Come assegnare un insieme

- elenchiamo gli elementi contenuti nell'insieme

opp.

- caratterizziamo gli elementi che appartengono all'insieme mediante una proprietà.

$x \in A$ $\quad$ $y \notin A$ $\quad$ $A = \{1, 3, 5\}$

$A \ni x$ $\quad$ $A \not\ni y$ $\quad$ $A = \{ n \mid n$ è uno dei primi tre numeri naturali dispari$\}$

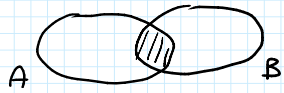
L'insieme vuoto è di solito denotato con $\emptyset$

A, B insiemi $\qquad A \subseteq B \iff \forall a \in A,\ a \in B \qquad A \supseteq B$

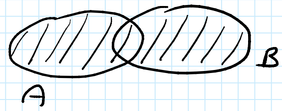
$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Se P_1, P_2 sono due affermazioni, scrivere $P_1 \Rightarrow P_2$ significa che ogni volta che P_1 si verifica, allora si verifica anche P_2.

$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ e $x \in B\}$

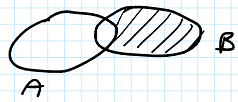


$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ oppure $x \in B\}$



DIFFERENZA: $\quad B - A = \{x \mid x \in B$ e $x \notin A\}$

$B \setminus A$



$A \subseteq X \qquad X - A$ si dice complemento di A in X e si denota con $\complement_X(A)$.

PRODOTTO CARTESIANO: $\quad \{a, b\} = \{b, a\}$

$(a, b) \neq (b, a)$ $\quad$ coppia $\quad \{\{a\}, \{a, b\}\} =: (a, b)$

$A, B \neq \emptyset \qquad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

intuitivamente possiamo considerare: $A_1, A_2, \dots, A_h$ insiemi, $\quad h \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_h = \{(a_1, \dots, a_h) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_h \in A_h\}$

Esempio d'uso:

sia $\quad a_1 x_1 + \dots + a_h x_h - b = 0 \quad$ un'equazione lineare in h variabili

$a_1 x_1 + \dots + a_h x_h = b \quad$ e con coefficienti e termine noto in $\mathbb{R}$

una soluzione di questa equazione è una h-upla $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{h \text{ volte}} = \mathbb{R}^h$

tale che $\quad a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_h \bar{x}_h - b = 0$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

Sia n un qualsiasi numero naturale e sia $P(n)$ una affermazione che dipende da n.
Allora, il principio di induzione ci dice che:

se (1) $P(\bar{n})$ è vera, per un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$
(base induttiva)

(2) $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, $\forall n > \bar{n}$
(passo induttivo)

$\Rightarrow P(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$.

Sia A un insieme. L'insieme delle sue parti è:

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$ $\quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \underbrace{\{1,3,5\}}^{\shortparallel A}\}$

Si può dimostrare che se A contiene n elementi, allora $P(A)$ contiene 2^n elementi.
Per esempio, si può usare il principio di induzione.

A, B insiemi non vuoti.
Una **relazione o corrispondenza** di A in B è un sottoinsieme di $A \times B$:

$\mathcal{R} \subseteq A \times B$ $\quad$ (opp. $(A \times B, \mathcal{R})$ opp. $(A, B, \mathcal{R})$)

Esempio $\quad A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{p, q\}$

$A \times B = \{(1,p), (3,p), (5,p), (1,q), (3,q), (5,q)\}$

$\mathcal{R} = \{(3,p), (3,q), (5,q)\}$ e scriviamo $\quad 3\mathcal{R}p$ perché $(3,p) \in \mathcal{R}$
$3\mathcal{R}q$
$5\mathcal{R}q$
$1 \not\mathcal{R} q$ perché $(1,q) \notin \mathcal{R}$

Se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ è una relazione, la sua relazione **inversa** è:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

Esempio. Tornando all'esempio precedente, $\mathcal{R}^{-1} = \{(p,3), (q,3), (q,5)\}$

RELAZIONI di EQUIVALENZA

$A = B \neq \emptyset$ $\quad$ Sia $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ una relazione "su A".

$\mathcal{R}$ si dice **relazione di equivalenza** se:

- $\forall x \in A, \ (x,x) \in \mathcal{R} \quad [x\mathcal{R}x]$ $\quad$ (proprietà riflessiva)
- $\forall x, y \in A$, se $(x,y) \in \mathcal{R}$, allora $(y,x) \in \mathcal{R}$ $\quad [x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x]$ $\quad$ (proprietà simmetrica)
- $\forall x, y, z \in A$, se $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$, allora $(x,z) \in \mathcal{R}$ $\quad$ (proprietà transitiva)
  $[x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z]$

Esempi:

(1) $\quad A = \{1, 3, 5\}$ $\quad \mathcal{R} = \{(1,1), (3,3), (5,5), (1,3), (3,1)\}$ è una relazione di equivalenza

(2) $\quad A = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{R} = \{(x,y) \mid |x-y| \text{ è divisibile per } 2\}$ è una relaz. di equivalenza

$(1,1), (2,2), \ldots, \ldots \in \mathcal{R}$

$(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{N} : |x-y| = 2h$

$(2,4) \in \mathcal{R}$ perché $|2-4| = 2 = 2 \cdot 1$

$(3,2) \notin \mathcal{R}$ perché $|3-2| = 1$ non è divisibile per 2

$(7,3) \in \mathcal{R}$ perché $|7-3| = 4$ è divisibile per 2

Infatti abbiamo: $(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x$ e y sono entrambi pari opp. entrambi dispari.

(3) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\qquad \mathcal{R} = \{((m,n),(m',n')) \mid mn' = nm'\}$ è una relaz. di equivalenza

$(3,2)\ \mathcal{R}\ (6,4)$

(4) Sia $\mathcal{J}$ l'insieme dei punti dello spazio della geometria elementare.

$\forall\ P, Q \in \mathcal{J}$, (P,Q) coppia è detta vettore applicato in P = segmento orientato applicato in P

= elemento univocamente individuato da una direzione, un verso, una lunghezza (opp. infinita) e da un punto di applicazione.

$$- - - P \longrightarrow Q - - -$$

Se O è un punto, denotiamo con $\mathcal{J}(O)$ l'insieme di tutti i vettori applicati in O:

$$\mathcal{J}(O) = \{(O,Q) \mid Q \in \mathcal{J}\}$$

Denotiamo invece con $\mathcal{V} = \{(P,Q) \mid P, Q \in \mathcal{J}\}$ l'insieme di tutti i vettori applicati dello spazio della geometria elementare.

$A = \mathcal{V}$ $\qquad \mathcal{R} = \{((P,Q),(P',Q')) \mid (P,Q), (P',Q')$ hanno uguale direzione, verso e lunghezza$\}$

$$P \longrightarrow Q \qquad\qquad P \neq P' \text{ ma } (P,Q)\ \mathcal{R}\ (P',Q')$$
$$P' \longrightarrow Q'$$

questa è una relazione di equivalenza detta relazione di equipollenza.

(5) $A = \{1,3,5\}$ $\qquad \mathcal{R} = \{(1,1),(3,3),(5,5),(1,3),(3,5)\}$ non è una relazione di equivalenza

$(1,3) \in \mathcal{R}$ ma $(3,1) \notin \mathcal{R}$

$(1,3), (3,5) \in \mathcal{R}$ ma $(1,5) \notin \mathcal{R}$

Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto A.

Per ogni $a \in A$, possiamo considerare il seguente insieme:

$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in A \mid x \mathcal{R} a\}$ $\qquad$ classe di equivalenza di $a \in A$ rispetto a $\mathcal{R}$

$[a]$

Proprietà:

- $\forall a \in A$, $a \in [a]$. $\quad$ Infatti $(a,a) \in \mathcal{R}$
- $\forall a, b \in A$, $\quad b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

Infatti: "$\subseteq$" $\quad z \in [b] \Rightarrow z \mathcal{R} b$
per ipotesi $b \mathcal{R} a$ $\quad \big\} \xRightarrow{\mathcal{R} \text{ è transitiva}} z \mathcal{R} a \Rightarrow z \in [a]$

"$\supseteq$" $\quad x \in [a] \Rightarrow x \mathcal{R} a$
per ipotesi $b \mathcal{R} a$. Per la simmetria $a \mathcal{R} b$ $\quad \big\} \Rightarrow x \mathcal{R} b \Rightarrow x \in [b]$.

- $\forall a, b \in A$, si verifica $[a] = [b]$ oppure $[a] \cap [b] = \emptyset$ (sono disgiunte)

Infatti: sia $x \in [a] \cap [b]$. $\qquad$ Th: $[a] = [b]$.

$$\Downarrow$$

$x \in [a]$ e $x \in [b] \Rightarrow [x] = [a]$ e $[x] = [b] \Rightarrow [a] = [b]$.

Da queste proprietà ricaviamo che le classi di equivalenza di una relazione di equivalenza su un insieme A costituiscono una partizione di A:

$$A = [a] \cup [b] \cup \dots \ [c] = \bigcup_{a \in A} [a]$$

e le classi di equivalenza sono a due a due disgiunte

L'insieme quoziente di A rispetto a R è:

$$\frac{A}{R} := \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

Torniamo agli esempi di prima:

(1) $A = \{1, 3, 5\}$ $\quad R = \{(1,1), (3,3), (5,5), (1,3), (3,1)\}$ $\quad \underline{[1] = [3]} = \{1,3\}$ $\quad [5] = \{5\}$

$$A = \{1,3\} \ \dot{\cup} \ \{5\} = [3] \cup [5] \qquad \frac{A}{R} = \{[3], [5]\}$$

UNIONE DISGIUNTA

(3) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\quad R = \{((m,n),(m',n')) \mid mn' = nm'\}$

$$\frac{A}{R} = \mathbb{Q}$$

(4) $\mathcal{V}$ $\quad R$ relazione di equipollenza

$$\frac{\mathcal{V}}{R} = \{ [(P,Q)] \mid P, Q \in \mathcal{I} \}$$

$[(P,Q)]$ si dice vettore libero

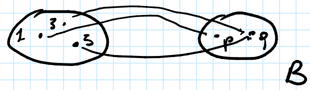
Def. Siano A, B insiemi non vuoti. Una applicazione o funzione di A in B è una relazione $f \subseteq A \times B$ che soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall a \in A, \ \exists! \ b \in B : \ (a,b) \in f$$

Se f è una funzione di A in B, scriveremo $f : A \longrightarrow B$

se $a f b$, $\ f(a) = b$

Esempio: $A = \{1, 3, 5\}$, $\quad B = \{p, q\}$



$f = \{(1,p), (3,q), (5,q)\}$ è una funzione

$R = \{(1,\underline{p}), (3,q), (1,\underline{q})\}$ non è una funzione

Def. Sia $f : A \longrightarrow B$ funzione $\qquad A$ dominio, $\quad B$ codominio

- f si dice iniettiva $\iff \forall a, a' \in A, \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

  equivalentemente $[\ a = a' \Leftarrow f(a) = f(a')\ ]$ $\qquad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

- f si dice suriettiva $\iff \forall b \in B, \ \exists \ a \in A : \ f(a) = b$
- f si dice biettiva o biunivoca $\iff \forall b \in B, \ \exists! \ a \in A : \ f(a) = b$

Si può osservare che f è biettiva $\iff$ f è iniettiva e suriettiva

Esempi: $A = \{1, 3, 5\}$, $\quad B = \{q, p\}$

$$f : A \longrightarrow B, \quad 1 \mapsto p, \quad 3 \mapsto q, \quad 5 \mapsto q$$

non è iniettiva

è suriettiva

$\operatorname{Im} f = B$

$$\begin{array}{l} 1 \rightsquigarrow p \\ 3 \rightsquigarrow q \\ 5 \rightsquigarrow q \end{array}$$

non è iniettiva

è suriettiva

$\operatorname{Im} f = B$

$$g : B \longrightarrow A \qquad \begin{array}{l} q \rightsquigarrow 3 \\ p \rightsquigarrow 5 \end{array}$$

è iniettiva

non è suriettiva

$\operatorname{Im} g = \{3,5\}$

$$h : A \longrightarrow A \qquad \begin{array}{l} 1 \rightsquigarrow 5 \\ 3 \rightsquigarrow 1 \\ 5 \rightsquigarrow 3 \end{array}$$

è biettiva

$\operatorname{Im} h = A$

Se $f: A \longrightarrow B$ è un'applicazione, definiamo la sua immagine:

$$\operatorname{Im} f = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq B$$

Più in generale, per ogni sottoinsieme $X \subseteq A$,

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq B \qquad f(A) = \operatorname{Im} f \subseteq B$$

Per ogni sottoinsieme $Y \subseteq B$, definiamo la controimmagine:

$$f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$$

Per comodità, se $Y = \{y\}$, allora usiamo la seguente notazione:

$$\underset{\{a \in A \mid f(a) = y\}}{\overset{\shortparallel}{f^{-1}(y)}} \quad \text{invece di} \quad f^{-1}(\{y\})$$

Osservazione: $f: A \longrightarrow B$, f è suriettiva $\iff \operatorname{Im} f = B$.