LE DEFINIZIONI IN CORSIVO e/o SOTTOLINEATE SONO QUELLE DI CUI NON SONO SICURA

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA: *dato (V,+,.) uno spazio vettoriale su K con dim V=n e una sua base ordinata di V B=(e1,...,en). dato W sottospazio vettoriale di V con dim W=h. avendo una base ordinata, possiamo associare un isomorfismo. definiamo un'applicazione Fi di B: V->K^n che manda u in (x1,...,xn): tale che il vettore u si scrive come u=x1 e1+...xn en*
fi con B di W è un sottospazio vettoriale di K^n e si può rappresentare come un sistema lineare omogeneo epsilon zero: AX=0, che si chiama rappresentazione cartesiana di W rispetto alla base B.

PRODOTTO SCALARE: sia (V,+,.) uno spazio vettoriale su K=R. definiamo un'applicazione <*,*>: VxV -> R come prodotto scalare su V se soddisfa tre proprietà:

1. per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=<v,u>, simmetria
2. per ogni u, v, w appartenenti a V, <u, v+w>=<u,v>+<u,w>
   per ogni u, v appartenenti a V e per ogni scalare lambda appartenente a R, <u, lambda v>= lambda<u,v>
   le seguenti si chiamano proprietà di bilinearità
3. per ogni u appartenente a V, <u,u> >= 0, cioè il prodotto del vettore per se stesso è positivo e <u,u>=0 se e solo se u= vettore nullo.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO: la coppia formata da (V, <*,*>)

LUNGHEZZA O NORMA: per ogni u appartenente a V, la lunghezza o norma di u si definisce come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso.
||u||=radice quadrata (<u,u>)

DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI: per ogni u, v appartenenti a V, ||u+v|| <= ||u||+||v||, cioè la lunghezza della somma tra u e v è minore uguale della somma tra la lunghezza di u e la lunghezza di v

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ: per ogi u,v appartenenti a V, |<u,v>|<=||u|| ||v||

PRODOTTO SCALARE GEOMETRICO*: con u e b appartenente a V (vettori liberi), il prodotto scalare <u,v>= ||u|| ||v||cos dell'angolo tra u e v*

TEOREMA DI PITAGORA: per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=0 se e solo se (||u+v||)^2 = (||u||)^2 + (||v||)^2

MATRICE DI PASSAGGIO / MATRICE ORTOGONALE

Sia $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ uno sp. vett. euclideo f.g., $\dim V = n$ e siano $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ due basi ortonormali di V. Allora la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ ha una proprietà particolare:

$A = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id_V)$ $\qquad A^{-1} = {}^tA$ la trasposta e l'inversa coincidono

Tutte le matrici che hanno questa proprietà si dicono ortogonali.

VETTORI ORTOGONALI: per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=0

BASE ORTOGONALE: sia (V,<*,*>) uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato. una base B={u1,...,un} di V si dice ortogonale se: per ogni i, j appartenenti a {1,...,n} con i diverso da j, <ui,uj>=0

BASE ORTONORMALE: una base B={u1,...,un} di V si dice ortonormale se:
1. B è ortogonale
2. per ogni i appartenente a {1,...,n}, ||ui||=1 (<ui,ui>=1)

VETTORI LIN IND NEGLI SPAZI EUCLIDEI

Proposizione $\{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V \setminus \{0\}$ $\qquad (V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo

Se, $\forall\, i,j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, allora $\{u_1, \dots, u_t\}$ è linearmente indip.

FORMULA DI GRAM-SCHMIDT

Formule di Gram-Schmidt:

$(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo $\qquad \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata

$n = \dim V$

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$\vdots$$

$$w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

$$\vdots$$

$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

$\overline{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ è base ortogonale

$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ con $e_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$, è base ortonormale

BASI CONCORDI/DISCORDI: sia (V,<*,*>) uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato e B e B’ due basi qualsiasi di V. B e B’ si dicono concordi se il determinante della matrice di passaggio da B a B’ è positivo, in caso contrario le matrici si dicono discordi.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO ORIENTATO: (V,B(base))

PRODOTTO VETTORIALE: sia (V,B) uno spazio euclideo orientato di dimensione tre. siano u, v due vettori di V. il prodotto vettoriale u^v (si può scrivere anche u x v) è il vettore tale che:

1. se {u,v} è lin dip, u^v=0(vettore nullo)
2. se {u,v} è lin ind, allora:
    a. u^v è ortogonale a u e a v
       (cioè <u^v, u>=0 e <u^v, v>=0)
    b. la base (u, v, u^v) è concorde con B
    c. ||u^v||=||u|| ||v||sen uv (dell’angolo tra u e v)
       dove sen uv lo definiamo come la radice quadrata di (1 - (cos^2) dell’angolo tra u e v)

COMPLEMENTO ORTOGONALE DELL’INSIEME X

$X \subseteq V \quad , \quad X \neq \emptyset$

$^{\perp}X = \{ v \in V \mid \langle v,u\rangle = 0, \ \forall u \in X \}$

complemento ortogonale dell'insieme X

- $X \subseteq {}^{\perp}({}^{\perp}X) \qquad u \in X \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0, \ \forall v \in {}^{\perp}X \Rightarrow u \in {}^{\perp}({}^{\perp}X)$
- $X \subseteq Y \Rightarrow {}^{\perp}X \supseteq {}^{\perp}Y$

Proposizione $U = \mathcal{L}(X)$ NB: $^{\perp}U$ è un sottosp. vett.

(i) $^{\perp}U = {}^{\perp}X$

(ii) $U = {}^{\perp}({}^{\perp}U)$

SPAZIO EUCLIDEO (O AFFINE): sono entrambe la stessa definizione, solo che una

martedì 11 maggio 2021 08:36

$\vec{\mathcal{E}}$ sp. vett. euclideo, (opp. sp. vett.) $\quad \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, $(P,Q) \rightsquigarrow \vec{PQ}$ / analogo di un vettore libero $\quad Q = P + \vec{PQ}$

coppia di punti associa un vettore

sp. eucl. $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (opp. affine) se: (insieme punti, app.)

(1) $\forall P \in \mathcal{E}, \forall a \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! X \in \mathcal{E}: \vec{PX} = a \quad (X = P + a)$ (punto) (vettore) punto

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \quad \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ punti "punta - coda"

caso f.g. $\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}} = n$

stava nella lezione 16 e una nella 17.

SPAZIO EUCLIDEO (AFFINE)

$\vec{\mathcal{E}} = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vett. euclideo (opp. V sp. vett.) EPSILON

$\mathcal{E}$ insieme, i cui elementi saranno detti punti

APP PRODOTTO CART $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, poniamo, $\forall P, Q \in \mathcal{E}$, $\pi((P,Q)) =: \vec{PQ}$ vettore L'IMMAGINE DELLA COPPIA DI PUNTI

La terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (affine) se:

(a) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall a \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! X \in \mathcal{E}: \vec{AX} = a$ per ogni insieme di punti A; un unico insieme di punti X; il vettore che va da A a X = a

$A \xrightarrow{a} X$

Se per ogni $a \in \vec{\mathcal{E}}$ possiamo considerare l'applicazione $\pi_a: A \in \mathcal{E} \longrightarrow X \in \mathcal{E}$ dove X è l'unico punto tale che $\vec{AX} = a$

$X = A + a$

RIFERIMENTO CARTESIANO: una coppia R (0, B) costituita da un punto 0 appartenente a epsilon (insieme di punti) e da una base ortonormale qualsiasi di epsilon segnato (a meno che epsilon segnato non sia dotato di struttura euclidea),si dice riferimento cartesiano.

le coordinate di un punto P di epsilon in R sono le componenti di OP con la freccia in B.

Lezione 18

venerdì 14 maggio 2021 10:54

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\qquad \pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$, $(P, Q) \mapsto \vec{PQ}$

Ricordiamo: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ è sottospazio euclideo (o affine) se

(i) $\vec{\mathcal{H}} = \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\vec{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$ è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{H}, \forall a \in \vec{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\vec{AX} = a$ appartiene ad $\mathcal{H}$

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (O AFFINI): CI STA UN'ALTRA DEF SOTTO

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (opp. AFFINI)

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ sp. euclideo $\quad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ sottoinsieme dell'insieme di punti

è una H

$\mathcal{H}$ si dice sottospazio euclideo (opp. affine) di $\mathcal{E}$ se:

- pi greco di HxH — è uguale alle im di tutte le coppie dei punti di H
  $\pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\vec{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{H}\} \overset{def.}{=} \vec{\mathcal{H}}$ è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$ dei vett $\vec{PQ}$ tali che $P, Q \in \mathcal{H}$

$\boxed{\text{ha ristretto Dom e Cod}}$ ristretto a HxH $\quad \pi_1: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$

- $\forall A \in \mathcal{H}$ (punto), $\forall a \in \vec{\mathcal{H}}$ (vett), l'unico punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\vec{AX} = a$ deve appartenere a $\mathcal{H}$.

Oss. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ è un sottosp. euclideo (opp. affine) di $\mathcal{E}$ allora $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

$(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

$\vec{\mathcal{H}}$ si dice giacitura (insieme immagine) di $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = \dim \vec{\mathcal{H}}$.

VARIETà LINEARE: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo
sia Pzero appartenente a epsilon e U sottospazio vettoriale di epsilon segnato. la "coppia" (Pzero, U) = {Q appartenente epsilon tale che il vettore PzeroQ appartiene a U} questo si chiama varietà lineare passante per Pzero e parallela a U. (Pzero, U) si può considerare anche come
Pzero +U.
OGNI VARIETà LINEARE è UN SOTTOSPAZIO EUCLIDEO O AFFINE /vale anche l'implicazione contraria

AFFINEMENTE INDIPENDENTI: P0, P1, …, Ph appartenente a epsilon si dicono affinemente indipendenti se i vettori P0P1, …, P0Ph sono lin ind.
prop: sia H un sottospazio euclideo di dim H = h.
h+1 è il massimo numero di punti affinemente indipendenti che troviamo in H.
prop: dati P0, P1, …, Ph appartenente a epsilon affinemente indipendenti, esiste un unico sottospazio affine H di dim H= h che li contiene.
SOTTOSPAZIO EUCLIDEO

nel punto (i), H con la freccia è proprio l'immagine del prodotto cartesiano HxH

SOTTOSPAZI PARALLELI:

$\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sottosp. euclidei (o affini) PARALLELI

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono paralleli $\iff \vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{H}'}$ opp. $\vec{\mathcal{H}'} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$

SOTTOSPAZI INCIDENTI O SGHEMBI:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sottosp. euclidei (o affini)

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono incidenti se $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' \neq \emptyset$

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono sghembi se $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$ e $\mathcal{H} \not\parallel \mathcal{H}'$.

LE CONDIZIONI DI INCIDENZA ETC STANNO NELLA LEZIONE 18

IPERPIANO: sia H un sottospazio euclideo di dim= n-1 ((epsilon ha dim=n) , R(0,B)), allora H si dice iperpiano

RETTE ORTOGONALI: siano r e r' due rette di epsilon. r e r' si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è contenuta nel complemento ortogonale della giacitura di r'. cioè che i vettori della giacitura di r siano ortogonali ai vettori della giacitura di r' (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r' è contenuta nella giacitura di r)

complemento ortogonale (di r): è l'insieme di tutti e soli i vettori che sono ortogonali a tutti e soli i vettori del sottospazio

IPERPIANO ORTOGONALE AD UNA RETTA: sia r una retta e H un iperpiano di epsilon. r e H si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è uguale al complemento ortogonale della giacitura di H (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r deve essere uguale alla giacitura di H)

IPERPIANI ORTOGONALI: siano H e H' due iperpiani di epsilon.
diciamo H e H' ortogonali tra di loro se e solo se comunque prendiamo una retta r ortogonale a H e comunque prendiamo una retta r' ortogonale a H', r e r' sono ortogonali.

FASCIO PROPRIO DI PIANI: il fascio proprio di piani di asse r è l'insieme di tutti e soli piani che contengono r.
tutti i piani appartenenti a questo fascio hanno equazione:
alfa(ax1+bx2+cx3)+beta(a'x1+b'x2+c'x3)=0 con alfa e beta appartenenti a K^2 \ {(0,0)}

FASCIO IMPROPRIO DI PIANI: il fascio improprio di piani paralleli H è l'insieme di tutti e soli i piani paralleli a H. si rappresenta come: ax+by+cz+k=0 per ogni K appartenente a K.

DISTANZA TRA DUE PUNTI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B)
avendo P, Q punti di epsilon, la **distanza** tra P e Q d(P,Q)=||PQ con la freccia|| ovvero la **lunghezza del vettore PQ**.

DISTANZA TRA DUE SOTTOINSIEMI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B). abbiamo X e Y sottoinsiemi di epsilon, la distanza tra X e Y è uguale all**'estremo inferiore della distanza tra P e Q** con P punto di X e Q punto di Y.

DISTANZA TRA r e H: ***<u>(piano e retta)</u>***
se r intersecato H è diverso da zero allora la distanza tra r e H è zero.
altrimenti sono paralleli e per qualsiasi P di r, la distanza tra P e H è uguale alla distanza tra r e H.

RETTE SGHEMBE (TEOREMA DELLA COMUNE PERPENDICOLARE): se r e r' sono sghembe. esiste un'unica retta s ortogonale sia a r che r' che è incidente sia a r che a r'.

A**UTOVALORE, AUTOVETTORE e AUTOSPAZIO:** sia T: V->V un endomorfismo con V spazio vettoriale su K. uno scalare lambda appartenente a K si dice **autovalore** di T se per v di V, l'insieme U con lambda è uguale all'insieme dei vettori tali che la loro immagine tramite T è uguale a lambda per v.
ovvero: esiste un vettore non nullo di V tale che la sua immagine è uguale ad un multiplo di se stesso tramite lo scalare lambda.
dove U con lambda si dice **autospazio** relativo a lambda e gli elementi non nulli di U con lambda si dicono **autovettori**.

POLINOMIO CARATTERISTICO:

POLINOMIO CARATTERISTICO

♦ **Definizione 7.6.** Si dice *polinomio caratteristico* della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il polinomio

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Si dicono poi *autovalori* di A le radici del suo polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$.

♦ **Definizione 7.9.** Sia T un operatore lineare su $\mathbf{V}^n$. Si dice *polinomio caratteristico* di T, e si indica con $\Delta_T(t)$, il polinomio caratteristico della matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, associata a T relativamente a una qualunque base di $\mathbf{V}^n$.

EQUAZIONE CARATTERISTICA: det(A- lambda In(mat identica))=0

matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

RADICI DEL POLINOMIO: con p(x) su K[x], uno scalare b di K si dice soluzione o radice di p(x) se e solo se p(b)=0

TEOREMA DI RUFFINI: sia con p(x) appartenente a K[x] , con b scalare di K.
b è radice di p(x) se e solo se esiste un altro polinomio q(x) appartenente a K[x] tale che p(x)=q(x)(x-b) *(cioè x-b divide p(x))*

MOLTIPLICITà ALGEBRICA: sia con p(x) appartenente a K[x] con b radice di p(x), la molteplicità algebrica di b è uguale al massimo n appartenente a N tale che (x-b)^n divide p(x).
MOLTEPLICITà GEOMETRICA: sia T: V -> V endomorfismo di dimensione n su campo K. sia lambda autovalore, la molt. geom. è uguale alla dimensione dell'autospazio U con lambda.
prop: la molteplicità algebrica di lambda è sempre maggiore uguale della sua molteplicità geometrica

TEOREMA: la somma degli autospazi è uguale alla somma diretta degli stessi autospazi.

BASE SPETTRALE: dato T: V ->V (endomorfismo)
una base di V costituita solo da autovettori di T si dice base spettrale di V relativa a T.

MATRICE DIAGONALIZZABILE: una matrice A appartenente a Mn(K) si dice diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice diagonale 'A segnato' appartenente a Mn(K) simile ad A.

MATRICE DIAGONALE: una matrice quadrata in cui solo i valori sulla diagonale non sono nulli.

i sottospazi affini sono tutte e sole le varietà lineari.1

Questo elenco dei principali Teoremi trattati e dimostrati a lezione è stato preparato da alcuni studenti del corso di Geometria e Algebra da me tenuto durante il primo semestre dell'anno accademico 2020-2021. Un po' riadattato, lo inserisco nel Materiale Didattico del Team del corso di Geometria per Informatica tenuto nello stesso anno accademico, sperando che possa essere utile.

Napoli, 4 giugno 2021
Francesca Cioffi

1. Proposizione sulle classi di equivalenza;
2. Unicità elemento neutro e unicità elemento inverso (se vale la proprietà associativa della operazione)
3. Lemma di Steinitz
4. Teorema di estrazione di una base e dimensione
5. Teorema di Equipotenza delle basi in uno spazio vettoriale finitamente generato
6. Proposizione riguardo la connessione tra lineare indipendenza e sistemi di generatori e dimensione dello spazio vettoriale ambiente
7. Lemma sull'ampliamento di un insieme di vettori linearmente indipendenti che conserva la lineare indipendenza e Teorema di completamento di una base
8. Unicità delle componenti in una base ordinata di un vettore appartenente ad uno spazio vettoriale
9. Proposizione sull'intersezione di sottospazi vettoriali (che è ancora un sottospazio vettoriale);
10. Proposizione KerT= 0 se e solo se T è iniettiva
11. Conservazione della chiusura lineare per un'applicazione lineare
12. Conservazione della lineare dipendenza (e indipendenza, se iniettiva) per un'applicazione lineare
13. Correlazione tra rango e numero di pivot di una matrice ridotta a gradini
14. Algoritmo di Gauss: non modifica il rango
15. Teorema di Rouchè-Capelli
16. Teorema di Cramer;
17. Teorema fondamentale delle applicazioni lineari
18. Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare
19. Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo formano un sottospazio vettoriale
20. Il determinante di una matrice è diverso da 0 se e solo se la matrice è invertibile
21. Diseguaglianza di Schwarz
22. Data una base ortonormale $(e_1,\ldots,e_n)$, calcolo delle componenti di un vettore u (per esempio $\langle u,e_1\rangle=x_1$) e calcolo del prodotto scalare $\langle u,v\rangle=y_1x_1+\ldots+y_nx_n$;
23. Un insieme di vettori perpendicolari a due a due è un insieme linearmente indipendente;
24. Dimostrazione distanza tra un punto e un iperpiano;
25. Teorema della comune perpendicolare;
26. Teorema spettrale;
27. La riduzione a gradini non modifica le soluzioni di un sistema lineare;
28. Esistenza e unicità delle matrici associate a un'applicazione lineare, fissate basi ordinate per dominio e codominio, rispettivamente;
29. Ogni sottospazio vettoriale numerico è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo
30. Teorema di Pitagora;
31. Il complemento ortogonale della giacitura di un iperpiano è generato dal vettore che ha come componenti i coefficienti dell'equazione dell'iperpiano;
32. Rappresentazione sottospazi affini (euclidei);
33. Autovettori relativi ad autovalori a due a due distinti sono linearmente indipendenti;
34. La somma di autospazi è diretta;

35. Calcolo di autovalori e autospazi (polinomio caratteristico)
36. Caratterizzazione della somma diretta di due sottospazi vettoriali mediante l'unicità della scrittura dei suoi elementi;
37. Matrici associate a un endomorfismo (in basi ordinate uguali per dominio e codominio) sono simili

Lemma di Steintz. *Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e W un suo sottospazio vettoriale finitamente generato. Se n è la cardinalità di un sistema di generatori finito di W, ogni sottoinsieme di W contenente $m > n$ vettori è linearmente dipendente.*

Dim. Per ipotesi, esiste un sistema di generatori di W composto da n vettori. Sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un tale sistema di generatori.

Dobbiamo dimostrare che, preso comunque un insieme $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$ di vettori di W, se $m > n$ allora X è linearmente dipendente.

Possiamo supporre che X non contenga il vettore nullo. Infatti, se X contiene il vettore nullo, allora la tesi segue immediatamente.

Siccome v_1 appartiene a $W = \mathcal{L}(S)$, allora v_1 si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che v_1 sia diverso dal vettore nullo:

$$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K :\ v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

con, per esempio, $\lambda_1 \neq 0$. Quindi, esiste $\lambda_1^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per λ_1^{-1}, ottenendo:

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \lambda_1^{-1}\lambda_1 u_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n$$

e di conseguenza:

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n).$$

Adesso possiamo osservare che l'insieme S è contenuto nella chiusura lineare $\mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$, per cui

$$W = \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq W$$

e quindi si ha $W = \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$, ossia l'insieme $S' = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori di W ottenuto sostituendo in S il vettore u_1 con il vettore v_1 di X.

Siccome v_2 è un vettore di $W = \mathcal{L}(S')$, allora v_2 si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S' mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che v_2 sia diverso dal vettore nullo

$$\exists\ \beta_1, \dots, \beta_n \in K :\ v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Se $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e $v_2 = \beta_1 v_1$, così che l'insieme X risulta essere linearmente dipendente $(\star)$.

Altrimenti, possiamo per esempio supporre che sia $\beta_2 \neq 0$, per cui esiste $\beta_2^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per β_2^{-1}, ottenendo:

$$\beta_2^{-1} v_2 = \beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1}\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_2^{-1}\beta_n u_n$$

e di conseguenza

$$u_2 = -\beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1} v_2 + \cdots - \beta_2^{-1}\beta_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n).$$

Analogamente a prima, possiamo osservare che S' è contenuto in $\mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n)$, per cui

$$W = \mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n) \subseteq W$$

e quindi si ha $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n)$, ossia l'insieme $S'' = \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori di W ottenuto sostituendo in S' il vettore u_2 con il vettore v_2 di X.

Se $m > n$ possiamo ripetere questo procedimanto fino a trovare che X è linearmente dipendente come nel punto indicato con $(\star)$ oppure trovando che l'insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori di W. Quindi, il vettore $v_{n+1} \in X \subset W$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, la qual cosa implica che l'insieme X è linearmente dipendente.

Prodotto vettoriale e interpretazione geometrica del determinante

mercoledì 27 maggio 2020 11:16

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

Def. Due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V si dicono concordi se il determinante della matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è positivo. Altrimenti, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ si dicono discordi.

Def. Se $\overline{\mathcal{B}}$ è una base ordinata di V, la coppia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ si dice spazio vettoriale euclideo orientato.

Sia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3.

Def. Dati due vettori $u, v \in V$, il prodotto vettoriale $u \wedge v$ di u per v è il vettore che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) se $\{u, v\}$ è lin. dip., allora $u \wedge v = \underline{0}$

(ii) se $\{u, v\}$ è lin. indip., allora:

(a) $u \wedge v$ è ortogonale a u e a v;

(b) la base ordinata $(u, v, u \wedge v)$ è concorde con $\overline{\mathcal{B}}$;

(c) $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

dove $\operatorname{sen}(\widehat{uv}) = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$.

Proposizione. Sia $\mathcal{B} = (i, j, k)$ una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$. Posto $u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, u_3)$ e $v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, v_3)$, si ha:

$$u \wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

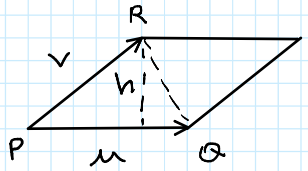
Sia $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine 2 su $\mathbb{R}$. Vediamo che il valore assoluto $|\det(A)|$ del determinante di A può essere interpretato come l'area di un parallelogramma, nello spazio della geometria elementare. Sia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ lo spazio vettoriale euclideo orientato dei vettori liberi con una base ordinata $\overline{\mathcal{B}}$.

Sia $\mathcal{B} = (i, j, k)$ una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$.

Siano u e v i due vettori liberi tali che:

$$u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, 0) \qquad e \qquad v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, 0),$$

quindi u e v possono essere disegnati nel piano rappresentato dalla equazione $z = 0$ in un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$.



Dallo studio della trigonometria sappiamo che l'altezza h del triangolo di vertici P, Q, R ha lunghezza $\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$.

Quindi, l'area di questo triangolo è $\frac{1}{2}\|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$ e, di conseguenza, l'area del parallelogramma nel disegno è uguale a

$$\|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}. \qquad (*)$$

La quantità $(*)$ è proprio la lunghezza del vettore $u \wedge v$.

Per la Proposizione, abbiamo $u \wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

e quindi la sua lunghezza è:

$$\|u \wedge v\| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

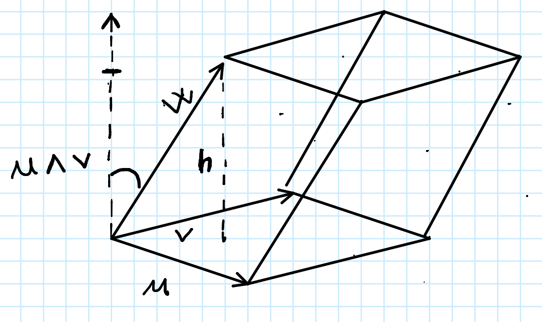
Sia $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine 3 su $\mathbb{R}$.

Vediamo che il valore assoluto del determinante di A può essere interpretato come il volume di un parallelepipedo.

Sia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ lo spazio vettoriale euclideo dei vettori liberi orientato con una base ordinata $\overline{\mathcal{B}}$ e sia (i, j, k) una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$.

Siano u, v e w i vettori liberi tali che:

$$u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, u_3), \quad v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, v_3), \quad w \equiv_{\mathcal{B}} (w_1, w_2, w_3)$$



$$h = \|w\| \, |\cos \widehat{u\wedge v \ w}| = $$
$$= \cancel{\|w\|} \frac{|u \wedge v \cdot w|}{\|u \wedge v\| \, \cancel{\|w\|}}$$

Si consideri il parallelepipedo che ha lati delle lunghezze dei vettori u, v, w, disposti come nella figura.

Allora il volume di questo parallelepipedo è:

dei vettori u, v, w, disposti come nella figura.

Allora, il volume di questo parallelepipedo è:

$$\|u \wedge v\| \cdot h = |u \wedge v \cdot w| = \left| \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) \right| =$$

perché la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$ è ortonormale

$$= \left| w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

che è il valore assoluto del determinante della matrice A considerata all'inizio, calcolato mediante lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna.

In questa nota sono raccolti alcuni dei risultati proposti durante le lezioni di questo anno accademico riguardo allo studio dei sistemi lineari omogenei su un campo K.

Sia $\Sigma_O : AX = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite su un campo K e sia $\mathcal{S}_O$ l'insieme delle sue soluzioni.

Proposizione. *L'insieme $\mathcal{S}_O$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico K^n.*

Dim. Si osservi prima di tutto che l'insieme $\mathcal{S}_O$ non è vuoto perché contiene il vettore nullo $(0, \ldots, 0)$. Siano $(z_1, \ldots, z_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}_O$ due soluzioni di Σ_O. Vediamo che la loro somma è una soluzione di Σ_O. Infatti, ricordando che il prodotto righe per colonne gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione, si ha

$$A\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Sia $\alpha \in K$ uno scalare. Posto $A = (a^i_j)$, vediamo che $\alpha((z_1, \ldots, z_n)$ è una soluzione di Σ_O, usando le proprietà della moltiplicazione esterna di uno scalare per una matrice:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^1_1(\alpha z_1) + a^1_2(\alpha z_2) + \cdots + a^1_n(\alpha z_n) \\ a^2_1(\alpha z_1) + a^2_2(\alpha z_2) + \cdots + a^2_n(\alpha z_n) \\ \vdots \\ a^m_1(\alpha z_1) + a^m_2(\alpha z_2) + \cdots + a^m_n(\alpha z_n) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a^1_1 z_1 + a^1_2 z_2 + \cdots + a^1_n z_n \\ a^2_1 z_1 + a^2_2 z_2 + \cdots + a^2_n z_n \\ \vdots \\ a^m_1 z_1 + a^m_2 z_2 + \cdots + a^m_n z_n \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Proposizione. *Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico di dimensione n sul campo K. Esiste un sistema Σ_O di equazioni lineari omogenee in n incognite su K tale che il suo insieme delle soluzioni $\mathcal{S}_o$ coincide con W.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_h\}$ una base di W, con $w_1 = (a^1_1, a^2_1, \ldots, a^n_1)$, $\ldots$, $w_h = (a^1_h, a^2_h, \ldots, a^n_h)$, per cui W è la chiusura lineare $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_h)$ dei vettori di $\mathcal{B}$. Allora, un vettore $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di K^n appartiene a W se e solo u se si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B, ossia

$$u \in W \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_h & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_h & x_n \end{pmatrix} = \dim(W) = h.$$

Riducendo a gradini si ottiene una matrice del seguente tipo

$$\begin{pmatrix} p^1_1 & \ldots & p^1_h & b^1_1 x_1 + \cdots + b^1_n x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & p^h_h & b^h_1 x_1 + \cdots + b^h_n x_n \\ 0 & \ldots & 0 & b^{h+1}_1 x_1 + \cdots + b^{h+1}_n x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b^n_1 x_1 + \cdots + b^n_n x_n \end{pmatrix},$$

dove gli elementi p_i^i sono non nulli, per ogni $i \in \{1, \dots, h\}$, in quanto il sottospazio vettoriale W ha dimensione h. Inoltre la matrice deve avere rango h e questo accade se e solo se

$$\begin{cases} b_1^{h+1} x_1 & + \dots & + b_n^{h+1} x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n x_1 & + \dots & + b_n^n x_n & = & 0 \end{cases}$$

Esempio. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0, 1), (4, 1, 2, 2, 1))$ di $\mathbb{R}^5$. Riduciamo a gradini la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \\ 1 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 2 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 - \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}$$

e poi

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) \\ 0 & 0 & x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) \end{pmatrix}.$$

Quindi, W coincide con l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_3 - \frac{1}{2}x_1 = 0 \\ x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0 \\ x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0 \end{cases}$$

Sottospazi Affini Euclidei e Varietà Lineari

Questa breve nota propone agli studenti dell'insegnamento di Geometria del corso di laurea in Informatica (gruppo H-Z) una dimostrazione del fatto che i sottospazi affini (euclidei) sono varietà lineari e viceversa.

Definition 0.1. Uno *spazio affine (euclideo)* è una terna $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ dove $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ è uno spazio vettoriale (euclideo), $\mathcal{E}$ è un insieme e $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \leftarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}$ è un'applicazione che associa a ogni coppia (P, Q) di elementi di $\mathcal{E}$ il vettore $\overrightarrow{PQ} := \pi(P, Q)$ tale che

(1) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\exists! X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$;
(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Definition 0.2. Dato uno spazio affine (euclideo) $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, un sottoinsieme $\mathcal{H}$ di $\mathcal{E}$ si dice *sottospazio affine (euclideo)* di $\mathcal{E}$ se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(i) il sottoinsieme $\overrightarrow{\mathcal{H}} := \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$ di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ è un sottospazio vettoriale di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (detto *giacitura o spazio direttore* di $\mathcal{H}$)
(ii) $\forall A \in \mathcal{H}$, $\forall a \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$ appartiene ad $\mathcal{H}$.

Osservazione. Si noti che $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine (euclideo) di $\mathcal{E}$ se e solo se la terna $(\overrightarrow{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_{|\mathcal{H}\times\mathcal{H}})$ è uno spazio affine (euclideo).

Definition 0.3. Dato un punto P_0 di $\mathcal{E}$ e un sottospazio vettoriale U di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, il sottoinsieme

$$(P_0, U) := \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U\}$$

e detto *varietà lineare* passante per P_0 e parallela a U.

Proposition 0.4.

(a) *Ogni varietà lineare è un sottospazio affine (euclideo). Ossia, per ogni punto P_0 di $\mathcal{E}$ e sottospazio vettoriale U di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, la varietà lineare (P_0, U) è un sottospazio affine di $\mathcal{E}$.*
(b) *Ogni sottospazio affine (euclideo) è una varietà lineare. Ossia, se $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine (euclideo) di $\mathcal{E}$, allora per ogni punto P_0 di $\mathcal{H}$ si ha $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.*

Proof. Prima di tutto osserviamo che il punto P_0 appartiene a (P_0, U) perché $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{0}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \in U$.

Per dimostrare l'enunciato (a), osserviamo prima il seguente fatto. Sia a un vettore di U e A un punto dell'insieme $(P_0, U) \subseteq \mathcal{E}$. Per la proprietà (1) sappiamo che esiste un solo punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{P_0X} = a \in U$. Allora, per definizione il punto X appartiene in particolare a (P_0, U) e la proprietà (ii) risulta provata. Adesso basta provare che vale l'uguaglianza $\pi((P_0, U) \times (P_0, U)) = U$.

"$\subseteq$" Si consideri una coppia (P, Q) in $(P_0, U) \times (P_0, U)$. Per definizione si ha che i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{P_0Q}$ appartengono a U e per la proprietà (2) si ha:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} \in U$$

perchè U è sottospazio vettoriale.

"$\supseteq$" Siccome la proprietà (ii) è stata già dimostrata per (P_0, U), possiamo dire che per ogni vettore a di U esiste un unico punto X di (P_0, U) tale che $a = \overrightarrow{P_0X} = \pi(P_0, X) \in \pi((P_0, U) \times (P_0, U))$ e abbiamo finito.

Adesso, dimostriamo l'enunciato (b) provando l'uguaglianza $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.

"$\subseteq$" $P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) \iff \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in \mathcal{H}$, per la proprietà (ii).

"$\supseteq$" $P \in \mathcal{H} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}})$. $\square$

Teorema della comune perpendicolare

In questa nota, enunciamo e dimostriamo il teorema della comune perpendicolare di due rette sghembe. Per le notazioni, facciamo riferimento a quelle usate a lezione.

Theorem 0.1. *Si consideri uno spazio euclideo $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ di dimensione 3 e siano r ed r' due rette sghembe. Allora esiste un'unica retta s ortogonale e incidente sia a r sia a r'; inoltre, posto $P = r \cap s$ e $P' = r' \cap s$, si ha $d(r, r') = d(P, P')$.*

Proof. Sia $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ un riferimento cartesiano dello spazio euclideo $\mathcal{E}$. Si considerino due rappresentazioni parametriche di r ed r', rispettivamente:

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (l, m, n)t, \qquad r' : (x, y, z) = (x'_0, y'_0, z'_0) + (l', m', n')t'.$$

La retta s che stiamo cercando deve intersecare r in un certo punto $Q(x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$, per un opportuno valore del parametro reale t, e deve intersecare r' in un certo punto $Q'(x'_0 + l't', y'_0 + m't', z'_0 + n't')$, per un opportuno valore del parametro reale t'. I valori di t e di t' opportuni devono essere tali che la retta s sia ortogonale sia a r sia a r'.

Quindi il vettore $\overrightarrow{QQ'}$, che sappiamo genera la giacitura di s, deve essere ortogonale ai vettori direzionali di r e di r', rispettivamente, ossia a $u(l, m, n)$ e a $u'(l', m', n')$.

Allora, si deve avere $\langle \overrightarrow{QQ'}, u\rangle = 0$ e $\langle \overrightarrow{QQ'}, u'\rangle = 0$, che tradotto in termini di componenti diventa:

$$\begin{cases} (x'_0 + l't' - x_0 - lt, y'_0 + m't' - y_0 - mt, z'_0 + n't' - z_0 - nt)(l, m, n) &= 0 \\ (x'_0 + l't' - x_0 - lt, y'_0 + m't' - y_0 - mt, z'_0 + n't' - z_0 - nt)(l', m', n') &= 0 \end{cases}$$

Effettuando il calcolo del prodotto scalare naturale si trova

$$\begin{cases} (x'_0 + l't' - x_0 - lt)l + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n &= 0 \\ (x'_0 + l't' - x_0 - lt)l' + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m' + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n' &= 0 \end{cases}$$

e quindi si ha il seguente sistema di due equazioni lineari nelle due incognite t e t':

$$\Sigma : \begin{cases} (l'l + m'm + n'n)t' - (l^2 + m^2 + n^2)t + (x'_0 - x_0)l + (y'_0 - y_0)m + (z'_0 - z_0)n &= 0 \\ (l'^2 + m'^2 + n'^2)t' - (ll' + mm' + nn)t + (x'_0 - x_0)l' + (y'_0 - y_0)m' + (z'_0 - z_0)n' &= 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} l'l + m'm + n'n & -(l^2 + m^2 + n^2) \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 & -(ll' + mm' + nn) \end{pmatrix}$$

ossia,

$$\begin{pmatrix} \langle u, u'\rangle & -\|u\|^2 \\ \|u'\|^2 & -\langle u, u'\rangle \end{pmatrix},$$

il cui determinante è uguale a $-\langle u, u'\rangle^2 + \|u\|^2\|u'\|^2$. Come si evince dalla dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz, questo determinante si annulla se e solo se $\{u, u'\}$ è linearmente dipendente. Sappiamo tuttavia che questo non è vero, perché le rette r e r' non sono parallele, in quanto sono sghembe.

Allora, il sistema Σ soddisfa le ipotesi del Teorema di Cramer, per cui Σ ammette un'unica soluzione $(k', k) \in \mathbb{R}^2$. Quindi, la retta che passa per i due punti $P'(x'_0 + l'k', y'_0 + m'k', z'_0 + n'k')$ e $P(x_0 + lk, y_0 + mk, z_0 + nk)$ è la retta s, comune perpendicolare, cercata.

Per l'ultima affermazione dell'enunciato basta applicare il Teorema di Pitagora. $\square$

Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2020-2021
Laurea in Informatica

Vettori liberi o geometrici nello spazio della geometria elementare

Questa nota propone una introduzione molto breve dei *vettori liberi (o geometrici)*, a partire dai vettori applicati (o segmenti orientati), nello spazio della geometria elementare (o spazio euclideo elementare). La lettera $\mathcal{F}$ denoterà l'insieme dei punti dello spazio della geometria elementare.

Per la definizione e le principali proprietà dei vettori applicati (visti come coppie di punti) si fa riferimento all'Esempio 4.1 del libro di testo consigliato per questo corso. L'insieme di tutti i vettori applicati sarà denotato con la lettera $\mathcal{V}$. Quindi,

$$\mathcal{V} = \{(P, Q) \mid P, Q \in \mathcal{F}\}.$$

Si ricordi che un vettore applicato è univocamente determinato da una *direzione*, un *verso*, una *lunghezza* (o *modulo* o *norma* o *intensità*) e da un *punto di applicazione* (o primo estremo). Un vettore applicato del tipo (P, P), in cui il punto di applicazione coincide con il secondo estremo, è detto *vettore nullo* (applicato in P). Un vettore nullo ha lunghezza nulla e, per convenzione, ha direzione e verso arbitrari.

Consideriamo la seguente relazione su $\mathcal{V}$, detta *relazione di equipollenza*:

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \supseteq \mathcal{R} := \{((P, Q), (S, T)) \mid (P, Q) \text{ e } (S, T) \text{ hanno uguali direzione, verso e lunghezza}\}.$$

Si può domostrare che questa è una relazione di equivalenza. Allora, possiamo considerare le classi di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza, ossia i sottoinsiemi di $\mathcal{V}$ del seguente tipo:

$$[(P, Q)]_{\mathcal{R}} = \{(P', Q') \in \mathcal{V} \mid (P', Q')\mathcal{R}(P, Q)\}.$$

Un qualsiasi vettore applicato (S, T) che appartiene a $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ si dice *rappresentante* di $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$. L'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza $\mathcal{R}$ si dice *insieme quoziente* di $\mathcal{V}$ modulo $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}} := \Big\{[(P, Q)]_{\mathcal{R}} \mid (P, Q) \in \mathcal{V}\Big\}.$$

Definizione. Un *vettore libero* è una classe di equivalenza $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ rispetto alla relazione di equipollenza $\mathcal{R}$ e si denoterà con il simbolo $\overrightarrow{PQ}$.

L'insieme dei vettori liberi sarà denotato con la lettera $\mathbf{V}$, per cui $\mathbf{V} := \dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}}$.

$$\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ S \longrightarrow T \end{array} \qquad (P, Q) \neq (S, T), \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST} = \{(P, Q), (S, T), \dots\}$$

Nell'Esempio 4.1 del testo consigliato per questo corso, con $\mathcal{F}(O)$ si denota l'insieme dei vettori applicati in un punto O e su $\mathcal{F}(O)$ sono definite una operazione interna $+$ (addizione) e una operazione esterna $\cdot$ (moltiplicazione) con operatori nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si può dimostrare che $(\mathcal{F}(O), +, \cdot)$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che, se (P, Q) è un vettore applicato in un punto P e O è un altro punto, allora esiste un unico punto T tale che il vettore applicato (O, T) è equipollente a (P, Q) (questo è vero per il postulato euclideo del trasporto). Quindi, preso un punto O esiste un vettore applicato (O, T) che appartiene alla classe di equivalenza di (P, Q), ossia esiste un rappresentante di $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ applicato in O. Allora, si può dimostrare che sono ben definite le seguenti operazioni su $\mathbf{V}$

$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{P'Q'} := [(O, T) + (O, T')]_{\mathcal{R}}$,
dove $(O, T) \in [(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ e $(O, T') \in [(P', Q')]_{\mathcal{R}}$, e
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $\alpha \cdot \overrightarrow{PQ} := [\alpha \cdot (O, T)]_{\mathcal{R}}$,
dove $(O, T) \in [(P, Q)]_{\mathcal{R}}$.

Si può dimostrare che $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.