ESERCIZI DI PROBABILITA' E DISTRIBUZIONI

Indice

1 Esercizi parametrici **2**
1.1 Caso Discreto 2
1.2 Caso Continuo 6

2 Probabilità totali e Bayes **12**

3 Funzione generatrice dei momenti **15**

4 Variabili casuali discrete **17**
4.1 Binomiale 17
4.2 Ipergeometrica 27
4.3 Poisson 29
4.4 Pascal & Binomiale Negativa 30
4.5 Trinomiale 30

5 Variabili casuali continue **32**
5.1 Pareto 32
5.2 Esponenziale 34
5.3 Normale 35
5.4 Log-Normale 37

1 Esercizi parametrici

1.1 Caso Discreto

Esercizio

Si consideri la seguente funzione

$$p(x) = \begin{cases} k/3 & x = 1, 2, 3 \\ k & x = 4 \\ k/3 & x = 5, 6, 7 \end{cases} \tag{1}$$

a) si determini il valore di k affinché $p(x)$ possa essere funzione di probabilità per una v.c. X;

b) si determini la funzione di ripartizione $F(x)$ della v.c. X e se ne disegni il grafico;

c) si determinino i quartili della v.c. X;

d) si calcoli il momento terzo centrale di X e si commenti.

Soluzione

a) La condizione $p(x_i) \geq 0$ è verificata per ogni $i = 1, \ldots, 7$. Pertanto, affinché la funzione (1) sia funzione di probabilità, si deve verificare la relazione:

$$\sum_{i=1}^{7} p(x_i) = 1 \ . \tag{2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + k + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{3} &= 1 \\ \frac{3k + 3k + 3k}{3} &= 1 \\ \frac{9k}{3} &= 1 \\ 3k &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/9 & 1 \leq x < 2 \\ 2/9 & 2 \leq x < 3 \\ 3/9 & 3 \leq x < 4 \\ 6/9 & 4 \leq x < 5 \\ 7/9 & 5 \leq x < 6 \\ 8/9 & 6 \leq x < 7 \\ 1 & x \geq 7 \end{cases} \tag{3}$$

c) I quartili relativi alla v.c. X sono:

- $Q_1 = F^{-1}(0,25) = 3$;
- $Q_2 = Me = F^{-1}(0,5) = 4$;
- $Q_3 = F^{-1}(0,75) = 5$;

d)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot p(x_i) = 4 \\
E\left\{[X - E(X)]^3\right\} &= \sum_{i=1}^{7} [x_i - E(X)]^3 \cdot p(x_i) \\
&= (1-4)^3\frac{1}{9} + (2-4)^3\frac{1}{9} + (3-4)^3\frac{1}{9} + (4-4)^3\frac{3}{9} + \\
&\quad +(5-4)^3\frac{1}{9} + (6-4)^3\frac{1}{9} + (7-4)^3\frac{1}{9} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Essendo $E\left\{[X - E(X)]^3\right\} = 0$ si può concludere che la distribuzione di X simmetrica. In generale si ha che se X è una v.c. è simmetrica allora ogni suo momento centrale di ordine r dispari è uguale a 0. Naturalmente non vale il contrario.

Esercizio

Sia X una v.c. discreta avente la seguente funzione di probabilità:

$$
p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{k} & x = 1, 2, 3 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{4}
$$

a) si determini il valore di k e si tracci il grafico di $p(x)$;

b) si ricavi la funzione di ripartizione e la si rappresenti graficamente;

c) si determinino i quartili della v.c. X;

d) Si fornisca l'espressione della funzione generatrice dei momenti e da essa si ricavi $E(X)$.

Soluzione

a) La condizione $p(x) \geq 0$ è verificata per $x = 1, 2, 3$. Pertanto la costante k si può ricavare attraverso l'uguaglianza:

$$
\sum_{x=1}^{3} p(x) = 1 \ . \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1^2}{k}+\frac{2^2}{k}+\frac{3^2}{k} &= 1\\
\frac{1}{k}+\frac{4}{k}+\frac{9}{k} &= 1\\
\frac{14}{k} &= 1 \Rightarrow \qquad k=14\,.
\end{aligned}
$$

x	$p(x)$
1	1/14
2	4/14
3	9/14

b)

$$
F(x)=\begin{cases} 0 & x<1\\ 1/14 & 1\le x<2\\ 5/14 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}
$$

c) I quartili della v.c. X sono:

- $Q_1 = F^{-1}(0,25) = 2$;
- $Q_2 = Q_3 = F^{-1}(0,5) = F^{-1}(0,75) = 3$.

d)

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{x=1}^{3} e^{tx} \cdot p(x) \\ &= e^{t\cdot 1} \cdot \frac{1}{14} + e^{t\cdot 2} \cdot \frac{4}{14} + e^{t\cdot 3} \cdot \frac{9}{14} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= m'_X(t)\big|_{t=0} \\ &= e^{t\cdot 1} \cdot \frac{1}{14} + e^{t\cdot 2} \cdot \frac{8}{14} + e^{t\cdot 3} \cdot \frac{27}{14}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{14} + \frac{8}{14} + \frac{27}{14} = \frac{36}{14} = 2,571 \ . \end{aligned}$$

1.2 Caso Continuo

Esercizio

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{altrove} \ , \end{cases} \tag{6}$$

dove a è un parametro incognito.

a) Si determini il valore di a che rende $f(x)$ la funzione di densità di una v.c. X.

b) Si calcoli il valore atteso di X.

c) Si ricavi l'espressione della funzione di ripartizione di X e se ne determini il terzo quartile.

Soluzione

a) La funzione $|1-x| \ge 0$ sempre quindi l'incognita a si ricava dalla relazione

$$\int_0^a f(x)dx = 1 \ . \tag{7}$$

L'integrale

$$\int_0^1 |1-x|\, dx = \frac{1}{2}$$

quindi deve essere $a > 1$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_0^a |1-x|\,dx &= 1 \\
\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^a (x-1)dx &= 1 \\
\left\{x - \frac{x^2}{2}\right\}_0^1 + \left\{\frac{x^2}{2} - x\right\}_1^a &= 1 \\
1 - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} - a - \frac{1}{2} + 1 &= 1 \\
\frac{a^2}{2} - a &= 0 \\
a(a-2) &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{soluzioni} \begin{cases} a = 0 \\ a = 2\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

La soluzione $a = 0$ rende nullo l'integrale (7) quindi l'unica soluzione accettabile è $a = 2$.

b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 x\,|1-x|\,dx \\
&= \int_0^1 x(1-x)dx + \int_1^2 x(x-1)dx \\
&= \int_0^1 (x-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx \\
&= \left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right\}_0^1 + \left\{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right\}_1^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

c) Per $0 \le x < 1$ risulta:

$$F(X) = \int_0^x (1-t)\,dt = \left\{t - \frac{t^2}{2}\right\}_0^x = x - \frac{x^2}{2}$$

Per $1 \leq x < 2$ risulta:

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^x (t-1)\,dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \left\{ \frac{t^2}{2} - t \right\}_1^x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} + 1 \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione di ripartizione risulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \dfrac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x + \dfrac{x^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Il terzo quartile, cioè il valore di x tale che $F(x) = 0,75$ si trova nell'intervallo $x \in [1,2)$. Tale considerazione deriva dal fatto che $F(1) = 0,5$. Essendo la funzione di ripartizione una funzione non decrescente ne consegue che il terzo quartile deve essere maggiore o uguale a 1. Ma per $x \geq 2$ la $F(x)$ assume valore 1 pertanto il terzo quartile deve essere $1 \leq x < 2$. Si prende in considerazione allora la forma funzionale della $F(x)$ nell'intervallo $[1,2)$ e si ricava

$$\begin{aligned} 1 - x + \frac{x^2}{2} &= 0,75 \\ x^2 - 2x + 0,5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{soluzioni} = \begin{cases} x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,29 & \text{fuori dall'intervallo [1,2);} \\ x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1,71 = Q_3 & \text{compresa nell'intervallo [1,2)} \\ & \text{quindi soluzione accettabile.} \end{cases}$$

Esercizio

Sia X una v.c. continua avente la seguente funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} kx & -1 < x < 0 \\ -kx & 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrove .} \end{cases} \tag{8}$$

a) Si determini il valore della costante k che rende $f(x)$ la funzione di densità della v.c. X e si tracci il grafico di $f(x)$.

b) Si ricavi la funzione di ripartizione e il primo quartile di X.

c) Si calcoli il valore atteso di X.

d) Si calcoli il secondo momento standardizzato della v.c. X e si commenti.

Soluzione

a) Affinché la funzione $f(x)$ sia maggiore o uguale a zero per ogni x deve risultare $kx \geq 0$ per $-1 < x < 0$ e deve essere $-kx \geq 0$ per $0 \leq x < 3$. Ciò accade solamente se la costante k è minore o uguale a zero. In realtà se fosse $k = 0$ la funzione $f(x)$ non sarebbe funzione di densità in quanto risulterebbe costantemente pari a 0. Si cerca dunque $k < 0$ tale che sia soddisfatta la condizione

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = 1 \ . \tag{9}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} f(x)dx &= 1 \\ \int_{-1}^{0} kx\, dx + \int_{0}^{3} (-kx)dx &= 1 \\ k\left\{\frac{x^2}{2}\right\}_{-1}^{0} - k\left\{\frac{x^2}{2}\right\}_{0}^{3} &= 1 \\ -\frac{k}{2} - k\frac{9}{2} &= 1 \\ -5k &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Risulta che la funzione di densità è la seguente

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}x & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{5}x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{altrove .} \end{cases}$$

b) Per $-1 \leq x < 0$ risulta:

$$F(X) = \int_{-1}^{x} \left(-\frac{1}{5}t\right) dt = -\frac{1}{5}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}_{-1}^{x} = -\frac{x^2}{10} + \frac{1}{10}$$

Per $0 \leq x < 3$ risulta:

$$\begin{aligned} F(X) &= \underbrace{\int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{5}t\right) dt}_{F(0)} + \int_{0}^{x} \frac{1}{5}t\, dt \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \cdot \left\{\frac{t^2}{2}\right\}_{0}^{x} \\ &= \frac{x^2}{10} + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione di ripartizione risulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ -\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{1}{10} & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{1}{10} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$F(0) = 0,1$ pertanto deve essere $Q_1 \in [0,3)$. Il primo quartile $Q_1 = x_{0,25}$ è quel valore di x tale per cui $F(x) = 0,25$ pertanto

$$\begin{aligned} \frac{x_{0,25}^2}{10} + \frac{1}{10} &= 0,25 \\ x_{0,25}^2 &= 1,5 \\ x_{0,25} &= \pm\sqrt{1,5}\,. \end{aligned}$$

Dunque $Q_1 = \sqrt{1,5}$.

c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^{3} x f(x) dx \\ &= \int_{-1}^{0} x \left(-\frac{1}{5}x\right) dx + \int_{0}^{3} x \left(\frac{1}{5}x\right) dx \\ &= -\frac{1}{5}\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_{-1}^{0} + \frac{1}{5}\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_{0}^{3} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{9}{5} = \frac{28}{15}\,. \end{aligned}$$

d)

$$E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1\,,$$

dove $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = Var(X)$. Il secondo momento standardizzato è uguale ad 1 per qualsiasi variabile casuale.

2 Probabilità totali e Bayes

Esercizio

Alle primarie per il voto del leader di uno schieramento politico si presentano due candidati: Rossi e Bianchi. Da precedenti elezioni dello stesso tipo è emerso che il 53% dei votanti è di sesso maschile. Inoltre recenti sondaggi prevedono che il 54% della popolazione femminile voterà Bianchi mentre il 52% della popolazione maschile voterà Rossi.

a) Con le informazioni a disposizione, calcolare la probabilità che Rossi ha di vincere le elezioni.

b) Rossi vince le elezioni e si riscontra che: il 58% dei votanti è risultato essere di sesso maschile, il 57% della popolazione femminile votante ha votato per Rossi ed il 41% della popolazione maschile votante ha votato per Bianchi (non ci sono state schede nulle). Avendo estratto a caso una scheda dall'urna che contiene tutti i voti e avendo riscontrato che tale voto è a favore di Bianchi, si calcoli la probabilità che la scheda sia stata compilata da un maschio.

c) Estratto a caso un elettore dei votanti, qual'è la probabilità che sia di sesso maschile ed abbia votato per Rossi.

Soluzione

a) Con le informazioni a disposizione si può ottenere la seguente tabella

	Maschio	Femmina	
Rossi	$0,2756$	$0,2162$	$0,4918$
Bianchi	$0,2544$	$0,2538$	$0,5082$
	$0,53$	$0,47$	1

Il punto di partenza è la probabilità $P(\text{Maschio}) = 0,53$ da cui si ricava $P(\text{Femmina}) = 0,47$. Da quest'ultima probabilità si ottiene

$$\begin{aligned} P(\text{Femmina} \cap \text{Bianchi}) &= P(\text{Bianchi}|\text{Femmina}) \cdot P(\text{Femmina}) \\ &= 0,54 \cdot 0,47 = 0,2538 \ . \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} P(\text{Maschio} \cap \text{Rossi}) &= P(\text{Rossi}|\text{Maschio}) \cdot P(\text{Maschio}) \\ &= 0,52 \cdot 0,53 = 0,2756 \ . \end{aligned}$$

Tali probabilità, insieme alle informazioni iniziali sulle marginali, permettono di ricavare la tabella sopra riportata.

La probabilità che vinca Rossi è dunque

$$\begin{aligned} P(\text{Rossi}) &= P(\text{Maschio} \cap \text{Rossi}) + P(\text{Femmina} \cap \text{Rossi}) \\ &= 0,2756 + 0,2162 = 0,4918 \ . \end{aligned}$$

che è lo stesso valore riportato in tabella.

b) Dallo spoglio dei voti è possibile costruire la seguente tabella di probabilità congiunte e marginali

	Maschi	Femmine	
Rossi	$0,3422$	$0,2394$	$0,5816$
Bianchi	$0,2378$	$0,1806$	$0,4184$
	$0,58$	$0,42$	1

È possibile sfruttare la formula di Bayes o formula delle probabilità a priori

$$\begin{aligned} P(\text{Maschio}|\text{Bianchi}) &= \frac{P(\text{Maschio} \cap \text{Bianchi})}{P(\text{Bianchi})} \\ &= \frac{P(\text{Bianchi}|\text{Maschio}) \cdot P(\text{Maschio})}{P(\text{Bianchi})} \\ &= \frac{0,41 \cdot 0,58}{0,4184} = 0,568 \ . \end{aligned}$$

c) Dalla tabella ricavata al punto b) è facile ricavare che

$$P(\text{Maschio} \cap \text{Rossi}) = 0,3422 \ .$$

Esercizio

Il 26% degli iscritti alla Facoltà di Sociologia di una università italiana è costituito da maschi. Il 45% di questi è fumatore mentre il 25% delle femmine è fumatore.

a) Avendo estratto casualmente un iscritto e avendo verificato che è fumatore, si determini la probabilità che sia maschio.

b) Si determini la probabilità che, estraendo un iscritto, risulti maschio o fumatore.

c) Estratti con riposizione 120 iscritti, si determini la probabilità che almeno 40 individui selezionati nel campione siano fumatori.

Soluzione

a) Si adotti la seguente notazione: F = femmina, M=maschio, FU=fumatore, NF=non fumatore. Le informazioni a disposizione sono le seguenti:

$$\begin{aligned} P(\text{M}) &= 0,26 \quad \text{quindi} \quad P(\text{F}) = 0,74 \\ P(\text{FU}|\text{M}) &= 0,45 \\ P(\text{FU}|\text{F}) &= 0,25\ . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(\text{M}|\text{FU}) &= \frac{P(\text{M} \cap \text{FU})}{P(\text{FU})} = \frac{P(\text{M}) \cdot P(\text{FU}|\text{M})}{P(\text{M}) \cdot P(\text{FU}|\text{M}) + P(\text{F}) \cdot P(\text{FU}|\text{F})} \\ &= \frac{0,26 \cdot 0,45}{0,26 \cdot 0,45 + 0,74 \cdot 0,25} = \frac{0,117}{0,302} = 0,387\ . \end{aligned}$$

b) Si ricava dai dati forniti la seguente tabella

	FU	NF	
M	$0,117$	$0,143$	$0,26$
F	$0,185$	$0,556$	$0,74$
	$0,302$	$0,698$	1

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} P(\text{M} \cup \text{FU}) &= P(\text{M}) + P(\text{FU}) - P(\text{FU} \cap \text{M}) \\ &= 0,26 + 0,302 - 0,117 = 0,445 \end{aligned}$$

c) Si consideri la v.c. X che conta fra i 120 iscritti selezionati quelli che sono fumatori. Tale variabile si distribuisce con legge di probabilità binomiale di parametri $n = 120$ e $p = P(\text{FU}) = 0,302$. Il numero delle estrazioni risulta maggiore di 30 quindi è ragionevole approssimare X con una variabile casuale Normale Y di aspettativa $E(Y) = 120 \cdot 0,302 = 36,24$ e di varianza $Var(Y) = 120 \cdot 0,302 \cdot (1 - 0,302) = 25,296$. Puntualizzato ciò la probabilità che X sia maggiore o uguale di 40 si può calcolare come

segue

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 40) &= 1 - P(X < 40) \\
&\approx 1 - P(Y < 40) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{40 - 36,24}{\sqrt{25,296}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\,(0,74) \\
&\approx 1 - 0,7703 = 0,2297\ .
\end{aligned}
$$

3 Funzione generatrice dei momenti

Esercizio

Sia data la funzione generatrice dei momenti

$$m(t) = \frac{1}{1-2t} \qquad t < 0,5\ .$$

a) Sia X una v.c. dotata della f.g.m di cui sopra. Si calcolino il valore atteso e la varianza di X.

b) Sia X una v.c. dotata della f.g.m. di cui sopra. Si determini la f.g.m. della v.c. $Y = X/2$.

c) Siano X_1 ed X_2 due v.c. indipendenti ciascuna dotata di f.g.m. di cui sopra. Si determini la f.g.m. della v.c. $Y = X_1 + X_2$.

d) Siano X_1 ed X_2 due v.c. indipendenti ciascuna dotata di f.g.m. di cui sopra. Si determini la f.g.m. della v.c. $Z = X_1 + 3X_2$. Si calcolino inoltre il valore atteso e la varianza di Z.

Soluzione

a) Il calcolo dei momenti si ottiene derivando opportunamente la funzione generatrice dei momenti $m(t)$ e ponendo t uguale a 0:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \left[\frac{d}{dt}m(t)\right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{2}{(1-2t)^2}\right]_{t=0} = 2\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \left[\frac{d^2}{dt^2}m(t)\right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{8}{(1-2t)^3}\right]_{t=0} = 8\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= 8 - 2^2 = 4\,.
\end{aligned}
$$

b) Se $Y = a + bX$ allora

$$m_Y(t) = e^{at} m_X(bt)\,.$$

In questo caso dato che $Y = \frac{1}{2}X$ risulta $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, pertanto

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= e^{0t} m_X\left(\frac{1}{2}t\right) \\
&= (1-t)^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

c) Se X_1 è indipendente da X_2 ed $Y = X_1 + X_2$ risulta che

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= m_{X_1}(t) \cdot m_{X_2}(t) \\
&= (1-2t)^{-1}\,(1-2t)^{-1} \\
&= (1-2t)^{-2}\,.
\end{aligned}
$$

d) Posto $W = 3X_2$ si ha che X_1 è indipendente da W. Ciò è dovuto al fatto che se due v.c. X ed Y sono indipendenti allora risultano indipendenti anche le v.c. $g(X)$ ed $h(Y)$ qualsiasi siano le funzioni $g(\cdot)$ ed $h(\cdot)$.

$$
\begin{aligned}
m_W(t) &= e^{0t} m_{X_2}(3t) \\
&= (1-6t)^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_Z(t) &= m_{X_1}(t) \cdot m_W(t) \\
&= (1-2t)^{-1}(1-6t)^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E(X_1) + E(W) = E(X_1) + 3E(X_2) \\
&= 2 + 3 \cdot 2 = 8 \\
Var(Z) &= Var(X_1) + Var(W) = Var(X_1) + 9Var(X_2) \\
&= 4 + 9 \cdot 4 = 40\,.
\end{aligned}
$$

4 Variabili casuali discrete

4.1 Binomiale

Esercizio

Presso uno sportello bancomat del centro di Milano 4 persone su 5 fanno operazione di prelievo.

a) Supponendo di estrarre a caso 10 persone (con riposizione) che si sono recate allo sportello, calcolare la probabilità che il numero totale di persone che ha prelevato sia maggiore di 9.

b) Posto che in 6 estrazioni (con riposizione) almeno 3 persone hanno prelevato, calcolare la probabilità che il numero totale di persone che ha prelevato sia maggiore di 4.

c) Supponendo di estrarre a caso 300 persone (con riposizione) che si sono recate allo sportello, calcolare la probabilità che il numero totale di persone che ha prelevato sia compreso tra 245 e 255.

d) Calcolare il numero medio di estrazioni (con riposizione) che si devono effettuare per ottenere una persona che non ha prelevato.

e) Si supponga di estrarre (con riposizione) in maniera sequenziale le persone che si sono presentate allo sportello. Calcolare la probabilità che la seconda persona che ha prelevato sia estratta alla terza estrazione.

Soluzione

a) La probabilità di estrarre una persona che ha prelevato è pari a $4/5 = 0,8$. Estraendo 10 persone con riposizione si ha che la variabile casuale X che conta il numero di persone che hanno prelevato si distribuisce con legge Binomiale di parametri $p = 0,8$ ed $n = 10$:

$$X \backsim \text{Bin}(n = 10; p = 0,8) \ .$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{9} 0,8^9 0,2^1 + \binom{10}{10} 0,8^{10} \\ &= 0,268 + 0,1073 = 0,3753 \ . \end{aligned}$$

b) Si vuole calcolare

$$P(X > 4|X \geq 3) \quad = \quad \frac{P(X > 4)}{P(X \geq 3)} \ ,$$

dove in questo caso

$$X \backsim \text{Bin}(n = 6; p = 0,8) \ .$$

Calcolando

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - \binom{6}{0} 0,2^6 - \binom{6}{1} 0,8^1 0,2^5 - \binom{6}{2} 0,8^2 0,2^4 \\ &= 1 - 0,000064 - 0,00153 - 0,01536 = 0,9830 \ ; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \binom{6}{5} 0,8^5 0,2^1 + \binom{6}{6} 0,8^6 0,2^0 \\ &= 0,393 + 0,262 = 0,655 \ , \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} P(X > 4|X \geq 3) &= \frac{P(X > 4)}{P(X \geq 3)} \\ &= \frac{0,655}{0,9830} = 0,666 \ ; \end{aligned}$$

c) Si consideri la v.c. X che conta fra i 300 estratti quelli che hanno prelevato. Tale variabile si distribuisce con legge di probabilità Binomiale di parametri $n = 300$ e $p = 0,8$, Essendo il numero delle estrazioni molto elevato (> 30) è possibile approssimare X con una variabile casuale Normale Y di aspettativa $E(Y) = 300 \cdot 0,8 = 240$ e di varianza $Var(Y) = 300 \cdot 0,8 \cdot (1 - 0,8) = 48$. La probabilità che $245 < X < 255$ è

$$\begin{aligned} P(245 < X < 255) &= P(X = 246) + P(X = 247) + \cdots \\ &\quad \cdots + P(X = 253) + P(X = 254) \\ &= P(X < 255) - P(X \leq 245) \\ &\approx \Phi\left(\frac{255 - 240}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{245 - 240}{\sqrt{48}}\right) \\ &\approx \Phi\,(2,16) - \Phi\,(0,72) \\ &\approx 0,9846 - 0,7642 = 0,2204 \ . \end{aligned}$$

d) Se Y è la variabile casuale che conta il numero di estrazioni necessarie per ottenere una persona che non ha prelevato allora

$$Y \backsim \text{Pascal}(p = 0,2) \ ,$$

e dunque

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5 \ .$$

Quindi il numero medio di estrazioni (sequenziali) per ottenere una persona che non ha prelevato è 5.

e) Se Z è la variabile casuale che conta il numero di estrazioni (sequenziali) necessarie per ottenere 2 persone che hanno prelevato allora

$$Z \backsim \text{Binomiale Negativa}(r = 2; p = 0,8) \ .$$

Quindi la probabilità che la seconda persona che ha prelevato sia estratta alla terza prova è uguale alla probabilità che $Z = 3$:

$$P(Z = 3) = \binom{2}{1} 0,8^2 0,2 = 0,256 \ .$$

Esercizio

Da un mazzo di 52 carte (13 di picche, 13 di cuori, 13 di fiori e 13 di quadri) ne vengono estratte cinque con reinserimento. Si è interessati alla variabile casuale X che descrive il numero di carte di cuori ottenute nelle estrazioni. Determinare:

a) il valore atteso e la varianza della variabile X;

b) la probabilità di estrarre tre carte di cuori;

c) la probabilità di estrarre almeno tre carte di cuori;

d) la probabilità di estrarre al più tre carte di cuori;

Soluzione

a) Dato che l'estrazione delle carte dal mazzo di 52 avviene con riposizione, la probabilità di ottenere una carta di cuori rimane costante da estrazione ad estrazione. Le singole estrazioni sono inoltre indipendenti in quanto fisicamente separate. Alla luce di ciò, la variabile casuale X risulta essere una variabile casuale binomiale di parametri $n = 5$ e $p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Si ha dunque che:

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.25 = 1.25 \ \ ;$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.9375 \ \ .$$

b) Per quanto appena osservato, la funzione di probabilità della variabile casuale X è data da:

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(0.25)^x(1-0.25)^{5-x} & x = 0,1,2,3,4,5 \\ \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si ha dunque che:

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{5}{3}(0.25)^3(0.75)^{5-3} \\ &= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot(0.0156)\cdot(0.5625) \\ &= 10\cdot(0.0156)\cdot(0.5625) = 0.0879 \quad . \end{aligned}$$

c) La probabilità di estrarre almeno tre carte di cuori coincide con la probabilità che la variabile casuale X assuma valori maggiori o uguali a 3.
Si ha quindi:

$$\begin{aligned} P(X\geq 3) &= P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \\ &= \binom{5}{3}(0.25)^3(0.75)^{5-3} + \binom{5}{4}(0.25)^4(0.75)^{5-4} + \binom{5}{5}(0.25)^5(0.75)^{5-5} \\ &= 0.0879 + 5\cdot(0.25)^4\cdot(0.75) + (0.25)^5 \\ &= 0.0879 + 0.0146 + 0.0010 = 0.1035 \quad . \end{aligned}$$

In alternativa, il medesimo valore si sarebbe potuto ottenere seguendo il seguente procedimento:

$$\begin{aligned} P(X\geq 3) &= 1 - P(X<3) = 1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)) \\ &= 1 - \left(\binom{5}{0}(0.25)^0(0.75)^5 + \binom{5}{1}(0.25)(0.75)^4 + \binom{5}{2}(0.25)^2(0.75)^3\right) \\ &= 1-(0.75)^5 - 5\cdot(0.25)\cdot(0.75)^4 - 10\cdot(0.25)^2\cdot(0.75)^3 \\ &= 1-0.2373-0.3955-0.2637 = 1-0.8965 = 0.1035 \quad . \end{aligned}$$

d) La probabilità di estrarre al più tre carte di cuori coincide con la probabilità che la variabile casuale X assuma valori minori o uguali a 3:

$$\begin{aligned} P(X\leq 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= 0.2373+0.3955+0.2637+0.0879 = 0.9844 \\ &= 1-[P(X=4)+P(X=5)] \quad . \end{aligned}$$

Esercizio

Il 19% dei nuclei familiari di una collettività possiede almeno due televisori. Si estrae un campione casuale (con reimmissione) di 400 nuclei familiari. Considerata la variabile casuale *X='numero dei nuclei familiari estratti che possiedono almeno due televisori'*:

a) si calcolino aspettativa e varianza di X;

b) si calcoli $P(66 \leq X \leq 91)$.

Soluzione

a) L'esito dell'estrazione di un nucleo familiare dalla collettività in considerazione, può essere interpretato utilizzando una variabile casuale indicatore I di parametro $p = 0.19$. In particolare, tale variabile casuale assume valore 1 nel caso in cui la famiglia estratta possiede almeno due televisori, assume valore 0 se la famiglia estratta non possiede almeno due televisori. Si ha inoltre che:

$$P(I = 1) = 0.19 \qquad\qquad P(I = 0) = 1 - 0.19 = 0.81 \quad .$$

Si indichi con I_j la variabile indicatore che interpreta l'esito della j-esima estrazione $(j = 1, 2, ..., 400)$. Dato che le estrazioni avvengono con riposizione si ha che le variabili casuali $I_1, I_2, ..., I_{400}$ hanno la stessa distribuzione di probabilità (sono tutte v.c. indicatori di parametro $p = 0.19$) e sono indipendenti in quanto le estrazioni sono fisicamente separate. In questa prospettiva, la v.c.

$X =$ "numero dei nuclei familiari estratti che possiedono almeno due televisori"

è data dalla somma delle variabili indicatori $I_1, I_2, ..., I_{400}$:

$$X = \sum_{j=1}^{400} I_j \quad .$$

Dato che le v.c. $I_1, I_2, ..., I_{400}$ sono identicamente ed indipendentemente distribuite, si ha che X risulta essere una binomiale di parametri $n = 400$ e $p = 0.19$. Si ha dunque che:

$$E(X) = n \cdot p = 400 \cdot 0.19 = 76$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 400 \cdot 0.19 \cdot 0.81 = 61.56 \quad .$$

b) Come si è osservato durante lo svolgimento del punto precedente, la variabile casuale X può essere vista come la somma di 400 v.c. che godono delle seguenti caratteristiche:

- $I_1, I_2, ..., I_{400}$ hanno la medesima distribuzione di probabilità;
- $I_1, I_2, ..., I_{400}$ sono indipendenti;
- $I_1, I_2, ..., I_{400}$ hanno media e varianza finite e rispettivamente pari a 0.19 e $0.19 \cdot 0.81 = 0.1538$.

Tali risultati ed il fatto che $n = 400 > 30$ ci permettono di dire, in forza del teorema del limite centrale, che

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{400} I_j - (400 \cdot 0.19)}{\sqrt{400 \cdot (0.19) \cdot (0.81)}} \leq z\right) = P\left(\frac{X - 76}{\sqrt{61.56}} \leq z\right) \cong P\left(Z \leq z\right) = \Phi(z)$$

dove Z indica una variabile casuale normale standardizzata. Sfruttando tale approssimazione, si ha che:

$$\begin{aligned} P(66 \leq X \leq 91) &= P\left(\frac{66-76}{\sqrt{61.56}} \leq \frac{X-76}{\sqrt{61.56}} \leq \frac{91-76}{\sqrt{61.56}}\right) \\ &\cong P\left(\frac{66-76}{\sqrt{61.56}} \leq Z \leq \frac{91-76}{\sqrt{61.56}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{91-76}{\sqrt{61.56}}\right) - \Phi\left(\frac{66-76}{\sqrt{61.56}}\right) \\ &= \Phi(1.9118) - \Phi(-1.2745) \end{aligned}$$

Dalle tavole della normale si ottiene che:

$$\Phi(1.91) = 0.9719 \quad .$$

In forza della simmetria della distribuzione normale si ha inoltre che:

$$\Phi(-1.27) = 1 - \Phi(1.27) = 1 - 0.8980 = 0.1020 \quad .$$

Concludendo si ha:

$$P(66 \leq X \leq 91) \cong 0.9719 - 0.1020 = 0.8699 \quad .$$

Esercizio

Un macchina produce pezzi difettosi con una probabilità pari a 0.4. Calcolare:

a) la probabilità che su 6 pezzi prodotti il numero di pezzi difettosi sia un numero dispari;

b) il valore atteso e la varianza della variabile che conta il numero di pezzi difettosi su 100 prodotti e di quella che li conta su 1000 pezzi prodotti;

c) la probabilità che su 100 pezzi prodotti, i pezzi difettosi siano in numero compreso tra 15 e 30 (estremi inclusi).

Soluzione

a) Dal contesto descritto dal testo dell'esercizio si ha che:

- la probabilità che la macchina produca pezzi difettosi rimane costante nel tempo;
- la macchina produce pezzi difettosi in maniera casuale.

Le caratteristiche (difettosità\non difettosità) di ciascun pezzo prodotto possono essere interpretate utilizzando una variabile casuale indicatore di parametro $p = 0.4$. Si considerino ora le variabili casuali indicatori associate a 6 pezzi prodotti. Le osservazioni sopra riportate implicano che queste 6 variabili casuali sono identicamente ed indipendentemente distribuite e, di conseguenza, la variabile casuale $X =$*"numero di pezzi difettosi su 6 prodotti"*, è una binomiale di parametri $n = 6$ e $p = 0.4$. Si ha quindi che:

$$\begin{aligned}
& P(\text{“su 6 pezzi prodotti il numero di prodotti difettosi è dispari”}) \\
= \; & P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) \\
= \; & \binom{6}{1} 0.4^1 (1 - 0.4)^5 + \binom{6}{3} 0.4^3 (1 - 0.4)^3 + \binom{6}{5} 0.4^5 (1 - 0.4)^1 \\
= \; & 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 + 20 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 + 6 \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^1 \\
= \; & 0.1866 + 0.2765 + 0.0369 = 0.5 \;\; .
\end{aligned}$$

b) La variabile casuale $Y =$ "n° di pezzi difettosi su 100 pezzi prodotti" è una binomiale di parametri $n = 100$ e $p = 0.4$. Si ha dunque che:

$$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0.4 = 40 \;\; ;$$

$$Var(Y) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 24 \;\; .$$

La variabile casuale $K =$ "n° di pezzi difettosi su 1000 pezzi prodotti" è una binomiale di parametri $n = 1000$ e $p = 0.4$. Si ha dunque che:

$$E(K) = n \cdot p = 1000 \cdot 0.4 = 400 \;\; ;$$

$$Var(K) = n \cdot p \cdot q = 1000 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 240 \;\; .$$

c) Dato che $n = 100$ può ritenersi sufficientemente elevato, in forza del teorema del limite centrale si ha che la distribuzione della variabile Y è approssimabile con la distribuzione normale di media 40 e varianza 24. Si ha dunque che:

$$\begin{aligned} P(15 \leq Y \leq 30) &= P\left(\frac{15-40}{\sqrt{24}} \leq \frac{Y-40}{\sqrt{24}} \leq \frac{30-40}{\sqrt{24}}\right) \\ &\cong P\left(\frac{15-40}{\sqrt{24}} \leq Z \leq \frac{30-40}{\sqrt{24}}\right) \\ &= P\left(-5.1031 \leq Z \leq -2.0412\right) = \Phi(-2.0412) - \Phi(-5.1031) \ . \end{aligned}$$

In forza della simmetria della distribuzione normale, si ha che:

$$\Phi(-2.04) = 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207 \ ;$$

$$\Phi(-5.10) = 1 - \Phi(5.10) = 1 - 1 = 0 \ .$$

Si ha dunque che:

$$P(15 \leq Y \leq 30) \cong \Phi\left(-2.04\right) - \Phi\left(-5.10\right) = 0.0207 \ .$$

Esercizio

Sia X la variabile casuale che descrive il numero di teste ottenute in 100 lanci di una moneta regolare. Determinare

$$\Pr\{|X - \mu| \leq 8\}$$

dove μ è il valore atteso di X.

Soluzione

Ogni lancio della moneta viene ripetuto sotto le stesse condizioni in modo tale che: le probabilità di ottenere testa o croce non variano da lancio a lancio e i lanci della moneta sono indipendenti.

La variabile casuale X è di conseguenza una binomiale di parametri $n = 100$ e $p = 0.5$. Alla luce di ciò si ha che:

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50 \ ;$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25 \ .$$

Dato che $n = 100$ può ritenersi sufficientemente elevato, in forza del teorema del limite centrale, si ha che la distribuzione della variabile X è approssimabile con la distribuzione normale di media 50 e varianza 25. Si ha dunque che:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| \leq 8) &= P(-8 \leq (X-\mu) \leq 8) \\
&= P(-8 \leq (X-50) \leq 8) = P\left(\frac{-8}{\sqrt{25}} \leq \frac{X-50}{\sqrt{25}} \leq \frac{8}{\sqrt{25}}\right) \\
&\cong P\left(-1.6 \leq Z \leq 1.6\right) \\
&= \Phi(1.6) - \Phi(-1.6) = \Phi(1.6) - (1 - \Phi(1.6)) \\
&= 2 \cdot \Phi(1.6) - 1 = 2 \cdot 0.9452 - 1 = 1.8904 - 1 = 0.8904 \quad .
\end{aligned}$$

Esercizio

Sia X una variabile casuale indicatore di parametro $p = 0.6$ e sia Y una variabile casuale binomiale di parametri $n = 2$ e $p = 0.4$.

a) si esplicitino le distribuzioni di X e Y;

b) si determini la distribuzione di probabilità congiunta di X e Y nell'ipotesi di indipendenza;

c) si calcolino aspettativa e varianza della variabile casuale $Z = X + Y$.

Soluzione

a) La variabile casuale X è un indicatore di parametro $p = 0.6$ e di conseguenza:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.6 & x = 1 \\ 0.4 & x = 0 \end{cases} \quad .$$

La variabile casuale Y è una binomiale di parametri $n = 2$ e $p = 0.4$ e di

conseguenza:

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) &= \begin{cases} \binom{2}{0} \cdot 0.4^0 \cdot (1-0.4)^2 & y=0 \\ \binom{2}{1} \cdot 0.4^1 \cdot (1-0.4)^1 & y=1 \\ \binom{2}{2} \cdot 0.4^2 \cdot (1-0.4)^0 & y=2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1-0.4)^2 & y=0 \\ 2 \cdot 0.4 \cdot (1-0.4) & y=1 \\ 0.4^2 & y=2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0.36 & y=0 \\ 0.48 & y=1 \\ 0.16 & y=2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Se le variabili casuali X e Y sono indipendenti allora:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \qquad x=0,1\ ; \quad y=0,1,2\ .$$

Si ha dunque che:

- $P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = 0.6 \cdot 0.36 = 0.216$
- $P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1) = 0.6 \cdot 0.48 = 0.288$
- $P(X=0, Y=2) = P(X=0) \cdot P(Y=2) = 0.6 \cdot 0.16 = 0.096$
- $P(X=1, Y=0) = P(X=1) \cdot P(Y=0) = 0.4 \cdot 0.36 = 0.144$
- $P(X=1, Y=1) = P(X=1) \cdot P(Y=1) = 0.4 \cdot 0.48 = 0.192$
- $P(X=1, Y=2) = P(X=1) \cdot P(Y=2) = 0.4 \cdot 0.16 = 0.064$

Nella seguente tabella viene riportata la distribuzione congiunta di X e Y in ipotesi di indipendenza:

$X \backslash Y$	0	1	2	tot
0	0.216	0.288	0.096	0.6
1	0.144	0.192	0.064	0.4
tot	0.36	0.48	0.16	1

c) Si ha che:

- $E(X) = 0.6$;
- $Var(X) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$;
- $E(Y) = 2 \cdot 0.4 = 0.8$;
- $Var(Y) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.48$;

Per quanto riguarda il calcolo di $E(Z)$ si ha:

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0.6 + 0.8 = 1.4 \ .$$

Per quanto riguarda il calcolo della varianza di Z si ha:

$$Var(Z) = Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) \ .$$

Come si osserva dalla formula appena riportata, non è possibile calcolare la varianza della variabile Z senza conoscere la distribuzione congiunta di X e Y. Supponendo che X e Y siano indipendenti, e dunque $Cov(X, Y) = 0$, si ha che:

$$Var(Z) = 0.24 + 0.48 = 0.72 \ .$$

4.2 Ipergeometrica

Esercizio

Un commerciante acquista una partita di diamanti confezionata in tre scatole ognuna da un venditore diverso. Tutte e tre le scatole contengono 10 diamanti ciascuna. Nella scatola confezionata dal venditore A c'è una pietra falsa, in quella del venditore B ci sono 4 pietre false, mentre nella scatola del venditore C ci sono 2 pietre false. Il commerciante sceglie a caso una delle tre scatole ed estrae in blocco 3 diamanti:

a) si calcoli la probabilità che nessuno dei diamanti estratti sia falso.

b) Avendo estratto un campione in blocco di 3 diamanti non falsi, si calcoli la probabilità che esso provenga dalla scatola confezionata dal venditore B.

c) Si supponga che il commerciante abbia scelto la scatola del venditore B. Se le estrazioni dei 3 diamanti avvenissero con riposizione, quale sarebbe la probabilità che il terzo diamante estratto fosse il primo a risultare falso?

Soluzione

a) Si indichino con A, B e C rispettivamente gli eventi "scegliere la scatola A", "scegliere la scatola B" e "scegliere la scatola C". Si indichino con X_A, X_B ed X_C le variabili casuali che contano il numero di pietre false estratte rispettivamente dalla scatola A, B e C. Sia inoltre X la variabile casuale che conta il numero di pietre false estratte con lo schema di campionamento descritto nell'esercizio. Allora

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X_A=0|A)\cdot P(A) + P(X_B=0|B)\cdot P(B) + \\ &\quad + P(X_C=0|C)\cdot P(C)\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Scegliendo a caso una delle tre scatole si avrà $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. Inoltre, essendo le estrazioni senza reinserimento, si ha che

$$\begin{aligned} X_A &\backsim \text{Ipergeometrica}(N=10; r=1; n=3)\ , \\ X_B &\backsim \text{Ipergeometrica}(N=10; r=4; n=3)\ , \\ X_C &\backsim \text{Ipergeometrica}(N=10; r=2; n=3)\ . \end{aligned}$$

Precisato ciò è possibile ricavare la probabilità in (10) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{\binom{9}{3}\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{30} + \frac{1}{18} + \frac{7}{45} = 0,444 \end{aligned}$$

b)

$$P(B|X=0) = \frac{P[B\cap(X=0)]}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{18}}{0,444} = 0,125$$

c) Indicando con Y la v.c. che conta il numero di estrazioni (con riposizione) necessarie per ottenere una pietra falsa allora

$$Y \backsim \text{Pascal}(p = \frac{4}{10} = 0,4)\ ,$$

la probabilità di ottenere la prima pietra falsa alla terza estrazione è pari a

$$P(Y=3) = (1-0,4)^{3-1}0,4 = 0,144\ .$$

4.3 Poisson

Esercizio

Il numero di meteoriti che colpisce un satellite durante ogni sua orbita si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di parametro λ. Nel compiere la sua orbita il satellite impiega 1 giorno, ed è mediamente colpito da 3 meteoriti.

a) Si calcoli la probabilità che nel percorrere 5 orbite il numero di meteoriti che colpiscono il satellite sia minore o uguale a 3.

b) Supponendo invece $\lambda = 0,5$ si fornisca il valore atteso e la varianza della v.c. Y che misura il tempo (in giorni) che intercorre fra l'impatto di un meteorite e quello successivo.

Soluzione

a) Indicando con X la variabile casuale che conta il numero di meteoriti che colpiscono il satellite in un giorno si ha che $E(X) = \lambda_X = 3$ pertanto

$$X \backsim \text{Poisson}(\lambda_X = 3) \ .$$

Indicando con W la v.c. che conta il numero di meteoriti che colpiscono il satellite in 5 giorni si ha che

$$W \backsim \text{Poisson}(\lambda_W = 5 \cdot 3 = 15) \ ,$$

perciò

$$\begin{aligned} P(W \leq 3) &= P(W=0) + P(W=1) + P(W=2) + P(W=3) \\ &= \frac{e^{-15}15^0}{0!} + \frac{e^{-15}15^1}{1!} + \frac{e^{-15}15^2}{2!} + \frac{e^{-15}15^3}{3!} \\ &= e^{-15}\left(1 + 15 + \frac{15^2}{2} + \frac{15^3}{6}\right) = 0,0002 \ . \end{aligned}$$

b) Se Y è la v.c. che misura il tempo (in giorni) tra 2 impatti successivi allora

$$X \backsim \text{Esponenziale}(\theta) \ ,$$

dove $\lambda = \theta \cdot t$ in cui $\lambda = 0,5$ è il parametro di $X \backsim \text{Poisson}(\lambda = 0,5)$ v.c. che conta il numero di meteoriti in un giorno. Pertanto

$$\lambda = \theta \cdot \underbrace{t}_{\text{1 giorno}} \rightarrow \lambda = \theta = 0,5 \ ,$$

da cui deriva

$$E(Y) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{0,5} = 2 \ , \qquad Var(Y) = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{0,5^2} = 4 \ .$$

4.4 Pascal & Binomiale Negativa

Esercizio

Un negozio di videonoleggio mette in vendita 20 DVD usati di un certo film, 4 dei quali presentano problemi di audio.

a) Estratti casualmente 3 DVD senza riposizione, qual è la probabilità che soltanto il terzo estratto presenti problemi di audio.

b) Considerando ora estrazioni sequenziali con riposizione, si determini la probabilità che:

- il primo DVD con problemi di audio sia il quinto estratto;
- il secondo DVD con problemi di audio sia il settimo estratto.

Soluzione

a) Indicando con A l'evento "il DVD presenta problemi di audio" risulta che la probabilità che solo il terzo presenti la caratteristica A è la seguente

$$P(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{A}) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} = 0,1404$$

b) Sia

$$Y \backsim \text{Pascal}(p = \frac{4}{20} = 0,2) \ ,$$

pertanto

$$P(Y = 5) = 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,08192 \ .$$

Inoltre sia

$$W \backsim \text{Binomiale Negativa}(r = 2; p = 0,2) \ ,$$

dunque

$$P(W = 7) = \binom{6}{1} 0,2^2 \cdot 0,8^5 = 0,0786 \ .$$

4.5 Trinomiale

Esercizio

L'ufficio ricerche di mercato chiede ad un campione di 12 persone se preferiscono un nuovo prodotto al vecchio. Si suppone che il 30% della popolazione preferisce il vecchio tipo di prodotto, il 50% preferisce il nuovo prodotto ed il 20% è indifferente:

a) si determini la probabilità che nel campione ci siano 8 clienti che preferiscono il nuovo prodotto e 2 che preferiscono il vecchio.

b) Sapendo che 3 clienti preferiscono il vecchio tipo, si determini la probabilità che 5 clienti preferiscano il nuovo tipo.

c) Si calcoli il valore atteso e la varianza del numero di clienti che sono indifferenti e la covarianza fra il numero di clienti che preferiscono il vecchio tipo e quelli che preferiscono il nuovo tipo.

Soluzione

a) Siano X_1 ed X_2 le v.c. che descrivono il numero di persone (nel campione di 12 unità statistiche) che preferiscono rispettivamente il nuovo ed il vecchio prodotto. Dunque si ha che

$$(X_1, X_2) \backsim \text{Trinomiale}(n = 12; p_1 = 0,5; p_2 = 0,3) \ ,$$

pertanto

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = 8, X_2 = 2\right) &= \frac{12!}{8! \cdot 2! \cdot 2!} 0,5^8 \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2 \ , \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2! \cdot 2!} (0,000014062) = 0,0418 \ . \end{aligned}$$

b) Fissato che si conosca il numero di persone nel campione che preferiscono il vecchio tipo, la v.c. che conta il numero di persone che preferiscono il nuovo tipo si distribuisce con legge binomiale:

$$(X_1 | X_2 = n_2) \backsim \text{Binomiale}\left(n - n_2; \frac{p_1}{1 - p_2}\right) \ ,$$

dove

$$\frac{p_1}{1 - p_2} = \frac{0,5}{1 - 0,3} = 0,7143 \ .$$

Si ha quindi

$$(X_1 | X_2 = 3) \backsim \text{Binomiale}\left(n = 9; p = 0,7143\right) \ .$$

La probabilità che $X_1 = 5$ dato $X_2 = 3$ risulta allora

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = 5 | X_2 = 3\right) &= \binom{9}{5} 0,7143^5 \cdot (1 - 0,7143)^4 \\ &= \frac{9!}{5! \cdot 4!} (0,0012389) = 0,1561 \ . \end{aligned}$$

c) Sia X_3 la v.c. che descrive il numero di persone (nel campione di 12 unità statistiche) che sono indifferenti ai due prodotti. Naturalmente

$$X_3 \backsim \text{Binomiale}\,(n = 12; p = 0,2)\ ,$$

pertanto

$$\begin{aligned} E(X_3) &= n \cdot p \\ &= 12 \cdot 0,2 = 2,4\ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(X_3) &= n \cdot p \cdot q \\ &= 12 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 1,92\ . \end{aligned}$$

La covarianza tra X_1 ed X_2 è

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= n \cdot (n-1) \cdot p_1 \cdot p_2 - n \cdot p_1 \cdot n \cdot p_2 \\ &= -n \cdot p_1 \cdot p_2 \\ &= -12 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = -1,8\ . \end{aligned}$$

Da osservare che la covarianza è negativa tra le due variabili poiché esiste una dipendenza lineare negativa fra le stesse. Più sono alti (bassi) i valori che assume X_1 e più sono bassi (alti) i valori che assume X_2. Questa relazione è evidente dato che, essendo il numero delle estrazioni fissate (12 in questo caso), più sono le persone che preferiscono il prodotto nuovo meno sono le persone che preferiscono il prodotto vecchio (e viceversa naturalmente).

5 Variabili casuali continue

5.1 Pareto

Esercizio

Il fatturato delle maggiori imprese meccaniche italiane (espresso in migliaia di Euro) può essere descritto da una v.c. X avente distribuzione di Pareto $\theta = 1,2$. È noto inoltre che il 20% di queste imprese ha fatturato superiore a 2 milioni di Euro.

a) Si specifichi la funzione di densità di X dopo avere determinato il parametro x_0 (arrotondare il valore di x_0 all'unità più vicina).

b) Si determinino il valore atteso e la varianza di X, commentando opportunamente i risultati ottenuti.

c) Si calcolino la probabilità che un'impresa abbia fatturato compreso fra $1,5$ e 2 milioni di Euro.

Soluzione

a) L'unico parametro incognito è x_0 cioè

$$X \backsim \text{Pareto}(x_0 = ?; \theta = 1,2) \ .$$

Il parametro incognito si ricava dalla seguente relazione

$$P(X > 2000) = 0,2 \ ,$$

dunque si sfrutta la funzione di ripartizione di X:

$$\left(\frac{x_0}{2000}\right)^{1,2} = 0,2 \rightarrow x_0 = 0,2^{\frac{1}{1,2}} \cdot 2000 \cong 533 \ ,$$

da cui deriva

$$f_X(x; x_0, \theta) = \begin{cases} 2194,75 \cdot x^{-2,2} & x \geq 523 \\ 0 & \text{altrove} \ . \end{cases}$$

b) Il valore atteso (momento primo) di X risulta

$$E(X) = x_0 \cdot \frac{\theta}{\theta - 1} = 523 \cdot \frac{1,2}{0,2} = 3138 \ ,$$

mentre il momento secondo $E(X^2)$ non esiste dal momento che $2 > \theta$. Perciò non esiste nemmeno la varianza che sarebbe uguale al momento secondo meno il momento primo al quadrato:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2] \ .$$

c) La probabilità si può ottenere sfruttando la funzione di ripartizione di X:

$$\begin{aligned} P(1500 \leq X \leq 2000) &= F_X(2000) - F_X(1500) \\ &= 1 - \left(\frac{523}{2000}\right)^{1,2} - \left[1 - \left(\frac{523}{1500}\right)^{1,2}\right] \\ &= -0,2 + 0,2824 = 0,0824 \ , \end{aligned}$$

oppure calcolando direttamente l'integrale

$$\begin{aligned} P(1500 \leq X \leq 2000) &= \int_{1500}^{2000} f(x)dx \\ &= \int_{1500}^{2000} 2194,75 \cdot x^{-2,2} dx \\ &= \ldots \end{aligned}$$

5.2 Esponenziale

Esercizio

La direzione di un supermercato deve acquistare un nuovo freezer per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento in mesi di un primo modello di freezer per supermercato è descritta da una v.c. X con distribuzione esponenziale di parametro $\theta = 0,01$.

a) Si valutino la durata attesa e quella mediana del freezer.

b) Si determini la probabilità che la durata del freezer sia superiore a 200 mesi.

c) Nell'ipotesi che il freezer sia già funzionante da 80 mesi, si calcoli la probabilità che questo funzioni per altri 200 mesi e la si confronti con la probabilità ottenuta al punto precedente.

d) Se la direzione del supermercato deve scegliere fra il freezer di cui sopra ed un secondo modello di freezer che ha durata in mesi che si può descrivere con una v.c. di Pareto di parametri $x_0 = 50$ e $\theta = 2$, quale modello deve scegliere per avere il maggiore valore atteso della durata?

Soluzione

a) Il valore atteso della v.c. X risulta

$$E(X) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{0,01} = 100 \ ,$$

pertanto il freezer dura mediamente (senza rompersi) 100 mesi. La mediana relativa alla v.c. X risulta

$$Me(X) = \frac{1}{\theta} \cdot \ln 2 = E(X) \cdot 0,6931 = 69,31 \ ,$$

dunque il valore x tale per cui $P(X \leq x) = 0,5$ è pari a $69,31$. Si ricordi che la mediana è quel valore x tale per cui la probabilità che X assuma un valore inferiore ad x è la stessa della probabilità che X assuma un valore maggiore di x.

b) Semplicemente

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= \int_{200}^{+\infty} 0,01 e^{-0,01 \cdot x} dx \\ &= 1 - \int_{0}^{200} 0,01 e^{-0,01 \cdot x} dx \\ &= 1 - \underbrace{P(X \leq 200)}_{F_X(200)} \\ &= 1 - \left[1 - e^{-0,01 \cdot 200}\right] = e^{-2} = 0,135 \ . \end{aligned}$$

c) La probabilità condizionata risulta

$$\begin{aligned} P(X > 280 | X > 80) &= \frac{P(X > 280 \cap X > 80)}{P(X > 80)} \\ &= \frac{P(X > 280)}{P(X > 80)} \\ &= \frac{e^{-0,01 \cdot 280}}{e^{-0,01 \cdot 80}} \\ &= e^{-0,01 \cdot 200} \\ &= P(X > 200) = 0,135 \ . \end{aligned}$$

Le due probabilità $P(X > 280|X > 80)$ e $P(X > 200)$ risultano uguali. In altre parole la probabilità che il freezer non si rompa per altri 200 mesi dato che ha funzionato per 80 mesi è la stessa che esso funzioni continuativamente per 200 mesi dalla prima accensione. L'"assenza di memoria" è la proprietà della v.c. esponenziale tale per cui risulta

$$P(X > x_2 | X > x_1) = P(X > x_2 - x_1) \qquad \text{con } x_2 > x_1 \ .$$

d) Come calcolato al punto a) risulta $E(X) = 100$. Se Y è la durata del secondo freezer che si distribuisce come una Pareto di parametri $x_0 = 50$ e $\theta = 2$ allora

$$E(Y) = x_0 \frac{\theta}{\theta - 1} = 50 \cdot \frac{2}{2 - 1} = 100 \ .$$

In termini di valore atteso di durata, è indifferente scegliere il primo piuttosto che il secondo freezer dato che $E(X) = E(Y)$.

5.3 Normale

Esercizio

Sia X una variabile casuale normale che descrive la portata del fiume Adige nel mese di Giugno nella località di Boara Pisani. È noto che in tale località la portata media del fiume nel mese di giugno è di 243 metri cubici al secondo e che $P(X < 400) = 0,9$.

a) Si determini la varianza di X.

b) Supponendo che $\sigma^2 = 100$, si determini la probabilità che in giugno il fiume Adige abbia una portata compresa fra 230 e 260 metri cubici al secondo.

c) Si supponga che $Y = 10 + X$ sia la v.c. che descrive la portata del fiume Adige nella località di Boscochiaro. Supponendo che $\sigma_X^2 = 100$, si calcoli $P(240 < Y < 270)$ e si confronti il valore ottenuto con quello ricavato al punto b).

Soluzione

a) La varianza va ricavata dalla seguente relazione

$$P(X < 400) = \Phi\left(\frac{400 - 243}{\sigma}\right) = 0,9$$

da cui si evince che

$$\frac{400 - 243}{\sigma} = 1,285$$

dal momento che il nono decile relativo alla v.c. normale standard è $z_{0,9} = 1,285$. Si ha dunque che lo scarto quadratico medio è $\sigma = 122,17$ da cui si ottiene la varianza di X che risulta pari a $Var(X) = \sigma^2 = 14927$.

b) Supponendo che $\sigma^2 = 100$ e dunque $\sigma = 10$, la probabilità richiesta si calcola come segue

$$\begin{aligned}
P(230 \leq X \leq 260) &= \int_{230}^{260} f(x)dx \\
&= F_X(260) - F_X(230) \\
&= \Phi\left(\frac{260 - 243}{10}\right) - \Phi\left(\frac{230 - 243}{10}\right) \\
&= \Phi(1,7) - \Phi(-1,3) \\
&= \Phi(1,7) - [1 - \Phi(1,3)] \\
&= 0,9554 - 1 + 0,9032 = 0,8586\ .
\end{aligned}$$

c) Essendo X una v.c. normale ed essendo Y una trasformazione lineare di X allora risulta che anche Y è una v.c. normale. In particolare risulta che

$$E(Y) = E(10 + X) = 10 + E(X) = 10 + 243 = 253$$

e

$$Var(Y) = Var(10 + X) = Var(X) = 100 \ .$$

Con questi elementi è possibile calcolare la probabilità $P(240 \leq Y \leq 270)$ (come fatto al punto b) per la variabile casuale X) sfruttando il valore atteso e la varianza di Y appena calcolati. In alternativa si può osservare che

$$\begin{aligned} P(240 \leq Y \leq 270) &= P(240 \leq 10 + X \leq 270) \\ &= P(230 \leq X \leq 260) \ , \end{aligned}$$

e quindi è possibile concludere che $P(240 \leq Y \leq 270) = 0,8586$.

5.4 Log-Normale

Esercizio

Avendo selezionato dalla popolazione di una regione italiana un gruppo di uomini adulti coniugati si è verificato che la distribuzione del reddito mensile segue una legge lognormale con parametri $\gamma = 6,109$ e $\delta = 0,699$.

a) Si calcoli la probabilità che, estraendo un individuo dal gruppo, questi abbia un reddito mensile compreso fra 1300 e 2600 Euro.

b) Si calcoli il valore atteso e la varianza del reddito.

c) Nella medesima regione, si è osservato che il logaritmo del reddito mensile delle mogli ha distribuzione normale con valore atteso pari a $5,3$ e varianza pari a $0,9$. Si calcoli il valore atteso e la varianza del logaritmo del reddito complessivo del gruppo di coniugi supponendo che la correlazione fra il logaritmo del reddito dei mariti e delle mogli del gruppo sia nulla.

Soluzione

a) Posta X la v.c. che descrive il reddito mensile degli uomini adulti coniugati si ha che

$$\begin{aligned}
P(1300 \leq X \leq 2600) &= \int_{1300}^{2600} f(x)dx \\
&= F_X(2600) - F_X(1300) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln 2600 - 6,109}{0,699}\right) - \Phi\left(\frac{\ln 1300 - 6,109}{0,699}\right) \\
&= \Phi(2,510) - \Phi(1,518) \\
&= 0,99396 - 0,93574 = 0,058 \ .
\end{aligned}$$

b) Il valore atteso e la varianza di X risultano rispettivamente

$$E(X) = e^{\gamma + \frac{1}{2}\delta^2} = e^{6,109 + \frac{0,699^2}{2}} = 574,385 \ ,$$

$$Var(X) = e^{2\gamma + \delta^2}\left(e^{\delta^2} - 1\right) = 207859,954 \ .$$

c) Si indichi con Y la v.c. che descrive il logaritmo del reddito mensile delle mogli degli adulti coniugati del gruppo in analisi. Si indichi inoltre con Z la v.c. che descrive il logaritmo del reddito mensile complessivo del gruppo di coniugi (mariti e mogli). Allora si ha che

$$Z = X + Y \ ,$$

da cui si ricava

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 6,109 + 5,3 = 11,409 \ .$$

e

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + \underbrace{2\cancelto{0}{Cov(X,Y)}}_{\text{nulla per ipotesi}} \\
&= 0,699^2 + 0,9^2 = 1,389 \ .
\end{aligned}$$

DOMANDE DI TEORIA DI CPS

① Definizione di variabile aleatoria (def del prof.)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio misurabile — $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ spazio misurabile

Ω: spazio campionario; $\mathcal{F}$: eventi

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

"la controimmagine di un qualsiasi boreliano deve essere un evento"

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}[X^{-1}(B)] = \mathbb{P}(X \in B)$$

② Media e varianza di una variabile aleatoria

DEF: X è una V.A. discreta che può assumere i valori $x_1, x_2 \dots$ ed indico la media con $E[X]$

$$E[X] := \sum x_i \cdot P(X = x_i)$$

Posso calcolarla anche di una ~~V.A continua~~ se ~~x ha densità di probabilità f e dx è abbastanza piccolo~~

$$\cancel{f(x)dx \approx P(x < X < x + dx)}$$

DEF: Se x è una V.A. continua con funzione di densità f, la media sarà

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

PROPRIETÀ: X V.A di cui conosciamo la distribuzione => posso considerare una sua funzione $g(x)$

↳ ho $g(x)$ V.A di cui conosco la distribuzione dunque posso ottenere $E(g(x))$

↳ se ho $X = x$ allora la media dei possibili valori di $g(x)$ dandogli la probabilità che X sia X

PROP: 1. X V.A <u>discreta</u> con funzione di massa di probabilità p

$$E(g(x)) = \sum_x g(x)p(x)$$

2. X V.A <u>continua</u> con funzione di densità di probabilità f

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

COROLLARIO: $\forall a, b$, $E[aX+b] = aE(X)+b$

CASO DISCRETO

$$E[aX+b] = \sum(ax+b)p(x) = a\sum x p(x) + b\sum p(x) = aE(X)+b$$

CASO CONTINUO

$$E[aX+b] = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = aE(X)+b$$

$a=0$
$E(b) = b$

$b=0$
$E(aX) = aE(X)$

DEF: $E(X^n)$ con $n = 1..n$ => $E(X^n) = \begin{cases} \sum x^n p(x) & \text{X DISCRETA} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx & \text{X CONTINUA} \end{cases}$

MEDIA DELLA SOMMA: X e Y V.A e g funzione di due variabili

$$E(g(x,y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)p(x,y) & \text{DISCRETO} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy & \text{CONTINUO} \end{cases}$$

Se ho $g(x,y) = x+y$ => $E[X+Y] = E(X)+E(Y)$ ①

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy \Rightarrow E(X)+E(Y)$$

VARIANZA: X V.A di cui conosco la distribuzione. I valori sono distribuiti attorno alla media $\mu := E(X)$ (con $E(X-\mu)$ quantifico la loro distanza da μ)

DEF: X V.A con media μ, la $D^2(X) := E(X-\mu)^2$ oppure
$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

valore atteso del quadrato di X

quadrato della media

$\forall a, b$, $D^2(aX+b) = a^2 D^2(X)$
se pongo $\mu := E(X) \Rightarrow E(aX+b) = aE(X) + b = a\mu + b$

$$D^2(aX+b) = E[(aX+b - E(aX+b))^2] =$$
$$= E[(aX+b-a\mu-b)^2] =$$
$$= E[a^2(X-\mu)^2]$$
$$= a^2 E[(X-\mu)]^2 = a^2 D^2(X)$$

$a=0 \Rightarrow D^2(b)=0$
$a=1 \Rightarrow D^2(X+b) = D^2(X)$
$b=0 \Rightarrow D^2(aX) = a^2 D^2(X)$

DEVIAZIONE STANDARD: $D(X) = \sqrt{D^2(X)}$

3 Legge debole dei grandi numeri

→ MARKOV: X V.A, $\forall a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

DIM: $E(X) := \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x f(x)dx + \int_a^\infty a f(x)dx \geq \int_a^\infty x f(x)dx$

$$\geq \int_a^\infty a f(x)dx = a \int_a^\infty f(x)dx = a \cdot P(X \geq a)$$

→ CHEBYSHEV: X V.A, media μ e varianza σ^2, $\forall r > 0$

$$P(|X-\mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

DIM: $\{|X-\mu| \geq r\}$ e $\{(X-\mu)^2 \geq r^2\}$ equiprobabili

Markov con $a = r^2$

$$\Rightarrow P(|X-\mu| \geq r) = P((X-\mu)^2 \geq r^2) \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{r^2} = \frac{\sigma^2}{r^2}$$

⚠ limitare la probabilità di eventi rari ma si guardano variabili aleatorie di cui conosciamo solo media e varianza

→ LDGN: $x_1, x_2 \ldots$ successioni di V.A i.i.d., con media $E(x_i) := \mu$
con $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \qquad n \to \infty$$

DIM: $E\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = \mu$ e $D^2\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

Applico Chebyshev su $\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = S_n$

$$\Rightarrow \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon > 0,\ \lim_n P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \le \lim_n \frac{\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}{n} = 0$$

$$? \Rightarrow \lim_n P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \le 0 \Rightarrow \lim P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \to \mu$$

8 Binomiale e Poisson

Per iniziare: Ho un esperimento il cui esito è "successo" o "fallimento"
Successo $\Rightarrow x = 1$
Fallimento $\Rightarrow x = 0$

La funzione di massa di probabilità di X:

(1) $\begin{cases} P(x=0) = 1-p \\ P(x=1) = p \end{cases}$ $0 \le p \le 1$

DEF: Una V.A si dice BERNOULLIANA se la sua funzione di massa di probabilità è come la (1). Può assumere solo valori come 0 e 1.
La media è: $E(x) := 1 \cdot P(x=1) + 0 \cdot P(x=0) = p$

DEF: n ripetizioni indipendenti di un esperimento che può concludersi in un successo di probabilità p o fallimento con probabilità $1-p$. Indico con X il numero totale di successi ovvero la VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE DI PROBABILITÀ (n, p)

(2) $P(x=i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ $\quad i = 0, 1 \ldots n$

Fissata una qualunque sequenza di esiti con i successi e $n-i$ fallimento, la probabilità che si realizzi esattamente tale sequenza è $p^i(1-p)^{n-i}$ per l'indipendenza delle ripetizioni.
Le sequenze di esiti sono $\binom{n}{i}$

$$\Rightarrow \sum P(x=i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1$$

La variabile aleatoria binomiale di parametri (n,p) viene rappresentata come somma di bernoulliane. Se X è binomiale di parametri (n,p) $\Rightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (3)

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{se la prova i-esima ha successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

x_i bernoulliane di parametro p. $E(x_i) = p$

$E(x_i^2) = p \Rightarrow x_i = x_i^2$

$D^2(x_i) = E(x_i^2) - E^2(x_i) = p - p^2 = p(1-p)$

$\Rightarrow$ dalle proprietà di media e varianza e dalla (3)

$E(X) := \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = n \cdot p$

$D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} D^2(x_i) = n \cdot p(1-p)$

→ VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

DEF: Una variabile aleatoria X di valori $1, 2 \ldots$ si dice di POISSON di parametro λ, $\lambda > 0$ se la sua funzione di massa di probabilità è data da: $P(X=i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$ $\quad i = 0, 1, 2 \ldots$ (1)

La (1): $\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$

Sia X una V.A di Poisson, la media e la varianza calcoliamo la sua funzione generatrice dei momenti

$$\phi(t) := E(e^{tx}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \cdot P(X=i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0} e^{ti} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Derivando: $\phi'(t) = \lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)}$

$\phi''(t) = (\lambda e^t)^2 \cdot e^{(\lambda(e^t-1))}$

Pongo $t=0$, $E(X) = \phi'(0) = \lambda$

$D^2(X) = \phi''(0) - E(X^2) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Sia X una V.A binomiale di parametri (n,p) e $\lambda = n \cdot p$

$$P(X=i) = \frac{n!}{i(n-i)} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \cdot \frac{\lambda^i}{t!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^t}$$

Se n è molto grande e p molto piccolo:

$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$ $\quad \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-i+1}{n} \approx 1$ $\quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$

$np = \lambda \Rightarrow P(x_i) \approx \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$

La distribuzione di Poisson è riproducibile => la somma di due poissoniane indipendenti è ancora una poissoniana

X_1 e X_2 V.A di Poisson di parametri λ_1 e λ_2 => calcoliamo la funzione generatrice dei momenti della loro somma

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\,\phi_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

↳ con media $\lambda_1+\lambda_2$ e $\phi_{X_1+X_2}$

5 Teorema centrale di convergenza

Siano $X_1 \dots X_n$ delle variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tutte con media μ e varianza σ^2. Se n è grande $X_1 + \dots + X_n$ => media $n \cdot \mu$ e varianza $n \cdot \sigma^2$

Normalizziamo la somma precedente => ho una distribuzione approssimativamente normale standard

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - \mu \cdot n}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Per n grande e $\forall x$: $P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x)$ → Funzione di ripartizione della normale standard

Diretta applicazione => variabili aleatorie binomiali

↓

X di parametri (n, p) rappresenta il numero di successi in n prove indipendenti con probabilità p di riuscita

$$X := X_1 + \dots + X_n \quad \text{con } X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima prova ha successo} \\ 0 & \end{cases}$$

Poiché $E(X_i) = p$, $D^2(X_i) = p(1-p)$ => $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

⑥ Metodo max verosomiglianza

Se ho una statistica => mi da una stima di parametro θ
(STIMATORE DI θ) => variabile aleatoria
=> valore assunto = stima

$x_1 \dots x_n$ V.A nota a meno di un parametro incognito θ
↳ stimare θ usando i valori che vengono assunti da queste variabili aleatorie

DEF: $f(x_1 \dots x_n | \theta)$ funzione di massima congiunta di $x_1 \dots x_n$ oppure la loro densità congiunta a seconda che siano variabili aleatorie discrete o continue

θ incognita => f dipende da θ
$f(x_1 \dots x_n | \theta)$ verosomiglianza => quando θ è il vero valore assunto dal parametro
↳ adotto una stima di θ che rende max la verosomiglianza

Dunque: la stima di max verosomiglianza θ è definita come il valore θ che rende max $f(x_1 \dots x_n | \theta)$ quando i valori osservati sono $x_1 \dots x_n$
↳ $f(x_1 \dots x_n | \theta)$ = LIKELIHOOD

⚠ Nel calcolare il valore di θ che massimizza f
↳ $f(x_1 \dots x_n | \theta)$ e $\log[(f(x_1 \dots x_n | \theta)]$ assumono il max in corrispondenza dello stesso valore di θ

$\underline{x} := (x_1 \dots x_n)$ c.c.s di valori 0 a $+\infty$

$\underline{x} := (x_1 \dots x_n) \in (0; +\infty) \times (0; +\infty) \dots (0; +\infty)$

$\Rightarrow f_X(\underline{x}; \theta) = f_{X_1}(x_1; \theta) \dots f_{X_n}(x_n; \theta) = f_X(x_1; \theta) f_X(x_2; \theta) \dots f_X(x_n; \theta)$

avendo $\underline{x} = (\underline{x_1} \dots \underline{x_n})$ fissato

$\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) = f_{\underline{X}}(\underline{x_1} \dots \underline{x_n}; \theta)$ => FUNZIONE DI VEROSOMIGLIANZA

⑦ Impostazione assiomatica di Kolmogorov

Data una terna di probabilità che definisce gli elementi di studio per una famiglia di eventi, $\mathcal{E} = (\Omega, F = \sigma(G), P)$

↳ Kolmogorov definisce un sistema assiomatico → base per il calcolo delle probabilità

P è una misura di probabilità o meglio che manda elementi da $F = \sigma(G)$ ad $[0,1] \in \mathbb{R}$

↳ deve rispettare 3 assiomi:
1. $A \in F, P(A) \geq 0 \Rightarrow \Omega \in A$ (i)
2. $P(\Omega) = 1 \Rightarrow A \in A$ anche $A^c \in A$ (ii)
3. $(A_n) \subseteq F, A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$

Da qui ricavo: ① $\emptyset \in F \Rightarrow$ il vuoto è un evento
Per (i): Ω è un evento $\Rightarrow$ per (ii): $\Omega^c = \emptyset$ evento

$\emptyset$ = evento impossibile

Ω = evento certo

② A è un evento, A^c evento contrario ad A

③ ~~L'assioma 3 richiede che per una famiglia finita di sottoinsiemi di Ω, anche la loro unione è stabile rispetto all'unione~~ finita

$n \in \mathbb{N}, (A_1 .. A_n) \subseteq F : A_i \cap A_j, P(\bigcup_{i=1} A_i) = \sum P(A_i)$

DIM: $i = (1 ... n), B_i = A_i, i > n, B_i = \emptyset$
$\Rightarrow P(\cup B_n) = \sum P(B_n) = \sum P(B_i) + \sum_{i=n+1} P(B_i) =$
$= \sum P(A_i) + \sum_{i=n+1} P(\emptyset)$

$\Rightarrow P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

↳ Dagli assiomi ii) e 3) e dalle leggi di De Morgan, ho la stabilità di F rispetto all'intersezione numerabile

⑧ Legge normale

Una V.A ha LEGGE NORMALE o GAUSSIANA di parametri μ e σ^2 se ha la seguente densità di probabilità

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

μ = media e σ^2 = scarto quadratico medio

μ = indica il centro della distribuzione ⇒ valore a cui corrisponde il valore max

σ^2 = caratterizza la forma della curva in quanto misura di dispersione dei valori attorno al valore medio

1) Simmetrico rispetto all'asse verticale di $x=\mu$ (max assoluto)

2) $\mu \pm \sigma$ => punti di flesso

3) La tavola della distribuzione normale standard ti permette di calcolare la probabilità di un quartile o trovare il valore del quartile che delimita l'area alla sua sinistra (della curva gaussiana)

DEF: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ è una V.A con $\mu=1$ e $\sigma^2=1$.

Si dice NORMALE STANDARD la funzione di ripartizione Φ

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y}{2}}\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

△ $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ha distribuzione normale standard quando X è gaussiana con media μ e varianza σ^2 quando ci permette di esprimere la probabilità relativa a X in termini di probabilità su Z

△ $\Phi(x)$ = valori non negativi di X => $\Phi(-x)$ con la simmetria della distribuzione rispetto a 0 $\rightarrow 1-\Phi(x)$

se ho $x>0$ e Z V.A normale standard allora $\Phi(-x)=P(Z<-x)=P(Z>x)=1-P(Z<x)$ $=1-\Phi(x)$

~~Infatti: $P(Z<-1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$~~

9 Istogrammi e scatola a baffi

ISTOGRAMMI mostrano la forma dei dati. L'asse orizzontale rappresenta i valori dei dati e ciascuna barra include un range di valori. L'asse verticale indica quanti sono i punti nei dati ad avere i valori nel range specificati dalla barra

→ SCATOLA A BAFFI

- $r = Q3 - Q1$ → misura la dispersione della distribuzione
  → da forma alla distribuzione
- I baffi → intervalli che hanno valori minori di Q1 e maggiori di Q3
  → punti estremi = valori adiacenti
- In $Q3+1,5r$ => valore più grande tra le osservazioni che $\leq Q3+1,5r$
- In $Q1-1,5r$ => valore più piccolo tra le osservazioni che risulta $\geq Q1-1,5r$
- I valori adiacenti → informazioni sulla dispersione e sulla forma della distribuzione
  → se coincidono con gli estremi => no anomalie
- Rappresenta la distribuzione di un campione tramite semplici indici di dispersione e di posizione

10) La formula delle alternative e il teorema di Bayes

Ho un insieme di eventi $A_1 \dots A_n$ si dice "costruire" un insieme di alternative se gode di 3 proprietà:

1. $i = (1 \dots n)$, $P(A_i) > 0$
2. $i, j = (1 \dots n)$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \Omega = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

da qui ricavo la formula $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$

DIM: $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup A_i) = \bigcup (B \cap A_i)$

$\Rightarrow P(B) = P(\bigcup (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$

Se ho $A_1 \dots A_n$ insieme di alternative che partizionano lo spazio Ω degli eventi ed un evento $B \subseteq \Omega$ tale che $P(B) = \emptyset$, si trova l'espressione per:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

* ⚠ $P(A)$ = probabilità a priori
  $P(A|B)$ = probabilità condizionata, se si verifica B avviene affinché si verifichi A $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\Rightarrow$ TEOREMA DI BAYES: Impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha provocato l'evento verificato

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$

DIM: $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1 - P(F))$

* $P(B)$ = probabilità a priori di B
  $P(B|A)$ = verosomiglianza

11) Proprietà della funzione di distribuzione

La funzione di distribuzione, data una V.A X è la funzione che fa corrispondere i valori di x la probabilità $P(X \leq x)$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \; ; \; F_X(x) := P(X \leq x)$$

probabilità che X assuma un valore $\leq x$

PROPRIETÀ: 1) F_X è NON DECRESCENTE

Sia $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = P((X \leq x) \cup (x_1 < X < x_2)) = P(X \leq x) + P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_1) + P(x_1 < X < x_2) \geq F_X(x_1)$

2) Una qualsiasi F_X distribuzione continua a destra, ovvero:

$x \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad \{x = x + \frac{1}{n}\}, \{x \le x\} \cup \{x < x \le x + \frac{1}{n}\}$

$\Rightarrow F_X(x+\frac{1}{n}) = F_X(x) = P(x < X \le x + \frac{1}{n})$

decresce all'
evento impossibile

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} F_X(x+\frac{1}{n}) = F_X(x) + \lim_{n\to\infty} P(x < X < x + \frac{1}{n}) =$

$= F_X(x) = P(\lim_{n\to\infty}\{x < X < x + \frac{1}{n}\}) \to F_X(x) + P(\emptyset) = F_X(x)$

3) Per una qualsiasi F_X distribuzione risulta:

$\lim_{n\to+\infty} F_X(x) = 1 \quad , \lim_{n\to-\infty} F_X(x) = 0$

$+\infty$ $C_n : \{\omega \in \Omega : x(\omega) \le n\} = \{x \le n\}$

$P(\lim_n \{x \le n\}) = P(\Omega) = 1$

$-\infty$ $D_n : \{\omega \in \Omega : x(\omega) \le -n\} = \{x \le -n\}$

$P(\lim_{n\to-\infty}\{x \le -n\}) = P(\emptyset) = 0$

12 Centri e medie analitiche

Sia $y = (y_1 \dots y_n)$ una rilevazioni dati su un criterio quantitativo. Per avere una media analitica, bisogna specificare un criterio
$\Rightarrow$ funzione di circostanza

Indico con $y^* = (y \dots y)$ una falsa rilevazione dati di taglio n avente tutti gli elementi uguali a y, allora la risoluzione della media di y è data da:

$C(y \dots y_n) = C(y^*)$ $\Rightarrow$ la valutazione della funzione di circostanza C su y deve coincidere con la valutazione di C su y^*

Medie
- aritmetica
- geometrica
- armonica

Il concetto di CENTRO è importante in quanto essi vanno a riassumere tramite dei valori il fenomeno descritto nella distribuzione. Si vuole trovare una funzione che rappresenta la distanza di x da tutti i punti della sua rilevazione dati.

$\forall x \in \mathbb{R}, d(x, y) \ge 0$ $\Rightarrow$ funzione che rappresenta la distribuzione x dei dati y

CENTRO DI UNA RILEVAZIONE DATI: $y : (y)$

$$= d_r(x,y) = \begin{cases} \sqrt[r]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x-y_i|^r} & r>0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x-y_i| & r=0 \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ = ZETA

ORDINE
- 0: $\mathcal{E}_0(y)$ = MODA
- 1: $\mathcal{E}_1(y)$ = MEDIANA
- 2: $\mathcal{E}_2(y)$ = MEDIA
- R: $\mathcal{E}_r(y) := \arg\min d_r(x,y)$

(B) Stimatori e proprietà

Uno stimatore è una funzione che associa ad ogni possibile campione un valore del parametro da stimare. È una funzione di un campione di dati estratti casualmente di una popolazione.

Proprietà: 1. CORRETTEZZA: lo stimatore $T=(x_1 \dots x_n)$ di $\varphi(\theta)$ è CORRETTO quando $E^{\theta}(T)=\varphi(\theta)$

→ se non è così allora è distorto con indice di distorsione $d(\theta)=E^{\theta}(T)-\varphi(\theta)$

2. CONSISTENZA: uno stimatore T è consistente quando $\varepsilon>0$, $\lim_n P(|T-\varphi(\theta)|<\varepsilon)=1$

(C) Confronto tra stimatori e rischio quadratico medio

RISCHIO QUADRATICO MEDIO: Confrontando 2 stimatori T e S per $\varphi(\theta)$ indico rischio quadratico medio la funzione

$$\theta \in \Theta,\ R_T(\theta)=E\{\underbrace{[T-\varphi(\theta)]^2}_{\text{variabile aleatoria}}\}$$

→ somma della varianza dello stimatore con il quadrato della sua distorsione

T e S sono stimatori per $\varphi(\theta)$

1) S è PREFERIBILE a T $\Leftrightarrow R_S(\theta)<R_T(\theta)$
2) S è STRETTAMENTE PREFERIBILE a T $\Leftrightarrow R_S(\theta)<R_T(\theta)$
3) S è AMMISSIBILE per la stima di $\varphi(\theta)$ quando non esiste altro stimatore a lui strettamente preferibile a T

(15) Descrizione fondamento teorico del metodo dei momenti

INTRODUZIONE: La legge di probabilità di un numero aleatorio X è caratterizzata da uno o più parametri. Ogni momento teorico di X, se esistente, è funzione dei parametri. Nel caso in cui il numero aleatorio X sia dotato di funzione generatrice dei momenti allora si può affermare che esistono finito sia il momento che il momento centrale di qualsiasi ordine di X

METODO DEI MOMENTI: n, k e $p \geq k$ numeri interi positivi
$\underline{X} = (x_1 \dots x_n)$ genitrice X di un CCS. con legge di probabilità $\theta_1 \dots \theta_k$

Scelti p indici interi positivi, $j_1 \dots j_p$ risulta:

$r = 1 \dots p$ e $\mu'_{j_r} = f_{j_r}(\theta_1 \dots \theta_k)$

p equazioni nei k parametri incogniti

Per risolvere tale sistema: $s = 1 \dots k$ $\theta_s = g_s(\mu'_{j_1} \dots \mu'_{j_p})$

lo stimatore fornito dal metodo dei momenti consiste nella sostituzione dei p momenti teorici considerati con i corrispondenti momenti campionari

$s = 1 \dots k$, $\hat{\theta}_{s,mm} = g_s(\bar{X}^{(j_1)} \dots \bar{X}^{(j_p)})$

PROPOSIZIONE 1: Per le genitrici dotate di funzioni generatrici dei momenti gli stimatori campionari sono consistenti dei rispettivi momenti teorici

PROPOSIZIONE 2: Siamo consistenti gli stimatori campionari di $\theta_{s,mm}$. Se per $s = 1 \dots k$ la funzione g_s è continua $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{s,mm}$ è uno stimatore consistente per θ_s

8. Bonus: risposte alle domande orali più frequenti

Le seguenti risposte sono state affettuosamente scopiazzate dagli appunti di **L. Brando**

L'impostazione assiomatica di Kolmogorov.

Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω è detta una ***σ*-algebra degli eventi** se verifica le seguenti proprietà:

4)	$\Omega \in \mathcal{A}$	l'*evento certo* è un evento ($A \in \mathcal{A} =$ "A è un evento")
5)	$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$	L'*evento contrario* è un evento
6)	Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$, allora: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ è stabile rispetto all'unione numerabile

Dalla precedente definizione si possono effettuare le seguenti osservazioni sugli assiomi di Kolmogorov:

- Dagli assiomi 1 e 2 segue che $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$ (l'evento impossibile è un evento)
- Dagli assiomi 2 e 3 e dalle leggi di De Morgan si dimostra anche la stabilità rispetto l'intersezione numerabile: sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerabile di eventi in $\mathcal{A}$ risulta: $\bigcap A_n = (\bigcup A_n^c)^c$

La formula delle alternative e il teorema di Bayes.

Ho un insieme di eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ si dice "costruire" un insieme di alternative se gode di 3 proprietà:

1) $i = 1,2,\dots,n,\ \mathcal{P}(A_i) > 0$
2) $i,j = 1,2,\dots,n$ con $i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
3) $\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \Omega = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i)$

Da queste 3 proprietà si ricava la formula $\mathcal{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B|A_i)\mathcal{P}(A_i)$. Infatti, $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup A_i) = \bigcup(B \cap A_i) \Rightarrow \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\bigcup(B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B|A_i)\mathcal{P}(A_i)$.

Se ho $A_1, \dots, A_n$ insieme di alternative che partizionano lo spazio Ω degli eventi ed un evento $B \subseteq \Omega$ tale che $\mathcal{P}(B) = \emptyset$, si trova l'espressione per

$$\mathcal{P}(A_i|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A_i)\mathcal{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}(B|A_j)\mathcal{P}(A_j)}$$

N.B.: $\mathcal{P}(A)$ si chiama probabilità a priori mentre $\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}$ è la probabilità condizionata di A dato B. Mentre $\mathcal{P}(B|A)$ si dice verosimiglianza.

Teorema di Bayes: Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità. Sia $A_1, \dots, A_n$ una partizione di Ω, tale che $\mathcal{P}(A_i) > 0$ per ogni $i = 1,2,\dots,n$. Sia infine B un evento $\mathcal{P}(B) > 0$. Allora per ogni $j = 1,2,\dots,n$ risulta:

$$\mathcal{P}(A_j|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A_j)\mathcal{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(B|A_i)\mathcal{P}(A_i)}$$

Tale teorema è impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha provocato l'evento verificato $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$. Infatti, $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \cap F^c) = \mathcal{P}(E|F)\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(E|F^c)\mathcal{P}(F^c) = \mathcal{P}(E|F)\mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(E|F^c)\big(1 - \mathcal{P}(F)\big)$.

Gli elementi fondamentali nella definizione di una variabile aleatoria.

Se $\mathcal{F}$ è una σ-algebra sull'insieme S, la coppia $(S, \mathcal{F})$ si dice uno **spazio misurabile** e gli elementi di $\mathcal{F}$ sono chiamati *insiemi misurabili* o solo *misurabili*. All'insieme $\mathbb{R}$ è associata, di norma, la σ-algebra generata dagli *insiemi di Borel* (intervalli aperti e limitati).

Si consideri ora uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Un *numero aleatorio* è un'applicazione X di Ω in $\mathbb{R}$ con la condizione che la controimmagine tramite X di un boreliano deve essere un evento: $B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Definiamo ora una misura di probabilità sulla σ- algebra $\mathcal{B}$:
$B \in \mathcal{B},\ \mathcal{P}_X(B) \coloneqq \mathcal{P}[X^{-1}(B)] = \mathcal{P}(X \in B)\ \forall B \in \mathcal{B}$.

La misura di probabilità $\mathcal{P}_X$ è la *distribuzione* oppure la *legge* del numero aleatorio X. Essa fornisce tutte le informazioni probabilistiche relative al numero aleatorio X ed esse si basano sulla misura di probabilità $\mathcal{P}$ della descrizione matematica dell'esperimento aleatorio $\mathcal{E}$ sottostante.

Le proprietà della funzione di distribuzione.

La funzione di distribuzione, data una variabile aleatoria X è la funzione che fa corrispondere ai valori di X la probabilità $\mathcal{P}(X \leq x)$: $F_X: \mathbb{R} \to [0,1];\ \ F_X(x) \coloneqq \mathcal{P}(X \leq x)$ (quindi la funzione di distribuzione è la probabilità che X assuma un valore minore od uguale a x)

Proprietà:

1) F_X è non decrescente.
Sia $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_2) = \mathcal{P}(X \leq x_2) = \mathcal{P}\big((X \leq x_1) \cup (x_1 < X < x_2)\big) = \mathcal{P}(X \leq x_1) + \mathcal{P}(x_1 < X < x_2) = F_X(x_1) + \mathcal{P}(x_1 < X < x_2) \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$

2) F è continua a destra; ovvero: $\forall x \in \mathbb{R}, F(x^+) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to x^+} F(t) = F(x)$
Attraverso la definizione di funzione di ripartizione e scomponendo l'evento in un'unione di due eventi disgiunti si ottiene: $F(x^+) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}\left(X \leq x + \frac{1}{n}\right) =$
$= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}\left((X \leq x) \cup \left(x < X \leq x + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\mathcal{P}(X \leq x) + \mathcal{P}\left(x < X \leq x + \frac{1}{n}\right)\right) =$
$= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}(X \leq x) + \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}\left(x < X \leq x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} F(x) + 0 = F(x)$

3) $\lim_{n\to+\infty} F(n) = 1 \wedge \lim_{n\to-\infty} F(n) = 0$
Cominciamo con la prima osservando che $F(n)$ è la probabilità dell'evento $A_n = \{X \leq n\}$. Sappiamo che la successione di eventi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *crescente* e $\bigcup A_n = \Omega$. Dunque, per la proprietà di passaggio al limite delle successioni si ha $\lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}(\bigcup A_n) = \mathcal{P}(\Omega) = 1$. Ragionamento analogo per la seconda: $F(n)$ è la probabilità dell'evento $A_n = \{X \leq -n\}$ ma essendo la successione *decrescente* si ha $\bigcap A_n = \emptyset$. Dunque, sempre per la suddetta proprietà, si ha $\lim_{n\to-\infty} F(n) = \lim_{n\to-\infty} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}(\bigcap A_n) = \mathcal{P}(\emptyset) = 1$.

Collegamento tra la legge binomiale e quella di Poisson.

Siamo in un esperimento il cui esito è "successo" $X = 1$ o "fallimento" $X = 0$ e la cui funzione di massa di probabilità di X è definita come segue: **(1)** $\mathcal{P}(X = 0) = 1 - p,\ \mathcal{P}(X = 1) = p$ con $0 \leq p \leq 1$.

Definizione 1: una variabile aleatoria si dice bernoulliana se la sua funzione di massa di probabilità è come la (1). Può assumere solo valori nell'intervallo $[0,1]$ e la sua media è $E[X] \coloneqq 1\mathcal{P}(X = 1) + 0\mathcal{P}(X = 0) = p$

Definizione 2: n ripetizioni indipendenti di un esperimento che può concludersi in un successo di probabilità p o in un fallimento con probabilità $1 - p$. Indico con X il numero totali di successi, ovvero la *variabile aleatoria binomiale di probabilità* (n, p)**: (2)** $\mathcal{P}(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ con $i = 0,1,..,n$

Fissata una qualunque sequenza di esiti con i successi e $n - i$ fallimenti, la probabilità che si realizzi esattamente tale sequenza è $p^i(1 - p)^{n-i}$ per l'indipendenza delle ripetizione. Le sequenze di esiti sono $\binom{n}{i}$. Allora $\sum \mathcal{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i} = [p + (1 - p)]^n = 1$.

La variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) viene rappresentata come somma di bernoulliane. Se X è binomiale di parametri (n, p) allora **(3)** $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ dove $x_i = 1$ se la i-esima prova ha successo, $x_i = 0$ altrimenti.

x_i bernoulliana di parametro p: $E[x_i] = p, E[x_i^2] = p$ (essendo $x_i = x_i^2$); $D^2[x_i] = p - p^2 = p(1-p)$. Dalle proprietà di media e varianza, e dalla (3) segue che la media $E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = np$, mentre la varianza $D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} D^2[x_i] = np(1-p)$.

Definizione 3: Una variabile aleatoria X di valori 1,2, … si dice di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se la sua funzione di massa di probabilità è data da **(4)** $\mathcal{P}(X = i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$.

Dalla (4): $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}(x = i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$

Sia X una variabile aleatoria di Poisson. Per determinare la media e la varianza, calcoliamo la sua funzione generatrice dei momenti: $\phi(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \mathcal{P}(X = i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$. Derivando si trova allora $\phi'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$ e $\phi''(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$ e valutando le due espressioni in $t = 0$, si ottiene $E[X] = \phi'(0) = \lambda$ e$D^2[X] = \phi''(0) - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Reale risposta: Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) e $\lambda = np$ si ha:

$$\mathcal{P}(X = i) = \frac{n!}{(n-i)!\, i!} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

Se si suppone che n sia molto grande e p molto piccolo, valgono le seguenti approssimazioni,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \qquad \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-i+1}{n} \approx 1, \qquad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

E quindi, se n è grande, p è piccolo e $\lambda = np$: $\mathcal{P}(X = i) \approx \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

La legge normale e l'uso della tavola relativa alla funzione di distribuzione standard.

Una variabile aleatoria ha *legge normale* o *gaussiana* di parametri μ (media) e σ^2 (scarto quadratico medio) se ha la seguente densità di probabilità:

$$f(X, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

μ indica la distribuzione: valor a cui corrisponde il valore massimo mentre σ^2 caratterizza la forma della curva in quanto misura di dispersione dei valori attorno al valore medio

1) Simmetrico rispetto all'asse verticale di $x = \mu$ (massimo assoluto)
2) $\mu \pm \sigma$ sono i punti di flesso
3) La tavola della distribuzione naturale standard ti permette di calcolare la probabilità di un quartile o trovare il valore del quartile che delimita l'area alla sua sinistra (della curva gaussiana)

Definizione: Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $Z := \frac{x-\mu}{\sigma}$ è una variabile aleatoria con $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$. Si dice *normale standard* la funzione di ripartizione $\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y}{z}} dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$

N.B.: Z ha distribuzione normale standard qunado x è gaussiana con media μ e varianza σ^2. Questo ci permette di esprimere la probabilità relativa a x in termini di probabilità su Z.

Se ho $x > 0$ e Z variabile aleatoria normale standard allora $\phi(-x) = \mathcal{P}(Z < -x) = \mathcal{P}(Z > x) = 1 - \mathcal{P}(Z < x) = 1 - \phi(x)$

Proprietà della media e della varianza di una variabile aleatoria.

Sia X una variabile aleatoria discreta, definiamo la media $E[X] = \sum x_i \mathcal{P}(X = x_i)$.
Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità f, definiamo la media $E[X] \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Proprietà: Sia X una variabile aleatoria di cui conosciamo la distribuzione; posso considerare una sua funzione $g(X)$. Ne consegue che $g(X)$ è una variabile aleatoria di cui conosco la distribuzione e posso ottenere $E[g(X)]$.

Proposizione 1: Sia X una variabile aleatoria discreta con funzione di massa di probabilità p. Allora $E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$.

Proposizione 2: Sia X una variabile aleatoria discreta con funzione di densità di probabilità f. Allora $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.

Corollario: $\forall a, b,\ E[aX + b] = aE[X] + b$

- Caso discreto: $E[aX + b] = \sum(ax + b)p(x) = a\sum xp(x) + b\sum p(x) = aE[X] + b$
- Caso continuo: $E[aX + b] = \int(ax + b)f(x)dx = \underbrace{a\int xf(x)dx}_{a=0, E(b)=b} + \underbrace{b\int f(x)dx}_{b=0, E(ax)=aE(x)} = aE[X] + b$

Definizione: Sia $E[X^n]$ con $n = 1,2, \dots, n$. Allora $E[X^n] = \begin{cases} \sum_x x^n p(x) & \text{se } X \text{ è discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx & \text{se } X \text{ è continua} \end{cases}$

Sia X una variabile aleatoria di cui conosco la distribuzione e con valori distribuiti attorno alla media $\mu \coloneqq E[X]$ (con $E[|X - \mu|]$ quantifico la loro distanza da μ).

Sia X una variabile aleatoria con media μ. Definisco la **varianza** come il rapporto tra il valore atteso del quadrato di X e il quadrato della media. In simboli: $D^2[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - E^2[X]$.

$$\forall a, b, \qquad D^2[aX + b] = E[(aX + b - E[aX + b])^2] = E[(aX + b - a\mu - b)^2] = E[a^2(X - \mu)^2]$$
$$= a^2 E[X - \mu]^2 = a^2 D^2[X] \rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow D^2[b] = 0 \\ a = 1 \Rightarrow D^2[X + b] = D^2[X] \\ b = 0 \Rightarrow D^2[aX] = a^2 D^2[X] \end{cases}$$

Deviazione standard: $D[X] = \sqrt{D^2[X]} = \sqrt{E[X^2] - E^2[X]}$

Enunciato e utilizzo della legge debole dei grandi numeri.

Markov: Sia X una variabile aleatoria, $\forall a > 0,\ \mathcal{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$
Dim.: $E[X] \coloneqq \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^a xf(x)dx + \int_a^{\infty} xf(x)dx \geq \int_a^{\infty} xf(x)dx \geq \int_a^{\infty} af(x)dx =$
$= a\int_a^{\infty} f(x)dx = a\mathcal{P}(X \geq a)$. Da cui segue la tesi dividendo entrambi i fattori per a.

Chebyshev: : Sia X una variabile aleatoria con media μ e varianza σ^2, $\forall r > 0,\ \mathcal{P}(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$
Dim.: $\{|X - \mu| \geq r\}$ è equiprobabile con $\{(X - \mu)^2 \geq r^2\}$ da cui segue la tesi per il teorema di Markov con $a = r^2$. Infatti: $\mathcal{P}((X - \mu)^2 \geq r^2) \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{r^2} = \frac{\sigma^2}{r^2}$.

N.B.: limitare la probabilità di eventi rari che riguardano variabili aleatorie di cui conosciamo solo media e varianza.

Legge debole dei grandi numeri: Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie *indipendenti e identicamente distribuite* (i.i.d.), tutte con media $E[X_i] = \mu$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

Dim.: Sappiamo che $E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \mu$ e $D^2\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$. Applicando Chebyshev su $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ risulta $\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. Ma allora il $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$.

Enunciato e utilizzo del Teorema centrale di convergenza.

Siano $X_1, \dots, X_n$ delle variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tutte con media μ e varianza σ^2. Se n è grande segue che $X_1 + \cdots + X_n$ ha media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$.

Normalizziamo la somma precedente; quindi, ho una distribuzione approssimativamente normale standard: $\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Per n grande vale $\forall x : \mathcal{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \phi(X)$ (formulazione di ripartizione della normale standard).

Trova diretta applicazione con le variabili aleatorie binomiali: Sia X di parametri (n, p) il numero di successi in n prove indipendenti con probabilità p di riuscita. Sia ha $X = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ con $X_i = 1$ se l'i-esima prova ha successo, $X_i = 0$ altrimenti. Poiché $E[X_i] = p$ e $D^2[X_i] = p(1-p)$ si ha $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$.

La descrizione dell'istogramma e del diagramma "scatola e baffi".

Istogrammi: mostrano la forma dei dati. L'asse orizzontale rappresenta i valori dei dati e ciascuna barra include un range di valori: l'asse verticale indica quanti sono i punti nei dati ad avere i valori nel range specificati dalla barra.

Scatola a baffi:

- $r = Q_3 - Q_1$: misura la dispersione della distribuzione (da forma alla distribuzione)
- I baffi sono gli intervalli che hanno valori minori di Q_1 e maggiori di Q_3 (punti estremi = valori adiacenti)
- $Q_3 + 1{,}5r$ è il valore più grande tra le osservazioni
- $Q_1 - 1{,}5r$ è il valore più piccolo tra le osservazioni
- I valori adiacenti danno informazioni sulla dispersione e sulla forma della dispersione (se coincidono con gli estremi allora non ci sono anomalia)

La scatola a baffi rappresenta la distribuzione di un campione tramite semplici indici di dispersione e di posizione.

I centri e le medie analitiche.

Sia $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ una rilevazioni dati su un criterio quantitativo. Per avere una media analitica bisogna specificare un criterio; ovvero, una *funzione di circostanza*.

Indico con $\bar{y}^* = (y, \dots, y)$ una falsa rilevazione dati di taglia n avente tutti gli elementi uguali a y, allora la risoluzione della media di y è data da: $C(y_1, \dots, y_n) = C(y, \dots, y)$ (la valutazione della funzione di circostanza C su $\bar{y}$ deve coincidere con la valutazione di C su $\bar{y}^*$.

Media aritmetica: $C(y_1, y_2, \dots y_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n \Rightarrow C(y_1, y_2, \dots y_n) = C(y, \dots, y) = ny$:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Media geometrica: $C(y_1, y_2, \dots y_n) = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n \Rightarrow C(y_1, y_2, \dots y_n) = C(y, \dots, y) = y^n$:

$$M_g = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}$$

Media armonica: $C(y_1, y_2, \dots y_n) = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \Rightarrow C(y_1, y_2, \dots y_n) = C(y, \dots, y) = \frac{n}{y}$:

$$M_a = \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n}} = \left(\frac{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n}}{n}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\right)^{-1}$$

Il concetto di *centro* è importante in quanto essi vanno a riassumere tramite dei valori il fenomeno descritto nella distribuzione. Si vuole trovare una funzione che rappresenta la distanza di x da tutti i punti della sua rilevazione dati.

$\forall x \in \mathbb{R}, d(x, \bar{y}) \geq 0$ (funzione che rappresenta la distribuzione x dei dati $\bar{y}$.

Centro di una rilevazione dati $\bar{y}$: $d_r(x, \bar{y}) = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x - y_i|^r} & \text{se } r > 0 \\ \sum_{i=1}^{N}|x - y_i| & \text{se } r = 0 \end{cases}$

$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad \xi_r(\bar{y}) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, d_r(x, \bar{y})$

- Il centro di ordine 0 della rilevazione dati $\bar{y}$, ovvero $\xi_0(\bar{y})$, coincide con la *moda*
- Il centro di ordine 1 della rilevazione dati $\bar{y}$, ovvero $\xi_1(\bar{y})$, coincide con la *mediana*
- Il centro di ordine 2 della rilevazione dati $\bar{y}$, ovvero $\xi_2(\bar{y})$, coincide con la *media* aritmetica

Stimatori e loro proprietà.

Uno stimatore è una funzione che associa ad ogni possibile campione un valore del parametro da stimare. È una funzione di un campione di dati estratti casualmente di una popolazione.

Proprietà di correttezza: lo stimatore $T = C(x_1, \dots, x_n)$ di $\varphi(\theta)$ è *corretto* quando $E^\theta[T] = \varphi(\theta)$. Se non è corretto allora è *distorto* con indice di distorsione $d(\theta) = E^\theta(T) - \varphi(\theta)$

Proprietà di consistenza: uno stimatore T è *consistente* quando $\varepsilon > 0, \lim_n \mathcal{P}(|T - \varphi(\theta)| < 0) = 1$

Confronto di stimatori in base al rischio quadratico medio.

Confrontando due stimatori T e S per $\varphi(\theta)$ indico il rischio quadratico medio la funzione $\theta \in \Theta, R_T(\theta) = E\{[T - \varphi(\theta)]^2\}$ con $[T - \varphi(\theta)]^2$ variabile aleatoria data dalla somma della varianza dello stimatore con il quadrato della sua distorsione.

T e S sono stimatori per $\varphi(\theta)$ se

1) S è *preferibile* a $T \Leftrightarrow R_S(\theta) \leq R_T(\theta)$
2) S è *strettamente preferibile* a $T \Leftrightarrow R_S(\theta) < R_T(\theta)$
3) S è *ammissibile* per la stima di $\varphi(\theta)$ quando non esiste altro stimatore a lui strettamente preferibile a T

Descrizione e fondamento teorico del metodo dei momenti.

La legge di probabilità di un numero aleatorio X è caratterizzata da uno o più parametri. Ogni momento teorico di X, se esistente, è funzione dei parametri. Nel caso in cui il numero aleatorio X sia dotato di funzione geometrica dei momenti allora si può affermare che esistono finiti sia il momento che il momento centrale di qualsiasi ordine di X.

Metodo dei momenti: Siano n, k e $p \geq k$ numeri interi positivi. Si supponga che la genitrice X di un campione casuale semplice $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ abbia la legge di probabilità caratterizzata da k parametri incogniti $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Allora scelti opportunamente p indici interi positivi, $j_1, j_2, \dots, j_p$ risulta:

$$r = 1,2, \dots, p, \qquad \mu'_{j_r} = f_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

La precedente equazione rappresenta un sistema di p equazioni nei k parametri incogniti.
L'obiettivo è quello di risolvere tale sistema per ottenere:

$$s = 1,2, \dots, k, \qquad \theta_S = g_s\left(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \dots, \mu'_{j_p}\right)$$

Se si riesce ad ottenere suddetta equazione allora lo stimatore fornito dal metodo dei momenti consiste nella sostituzione dei p momenti teorici considerati con i corrispondenti momenti campionari.
Pertanto, si ha:

$$s = 1,2, \dots, k, \qquad \widehat{\Theta}_{s,MM} \coloneqq g_s\left(\bar{X}^{(j_1)}, \bar{X}^{(j_2)}, \dots, \bar{X}^{(j_p)}\right)$$

Proposizione 1: Per le genitrici dotate di funzioni generatrici dei momenti gli stimatori campionari sono consistenti dei rispettivi momenti teorici

Proposizione 2: Siano consistenti gli stimatori campionari di $\widehat{\Theta}_{s,MM}$. Se per $s = 1, \dots, k$ la funzione g_s è continua allora $\widehat{\Theta}_{s,MM}$ è uno stimatore consistente per θ_S

Descrizione e fondamento teorico del metodo della massima verosimiglianza.

Una qualunque statistica il cui scopo sia quello di dare una stima di un parametro θ si dice *stimatore* di θ; gli stimatori sono quindi variabili aleatorie.
Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie note a meno di un parametro incognito θ ed andiamo a stimare θ usando i valori che vengono assunti da queste variabili aleatorie.

Sia $f(X_1, \dots, X_n|\theta)$ funzione di massima congiunta di $X_1, \dots, X_n$ oppure la loro densità congiunta a seconda che siano variabili aleatorie discrete o continue.

θ incognita $\Rightarrow f$ dipende da θ
$f(X_1, \dots X_n|\theta)$ *verosimiglianza* $\Rightarrow$ quando θ è il vero valore assunto dal parametro (adotto una stima di θ che rende massima la verosimiglianza)

Dunque: la stima di massima verosimiglianza θ è definita come il valore θ che rende massima la funzione $f(X_1, \dots X_n|\theta)$ (detta funzione *likelihood*) quando i valori assegnati sono $X_1, \dots X_n$.
<u>Calcolare il valore di θ che massimizza f</u>: $f(X_1, \dots X_n|\theta)$ e $\log[f(X_1, \dots X_n|\theta)]$ assumono il massimo in corrispondenza dello stesso valore di θ.

- $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ campione casuale semplice di valori da 0 a $+\infty$
- $\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n) \in (0; +\infty) \times (0; +\infty) \times \dots \times (0; +\infty) \Rightarrow f_X(\bar{\mathcal{X}}) = F_{\mathcal{X}_1}(X_1; \theta) \cdot \dots \cdot F_{\mathcal{X}_n}(X_n; \theta)$
- Funzione di verosimiglianza: $\prod_{i=1}^{n} f_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}_i; \theta) = F_{\bar{\mathcal{X}}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n; \theta)$

ACCERTAMENTO DEL PROFITTO

15 DOMANDE

1) L'impostazione assiomatica di KOLMOGOROV

Data la terna di probabilità che definisce gli elementi di studio per una famiglia degli eventi, $\mathcal{E} = (\Omega, F = \sigma(G), \mathbb{P})$, Kolmogorov definisce un sistema assiomatico noto come base di partenza per il calcolo delle probabilità

Studio alla definizione di $\mathcal{E}$, secondo Kolmogorov $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità, o meglio una funzione che mappa elementi da $F = \sigma(G)$ all'insieme $[0,1]$ appartenente a $\mathbb{R}$

Questa funzione, per essere valida, deve rispettare i seguenti tre assiomi:

- $R_1 \longrightarrow A \in \mathbb{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0 \longrightarrow$ i) $\Omega \in A$
- $R_2 \longrightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1 \longrightarrow$ ii) $A \in A \Rightarrow A^c \in A$
- $R_3 \longrightarrow (A_m) \subseteq F, A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\cup A_m) = \sum \mathbb{P}(A_m)$

ASSIOMI KOLMOGOROV

Da questi tre assiomi discendono importanti teoremi e osservazioni

TH.1 = $\emptyset \in F \Rightarrow$ il vuoto è un evento

vale i) $\Rightarrow \Omega$ è un evento $\Rightarrow$ per ii) allora $\Omega^c = \emptyset$ il quale è anche un evento

$\emptyset$ è detto EVENTO IMPOSSIBILE

Ω è detto EVENTO CERTO

- Se A è un evento, A^c (che è un evento per ii) è l'evento contrario di A

- L'assioma R_3 richiede in particolare che, se una famiglia finita di sottoinsiemi di Ω è interessante per l'esperimento, anche la loro unione lo è $\longrightarrow$ F è stabile rispetto all'unione finita

- Dagli assiomi ii e R_3 e dalle leggi di DeMorgan discende facilmente la seguente proprietà: STABILITÀ DI F RISPETTO ALL'INTERSEZIONE NUMERABILE

2) La formula delle alternative e il Teorema di Bayes

Un insieme di eventi $A_1, \dots, A_m$ si dice costituire un sistema di alternative se gode di queste tre proprietà:

a) $i = (1, \dots, m)$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$

b) $i, j = (1, \dots, m)$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

c) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \Omega = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)$

FORMULA

$$= \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\left[\begin{array}{l} - B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup A_i) = \bigcup (B \cap A_i) \\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}[\bigcup (B \cap A_i)] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i) \end{array}\right.$$

- Considerando un insieme di alternative $A_1, \dots, A_m$ che partizionano lo spazio Ω degli eventi ed un evento $B \subset \Omega$ tale che $\mathbb{P}(B) \neq \emptyset$ si trova l'espressione per la seguente proprietà:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

- $\mathbb{P}(A)$ = probabilità a priori
- $\mathbb{P}(A|B)$ = probabilità condizionata di A noto B; chiamata anche prob. a posteriori
- $\mathbb{P}(B)$ = prob. a priori di B, costante di normalizzazione
- $\mathbb{P}(B|A)$ = verosimiglianza

IL TEOREMA DI BAYES discende da due risultati fondamentali: il Teorema delle prob composte e il Teorema delle prob assolute.

Viene impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha provocato l'evento verificato

3) Gli elementi fondamentali nella definizione di una v. aleatoria

Se F è una sigma-algebra sull'insieme S, la coppia (S, F) si dice spazio misurabile e gli elementi di F sono chiamati insiemi misurabili.

Si consideri ora uno spazio di probabilità $(\Omega, F, \mathbb{P})$ e lo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; un numero aleatorio è una applicazione X di Ω in $\mathbb{R}$ con la condizione che essa sia F-misurabile, ovvero, la controimmagine tramite X di un boreliano, deve essere un

EVENTO $\longrightarrow$ $\underbrace{B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) \in F}$

$\downarrow$

Con il requisito della F-misurabilità di X, si può definire una misura di prob. sulla sigma-algebra $\mathcal{B}$: $B \in \mathcal{B},\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$

$\downarrow$

questa misura di probabilità è la distribuzione o la legge del numero aleatorio X e fornisce tutte le informazioni probabilistiche relative al numero aleatorio X

---

4) La proprietà della funzione di distribuzione

La f. distribuzione, data una v. aleatoria X, è quella funzione che fa corrispondere ai valori di x, la probabilità cumulata $\mathbb{P}(X \leq x)$

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$; $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ $\longrightarrow$ Usata per calcolare la prob che una v.a. assume minore o uguale a un dato specifico

PROPRIETÀ:

a) F_X è NON DECRESCENTE

Sia $x_1 < x_2 \longrightarrow F_X(x_1)\ \mathbb{P}(X \leq x_2) = \mathbb{P}(\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X < x_2\}) =$

$= \mathbb{P}\{X \leq x_1\} + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_1)$

$\geq F_X(x_1)$

b) Una qualsiasi F_X - distribuzione è continua a destra, ovvero:

$x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$, $\{X \le x + \frac{1}{m}\} = \{X \le x\} \cup \{x < X \le x + \frac{1}{m}\}$

$\cdot\ F_X\left(x + \frac{1}{m}\right) = F_X(x) + \mathbb{P}\left(x < X \le x + \frac{1}{m}\right) \longrightarrow$ Tenendo conto che la successione di termine generale $\{x < X \le x + 1/m\}$ decresce all'evento impossibile

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{m \to \infty} F_X\left(x + \frac{1}{m}\right) = F_X(x) + \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\left(x < X < x + \frac{1}{m}\right)$ ← si ha:

$= F_X(x) + \mathbb{P}\left(\lim_{m \to \infty} \{x < X < x + \frac{1}{m}\}\right) \longrightarrow F_X(x) + \mathbb{P}(\emptyset) = F_X(x)$

c) Per una qualsiasi F_X distribuzione risulta:

1 $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ 2

$\xrightarrow{1} \lim_{m \to \infty} F_X(m) = \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}(X \le m) = \mathbb{P}\left(\lim_{m \to \infty} \{X \le m\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\xrightarrow{2} \lim_{m \to -\infty} F_X(-m) = \lim_{m \to -\infty} \mathbb{P}(X \le -m) = \mathbb{P}\left(\lim_{m \to -\infty} \{X \le -m\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

5) Collegamento tra legge binomiale e quella di Poisson

Si considerino innanzitutto le definizioni

- $X \sim B(n,p) \longrightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$

  X distribuita secondo legge binomiale $\longrightarrow$ esprime la probabilità di successo in una singola prova per n prove ripetute

- $X \sim \Pi(\lambda) \longrightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \longrightarrow$ Caso particolare della binomiale in cui n viene fatto tendere a $+\infty$ con λ parametro della densità di prob.

La distribuzione di Poisson può essere utilizzata per approssimare una distribuzione binomiale di parametri n e p, quando il numero di prove n è grande e la prob di successo è piccola

$\hookrightarrow$ la d. Poisson è il limite per $n \to +\infty$ della distribuzione binomiale con $\lambda = np$

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$\begin{bmatrix} n \geq 50 \\ p \leq 0.1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ per approssimazione

---

6) La legge NORMALE

Una v. aleatoria si dice avere legge normale o Gaussiana di parametri μ e σ^2 se ha la seguente densità di probabilità:

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

con μ = media e σ^2 = scarto quadratico medio

μ denota il centro della distribuzione, ossia quel valore a cui corrisponde il valore massimo; σ^2 caratterizza la forma della curva in quanto misura di dispersione dei valori attorno al valore medio

Il grafico della f.d.p è simmetrico rispetto all'asse verticale di $x=\mu$, punto di massimo assoluto; presenta punti di flesso $\mu \pm \sigma$

La Tavola della distribuzione normale standard ti permette di calcolare la probabilità di un dato quantile o viceversa trovare il valore del quantile che delimita l'area alla sua sinistra sottesa dalla curva gaussiana

---

f) Proprietà della media e della varianza di una v. aleatoria

- Sia X una v.a. discreta con funzione di distribuzione $F_X(x)$ allora si indica con $\mathbb{E}[X]$ il suo valore atteso/speranza matematica definito come la sommatoria delle probabilità cumulate per il valore x_i $(i=1,\dots,m)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X=x_i)$$

- Sia X una v.a. continua con funzione di densità $f(x)$, allora il valore atteso $\mathbb{E}(X)$ è dato dall'integrale di $f(x)$ per x in dx

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

PROPRIETÀ di $\mathbb{E}(X)$

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$
- $\mathbb{E}(bX) = b\,\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}\left(\sum c_m X_m\right) = \sum c_m \cdot \mathbb{E}(X_m)$

- Sia X una v.a con media μ.

la varianza di X ($Var(X)$) è identificata come

- $\mathbb{E}[\underbrace{(X-\mu)}_{\text{SCARTO}}^2]$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 \longrightarrow \underline{Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

la varianza di X è uguale al valore atteso del quadrato di X meno il quadrato della media X

PROPRIETÀ di $Var(X)$

- $\mathbb{E}(X^2) < +\infty \Rightarrow Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \Leftrightarrow \sigma_X^2 = \mu_2' - \mu^2$
- $Var(X+a) = Var(X)$
- $Var(aX) = Var(X)\,a^2$
- $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$

8) Enunciato e utilizzo della legge debole dei grandi numeri

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie i.i.d con media $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty$$

La LDGN descrive il comportamento della media di una sequenza di n prove di una variabile casuale iid, al tendere ad infinito della numerosità della sequenza stessa

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1 \quad \text{con } X_n \text{ MEDIA CAMPIONARIA}$$

Grazie a questo Teorema e ai due risultati discendenti (Dis di Markov e Chebyshev) si può dire che se si ripete molte volte lo stesso esperimento $(n \to \infty)$, la frequenza di un certo evento tende a essere costante

---

9) Enunciato e utilizzo del Teorema centrale di convergenza

Siano $X_1, \dots, X_n$ delle v.a iid con media μ e varianza σ^2

Allora con n grande, la somma $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è approssimativamente normale con media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \longrightarrow \text{APPROSSIMAZIONE NORMALE STANDARD}$$

$$= \mathbb{P}\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) < x\right] \approx \phi(x)$$

GRANDE QUANDO? $\longrightarrow$ si parla di campione grande quando $n \geq 30$ così da giustificare l'applicazione del TLC

---

10) La descrizione dell'istogramma e del diagramma "scatola a baffi"

- Gli istogrammi mostrano la forma dei dati. L'asse orizzontale rappresenta i valori dei dati e ciascuna barra indica un range di valori. L'asse verticale indica quanti sono i punti nei dati ad avere i valori nel range specifico della barra

- Diagramma scatola con baffi rappresenta distribuzione di frequenza e mette in risalto anche la dispersione intorno alla mediana

Tramite questa rappresentazione grafica è possibile studiare l'andamento dei dati attorno alla mediana; infatti la scatola è limitata inferiormente da Q1 e superiormente da Q3 rispettivamente quartile inferiore e quartile superiore. La distanza y è una misura di dispersione della distribuzione e il 50% dei dati si trovano compresi tra Q1 e Q3

11) I centri e le medie analitiche

- Sia $\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)$ una rilevazione di dati su un carattere QUANTITATIVO.

Per ottenere una media analitica, bisogna specificare un criterio / f. circostanza C rispetto al quale si vuole ottenere il valore di tendenza centrale.

Si indica con $\underline{y}^* = (y, y, \dots, y)$ una rilevazione di dati fittizia di taglia N uguali tutti gli elementi uguali a y allora la risoluzione della media di y è data da: $C(y_1, y_2, \dots, y_N) = C(y, y, \dots, y)$ $\longrightarrow$ la valutazione della f. di circostanza C su y deve coincidere con la valutazione di C su $\underline{y}^*$

MEDIE ANALITICHE = $\begin{cases} \text{M. ARITMETICA} \\ \text{M. GEOMETRICA} \\ \text{M. ARMONICA} \end{cases}$

- Il concetto di centro è di grande importanza in quanto essi hanno il compito di RIASSUMERE tramite dei valori il fenomeno descritto nella distribuzione. Si vuole trovare una funzione che rappresenta la distanza di x da tutta la rilevazione dati $\underline{y}$

Per questo, si definisce, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d(x, \underline{y}) \geq 0$ la funzione che rappresenta la distanza x dai dati $\underline{y}$

Si definisce centro di una rilevazione dati $\underline{y}$, $\xi(\underline{y})$, il punto di minimo assoluto della funzione $d(x, \underline{y})$ => $\xi(\underline{y}) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, d(x, \underline{y})$

$$d_r(x, \underline{y}) = \begin{cases} \sqrt[r]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^r} & , r > 0 \\ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^0 & , r = 0 \end{cases}$$

- il centro di ordine 0 => $\xi_0(\underline{y})$ coincide con la MODA
- il centro di ordine 1 => $\xi_1(\underline{y})$ coincide con la MEDIANA
- il centro di ordine 2 => $\xi_2(\underline{y})$ coincide con la MEDIA

12) STIMATORI e le loro proprietà

Uno stimatore è una funzione che associa ad ogni possibile campione un valore del parametro da stimare. È una funzione di un campione di dati estratti casualmente da una popolazione

Proprietà ⟶ - CORRETTEZZA: lo stimatore $T = t(X_1, \dots, X_n)$ di $\varphi(\theta)$ si dice corretto se vale la relazione:

$$\mathbb{E}^{\theta}(T) = \varphi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

↓

Se questa relazione non si verifica si dice che lo stimatore è distorto e la q. di distorsione è $d(\theta) = \mathbb{E}^{\theta}(T) - \varphi(\theta)$

- CONSISTENZA: uno stimatore T si dice consistente

$$\Leftrightarrow \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|T_n - \varphi(\theta)| < \varepsilon) = 1$$

"$T(n)$ converge in probabilità a $\varphi(\theta)$"

---

13) Confronto tra stimatori

Si introduce il concetto di rischio quadratico medio.

Ai fini del confronto tra 2 stimatori T e S per $\varphi(\theta)$ il rischio q. medio è la seguente funzione:

$\theta \in \Theta$, $R_T(\theta) = \mathbb{E}\{[T - \varphi(\theta)]^2\}$ ⟶ è la somma della varianza dello stimatore con il quadrato della sua distorsione

- T e S stimatori per $\varphi(\theta)$
  - S preferibile a $T \Leftrightarrow R_S(\theta) \leq R_T(\theta)$
  - S strettamente preferibile a $T \Leftrightarrow R_S(\theta) < R_T(\theta)$
  - T ammissibile se non esiste un altro stimatore strettamente preferibile a T

15) Descrizione e fondamento Teorico del metodo delle MV

STIMATORI DI MV ⟶ classe particolare di stimatori

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ campione aleatorio e $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ la sua funzione di massa congiunta con θ parametro da stimare

Si considera la funzione di verosimiglianza $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$

la f. di verosimiglianza esplicitata in questo modo:

$f_{\underline{X}}(x, \theta) = f_{X_1}(x, \theta) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n, \theta)$ prende il nome di

LIKELIHOOD => $L(\theta, x) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta) = f_c(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$

↓

questa funzione restituisce il valore di θ che rende massima f_X quando i valori osservati sono $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{\theta}_{MV} = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta, x)$$

Nel calcolare il valore di θ che massimizza f conviene usare il fatto che le due funzioni $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ e $\log[f(x_1, \dots, x_n; \theta)]$ assumono il massimo in corrispondenza dello stesso valore di θ

---

14) Descrizione e fondamento Teorico del metodo dei momenti

Siano n, k e $p \geq k$ numeri interi positivi.

Si supponga che la generica X di un ccs $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ abbia legge di prob. con k parametri incogniti $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Scelti p indici interi positivi, $j_1, j_2, \dots, j_p$ risulta:

$r = 1, 2, \dots, p$, $\mu_{j_r} = f_{j_r}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ⟶ rappresenta un sistema di p equazioni con k parametri incogniti

↓

L'obiettivo è quello di risolvere tale sistema per ottenere: $s = 1, 2, k$ $\theta_s = g_s(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \dots, \mu_{j_p})$

Se si riesce a risolvere il sistema allora la stimatore fornito dal metodo dei momenti consiste nella sostituzione di p m. teorici.

Risposta alle 15 domande di Probabilità e Statistica

Simona Ettari

Anno 2022

Contents

1 L'impostazione assiomatica di Kolmogorov **3**
1.1 Risposta 1 3

2 La formula delle alternative e il teorema di Bayes **5**
2.1 Risposta 2 5

3 Gli elementi fondamentali nella definizione di una variabile aleatoria **7**
3.1 Risposta 3 7

4 Le proprietà della funzione di distribuzione **9**
4.1 Risposta 4 9

5 Collegamento tra la legge binomiale e quella di Poisson **11**
5.1 Risposta 5 11

6 Collegamento tra la legge esponenziale e quella geometrica **13**
6.1 Risposta 6 13

7 La legge normale **15**
7.1 Risposta 7 15

8 Proprietà della media e della varianza di una variabile aleatoria **17**
8.1 Risposta 8 17

9 Enunciato e utilizzo del Teorema di De Moivre-Laplace **19**
9.1 Risposta 9 19

10 La descrizione dell'istogramma e del diagramma "scatola e baffi" **21**
10.1 Risposta 10 21

11 I centri e le medie analitiche **23**
11.1 Risposta 11 23

12 Descrizione e fondamento teorico del metodo dei momenti **25**
12.1 Risposta 12 25

13 Descrizione e fondamento teorico del metodo della massima verosimiglianza **27**
13.1 Risposta 13 27

14 Proprietà degli stimatori **29**
14.1 Risposta 14 29

15 Confronto di due stimatori **31**
15.1 Risposta 15 31

1 L'impostazione assiomatica di Kolmogorov

1.1 Risposta 1

Secondo Kolmogorov, la misura della probabilità degli eventi (elementi di una sigma algebra) è una funzione:

$$\mathbb{P} : F \to [0,1] \ (\mathbb{R})$$
$$A \to \mathbb{P}(A)$$

con le seguenti proprietà:

- $A \in F, \mathbb{P}(A) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F : A_i \underset{i \neq j}{\cap} B_i = \emptyset, \ \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

TEOREMI SU KOLMOGOROV

- TEOREMA : $A \in F, \mathbb{P}(A) \leq 1$
- DIMOSTRAZIONE : $1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \overset{\geq 0}{\mathbb{P}(A^c)} \leq 1$

- TEOREMA NON ADD : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- DIMOSTRAZIONE : $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

- TEOREMA FIN ADD : $n = \mathbb{N}, (A_1, A_2 \ldots, A_n) \subseteq F : A_i \underset{i \neq j}{\cap} A_j$

$$\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{n=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

- DIMOSTRAZIONE : consideriamo $i = (1, 2, \ldots, n), \ B_i = A_i, \ i > n, \ B_i = \emptyset$

$$\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

- TEOREMA : $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- DIMOSTRAZIONE: $B = A \cup (B \cap A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

iconsulting

2 La formula delle alternative e il teorema di Bayes

2.1 Risposta 2

· FORMULA DI BAYES : $A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \cap B) > 0$

- Per la legge della probabilità congiunta sappiamo che

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)$

e dunque:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$$

dove $\mathbb{P}(A|B)$ è a posteriori, $\mathbb{P}(A)$ è a priori e $\mathbb{P}(B|A)$ è verosimiglianza

· FORMULA DELLE ALTERNATIVE : un insieme di eventi $H_1, \dots, H_n$ si dice costituire un insieme di alternative se gode di queste prop:

1. $i = (1, \dots, n)$, $\mathbb{P}(H_i) > 0$
2. $i, j = (1, \dots, n) : i \neq j$, $H_i \cap H_j = \emptyset$
3. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} H_i) = \Omega = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)$

Formula $\rightarrow$ $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$

· DIMOSTRAZIONE :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap H_i)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap H_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(B|H_i)$$

· TEOREMA DI BAYES : consideriamo $(H_1, \dots, H_n)$ un sistema completo di alternative :

$$\mathbb{P}(H_i|B) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(B|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_j) \mathbb{P}(B|H_j)}$$

3 Gli elementi fondamentali nella definizione di una variabile aleatoria

3.1 Risposta 3

Una funzione X tra Ω e $\mathbb{R}$, che sia misurabile, è detta VARIABILE ALEATORIA. Ma che vuol dire che X è misurabile?
$X : \Omega \to \mathbb{R}$, ma non consideriamo tutto $\mathbb{R}$, ragioniamo sull'insieme di Borel. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

per la quale: $\forall B \in \mathcal{B}, \{X \in B\} \in \mathcal{F} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \subseteq \Omega$

Tuttavia noi non vogliamo verificarlo $\forall B$, ma:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{X \leq x\} \in \mathcal{F} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subseteq \Omega$$

Ovvero stiamo considerando $B =]-\infty, x[$

Se la proprietà è valida per tutte le semirette sinistre, X è misurabile

4 Le proprietà della funzione di distribuzione

4.1 Risposta 4

La funzione di distribuzione serve per trovare la legge di un numero aleatorio. Definizione:
sia (Ω, P) uno spazio di probabilità e sia:

$$X : \Omega \xrightarrow{\text{misurabile}} \mathbb{R}$$

un numero aleatorio. Si definisce la funzione di distribuzione ponendo:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subseteq \Omega$$
$$\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x[) \in F \quad \text{perché è misurabile}$$

PROPRIETÀ: a) F_X è non decrescente
b) la funzione è continua a dx: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(\varepsilon + x) = F_X(x^+) = F_X(x)$
c) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

DIMOSTRAZIONI:
a) si considerino due punti (x_1, x_2), con $x_1 < x_2$, bisogna dim che $F_X(x_2) > F_X(x_1)$

$$F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = P[\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}] =$$
$$= P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) \Rightarrow \geq P(X \leq \underset{\geq 0}{x_1}) = F_X(\underset{\geq 0}{x_1})$$

b) $$\lim_{n \to \infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\{X \leq x\} \cup \left\{x < X \leq x + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(X \leq x) + \lim_{n \to \infty} P\left(x < X \leq x + \frac{1}{n}\right) = F_X(x) + P\left(\lim_{n \to 0} E_n\right)$$

$$= F_X(x) + P(\emptyset) = F_X$$

c) iniziamo sostituendo n ad x. Dunque: $\lim_{n \to \infty} P(X \leq n)$

e $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $C_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq n\} \equiv \{X \leq n\}$
↳ al crescere di n cresce $X \leq n$

$$= P\left(\lim_{n \to \infty} \{X \leq n\}\right) = P(\Omega) = 1$$

questa insieme alla proprietà a) garantiscono la dimostrazione.

5 Collegamento tra la legge binomiale e quella di Poisson

5.1 Risposta 5

Consideriamo una successione di schemi binomiali aguno con probabilità "p" e un numero positivo λ.
In generale conosciamo:

$$\mathbb{P}(S_n = K) = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

Consideriamo adesso $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = K) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

Considerando $K \in \{0 \dots \infty\}$, $K \in \mathbb{N}_0$, aggiungiamo:

- $p \to 0$
- $np \to \lambda$ $\Rightarrow$ quindi: $\lim_{n\to\infty} n \cdot p = \lambda \iff p = \frac{\lambda}{n}$

Ho però un problema perché per $\lambda < n$ ho probabilità > 1.
Dunque trascuriamo tali valori, considerando da $\frac{\lambda}{n} \leq 1$ in poi

Una v.a. con spettro $S_X = \mathbb{N}_0$ ha legge di POISSON $X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$
se per $K \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(X = K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$ e $\mathbb{P}(X=0) > \mathbb{P}(X=1) > \dots$

La legge di poisson è detta "dei piccoli numeri" o "degli eventi rari" a causa della rapida decrescita verso 0 di $e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$ al crescere di K.

La somma delle prime n prove di Bernulli $\approx$ variabile binomiale

$\to$ se nella binomiale fisso $n \to \infty$ e $\lambda = np$, ottengo Poisson

6 Collegamento tra la legge esponenziale e quella geometrica

6.1 Risposta 6

Relazione tra legge esponenziale e geometrica:

- sia $X \sim Esp(\lambda)$, $\lambda > 0$, $Y = \lfloor X \rfloor + 1 \rightarrow e'$ la formula per ottenere una legge geometrica a partire da una esponenziale

- Dimostrazione: $S_Y = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n - 1)$$

$$= \mathbb{P}(n - 1 \leq X < n) = 1 - e^{-\lambda n} - [1 - e^{-\lambda(n-1)}] =$$

$$e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = e^{-\lambda(n-1)} \cdot (1 - e^{-\lambda}) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda}) \cdot (e^{-\lambda})^{n-1} = p \cdot q^{n-1}$$

Otteniamo dunque $Y \sim G(1 - e^{-\lambda})$

NOTA: se viene fissato p, che valore di λ bisogna usare?

$$1 - e^{-\lambda} = p \iff 1 - p = e^{-\lambda} \iff -\lambda = \ln(1 - p)$$

$$\iff \lambda = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

7 La legge normale

7.1 Risposta 7

Una var. aleatoria si dice avere legge Normale o Gaussiana di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ se ha la seguente f. di. p.

$$f_X(x, \mu, \sigma^2) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$. In simboli si scrive:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Osservazione: si dimostra che non si può scrivere la seguente funzione primitiva come composizione di funzioni elementari:

$$x \in \mathbb{R}, \; f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

Allora possiamo porre la funzione Φ in cui $\mu = t$ e $\sigma = 1$ per ottenere una primitiva più semplice da calcolare:

$$z \in \mathbb{R}, \; \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = f_Z(z)$$

STANDARDIZZATA

Il grafico della f.d.p. è simmetrico rispetto all'asse verticale di $x = \mu$, punto di massimo assoluto; presenta due punti di flesso $\mu \pm \sigma$; decresce a 0 nell'intorno di $-\infty$ e $+\infty$

- la media indica dove si trova il centro della curva
- la deviazione standard indica la larghezza della curva; la sua larghezza determina anche l'altezza, più è larga meno è alta e viceversa → questo perché la deviazione standard indica la distanza tra media e punto di flesso.

8 Proprietà della media e della varianza di una variabile aleatoria

8.1 Risposta 8

La media di Y e' $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot P(Y = y_i)$;

la media di ordine r e' $\mathbb{E}(Y^r) = \sum_{i=1}^{k} y_i^r \, P(Y = y_i)$.

· PROPRIETA'

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$
- $\mathbb{E}(bX) = b \cdot \mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{r} a_m X_m\right) = \sum_{m=1}^{r} a_m \cdot \mathbb{E}(X_m)$

Sia X una v.a. con $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, si definisce VARIANZA di X:

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mu_X}_{\text{scarto}})^2 \quad \text{dove } \mu_X \text{ e' la media } \mathbb{E}(X)$$

La deviazione standard e' $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$

· PROPRIETA'

- $\mathbb{E}(X^2) < +\infty \Rightarrow \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \Leftrightarrow \sigma_X^2 = \mu_2' - \mu_X^2$
- $\mathbb{D}^2(X+a) = \mathbb{D}^2(X)$
- $\mathbb{D}^2(aX) = a^2 \mathbb{D}^2(X)$
- $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) + 2\,\mathrm{cov}(X_1, X_2)$

con $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}\left((X_1 - \mu_{X_1}) - (X_2 - \mu_{X_2})\right)$

se X_1 e X_2 sono indipendenti $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{D}^2(X_1 + X_2) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2)$$

NOTA: per le variabili continue:

$$m \in \mathbb{N}, \ \mu_m' \equiv \mathbb{E}(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)\, dx$$

9 Enunciato e utilizzo del Teorema di De Moivre-Laplace

9.1 Risposta 9

Il teorema di De Moivre - Laplace viene utilizzato si voglia valori approssimati del numero di successi nella ripetizione di un evento indipendente dagli esiti passati.
Questo perché la var. binomiale risulta spesso difficile da calcolare con numeri elevati.
L'approssimazione è tanto meglio quanto più è alto il numero di esperimenti.

· ENUNCIATO : $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim B(n, p)$, $p \in (0,1)$

- $E(S_n) = n \cdot p$
- $D^2(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$

· STANDARDIZZAZIONE :

$$\frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p (1-p)}}$$

· FORMULA : sia $a < b$

$$P\left[a < \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p (1-p)}} < b\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(b) - \Phi(a)$$

· APPLICAZIONE:

Per applicare il teorema :

- si calcola $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- se n è "grande" si pone $P\left[a < \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < b\right] \approx P(a < Z < b)$

· REGOLA EMPIRICA : l'approssimazione è accettabile per:
$n \cdot p \cdot (1-p) \geq 10$

10 La descrizione dell'istogramma e del diagramma "scatola e baffi"

10.1 Risposta 10

Gli istogrammi mostrano la forma dei dati. L'asse orizzontale rappresenta i valori dei dati e ciascuna barra include un range di valori. L'asse verticale indica quanti sono i punti nei dati ad avere i valori nel range specificato dalla barra, esempio:

Il diagramma "scatola e baffi" è anch'esso una rappresentazione grafica, utilizzata per descrivere la distribuzione di un campione tramite indici di dispersione e posizione.

La scatola è posta tra Q_3 e Q_1 (includendo Q_2) e contiene il 50% dei valori: 25% tra Q_3 e Q_2 e 25% tra Q_2 e Q_1.
Il restante 50% è diviso a metà tra Q_0 e Q_1, e Q_3 e Q_4
L'altezza è $\gamma = Q_3 - Q_1$
Dove si taglia il baffo? al primo valore ⊛ sotto al limite $Q_3 + 1,5\gamma$ o $Q_1 - 1,5\gamma$ → questo perché qui ci sono quei valori definiti "anomali" ovvero valori che escono con una frequenza molto bassa.

11 I centri e le medie analitiche

11.1 Risposta 11

Il concetto di centro riesce a mettere in relazione i concetti di moda, mediana e media.
Voglio trovare una funzione che rappresenta la distanza di x da tutta la rilevazione dati.
Sia $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ una raccolta dati e sia $x \in \mathbb{R}$ ed $r \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$d_r(x, \underline{y}) = \begin{cases} \sqrt[r]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^r}, & r > 0 \\ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^0, & r = 0 \end{cases}$$

Nota: per $i = (1, 2, \dots, n)$, $r \geq 1$, $|x - y_i|^r$ rappresenta la DISCREPANZA di x dal dato i-esimo;
l'argomento della radice r-esima è dunque la media aritmetica di tutte le discrepanze e la funzione $d_r(x, \underline{y})$ ha distanza (di ordine r) di x da $\underline{y}$.

• DEFINIZIONE: il centro di ordine r è il numero reale che rende minima la funzione $d_r(x, \underline{y})$:

$$\xi_r = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \; d_r(x, \underline{y})$$

ξ_0 = moda di $\underline{y}$, ξ_1 = mediana, ξ_2 = media

• MEDIE ANALITICHE: sia $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, per trovare la media occorre fornire un criterio di mediazione. Tale criterio è detto "FUNZIONE DI CIRCOSTANZA"; questa ha come argomento la rilevazione dati:

$$C(\underline{y})$$

Sia y la media da calcolare e sia $\underline{y}^*$ una rilev. dati falsa:

$$\underline{y}^* = (y, y, y, \dots, \underline{y})$$

Allora y è soluzione dell'equazione di circostanza $\rightarrow C(\underline{y}) = C(\underline{y}^*)$
Ogni funzione dei dati che è soluzione di una funzione di circostanza è una "MEDIA ANALITICA".

iconsulting

12 Descrizione e fondamento teorico del metodo dei momenti

12.1 Risposta 12

METODO DEI MOMENTI: sia X una v.a. la cui legge dipende da un certo numero di parametri $\theta_1, \dots, \theta_r$. Supponiamo che tali parametri non sono noti, e il nostro scopo è darne una stima dipendente dalle osservazioni $(x_1, \dots, x_n)$.

Dato che la legge di X dipende da $\theta_1, \dots, \theta_r$, lo stesso accadrà per il momento teorico μ'_k (che a sua volta dipende solo dalla legge di X). Dunque esisterà una funzione f di r variabili tale che

$$\mu'_k = E(X^k) = f_k(\theta_1, \dots, \theta_r)$$

Supponiamo che la v.a. X ammetta i primi q momenti, con $q \geq 1$; possiamo quindi scrivere la relazione precedente $\forall k = 1, \dots, q$:

$$\begin{cases} \mu'_1 = f_1(\theta_1, \dots, \theta_r) \\ \mu'_2 = f_2(\theta_1, \dots, \theta_r) \\ \vdots \\ \mu'_q = f_3(\theta_1, \dots, \theta_r) \end{cases}$$

È un sistema di q equazioni nelle r incognite $\theta_1, \dots, \theta_r$ che si può cercare di risolvere; se è possibile otteniamo r espressioni:

$$\begin{cases} \theta_1 = g_1(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \\ \theta_2 = g_2(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \\ \vdots \\ \theta_r = g_r(\mu'_1, \dots, \mu'_q) \end{cases}$$

Per la legge dei grandi numeri sappiamo che momento teorico ed empirico (o campionario) coincidono se la taglia n è grande $\rightarrow$ $\rightarrow \mu'_k \simeq \hat{\mu}'_k \rightarrow$ sostituiamo dunque nel sistema:

$$\begin{cases} \theta_1 \simeq g_1(\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_q) \\ \theta_2 \simeq g_2(\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_q) \\ \vdots \\ \theta_r \simeq g_r(\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_q) \end{cases}$$

Dunque ciascuna delle funzioni $g_i(\hat{\mu}'_1, \dots, \hat{\mu}'_q)$, $\forall i = 1, \dots, r$, dipende solo dalle osservazioni, ed è dunque uno stimatore $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, \dots, X_n)$ di θ_i.

iconsultinc

13 Descrizione e fondamento teorico del metodo della massima verosimiglianza

13.1 Risposta 13

Tramite il METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA si ottengono stimatori con buone proprietà asintotiche.
Sia X una v.a. la cui legge dipende da un parametro θ.
Disponiamo di n osservazioni di X, che indichiamo con $(X_1, \dots, X_n)$.
Per semplicità, supponiamo che la legge congiunta delle osservazioni sia discreta e $\mathbb{P}^\theta$ è la loro densità congiunta.
Dopo aver effettuato l'esperimento, il campione di osservazioni avrà prodotto un campione di n valori osservati, $(x_1, \dots, x_n)$.
La probabilità che il risultato sia quello effettivamente osservato è:

$$\theta \to \mathbb{P}^\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \quad \theta \in \Theta$$

È una funzione dipendente dai valori osservati.
Nel caso generale (non necessariamente discreto) essa si chiama funzione di verosimiglianza (likelihood function in inglese) e il simbolo usato è:

$$\theta \to L(\theta; x_1, \dots, x_n), \quad \theta \in \Theta$$

Lo scopo è di trovare il massimo della funzione di verosimiglianza (al variare di θ); il corrispondente punto di massimo dipenderà anch'esso da $x_1, \dots, x_n$ → indichiamolo con $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$
Il numero $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ si chiama stima di massima verosimiglianza di θ.
Dunque la v.a. $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$ (in cui semplicemente abbiamo messo le v.a. $X_1, \dots, X_n$ al posto dei numeri $x_1, \dots, x_n$), si chiama stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Se X è assolutamente continua, con densità $f_\theta(x)$,

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot \ldots \cdot f_\theta(x_n)$$

Se X ha densità discreta $p_\theta(x) = \mathbb{P}^\theta(X = x)$, allora

$$\mathbb{P}^\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_\theta(x_1) \cdot \ldots \cdot p_\theta(x_n) =$$

$$= L(\theta, x_1, \dots, x_n)$$

14 Proprietà degli stimatori

14.1 Risposta 14

PROPRIETÀ DEGLI STIMATORI:

- CORRETTEZZA: lo stimatore $T = t(X_1, \dots, X_n)$ di $\psi(\theta)$ si dice corretto se vale la relazione:

$$E^{\theta}(T) = \psi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Ovvero se in media coincide con $\psi(\theta)$.
Se $E^{\theta}(T) \neq \psi(\theta)$, si dice che lo stimatore è distorto e la quantità di distorsione è $d(\theta) = E^{\theta}(T) - \psi(\theta)$

- CORRETTEZZA ASINTOTICA: sia $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = g(X_n)$ uno stimatore di $\psi(\theta)$. Si dice che $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è asintoticamente corretto per $\psi(\theta) \Leftrightarrow$

$$\theta \in \Theta, \lim_{n \to \infty} E(T_n) = \psi(\theta)$$

Se cioè la distorsione è una successione infinitesima:

$$\theta \in \Theta, \lim_{n \to \infty} [E(T_n) - \psi(\theta)] = 0$$

- CONSISTENZA (O COERENZA): uno stimatore T ottenuto da un campione casuale semplice di taglia n, estratto da una genitrice X, si dice consistente $\Leftrightarrow$

$$\varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} P(|T_n - \psi(\theta)| < \varepsilon) = 1$$

o anche $T_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \psi(\theta)$, cioè "$T_n$ converge in probabilità a $\psi(\theta)$"

Se la genitrice del campione è dotata di media del 2° ordine finito e T_n è uno stimatore per $\psi(\theta)$, allora esso è consistente se:

1. T_n è asintoticamente corretto
2. La varianza di T_n è infinitesima.

15 Confronto di due stimatori

15.1 Risposta 15

CONFRONTO DI STIMATORI

· DEFINIZIONE : si definisce RISCHIO QUADRATICO MEDIO di uno stimatore T, la funzione $\theta \to R_T(\theta)$ definita su Θ da:

$$R_T(\theta) = \mathbb{E}^\theta [(T - \varphi(\theta))^2]$$

Se lo stimatore T e' corretto, $R_T(\theta)$ e' minimo, ed e'

$$R_T(\theta) = \mathbb{D}^2(T)$$

In presenza di due stimatori S e T della quantità $\varphi(\theta)$, preferiamo quello con rischio più piccolo per ogni valore di θ. Cioè si dice:

- S e' preferibile a T se $R_S(\theta) \leq R_T(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$
- S e' strettamente preferibile a T se $\exists\, \theta_0$ tale che $R_S(\theta_0) < R_T(\theta_0)$
- T e' uno stimatore ammissibile se non esiste uno stimatore a lui strettamente preferibile $\to$ se $\nexists\, S : S < T$

AUTOVALUTAZIONE 1

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci sono i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. In cosa sono differenti le combinazioni dalle disposizioni.
2. Una permutazione è una ...
3. Per contare il numero delle possibili immatricolazioni di autoveicoli, in qualsiasi sistema adottato, si usa la formula relativa alle ...
4. Il coefficiente binomiale ha tre significati diversi: (i) è il numero dei sottoinsiemi con un'assegnata cardinalità costituiti con gli elementi di un insieme di cardinalità maggiore, (ii) è il numero delle combinazioni semplici lunghe al più quanti sono gli elementi dell'alfabeto, (iii) è il numero delle ...
5. Quali sono gli assiomi per la famiglia degli eventi?
6. Come si chiama la famiglia degli eventi?
7. Quali sono gli assiomi di una misura di probabilità?
8. Si dimostri che l'evento impossibile ha probabilità nulla.
9. In uno spazio di probabilità, è vero che la finita additività scaturisce dalla numerabile additività? Se si, ciò è in relazione con la domanda precedente?
10. Si giustifichi il fatto che la probabilità di un evento è il complemento a 1 della probabilità del suo complementare.
11. Si enunci la formula di inclusione-esclusione nel caso di 4 eventi.
12. Si enunci la formula delle 2 alternative.
13. Si enunci il teorema di Bayes con 2 alternative.
14. La probabilità *a priori* si riferisce alle alternative?
15. La probabilità *a posteriori* si riferisce alle alternative?
16. In cosa consiste la differenza tra le probabilità delle due precedenti richieste.
17. Che cos'è un sistema completo di alternative.
18. Sia n un intero maggiore di 1. Si scriva il teorema di Bayes con n alternative.
19. Che cosa sono le verosimiglianze?
20. Se la probabilità di un evento A condizionata da un evento B è uguale alla probabilità di A allora A e B sono ...

21. Quando due eventi sono indipendenti?

22. Se la probabilità congiunta di tre aventi si fattorizza nel prodotto delle rispettive probabilità si può dire che i tre eventi sono indipendenti tra loro?

23. Quando tre eventi sono indipendenti tra loro?

24. Se tre eventi A, B e C sono indipendenti tra loro allora A è indipendente da ...

25. Sia n un intero maggiore di 1. Quando n eventi si dicono indipendenti tra loro?

26. La controimmagine di un insieme B mediante un'applicazione è costituita dagli elementi del primo sostegno la cui ... a B.

27. La controimmagine ... è vuota. La controimmagine del secondo sostegno è ...

28. La controimmagine di un insieme B mediante un'applicazione f è costituita dagli elementi del primo sostegno la cui ... a B; essa si denota con il simbolo ...

29. La controimmagine di un'intersezione è ...

30. La controimmagine di ... è l'unione disgiunta delle controimmagini.

AUTOVALUTAZIONE 2

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci soni i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. Si dia la definizione di funzione di distribuzione di un numero aleatorio.
2. La varianza della somma di un n numeri aleatori congiuntamente distribuiti è ...
3. Si dia la definizione di funzione di probabilità marginale per un coppia di numeri aleatori discreti congiuntamente distribuiti.
4. Qual è la relazione tra $F_X(x)$ e $\mathbb{P}(X > x)$.
5. Si enuncino le proprietà di una funzione di distribuzione.
6. Sia X un numero aleatorio <u>discreto</u> e g una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ misurabile. (Ovvero, la controimmagine tramite g di un boreliano di $\mathbb{R}$ è un boreliano di $\mathbb{R}$.) Come si calcola la media di $g(X)$?
7. La funzione di densità di probabilità serve a identificare la legge di un numero aleatorio ...
8. Sia X un numero aleatorio e $Y = 3X^2 - 5$. Per quali motivi risulta che $\mathbb{D}^2(Y) = 9\mathbb{D}^2(X)$.
9. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge geometrica.
10. È lecito portare un fattore fuori dal segno di varianza?
11. Che cos'è il supporto di un numero aleatorio continuo?
12. Per una coppia di numeri aleatori continui e congiuntamente distribuiti, si dia la definizione di funzione di densità di probabilità di uno dei due condizionato dall'altro.
13. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge di Poisson.
14. Come si descrive la legge di una coppia di numeri aleatori discreti congiuntamente distribuiti.
15. Scrivere in termini di F_X la probabilità dell'evento $\{X \geq x\}$.
16. Si enunci la legge debole dei grandi numeri.
17. Che cosa è lo spettro di un numero aleatorio discreto?
18. Come si calcola la media della somma di un numero finito di numeri aleatori congiuntamente distribuiti?
19. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge binomiale.
20. Due numeri aleatori continui congiuntamente distribuiti sono indipendenti se e solo se ...
21. Si enunci la disuguaglianza di Cebicev.
22. Si dia la definizione di funzione di densità di probabilità marginale.

23. Se la covarianza tra X e Y è nulla allora essi sono ...

24. Come si descrive la legge di una coppia di numeri aleatori continui congiuntamente distribuiti.

25. Siano a e b due numeri reali con $a < b$. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge uniforme nell'intervallo (a,b).

26. La covarianza di una coppia di numeri aleatori congiuntamente distribuiti è la media del ...

27. In che senso il teorema di Bernoulli è un corollario della legge debole dei grandi numeri.

28. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge esponenziale.

29. Se due numeri aleatori congiuntamente distribuiti sono indipendenti allora la media del loro prodotto ...

30. In quale situazione la varianza di una somma è uguale alla somma delle varianze?

31. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge normale.

32. Sia X un numero aleatorio <u>continuo</u> e g una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ misurabile. (Ovvero, la controimmagine tramite g di un boreliano di $\mathbb{R}$ è un boreliano di $\mathbb{R}$.) Come si calcola la media di $g(X)$?

AUTOVALUTAZIONE 3

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci soni i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. Che cos'è una statistica?
2. Quando uno stimatore S è preferibile ad uno stimatore T?
3. Cosa si intende per parametro incognito?
4. Per una genitrice dotata di funzione generatrice dei momenti nell'intorno dell'origine cosa si può affermare per gli stimatori campionari?
5. Quando uno stimatore si dice consistente?
6. Possono esistere due o più stimatori ammissibili per la stessa funzione di un parametro?
7. Quando uno stimatore si dice corretto?
8. Si dia la condizione sufficiente affinché uno stimatore corretto sia anche consistente.
9. Come è distribuita la media campionaria di un campione casuale semplice nel caso di genitrice normale?
10. Si dia la formula che descrive il metodo della massima verosimiglianza.
11. A cosa si riduce il rischio quadratico medio quando lo stimatore è corretto?
12. Che cos'è la genitrice di un campione casuale semplice?
13. La varianza campionaria è uno stimatore corretto per la varianza della genitrice?
14. Che cos'è la regione parametrica
15. Si dia la definizione di rischio quadratico medio.
16. Se la genitrice di un campione casuale semplice non ammette finita la media si può applicare il metodo dei momenti?
17. Che cos'è uno stimatore?
18. Si forniscano tre esempi di statistiche.
19. A cosa serve la funzione di log-verosimiglianza.
20. Quando la media campionaria ha varianza pari a quella della genitrice?
21. Nel caso di genitrice continua, in cosa sono differenti la funzione di verosimiglianza e la funzione di densità di probabilità congiunta del campione casuale semplice?
22. Quando la media campionaria ha distribuzione approssimativamente normale?

23. Si dia la condizione sufficiente per avere la consistenza per gli stimatori ottenuti con il metodo dei momenti.

24. Il metodo dei momenti può fornire più di uno stimatore per la stessa funzione del parametro?

25. Come si calcola il rischio quadratico medio?

26. Quando uno stimatore S è strettamente preferibile ad uno stimatore T?

27. Quando uno stimatore si dice corretto?

28. Si descriva il metodo dei momenti.

29. Nel caso di genitrice discreta, in cosa sono differenti la funzione di verosimiglianza e la funzione di probabilità congiunta del campione casuale semplice?

DISTRIBUZIONE NORMALE

Sia $X \sim N(90, 15^2)$, calcolare

① $\mathbb{P}(x<75)$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Standardizziamo X : $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\rightarrow$ $\mathbb{P}\left(Z < \frac{75-90}{15}\right) = \mathbb{P}(Z<-1)$

Utilizziamo le tavole sapendo che se $x<0$ allora la probabilità sarà $1-\phi(-x)$ (dove $\phi(\cdot)$ è il valore trovato in tabella)

$\mathbb{P}(z<1) = 1-0{,}8413 = 0{,}1587$

② $\mathbb{P}(x>100)$

$\mathbb{P}(x>100) = 1-\mathbb{P}(x\leq 100) \rightarrow 1-\mathbb{P}\left(z \leq \frac{100-90}{15}\right) = 1-\mathbb{P}(z\leq 0{,}67) = 1-0{,}7486 = 0{,}2514$

③ $\mathbb{P}(90 \leq x \leq 120)$

$\mathbb{P}(0\leq x\leq 2) = P(A\cap B)$ (non ho $P(A|B)$, non posso trovarlo)

oppure

$\phi(2) - \phi(0)$

$\downarrow$

ricordando che $\phi(x)$ restituisce

$\mathbb{P}(0\leq x\leq 2) = 0{,}9772 + (0{,}5) - (0{,}9772 \cdot 0{,}5)$

DENSITA' DI PROBABILITA'

① dato $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{x^2} & \sigma \leq X \\ 0 & \end{cases}$ verificare che $f_X(x)$ e' una densita'

Dobbiamo verificare che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1 \longrightarrow \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2}\, dx$

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2}\, dx = \sigma \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \sigma \left[-\frac{1}{x} \right]_{\sigma}^{\infty} =$$ a $\pm\infty$ deve convergere!

$$= \sigma \left[\left(\lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t}\right) \right) - \left(-\frac{1}{\sigma} \right) \right] = \sigma \left[\frac{1}{\sigma} \right] = 1$$

converge!

estremo superiore

Si noti che non dipende da σ ma potrebbe

② Dato $\{X_i\}_{i=1\dots n}$ indipendenti equidistribuite ✓ sia la sua densita' $f_X(x,\sigma) = \frac{3x^2}{\sigma^3}$ per $0 \leq x \leq \sigma$.

Sia $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ calcolare la densita' di Y_n

Ricordiamo che $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

Quello che faremo e' trovare $F_{Y_n}(y)$ per poi ricavare $f_{Y_n}(y)$

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) = \sum_{1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq y) =$$ indipendenti

$$= [\mathbb{P}(X \leq y)]^n =$$ sono equidistribuite $F_X(x)$

$$\int_{-\infty}^{y} f(x)\, dx = \int_{0}^{y} \frac{3x^2}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{0}^{y} 3x^2 = \frac{1}{\sigma^3} [x^3]_0^y = \frac{y^3}{\sigma^3}$$ con $0 \leq y \leq \sigma$

Quindi $F_{Y_m}(y) = \left(\frac{y^3}{\sigma^3}\right)^m$

$f_{Y_m}(y) = \left(\frac{y}{\sigma}\right)^{3m} \frac{d}{dy} = 3m\left(\frac{y}{\sigma}\right)^{3m-1} \quad 0 \leq x \leq \sigma$

③ Sia $f_X(x) = 2xe^{-x^2}$ per $x \geq 0$ e sia $Y = X^2$. Calcolare $f_Y(y)$.

Vogliamo svolgere gli stessi passaggi di prima, ma in modo diverso.

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y)$

Se X^2 (una qualunque $g(x)$) è continua e derivabile, possiamo scrivere

$\mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ considerando il dominio avremo $\mathbb{P}(0 \leq x \leq \sqrt{y})$.

$\mathbb{P}(0 \leq x \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{y}} 2xe^{-x^2}\,dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-y}$ per $y \geq 0$

Questa è la nostra $F_Y(y)$, troviamo $f_Y(y)$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) = 0 + e^{-y}$ per $y \geq 0$

MEDIA e VARIANZA DI V.A. DISCRETE

① Un dado truccato ha probabilità che esca 1 doppia rispetto alle altre.

Sia X la VA che indica il punteggio ottenuto calcolare

a) Trovare $P(X=x)$

$X = \{1, \dots, 6\}$

Sappiamo che $\sum_1^6 p(x_i) = 1$

Sappiamo che $p(x_1)+5\cdot p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow \overbrace{2\cdot p(\bar{x}_1)}^{\text{ipotesi}}+5p(\bar{x}_1)=1$

$7p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow p(\bar{x}_1)=\frac{1}{7}=p(x_i)_{2\leq i\leq 6}$

Ricordando che $p(x_1)+5\cdot p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow p(x_1)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ (potevamo anche trovare $2\cdot p(\bar{x}_1)$)

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{2}{7} & x=1\\ \frac{1}{7} & 2\leq x\leq 6\\ 0 & \end{cases}$$

b) Trovare $E[X]$

Essendo x discreta, $E[X]=\sum_1^6 x_i(p(x_i))=1\cdot\frac{2}{7}+(2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{7}$

$=\frac{2}{7}+\frac{20}{7}=\frac{22}{7}$

c) Trovare $Var(X)$

$Var(X)=E[X^2]-E[X]^2=\sum_1^6 x_i^2(p(x_i))-\left(\frac{22}{7}\right)^4=\frac{2}{7}+(4+9+16+25+36)\frac{1}{7}-\frac{484}{49}$

$=\frac{2}{7}+\frac{80}{7}-\frac{484}{49}=\frac{160}{49}=3{,}27$

MEDIA e VARIANZA DI V.A. CONTINUE

① Dato $F_X(x) = 1 - e^{-x^2}$ per $x > 0$ calcolare

ⓐ $\mathbb{P}(x > 2)$ $\qquad 1 - e^{-x^2} = 1 - e^{-4}$

Dobbiamo trovare $\int_2^{\infty} f_X(x)\, dx$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 1 - e^{-x^2} \frac{d}{dx} = 2xe^{-x^2}$ ATTENZIONE! deve essere non negativa

Possiamo ora calcolare $\int_2^{\infty} 2xe^{-x^2} = -\int_2^{\infty} -2xe^{-x^2} = -\left[e^{-x^2}\right]_2^{\infty} =$

$= -\left[\lim_{t \to \infty} e^{-t^2} - e^{-4}\right] = e^{-4}$

↳ 0 deve convergere

Analogamente vale $\mathbb{P}(x > 2) = 1 - \mathbb{P}(x \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2^2}) = e^{-4}$

b) $\mathbb{P}(1 < x < 3)$

$\mathbb{P}(1 < x < 3) = F_X(3) - F_X(1) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-3}$ oppure

$= \int_1^3 f_X(x)\, dx = \int_1^3 2xe^{-x^2} = -\int_1^3 -2xe^{-x^2} = \left[-e^{-x^2}\right]_1^3 = -e^{-3} + e^{-1}$

c) $E[X]$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \longrightarrow \int_0^{\infty} x(2xe^{-x^2})\, dx =$ proseguo per parti:

ipotesi

$\int fg' = fg - \int f'g$

$$= -\int_0^\infty x(-2xe^{-x^2})\,dx = -\left(\underbrace{\left[xe^{-x^2}\right]_0^\infty}_{0-0} - \int_0^\infty e^{-x^2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ e' noto (!)

d) $Var(x)$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2}) = -\left\{\left[x^2e^{-x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(e^{-x^2})\,dx\right\} =$$

$$= -\left\{\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^2e^{-x^2}}_{0} - 0\right] + \left[e^{-x^2}\right]_0^\infty\right\} = -\left\{\underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{-x^2}}_{0} - 1\right\} = 1$$

$$E[x]^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$Var(x) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

2 Sia

$$f_x(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0<x<1 \\ 0 & \end{cases}$$

a) Sapendo che $E[x] = \frac{3}{5}$ calcolare $\mathbb{P}(x < \frac{1}{2})$

Dobbiamo anzitutto trovare "a" e "b" e verificare che $f_x(x)$ è effettivamente una densità. Individuiamo quindi 2 equazioni

(i) Sappiamo che per definizione di densità vale $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 ax+bx^2 = 1 \rightarrow \int_0^1 ax + \int_0^1 bx^2 = 1 \rightarrow a\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$$

(ii) Sfruttiamo il valore atteso per impostare la seconda equazione necessaria

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) = \int_0^1 x(ax+bx^2)\,dx = \int_0^1 ax^2\,dx + \int_0^1 bx^3\,dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5}$$ ipotesi

Possiamo adesso trovare "a" e "b"

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow a = \frac{18}{5} \quad b = -\frac{12}{5}$$

Riscriviamo la funzione di densità

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \end{cases}$$

È positiva (tra 0 e 1)? Sì (Trust me bro)

Troviamo ora $P(X<\frac{1}{2})$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_x(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2\,dx = \left[\frac{18}{10}\frac{x^2}{2} - \frac{12}{15}\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{18}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{12}{15}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1}{8}\right] = \frac{9}{20} - \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{7}{20}$$

b) $Var(X)$?

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\left(\frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{18}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^4 \, dx = \left[\frac{18}{20}x^4 - \frac{12}{25}x^5\right]_0^1 =$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{12}{25} = \frac{45-24}{50} = \frac{21}{50}$$

$$Var(X) = \frac{21}{50} - \frac{9}{25} = \frac{3}{50}$$

$$y = \begin{cases} \log_2(4) & X = -4,4 \\ \log_2(2) & X = -2,2 \\ 0 & X = -1,1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \begin{cases} \frac{4}{14} + \frac{4}{14} & y = \log_2(4) \\ \frac{2}{14} + \frac{2}{14} & y = \log(2) \\ \frac{1}{14} + \frac{1}{14} & y = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

FEBBRAIO 2023

Dato $L \sim U(0,2)$, sia $A = L^2$, si determini

① $F_A(a)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

② $E[A]$ $\qquad F_X(x) = F_A(x^2)$

$0 < a < 4 \quad \sqrt{4} = 2$

① $\mathbb{P}(A \leq a) = \mathbb{P}(L^2 \leq a) = \mathbb{P}(L \leq \sqrt{a}) = F_L(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2}$

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{2} & 0 < a < 4 \\ 1 & a \geq 2 \end{cases}$$

② $E[A]$

DENSITÀ DI A $= f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ 1 & \end{cases}$

$$E[A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^4 x \frac{1}{4\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{x} = \frac{1}{4}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_0^4 = \frac{4}{3}$$

③ $\mathbb{P}(A \leq 2 \mid L > 1) = \mathbb{P}(L \leq \sqrt{2} \mid L > 1) = \frac{\mathbb{P}(L \leq \sqrt{2} \cap L > 1)}{\mathbb{P}(L > 1)} = \frac{\mathbb{P}(1 < L \leq \sqrt{2})}{1 - \mathbb{P}(L \leq 1)}$

$F_L(1) = \frac{1}{4} \longrightarrow = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 1$

$F_L(\sqrt{2}) = \frac{1}{8}$

Sia $X \sim N(2,4)$

① Calcolare $\mathbb{P}(0<X<5)$

Normalizziamo X ottenendo una nuova V.A. $Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(0<X<5) = \mathbb{P}\left(\frac{0-2}{2} < Z < \frac{5-2}{2}\right) = \mathbb{P}(-1<Z<1{,}5) = F_Z(1{,}5) - F_Z(-1)$$

Attraverso la tabella sappiamo che

$F_Z(-1) = 1 - 0{,}8413$

$F_Z(1{,}5) = 0{,}9332$

$$\longrightarrow \mathbb{P}(0<X<5) = 0{,}9332 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7745$$

② $\mathbb{P}(X=2 \mid 0<X\leq 5)$

$A = \{X=2\}$ $B = \{0<X\leq 5\}$ $A \subseteq B$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

$$\mathbb{P}(A) = \int_2^2 f_X(x) = 0$$

Sia X una V.A tale che

$F_X(x) = 1 - \frac{\alpha}{x^\alpha}$ per $x \geq \alpha$ (0 altrimenti)

Per quali k esiste finito $\mu'_k = E[X^k]$?

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$$E[X^k] = \int_1^\infty x^k f_X(x)\, dx = \int_1^\infty x^k \cdot \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha \int_1 \frac{x^k}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha \int_1 x^{k-(\alpha+1)} =$$

$$= \alpha \left[\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right]_1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{k-\alpha} x^{k-\alpha} = \frac{\alpha}{k-\alpha} \lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} = 0 \longrightarrow \text{deve convergere} \Longrightarrow k < \alpha$$

GENNAIO 2023 ALDO

$X \sim Esp\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y = (X+2)^2$

① $E[Y]$

Sia $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$

$E[Y] = E[(X+2)^2] = E[X^2 + 4X + 4] = 4 + E[X^2] + 4E[X]$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \left(-\cancel{2} x^2 e^{-\frac{x}{2}} + \cancel{2} \int 2x\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx \right) =$$

$$= -x^2 e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\right) = -x^2 e^{-\frac{x}{2}} - 4xe^{-\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8)$$

Calcolo nel dominio $[0, +\infty]$

$$\Big|_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8) - \frac{(-8)}{e^0} = 8$$

Ricordando che $E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$E[Y] = 4 + 8 + 4\cdot(2) = 20$

GENNAIO 2023 MIGLIORISI

$X \sim U(0,1)$, $Y = X + 2X^2$

$E[Y] = E[X] + 2E[X^2]$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = 1$

$E[X^2] = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$

$E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$

$E[Y] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

GENNAIO 2023 MANNO

Sia x una VA discreta con spettro $S = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ e sia $f_X(x) = e|x|$. Si individui

① Il valore di e costante di normalizzazione

Sappiamo che $\sum_{i=1}^{|S|} f_X(x_i) = 1 = F_X(x)$

Per come è definita f_X $f_X(-1) = f_X(1)$, analogamente per -4 e -2.

Possiamo ridefinire $F_X(x)$ come $2 \cdot f_X(4) + 2 \cdot f_X(2) + 2 \cdot f_X(1) \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot e \cdot 4 + 2 \cdot e \cdot 2 + 2 \cdot e \cdot 1 = 1 \rightarrow 8e + 4e + 2e = 1 \rightarrow 14e = 1 \rightarrow e = \frac{1}{14}$

② Sia $Y = \log_2 |X|$, scrivere la F_Y

$S_Y = \{0, 1, 2\}$

$2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 1$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = 2 \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{14}$

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=-2) = 2 \cdot \frac{2}{14} = \frac{4}{14}$

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=-4) = 2 \cdot \frac{4}{14} = \frac{8}{14}$

$\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) = \frac{2+4+8}{14} = 1$ ✓

$$F_Y = \begin{cases} \frac{2}{14} & 0 \leq y < 1 \\ \frac{6}{14} & 1 \leq y < 4 \\ \frac{14}{14} & 4 \leq y \end{cases}$$

NOVEMBRE 2022 OR

Sia $X \sim N(1,4)$

① Si determini $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3)$

Normalizziamo $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3) = \mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{3-1}{2}\right) = F_Z(1) - F_Z(0)$

Usiamo la tabella gaussiana per trovare le distribuzioni

$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413$

② $\mathbb{P}(X=1 \mid 0 \leq X \leq 3)$

Sia $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3) = \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ $\mathbb{P}(A) = 0$ quindi $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ e di conseguenza

$\mathbb{P}(A \mid B) = 0$

SETTEMBRE

Sia $f_X(x) = Kx + q$ per $1 \leq x \leq 2$ funzione di densità

① Sapendo che $E[X] = \frac{14}{9}$ determinare K e q

$$E[X] = \int_1^2 x f(x)\,dx = \int_1^2 Kx^2 + qx\,dx = K\int_1^2 x^2\,dx + q\int_1^2 x\,dx = K\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + q\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{14}{9}$$

$$1 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 Kx + q\,dx = K\int_1^2 x\,dx + q\int_1^2 dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + q$$

Ci siamo ricavati due equazioni, impostiamo il sistema e risolviamo

$$\begin{cases} k\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + q\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{14}{9} \\ k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + q = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) + q\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{9} \\ k\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + q = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2}q = \frac{14}{9} \\ \frac{3}{2}k + q = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2}k\right) = \frac{14}{9} \\ q = 1 - \frac{3}{2}k \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}k = \frac{14}{9} \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{28-27}{12}k = \frac{28-27}{18} \\ / \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{\cancel{12}_{2}}k = \frac{1}{\cancel{18}_{3}} \\ / \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ q = 1 - \frac{6}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ q = -2 \end{cases}$$

② $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_1^2 \frac{2}{3}x - 2\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 x\,dx - 2\int_1^2 dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 2 =$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} - 2 = -1$

GIUGNO 2023 KB

① Data $X \sim \Pi(4)$ e $Y = (X-1)^2$, calcolare $E[Y]$

$Y = X^2 - 2X + 1 \rightarrow E[Y] = E[X^2 - 2X + 1] = E[X^2] - 2E[X] + 1$

Per $X \sim \Pi(4)$ $E[X] = \lambda$ e $VAR(X) = \lambda = E[X^2] - E[X]^2$

Ricaviamoci $E[X^2]$:

$\lambda = E[X^2] - \lambda^2 \longrightarrow E[X^2] = \lambda(1+\lambda)$

Sostituiamo tutto e calcoliamo $E[Y]$

$E[Y] = \lambda(1+\lambda) - 2\lambda + 1 = \lambda(\lambda-1)+1 \xrightarrow{\lambda=4} 4(4-1)+1 = 13$

② Dato $f_X(x) = e^{x-2}$ per $x \geq 2$, calcolare $\mathbb{P}(T \geq 10 \mid T \leq 12)$

Sia $\mathbb{P}(T \geq 10) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(T \leq 12) = \mathbb{P}(B)$ allora

$\mathbb{P}(T \geq 10 \mid T \leq 12) = \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Troviamo $F_X(x) \longrightarrow \int_2^x e^{x-2}\,dx = \int_2^x \dfrac{e^x}{e^2}\,dx = \dfrac{1}{e^2}\int_2^x e^x\,dx = e^{x-2} - 1$

$\mathbb{P}(B) = F_X(12) = e^{10} - 1$

$\mathbb{P}(A \cap B) = e^{10} - e^8 \qquad (\mathbb{P}(10 \leq X \leq 12))$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{e^{10} - e^8}{e^{10} - 1}$

Esame Novembre 2022

mercoledì 4 gennaio 2023 14:59

$N(\mu, \sigma^2)$

Sia $X \sim \boxed{N(1,4)}$. Si determini

(i) $\mathbb{P}(0 \le X \le 3)$

(ii) $\mathbb{P}(X = 1 \mid 0 \le X \le 3) = 0$

$X = 1$

DEFINIZIONE

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

DEVIAZIONE STANDARD

i) $P(\underbrace{0 \le}_{A} \underbrace{x \le 3}_{B})$

$A = x \ge 0$

$B = x \le 3$

BAYES:

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(0 \le x \le 3)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$x - \mu = T$

FUNZIONE STANDARDIZZATA DELLA LEGGE NORMALE

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{T^2}{2}}$$

$\mu = 1 \quad \sigma^2 = 4 \to \sigma = 2$

26.2 Osservazioni

La trasformazione che ci consente di passare da una v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ad una v.a $Z \sim B(0,1)$ è la seguente:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim Z \sim N(0,1)$$

Essa è nota come la "standardizzazione" di Y.

Osservazione 1 Ora è chiaro come utulizzare la funzione Φ per ottenere i valori assunti dalla funzione di distribuzione F_X nel caso di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$x \in \mathbf{R},\ F_Z(x; \mu, \sigma^2) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

In altri termini l'area sotto la f.d.p di X prima di x è uguale all'area sottoo la f.d.p di Z prima di $\frac{x-\mu}{\sigma}$.

$$P\left(0 \le \frac{x-1}{2} \le \frac{3-1}{2}\right) =$$

$$P(0 \le \overbrace{x - 1 \le 2}^{B}) =$$

$P(A) = 1 - P(x < 1)$

$P(A) = x - 1 \ge 0 \to x \ge 1$

$$P(\underbrace{0 \le x-1}_{A} \le 2) =$$

$P(A) = x-1 \ge 0 \to x \ge 1$

$P(B) = x-1 \le 2 \to x \le 3$

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) - P(A) \cap P(B) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(x \ge 1) + P(x \le 3) - P(x \ge 1) \cdot P(x \le 3)$$

$$1 - 0.83891 + 0.99865 - (0{,}16109 \cdot 0{,}99865) =$$

$$0{,}16109 + 0{,}99865 - 0{,}160872285$$

$$= \simeq 1$$

SOLUZIONE 2

$$P(1 \le x \le 3) = \phi(3) - (1 - \phi(1))$$

$$0.99865 - (1 - 0.84134) = 0{,}83999$$

$$0{,}15866$$

11) $\mathbb{P}(X=1 \mid 0 \le X \le 3) = 0$

$$\mathbb{P}(\overset{A}{x=1} \mid \overset{B}{0 \le x \le 3})$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} =$$

$$\frac{\overbrace{P(x=1)}^{0} \cdot P(0 \le x \le 3 \mid x=1)}{P(0 \le x \le 3)} = 0$$

ASSOLUTAMENTE

$P(A|B) \to$ F.D.P.

$\downarrow$

ASSOLUTAMENTE CONTINUA

ASSOLUTAMENTE CONTINUA

ASSOLUTAMENTE CONTINUA

$X = 1$

$$P\left(X = \frac{1-1}{2}\right) = 0$$

CAROFANO

$\alpha > 0$, X è una v.a. continua con

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\alpha}, & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}}$$

Si determini, se esistenti:

$k \in \mathbb{N}$, $\mu_k = E(X^k)$

$$f_X(x) = \frac{d \cdot F_X(x)}{dx} \longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

$$E[X^k] = \phi_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$E(X^k) = \alpha \int_1^{+\infty} x^k \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} \, dx$$

$$= \alpha \int_1^{\infty} x^{k-\alpha-1} \, dx$$

$$\alpha \frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha} \Big|_1^{\infty}$$

$$E(X^k) = \int_1^{\infty} x^k \cdot f(x)$$

$k - \alpha > 0$ $\qquad$ $k > \alpha$

VITALE

Sia X una v.a. discreta che assume i valori $x = -4, -2, -1, 1, 2, 4$ con probabilità:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{|x|}{14}, \text{ per } x = (-4, -2, -1, 1, 2, 4),$$

Calcolare la distribuzione di probabilità di $Y = \log_2 |X|$.

$x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{|x|}{14}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1)$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$$

$\mathbb{P}(1)$ $\quad$ $P(2)$ $\quad$ $P(3)$

$$P(X = y) = \frac{|\log_2 |x||}{14} =$$

$$\mathbb{P}(Y = \pm 1) = 0 \qquad \mathbb{P}(Y = \pm 2) = \frac{1}{14}$$

$$\mathbb{P}(Y = \pm 4) = \frac{1}{7}$$

Sia X una variabile aleatoria discreta che assume valori $x = -4, -1, -2, 1, 2, 4$ con probabilità $\mathbb{P}(X=x) = |x|/14$

Calcolare la distribuzione di probabilità di $Y = \log_2 |X|$

$$X = \begin{cases} \frac{|x|}{14}, & x = -4, -1, -2, 1, 2, 4 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

grafico $\mathbb{P}(X=x)$

$\frac{4}{14}, \frac{2}{14}, \frac{1}{14}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0{,}28 \quad 0{,}14 \quad \sim 0{,}07$

* la distribuzione di probabilità di Y è data da $\mathbb{P}(Y=y)$ con $y=1 \to 1/7$, $y=2 \to 2/7$, $y=4 \to \frac{4}{7}$

Per calcolare la d. probabilità di Y, bisogna trovare $\mathbb{P}(Y=y)$ per ogni valore possibile di Y. Bisogna trovare prima i valori di y per i quali esiste almeno un x : $y = \log_2 |x| = y$

Poiché Y è il logaritmo in base 2 di $|X|$, si può dire che y è un numero intero se e solo se $|x|$ è una potenza di due

$\Rightarrow y = 2^0 = 1$

$2^1 = 1$

$2^2 = 4$

Bisogna trovare gli x tali che $|X|$ è una di queste potenze di 2

$y = 1 \Rightarrow |X| = 2^0 = 1 \Rightarrow X = 1 \vee X = -1$

$y = 2 \Rightarrow |X| = 2^1 = 2 \Rightarrow X = 2 \vee X = -2$

$y = 4 \Rightarrow |X| = 2^2 = 4 \Rightarrow X = 4 \vee X = -4$

Ad ogni valore di x ho associato i valori di y per cui devo trovare la distribuzione

Bisogna trovare ora $\mathbb{P}(Y=y)$ sommando le prob di tutti gli x per cui $Y = y$

$y = 1 \longrightarrow \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

$y = 2 \longrightarrow \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=-2) = \frac{2}{14} + \frac{2}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$y = 4 \to \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=-4)$

$\frac{4}{14} + \frac{4}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

*

ESERCIZI SULLA PROBABILITA'

PROBABILITA' CLASSICA

1) Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte ; calcolare la probabilità che la carta sia:
   a. una figura;
   b. una carta di danari;
   c. un asso.

2) Un'urna contiene 80 palline di colore diverso: 20 bianche, 18 verdi, 32 rosse, 10 gialle. Si estrae una pallina ; calcolare la probabilità che:
   a. la pallina sia di colore verde;
   b. la pallina non sia di colore verde;
   c. la pallina non sia di colore rosso.

3) Si lancia un dado; calcolare la probabilità che la faccia sia:
   a. un numero minore di 3;
   b. un numero dispari.

PROBABILITA' CLASSICA CON APPLICAZIONE DEL CALCOLO COMBINATORIO

4) Si lanciano due dadi; calcolare la probabilità :
   a. di avere un "doppio sei";
   b. di avere due facce uguali;
   c. di ottenere entrambe le facce con numeri pari;
   d. di ottenere una coppia formata da numeri pari;
   e. di ottenere una faccia pari e una faccia dispari.

5) Nel lancio di due dadi si consideri l'evento "somma delle facce"; calcolare la probabilità di ottenere come somma:
   a. 3;
   b. almeno 3;
   c. 9;
   d. almeno 9;
   e. non più di 8.

6) Si lanciano tre dadi; calcolare la probabilità :
   a. di avere tre facce uguali;
   b. di ottenere tre facce con numeri dispari;
   c. di ottenere una faccia pari e due facce dispari.

7) Nel lancio di tre dadi si consideri l'evento "somma delle facce"; calcolare la probabilità di ottenere come somma:
   a. 3;
   b. 7;
   c. 12;
   d. almeno 15;
   e. non più di 14.

8) Si lanciano tre monete; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. tre “teste”;
   b. una testa e due croci;
   c. almeno una croce.

9) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità che:
   a. entrambe le carte siano di coppe;
   b. una carta di coppe e una carta di denari;
   c. la prima carta di coppe e la seconda di denari;
   d. almeno una carta di denari.

10) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, non rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità che:
   a. entrambe le carte siano di coppe;
   b. una carta di coppe e una carta di denari;
   c. la prima carta di coppe e la seconda di denari;
   d. almeno una carta di denari.

11) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte contemporaneamente. Calcolare la probabilità che:
   a. entrambe le carte siano di coppe;
   b. una carta di coppe e una carta di denari;
   c. due carte dello stesso colore;
   d. almeno una carta di denari.

12) Un’urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte successivamente 2 palline , rimettendo la prima estratta nell’urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline entrambe rosse;
   b. palline di uguale colore;
   c. una rossa e una verde;
   d. almeno una pallina rossa.

13) Un’urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte successivamente 2 palline , non rimettendo la prima estratta nell’urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline entrambe rosse;
   b. palline di uguale colore;
   c. una rossa e una verde;
   d. almeno una pallina rossa.

14) Un’urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 2 palline contemporaneamente. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline entrambe rosse;
   b. palline di uguale colore;
   c. una rossa e una verde;
   d. almeno una pallina rossa.

15) Un'urna contiene 40 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi , 5 gialle e 20 bianche. Vengono estratte 3 palline contemporaneamente. Calcolare la probabilità di ottenere:
    a. palline tutte rosse;
    b. palline di uguale colore;
    c. una rossa, una bianca e una verde;
    d. 2 palline bianche e una pallina rossa;
    e. 2 palline gialle e una verde;
    f. nessuna pallina di colore giallo;
    g. almeno una pallina rossa.

16) Un collettivo è formato da 20 ragazzi, di cui 10 maschi. Deve essere formata una rappresentanza di due studenti con pari prerogative. Calcolare la probabilità che la rappresentanza scelta sia composta da :
    a. entrambi gli studenti di sesso femminile;
    b. uno studente maschio e l'altro femmina;
    c. almeno un maschio.

17) Una confezione contiene confetti colorati, 10 rossi, 8 verdi, 2 bianchi ; si prendono tre confetti ; calcolare la probabilità di estrarre :
    a. tre confetti di colore verde;
    b. tre confetti di colore bianco;
    c. tre confetti di colore diverso;
    d. 2 confetti di colore rosso e uno di colore bianco;
    e. 2 confetti di colore verde e uno di colore bianco;
    f. almeno un confetto rosso.

18) Nel gioco del lotto, calcolare le seguenti probabilità :
    a. giocando due numeri , vincere l'ambo;
    b. giocando tre numeri, vincere l'ambo;
    c. giocando tre numeri , vincere il terno;
    d. giocando tre numeri, vincere almeno l'ambo;
    e. giocando quattro numeri, vincere la quaterna;
    f. giocando quattro numeri, vincere solo il terno;
    g. giocando quattro numeri, vincere almeno il terno;
    h. giocando cinque numeri, vincere la quaterna;
    i. giocando cinque numeri, vincere la cinquina;
    j. giocando cinque numeri, vincere almeno la quaterna.

PROBABILITA' FREQUENTISTICA

19) Un'urna contiene palline di colore diverso; non è noto il numero delle palline e nemmeno la composizione dei colori. Vengono effettuate 100 estrazioni , rimettendo ogni volta la pallina nell'urna, ottenendo i seguenti risultati :
   a. 40 volte è uscita la pallina di colore bianco;
   b. 30 volte è uscita la pallina di colore giallo;
   c. 30 volte è uscita la pallina di colore azzurro.

   Calcolare le seguenti probabilità nell'estrazione di una pallina, con reimmissione :
   1.a esca una pallina di colore bianco;
   2.a non esca una pallina di colore azzurro;
   3.a esca una pallina di colore rosso.

20) Dalla tavola di mortalità della popolazione italiana, anno 2007, risulta che su 100.000 nati vivi maschi, 99.208 hanno raggiunto in anni l'età di 20 , 98.494 l'età di 30 e 95.871 l'età di 50 . Calcolare la probabilità che ha un ventenne di arrivare all'età di :
   a. 30 anni;
   b. 50 anni .

21) La tabella seguente riporta il numero dei veicoli assicurati e il relativo numero dei sinistri e dei costi dei sinistri risarciti. (Fonte ANIA 2008)

Numero di veicoli assicurati	43,5 milioni
Numero dei sinistri	3,7 milioni
Costo totale dei sinistri risarciti (€)	15 miliardi

   Ipotizzando un aumento del numero dei veicoli circolanti pari a 44 milioni , calcolare:
   a. il numero dei sinistri previsto;
   b. il presumibile costo totale dei sinistri da risarcire .

PROBABILITA' ASSIOMATICA

PROBABILITA' CON APPLICAZIONE DELLA LEGGE DELLE PROBABILITA' TOTALI

22) Calcolare la probabilità che nel lancio di un dado si verifichi :
   a. la faccia 2 o la faccia 5;
   b. la faccia 2 o una faccia minore di 4.

23) Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta . Calcolare la probabilità di estrarre:
   a. un asso o una figura;
   b. un asso o una carta di coppe;
   c. un cavallo o una figura.

24) Un'urna contiene 90 palline di colore diverso: 10 bianche, 28 verdi, 32 rosse, 20 gialle. Si estrae una pallina ; calcolare la probabilità che:
   a. la pallina sia di colore verde;
   b. la pallina non sia di colore verde;
   c. la pallina sia di colore rosso oppure di colore verde;
   d. la pallina sia di colore rosso oppure marrone;
   e. la pallina sia di colore bianco oppure verde oppure rosso.

PROBABILITA' CONDIZIONATA

25) Un'urna contiene 10 palline di colore diverso: 2 bianche, 6 verdi, 2 rosse. Si estrae una pallina ; calcolare la probabilità che:
   a. la pallina sia di colore verde, sapendo che la pallina estratta non è rossa;
   b. la pallina non sia di colore verde, sapendo che la pallina estratta non è rossa;
   c. la pallina sia di colore rosso, sapendo che la pallina estratta non è verde.

26) Si lancia un dado; calcolare la probabilità che :
   a. esca un numero dispari, sapendo che si è verificata una faccia minore di 4;
   b. esca un numero dispari, sapendo che si è verificata una faccia non superiore a 4;
   c. esca il numero 2 , sapendo che si è verificata una faccia dispari.

27) Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte. Calcolare la probabilità che:
   a. venga estratto un asso , sapendo che è stata estratta una carta di coppe;
   b. venga estratta una donna, sapendo che è stata estratta una figura;
   c. venga estratta una figura , sapendo che è stata estratta una carta maggiore di 5.

PROBABILITA' CON APPLICAZIONE DELLA LEGGE DELLE PROBABILITA' COMPOSTE

28) Si lanciano due dadi; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. un "doppio sei";
   b. entrambe le facce pari;
   c. entrambe le facce minori di 3.

29) Si lanciano tre dadi; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. per 3 volte una faccia pari;
   b. per 3 volte una faccia minore di 6.

30) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. entrambe le carte di denari;
   b. la prima carta di coppe e la seconda di denari;
   c. nessuna carta di denari;
   d. almeno una carta di denari.

31) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, non rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. entrambe le carte di denari;
   b. la prima carta di coppe e la seconda di denari;
   c. nessuna carta di denari;
   d. almeno una carta di denari.

32) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 2 palline , rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline entrambe rosse;
   b. la prima rossa e la seconda verde;
   c. nessuna pallina rossa;
   d. almeno una pallina rossa.

33) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 2 palline , non rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline entrambe rosse;
   b. la prima rossa e la seconda verde;
   c. nessuna pallina rossa;
   d. almeno una pallina rossa.

PROBABILITA' CON APPLICAZIONE DELLA LEGGE DELLE PROBABILITA' TOTALI E COMPOSTE

34) Si lanciano due dadi; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una faccia pari e l'altra dispari;
   b. almeno una faccia pari;
   c. almeno una faccia maggiore di 4.

35) Si lanciano tre dadi; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. due facce pari e una dispari;
   b. almeno due facce pari.
   c. almeno una faccia pari;

36) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una figura e una cartina;
   b. una carta di coppe e l'altra di denari;
   c. due figure oppure due assi;
   d. carte di uguale seme;
   e. carte di seme diverso;
   f. almeno una carta di denari.

37) Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due carte successivamente, non rimettendo la prima estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una figura e una cartina;
   b. una carta di coppe e l'altra di denari;
   c. due figure oppure due assi;
   d. carte di uguale seme;
   e. carte di seme diverso;
   f. almeno una carta di denari.

38) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 2 palline , rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una pallina rossa e una verde;
   b. due palline rosse oppure due verdi;
   c. palline di uguale colore;
   d. almeno una pallina rossa.

39) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 2 palline , non rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una pallina rossa e una verde;
   b. due palline rosse oppure due verdi;
   c. palline di uguale colore;
   d. almeno una pallina rossa.

40) Si lanciano tre monete; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. una testa e due croci;
   b. nessuna croce;
   c. almeno una croce.

41) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 3 palline , rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline di uguale colore;
   b. una pallina gialla, una verde e una rossa;
   c. due palline verdi e una gialla;
   d. due palline verdi e una non verde;
   e. almeno una pallina verde.

42) Un'urna contiene 20 palline numerate, 10 rosse, 5 verdi e 5 gialle. Vengono estratte 3 palline , non rimettendo le palline estratte nell'urna. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline di uguale colore;
   b. una pallina gialla, una verde e una rossa;
   c. due palline verdi e una gialla;
   d. due palline verdi e una non verde;
   e. almeno una pallina verde.

43) Si hanno due urne ; la prima contiene 2 palline bianche, 6 nere, 2 verdi; la seconda 4 bianche, 2 nere e 6 verdi. Viene estratta una pallina da ciascuna urna; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline di uguale colore;
   b. una pallina bianca e l'altra verde;
   c. palline di colore diverso;
   d. almeno una pallina verde.

ESERCIZI RIEPILOGATIVI

44) Si lancia 6 volte una moneta; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. esattamente 6 teste;
   b. nessuna testa;
   c. almeno una testa.

45) Si lanciano tre dadi; calcolare la probabilità di ottenere:
   a. nessuna faccia pari;
   b. almeno una faccia pari;
   c. una faccia minore o uguale a due in almeno uno dei tre dadi.

46) Un'urna contiene 50 palline, 30 bianche, 15 rosse, 5 verdi. Si estraggono contemporaneamente tre palline. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline dello stesso colore;
   b. due palline rosse e l'altra non rossa;
   c. almeno una pallina rossa;
   d. almeno due palline rosse.

47) Un'urna contiene 50 palline, 30 bianche, 15 rosse, 5 verdi. Si estraggono successivamente tre palline, con reimmissione. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline dello stesso colore;
   b. due palline rosse e l'altra non rossa;
   c. almeno una pallina rossa;
   d. almeno due palline rosse.

48) Un'urna contiene 50 palline, 30 bianche, 15 rosse, 5 verdi. Si estraggono successivamente tre palline, senza reimmissione. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. palline dello stesso colore;
   b. due palline rosse e l'altra non rossa;
   c. almeno una pallina rossa;
   d. almeno due palline rosse.

49) Un lotto di 1.000 lampadine contiene il 2 per cento di lampade difettose. Vengono estratte contemporaneamente 5 lampade. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a. nessuna lampada difettosa;
   b. 4 lampade non difettose;
   c. almeno 4 lampade non difettose.

50) Deve essere costituita un delegazione di 3 persone, da un gruppo composto da 20 donne e 15 uomini. Calcolare la probabilità che la delegazione :
   a. sia composta da sole donne ;
   b. sia composta da soli uomini;
   c. sia composta da almeno una donna;
   d. sia composta da almeno due uomini.

51) Da indagini conoscitive è noto che il 20% di autovetture di una nota marca avrà la necessità di cambiare la frizione entro i 100.000 km percorsi. Calcolare la probabilità che su tre relative autovetture acquistate :
   a. tutte e tre devono cambiare la frizione ;
   b. nessuna debba cambiare la frizione;
   c. almeno una debba cambiare la frizione.

52) Si estraggono tre numeri dal sacchetto della tombola (90 numeri), senza reimmissione . Calcolare la probabilità :
   a. di estrarre tutti numeri pari ;
   b. di estrarre tutti numeri maggiori di 80;
   c. di estrarre almeno due numeri minori di 6 .

53) In una famiglia sono presenti 3 figli . Nell'ipotesi che maschio e femmina hanno la stessa probabilità di nascita , calcolare la probabilità :
   a. che tutti e tre i figli siano femmine ;
   b. che almeno una sia femmina;
   c. che almeno due siano maschi.

54) Due impianti producono lo stesso oggetto; il primo macchinario presenta un tasso di difettosità del 5%, il secondo del 3% . Calcolare la probabilità , prendendo un oggetto da ciascuno degli impianti, che :
   a. entrambi gli oggetti siano non difettosi;
   b. vi sia un solo prodotto difettoso.
   c. almeno uno dei due oggetti non sia difettoso;

Bibliografia : Matematica con applicazioni informatiche , Gambotto, Manzone , Tramontana; Probabilità e statistica descrittiva Bergamini,Trifone,Barozzi, Zanichelli; La Matematica nell'economia e nella finanza 2 Coeli, Falamischia, Minerva; calcolo delle probabilità, Trovato – Manfredi, Ghisetti e Corvi Editori, Calcolo delle probabilità , G. DALL'AGLIO, Zanichelli.

AUTOVALUTAZIONE 1

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci sono i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. In cosa sono differenti le combinazioni dalle disposizioni.
2. Una permutazione è una ...
3. Per contare il numero delle possibili immatricolazioni di autoveicoli, in qualsiasi sistema adottato, si usa la formula relativa alle ...
4. Il coefficiente binomiale ha tre significati diversi: (i) è il numero dei sottoinsiemi con un'assegnata cardinalità costituiti con gli elementi di un insieme di cardinalità maggiore, (ii) è il numero delle combinazioni semplici lunghe al più quanti sono gli elementi dell'alfabeto, (iii) è il numero delle ...
5. Quali sono gli assiomi per la famiglia degli eventi?
6. Come si chiama la famiglia degli eventi?
7. Quali sono gli assiomi di una misura di probabilità?
8. Si dimostri che l'evento impossibile ha probabilità nulla.
9. In uno spazio di probabilità, è vero che la finita additività scaturisce dalla numerabile additività? Se si, ciò è in relazione con la domanda precedente?
10. Si giustifichi il fatto che la probabilità di un evento è il complemento a 1 della probabilità del suo complementare.
11. Si enunci la formula di inclusione-esclusione nel caso di 4 eventi.
12. Si enunci la formula delle 2 alternative.
13. Si enunci il teorema di Bayes con 2 alternative.
14. La probabilità *a priori* si riferisce alle alternative?
15. La probabilità *a posteriori* si riferisce alle alternative?
16. In cosa consiste la differenza tra le probabilità delle due precedenti richieste.
17. Che cos'è un sistema completo di alternative.
18. Sia n un intero maggiore di 1. Si scriva il teorema di Bayes con n alternative.
19. Che cosa sono le verosimiglianze?
20. Se la probabilità di un evento A condizionata da un evento B è uguale alla probabilità di A allora A e B sono ...

21. Quando due eventi sono indipendenti?

22. Se la probabilità congiunta di tre aventi si fattorizza nel prodotto delle rispettive probabilità si può dire che i tre eventi sono indipendenti tra loro?

23. Quando tre eventi sono indipendenti tra loro?

24. Se tre eventi A, B e C sono indipendenti tra loro allora A è indipendente da ...

25. Sia n un intero maggiore di 1. Quando n eventi si dicono indipendenti tra loro?

26. La controimmagine di un insieme B mediante un'applicazione è costituita dagli elementi del primo sostegno la cui ... a B.

27. La controimmagine ... è vuota. La controimmagine del secondo sostegno è ...

28. La controimmagine di un insieme B mediante un'applicazione f è costituita dagli elementi del primo sostegno la cui ... a B; essa si denota con il simbolo ...

29. La controimmagine di un'intersezione è ...

30. La controimmagine di ... è l'unione disgiunta delle controimmagini.

AUTOVALUTAZIONE 2

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci soni i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. Si dia la definizione di funzione di distribuzione di un numero aleatorio.
2. La varianza della somma di un n numeri aleatori congiuntamente distribuiti è uguale a...
3. Si dia la definizione di funzione di probabilità marginale per un coppia di numeri aleatori discreti congiuntamente distribuiti.
4. Qual è la relazione tra $F_X(x)$ e $\mathbb{P}(X > x)$.
5. Si enuncino le proprietà di una funzione di distribuzione.
6. Sia X un numero aleatorio <u>discreto</u> e g una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ misurabile. (Ovvero, la controimmagine tramite g di un boreliano di $\mathbb{R}$ è un boreliano di $\mathbb{R}$.) Come si calcola la media di $g(X)$?
7. La funzione di densità di probabilità serve a identificare la legge di un numero aleatorio...
8. Sia X un numero aleatorio e $Y = 3X - 5$. Per quali motivi risulta che $\mathbb{D}^2(Y) = 9\mathbb{D}^2(X)$.
9. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge geometrica.
10. È lecito portare un fattore fuori dal segno di varianza?
11. Che cos'è il supporto di un numero aleatorio continuo?
12. Per una coppia di numeri aleatori continui e congiuntamente distribuiti, si dia la definizione di funzione di densità di probabilità di uno dei due condizionata dall'altro.
13. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge di Poisson.
14. Come si descrive la legge di una coppia di numeri aleatori discreti congiuntamente distribuiti.
15. Scrivere in termini di F_X la probabilità dell'evento $\{X \geq x\}$.
16. Che cosa è lo spettro di un numero aleatorio discreto?
17. Come si calcola la media della somma di un numero finito di numeri aleatori congiuntamente distribuiti?
18. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge binomiale.
19. Due numeri aleatori continui congiuntamente distribuiti sono indipendenti se e solo se...
20. Si dia la definizione di funzione di densità di probabilità marginale.
21. Se la covarianza tra X e Y è nulla allora essi sono...

22. Quale funzione individua la legge di una coppia di numeri aleatori continui congiuntamente distribuiti?

23. Siano a e b due numeri reali con $a < b$. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge uniforme nell'intervallo (a,b).

24. La covarianza di una coppia di numeri aleatori congiuntamente distribuiti è la media del ...

25. Si scriva la media e la varianza di un numero aleatorio con legge esponenziale.

26. Se due numeri aleatori congiuntamente distribuiti sono indipendenti allora la media del loro prodotto è...

27. In quale situazione la varianza di una somma è uguale alla somma delle varianze?

28. Si scriva la media e la varianza di un un numero aleatorio con legge normale.

29. Sia X un numero aleatorio <u>continuo</u> e g una funzione di Borel di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. (Ovvero, la controimmagine tramite g di un boreliano di $\mathbb{R}$ è un boreliano di $\mathbb{R}$.) Come si calcola la media di $g(X)$?

30. Sia X un numero aleatorio; quale funzione g è utilizzata per definire la funzione generatrice dei momenti di X?

AUTOVALUTAZIONE 3

Si consiglia di scrivere la risposta su un foglietto tipo minuta e successivamente di verificarla consultando il libro di testo e gli appunti presi a lezione. Dove ci soni i tre puntini è richiesto il completamento della frase.

1. Che cos'è una statistica?
2. Quando uno stimatore S è preferibile ad uno stimatore T?
3. Cosa si intende per parametro incognito?
4. Per una genitrice dotata di funzione generatrice dei momenti nell'intorno dell'origine cosa si può affermare per gli stimatori campionari?
5. Uno stimatore è consistente se .....
6. Possono esistere due o più stimatori ammissibili per la stessa funzione di un parametro?
7. Quando uno stimatore si dice corretto?
8. Si dia la condizione sufficiente affinché uno stimatore corretto sia anche consistente.
9. Come è distribuita la media campionaria di un campione casuale semplice nel caso di genitrice normale?
10. Si enunci la legge debole dei grandi numeri.
11. Si dia la formula che descrive il metodo della massima verosimiglianza.
12. Che cos'è la genitrice di un campione casuale semplice?
13. La varianza campionaria è uno stimatore corretto per .....
14. Che cos'è la regione parametrica?
15. Si dia la definizione di rischio quadratico medio.
16. Se uno stimatore è corretto il rischio quadratico medio è uguale .....
17. Se la genitrice di un campione casuale semplice non ammette finita la media si può applicare il metodo dei momenti?
18. Che cos'è uno stimatore?
19. Si forniscano tre esempi di statistiche.
20. A cosa serve la funzione di log-verosimiglianza.
21. Quando la media campionaria ha varianza pari a quella della genitrice?
22. Nel caso di genitrice continua, in cosa sono differenti la funzione di verosimiglianza e la funzione di densità di probabilità congiunta del campione casuale semplice?

23. Quando la media campionaria ha distribuzione approssimativamente normale?

24. Si dia la condizione sufficiente per avere la consistenza per gli stimatori ottenuti con il metodo dei momenti.

25. Il metodo dei momenti può fornire più di uno stimatore per la stessa funzione del parametro?

26. Come si calcola il rischio quadratico medio?

27. Quando uno stimatore S è strettamente preferibile ad uno stimatore T?

28. Quando uno stimatore si dice corretto?

29. Si descriva il metodo dei momenti.

30. Nel caso di genitrice discreta, in cosa sono differenti la funzione di verosimiglianza e la funzione di probabilità congiunta del campione casuale semplice?

DISTRIBUZIONE NORMALE

Sia $X \sim N(90, 15^2)$, calcolare

① $\mathbb{P}(x<75)$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Standardizziamo X : $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\rightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{75-90}{15}\right) = \mathbb{P}(Z<-1)$

Utilizziamo le tavole sapendo che se $x<0$ allora la probabilità sarà $1-\phi(-x)$ (dove $\phi(\cdot)$ è il valore trovato in tabella)

$\mathbb{P}(Z<1) = 1-0{,}8413 = 0{,}1587$

② $\mathbb{P}(x>100)$

$\mathbb{P}(x>100) = 1-\mathbb{P}(x\leq 100) \rightarrow 1-\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{100-90}{15}\right) = 1-\mathbb{P}(Z\leq 0{,}67) = 1-0{,}7486 = 0{,}2514$

③ $\mathbb{P}(90 \leq x \leq 120)$

$\mathbb{P}(0\leq x\leq 2) = P(A\cap B)$ (non ho $P(A|B)$, non posso trovarlo)

oppure

$\phi(2) - \phi(0)$

$\downarrow$

ricordando che $\phi(x)$ restituisce

$\mathbb{P}(0\leq x\leq 2) = 0{,}9772 + (0{,}5) - (0{,}9772 \cdot 0{,}5)$

DENSITA' DI PROBABILITA'

① dato $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{x^2} & \sigma \leq x \\ 0 & \end{cases}$ verificare che $f_X(x)$ e' una densita'

Dobbiamo verificare che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1 \longrightarrow \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2}\, dx$

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2}\, dx = \sigma \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \sigma \left[-\frac{1}{x}\right]_{\sigma}^{\infty} =$$

a $\pm\infty$ deve convergere!

$$= \sigma \left[\left(\lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t}\right) \right) - \left(-\frac{1}{\sigma}\right) \right] = \sigma \left[\frac{1}{\sigma}\right] = 1$$

converge!

estremo superiore

Si noti che non dipende da σ ma potrebbe

② Dato $\{X_i\}_{i \in 1 \dots n}$ indipendenti equidistribuite ✓ sia la sua densita' $f_X(x, \sigma) = \frac{3x^2}{\sigma^3}$ per $0 \leq x \leq \sigma$.

Sia $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ calcolare la densita' di Y_n

Ricordiamo che $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

Quello che faremo e' trovare $F_{Y_n}(y)$ per poi ricavare $f_{Y_n}(y)$

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) = \sum_{1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq y) =$$

indipendenti

$$= [\mathbb{P}(X \leq y)]^n =$$

sono equidistribuite $F_X(x)$

$$\int_{-\infty}^{y} f(x)\, dx = \int_{0}^{y} \frac{3x^2}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_{0}^{y} 3x^2 = \frac{1}{\sigma^3} [x^3]_0^y = \frac{y^3}{\sigma^3} \quad \text{con } 0 \leq y \leq \sigma$$

Quindi $F_{Y_m}(y) = \left(\frac{y^3}{\sigma^3}\right)^m$

$f_{Y_m}(y) = \left(\frac{y}{\sigma}\right)^{3m} \frac{d}{dy} = 3m\left(\frac{y}{\sigma}\right)^{3m-1} \quad 0 \leq x \leq \sigma$

③ Sia $f_X(x) = 2xe^{-x^2}$ per $x \geq 0$ e sia $Y = X^2$. Calcolare $f_Y(y)$.

Vogliamo svolgere gli stessi passaggi di prima, ma in modo diverso.

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y)$

Se X^2 (una qualunque $g(x)$) è continua e derivabile, possiamo scrivere

$\mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ considerando il minimo avremo $\mathbb{P}(0 \leq x \leq \sqrt{y})$.

$\mathbb{P}(0 \leq x \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{y}} 2xe^{-x^2}\,dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-y}$ per $y \geq 0$

Questa è la nostra $F_Y(y)$, troviamo $f_Y(y)$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) = 0 + e^{-y}$ per $y \geq 0$

MEDIA e VARIANZA DI V.A. DISCRETE

① Un dado truccato ha probabilità che esca 1 doppia rispetto alle altre.

Sia X la VA che indica il punteggio ottenuto calcolare

a) Trovare $P(X=x)$

$X = \{1, \dots, 6\}$

Sappiamo che $\sum_1^6 p(x_i) = 1$

Sappiamo che $p(x_1)+5\cdot p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow \overbrace{2\cdot p(\bar{x}_1)}^{\text{ipotesi}}+5p(\bar{x}_1)=1$

$7p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow p(\bar{x}_1)=\frac{1}{7}=p(x_i)_{2\leq i\leq 6}$

Ricordando che $p(x_1)+5\cdot p(\bar{x}_1)=1 \rightarrow p(x_1)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ (potevamo anche trovare $2\cdot p(\bar{x}_1)$)

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{2}{7} & x=1\\ \frac{1}{7} & 2\leq x\leq 6\\ 0 & \end{cases}$$

b) Trovare $E[X]$

Essendo x discreta, $E[X]=\sum_1^6 x_i(p(x_i))=1\cdot\frac{2}{7}+(2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{7}$

$=\frac{2}{7}+\frac{20}{7}=\frac{22}{7}$

c) Trovare $Var(X)$

$Var(X)=E[X^2]-E[X]^2=\sum_1^6 x_i^2(p(x_i))-\left(\frac{22}{7}\right)^4=\frac{2}{7}+(4+9+16+25+36)\frac{1}{7}-\frac{484}{49}$

$=\frac{2}{7}+\frac{80}{7}-\frac{484}{49}=\frac{160}{49}=3{,}27$

MEDIA e VARIANZA DI V.A. CONTINUE

① Dato $F_X(x) = 1 - e^{-x^2}$ per $x > 0$ calcolare

ⓐ $\mathbb{P}(x > 2)$ $\qquad 1 - e^{-x^2} = 1 - e^{-4}$

Dobbiamo trovare $\int_2^\infty f_X(x)\, dx$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 1 - e^{-x^2} \frac{d}{dx} = 2xe^{-x^2}$ ATTENZIONE! deve essere non negativa

Possiamo ora calcolare $\int_2^\infty 2xe^{-x^2} = -\int_2^\infty -2xe^{-x^2} = -\left[e^{-x^2}\right]_2^\infty =$

$= -\left[\lim_{t \to \infty} e^{-t^2} - e^{-4}\right] = e^{-4}$

↳ 0 deve convergere

Analogamente vale $\mathbb{P}(x > 2) = 1 - \mathbb{P}(x \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2^2}) = e^{-4}$

b) $\mathbb{P}(1 < x < 3)$

$\mathbb{P}(1 < x < 3) = F_X(3) - F_X(1) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-3}$ oppure

$= \int_1^3 f_X(x)\, dx = \int_1^3 2xe^{-x^2} = -\int_1^3 -2xe^{-x^2} = \left[-e^{-x^2}\right]_1^3 = -e^{-3} + e^{-1}$

c) $E[X]$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \longrightarrow \int_0^\infty x(2xe^{-x^2})\, dx =$ prosegno per parti:

ipotesi

$\int fg' = fg - \int f'g$

$$= -\int_0^\infty x(-2xe^{-x^2})\,dx = -\left(\underbrace{\left[xe^{-x^2}\right]_0^\infty}_{0-0} - \int_0^\infty e^{-x^2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ e' noto (!)

d) $Var(x)$

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)\,dx = \int_0^\infty x^2(2xe^{-x^2}) = -\left\{\left[x^2e^{-x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(e^{-x^2})\,dx\right\} =$$

$$= -\left\{\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^2e^{-x^2}}_{0} - 0\right] + \left[e^{-x^2}\right]_0^\infty\right\} = -\left\{\underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{-x^2}}_{0} - 1\right\} = 1$$

$$E[x]^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$Var(x) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

2 Sia

$$f_x(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0<x<1 \\ 0 \end{cases}$$

a) Sapendo che $E[x] = \frac{3}{5}$ calcolare $P(x < \frac{1}{2})$

Dobbiamo anzitutto trovare "a" e "b" e verificare che $f_x(x)$ è effettivamente una densità. Individuiamo quindi 2 equazioni

(i) Sappiamo che per definizione di densità vale $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 ax+bx^2 = 1 \rightarrow \int_0^1 ax + \int_0^1 bx^2 = 1 \rightarrow a\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$$

(ii) Sfruttiamo il valore atteso per impostare la seconda equazione necessaria

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^1 x(ax+bx^2)\,dx = \int_0^1 ax^2\,dx + \int_0^1 bx^3\,dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5}$$ ipotesi

Possiamo adesso trovare "a" e "b"

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow a = \frac{18}{5} \quad b = -\frac{12}{5}$$

Riscriviamo la funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2 & 0<x<1 \\ 0 \end{cases}$$

È positiva (tra 0 e 1)? Sì (Trust me bro)

Troviamo ora $P(X<\frac{1}{2})$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2\,dx = \left[\frac{18}{10}\frac{x^2}{2} - \frac{12}{15}\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \left[\frac{18}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{12}{15}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1}{8}\right] = \frac{9}{20} - \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{7}{20}$$

b) $Var(X)$?

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\left(\frac{18}{5}x - \frac{12}{5}x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{18}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^4 \, dx = \left[\frac{18}{20}x^4 - \frac{12}{25}x^5\right]_0^1 =$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{12}{25} = \frac{45-24}{50} = \frac{21}{50}$$

$$Var(X) = \frac{21}{50} - \frac{9}{25} = \frac{3}{50}$$

$$y = \begin{cases} \log_2(4) & X = -4,4 \\ \log_2(2) & X = -2,2 \\ 0 & X = -1,1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \begin{cases} \frac{4}{14} + \frac{4}{14} & y = \log_2(4) \\ \frac{2}{14} + \frac{2}{14} & y = \log(2) \\ \frac{1}{14} + \frac{1}{14} & y = 0 \\ 0 & \end{cases}$$

FEBBRAIO 2023

Dato $L \sim U(0,2)$, sia $A = L^2$, si determini

① $F_A(a)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

② $E[A]$ $\quad F_X(x) = F_A(x^2)$

$0 < a < 4 \quad \sqrt{4} = 2$

① $\mathbb{P}(A \leq a) = \mathbb{P}(L^2 \leq a) = \mathbb{P}(L \leq \sqrt{a}) = F_L(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2}$

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{2} & 0 < a < 4 \\ 1 & a \geq 2 \end{cases}$$

② $E[A]$

DENSITÀ DI A $= f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ 1 & \end{cases}$

$$E[A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^4 x \frac{1}{4\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \sqrt{x} = \frac{1}{4} \left[\sqrt[3]{x^2} \right]_0^4 = \frac{4}{3}$$

③ $\mathbb{P}(A \leq 2 \mid L > 1) = \mathbb{P}(L \leq \sqrt{2} \mid L > 1) = \frac{\mathbb{P}(L \leq \sqrt{2} \cap L > 1)}{\mathbb{P}(L > 1)} = \frac{\mathbb{P}(1 < L \leq \sqrt{2})}{1 - \mathbb{P}(L \leq 1)}$

$F_L(1) = \frac{1}{4} \longrightarrow = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 1$

$F_L(\sqrt{2}) = \frac{1}{8}$

Sia $X \sim N(2,4)$

① Calcolare $\mathbb{P}(0<x<5)$

Normalizziamo X ottenendo una nuova V.A. $Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}(0<x<5) = \mathbb{P}\left(\frac{0-2}{2} < Z < \frac{5-2}{2}\right) = \mathbb{P}(-1<Z<1{,}5) = F_Z(1{,}5) - F_Z(-1)$$

Attraverso la tabella sappiamo che

$F_Z(-1) = 1 - 0{,}8413$

$F_Z(1{,}5) = 0{,}9332$

$\longrightarrow \mathbb{P}(0<x<5) = 0{,}9332 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7745$

② $\mathbb{P}(x=2 \mid 0<x\leq 5)$

$A = \{x=2\}$ $B = \{0<x\leq 5\}$ $A \subseteq B$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

$$\mathbb{P}(A) = \int_2^2 f_X(x) = 0$$

Sia X una V.A tale che

$F_X(x) = 1 - \frac{\alpha}{x^\alpha}$ per $x \geq \alpha$ (0 altrimenti)

Per quali k esiste finito $\mu'_k = E[X^k]$?

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$$E[X^k] = \int_1^\infty x^k f_X(x)\, dx = \int_1^\infty x^k \cdot \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha \int_1 \frac{x^k}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha \int_1 x^{k-(\alpha+1)} =$$

$$= \alpha \left[\frac{x^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right]_1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{k-\alpha} x^{k-\alpha} = \frac{\alpha}{k-\alpha} \lim_{x\to\infty} x^{k-\alpha} = 0 \longrightarrow \text{deve convergere} \Longrightarrow k < \alpha$$

GENNAIO 2023 ALDO

$X \sim Esp\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y = (X+2)^2$

① $E[Y]$

Sia $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$

$E[Y] = E[(X+2)^2] = E[X^2 + 4X + 4] = 4 + E[X^2] + 4E[X]$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \left(-\cancel{2} x^2 e^{-\frac{x}{2}} + \cancel{2} \int 2x\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx \right) =$$

$$= -x^2 e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\right) = -x^2 e^{-\frac{x}{2}} - 4xe^{-\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8)$$

Calcolo nel dominio $[0, +\infty]$

$$\Big|_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}(-x^2-4x-8) - \frac{(-8)}{e^0} = 8$$

Ricordando che $E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$E[Y] = 4 + 8 + 4\cdot(2) = 20$

GENNAIO 2023 MIGLIORISI

$X \sim U(0,1)$, $Y = X + 2X^2$

$E[Y] = E[X] + 2E[X^2]$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = 1$

$E[X^2] = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$

$E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$

$E[Y] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

GENNAIO 2023 MANNO

Sia x una VA discreta con spettro $S = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ e sia $f_X(x) = e|x|$. Si individui

① Il valore di e costante di normalizzazione

Sappiamo che $\sum_{i=1}^{|S|} f_X(x_i) = 1 = F_X(x)$

Per come è definita f_X $f_X(-1) = f_X(1)$, analogamente per -4 e -2.

Possiamo ridefinire $F_X(x)$ come $2 \cdot f_X(4) + 2 \cdot f_X(2) + 2 \cdot f_X(1) \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot e \cdot 4 + 2 \cdot e \cdot 2 + 2 \cdot e \cdot 1 = 1 \rightarrow 8e + 4e + 2e = 1 \rightarrow 14e = 1 \rightarrow e = \frac{1}{14}$

② Sia $Y = \log_2 |X|$, scrivere la F_Y

$S_Y = \{0, 1, 2\}$ $\qquad 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 1$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = 2 \cdot \frac{1}{14} = \frac{2}{14}$

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=-2) = 2 \cdot \frac{2}{14} = \frac{4}{14}$

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=-4) = 2 \cdot \frac{4}{14} = \frac{8}{14}$

$\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) = \frac{2+4+8}{14} = 1$ ✓

$$F_Y = \begin{cases} \frac{2}{14} & 0 \leq y < 1 \\ \frac{6}{14} & 1 \leq y < 4 \\ \frac{14}{14} & 4 \leq y \end{cases}$$

NOVEMBRE 2022 OR

Sia $X \sim N(1,4)$

① Si determini $\mathbb{P}(0 \leq x \leq 3)$

Normalizziamo $\mathbb{P}(0 \leq x \leq 3) = \mathbb{P}\left(0 \leq z \leq \frac{3-1}{2}\right) = F_z(1) - F_z(0)$

Usiamo la tabella gaussiana per trovare le distribuzioni

$\mathbb{P}(0 \leq z \leq 1) = 0{,}3413 - 0 = 0{,}3413$

② $\mathbb{P}(x=1 \mid 0 \leq x \leq 3)$

Sia $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(0 \leq x \leq 3) = \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ $\mathbb{P}(A) = 0$ quindi $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ e di conseguenza

$\mathbb{P}(A|B) = 0$

SETTEMBRE

Sia $f_x(x) = Kx + q$ per $1 \leq x \leq 2$ funzione di densità

① Sapendo che $E[x] = \frac{14}{9}$ determinare K e q

$$E[x] = \int_1^2 x f(x)\, dx = \int_1^2 Kx^2 + qx\, dx = K\int_1^2 x^2 dx + q\int_1^2 x\, dx = K\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + q\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{14}{9}$$

$$1 = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 Kx + q\, dx = K\int_1^2 x\, dx + q\int_1^2 dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + q$$

Ci siamo ricavati due equazioni, impostiamo il sistema e risolviamo

$$\begin{cases} k\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + q\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{14}{9} \\ k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + q = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) + q\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{9} \\ k\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + q = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2}q = \frac{14}{9} \\ \frac{3}{2}k + q = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2}k\right) = \frac{14}{9} \\ q = 1 - \frac{3}{2}k \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{7}{3}k + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}k = \frac{14}{9} \\ / \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{28-27}{12}k = \frac{28-27}{18} \\ / \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{\cancel{12}_{2}}k = \frac{1}{\cancel{18}_{3}} \\ / \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ q = 1 - \frac{6}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ q = -2 \end{cases}$$

② $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_1^2 \frac{2}{3}x - 2\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 x\,dx - 2\int_1^2 dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 2 =$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} - 2 = -1$

GIUGNO 2023 KB

① Data $X \sim \Pi(4)$ e $Y = (X-1)^2$, calcolare $E[Y]$

$Y = X^2 - 2X + 1 \rightarrow E[Y] = E[X^2 - 2X + 1] = E[X^2] - 2E[X] + 1$

Per $X \sim \Pi(4)$ $E[X] = \lambda$ e $VAR(X) = \lambda = E[X^2] - E[X]^2$

Ricaviamoci $E[X^2]$:

$\lambda = E[X^2] - \lambda^2 \longrightarrow E[X^2] = \lambda(1+\lambda)$

Sostituiamo tutto e calcoliamo $E[Y]$

$E[Y] = \lambda(1+\lambda) - 2\lambda + 1 = \lambda(\lambda-1)+1 \xrightarrow{\lambda=4} 4(4-1)+1 = 13$

② Dato $f_X(x) = e^{x-2}$ per $x \geq 2$, calcolare $\mathbb{P}(T \geq 10 \mid T \leq 12)$

Sia $\mathbb{P}(T \geq 10) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(T \leq 12) = \mathbb{P}(B)$ allora

$\mathbb{P}(T \geq 10 \mid T \leq 12) = \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Troviamo $F_X(x) \longrightarrow \int_2^x e^{x-2}\,dx = \int_2^x \dfrac{e^x}{e^2}\,dx = \dfrac{1}{e^2}\int_2^x e^x\,dx = e^{x-2} - 1$

$\mathbb{P}(B) = F_X(12) = e^{10} - 1$

$\mathbb{P}(A \cap B) = e^{10} - e^8 \qquad (\mathbb{P}(10 \leq X \leq 12))$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{e^{10} - e^8}{e^{10} - 1}$