Lezione 19

martedì 18 maggio 2021 08:40

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ spazio euclideo, $\dim \mathcal{E} = n$, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ ← ORTONORMALE

Se $\mathcal{H}$ è un sottosp. euclideo di dimensione $n-1$, allora $\mathcal{H}$ si dice iperpiano.

Vogliamo definire l'ORTOGONALITÀ tra sottospazi euclidei in alcuni casi particolari. Come per il parallelismo, basterà considerare le giaciture dei sottospazi.

Def. Siano r ed r' due rette di $\mathcal{E}$.

r e r' si dicono ortogonali, e scriveremo $r \perp r'$, se e solo se $\vec{r} \subseteq {}^{\perp}\vec{r'}$ (o equivalente ${}^{\perp}\vec{r} \supseteq \vec{r'}$).

Osserviamo che da questa definizione discende il seguente fatto:

r, r' $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n))$ $\quad \vec{r'} = \mathcal{L}(u'(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_n))$

$$r \perp r' \iff u \perp u' \iff \langle u, u' \rangle = 0 \iff \ell_1 \ell'_1 + \ell_2 \ell'_2 + \dots + \ell_n \ell'_n = 0$$

<u>Esempio</u> $\dim \mathcal{E} = 4$ $\quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$$r: \begin{cases} x_1 = -3 - t \\ x_2 = 2 + 2t \\ x_3 = 5 + t \\ x_4 = 1 + t \end{cases}$$

Determinare una retta r' per $P(1, 0, -1, 2)$ che sia ortogonale a r

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(-1, 2, 1, 1))$ $\quad (\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_n): \quad -\ell'_1 + 2\ell'_2 + \ell'_3 + \ell'_4 = 0$

$$2\ell'_2 + \ell'_3 + \ell'_4 = \ell'_1$$

scelgo: $\ell'_2 = 1$, $\ell'_3 = \frac{1}{2}$, $\ell'_4 = 1$

quindi $2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}$

$$r': \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{7}{2} t' \\ x_2 = \quad + t' \\ x_3 = -1 + \frac{1}{2} t' \\ x_4 = 2 + t' \end{cases}$$

Consideriamo $s: \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

s è ortogonale a r opp. a r'?

$$\vec{s}: \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{s}: \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 4x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases} \qquad S_0 = \{(-5x_3, x_3, x_3, 2x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{s} = \mathcal{L}(v(-5,1,1,2))$$

$\langle u, v\rangle = (-1,2,1,1)\cdot(-5,1,1,2) = 5+2+1+2 \neq 0 \Rightarrow s \not\perp r$

$\langle u', v\rangle = (7/2, 1, 1/2, 1)(-5,1,1,2) = -\frac{35}{2} + 1 + 1/2 + 2 = -14 \neq 0 \Rightarrow s \not\perp r'$

Def. Sia r una retta di $\mathcal{E}$ e sia $\mathcal{H}$ un iperpiano di $\mathcal{E}$.
Si dice che r e $\mathcal{H}$ sono ortogonali, e scriviamo $r \perp \mathcal{H}$, se e solo se
$\vec{r} = {}^{\perp}\vec{\mathcal{H}}$ (o equivalentemente ${}^{\perp}\vec{r} = \vec{\mathcal{H}}$)

Proposizione: $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$; se $\mathcal{H}: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b = 0$
allora ${}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(w(a_1, a_2, \dots, a_n))$. $\vec{\mathcal{H}}: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$

DIM. Sappiamo che $\dim {}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = 1$.

$u \in \vec{\mathcal{H}}$, $u \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\iff$ $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n = 0 \iff u \perp w$

$\qquad = (a_1, a_2, \dots, a_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = \langle w, u\rangle$

X sp. vett.
$X \subseteq Y$
${}^{\perp}X \supseteq {}^{\perp}Y$
${}^{\perp}({}^{\perp}X) = X$

Allora $0 \neq w \in {}^{\perp}\vec{\mathcal{H}}$, $\dim {}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = 1$, da cui ${}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(w)$. $\square$

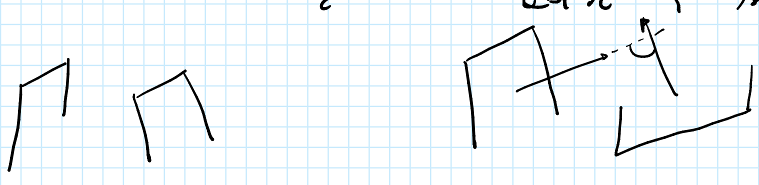
Esempio: $\dim \mathcal{E} = 4$, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$\mathcal{H}: -x_1 + 3x_2 - x_4 + 2 = 0$ $\vec{\mathcal{H}}: -x_1 + 3x_2 - x_4 = 0$

Determinare una retta ortogonale ad $\mathcal{H}$. $w(-1, 3, 0, -1)$

$$r: \begin{cases} x_1 = b_1 - t \\ x_2 = b_2 + 3t \\ x_3 = b_3 \\ x_4 = b_4 - t \end{cases} \qquad \forall (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$$

Def. Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ due iperpiani di $\mathcal{E}$.
Diciamo che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono ortogonali, e scriviamo $\mathcal{H} \perp \mathcal{H}'$, se e solo
comunque prendiamo una retta r ortogonale ad $\mathcal{H}$ e
" " " " r' " ad $\mathcal{H}'$, si ha $r \perp r'$.



Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$ $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$\mathcal{H}: -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2 = 0$ ${}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(w(-2, 1, 4)) = \vec{r}$

Determinare un iperpiano $\mathcal{H}'$ passante per $P(2, -1, 0)$ ortogonale ad $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}': a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - b = 0$ Se prendo $\vec{r}' = \mathcal{L}(u'(1, 2, 0))$ ho:

$\langle w, u'\rangle = (-2, 1, 4)(1, 2, 0) = 0$

$\mathcal{H}': x_1 + 2x_2 - b = 0$

$\langle w, u' \rangle = (-2,1,4)(1,2,0) = 0$

$\mathcal{H}': x_1 + 2x_2 - b = 0$

Potevo prendere anche $u'(0,-4,1)$

$P(2,-1,0) \in \mathcal{H}' \Rightarrow 2 + 2(-1) - b = 0 \Rightarrow b = 0$

Allora ho trovato: $\mathcal{H}': x_1 + 2x_2 = 0$

Esercizio

$\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ $\quad P(-3,2)$

$r: 2x_1 - 4x_2 + 3 = 0.$

$w(2,-4) \perp r$

Determinare la retta r' per P parallela a r

" " " s per P ortogonale a r.

$\vec{r}' = \vec{r}: 2x_1 - 4x_2 = 0$ $\qquad r': 2x_1 - 4x_2 + k = 0$

$P \in r' \Rightarrow 2(-3) - 4(2) + k = 0 \Rightarrow -14 + k = 0 \Rightarrow k = 14$

$r': 2x_1 - 4x_2 + 14 = 0$

$s: \begin{cases} x_1 = -3 + 2t \\ x_2 = 2 - 4t \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 = -3 + t' \\ x_2 = 2 - 2t' \end{cases}$ $\qquad \mathcal{L}((2,-4)) = \mathcal{L}((1,-2))$

$t' = x_1 + 3$ $\qquad x_2 = 2 - 2x_1 - 6$

$s: 2x_1 + x_2 + 4 = 0$

Esercizio. $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$\mathcal{H}: x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$ $\qquad \vec{\mathcal{H}}: x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

Determinare una retta r parallela ad $\mathcal{H}$ passante per $B(-2,1,1)$

$r \parallel \mathcal{H} \Leftrightarrow \underset{1}{\vec{r}} \subseteq \underset{2}{\vec{\mathcal{H}}}$ $\qquad u(1,-1,-1) \in \vec{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{L}(u) \subseteq \vec{\mathcal{H}}$, $\mathcal{L}(u) = \vec{r}$

$r: \begin{cases} x_1 = -2 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 - t \end{cases}$ $\qquad rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ x_1+2 & x_2-1 & x_3-1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow$

$\vec{BQ}$ $\qquad Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, x_3)$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_1+2 & x_2-1 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_1+2 & x_3-1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow r: \begin{cases} x_2 - 1 + x_1 + 2 = 0 \\ x_3 - 1 + x_1 + 2 = 0 \end{cases}$ $\qquad \vec{r}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

Determinare la retta parallela a r e passante per $C(-2,1,3) \notin r$

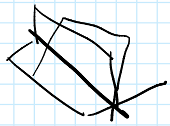
$r': \begin{cases} x_1 + x_2 + k_1 = 0 \\ x_1 + x_3 + k_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad C \in r' \Rightarrow \begin{cases} -2 + 1 + k_1 = 0 \\ -2 + 3 + k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$

$r': \begin{cases} x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ x_1 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$

$\dim \mathcal{E} = 3$ $\qquad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ $\qquad$ FASCI DI PIANI

$r: \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' = 0 \end{cases}$ retta

Def. Il fascio proprio di piani di asse r è l'insieme di tutti e soli i piani che contengono r.



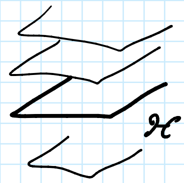
Si può dimostrare che tutti e soli i piani appartenenti a questo fascio hanno equazione del seguente tipo:

$$\lambda(ax_1+bx_2+cx_3+d)+\mu(a'x_1+b'x_2+c'x_3+d')=0 \qquad (\lambda,\mu)\in K^2\setminus\{(0,0)\}$$

$\mathcal{H}: ax+by+cz+d=0$ piano $\qquad \vec{\mathcal{H}}: ax+by+cz=0$

Def. Il fascio improprio di piani paralleli ad $\mathcal{H}$ è l'insieme di tutti e soli i piani paralleli ad $\mathcal{H}$.

Si rappresenta con: $\quad ax+by+cz+k=0, \quad \forall k\in K.$



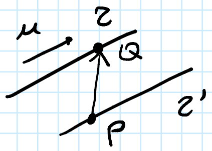
Esercizio $\qquad \dim \mathcal{E}=3, \quad \mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$

$r: \begin{cases} x_1-x_3+1=0 \\ x_1+x_2+2x_3-1=0 \end{cases} \qquad \vec{r}: \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases} \qquad u(1,-3,1)\,/\!/\, r$

$\vec{r}=\mathcal{L}(u)$

$r': \begin{cases} x_1=1+t' \\ x_2=-3t' \\ x_3=t' \end{cases}$

$P(1,0,0)$



$\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}: \lambda(x_1-x_3+1)+\mu(x_1+x_2+2x_3-1)=0$

$P\in\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)} \Rightarrow \lambda(1-0+1)+\mu(1+0+0-1)=0 \Rightarrow 2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$

$\mathcal{H}_{(0,1)}: x_1+x_2+2x_3-1=0$

Se prendiamo $P'(-1,1,1)\notin r$

$P'\in\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)} \Rightarrow \lambda(-1-\cancel{1}+\cancel{1})+\mu(-1+\cancel{1}+2-\cancel{1})=0 \Rightarrow -\lambda+\mu=0 \Rightarrow \lambda=\mu$

$\mathcal{H}_{(1,1)}: x_1-x_3+1+x_1+x_2+2x_3-1=0$