PROPRIETA' DELLE EQUIVALENZE ASINTOTICHE

Siano $f(n)$ e $g(n)$ asintoticamente positive e crescenti,

$f(n) = \Theta\, g(n) \Rightarrow \log(f(n)) = \Theta \log(g(n))$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi $\exists c_1, c_2, n_0 > 0 \mid \forall n \geq n_0 \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

Sappiamo che $x \leq y \Rightarrow \log x \leq \log y$

Quindi possiamo applicare il log ai membri dell' ipotesi:

$\log(c_1 g(n)) \leq \log(f(n)) \leq \log(c_2 g(n))$

Ricordiamo che $\log(ab) = \log a + \log b$

$\log(c_1) + \log(g(n)) \leq \log(f(n)) \leq \log(c_2) + \log(g(n))$

Sia $\log(c) = k$ (e' una costante) possiamo dimostrare che

$\log(g(n)) + k = \Theta \log(g(n))$

Mettiamo a limite il rapporto di queste due funzioni

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(g(n)) + k}{\log(g(n))} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\log(g(n))} \to 1 + 0$ (perche' $g(n)$ crescente)

Quindi sappiamo per definizione che:

$\log(g(n)) + K = \Theta \log(g(n)) \iff$

$\iff \exists c_3, c_4, n_1 > 0 \mid \forall n \geq n_1 \quad c_3 \log(g(n)) \leq \log(g(n)) + K \leq c_4 \log(g(n))$

Sia $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ per $n \geq n_2$ valgono entrambe le proprietà (verde e blu). Possiamo applicare la transitività del $\leq n$:

Posto $\log c_1 = k \rightarrow c_3 \log(g(n)) \leq \log c_1 + \log(g(n)) \leq \log(f(n))$

Posto $\log(c_2) = K \rightarrow \log(f(n)) \leq \log(c_2) + \log(g(n)) \leq c_4 \log(g(n))$

Applicando la transitività del $\leq$ varia:

$\exists c_3, c_4, n_2 \mid \forall n \geq n_2 \quad c_3 \log(g(n)) \leq \log(f(n)) \leq c_4 \log(g(n))$

OSS

NON vale il contrario

$\log(f(n)) = \Theta \log(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta\, g(n)$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi

$\exists c_1, c_2, n_0 > 0 \mid \forall n \geq n_0 \quad c_1 \log(g(n)) \leq \log(f(n)) \leq c_2 \log(g(n))$

Applichiamo l'esponenziale di 2 (base del log)

$$2^{(c_1 \log(g(n)))} \leq 2^{(\log(f(n)))} \leq 2^{(c_2 \log(g(n)))}$$

Per le proprietà del logaritmo avremo

$$(g(n))^{c_1} \leq f(n) \leq (g(n))^{c_2}$$

Posso concludere la dimostrazione solo per $c_1 = c_2 = 1$.

Cerchiamo allora un controesempio sapendo che almeno una tra c_1 e c_2 sarà diversa da 1.

Vediamo $f(n) = n^2$ e $g(n) = n$

Applicando il logaritmo avremo $f(n) = 2\log(n)$ e $g(n) = \log(n)$

per le quali banalmente vale $f(n) = \Theta\, g(n)$ ASSURDO!

Abbiamo trovato quindi due funzioni i cui logaritmi sono uguali al più di un fattore moltiplicativo, ma non sono in realtà equivalentemente asintotici, e quindi un controesempio.

Es.

Dati in input $a_1, \dots, a_n \mid a_i \in \mathbb{Z} \ \forall 1 \leq i \leq n$ una sequenza, sia il valore di una sottosequenza contigua la somma dei valori degli elementi che la compongono, cercare la sottosequenza di valore maggiore

Il numero di sottosequenze contigue e non contigue è 2^n.
Per vedere quante ne sono solo quelle contigue ragioniamo sul fatto che ogni sottosequenza e' individuata da una coppia di posizioni (inizio, fine). Il problema si riduce quindi a generare tutte queste coppie di numeri e verificare la somma dei suoi valori. Il numero di queste coppie e' $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ (+1 per la coppia 0,0).

Vediamo l'algoritmo

SUBSEQSUM(A,N)

SUM=0	1
FOR i=1 TO N DO	$N+1$
FOR J=i TO N DO	$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N+1} 1$
X=0	$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N} 1$
FOR Z=i TO J DO	$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N}\sum_{z=i}^{J+1} 1$
X+= A[Z]	$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N}\sum_{z=i}^{N} 1$
SUM=MAX(X,SUM)	$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N} 1$
RETURN SUM	1

Vediamo la complessità: $-i+1$

$$\sum_{z=i}^{J} 1 = (J+1-i)$$

$$\sum_{J=1}^{n-i+1} J = \frac{(n-i+1)(n-i+1+1)}{2} = \frac{n^2-2ni+3n+i^2-3i+2}{2} =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N}\sum_{z=i}^{J} 1 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{J=i}^{N}(J-i+1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(n^2-2ni+3n+i^2+2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} n^2 - 2n\sum_{i=1}^{n} i + 3\sum_{i=1}^{n} n + \sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + 2n\right) =$$

I primi due contributi quadratici si elidano tra di loro, la sommatoria che pesa di più è $\sum_{1}^{N} i^2 = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ che "mangia" tutti i quadrati, quindi il tempo totale è $T(n) = \Theta n^3$