Dimensione di uno sp. vettoriale

$\dim \mathbb{R}^n = n$ — è uno spazio senza restrizioni in cui sono contenuti tutti i vettori che hanno n componenti reali

es. $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ — è uno spazio senza restrizioni in cui sono contenuti tutti i vettori che hanno 5 componenti reali

Base canonica di uno sp. vettoriale

In $\mathbb{R}^n$ la base ha n vettori

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ dove $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

es. una base di $\mathbb{R}^3$ è $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ con $e_1 = (1, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$

Base (non canonica) di uno sp. vettoriale

In $\mathbb{R}^n$ dovrò trovare n vettori a n componenti che siano linearmente indipendenti

Dimensione di un sottospazio vettoriale e base

Nel caso in cui i vincoli siano eq. lineari omogenee sulle variabili dei vettori

e SOLO in questo caso

ad es. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\}$

notiamo che nello spazio V non ci sono tutti i vettori a 3 componenti appartenenti ad $\mathbb{R}^3$, ma solo quelli che verificano una particolare condizione, in questo caso

$x-y-2z=0$

Proprio perché il sottospazio ha dei vincoli la sua dimensione non può essere 3! Più vincoli ci sono più la dimensione è ridotta e quindi la base ha meno vettori:

$$\dim V = n^\circ \text{ di componenti} - n^\circ \text{ di eq. indipendenti}$$
$$= 3 - 1$$
$$= 2$$

Una base di V sarà quindi costituita da 2 vettori a 3 componenti.

Trucchetto per trovare una base:

poiché $\dim V = 2$ devo scegliere 2 inc. libere ad es. y e z

$$\begin{cases} x = 1y + 2z \\ y = 1y \quad 0 \\ z = 0 \quad 1z \end{cases} \Rightarrow \quad v_1 = (1,1,0) \text{ e } v_2 = (2,0,1)$$

Trucchetti per determinare se dei vettori sono lin. dip.

1. se un vettore è multiplo di un altro ($(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 6)$), allora i due vettori sono dipendenti
2. se un vettore è la somma di altri due ($(1, 2, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 3)$) allora i tre vettori sono dipendenti.
3. se n vettori sono tutti contenuti in un sottospazio di dimensione minore di n, allora sono dipendenti ($(1, 2, 0), (4, 2, 0), (5, 2, 0)$ sono contenuti in uno spazio di dimensione 2, dato che la terza coordinata è 0 per tutti e tre, quindi sono contenuti in $z = 0$, che ha dimensione 3–1 = 2.

Se vedi al volo uno di questi tre casi, allora puoi concludere che i vettori sono dipendenti.

Rango

Sia $A_{m \times n}$ una matrice, a valori in un campo K. Le seguenti definizioni di rango di A sono tutte equivalenti:

- Il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.
- Il massimo numero di righe linearmente indipendenti.
- La dimensione del sottospazio di K^m generato dalle colonne di A.
- La dimensione del sottospazio di K^n generato dalle righe di A.
- La dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare L_A da K^n in K^m seguente:
  $L_A : x \mapsto Ax$
- Il massimo ordine di un minore invertibile di A.

Trucchetti per determinare il rango di una matrice

- Il rango di una matrice $m \times n$ è al più $\min(m, n)$
  es. $A_{3 \times 4} \rightarrow \rho(A) \leq 3$
- Si possono togliere le righe che sono dipendenti dalle altre
- Spesso il minore fondamentale ci consente di calcolarlo più rapidamente

8. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ e un insieme $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di vettori di V, cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che S è linearmente dipendente?

Un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V è detto linearmente indipendente se i vettori $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_t \in S$ sono linearmente indipendenti, cioè se $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_t \bar{v}_t = \bar{0}$ se e soltanto se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_t = 0$

Altrimenti sarà detto linearmente dipendente.

11. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.

(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.

(iii) I vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli?

- Dire se il sistema $\{u_1, u_2, u_1 - 2u_2\}$ é lin. indipendente

Posso subito dire che essendo w combinazione lineare di u_1 e u_2 il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ é lin. DIPENDENTE

Altrimenti applicate la definizione:

Se si verifica che $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w = 0 \iff \alpha, \beta, \gamma = 0$ allora i 3 vettori sono lin. INDIP. e $\{u_1, u_2, w\}$ é lin. INDIP.

$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma (u_1 - 2u_2) = 0 \Rightarrow (\alpha + \gamma) u_1 + (\beta - 2\gamma) u_2 = 0$

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow$ i vettori sono lin. DIP. e quindi lo é anche il sistema

- Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3

RICORDA La lunghezza di un vettore altro non é che il suo modulo

$|\bar{v}| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \longrightarrow$ In questo caso es. $v = (3, 0, 0) = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

- Dire se i vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli

RICORDA Due vettori sono paralleli se sono linearm. dipendenti (cioè se sono proporzionali fra loro)

Poichè il testo ci dice che u_1 e u_2 sono lin. INDIP. sicuramente non sono paralleli

Esercizio 2

Per quali valori di h il vettore $(1, 0, -1)$ è combinazione lineare dei vettori $(1, 1+h, -h)$, $(h, 0, 0)$, $(0, -1, h)$, $(0, h, -h)$?

Consideriamo l'eq. vettoriale

$$\alpha(1,1+h,-h)+\beta(h,0,0)+\gamma(0,-1,h)+\delta(0,h,-h)=(1,0,-1)$$

Sfruttiamo il th. Rouchè-Capelli:

verifichiamo per quali valori di h il sistema associato all'eq. vettoriale ammette soluzione (ciò avviene quando $\rho(A)=\rho(A|b)$)

Per il calcolo del rango poichè c'è un parametro è preferibile non usare la riduzione a gradini ma usare il procedimento del minore fondamentale.

Matrice incompleta

$$A=\begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 1+h & 0 & -1 & h \\ -h & 0 & h & -h \end{pmatrix}$$

Matrice completa

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 0 & 0 & 1 \\ 1+h & 0 & -1 & h & 0 \\ -h & 0 & h & -h & -1 \end{array}\right)$$

$$\det\begin{vmatrix} -1 & h \\ h & -h \end{vmatrix} = [(-1)(-h)]-[h\cdot h] = h-h^2 = h(1-h)\neq 0 \iff h\neq 0,1$$

[Se det $\neq 0$ allora il rango è massimo
se la sottomatrice è ad es. 2×2 $\Rightarrow$ il rango sarà 2]

$$\det\begin{vmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h \\ 0 & h & -h \end{vmatrix} = h\cdot\det\begin{vmatrix} -1 & h \\ h & -h \end{vmatrix} = h\{[(-1)(-h)]-[h\cdot h]\}$$

$$= h(h-h^2) = h^2(1-h)$$

$$= h^2(1-h)\neq 0 \iff h\neq 0,1$$

Quindi per $h \neq 0, 1$

- la matrice A ha rango massimo pari a $\rho(A) = 3$
- poiché A è una sottomatrice di A|b allora anche $\rho(A|b)$ deve essere necessariamente pari a 3

NOTA Poiché il rango (3) è inferiore al n° di incognite (4 incognite) il sistema ammette infinite soluzioni

$\Rightarrow$ se $h \neq 0, 1$ il vettore $(1, 0, -1)$ sarà comb. lineare dei vettori dati

A questo punto si deve analizzare anche ciò che succede per $h = 0$ e $h = 1$

- Per $h = 0$ la matrice associata al sistema diventa

$$
(A|b) = \begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & = \\ \end{array}
$$

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1\alpha = 1 \\ 1\alpha - 1\gamma = 0 \\ \boxed{0 = -1} \longrightarrow \text{Imp.} \end{cases}
$$

Poiché l'ultima eq. è impossibile, per $h = 0$ il sistema NON ammette soluzioni e quindi il vettore $(1, 0, -1)$ NON è comb. lineare dei vettori dati

In alternativa applico Rouché-Capelli (riducendo la matrice a gradini)

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow
$$

$$
\begin{array}{c} \\ -R_1+R_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right) \Rightarrow
$$

$\rho(A) = 2 \qquad \rho(A|b) = 3$

essendo $\rho(A) < \rho(A|b)$ il sistema non ammette soluzione

Per $h = 1$ la matrice associata al sistema diventa

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

per il calcolo del rango sfrutto il minore fondamentale

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 1\left[2 \cdot 1 - (-1)(-1)\right] + 0 \cdot 0$$

$$= -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow \rho = 3$$

in questo caso è proprio il rango max

pertanto $\rho(A) = \rho(A|b) = 3$ e il sistema ammette infinite soluzi

perciò il vettore $(1, 0, -1)$ È comb. lineare dei vettori dati

2. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

2.1 $L((7,-5,1,2,5),(4,-3,5,25,3),(4,-7,-3,-21,7),(-3,2,-4,-1,-2))$;

2.2 $L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1))$;

2.3 $L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0))$.

2.1) Calcoliamo il rango della matrice associata ai vettori del sottospazio, in quanto la dim del sottospazio è pari al rango

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 25 & 3 \\ 4 & -7 & -3 & -21 & 7 \\ -3 & 2 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\frac{4}{7}R_1+R_2 \\ -\frac{4}{7}R_1+R_3 \\ +\frac{3}{7}R_1+R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{31}{7} & \frac{167}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{29}{7} & -\frac{25}{7} & -\frac{155}{7} & \frac{29}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{25}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -\frac{29}{7} & -\frac{25}{7} & -\frac{155}{7} & \frac{29}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{31}{7} & \frac{167}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{25}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

alla fine trovate 4 pivot
il rango della matrice è 4
la dimensione del sottosp. è 4

Una base sarà determinata da 4 vettori a 5 comp. lin. indip.

$B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}$

(vanno bene i vettori non nulli che si ottengono dalla riduzione a gradini → basta prendere le righe non nulle)

2.2

$$L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1));$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ -2R_2+R_3 \\ -R_2+R_4 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

I pivot sono 3 perciò il rango della matrice è 3
di conseguenza la dimensione del sottospazio è 3
Una base sarà costituita da 3 vettori (a 5 componenti)
lin indipendenti: $B=\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$
[per la base vanno bene i vettori NON NULLI che si ottengono andando a portare a gradini]

2.3

$$L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0)).$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ -R_2+R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ -R_1+R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 2
$\Rightarrow$ la dim del sottospazio è 2

Una base sarà costituita da 2 vettori a 5 componenti lin indip. fra loro

$B=\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ es. $B=\{(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,0)\}$

3. Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

3.1 $T = \{(1,1,1), (0,0,0), (2,2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

3.2 $U = L(\{(1,1,0,-1), (0,2,-3,1), (-2,0,-3,3), (0,0,0,0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

3.3 $Z = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

3.1 T è un sottospazio? NO

Poichè ci sono vettori non nulli [(1,1,1), (2,2,2)] dovrebbero anche esserci tutti i vettori a loro proporzionali affinchè ci sia la chiusura delle op. di somma e prodotto per uno scalare => e quindi dovrebbero esserci infiniti vettori, cosa che non accade

3.2

$U = L(\{(1,1,0,-1), (0,2,-3,1), (-2,0,-3,3), (0,0,0,0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow_{2R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \to DIP \\ \to DIP \end{matrix}$$

Poichè il n° di righe lin. INDIP è 2

il rango della matrice è 2, così come la dimensione del sottospazio

Una base sarà costituita da 2 vettori a 4 componenti $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}\}$

es. $B = \{(1,1,0,-1), (0,2,-3,1)\}$ es. $B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0\}$

3.3 $Z = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Anche se c'è il quadrato Z è un sottosp. vettoriale perchè gli unici valori soluzione dell'equazione $x_1^2 + x_2^2 = 0$ sono $x_1 = x_2 = 0$

=> Z coincide col sottospazio banale $Z = \{(0,0)\}$

la dimensione è chiaramente 0 e una base coincide proprio con l'insieme vuoto

Risoluzione di sistemi di eq. lineari (mediante riduzione a gradini)

1) $\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = -2 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases}$ esercitaz. precedente

Mi accorgo subito che $\mathrm{II} = 2\mathrm{I}$ perciò posso toglierla dal sistema

Mi accorgo che il sistema è impossibile

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow 3\cdot \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = \boxed{-3} \\ 6x - 3y = \boxed{-5} \end{cases} \Rightarrow \text{imp.}$$

3) $\begin{cases} 3x+2y+5z=-1 \\ x+y+z=-4 \\ 5x+4y+7z=-9 \end{cases}$ esercitaz. precedente

Scriviamo la matrice completa associata al sistema e la riduciamo a scala

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 7 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ -3R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -R_2+R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matrice completa ha 2 pivot, perciò il rango è 2 (inferiore al n° incogn) e il sistema lineare diventa

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ -y+2z=11 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15-3z \\ y=2z-11 \\ z=z \end{cases}$$

il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da z, il che non ci sorprende dato che il rango della matrice è inferiore al n° di incognite

Ancora sui sistemi di eq. lineari

1) $$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa associata al sistema e la riduciamo a scala

2) $$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x+y+z+t-\omega=-1 \\ 2x+y-2t=0 \\ x+2z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=\omega-t-1 \\ 2x+y=2t \\ x+2z=t \end{cases}$