GEOMETRIA Napoli, 8 novembre 2008

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-De) ◯ Gr. 2 Cioffi (Df-Mk) ◯ Gr. 3 Biondi (Ml-Z) ◯ Recupero Durante

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $V$ e dire se il sottoinsieme $\{(0, h) \in \mathbb{R}^2 \mid h \geq 0\}$ di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

**2.** $((1, -2), (-2, 4))$ è un riferimento di $\mathbb{R}^2$? ◯ Si ◯ No Perché?

**3.** Cosa vuole dire che $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale $V$?

**4.** Dire se il vettore $(0, 0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $L((1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$. ◯ Si ◯ No Perché?

**5.** Determinare la dimensione e una base del sottospazio

$$\{a(0,1,1) + b(2,0,1) + c(2,-1,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

**6.** L'applicazione $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x,x,y,0) \in \mathbb{R}^4$ è lineare? ◯ Si ◯ No Perché?

**7.** Si consideri l'endomorfismo $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, y-z, y+z) \in \mathbb{R}^3$.
È un automorfismo? ◯ Si ◯ No Perché?

È diagonalizzabile? ◯ Si ◯ No Perché?

**8.** Scrivere una matrice $3 \times 3$ invertibile e spiegare perché è invertibile.

**9.** Dato un endomorfismo $f : V \to V$ e un suo autovalore $\lambda$, dimostrare che $\{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ è un sottospazio di $V$.

**10.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare.

(i) Dire se il triangolo di vertici $A(2, -3)$, $B(0, 1)$, $C(2, 2)$ è rettangolo in $B$.
◯ Si ◯ No Perché?

(ii) Verificare che le rette $r : (x, y) = t(1, -1) + (2, -1)$ ed $s : x + y - 1 = 0$ sono impropriamente parallele.

**11.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare,

(i) scrivere un'equazione del piano per l'origine parallelo alla retta $r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, 2)$ e ortogonale al piano $\alpha$ di equazione $x - y + 3z = 0$;

(ii) dimostrare che il piano di equazione $x - y = 0$ è tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-De) ◯ Gr. 2 Cioffi (Df-Mk) ◯ Gr. 3 Biondi (Ml-Z) ◯ Recupero Durante

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dare la definizione di sistema di vettori linearmente indipendente di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$.

**2.** L'insieme $\{\ (1,1,1)\ ,\ (1,9,0)\ ,\ (-1,0,2)\ , (1,1,3)\ \}$ è un sistema di vettori linearmente indipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$?

◯ Si ◯ No    Perché?

**3.** Il vettore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $L(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\})$ dello spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 su $\mathbb{R}$?

◯ Si ◯ No    Perché?

**4.** Siano $W$ e $U$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ tali che $dim\ W = 3$ e $dim\ U = 2$. E' possibile che il sottospazio $U \cap W$ sia costituito dal solo vettore nullo?

◯ Si ◯ No   Perché?

**5.** Dire perché la seguente matrice è invertibile e calcolarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**6.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e sia $f : V \mapsto V$ un suo endomorfismo. Cosa vuol dire che 0 è autovalore di $f$ ?

**7.** L'endomorfismo $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + 2z, -z, 3z) \in \mathbb{R}^3$ è iniettivo, suriettivo, diagonalizzabile? Perché?

**8.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Si considerino il punto $A(0, 2)$ e la retta $r : x - 3y = 0$. Rappresentare la retta $s$ passante per $A$ e ortogonale a $r$ e calcolare le coordinate del punto $B$ di intersezione delle rette $r$ e $s$.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare,

(i) rappresentare la retta $s$ passante per $P(0, 1, 2)$ perpendicolare e incidente $r : x + y - 2z + 1 = 2x - y - z = 0$;

(ii) rappresentare due piani distinti passanti per l'origine e ortogonali al piano $\alpha : x - 2y + z = 0$.

(iii) rappresentare la sfera di centro $P$ passante per l'origine.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un sistema di $t$ vettori di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$.
(i) Cosa vuol dire che $S$ è un sistema di generatori di $V$?

(ii) Se $S$ è un sistema di generatori di $V$, l'affermazione "la dimensione di $V$ è $t + 1$" è corretta? ◯ Sì ◯ No Perché?

**2.** Si consideri il sottospazio $H = L((1, -1, 2, 1), (0, 2, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (2, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.
(i) Determinare la dimensione e una base di $H$.

(ii) Il vettore $(1, 0, 0, 0)$ appartiene ad $H$? ◯ Sì ◯ No Perché?

**3.** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3)$.

(a) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di $f$.

(b) Scrivere la matrice associata a $f$ nei riferimenti:

$\mathcal{R} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ *e* $\mathcal{R}' = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$.

**4.** Un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ può essere iniettiva?

◯ Sì ◯ No Perché? (Suggerimento: ricordare il teorema della dimensione)

**5.** Data una matrice quadrata $A$ di ordine $n$ su $\mathbb{R}$, cosa è un autovettore di $A$?

**6.** Si consideri la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

È diagonalizzabile? ◯ Sì ◯ No Perché?

È invertibile? ◯ Sì ◯ No Perché?

**7.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Determinare:

(i) un vettore parallelo e uno ortogonale a $v(2, -5)$;

(ii) la retta per i punti $A(1, -1)$ e $B(2, -1)$;

(iii) la circonferenza di centro l'origine e tangente alla retta $s : x + y = 2$.

**8.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare.

(i) Le rette $r : (x, y, z) = (1, -2, 1) + t(1, 0, -1)$ e $r' : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ sono parallele, incidenti o sghembe?

(ii) Determinare il piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per $A(1, -2, 1)$ e la distanza di $\pi$ dal punto $P(1, -5, 3)$.

GEOMETRIA Napoli, 15 luglio 2009

COGNOME...................... NOME.................. MATRICOLA.........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (F-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Utilizzando il metodo di Gauss, dire se il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

**2.** Nello spazio vettoriale $V$, cosa vuol dire che il sistema di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ è linearmente indipendente?

**3.** Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono sottospazi, calcolare la dimensione e scrivere una base per quelli che lo sono:

$S_1 = \{ \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b = c - d \ \}$ , $S_2 = \{ \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = -1 \ \}$ , $S_3 = L( \ (0, 0, 0, 0), (1, 1, -1, 1) \ )$.

**4.** È vero che il vettore (2,4,6) è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, relativo all'autovalore -2? ◯ Si ◯ No  Perché?

**5.** È vero che un automorfismo (cioè, un endomorfismo biettivo) non può avere 0 come autovalore? ◯ Si ◯ No  Perché?

**6.** Per ciascuna delle seguenti matrici calcolare autovalori e autospazi, dire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scriverne una base di autovettori: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**7.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Si considerino i punti $A(-1, 2)$ , $B(2, -1)$ e $C(-2, -1)$.

(i) Rappresentare in forma parametrica e cartesiana la retta passante per $A$ e $B$;
(ii) dimostrare che i punti $A, B, C$ non sono allineati;
(iii) rappresentare la circonferenza passante per $A, B$ e $C$.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare:

(i) rappresentare in forma parametrica e cartesiana il piano passante per i punti $P(1,-1,0)$, $Q(-1,-1,2)$, $R(2,0,-2)$;

(ii) rappresentare la retta per $(1,1,2)$ incidente e ortogonale alla retta $(x,y,z) = t(1,2,-1)$;

(iii) dimostrare che l'equazione $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ rappresenta una sfera e calcolarne centro e raggio.

GEOMETRIA Napoli, 16 settembre 2009

COGNOME...................... NOME.................. MATRICOLA.........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Utilizzando il metodo di Gauss, dire se il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

**2.** Nello spazio vettoriale $V$, cosa vuol dire che il sistema di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ è linearmente indipendente?

**3.** Cosa vuol dire che lo spazio vettoriale $V$ ha dimensione 5?

**4.** Se $V$ e $W$ sono spazi vettoriali sul campo reale, cosa vuol dire che l'applicazione $f : V \mapsto W$ è lineare? Scrivere un esempio di applicazione lineare $g : R^3 \mapsto R^2$ ed un esempio di applicazione non lineare $h : R^3 \mapsto R^4$ (Nota: non è necessario giustificare la linearità di g e la non linearità di $h$, si chiede solo di esibire l'esempio).

**5.** È vero che il nucleo $ker f$ di un'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ è un sottospazio di $V$? (Se si dimostrarlo, se no fornire un esempio)

**6.** Cosa vuol dire che $v$ è autovettore dell'endomorfismo $f : V \mapsto V$ relativo all'autovalore $\lambda$?

**7.** Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scriverne una base di autovettori.

**8.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Rappresentare in forma parametrica e cartesiana la retta passante per $A(1,-2)$ ortogonale a $x-2y+3=0$.

**9.** Cosa vuol dire che le rette $r$ ed $s$ sono sghembe?

**10.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, rappresentare la retta parallela al piano x+y-1=0 per $(-1,2,0)$ e ortogonale alla retta $r' : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z+2 & = & 0 \\ x-2z-1 & = & 0 \end{array} \right.$.

GEOMETRIA Napoli, 10 novembre 2009

COGNOME...................... NOME.................. MATRICOLA.........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Utilizzando il metodo di Gauss, dire se il seguente sistema lineare è compatibile e, in caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**2.** Nello spazio vettoriale $V$, cosa vuol dire che il sistema di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ è linearmente dipendente?

**3.** Data una matrice $A$ di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$, che cosa è il rango di $A$? Calcolare il rango della seguente matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.** Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che sia iniettiva? ◯ Si ◯ No (Se si darne un esempio, se no dire perché)

**5.** Cosa vuol dire che $v$ è autovettore dell'endomorfismo $f : V \mapsto V$ relativo all'autovalore $\lambda$?

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(x, y, z) = (2x, x - y, y - z)$.

(i) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di $f$.

(iii) Dire se $f$ è diagonalizzabile e perché.

**7.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Rappresentare in forma parametrica e cartesiana la retta passante per $A(3,1)$ ortogonale a $x-2y-1=0$.

**8.** Cosa vuol dire che le rette $r$ ed $s$ sono sghembe?

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, rappresentare la retta passante per $(-1,2,0)$, parallela al piano $x+y-1=0$ e ortogonale alla retta $r' : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z+2 & = & 0 \\ x-2z-1 & = & 0 \end{array} \right.$.

COGNOME. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . NOME. . . . . . . . . . . . . . . . . . MATRICOLA. . . . . . . . .

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Cosa vuol dire che il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ è un sistema di generatori dello spazio vettoriale $V$?

Sapendo che $S$ genera $V$, possiamo dire che allora $dimV{=}t$? ◯ Si ◯ No Perché?

**2.** Dimostrare che $\mathcal{R} = \ ( \ (1, 2) \ , \ (1, -2) \ )$ è un riferimento dello spazio vettoriale $R^2$, calcolare le coordinate del vettore $v = (1, 0)$ in tale riferimento e scrivere la matrice di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ al riferimento canonico.

**3.** Data l'applicazione lineare $f : R^4 \mapsto R^3, (x, y, z, t) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$, scrivere una base di $kerf$ (nucleo di $f$) e una base di $Imf$ (immagine di $f$).

**4.** Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori e autospazi (se esistono), dire se $A$ è diagonalizzabile (giustificando la risposta) e, in caso affermativo, scriverne una base di autovettori.

**5.** Esistono matrici reali di ordine 4 che hanno un autovalore uguale a zero? ◯ Si ◯ No
(Se si scrivere un esempio, se no dire perché)

**6.** Calcolare, scrivendo i passaggi relativi al metodo utilizzato, l'inversa $A^{-1}$ della matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ e verificare che $AA^{-1} = I$=matrice identica.

**7.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Si considerino i punti $A(-1, 2)$ e $B(1, 2)$.

(i) Rappresentare in forma parametrica e cartesiana la retta passante per $A$ e $B$;
(ii) rappresentare la circonferenza passante per $A, B$ e l'origine.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare:

(i) rappresentare la retta $r$ per i punti $P(1, 0, 1)$ e $Q(1, 2, -1)$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se la retta $r$ è parallela al piano $\pi\ :\ x+y+z-2 = 0$;

(iii) rappresentare la sfera tangente a $\pi$ in $P$ avente centro sul piano $x + y = 0$ e calcolarne centro e raggio.

COGNOME. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . NOME. . . . . . . . . . . . . . . . . . MATRICOLA. . . . . . . . .

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Nello spazio vettoriale $V$, cosa vuol dire che il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ è linearmente indipendente?

Sapendo che $S$ è linearmente indipendente e che $dimV = t$, possiamo dire che allora $S$ è base di $V$? ◯ Si ◯ No Perché?

**2.** Dimostrare che $\mathcal{R} = \ (\ (-1, 2)\ ,\ (1, 2)\ )$ è un riferimento dello spazio vettoriale $R^2$, calcolare le coordinate del vettore $v = (1, 0)$ in tale riferimento e scrivere la matrice di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ al riferimento canonico.

**3.** Data l'applicazione lineare $f : R^4 \mapsto R^3, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, y + z, z - x)$, scrivere una base di $ker f$ (nucleo di $f$) e una base di $Im f$ (immagine di $f$).

**4.** Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori e autospazi (se esistono), dire se $A$ è diagonalizzabile (giustificando la risposta) e, in caso affermativo, scriverne una base di autovettori.

**5.** Esistono matrici reali di ordine 3 che hanno un autovalore uguale a zero? ◯ Si ◯ No
(Se si scrivere un esempio, se no dire perché)

**6.** Calcolare, scrivendo i passaggi relativi al metodo utilizzato, l'inversa $A^{-1}$ della matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e verificare che $AA^{-1} = I$=matrice identica.

**7.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Si considerino i punti $A(1, -2)$ e $B(1, 2)$.

(i) Rappresentare in forma parametrica e cartesiana la retta passante per $A$ e $B$;
(ii) rappresentare la circonferenza passante per $A, B$ e l'origine.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare:

(i) rappresentare la retta $r$ per i punti $P(1, 1, 0)$ e $Q(1, -1, 2)$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se la retta $r$ è parallela al piano $\pi : x+y+z-1 = 0$;

(iii) rappresentare la sfera tangente a $\pi$ in $P$ avente centro sul piano $x + z = 0$ e calcolarne centro e raggio.

GEOMETRIA Napoli, 21 giugno 2010

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dire, giustificando la risposta, se il seguente sistema lineare è compatibile o incompatibile, e calcolarne le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?

**3.** Scrivere, spiegando il metodo utilizzato, un vettore $v$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\{\ (1,-1,0)\ ,\ (2,1,-2)\ ,\ v\ \}$ sia base di $\mathbb{R}^3$.

**4.** Dato il sottospazio $W = L((1,1,1,1),(2,2,2,2),(2,1,1,0))$ di $\mathbb{R}^4$,
(i) calcolare una base di $W$;
(ii) dire se $(0,1,1,0) \in W$;
(iii) dire se $(0,1,1,2) \in W$.

**5.** Calcolare il determinante della seguente matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

**6.** Data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori ed autospazi e dire, giustificando la risposta, se è diagonalizzabile.

**7.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Verificare, utilizzando la definizione di autovettore, che $(1, 2, -1)$ è autovettore di $A$ e dire a quale autovalore è associato tale vettore.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, dimostrare che il triangolo di vertici $A(1, 3), B(2, -1), C(5, 4)$ è rettangolo in $A$.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, determinare la circonferenza di centro l'origine e tangente alla retta $x - y = 3$.

**10.** Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare.

(i) Le rette $r : (x, y, z) = t(1, 0, -1)$ e $r' : \begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{cases}$ sono parallele, incidenti o sghembe?

(ii) Determinare il piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per $A(1, 0, 1)$ e la distanza di $\pi$ dall'origine.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dire, giustificando la risposta, se il seguente sistema lineare è compatibile o incompatibile, e calcolarne le soluzioni utilizzando il metodo di riduzione di Gauss della matrice associata: $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

**2.** Dare la definizione di *base* di uno spazio vettoriale.

**3.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $W = \{(x, y, z, t) \mid x + y + t = 0\}$ e $U = L(\ (1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, -2)\ )$.

(i) Scrivere una base di $W$ ed una base di $U$;

(ii) dimostrare che $U \subseteq W$;

(iii) dire se $U = W$ e perché.

**4.** Enunciare il teorema della dimensione per una generica applicazione lineare $f : V \mapsto W$ ed applicarlo per dimostrare la seguente affermazione: *Sia data l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$*; sapendo che dim(ker*$f$*)=1, provare che* $f$ *è suriettiva.*

**5.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare associata, nelle basi canoniche, alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

**6.** Dire perché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per ogni valore di $a, b, c \in \mathbb{R}$

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, siano dati i punti $A(1, 0)$ e $B(1, 2)$ e la retta $r\ :\ x + y - 1 = 0$.

(i) Scrivere un'equazione della retta per $A$ ortogonale a $r$;

(ii) scrivere un'equazione della circonferenza passante per $B$ e tangente a $r$ in $A$.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, siano $P(1, 2, 1)$, $\pi :\ x - y + 2z - 1 = 0$, $r :\ (x, y, z) = (2, 3, 4) + t(1, 1, -1)$.

(i) Rappresentare il piano per $P$ parallelo a $r$ ed ortogonale a $\pi$.

(ii) Rappresentare la retta per $P$ ortogonale ed incidente $r$

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dire, giustificando la risposta utilizzando il metodo di riduzione di Gauss della matrice associata, se il seguente sistema lineare è compatibile o incompatibile : $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

**2.** Dare la definizione di *rango* di una matrice reale. Qual è il rango di una matrice nulla?

**3.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi $S = \{(1,0,1,1),(0,1,1,1),(2,-1,1,1)\}$ e $T = \{(2,3,1,0),(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$.

(i) Dire se $S$ si può completare in una base di $\mathbb{R}^4$ e perché.

(ii) Calcolare la dimensione e scrivere una base del sottospazio $W = L(S)$ generato da $S$.

(iii) Calcolare la dimensione e scrivere una base del sottospazio $H = L(T)$ generato da $T$.

**4.** Dare la definizione di applicazione lineare. Esiste un'applicazione lineare $f$ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1,0) = (0,0,0)$, $f(0,1,2) = (1,0,1)$ e $f(1,2,2) = (-1,0,0)$? ◯ Si ◯ No Perché? (Suggerimento : si osservi che i vettori $(1,1,0),(0,1,2),(1,2,2)$ sono linearmente dipendenti .... )

**5.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z, t)) = (x + y + t, z - t, x + y + z)$.

**6.** Dopo aver spiegato perché la seguente matrice è diagonalizzabile, trovarne una base di autovettori: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, siano dati i punti $A(1,-1)$ e $B(2,0)$.

(i) Determinare un punto $C$ tale che il segmento $AB$ sia ortogonale al segmento $BC$;

(ii) scrivere una rappresentazione della retta per $A$ e $B$;

(iii) scrivere un'equazione della circonferenza per $A$ e $B$, con centro sulla retta $x = 0$.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino $P(1,1,0)$ e $\pi: \ x + 2y - z + 2 = 0$.

(i) Rappresentare il piano per $P$ parallelo a $\pi$;

(ii) rappresentare due (diversi) piani per $P$ ortogonali a $\pi$.

## ESERCIZI 1

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} & y & +2z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 1 \\ & y+ & 3z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \end{cases}$$

Ridurre a scalini le seguenti matrici

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

## ESERCIZI 2

**1.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, dire cosa è un suo sottospazio vettoriale.

**2.** Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, fornendo spiegazioni esaurienti:

- $X_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a - 3b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $X_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $X_2 = \{(a + 1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $X_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x] : a_1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$;
- $X_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} : a_{1,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}$.

**3.** Dati $r$ vettori $v_1, \dots, v_r$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**4.** Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ con le operazioni usuali e i vettori $v_1 = (1, 2, -2)$, $v_2 = (2, 1, -3)$, $v_3 = (1, -1, -1)$.

(i) Il vettore $w = (0, 3, -1)$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$?

(ii) Il vettore $w$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$?

(iii) Il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$?

(iv) In quanti modi il vettore nullo $(0, 0, 0)$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$?

**5.** Dire quali dei seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \{(1, 0, 2, 3), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 3, 6), (0, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$;

$S_2 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 3), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

$S_3 = \{(1, 1), (2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$;

$S_4 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

## ESERCIZI 3

**1.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, dire cosa sono una base e la dimensione di $V$.

**2.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

$$\{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2};$$
$$\{(0, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3;$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_{2\ 2};$$
$$X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2};$$
$$Z = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dopo aver osservato che $Z$ è il sottospazio generato dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)$, determinare una base di $Z$.

**3.** Senza fare conti, ma solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, dimostrare che i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2\ 2};$$
$$S_3 = \{(50, -23), (1, -4), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**4.** Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$$
$$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

# ESERCIZI 4

**1.** Determinare una base per i sottospazi di soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ & -x_2 & -3x_3 & & +x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & +2x_5 & & = & 0 \end{cases}$$

**2.** Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0,1,0,1),(1,1,0,1),(2,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2+x, x+1, 3+x\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_{2,2}$

(v) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

**3.** Dati i sottoinsiemi $S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $T = \{(1,2,1),(1,0,-1),(0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con le operazioni usuali, dimostrare che i vettori di $S$ dipendono da $T$ e che i vettori di $T$ dipendono da $S$. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che $S$ e $T$ generano lo stesso spazio vettoriale?

**4.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((7,-5,1,2,5),(4,-3,5,25,3),(4,-7,-3,-21,7),(-3,2,-4,-1,-2))$;

$L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1))$;

$L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0))$.

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases}$$

## ESERCIZI 5

**1.** Cosa è il rango di una matrice su un campo $\mathbb{K}$?

**2.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.

(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $ABD$.

**3.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile?

**4.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**5.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici e la matrice inversa di ciascuna di quelle che sono invertibili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## ESERCIZI 6

**1.** Si dica quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 2y, x - y + 1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 3a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (x_1 + x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2x_2, x_1^2 + x_2) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 0, 1) = (1, 2, 0)$, $f(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$, si può determinare $f(0, 1, 2)$? Si può determinare $f((x_1, x_2, x_3))$, per ogni vettore $(x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**3.** Siano $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ e $u_3 = (0, 1, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1, 1, 1)) = (1, 0, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1)$ e $f((0, 1, 2)) = (0, 0, 1)$.

**4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare nucleo, immagine di $f$.
(b) Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1, x_2, x_3)$ tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (1, 0, 1)$.

**5.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$
$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

**6.** Dati i riferimenti $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{R}' = ((0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $Q$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e quella $P$ da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (x + 2y, y - z, x + y + z)$, calcolare la matrice $A$ associata a $f$ in $\mathcal{R}$ e quella $B$ associata a $f$ in $\mathcal{R}'$. Osservare che $B = P^{-1}AP$ e $A = Q^{-1}BQ$.

**7.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}, \quad T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}$.

**8.** Studiare le applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## ESERCIZI 7

**1.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1,0,1)) = -1+2x-x^2+x^3$, $f((1,1,2)) = 4x+x^3$ e $f((0,0,1)) = 2x-x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1,a_2,a_3))$, per ogni vettore $(a_1,a_2,a_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine $Imf$ e il nucleo $Kerf$ di $f$;
(b) dire se l'applicazione $f$ è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a $f$ nei riferimenti $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,0,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{R}' = (1, 1+x, -x^2, x+x^3)$.

**2.** Si considerino i seguenti riferimenti di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R} = ((1,0,0),(0,1,1),(1,-1,1)), \quad \mathcal{R}' = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)).$$

(a) Determinare la matrice $A$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e la matrice $B$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. A cosa è uguale il prodotto $AB$? E $BA$?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2-x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R}$ e quella associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R}'$. Che relazione sussiste tra queste due matrici? L'applicazione $f$ è diagonalizzabile?

**3.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una matrice che diagonalizza $A$.

## ESERCIZI 8

**1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico del piano della geometria elementare. Cosa sono le coordinate di un punto in un tale riferimento?

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si considerino i punti $A(1, -1, 3)$, $B(-1, -3, 0)$ e $C(1, 1, 3)$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati, determinare le componenti del vettore $B - A$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(0, 0)$, $D(3, -2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0, 1)$ e studiare la sua intersezione con la retta $r$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ che non sia parallela alla retta $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino le rette

$r_1 : -3x + y - 4 = 0$,

$r_2 : 2x - 4y + 3 = 0$,

$$r_3 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 + t \end{cases},$$

$$r_4 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -3 - t \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

# ESERCIZI 9

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x,y,z) = (1,3,-2) + (0,1,1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x+z+2 = 0 \\ -x+2y+1 = 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$.
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : (x,y,z) = (1,-1,0) + (2,0,1)t$.

(1) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ contenente il punto $A(2,0,1)$.
(2) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ parallelo alla retta $r' : (x,y,z) = (1,1,1)t'$.

# ESERCIZI 10

**Esercizio 1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare. In un riferimento di questo tipo, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori $B-A$ e $C-A$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $D-A$ sia ortogonale a $B-A$.

**Esercizio 2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono tra loro ortogonali?

**Esercizio 3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $r : (x,y,z) = (1,0,1) + (0,0,1)t$ e $s : \begin{cases} z = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

(1) Verificare che $r$ ed $s$ sono sghembe e determinare la loro distanza.
(2) Dimostrare che la retta $r$ è uguale alla retta $r' : (x,y,z) = (1,0,-2) + (0,0,-1)t'$.
(3) Determinare il piano $\pi$ per $r$ e passante per l'origine $O(0,0,0)$ e dire se è ortogonale a $s$.
(4) determinare la retta per $O(0,0,0)$ parallela a $s$ e un piano che contiene entrambe tali rette.

**Esercizio 4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1,-1,0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(3) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1,0,0)$.

# ESERCIZI 11

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s: x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi: z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

## ESERCITAZIONE GUIDATA 1

**1.** Completare in una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con le operazioni usuali quelli tra i seguenti sottoinsiemi che sono lineramente indipendenti:
$S_1 = \{(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,1)\}$;
$S_2 = \{(1,2,1,1),(0,3,2,4)\}$;
$S_3 = \{(2,-1,1,0),(-4,2,-2,1),(1,1,1,1)\}$.

**2.** Siano $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n$ e $\mathcal{R} = (u_1,\dots,u_n)$ un suo riferimento. Cosa sono le componenti di un vettore $v$ di $V$in $\mathcal{R}$?

**3.** Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:
(i) $(34,-56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{R} = ((1,0),(0,1))$;
(ii) $(1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,1,1),0,1,0))$;
(iii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,3}$ in

$$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

**4.** Dato il riferimento $\mathcal{R} = (1+x^2, -x, x-x^2)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 2, determinare la coordinazione $c_{\mathcal{R}} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ rispetto a tale riferimento.

# ESERCITAZIONE GUIDATA 2

**1.** Calcolare le componenti nel riferimento $\mathcal{R} = ((1,0,-2),(1,1,0),(0,1,0))$ di $\mathbb{R}^3$ dei seguenti vettori: $v = (-2,1,3)$, $w = (2,0,2)$.

**2.** Determinare la coordinazione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{3,2}$ delle matrici di tipo $3 \times 2$ nel suo riferimento canonico.

**3.** Determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio $L((2,-3,1,0),(-1,2,1,0))$ di $\mathbb{R}^4$ costituisce l'insieme delle soluzioni.

**4.** Trovare una base delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_4 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

**5.** Calcolare il rango delle seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# ESERCITAZIONE GUIDATA 3

**1.** Si dica quali delle seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari:

$f_1 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (ab + c, 2b) \in \mathbb{R}^2$;
$f_2 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (2a_1 - a_2, a_0 - a_1 + 2a_2) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1, 1), f((0, 1, -1)) = (2, -1, 0, 0), f((1, 1, -1)) = (0, 0, 0, 0)$.

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3, -4, 1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x, y, z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**3.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_2,$$

$$S = \{2x - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

# ESERCITAZIONE GUIDATA 4

**1.** Determinare la matrice associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice e dell'endomorfismo.

**2.** Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x, y, z)) = (2y + z, x - y + z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ e $\mathcal{R}' = ((1, 2), (-1, 0))$.

## ESERCITAZIONE GUIDATA 5 (SECONDO GRUPPO)

**1.** Dato uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e un suo riferimento $\mathcal{R}$, dire cosa sono le componenti di un vettore di $V$ in $\mathcal{R}$ e cosa è la coordinazione (o isomorfismo coordinato) di $V$ in $\mathcal{R}$.

**2.** Dato un riferimento $\mathcal{R} = (u, v, w)$ dello spazio dei vettori liberi della geometria elementare, dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di $a$ in $\mathcal{R}$? E di $b$ in $\mathcal{R}$? E di $c$ in $\mathcal{R}$?

**3.** Sia $\mathcal{V}_\pi$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi che ammettono un rappresentante in uno stesso piano $\pi$ e sia $\mathcal{R} = (u, v)$ un suo riferimento. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathcal{V}_\pi$ tale che $f(u) = 2u - 3v$ e $f(v) = -v$.

(i) Dimostrare che il sistema $\{v, u+v\}$ è linearmente indipendente e determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\bar{\mathcal{R}} = (v, u + v)$.

(ii) Nel caso in cui l'endomorfismo $f$ sia diagonalizzabile, trovare una base di autovettori di $f$ e una matrice che diagonalizza la matrice associata a $f$ in $\bar{\mathcal{R}}$.

## ESERCITAZIONE GUIDATA 6

**1.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, determinare la retta passante per il punto $A(-2, 4)$ e parallela al vettore libero $v$ di componenti $(1, -2)$. Inoltre, studiare l'incidenza delle seguenti coppie di rette:

(a) $r : 2x - y + 1 = 0, \quad r' : x + 2y - 1 = 0;$

(b) $r : \begin{cases} x & = 1 - t \\ y & = 2 + 3t \end{cases}, \quad r' : 3x + 2y + 1 = 0;$

(c) $r : \begin{cases} x & = 1 - t \\ y & = 1 + 2t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x & = 1 + t' \\ y & = 2 - 3t' \end{cases},$

**2.** Dire cosa è un riferimento cartesiano (monometrico) dello spazio della geometria elementare.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$

(i) Determinare il piano parallelo a $r$ e passante per i punti $A(1, 0, 1)$ e $B(2, -1, 0)$.

(ii) Verificare che la retta $s : \begin{cases} x & = & t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 3 \end{cases}$ e la retta $r$ non sono sghembe e determinare il piano che contiene entrambe le rette.

(iii) Determinare la retta $r'$ parallela a $s$ e passante per l'origine del riferimento. Verificare che $r$ e $r'$ sono sghembe e determinare, se esiste, la retta che interseca sia $r$ sia $r'$ e che passa per il punto $B(1, 0, 0)$ (Suggerimento: provare a usare i fasci di piani).

# ESERCITAZIONE GUIDATA 7

**1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano (monometrico) ortogonale di un piano della geometria elementare.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) ortogonale di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(2,-5)$, $B(0,1)$ e $C(5,-4)$. Dimostrare che i vettore $AB$ e $AC$ sono ortogonali. Quali sono i punti $D$ diversi da $C$ tali che $AD$ sia ortogonale a $AB$?

**3.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y+z=0. \end{cases}$

(i) Determinare il piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per il punto $A(1,0,1)$.

(ii) Determinare due piani differenti ortogonali a $\pi$ e passanti per il punto $B(1,1,0)$.

(iii) Determinare il piano parallelo a $r$, ortogonale a $\pi' : -2x+y-z+1=0$ e passante per il punto $C(1,2,-1)$.

(iv) Data la retta $s : \begin{cases} x &= t \\ y &= 1-t \\ z &= 3+t \end{cases}$ dire se $s$ e $r$ sono sghembe e se sono ortogonali.

## ESERCITAZIONE GUIDATA 8

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, determinare la circonferenza tangente alla retta $r : y - 2 = 0$ e di centro $C(2,4)$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, verificare che i punti $P_1(1,-1,0)$, $P_2(3,0,-1)$, $P_3(1,0,2)$ e $P_4(2,-1,1)$ sono non complanari e determinare la sfera $\mathcal{S}$ che li contiene. Inoltre, determinare il piano tangente a $\mathcal{S}$ in $P_1$.

COGNOME..................... NOME.................. MATRICOLA.........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Scrivere un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite (a propria scelta) che abbia tra le sue soluzioni il vettore (1,-1,7), poi studiarlo utilizzando il metodo di Gauss, per dire se il sistema ha una sola o più soluzioni. N.B. Non si chiede di risolverlo!

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ sui reali ed un suo sottospazio $U$, cosa vuol dire che $\{v, w, z\}$ è un sistema di generatori del sottospazio U ?

**3.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, trovare una base del sottospazio $U = L(\ (1,1,1), (2,2,2), (-3,3,-3)\ )$ e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ contenente la base di $U$ trovata.

**4.** Dato un qualsiasi sistema di vettori contenente il vettore nullo, spiegare (si richiede di fornirne una breve dimostrazione) perché esso è sempre linearmente dipendente .

**5.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 13 \end{pmatrix}$, verificare (utilizzando la definizione di autovettore e autovalore) che il vettore (1,3,-1) è autovettore relativo all' autovalore -2.

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, 0, 3x_3, 2x_4)$.
(a) Dire se $f$ è iniettiva e/o suriettiva.
(b) Dire se $f$ è diagonalizzabile e perché.

**7.** Fissato un riferimento monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, siano dati i punti $A(1, -2)$ e $B(3, 1)$ e la retta $r : x - y - 2 = 0$.
(a) Rappresentare la retta per $B$ ortogonale a $r$.
(b) Rappresentare la circonferenza tangente a $r$ in $B$ e passante per $A$.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, siano date le rette $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(-1, 2, 2)$ e $s : \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.
Dire se tali rette sono parallele, incidenti o sghembe e scrivere, se esiste, il piano che le contiene entrambe.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, siano dati il punto $P(1, 1, 0)$, la retta $r : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$. Rappresentare la retta passante per $P$, ortogonale alla retta $r$ e parallela al piano $\pi$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dire, giustificando la risposta, se il seguente sistema lineare è compatibile o incompatibile, e calcolarne le soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

**2.** Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un sistema di $t$ vettori di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$. Cosa vuol dire che $S$ è linearmente indipendente?
Se $S$ è linearmente indipendente, è vero che $dim(V) \geq t$? ◯ Si ◯ No Perché?

**3.** Dimostrare che $\mathcal{R} = ((0,0,1),(1,2,-1),(1,1,0))$ è un riferimento di $\mathbb{R}^3$ e determinare le componenti in $\mathcal{R}$ del vettore $u = (1,-1,-1)$.

**4.** Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che $f(a,b,c) = (a+c) + (b-a)x + (b+c)x^2$ nei riferimenti canonici di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, rispettivamente. Determinare una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$. Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**5.** Studiare la diagonalizzabilità della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se $A$ è diagonalizzabile, determinarne una base di autovettori.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, verificare che i punti $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(1,-1)$ non sono allineati e determinare la circonferenza $\mathcal{C}$ passante per essi. Determinare la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $A$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, le rette $r : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + (1, 1, 1)t$ e $s : \left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & -1 \\ x - y + z & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$ sono parallele, incidenti o sghembe?

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi : x - 2y + 2z = 1$ e il punto $A(1, 1, 1)$. Calcolare la distanza di $\pi$ da $A$ e determinare il piano per $A$ ortogonale a $\pi$ e parallelo alla retta $r(x, y, z) = (0, 0, 1) + (1, -1, 0)t$.

## ESERCIZI 1

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \quad y & +2z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 1 \\ \quad y+ & 3z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \end{cases}$$

Ridurre a scalini le seguenti matrici

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

## ESERCIZI 2

**1.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, dire cosa è un suo sottospazio vettoriale.

**2.** Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, fornendo spiegazioni esaurienti:

- $X_0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a - 3b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $X_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $X_2 = \{(a + 1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $X_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x] : a_1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$;
- $X_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} : a_{1,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$.

**3.** Dati $r$ vettori $v_1, \dots, v_r$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**4.** Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ con le operazioni usuali e i vettori $v_1 = (1, 2, -2)$, $v_2 = (2, 1, -3)$, $v_3 = (1, -1, -1)$.

(i) Il vettore $w = (0, 3, -1)$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$?

(ii) Il vettore $w$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$?

(iii) Il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1, v_2$?

(iv) In quanti modi il vettore nullo $(0, 0, 0)$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, v_3$?

**5.** Dire quali dei seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \{(1, 0, 2, 3), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 3, 6), (0, 0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$;

$S_2 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 3), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;

$S_3 = \{(1, 1), (2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$;

$S_4 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

## ESERCIZI 3

**1.** Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo $K$, dire cosa sono una base e la dimensione di $V$.

**2.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((7,-5,1,2,5),(4,-3,5,25,3),(4,-7,-3,-21,7),(-3,2,-4,-1,-2))$;

$L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1))$;

$L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0))$.

**3.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

$$\{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2};$$
$$\{(0, \alpha+\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3;$$
$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} \subset M_{2\ 2}(\mathbb{R});$$
$$X = \left\{\begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\} \subset M_{2\ 2}(\mathbb{R});$$
$$Z = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dopo aver osservato che $Z$ è il sottospazio generato dai vettori $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)$, determinare una base di $Z$.

**4.** Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$$T = \{(1,1,1),(0,0,0),(2,2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$U = L(\{(1,1,0,-1),(0,2,-3,1),(-2,0,-3,3),(0,0,0,0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$$
$$Z = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

**5.** Senza fare conti, ma solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, spiegare perché i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2\ 2}(\mathbb{R});$$
$$S_3 = \{(50,-23),(1,-4),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**6.** Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0,1,0,1),(1,1,0,1),(2,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2+x, x+1, 3+x\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

(iv) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}_{2,2}$

(v) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

**7.** Dati i sottoinsiemi $S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $T = \{(1,2,1),(1,0,-1),(0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con le operazioni usuali, dimostrare che i vettori di $S$ dipendono da $T$ e che i vettori di $T$ dipendono da $S$. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che $S$ e $T$ generano lo stesso spazio vettoriale?

## ESERCIZI 4

**1.** Determinare una base per i sottospazi di soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

**2.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

**3.** Cosa è il rango di una matrice su un campo $\mathbb{K}$?

**4.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $ABD$.

**5.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 su un campo $\mathbb{K}$ e siano $H$ e $W$ due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 2$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.

## ESERCIZI 5

**1.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**2.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile?

**3.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** Trovare una base delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & -2x_4 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

**5.** Calcolare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & -4 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# ESERCIZI 6

**1.** Si dica quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 2y, x - y + 1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 3a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (x_1 + x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2x_2, x_1^2 + x_2) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 0, 1) = (1, 2, 0)$, $f(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$, si può determinare $f(0, 1, 2)$? Si può determinare $f((x_1, x_2, x_3))$, per ogni vettore $(x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**3.** Siano $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ e $u_3 = (0, 1, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1, 1, 1)) = (1, 0, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1)$ e $f((0, 1, 2)) = (0, 0, 1)$.

**4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di $f$.
(b) Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1, x_2, x_3)$ tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (1, 0, 1)$.

**5.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che
$$f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1, 1), f((0, 1, -1)) = (2, -1, 0, 0), f((1, 1, -1)) = (0, 0, 0, 0).$$
(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3, -4, 1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x, y, z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**6.** Determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio $L((2, -3, 1, 0), (-1, 2, 1, 0))$ di $\mathbb{R}^4$ costituisce l'insieme delle soluzioni.

**7.** Calcolare l'inversa della seguente matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# ESERCIZI 7

**1.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)).$

**2.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

**3.** Studiare le applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## ESERCIZI 8

**1.** Dati i riferimenti $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,2,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{R}' = ((0,-1,1),(0,1,1),(1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $Q$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e quella $P$ da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y+z, x+y+z)$, determinare la matrice $A$ associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ e quella $B$ associata a $f$ in $\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}'$. Osservare che $B = P^{-1}AP$ e $A = Q^{-1}BQ$.

**2.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1,0,1)) = -1+2x-x^2+x^3$, $f((1,1,2)) = 4x+x^3$ e $f((0,0,1)) = 2x-x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1,a_2,a_3))$, per ogni vettore $(a_1,a_2,a_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine $Imf$ e il nucleo $Kerf$ di $f$;
(b) dire se l'applicazione $f$ è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a $f$ nei riferimenti $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,0,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{R}' = (1, 1+x, -x^2, x+x^3)$.

**3.** Si considerino i seguenti riferimenti di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{R} = ((1,0,0),(0,1,1),(1,-1,1)), \quad \mathcal{R}' = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)).$$

(a) Determinare la matrice $A$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e la matrice $B$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$. A cosa è uguale il prodotto $AB$? E $BA$?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2-x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R}$ e quella associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R}'$. Che relazione sussiste tra queste due matrici? Calcolare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $f$.

## ESERCIZI 9

**1.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una matrice che diagonalizza $A$.

**3.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico del piano della geometria elementare. Cosa sono le coordinate di un punto in un tale riferimento?

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati (ossia, se esiste una retta che contiene $A, B, C$), determinare le componenti del vettore $B - A$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ che non sia parallela alla retta $s$.

# ESERCIZI 10

**1.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino le rette

$r_1 : -3x + y - 4 = 0,$

$r_2 : 2x - 4y + 3 = 0,$

$r_3 : \begin{cases} x & = 1 + 2t \\ y & = -3 + t \end{cases},$

$r_4 : \begin{cases} x & = 1 + t \\ y & = -3 - t \end{cases}.$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1, 0, 1)$ e $B(1, 1, 1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2, 1, 2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0, 1, 1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ e $C(2, 1, 2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & -1 - t \\ z & = & 2 + 2t \end{cases}.$

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1, 2, 0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x, y, z) = (1, 3, -2) + (0, 1, 1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x + z + 2 & = & 0 \\ -x + 2y + 1 & = & 0 \end{cases}$ e il punto $B(1, 0, 1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1 + 2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$.
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : (x, y, z) = (1, -1, 0) + (2, 0, 1)t$.

(1) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ contenente il punto $A(2, 0, 1)$.
(2) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ parallelo alla retta $r' : (x, y, z) = (1, 1, 1)t'$.

# ESERCIZI 11

**Esercizio 1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare. In un riferimento di questo tipo, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori $B-A$ e $C-A$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $D-A$ sia ortogonale a $B-A$.

**Esercizio 2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono tra loro ortogonali? Determinare la distanza tra $A$ e $s$.

**Esercizio 3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $r : (x,y,z) = (1,0,1) + (0,0,1)t$ e $s : \begin{cases} z &= -1 \\ y &= 2 \end{cases}$.

(1) Verificare che $r$ ed $s$ sono sghembe e determinare la loro distanza.
(2) Dimostrare che la retta $r$ è uguale alla retta $r' : (x,y,z) = (1,0,-2) + (0,0,-1)t'$.
(3) Determinare il piano $\pi$ per $r$ e passante per l'origine $O(0,0,0)$ e dire se è ortogonale a $s$.
(4) determinare la retta per $O(0,0,0)$ parallela a $s$ e un piano che contiene entrambe tali rette.

**Esercizio 4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1,-1,0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(3) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1,0,0)$.

## ESERCIZI 12

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s: x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, determinare la circonferenza tangente alla retta $r: y-2=0$ e di centro $C(2,4)$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi: z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Risolvere il seguente sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss, e dire se l'insieme delle sue soluzioni è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x - 3y + 3z - t = 0 \\ 4x + y - z - 2t = 2 \\ 3x + 4y - 4z - t = 2 \end{cases}$$

**2.** Determinare le coordinate (componenti) del vettore $(0, 7)$ nel riferimento $\mathcal{R}=\{(1,3),(2,-1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

**3.** Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali e completarla ad una base dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$:

1) $W_1 = \{(k, 0, -k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
2) $W_2 = L(\ (1,1,0), (0,0,0), (-1,-2,0), (2,2,0)\ ) \subseteq \mathbb{R}^3$.

**4.** Scrivere la definizione di *nucleo* e di *immagine* di un'applicazione lineare.

**5.** Scrivere la definizione di *autovettore* di un endomorfismo dello spazio vettoriale $V$.

**6.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$;
- stabilire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonale simile alla matrice data.

**7.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati i punti $A(0,3)$ $B(1,4)$ e $C(1,0)$. Dopo aver dimostrato che non sono allineati, calcolare la distanza di $C$ dalla retta congiunente $A$ e $B$.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1, 2, 0)$, la retta $r : (x, y, z) = (0, -1, 1) + t(1, -1, 0)$, il piano $\pi : x - 3z + 5 = 0$. Rappresentare la retta passante per $P$, ortogonale a $r$ e parallela a $\pi$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la sfera tangente il piano $\alpha : x - y + z = 0$ nel punto $A = (1, 1, 0)$ ed avente centro sul piano $yz$, e determinarne centro e raggio.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Risolvere il seguente sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss, e dire se l'insieme delle sue soluzioni è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x - 3y - z + 3t = 0 \\ 4x + y - 2z - t = 2 \\ 3x + 4y - z - 4t = 2 \end{cases}$$

**2.** Determinare le coordinate (componenti) del vettore $(0, 7)$ nel riferimento $\mathcal{R}=\{(2, -1), (1, 3)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

**3.** Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali e completarla ad una base dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$:

1) $W_1 = \{(-k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
2) $W_2 = L(\ (1,1,0), (0,0,0), (1,2,0), (2,2,0)\ ) \subseteq \mathbb{R}^3$.

**4.** Scrivere la definizione di *nucleo* e di *immagine* di un'applicazione lineare.

**5.** Scrivere la definizione di *autovalore* di un endomorfismo dello spazio vettoriale $V$.

**6.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$;
- stabilire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonale simile alla matrice data.

**7.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati i punti $A(3, 0)$ $B(4, 1)$ e $C(0, 1)$. Dopo aver dimostrato che non sono allineati, calcolare la distanza di $C$ dalla retta congiunente $A$ e $B$.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1, 0, 2)$, la retta $r : (x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, 0, -1)$, il piano $\pi : x - 3y + 5 = 0$. Rappresentare la retta passante per $P$, ortogonale a $r$ e parallela a $\pi$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la sfera tangente il piano $\alpha : x + y - z = 0$ nel punto $A = (1, 0, 1)$ ed avente centro sul piano $yz$, e determinarne centro e raggio.

GEOMETRIA Napoli, 16 febbraio 2012

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Scrivere la definizione di sistema di vettori *linearmente indipendente*.

**3.** Cosa vuol dire che lo spazio vettoriale $V$ è *finitamente generabile*?

**4.** Sia $W = L(\ (1,2,-3),(-2,3,-1),(0,0,0),(1,-1,0)\ )$.

(1) Calcolare la dimensione e scrivere una base di $W$.
(2) Scrivere una equazione cartesiana di $W$.
(3) Dire se esistono valori di $a \in R$ tali che $(a,2,3) \in W$.

**5.** Dire, giustificando la risposta, se l'affermazione
"Sia $f : M_2(R) \mapsto R^3$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (b-d, a, c)$, allora $(0,1,0,1) \in ker f$"
è ◯ Giusta ◯ Sbagliata Perché?

**6.** Cosa vuol dire che l'applicazione $f : V \mapsto W$ è *lineare*? Scrivere (senza dimostrarne la linearità) una applicazione lineare $g : R^2 \mapsto R^2$.

**7.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Calcolare autovalori ed autospazi.
(3) Stabilire se è diagonalizzabile.

**8.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati i punti $A(0,1)$, $B(2,-1)$ e $C(1,0)$. Dopo aver dimostrato che sono allineati, rappresentare la retta contenente $A$ , $B$ e $C$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1,2,3)$, la retta $r : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : 2x + y = 0$.
Rappresentare

(1) il piano passante per $P$ e parallelo a $\pi$
(2) il piano passante per $P$ e ortogonale a $r$
(3) il piano contenente l'origine e la retta $r$

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la sfera avente centro in $(1,1,-2)$ e tangente il piano di equazione $x + y + z - 4 = 0$.

GEOMETRIA Napoli, 14 Marzo 2012

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Scrivere la definizione di sistema di vettori *linearmente dipendente*.

**3.** Cosa vuol dire che lo spazio vettoriale $V$ ha *dimensione* 3 ?

**4.** Sia $W = L(\ (1,-2,1),(0,0,0),(3,-2,-1),(1,-1,0)\ )$.

(1) Calcolare la dimensione e scrivere una base di $W$.
(2) Scrivere una equazione cartesiana di $W$.
(3) Dire se esistono valori di $a \in R$ tali che $(-1, a, 3) \in W$.

**5.** Dire, giustificando la risposta, se l'affermazione
"Sia $f : M_2(R) \mapsto R^3$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-3c, b-d, 0)$, allora $(3,1,1,1) \in ker f$"
è ◯ Giusta ◯ Sbagliata Perché?

**6.** Cosa vuol dire che l'applicazione $f : V \mapsto V$ è un *endomorfismo*? Scrivere (senza giustificare la scelta) un endomorfismo $g : R^3 \mapsto R^3$.

**7.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Calcolare autovalori ed autospazi.
(3) Stabilire se è diagonalizzabile.

**8.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati i punti $A(0,-1)$, $B(-2,1)$ e $C(-1,0)$. Dopo aver dimostrato che sono allineati, rappresentare la retta contenente $A$ , $B$ e $C$ sia in forma cartesiana che in forma parametrica.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1, -1, 0)$, la retta $r : \begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + y + 2z + 5 & = & 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : 2x - 4y = 0$.
Rappresentare

(1) il piano passante per $P$ e parallelo a $\pi$
(2) il piano passante per $P$ e ortogonale a $r$
(3) il piano contenente l'origine e la retta $r$

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la sfera avente centro in $(1, 1, -2)$ e tangente il piano di equazione $x + y - z = 0$.

GEOMETRIA Napoli, 19 giugno 2012

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Calcolare le soluzioni del seguente sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

**2.** Nello spazio vettoriale $R^2$, quanti vettori contiene il sottospazio $L(\ (0,0),(1,2)\ )$? ◯ uno ◯ due ◯ infiniti Perché?

**3.** Scrivere la definizione di *endomorfismo* di uno spazio vettoriale $V$.

**4.** Sapendo che $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice associata a $f : R^2 \mapsto R^2$ nei riferimenti $R = (\ (1,0), (-1,1)\ )$ e $R' = (\ (0,2), (1,0)\ )$, calcolare $f(2,-5)$ e $f(3,4)$.

**5.** Scrivere la definizione di *nucleo* dell' applicazione lineare $f : V \mapsto W$.

**6.** Cosa vuol dire che lo spazio vettoriale $V$ ha dimensione 4 ?

**7.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $R^3$.
(2) Calcolare autovalori ed autospazi.
(3) Stabilire se è diagonalizzabile.

**8.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dati i punti $A(1,1)$, $B(3,2)$ e $C(4,1)$

(1) verificare se il triangolo $ABC$ è rettangolo in $B$;
(2) rappresentare la circonferenza passante per $A, B, C$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, la retta di equazione $\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ 2x-3y+2z-1 &= 0 \end{cases}$ è contenuta nel piano di equazione $x-5y+3z=0$ ?

◯ si ◯ no Perché?

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P=(0,0,1)$, la retta $r : \begin{cases} 2x-y-z+3 &= 0 \\ x+3y-4z+2 &= 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x+y-z-1=0$. Rappresentare la retta passante per $P$ parallela a $\pi$ e ortogonale a $r$.

**11.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale,

(1) rappresentare la sfera di centro $C(1,1,-1)$ e raggio 5;

(2) scrivere un piano che intersechi la suddetta sfera in una circonferenza reale.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Calcolare, con il metodo di eliminazione di Gauss, le soluzioni del sistema lineare omogeneo avente come matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**2.** Dire (senza dimostrarlo) quale dei seguenti sottoinsiemi è sottospazio e, per quelli che lo sono, scrivere una base:
(1) $\{(1,0),(0,0),(-1,0)\}$ in $\mathbb{R}^2$;
(2) $\{(a,b,0) \mid a,b \in R\}$ in $\mathbb{R}^3$;
(3) $L(\ (1,1,2),(2,1,3),(1,0,1)\ )$ in $\mathbb{R}^3$.

**3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e sia $v \in V$. Il sistema di vettori $\{v, 2v\}$ è linearmente dipendente? ◯ si ◯ no Perché?

**4.** Siano dati i sottospazi $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = x_1 + x_3 = 0\}$ e $W = L(\ (1,1,1), (2,1,1)\ )$ di $\mathbb{R}^3$. Calcolare una base di $U \cap W$.

**5.** Verificare, utilizzando la definizione, che $(1, 3, -1)$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e calcolare l'autovalore relativo.

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Siano $R$ e $R'$ due riferimenti di $V$, e siano $A$ la matrice associata a $f$ in $R$, $A'$ la matrice associata a $f$ in $R'$.

(1) Dire (senza dimostrarlo) come sono legate le matrici $A$ e $A'$.
(2) Dire (giustificando la risposta) se le matrici $A$ e $A'$ hanno lo stesso rango.

**7.** Senza calcolare il polinomio caratteristico, possiamo dire che 0 è autovalore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? ◯ si ◯ no Perché?

**8.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, il punto $(1,0)$ appartiene alla retta $(x,y) = (3,1)t + (4,2)$? ◯ si ◯ no Perché?

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, verificare che la retta $r : \begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + 3y + z - 1 & = & 0 \end{cases}$ è parallela al piano $\pi : x - y - 2z = 0$ e calcolare la distanza tra $r$ e $\pi$.

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare una qualsiasi sfera *passante* per l'origine ed avente raggio 3 (spiegare la scelta fatta).

# ESERCIZI 1

12 MARZO 2013

**1.** Dire, giustificando la risposta, quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$X = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 - a_3 = 0\}$$
$$Y = \{(1, 0, 0) + (0, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$Z = \{(0, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0)\}$$
$$T = \{(a, 0, c) \in \mathbb{R}^3 : a \geq 0\}$$
$$W = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 < 0\}.$$

**2.** Dati $r$ vettori $v_1, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**3** Si considerino i seguenti vettori dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$.

(i) Osservare che il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$.

(ii) Il sistema $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3$?

(iii) Il vettore $w = (0, 0, 1)$ dipende linearmente da $S$? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, w$?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da $S$? Il sistema $S$ è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

**4.** Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, si considerino due vettori $u_1$ e $u_2$ linearmente indipendenti che abbiano entrambi lunghezza 1.

(i) Considerato il vettore $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.

(iii) Esibire un vettore di lunghezza 3.

(iv) I vettori $u_1$ e $u_2$ possono essere paralleli?

**5.** Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali, si considerino le seguenti operazioni:

$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ (notare che esso è diverso dallo spazio vettoriale numerico con sostegno $\mathbb{R}^2$).

# ESERCIZI 2

19 MARZO 2013

**1.** Dati $t$ vettori $v_1, \dots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, sia $S$ il sistema da essi costituito. Cosa vuol dire che:

(i) $S$ è linearmente indipendente;

(ii) $S$ è linearmente dipendente;

(iii) $S$ è un sistema di generatori di $V$.

**2.** Spiegare perché tre vettori liberi $u, v, w$ complanari (ossia, paralleli a uno stesso piano) non sono linearmente indipendenti.

**3.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo $K$.

(i) Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?

(ii) Dare un esempio di spazio vettoriale che *non* è finitamente generato.

(iii) Descrivere un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare.

**4.** Si consideri il seguente sistema $\Sigma$ di $m$ equazioni lineari in $n$ incognite sul campo dei reali:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \quad \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Dire cosa è una soluzione di $\Sigma$.

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari in 4 incognite sul campo dei reali:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 2 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{cases}$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ -2x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases} \qquad \Sigma_4 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ -x_2 + x_4 & = & -1 \end{cases}$$

**ESERCIZI 3**

26 MARZO 2013

**1.** Cosa è una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$? Esibire un esempio di base di uno spazio vettoriale.

**2.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $K$. Dire cosa è la dimensione di $V$.

**3.** Qual è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_\pi$ dei vettori liberi paralleli a un piano $\pi$? Qual è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare?

**4.** Dimostrare che $S = \{(2,1), (-1,0), (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sistema di generatori dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Estrarre da $S$ una base di $\mathbb{R}^2$.

**5.** Determinare una base del sottospazio vettoriale $L(\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,-1)\}) \subseteq R^3$ e una base del sottospazio vettoriale $L(\{1+x, 2+2x, x+x^3\}) \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

**6.** Si consideri un sistema $\Sigma$ di $m$ equazioni lineari omogenee in $n$ incognite sul campo dei reali:

$$\Sigma : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di $\Sigma$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico $(K^n, +, \cdot)$.

# ESERCIZI 4

9 APRILE 2013

**1.** Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di vettori è linearmente indipendente e completare in una base dello spazio vettoriale ambiente i sottoinsiemi che risultano essere linearmente indipendenti.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_{3,2}$$

$$T = \{(0,1,-1,2),(1,1,0,1),(0,1,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$Z = \{-x^2 + x^4, 1 + x, x + x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

**2.** Calcolare il rango delle seguenti matrici reali:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari omogenei in 5 incognite determinare una base dello spazio delle soluzioni.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 & = & 0 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

**4.** Determinare un sistema lineare omogeneo di cui il sottospazio

$$W = L(\{(0,1,-1,3,1),(1,2,1,3,0),(1,2,0,0,1)\})$$

di $\mathbb{R}^5$ sia l'insieme delle soluzioni.

**ESERCIZI 5**

16 APRILE 2013

**1.** Calcolare tutti i possibili prodotti righe per colonne tra le seguenti matrici reali:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**2.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici reali:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**3.** Verificare che la seguente matrice reale è invertibile e calcolare la sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# ESERCIZI 6

23 APRILE 2013

**1.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $K$. Ricordando che un riferimento $\mathcal{R} = (u_1, \ldots, u_n)$ di $V$ è una base ordinata di $V$, dire cosa sono le componenti di un vettore $u$ di $V$ in $\mathcal{R}$.

**2.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, si calcolino le componenti dei vettori $u = (2, 3, 0)$ e $v = (2, 2, 1)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$.

**3.** Dati due spazi vettoriali $V$ e $V'$ su uno stesso campo $K$, dire cosa è un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$.

**4.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1, 1) = (0, 0, 2)$ e $f(2, 2) = (1, 0, 1)$. Spiegare perché $f$ non è un'applicazione lineare.

**5.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \to (a + 2b, a - b + 1) \in \mathbb{R}^2$

$g : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$

$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$

$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Per le applicazioni che sono lineari, determinare un sistema di generatori dell'immagine.

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (2, -3, 1)$, $f(0, 1, 1) = (1, 1, 1)$ e $f(1, 1, 0) = (1, -4, 0)$. È possibile determinare $f(2, 2, 2)$? In che modo?

# ESERCIZI 7

30 APRILE 2013

**1.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore $(x_1,x_2,x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**2.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.

(a) Determinare nucleo, immagine $Im\ f$ di $f$ e $f(W)$, dove $W = L((1,0,1),(-1,1-1))$.

(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1,x_2,x_3)$ tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

**3.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.

(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.

(iii) Determinare una base di $Imf$.

(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**4.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$$

$$\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$$

$$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$$

$$f_3 : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c-b) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{R} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0,1,1),(1,0,1),(0,1,0)).$$

**5.** Dati i riferimenti $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,2,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{R}' = ((0,-1,1),(0,1,1),(1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $Q$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e quella $P$ da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y-z, x+y+z)$, calcolare la matrice $A$ associata a $f$ in $\mathcal{R}$ e quella $B$ associata a $f$ in $\mathcal{R}'$. Osservare che $B = P^{-1}AP$ e $A = Q^{-1}BQ$.

## ESERCIZI 8

07 MAGGIO 2013

**1.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**2.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una matrice che diagonalizza $A$.

**3.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# ESERCIZI 9

14 MAGGIO 2013

**1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico del piano della geometria elementare. Cosa sono le coordinate di un punto in un tale riferimento?

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati (ossia, se esiste una retta che contiene $A, B, C$), determinare le componenti del vettore $B - A$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ che non sia parallela alla retta $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino le rette

$r_1 : -3x + y - 4 = 0$,
$r_2 : 2x - 4y + 3 = 0$,

$$r_3 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 + t \end{cases},$$

$$r_4 : \begin{cases} x &= 1 + t' \\ y &= -3 - t' \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**ESERCIZI 10**

21 MAGGIO 2013

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -1-t \\ z &= 2+2t \end{cases}$.

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x,y,z) = (1,3,-2) + (0,1,1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x+z+2 &= 0 \\ -x+2y+1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$.
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**4.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare. In un riferimento di questo tipo, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori $B-A$ e $C-A$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $D-A$ sia ortogonale a $B-A$.

**5.** Dire quale delle seguenti applicazioni di $\bar{V}_3(\mathbb{R}) \times \bar{V}_3(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare, dove $u = (x_1,x_2,x_3)$ e $v = (y_1,y_2,y_3)$ sono generici vettori di $\bar{V}_3(\mathbb{R})$:

$f_1(u,v) := x_1y_1 - 2x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_3 - x_3y_1 + \pi x_2y_2$
$f_2(u,v) := x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$
$f_3(u,v) := x_1y_3 + x_2y_2 + x_1y_1$
$f_4(u,v) := 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
$f_5(u,v) := x_1y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 2$
$f_6(u,v) := x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$.

Per ciascuna applicazione che risulta essere un prodotto scalare, determinare l'insieme dei vettori $u$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f_i(u,(1,-2,-1)) = 0$.

# ESERCIZI 11

28 MAGGIO 2013

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : (x, y, z) = (1, -1, 0) + (2, 0, 1)t$.

(1) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ contenente il punto $A(2, 0, 1)$.
(2) Rappresentare il piano del fascio di asse $r$ parallelo alla retta $r' : (x, y, z) = (1, 1, 1)t'$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, le rette $r : 3x-y+2 = 0$, $r' : x+2y-1 = 0$ e $s : x-5y+4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1, 2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1, 2)$. Le due rette determinate sono tra loro ortogonali? Determinare la distanza tra $A$ e $s$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (0, 0, 1)t$ e $s : \begin{cases} z = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

(1) Verificare che $r$ ed $s$ sono sghembe e determinare la loro distanza.
(2) Dimostrare che la retta $r$ è uguale alla retta $r' : (x, y, z) = (1, 0, -2) + (0, 0, -1)t'$.
(3) Determinare il piano $\pi$ per $r$ e passante per l'origine $O(0, 0, 0)$ e dire se è ortogonale a $s$.
(4) determinare la retta per $O(0, 0, 0)$ parallela a $s$ e un piano che contiene entrambe tali rette.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi : -x+y+2z-1 = 0$ e il punto $A(1, -1, 0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(3) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1, 0, 0)$.

# ESERCIZI 12

30 MAGGIO 2013

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s : x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, determinare la circonferenza tangente alla retta $r : y-2=0$ e di centro $C(2,4)$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi : z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA...........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Senza calcolarne le soluzioni, dire perché il seguente sistema lineare deve necessariamente avere infinite soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

**2.** Esistono sistemi di vettori linearmente indipendenti in $R^4$ contenenti 5 vettori? (Se si scriverne uno, se no dire perché)

**3.** Esiste una base di $R^3$ che contenga il sistema di vettori $\{\ (0,1,0),(0,2,0)\ \}$ ? (Se si scriverne una, se no dire perché)

**4.** Scrivere la definizione di sistema di vettori *linearmente indipendente* dello spazio vettoriale $V$.

**5.** Scrivere la definizione di *nucleo* dell' applicazione lineare $f : V \mapsto W$.

**6.** Dire cosa è il rango di una matrice e calcolare quello di $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**7.** Senza calcolare il polinomio caratteristico ma utilizzando solo la *definizione* di autovettore e di relativo autovalore, mostrare che $(1, -1)$ è autovettore di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e calcolarne il relativo autovalore.

**8.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(1) calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nella base canonica di $R^3$.
(2) Calcolare autovalori ed autospazi.
(3) Stabilire se è diagonalizzabile.

**9.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dati i punti $A(1,1)$ e $B(31,-243)$

(1) individuare il punto $C$ tale che il triangolo $ABC$ sia rettangolo in $C$ ed abbia il cateto $AC$ parallelo all'asse $x$;
(2) calcolare l'area del triangolo $ABC$.

**10.** Fissato nello spazio tridimensionale della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, la retta di equazione $\begin{cases} x+2y & = & 0 \\ 2x-3y-1 & = & 0 \end{cases}$ è contenuta nel piano $xy$? ◯ si ◯ no Perché?

**11.** Scrivere la definizione di *rette sghembe* dello spazio tridimensionale della geometria elementare. Dire, giustificando la risposta, se due rette ortogonali possono essere sghembe.

**12.** Fissato nello spazio tridimensionale della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale,

(1) rappresentare la sfera di centro $C(1,-2,1)$ e raggio 3;

(2) esiste un piano che intersechi la suddetta sfera in una circonferenza reale di raggio 5? (Se si scriverne uno, se no dire perché)

GEOMETRIA Napoli, 18 febbraio 2013

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA...........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Scrivere la definizione di *sottospazio* dello spazio vettoriale $V$. Inoltre, per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $R^2$, dire se si tratta di un sottospazio ed in caso affermativo scriverne una base:

(i) l'insieme $U$ delle coppie $(x, y)$ che sono coordinate di punti sulla circonferenza unitaria, cioè $U = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(ii) $W = \{ (a, \sqrt{2}a) \mid a \in R\}$.

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, e siano $v, w, z$ vettori di $V$; che vuol dire che $v$ è *combinazione lineare* di $w$ e $z$ ?

**3.** Nello spazio vettoriale $M_2(R)$ delle matrici reali 2 x 2, è vero che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è *combinazione lineare* di $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e di $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ? (Se si scrivere la combinazione lineare, se no dire perché)

**4.** Si consideri l'applicazione lineare $f : R^2 \mapsto R^3, (x, y) \mapsto (x - 2y, y - 3x, 0)$.

(i) È vero che $(1, 1, 1) \in Imf$? ◯ Si ◯ No Perché?

(ii) È vero che $(1, 1, 0) \in Imf$? ◯ Si ◯ No Perché?

**5.** Esistono valori di $h \in R$ per i quali la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & h \end{pmatrix}$ è invertibile?

**6.** Enunciare il teorema della dimensione (nullità + rango) e dimostrare, come corollario, che nessuna applicazione lineare $f : R^4 \mapsto R^3$ può essere iniettiva.

**7.** Scrivere la definizione di *autovettore* e di relativo *autovalore* di una matrice (reale, quadrata) $A$, dire cosa significa che $A$ è *diagonalizzabile.*

**8.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori ed autospazi e stabilire se è diagonalizzabile.

**9.** Scrivere la definizione di *rette parallele* dello piano della geometria elementare.

**10.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare :

(1) la retta parallela a $x + y = 1$ passante per l'origine;
(2) la retta parallela a $x + y = 1$ passante per (1,0);
(3) la retta parallela all'asse $x$ passante per (-1,0).

**11.** Scrivere la definizione di *rette ortogonali* dello spazio tridimensionale della geometria elementare. Dire, giustificando la risposta, se due rette ortogonali possono essere sghembe.

**12.** Fissato nello spazio tridimensionale della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati la retta $r\ :\ (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-1, 1, -1)$ ed il piano $\pi\ :\ x - y + z + 1 = 0$.

(1) calcolare le coordinate dell'unico punto $P$ su $r$ avente ascissa 1;
(2) calcolare le coordinate dell'unico punto $Q$ su $r$ avente ordinata 1;
(3) calcolare le distanze di $P$ e di $Q$ da $\pi$ e dedurne la posizione relativa di $r$ e $\pi$.

GEOMETRIA Napoli, 18 giugno 2013

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x+y-z-t &= 0 \\ 2x+2y+z-3t &= 0 \\ -x-y-2z+2t &= 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

**2.** Cosa vuol dire che il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ dello spazio vettoriale $V$ è un *sistema linearmente dipendente*?

**3.** Dire (senza dimostrarlo) quale dei seguenti sottoinsiemi è sottospazio e, per quelli che lo sono, calcolarne la dimensione e scriverne una base:
(1) $W_1 = \{ax^2 - a \mid a \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) $W_2 = \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^2$;
(3) $L(\ (1,2,-3), (1,-1,0), (0,1,-1)\ )$ in $\mathbb{R}^3$.

**4.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R} = ((1,0),(1,-1))$ al riferimento $\mathcal{R}' = ((1,2),(1,1))$.

**5.** Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2y, x - z, y + z)$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se $f$ è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;
(iii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;
(iv) dire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Verificare, senza calcolare il polinomio caratteristico, che $(3, 2, 5)$ non è autovettore di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

**8.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r:\ 4x + y - 3 = 0$; rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta parallela a $r$ e passante per l'origine.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano passante per il punto $(1, 1, 2)$ parallelo alla retta $r: \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ e ortogonale al piano $\pi:\ x - 2y + 5z = 1$

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3 = 0$ nel punto $A(-1, 2, 0)$.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z - t &= 0 \\ 2x - 2y + z - 3t &= 0 \\ -x + y - 2z + 2t &= 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

**2.** Cosa vuol dire che il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ dello spazio vettoriale $V$ è un *sistema linearmente indipendente*?

**3.** Dire (senza dimostrarlo) quale dei seguenti sottoinsiemi è sottospazio e, per quelli che lo sono, calcolarne la dimensione e scriverne una base:
(1) $W_1 = \{bx^2 - b \mid b \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) $W_2 = L(\ (1,2,3), (1,-1,0), (0,-1,1)\ )$ in $\mathbb{R}^3$;
(3) $W_3 = \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^2$.

**4.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R} = ((1,0), (-1,1))$ al riferimento $\mathcal{R}' = ((1,2), (1,1))$.

**5.** Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (y - z, y + 2x, x + z)$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se $f$ è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;
(iii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;
(iv) dire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Verificare, senza calcolare il polinomio caratteristico, che $(3, 2, 4)$ non è autovettore di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

**8.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r:\ 4x + y + 3 = 0$; rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta parallela a $r$ e passante per l'origine.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano passante per il punto $(1, 1, 2)$ parallelo alla retta $r: \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$ e ortogonale al piano $\pi:\ 2x - y - 5z = 1$

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3 = 0$ nel punto $A(-1, -2, 0)$.

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} & -y & -z & +2t & = & 2 \\ 3x & -2y & +z & & = & 0 \\ -x & -y & -2z & +2t & = & -2 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

**2.** Esistono sottospazi di dimensione 2 nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$? Se si, se ne scriva uno, se no si spieghi perché.

**3.** Sia $f$ l'applicazione lineare definita da $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y, x - 3y) \in \mathbb{R}^3$;

(i) è vero che $(0, 0) \in ker f$? ◯ Si ◯ No Perché?

(ii) è vero che $(2, 0, 2) \in Im f$? ◯ Si ◯ No Perché?

**4.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi $U = L(\ (2, -1, 0), (2, 0, -1)\ )$ e $W = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0\ \}$. Si scrivano basi per i sottospazi $U, W, U \cap W$ e $U + W$.

**5.** Senza calcolare il polinomio caratteristico, dire se 0 è autovalore di $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

◯ Si ◯ No Perché?

**6.** Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) calcolare $B = A^T A$;
(ii) calcolare autovalori ed autospazi di $B$;
(iii) dire se $B$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scriverne una forma diagonale $D$ e scrivere una matrice $P$ tale che $D = P^{-1}BP$

**7.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r : 2x - 3y + 1 = 0$.

(i) Si rappresenti la retta $s$ che passa per il punto $A(1,1)$ e che è ortogonale a $r$

(ii) Si rappresenti la retta $\bar{s}$ che passa per il punto $B(1,2)$ e che è parallela a $r$. Si determini la distanza tra $r$ e $\bar{s}$.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il punto $P(2,-3,1)$ e la retta $r : \begin{cases} 2x + y + 2z &= 1 \\ x - 2y &= 0 \end{cases}$.

(i) Dimostrare che il punto $P$ non appartiene alla retta $r$.

(ii) Rappresentare il piano $\pi$ che contiene sia $P$ che $r$.

(iii) Rappresentare la retta per $P$ ortogonale al piano $\alpha : x - 3y + 2z = 2$.

ESEMPIO DI SOLUZIONE

GEOMETRIA Napoli, 4 novembre 2014

COGNOME .................................. NOME ............................ MATRICOLA...........

○ Gr. 1 Bader (A-G) ○ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si considerino i sistemi lineari : $S = \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+3y &= 0 \\ x+y-z+t &= 0 \end{cases}$ e $S' = \begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+3y &= 2 \\ x+y-z+t &= 2 \end{cases}$

Per ciascuno di essi,

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;

(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

Per S: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \to a_2 - 2a_1 \\ a_3 \to a_3 - a_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $\mathcal{S} = \{(0,0,t,t) / t \in \mathbb{R}\}$ insieme delle soluzioni

$\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché $S$ è un sistema di equazioni lineari omogenee. Una base è $\{(0,0,1,1)\}$

Per S': $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \to a_2 - 2a_1 \\ a_3 \to a_3 - a_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \\ -z+t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t-1 \end{cases}$

$\mathcal{S}' = \{(1,0,t-1,t) / t \in \mathbb{R}\}$ insieme delle soluzioni

$\mathcal{S}'$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché S è un sistema di equazioni lineari NON omogenee.

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale e sia $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ un sistema di vettori di $V$. Cosa vuol dire che $B$ è una base di $V$?

Il sistema B è una base di V se B è linearmente indipendente (ossia l'unica combinazione lineare dei vettori di B uguale al vettore nullo è quella con scalari tutti nulli) e se B è un sistema di generatori di V (ossia V coincide con l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori di B).

**3.** Dire quali dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e, per quelli che lo sono, calcolarne la dimensione :

(i) $W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 3y\}$ ;
(ii) $W_2 = \{(x, y, z) \mid x + 2y = x - 3y = x - z = 0\}$ ;
(iii) $W_3 = \{(x, y, 0) \mid x < y\}$ .

(i) $W_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.
Una base di $W_1$ è $\{(3,1,0), (0,0,1)\}$ per cui $\dim W_1 = 2$.

(ii) $W_2$ è un sottospazio vett. di $\mathbb{R}^3$ per lo stesso motivo di $W_1$.
Si osservi che $W_2 = \{\underline{0}\}$ per cui una base di $W_2$ è l'insieme vuoto e $\dim W_2 = 0$

(iii) $W_3$ non è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$, perchè pur essendo non vuoto (es: $(1,2,0) \in W_3$) non è chiuso rispetto al prodotto esterno.
Esempio: $(1,2,0) \in W_3$
ma $(-3)\cdot(1,2,0) = (-3,-6,0) \notin W_3$

**4.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z, t) = (2z, z, y - z - t)$.

Nucleo: $(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ z = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = t \end{cases}$

Una base del nucleo è $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$

Immagine: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(\underbrace{(0,0,0), (0,0,1), (2,1,-1), (0,0,-1)}_{\text{immagini dei vettori della base canonica di } \mathbb{R}^4}) =$

$= \operatorname{Span}((0,0,1), (2,1,-1))$
Una base di $\operatorname{Im} f$ è $\{(0,0,1), (2,1,-1)\}$

**5.** Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 1 \neq 0$

$A_{11} = 1$
$A_{12} = -\sqrt{3}$
$A_{21} = 0$
$A_{22} = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, -2y, x + z)$,

(i) dire (giustificando la risposta) se è iniettiva;

(ii) dopo aver dato la definizione di autovettore, dire (usando la definizione e senza utilizzare il polinomio caratteristico) quali tra i seguenti vettori sono autovettori di $f$ e, per quelli che lo sono, determinare il corrispondente autovalore : $v = (0, 0, 2)$, $w = (1, 1, -1)$, $u = (0, 3, 0)$

(i) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \iff \begin{cases} x=0 \\ -2y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ Quindi: $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ e di conseguenza $f$ è iniettiva

(ii) Un autovettore di $f$ è un vettore $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che esiste uno scalare $\lambda$ per cui $f(a) = \lambda a$.

Calcoliamo: $f(v) = f((0,0,2)) = (0,0,2) = 1 \cdot (0,0,2) \Rightarrow$ $v$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$

$f(w) = f((1,1,-1)) = (1,-2,0) \neq \lambda(1,1,-1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$w$ non è autovettore

$f(u) = f((0,3,0)) = (0,-6,0) = -2\,(0,3,0) \Rightarrow$ $u$ è autovettore di autovalore $\lambda = -2$

**7.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i punti $A(-1, 2)$ e $B(2, 3)$ e la retta $r\ :\ 2x + y - 5 = 0$.

(i) Rappresentare la retta $r_1$ passante per $A$ e parallela a $r$;

(ii) rappresentare la retta $r_2$ passante per $B$ e ortogonale a $r$;

(iii) calcolare le coordinate del punto $C$ di intersezione di $r_1$ e $r_2$;

(iv) calcolare l'area del triangolo (rettangolo) $ABC$.

retta $r_1$: $2x + y = 0$, perché $v(-1,2) /\!/ r$ e $v /\!/ r_1$; $(-1,2)$ è soluzione dell'equazione

retta $r_2$: $-x + 2y - 4 = 0$, perché $v(-1,2) /\!/ r$ e $v \perp r_2$; $(2,3)$ è soluzione dell'equazione

) $C: \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ -x - 4x - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{8}{5} \\ x = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $C\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

) area $= \|AC\| \cdot \|BC\|/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{7}{\sqrt5} = \frac{7}{10}$

$AC\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, $\|AC\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}$

$BC\left(-\frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, $\|BC\| = \sqrt{\frac{4 \cdot 49}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 49}{25}} = \frac{7}{5} \cdot \sqrt5 = \frac{7}{\sqrt5}$

area $= \frac{7}{10}$

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la circonferenza $\Gamma$ di centro $C(-1,2)$ e raggio $\sqrt{5}$.

(i) determinare la posizione rispetto a $\Gamma$ della retta passante per i punti $A(-2,2)$ e $B(1,-1)$;
(ii) rappresentare la retta tangente a $\Gamma$ nell'origine.

$\Gamma: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

(i) La retta cercata è $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \end{cases} \iff r: x+y=0$

Calcolo la distanza di $r$ dal centro della circonferenza:
$d(r,C) = \frac{|-1+2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{5} \Rightarrow$ la retta $r$ incontra la circonferenza in due punti perché è secante

(ii) $OC(-1,2)$, per cui un vettore direzionale della retta tangente cercata è $v(2,1)$ e la retta è $s: \begin{cases} x = 2t' \\ y = t' \end{cases} \iff s: x-2y=0$

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r: \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 3x-y-2z = 2 \end{cases}$ ed i punti $A(2,0,1)$, $B(1,-1,0)$.

(i) Rappresentare la retta $s$ per $A$ e $B$;
(ii) verificare che $r$ e $s$ sono complanari e rappresentare il piano per esse;
(iii) calcolare la distanza tra $r$ e $s$.

(i) $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ perché $s \parallel BA(1,1,1)$

(ii) $s$ e $r$ sono parallele perché le componenti del vettore $BA$, che è un vettore direzionale di $s$, costituiscono una soluzione del sistema lineare omogeneo associato a quello che rappresenta $r$.
Il piano cercato è $\pi: x+y-2z=0$ perché: $A, B \in \pi$, $r \subseteq \pi$

(iii) $d(r,s) = d(r,A)$ perché le rette sono parallele.
Determino il piano $\alpha$ passante per $A$ e ortogonale a $r$:
$\alpha: x+y+z-3=0$
Determino il punto di intersezione $P$ tra $\alpha$ e $r$: $P: \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-y-2z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$
Applicando il metodo di Gauss trovo $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
Allora: $d(r,s) = d(r,A) = d(P,A) = \|PA\|$
$\|PA\| = \|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si dica quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi e, per quelli che lo sono, scrivere una base

(i) $U = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x - y = 2z\}$ in $R^4$
(ii) $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \geq 0\}$ in $R^3$
(iii) $Z = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbb{R}$ (con $A^t$ si denota la matrice trasposta di $A$).

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale.

(i) Cosa si intende per *base* di $V$?
(ii) Cosa si intende per *dimensione* di $V$?
(iii) Se $W$ è sottospazio di $V$, è possibile che $dimW < dimV$? (Se si scrivere un esempio, se no dire perché)

**3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale. Cosa si intende per *endomorfismo* di $V$?

**4.** Nello spazio vettoriale reale $V$ di dimensione $n$ sia fissato un riferimento $B = (e_1, \ldots, e_n)$, e sia $f$ un endomorfismo di $V$. Cosa si intende per *matrice associata* a $f$ nel riferimento $B$?

**5.** Sia $A$ una matrice quadrata reale di ordine $n$. Cosa si intende per *autovalore* di $A$? Un autovalore può essere nullo? (Se si scrivere un esempio, se no dire perché)

**6.** Nelle notazioni del secondo punto dell'esercizio 1, sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, nel riferimento canonico, alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Si calcolino autovalori ed autovettori di $f$ e si stabilisca se $f$ è diagonalizzabile.

**7.** Fissato nel piano un riferimento monometrico ortogonale, siano dati i punti $A(1,-1)$ e $B(2,1)$. Dette $r$ la retta per $A$ parallela all'asse $y$ e $r'$ la retta per $B$ ortogonale a $x - 2y + 1 = 0$, determinare il punto comune a $r$ e $r'$.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il punto $P(2,-3,1)$, e la retta $r : \begin{cases} 2x - y + 2z & = & 1 \\ 4x - y & = & 0 \end{cases}$. Rappresentare la retta passante per $P$ ortogonale ed incidente $r$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r \ : \ (x,y,z) = (3,0,2) + t(2,1,0)$ e $r' \ : \ x + y + z - 2 = x - 2y - z - 1 = 0$ sono incidenti e rappresentare la sfera di raggio 3 avente centro nel punto $C = r \cap r'$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

○ Gr. 1 Bader (A-G) ○ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ 2x - 2y + z - t = 2 \\ -x + y - 2z + 2t = -1 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

**2.** Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali sul campo reale. Cosa vuol dire che l'applicazione $T : V \mapsto W$ è lineare?

**3.** In $\mathbb{R}^3$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori $S_1 = \{(1,0,1),(0,-1,0)\}$, $S_2 = \{(0,1,-1),(0,1,-1)\}$, $S_3 = \{(0,1,1),(-1,1,1),(2,0,0),(3,1,0)\}$
stabilire, giustificando le risposte,

(i) se è linearmente dipendente o indipendente;
(ii) se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;
(iii) se è una base di $\mathbb{R}^3$;
(iv) se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, esibirne un completamento.

**4.** Sia $h$ l'ultima cifra del Suo numero di matricola. Scrivere un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $(1,h,0)$ appartenga al nucleo di $T$.

**5.** Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa;
(ii) dire (giustificando la risposta e senza calcolare il polinomio caratteristico di $A$) se $(1, 3, -2)$ è autovettore di $A$ ed in caso affermativo calcolarne il relativo autovalore.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2z, 3y, 2x + z)$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se $f$ è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;
(iii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;
(iv) dire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, scrivere una retta parallela all'asse $x$ ed una retta ortogonale alla retta $x - 2y + 3 = 0$. Calcolare il punto di intersezione di tali rette.

**8.** Cosa vuol dire che le rette $r$ ed $s$ sono sghembe? Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si scriva una retta che sia sghemba con l'asse $y$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi : x + 3y - 3 = 0$ ed il punto $A(-1, 2, 0)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ ortogonale a $\pi$;

(ii) la sfera avente centro in $A$ e tangente $\pi$.

GEOMETRIA Napoli, 18 giugno 2014

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y + z - t & = & 1 \\ 2x - 2y - z + t & = & 2 \\ -x + y + 2z - 2t & = & -1 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale. Cosa vuol dire che l'applicazione $T : V \mapsto V$ è un endomorfismo?

**3.** In $\mathbb{R}^3$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori $S_1 = \{(1,0,-1),(-1,0,1),\}$, $S_2 = \{(0,1,-1),(0,1,1)\}$, $S_3 = \{(0,1,1),(1,1,-1),(0,0,2),(3,-1,0)\}$
stabilire, giustificando le risposte,

(i) se è linearmente dipendente o indipendente;
(ii) se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;
(iii) se è una base di $\mathbb{R}^3$;
(iv) se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, esibirne un completamento.

**4.** Sia $h$ l'ultima cifra del Suo numero di matricola. Scrivere un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $(1,h)$ appartenga al nucleo di $T$.

**5.** Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa;

(ii) dire (giustificando la risposta e senza calcolare il polinomio caratteristico di $A$) se $(1, 3, -2)$ è autovettore di $A$ ed in caso affermativo calcolarne il relativo autovalore.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = ((x + 2z, 4y, 4x - z))$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;

(ii) dire se $f$ è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;

(iii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;

(iv) dire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, scrivere una retta parallela all'asse $x$ ed una retta ortogonale alla retta $x - y + 3 = 0$. Calcolare il punto di intersezione di tali rette.

**8.** Cosa vuol dire che le rette $r$ ed $s$ sono sghembe? Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si scriva una retta che sia sghemba con l'asse $x$.

**9.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi\ :\ x + 3z - 3 = 0$ ed il punto $A(-1, 0, 2)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ ortogonale a $\pi$;
(ii) la sfera avente centro in $A$ e tangente $\pi$.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Esiste un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite compatibile che abbia infinite soluzioni? Se sì, se ne scriva un esempio; se no, si dica perché.

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale e sia $W$ un suo sottoinsieme. Cosa vuol dire che $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$? Esibire (cioè, scriverne un esempio) un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che abbia dimensione 2.

**3.** Dire per quali valori del parametro reale $t$ il sistema di vettori $\{(t,1,1),(1,-t,2t),(2t,0,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

**4.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ciascuna delle seguenti applicazioni lineari:

(i) $f : \mathbb{R}_2[x] \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $f(ax^2+bx+c) = (a-b, c-2a)$;

(ii) $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x,y,z,t) = (x+2y, z-y, x+y+z)$.

**5.** Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, 4y, x + 4z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(1, -3) + (-1, 3)$ e $s : 3x + y - 4 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi : x + 2z - 3 = 0$ ed il suo punto $A(-1, 5, 2)$. Rappresentare le due sfere di raggio 4 tangenti $\pi$ in $A$.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi : x+3y-z-3 = 0$, la retta $r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$ e il punto $A(-1, 1, 0)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ parallela a $r$;

(ii) il piano per $A$ parallelo a $r$ e ortogonale a $\pi$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Esiste un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite incompatibile, cioè che non abbia soluzioni? Se sì, se ne scriva un esempio; se no, si dica perché.

**2.** Sia $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ un insieme di vettori di uno spazio vettoriale sul campo reale. Cosa vuol dire che $S$ è linearmente dipendente? Esibire (cioè, scriverne un esempio) un sistema di tre vettori di $\mathbb{R}^3$ che sia linearmente dipendente.

**3.** Dire per quali valori del parametro reale $t$ il sistema di vettori $\{(t,-1,-1),(1,-2t,t),(2t,0,-3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

**4.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ciascuna delle seguenti applicazioni lineari:

(i) $f : \mathbb{R}_2[x] \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $f(ax^2 + bx + c) = (a - c, b - 2a)$;

(ii) $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z, t) = (x + 3y, z - 2y, x + y + z)$.

**5.** Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, 3y, x + 3z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(-3, 1) + (3, -1)$ e $s : x + 3y - 4 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

**8.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi \; : \; x + 2y - 3 = 0$ ed il suo punto $A(-1, 2, 5)$. Rappresentare le due sfere di raggio 4 tangenti $\pi$ in $A$.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi \, : \, x - y + 3z - 3 = 0$, la retta $r : \begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \end{cases}$ e il punto $A(-1, 0, 1)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ parallela a $r$;
(ii) il piano per $A$ parallelo a $r$ e ortogonale a $\pi$.

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale e sia $W$ un suo sottoinsieme. Cosa vuol dire che $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$? Dare un esempio di sottospazio vettoriale proprio (cioè diverso da tutto $\mathbb{R}^3$) di $\mathbb{R}^3$.

**2.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t &= 0 \\ 3x - 3y + z - t &= 0 \\ x - y - 2z + 2t &= 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;

(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e scriverne una base.

**3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale.

(i) Cosa vuol dire che $V$ ha dimensione 3?

(ii) Se $V$ ha dimensione 3 e $S = \{v, w, u, z\}$ è un sistema di vettori di $V$ a due a due distinti, possiamo dire che $S$ è linearmente dipendente? ◯ Si ◯ No Perché?

**4.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z, t) = (x - 2y, z - y, x - y - z)$.

**5.** Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, -y, x - z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(1, 4) + (1, 0)$ e $s : x + 4y - 1 = 0$ sono ortogonali e calcolarne il punto di intersezione.

**8.** Fissato nello piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(1,9), R(-1,9)$ e calcolarne centro e raggio.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi\ :\ x+y-z-1=0$, la retta $r : \begin{cases} x-y+z & = & 0 \\ 3x-3y+2z & = & 1 \end{cases}$ ed i punti $A(-1,1,0)$, $B(0,1,0)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ ortogonale a $\pi$;
(ii) il piano per $A$ parallelo a $r$ e ortogonale a $\pi$;
(iii) la sfera tangente a $\pi$ in $B$ passante per l'origine.

GEOMETRIA Napoli, 16 settembre 2014

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale e sia $U$ un suo sottoinsieme. Cosa vuol dire che $U$ è un sottospazio vettoriale di $V$? Dare un esempio di sottospazio vettoriale proprio (cioè diverso da tutto $\mathbb{R}^2$) di $\mathbb{R}^2$.

**2.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y - z - t = 0 \\ x - y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;

(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e scriverne una base.

**3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo reale.

(i) Cosa vuol dire che $V$ ha dimensione 2?

(ii) Se $V$ ha dimensione 2 e $S = \{v, w, u\}$ è un sistema di vettori di $V$ a due a due distinti, possiamo dire che $S$ è linearmente dipendente? ◯ Si ◯ No Perché?

**4.** Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z, t) = (x - 2z, z - y, x - y - z)$.

**5.** Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (-x, y, x + z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**7.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(4, 1) + (0, 1)$ e $s : 4x + y - 1 = 0$ sono ortogonali e calcolarne il punto di intersezione.

**8.** Fissato nello piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(9,1), R(9,-1)$ e calcolarne centro e raggio.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi\ :\ x+y-z-1=0$, la retta $r : \left\{ \begin{array}{rcr} x-y-z & = & 0 \\ 3x-3y-2z & = & -1 \end{array} \right.$ ed i punti $A(1,-1,0)$, $B(1,0,0)$. Si rappresentino

(i) la retta per $A$ ortogonale a $\pi$;
(ii) il piano per $A$ parallelo a $r$ e ortogonale a $\pi$;
(iii) la sfera tangente a $\pi$ in $B$ passante per l'origine.

# Esercizi 1

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015

Laurea in Informatica

**1.** Dato il riferimento $\mathcal{R} = (1+x, -x^2, x-x^2)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 2 (con le operazioni usuali), determinare le componenti in $\mathcal{R}$ del generico polinomio di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

**2.** Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi?

$$
\begin{aligned}
&X = \{\alpha(2,1,-1) + (1,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3,\\
&Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=1\} \subseteq \mathbb{R}^3,\\
&Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\geq 3},\\
&T = \{a + (a+b)x + bx^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\geq 2}.
\end{aligned}
$$

**3.** Completare in una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ (con le operazioni usuali) quelli tra i seguenti sistemi di vettori che sono linearmente indipendenti:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = [(1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,1)];\\
&S_2 = [(1,2,1,1), (0,3,2,4)];\\
&S_3 = [(2,-1,1,0), (-4,2,-2,1), (1,1,1,1)].
\end{aligned}
$$

**4.** Per ciascuno dei seguenti sottospazi, determinare una base. Per ciascuno dei sottospazi $U$ e $W$ determinare anche un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio è l'insieme delle soluzioni. Inoltre, determinare una base di $W \cap T$.

$$
\begin{aligned}
&U = \mathcal{L}((2,3,1), (1,0,1), (1,3,0), (-1,0,-1)) \subseteq \mathbb{R}^3,\\
&W = \mathcal{L}((1,0,1,-1), (2,0,2,-2), (1,1,1,1), (0,1,0,2)) \subseteq \mathbb{R}^4,\\
&T : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right. \subseteq \mathbb{R}^4.
\end{aligned}
$$

**5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 5 su un campo $K$ e siano $U$ e $V$ due suoi sottospazi vettoriali. Se la dimensione di $U$ è 3 e quella di $W$ è 4, quali valori può assumere la dimensione di $U \cap W$?

**6.** Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}
$$

## Esercizi 2

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015
Laurea in Informatica

**1.** Cosa è il rango di una matrice su un campo $\mathbb{K}$?

**2.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $ABD$.

**3.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:
$L((7,-5,1,2,5),(4,-3,5,25,3),(4,-7,-3,-21,7),(-3,2,-4,-1,-2))$;
$L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1))$;
$L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0))$.

**4.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile?

**5.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**6.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici e la matrice inversa di ciascuna di quelle che sono invertibili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Esercizi 3

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015

Laurea in Informatica

**1.** Si dica quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x + 2y, x - y + 1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 3a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (x_1 + x_3, x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2x_2, x_1^2 + x_2) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 0, 1) = (1, 2, 0)$, $f(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$, si può determinare $f(0, 1, 2)$? Si può determinare $f((x_1, x_2, x_3))$, per ogni vettore $(x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**3.** Siano $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ e $u_3 = (0, 1, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1, 1, 1)) = (1, 0, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1)$ e $f((0, 1, 2)) = (0, 0, 1)$.

**4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare nucleo, immagine di $f$.
(b) Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1, x_2, x_3)$ tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (1, 0, 1)$.

**5.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$
$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)).$

**6.** Dati i riferimenti $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{R}' = ((0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $Q$ di cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ e quella $P$ da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (x + 2y, y - z, x + y + z)$, calcolare la matrice $A$ associata a $f$ in $\mathcal{R}$ e quella $B$ associata a $f$ in $\mathcal{R}'$. Osservare che $B = P^{-1}AP$ e $A = Q^{-1}BQ$.

**7.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

## ESERCIZI 4

**1.** Dare la definizione di spazio affine, di riferimento affine e di coordinate di un punto in un riferimento affine.

**2.** Dare la definizione di spazio vettoriale euclideo, di riferimento ortonormale e di spazio affine euclideo.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(-2,3)$ e $B(1,-1)$.

(i) Determinare la retta $r$ passante per i punti $A$ e $B$.

(ii) Determinare la retta $s$ ortogonale al vettore $AB$ e passante per il punto $O(0,0)$ e la distanza di $s$ dal punto $B$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, si considerino la retta $r : 2x - y + 3 = 0$ e il punto $P(2,1)$.

(i) Determinare la retta $s$ passante per $P$ e parallela a $r$ e calcolare la distanza tra $r$ e $s$.

(ii) Determinare due punti $B_1$ e $B_2$ di $r$ tali che il triangolo $PB_1B_2$ sia rettangolo.

(iii) Determinare la circonferenza avente $r$ come retta tangente nel punto $A(-1,1)$ e passante per il punto $P$.

**4.** Nello spazio della geometria elementare, dire cosa sono due rette sghembe.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare,

(i) verificare che i punti $A(1,2,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(2,0,0)$ non sono allineati e determinare il piano passante per essi.

(ii) Considerato il piano $\alpha : 2x - y - z = -1$, determinare un piano ortogonale a $\alpha$ e una retta per $P(1,1,1)$ parallela a $\alpha$.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : (x,y,z) = (1,2,-1) + (2,2,1)t$.

(i) Verificare che la retta $s : \begin{cases} x - y - z &= -2 \\ -2x + y - 2z &= -1 \end{cases}$ è sghemba con $s$ e determinare la distanza tra $s$ e $r$.

(ii) Determinare il piano contenente $r$ e il punto $O(0,0,0)$.

(iii) Determinare una retta complanare con $r$ e il piano che contiene entrambe le rette.

(iii) Determinare la sfera tangente al piano ortogonale a $r$ nel punto $P(1,-1,0)$ e con centro sulla retta passante per i punti $A(0,1,1)$ e $B(1,1,1)$.

# Esercitazione guidata 1

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015

Laurea in Informatica

**1.** Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali, determinare una base e un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio risulti essere l'insieme delle soluzioni.

$$\mathcal{L}((2,-4,3,1),(1,0,1,1),(1,-4,2,0)) \subseteq \mathbb{R}^4,$$
$$\mathcal{L}((0,1,-2)) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

**2.** Completare in una base dello spazio ambiente ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulti linearmente indipendente.

$$X = [(1,3,-1,0),(0,0,1,1)] \subseteq \mathbb{R}^4,$$
$$Y = [1+x, 2-2x+x^2] \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2},$$
$$Z = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \right] \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

**3.** Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia $B = [u,v,w,x]$ una sua base. Si considerino i sottospazi vettoriali $U = \mathcal{L}(u+2v, v+w, w+x)$ e $W = \mathcal{L}(u-2w, u+x)$.

(i) Si determinino $U+W$ e $U \cap W$.

(ii) Si determini un sommando diretto di $W$.

(iii) Si determinino le componenti nel riferimento $\mathcal{R}(v,u,x,w)$ dei vettori generatori di $U$ e $W$, rispettivamente.

**4.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

## Esercitazione guidata 2

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015
Laurea in Informatica

**1.** Si dica quali delle seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari:

$f_1 : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \to (a - bc, a + 2b) \in \mathbb{R}^2;$
$f_2 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (2a_1 - a_2, a_0 + 2a_2) \in \mathbb{R}^2$
$f_3 : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \to \in \begin{pmatrix} b+c & 1+b \\ 2a-c & c \end{pmatrix} \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$

**2.** Un'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((1,2,-1)) = (1,0,1)$, $f((-1,-1,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,0)) = (1,1,1)$ può essere lineare?

**3.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$ e una di $Kerf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**4.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto a dei riferimenti fissati:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$

$$S = \{2x - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

**5.** Sia $\mathcal{R} = (e_1, e_2, e_3)$ un riferimento dello spazio vettoriale $V^3$ dei vettori liberi dello spazio della geometria elementare e sia $f : V^3 \to V^3$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = 2e_3 - e_2$, $f(e_2) = e_1 + 2e_3$ e $f(e_3) = e_1 - e_2$. Determinare il nucleo e l'immagine di questa applicazione.

# Esercitazione guidata 3

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015
Laurea in Informatica

**1.** Di consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3).$$

(i) Determinare una base di $Kerf$ e una base di $Imf$.

(ii) Determinare la matrice associata a $f$ nei riferimenti $\mathcal{R} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{R}' = ((1,2),(-1,1))$ di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determinare la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R}'$ a quello $\overline{\mathcal{R}} = ((1,-1),(0,1))$ di $\mathbb{R}^2$.

**2.** Sia $\phi_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $\phi_A$ è iniettiva e suriettiva.

(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $\phi_A$.

(iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile?

# Esercitazione guidata 4

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2014-2015
Laurea in Informatica

**1.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) ortogonale di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(2,-5)$, $B(0,1)$ e $C(5,-4)$. Dimostrare che i vettore $AB$ e $AC$ sono ortogonali. Quali sono i punti $D$ diversi da $C$ tali che $AD$ sia ortogonale a $AB$?

**2.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y+z=0. \end{cases}$

(i) Determinare il piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per il punto $A(1,0,1)$.

(ii) Determinare due piani differenti ortogonali a $\pi$ e passanti per il punto $B(1,1,0)$.

(iii) Determinare il piano parallelo a $r$, ortogonale a $\pi' : -2x+y-z+1=0$ e passante per il punto $C(1,2,-1)$. Qual è la distanza tra questo piano ed $r$?

(iv) Data la retta $s : \begin{cases} x &= t \\ y &= 1-t \\ z &= 3+t \end{cases}$ dire se $s$ e $r$ sono sghembe e se sono ortogonali.

GEOMETRIA Napoli, 21 gennaio 2015

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t &= 0 \\ 2x - 2y + z - t &= 0 \\ x - y + 2z - 2t &= 1 \end{cases}$

Con il metodo di eliminazione di Gauss, dimostrare che il sistema è incompatibile, cioè che non ammette soluzioni.

**2.** (i) Cosa vuol dire che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 ?

(ii) Senza fare calcoli, perché possiamo dire che $\{(1,2,1),(1,-3,4)\}$ non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$?

(iii) Esistono altri spazi vettoriali, diversi da $\mathbb{R}^3$, che abbiano dimensione 3 ? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

**3.** Calcolare una base di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali
$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = 0\}$
$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y - x = x - 2z = 0\}$
$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ y - x = x - 2z = 0\}$

**4.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali sul campo reale e sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione.
(i) Cosa vuol dire che $f$ è lineare?

(ii) Dare la definizione di $ker f$ (nucleo di $f$) e di $Im f$ (immagine di $f$).

**5.** Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, verificando il risultato ottenuto.

**6.** Sia $f$ un endomorfismo dello spazio vettoriale $V$. E' vero che se 0 e' autovalore di $f$ allora $ker f$ contiene almeno un vettore non nullo? (suggerimento : usare la definizione di autovalore).

**7.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (6y, x + z, x + z)$,

(i) calcolare una base di $ker f$ ed una base di $Im f$;
(ii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;
(iii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(-1, 2) + (1, 0)$ e $s : 2x + y - 1 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y & = & 1 \\ x - y + z & = & 2 \end{cases}$ e $s \ : \ (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 2, 1)$.

(i) si dimostri che $r$ ed $s$ sono incidenti e si calcolino le coordinate del punto $P$ di intersezione di $r$ e $s$;

(ii) si rappresenti la retta per $P$ ortogonale sia a $r$ che a $s$;

(iii) si rappresenti il piano che contiene sia $r$ che $s$.

GEOMETRIA Napoli, 21 gennaio 2015

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y + z - t &= 0 \\ 2x - 2y - z + t &= 0 \\ x - y - 2z + 2t &= 1 \end{cases}$

Con il metodo di eliminazione di Gauss, dimostrare che il sistema è incompatibile, cioè che non ammette soluzioni.

**2.** (i) Cosa vuol dire che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 ?

(ii) Senza fare calcoli, perché possiamo dire che $\{(1,1,2),(1,4,-3)\}$ non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$?

(iii) Esistono altri spazi vettoriali, diversi da $\mathbb{R}^3$, che abbiano dimensione 3 ? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

**3.** Calcolare una base di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali
$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$
$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = y - 2z = 0\}$
$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y - 2z = 0\}$

**4.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali sul campo reale e sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione.
(i) Cosa vuol dire che $f$ è lineare?

(ii) Dare la definizione di $ker f$ (nucleo di $f$) e di $Im f$ (immagine di $f$).

**5.** Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, verificando il risultato ottenuto.

**6.** Sia $f$ un endomorfismo dello spazio vettoriale $V$. E' vero che se 0 e' autovalore di $f$ allora $ker f$ contiene almeno un vettore non nullo? (suggerimento : usare la definizione di autovalore).

**7.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (-2y, -x + z, -x + z)$,

(i) calcolare una base di $ker f$ ed una base di $Im f$;
(ii) calcolare autovalori ed autospazi di $f$;
(iii) dire, giustificando la risposta, se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f$.

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(2, -1) + (0, 1)$ e $s : x + 2y - 1 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y & = & 1 \\ -x + y + z & = & 2 \end{cases}$ e $s \; : \; (x, y, z) = (0, 1, 1) + t(2, 1, 1)$.

(i) si dimostri che $r$ ed $s$ sono incidenti e si calcolino le coordinate del punto $P$ di intersezione di $r$ e $s$;
(ii) si rappresenti la retta per $P$ ortogonale sia a $r$ che a $s$;
(iii) si rappresenti il piano che contiene sia $r$ che $s$.

GEOMETRIA Napoli, 25 febbraio 2015

COGNOME .................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi, dire (senza dimostrarlo) se è un sottospazio e, in caso affermativo, calcolarne una base:
$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$
$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$
$S_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - 3t = 0\}$

**2.** Sia $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ un sistema di vettori dello spazio vettoriale $V$.
(i) Cosa vuol dire che $S$ è un sistema di vettori *linearmente indipendenti*?

(ii) Cosa vuol dire che $S$ è un *sistema di generatori* di $V$?

**3.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esistono sottospazi di dimensione 2? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

**4.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, esistono sottospazi di dimensione 3? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

**5.** Data la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 1 & 2 & t^2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolarne il determinante e dire per quali valori del parametro reale $t$ essa risulta invertibile

**6.** Cosa vuol dire che $f$ è un *endomorfismo* dello spazio vettoriale $V$? Esiste un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,0) = (2,0,1)$ e $f(-1,0,0) = (2,1,-1)$? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

**7.** Siano $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Posto $A = 2B - C^T$ dove $C^T$ indica la trasposta di $C$ ,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $A$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$.

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i punti $A(1, 2)$ e $B(-2, 4)$. Determinare un punto $C$ tale che il triangolo $ABC$ sia rettangolo nel vertice $B$.

**9.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette (parallele) $r : (x, y) = t(1, -2) + (1, 0)$ e $s : 2x + y + 3 = 0$.

(i) calcolare la distanza tra $r$ e $s$;
(ii) determinare una circonferenza che sia tangente sia a $r$ sia a $s$.

**10.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x - z = 0$.

(i) si dimostri che $r$ ed $\pi$ sono incidenti calcolando le coordinate del punto $P$ di intersezione di $r$ e $\pi$;
(ii) si rappresenti il piano $\alpha$ per $P$ ortogonale a $\pi$ e parallelo a $r$.

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA...........................

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dato il sistema lineare $S : \begin{cases} 2x - y + t & = 0 \\ 6x - 3y - z & = 0 \\ -4x + 2y + z + t & = 0 \end{cases}$

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

**2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e siano $v, w \in V$. Il sistema di vettori $\{v, w, v + w\}$ è linearmente dipendente? ◯ si ◯ no Perché?

**3.** Quanti vettori contiene $L(\ (0,0,0),(1,1,1)\ )$? ◯ due ◯ tre ◯ infiniti Perché?

**4.** Scrivere la definizione di *nucleo* dell'applicazione lineare $f : V \mapsto W$ e dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $V$.

**5.** Dire per quali valori del parametro reale $t$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$ è invertibile.

**6.** Se 0 è autovalore della matrice $A$, possiamo dire che $detA = 0$? ◯ si ◯ no Perché?

**7.** Il polinomio $x^2 - 1$ puo' essere polinomio caratteristico di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$? (Se si scriverne uno, se no dire perché)

**8.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $A$;

(ii) dire, giustificando la risposta, se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$.

**9.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dire se l'equazione $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ rappresenta una circonferenza reale e in caso affermativo trovarne centro e raggio.

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, è vero che la retta $r: \begin{cases} x+y-2z & = & 0 \\ 2x-3y+z-1 & = & 0 \end{cases}$ è contenuta nel piano $x-4y+3z=0$ ? ◯ si ◯ no Perché?

**11.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P=(0,0,1)$, la retta $r: \begin{cases} 2x-y+z+3 & = & 0 \\ x+3y+4z+2 & = & 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi: x+y+z-1=0$. Rappresentare il piano passante per $P$, parallelo a $r$ e ortogonale a $\pi$

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA...........................

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dato il sistema lineare $S : \begin{cases} x - 2y + t & = & 1 \\ 2x - y - 2z & = & 0 \\ 3y - 2z - 2t & = & 1 \end{cases}$

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne l'insieme delle soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

**2.** Esistono sistemi di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ contenenti 4 vettori? (Se si scriverne uno, se no dire perché)

**3.** Dimostrare che $\mathcal{B} = (\ (1,1),(1,0)\ )$ è un riferimento di $\mathbb{R}^2$ e trovare le componenti del vettore $(3,5)$ in $\mathcal{B}$.

**4.** Dati gli spazi vettoriali $V$ e $W$ sul campo reale, scrivere la definizione di *applicazione lineare* $f : V \mapsto W$ e scrivere un esempio di applicazione *non* lineare $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$.

**5.** Scrivere la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (x - 2y, y - 2x)$ nel riferimento $B = (\ (1, 1), (-1, 1)\ )$.

**6.** Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e calcolarne l'inversa (in funzione del parametro $t$).

**7.** Verificare, utilizzando la definizione, che $(1,0,-1)$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e calcolare l'autovalore relativo.

**8.** Sia $f$ l'endomorfismo di $R^3$ definito da $f(x,y,z) = (x, x+2y, z)$.

(i) Dire se $f$ è iniettiva;
(ii) calcolare gli autovalori e scrivere una base per ciascuno degli autospazi di $f$;
(iii) dire se $f$ è diagonalizzabile e perché.

**9.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r: x - 2y + 1 = 0$ e $s: (x, y) = (1, -2)t + (3, 2)$.

(i) Le rette $r$ e $s$ sono parallele? ◯ si ◯ no Perché?

(ii) Le rette $r$ e $s$ sono ortogonali? ◯ si ◯ no Perché?

(iii) Il punto $P(4, 1)$ appartiene alla retta $s$ ? ◯ si ◯ no Perché?

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1, 0, 1)$, la retta $r: \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ 3y - 2z + 3 & = & 0 \end{array} \right.$ ed il piano $\pi: 2x + y - 4z - 1 = 0$. Rappresentare

(i) il piano passante per $P$ e parallelo a $\pi$

(ii) il piano passante per $P$ e ortogonale a $r$

(iii) il piano contenente l'origine e la retta $r$

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA..........................

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Dato il sistema lineare $S : \begin{cases} x + 2y + t &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ 3y + 2z + 2t &= -1 \end{cases}$

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne l'insieme delle soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

**2.** Esistono sistemi di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ contenenti 3 vettori? (Se si scriverne uno, se no dire perché)

**3.** Dimostrare che $\mathcal{B} = (\ (1,0), (1,1)\ )$ è un riferimento di $\mathbb{R}^2$ e trovare le componenti del vettore $(3,4)$ in $\mathcal{B}$.

**4.** Dati gli spazi vettoriali $V$ e $W$ sul campo reale, scrivere la definizione di *applicazione lineare* $g : V \mapsto W$ e scrivere un esempio di applicazione *non* lineare $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$.

**5.** Scrivere la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (x - 2y, y - 2x)$ nel riferimento $B = (\ (1, 1), (-1, 1)\ )$.

**6.** Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e calcolarne l'inversa (in funzione del parametro $t$).

**7.** Verificare, utilizzando la definizione, che $(1,-1,0)$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ e calcolare l'autovalore relativo.

**8.** Sia $f$ l'endomorfismo di $R^3$ definito da $f(x,y,z) = (x, 2y+z, z)$.

(i) Dire se $f$ è iniettiva;
(ii) calcolare gli autovalori e scrivere una base per ciascuno degli autospazi di $f$;
(iii) dire se $f$ è diagonalizzabile e perché.

**9.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : 2x - y - 1 = 0$ e $s : (x, y) = (-2, 1)t + (2, 3)$.

(i) Le rette $r$ e $s$ sono parallele? ◯ si ◯ no Perché?

(ii) Le rette $r$ e $s$ sono ortogonali? ◯ si ◯ no Perché?

(ii) Il punto $P(1, 4)$ appartiene alla retta $s$ ? ◯ si ◯ no Perché?

**10.** Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati il punto $P = (1, 0, 1)$, la retta $r : \begin{cases} y - z &= 0 \\ -2x + 3y + 3 &= 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : -4x + y + 2z - 1 = 0$. Rappresentare

(i) il piano passante per $P$ e parallelo a $\pi$
(ii) il piano passante per $P$ e ortogonale a $r$
(iii) il piano contenente l'origine e la retta $r$

GEOMETRIA Napoli, 16 settembre 2015

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si scriva un sistema lineare in 3 incognite su $\mathbb{R}$ che ammetta infinite soluzioni, tra cui il vettore $(1, 2, 3)$.

**2.** Dire (senza dimostrarlo) quale dei seguenti sottoinsiemi è sottospazio e, per quelli che lo sono, scrivere una base:
(1) $\{(a, -2a + 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$;
(2) $\{(a, \sqrt{2}a, b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;
(3) $L(\ (1, 0, 2), (2, 0, -3), (0, 0, 0)\ )$.

**3.** Scrivere la definizione di sistema di vettori *linearmente indipendente*.

**4.** Scrivere la definizione di *endomorfismo* di uno spazio vettoriale $V$ sul campo reale.

**5.** Calcolare una base e scrivere una rappresentazione cartesiana del sottospazio $U = L\{(1,2,1,4),$ $(3,0,3,6),(0,2,0,2)\}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^4$ (ossia, un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni sia $U$).

**6.** È vero che $\{(0,0),(-1,1),(1,-1)\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione uno? ◯ si ◯ no
Perché?

**7.** Scrivere la definizione di *autovalore* di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$.

**8.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(i) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Calcolare autovalori ed autospazi di $A$.
(iii) Stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

**9.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ per il quale $f(1,0) = (0,0)$ e $f(1,1) = (2,2)$. Senza calcolare $f$ e senza calcolare il polinomio caratteristico, dire perché $f$ è diagonalizzabile.

**10.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la retta $r$ per $A(1,-2)$ ortogonale alla retta congiungente $A$ con l'origine e scrivere una (qualsiasi) delle due rette a distanza 1 da $r$.

**11.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano date le rette $r$ : $\begin{cases} x-y &= 0 \\ 3y-2z &= 3 \end{cases}$ e $s : (x,y,z) = (2,2,1) + t(1,1,1)$. Dimostrare che $r$ e $s$ sono complanari e rappresentare il piano che le contiene.

## Esercizi 1

**1.** Cosa è uno spazio vettoriale su un campo $K$?

**2.** Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**3.** Dato uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$, cosa è un sottospazio vettoriale di $V$?

**4.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

$X = \{\alpha(2, 1, -1) + (1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$,
$T = \{a + (a + b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

**5.** Dati $r$ vettori $v_1, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**6.** Fissato un riferimento $\mathcal{B}$ (ossia, una base ordinata) di uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

**7.** Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), 0, 1, 0))$.

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,3}$ in

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

**8.** Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$.

(ii) Dire se $S$ è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3$?

(iii) Il vettore $w = (0, 0, 1)$ dipende linearmente da $S$? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, w$?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da $S$? Il sistema $S$ è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

**9.** Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano $u_1$ e $u_2$ due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.

(ii) Esibire un vettore di lunghezza 3.

(iii) I vettori $u_1$ e $u_2$ possono essere paralleli?

# ESERCIZI 2

**1.** Dati $t$ vettori $v_1, \dots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, sia $S$ il sistema da essi costituito. Cosa vuol dire che:

(i) $S$ è linearmente indipendente;
(ii) $S$ è linearmente dipendente;
(iii) $S$ è un sistema di generatori di $V$.

**2.** Spiegare perché tre vettori liberi $u, v, w$ complanari (ossia, paralleli a uno stesso piano) non sono linearmente indipendenti.

**3.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo $K$.

(i) Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?
(ii) Dare un esempio di spazio vettoriale che *non* è finitamente generato.
(iii) Descrivere un sistema di generatori per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ dei vettori liberi di un piano della geometria elementare.

**4.** Cosa è una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$? Esibire un esempio di base di uno spazio vettoriale.

**5.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $K$. Dire cosa è la dimensione di $V$.

**6.** Qual è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_\pi$ dei vettori liberi paralleli a un piano $\pi$?

**7.** Dimostrare che $S = \{(2,1), (-1,0), (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ è un sistema di generatori dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Estrarre da $S$ una base di $\mathbb{R}^2$.

**8.** Determinare una base del sottospazio vettoriale $L(\{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,-1)\}) \subseteq R^3$ e una base del sottospazio vettoriale $L(\{1+x, 2+2x, x+x^3\}) \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

**9.** Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di vettori è linearmente indipendente e completare in una base dello spazio vettoriale ambiente i sottoinsiemi che risultano essere linearmente indipendenti.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_{3,2}$$

$$T = \{(0,1,-1,2), (1,1,0,1), (0,1,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$Z = \{-x^2 + x^4, 1+x, x+x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

## ESERCIZI 3

**1.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} & y & +2z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 1 \\ & y+ & 3z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \end{cases}$$

**2.** Ridurre a scalini le seguenti matrici

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad (e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

**3.** Cosa è il rango di una matrice su un campo $\mathbb{K}$?

**4.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $ABD$.

**5.** Determinare un sistema di equazioni lineari omogenee di cui il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ è l'insieme delle soluzioni:

$$\mathcal{L}((1,2,0,1),(2,1,-1,1),(-1,4,2,1)).$$

## ESERCIZI 4

**1.** Determinare una base per i sottospazi di soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ & -x_2 & -3x_3 & & +x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & +2x_5 & & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & -2x_4 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

**2.** Determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio $L((2,-3,1,0),(-1,2,1,0))$ di $\mathbb{R}^4$ costituisce l'insieme delle soluzioni.

**3.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**4.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**5.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**6.** Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 su un campo $\mathbb{K}$ e siano $H$ e $W$ due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 2$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.

# ESERCIZI 5

**1.** Dati due spazi vettoriali $V$ e $V'$ su uno stesso campo $K$, dire cosa è un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$.

**2.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché $f$ non è un'applicazione lineare.

**3.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a+2b, a-b+1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.
Per le applicazioni che sono lineari, determinare un sistema di generatori dell'immagine.

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore $(x_1,x_2,x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**5.** Siano $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (0,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1,1,1)) = (1,0,0)$, $f((1,0,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,2)) = (0,0,1)$.

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1-x_3, x_1+x_2-x_3, x_1-x_2)$.
(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di $f$.
(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1,x_2,x_3)$ tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

**7.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

## ESERCIZI 6

**1.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3},$$
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

**2.** Studiare le applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad (e) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**3.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$$f_1 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$$
$$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right);$$
$$f_2 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$
$$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$$
$$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$$
$$\mathcal{R} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0,1,1), (1,0,1), (0,1,0)).$$

## ESERCIZI 7

**1.** Data un'applicazione lineare $f$ tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a $f$ in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

**2.** Dire cosa è un endomorfismo.

**3.** Dati i riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,2,1),(0,0,1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0,-1,1),(0,1,1),(1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella $Q$ da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y+z, x+y+z)$, determinare la matrice $A$ associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $B$ associata a $f$ in $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $B = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}BP$.

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1,0,1)) = -1+2x-x^2+x^3$, $f((1,1,2)) = 4x+x^3$ e $f((0,0,1)) = 2x-x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1,a_2,a_3))$, per ogni vettore $(a_1,a_2,a_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine $Imf$ e il nucleo $Kerf$ di $f$;

(b) dire se l'applicazione $f$ è iniettiva o suriettiva e perché;

(c) scrivere la matrice associata a $f$ nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,0,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1+x, -x^2, x+x^3)$.

**5.** Si considerino i seguenti riferimenti di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,1),(1,-1,1)), \quad \bar{\mathcal{B}} = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)).$$

(a) Determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice $Q$ di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto $PQ$? E $QP$?

(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2-x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{B}$ e quella associata a $f$ nel riferimento $\bar{\mathcal{B}}$. Che relazione sussiste tra queste due matrici?

## ESERCIZI 8

**1.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di una matrice quadrata su un campo $K$? Come si calcolano?

**2.** Determinare autovalori e autospazi delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo $f$? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a $f$ in un riferimento fissato?

**5.** Determinare la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A$ e dell'endomorfismo $f$.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**7.** Sia $F_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $F_A$ è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $F_A$.

## ESERCIZI 8

**1.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di una matrice quadrata su un campo $K$? Come si calcolano e perché? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile?

**2.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una matrice che la diagonalizza.

**4.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo $f$? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a $f$ in un riferimento fissato?

**5.** Determinare la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A$ e dell'endomorfismo $f$.

Nel caso in cui la matrice $A$ sia diagonalizzabile, determinare una matrice che la diagonalizza.

**6.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**7.** Sia $F_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $F_A$ è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $F_A$.
(iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile?

# ESERCIZI 9

**1.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico del piano della geometria elementare e cosa è un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare. Cosa sono le coordinate di un punto in un tale riferimento?

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati (ossia, se esiste una retta che contiene $A, B, C$), determinare le componenti del vettore $B - A$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ non parallela alla retta $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano (monometrico) di un piano della geometria elementare, si considerino le rette

$$r_1 : -3x + y - 4 = 0, \quad r_2 : 2x - 4y + 3 = 0, \quad r_3 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 + t \end{cases}, \quad r_4 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -3 - t \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r : \begin{cases} x &= & 1 + t \\ y &= & -1 - t \\ z &= & 2 + 2t \end{cases}$.

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x, y, z) = (1, 3, -2) + (0, 1, 1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x + z + 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= & 1 + t \\ y &= & 2t \\ z &= & 1 + 2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$.
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

# ESERCIZI 10

**1.** Sia $\mathcal{V}_\pi$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi paralleli a un dato piano $\pi$ e sia $\mathcal{B} = (u, v)$ un suo riferimento. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathcal{V}_\pi$ tale che $f(u) = 2u - 3v$ e $f(v) = -v$. Dimostrare che l'insieme $\{v, u + v\}$ è linearmente indipendente e determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R} = (v, u + v)$. Questa matrice è diagonalizzabile?

**2.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ si consideri la base ordinata $\overline{\mathcal{B}} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$. Dire qual è la base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**3.** Dire cosa è un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare e cosa è un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1, 2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1, 2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

**5.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare, si considerino la retta $r : x - y + 4 = 0$ e il punto $A(0, 2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a $r$ e passante per $A$.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da $r$.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$, la retta $s' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ e il punto $B(1, 0, 1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se $s$ e $s'$ sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra $s$ e $s'$
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino i punti $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, 1, -1)$. Dire se i vettori $AB$ e $AC$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $AD$ sia ortogonale a $AB$.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1, -1, 0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1, 0, 0)$.
(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(4) Determinare un piano ortogonale a $\pi$ e passante per $A$.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ e il punto $P(1, -1, 0)$.

(a) Determinare il piano $\alpha$ ortogonale a $s$ e passante per $P$.
(b) Determinare una retta $r$ incidente $s$ e una retta ortogonale sia a $r$ sia a $s$.
(c) La retta $r' : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (1, 2, 2)t$ è sghemba con $s$? Determinare un piano parallelo sia a $r'$ sia a $s$.

# ESERCIZI 11

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s : x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, determinare la circonferenza tangente alla retta $r : y-2=0$ e di centro $C(2,4)$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi : z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

GEOMETRIA Napoli, 26 gennaio 2016

Corso di laurea in Informatica, gruppo (H-Z) (Prof. F. Cioffi)

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

**1.** Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & 3x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 2 \end{cases}$$

**2.** Sia $S = \{u_1, \ldots, u_t\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$. Cosa vuol dire che $S$ è *linearmente indipendente*? Esibire un esempio di sistema linearmente indipendente dello spazio vettoriale $R[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado $\leq 3$ in una variabile su $\mathbb{R}$.

**3.** Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:
$W = L((0,1,2,0,-1),(1,-1,-2,1,1),(1,0,0,1,0),(0,0,1,1,0))$
$H = L((0,0,0,0,0),(1,2,-1,-1,1),(2,0,1,0,1))$
$X = L((1,1,-1,2,1),(2,1,1,-1,0),(0,-1,1,0,1))$.

**4.** Si consideri l'applicazione $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, x-z, y+z) \in \mathbb{R}^3$.
(i) Dimostrare che $f$ è un'applicazione lineare.
(ii) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di $f$.
(iii) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di $f$? Perché?

**5.** Per quali valori reali del parametro $k$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 3?

**6.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $A$;

(ii) dire se $A$ è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

**7.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, determinare la retta $r$ passante per il punto $A(1,-1)$ e parallela alla retta $s: 2x - y = 1$. Rappresentare una circonferenza che sia tangente a $r$ nel punto $A$.

**8.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ e $s: (x,y,z) = (1,-1,1) + t(1,0,1)$.

(i) Verificare che $r$ e $s$ *non* sono sghembe.
(ii) Determinare la retta ortogonale sia a $r$ sia a $s$ e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Calcolare la distanza tra $s$ e il punto $P(1,2,-1)$.

GEOMETRIA Napoli, 26 febbraio 2016

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Determinare un sistema di equazioni lineari in 4 incognite su $\mathbb{R}$ che abbia tra le sue soluzioni i vettori $(1, 2, -1, 1)$ e $(2, 2, 0, 1)$.

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato su un campo $K$, dire cosa è la dimensione di $V$ ed esibire uno spazio vettoriale di dimensione 3.

**2.** Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti e completarli in una base di $\mathbb{R}^4$:
$S = \{(1, 2, -1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$
$T = \{(2, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\}$

**4.** Dire quali tra le seguenti applicazioni è un'applicazione lineare:
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_1(x, y) = (2x + y, -y - 1)$
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_2(x, y) = (2x - 3y, x + y, x - y)$
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_3(x, y, z) = (xy, y - x)$

**5.** Dire cosa è il rango di una matrice reale ed esibire una matrice di tipo $3 \times 4$ che abbia rango 2.

**6.** Si consideri l'applicazione $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + 2y, x - z) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di $g$.

(ii) Determinare la matrice associata a $g$ nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, -1))$ di $\mathbb{R}^2$.

**7.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $A$;

(ii) dire se $A$ è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, determinare la retta $r$ passante per i punti $A(1,-1)$ e $B(-2,1)$ e determinare un punto $C$ tale che il triangolo $ABC$ sia rettangolo in $B$.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x-y &= 0 \\ x+y-z &= -2 \end{cases}$ e $s : (x,y,z) = (1,-1,1) + t(1,0,1)$ e il punto $A(0,1,1)$.

(i) Determinare il piano parallelo a $r$ e a $s$ e passante per il punto $A$.
(ii) Determinare il piano $\pi$ ortogonale $s$ e passante per il punto $A$.
(iii) Determinare una sfera tangente nel punto $A$ al piano $\pi$ precedentemente determinato.

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Determinare un sistema di equazioni lineari in 4 incognite su $\mathbb{R}$ che abbia tra le sue soluzioni i vettori $(1, -2, 1, -1)$ e $(2, 3, 0, 1)$.

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato su un campo $K$, dire cosa è un sottospazio vettoriale di $V$ ed esibire uno sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbb{R}^3$.

**2.** Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti e completarli in una base di $\mathbb{R}^4$:

$S = \{(1,-1,2,1),(0,0,1,1),(1,-1,1,1)\}$

$T = \{(2,0,2,1),(1,0,0,1)\}$

**4.** Dire quali tra le seguenti applicazioni è un'applicazione lineare:

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_1(x,y) = (2x-3y, x+y, x-y)$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_2(x,y) = (2x+y, -y-1)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_3(x,y,z) = (xy, y-x)$

**5.** Dire cosa è il rango di una matrice reale ed esibire una matrice di tipo $4 \times 3$ che abbia rango 2.

**6.** Si consideri l'applicazione $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + 2z, x - y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di $g$.

(ii) Determinare la matrice associata a $g$ nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, -1))$ di $\mathbb{R}^2$.

**7.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di $A$;

(ii) dire se $A$ è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

**8.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, determinare la retta $r$ passante per i punti $A(1,-1)$ e $B(-2,2)$ e determinare un punto $C$ tale che il triangolo $ABC$ sia rettangolo in $B$.

**9.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x - y & = & 0 \\ x + y - z & = & -2 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 1, 0)$ e il punto $A(0, 1, 1)$.

(i) Determinare il piano parallelo a $r$ e a $s$ e passante per il punto $A$.
(ii) Determinare il piano $\pi$ ortogonale $s$ e passante per il punto $A$.
(iii) Determinare una sfera tangente nel punto $A$ al piano $\pi$ precedentemente determinato.

GEOMETRIA Napoli, 27 giugno 2016

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & -1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & 1. \end{cases}$$

(i) Calcolarne le soluzioni con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.
(ii) Spiegare perché l'insieme delle soluzioni di tale sistema *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato su un campo $K$,
(i) dire cosa è una base di $V$;
(ii) se $\{u, v, w\}$ è una base di $V$, spiegare perché $\{u + w, v + w\}$ è linearmente indipendente.

**3.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulta essere un sottospazio vettoriale:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$;

$Y = \{a + bx + (2a + b)x^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$;

$Z = \{(1, 2, 0) + h(0, 0, 1) \mid h \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**4.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y, z) = (x - 2y, y - x)$,

(i) determinare una base di $Ker f$ e una base di $Im f$ e stabilire se $f$ è iniettiva e suriettiva;

(ii) esibire un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diversa da $f$ che abbia lo stesso nucleo e la stessa immagine.

**5.** Verificare che la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolarne l'inversa.

**6.** Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare gli autovalori e gli autospazi di $A$;

(ii) spiegare perché $A$ è diagonalizzabile, dopo aver ricordato cosa vuole dire che una matrice è diagonalizzabile.

**7.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r : x - 2y - 2 = 0$ e il punto $A(-1, 1)$.

(i) Rappresentare la retta $s$ parallela a $r$ e passante per il punto $A$.
(ii) Determinare la distanza tra $A$ e $r$.

**8.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y + z + 2 = 0$.

(i) Verificare che $r$ e $\pi$ sono paralleli e determinare la loro distanza.
(ii) Determinare il piano parallelo a $\pi$ contenente $r$.
(iii) Il piano $\pi$ è esterno, secante oppure tangente alla sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0$?

GEOMETRIA Napoli, 21 luglio 2016

COGNOME ..................................... NOME ............................... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

**1.** Determinare una base del sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$ e un insieme $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di vettori di $V$, spiegare cosa vuol dire che $S$ è linearmente indipendente ed esibire un insieme di tre vettori di $\mathbb{R}^4$ che sia linearmente indipendente.

**3.** Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:
$W = \mathcal{L}((1,2,-1,-1),(2,2,1,-1),(0,-2,3,1),(0,1,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$;
$H = \{(a+c)+(a+b)x+(b-c)x^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

**4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f((x,y,z)) = (x-y, x+2z, 2x-y+2z, -x+y)$.
(i) Determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$.
(ii) Dire se $f$ è iniettiva o suriettiva.
(iii) Il vettore $(1,0,-1,1)$ appartiene a $Im\ f$? ∘ Sì ∘ No Perché?

**5.** Cosa è il rango di una matrice su un campo $K$? Esibire un esempio di matrice di tipo $3 \times 4$ che abbia rango 2.

**6.** Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare gli autovalori e gli autospazi di $A$;
(ii) stabilire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A$.

**7.** Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r : x + 2y - 1 = 0$.

(i) Rappresentare la retta $s$ ortogonale a $r$ e passante per il punto $A(1, 0)$.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza $\sqrt{5}$ da $r$.

**8.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (1, 2, 0) + (-1, 0, 1)t$.

(i) Stabilire se $r$ e $s$ sono sghembe.
(ii) Determinare il piano parallelo sia a $r$ sia a $s$ e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Determinare una retta ortogonale a $s$ e passante per il punto $P(1, 1, 0)$.

COGNOME .................................... NOME .............................. MATRICOLA............

◯ Gr. 1 - R. Trombetti (A-G) ◯ Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z)

**Risolvere** gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

**1.** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare compatibile $\Sigma$. In che modo si possono modificare i termini noti per trasformare $\Sigma$ in un sistema incompatibile?

$$\Sigma : \begin{cases} \phantom{-x_1} \quad x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

**2.** Dato uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato su un campo $K$, cosa è una base di $V$? Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine due su $\mathbb{R}$.

**3.** Calcolare una base del sottospazio vettoriale $U = \mathcal{L}((1,2,1,4),(2,0,2,4),(0,1,0,1))$ di $\mathbb{R}^4$ e determinare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni sia $U$.

**4.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$f_1 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (2x_1 + x_2 - x_3 + 2, -x_1 + x_3) \in \mathbb{R}^2,$

$f_2 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow (a_0 - a_1 - a_1, -a_1 + a_2, 2a_0 + a_2) \in \mathbb{R}^3,$

$f_3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3.$

**5.** Cos'è il rango di una matrice $A$ su un campo $K$? Perché il rango di una matrice $B$ equivalente ad $A$ (ossia, ottenuta da $A$ mediante un numero finito di operazioni elementari) è uguale al rango di $A$?

**6.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, (i) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare a cui essa è associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$; (ii) calcolare autovalori ed autospazi di $A$; (iii) stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

**7.** Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la retta $r$ per $A(-1,2)$ ortogonale alla retta passante per $A$ e per l'origine del riferimento e scrivere una (qualsiasi) delle due rette a distanza 1 da $r$.

**8.** Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano date le rette $r : \begin{cases} x - y &= 0 \\ 3y - 2z &= 3 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (2, 2, 1) + t(1, 1, 1)$.

(i) Dimostrare che $r$ e $s$ sono complanari e rappresentare il piano che le contiene.

(ii) Spiegare perché *non* esiste un piano contenente $s$ e parallelo al piano $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$.

## Esercizi 0

**1.** Siano $S$, $T$ e $V$ degli insiemi. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$S \cap (T \cup V) = (S \cap T) \cup (S \cap V)$
$S \cup (T \cap V) = (S \cup T) \cap (S \cup V)$
$S \setminus (T \cup V) = (S \setminus T) \cap (S \setminus V)$
$S \setminus (T \cap V) = (S \setminus T) \cup (S \setminus V)$

**2.** Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $T = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni sono applicazioni:

$h_i = (A \times B, G_i)$ $\quad G_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$G_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$G_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$G_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$G_5 = \{(a, 3)(b, 1), (c, 2)\}$

**3.** Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:

$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_1y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_2y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad xh_3y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di $x$ (ossia, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $y = kx$).

**4.** Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:

$f : x \in \mathbb{Z} \to 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$
$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N} \to 2x - 1 \in \mathbb{N}$
$p : x \in \mathbb{N} \to x - 1 \in \mathbb{N}_0$

**5.** Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia: $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che $-2$ è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $2/3$. Infatti, questa operazione non è associativa.

**6.** Scrivere la definizione di gruppo abeliano, la definizione di campo e la definizione di spazio vettoriale su un campo $(K, +, \cdot)$.

## Esercizi 1

**1.** Cosa è un campo? Esibire un esempio di campo.

**2.** Cosa è uno spazio vettoriale su un campo $(K, +, \cdot)$?

**3.** Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale standard con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

**4.** Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso?

$X = \{\alpha(2, 1, -1) + (1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**5.** Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ in una variabile $x$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso?

$Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$,
$T = \{a + (a + b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

**6.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sottospazio vettoriale di $V$?

**7.** Dati $t$ vettori $v_1, \ldots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**8.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sistema di generatori di $V$? Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?

**9.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$X = \{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2[x]$;
$Y = \{(0, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$Z = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Si osservi che l'insieme $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ è un sistema di generatori del sottospazio vettoriale $Z$ di $\mathbb{R}^3$.

## Esercizi 2

**1.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$ e un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ di vettori di $V$, cosa vuol dire che $S$ è linearmente dipendente? Cosa vuol dire che $S$ è linearmente indipendente?

**2.** Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$.

(ii) Dire se $S$ è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3$?

(iii) È vero che il vettore $w = (0, 0, 1)$ è combinazione lineare dei vettori di $S$? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, w$?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da $S$? Il sistema $S$ è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

**3.** Dati i sottoinsiemi $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ e $T = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 0)\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con le operazioni usuali, dimostrare che ciascun vettore di $S$ è combinazione lineare dei vettori di $T$ e che ciascun vettore di $T$ è combinazione lineare dei vettori di $S$. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che $S$ e $T$ generano lo stesso spazio vettoriale?

**4.** Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^4$ è chiuso rispetto alle operazioni dello spazio ambiente?

$H = \{(ab, b, a - b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,
$K = \{(a + b, b, a - b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

**5.** Solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, spiegare perché i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \{(1, 0, 3, 0), (0, 2, -3, 4), (0, 0, 1, 7), (0, 0, 1, 0), (3, 0, -8, 10)\} \subset \mathbb{R}^4$;
$S_2 = \{(50, -23), (1, -4), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
$S_3 = \{x + x^2, 1 + x, 2 - x, 2 + x^2\} \subset \mathbb{R}^2[x]$.

**6.** Cosa è una base di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$? Dire quali tra i seguenti insiemi sono una base dello spazio ambiente:

$X_1 = \{(2, 3), (-1, 2), (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;
$X_2 = \{(1, 3, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;
$X_3 = \{(1, 3, 2), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;
$X_4 = \{1 + x, 1 - x, x^2\} \subset \mathbb{R}^2[x]$;
$X_5 = \{2 + x + x^2, 1 + x\} \subset \mathbb{R}^2[x]$.

## ESERCIZI 3

**1.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo $K$. Cosa è una base di $V$? Cosa è la dimensione di $V$?

**2.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:
$L((7, -5, 1, 2, 5), (4, -3, 5, 25, 3), (4, -7, -3, -21, 7), (-3, 2, -4, -1, -2))$;
$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;
$L((0, 1, 0, 0, 0, ), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

**3.** Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):
$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

**4.** Fissato un riferimento $\mathcal{B}$ (ossia, una base ordinata) di uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

**5.** Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:
(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$;
(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), 0, 1, 0))$.

**6.** Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:
(i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(ii) $\{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}^4[x]$
(iv) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**7.** Dati due spazi vettoriali $V$ e $V'$ su un campo $K$, dire cosa è un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$.

**8.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1, 1) = (0, 0, 2)$ e $f(2, 2) = (1, 0, 1)$. Spiegare perché $f$ non è un'applicazione lineare.

**9.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \to (a + 2b, a - b + 1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

## ESERCIZI 4

**1.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

**2.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore $(x_1,x_2,x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**3.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**4.** Siano $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (0,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1,1,1)) = (1,0,0)$, $f((1,0,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,2)) = (0,0,1)$.

**5.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.

(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di $f$.
(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1,x_2,x_3)$ tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

**6.** Si $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali finitamente generati su un campo $K$. Se $\dim(V) = 4$, $dim(W) = 5$ e l'applicazione non è iniettiva, che dimensioni possono avere $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$? L'applicazione $f$ può essere suriettiva?

**7.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $(AB)D$, $A(BD)$.

## ESERCIZI 5

**1.** Sia $\Sigma$ un sistema di $m$ equazioni lineari su un campo $K$ in $n$ incognite.

(i) Cosa è una soluzione di $\Sigma$?

(ii) Cosa vuol dire che $\Sigma$ è compatibile?

(iii) Conosci un criterio che caratterizza la compatibilità di $\Sigma$?

(iv) Se $\Sigma'$ è un altro sistema di equazioni lineari su $K$ nello stesso numero $n$ di incognite, cosa vuol dire che $\Sigma$ e $\Sigma'$ sono equivalenti?

**2.** Cosa vuol dire che una matrice $A$ su un campo $K$ è a ridotta a gradini? Descrivere una procedura che permetta di ridurre a gradini una matrice con l'uso delle trasformazioni elementari.

**3.** Cosa è il rango di una matrice $A$ su un campo $K$? Qual è il rango di una matrice a gradini?

**4.** Ridurre a gradini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad (c)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix};\quad (e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

**6.** Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ determinare un sistema di equazioni lineari omogenee con il cui insieme delle soluzioni il sottospazio coincida:

$\mathcal{L}((1,2,0,1),(2,1,-1,1),(-1,4,2,1))$

$\mathcal{L}((2,-3,1,0),(-1,2,1,0))$.

## ESERCIZI 6

**1.** Determinare una base per i sottospazi di soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -2x_3 & +3x_4 & -x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ & -x_2 & -3x_3 & & +x_5 & & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & +2x_5 & & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ & x_2 & & -2x_4 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

**2.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**3.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa delle seguenti matrici dopo averne verificato la invertibilità:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari con un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 1 \\ x & & +\lambda z & = & 0 \\ \lambda x & +y & +2z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ \lambda x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +\lambda z & = & \lambda. \end{cases}$$

# ESERCIZI 7

**1.** Studiare le applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad (c)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\qquad (e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**2.** Data un'applicazione lineare $T$ tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a $T$ in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

**3.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x]$
$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0,1,1), (1,0,1), (0,1,0)).$

**4.** Dato uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato su un campo $K$ e due riferimenti $\mathcal{B}$ e $\bar{\mathcal{B}}$ di $V$, osservare che la matrice associata all'applicazione identica di $V$ in $\mathcal{B}$ e in $\bar{\mathcal{B}}$ modifica le componenti di un vettore in $\mathcal{B}$ nelle componenti dello stesso vettore in $\bar{\mathcal{B}}$. Questa matrice $M_{\mathcal{B},\bar{\mathcal{B}}}(id_V)$ si dice matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ oppure di cambiamento di riferimento.

**5.** Dati i riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0,1), (0,2,1), (0,0,1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0,-1,1), (0,1,1), (1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice di passaggio $Q$ da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ (vedi esercizio 4).

Data l'applicazione lineare $f$ di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y+z, x+y+z)$, determinare la matrice $A$ associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $B$ associata a $f$ in $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $B = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}BP$.

**6.** Si considerino i seguenti riferimenti di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = ((1,0,0), (0,1,1), (1,-1,1)), \quad \bar{\mathcal{B}} = ((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)).$$

(a) Determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice $Q$ di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto $PQ$? E $QP$?

(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2 - x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{B}$ e quella associata a $f$ nel riferimento $\bar{\mathcal{B}}$. Che relazione sussiste tra queste due matrici?

## ESERCIZI 8

**1.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo $f$? Come si calcolano?

**2.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**3.** Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x, y, z)) = (2y + z, x - y + z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ e $\mathcal{R}' = ((1, 2), (-1, 0))$.

**4.** Se $\mathcal{B} = (u, v, w)$ è una base di $V$ di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di $V$ tale che $f(u) = u + w$, $f(v) = -u + v + w$ e $f(w) = v + 2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u + v - w$ è autovettore di $f$;
(ii) spiegare perché $f$ non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice $A$ associata a $f$ nella base ordinata $\mathcal{B}$.

**5.** Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile?

**6.** Determinare autovalori e autospazi degli endomorfismi tra spazi vettoriali numerici definiti mediante le seguenti matrici matrice, dire se sono diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, determinare una matrice che la diagonalizza.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.** Determinare la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A$ e dell'endomorfismo $f$. Nel caso in cui la matrice $A$ sia diagonalizzabile, determinare una matrice che la diagonalizza.

**8.** Sia $F_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $F_A$ è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $F_A$.
(iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile?

**9.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale reale con base ordinata $\mathcal{B} = (u, v)$ e sia $f$ l'endomorfismo di $\mathcal{V}$ tale che $f(u) = 2u - 3v$ e $f(v) = -v$.

(i) Dimostrare che l'insieme $\{v, u + v\}$ è linearmente indipendente e determinare la matrice associata a $f$ nel riferimento $\mathcal{R} = (v, u + v)$.
(ii) Nel caso in cui l'endomorfismo $f$ sia diagonalizzabile, trovare una base di autovettori di $f$ e una matrice che diagonalizza la matrice associata a $f$ in $\mathcal{R}$.

## ESERCIZI 9

**2.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati (ossia, se esiste una retta che contiene $A, B, C$), determinare le componenti del vettore $B-A$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ non parallela alla retta $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano della geometria elementare, si considerino le rette

$$r_1 : -3x+y-4=0, \quad r_2 : 2x-4y+3=0, \quad r_3 : \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -3+t \end{cases}, \quad r_4 : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -3-t \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si consideri la retta $r$ : $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -1-t \\ z &= 2+2t \end{cases}$.

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x,y,z) = (1,3,-2) + (0,1,1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s$ : $\begin{cases} x+z+2 &= 0 \\ -x+2y+1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s'$ : $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$ (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

## ESERCIZI 10

**1.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ si consideri la base ordinata $\overline{\mathcal{B}} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$. Dire qual è la base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale di un piano della geometria elementare, le rette $r: 3x-y+2=0$, $r': x+2y-1=0$ e $s: x-5y+4=0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

**3.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale del piano della geometria elementare, si considerino la retta $r: x-y+4=0$ e il punto $A(0,2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a $r$ e passante per $A$.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da $r$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s: \begin{cases} x+z+2 = 0 \\ -x+2y+1 = 0 \end{cases}$, la retta $s': \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1+2t \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se $s$ e $s'$ sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra $s$ e $s'$
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori $AB$ e $AC$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $AD$ sia ortogonale a $AB$.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale dello spazio della geometria elementare, si consideri il piano $\pi: -x+y+2z-1=0$ e il punto $A(1,-1,0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1,0,0)$.
(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(4) Determinare un piano ortogonale a $\pi$ e passante per $A$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $s: \begin{cases} x-y+2z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$ e il punto $P(1,-1,0)$.

(a) Determinare il piano $\alpha$ ortogonale a $s$ e passante per $P$.
(b) Determinare una retta $r$ incidente $s$ e una retta ortogonale sia a $r$ sia a $s$.
(c) La retta $r': (x,y,z) = (1,0,1) + (1,2,2)t$ è sghemba con $s$? Determinare un piano parallelo sia a $r'$ sia a $s$.

# ESERCIZI 11

**1.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s : x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di un piano della geometria elementare, determinare la circonferenza tangente alla retta $r : y-2=0$ e di centro $C(2,4)$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi : z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

## Esercizi 1

**1.** Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni:

$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$

**2.** Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:

$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_1y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_2y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad xh_3y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di $x$.

**3.** Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:

$f : x \in \mathbb{Z} \to 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$
$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N} \to 2x - 1 \in \mathbb{N}$
$p : x \in \mathbb{N} \to x - 1 \in \mathbb{N}_0$

**4.** Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia: $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che $-2$ è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. Infatti, questa operazione non è associativa.

**5.** Siano $A$ un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà delle operazioni interne sono soddisfatte da queste operazioni?

**6.** Cosa è un campo? Esibire un esempio di campo.

**7.** Cosa è uno spazio vettoriale su un campo $(K, +, \cdot)$?

**8.** Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

# Esercizi 2

**1.** Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}^3$ dello spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 è chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

$X = \{\alpha(2,1,-1) + (1,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**2.** Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}[t]$ dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile $t$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}[t]$?

$Z = \{at + a^2t^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\quad T = \{a + (a+b)t + bt^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

**3.** Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sottospazio vettoriale di $V$?

**4.** Dati $t$ vettori $v_1,\ldots,v_t$ di uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**5.** Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sistema di generatori di $V$? Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?

**6.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$\{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2[x]$;
$\{(0, \alpha+\beta, \beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$Z = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) | a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Si osservi che $Z$ è il sottospazio generato dai vettori $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,2)$.

**7.** Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo $K$ e un insieme $S = \{v_1,\ldots,v_t\}$ di vettori di $V$, cosa vuol dire che $S$ è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che $S$ è linearmente dipendente?

**8.** Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$.
(ii) Dire se $S$ è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3$?
(iii) È vero che il vettore $w = (0,0,1)$ è combinazione lineare dei vettori di $S$? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, w$?
(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da $S$? Il sistema $S$ è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$?

**9.** Dati i sottoinsiemi $S = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$ e $T = \{(1,2,1), (1,0,-1), (0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con le operazioni usuali, dimostrare che ciascun vettore di $S$ è combinazione lineare dei vettori di $T$ e che ciascun vettore di $T$ è combinazione lineare dei vettori di $S$. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che $S$ e $T$ generano lo stesso spazio vettoriale?

**10.** Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano $u_1$ e $u_2$ due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.
(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.
(iii) I vettori $u_1$ e $u_2$ possono essere paralleli?

## ESERCIZI 3

**1.** Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo $K$. Cosa è una base di $V$? Cosa è la dimensione di $V$?

**2.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((7,-5,1,2,5),(4,-3,5,25,3),(4,-7,-3,-21,7),(-3,2,-4,-1,-2))$;

$L((1,2,0,-1,1),(1,1,0,-1,0),(1,0,0,-1,-1),(1,1,1,1,1))$;

$L((0,1,0,0,0,),(1,0,1,1,0),(1,1,1,1,0))$.

**3.** Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$T = \{(1,1,1),(0,0,0),(2,2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$U = L(\{(1,1,0,-1),(0,2,-3,1),(-2,0,-3,3),(0,0,0,0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$Z = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

**4.** Fissato un riferimento $\mathcal{B}$ (ossia, una base ordinata) di uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

**5.** Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:

(i) $(34,-56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$;

(ii) $(1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),0,1,0))$.

**6.** Solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, spiegare perché i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \{1+t, 1-t, t+2t^2, 1+t-2t^2\} \subseteq \mathbb{R}^2[t]$

$S_2 = \{(50,-23),(1,-4),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$

$S_3 = \{(1,2,-4),(2,-1,0),(3,4,6),(10,-3,7)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

## ESERCIZI 4

**1.** Cosa vuol dire che una matrice $A$ su un campo $K$ è a scalini? Provare a descrivere una procedura che permetta di ridurre una matrice a scalini con l'uso delle trasformazioni elementari.

**2.** Cosa è il rango di una matrice $A$ su un campo $K$? Qual è il rango di una matrice a scalini?

**3.** Ridurre a scalini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad (e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

**4.** Sia $\Sigma$ un sistema di $m$ equazioni lineari su un campo $K$ in $n$ incognite.
(i) Cosa è una soluzione di $\Sigma$?
(ii) Cosa vuol dire che $\Sigma$ è compatibile?
(iv) Se $\Sigma'$ è un altro sistema di equazioni lineari su $K$ nello stesso numero $n$ di incognite, cosa vuol dire che $\Sigma$ e $\Sigma'$ sono equivalenti?

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

**6.** Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:
(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(ii) $\{(0,1,0,1),(1,1,0,1),(2,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}^4[x]$
(iv) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

## ESERCIZI 5

**1.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $(AB)D$, $A(BD)$.

**2.** Dato un riferimento (ossia una base ordinata) $\mathcal{R} = (u, v, w)$ dello spazio dei vettori liberi della geometria elementare, dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di $a$ in $\mathcal{R}$? E di $b$ in $\mathcal{R}$? E di $c$ in $\mathcal{R}$?

**3.** Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio è l'insieme delle soluzioni:

$W = \mathcal{L}((0, 1, -1, 2, 3), (2, 1, 0, 2, 1), (2, 0, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 1, -1)) \subseteq \mathbb{R}^5$,
$H = \mathcal{L}((2, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 2))) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U = \mathcal{L}((1, 1, -1, 1, 0), (-1, -1, 1, -1, 0), (0, 2, 1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^5$
$X = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (2, 1, -1, 1), (-1, 4, 2, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Y = \mathcal{L}((2, -3, 1, 0), (-1, 2, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

**4.** Per ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari omogenee determinare il sottospazio delle soluzioni e una propria base:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + \lambda z = 0 \\ \lambda x + y + 2z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

# ESERCIZI 6

**1.** Dati due spazi vettoriali $V$ e $V'$ su uno stesso campo $K$, dire cosa è un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$.

**2.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché $f$ non è un'applicazione lineare.

**3.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a+2b, a-b+1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore $(x_1,x_2,x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?

**5.** Siano $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (0,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1,1,1)) = (1,0,0)$, $f((1,0,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,2)) = (0,0,1)$.

**6.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di $f$.
(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1,x_2,x_3)$ tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

**7.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.

**8.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la coordinazione rispetto ai riferimenti canonici:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}^3[x],$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

**9.** Nello spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$, si determini:
(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente indipendente;
(ii) una base che contenga i vettori $u = 2e_1 - e_3$ e $v = e_2 + 2e_4$.

**10.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare.
(i) Spiegare perché $f$ non può essere iniettiva.
(ii) Se $f$ è tale che $f((x,y,z,t)) = (x + y - z - t, -x + z, 2y - 2t)$, determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1,2,-2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

## ESERCIZI 7

**1.** Studiare le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix};\ (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ (c)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\qquad (e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**2.** Data un'applicazione lineare $T$ tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a $T$ in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

**3.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$$
$$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2), \qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$
$$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x]$$
$$\mathcal{R} = (1, x, x^2), \qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$$
$$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$$
$$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)).$$

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1, 0, 1)) = -1 + 2x - x^2 + x^3$, $f((1, 1, 2)) = 4x + x^3$ e $f((0, 0, 1)) = 2x - x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1, a_2, a_3))$, per ogni vettore $(a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine $\mathrm{Im}f$ e il nucleo $\mathrm{Ker}f$ di $f$;
(b) dire se l'applicazione $f$ è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a $f$ nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, -x^2, x + x^3)$.

**5.** Si considerino i seguenti riferimenti di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)), \quad \bar{\mathcal{B}} = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)).$$

(a) Determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice $Q$ di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto $PQ$? E $QP$?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2 - x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio lo stesso riferimento $\mathcal{B}$ e quella associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio lo stesso riferimento $\bar{\mathcal{B}}$.

**6.** Dati i riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella $Q$ da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (x + 2y, y + z, x + y + z)$, determinare la matrice $A$ associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio lo stesso riferimento $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $B$ associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio lo stesso riferimento $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $Q = P^{-1}$ e ovviamente $P = Q^{-1}$. Inoltre si ha che $B = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}BP$.

## ESERCIZI 8

**1.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**2.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**4.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo $T$? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a $T$ in un riferimento fissato? Come si calcolano e perché?

**5.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**6.** Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x,y,z)) = (2y+z, x-y+z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ e $\mathcal{R}' = ((1,2),(-1,0))$.

**7.** Se $\mathcal{B} = (u,v,w)$ è una base di $V$ di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di $V$ tale che $f(u) = u + w$, $f(v) = -u + v + w$ e $f(w) = v + 2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u + v - w$ è autovettore di $f$;
(ii) spiegare perché $f$ non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice $A$ associata a $f$ nella base ordinata $\mathcal{B}$.

## ESERCIZI 9

**1.** Dati $p$ sottospazi vettoriali $W_1, \ldots, W_p$ di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$, dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma.

**2.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:
$W_1 = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,-1,1),(1,-1,0,1))$,
$W_2 = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,0,1,1))$.
Determinare i sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

**3.** Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 su un campo $\mathbb{K}$ e siano $H$ e $W$ due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 2$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.

**4.** Determinare il sottospazio intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:
$W_1 = \mathcal{L}((2,1,1,2),(0,1,0,1),(1,2,0,-1))$

$$W_2 : \begin{cases} x_1 & -x_2+ & 2x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$

**5.** Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile?

**6.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se $A$ è diagonalizzabile.

**8.** Determinare la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (4x+3y-3z, 6x+y-3z, 12x+6y-8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1))$.
Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A$ e dell'endomorfismo $f$.

**9.** Sia $F_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $F_A$ è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $F_A$.
(iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile?

## ESERCIZI 10

**1.** Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?

**2.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

(i) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

(ii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$

(iii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

**3.** Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

(i) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;

(ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore $(1, -1, 2)$.

**4.** Dire cosa è uno spazio euclideo, cosa è un suo riferimento cartesiano e cosa sono le coordinate di un punto in un riferimento cartesiano fissato.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(1, -1)$, $B(-1, -3)$ e $C(1, 1)$. Determinare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{BC}$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, 0, 3)$ e $B(2, 1, 2)$. Determinare un punto $C$ tale che il triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$ sia rettangolo in $B$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -1)$, $C(0, 1, 2)$. Determinare un punto $D$ tale che il vettore $\overrightarrow{CD}$ sia parallelo al vettore $\overrightarrow{AB}$. Determinare *il* punto $E$ tale che il vettore $\overrightarrow{CE}$ sia *uguale* al vettore $\overrightarrow{AB}$.

## ESERCIZI 11

**1.** Dire cosa è uno sottospazio euclideo, se e quali caratterizzazioni si conoscono e come si rappresenta in un riferimento cartesiano fissato dello spazio euclideo ambiente.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,-2)$. Determinare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ e le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A$ e $C$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.
(5) Determinare il punto medio $M$ del segmento $AD$ e una retta per $M$ non parallela alla retta $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino le rette

$$r_1 : -3x + y - 4 = 0, \quad r_2 : 2x - 4y + 3 = 0, \quad r_3 : \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 + t \end{cases}, \quad r_4 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -3 - t \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri la retta $r$ :

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -1 - t \\ z &= 2 + 2t \end{cases}.$$

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x,y,z) = (1,3,-2) + (0,1,1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano monometrico di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta $s : \begin{cases} x + z + 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= 1 + 2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$ (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

## ESERCIZI 12

**1.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ si consideri la base ordinata $\overline{\mathcal{B}} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$. Dire qual è la base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : x - y + 4 = 0$ e il punto $A(0,2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a $r$ e passante per $A$.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da $r$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette

$$s : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e } s' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e il punto } B(1,0,1).$$

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se $s$ e $s'$ sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra $s$ e $s'$
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori $AB$ e $AC$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $AD$ sia ortogonale a $AB$.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1,-1,0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$ e la sua distanza da $\pi$.
(2) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1,0,0)$.
(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.
(4) Determinare un piano ortogonale a $\pi$ e passante per $A$.

**7.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta

$$s : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{e il punto } P(1,-1,0).$$

(a) Determinare il piano $\alpha$ ortogonale a $s$ e passante per $P$.
(b) Determinare una retta $r$ incidente $s$ e una retta ortogonale sia a $r$ sia a $s$.
(c) La retta $r' : (x,y,z) = (1,0,1) + (1,2,2)t$ è sghemba con $s$? Determinare un piano parallelo sia a $r'$ sia a $s$.

## ESERCIZI 13

**1.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo,

(1) determinare l'asse del segmento di estremi $A(3,-1)$ e $B(2,2)$;
(2) rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(1,2)$ e raggio $r=2$;
(3) determinare le due circonferenze di raggio 1 e tangenti a $s : x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano un piano euclideo, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C(1,-2)$ e raggio 2. Determinare una retta secante $\mathcal{C}$, una retta tangente a $\mathcal{C}$ e una retta esterna a $\mathcal{C}$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, determinare la circonferenza tangente alla retta $r : y-2=0$ e di centro $C(2,4)$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C(1,1,0)$ e raggio 2.

(1) Se il piano $\pi : z=1$ è secante la sfera $\mathcal{S}$, determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ che si ottiene intersecando $\mathcal{S}$ con il piano $\pi$.
(2) Rappresentare un piano secante $\mathcal{S}$, uno esterno e uno tangente a $\mathcal{S}$.

## Esercizi 1

**1.** Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni:

$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$

**2.** Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:

$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x h_1 y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x h_2 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad x h_3 y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di $x$.

**3.** Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:

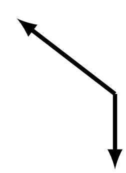
$f : x \in \mathbb{Z} \to 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$
$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N} \to 2x - 1 \in \mathbb{N}$
$p : x \in \mathbb{N} \to x - 1 \in \mathbb{N}_0$

**4.** Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia: $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che $-2$ è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. Infatti, questa operazione non è associativa.

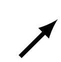
**5.** Siano $A$ un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà sono soddisfatte da queste operazioni?

**6.** Cosa è un campo? Esibire un esempio di campo.

**7.** Cosa è uno spazio vettoriale su un campo?



**8.** Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per $-2$ quello già disegnato: 

**9.** Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

## Esercizi 2

**1.** Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

$X = \{\alpha(2,1,-1) + (1,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**2.** Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}[t]$ dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile $t$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}[t]$?

$Z = \{at + a^2t^2 \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{a + (a+b)t + bt^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

**3.** Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{R}$ di tipo $2 \times 2$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**4.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sottospazio vettoriale di $V$?

**5.** Dati $t$ vettori $v_1, \ldots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa vuol dire che un vettore $v$ è combinazione lineare dei vettori assegnati?

**6.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$, cosa è un sistema di generatori di $V$? Cosa vuol dire che $V$ è finitamente generato?

**7.** Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$Y = \{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2[x]$;
$T = \{(0, \alpha+\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
$X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
$Z = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
Si osservi che $Z$ è il sottospazio generato dai vettori $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,2)$.

**8.** Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo $K$ e un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ di vettori di $V$, cosa vuol dire che $S$ è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che $S$ è linearmente dipendente?

**9.** Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore $v_3$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$.
(ii) Dire se $S$ è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3$?
(iii) È vero che il vettore $w = (0,0,1)$ è combinazione lineare dei vettori di $S$? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, w$?
(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da $S$? Il sistema $S$ è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

**10.** Dati i sottoinsiemi $S = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$ e $T = \{(1,2,1), (1,0,-1), (0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con le operazioni usuali, dimostrare che ciascun vettore di $S$ è combinazione lineare dei vettori di $T$ e che ciascun vettore di $T$ è combinazione lineare dei vettori di $S$. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che $S$ e $T$ generano lo stesso spazio vettoriale?

**11.** Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano $u_1$ e $u_2$ due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.
(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.
(iii) I vettori $u_1$ e $u_2$ possono essere paralleli?

# ESERCIZI 3

**1.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo $K$. Cosa è una base di $V$? Cosa è la dimensione di $V$?

**2.** Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((7, -5, 1, 2, 5), (4, -3, 5, 25, 3), (4, -7, -3, -21, 7), (-3, 2, -4, -1, -2))$;

$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;

$L((0, 1, 0, 0, 0, ), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

**3.** Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

**4.** Solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, spiegare perché i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2\ 2}(\mathbb{R})$;

$S_2 = \{1 + t, 1 - t, t + 2t^2, 1 + t - 2t^2\} \subseteq \mathbb{R}^2[t]$

$S_3 = \{(50, -23), (1, -4), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$

$S_4 = \{(1, 2, -4), (2, -1, 0), (3, 4, 6), (10, -3, 7)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

**5.** Nello spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si determini:

(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente *indipendente*;

(ii) un insieme di tre vettori che sia linearmente *dipendente*.

Verificare se l'insieme $S = \{2e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_2, e_2 + e_1\}$ costituito da 4 vettori di $V$ è una base.

**ESERCIZI 4**

**1.** Fissato un riferimento $\mathcal{B}$ (ossia, una base ordinata) di uno spazio vettoriale $V$ finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

**2.** Dato un riferimento (ossia una base ordinata) $\mathcal{R} = (u, v, w)$ dello spazio dei vettori liberi della geometria elementare, dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di $a$ in $\mathcal{R}$? E di $b$ in $\mathcal{R}$? E di $c$ in $\mathcal{R}$?

**3.** Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),0,1,0))$.

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,3}$ in

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

**4.** Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0,1,0,1),(1,1,0,1),(2,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}^4[x]$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_{2,2}$

(v) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

**5.** Dati $p$ sottospazi vettoriali $W_1, \ldots, W_p$ di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$, dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma.

**6.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$W_1 = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,-1,1),(1,-1,0,1))$,

$W_2 = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,0,1,1))$.

Determinare i sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

**7.** Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 4 su un campo $\mathbb{K}$ e siano $H$ e $W$ due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 2$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.

**8.** Cosa è uno spazio affine? Cosa è un riferimento cartesiano di uno spazio affine? Cosa sono le coordinate di un punto di uno spazio affine in un riferimento cartesiano fissato?

# ESERCIZI 5

**1.** Dati $p$ sottospazi vettoriali $W_1, \ldots, W_p$ di uno spazio vettoriale $V$ su un campo $K$, cosa vuol dire che il loro sottospazio somma è una somma diretta? Cosa conosce delle somme dirette?

**2.** Cosa vuol dire che una matrice $A$ su un campo $K$ è a scalini? Provare a descrivere una procedura che permetta di ridurre una matrice a scalini con l'uso delle trasformazioni elementari.

**3.** Cosa è il rango di una matrice $A$ su un campo $K$? Qual è il rango di una matrice a scalini?

**4.** Ridurre a scalini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad (e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

**5.** Sia $\Sigma$ un sistema di $m$ equazioni lineari su un campo $K$ in $n$ incognite.

(i) Cosa è una soluzione di $\Sigma$?

(ii) Cosa vuol dire che $\Sigma$ è compatibile?

(iii) Conosce un criterio che caratterizza la compatibilità di $\Sigma$?

(iv) Se $\Sigma'$ è un altro sistema di equazioni lineari su $K$ nello stesso numero $n$ di incognite, cosa vuol dire che $\Sigma$ e $\Sigma'$ sono equivalenti?

**6.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \phantom{2x} \; y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ \phantom{2x} \; y + 3z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

**7.** Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.

(ii) Calcolare i prodotti $AB$, $BA$, $AC$, $BD$, $BE$, $CB$, $CC$, $DE$, $ED$, $(AB)D$, $A(BD)$.

## ESERCIZI 6

**1.** Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio è l'insieme delle soluzioni:

$W = \mathcal{L}((0,1,-1,2,3),(2,1,0,2,1),(2,0,1,0,-2),(0,0,1,1,-1)) \subseteq \mathbb{R}^5$,
$H = \mathcal{L}((2,1,2,3),(0,1,2,2))) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U = \mathcal{L}((1,1,-1,1,0),(-1,-1,1,-1,0),(0,2,1,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^5$
$X = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,1,-1,1),(-1,4,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Y = \mathcal{L}((2,-3,1,0),(-1,2,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

**2.** Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

**3.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.** Cosa vuol dire che una matrice quadrata $A$ su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**5.** Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + \lambda z = 0 \\ \lambda x + y + 2z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

**6.** Determinare il sottospazio intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$W_1 = \mathcal{L}((2,1,1,2),(0,1,0,1),(1,2,0,-1))$

$$W_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

# ESERCIZI 7

**1.** Dati due spazi vettoriali $V$ e $V'$ su uno stesso campo $K$, dire cosa è un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$. Quali proprietà delle applicazioni lineari hai studiato?

**2.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché $f$ non è un'applicazione lineare.

**3.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a+2b, a-b+1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore $(x_1,x_2,x_3)$ di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore $u$ di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

**5.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di $f$.
(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $Imf$? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore $(x_1,x_2,x_3)$ tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

**6.** Sia $f$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore $(x,y,z)$.
(iii) Determinare una base di $Imf$.
(iv) Dire se $f$ è iniettiva e suriettiva.
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

**7.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x,y,z,t)) = (x+y-z-t, -x+z, 2y-2t)$. Determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1,2,-2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

# ESERCIZI 8

**1.** Studiare le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad (c)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\qquad (e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Osservare che per ciascuna matrice le colonne sono le immagini dei vettori della base canonica del dominio mediante l'applicazione lineare corrispondente.

**2.** Data un'applicazione lineare $T$ tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a $T$ in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

**3.** Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2),\qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x]$

$\mathcal{R} = (1, x, x^2),\qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{R} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)),\qquad \mathcal{R}' = ((0,1,1),(1,0,1),(0,1,0)).$

**4.** Sapendo che $f$ è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1,0,1)) = -1 + 2x - x^2 + x^3$, $f((1,1,2)) = 4x + x^3$ e $f((0,0,1)) = 2x - x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1,a_2,a_3))$, per ogni vettore $(a_1,a_2,a_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine Im$f$ e il nucleo Ker$f$ di $f$;
(b) dire se l'applicazione $f$ è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a $f$ nelle basi ordinate $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,0,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1+x, -x^2, x+x^3)$.

**5.** Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,1),(1,-1,1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ di $\mathbb{R}^3$,

(a) determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice $Q$ di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto $PQ$? E $QP$?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2 - x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B}$ e quella associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}}$. Che relazione sussiste tra queste due matrici?

**6.** Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,2,1),(0,0,1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0,-1,1),(0,1,1),(1,2,0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $P$ di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella $Q$ da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. Dato l'endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (x+2y, y+z, x+y+z)$, determinare la matrice $A$ associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $\bar{A}$ associata a $f$ fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $Q = P^{-1}$ e ovviamente $P = Q^{-1}$. Inoltre si ha che $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}\bar{A}P$.

**7.** Siano $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (0,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1,1,1)) = (1,0,0)$, $f((1,0,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,2)) = (0,0,1)$.

**8.** Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando gli isomorfismi coordinati rispetto alle basi canoniche:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}^3[x],$$

$$T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$

## ESERCIZI 9

**1.** Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo $T$? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a $T$ in un riferimento fissato? Come si calcolano?

**2.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

**3.** Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x, y, z)) = (2y + z, x - y + z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ e $\mathcal{R}' = ((1, 2), (-1, 0))$.

**4.** Se $\mathcal{B} = (u, v, w)$ è una base di $V$ di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di $V$ tale che $f(u) = u + w$, $f(v) = -u + v + w$ e $f(w) = v + 2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u + v - w$ è autovettore di $f$;
(ii) spiegare perché $f$ non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice $A$ associata a $f$ nella base ordinata $\mathcal{B}$.

**5.** Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile?

**6.** Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.** Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se $A$ è diagonalizzabile.

**8.** Determinare la matrice $A$ associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice $A$ e dell'endomorfismo $f$.

**9.** Sia $F_A$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se $F_A$ è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $F_A$.
(iii) La matrice $A$ è diagonalizzabile?

## ESERCIZI 10

**1.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano affine, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Determinare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{BC}$. Dire se $A$, $B$ e $C$ sono allineati.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio affine di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,0,3)$ e $B(2,1,2)$. Determinare un punto $C$ tale che i punti $A$, $B$ e $C$ siano non allineati.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio affine di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,-1,2)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,1,2)$. Determinare un punto $D$ tale che il vettore $\overrightarrow{CD}$ sia parallelo al vettore $\overrightarrow{AB}$. Determinare *il* punto $E$ tale che il vettore $\overrightarrow{CE}$ sia *uguale* al vettore $\overrightarrow{AB}$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano affine, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.
(2) Rappresentare la retta $r$ per $B$ e $D$.
(3) Rappresentare la retta $s$ per $C$ di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$.
(4) Rappresentare la retta per $D$ parallela alla retta $s$.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano affine, si considerino le rette

$$r_1 : -3x+y-4=0, \quad r_2 : 2x-4y+3=0, \quad r_3 : \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -3+t \end{cases}, \quad r_4 : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -3-t \end{cases}.$$

Per ogni coppia di tali rette, calcolare l'intersezione.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio affine di dimensione 3, scrivere una rappresentazione parametrica

(1) della retta $r$ per i punti $A(1,0,1)$ e $B(1,1,1)$;
(2) della retta $s$ per il punto $C(2,1,2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}(0,1,1)$.
(3) del piano $\alpha$ per i punti $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ e $C(2,1,2)$.

Vedere se $r$ e $s$ sono sghembe (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).

**7.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio affine di dimensione 3, si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -1-t \\ z &= 2+2t \end{cases}.$$

(a) Determinare la retta $r'$ parallela a $r$ e passante per $A(1,2,0)$.
(b) Determinare il piano parallelo alla retta $s : (x,y,z) = (1,3,-2)+(0,1,1)\bar{t}$ e alla retta $r$ e passante per l'origine del riferimento.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio affine di dimensione 3, si considerino la retta $s : \begin{cases} x+z+2 &= 0 \\ -x+2y+1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.
(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con $s$ (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).
(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?
(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

## ESERCIZI 11

**1.** Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?

**2.** Spiegare quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

(i) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

(ii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$

(iii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

**3.** Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

(i) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;

(ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore $(1, -1, 2)$.

**4.** Dire cosa è uno spazio euclideo e cosa è un suo riferimento cartesiano.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, 1, 3)$ e $B(1, 1, 2)$. Determinare un punto $C$ tale che il triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$ sia rettangolo in $B$.

**6.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a $s$ passante per il punto $A(1, 2)$ e la retta parallela a $s$ passante per $A(1, 2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

**7.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette

$$s : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e } s' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e il punto } B(1, 0, 1).$$

(a) Calcolare un vettore direzionale di $s$.

(b) Dire se $s$ e $s'$ sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra $s$ e $s'$

(c) Determinare il piano per $B$ contenente $s$. Questo piano è parallelo a $s'$?

(d) Determinare una retta $r$ passante per $B$ e incidente $s$. Rappresentare il piano che contiene $r$ ed $s$.

**8.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, 1, -1)$. Dire se i vettori $AB$ e $AC$ sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto $D$ tale che $AD$ sia ortogonale a $AB$.

**9.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1, -1, 0)$.

(1) Determinare il piano per $A$ parallelo a $\pi$.

(2) Determinare la retta ortogonale a $\pi$ e passante per $P(-1, 0, 0)$.

(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a $\pi$.

(4) Determinare un piano ortogonale a $\pi$ e passante per $A$.

## ESERCIZI 12

**1.** Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ si consideri la base ordinata $\overline{\mathcal{B}} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$. Dire qual è la base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ è $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : x-y+4 = 0$ e il punto $A(0,2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a $r$ e passante per $A$.

(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da $r$.

**3.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta

$$s : \begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= -1 \end{cases}$$ e il punto $P(1,-1,0)$.

(a) Determinare il piano $\alpha$ ortogonale a $s$ e passante per $P$.

(b) Determinare la distanza tra $s$ e $P$.

(c) Determinare una retta $r$ incidente $s$ e una retta ortogonale sia a $r$ sia a $s$.

(d) La retta $r' : (x,y,z) = (1,0,1)+(1,2,2)t$ è sghemba con $s$? Determinare la distanza tra $r'$ e $s$. Determinare un piano parallelo sia a $r'$ sia a $s$.

**4.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, determinare due rette sghembe e calcolarne la distanza.

**5.** Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $P(2,-3,2)$ e $Q(0,1,1)$ e sia $r$ la retta passante per $P$ e $Q$.

(i) Rappresentare la retta $r$.

(ii) Rappresentare l'asse del segmento di estremi $P$ e $Q$.

(iii) Rappresentare un piano parallelo alla retta $r$.

(iv) Rappresentare una retta ortogonale a $r$ e passante per $Q$.

(v) Rappresentare il piano passante per $P$, $Q$ e l'origine del riferimento.

# ESERCIZI RIEPILOGO
# (LEZIONI 1-13)

**1.** Per ciascuno dei seguenti insiemi che risulta essere un sottospazio vettoriale, determinare una base e la dimensione.

$X = \{a + b^2 t - bt^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2[t]$

$Y = \{(a + b) - bt + 2at^2 + (a - b)t^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3[t]$

$W = \mathcal{L}((2, 3, -1, 1), (1, 1, -1, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

**2.** Dimostrare che $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$.

**3.** Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Determinare

(i) una base di $V$ che contenga i vettori $u = 2e_1 - e_3$ e $v = e_1 + e_4$;

(ii) una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}(e_1 + e_4, e_2 - e_3, e_3, e_2)$ di $V$;

(ii) un sottospazio vettoriale di $V$ che abbia dimensione 2 e contenga il vettore $w = 2e_3 - e_4$.

**4.** Determinare una rappresentazione dei seguenti sottospazi vettoriali numerici:

$W = \mathcal{L}((2, 1, 0, 1), (4, 2, 0, 2)) \subseteq \mathbb{R}^4$

$S = \mathcal{L}((3, 0, 2), (1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^3$

$T = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1, 2), (2, 0, 1, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^5$

**5.** Determinare una base del sottospazio vettoriale numerico di $\mathbb{R}^5$ costituito dalle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

**6.** Sia $B = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ordinata di uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ su un campo $K$ e sia $\Phi_B : V \to K^n$ l'applicazione che associa a ogni vettore $u$ di $V$ il suo vettore delle componenti in $B$. Dimostrare che l'applicazione $\Phi_B$ gode delle seguenti proprietà:

- $\forall\, u, v \in V,\ \Phi_B(u + v) = \Phi_B(u) + \Phi_B(v)$,
- $\forall\, u \in V,\ \forall\, \alpha \in K,\ \Phi_B(\alpha u) = \alpha \Phi_B(u)$.

**7.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $K$ e si consideri l'applicazione $\pi : V \times V \to V$ tale che per ogni $u, w \in V$ si abbia $\pi(u, w) = w - u$. Dimostrare che la terna $(V, V, \pi)$ è uno spazio affine.

**8.** Determinare i valori reali del parametro $t$ per cui la seguente matrice ha rango 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & t & 1 \\ t & 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Sottospazi Affini e Varietà Lineari

Questa breve nota propone agli studenti dell'insegnamento di Geometria del corso di laurea in Informatica (gruppo H-Z) dell'anno accademico 2018-2019 una dimostrazione del fatto che i sottospazi affini sono varietà lineari e viceversa.

**Definition 0.1.** Uno *spazio affine* è una terna $(V, \mathcal{A}, \pi)$ dove $V$ è uno spazio vettoriale su un campo $K$, $\mathcal{A}$ è un insieme e $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \leftarrow V$ è un'applicazione che associa a ogni coppia $(P, Q)$ di elementi di $\mathcal{A}$ il vettore $\overrightarrow{PQ} := \pi(P, Q)$ tale che

(1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall a \in V$, $\exists! X \in \mathcal{A}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$;
(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

**Definition 0.2.** Dato uno spazio affine $(V, \mathcal{A}, \pi)$, un sottoinsieme $\mathcal{H}$ di $\mathcal{A}$ si dice *sottospazio affine* di $\mathcal{A}$ se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(i) il sottoinsieme $\overrightarrow{\mathcal{H}} := \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\overrightarrow{PQ} \in V \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$ di $V$ è un sottospazio vettoriale di $V$ (detto *giacitura o spazio direttore* di $\mathcal{H}$)
(ii) $\forall A \in \mathcal{H}$, $\forall a \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X \in \mathcal{A}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$ appartiene ad $\mathcal{H}$.

**Osservazione.** Si noti che $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{A}$ se e solo se la terna $(\overrightarrow{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_{|\mathcal{H}\times\mathcal{H}})$ è uno spazio affine.

**Definition 0.3.** Dato un punto $P_0$ di $\mathcal{A}$ e un sottospazio vettoriale $U$ di $V$, il sottoinsieme

$$(P_0, U) := \{Q \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U\}$$

e detto *varietà lineare* passante per $P_0$ e parallela a $U$.

**Proposition 0.4.**

(a) *Ogni varietà lineare è un sottospazio affine. Ossia, per ogni punto $P_0$ di $\mathcal{A}$ e sottospazio vettoriale $U$ di $V$, la varietà lineare $(P_0, U)$ è un sottospazio affine di $\mathcal{A}$.*
(b) *Ogni sottospazio affine è una varietà lineare. Ossia, se $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{A}$, allora per ogni punto $P_0$ di $\mathcal{H}$ si ha $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.*

*Proof.* Prima di tutto osserviamo che il punto $P_0$ appartiene a $(P_0, U)$ perché $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{0}_V \in U$.

Per dimostrare l'enunciato (a), osserviamo prima il seguente fatto. Sia $a$ un vettore di $U$ e $A$ un punto dell'insieme $(P_0, U) \subseteq \mathcal{A}$. Per la proprietà (1) sappiamo che esiste un solo punto $X \in \mathcal{A}$ tale che $\overrightarrow{P_0X} = a \in U$. Allora, per definizione il punto $X$ appartiene in particolare a $(P_0, U)$ e la proprietà (ii) risulta provata. Adesso basta provare che vale l'uguaglianza $\pi((P_0, U) \times (P_0, U)) = U$.

"$\subseteq$" Si consideri una coppia $(P, Q)$ in $(P_0, U) \times (P_0, U)$. Per definizione si ha che i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{P_0Q}$ appartengono a $U$ e per la proprietà (2) si ha:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} \in U$$

perchè $U$ è sottospazio vettoriale.

"$\supseteq$" Siccome la proprietà (ii) è stata già dimostrata per $(P_0, U)$, possiamo dire che per ogni vettore $a$ di $U$ esiste un unico punto $X$ di $(P_0, U)$ tale che $a = \overrightarrow{P_0X} = \pi(P_0, X) \in \pi((P_0, U) \times (P_0, U))$ e abbiamo finito.

Adesso, dimostriamo l'enunciato (b) provando l'uguaglianza $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.

"$\subseteq$" $P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) \iff \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in \mathcal{H}$, per la proprietà (ii).

"$\supseteq$" $P \in \mathcal{H} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}})$. $\square$

# Il metodo di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari

A. De Paris

Questi appunti sono suddivisi in tre parti: "discussione", "teoria" e "esempi ed esercizi". La parte che va imparata e ripassata (per capirci, quella che "serve per l'esame orale") è chiaramente la seconda. La "discussione" serve per introdurre e per far capire le motivazioni, dunque va letta e capita bene prima di studiare la teoria perché è un aiuto per poterla imparare con meno sforzo. Naturalmente però la discussione non va ripassata per l'esame. Gli "esercizi ed esempi" sono indispensabili per fissare le nozioni apprese a teoria e sono utili in vista dell'esame scritto.

## Discussione

Alle scuole superiori si imparano vari metodi per risolvere i sistemi lineari. Probabilmente il più popolare è il metodo "per sostituzione". Tuttavia, è esperienza di molti che quando si applica il metodo per sostituzione a sistemi un po' più complicati del normale, si commettono facilmente degli errori.
Noi siamo qui interessati ad imparare un metodo generale, per risolvere sistemi lineari con un qualsiasi numero di equazioni e con un qualsiasi numero di incognite. L'esperienza ha dimostrato che il metodo per sostituzione può essere migliorato. Il metodo più usato oggi è il metodo di Gauss, che ci proponiamo di esporre in questi appunti. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Chi è appassionato del metodo per sostituzione, riuscirà facilmente a trovare la soluzione

$$x = 1, \qquad y = 3.$$

Proviamo però qui ad usare un altro metodo, che forse qualcuno avrà già incontrato con il nome di "metodo di addizione e sottrazione". Moltiplichiamo per tre entrambi i membri della seconda equazione, e sottraiamo ordinatamente i due membri della prima. Otteniamo $-5y + 15 = 0$, da cui $y = 3$. Moltiplicando poi per due nella seconda e sommando alla prima otteniamo $5x - 5 = 0$, da cui $x = 1$.
Confrontando i due metodi, dovrebbero essere evidenti due cose:

- Sotto sotto, i conti fatti sono quasi gli stessi.
- Il secondo metodo (una volta capito) è più semplice da svolgere.

Si può pensare anche ad un metodo misto: dopo aver ricavato $y = 3$ con "addizione e sottrazione" si può passare alla sostituzione di tale valore in una delle due equazioni. Questi passaggi possono essere riassunti come segue:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \overset{e_2 \to 3e_2 - e_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ -5y + 15 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \cdot 3 - 9 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} .$$

Al primo passaggio abbiamo scritto $e_2 \to 3e_2 - e_1$ per significare: moltiplichiamo per tre entrambi i membri della seconda equazione e sottraiamo ordinatamente i membri della prima, e mettiamo l'equazione che risulta al posto della seconda. Se si dimostra (come è facile fare) che i passaggi sono dei "se e solo se" questo ci assicura che $(x, y) = (1, 3)$ è l'unica soluzione del sistema.

Facciamo un altro esempio di uso di questo metodo "misto", provandolo su un sistema un po' più grande:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 7y - 2z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Cominciamo con le "addizioni e sottrazioni", in modo da semplificare:

$$\begin{array}{l} e_2 \longrightarrow 2e_2 - e_1 \\ e_3 \longrightarrow 2e_3 + e_1 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ -5y - 3z - 3 = 0 \\ 17y + z + 1 = 0 \end{cases} ;$$

la $x$ è rimasta solo nella prima equazione, e le altre due equazioni costituiscono un sistema più piccolo, al quale possiamo riapplicare il metodo:

$$e_3 \longrightarrow 5e_3 + 17e_2 \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ -5y - 3z - 3 = 0 \\ -46z - 46 = 0 \end{cases} .$$

E infine, le sostituzioni "a ritroso" (cioè partendo dall'ultima equazione e procedendo dal basso verso l'alto):

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 3\cdot 0 + 5\cdot(-1) + 3 = 0 \longrightarrow x = 1 \\ -5y - 3\cdot(-1) - 3 = 0 \longrightarrow y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right. .$$

Riassumendo:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 7y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ -5y - 3z - 3 = 0 \\ 17y + z + 1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ -5y - 3z - 3 = 0 \\ -46z - 46 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right. .$$

Quindi $(x, y, z) = (1, 0, -1)$ è l'unica soluzione del sistema. Il metodo sembra dunque funzionare abbastanza rapidamente. Inoltre, chi vuole ulteriormente risparmiare fatica (e inchiostro) può notare che quello che conta nella scelta dei calcoli da eseguire nella prima parte (quella delle addizioni e sottrazioni) sono i coefficienti e i termini noti. Quindi, stando attenti a scrivere in ordine per righe e colonne, si può evitare di scrivere le incognite. In sostanza, la prima parte consiste dunque in operazioni sulle matrici complete associate ai sistemi. Quindi, per il sistema di sopra, basterebbe scrivere

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2 \to 2e_2 - e_1 \\ e_3 \to 2e_3 + e_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 17 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{e_3 \to 5e_3 + 17e_1}{\longleftrightarrow}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -46 & -46 \end{pmatrix},$$

per poi procedere alle sostituzioni a ritroso nel sistema rappresentato dall'ultima matrice.

Vediamo cosa succede per un sistema che ha più di una soluzione:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ 3x + 4z + 7 = 0 \end{array}\right. .$$

Avviamo il metodo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2 \to e_2 - 2e_1 \\ e_3 \to e_3 - 3e_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{e_3 \to e_3 - e_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ultima equazione è diventata l'identità $0 = 0$, che può essere eliminata dal sistema senza avere alcun effetto sul calcolo delle soluzioni. Otteniamo allora

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ -3y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Ora siamo in una situazione un po' diversa da quelle precedenti: non è possibile ricavare alcuna incognita per far partire le sostituzioni. Notiamo però che se assegnamo un valore a piacere a $z$, possiamo procedere poi come al solito. Per esempio, se $z = -4$

$$\begin{cases} x - 2 - 4 + 3 = 0 \longrightarrow x = 3 \\ -3y - 4 - 2 = 0 \longrightarrow y = -2 \end{cases}$$

e così troviamo la soluzione $(3, -2, -4)$, che però non è l'unica possibile (possiamo solo dire che è l'unica con la $z = -4$ ). Se scegliamo $z = -1$ otteniamo la soluzione $(-1, -1, -1)$. Capiamo dunque che ci sono infinite soluzioni. Per descriverle tutte, possiamo scrivere (sempre partendo dal basso):

$$\text{se } z = t, \text{ allora } \begin{cases} x + \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} + t + 3 = 0 \longrightarrow x = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{3} \\ -3y + t - 2 = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi l'insieme di tutte le possibili soluzioni è

$$\left\{ \left( -\frac{4}{3}t - \frac{7}{3} \ , \ \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \ , \ t \ \right) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

cioè al variare di $t$ in $\mathbb{R}$ si ottengono tutte le terne che soddisfano il sistema:

$$\left\{ \ldots, \left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right), \ldots, \left(-\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), \ldots, \left( -\frac{4\sqrt{2}+7}{3}, \frac{\sqrt{2}-2}{3}, \sqrt{2} \right), \ldots \right\}.$$

Vediamo ora un esempio di sistema incompatibile (cioè senza soluzioni).

$$\begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0 \\ 4x - 3y - 2z - 3 = 0 \\ 8x - y - 4z = 0 \end{cases} .$$

Risolviamo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2 \to e_2 - 2e_1 \\ e_3 \to e_3 - 4e_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \end{pmatrix} \overset{e_3 \to e_3 - e_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} .$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ -5y + 7 = 0 \\ 13 = 0 \end{cases} ,$$

che chiaramente non può avere soluzioni, perché l'ultima equazione non può essere soddisfatta.

Vediamo ancora un altro esempio:

$$\begin{cases} -2x + 3y + z - 2 = 0 \\ 4x - 6y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} .$$

Avviamo il metodo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2 \to e_2 + 2e_1 \\ e_3 \to 2e_3 + e_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \dots$$

a questo punto abbiamo un dubbio su come continuare: la $y$ è sparita dalla seconda equazione, mentre per poter fare le sostituzioni a ritroso come siamo abituati, vorremmo che nella terza ci fosse solo $z$, nella seconda $y$ e $z$ (anche se poi non è importante che ci sia $z$), e nella prima tutti e tre (anche se poi quella veramente importante dovrebbe essere solo la $x$). Inoltre, notiamo che nella terza la $y$ c'è. Questo è un vantaggio? E poi, se la $y$ mancasse anche nella terza, come si dovrebbe procedere? Vediamo quindi che ci sono ancora dei problemi che si possono presentare, e che il metodo che abbiamo introdotto ancora non ci dà una "regoletta meccanica" valida per tutti i sistemi (anche se, rispetto alle scuole superiori, abbiamo fatto dei bei passi avanti). Inoltre, teniamo presente che non tutti i sistemi sono di tre equazioni in $x$, $y$, $z$: ci sono sistemi con più incognite che equazioni, e sistemi con più equazioni che incognite. Capiamo che il metodo introdotto può aiutare anche in questi casi, ma capiamo altresì che ci sono ancora alcuni dettagli da mettere a punto. Forse la cosa più importante ancora da capire, specialmente per sistemi non "quadrati", è quale deve essere in generale il punto d'arrivo dei passaggi di addizione e sottrazione. Infine, bisogna stare ancora attenti a non procedere troppo meccanicamente, perché l'errore può essere in agguato, come mostra il seguente esempio:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x-y+3z+w-5=0 \\ 2x-y-z+2w=0 \\ \sqrt{2}x-\pi y+4,57z-88w-157121=0 \end{cases}.$$

Qualcuno, per evitare la complicazione data dalla quarta equazione, potrebbe essere tentato di procedere così:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -\pi & 4,57 & -88 & -157121 \end{pmatrix} \overset{\substack{e_2\to e_2-2e_1 \\ e_3\to e_3-2e_1 \\ e_4\to e_3-e_2}}{\leftrightsquigarrow}$$

$$\leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{e_3\to e_3-e_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow{e_4\to e_4-e_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel sistema corrispondente all'ultima matrice possiamo porre $w = t$ e ricavare con le sostituzioni le (infinite) soluzioni. Troppo comodo! Notiamo infatti che ad esempio la soluzione $(1, -1, 1, -1)$ (corrispondente alla scelta $w = -1$) non soddisfa il sistema di partenza; c'è quindi qualche errore. Con un po' di buon senso ci si accorge che l'errore deve essere nel passaggio in cui abbiamo liquidato con troppa facilità l'equazione brutta [1]. E infatti, quel passaggio (il primo) non è un "se e solo se", in quanto è chiaro che ogni soluzione del primo sistema è anche soluzione del secondo, ma non c'è motivo per cui ogni soluzione del secondo debba essere soluzione del primo, e di fatto non è così, come mostra l'esempio $(1, -1, 1, -1)$. Se si vuole dunque stabilire una "regola meccanica" per risolvere i sistemi, bisogna capire bene quali sono i passaggi corretti (per arrivarci, potrebbe essere utile cominciare a chiedersi quale differenza c'è tra il passaggio sbagliato che abbiamo appena visto e i passaggi giusti fatti precedentemente).

Facendo il punto della situazione, possiamo dire di aver delineato un metodo generale molto conveniente per risolvere qualsiasi sistema lineare, ma non siamo ancora riusciti a mettere a punto con chiarezza tutti i dettagli. Come abbiamo messo in luce poc'anzi, dobbiamo ancora rispondere con precisione ad alcune domande in sospeso, come ad esempio:

- Come si procede quando un'incognita "sparisce" inaspettatamente?
- Qual è in generale la forma finale da raggiungere con i passaggi di addizione e sottrazione, in modo da far partire in modo efficace le sostituzioni?
- Quali sono i passaggi corretti (per i quali vale il "se e solo se")?

Per fortuna, possiamo risparmiarci la fatica di pensare a tutti questi problemi: questo è già stato fatto da altri, e abbiamo a disposizione una teoria bella e

[1] Nel presente caso basta il buon senso per capire il passaggio sbagliato, altre volte potrebbe essere più nascosto: approfittiamo quindi di questa nota per dare un consiglio su come trovare gli errori, anche in ambiti diversi da quello dei sistemi lineari (può essere utile nello svolgimento degli esami scritti).
Se non comporta molto tempo, è buona regola fare sempre qualche verifica sui risultati ottenuti; e se ci si accorge che un risultato ottenuto con una serie di passaggi è sbagliato, si provi a sostituire tale risultato sbagliato nei passaggi intermedi. Quando succede che tale risultato va bene ad un certo punto, ma non nel punto precedente, allora c'è per forza un errore nel passaggio tra questi due punti.

pronta che ci fornisce la voluta "regola meccanica" (il metodo di Gauss) per risolvere molto efficacemente qualsiasi sistema lineare.

Per imparare ad usare questo metodo (soprattutto nei casi speciali che abbiamo lasciato in sospeso in questa discussione) è utile dunque studiare ora la parte di teoria, allenandosi poi ad applicarla agli esempi proposti e ad altri ancora che si possono inventare o trovare sui libri di testo.

Prima però di partire con la teoria, vogliamo qui dire qualcosa di informale riguardo la seconda domanda della lista riportata poco più sopra, cioè quella riguardante la "forma finale" da raggiungere con i passaggi di addizione e sottrazione. Si capisce bene che lo scopo principale è di far sparire molte incognite in molte equazioni, il che equivale a far comparire molti zeri nelle matrici. Tuttavia gli zeri devono essere disposti in una certa maniera, perché come abbiamo visto, se presenti in certe posizioni, possono creare problemi. Riportiamo qui sotto le matrici finali dei vari sistemi risolti finora, e cerchiamo di individuare la logica con cui devono essere disposti gli zeri:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -46 & -46 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo evidenziato che gli zeri "utili" possono essere disposti sotto una figura "a scalini" (anche se possono essere presenti zeri anche al di fuori di tale figura; per esempio, nell'ultima matrice, c'è uno zero fuori dalla figura, che pur facendo comodo, non è strettamente necessario per poter avviare le sostituzioni a ritroso). Questo ci dà l'indicazione per capire la definizione, che sarà data nella parte teorica, di *matrice a scalini*. Naturalmente, anche qui ci sono alcune cose da precisare: per esempio, la scala deve partire in alto a sinistra e scendere terminando nel lato in basso a destra; gli scalini devono essere tutti "alti uno", ma possono essere di varie lunghezze; gli elementi "sotto la scala" devono essere uguali a zero; gli elementi negli "angoletti degli scalini" (detti *pivot*) devono essere per forza diversi da zero (mentre negli altri posti al di sopra della scala possono esserci degli zeri).

Questo modo di descrivere è abbastanza facile da comprendere, ma non è molto preciso: si corre il rischio di fraintendere. Per esempio, la seguente matrice è a scalini?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La risposta è sì:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una maniera più precisa e concisa per dare la definizione di matrice a scalini è la seguente:

- si definisce *pivot* di una riga il suo primo elemento non nullo;
- si definisce una matrice *a scalini* se ha la proprietà che i pivot delle righe non nulle sono sempre più a sinistra dei pivot delle righe non nulle ad esse successive, e che inoltre le eventuali righe nulle sono tutte alla fine.

Naturalmente anche questa definizione non è una definizione formale (i termini "a sinistra", "righe successive", "primo elemento", fanno riferimento a come una matrice viene usualmente rappresentata, e non alla sua definizione formale come applicazione $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$). Nella parte teorica daremo una definizione più rigorosa (anche se meno espressiva delle precedenti), che non sarà altro che una traduzione in termini formali della definizione appena data qui.

A questo punto possiamo finalmente partire con la sezione "teoria". Ribadiamo di nuovo che quanto detto fin qui non dovrà essere ripassato per l'esame (sarebbe molto dannoso), ma, se è stato letto con un po' di attenzione, aiuterà senz'altro a studiare e capire la teoria molto più rapidamente e profondamente, e renderà più agevole il ripasso della stessa, questo sì necessario per l'esame.

# Teoria

Il metodo di Gauss consiste essenzialmente in una serie di trasformazioni sulla matrice del sistema; cominciamo quindi a definire quali sono le trasformazioni utilizzate. Formalmente, una trasformazione su matrici di tipo $[m, n]$

è un'operazione 1-aria definita nell'insieme $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, il che significa semplicemente che ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ la nostra trasformazione associa un'altra matrice $B \in \mathcal{M}_{mn}(K)$; dunque le nostre trasformazioni non sono altro che applicazioni $\tau : \mathcal{M}_{mn}(K) \to \mathcal{M}_{mn}(K)$. Diamo dunque la definizione "ufficiale":

**Definizione 1** *Una* trasformazione elementare *(detta anche* operazione elementare*) per righe su matrici di tipo $[m,n]$ è un'applicazione $\tau : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mn}(K)$ che soddisfa una almeno delle seguenti condizioni.*
*(I) Esiste un $\bar{i} \in \{1,\ldots,m\}$ e un $\lambda \in K$ <u>non nullo</u> tali che per ogni $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, posto $B = \tau(A)$, si ha $\underline{b}_{\bar{i}} = \lambda \underline{a}_{\bar{i}}$ e $\underline{b}_i = \underline{a}_i$ $\forall i \neq \bar{i}$. In tal caso la trasformazione si dice* di primo tipo.
*(II) Esistono $i', i'' \in \{1,\ldots,m\}$ tali che per ogni $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, posto $B = \tau(A)$, si ha $\underline{b}_{i'} = \underline{a}_{i''}$, $\underline{b}_{i''} = \underline{a}_{i'}$ e $\underline{b}_i = \underline{a}_i \forall i \notin \{i', i''\}$. In tal caso la trasformazione si dice* di secondo tipo.
*(III) Esistono $\bar{i}, i' \in \{1,\ldots,m\}$ <u>distinti</u> ed esiste $\lambda \in K$ tali che per ogni $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$, posto $B = \tau(A)$ , si ha $\underline{b}_{\bar{i}} = \underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'}$ e $\underline{b}_i = \underline{a}_i$ $\forall i \neq \bar{i}$. In tal caso la trasformazione si dice* di terzo tipo.
*In tale situazione diremo anche che $B$* è ottenuta da $A$ tramite la trasformazione elementare $\tau$.

La definizione data sopra può essere riassunta in maniera meno precisa, ma più espressiva, dicendo che le trasformazioni del primo tipo consistono nel moltiplicare una riga per uno scalare non nullo (ed è importante che sia non nullo, perciò lo abbiamo sottolineato nella definizione), quelle del secondo tipo consistono nello scambiare di posto due righe, quelle di terzo tipo consistono nel sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga (ed è importante che questa riga sia davvero "un'altra", perciò nella definizione abbiamo sottolineato che i due indici devono essere distinti). Inoltre le tre operazioni elementari possono essere indicate efficacemente come segue:

$$\underline{a}_{\bar{i}} \to \lambda \underline{a}_{\bar{i}} \text{ (tipo I)}, \qquad \underline{a}_{i'} \longleftrightarrow \underline{a}_{i''} \text{ (tipo II)}, \qquad \underline{a}_{\bar{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'} \text{ (tipo III)}.$$

**Proposizione 1** *L'inversa di una trasformazione elementare è ancora una trasformazione elementare dello stesso tipo.*

*Dimostrazione.* L'inversa di $\underline{a}_{\bar{i}} \to \lambda \underline{a}_{\bar{i}}$ è $\underline{a}_{\bar{i}} \to \frac{1}{\lambda} \underline{a}_{\bar{i}}$, l'inversa di $\underline{a}_{i'} \longleftrightarrow \underline{a}_{i''}$ è sé stessa, l'inversa di $\underline{a}_{\bar{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'}$ è $\underline{a}_{\bar{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\bar{i}} - \lambda \underline{a}_{i'}$. C.V.D.

Le affermazioni fatte in questa dimostrazione sono abbastanza evidenti, quindi le abbiamo ritenute sufficienti. Tuttavia, qualcuno potrebbe chiedere "e perché l'inversa di $\underline{a}_{\bar{i}} \to \lambda \underline{a}_{\bar{i}}$ è $\underline{a}_{\bar{i}} \to \frac{1}{\lambda}\underline{a}_{\bar{i}}$, l'inversa di $\tau = \underline{a}_{i'} \longleftrightarrow \underline{a}_{i''}$ è sé stessa, ecc. ecc.?". La tentazione sarebbe quella di rispondere "tu sei troppo pignolo!". Tuttavia, riflettiamo un attimo. Abbiamo sottolineato che lo scalare coinvolto nella definizione delle trasformazioni del primo tipo deve essere non nullo, e infatti senza questa condizione non si potrebbe considerare $\underline{a}_{\bar{i}} \to \frac{1}{\lambda}\underline{a}_{\bar{i}}$. Nella definizione del terzo tipo abbiamo sottolineato che $\bar{i}$ deve essere diverso da $i'$: questa condizione è necessaria per poter avere sempre l'inversa? La risposta è sì, ma bisogna ammettere che a prima vista può sfuggire questo fatto. Capiamo allora che è bene avere sempre la risposta pronta alle domande dei pignoli, allenandosi talvolta a giustificare in maniera precisa anche le cose che possono sembrare più evidenti (questa però non deve diventare una mania, che sarebbe estremamente dannosa). Per questi motivi, proponiamo il seguente esercizio.

**Esercizio 1** *Giustificare in dettaglio le affermazioni fatte nella dimostrazione precedente, sottolineando in quale punto interviene la condizione $\bar{i} \neq i'$ per le trasformazioni di terzo tipo.*

Naturalmente le soluzioni dell'esercizio possono essere tante (ciascuno può svolgerlo secondo il suo stile personale). Qui sotto ne proponiamo una.

*Soluzione*

*Tipo I*

:

L'inversa di $\tau = \underline{a}_{\bar{i}} \to \lambda \underline{a}_{\bar{i}}$ è $\sigma = \underline{a}_{\bar{i}} \to \frac{1}{\lambda}\underline{a}_{\bar{i}}$. Infatti, sia $A$ una qualsiasi matrice di tipo $[m, n]$, sia $B$ la matrice ottenuta da $A$ tramite $\tau$ e $C$ la matrice ottenuta da $B$ tramite $\sigma$. Abbiamo:

$$\left.\begin{array}{cccc}
\text{definizione di } \tau & \text{definizione di } \sigma & & \\
\Downarrow & \Downarrow & & \\
\underline{b}_{\bar{i}} = \lambda \underline{a}_{\bar{i}} & \underline{c}_{\bar{i}} = \frac{1}{\lambda}\underline{b}_{\bar{i}} & \Longrightarrow & \underline{c}_{\bar{i}} = \frac{1}{\lambda}\underline{b}_{\bar{i}} = \frac{1}{\lambda}(\lambda \underline{a}_{\bar{i}}) = \underline{a}_{\bar{i}} \\
\text{e} & \text{e} & & \text{e} \\
\forall i \neq \bar{i},\ \underline{b}_i = \underline{a}_i & \forall i \neq \bar{i},\ \underline{c}_i = \underline{b}_i & \Longrightarrow & \forall i \neq \bar{i},\ \underline{c}_i = \underline{b}_i = \underline{a}_i
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i,\ \underline{c}_i = \underline{a}_i.$$

Quindi $C = A$, e dunque $\sigma \circ \tau$ è l'identità di $\mathcal{M}_{mn}(K)$ (perché $(\sigma \circ \tau)(A) = \sigma(\tau(A)) = \sigma(B) = C = A$, per ogni $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$). In maniera perfettamente analoga si prova che $\tau \circ \sigma$ è ancora l'identità di $\mathcal{M}_{mn}(K)$, e dunque $\sigma$ è l'inversa di $\tau$, come volevamo.
*Tipo II:*

L'inversa di $\tau = \underline{a}_{i'} \longleftrightarrow \underline{a}_{i''}$ è sé stessa. Infatti sia $A$ una qualsiasi matrice di tipo $[m, n]$, sia $B$ la matrice ottenuta da $A$ tramite $\tau$ e $C$ la matrice ottenuta da $B$ ancora tramite $\tau$. Per ogni $i \notin \{i', i''\}$ si ha $\underline{c}_i = \underline{b}_i = \underline{a}_i$, per $i'$ si ha $\underline{c}_{i'} = \underline{b}_{i''} = \underline{a}_{i'}$ e per $i''$ si ha $\underline{c}_{i''} = \underline{b}_{i'} = \underline{a}_{i''}$ . Quindi $C = A$, il che implica che $\tau \circ \tau$ è l'identità di $\mathcal{M}_{mn}(K)$, e dunque $\tau$ è inversa di sé stessa, come volevamo.
*Tipo III*

:

L'inversa di $\tau = \underline{a}_{\bar{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'}$ è $\sigma = \underline{a}_{\bar{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\bar{i}} - \lambda \underline{a}_{i'}$. Infatti, sia $A$ una qualsiasi matrice di tipo $[m, n]$, sia $B$ la matrice ottenuta da $A$ tramite $\tau$ e $C$ la matrice ottenuta da $B$ tramite $\sigma$. Per ogni $i \neq \bar{i}$ si ha $\underline{c}_i = \underline{b}_i = \underline{a}_i$, per $\bar{i}$ si ha

$$\underline{c}_{\bar{i}} = \underline{b}_{\bar{i}} - \lambda \underline{b}_{i'} = \underline{(\underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'}) - \lambda \underline{b}_{i'} = (\underline{a}_{\bar{i}} + \lambda \underline{a}_{i'}) - \lambda \underline{a}_{i'}} = \underline{a}_{\bar{i}}.$$

La condizione $\bar{i} \neq i'$ è stata usata nel terzo passaggio (quello sottolineato). Quindi $C = A$, da cui ricaviamo che $\sigma \circ \tau$ è l'identità di $\mathcal{M}_{mn}(K)$. In maniera perfettamente analoga si procede per la composizione $\tau \circ \sigma$, e dunque $\sigma$ è l'inversa di $\tau$, come volevamo.

Ora cominciamo ad applicare queste nozioni ai sistemi lineari.

**Proposizione 2** *Se la matrice completa di un sistema lineare è ottenuta dalla matrice completa di un altro sistema lineare tramite una trasformazione elementare, allora i due sistemi sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Per trasformazioni di tipo II, i due sistemi differiscono solo per l'ordine in cui sono scritte le equazioni e dunque sono evidentemente equivalenti. Per definizione di trasformazione di I o di III tipo, si ha subito che le equazioni del secondo sistema sono combinazioni lineari delle equazioni del primo; ma siccome l'inversa della trasformazione elementare usata è ancora una trasformazione elementare, allo stesso modo si ha che le equazioni del primo sistema sono combinazioni lineari di quelle del secondo. Dunque, per una nota proposizione sui sistemi lineari, i nostri due sistemi sono equivalenti. C.V.D.

**Corollario 1** *Se la matrice completa di un sistema lineare è ottenuta dalla matrice completa di un altro sistema lineare tramite una sequenza (finita) di trasformazioni elementari, allora i due sistemi sono equivalenti*[2].

*Dimostrazione.* Ovvia conseguenza della proposizione precedente, visto che la relazione di equivalenza tra sistemi lineari, essendo appunto una relazione di equivalenza, ha la proprietà transitiva. C.V.D.

L'idea fondamentale per risolvere qualsiasi sistema lineare in maniera efficiente è quella di trasformare la sua matrice con operazioni elementari, in modo da ottenere un sistema equivalente più semplice da risolvere. La seguente definizione introduce appunto un tipo di matrice che dà luogo a sistemi che si risolvono molto agevolmente, e quindi può essere presa come punto di arrivo per le trasformazioni.

**Definizione 2** *Sia $A$ una matrice di tipo $[m, n]$ su un campo $K$. La matrice $A$ si dice* a scalini *se valgono le seguenti implicazioni:*
*(a)* $\quad a_{\bar{\imath}j} = 0 \ \forall j \implies a_{ij} = 0 \ \forall i > \bar{\imath}, \ \forall j$ ;
*(b)* $\quad (a_{\bar{\imath}j} = 0 \ \forall j < \bar{\jmath}$ *e* $a_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \neq 0) \implies a_{ij} = 0 \ \forall i > \bar{\imath}, \ \forall j \leq \bar{\jmath}$ .
*Un elemento che soddisfi l'ipotesi dell'implicazione (b) si dice* pivot *della riga $\underline{a}_{\bar{\imath}}$.*

Vediamo ora come trasformare con operazioni elementari una qualsiasi matrice in una matrice a scalini: cerchiamo perciò di descrivere il procedimento generale detto appunto *di riduzione a scalini.* Useremo qui un linguaggio non troppo formale, perché il nostro obiettivo principale è di consentire una rapida acquisizione di questo metodo e dunque può essere troppo pesante approfondire i dettagli algoritmici in maniera strettamente formale, cosa che comunque può costituire un ottimo esercizio di Calcolo e Programmazione. Anzi, per i più interessati a questo tipo di questioni, può essere divertente implementare questo algoritmo, cioè creare un programma (software) che riduca a scalini le matrici: la descrizione che daremo ora può essere considerata come un primo passo nella schematizzazione dell'algoritmo.

---

[2] Questo corollario spiega tra l'altro il motivo per cui, in alcuni testi, due matrici sono dette *equivalenti* quando possono essere ottenute una dall'altra tramite una sequenza di trasformazioni elementari. Così si ha che sistemi con matrici equivalenti sono equivalenti. Il viceversa però non vale, se non nell'ipotesi aggiuntiva in cui i sistemi sono compatibili.

**Osservazione 1** *Può essere a volte comodo effettuare su una matrice una trasformazione del tipo* $\underline{a}_{\overline{i}} \longrightarrow \lambda\underline{a}_{\overline{i}} + \mu\underline{a}_{i'}$. *Questa non è in generale una trasformazione elementare, tuttavia, se* $\lambda \neq 0$, *si può ottenere componendo le due operazioni elementari* $\underline{a}_{\overline{i}} \longrightarrow \underline{a}_{\overline{i}} + \frac{\mu}{\lambda}\underline{a}_{i'}$ *(tipo III) e* $\underline{a}_{\overline{i}} \longrightarrow \lambda\underline{a}_{\overline{i}}$ *(tipo I).*

**Definizione 3** *Sia $A$ una matrice di tipo $[m,n]$. Il procedimento* di riduzione a scalini *consiste nei seguenti passi:*

- *Si parta ponendo* $\overline{i} = 1$.
- *Fintanto che esiste una riga* $\underline{a}_i \neq \underline{0}$ *con* $i > \overline{i}$, *si ripeta il seguente ciclo di operazioni*[3]*:*
  - *INIZIO CICLO*
  - *Si ponga*
    $$\begin{array}{l} \overline{j} = \min\left\{j : \exists i \geq \overline{i}\ a_{ij} \neq 0\right\} \\ i' = \min\left\{i : i \geq \overline{i} \text{ e } a_{i\overline{j}} \neq 0\right\}. \end{array}$$
  - *Si effettui la trasformazione elementare* $\underline{a}_{\overline{i}} \longleftrightarrow \underline{a}_{i'}$.
  - *Per ogni* $i > \overline{i}$ *si effettui la trasformazione* $\underline{a}_i \longrightarrow \lambda_i\underline{a}_i + \mu_i\underline{a}_{\overline{i}}$ *con* $\lambda_i$ *e* $\mu_i$ *tali che* $\frac{\mu_i}{\lambda_i} = -\frac{a_{i\overline{j}}}{a_{\overline{i}\overline{j}}}$ $(\lambda_i \neq 0)$.
  - *Si aumenti* $\overline{i}$ *di una unità.*
  - *FINE CICLO*

**Osservazione 2** *La trasformazione nel terzo passo del ciclo può essere sempre effettuata, perché* $a_{\overline{i}\overline{j}} \neq 0$ *(basta porre per esempio* $\lambda_i = 1$ *e* $\mu_i = -\frac{a_{i\overline{j}}}{a_{\overline{i}\overline{j}}}$, *oppure* $\lambda_i = a_{\overline{i}\overline{j}}$ *e* $\mu_i = -a_{i\overline{j}}$*: la scelta può essere fatta in funzione della comodità dei calcoli) ed è una composizione di due trasformazioni elementari (cfr. osservazione 1). Si tenga presente che mano a mano che il procedimento descritto sopra viene svolto, la matrice trasformata (e i suoi elementi) viene sempre indicata con la lettera $A$, così come avviene nei linguaggi di programmazione. Se avessimo seguito l'uso comune nelle definizioni matematiche, avremmo dovuto cambiare nome ogni volta che si otteneva (con una trasformazione elementare) una nuova matrice. Lo stesso vale per altri simboli usati (variabili), come* $\overline{i}$, $i'$, $\overline{j}$, *ecc.*

---

[3] In alcuni linguaggi di programmazione istruzioni simili si chiamano WHILE…DO. Nel nostro caso, il significato è che il ciclo si deve interrompere quando tutte le righe dopo la riga $\overline{i}$ sono tutte nulle (o non ci sono proprio). All'inizio la riga $\overline{i}$ è la prima, ma durante il ciclo cambierà via via, aumentando di uno ad ogni ripetizione (è scritto nell'ultimo passo del ciclo).

Per chi preferisce un liguaggio ancora meno formale, riportiamo qui sotto una traduzione "più umana" dell'algoritmo di riduzione a scalini:

— Si individui il primo elemento non nullo della prima colonna non nulla e si indichino con $i'$ e $\overline{j}$ i suoi indici di riga e colonna (in $A$): questo elemento sarà il nostro primo pivot.

— Si effettui la trasformazione elementare $\underline{a}_1 \longleftrightarrow \underline{a}_{i'}$. Così facendo il pivot è stato portato più in alto possibile.

— Per ogni $i > 1$ si effettui la trasformazione $\underline{a}_i \longrightarrow \lambda_i \underline{a}_i + \mu_i \underline{a}_{\overline{i}}$ con $\lambda_i$ e $\mu_i$ tali che $\frac{\mu_i}{\lambda_i} = -\frac{a_{i\overline{j}}}{a_{\overline{i}\overline{j}}}$ ($\lambda_i \neq 0$). Così facendo tutti gli elementi al di sotto del pivot sono stati trasformati in zero, e il pivot sarà più a sinistra dei pivot successivi, come richiesto per una matrice a scalini.

— Si ripeta tutto dall'inizio, applicandolo però solo alla sottomatrice ottenuta cancellando la prima riga (la prima riga rimarrà d'ora in poi sempre invariata)

La nuova prima riga da considerare nel secondo ciclo sarà quindi quella che in effetti è la seconda riga di $A$. Alla fine del secondo ciclo la seconda riga sarà messa da parte, e si ripeterà considerando solo le righe dalla terza in poi, e così via, finché è possibile.

Non ci addentreremo nella dimostrazione che l'algoritmo ora esposto funziona, cioè che davvero applicando l'algoritmo ad una qualsiasi matrice si ottiene alla fine una matrice a scalini. In effetti, dalla descrizione appena fatta si intuisce abbastanza bene che l'algoritmo mira a disporre i pivot nell'ordine richiesto in una matrice a scalini (quelli più in basso, sono più a destra), l'unico dubbio serio è se, durante lo svolgimento dell'algoritmo, qualcuno degli zeri ottenuti in passi precedenti possa ridiventare non nullo. Ma questo non accade perché, ad ogni passo, l'azione che le trasformazioni vengono ad avere sulla parte di matrice già sistemata coinvolgono solo zeri, e dunque non può ricomparire nulla di diverso da zero.

La maniera migliore per capire l'algoritmo, è applicarlo a molti esempi. Si consiglia quindi di studiare bene la terza parte "esempi ed esercizi". In tale sezione saranno descritte anche alcune varianti del procedimento di riduzione che, sebbene non siano strettamente richieste per l'esame, è utile conoscere (ad esempio possono aiutare a svolgere più rapidamente gli esercizi del compito).

Per la parte teorica, rimane solo da spiegare perché i sistemi con matrice completa a scalini sono facili da risolvere. Lo facciamo nella seguente definizione, ancora in maniera informale. Per chi ha letto attentamente la prima parte di questi appunti, non c'è in realtà niente di nuovo.

**Definizione 4** *Consideriamo un sistema lineare con matrice completa $A$ a scalini. Il* procedimento di sostituzione a ritroso *per la risoluzione di tale sistema consiste nei seguenti passi.*

- *Sia $\underline{a_{\bar{\imath}}}$ l'ultima riga non nulla.*
- *Se $\underline{a_{\bar{\imath}}}$ ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo, allora il sistema è incompatibile e il procedimento termina.*
- *Sia $a_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$ il pivot della riga $\underline{a_{\bar{\imath}}}$.*
- *Si ricavi l'incognita $x_{\bar{\jmath}}$ rispetto alle rimanenti nell'equazione $\bar{\imath}$.*
- *In tutte le equazioni precedenti l'equazione $\bar{\imath}$ si sostituisca $x_{\bar{\jmath}}$ con l'espressione trovata.*
- *Se $\bar{\imath} = 1$ si termina, altrimenti si diminuisca $\bar{\imath}$ di una unità, e si ripeta a partire dal terzo passo.*

**Proposizione 3** *Dopo il procedimento di sostituzione a ritroso, le soluzioni sono tutte e sole quelle ottenibili ricavando le incognite $x_{\bar{\jmath}}$ (corrispondenti alle colonne contenenti i pivot) secondo le espressioni calcolate durante il procedimento, dopo aver assegnato dei valori arbitrari alle incognite rimanenti.*

Tralasciamo la dimostrazione formale di quest'ultima proposizione (che concettualmente è assolutamente banale), visto che il procedimento di sostituzione a ritroso è stato descritto abbastanza informalmente. Il punto saliente da sottolineare è che i passaggi di sostituzione sono tutti dei "se e solo se".

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per dare la definizione "ufficiale" del metodo di Gauss.

**Definizione 5** *Il metodo di Gauss per la risoluzione di un qualunque sistema lineare consiste nelle seguenti due fasi:*
*— Riduzione a scalini della matrice completa del sistema.*
*— Risoluzione tramite sostituzioni a ritroso del sistema corrispondente alla matrice a scalini ottenuta nella fase precedente.*

**Osservazione 3** *Per la proposizione 3 le soluzioni ottenute nella seconda fase del procedimento sono quelle del sistema a scalini. Per la proposizione 2 tale sistema a scalini è equivalente a quello assegnato. Dunque le soluzioni trovate col metodo di Gauss sono tutte e sole quelle del sistema assegnato, come volevamo.*

La cosa più importante ora è imparare ad utilizzare con padronanza tale metodo, in quanto esso è fondamentale soprattutto dal punto di vista computazionale. Passiamo quindi senz'altro alla parte esercitativa.

## Esempi ed esercizi

Incominciamo a verificare il procedimento su matrici già considerate nella prima parte di questi appunti.

**Esempio 1** *Riduciamo a scalini la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— *Poniamo* $\bar{i} = 1$.
— *Poiché la riga* $\underline{a}_2$ *è non nulla* ($2 > \bar{i} = 1$)*, dobbiamo far partire il primo ciclo:*
— *Si ha* $\bar{j} = 1$, $i' = 1$ *(infatti il primo elemento non nullo della prima colonna non nulla è* $a_{11}$*).*
— *Si effettua* $\underline{a}_1 \longleftrightarrow \underline{a}_1$ *(naturalmente questa trasformazione non cambia proprio niente; questo perché il pivot selezionato è già il più in alto possibile).*
— *Si annullano tutti gli elementi sotto il pivot (quindi, in questo caso, si agisce solo sulla seconda riga); si ha, per* $i = 2$, $a_{\bar{i}\bar{j}} = a_{11} = 3$ *e* $a_{i\bar{j}} = a_{21} = 1$ *quindi possiamo scegliere ad esempio* $\lambda_2 = 3$ *e* $\mu_2 = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{a}_2 \to 3\underline{a}_2 - \underline{a}_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

— *Aumentiamo* $\bar{i}$*, quindi* $\bar{i} = 2$*, e ritorniamo all'inizio del ciclo.*
— *Poiché non esistono righe oltre la seconda, non dobbiamo far partire il secondo ciclo, dunque l'algoritmo termina.*

*Abbiamo ottenuto una matrice a scalini: l'algoritmo ha funzionato.*

**Osservazione 4** *Quanto fatto ora coincide con quanto fatto nella parte di "discussione", solo che lì lavoravamo direttamente sul sistema, invece che con la matrice. Naturalmente si poteva anche scegliere un'altra trasformazione, per esempio* $\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - \frac{1}{3}\underline{a}_1$ *(che è un unica trasformazione elementare) invece di* $\underline{a}_2 \to 3\underline{a}_2 - \underline{a}_1$*(che è la composizione successiva di* $\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - \frac{1}{3}\underline{a}_1$ *con* $\underline{a}_2 \to 3\underline{a}_2$*) o anche* $\underline{a}_2 \to 903\underline{a}_2 - 301\underline{a}_1$*. Si capisce che vanno bene tutte, visto che l'obiettivo è quello di annullare* $a_{21}$*, infatti si ottengono matrici diverse, ma tutte a scalini e tutte danno luogo a sistemi equivalenti. L'operazione* $\underline{a}_2 \to 3\underline{a}_2 - \underline{a}_1$ *ha il vantaggio di evitare le frazioni (e di non essere pesante come* $\underline{a}_2 \to 903\underline{a}_2 - 301\underline{a}_1$*).*

**Esercizio 2** *Ridurre a scalini le seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

*e verificare che i procedimenti usati nella parte di "discussione" (pagg. 3–5) rispondono a questo scopo.*

Gli esempi prededenti mostrano che il procedimento funziona bene nei casi già descritti. Nel seguente esempio facciamo vedere come funzioni nei casi che erano rimasti dubbi nella prima parte (vedi discussione alla fine di pag. 6).

**Esempio 2** *Applichiamo il procedimento di riduzione a scalini alla matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- *Poniamo* $\bar{i} = 1$.
- *Poiché la riga* $\underline{a}_2$ *è non nulla dobbiamo far partire il primo ciclo (infatti* $2 > \bar{i} = 1$*, e anzi anche la* $\underline{a}_3$ *è non nulla, comunque ne basta una) :*
- *Si ha* $\bar{j} = 1$*,* $i' = 1$ *(infatti il primo elemento non nullo della prima colonna non nulla è* $a_{11}$*).*
- *Lo scambio è inutile (sarebbe* $\underline{a}_1 \longleftrightarrow \underline{a}_1$*).*

- *Si annullano tutti gli elementi sotto il pivot: per* $i = 2$ *si ha* $a_{\overline{i}\overline{j}} = a_{11} = -2$ *e* $a_{i\overline{j}} = a_{21} = 4$*, quindi possiamo scegliere* $\lambda_2 = 1$ *e* $\mu_2 = 2$ *(perché* $\frac{2}{1} = -\frac{4}{-2}$*); mentre per* $i = 3$*, si ha* $a_{\overline{i}\overline{j}} = a_{11} = -2$ *e* $a_{i\overline{j}} = a_{31} = 1$*, quindi possiamo scegliere* $\lambda_3 = 2$ *e* $\mu_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_3 \to 2\underline{a}_3 + \underline{a}_1}{\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 + 2\underline{a}_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

- *Aumentiamo* $\overline{i}$*, quindi* $\overline{i} = 2$*, e ritorniamo all'inizio del ciclo.*

- *Poiché la riga* $\underline{a}_3$ *è non nulla dobbiamo far partire il secondo ciclo:*

- *Si ha* $\overline{j} = 2$*,* $i' = 3$ *(infatti, se cancelliamo la prima riga, nella parte rimanente della matrice, il primo elemento non nullo della prima colonna non nulla è* $a_{32} = -5$*).*

- *Si effettua* $\underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3$*:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3}{} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  *(ecco il punto fondamentale, che risolve il dubbio di cui abbiamo parlato a pag. 5 e pag. 7! Bastava scambiare la seconda e la terza riga)*

- *Si annullano tutti gli elementi sotto il pivot: per* $i = 3$ *si ha* $a_{\overline{i}\overline{j}} = a_{22} = -5$ *e* $a_{i\overline{j}} = a_{32} = 0$*, quindi la trasformazione da fare è* $\underline{a}_3 \to -5\underline{a}_3 - 0\underline{a}_2$ *(naturalmente questo passaggio è inutile, perché la matrice è già a scalini; lo mettiamo solo come ulteriore esempio per illustrare come si applicano meccanicamente i passi del procedimento):*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_3 \longrightarrow -5\underline{a}_3}{} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

- *Aumentiamo* $\overline{i}$*, quindi* $\overline{i} = 3$*, e ritorniamo all'inizio del ciclo.*

- *Poiché non esistono righe oltre la terza, non dobbiamo far partire il terzo ciclo, dunque l'algoritmo termina.*

Naturalmente, dopo un po' di allenamento, ci si accorge facilmente che talvolta alcuni passaggi possono essere saltati, o che altre volte è più comodo usare altre trasformazioni che "si vedono ad occhio". Sottolineiamo però che effettivamente i metodi trattati consentono di affrontare ogni situazione in maniera meccanica, ed evitano errori come quelli di cui abbiamo parlato a pag. 7 (infatti lì l'errore era nella trasformazione $\underline{a}_4 \to \underline{a}_3 - \underline{a}_2$, che non è una trasformazione elementare).

Passiamo ora ad esercizi completi, cioè non solo sulla riduzione a scalini, ma sulla risoluzione di sistemi tramite il metodo di Gauss.

**Esempio 3** *Risolviamo col metodo di Gauss il sistema*

$$\begin{cases} 3x - y + z - 2 = 0 \\ 6x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

*La matrice completa è*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Riduciamo a scalini:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_3 \to 3\underline{a}_3 - \underline{a}_1}{\overrightarrow{\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - 2\underline{a}_1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Applichiamo ora le sostituzioni a ritroso, seguendo la definizione 4.*

- *L'ultima riga non nulla è la terza ($\bar{i} = 3$).*
- *In tale riga sono nulli tutti gli elementi tranne l'ultimo. Dunque il sistema è incompatibile.*

**Osservazione 5** *Anche nell'esempio di sopra, svolto applicando meccanicamente tutti i passi dei procedimenti definiti nella parte teorica, ci si poteva*

*fermare prima. Infatti, dopo il primo ciclo della riduzione a scalini, è comparsa la riga* $(0,0,0,4)$*: già a questo punto si poteva concludere che il sistema è incompatibile, dato che anche i sistemi corrispondenti alle matrici intermedie della riduzione sono equivalenti al sistema assegnato, e la presenza della riga in questione implica la presenza dell'equazione* $0 = 4$*, che non ha soluzioni.*
*Ribadiamo dunque ancora una volta che sebbene i procedimenti indicati siano perfettamente efficienti, con un po' di pratica e buon senso, in casi particolari si può pervenire alla soluzione anche più rapidamente.*

**Esempio 4** *Risolvere il sistema lineare*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 - 5 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 + 1 = 0 \end{cases}.$$

*Riduciamo a scalini la matrice completa:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - \underline{a}_1 \\ \underline{a}_3 \to \underline{a}_3 - 2\underline{a}_1 \\ \underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + \underline{a}_1}}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + \underline{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + 2\underline{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Risolviamo a ritroso:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \quad = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 5 = 0 \\ -x_3 + x_4 + 2 = 0 \\ 2x_4 \quad = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0 \to x_1 = 1 \\ 3x_2 - 5 \cdot 2 + 0 - 5 = 0 \to x_2 = 5 \\ -x_3 + 0 + 2 = 0 \to x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

*Dunque il sistema ha un'unica soluzione:* $(1,5,2,0)$.

**Osservazione 6** *Se si volessero evitare del tutto le sostituzioni, si potrebbe semplificare ancora la matrice a scalini. Per esempio, a partire dalla matrice di sopra, si potrebbe continuare con le seguenti trasformazioni elementari:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{a}_4 \to \frac{1}{2}\underline{a}_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \underline{a}_1 \to \underline{a}_1 - 4\underline{a}_4 \\ \underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - \underline{a}_4 \\ \underline{a}_3 \to \underline{a}_3 - \underline{a}_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{a}_3 \to -\underline{a}_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \underline{a}_1 \to \underline{a}_1 + 3\underline{a}_3 \\ \underline{a}_2 \to \underline{a}_2 + 5\underline{a}_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{a}_2 \to \frac{1}{3}\underline{a}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_1 \to \underline{a}_1 - \underline{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*La matrice ottenuta corrisponde al sistema:*

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ x_2 - 5 = 0 \\ x_3 - 2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

*che in pratica è già bell'e risolto. Il metodo che abbiamo applicato qui si chiama metodo di Gauss-Jordan, e può essere definito in generale. Tale metodo però comporta più fatica del metodo di Gauss, cioè, in termini più precisi, ha un maggiore* costo computazionale. *I costi computazionali degli algoritmi sono uno strumento utile in ambito informatico: servono per capire quale programma è più veloce per raggiungere un determinato scopo. Chi è interessato ad un'esposizione dettagliata del metodo di Gauss-Jordan o ai costi computazionali, può consultare ad esempio [F. Orecchia,* Elementi di geometria e algebra lineare - Vol. II: Matrici, determinanti e sistemi lineari, *Liguori editore].*

**Esempio 5** *Risolviamo col metodo di Gauss il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 14 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases} .$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ -4 & 6 & -2 & -8 & 14 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_3 \to \underline{a}_3 + \underline{a}_1}{\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 + 2\underline{a}_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 + 4x_4 - 10 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + (5 - 2x_4) + 4x_4 - 7 = 0 \rightarrow x_1 = 1 + \frac{3}{2}x_2 - x_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = 5 - 2x_4 \end{cases} .$$

*Le soluzioni allora si ottengono tutte assegnando valori arbitrari alle incognite* $x_2$ *e* $x_4$*, e ricavando* $x_1$ *e* $x_3$ *secondo le espressioni appena trovate. Dunque l'insieme delle soluzioni è*

$$\left\{ \left( \quad 1 + \frac{3}{2}s - t \quad , \quad s \quad , \quad 5 - 2t \quad , \quad t \quad \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

A questo punto il lettore può esercitarsi da solo, provando a risolvere col metodo di Gauss sistemi lineari proposti nei vari testi di algebra lineare (o anche in testi di altre materie; per esempio, il bilanciamento di reazioni chimiche è essenzialmente un esercizio di risoluzione di sistemi lineari).

# SPAZI VETTORIALI

## 1. Esercizi

**Esercizio 1.** Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} \qquad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 4\}$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2\} \qquad V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$$
$$V_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - y)^2 = 0\} \quad V_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0, y - z = 0\}.$$

Determinare una base per i sottospazi tra i sottoinsiemi precedenti.

**Esercizio 2.** Verificare che le matrici quadrate di ordine 2 e rango 1 non formano un sottospazio. E quelle di rango 2? E quelle aventi determinante uguale a zero?

**Esercizio 3.** Verificare che i polinomi di $\mathbb{R}[x]_3$ verificanti $p(1) = 0$ formano un sottospazio. Ripetere l' esercizio con la condizione $p(1) = 1$, ovvero con la condizione $p(1) = p(0)$, ovvero con la condizione $p(1) = p(0) + 1$. Determinare una base e la dimensione di quelli tra i precedenti che sono un sottospazio.

**Esercizio 4.** Dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1), \mathbf{v}_2 = (4, -2, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, -3, 1)$, e gli scalari $a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -2, a_4 = -1$, calcolare la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ secondo gli scalari $a_1, \ldots, a_4$, e da questa dedurre che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Detto $U = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$, trovare una base di $U$, la sua dimensione, e completare poi la base trovata a base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 5.** Dati i vettori $(1, 1), (1, 3), (2, -1) \in \mathbb{R}^2$, stabilire se sono linearmente dipendenti, e se è possibile scrivere il secondo vettore come combinazione lineare degli altri due.

**Esercizio 6.** Ripetere l' esercizio 2) con i vettori $(4, 2, 2), (5, 0, 1), (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, con i vettori $2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, -\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, e con i vettori $(1, -i, 1 - i), (i, 1, 1 - i), (0, 0, 1) \in \mathbb{C}^3$.

**Esercizio 7.** Verificare che le matrici quadrate di ordine 3 triangolari superiori sono un sottospazio vettoriale di $M(3, 3; \mathbb{R})$ di dimensione 6.

**Esercizio 8.** Verificare che i polinomi aventi $x = 1$ come radice doppia sono un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_3$. Calcolarne anche una base e la dimensione.

**Esercizio 9.** Calcolare una base e la dimensione del sottospazio

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_3 | xp'' - p' = 0\}.$$

**Esercizio 10.** Determinare al variare di $k \in R$ la dimensione dei sottospazi $U = \mathcal{L}((1, 1, k), (k + 1, 2, 2), (2 - k^2, 1, k))$ e $W = \mathcal{L}((1, 1, k), (k, 1, 2 - k), (k + 1, 2, k + 1))$ di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 11.** Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}\right).$$

**Esercizio 12.** Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione ed una base del sottospazio di $\mathbb{R}[x]_2$

$$U = \mathcal{L}(kx - x^2, 1 - k + kx^2, k - (k - 1)x - kx^2).$$

**Esercizio 13.** Per ognuno dei seguenti insiemi di vettori si trovi una base dello spazio indicato a fianco contenente i vettori assegnati, se possibile:

$$(i)(2,-1,0) \in \mathbb{R}^3; (ii)(2,-1,0),(1,0,1) \in \mathbb{R}^3; (iii)\mathbf{i}-\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2; (\text{iv})\mathbf{i}-\mathbf{j} \in \mathbb{R}^3;$$
$$(v)\mathbf{i}+\mathbf{j},\mathbf{i}-\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3; (\text{vi})(3,-1) \in \mathbb{R}^2; (\text{vii})(1,0,1),(-1,0,-1) \in \mathbb{R}^3.$$

**Esercizio 14.** Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ che soddisfi la seguente equazione:

$$2((1,1,0)-\mathbf{x})+4(\mathbf{x}+(0,1,-1)) = (2,-1,2).$$

E se consideriamo l' equazione $2((1,1,0)-\mathbf{x})+3(\mathbf{x}+(0,1,-1))-\mathbf{x} = (2,-1,2)$?

**Esercizio 15.** Scrivere i seguenti sottospazi come soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

$$(i)\mathcal{L}((1,1)); (ii)\mathcal{L}((1,1,0),(1,-1,0)); (iii)\mathcal{L}((1,1,1),(1,-1,0)); (iv)\mathcal{L}((1,1,1)).$$

**Esercizio 16.** Calcolare una base $\mathcal{B}$ del sottospazio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0\}$, verificare che $\mathbf{u} = (1,1,2) \in \mathrm{U}$ e determinare le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata. Calcolare inoltre il vettore $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ avente componenti $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = {}^t(1,-1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $U$ trovata.

**Esercizio 17.** Calcolare l' intersezione dei sottospazi $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y+z=0\}$ e $V = \mathcal{L}((0,3,-1),(1,2,0))$.

**Esercizio 18.** Calcolare la somma dei sottospazi $U = \mathcal{L}((1,1,1))$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y = x-z = 0\}$. È una somma diretta?

**Esercizio 19.** Calcolare l' intersezione dei sottospazi di $M(2,2;\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a+2b+c-3d=0, a+c-d=0 \right\}$$
$$V = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

**Esercizio 20.** Dimostrare che $\mathbb{R}[x]_3$ è somma diretta dei sottospazi

$$U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_1 = a_2\} \text{ e } V = \mathcal{L}(x - x^2).$$

**Esercizio 21.** Calcolare somma ed intersezione dei sottospazi $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ e $V = \mathcal{L}((1,1,k))$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $k$ $U+V$ è somma diretta di $U$ e $V$?

**Esercizio 22.** Sia $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2\}$. $U$ non è un sottospazio perché

(1) $\mathbf{0} \notin \mathbf{U}$;
(2) $(0,0,2) \in U, (0,0,-3) \in U$ ma $(0,0,2)+(0,0,-3) \notin U$;
(3) $(0,0,1) \in U$ ma $2(0,0,1) \notin U$;
(4) $(1,1,1) \in U$ ma $2(1,1,1) \notin U$.

**Esercizio 23.** Sia $U = \mathcal{L}((1,1,0),(k-1,2,k),(k+1,-k,-k))$. Allora

(1) se $k=0$, $\dim U = 2$;
(2) esistono dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\dim U = 1$;
(3) se $k = 2/3$, $\dim U = 3$;
(4) $\dim U = 3$, qualunque sia $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 24.** Siano $\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{w} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$, ed $U = \mathcal{L}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Allora

(1) $\mathbf{w} \in \mathrm{U}$;

(2) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;
(3) $\dim U = 1$;
(4) $U$ non è un sottospazio.

**Esercizio 25.** (i) Dati 4 vettori distinti di uno spazio vettoriale di dimensione 3, stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

(1) sono sempre linearmente dipendenti;
(2) 3 vettori dei 4 sono linearmente indipendenti;
(3) almeno uno è linearmente indipendente;
(4) almeno uno dipende linearmente dagli altri.

(ii) Cosa cambia se consideriamo 4 vettori distinti di uno spazio vetoriale di dimensione 4?

## 2. Soluzioni di alcuni esercizi

*Soluzione dell' Esercizio 1.* $V_1$ è formato dai vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo $(a, a, a)$, dove $a \in \mathbb{R}$ e quindi è un sottospazio perché verifica le tre condizioni della definizione. Infatti, per $a = 0$ otteniamo il vettore nullo, sommando due vettori del tipo $a(1, 1, 1)$ e $b(1, 1, 1)$ otteniamo il vettore $(a + b)(1, 1, 1)$ che ha ancora le tre entrate uguali tra loro, e moltiplicando un vettore del tipo$a(1, 1, 1)$ per un numero reale $b$ otteniamo il vettore $ab(1, 1, 1)$, ancora con le tre entrate uguali. Osserviamo anche che $V_1$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ e che possiamo anche scriverlo come $\mathcal{L}((1, 1, 1))$. $V_1$ ha dimensione 1 ed una sua base è $((1, 1, 1))$. $V_2$ non è un sottospazio perché $(0, 0, 0)$ non verifica la condizione che lo definisce. $V_3$ non è un sottospazio perché $(1, 0, 1) \in V_3$ ma $(2, 0, 2) = 2(1, 0, 1) \notin V_3$, e quindi la terza richiesta della definizione di sottospazio non è verificata. $V_4$ è dato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, e quindi è un sottospazio. Risolvendo il sistema otteniamo $x = y - 2z$, e quindi i vettori di $V_4$ sono del tipo $(y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. Quindi $\dim V_4 = 2$ ed una sua base è $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$. $V_5$ è un sottospazio perché la condizione che lo definisce può essere riscritta come $x - y = 0$ ed è quindi dato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Risolvendo il sistema si ottiene che i vettori di $V_5$ sono del tipo $(x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ e quindi $\dim V_5 = 2$, ed una sua base è $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$. $V_6$ coincide con $V_1$ e quindi è un sottospazio.

*Soluzione dell' Esercizio 2.* La matrice nulla ha rango zero, e quindi non appartiene all' insieme delle matrici quadrate di ordine 2 e rango 1, né a quelle di rango 2. Verificare se le altre due condizioni sono verificate, fornendo eventualmente dei controesempi. Le matrici con determinante uguale a zero non formano un sottospazio perché

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno determinante nullo, ma la loro somme è la matrice identica che ha determinante uguale ad 1.

*Soluzione dell' Esercizio 3.* Sia $V_1$ formato dai polinomi che verificano $p(1) = 0$. Ovviamente, il polinomio nullo si trova in $V_1$. Se $p, q \in V_1$ allora $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$, e quindi anche $p + q \in V_1$. Se $p \in V_1$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $(ap)(1) = ap(1) = a0 = 0$, e quindi $ap \in V_1$. Quindi, $V_1$ è un sottospazio. I polnomi di $V_1$ sono allora del tipo $(x - 1)(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ per il Teorema di Ruffini, e quindi $V_1$ ha dimensione 3, ed una sua base è $(x - 1, x(x - 1), x^2(x - 1))$. I polinomi verificanti $p(1) = 1$ non formano un sottospazio perché il polinomio nullo non verifica la condizione. Sia $V_2$ l' insieme dei vettori che verificano $p(1) = p(0)$. Il polinomio nullo verifica la condizione perché è nullo in ogni punto. Se $p, q \in V_2$ allora $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(0) + q(0) = (p+q)(0)$ e quindi $p + q \in V_2$. Se $a \in \mathbb{R}$, allora $(ap)(1) = ap(1) = ap(0) = (ap)(0)$. Poiché sono verificate tutte le condizioni, $V_2$ è un sottospazio. Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^3 + a_3x^3$ un polinomio di $\mathbb{R}^3$. La condizione che definisce $V_2$ diventa allora $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0$, ossia $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, da cui $a_3 = -a_1 - a_2$. Quindi i polinomi di $V_2$ sono tutti e soli quelli del tipo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (-a_1 - a_2)x^3$ e quindi $\dim V_2 = 3$ ed una base di $V_3$ è $(1, x - x^3, x^2 - x^3)$. I polinomi che verificano $p(1) = p(0) + 1$ non formano un sottospazio perché il polinomio nullo non la verifica.

*Soluzione dell' Esercizio 4.* $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, e quindi i vettori dati sono l.d. perché gli scalari non sono tutti nulli. Per trovare una base di $U$ scriviamo i generatori come righe di una matrice e la riduciamo per righe (o li scriviamo per colonne e riduciamo per colonne). Le righe non nulle della matrice ridotta corrispondono ai vettori linearmente indipendenti tra quelli assegnati, e quindi formano una base.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \; r_4 \to r_4 + 2r_3 \; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi la dimensione di $U$ è 2 ed una base è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$. Una base di $\mathbb{R}^3$ che completa quella di $U$ si ottiene aggiungendo una riga alla matrice precedente in modo che resti ridotta per righe. Quindi una base di $\mathbb{R}^3$ potrebbe essere $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, (1, 0, 0))$.

*Soluzione dell' Esercizio 5.* I vettori sono sicuramente linearmente dipendenti perché il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ è 2. Per stabilire se il secondo è c.l. degli altri due bisogna risolvere il sistema lineare che si ottiene dall' uguaglianza

$$x(1,1) + y(2,-1) = (1,3),$$

ossia

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Usando una tecnica risolutiva si ha che il sistema precedente ha un' unica soluzione data da $(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$ e quindi il secondo vettore è c.l. degli altri due valendo l' uguaglianza $(1,3) = \frac{7}{3}(1,1) - \frac{2}{3}(2,-1)$, ed inoltre il primo ed il terzo vettore sono l.i. perché la matrice che li ha come colonne (matrice dei coefficienti del sistema) ha rango due.

*Soluzione dell' Esercizio 6.* Riportiamo solo i risultati, essendo lo svolgimento dell' esercizio simile al precedente. I primi tre vettori sono l.d. perché $(4,2,2) + 0(5,0,1) - 2(2,1,1) = (0,0,0)$, ma non è possibile scrivere $(5,0,1)$ come c.l. di $(4,2,2)$ e di $(2,1,1)$; i secondi tre vettori sono l.i., e quindi non è possibile scrivere il secondo come c.l. degli altri; per gli ultimi tre abbiamo $(i, 1, 1-i) = i(1, -i, 1-i) - 2i(0, 0, 1)$.

*Soluzione dell' Esercizio 7.* Sia $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i, j \leq 3$ una matrice quadrata di ordine 3. Essa è triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per $i > j$. Quindi le matrici triangolari superiori sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo, e quindi sono un sottospazio di $M(3,3;\mathbb{R})$. una tale matrice può essere scritta come

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

e quindi la dimensione del sottospazio è 6. Se ne calcoli una base.

*Soluzione dell' Esercizio 8.* I polinomi che hanno $x = 1$ come radice doppia sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare $p(1) = 0, p'(1) = 0$, e quindi formano un sottospazio. Tali polinomi possono essere scritti come $p(x) = (x-1)^2(a+bx)$ e quindi la dimensione di tale sottospazio è 2. Una base di tale sottospazio è $((x-1)^2, x(x-1)^2)$.

*Soluzione dell' Esercizio 9.* Un polinomio di $\mathbb{R}[x]_3$ si scrive come $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e quindi la condizione che definisce $U$ è equivalente a $2a_2x + 6a_3x^2 - a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 = 0$ ossia $-a_1 + 3a_3x^2 = 0$. Tale uguaglianza è un' uguaglianza tra due polinomi, e quindi otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} -a_1 = 0 \\ 3a_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni danno i polinomi $p(x) = a_0 + a_2x^2 \in U$. Quindi $\dim U = 2$ ed una base di $U$ è $(1, x^2)$.

*Soluzione dell' Esercizio 10.* Per calcolare la dimensione di $U$ scriviamo i suoi generatori come righe di una matrice e la riduciamo per righe. Il rango di tale matrice dà la dimensione di $U$. Per la riduzione si usa la tecnica e gli accorgimenti già spiegati. Analogamente per $W$. I risultati sono

$$\dim U = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \dim W = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

*Soluzione dell' Esercizio 11.* Per usare la tecnica usata nell' Esercizio 10, bisogna scrivere le matrici come vettori del giusto $\mathbb{R}^n$. Scriveremo quindi la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come il vettore $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Ovviamente, non è l' unico modo. Dobbiamo allora calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 0 & 2-k \\ k+1 & 2 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si ottiene allora che $\dim U = 3$ se $k \neq 1$, mentre $\dim U = 2$ se $k = 1$.

*Soluzione dell' Esercizio 12.* Per usare la tecnica usata nell' Esercizio 10, bisogna scrivere i polinomi di $\mathbb{R}[x]_2$ come vettori di $\mathbb{R}^3$. Scriveremo quindi i polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ come il vettore $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$. Ovviamente, non è l' unico modo. Dobbiamo allora calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ 1-k & 0 & k \\ k & 1-k & -k \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora il risultato seguente

$$\dim U = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } k = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Una base di $U$ è data dai suoi tre generatori, se $k \neq \frac{1}{2}$, mentre è data dai primi due generatori, se $k = \frac{1}{2}$.

*Soluzione dell' Esercizio 13.* Poiché la tecnica è stata già spiegata, riportiamo solo i risultati.

$(i) B = \{(2, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$; $(ii) B = \{(2, -1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$;

$(iii)B = \{\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{i}\}$; (iv)B $= \{\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$; (v)B $= \{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}-\mathbf{k}, \mathbf{i}\}$;

$(vi)B = \{(3,-1),(0,1)\}$; $(vii)$ i due vettori sono l.d. e quindi non fanno parte di una base.

*Soluzione dell' Esercizio 14.* Usando le proprietà delle operazioni tra vettori, si ottiene che il vettore che risolve la prima equazione è $\mathbf{x} = (0, -\frac{7}{2}, 3)$. La seconda equazione è impossibile.

*Soluzione dell' Esercizio 15.* Consideriamo il primo sottospazio. Esso ha $((1,1))$ come base, e quindi i suoi elementi sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^2$ che possono essere scritti come $a(1,1) = (a,a)$. Sia $(x,y)$ il vettore generico di $\mathbb{R}^2$, ossia un vettore di $\mathbb{R}^2$ avente entrate incognite ad indipendenti l' una dall' altra. Vogliamo cercare le relazioni tra $x, y$ che obbligano il vettore generico ad appartenere al sottospazio $\mathcal{L}((1,1))$. Dobbiamo quindi discutere l' uguaglianza $(a,a) = (x,y)$, dove $a$ è l' incognita ed $x, y$ hanno il ruolo di parametri. Otteniamo allora il sistema $\begin{cases} a = x \\ a = y \end{cases}$ che in forma matriciale può essere scritto come $\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \end{array}\right]$. Effettuando la riduzione per righe con l' operazione elementare $r_2 \to r_2 - r_1$ otteniamo

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-x \end{array}\right]$$

e quindi il sistema è risolubile se, e solo se, $y - x = 0$. Quindi $\mathcal{L}((1,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y - x = 0\}$.

Gli altri sottospazi vanno trattati analogamente. Riportiamo solo i risultati.

$(ii)\mathcal{L}((1,1,0),(1,-1,0)) = \{(x,y,z)|z=0\}$; $(iii)\mathcal{L}((1,1,1),(1,-1,0)) = \{(x,y,z)|x + y - 2z = 0\}$; $(iv)\mathcal{L}((1,1,1)) = \{(x,y,z)|x - z = y - z = 0\}$.

*Soluzione dell' Esercizio 16.* Per trovare una base di $U$ basta risolvere il sistema che definisce il sottospazio. Quindi $z = x + y$ ed i vettori di $U$ si scrivono come $(x, y, x+y) = x(1,0,1)+y(0,1,1)$. Una base di $U$ è $((1,0,1),(0,1,1))$. Il vettore $\mathbf{u}$ appartiene ad $U$ perché le sue entrate risolvono il sistema. Per calcolarne le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ bisogna risolvere il sistema equivalente all' uguaglianza di vettori $x(1,0,1) + y(0,1,1) = (1,1,2)$ ossia $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ che ha la sola soluzione ${}^t(1,1)$. Quindi le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} =^{\mathrm{t}} (1,1)$. Il vettore $\mathbf{v}$ avente componenti ${}^t(1,-1)$ rispetto a $\mathcal{B}$ è il vettore $\mathbf{v} = 1(1,0,1) - 1(0,1,1) = (1,-1,0)$.

*Soluzione dell' Esercizio 17.* Un primo modo per caloclare l' intersezione dei due sottospazi è quello di scrivere i vettori di $V$ come soluzioni di un sistema lineare omogeneo (veri Esercizio 15), e poi risolvere il sistema che si ottiene considerando sia le equazioni che definiscono $U$ sia quelle che definiscono $U$.

Facendo i calcoli abbiamo che $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -2x + y + 3z = 0\}$. Quindi, $U \cap V$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ha che $U \cap V = \mathcal{L}((1,-1,1))$.

Un secondo modo per calcolare l' inetrsezione è il seguente.

I vettori di $V$ sono tutti e soli quelli del tipo $a(0,3,-1) + b(1,2,0) = (b, 3a+2b, -a)$. Un tale vettore appartiene ad $U$ se, e solo se, sostituito nel sistema che definisce $U$ lo rende vero. Quindi otteniamo la seguente equazione $b + 2(3a + 2b) + (-a) = 0$, ossia $a + b = 0$. Ricavando $a = -b$ abbiamo che i vettori di $U \cap V$ sono tutti e soli quelli del tipo $(b, -b, b) = b(1, -1, 1)$, da cui si riottiene il risultato precedente.

*Soluzione dell' Esercizio 18.* Per calcolare la somma di due sottospazi, calcoliamo prima una base di ognuno di essi. Il sottospazio somma è il sottospazio generato dall' unione delle due basi.

Una base di $U$ è $((1, 1, 1))$ ed $U$ ha dimensione 1. Una base di $V$ si calcola risolvendo il sistema che lo definisce, e è $((1, -1, 1))$. Anche $V$ ha dimensione 1.

$U+V$ è allora generato da $(1, 1, 1), (1, -1, 1)$. Tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $U + V$, che risulta quindi di dimensione 2.

$U + V$ è somma diretta di $U$ e $V$ perché $\dim(U + V) = \dim U + \dim V$.

*Soluzione dell' Esercizio 19.* Per prima cosa, scriviamo $V$ come soluzione di un sistema lineare omogeneo. A tale scopo usiamo la tecnica descritta nell' Esercizio 15, dopo aver scritto la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ come il vettore $(a, b, c, d)$. Dobbiamo allora calcolare le relazioni tra $a, b, c, d$ perché il sistema lineare seguente abbia soluzioni

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ -1 & 2 & 3 & d \end{array}\right].$$

Effettuando le seguenti operazioni elementari, otteniamo

$$\begin{array}{l} r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \\ r_4 \to r_4 + r_1 \end{array} \quad \dots \quad r_4 \to r_4 - 3r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 4a-3b+d \end{array}\right].$$

In conclusione,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a - c = 0, 4a - 3b + d = 0 \right\}.$$

L' intersezione di $U$ e $V$ si ottiene allora risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a + 2b + c - 3d = 0 \\ a + c - d = 0 \\ a - c = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $b = 2a, c = a, d = 2a$, $a \in \mathbb{R}$. Quindi,

$$U \cap V = \mathcal{L}\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

*Soluzione dell' Esercizio 20.* Il primo dei due sottospazi ha dimensione 3 mentre il secondo ha dimensione 1. La loro somma è diretta se dimostriamo che $U + V = \mathbb{R}[x]_3$, perché in tal modo $\dim(U + V) = \dim \mathbb{R}[x]_3 = 4 = \dim U + \dim V$.

Per dimostrare che $U + V = \mathbb{R}[x]_3$, basta dimostrare che ogni polinomio di grado $\leq 3$ può essere scritto come somma di un polinomio avente uguali i coefficienti di $x$ e di $x^2$ e di uno multiplo di $x - x^2$. In tal modo si ha che $\mathbb{R}[x]_3 \subseteq U + V$ ma l' altra inclusione è ovvia perché $U$ e $V$ sono sottospazi di $\mathbb{R}[x]_3$.

D' altra parte si ha che il polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ è uguale a

$$p(x) = \frac{1}{2}(2a + (b+c)x + (b+c)x^2 + 2dx^3) + \frac{1}{2}(b-c)(x - x^2)$$

e questo completa l' esercizio.

Osserviamo comunque che se scriviamo il polinomio $p(x)$ come la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora l' esercizio consiste nel provare che $M(2,2;\mathbb{R})$ è somma diretta del sottospazio delle matrici simmetriche e di quello delle matrici antisimmetriche.

*Soluzione dell' Esercizio 21.* Cominciamo col calcolare la somma di $U$ e $V$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce $U$ abbiamo che $U = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1))$. Quindi $U+V = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,k))$. Scrivendo i generatori come righe di una matrice e riducendola, abbiamo che

$$U + V = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{se } k \neq -2 \\ U & \text{se } k = -2. \end{cases}$$

Di conseguenza abbiamo che $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ se $k \neq -2$, mentre $U \cap V = V$ se $k = -2$. Ovviamente, la somma di $U$ e $V$ è diretta se $k \neq -2$.

*Soluzione dell' Esercizio 22.* L' unica affermazione vera è la (4). Infatti, $(0,0,0) \in U$ come si può verificare facilmente, e quindi la (1) è falsa. La (2) è falsa perché i vettori $(0,0,2)$ e $(0,0,-3)$ non sono in $U$ e quindi la loro somma non dà informazioni sull' insieme $V$. La (3) è falsa per lo stesso motivo. La (4) è vera perché è molto facile verificare che $(1,1,1)$ verifica la condizione che definisce $V$ mentre $(2,2,2)$ non la verifica. Quindi viene violata la terza condizione che definisce un sottospazio.

*Soluzione dell' Esercizio 23.* Scritti i vettori come righe di una matrice $A$, possiamo calcolare il determinante di $A$, ed otteniamo $\det(A) = 3k^2 - 2k$. Quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti per $k \neq 0, \frac{2}{3}$, e quindi le affermazioni (3) e (4) sono false. Per $k = 0$ oppure $k = \frac{2}{3}$, si ricava facilmente che $\dim U = 2$, e quindi è vera la (1) mentre la (2) è falsa.

*Soluzione dell' Esercizio 24.* Scritti i tre vettori come terne e la matrice $A$ che li ha come righe, abbiamo che $\det A = 2 \neq 0$ e quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, essendo tutti e tre l.i., anche $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono l.i. e quindi $\dim U = 2$. Infine, $U$ è chiaramente un sottospazio, essendo formato dai vettori che si scrivono come combinazione lineare di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. In sintesi, l' unica affermazione vera è la (2).

*Soluzione dell' Esercizio 25.* (1) è vera perché la dimensione è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. (2) è falsa perché possiamo anche aver scelto $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, 2\mathbf{v}, 3\mathbf{v}, 4\mathbf{v}$, e quindi mai tre sono l.i.. (3) è vera perché un vettore è l.i. se non nullo, ed essendo i vettori distinti, almeno uno di essi è non nullo. (4) è vera perché i vettori sono l.d. e l' affermazione è equivalente ad essere l.d..

(*ii*) In questo caso i quattro vettori possono essere l.i. ((1) è falsa), ma possono anche essere scelti come al punto (2) di (*i*) e quindi anche (2) è falsa. (3) è vera per lo stesso motivo precedente, e (4) è falsa perché i vettori potrebbero anche essere l.i..

# SPAZI E SOTTOSPAZI / ESERCIZI SVOLTI

Brevi elementi di teoria sugli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}_n[x]$ verranno richiamati via via, a commento del testo di alcuni esercizi.

L'asterisco contrassegna gli esercizi più difficili.

**ESERCIZIO.** *Scrivere il vettore* $\mathbf{u} = (-1, 2)$ *di* $\mathbb{R}^2$ *come combinazione lineare di* $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$ *ed* $\mathbf{u}_2 = (1, 2)$.

**Osservazione.** Lo scrivere $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ è possibile ed in modo unico, in quanto $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono l.i. e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$.

**Svolgimento.** Si tratta di determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2$, il che, essendo

$$\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2 = \lambda(1,1) + \mu(1,2) = (\lambda, \lambda) + (\mu, 2\mu) = (\lambda + \mu, \lambda + 2\mu),$$

equivale a $(-1, 2) = (\lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$, cioè

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda + 2\mu = 2 \end{cases}.$$

Ricavando $\lambda = -\mu - 1$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene subito $\mu = 3$ e quindi $\lambda = -4$. Dunque $\mathbf{u} = -4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$. ∎

**ESERCIZIO.** *Scrivere il vettore* $\mathbf{u} = (-1, 2)$ *di* $\mathbb{R}^2$ *come combinazione lineare di* $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2)$ *ed* $\mathbf{u}_3 = (2, 1)$.

**Osservazione.** Lo scrivere $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ è possibile in quanto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ contiene almeno una base di $\mathbb{R}^2$ (in effetti $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono a due a due l.i. e quindi ogni coppia di $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^2$), ma tale possibilità non sarà unica, in quanto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono l.d. (3 vettori del piano, che ha dimensione 2) e quindi uno di essi è a sua volta combinazione lineare degli altri due.

**Svolgimento.** Si devono trovare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3. \tag{1}$$

Essendo

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3 &= \alpha(1,1) + \beta(1,2) + \gamma(2,1) = (\alpha, \alpha) + (\beta, 2\beta) + (2\gamma, \gamma) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta + \gamma), \end{aligned}$$

ciò equivale a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases}. \tag{2}$$

Ricavando ad esempio $\alpha = -\beta - 2\gamma - 1$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $\beta = 3 + \gamma$ e quindi $\alpha = -4 - 3\gamma$, con $\gamma \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dunque, sostituendo in (1), risulta $\mathbf{u} = -(4 + 3\gamma)\mathbf{u}_1 + (3 + \gamma)\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ qualsiasi. ∎

**Osservazione.** La già osservata non unicità della decomposizione richiesta si è riflessa algebricamente nell'essere pervenuti al sistema (2) che, in quanto sistema di 2 equazioni e 3 incognite, non può avere soluzione unica. Ovviamente tale mancanza di unicità è poi evidente nel risultato (il quale dipende dal parametro arbitrario $\gamma$), che per $\gamma = 0$ ripropone sostanzialmente la stessa decomposizione $\mathbf{u} = -4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3$ ottenuta nell'esercizio precedente, mentre fornisce ad esempio $\mathbf{u} = -7\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u} = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, ecc. per $\gamma = 1$, $\gamma = -1$, ecc..

**ESERCIZIO.** *Dati in* $\mathbb{R}^4$ *i vettori*

$$\mathbf{u}_1 = (0,1,2,1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (1,1,0,0)\,,\ \mathbf{u}_3 = (0,1,0,-1)\,,\ \mathbf{u}_4 = (1,1,-1,-1)\,,$$

*determinare dimensione e una base dei sottospazi* $W = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$, $W_1 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$, $W_2 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3)$, $W_3 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$, $W_4 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4)$.
*Fare lo stesso per le somme* $W_1+W_2$, $W_1+W_3$, $W_2+W_4$ *e le corrispondenti intersezioni, evidenziando eventuali coppie di sottospazi supplementari in* $W$.

Ricordiamo che $\mathbb{R}^n$ è lo spazio vettoriale (reale) delle $n$-uple ordinate $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ di numeri reali $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$, il cui vettore nullo è $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = (0,...,0)$.
L'insieme $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n)$ delle $n$-uple definite da

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,...,0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,...,0)\,,\ \dots\ ,\ \mathbf{e}_{n-1} = (0,...,0,1,0)\,,\ \mathbf{e}_n = (0,...,0,1)$$

è una base per $\mathbb{R}^n$ (detta *base canonica*) e pertanto risulta $\dim \mathbb{R}^n = n$. Le entrate $x_1,...,x_n$ del generico vettore $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ coincidono con le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) = x_1(1,0,...,0) + x_2(0,1,0,...,0) + ... + x_n(0,...,0,1) = \sum_{i=0}^{n} x_i\mathbf{e}_i,$$

cioè $[(x_1,...,x_n)]_{\mathcal{C}} = (x_1,...,x_n)$.

**Svolgimento.** Tutti gli spazi da studiare sono ovviamente sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

Iniziamo col considerare $W = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$. Disponendo di un suo insieme di generatori, una sua base può essere determinata in due modi:

(i) individuando un sottoinsieme di $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ che sia massimale rispetto all'indipendenza lineare (cioè costituito da vettori l.i. e tale che i vettori di ogni altro sottoinsieme di $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ che lo contiene risultino l.d.);

(ii) riducendo per righe la matrice dei vettori $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$ (rispetto a una base qualsiasi di $\mathbb{R}^4$) e leggendo quindi le componenti (rispetto alla medesima base di $\mathbb{R}^4$) di una base di $W$ sulle righe non nulle della matrice ridotta.

Vediamoli in opera entrambi.

(i) Utilizziamo il *metodo degli scarti successivi*.

- Il vettore $\mathbf{u}_1 = (0,1,2,1)$ è l.i., perché non nullo.
- Controlliamo l'indipendenza lineare di $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$.
  Poiché *due vettori sono l.d. se e solo se almeno uno è multiplo dell'altro*, è evidente che $\mathbf{u}_1 = (0,1,2,1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,1,0,0)$ sono l.i. (nessuno è multiplo dell'altro).
- Controlliamo l'indipendenza lineare di $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$.
  Sia $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$, cioè $(b, a+b+c, 2a, a-c) = (0,0,0,0)$. Ciò significa

$$\begin{cases} b=0 \\ a+b+c=0 \\ 2a=0 \\ a-c=0 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ a=0 \\ -c=0 \end{cases} \quad \text{che equivale a } a=b=c=0.$$

  Dunque $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ sono l.i..
- Controlliamo l'indipendenza lineare di $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$.
  Siano $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tali che $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 + d\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$, che significa

$$(b+d, a+b+c+d, 2a-d, a-c-d) = (0,0,0,0)\,.$$

Ciò equivale a

$$\begin{cases} b+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 2a-d=0 \\ a-c-d=0 \end{cases} \begin{cases} b=-d \\ \cdots \\ d=2a \\ c=a-d \end{cases} \begin{cases} b=-2a \\ 0=0 \\ \cdots \\ c=-a \end{cases}$$

cioè $b=-2a, c=-a, d=2a$ con $a \in \mathbb{R}$ qualsiasi.
Dunque $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ sono l.d..

In conclusione, una base di $W$ è $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e risulta $\dim W = 3$.
Osserviamo che il controllo dell'indipendenza lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ si sarebbe potuto fare anche calcolando il rango della loro matrice, ad esempio rispetto alla base canonica.

(ii) La matrice dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ (rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$) è

$$M = M^{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo per righe ad esempio tramite le trasformazioni elementari $R_1 \leftrightarrow R_2, R_4 \to R_4 - R_1, R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to 2R_4 - R_3$ (nell'ordine), si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che i vettori $(1,1,0,0) = \mathbf{u}_2$, $(0,1,2,1) = \mathbf{u}_1$ e $(0,0,-2,-2) = -2(0,0,1,1)$ sono l.i.. Poiché le trasformazioni elementari sulle righe mantengono lo spazio generato dalle righe, una base di $W = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ è quindi data da $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u})$ con $\mathbf{u} = (0,0,1,1)$, da cui segue anche che $\dim W = 3$.

Consideriamo ora i sottospazi $W_i$, $i = 1,2,3,4$ (i quali, essendo generati da elementi di $W$, sono sottospazi di $W$ oltre che di $\mathbb{R}^4$).

Poiché $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono l.i. (nessuno è multiplo dell'altro) e $\mathbf{u}_3 \neq \mathbf{0}$, si conclude subito che $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $(\mathbf{u}_3)$ sono basi di $W_1 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $W_2 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3)$ rispettivamente. Analogamente $(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ è base di $W_3 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ e dunque risulta $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$ e $\dim W_2 = 1$.

Per studiare $W_4 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$, si procede con uno qualsiasi dei due metodi già usati per $W$. A conti fatti, si trova che $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ sono l.i. e che quindi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$ è una base di $W_4$. Di conseguenza $\dim W_4 = 3$ e allora[1] $W_4 = W$.

Passiamo allo studio di somme e intersezioni, richiesto dalla seconda parte dell'esercizio.

Poiché[2] $W_1 + W_2 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \mathcal{L}(\mathbf{u}_3) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e

$$M^{\mathcal{C}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è ridotta, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ è una base di $W_1 + W_2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Allora $\dim(W_1 + W_2) = \dim W$ e quindi

$$W_1 + W_2 = W. \tag{3}$$

[1] Si ricordi che *se $U$ è sottospazio di uno spazio vettoriale $V$ di dimensione finita,* $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$.

[2] È un fatto generale che *se $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ sono vettori di uno spazio vettoriale qualsiasi, allora* $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n) + \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m)$.

Inoltre, per la formula di Grassmann[3], risulta

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

che implica $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Ciò vale a dire che la somma $W_1 + W_2$ è diretta[4], il che, insieme alla (3), significa che $W_1$ e $W_2$ sono *supplementari* in $W$ (cioè si ha $W_1 \oplus W_2 = W$).

Anche la somma di $W_1$ e $W_3$ coincide con tutto $W$ (in quanto $W_1 + W_3 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \mathcal{L}(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = W$), ma $W_1$ e $W_3$ non sono supplementari in $W$; infatti, essendo $\dim(W_1 + W_3) = \dim W = 3$, la relazione di Grassmann implica

$$\dim(W_1 \cap W_3) = \dim W_1 + \dim W_3 - \dim(W_1 + W_3) = 1 \tag{4}$$

e quindi $W_1 \cap W_3 \neq \{\mathbf{0}\}$ (cioè $W_1 + W_3$ *non* è diretta).

Per studiare $W_1 \cap W_3$ (dalla (4) sappiamo già che $W_1 \cap W_3$ ha dimensione 1, ma dobbiamo determinarne una base), possiamo procedere in due modi, che vediamo entrambi.

(i) Esprimiamo il generico vettore di $W_1 \cap W_3$ in termini dei generatori dei due sottospazi: si ha che $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_3$ se e solo se $\mathbf{x} \in W_1$ e $\mathbf{x} \in W_3$, cioè se e solo se $\exists \lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2 & \text{(che significa } \mathbf{x} \in W_1 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\text{)} \\ \mathbf{x} = \alpha \mathbf{u}_3 + \beta \mathbf{u}_4 & \text{(che significa } \mathbf{x} \in W_3 = L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)\text{).} \end{cases} \tag{5}$$

Ciò implica $\lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2 = \alpha \mathbf{u}_3 + \beta \mathbf{u}_4$. Risolviamo ora tale sistema nelle incognite $\lambda, \mu, \alpha, \beta$, con l'attenzione di scegliere gli eventuali parametri liberi tra le incognite che si trovano allo stesso membro dell'uguaglianza. In componenti, il sistema diventa

$$\lambda(0,1,2,1) + \mu(1,1,0,0) = \alpha(0,1,0,-1) + \beta(1,1,-1,-1)$$

cioè

$$(\mu, \lambda + \mu, 2\lambda, \lambda) = (\beta, \alpha + \beta, -\beta, -\alpha - \beta)$$

ossia

$$\begin{cases} \mu = \beta \\ \lambda + \mu = \alpha + \beta \\ 2\lambda = -\beta \\ \lambda = -\alpha - \beta \end{cases} \begin{cases} \mu = \beta \\ \lambda + \mu = \alpha + \beta \\ \beta = -2\lambda \\ \alpha = -\lambda - \beta \end{cases} \begin{cases} \mu = -2\lambda \\ \lambda - 2\lambda = \lambda - 2\lambda \\ \beta = -2\lambda \\ \alpha = \lambda \end{cases} \begin{cases} \mu = -2\lambda \\ \beta = -2\lambda \\ \alpha = \lambda \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dalle (5) segue allora che il generico vettore $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_3$ è della forma

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1 - 2\lambda \mathbf{u}_2 = \lambda(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi,}$$

il che significa $W_1 \cap W_3 = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2)$. Poiché è non nullo, il vettore $\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 = (-2, -1, 2, 1)$ costituisce dunque una base di $W_1 \cap W_3$.

(ii) Esprimiamo i sottospazi in forma implicita[5] e poi consideriamo congiuntamente tutte le condizioni che li individuano. Il sistema di matrice completa (le prime colonne sono le componenti di $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1$, generatori di $W_1$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \underset{R_4 \to R_4 - R_2}{\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

---

[3] ***Formula di Grassmann***: *se $U_1, U_2$ sono sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale qualsiasi, allora* $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

[4] Si ricordi che *se $U_1, U_2$ sono sottospazi di uno spazio vettoriale qualsiasi, $U_1 + U_2$ è diretta $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.*

[5] Ricordiamo che, per passare dalla forma esplicita di un sottospazio $U$ di uno spazio $V$ alla sua forma implicita, il metodo è standard: si impone la compatibilità del sistema lineare completo di matrice $(A \mid B)$, dove $A$ è la trasposta della matrice dei generatori di $U$ rispetto ad una base qualsiasi di $V$ e $B$ è la colonna delle componenti rispetto alla stessa base del generico vettore di $V$.

è compatibile se e solo se $x_4 - x_2 + x_1 = x_3 - 2x_2 + 2x_1 = 0$, quindi

$$W_1 = \left\{(x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_4 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Il sistema di matrice completa (le prime colonne sono le componenti di $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, generatori di $W_3$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \\ -1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 \end{array}\right)$$

è compatibile se e solo se $x_4 + x_2 = x_3 + x_1 = 0$, quindi

$$W_3 = \left\{(x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_4 = x_1 + x_3 = 0\right\}.$$

Dunque $W_1 \cap W_3$ è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(ottenuto prendendo tutte le equazioni che definiscono $W_1$ e $W_3$), il quale ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ed equivale quindi al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}.$$

In definitiva

$$W_1 \cap W_3 = \left\{(-2x_4, -x_4, 2x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}^4\right\} = \mathcal{L}\left((-2, -1, 2, 1)\right)$$

ed una base di $W_1 \cap W_3$ è $((-2, -1, 2, 1))$.

Infine, poiché si è già visto che $W_4 = W$, risulta subito $W_2 + W_4 = W_2 + W = W$ (perché $W_2 \subset W$) e $W_2 \cap W_4 = W_2 \cap W = W_2$ (perché $W_2 \subset W$). In particolare, $W_2, W_4$ non sono supplementari in $W$, perché $W_2 \cap W_4 = W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (ossia $W_2 + W_4$ non è diretta). ∎

**ESERCIZIO.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale (reale) di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ una sua base. Determinare dimensione e una base del sottospazio $W$ di $V$ generato dai vettori*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4, \quad \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3.$$

*Completare poi la base trovata ad una base di $V$.*

**Svolgimento.** Disponendo di un insieme di generatori di $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, possiamo procedere tramite scarti successivi oppure riduzione. Ricorriamo al secondo metodo.

Le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ dei generatori

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 & & -\mathbf{u}_3 & +\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_2 = & 2\mathbf{u}_2 & +\mathbf{u}_3 & -\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{u}_1 & +2\mathbf{u}_2 & -\mathbf{u}_3 & +\mathbf{u}_4 \end{array} \quad \text{sono rispettivamente} \quad \begin{array}{l} [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = (1,0,-1,1) \\ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = (0,2,1,-1) \\ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = (2,2,-1,1) \end{array}$$

(si noti che per leggere le componenti dei $\mathbf{v}_i$, le loro espressioni come combinazione lineare degli $\mathbf{u}_j$ si sono scritte in modo ordinato, secondo gli indici degli $\mathbf{u}_j$) e quindi la matrice di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M = M^{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dimensione di $W$ coincide con il rango di $M$ ed una base di $W$ è data, in componenti rispetto a $\mathcal{B}$, dalle righe non nulle di una qualsiasi forma ridotta *per righe* di $M$. Riducendo per righe, si ottiene

$$M \underset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim W = \rho(M) = 2$. Inoltre i vettori di componenti $(1,0,-1,1)$ e $(0,2,1,-1)$ rispetto a $\mathcal{B}$, cioè $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, sono una base di $W$.

Una base di $V$ che contenga la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ di $W$ si determina aggiungendo due vettori di $V$ a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ in modo da ottenere un insieme di quattro vettori l.i. (i quali costituiranno una base di $V$, perché $V$ ha dimensione 4). Poiché, ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(costruita semplicemente aggiungendo due righe non nulle alla matrice $M^{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ in modo da ottenere una matrice $4 \times 4$ ridotta)

ha rango 4, i vettori di componenti $(1,0,-1,1), (0,2,1,-1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ rispetto a $\mathcal{B}$, cioè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, sono l.i. e quindi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ è una base di $V$. Lo stesso vale ad esempio per le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che anche $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4)$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)$ sono basi di $V$. ∎

**ESERCIZIO.** *Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali ed il seguente insieme*

$$V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} : (1,2)\,A = (0,0) \right\}$$

*(dove $(1,2)\,A \in \mathbb{R}^{1,2}$ indica la matrice prodotto di $(1,2) \in \mathbb{R}^{1,2}$ e $A \in \mathbb{R}^{2,2}$). Verificare che $V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinarne una base.*

Ricordiamo che $\mathbb{R}^{m,n}$ è lo spazio vettoriale (reale) delle matrici $m \times n$ ($m$ righe, $n$ colonne) ad elementi in $\mathbb{R}$, in cui il vettore nullo è la matrice ad elementi tutti nulli, denotata spesso con $0_{m,n}$.
L'insieme

$$\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ......, E_{m1}, ..., E_{mn})$$

delle matrici definite da

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \scriptstyle j\text{-esima colonna} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 \dots & 0 & \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots & 1 & \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots & 0 & \dots\dots 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \scriptstyle \text{i-esima riga} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{array}$$

è una base (*canonica*) per $\mathbb{R}^{m,n}$ e pertanto risulta $\dim \mathbb{R}^{m,n} = mn$. Le entrate della generica matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ coincidono con le componenti di $A$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{m,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + ... + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij},$$

cioè $[(a_{ij})]_{\mathcal{C}} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ......, a_{m1}, ..., a_{mn})$.

**Svolgimento.** Controllato che la matrice nulla appartiene a $V$, per verificare che $V$ è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$ possiamo, come al solito, procedere in due modi:

(i) utilizzare il criterio per i sottospazi, ossia controllare che le combinazioni lineari di elementi di $V$ siano ancora elementi di $V$;

(ii) cercare di scrivere il generico elemento di $V$ come combinazione lineare a coefficienti reali qualsiasi di un certo numero di elementi di $\mathbb{R}^{2,2}$, in modo da recuperare $V$ come sottospazio generato da tali elementi.

Vediamo entrambi i procedimenti.

(i) Controlliamo che $\forall A, B \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ risulti $\lambda A + B \in V$, cioè

$$(1, 2)\,(\lambda A + B) = (0, 0)\,.$$

In effetti, applicando le proprietà delle operazioni tra matrici, si ha

$$(1, 2)\,(\lambda A + B) = \lambda\,(1, 2)\,A + (1, 2)\,B$$

dove $(1, 2)\,A = (1, 2)\,B = (0, 0)$ perché $A, B \in V$. Quindi si ottiene

$$(1, 2)\,(\lambda A + B) = \lambda\,(0, 0) + (0, 0) = (0, 0)\,.$$

(ii) Cerchiamo di descrivere la generica matrice di $V$. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la generica matrice di $\mathbb{R}^{2,2}$, per definizione di $V$ si ha che $A \in V$ se e solo se

$$(1, 2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0, 0)$$

cioè $(a + 2c, b + 2c) = (0, 0)$, che significa

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases}.$$

Quindi $A \in V$ se e solo se $A$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $c, d \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Ciò significa che il generico elemento di $V$ è la generica combinazione lineare delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto $V$ è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$: il sottospazio generato da $A_1, A_2$.

Per quanto visto al punto (ii), si ha $V = \mathcal{L}(A_1, A_2)$. La coppia $(A_1, A_2)$ è anche una base di $V$, perché $A_1, A_2$ sono l.i. (si vede subito che le due matrici non sono una multipla dell'altra). ∎

**ESERCIZIO.** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3},$$

*si consideri l'insieme*

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3,2} : AX = 0_{2,2} \right\}$$

*(dove $AX \in \mathbb{R}^{2,2}$ indica la matrice prodotto di $A$ e $X$). Verificare che $V$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,2}$ e determinarne dimensione e una base.*

**Svolgimento.** Ovviamente $0_{3,2} \in V$ (cioè $A0_{3,2} = 0_{2,2}$). Controlliamo allora che $V$ sia stabile rispetto alle combinazioni lineari. Per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^{3,2}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda AX + AY$, in quanto il prodotto righe per colonne è distributivo rispetto alla somma ed omogeneo rispetto al prodotto per scalari. Da qui, se in particolare $X, Y \in V$, cioè $AX = 0_{2,2}$ e $AY = 0_{2,2}$, si ottiene $A(\lambda X + Y) = \lambda 0_{2,2} + 0_{2,2} = 0_{2,2}$, che significa $\lambda X + Y \in V$. Dunque $V$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,2}$.

Per determinare una base di $V$ (e quindi la sua dimensione), cerchiamo un'espressione per la generica matrice di $V$, da cui dedurre poi un suo insieme di generatori. Per definizione di $V$, una matrice

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

appartiene a $V$ se e solo se $AX = 0_{2,2}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto a primo membro, ciò significa

$$\begin{pmatrix} a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} \\ a_{11} - a_{31} & a_{12} - a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{11} - a_{31} = 0 \\ a_{12} - a_{32} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{21} = -a_{31} \\ a_{22} = -a_{32} \\ a_{11} = a_{31} \\ a_{12} = a_{32} \end{cases} \quad \text{con } a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.}$$

Dunque $X \in V$ se e solo se $X$ è della forma

$$X = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ -a_{31} & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{31} A_1 + a_{32} A_2$$

(con ovvia definizione di $A_1, A_2$) dove $a_{31}, a_{32}$ sono numeri reali qualsiasi, il che significa $V = \mathcal{L}(A_1, A_2)$. Poiché $A_1, A_2$ sono l.i. (si vede subito, guardandone gli elementi, che $A_1, A_2$ non sono una multipla dell'altra), si conclude che $(A_1, A_2)$ è una base di $V$ e quindi $\dim V = 2$. ∎

**ESERCIZIO.** *Determinare una base del sottospazio $V$ di $\mathbb{R}[x]$ generato dai polinomi*

$$P_1(x) = x + x^2, \qquad P_2(x) = 1 + x^2 + x^3,$$

$$P_3(x) = 1 - x + x^3, \quad P_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3$$

*e stabilire se $V$ ed il sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 = a_2,\ a_1 = a_3\right\}$$

*sono supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$.*

Ricordiamo che $\mathbb{R}[x]$ è lo spazio vettoriale (reale) dei polinomi (di grado qualsiasi) nell'indeterminata $x$ a coefficienti reali, il cui vettore nullo $\mathbf{0}_{\mathbb{R}[x]}$ è il polinomio nullo, cioè con coefficienti tutti nulli. Risulta $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

Con $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 0$, si denota invece il sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di grado $\leq n$ nell'indeterminata $x$ a coefficienti reali, ossia

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

L'insieme $\mathcal{C} = \left(1, x, x^2, x^3, ..., x^n\right)$ dei monomi $x^k$ con $k = 0, 1, ..., n$ è una base (*canonica*) per $\mathbb{R}_n[x]$ e pertanto risulta $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$. Ovviamente le componenti del generico polinomio $P \in \mathbb{R}_n[x]$ rispetto a $\mathcal{C}$ sono i coefficienti di $P(x)$, cioè $[a_0 + a_1x + ... + a_nx^n]_{\mathcal{C}} = (a_0, a_1, ..., a_n)$.

**Svolgimento.** Chiaramente $V = \mathcal{L}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ è sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$, poiché tutti i suoi generatori appartengono ad $\mathbb{R}_3[x]$.

Disponendo di un insieme di generatori di $V$, una sua base può essere determinata tramite scarti successivi oppure riduzione. Vediamo entrambi i procedimenti.

(i) Tramite il metodo degli scarti successivi, cerchiamo un sottoinsieme dell'insieme di generatori $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ che sia massimale rispetto all'indipendenza lineare (cioè costituito da polinomi l.i. e tale che i polinomi di ogni altro sottoinsieme di $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ che lo contiene risultino l.d.).

- Controlliamo l'indipendenza lineare di $P_1, P_2$ (per quanto si possa osservare subito che non sono uno multiplo dell'altro).
  Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che
  $$aP_1(x) + bP_2(x) = 0 \quad \text{per ogni } x.$$
  Ciò significa $a\left(x + x^2\right) + b\left(1 + x^2 + x^3\right) = 0$ per ogni $x$, cioè
  $$b + ax + (a + b)x^2 + bx^3 = 0 \quad \text{per ogni } x$$
  che, per l'indipendenza lineare di $1, x, x^2, x^3$ (o, equivalentemente, per il principio di identità dei polinomi), equivale a
  $$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè } a = b = 0.$$
  Dunque $P_1, P_2$ sono l.i..
- Controlliamo l'indipendenza lineare di $P_1, P_2, P_3$.
  Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che
  $$aP_1(x) + bP_2(x) + cP_3(x) = 0 \quad \text{per ogni } x.$$

Ciò significa $a\left(x+x^2\right)+b\left(1+x^2+x^3\right)+c\left(1-x+x^3\right)=0$ per ogni $x$, cioè

$$b+c+(a-c)\,x+(a+b)\,x^2+(b+c)\,x^3=0 \quad \text{per ogni } x$$

che, per l'indipendenza lineare di $1,x,x^2,x^3$, equivale a

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ a=c \\ c-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ a=c \end{cases} \quad \text{con } c\in\mathbb{R} \text{ qualsiasi.}$$

Dunque $P_1,P_2,P_3$ sono l.d. e quindi scartiamo $P_3$.

- Controlliamo l'indipendenza lineare di $P_1,P_2,P_4$.
Siano $a,b,c\in\mathbb{R}$ tali che

$$aP_1(x)+bP_2(x)+cP_4(x)=0 \quad \text{per ogni } x.$$

Ciò significa $a\left(x+x^2\right)+b\left(1+x^2+x^3\right)+c\left(1+2x+3x^2+x^3\right)=0$ per ogni $x$, cioè

$$b+c+(a+2c)\,x+(a+b+3c)\,x^2+(b+c)\,x^3=0 \quad \text{per ogni } x$$

che, per l'indipendenza lineare di $1,x,x^2,x^3$, equivale a

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a+2c=0 \\ a+b+3c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ a=-2c \\ -2c-c+3c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ a=-2c \end{cases} \quad \text{con } c\in\mathbb{R} \text{ qualsiasi.}$$

Dunque $P_1,P_2,P_4$ sono l.d. e dobbiamo scartare anche $P_4$.

In conclusione, abbiamo verificato che $P_1,P_2$ sono l.i. e che ogni altro sottoinsieme di $\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ che contiene $P_1,P_2$ è l.d.; pertanto $(P_1,P_2)$ è una base di $V$.
Osserviamo che il controllo dell'indipendenza lineare di $P_1,P_2,P_3$ e $P_1,P_2,P_4$ si sarebbe potuto fare anche calcolando il rango della loro matrice, ad esempio rispetto alla base $1,x,x^2,x^3$.

(ii) Riduciamo per righe la matrice dei generatori $P_1,P_2,P_3,P_4$ (rispetto a una base qualsiasi di $\mathbb{R}_3[X]$) e leggiamo quindi le componenti (rispetto a quella stessa base) di una base di $V$ sulle righe non nulle della matrice ridotta.
La matrice dei vettori $P_1,P_2,P_3,P_4$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ di $\mathbb{R}_3[X]$ è

$$M=M^{\mathcal{C}}(P_1,P_2,P_3,P_4)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riducendo per righe si ottiene

$$M \underset{R_1\leftrightarrow R_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3\to R_3-R_1}{\overset{R_2\to R_2-R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4\to 2R_4+R_2}{\overset{R_3\to R_3-\frac{3}{2}R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto i polinomi di componenti $(1,2,3,1)$ e $(0,-2,-2,0)$ rispetto a $\mathcal{C}$, cioè $1+2x+3x^2+x^3=P_4(x)$ e $-2x-2x^2=-2P_1(x)$, costituiscono una base di $V$ (diversa da quella trovata al punto (i)); lo stesso vale ovviamente per $(P_1,P_4)$.

Per concludere che $V$ e $W$ sono supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$ (cioè $V\oplus W=\mathbb{R}_3[x]$), occorre controllare che la somma $V+W$ sia diretta e coincida con tutto lo spazio $\mathbb{R}_3[x]$.

Siccome $V+W$ è diretta se e solo se $V\cap W$ si riduce al solo polinomio nullo, studiamo $V\cap W$. A tale scopo, possiamo esprimere anche $V$ in forma implicita e risolvere poi il sistema di tutte le condizioni che individuano $V$ e $W$, oppure sfruttare solo la forma implicita di $W$, ragionando

come segue.
Siccome $V = \mathcal{L}(P_1, P_2)$ (stiamo usando una delle basi di $V$ trovate nella prima parte dell'esercizio, ma un qualsiasi insieme di generatori di $V$, anche non l.i., servirebbe ugualmente allo scopo), il generico vettore di $V$ è della forma

$$a\left(x + x^2\right) + b\left(1 + x^2 + x^3\right) = b + ax + (a + b)\,x^2 + bx^3$$

con $a, b$ reali qualsiasi. Di conseguenza, un polinomio $P(x)$ appartiene a $V \cap W$ se e solo se ha tale forma ed i suoi coefficienti soddisfano le condizioni che definiscono $W$, cioè se e solo se $P(x) = b + ax + (a + b)\,x^2 + bx^3$ con $b = a + b$ e $a = b$; ciò significa $a = b = 0$ e quindi $P(x)$ è il polinomio nullo. Concludiamo dunque che $V \cap W$ è il sottospazio banale, ossia che la somma $V + W$ è diretta.

Per stabilire infine se $V + W = \mathbb{R}_3[x]$, ragioniamo sulle dimensioni tramite la formula di Grassmann. A tale scopo, ci serve conoscere la dimensione di $W$, il cui generico elemento $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ è caratterizzato da $a_0 = a_2$ e $a_1 = a_3$, cioè è della forma

$$a_0\left(1 + x^2\right) + a_1\left(x + x^3\right) \quad \text{con } a_0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.}$$

In altri termini, si ha $W = \mathcal{L}\left(1 + x^2, x + x^3\right)$, dove i generatori sono l.i. e costituiscono quindi una base di $W$. Dunque si ha $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim(V \cap W) = 0$, da cui risulta

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$$

e pertanto $V + W = \mathbb{R}_3[x]$.

Abbiamo dunque ottenuto che $V \oplus W = \mathbb{R}_3[x]$, cioè che $V$ e $W$ sono supplementari in $\mathbb{R}_3[x]$. ∎