

Lezione 3

martedì 16 marzo 2021 08:24

Ricordiamo che abbiamo detto che un vettore applicato è un segmento orientato: (P, Q) , con $P, Q \in \mathbb{F}$ insieme dei punti dello spazio della geometria elementare $Q - P$

Abbiamo definito sull'insieme \mathcal{V} di tutti i vettori applicati la relazione di equivalenza detta relazione di equipollenza R , che mette in relazione due vettori applicati se hanno stessa direzione, verso e lunghezza:

$$V = \frac{\mathcal{V}}{R} = \{ [(P, Q)]_R \mid P, Q \in \mathbb{F} \} \quad \text{insieme dei vettori liberi (o geometrici).}$$

Sia O un punto di \mathbb{F} e sia $\mathcal{F}(O) := \{(O, P) \mid P \in \mathbb{F}\}$ vettori applicati in O . Su $\mathcal{F}(O) \subseteq \mathcal{V}$ possiamo definire le seguenti operazioni:

$+ : \mathcal{F}(O) \times \mathcal{F}(O) \longrightarrow \mathcal{F}(O)$. Vediamo come si comporta:

Prendiamo $(O, P), (O, Q) \in \mathcal{F}(O)$. Cosa è $(O, P) + (O, Q)$?

- se (O, P) e (O, Q) sono paralleli e hanno lo stesso verso:

$$\begin{array}{ccc} O \xrightarrow{P} & \xrightarrow{Q} T & (O, P) + (O, Q) \text{ è il vettore } (O, T) \text{ con stessa} \\ & & \text{direzione e verso di } (O, P) \text{ e con lunghezza} \\ & & |(O, P) + (O, Q)| = |(O, P)| + |(O, Q)| \end{array}$$

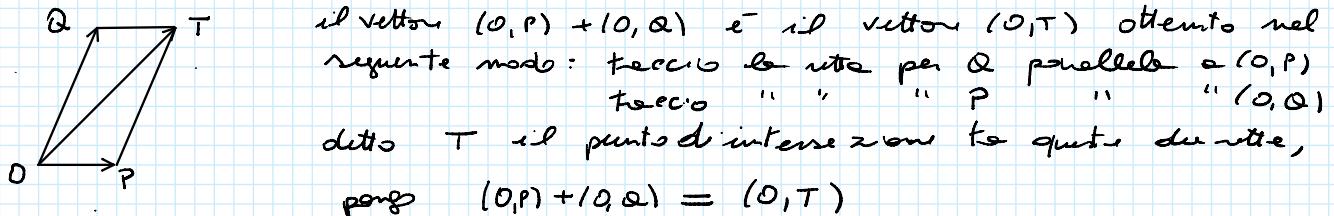
- se (O, P) e (O, Q) hanno stessa direzione ma verso opposto:

$$\begin{array}{ccc} Q \leftarrow \leftarrow O \rightarrow P & (O, P) + (O, Q) \text{ è il vettore } (O, T) \text{ con stessa direzione di } (O, P) \text{ e,} \\ & \text{se } |(O, P)| < |(O, Q)|, \text{ con verso uguali a quello di } (O, Q), \\ & \text{altrimenti con il verso di } (O, P), \text{ e con lunghezza} \\ & \text{uguali a } ||(O, P)| - |(O, Q)||. \end{array}$$

Se $|(O, P)| = |(O, Q)|$, allora $(O, P) + (O, Q) = (O, O)$ vettore nullo

(due vettori applicati (o libri) hanno la stessa direzione se ponendo ormai rappresentati con delle frecce che giacciono in rette parallele; dato un vettore applicato (o libero) e preso una freccia che lo rappresenta, il verso del vettore è l'ordine che si mette tra gli estremi delle frecce)

- se (O, P) e (O, Q) hanno direzioni diverse:



Queste operazioni godono delle proprietà commutative, delle proprietà associate, ammette elemento neutro (O, O) e ogni vettore ammette inverso (l'inverso di (O, P) è il vettore (O, P') con stessa direzione, stessa lunghezza e verso opposto) (senza dim.).

Quindi $(\mathbb{F}(0), +)$ è un gruppo abeliano.

Cosa possiamo fare per i vettori liberi \mathbb{V} ?

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$[(R,S)]_R, [(A,B)]_R \rightsquigarrow [(O,P) + (O,Q)]_R$$

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ O & \swarrow \quad \searrow & \\ & P & \\ R & \longrightarrow & S \\ & A & \nearrow B \end{array}$$

$$[(O,Q)]_R = [(R,S)]_R$$

$$(O,P) \neq (R,S)$$

$$[(O,Q)]_R = [(A,B)]_R$$

Si ottiene che $(\mathbb{V}, +)$ è un gruppo abeliano.

Adesso, consideriamo una operazione esterna con operatori in \mathbb{R} :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{F}(0) \longrightarrow \mathbb{F}(0)$$

$$(\alpha, (O,P)) \rightsquigarrow ?$$

- se $\alpha = 0$, $\alpha \cdot (O,P) = (O,O)$
- se $\alpha > 0$, $\alpha \cdot (O,P)$ è il vettore applicato in O con direzione e verso uguali a quelli di (O,P) e lunghezza $\alpha |(O,P)|$
- se $\alpha < 0$, $\alpha \cdot (O,P)$ è il vettore applicato in O stessa direzione di (O,P) , verso opposto e lunghezza $|\alpha| |(O,P)|$.

Questa operazione gode delle seguenti proprietà (senza dimostrazione):

- (1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (O,P) \in \mathbb{F}(0), (\alpha + \beta)(O,P) = \alpha(O,P) + \beta(O,P)$ (specie di proprietà distributiva)
- (2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (O,P), (O,Q) \in \mathbb{F}(0), \alpha((O,P) + (O,Q)) = \alpha(O,P) + \alpha(O,Q)$ (distributiva)
- (3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (O,P) \in \mathbb{F}(0), (\alpha \beta)(O,P) = \alpha(\beta(O,P))$
- (4) $1 \in \mathbb{R}, \forall (O,P) \in \mathbb{F}(0), 1(O,P) = (O,P)$

Cosa possiamo considerare in \mathbb{V} ?

$$\therefore \mathbb{R} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$(\alpha, [(O,P)]_R) \rightsquigarrow [\alpha(O,P)]_R$$

questa operazione gode delle stesse proprietà delle operazioni definite in $\mathbb{F}(0)$.

Allora, prendendo spunto da quanto detto fino ad ora, diamo la seguente definizione:

Se \mathbb{V} un insieme non vuoto, \mathbb{K} un campo, si considerino due operazioni:

$$\boxplus : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$\boxdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

La quaterna $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, \boxplus, \boxdot)$ (oppure le tre $(\mathbb{V}, \boxplus, \boxdot)$) è detta SPAZIO VETTORIALE su \mathbb{K} se sono soddisfatti le seguenti proprietà:

(0) (\mathbb{V}, \boxplus) è un gruppo abeliano

... $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$... III (an.)

- (0) (V, \boxplus) è un gruppo abeliano
- (1) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V, (\alpha + \beta) \boxplus u = (\alpha \boxplus u) \boxplus (\beta \boxplus u)$
- (2) $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V, \alpha \boxplus (u \boxplus v) = (\alpha \boxplus u) \boxplus (\alpha \boxplus v)$
- (3) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V, (\alpha \cdot \beta) \boxplus u = \alpha \boxplus (\beta \boxplus u)$
- (4) Denotato con 1 l'elemento neutro di K rispetto alla moltiplicazione,
 $\forall u \in V, 1 \boxplus u = u$.

$$[(0, P)] = [(R, S)]_R$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \alpha = 2, & \beta = 3 \\ & & & & & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 2(3(0, P)) = G(0, P) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} R \longrightarrow S \\ (Q \beta)[(R, S)]_R = (Q \beta)[(0, P)]_R \stackrel{\text{def.}}{=} [(Q \beta)(0, P)]_R = \\ = [Q(\beta(0, P))]_R \stackrel{\text{def.}}{=} Q[\beta(0, P)]_R \stackrel{\text{def.}}{=} \\ = Q(\beta[(0, P)]_R). \end{array}$$

Se $(V, K, \boxplus, \boxdot)$ è uno spazio vettoriale su K , gli elementi di V sono chiamati vettori e gli elementi di K sono chiamati scalari.

Vediamo un altro esempio di spazio vettoriale:

$$m \in \mathbb{N}^*, K^m = \underbrace{K \times \dots \times K}_{m \text{ volte}}, V = K^m \quad (K, +, \cdot) \text{ campo}$$

$$\boxplus : K^m \times K^m \longrightarrow K^m$$

$$(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$$

$$\boxdot : K \times K^m \longrightarrow K^m$$

$$(\alpha, (a_1, a_2, \dots, a_m)) \mapsto (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_m)$$

Sarà poi dimostrato che $(K^m, K, \boxplus, \boxdot)$ è uno sp. vett. su K .

Dimostriamo queste affermazioni nel caso $m=2$.

- (K^2, \boxplus) è un gruppo abeliano

- \boxplus è commutativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2,$
 $(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 \xrightarrow{\text{addizion di } K} b_1, a_2 \xrightarrow{\text{addizion di } K} b_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$
- \boxplus è associativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$
 $((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \boxplus (c_1, c_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \boxplus (c_1, c_2) \stackrel{\text{def.}}{=}$
 $= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \stackrel{\substack{\uparrow \text{+ e l'addizion di } K \text{ ch e' associativa}}}{=} (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) \stackrel{\text{def.}}{=} \\ = (a_1, a_2) \boxplus (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (a_1, a_2) \boxplus ((b_1, b_2) \boxplus (c_1, c_2))$
- \boxplus ha elemento neutro: Th: $\exists (d_1, d_2) \in K^2$ tali che $\forall (a_1, a_2) \in K^2$

$$= (\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \oplus ((\alpha_2, \alpha_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2))$$

- \oplus ha elemento neutro: Th: $\exists (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$ tali ch $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

commutatività

$$(\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \Leftrightarrow$$

$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_2 \end{cases} \quad \& \quad \alpha_1, \alpha_2 \in K \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$, dove 0 è l'elem. neutro di K rispetto all'addizione.

Quindi abbiamo dimostrato che le coppie $(0,0)$ è l'elemento neutro di K^2 rispetto a \oplus .

- ogn. elemento di K^2 ammette inverso rispetto a \oplus : commutatività

Th: $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2, \exists (\alpha'_1, \alpha'_2) \in K^2, (\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\alpha'_1, \alpha'_2) = (\alpha'_1, \alpha'_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$$(\alpha'_1, \alpha'_2) \oplus (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha'_1 + \alpha_1, \alpha'_2 + \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'_1 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha'_2 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'_1 = -\alpha_1 \\ \alpha'_2 = -\alpha_2 \end{cases} \quad \& \quad \text{in } K$$

Abbiamo dimostrato che ogn. elemento (α_1, α_2) di K^2 ha inverso $(-\alpha_1, -\alpha_2)$ rispetto a \oplus .

In conclusione, (K^2, \oplus, \ominus) è un gruppo abeliano.

Vediamo le proprietà che coinvolgono l'operazione esterna \odot .

(1) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$, Th: $(\alpha \odot \beta) \odot (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha \odot (\alpha_1, \alpha_2) \odot \beta \odot (\alpha_1, \alpha_2)$

$$(\alpha \odot \beta) \odot (\alpha_1, \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} ((\alpha \odot \beta) \alpha_1, (\alpha \odot \beta) \alpha_2) = (\alpha \alpha_1 + \beta \alpha_1, \alpha \alpha_2 + \beta \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{matrix} \uparrow \text{distributività in } K \\ = (\alpha \alpha_1, \alpha \alpha_2) \odot (\beta \alpha_1, \beta \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \odot (\alpha_1, \alpha_2) \odot \beta \odot (\alpha_1, \alpha_2) \end{matrix}$$

(2) $\forall \alpha \in K, \forall (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in K^2$, Th: $\alpha \odot ((\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\beta_1, \beta_2)) =$

$$= (\alpha \odot (\alpha_1, \alpha_2)) \oplus (\alpha \odot (\beta_1, \beta_2))$$

$$\alpha \odot ((\alpha_1, \alpha_2) \oplus (\beta_1, \beta_2)) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \odot (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha(\alpha_1 + \beta_1), \alpha(\alpha_2 + \beta_2)) =$$

$$= (\alpha \alpha_1 + \alpha \beta_1, \alpha \alpha_2 + \alpha \beta_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha \alpha_1, \alpha \alpha_2) \oplus (\alpha \beta_1, \alpha \beta_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{matrix} \uparrow \text{distributività in } K \\ = (\alpha \odot (\alpha_1, \alpha_2)) \oplus (\alpha \odot (\beta_1, \beta_2)) \end{matrix}$$

(3) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$, Th: $(\alpha \beta) \odot (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha \odot (\beta \odot (\alpha_1, \alpha_2))$

$$(\alpha \beta) \odot (\alpha_1, \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} ((\alpha \beta) \cdot \alpha_1, (\alpha \beta) \cdot \alpha_2) = \stackrel{\text{di } K \text{ è omocattiva}}{=} (\alpha(\beta \alpha_1), \alpha(\beta \alpha_2)) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{matrix} \uparrow \text{distributività in } K \\ = \alpha \odot (\beta \alpha_1, \beta \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \odot (\beta \odot (\alpha_1, \alpha_2)) \end{matrix}$$

(4) $1 \in K$ elemento neutro di K rispetto a \odot . Th: $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in K^2, 1 \odot (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$1 \odot (\alpha_1, \alpha_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (1 \cdot \alpha_1, 1 \cdot \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Analogamente si puo' per $m \in \mathbb{N}^*$ scrivere:

$(K^m, +, \cdot)$ si dice spazio vettoriale numerico di ordine m su K .

Dove si puo' scrivere solo + al posto $+$ e solo \cdot al posto \cdot .

Esempio: \mathbb{R}^3 $(2, 3, 4) + (0, 1, -2) = (2, 4, 2)$
 $-7 \in \mathbb{R}$ $(-7)(2, 3, 4) = (-14, -21, -28)$

Esercizio: V vettori liberi $u, v \in V \setminus \{\underline{0}\}$ $\underline{0}$ vettore nullo

u, v sono paralleli $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: u = \lambda v$ opp. $v = \lambda u$

" \Leftarrow " se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tali che $u = \lambda v$, allora per definizione di moltiplicazione di un numero reale per un vettore libero si ha che u e v sono paralleli. Le stesse cose si ottiene se $v = \lambda u$.

" \Rightarrow " consideriamo il vettore verso $u = \frac{1}{|u|} u$, verso $v = \frac{1}{|v|} v$
(verso di u) " $|u|^{-1} u$

Osserviamo che $|\text{vers } u| = 1$, $|\text{vers } v| = 1$

Siccome u e v sono paralleli, anch'essi verso u e verso v sono paralleli; in particolare $\text{vers } u = \pm \text{vers } v$

$$u = |u| \text{vers } u = \pm |u| \text{vers } v = \left(\pm \frac{|u|}{|v|} \right) v \\ \in \mathbb{R}$$

Vediamo che $\underline{0} = 0u$, $\forall u \in V$.