Matrice diagonalizzabile

Una matrice è diagon. se tutte le radici del polinomio caratteristico sono REALI e OGNI autovalore ha molteplicità algebrica pari a quella geometrica
(in realtà è sufficiente fare un controllo della m. geom. solo per gli autovalori con m. algebrica >1)
NOTA: Se gli autovalori sono tutti reali e distinti, la matrice è certamente diagonalizzabile.

5. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

- Per calcolare gli autovalori cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico della matrice A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p_A(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] =$$

$$= (1-\lambda)[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1}] = (1-\lambda)(\lambda)(\lambda - 2)$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2 \rightarrow$$ hanno tutti molteplicità algebrica 1

- Gli autospazi relativi a ogni autovalore saranno dati dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $(A - \lambda I)$ con $\lambda = \lambda_1$, poi con $\lambda = \lambda_2$ e infine con $\lambda = \lambda_3$

$\rightarrow$ per $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & = 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-1, 1, -1)\rangle$$

la molteplicità geometrica di λ_1 è pari a 1

$\rightarrow$ per $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(0, 0, 1)\rangle$$

la molteplicità geometrica di λ_2 è pari a 1

→ per $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=y \\ y=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

$E(2) = \langle (1,1,1) \rangle$ la molteplicità geometrica di λ_3 è pari a 1

- La matrice A_{3x3} è diagonalizzabile dato che la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è pari a 3. In realtà essendo i 3 autovalori reali e distinti eravamo già certi della diagonalizzabilità anche senza calcolare gli autospazi.

La matrice che diagonalizza A è la matrice di transizione dalla base formata dagli autovettori ($B = \{(-1,1,-1),(0,0,1),(1,1,1)\}$) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori del parametro h la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Trovare una base di autovettori per A_0.

Per stabilire per quale $h \in \mathbb{R}$, A_h è diagonalizzabile basta fare in modo che abbia 3 autovalori reali e distinti
(se sono distinti avrà 3 autospazi di dimensione 1).
Per calcolare gli autovalori cerchiamo gli zeri del polinomio caratteristico della matrice A_h, $p_{A_h}(\lambda) = \det(A_h - \lambda I)$

$$p_{A_h}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix} = (h-\lambda)[(3-\lambda)(-1-\lambda)+3] \overset{!}{=} (h-\lambda)[-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+3] \overset{!}{=} (h-\lambda)[\lambda^2-2\lambda] = (h-\lambda)\lambda(\lambda-2)$$

perciò $p_{A_h}(\lambda) = 0 \iff \lambda = h,\ \lambda = 0,\ \lambda = 2$

Se $h \neq 0,2$ allora A_h ha 3 autovalori distinti, quindi è sicuramente diagonalizzabile, tuttavia si deve vedere cosa succede per $h=0$ e per $h=2$

Se $h=0$ $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$p_{A_0}(\lambda) = -\lambda[(3-\lambda)(-1-\lambda)+3] = -\lambda^2(\lambda-2) = 0 \iff \underset{\substack{\text{DOPPIO} \\ m.a = 2}}{\lambda = 0} \quad \underset{m.a=1}{\lambda = 2}$

Gli autospazi relativi a ogni autovalore saranno dati dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $(A-\lambda I)$ con $\lambda = \lambda_1$, poi con $\lambda = \lambda_2$

$\rightarrow$ per $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y=t \\ z=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

$E(0) = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

- quindi $\lambda=0$ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2

$\rightarrow$ per $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ y=t \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

$E(2) = \langle (3,1,0) \rangle$

- quindi $\lambda=2$ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 1

$\Rightarrow A_0$ è ancora diagonalizzabile

Una base di autovettori per A_0 è:

$B = \{(1,1,0), (0,0,1), (3,1,0)\}$

Se $h=2$

$$p_{A_2}(\lambda) = (2-\lambda)\lambda(\lambda-2) = -\lambda(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \underset{m.a.=1}{\lambda=0}, \ \underset{\substack{m.a.=2 \\ \text{DOPPIO}}}{\lambda=2}$$

$\rightarrow$ per $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y=t \\ 2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

$E(0) = \langle (1,1,0) \rangle$

$m.g. = 1$

$\rightarrow$ per $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ y=t \\ z=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

$E(2) = \langle (3,1,0), (0,0,1) \rangle$

$m.g. = 2$

A_2 è ancora diagonaliz.

Per quale valore del parametro t la matrice M è diagon.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t & t \end{pmatrix} \qquad p_M(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ t & 1-\lambda & 0 & 0 \\ t^2+2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & t & t & t-\lambda \end{pmatrix}$$

Per prima cosa calcoliamo gli autovalori, che sono gli zeri del polinomio caratteristico della matrice

$$\det(M-\lambda I) = (t-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ t & 1-\lambda & 0 \\ t^2+2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (t-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1(1-\lambda)(t^2+2)\right]$$

$$= (t-\lambda)(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + t^2+2\right]$$

$$= (t-\lambda)(1-\lambda)\left[1+\lambda^2-2\lambda+t^2+2\right]$$

$$= (t-\lambda)(1-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda+(t^2+3)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2-2\lambda+(t^2+3)=0 \\ &\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4t^2-12}}{2} \\ &= 1\pm\sqrt{-t^2-2} \end{aligned}}$$

perciò $p_M(\lambda)=0 \iff \lambda_1=t,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1+\sqrt{-t^2-2},\ \lambda_4=1-\sqrt{-t^2-2}$

Affinché la matrice M sia diagonalizzabile, tutte le radici del polinomio caratteristico devono essere REALI e ogni autovalore deve avere molteplicità algeb. pari a quella geom. (in realtà è sufficiente fare un controllo della m. geom. solo per gli autovalori con m. algebrica >1)

In particolare $\lambda_3, \lambda_4 \notin \mathbb{R}$, perché

$$-t^2-2 \geq 0 \Rightarrow t^2+2 \leq 0 \Rightarrow t^2 \leq -2 \qquad \underline{\text{Impossibile}}$$

perciò M non è diagonalizzabile