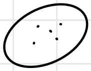
Geometria

Lez. 1 - 08/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Insiemi



$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad <-> \quad$ $\{x \mid x$ è uno dei primi 4 numeri naturali dispari$\}$

$3 \in A \qquad A \ni 3$

$\emptyset$

$4 \notin A \qquad A \not\ni 4$

Siano A, B insiemi; allora:

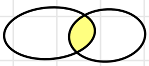
$A \subseteq B \iff \forall x \in A, \quad x \in B$

$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

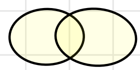
$\text{Prop } 1 \implies \text{Prop } 2$

$\cancel{\text{Prop}}\ 1 \impliedby \cancel{\text{Prop}}\ 2$

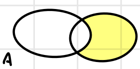
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



- $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$



A B

Siano ora $A \neq \emptyset \neq B$

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

  $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

$(a, a) \neq \{a\}$

Sia $n \in \mathbb{N}$; una n-pla è nella forma:

- $A_1, A_2, \dots, A_n \qquad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \qquad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*\}$ <- oppure $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} = \{a . c_1 c_2 c_3 \dots \mid a \in \mathbb{Z} \wedge c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

$\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Polinomi e Prodotto Cartesiano

DEF $n \in \mathbb{N}^*$, n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

- un termine è un prodotto di potenze di variabili: $x_1^3 x_4^7$
- un monomio è il prodotto di un numero per un termine: $-5 x_1^3 x_4^7$
- un polinomio è una somma finita di monomi: $3x_1^3 - 5x_4^7$

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \{$polinomi in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}\}$

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_i \qquad \tau_i \text{ termini}$$

$$p = x^2 + 2$$

Dalla nozione di prodotto cartesiano discendono due nozioni importanti:

- relazioni (di equivalenza);
- applicazioni.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione o corrispondenza di A in B è un sottoinsieme $R \subseteq A \times B$ cioè (A, B, R) con $R \subseteq A \times B$

Esempio:

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\qquad B = \{x, y, z\}$

$R = \{(1, x), (1, y), (5, z), (7, y), (7, z)\}$

$1 R x \qquad 3 \cancel{R} x$

In generale:

$R \subseteq A \times B$, $a \in A$, $b \in B$ $\qquad a R b \iff (a, b) \in R$

DEF Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione. La relazione inversa di R è
$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

Esempio:

$R^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (z, 5), (y, 7), (z, 7)\}$

Relazioni d'Equivalenza

$A = B \Rightarrow R \subseteq A \times A$ si dice <u>relazione in A</u>.

R è:

- riflessiva $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ (x,x) \in R \qquad [\, x R x \,]$
- simmetrica $\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \qquad [\, x R y \Rightarrow y R x \,]$
- transitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A \quad (x,y),\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$$[\, x R y,\ y R z \Rightarrow x R z \,]$$

Esempio:

$A = \{1, 3, 5, 7\} \qquad R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3)\}$

NON è riflessiva $\quad (3,3)$ e $(7,7) \notin R$

sì è simmetrica

NON è transitiva $\quad (3,1) \wedge (1,3) \not\Rightarrow (3,3)$

DEF Una relazione $R \subseteq A \times A$ si dice d'equivalenza se è <u>riflessiva</u>, <u>simmetrica</u> e <u>transitiva</u>.

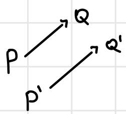
Esempi:

1. $R \cup \{(3,3), (5,5), (7,7)\}$

2. $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \ni (m,n)$

   $R \subseteq A \times A \qquad R = \{ (\underbrace{(m,n), (m',n')}_{\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}}) \mid mn' = m'n \}$ dà origine a $\mathbb{Q}$

3. $A = \{ (P, Q) \mid P, Q$ punti dello spazio della geometria elementare $\}$



> <u>Un vettore applicato</u> è un oggetto univocamente individuato da una direzione, un verso, una lunghezza e da un punto di applicazione.

$R \subseteq A \times A$

$R = \{ ((P,Q), (P',Q')) \mid (P,Q), (P',Q')$ hanno uguale $\begin{cases} \text{direzione} \\ \text{verso} \\ \text{lunghezza} \end{cases} \}$

Si tratta di una r. d'eq. detta equipollenza.

Classi d'Equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una rel. d'eq.

$a \in A \qquad [a]_R \qquad [a] = \{x \in A \mid x R a\}$ classi di equivalenza di a rispetto a R.

Lemma

(i) $a \in [a]$ DIM $a \in [a] \iff a R a \iff (a,a) \in R$ vero perché R riflessiva

(ii) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

DIM "$\subseteq$" $\left.\begin{array}{l} x \in [b] \Rightarrow x R b \\ hp: b R a \end{array}\right) \xRightarrow{\text{transitività}} x R a \Rightarrow x \in [a]$

"$\supseteq$" $\left.\begin{array}{l} z \in [a] \Rightarrow z R a \\ hp: b R a \end{array}\right) \xRightarrow[\text{simm.}]{} a R b \Big) \xRightarrow{\text{trans.}} z R b \Rightarrow z \in [b]$

(iii) $a, b \in A, \quad [a] \cap [b] = \emptyset \quad$ opp. $[a] = [b]$

DIM se esiste $y \in [a] \cap [b] \Rightarrow y \in [a] \wedge y \in [b]$

Per (ii) $[a] = [y] = [b]$ ✓

OSS $\boxed{A = \bigcup_{a \in A} [a] \qquad A/_R = \{[a] \mid a \in A\} \quad \text{insieme quoziente}}$

Esempi:

1. $[1] = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$

   $[7] = \{7\} \qquad A = [1] \cup [7] \qquad A/_R = \{[1], [7]\}$

2. $A/_R = \mathbb{Q}$

3. $A/_R = \{$vettori liberi o geometrici$\} = \{\overrightarrow{PQ} \mid (P,Q)$ vettore applicato$\}$

   $P \longrightarrow Q \qquad (P,Q) \neq (P',Q')$ vettori applicati diversi

   $P' \longrightarrow Q' \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ vettore libero

Applicazioni

Dal concetto di relazioni discende la nozione di applicazione.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice applicazione di A in B e si denota $f: A \to B$ se:
$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B \;:\; y = f(x)$, cioè $x f y$

Se $X \subseteq A$ $\quad f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ funzione immagine di X
Se $Y \subseteq B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$ contro-immagine di Y

Geometria

Lez. 2 - 10/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Applicazioni

Sia $f: A \to B$ un'app. [A dominio di f ; B codominio di f]

- f si dice **iniettiva** $\iff \forall x,y \in A \; (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$
  oppure $(x = y \impliedby f(x) = f(y))$

Esempio:

$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{x,y\} \qquad f: B \to A$, $x \mapsto 1$, $y \mapsto 2$ ✓

- f si dice **suriettiva** $\iff \forall b \in B, \; \exists a \in A : f(a) = b$

Esempio:

$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{x,y\} \qquad f: A \to B$, $1 \mapsto x$, $2 \mapsto x$, $3 \mapsto y$ ✓

- f si dice **biettiva** o **biunivoca** $\iff$ f è sia iniettiva che suriettiva, cioè:
  $\forall b \in B, \; \exists! \, a \in A : f(a) = b$

Esempio:

$\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

$$a \mapsto \begin{cases} -\frac{a+1}{2}, & \text{se } a \text{ dispari} \\ \frac{a}{2}, & \text{se } a \text{ pari} \end{cases}$$ è biettiva. ✓

DEF Si dice che A e B sono due insiemi **equipotenti** se esiste un'app. biettiva $f: A \to B$ e che A e B hanno la stessa cardinalità o potenza.

$|A| = |B| \qquad |\emptyset| = 0 \qquad \mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\} \quad n \in \mathbb{N} \qquad |\mathbb{N}_n| = n$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad f: \mathbb{N}_n \to A$, $1 \mapsto a_1$, $2 \mapsto a_2$, $\vdots$, $n \mapsto a_n$ app. biettiva

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

$\aleph_0$ aleph-zero

Insieme delle parti

Sia A un insieme. $P(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$ insieme delle parti di A.

$A=\{1,2,3\}$

$P(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

$\{1,2\} \in P(A) \qquad \{1,2\} \subseteq A$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ si può dimostrare per induzione.

$f: A \to B$

$f = \{(a,b) \mid f(a)=b\} \qquad f^{-1} = \{(b,a) \mid f(a)=b\}$

f^{-1} è un'app. $\iff \underbrace{\forall b \in B, \exists! a \in A}_{\Updownarrow \text{ } f \text{ è biettiva}} : b f^{-1} a$ cioè $(b,a) \in f^{-1}$

Funzione composta

Siano $f: A \to B \quad g: B \to C$ app.

$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$

$\forall a \in A$

L'applicazione composta è associativa: $h: C \to D \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

N.B. $g \circ f \neq f \circ g$ generalmente

$f: A \to A$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$

$g: A \to A$
$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto 2$

$g \circ f : A \to A \to A$
$1 \mapsto 2 \mapsto 1$
$2 \mapsto 3 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 1$

$\neq$

$f \circ g: A \to A \to A$
$1 \mapsto 3 \mapsto 2$
$2 \mapsto 1 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 3$

Invertibilità

DEF f si dice invertibile $\iff$ esiste: $f': B \to A$: $id_B = f \circ f'$, $id_A = f' \circ f$

Quindi, f è invertibile $\iff$ f è biettiva

$f: A \to B$ biett. $\iff f^{-1}: B \to A$ biett.

Principio d'induzione

$P(n)$ = "affermazione"

$|A| = n$

$P(n) = \quad |P(A)| = n$ "ipotesi"

(i) $\exists b \in \mathbb{N}$, $P(b)$ è vera "base di induzione"

(ii) $\forall n \geq b$, $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vera "passo induttivo"

Se (i) e (ii) valgono, allora $P(n)$ vera $\forall n \geq b$

Esempio:

(1) $b = 0 \quad A = \varnothing \quad |A| = 0$

$P(A) = \{\varnothing\} \quad |P(A)| = 1 = 2^0$

Hp:

$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad |P(A_n)| = 2^n$

Th:

$A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} \qquad |P(A_{n+1})| = 2^{n+1}$

$$P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_n)}_{2^n} \,\dot{\cup}\, \underbrace{\{ X \cup \{a_{n+1}\} \mid X \in P(A_n)\}}_{2^n}$$

$|P(A_{n+1})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

Ristrette e Ridotte

$A, B \neq \emptyset \quad f: A \to B$

$X \subsetneq A \qquad f_{|X}: X \to B$
$$a \mapsto f(a)$$

Esempio:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$$
$$x \mapsto x+1$$

$D = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ dispari} \}$

$P = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ pari} \}$

$f_{|D}: D \to \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x+1$ ristretta

$f_{|D}: D \to D$, $x \mapsto x+1$ NON ammesso

Se $Y \subseteq B : f(x) \subseteq Y$ posso ridurre anche il codominio.

Esempio:

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ristretta e ridotta

Operazioni

DEF $A, B, C \neq \emptyset$

Un app. $\perp : A \times B \to C$ si dice operazione binaria.

Si dice interna se $A = B = C$ $\quad \perp A \times A \to A$

$(a, a') \mapsto \perp(a, a') \qquad a \perp a'$

Si dice esterna con operatori in A se $B = C$

$V = \{ \overrightarrow{PQ} \mid P, Q \text{ punti dello spazio della geometria elementare} \}$

$\mathbb{R} \times V \to V$

$(\alpha, \overrightarrow{PQ}) \mapsto \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$

Ad esempio...

Se $\alpha = 0$, allora $0 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} = 0$

Se $\alpha > 0$, allora $\alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$ è il vettore libero con direzione e verso uguali a quelli di $\overrightarrow{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\overrightarrow{PQ}|$.

Se $\alpha < 0$, allora $\alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$ è il vettore libero con direzione uguale ma verso opposto a quello di $\overrightarrow{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\overrightarrow{PQ}|$.

Geometria

Lez. 3 - 15/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Operazioni interne: proprietà

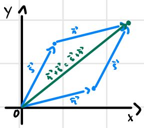
Sia $\perp$ un' operazione $A \times A \to A$.
Tale op.:

- è **commutativa** $\iff \forall a,b \in A \quad a \perp b = b \perp a$
- è **associativa** $\iff \forall a,b,c \in A \quad a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$
- ammette **neutro** $\iff \exists\, e \in A \quad \forall x \in A : \; x \perp e = x = e \perp x$
- se ammette neutro e, y si dice **simmetrico** di $x \in A \iff \exists\, y \in A : \; x \perp y = e = y \perp x$

Esempio:

$E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$

La somma tra due vettori gode di tutte le proprietà di cui sopra.



Il neutro altri non è che il vettore nullo, di lunghezza 0.
Il simmetrico di un generico vettore $\vec{r}$ è se stesso, ma con verso opposto, $-\vec{r}$. $(\vec{r} + (-\vec{r}) = 0)$

PROP $\perp : A \times A \to A$

(i) se $\perp$ ammette el. neutro, allora esso è unico.

(ii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se $x \in A$ ha simmetrico y, y è unico, non ha altri simmetrici.

(iii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se x e x' hanno simmetrico y e y' rispettivamente, allora $x \perp x'$ ha simmetrico $y' \perp y$.

DIM

(i) Siano e e e' due elementi neutri.
Allora $e \overset{\text{neutro dx}}{=} e \perp e' \overset{\text{neutro sx}}{=} e'$.

(ii) Siano y e z simmetrici di $x \in A$.

$y = y \perp e = y \perp (x \perp z) =$
$(y \perp x) \perp z = e \perp z = z$

(iii) $(y' \perp y) \perp (x \perp x') = e$
$(x \perp x') \perp (y' \perp y) = e$

$(y' \perp y) \perp (x \perp x') = y' \perp (y \perp (x \perp x'))$
$= y' \perp \underbrace{(y \perp x)}_{e} \perp x' = y' \perp x' = e$

Strutture Algebriche

DEF Una struttura algebrica è una n-pla costituita da insiemi non vuoti e operazioni definite su di essi.

Esempi: • $(Hom(A), \circ)$ • $(V, \mathbb{R}, \cdot)$ • $(V, \mathbb{R}, \cdot, +)$

$(A, \perp)$ $\quad \perp : A \times A \to A$

DEF Si dice gruppo se l'op. $\perp$ è associativa, ammette neutro, e $\forall x \in A$ esiste il simmetrico.

Si dice gruppo abeliano se è anche commutativo.

Esempio:

- $Hom(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ appl.} \}$
  $(Hom(A), \circ)$ non è un gruppo.
- Lo diventa se considero:
  $G(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ biett.} \} \subseteq Hom(A)$
  $(G(A), \circ)$ gruppo non abeliano.

- $(\mathbb{R}, \cdot)$ non è un gruppo, ma $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

DEF $K \neq \emptyset$, $\quad + : K \times K \to K \qquad \cdot : K \times K \to K$

$(K, +, \cdot)$ si dice campo se:

- $(K, +)$ è un gruppo abeliano, con 0 come neutro;
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano;
- $\forall a, b, c \in K \qquad a \cdot (b+c) = ab + ac \qquad (a+b) \cdot c = ac + bc$.

Alternativamente, se:

$(K, +, \cdot)$ è un anello unitario, commutativo, ogni el. non nullo ammette simm. rispetto a $\cdot$.

$(K, +)$ è un gruppo abeliano, $\cdot$ è assoc. e distr.

Esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{R}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{C}, +, \cdot)$

PROP Siano $a, b \in K$.

$ab = 0 \implies a = 0 \lor b = 0$

DIM Pongo $a \neq 0 \implies \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$.

$b = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(0) = 0$

∎

$K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ campo

$+ : \boxed{K \times K \to K}$

$(0,0) \mapsto 0$

$(0,1) \mapsto 1$

$(1,0) \mapsto 1$

$(1,1) \mapsto 0$

$\cdot : \boxed{K \times K \to K}$

$(0,0) \mapsto 0$

$(0,1) \mapsto 0$

$(1,0) \mapsto 0$

$(1,1) \mapsto 1$

Spazi Vettoriali

DEF $V \neq \emptyset$ $\quad (K, +, \cdot)$ campo

$\underset{+}{\overset{\neq}{\boxplus}} : \boxed{V \times V \to V}$ $\qquad \underset{\cdot}{\overset{\neq}{\boxdot}} : \boxed{K \times V \to V}$ $\qquad$ $\boxed{\text{scalare} \times \text{vettore} \to \text{vettore}}$

$(V, K, \boxplus, \boxdot)$ si dice **spazio vettoriale** su K :<=>

0. $(V, \boxplus)$ gruppo abeliano
1. $\forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V : \ \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$
2. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : \ (\alpha + \beta) \boxdot u = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : \ (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u)$
4. $\underset{\text{neutro risp. a } \cdot}{1 \in K}, \ \forall u \in V : \ 1 \boxdot u = u$

Esempio:

- $E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$
  $+ : E(O) \times E(O) \to E(O)$ $\quad$ vettori applicati
  $\cdot : \mathbb{R} \times E(O) \to E(O)$
- $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ vettori liberi
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

Sono esempi <u>tipici</u> di due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

Polinomi su campi

$(K, +, \cdot)$ campo

$$K[x] = \{\underbrace{a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n}_{p(x)} \mid a_0, \dots, a_n \in K\}$$

grado $(p(x)) = \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{se } p(x) \neq 0 \\ -1 \text{ opp. qualsiasi grado}, & \text{se } p(x) = 0 \end{cases}$

$\boxplus = + : \boxed{K[x] \times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x-x^3, -2+x^2+2x^3+x^4) \mapsto 1+2x+x^2+x^3+x^4$

$\boxdot = \cdot : \boxed{K[x] \times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x, -2+x^2) \mapsto -6-4x+3x^2+2x^3$

$(K, +, \cdot)$ campo $\quad n \in \mathbb{N}^* \quad K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}}$

$\boxplus : \boxed{K^n \times K^n \to K^n}$

$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mapsto (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\boxdot : \boxed{K \times K^n \to K^n}$

$(\alpha, (a_1, \dots, a_n)) \mapsto (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

PROP $(K^n, K, \boxplus, \boxdot)$ è spazio vettoriale su K.

DIM per $n=2$

0. $(K^2, \boxplus)$ gr. abeliano

comm. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

assoc. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$ Come per la commutatività, si ricava da $+$. ✓

neutro $(0,0)$: $\forall (a_1, a_2) \in K^2$, $(a_1, a_2) \boxplus (0,0) = (a_1, a_2) = (0,0) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

simmet. $\forall (a_1, a_2), \exists (a_1', a_2') \in K^2 \quad (a_1, a_2) \boxplus (a_1', a_2') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2') = (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) = (0,0)$ ✓

1. $\forall \alpha \in K, \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$\alpha \boxdot ((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \overset{def}{=} \alpha \boxdot (a_1+b_1, a_2+b_2) \overset{def}{=} (\alpha(a_1+b_1), \alpha(a_2+b_2)) \overset{\text{distr.}}{=} (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) \overset{def}{=}$

$= (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\alpha b_1, \alpha b_2) \overset{def}{=} (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\alpha \boxdot (b_1, b_2))$ ✓

2. $\forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha + \beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} ((\alpha+\beta) \cdot a_1, (\alpha+\beta) \cdot a_2) \overset{\text{distr.}}{=} (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) \overset{def}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def}{=}$

$= (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

3. $\forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha \cdot \beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} (\alpha \beta a_1, \alpha \beta a_2) \overset{\text{def e assoc.}}{=} \alpha \boxdot (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def}{=} \alpha \boxdot (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

4. $1 \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$1 \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) \overset{\text{neutro molt.}}{=} (a_1, a_2)$ ✓

Geometria

Lez. 4 - 17/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Spazi Vettoriali: proprietà aritmetiche

PROP

1. $\forall \alpha \in K,\ \forall u \in V:\ \alpha u = \underline{o} \iff \alpha = 0 \lor u = \underline{o}$:= vettore nullo
2. $\forall \alpha \in K,\ \forall u \in V:\ -\alpha u = (-\alpha)u = \alpha(-u)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall u \in V \setminus \{\underline{o}\}:\ \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$
4. $\forall \alpha \in K \setminus \{0\},\ \forall u, w \in V:\ \alpha u = \alpha w \Rightarrow u = w$

DIM

1. Caso $\alpha = 0$

"<=": $0u = (0+0)u \overset{\text{"distr."}}{=} 0u + 0u \Rightarrow \underbrace{0u + (-0u)}_{\text{vettore nullo}} = 0u + \underbrace{(0u + (-0u))}_{\text{vettore nullo}} \Rightarrow \underline{o} = 0u + \underbrace{\underline{o}}_{\text{neutro}} = 0u \Rightarrow \underline{o} = 0u$.

Ragionamento simile per $u = \underline{o}$.

"=>": se $\alpha \neq 0$, $\exists \alpha^{-1} \in K$. Allora $\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}\underline{o} \overset{\text{"associal."}}{\Rightarrow} (\alpha^{-1} \cdot \alpha)u = \underline{o} \Rightarrow u = \underline{o}$.

2. $\alpha u - \alpha u = \underline{o}$, ovvio.

$\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0u = \underline{o}$

$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha(u + (-u)) = \alpha \underline{o} = \underline{o}$, quindi $(-\alpha)u = -\alpha u = \alpha(-u)$.

3. $\alpha u = \beta u$, $u \neq \underline{o}$

$\alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha u + (-\beta u) = \beta u + (-\beta u) \Rightarrow \alpha u + (-\beta)u = \underline{o} \Rightarrow (\alpha + (-\beta))u = \underline{o} \overset{u \neq \underline{o} \text{ per ipotesi}}{\Rightarrow} \alpha + (-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

4. $\alpha u = \alpha w$, $\alpha \neq 0$

$\alpha u = \alpha w \Rightarrow \alpha u + (-\alpha w) = \alpha w + (-\alpha w) \Rightarrow \alpha u + \alpha(-w) = \underline{o} \Rightarrow \alpha(u + (-w)) = \underline{o} \overset{\alpha \neq 0 \text{ per ipotesi}}{\Rightarrow} u + (-w) = \underline{o} \Rightarrow u = w$

Matrici

Sia $X \neq \emptyset$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$

$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow X$

$(i, j) \longmapsto A((i,j)) = a_{ij} = a^i_j$

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ a^3_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

i posizione della riga

j posizione della colonna

DEF Un'applicazione di questo tipo si dice matrice su X di tipo $m \times n$ $[m, n]$.

Esempio:

$X = \{\square, \Delta, \times, 2\}$ $m = 3$ $n = 2$

$A : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} \longrightarrow X$

$(1,1) \mapsto \Delta$ $(1,2) \mapsto \times$

$(2,1) \mapsto \square$ $(2,2) \mapsto \times$

$(3,1) \mapsto 2$ $(3,2) \mapsto \times$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \Delta & \times \\ \square & \times \\ 2 & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

DEF Sia $(K, +, \cdot)$ un campo.

$m, n \in \mathbb{N}^*$ $M_{m,n}(K) = \{A \mid A \text{ matrice di tipo } m \times n \text{ su } K\}$.

Se $m = n$, con $M_n(K)$ indichiamo matrici quadrate.

$+$: $M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$

$((a^i_j), (b^i_j)) \longmapsto (a^i_j + b^i_j)$

$\cdot$: $K \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$

$(\alpha, (a^i_j)) \longmapsto (\alpha a^i_j)$

$(M_{m,n}(K), +)$ è un gruppo abeliano. $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ è il neutro.

Il simmetrico ha gli stessi elementi, nelle stesse posizioni, ma opposti.

$(M_{m,n}(K), K, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

Sottospazio Vettoriale

$(V, K, +, \cdot)$

Sia $W \subseteq V$.

W si dice **linearmente chiuso** $:\Leftrightarrow$

- $W \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in W : u+v \in W$
- $\forall \alpha \in K, \forall u \in W : \alpha u \in W$

Esempio:

$\mathbb{R}^2 \qquad U = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \neq \emptyset$

$+: (\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha+\beta, 0) \in U$

$\cdot: (\alpha, 0) \cdot (\beta, 0) = (\alpha\beta, 0) \in U$

Se $W \subseteq V$ è lin. chiuso, allora posso considerare:

$+_{|W} : W \times W \to W$, $(u, v) \mapsto u+v \in W$ $\qquad \cdot_{|W} : K \times W \to W$, $(\alpha, u) \mapsto \alpha u \in W$ $\qquad$ operazioni ristrette

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ linearmente chiuso tale che $(W, K, +_{|W}, \cdot_{|W})$ è uno spazio vettoriale. $\leftarrow$ E se fosse superflua questa condizione?

Teorema. $(V, K, +, \cdot) \qquad W \subseteq V$

W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow W$ è linearmente chiuso.

DIM " $\Rightarrow$ " OVVIA! È nella definizione di sottospazio vettoriale.

" $\Leftarrow$ " Per ipotesi, possiamo considerare le op. ristrette $+_{|W}$ e $\cdot_{|W}$.

Esse ereditano tutte le proprietà di $+$ e $\cdot$. Rimane da dimostrare che $\underline{0} \in W$ e $\forall u \in W, -u \in W$.

Allora, in quanto W linearmente chiuso, $\forall \alpha \in K, \forall u \in W : \alpha u \in W$.

$\alpha = 0 \Rightarrow \forall u \in W, \alpha u \in W$, cioè $0u = \underline{0} \in W$.

$\alpha = -1 \Rightarrow \forall u \in W, \alpha u \in W$, cioè $(-1)u = -u \in W$. ▨

Quindi, è sufficiente l'ipotesi che W sia linearmente chiuso per essere anche sottospazio vettoriale di V.

Esempio:

$(K[x], K, +, \cdot) \qquad n \in \mathbb{N}$

$K[x]_n = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_n \neq 0 \}$ non linearmente chiuso

$n = 3$, $K = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} 1 + 2x^3 \; + \\ 4 - 2x^3 \; = \\ \hline 5 \end{array} \notin \mathbb{R}[x]_3$$

Con $K[x]_{\leq n}$ sarebbe linearmente chiuso.

Combinazioni e Chiusure Lineari

DEF ~ Con le usuali notazioni ~

Sia $(u_1, \dots, u_n)$ una n-pla di vettori di V.

Una combinazione lineare di $(u_1, \dots, u_n)$ è un vettore del tipo:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \quad , \quad \text{dove } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$$

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sottoinsieme di n vettori di V, una sua combinazione lineare è una comb. lin. di $(v_1, \dots, v_n)$.

Esempio:

$\mathbb{R}^3 \quad \{(1,0,1), (1,1,0)\} = S$

è vero che il vettore $(2,1,1)$ è una comb. lin. di S ?

$? \ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (2,1,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha) \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \checkmark$

Combinazioni lineari di $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ generano tutte le possibili terne (a_1, a_2, a_3).

DEF $(V, K, +, \cdot)$ e $X \subseteq V$

La chiusura lineare di X è:

- se $X = \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$
- se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \mid t \in \mathbb{N}^* \wedge \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K \ \wedge \ u_1, \dots, u_t \in X\}$

PROP $(V, K, +, \cdot) \qquad X \subseteq V$

(1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale

(2) Se W è un sottosp. vettoriale di V tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM Coming soon

pag. 24!

Sistema di Generatori

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Un sottoinsieme $S \subseteq V$ si dice sistema di generatori di V $:\iff \mathcal{L}(S) = V$,
cioè ogni vettore di V si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S.

Esempio:

$S = \{(1,0), (0,1)\}$ $\qquad \mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$

$B = \{(1,1), (-1,1), (3,3)\}$ $\qquad \mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{L}(V) = V$

DEF $(V, K, +, \cdot)$

V si dice finitamente generato se ammette un sistema di generatori finito.

Esempio:

$\mathbb{R}^3 \quad \mathcal{L}((1,1,2), (0,-1,1)) = \{\alpha(1,1,2) + \beta(0,-1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$K[x]$ NON è finitamente generato!

OSS $(V, K, +, \cdot)$

Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un sistema di generatori di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$.
Definiamo adesso $T = S \cup \{u\}$ con $u \notin S$.
T è ancora un sistema di generatori di V.

~ È sufficiente moltiplicare u per lo scalare nullo. ~

Geometria

Lez. 5 - 22/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Chiusure Lineari pt.1

Prima di procedere con la dimostrazione di un'importante proposizione riguardo le chiusure lineari, è bene riportare alla mente di cosa stiamo trattando.

DEF $(V, K, +, \cdot)$ e $X \subseteq V$

La chiusura lineare di X è:

- se $X = \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$
- se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t \mid t \in \mathbb{N}^* \wedge \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K \wedge u_1, \ldots, u_t \in X\}$

Si tratta, dunque, di tutte le possibili combinazioni lineari con scalari di K e vettori di X.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $X \subseteq V$

(1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale

(2) Se W è un sottosp. vettoriale di V tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM

(1) $\forall v \in X$, $v = 1 \cdot v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \subseteq \mathcal{L}(X)$

stiamo usando il teorema a pag. 20

Ora resta da dimostrare che $\mathcal{L}(X)$ sia un sottospazio vettoriale, e cioè che sia linearmente chiuso.

$\underline{0} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \neq \emptyset$, banale (basta moltiplicare ogni vettore di X per lo scalare nullo).

$\forall u, u' \in \mathcal{L}(X)$: $\exists t \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K, \exists u_1, \ldots, u_t \in X : u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t$ e

$\exists t' \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{t'} \in K, \exists u'_1, \ldots, u'_{t'} \in X : u' = \alpha'_1 u'_1 + \ldots + \alpha'_{t'} u'_{t'}$

Allora, $u + u' = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t + \alpha'_1 u'_1 + \ldots + \alpha'_{t'} u'_{t'} \in \mathcal{L}(X)$ $\Rightarrow \mathcal{L}(X)$ stabile rispetto a $+$.

$\forall \beta \in K, \forall u \in \mathcal{L}(X) : \beta \cdot u = \beta(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t) = \beta(\alpha_1 u_1) + \ldots + \beta(\alpha_t u_t) \overset{\text{associat.}}{=} (\beta\alpha_1)u_1 + \ldots + (\beta\alpha_t)u_t \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X)$ stabile rispetto a $\cdot$, quindi la dimostrazione di (1) è conclusa.

(2) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V.

Th: $X \subseteq W \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$, cioè $\forall u \in \mathcal{L}(X)$, $u \in W$.

W è linearmente chiuso per ipotesi.

$u \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K, \exists u_1, \ldots, u_t \in X : u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_1 u_1 \in W \\ \vdots \\ u_t \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_t u_t \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_t u_t \in W$$

, perché W linearmente chiuso.

E con questo la dimostrazione può dirsi conclusa. ▨

Chiusure Lineari pt.2

OSS Adesso possiamo dire che X è un sistema di generatori di $\mathcal{L}(X)$.

Corollario. Siano $S, T \subseteq V$.
Allora $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \iff T \subseteq \mathcal{L}(S) \wedge S \subseteq \mathcal{L}(T)$.

DIM

"$\Rightarrow$" $S \subseteq \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \Rightarrow S \subseteq \mathcal{L}(T)$
$T \subseteq \mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S) \Rightarrow T \subseteq \mathcal{L}(S)$

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(S) \\ S \subseteq \mathcal{L}(T) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$ ∎

Dalla PROP (2)

Esempio:

- $\mathbb{R}^3$ $\quad S = \{\underbrace{(1,0,1)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{u_2}\}$ $\quad T = \{\underbrace{(1,1,2)}_{v_1}, \underbrace{(2,-1,1)}_{v_2}, \underbrace{(0,2,2)}_{v_3}\}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_2 = 2u_1 + (-1)u_2 \\ v_3 = 2u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow T \subseteq \mathcal{L}(S)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = \frac{1}{2} v_3 \\ v_1 = u_1 + \frac{1}{2} v_3 \Rightarrow u_1 = v_1 - \frac{1}{2} v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow S \subseteq \mathcal{L}(T)$$

Quindi:
$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \neq V$

- $\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{\underbrace{(1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,1)}_{u_2}\}$ $\quad T = \{\underbrace{(2,1)}_{v_1}\}$

$\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2$ $\quad T \subseteq \mathcal{L}(B)$ ma $B \nsubseteq \mathcal{L}(T)$ perché $\nexists \alpha \in \mathbb{R}: (1,0) = \alpha(2,1)$.
Allora $\mathcal{L}(B) \neq \mathcal{L}(T)$
Siano ora $X = \{\underbrace{(1,1)}_{w_1}, \underbrace{(0,1)}_{w_2}, \underbrace{(2,2)}_{w_3}\}$ e $X' = X \setminus \{(2,2)\}$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = w_1 + (-w_2) \\ u_2 = w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B \subseteq \mathcal{L}(X)$$

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq \mathcal{L}(X) \\ X \subseteq \mathcal{L}(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(X)$$

banale

Chiaramente, anche $\mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^2$

Linearmente (in)dipendente

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Sia $(u_1, \dots, u_n)$ una n-pla di vettori di V. Allora $(u_1, \dots, u_n)$ si dice **linearmente dipendente** $:\iff$ esistono n scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ NON tutti nulli $: \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \underline{0}$.

Altrimenti, $(u_1, \dots, u_n)$ si dice **linearmente indipendente**.

OSS Se nella n-pla ci sono due vettori u_1 e u_2 uguali, allora è lin. dipendente.

$$1 \cdot u_1 + (-1) u_2 + 0 \cdot u_3 + \dots + 0 \cdot u_n = \underline{0}$$

Se la n-pla ha vettori a due a due distinti, considero l'insieme $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

La n-pla è lin. indipendente $\iff \left(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0\right)$.

Il vettore si scrive come comb. lin. nulla dei vettori $u_1, \dots, u_n$ SOLO mediante scalari nulli.

Esempio:

- $K[x]$ $\{1+x, x+x^2\}$ è linearmente indipendente.

  $\alpha, \beta \in K = \mathbb{R}$

  $\alpha(1+x) + \beta(x+x^2) = 0 \Rightarrow \alpha + (\alpha+\beta)x + \beta x^2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ Ma allora $\alpha = 0 = \beta$, quindi è lin. indipendente

- V vettori liberi $K = \mathbb{R}$. Siano $u, v \in V \setminus \{\underline{0}\}$

  $\{u, v\}$ lin. dip. $\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli $: \alpha u + \beta v = 0$

  Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha u + \beta v) = \underline{0} \Rightarrow u + \alpha^{-1}\beta v = \underline{0}$

  $u + (\alpha^{-1}\beta) v = \underline{0} \Rightarrow u = \underbrace{-(\alpha^{-1}\beta)}_{\lambda} v \Rightarrow u \,/\!/\, v$ u e v sono vettori liberi paralleli

  Quindi:

  $\{u, v\}$ lin. dip. $\Rightarrow u \,/\!/\, v$, ma è vera anche l'implicazione inversa $\Leftarrow$?

  Siano $\hat{u} = \frac{1}{|u|} u$ e $\hat{v} = \frac{1}{|v|} v$ versori rispettivamente di u e v. $\hat{u} \,/\!/\, u$ e $\hat{v} \,/\!/\, v$ per definizione.

  Se $u \,/\!/\, v$, allora $\hat{u} \,/\!/\, \hat{v}$, quindi $\hat{u} = \pm \hat{v}$

  scalare

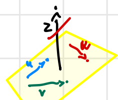
  Allora $u = |u|\hat{u} = \pm |u| \hat{v} = \pm |u| \frac{1}{|v|} v \Rightarrow u = \underbrace{\pm \frac{|u|}{|v|}}_{\beta} v \Rightarrow \underset{\neq 0}{1} \cdot u + \underset{\neq 0}{(-\beta)} v = 0 \Rightarrow \{u, v\}$ è lin. dipendente

OSS Sia $X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. $\underline{0} \in X \Rightarrow X$ è lin. dipendente.

$\{\underline{0}\}$ è lin. dipendente; $u \neq \underline{0} \Rightarrow \{u\}$ è lin. indipendente.

V vettori liberi $K = \mathbb{R}$

u, v e w sono complanari. z, invece, non lo è.



$\forall u, v \in V$, $\{u, v\}$ lin. dip. $\iff u \,/\!/\, v$

$\forall u, v, w \in V$, $\{u, v, w\}$ lin. dip. $\iff u, v, w$ sono complanari, cioè si possono disegnare sullo stesso piano.

... e con insiemi infiniti?

DEF $(V, K, +, \cdot)$ $X \subseteq V$ con $|X|$ qualsiasi

X si dice lin. dipendente se esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq X$ che è lin. dipendente.

X si dice lin. indipendente se per ogni sottoinsieme finito $S \subseteq X$, S è lin. indipendente.

Teorema.

$(V, K, +, \cdot)$ $X \subseteq V$

X è lin. dipendente $\iff \exists u \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$

DIM

Caso $|X| \leq 1$ NOTA: $X = \emptyset \Rightarrow X$ è lin. indipendente

$X = \{u\}$ dip. $\iff u = \underline{0}$ $X \setminus \{u\} = \emptyset$ $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\} = \mathcal{L}(\emptyset)$

Caso $|X| \geq 2$

"$\Rightarrow$" Per ipotesi, esiste un sottoinsieme finito $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq X$ che è lin. dipendente.

Quindi $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ NON tutti nulli : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = \underline{0}$

Supponiamo $\alpha_1 \neq 0$. Allora $\alpha_1^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow u_1 = -(\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2 - \dots - (\alpha_1^{-1}\alpha_t)u_t \in \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$

Ma allora $(X \setminus \{u_1\}) \cup \{u_1\} \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\}) \overset{\text{PROP (2)}}{\Rightarrow} \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$, $\supseteq$ è banale, quindi $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$

"$\Leftarrow$" Per ipotesi, $\exists u \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$ quindi $u \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$

$\Rightarrow \exists u_2, \dots, u_t \in X \setminus \{u\}$ $\wedge$ $\exists \alpha_2, \dots, \alpha_t \in K$: $u = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t$

$\Rightarrow \underline{0} = \underbrace{(-1)}_{\neq 0} u + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow \{u, u_2, \dots, u_t\} \subseteq X$ è lin. dip. $\Rightarrow X$ è lin. dipend. $\blacksquare$

Esempio:

$K[x]$ $A = \{1+x, 1-x, 2+x, x^2\}$

$\alpha(1+x) + \beta(1-x) + \gamma(2+x) + \delta x^2 = 0 \iff (\alpha + \beta + 2\gamma) + (\alpha - \beta + \gamma)x + \delta x^2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2}\gamma \\ \beta = -\frac{1}{2}\gamma \\ \delta = 0 \end{cases}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

Se $\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow (2+x)\cdot 1 = \frac{3}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) + 0x^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 2+x$.

Sia ora $A' = A \setminus \{1+x\}$

A' è tale che:

$\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$.

N.B. Avrei potuto scegliere indifferentemente uno qualsiasi tra $\{1+x, 1-x, 2+x\}$.

Geometria

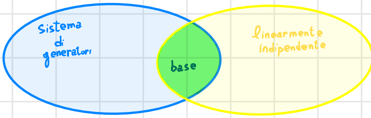
Lez. 6 - 24/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Base di uno Spazio Vettoriale

DEF Una base di V è un sistema di generatori linearmente indipendente.



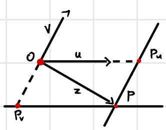
Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e K^n uno spazio vettoriale numerico.
Sia ora $B = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), (0,0,\dots,1)\}$ $\quad |B| = n$
Allora B si dice base canonica di K^n.

Similmente, altri esempi di basi canoniche sono:

- $M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canonica per matrici di tipo $m \times n$;
- $K[x]$ $\quad \{1, x, \dots, x^n, \dots\} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base canonica per polinomi su un campo;
- $K[x]_{\leq r}$ $\quad r \in \mathbb{N}$ $\quad \{1, x, \dots, x^r\}$ base canonica per polinomi su un campo di cardinalità $r+1$;
- V vettori liberi $\quad \{u, v, w\}$ con u, v, w non complanari base canonica per vettori nelle 3 dimensioni.

Proviamo a capire meglio le basi canoniche dei vettori con un esempio a due dimensioni:

$V_H = \{u \in V \mid u \parallel H\}$ è linearmente chiuso. Si tenga presente che H indica il piano.
Siano $u, v \in V_H$, $u \not\parallel v$ $\qquad \mathcal{L}(u,v) = V_H$ $\quad \{u,v\}$ base canonica



$\overrightarrow{OP_u} \parallel u \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP_u} = \alpha u$

$\overrightarrow{OP_v} \parallel v \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP_v} = \beta v$

$z = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_u} + \overrightarrow{OP_v} = \alpha u + \beta v$

In altre parole, se ho due vettori u, v non nulli e non paralleli, posso sempre trovare il modo di scrivere un qualsiasi altro vettore come combinazione lineare di u e v.
Nello spazio a tre dimensioni la situazione è analoga, e la richiesta è che i 3 vettori u, v, w non siano tra loro complanari, cioè -ricordiamo- non si possono disegnare sullo stesso piano.

Basi e Sistemi di generatori

Teorema. $K[x]$ non ha sistemi di generatori finito.
Cioè, $\forall S \subseteq K[x] : |S| = n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}(S) \subsetneq K[x]$

DIM $S = \{p_1(x), \dots, p_n(x)\} \qquad d_1 = gr(p_1), \dots, d_n = gr(p_n) \qquad d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \quad gr(\alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n) \leq d$

Ma allora sicuramente $x^{d+1} \notin \mathcal{L}(S)$, ma $x^{d+1} \in K[x]$.

Quindi $\mathcal{L}(S) \subsetneq K[x]$, cioè è incluso propriamente.

Teorema. (di estrazione di una base)
$(V, K, +, \cdot)$ uno sp. vett. finitamente generato.
Sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un suo sistema di generatori finito.
Allora S contiene una base B di V.

DIM Se S è lin. indipendente, allora abbiamo $B = S$.

Altrimenti, usando il teorema a pag. 27: $\exists u \in S : \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{u\})$.

Poniamo $S' = S \setminus \{u\}$. Se supponiamo $u = u_n$, allora $S' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Adesso è sufficiente reiterare lo stesso ragionamento su S' fino ad ottenere un insieme lin. indipendente. Se esso è $\emptyset$, allora $V = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

Esempio:

- $K[x] \qquad S = \{1+x, 1-x, 2+x, x^2\} \qquad W = \mathcal{L}(S) = K[x]_{\leq 2}$
  S è lin. dipendente (vedasi pag. 27).
  $S' = S \setminus \{1+x\}$ è lin. indipendente, quindi l'algoritmo termina.

- $\mathbb{R}^2 \qquad S = \{(1,1), (2,2), (2,-1), (1,2)\}$
  $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2 \qquad \overset{2}{\alpha}(1,1) + \overset{-1}{\beta}(2,2) + \overset{0}{\gamma}(2,-1) + \overset{0}{\delta}(1,2) = (0,0)$
  Considero allora $S' = S \setminus \{(2,2)\}$ e reitero il procedimento.
  $$\alpha(1,1) + \beta(2,-1) + \gamma(1,2) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 3\beta \\ \alpha = -5\beta \end{cases}$$
  S' è ancora lin. dipendente. Infatti: $(2,-1) = 5(1,1) - 3(1,2)$.
  Considero allora $S'' = S' \setminus \{(2,-1)\}$
  S'' è lin. indipendente? sì. Infatti $\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$
  $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S'') \wedge S''$ lin. indip. $\Rightarrow S''$ è base di $\mathbb{R}^2$

Steinitz: lemma e conseguenze

Lemma di Steinitz.

Sia $(V, K, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema di generatori finito di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$.
Se $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ è un altro sotto-insieme di V e $|X| = m > n = |S|$, allora X è linearmente dipendente.

DIM Coming Soon  pag. 36!

Esempio: $\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{(1,0), (0,1)\}$ $\qquad X = \{(1,7), (\pi, \sqrt{2}), (100, 12!)\}$

$|B| = 2 < 3 = |X| \Rightarrow X$ è lin. dipendente

Corollario.

$(V, K, +, \cdot)$ sp. vett. f.g. $\quad$ Sia $S \subseteq V : \mathcal{L}(S) = V$.
Allora, $T \subseteq V : T$ lin. indipendente $\Rightarrow |T| \leq |S|$.

DIM $|T| > |S| \Rightarrow T$ è lin. dipendente, dal lemma di Steinitz.
Ma allora, ricordando una tautologia $[(\varphi \Rightarrow \sigma) \Leftrightarrow (\neg\varphi \Leftarrow \neg\sigma)]$,
abbiamo che: $|T| \leq |S| \Leftarrow T$ è linearmente indipendente.

N.B. Non si tratta di una doppia-implicazione!!

$\mathbb{R}^3$ $\quad B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\qquad X = \{(1,1,1), (2,2,2)\}$

$|X| \leq |B|$, ma X è lin. dipendente.

Teorema (di equipotenza di basi)

$(V, K, +, \cdot)$ f.g.
Tutte le basi di V sono equipotenti.

DIM Esiste un sistema di generatori finito S di V.
Per il teorema di estrazione di una base, esiste una base $B \subseteq S$, quindi finita, di V.
Sia B' un'altra base di V. $\quad B'$ lin. indip. per definizione $\overset{\text{corollario}}{\Rightarrow} |B'| \leq |B|$.
B' sistema di generatori $\wedge$ B lin. indip. $\overset{\text{corollario}}{\Rightarrow} |B| \leq |B'|$.
Ma allora $(|B| \leq |B'|) \wedge (|B'| \leq |B|) \Rightarrow |B| = |B'|$.

Dimensione di uno Spazio Vettoriale

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad X = \{u_1, \dots, u_n\}$ lin. indip. $\subseteq V$.
Se $\exists u \in V : u \notin \mathcal{L}(X)$, allora $X \cup \{u\}$ è lin. indip.

DIM Per assurdo
$X \cup \{u\}$ è lin. dip. Allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ non tutti nulli : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \overset{\alpha \neq 0}{\alpha} u = \underline{0}$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = 0 \Rightarrow u = (-\alpha^{-1}\alpha_1)u_1 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)u_n \in \mathcal{L}(X)$.

Ma $u \notin \mathcal{L}(X)$ per ipotesi, quindi IMPOSSIBILE! Allora $X \cup \{u\}$ deve essere ancora lin. indip. ▨

Esempio :
$\mathbb{R}^2$ $\quad X = \{(1,1)\}$, $\mathcal{L}(X) \neq \mathbb{R}^2$ $\qquad (1,0) \in \mathbb{R}^2 \wedge (1,0) \notin \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \cup \{(1,0)\} = \{(1,1), (1,0)\}$ è lin. indip.

DEF $(V, K, +, \cdot)$ f.g.
La dimensione di V è il numero di vettori di una sua BASE.

OSS Se $\dim(V) = n$ e $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ è una base, allora $n = t$.

PROP Se $t = n \wedge$ (S è lin. indip. $\vee$ S è un sist. di gen.) $\Rightarrow$ S è una base.
In altre parole : Sia $S \subseteq V$ e sia $|S| = n = \dim V$.
Allora S è lin. indipendente $\Leftrightarrow$ S è sist. di generatori.

DIM "$\Rightarrow$" Per assurdo S non è sistema di generatori, ossia $\mathcal{L}(S) \subsetneq V \Rightarrow \exists u \in V : u \notin \mathcal{L}(S)$.
Dalla PROP precedente, ottengo che $S \cup \{u\}$ è lin. indip.
$|S \cup \{u\}| = n+1$ ⤳ ASSURDO per il corollario al lemma di Steinitz!

"$\Leftarrow$" Per assurdo S è lin. dipendente $\Rightarrow \exists u \in S : \mathcal{L}(S) = V = \mathcal{L}(S \setminus \{u\})$.
Per il teorema di estrazione di una base, $\exists B \subseteq S \setminus \{u\}$: B sia una base.
Ma $|S \setminus \{u\}| = n-1$ ⤳ ASSURDO di nuovo per il corollario e le ipotesi ! ▨

Esempio :
- $\mathbb{R}^2$ $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$ $\quad \{u, v\}$ lin. indip. $\Leftrightarrow \{u, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^3$ $\quad \{(1,1,0), (0,1,1), (3,0,0)\}$ è lin. indip., quindi è anche una base.
- Quale dei seguenti sottoinsiemi è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$? $\quad B = \{1, x\}$ $\quad \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$

  $\{1+x, \cancel{2+2x}\}$ lin. dip. $\quad \{3, 2+x, \cancel{5-x}\}$ $\overset{\text{Card.}}{> |B|}$ $\quad \{\cancel{2+x}\}$ $\overset{\text{Card.}}{< |B|}$ $\quad \{\underline{0}, \cancel{1+x}\}$ lin. dip. $\quad \{1+x, 1-x\}$ ✓

Geometria

Lez. 7 - 29/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Basi e dimensioni

Teorema. (di completamento a una base)

$(V, K, +, \cdot)$ Siano $\dim V = n$ e $X = \{u_1, \dots, u_t\}$ lin. ind.
Allora esistono $u_{t+1}, \dots, u_n \in V$: $X \cup \{u_{t+1}, \dots, u_n\}$ è una base.

DIM Per il corollario al lemma di Steinitz si ha $t \leq n$.

Se $t = n$, allora X è anche un sistema di generatori, per cui è una base. $n - t = 0$

Se $t < n$, allora X non è una base, in particolare non è un sistema di generatori di V: $\mathcal{L}(X) \subsetneq V \Rightarrow \exists u_{t+1} \in V \setminus \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \cup \{u_{t+1}\}$ lin. ind.

Se $|X \cup \{u_{t+1}\}| = n$, allora si tratta di una base di V. Altrimenti, vuol dire che $|X \cup \{u_{t+1}\}| < n$.

Posso quindi reiterare il ragionamento fino ad ottenere un sistema di generatori, che è anche lin. ind., e quindi una base. ▨

Esempio:

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad \dim \mathbb{R}[x] = 3$ $\quad S = \{x + x^2\}$ lin. ind.

$x + 1 \notin \mathcal{L}(S) \Rightarrow S' = S \cup \{x+1\}$ $\quad |S'| = 2 < 3$, allora continuo.

$1 \notin \mathcal{L}(S') \Rightarrow S'' = S' \cup \{1\} = \{x + x^2, x+1, 1\}$ è lin. ind. ed è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n$

$W \subseteq V$ sottosp. vett. di V:

(i) $\dim W = 0 \iff W = \{\underline{0}\}$;

(ii) $\dim W \leq \dim V = n$;

(iii) $\dim W = \dim V \iff W = V$.

DIM (i) "$\Rightarrow$" Per ipotesi, $\emptyset$ è una base di $W = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

"$\Leftarrow$" $W = \{\underline{0}\}$ $\quad S = \{\underline{0}\}$ è lin. dip. $\Rightarrow \underline{0} \in \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\underline{0}\}) = \mathcal{L}(\emptyset) \Rightarrow \emptyset$ è una base $\Rightarrow \dim\{\underline{0}\} = 0$.

(ii) Sia B_W una base di W. Allora B_W è un sottoinsieme lin. ind. di V $\overset{\text{corollario al lemma di Steinitz}}{\Rightarrow} \dim W = |B_W| \leq \dim V = n$.

(iii) "$\Leftarrow$" Banale.

"$\Rightarrow$" Sia B_W una base di W. Allora $B_W \subseteq V$ lin. ind. $\quad |B_W| = \dim W = \dim V$.

Allora B_W è una base anche di V, cioè: $W = \mathcal{L}(B_W) = V$, abbiamo ottenuto la tesi. ▨

Basi Ordinate

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\dim V = n$

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ORDINATA di V. Allora:

$\forall u \in V,\ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in K^n : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

DEF Si dice che gli scalari $x_1, \dots, x_n$ sono le componenti di un vettore in $\mathcal{B}$ e che $(x_1, \dots, x_n)$ è la n-pla delle componenti di u in $\mathcal{B}$.

DIM Per ipotesi, i vettori $e_1, \dots, e_n$ formano una base di V, quindi in particolare formano un sistema di generatori:

$\forall u \in V \quad \exists\, x_1, \dots, x_n \in K : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$

Sia $(y_1, \dots, y_n) \in K^n : u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, procedo a sottrarre. Ottengo:

$$\underline{0} = u - u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n - y_1 e_1 - \dots - y_n e_n \overset{\text{metto in evidenza}}{=} \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in K} e_1 + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in K} e_n$$

$$e_1, \dots, e_n \neq \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$, come volevasi dimostrare.

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\quad B((1,1),(1,-1))$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^2$.

- Determinare le componenti di $u = (5,-3)$ in B.

  $(5,-3) = x_1(1,1) + x_2(1,-1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

  $$\begin{cases} 5 = x_1 + x_2 \\ -3 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{Quindi } (x_1, x_2) = (1, 4).$$

- Determinare le componenti di $u = (a_1, a_2)$ in B.

  $(a_1, a_2) = x_1(1,1) + x_2(1,-1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 - x_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \\ x_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} \end{cases} \quad \text{Quindi } (a_1, a_2) = \left(\tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{2}\right)(1,1) + \left(\tfrac{a_1}{2} - \tfrac{a_2}{2}\right)(1,-1)$$

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\dim V = n$ $\quad B = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata

L'applicazione $\Phi_B : V \to K^n$ tale che $u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ [ad ogni vettore associa le sue componenti in B] è biettiva e, in particolare, si tratta di un isomorfismo associato a B.

Esempio:

$V = \mathbb{R}[n]_{\leq 1}$ $\quad \dim V = 2$ $\quad B = (1+n, 1-n)$

$a_0 + a_1 n = x_1(1+n) + x_2(1-n) = x_1 + x_2 + x_1 n - x_2 n = (x_1 + x_2)1 + (x_1 - x_2)n$

$$\begin{cases} a_0 = x_1 + x_2 \\ a_1 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_0 + a_1}{2} \\ x_2 = \frac{a_0 - a_1}{2} \end{cases} \quad \text{Quindi } \Phi_B : a_0 a_1 x \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \mapsto \left(\frac{a_0 + a_1}{2}, \frac{a_0 - a_1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

Per ora, limitiamoci a dimostrare che l'applicazione è biettiva.

Prosegui

Riferimento

PROP Φ_B è biettiva.

DIM iniett.: Siano $u, v \in V$ e $u \neq v$. Tesi: $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u) \neq \Phi_B(v) = (y_1, \dots, y_n)$

Per assurdo $\Phi_B(u) = \Phi_B(v) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = v$ ⤳ assurdo!

suriett.: Sia $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Basta osservare che se $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ allora $\Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$. ▨

OSS Nei polinomi su un campo: $\mathbb{R}[x]_{\leq r}$, $B = (1, x, \dots, x^r)$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r \xmapsto{\Phi_B} (a_0, a_1, \dots, a_r).$$

Similmente, per matrici: $M_{m,n}(K)$, $B\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \xmapsto{\Phi_B} (a^1_1, a^1_2, \dots, a^m_1, a^m_2, \dots, a^m_n).$$

Tali basi ordinate vengono definite come RIFERIMENTO.

Steinitz: dimostrazione

Prima di dimostrare il lemma, riportiamo alla mente l'enunciato:

Lemma di Steinitz.

Sia $(V, K, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema di generatori finito di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$. Se $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ è un altro sotto-insieme di V e $|X| = m > n = |S|$, allora X è linearmente dipendente.

DIM Supponiamo $\underline{0} \notin X$, altrimenti banale.

$\mathcal{L}(S) = V \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ $\quad v_1 \neq \underline{0} \Rightarrow \exists \lambda_i \neq 0$, supponiamo $\lambda_1 \neq 0$.

Allora $\exists \lambda_1^{-1} \in K$, quindi $\lambda_1^{-1} v = \underbrace{(\lambda_1^{-1}\lambda_1)}_{=1} u_1 + \dots + (\lambda_1^{-1}\lambda_n) u_n \Rightarrow u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - (\lambda_1^{-1}\lambda_2) u_2 - \dots - (\lambda_1^{-1}\lambda_n) u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$.

$u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq V \Rightarrow V = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq V$.

Allora $S' = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ è ancora un sistema di generatori di V. Procedo con $v_2 \in X$:

$\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K : v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$. (1) Se $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, allora $v_2 = \beta_1 v_1 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ lin. dip. $\Rightarrow X$ è lin. dip.

(2) Altrimenti, $\exists \beta_i \neq 0$ con $i \geq 2$, ad esempio $\beta_2 \neq 0$, allora $\exists \beta_2^{-1} \in K$, quindi:

$\beta_2^{-1} v_2 = (\beta_2^{-1}\beta_1) v_1 + \underbrace{(\beta_2^{-1}\beta_2)}_{=1} u_2 + \dots + (\beta_2^{-1}\beta_n) u_n \Rightarrow u_2 = \beta_2^{-1} v_2 - (\beta_2^{-1}\beta_1) v_1 - (\beta_2^{-1}\beta_3) u_3 - \dots - (\beta_2^{-1}\beta_n) u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n)$

$\Rightarrow V = \mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n) \subseteq V$, ma allora $S'' = \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_n\} \Rightarrow \mathcal{L}(S'') = V$.

Reiterando il ragionamento, troviamo la dipendenza come nel caso (1) oppure $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V \ni v_{n+1}, \dots, v_m$ dato che $m > n$ per ipotesi. ▨

Geometria

Lez. 8 - 31/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazi Vettoriali: unione ed intersezione

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_p$ è ancora un sottosp. vettoriale.

DIM $\underline{0} \in W_1 \cap \dots \cap W_p$, banale.

$\forall u, v \in W_1 \cap \dots \cap W_p \Rightarrow u, v \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

$\Rightarrow u+v \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap \dots \cap W_p$.

$\forall \alpha \in K, \forall u \in W_1 \cap \dots \cap W_p \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_1 \cap \dots \cap W_p$.

$W_1 \cap \dots \cap W_p$ è linearmente chiuso $\Rightarrow W_1 \cap \dots \cap W_p$ è un sottosp. vett. di V. ▨

Esempio:

$\mathbb{R}^3$ $U = \mathcal{L}((1,0,1),(0,0,1))$ $\dim U = 2$ $W = \mathcal{L}((0,1,0),(1,1,0))$ $\dim W = 2$

$u \in U \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in K: u = \alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) = (\alpha, 0, \alpha+\beta)$ $w \in W \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in K: w = \gamma(0,1,0) + \delta(1,1,0) = (\delta, \gamma+\delta, 0)$

$v \in U \cap W \Leftrightarrow v \in U \wedge v \in W \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K : v = (\alpha, 0, \alpha+\beta) = (\delta, \gamma+\delta, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ 0 = \gamma + \delta \Rightarrow \gamma = -\delta \\ \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -\gamma = \delta \end{cases}$

$$v = \begin{cases} \alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) = \alpha(1,0,1) - \alpha(0,0,1) = \alpha(1,0,0) \\ \gamma(0,1,0) + \delta(1,1,0) = -\delta(0,1,0) + \delta(1,1,0) = \delta(1,0,0) \end{cases}$$

$U \cap W = \mathcal{L}((1,0,0))$.

OSS La prop. di cui si è discusso sopra NON vale se scambio $\cap$ con $\cup$.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p$ non è generalmente un sottosp. vettoriale, ma la chiusura lineare della loro unione si è, in particolare, equivale al sottospazio somma così definito:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1 \wedge \dots \wedge w_p \in W_p \}$$

DIM Notiamo innanzitutto che $W_1 + \dots + W_p$ è diverso dal vuoto e stabile rispetto alle operazioni per come è stato definito.

Dato che è linearmente chiuso, è anche un sottospazio vettoriale. Non resta che esplicitare che $\mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) = W_1 + \dots W_p$.

"$\subseteq$": ricordiamo che $W_1 \cup \dots \cup W_p \subseteq W_1 + \dots + W_p \Rightarrow \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) \subseteq W_1 + \dots + W_p$.

$w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 = w_1 + \underbrace{\underline{0} + \dots + \underline{0}}_{p-1 \text{ volte}}$; $w_2 \in W_2 \Rightarrow w_2 = \underline{0} + w_2 + \underline{0} + \dots + \underline{0}$ etc... $w_p \in W_p \Rightarrow w_p = \underline{0} + \dots + \underline{0} + w_p$.

"$\supseteq$": $u \in W_1 + \dots + W_p \Rightarrow \exists w_1 \in W_1, \dots, w_p \in W_p : u = w_1 + \dots + w_p \in \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p)$,

cioè u è combinazione lineare di vettori che appartengono a $W_1 \cup \dots \cup W_p$. ▨

Grassmann e Somma diretta

Relazione di Grassmann.

$(V, K, +, \cdot)$ $\quad W_1, W_2$ sottosp. vett. di V, $\dim W_1 = r$ e $\dim W_2 = s$

$$\boxed{\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).}$$

Nell'esempio precedente, in $\mathbb{R}^3$, abbiamo osservato come $\dim U = 2 = \dim W \neq \dim(U \cap W) = 1$.

DEF $W_1, W_2 \leq V$

$W_1 + W_2$ si dice **somma diretta** e si scrive $W_1 \oplus W_2$ se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$.

Si dice anche che W_1 e W_2 sono linearmente indipendenti.

$p \in \mathbb{N}^*$ $\quad W_1, W_2, \dots, W_p \leq V$

$W_1 + W_2 + \dots + W_p$ si dice **somma diretta** e si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_p$ se:

- $W_1 \cap (W_2 + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$;
- $W_2 \cap (W_1 + W_3 + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$;

  $\vdots$
- $W_p \cap (W_1 + \dots + W_{p-1}) = \{\underline{0}\}$.

PROP $W_1, \dots, W_p \leq V$ sottosp. vett.

$\dim W_1 = n_1 \quad B_1 = \{e_{1_1}, \dots, e_{1_{n_1}}\}$, $\dots$, $\dim W_p = n_p \quad B_p = \{e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}}\}$

Se $W_1 + \dots + W_p = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$, allora $\underline{(e_{1_1}, \dots, e_{1_{n_1}}, \dots, e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}})}$ è lin. indipendente ed è una $\underline{\text{base di } W_1 \oplus \dots \oplus W_p}$.

t-uple $\quad t = n_1 + \dots + n_p$

DIM Procediamo per induzione. Per $p = 1$, la proposizione è banalmente vera. Supponiamo valga per $(p-1)$ e verifichiamo per p.

$$\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1_{n_1}} e_{1_{n_1}} + \alpha_{2_1} e_{2_1} + \dots + \alpha_{2_{n_2}} e_{2_{n_2}} + \dots + \alpha_{p_1} e_{p_1} + \dots + \alpha_{p_{n_p}} e_{p_{n_p}} = \underline{0} \quad \iff$$

$$\underbrace{\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1_{n_1}} e_{1_{n_1}}}_{\in W_1} = \underbrace{-\alpha_{2_1} e_{2_1} - \dots - \alpha_{2_{n_2}} e_{2_{n_2}} - \dots - \alpha_{p_1} e_{p_1} - \dots - \alpha_{p_{n_p}} e_{p_{n_p}}}_{\in W_2 + \dots + W_p} = \underline{0} \implies \alpha_{1_1} = \dots = \alpha_{1_{n_1}} = 0.$$

per def di somma diretta

Per induzione, la proposizione è vera per $p-1$ sp. vett., ossia $(e_{2_1}, \dots, e_{2_{n_2}}, \dots, e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}})$ è lin. indipendente e per ipotesi di induzione $\alpha_{2_1} = \dots = \alpha_{2_{n_2}} = \dots = \alpha_{p_1} = \dots = \alpha_{p_{n_p}} = 0$.

Geometria

Lez. 9 - 05/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazio somma

Si ricorda la definizione di "sottospazio somma", presente a pag. 38.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p$ non è generalmente un sottosp. vettoriale, ma la chiusura lineare della loro unione sì e, in particolare, equivale al sottospazio somma così definito:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1 \wedge \dots \wedge w_p \in W_p \}$$

Si intende ora dimostrare quanto segue:

PROP $W_i = \mathcal{L}(S_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$

Allora il sottospazio somma è uguale a $\mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p)$.

DIM

- $\mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p) \subseteq \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p)$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \subseteq W_1 \\ \vdots \\ S_p \subseteq W_p \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 \cup \dots \cup S_p \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_p \Rightarrow \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p) \subseteq \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p).$$

- $u \in \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) \Rightarrow \exists w_1 \in W_1, \dots, \exists w_p \in W_p : u = w_1 + \dots + w_p$

$w_1 \in W_1 = \mathcal{L}(S_1) \Rightarrow \exists t_1 \in \mathbb{N}^*, \exists u_1^1, \dots, u_{t_1}^1 \in S_1, \exists \beta_1^1, \dots, \beta_{t_1}^1 \in K : w_1 = \beta_1^1 u_1^1 + \dots + \beta_{t_1}^1 u_{t_1}^1$

$\vdots$

$w_p \in W_p = \mathcal{L}(S_p) \Rightarrow \exists t_p \in \mathbb{N}^*, \exists u_1^p, \dots, u_{t_p}^p \in S_p, \exists \beta_1^p, \dots, \beta_{t_p}^p \in K : w_p = \beta_1^p u_1^p + \dots + \beta_{t_p}^p u_{t_p}^p.$

$$\Rightarrow u = \underbrace{\beta_1^1 u_1^1 + \dots + \beta_{t_1}^1 u_{t_1}^1}_{\in \mathcal{L}(S_1)} + \dots + \underbrace{\beta_1^p u_1^p + \dots + \beta_{t_p}^p u_{t_p}^p}_{\in \mathcal{L}(S_p)} \in \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p). \quad \blacksquare$$

Trasformazioni lineari

$\phi_B : u \in V \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in K^n$.   pag. 35-36

Abbiamo già visto che tale applicazione è biettiva.

OSS ϕ_B gode delle seguenti proprietà:

(1) $\forall u, v \in V \quad \phi_B(u+v) = \phi_B(u) + \phi_B(v)$;

(2) $\forall u \in V, \ \forall \lambda \in K \quad \phi_B(\lambda u) = \lambda \phi_B(u)$.

DIM (1) $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$; $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ $\quad \phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$, $\phi_B(v) = (y_1, \dots, y_n)$

$u+v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = \underbrace{(x_1+y_1)}_{\in K} e_1 + \dots + \underbrace{(x_n+y_n)}_{\in K} e_n \Rightarrow \phi_B(u+v) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \phi_B(u) + \phi_B(v)$.

(2) $\lambda u = \lambda(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = (\lambda x_1) e_1 + \dots + (\lambda x_n) e_n \Rightarrow \phi_B(\lambda u) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda \phi_B(u)$.

DEF $(V, K, +, \cdot) \qquad (W, K', +, \cdot) \qquad K \subseteq K'$ ma per semplicità $K = K'$

$T : V \to W$ si dice applicazione o trasformazione lineare se:

(1) $\forall u, v \in V, \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$;

(2) $\forall u \in V, \forall \lambda \in K, \ T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Inoltre:

- se T è iniettiva si dice monomorfismo;
- se T è suriettiva si dice epimorfismo;
- se T è biettiva si dice isomorfismo; ← è proprio il caso di ϕ_B !!
- se $V = W$, T si dice endomorfismo;
- se $V = W$ e T biettiva, T si dice automorfismo.

Esempio:

- $V, W \quad K \quad V\ 0_V \quad W\ 0_W$: rispettivi vettori nulli

  $f : V \to W \ : \ u \mapsto 0_W$

  $\forall u, v \in V, \ f(u+v) = 0_W = 0_W + 0_W = f(u) + f(v)$ ✓

  $\forall u \in V, \ \forall \alpha \in K, \ f(\alpha u) = 0_W = \alpha 0_W = \alpha f(u)$ ✓ $\qquad$ Allora f è un'app. lineare.

- Sia ora $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \ g((a_1, a_2)) = (2, 3, -7) \in \mathbb{R}^3$.

  $g(3,-1) = (2,3,-7) = g(6,-2) = g(2(3,-1)) \neq 2g(3,-1) = 2(2,3,-7) = (4,6,-14)$.

  g non rispetta la prop (2) (neanche la (1) in realtà), quindi non è un'app. lineare.

Trasformazioni lineari: proprietà

$T: V \to W$ tras. lineare

(i) $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

DIM $T(\underline{0}_V) = T(0\cdot \underline{0}_V) \overset{(2)}{=} 0\cdot T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$. ▨

N.B. $\boxed{\text{Condizione necessaria ma NON sufficiente!!}}$

Infatti:

Sia $f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0 \cdot a_1, a_2)$
$f(1+x+2x^2) = (1,2)$.

$f(0) = (0,0)$ banalmente,
ma f non è una trasformazione lineare.

$$\underline{f(2(1+x+2x^2))} = f(2+2x+4x^2) = (4,4) \neq (2,4) = 2(1,2) = \underline{2f(1+x+2x^2)}.$$

(ii) $t \in \mathbb{N}^*$, $\forall u_1, \dots, u_t \in V$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$:
$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_t T(u_t)$

Si dice che T conserva le combinazioni lineari.

DIM Per induzione. $t=1$ banale: $T(\alpha_1 u_1) \overset{(2)}{=} \alpha_1 T(u_1)$

$t>1$ $(t-1) \Rightarrow t$ $T((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1}u_{t-1}) + (\alpha_t u_t)) \overset{(1)}{=}$

$= \underbrace{T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1})}_{= \text{ per hp. d'induzione}} + \underbrace{T(\alpha_t u_t)}_{= (2)}$

$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(u_{t-1}) + \alpha_t T(u_t)$, come volevasi dimostrare. ▨

PROP $T: V \to W$ app. lineare
Se $(u_1, \dots, u_n)$ è una n-pla di vettori di V lin. dipendente, allora anche $(T(u_1), \dots, T(u_n)) \in W$ è lin. dipendente. NON posso dire nulla se la n-pla di V è indipendente.

DIM Per ipotesi, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ NON tutti nulli: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{0}_V$.

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = T(\underline{0}_V) \overset{(1)}{=} \underline{0}_W$.
$\overset{(2)}{=}$
$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n)$, dove -ricordiamo- gli scalari non sono tutti nulli.

Allora necessariamente anche la n-pla $(T(u_1), \dots, T(u_n))$ è lin. dipendente. ▨

Esempio:

- $T: (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare
  $((0,1),(0,2))$ è lin. dip. $\Rightarrow$ $(T(0,1), T(0,2)) = ((0,0),(0,0))$ è lin. dip.
- $g: (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1 - a_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare
  $((2,1),(1,0))$ è lin. indip., ma $(g(2,1), g(1,0)) = ((1,0),(1,0))$ è lin. dip.

Per quest'ultimo esempio, è bene notare l'importanza di parlare di una n-pla, e non di un insieme.

Infatti se considerassimo l'insieme $\{(1,0), (1,0)\}$, sarebbe lin. indipendente!!

Non si cada nel tranello: $\{(1,0),(1,0)\} = \{(1,0)\}$, che è chiaramente lin. indip.

Applicazioni lineari e Kernel pt.1

$T: V \to W$ app. lineare

PROP Sia $U \leq V$ un sottosp. vett.. Allora $T(U)$ è un sottosp. vett. di W.

DIM $\underline{0}_W = T(\underline{0}_V) \in T(U) \Rightarrow T(U) \neq \emptyset$.

$u', v' \in T(U) = \{T(u) \mid u \in U\} \Rightarrow \exists u, v \in U : T(u) = u' \wedge T(v) = v'$

$u' + v' = T(u) + T(v) \overset{(1)}{=} T(\underbrace{u+v}_{\in U}) \in T(U)$.

Fissiamo ora $\lambda \in K$.

$\lambda u' = \lambda T(u) \overset{(2)}{=} T(\underbrace{\lambda u}_{\in U}) \in T(U)$. $\blacksquare$

Ma allora, per quanto appena detto, $\operatorname{Im} T = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V)$ è un sottosp. vett. di W.

PROP $S \subseteq V : U = \mathcal{L}(S)$. Allora $T(U) = \mathcal{L}(T(S))$.

DIM "$\supseteq$" $S \subseteq U \Rightarrow T(S) \subseteq T(U) \Rightarrow \mathcal{L}(T(S)) \overset{\text{per la prop precedente}}{\subseteq} T(U)$.

"$\subseteq$" $u' \in T(U) \Rightarrow \exists u \in U = \mathcal{L}(S) : T(u) = u'$

$u \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists u_1, \dots, u_n \in S, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \Rightarrow$

$\Rightarrow T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \overset{(ii)}{=} \alpha_1 \underbrace{T(u_1)}_{\in T(S)} + \dots + \alpha_n \underbrace{T(u_n)}_{\in T(S)} \in \mathcal{L}(T(S))$.

Esempio:

$f : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1 - a_2, a_1 - a_2) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare

$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}(f(1,0), f(0,1))$

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}((1,0),(0,1)) \Rightarrow f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}((1,1), \underbrace{\cancel{(-1,-1)}}_{\text{lin. dip.}}) = \mathcal{L}((1,1))$.

DEF $\operatorname{Ker} T = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\}$ si dice nucleo o kernel di T.

Esempio:

Con la stessa app. f dell'esempio precedente:

$\operatorname{Ker} f = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \underset{(a_1 - a_2,\, a_1 - a_2)}{\underset{\parallel}{f(a_1, a_2)}} = (0,0)\}$

$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1, a_2) \in \operatorname{Ker} f \iff a_1 = a_2$

Quindi $\operatorname{Ker} f = \{(a_1, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1))$ è un caso che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

Applicazioni lineari e Kernel pt. 2

OSS T è <u>suriettiva</u> $\iff \operatorname{Im} T = W$.
T è <u>iniettiva</u> $\iff \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}_V\}$

DIM T suriettiva $\iff \operatorname{Im} T = W$ già noto.

Dimostriamo allora l'altra osservazione.

"$\Rightarrow$" $u \in V \setminus \{\underline{0}_V\}$

$u \neq \underline{0}_V \overset{T \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow} T(u) \neq T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \Rightarrow u \notin \operatorname{Ker} T$.

"$\Leftarrow$" $u, v \in V : T(u) = T(v) \Rightarrow T(u-v) \overset{(1)}{=} T(u) - T(v) = \underline{0}_W \Rightarrow$

$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow u - v = \underline{0}_V \Rightarrow u = v$, cioè T è iniettiva.

PROP $T : V \to W$ app. lineare

Se <u>T è iniettiva</u>, $\forall (u_1, \dots, u_n)$ n-pla di vettori di V lin. indipendente,
allora anche $(T(u_1), \dots, T(u_n)) \in W$ è lin. indipendente.

DIM Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = \underline{0}_W$

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \overset{\text{per (ii)}}{=} \dots \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in \operatorname{Ker} T \overset{T \text{ iniettiva}}{=} \{\underline{0}_V\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{0}_V \overset{(u_1, \dots, u_n) \text{ lin. indip.}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, come volevasi dimostrare.

Geometria

Lez. 10 - 12/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Applicazioni lineari pt. 3

Teorema. (dell'equazione dimensionale)

$(V, K, +, \cdot)$ f.g., $\dim V = n$, $(W, K, +, \cdot)$
Sia $T: V \to W$ app. lineare. Allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.

$V = \mathcal{L}(S) \qquad \operatorname{Im} T = T(V) = \mathcal{L}(T(S))$.

DIM NEIN! Senza dimostrazione!

Teorema. (fondamentale delle app. lineari)

$(V, K, +, \cdot)$, $(W, K, +, \cdot)$ $\quad B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base di V.
Sia $\varphi: u_i \in B \mapsto \varphi(u_i) \in W$
Allora $\exists!\ T: V \to W$ app. lineare tale che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $T(u_i) = \varphi(u_i)$.

"DIM" Idea di dimostrazione:

è sufficiente osservare che l'unica app. lineare che soddisfa la prop. richiesta è:

$\forall u \in V$, $\exists! (u_1, \dots, u_n) \in K^n$: $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$\Phi_B : u \in V \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in K^n \qquad T(u) = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 T(u_1) + \dots x_n T(u_n) = x_1 \varphi(u_1) + \dots + x_n \varphi(u_n)$.

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ Determinare un'app. lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $(3,-1) \in \operatorname{Ker} T$ e $(2,4) \in \operatorname{Im} T$.

$\varphi: \begin{array}{l} (3,-1) \mapsto (0,0) \\ (7,2) \mapsto (2,4) \end{array} \qquad \{(3,-1), (7,2)\}$ base di $\mathbb{R}^2$

$(a_1, a_2) = x_1(3,-1) + x_2(7,2) = (3x_1 + 7x_2, -x_1 + 2x_2)$

$\begin{cases} a_1 = 3x_1 + 7x_2 \\ a_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{a_1 + 3a_2}{13} \\ x_1 = \frac{2a_1 - 7a_2}{13} \end{cases}$

$(a_1, a_2) = \left(\frac{2}{13}a_1 - \frac{7}{13}a_2\right)(3,-1) + \left(\frac{1}{13}a_1 + \frac{3}{13}a_2\right)(7,2) = \left(\frac{6}{13}a_1 \cancel{- \frac{21}{13}a_2} + \frac{7}{13}a_1 \cancel{+ \frac{21}{13}a_2}, \cancel{-\frac{2}{13}a_1} + \frac{7}{13}a_2 \cancel{+ \frac{2}{13}a_1} + \frac{6}{13}a_2\right) = (a_1, a_2)$ ✓

$T((a_1, a_2)) = \left(\frac{2}{13}a_1 - \frac{7}{13}a_2\right)(0,0) + \left(\frac{1}{13}a_1 + \frac{3}{13}a_2\right)(2,4)$

Esercizio:

$T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3 \qquad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mapsto (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2)$

$\operatorname{Ker} T = \{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mid (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ $\qquad \begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 = a_2 \\ a_0 = -2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_2 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = a_2 \\ a_0 = -2a_2 \end{cases}$

$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \in \operatorname{Ker} T \iff a_1 = a_2,\ a_0 = -2a_2$ ossia $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = -2a_2 + a_2 x + a_2 \cdot x^2$

$\operatorname{Ker} T = \{-2a_2 + a_2 x + a_2 x^2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_2(-2 + x + x^2) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(-2 + x + x^2)$.

$B_{\operatorname{Ker} T} = \{-2 + x + x^2\} \qquad \dim \operatorname{Ker} T = 1 \qquad \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{1} + \dim \operatorname{Im} T = \underbrace{\dim K[x]_{\leq 2}}_{3} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$

$\operatorname{Im} T = T(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = T(\mathcal{L}(1, x, x^2)) = \mathcal{L}(T(1), T(x), T(x^2)) = \mathcal{L}((1,0,1), (2,1,0), \cancel{(0,-1,2)})$ lin. dip.

$B_{\operatorname{Im} T} = \{(1,0,1), (2,1,0)\}$

Applicazioni lineari e Matrici

PROP $T: V \to W$ isomorfismo $\quad S \subseteq V$

S è lin. indip. $\iff T(S)$ è lin. indip.

DIM "$\Rightarrow$" T è iniettiva, per cui conserva la lineare indipendenza.

"$\Leftarrow$" $T^{-1}: W \to V$ è un isomorfismo. Allora $S = T^{-1}(T(S))$ è lin. indip. Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$

$$T^{-1}(T(S)) = T^{-1}(\{T(v_1), \dots, T(v_t)\}) = \{\underbrace{T^{-1}(T(v_1))}_{=v_1}, \dots, \underbrace{T^{-1}(T(v_t))}_{=v_t}\} = \{v_1, \dots, v_t\} \quad \blacksquare$$

Esempio:

$(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n \quad B = (e_1, \dots, e_n) \qquad \Phi_B: V \to K^n \quad u \mapsto (x_1, \dots, x_n) \qquad u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad B = (1, x, x^2, x^3)$

$S = \{3 - 2x + 4x^3,\ 1 + x - x^2,\ 2 - 3x + x^2 + 4x^3\}$ è lin. ind.?

$$\downarrow \Phi_B \qquad \downarrow \Phi_B \qquad \downarrow \Phi_B$$

$(3, -2, 0, 4) \quad (1, 1, -1, 0) \quad (2, -3, 1, 4)$

S è lin. ind. $\iff \{(3, -2, 0, 4), (1, 1, -1, 0), (2, -3, 1, 4)\}$ è lin. ind.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a^1 &= (3, -2, 0, 4) \\ a^2 &= (1, 1, -1, 0) \\ a^3 &= (2, -3, 1, 0) \end{aligned} \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv (4, 0, 4)$$

N.B. Sia $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$

La trasposta di A è la matrice che si ottiene invertendo righe e colonne e si indica con ${}^tA$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$$

Rango e Matrici ridotte a scalini

DEF $A \in M_{m\times n}(K)$

Il **rango** di A è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A:
$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \subseteq K^m$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\dim \mathcal{L}((2,0,1),(0,1,0),(0,0,1)) = 3 = \text{rango}(A) = \dim\mathcal{L}((2,0,0),(0,1,0),(1,0,1)).$$

Teorema.

$A \in M_{m\times n}(K)$

$\dim\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA) = \dim\mathcal{L}(a^1, \dots, a^m).$

~~DIM~~

Nessuna dim. ☺

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\dim\mathcal{L}((2,0,0),(1,0,0),(0,1,2),(1,1,2)) = \text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA) = \dim\mathcal{L}((2,1,0,1),(0,0,1,1),(0,0,\cancel{2},2)) = 2.$$

DEF $A \in M_{m\times n}(K)$

A si dice **ridotta a scalini** (o a gradini) :<=>

(i) a^i è una riga nulla di A => tutte le righe successive sono nulle;

(ii) il primo elemento da sinistra **non** nullo si dice **pivot** e deve stare più a sinistra dei pivot delle righe successive.

Inoltre, A si dice **completamente** ridotta a gradini se è vero anche che:

(iii) i pivot sono tutti uguali a 1;

(iv) gli elementi sopra a tutti i pivot sono nulli.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non è a gradini, ma posso renderla tale invertendo $a^2 \longleftrightarrow a^3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ è ridotta a gradini, ma non completamente. Nei riquadri sono indicati i pivot delle rispettive righe.

PROP $A \in M_{m\times n}(K)$, A è ridotta a gradini => $\text{rango}(A) = k$, dove k è il numero di pivot.

DIM Per induzione

Sia $\#\text{pivot} = k$. $\quad A = \begin{pmatrix} 0 \cdots \square \cdots & \\ 0 \cdots 0 \cdots \square \cdots & \\ \vdots & \\ 0 \cdots \cdots\cdots \square \cdots & \\ 0 \cdots \cdots\cdots\cdots 0 & \end{pmatrix} k\text{-esima}$

Se $k=0$, allora A è la matrice nulla, quindi $\text{rango}(A)=0$. Suppongo ora vero $k-1$ e provo per k.

$A = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots \square \cdots \\ 0 \cdots 0 \cdots \square \cdots \\ \vdots \\ 0 \cdots \cdots\cdots \square \cdots \\ 0 \cdots \cdots\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}}_{=B}\right) k\text{-esima} \qquad \#\text{pivot } B = k-1 \overset{\text{hp. di induzione}}{=} \text{rango}(B)$ ossia $\{a^2, \dots, a^k\}$ è lin. indip.

Ma sicuramente $a^1 \notin \mathcal{L}(a^2, \dots, a^k)$ in quanto il pivot di a^1 è necessariamente diverso da 0 e non può essere ottenuto come comb. lin. di scalari che moltiplicano zero.

Ma allora l'insieme formato da $\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$ è ancora lin. indip., cioè $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)+1 = (k-1)+1 = k$. ▨

Operazioni o trasformazioni elementari (di riga)

$A \in M_{m\times n}(K)$

I $i, k \in \{1, \dots, m\}$: $\boxed{a^i \longleftrightarrow a^k}$

II $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$: $\boxed{a^i \longrightarrow \lambda a^i}$

III $i, k \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$: $\boxed{a^i \longrightarrow a^i + \lambda a^k}$

Queste operazioni sono tali che anche se le righe della matrice cambiano, non cambia lo spazio vettoriale generato dalla loro chiusura lineare.
NON vale lo stesso per le colonne.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad a^1 \longleftrightarrow a^2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tornare indietro, basterebbe fare $b^2 \longleftrightarrow b^1$. Adesso $b^2 \longrightarrow \lambda b^2$, dove $\lambda = \frac{1}{2}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad c^3 \longrightarrow c^3 + (-2)c^1 \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Anche queste operazioni sono reversabili chiaramente. Adesso $d^4 \longrightarrow d^4 + (-1)d^1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad e^4 \longrightarrow e^4 + (-1)e^3 \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f^3 \longrightarrow f^3 + 2f^2 \quad G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è finalmente ridotta a scalini, ma continuiamo. Adesso $g^3 \longrightarrow \frac{1}{3} g^3$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h^1 \longrightarrow h^1 + h^3 \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i^1 \longrightarrow i^1 - i^2 \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è completamente ridotta a gradini.

We did it!

Questo algoritmo, piuttosto intuitivo, è anche detto **Metodo di riduzione di Gauss**, utile per risolvere sistemi di equazioni velocemente.
Vediamolo, a titolo informativo, un po' più nel dettaglio.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_J & \dots & a^1_n \\ \vdots \\ a^k_1 & a^k_2 & \dots & a^k_J & \dots & a^k_n \\ \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_J & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

J indice della prima colonna non nulla, K indice della riga su cui c'è il primo elemento non nullo della colonna J

$a^1 \longleftrightarrow a^k \qquad \forall i \in \{2, \dots, m\} \quad a^i \longrightarrow a^i + \left(-\frac{a^i_J}{a^1_J}\right) a^1$

$a^2_J + \alpha_2 \underbrace{a^1_J}_{\neq 0} = 0 \implies \alpha_2 = -\frac{a^2_J}{a^1_J}$ ⟶ Creo colonne di tutti zeri sotto al pivot e procedo iterativamente nelle sotto-matrici

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a^1 \longleftrightarrow a^k = a^3 \\ J = 2 \quad k = 3 \end{matrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad a^4 \longrightarrow a^4 + \left(\frac{-a^4_2}{a^1_2}\right) a^1$$

$-\left(-\frac{1}{7}\right) =$

Geometria

Lez. 11 - 14/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sistemi di Equazioni

DEF $(K, +, \cdot)$ campo

$x_1, \dots, x_n \quad n \in \mathbb{N}^* \quad a_1, \dots, a_n, b \in K \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b = 0.$

Una soluzione di questa equazione lineare è una n-pla $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in K^n$ di scalari che sostituiti ordinatamente alle variabili soddisfano l'equazione, ossia: $a_1 \bar{y}_1 + \dots + a_n \bar{y}_n - b = 0$

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite sul campo K è una m-pla di equazioni lineari:

$$\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n = b_1 & S_1 \\ \vdots & \vdots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n = b_m & S_m \end{cases}$$

Insieme delle soluzioni: $S = S_1 \cap \dots \cap S_m$.

Una soluzione di Σ è una soluzione di ciascuna equazione di Σ:

$(y_1, \dots, y_n) \in K^n : \forall i \in \{1, \dots, m\} : a^i_1 y_1 + \dots + a^i_n y_n = b_i.$

$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$ matrice dei coefficienti o prima matrice o matrice incompleta

$C = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$ matrice completa o seconda matrice

Esempio:

$n = 3 \quad K = \mathbb{R} \quad \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$

DEF Siano Σ e Σ' due sistemi lineari in n incognite su K.

Σ e Σ' sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni: $S = S'$.

Un sistema lineare Σ si dice compatibile se il suo insieme delle soluzioni $S \neq \emptyset$. Altrimenti si dice incompatibile.

Esempio:

- $n = 2 \quad K = \mathbb{R} \quad \Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ incompatibile! $\quad 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 3 = 6 \neq 0$

- $n = 4 \quad K = \mathbb{R}$

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

variabili libere: $\underbrace{x_3 \; x_4}$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 + 1 = x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

Sostituzione a ritroso

$$S = \{(x_3 + x_4 + 1, x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Alternativamente:

$$a^2 \to -a^2 \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \quad a^1 \to a^1 - a^2 \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \text{ cioè } \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

Ridotto completamente

Trasformare i sistemi di equazioni

Teorema. Sia Σ un sistema lineare di m equazioni in n incognite su K e sia C la sua matrice completa. Se effettuiamo su C un numero finito di operazioni elementari, otteniamo una matrice C' tale che il sistema lineare Σ' che ha C' come matrice completa è equivalente a Σ.

DIM $\Sigma : \begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$

(I) $i, k \in \{1, \dots, m\} \qquad a^i \longleftrightarrow a^k$

$\Sigma : \begin{cases} \vdots \\ a^i_1 x_1 + \dots + a^i_n x_n - b_i = 0 \\ \vdots \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad \Sigma' : \begin{cases} \vdots \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \\ a^i_1 x_1 + \dots + a^i_n x_n - b_i = 0 \\ \vdots \end{cases}$ Le equazioni sono le stesse $S = S'$

(II) $i \in \{1, \dots, m\} \qquad \lambda \in K \setminus \{0\}, \qquad a^i \longrightarrow \lambda a^i$

ℓ : equazione

$\Sigma' : \begin{cases} \lambda a^i_1 x_1 + \dots + \lambda a^i_n x_n - \lambda b_i = 0 \\ \vdots \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \end{cases} \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in S \Rightarrow \ell_1(y) = 0, \dots, \ell_i(y) = 0, \dots, \ell_n(y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_1(y) = 0, \dots, \lambda \ell_i(y) = \lambda \cdot 0 = 0, \dots, \ell_n(y) = 0 \iff (y_1, \dots, y_n) \in S'$

(III) $i, k \in \{1, \dots, m\}, \quad \alpha \in K, \quad a^i \longrightarrow a^i + \alpha a^k$

$\Sigma' : \begin{cases} \vdots \\ (a^i_1 + \alpha a^k_1) x_1 + \dots + (a^i_n + \alpha a^k_n) x_n - (b_i + \alpha b_k) = 0 \\ \vdots \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in S \Rightarrow$

$\ell_1(y) = 0, \dots, \ell_i(y) = 0, \dots, \ell_n(y) = 0 \Rightarrow \ell_1(y) = 0, \dots, \underbrace{\ell_i(y)}_{=0} + \underbrace{\alpha\, \ell_k(y)}_{=\alpha \cdot 0} = 0, \dots, \ell_n(y) = 0 \iff (y_1, \dots, y_n) \in S'$

Esempio:

$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a^2 \to a^2 + a^1 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Sigma' : \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2 + 1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

$S = S' = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ Si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni, dove l'exp dipende dal numero di var libere.

$a^2 \to -a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a^1 \to a^1 + 2a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma'' : \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Notiamo che $\underline{0} \notin S = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ quindi S **NON** è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$.

Metodo Gauss - Jordan  - 

Il metodo Gauss-Jordan per risolvere un sistema di equazioni consiste di due step:

(1) riduzione a gradini della matrice completa;

(2) (i) SOSTITUZIONE A RITROSO delle variabili che corrispondono ai pivot (**NON** libere);

oppure

(ii) riduzione completa a gradini della matrice completa.

Infine, si scrive l'insieme S.

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad c^1 <\!\!-\!\!> c^2 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^3 \to c^3 + c^1 \\ c^4 \to c^4 - c^1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

riga

$r_4 \to r_4 - \frac{3}{2} r_2$

$(0,-3,3,2,-2,2) - \frac{3}{2}(0,-2,2,1,-1,1) =$

$= (0-0, -3+3, 3-3, 2-\frac{3}{2}, -2+\frac{3}{2}, 2-\frac{3}{2})$

$= (0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad c^4 \to c^4 + \frac{1}{6} c^3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ridotta a scalini. Procediamo con (ii)

$$\begin{array}{l} c^1 \to -c^1 \\ c^2 \to -\frac{1}{2} c^2 \\ c^3 \to -\frac{1}{3} c^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^2 \to c^2 + \frac{1}{2} c^3 \\ c^1 \to c^1 - c^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad c^1 \to c^1 + c^2 \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} & & x_3 & & x_5 & \end{array} \end{array} = C'$$

$$\Sigma': \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_5 + 1 \end{cases}$$

$$S = S' = \{(-x_3-1, x_3, x_3, x_5+1, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$$