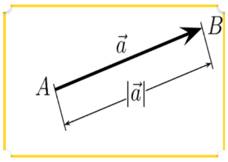
FISICA

Lezione del 20-03

Grandezze scalari $\rightarrow$ definite da un numero (ed eventuale unità di misura)

Grandezze vettoriali $\rightarrow$ definite da $\rightarrow modulo, direzione, verso$

Le grandezze vettoriali sono rappresentate da un ente geometrico detto **vettore** che graficamente è dato da un segmento orientato.



Con $\overline{AB} = \vec{v}$

Dato un vettore v un suo qualsiasi vettore parallelo rappresenta il vettore stesso. Nel caso di un vettore che abbia un punto di applicazione parliamo di **vettore applicato**.

- VETTORE NULLO $\rightarrow A \equiv B \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (punto di origine e punto termine coincidono)

Versore $\rightarrow$ vettore con modulo unitario (=1)

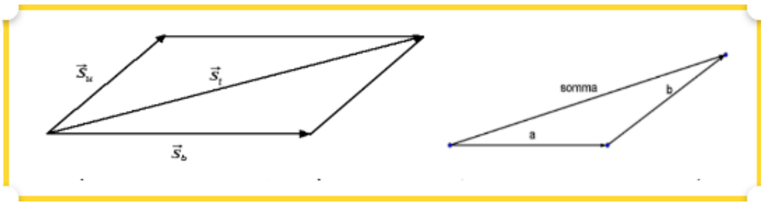
$|\vec{v}| = 1 \rightarrow \hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$ che hanno modulo = 1

I versori conservano direzione e verso

Somma di due vettori

$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Che si può calcolare graficamente con la **regola del parallelogramma** o con il **metodo del punta-coda:**



Opposto di un vettore

$$\vec{a} + \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} = -\vec{b}$$

Differenza di due vettori

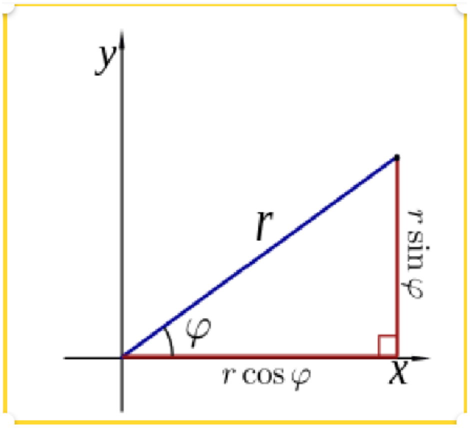
$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

Prodotto di uno scalare per un vettore

$$m, \vec{a} \rightarrow \vec{v} = m\vec{a}$$

Es. m =2   a= 3 -> v = 6

Decomposizione di un vettore secondo due direzioni individuate da due rette



$$\vec{c}=\vec{c}_x+\vec{c}_y$$

Le due componenti x e y:

$$\vec{c}_x=\vec{c}_x\hat{i}\,\vec{c}_y=\vec{c}_y\hat{j}$$

Da cui:

$$\vec{c}=\vec{c}_x\hat{i}+\vec{c}_y\hat{j}$$

$\hat{i}$ vettore di modulo unitario avente la direzione e il verso del semiasse positivo delle x

Senza componenti unitarie si utilizza il maschile; con si utilizza il femminile

Componenti cartesiane del vettore $\vec{c}$

$\vec{c}\equiv(C_x,C_y)$

$|\vec{c}|=\sqrt{C_x^2+C_y^2}$

$\vec{c}$ in coordinate polari

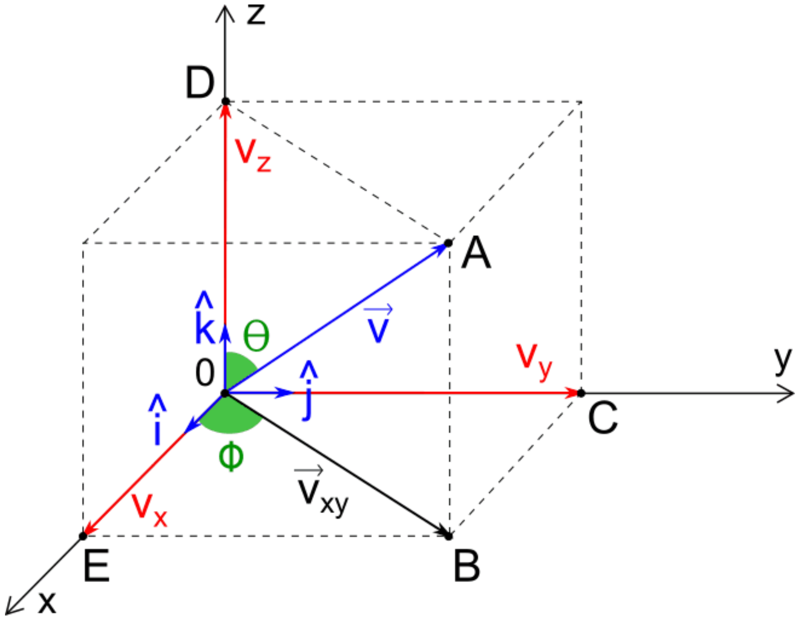
$\vec{c},\theta\,\vec{c}\equiv(C,\theta)$

$\vec{c}\equiv\vec{c}_x+\vec{c}_y\rightarrow\vec{c}\equiv(C,\theta)$

$\frac{C_x}{C}=cos\theta\,\frac{C_y}{C}=sin\theta\,\frac{C_y}{C_x}=tan\theta$

$\theta=\arccos\left(\frac{C_x}{C}\right)\theta=\arcsin\left(\frac{C_y}{C}\right)\theta=\arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$

In 3 dimensioni si definisce una terna di versori: $\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$



$\vec{C}=\vec{c}_x\hat{i}+\vec{c}_y\hat{j}+\vec{c}_z\hat{k}$

$\vec{C}\equiv(C_x, C_y, C_z)\rightarrow C=\sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}=\sqrt{C_1^2+C_z^2}$

Lezione del 24-03

Moltiplicazione scalare per vettore

$\vec{a}(a_x, a_y), m\in R$

$\vec{v}=m\vec{a}\vec{a}=\vec{a}_x\hat{i}+\vec{a}_y\hat{j}$

$\vec{v}=m(\vec{a}_x\hat{i}+\vec{a}_y\hat{j})=m\vec{a}_x\hat{i}+m\vec{a}_y\hat{j}$

Analogamente in 3 dimensioni:

$\vec{v}=(m\vec{a}_x\hat{i}, m\vec{a}_y\hat{j}, m\vec{a}_z\hat{k})$

Somma di due vettori nel piano

$$\vec{c}=\vec{a}_x\hat{i}+\vec{a}_y\hat{j}+\vec{b}_x\hat{i}+\vec{b}_y\hat{j}(\vec{a}|x+b_x)\hat{i}+(\vec{a}|y+b_y)\hat{j}$$

Le componenti del vettore somma sono pari alla somma delle componenti analoghe.

In generale dati $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

Il vettore c dato dalla somma di tutti gli $\vec{a}_n$ sarà: $\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$

Scomposto nelle sue componenti **x** e **y:** $\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_x e \sum_{i=1}^{n}\vec{a}_y$

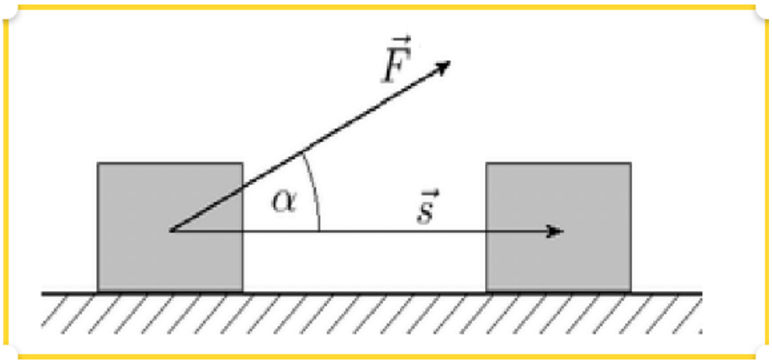
Il vettore gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa

Prodotto scalare

$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\vec{a}\vec{b}\,cos\theta$

Il lavoro

Definiamo il lavoro come il prodotto **scalare** della forza per lo spostamento.



Formule:

$s=\frac{1}{2}at^2\,v=at$

Visto che $t=\frac{v}{a}\rightarrow s=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2}\rightarrow s=\frac{1}{2}\frac{v}{a}$

Con $a=\frac{F}{m}\rightarrow\frac{F}{m}s=\frac{v^2}{2}\rightarrow Fs=\frac{1}{2}mv^2$

A seconda di θil lavoro sarà:

$\theta<\frac{\pi}{2}\vec{a}*\vec{b}>0\,\theta>\frac{\pi}{2}\vec{a}*\vec{b}<0\,\theta=\frac{\pi}{2}\vec{a}*\vec{b}=0$

Calcolo dell'angolo compreso tra 2 vettori (angolo minore)

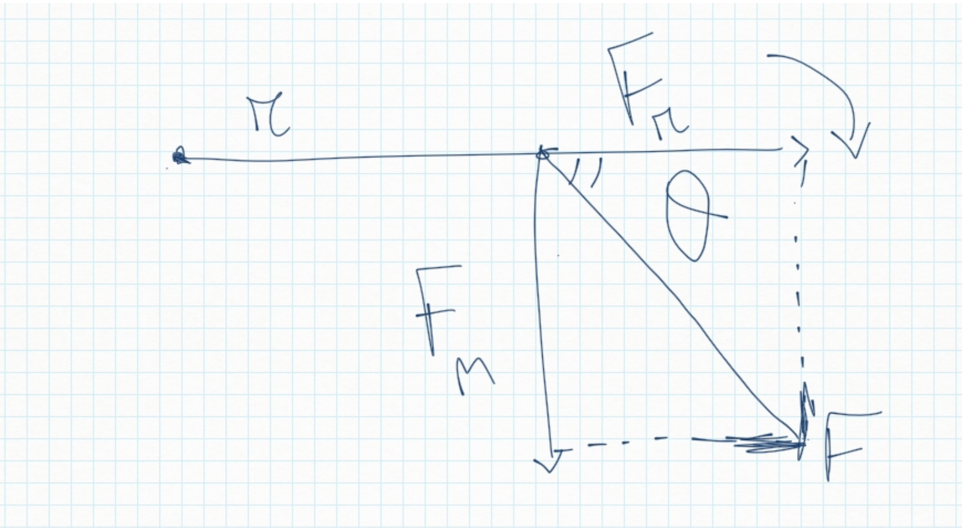
$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\,\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$

So che $ab=abcos\theta$. Ricavo quindi:

$cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|ab|}$

Lezione del 27-03

Momento di una forza



$F_r = F\cos\theta \; F_n = F\sin\theta$

Modulo del momento della forza (tau):

$\tau = r\,F_n = rF\sin\theta$

τ è un vettore (diretto lungo l'asse di rotazione passante per 0); è perpendicolare al piano contenente $\vec{r}$ ed $\vec{F}$

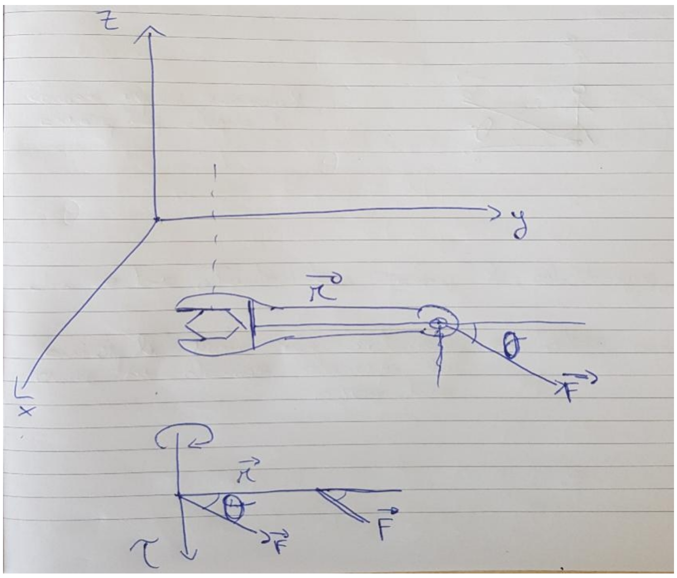
Uscente $\rightarrow$ rotazione antioraria

Entrante $\rightarrow$ rotazione oraria

τ direttamente proporzionale a F_n

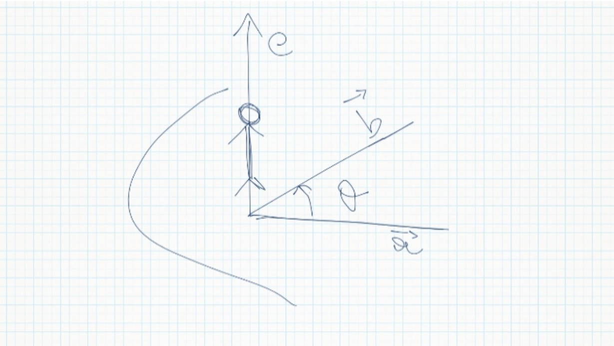
SI usa la moltiplicazione e non l'addizione in quanto abbiamo due grandezze diverse (meN)

$\tau \perp \vec{r} \; \tau \perp \vec{F}$



Prodotto vettoriale

$\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}\rightarrow|\vec{c}|=|\vec{a}|\wedge|\vec{b}|sin\theta\rightarrow c=absin\theta$



$\vec{c}$ perpendicolare al piano individuato ad ae b

Verso$\rightarrow$ osservatore che vede il primo sul secondo in un senso antiorario

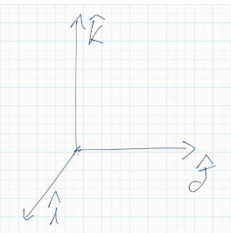
NON È COMMUTATIVO

$\vec{a}\wedge\vec{b}\neq\vec{b}\wedge\vec{a}$

$\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

Se $\vec{a}/\square\vec{b}$ allora il loro prodotto vettoriale è nullo

Il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma



$\hat{i}\wedge\hat{j}=\hat{k}\hat{k}\wedge\hat{i}=\hat{j}\hat{j}\wedge\hat{k}=\hat{i}\hat{i}\wedge\hat{i}=\hat{j}\wedge\hat{j}=\hat{k}\wedge\hat{k}=0$

In termini delle proprietà rettangoli dei due vettori: $\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}\rightarrow$

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=¿$$

Per calcolare il determinante si fa un versore alla volta

Con $\hat{i}$ versore: cancello la riga dei versori e colonna di $\hat{i}$ e moltiplico le diagonali

Per il segno : Se la somma di indice e colonna è pari metto + altrimenti - :

$i(1,1)\rightarrow+j(2,1)\rightarrow-k(3,1)\rightarrow+¿$

Di conseguenza l’intera operazione:

$\vec{a}\wedge\vec{b}=\hat{i}(a_y b_z-a_z b_y)-\hat{j}(a_x b_z-a_z b_x)+\hat{k}(a_x b_y-a_y b_x)$

Lezione del 31-03

Grandezze fisiche

Per definirla:

- Definire campione della grandezza (unità di misura)
- Costruire uno strumento che consenta di determinare il rapporto che esista

In generale una grandezza fisica sarà contrassegnata da un numero e una sua unità di misura

Le grandezze si distinguono in **fondamentali** (7) e derivate

Nel Sistema Internazionale (SI) esse sono:

Lunghezza, massa, intervallo di tempo, intensità di corrente elettrica, temperatura, intensità luminosa, quantità di sostanza

Equazioni dimensionali → legame tra grandezze fondamentali e derivate

$$[s]=[L^2] \rightarrow spazio=lunghezza^2 \quad [V]=[L^3] \rightarrow volume=lunghezza^3 \quad [v]=\frac{[L]}{T}\left([L\,T^{-1}]\right) \rightarrow velocità=\frac{lunghezza}{tempo}$$

$$d=\frac{[M]}{[L^3]} \rightarrow densità=\frac{massa}{lunghezza^3}$$

	SI	CGS
s	m^2	cm^2
V	m^3	cm^3
v	$\frac{m}{s}$	$\frac{cm}{s}$
d	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{g}{cm^3}$

$$[G]=[M^\alpha][L^\beta][T^\gamma]$$

$$Grandezza=massa^\alpha\, lunghezza^\beta\, tempo^\gamma$$

L'analisi dimensionale può essere utilizzata per trovare una relazione tra le grandezze che descrivono il fenomeno fisico

Es. forza centripeta $F \propto m^\alpha v^\beta r^\gamma$

$[F]=\frac{ML}{T^2}$ $\quad [m^\alpha][v^\beta][r^\gamma]=M^\alpha\left(\frac{L}{T}\right)^\beta L^\gamma=$

$=M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\beta}$

pertanto la formula della forza sarà

$F=\frac{mv^2}{r}$

Notazione scientifica e **cifre significative**

Ogni volta che si fa una misura si commette un errore dovuto alla sensibilità dello strumento

Le cifre significative di una misura sono cifre **certe** e cifre **incerte**

Es

$m = 1148\, kg$

In cui 1,1,4 sono le cifre certe e 8 quella incerta.

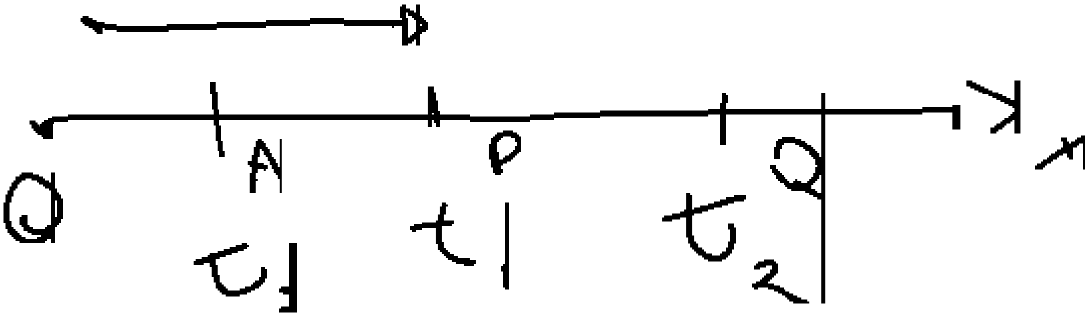
Metodo scientifico (G. Galileo)

1. Schematizzazione
2. Misura
3. Osservazione sperimentale
4. Organizzazione dei risultati nella forma di legge
5. Previsione di nuovi fenomeni
6. Verifica sperimentale delle previsioni

Divisione del metodo in **fase induttiva** e **fase deduttiva**

Moto rettilineo uniforme

Moto a una dimensione



$x = x(t)$ $\qquad x_0 = posizione al tempo\, t_0$

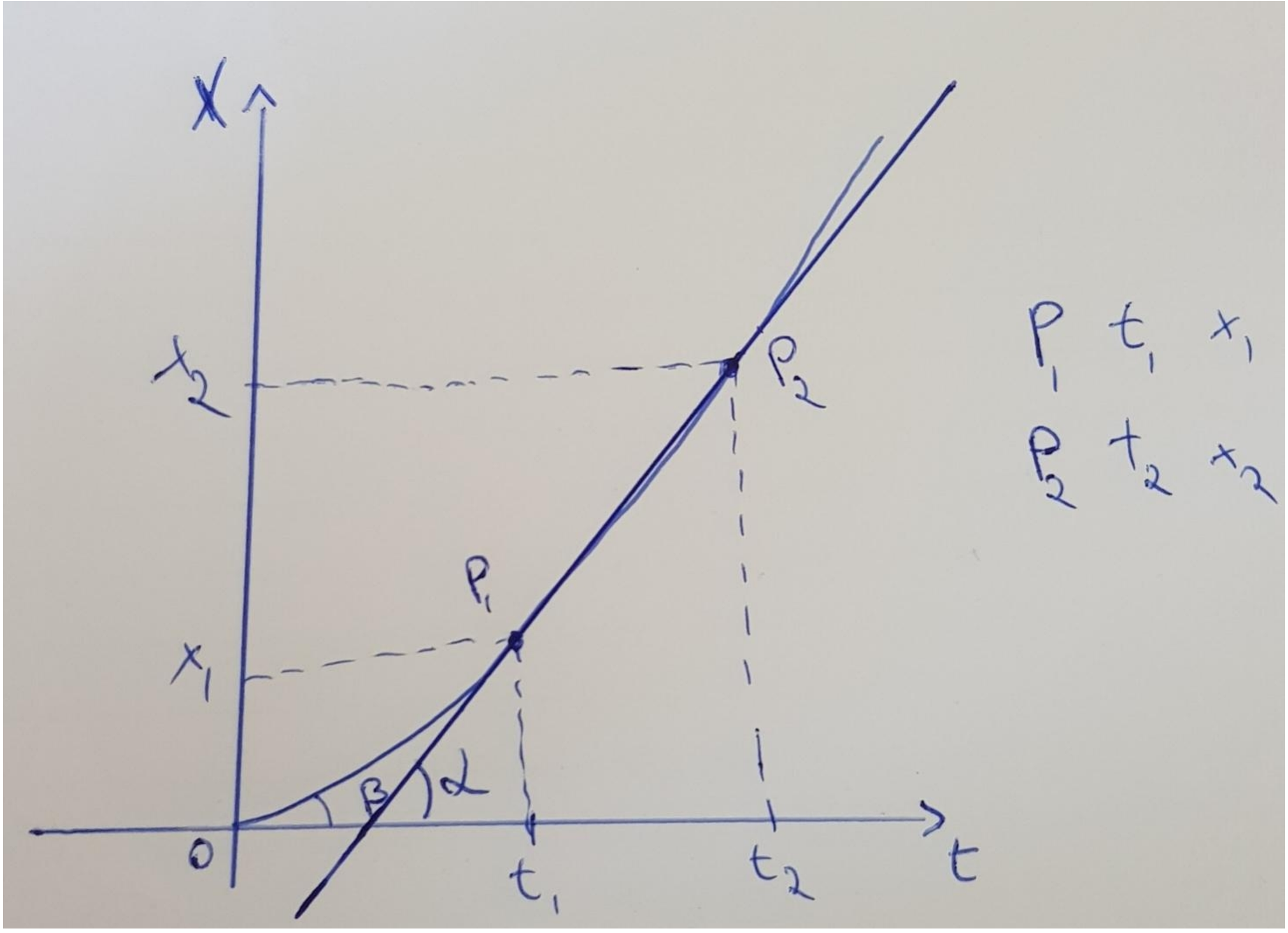
$x_1 - x_0$ spostamento nell'intervallo $[t_1 - t_0]$

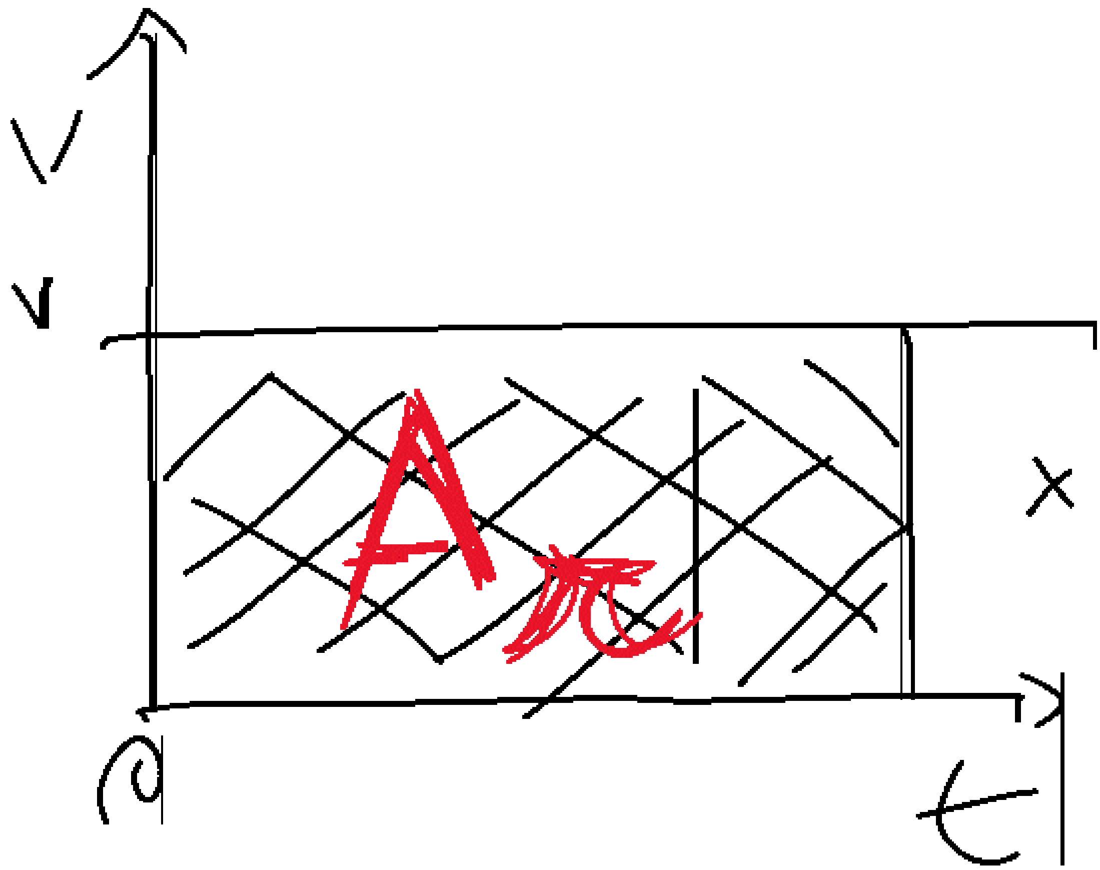
Velocità media nell'intervallo di tempo $[t_1 - t_0]$:

$$v_m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} x_1 - x_0 = \Delta x\, t_1 - t_0 = \Delta t$$

Legge oraria:

$$x - x_0 = vt$$





$x - x_0 = A_\pi$

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t)$

Accelerazione

$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$a_m = tan\alpha a = tan\beta$

Accelerazione istantanea all'istante t_1

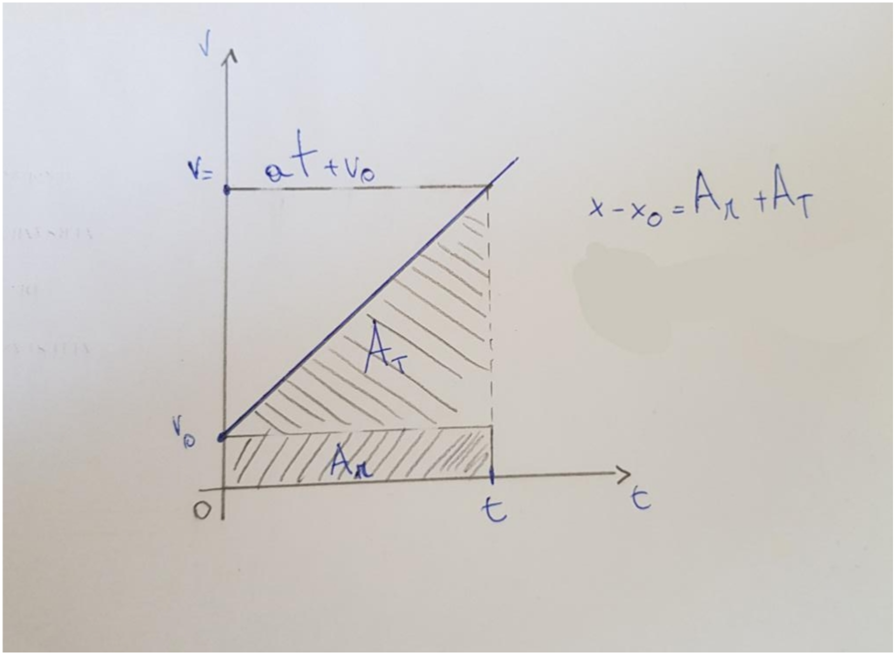
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{d t^2}$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt = [x(t)]_0^t = x(t) - x(0)$$

Moto uniformemente accelerato

Moto lungo una retta con a costante

$$acostante \to a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t} \Longrightarrow v = v_0 + at$$



Legge oraria

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$t=\frac{v-v_0}{a}$$
$$x=x_0+v_0 t+\frac{1}{2}at$$
$$\rightarrow v^2=v_0^2+2a\left(x-x_0\right)$$

NB: Di queste tre equazioni ne posso mettere a sistema solo due alla volta

La formula (3) si ricava mediante i seguenti passaggi

$$x = x_0 + v_0 \frac{(v-v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v-v_0)^2}{a^2}$$

$$x = x_0 + \frac{2 v_0 (v-v_0)}{2a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v-v_0)^2}{a^{\cancel{2}}}$$

$$x = x_0 + \frac{(v-v_0)}{2a} \left(2 v_0 + v - v_0\right)$$

$$x = x_0 + \frac{(v-v_0)}{2a} \left(v + v_0\right)$$

$$x = x_0 + \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a}$$

$$2a\left(x-x_0\right) = v^2 - v_0^2 \rightarrow v^2 = 2a\left(x-x_0\right) + v_0^2$$

Velocità media di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato

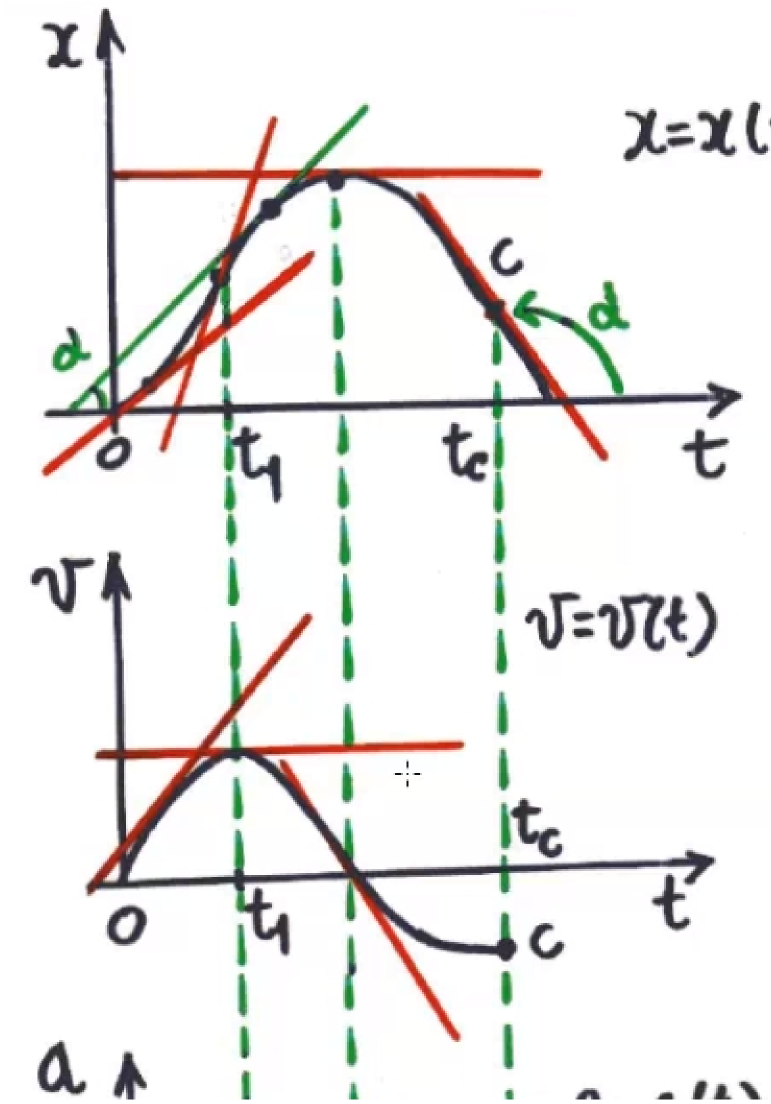
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

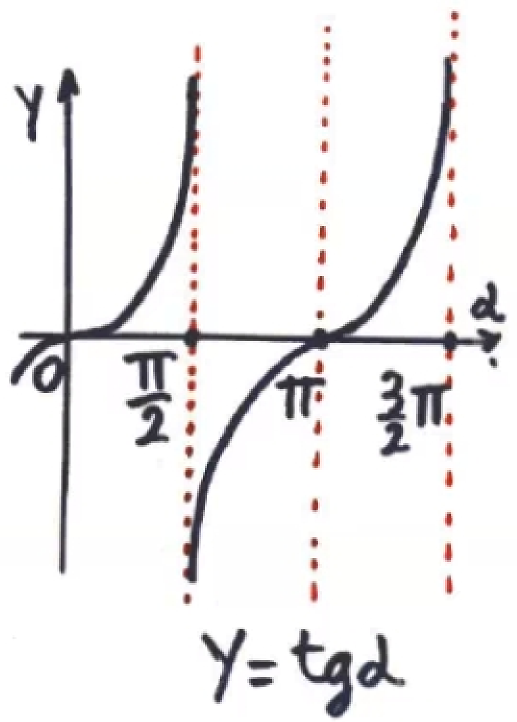
$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 x_2 = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

Da cui

$$v_m = \frac{v_0 (t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} + \frac{1}{2} a \frac{(t_2^2 - t_1^2)}{(t_2 - t_1)}$$

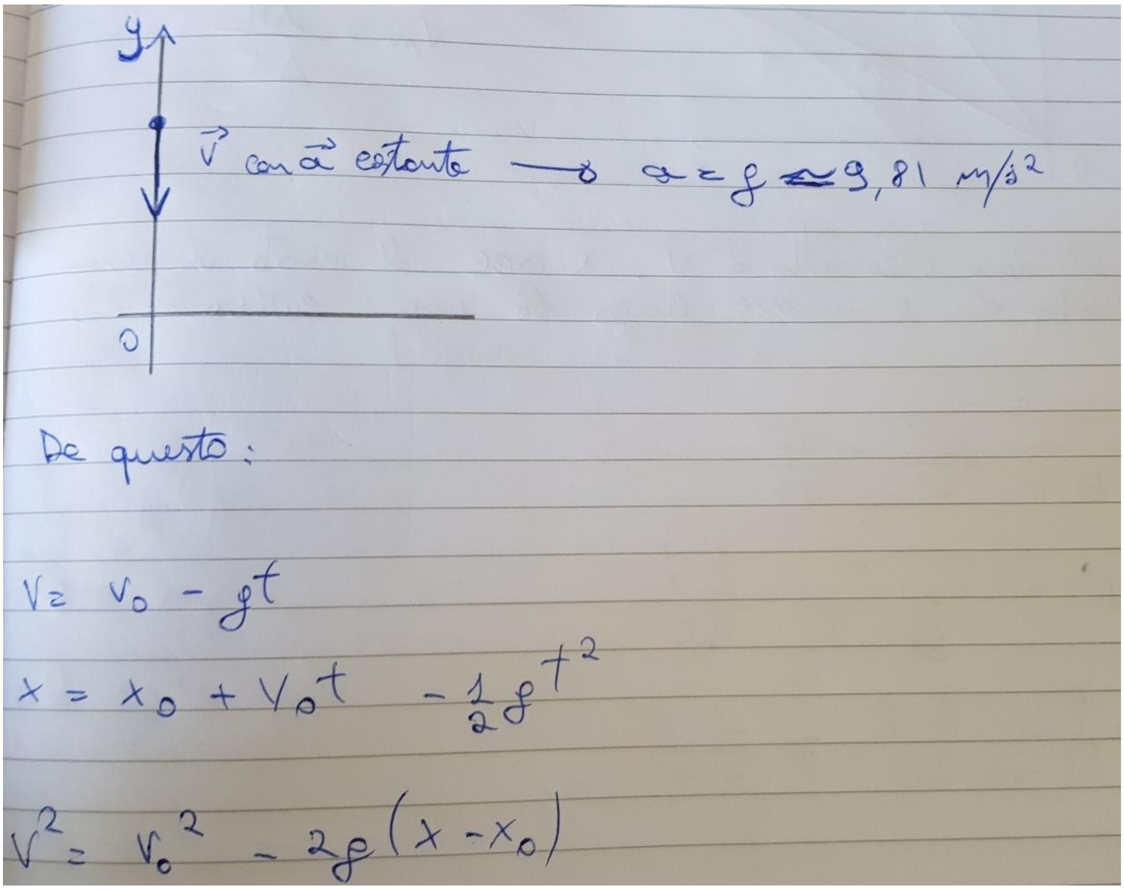
$$v_0 + \frac{1}{2} a (t_2 + t_1) \frac{2 v_0 + a (t_2 + t_1)}{2} \frac{v_1 + v_2}{2}$$



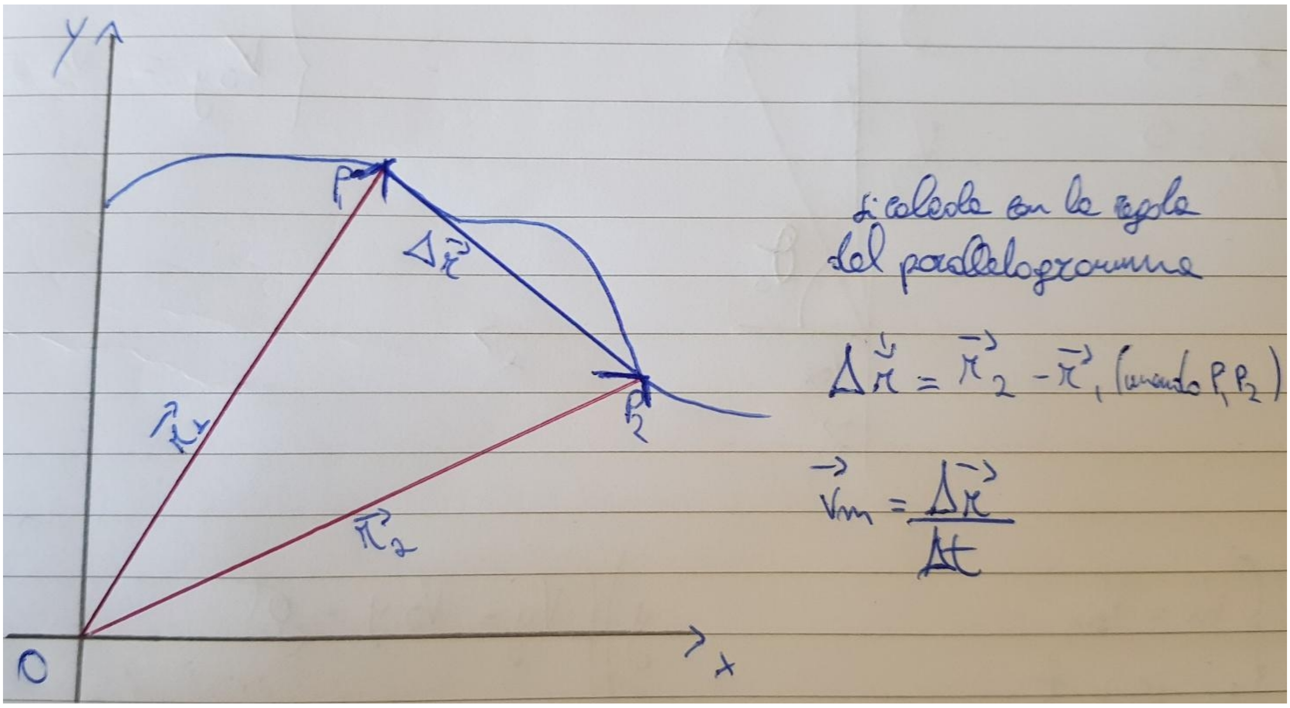


Lezione del 07-04

Caduta libera



Moto del proiettile



Si estendono i concetti di velocità e accelerazione al moto di una particella che si muove lungo una curva a 2D

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a_{media}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Per un punto materiale di coordinate (x,y) nel piano x,y il vettore posizione è

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$$

Componenti vettore posizione = componenti punto materiale

In $t_1-t_2\vec{r}(t)$:

$$r_1=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}\,r_2=x_2\hat{i}+y\hat{j}$$

Si ha uno spostamento:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}=\Delta x\hat{i}+\Delta y\hat{j}$$

$$v_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta y}\hat{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

velocità istantanea $\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}x\hat{i}+\frac{d}{dt}y\hat{j}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$

dove $v_x=\frac{dx}{dt}$ e $v_y=\frac{dy}{dt}$

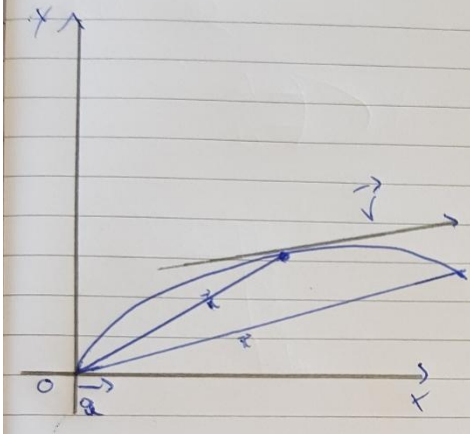
sono le componenti x ed y del vettore velocità $\vec{v}$

l'intensità o modulo della velocità $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$

e la direzione orientata è data dall'angolo $\theta=\text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x}$

$\vec{a}_m=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$ $\vec{a}=\frac{dv_x}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$

$a_x=\frac{dv_x}{dt}$ $a_y=\frac{dv_y}{dt}$



$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$x = x(t) \quad y = y(t)$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

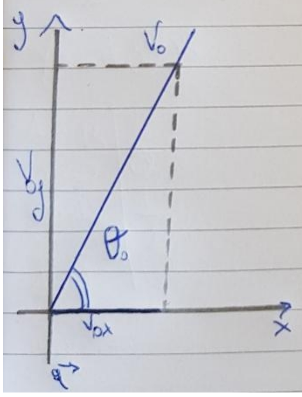
$$a = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$r_0 = \vec{0}$

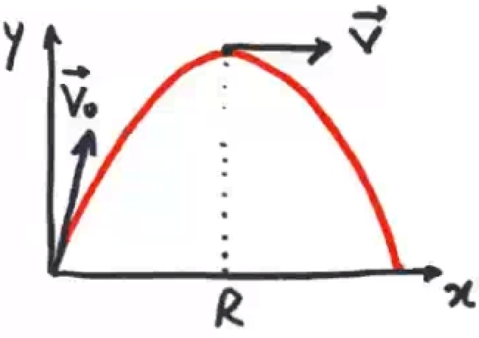
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

V_0

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\theta \\ V_{0y} = V_0 \sin\theta \end{cases}$$



$$x) \begin{cases} v_x = V_{0y} \\ x = V_{0x} t \end{cases} \qquad y) \begin{cases} V_y = V_{0y} - gt \\ y = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



R: GITTATA

$V_y = V_{0y} - gt$

$V_y = 0 \qquad V_{0y} - gt = 0$

$t = \frac{V_{0y}}{g} \qquad x = V_{0x} t \qquad \frac{R}{2} = V_{0x} \frac{V_{0y}}{g}$

$R = 2 \frac{V_{0x} V_{0y}}{g} \qquad R = \frac{2 (V_0 \cos\theta_0)(V_0 \sin\theta_0)}{g}$

$R = \frac{V_0^2}{g} (2 \sin\theta_0 \cos\theta_0)$

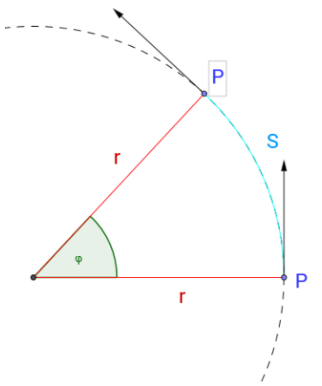
$$R = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \qquad R_{max} = \frac{V_0^2}{g} \quad \theta_0 = 45°$$

nella realtà $< 45°$

TRAIETTORIA $\quad y = y(x)$ $\quad \begin{cases} x = V_{0x} t \\ y = V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

$$t = \frac{x}{V_{0x}} \qquad y = V_{0y}\frac{x}{V_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_{0x}}\right)^2$$

Lezione del 17-04



$\vec{v} \perp \vec{r}$

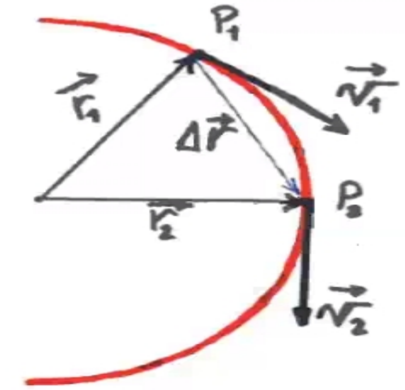
Il vettore velocità è costante; (vettore posizione)

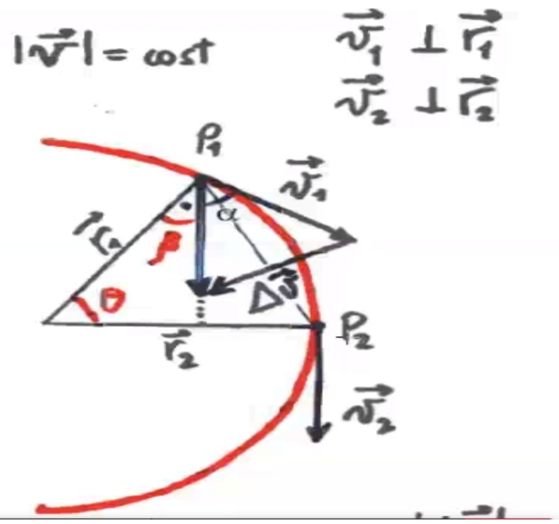
Traslo $\vec{v}_2$in modo da avere lo stesso punto di applicazione di $\vec{v}_1$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$

Uso la regola del parallelogramma

Stessa cosa per il vettore posizione. Mi costruisco così il triangolo isoscele avente lati uguali $\vec{v}_1 e \vec{v}_2$r base Δr





Il nostro obiettivo è dimostrare che l'angolo al vertice di questo triangolo α sia uguale all'angolo θ nel punto di origine del triangolo $P_1 O P_2$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \frac{\pi}{2} \\ \theta+\beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \Longrightarrow \alpha=\theta$$

$$|\Delta\vec{v}|=\Delta v \quad |\Delta\vec{r}|=\Delta r$$

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{\Delta r}{r} \Longrightarrow \frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta r}{r} \Longrightarrow \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Faccio i dovuti calcoli e ottengo:

$$\frac{1}{v}*a=\frac{1}{r}*v \rightarrow a=\frac{v^2}{2}$$

Con $\vec{a}=¿$accelerazione centripeta.

Caso in cui ci si trovi in un moto uniforme:

$$v_r=0 \qquad v_t=v$$
$$a_r=\frac{-v^2}{2} \qquad a_t=0$$

Con t = tangenziale

r = radiale

Nel caso in cui il moto non sia uniforme

$$\vec{a} \equiv \begin{cases} a_r=\frac{-v^2}{2} \\ a_t=\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

a_r influisce sulla variazione dell'orientazione del vettore velocità

a_t influisce sulla variazione del modulo della velocità

Nel caso di un moto non uniforme studio il moto punto per punto in modo da poter ragionare in modo analogo a uno uniforme sulla circonferenza che mi costruisco (cerchio osculatore)

LEGGE ORARIA:

Considero gli archi percorsi s_0. La legge quindi è la seguente:

$s=s_0+vt v=\frac{s-s_0}{t}$

$a_c=a_r=\frac{v^2}{2}$

Con periodo T e frequenza $f=\frac{1}{T}$ (misurata in Hertz) faccio le dovute sostituzioni e ottengo:

$s-s_0=2\pi r$

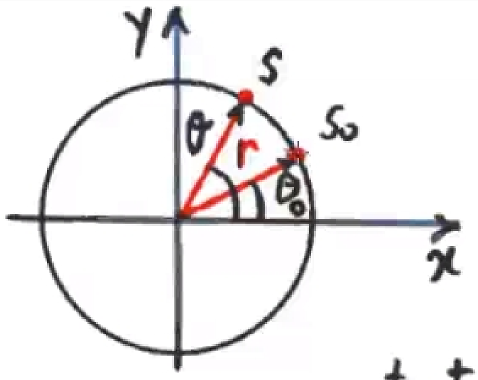
da cui:

$$v=\frac{2\pi r}{T} \Longrightarrow \begin{matrix} T=\frac{2\pi r}{v} \\ f=\frac{v}{2\pi r} \end{matrix}$$

Sostituendo $v$nell'equazione dell'a_c ottengo:

$a_c=\frac{v_2}{r}=\frac{(2\pi r)^2}{r\,T^2}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

In variabili angolari:



$s-s_0=vt$

t_0 θ_0

t θ

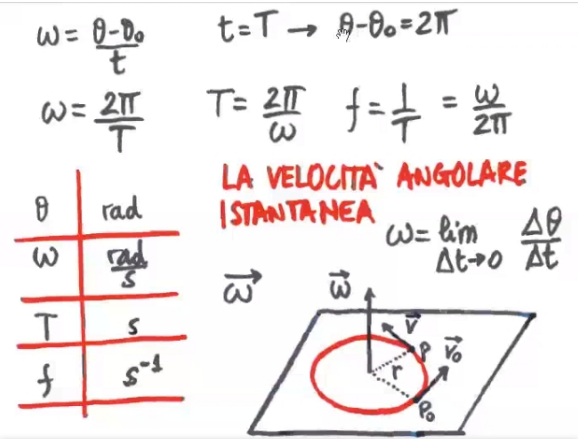
$t-t_0$ $\theta-\theta_0$

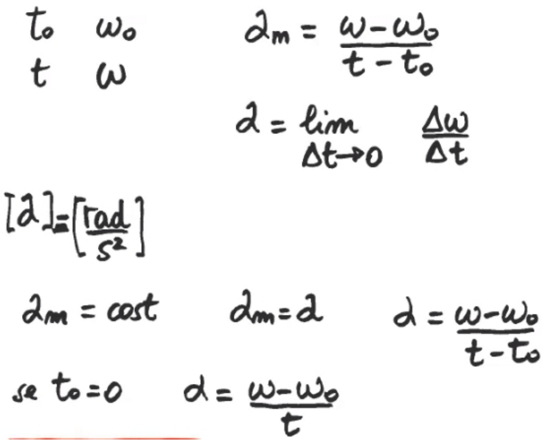
$\omega_m=\frac{\theta-\theta_0}{t-t_0}$ $\omega_m=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

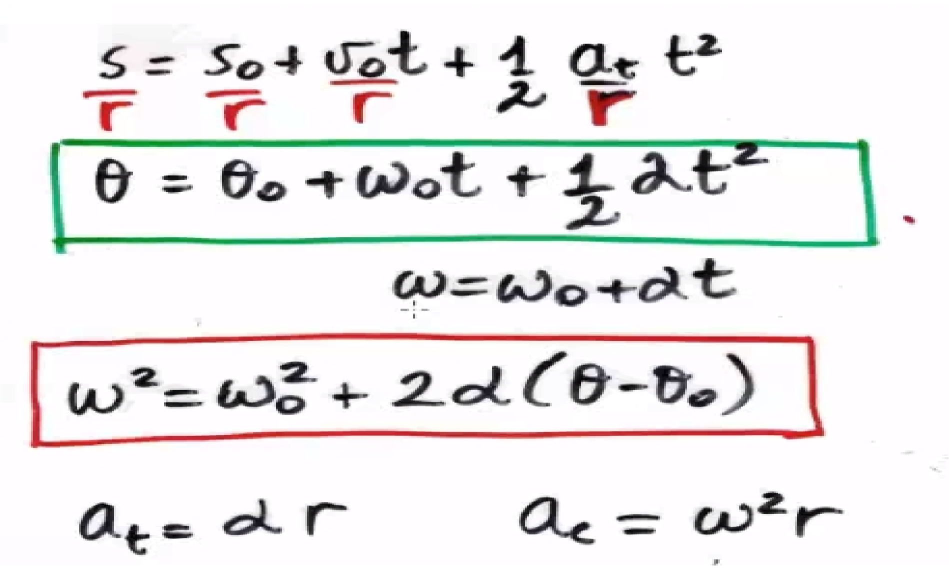
IN UN MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$\Delta\theta$ e Δt SONO PROPORZIONALI

Con ω_m velocità angolare/ spostamento angolare







Notazione vettoriale del moto circolare in variabili angolari

Al concetto di velocità angolare del moto circolare è possibile associare le caratteristiche vettoriali.

Si definisce come velocità angolare il vettore $\vec{\omega}$ che ha le seguenti proprietà: Il modulo è

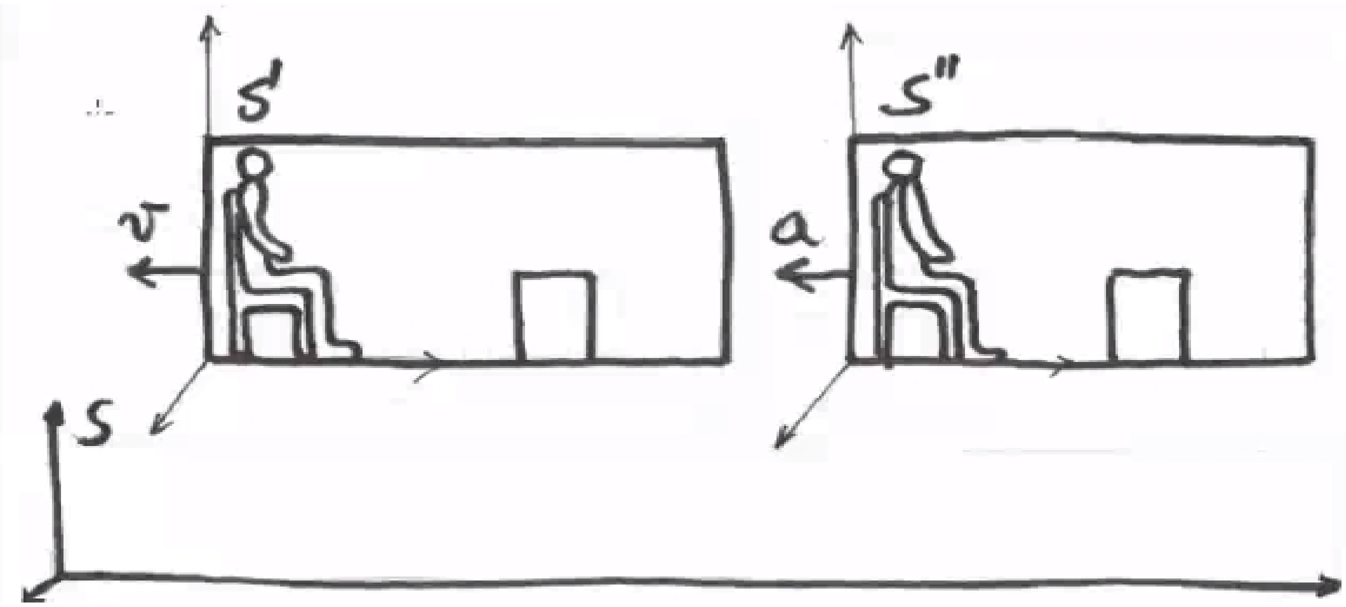
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La direzione è perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e coincide con l'asse di rotazione; il verso è tale che dall'estremo del vettore $\vec{\omega}$ il moto appaia antiorario.

In base alla definizione risulta evidente che il vettore velocità $\vec{v}$ che è sempre tangente alla traiettoria può esprimersi come:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Lezione del 21-04



Sistemi di riferimento $\begin{matrix} \rightarrow inerziali \\ \rightarrow noninerziali \end{matrix}$

Leggi della dinamica

1° principio:

Un **corpo isolato** (non soggetto a forze $\rightarrow F_{risultante}=0$) o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme

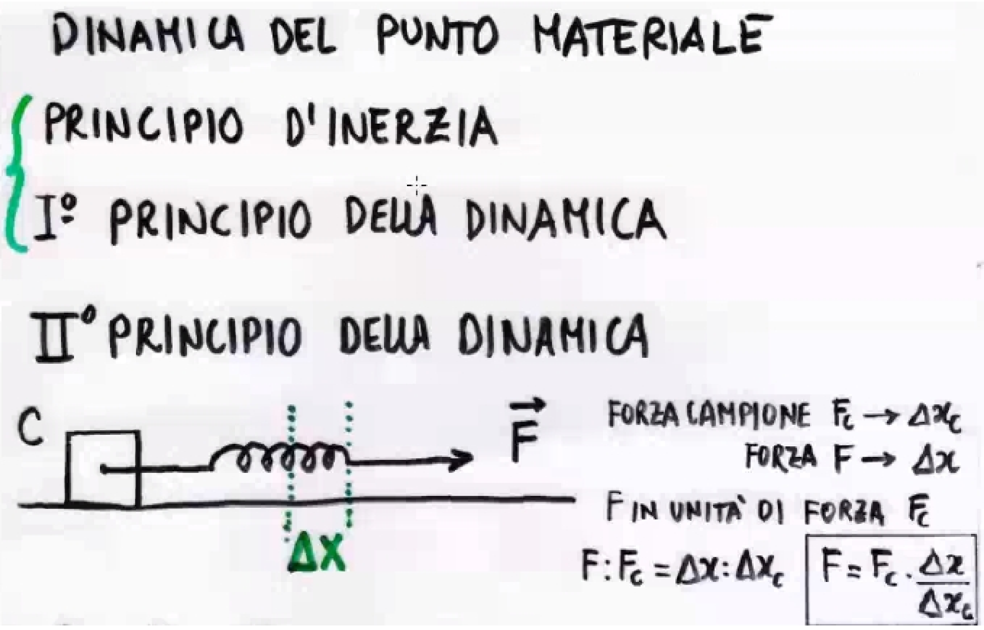
MEMO:

Corpo isolato $\rightarrow F_{risultante}=0$

Un sistema di riferimento solidale con la Terra (sistema di laboratorio) per fenomeni che durano solo qualche minuto si muove di moto rettilineo uniforme.

Principio di relatività galileiana

Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.



$c_1 e c_2$ corpi:

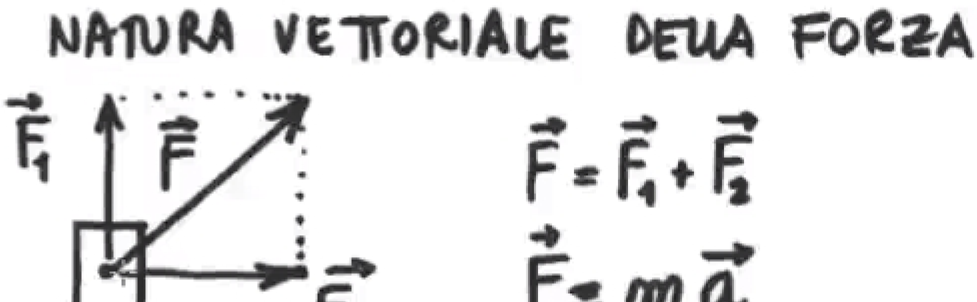
$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\ldots=\frac{F_n}{a_n}=\cos t_1 \frac{F_1^1}{a_1^1}=\frac{F_2^1}{a_2^1}=\ldots=\frac{F_n^1}{a_n^1}=\cos t_2$$

Si fa il prodotto per cercare un eventuale proporzione

Questa costante dipende dal corpo ed è chiamata **massa** del corpo

È una proprietà intrinseca del corpo e non dipende dall’ambiente circostante. È una grandezza scalare.

$F=m\vec{a}$



Per stabilire una scala della massa scegliamo un particolare corpo come corpo campione considerandola come unità di misura

$$[F]=\frac{[kg][m]}{[s][s]}=[N]$$

Altro modo di enunciare il 2° principio della dinamica

$m, \vec{v} \; p = m\vec{v}$

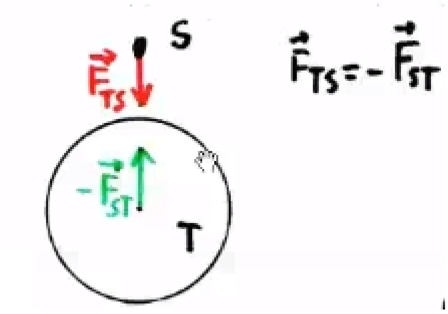
Con $p$quantità di moto

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \vec{F} = \frac{dp}{dt}$

Con $m$costante:

$\vec{F} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = v\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

3° principio:



Le forze agiscono sempre in coppie

Azione e reazione →

Conseguenza

La quantità di moto totale (p) di un sistema isolato si conserva (resta costante nel tempo)

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} \rightarrow \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \vec{0}$

$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = \vec{0}$

$dacui$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = costante \rightarrow \vec{p} = cost$

Lezione del 24 -04

L’impulso

L’impulso della forza che agisce su un corpo è uguale alla variazione di moto Δp che subisce un corpo:

$$\vec{F}=m\vec{a} \text{ma anche } \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Con $\vec{F}$ costante

$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\rightarrow\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$

E quindi

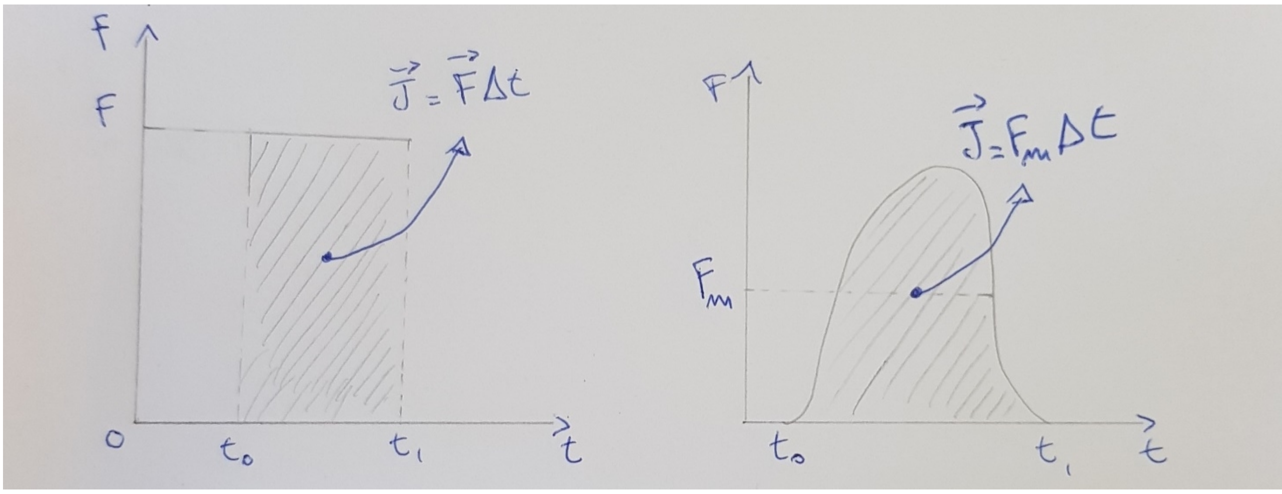
$\vec{J}=\vec{F}\Delta t$

Teorema dell’impulso

Effetto della forza in un intervallo Δt

Caso $\vec{F}$costante

Caso $\vec{F}$variabile



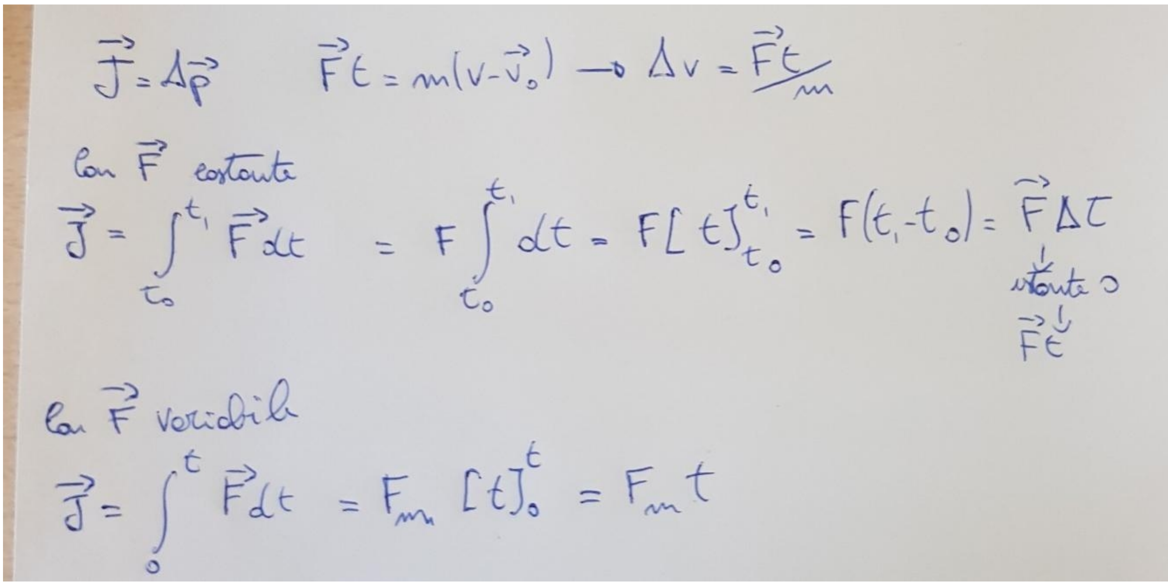
Con un Δtcrescente diminuisci la forza d’urto

$$\vec{J}=\int_0^{t_0}\vec{F}\,dt=\int_0^{t_0}d\vec{p}=[p]_0^t=\vec{p}(t)-\vec{p}(0)=\vec{p}-\vec{p}_0=\Delta\vec{p}$$

Il termine vettoriale $\vec{j}$, integrale della forza nel tempo è chiamato **impulso della forza** e la relazione $\vec{j}=\Delta\vec{p}$ esprime il teorema dell’impulso

$\vec{j}$ applicata a un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto.

L’unità di misura dell’impulso è: $N*s$



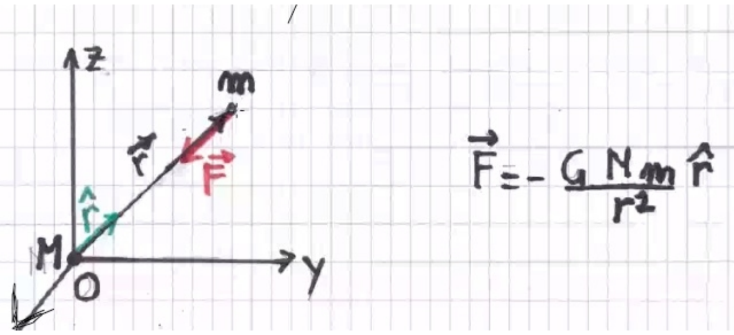
Legge di gravitazione universale

Tra due particelle di massa M ed m poste a distanza r si esercita una forza attrattiva che agisce lungo la congiungente le due particelle ed ha modulo:

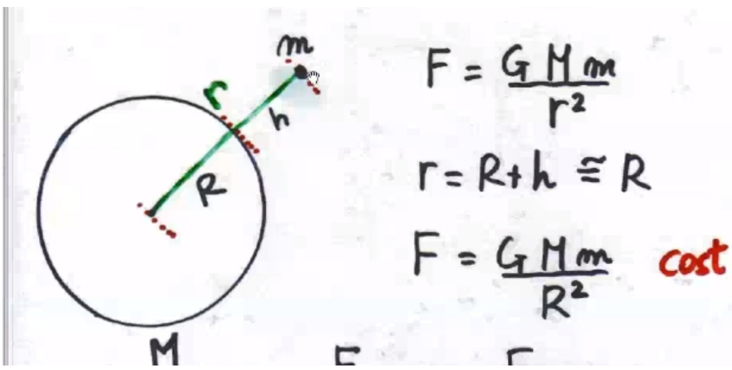
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Con $G = 6.6720 * 10^{-11} \frac{N m^2}{k g^2}$

Dove G è una costante universale avente lo stesso valore per tutte le coppie di particelle.



Caso in cui considerassimo un corpo e la massa terrestre



$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = mg$$

$$mg=\frac{GMm}{R^2} \rightarrow g=\frac{GM}{R^2}$$

Lezione del 28 -04

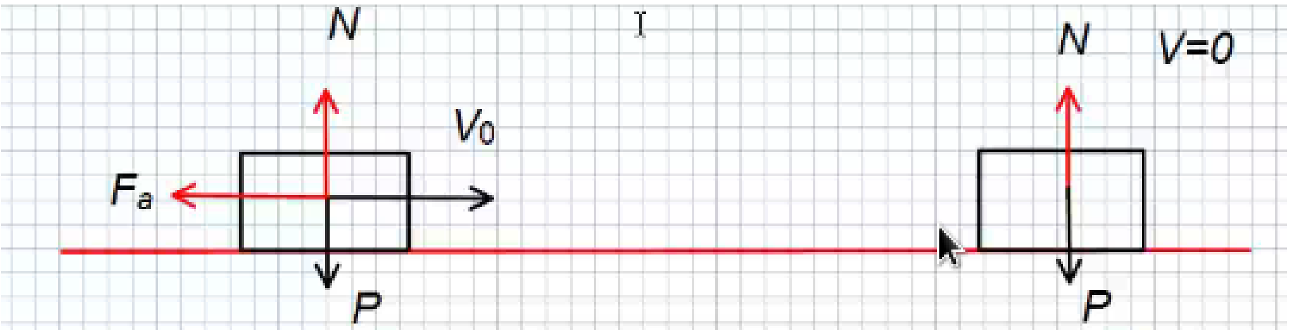
Caso della terra

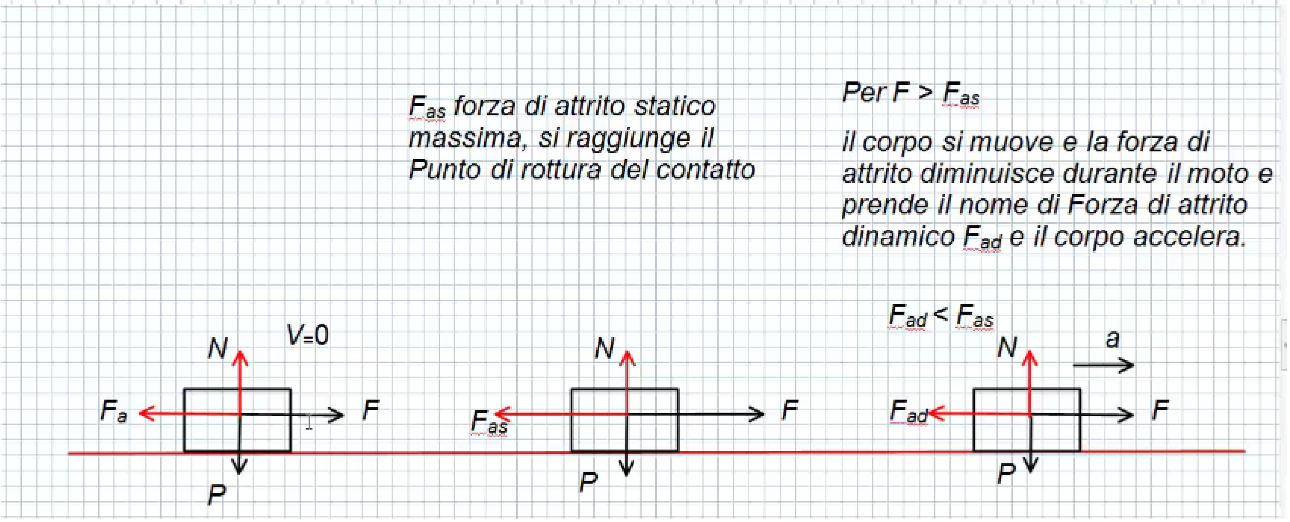
Densità sigma (σ)

$$\frac{m}{V}$$

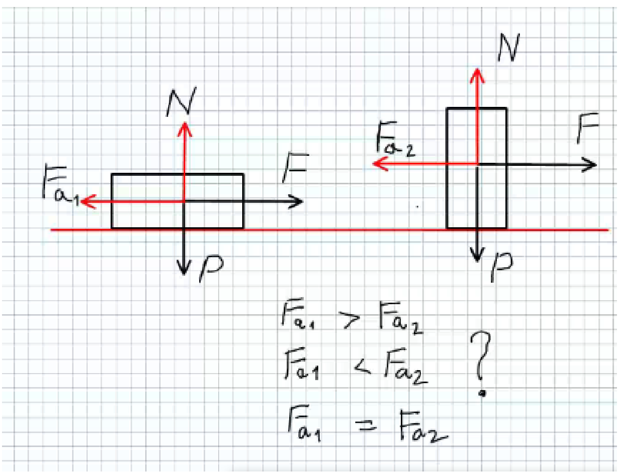
Forza d'attrito

La forza d'attrito è una forza resistente al moto dovuta all'interazione del corpo (in movimento) con ciò che lo circonda. SI presenta, ad esempio, nel caso di un corpo in moto che striscia su una superficie scabra o nel caso di un corpo immerso in un mezzo viscoso quale l'aria o l'acqua.



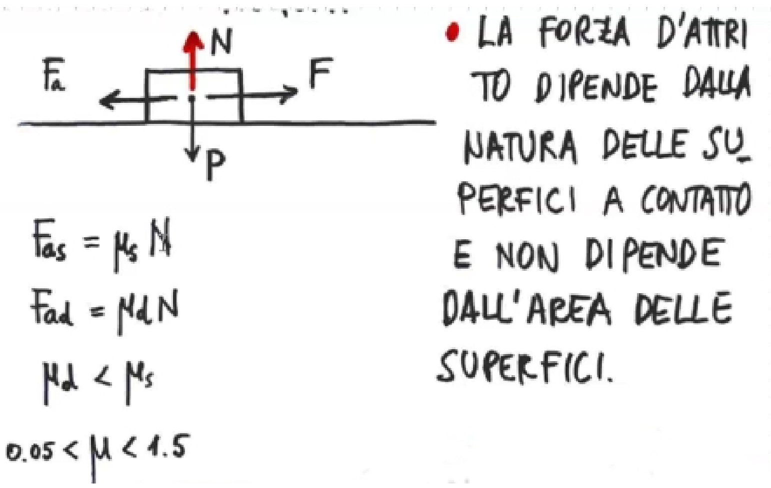


Forza di attrito e area delle superfici a contatto

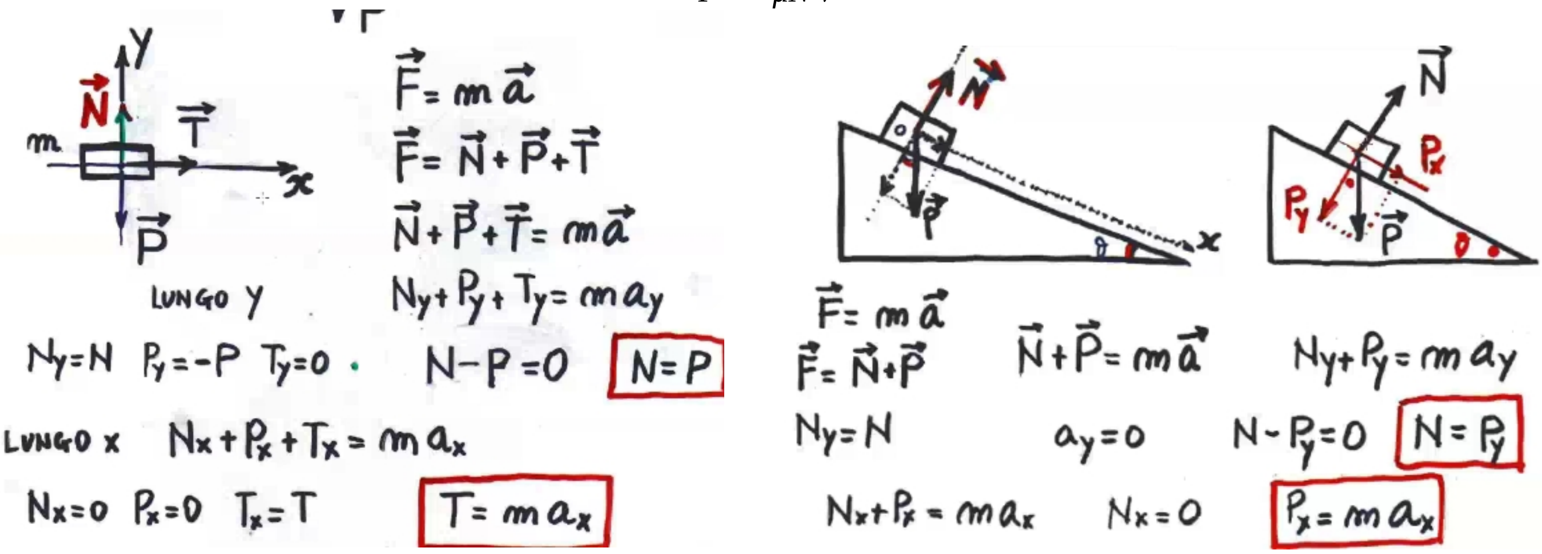


La forza d’attrito deve essere espressa bella stessa direzione del vettore velocità $\hat{v}$. Visto che il verso è opposto al vettore aggiungiamo il segno -

Proprietà delle forze di attrito



$$\vec{F} = -\mu N\,\hat{v}$$



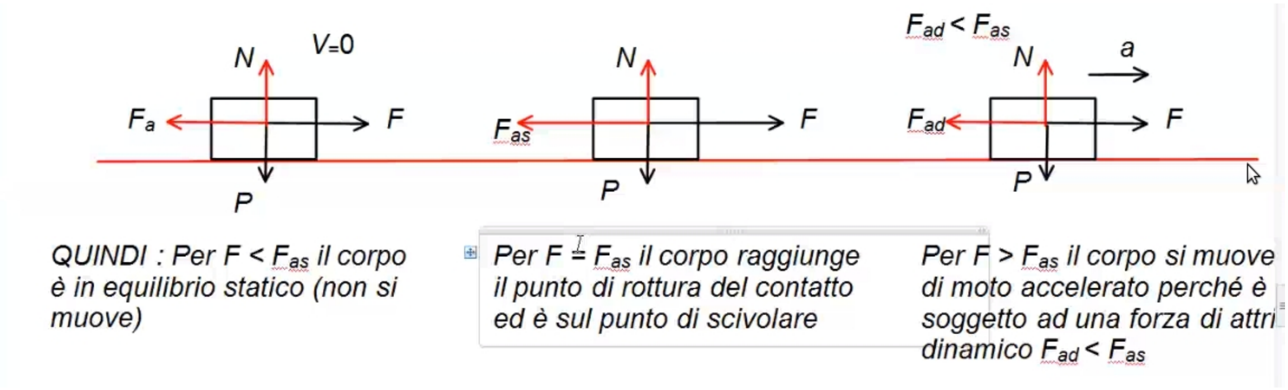
$N = P_y$ $\quad P_y = P\cos\theta \quad N = P\cos\theta \quad \boxed{N = mg\cos\theta}$

$P_x = m a_x \quad P_x = P\sin\theta \quad P_x = mg\sin\theta$

$\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a_x \quad \boxed{a_x = g\sin\theta}$

con T costante $\rightarrow a_x = \dfrac{T}{m}$

L’accelerazione dunque non dipende dalla massa del corpo in esame



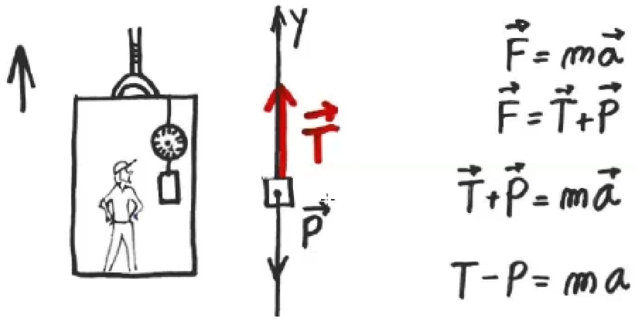
Riassumendo se un oggetto pesante è appoggiato su un piano orizzontale rigido, allora il piano esercita sull'oggetto una reazione normale al piano che equilibra la forza peso $\vec{P}$. Se esercitiamo una forza attiva $\vec{N}$orizzontale e il corpo non si muove vuol dire che la forza attiva è equilibrata da una forza vincolare di attrito $\vec{N}$(che si produce tra le superfici a contatto), uguale e opposta ad $\vec{N}$. Chiamiamo $\vec{N}$forza di attrito statico, e all'aumentare dell'intensità $\vec{N}$della forza, la forza di attrito statico aumenta della stessa intensità fino ad un valore massimo $\vec{F}_{as}$in corrispondenza del quale il corpo raggiunge il punto di rottura del contatto ed è sul punto di scivolare. Si avrà pertanto che:

$$\vec{F} = -\vec{F}_a$$

con $F \leq F_{as}$

É bene osservare che la forza di attrito $\vec{F}_a$e la reazione normale $\vec{N}$ sono le componenti della reazione vincolare $\vec{N}$ che il piano esercita sul corpo.

Peso di   un corpo in ascensore



$$T = ma + P = m(a+g) \rightarrow T = mg\left(\frac{a}{g} + 1\right)$$

$T > P$

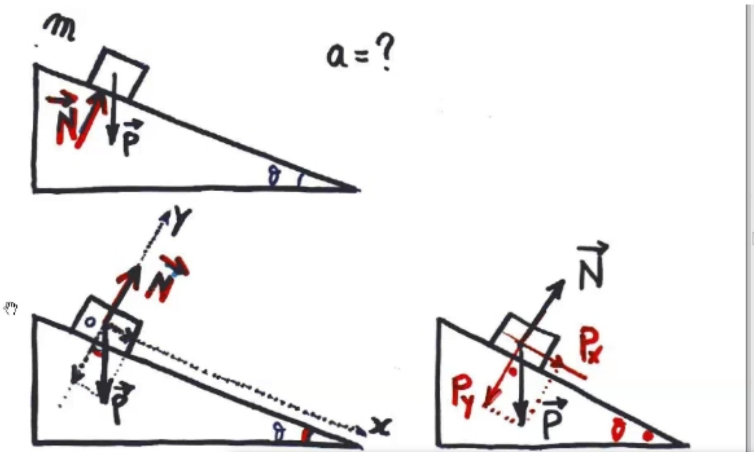
nel caso in cui l'ascensore andasse verso il basso

$$T - P = -ma \rightarrow T = P - ma \rightarrow T = mg - ma$$

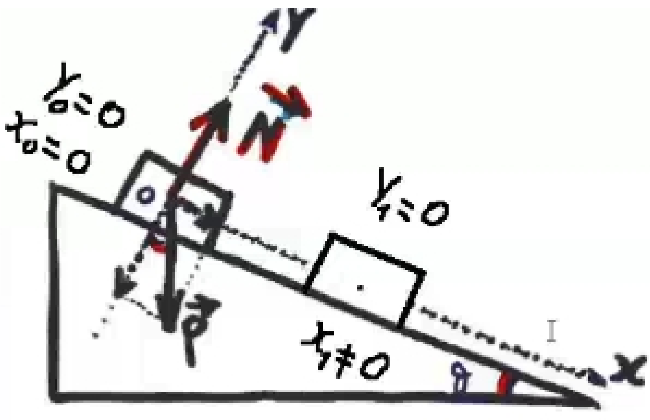
$$T = mg\left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

$T > P$

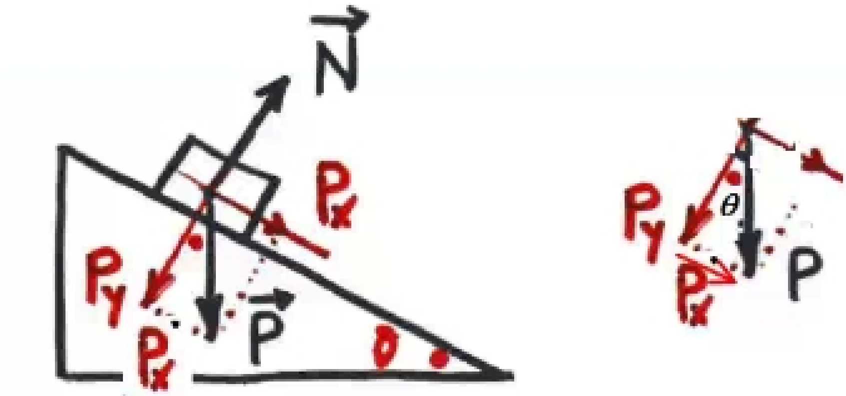
Con $a = g \rightarrow T = 0$



con $\vec{F} = m\vec{a}$



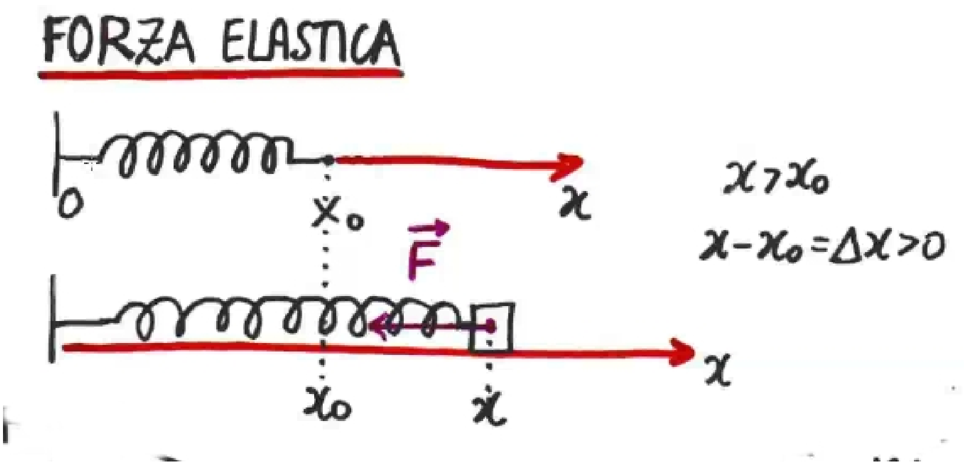
Durante il moto sul piano inclinato il corpo si muove solo rispetto all'asse delle x nel sistema di riferimento $0xy$



$$P_x = P \sin\theta$$
$$P_y = P \cos\theta$$

La forza elastica

In natura non esistono corpi perfettamente rigidi. Se al cessare della causa deformante la deformazione stessa cessa di esistere verremo incontro al fenomeno dell'**elasticità**. Per i corpi elastici vale la legge di Hooke secondo cui esiste una relazione di proporzionalità diretta fra la deformazione e la causa deformante



Lezione del 30-04

Le leggi delle forze

→ Forze di contatto

→ Forze a distanza o forze di campo

A livello microscopico le forze possono essere ridotte a forze elettromagnetiche (fatta eccezione per la forza peso F_p

Le forze che si manifestano in natura si possono racchiudere in 3 categorie:

- Forze gravitazionale;
- Forze elettrodeboli (responsabile della radioattivà)
- Forze nucleari forti.

Il lavoro

Pt.2

Nel CGS:

$$1\,erg = 1\,dine * 1\,cm$$

$$1\,N = 10^5\,dine$$

Con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ forza motrice (lavoro motore):il lavoro risulta maggiore di zero

Con $\theta > \frac{\pi}{2}$ forza resistente (lavoro resistente): il lavoro risulta minore di zero

Con $\theta = \frac{\pi}{2}$ il lavoro risulterà nullo

Considerando $L = Fs$

Attraverso la formula della cinematica:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(s - s_0\right)$$

Con $s_0 = 0$

E sostituendo ad a $\frac{F}{m}$ ottengo:

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{m}s \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2\frac{L}{m}$$

E quindi:

$$L = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

Questo lavoro prende il nome di **energia cinetica** E_c**.**

Il lavoro quindi sarà uguale alla variazione dell'energia cinetica ΔE_c di un corpo che vada dal punto A al punto B

$$[E]=[L]=[JOULE]$$

Lavoro di una forza variabile

(la traiettoria non è in generale rettilinea, ma curvilinea)

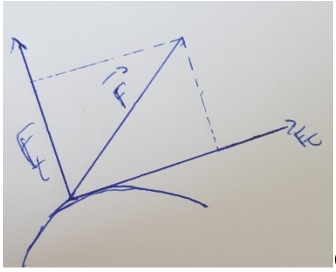
Nel caso in cui F sia variabile cerco di scomporre il lavoro in piccoli casi in cui il lavoro abbia una forza costante (cioè considero dei piccoli Δs). Ottengo tanti Δs e ragiono in questo modo:

$$L_{AB}=\sum_{i=1}^{N} \Delta L_i=\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta \vec{s}_i$$

$$L=\lim_{\Delta \vec{s}_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta \vec{s}_i$$

Teorema delle forze vive

$$L=\int_A^B F\, ds=\int_A^B F(\cos\theta)\, ds$$



dove F_t è la componente parallela alla direzione del moto

$$L=\int_A^B F_t\, ds$$

dove $F_t=m a_t=m\frac{dv}{dt}$

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{\Delta v}{\Delta s}\right) \to \frac{dv}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds}$$

$$L=\int_A^B F_t\, ds=\int_A^B m\frac{dv}{dt}ds=\int_A^B m\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds}=\int_{v_A}^{v_B} m v\, dv=m\int_{v_A}^{v_B} v\, dv=m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_A}^{v_B}$$

Quindi

$$L=\frac{1}{2}m v_B^2-\frac{1}{2}m v_A^2$$

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2$$

Se il corpo è inizialmente fermo:

$$L=\frac{1}{2}m v^2$$

Lezione del 05-05

MEMO

Il lavoro risultante delle forze è uguale alla variazione dell’energia cinetica ΔE_c

La potenza

$\Delta L, \Delta t$

$$\vec{N}$$

La potenza può essere rappresentata come:

$$\vec{N}$$

Si misura in Watt:

$$\vec{N}$$

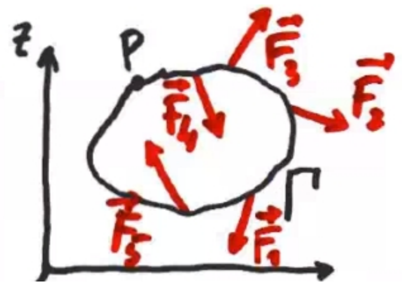
Nel caso in cui $\vec{N}$sia costante

$$\vec{P}=\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}F*s=F\frac{d\vec{s}}{dt}=\vec{F}\vec{s}$$

I campi di forza

Sono una porzione dello spazio in cui agisce punto per punto una forza.

Sia P un punto dello spazio e Γ (gamma) un qualsiasi percorso chiuso



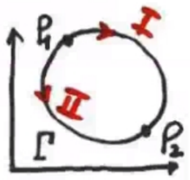
Il lavoro compiuto dal campo di forze per spostare un punto materiale lungo la traiettoria chiusa Γ è dato da:

$$L(\Gamma)=\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Una forza è conservativa se il lavoro da esso compiuto per spostare un punto materiale su un qualsiasi percorso chiuso è nullo:

$$L(\Gamma)=0$$

Una forza è conservativa se il lavoro da essa eseguito per spostare un punto materiale da un punto ad un altro dipende solo da questi punti e non dal cammino percorso



$$L^{I}(P_1,P_2)=\int_{P_1\,I}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$L^{II}(P_1,P_2)=\int_{P_1\,II}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

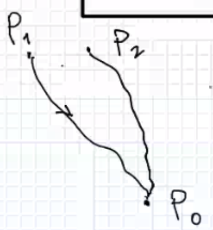
$$L^{I}(P_1,P_2)=L^{II}(P_1,P_2)$$

$$L(\Gamma)=0 \iff L^{I}(P_1,P_2)=L^{II}(P_1,P_2)$$

Nel caso di campi di forze conservativi si definisce una funzione della sola posizione $U(P)$ detta energia potenziale E_p del campo di forze

$$L^{I}(P_1,P_2)=L^{II}(P_1,P_2)=L^{III}(P_1,P_2)=\dots$$

$$\boxed{L^{I}(P_1,P_2)=L^{II}(P_1,P_2)}$$



$$=L(P_1,P_0)=\int_{P_1}^{P_0}\vec{F}\cdot d\vec{s} \qquad L(P_2,P_0)=\int_{P_2}^{P_0}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\int_{P_2}^{P_0}F\,d\vec{s}=-\int_{P_0}^{P_2}F\,d\vec{s}$$

$$\vec{N}$$

$$L=L(P_1,P_0)-L(P_2,P_0)$$

$$U(P_1)=L(P_1,P_0) \qquad U(P_2)=L(P_2,P_0)$$

$$L=U(P_1)-U(P_2)$$

$$L=-(U(P_2)-U(P_1))=-\Delta U$$

La funzione energia potenziale è una funzione definita a meno di una costante additiva c

$$U(P) = L(P_1 P_0) + c$$

Infatti ciò che ha significato è solo la differenza fra i valori che assume in due diversi punti e questa differenza resta invariata aggiungendo alla funzione una costante arbitraria c

Ricapitolando posso scrivere $U(P)$come:

con $\vec{F}$costante

IN TERMINI DIFFERENZIALI

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -dU$$

1 dimensione $\quad dL = F_x dx = -dU \qquad F_x = -\frac{dU}{dx}$

3 dimensioni $\quad dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

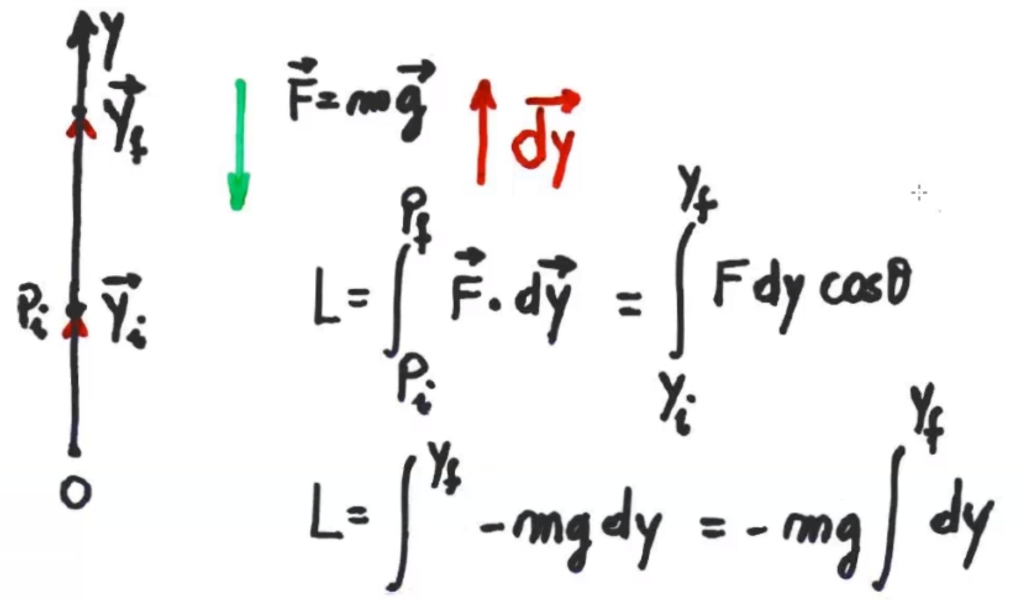
$$U(P_0) = \text{cost}$$

$$U = U(x, y, z) \qquad dU = -dL$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Esempi di forze conservative

Caso della forza peso



$$L = -mg[y]_{y_i}^{y_f} = -mg(y_f - y_i)$$

$$L = mgy_i - mgy_f$$

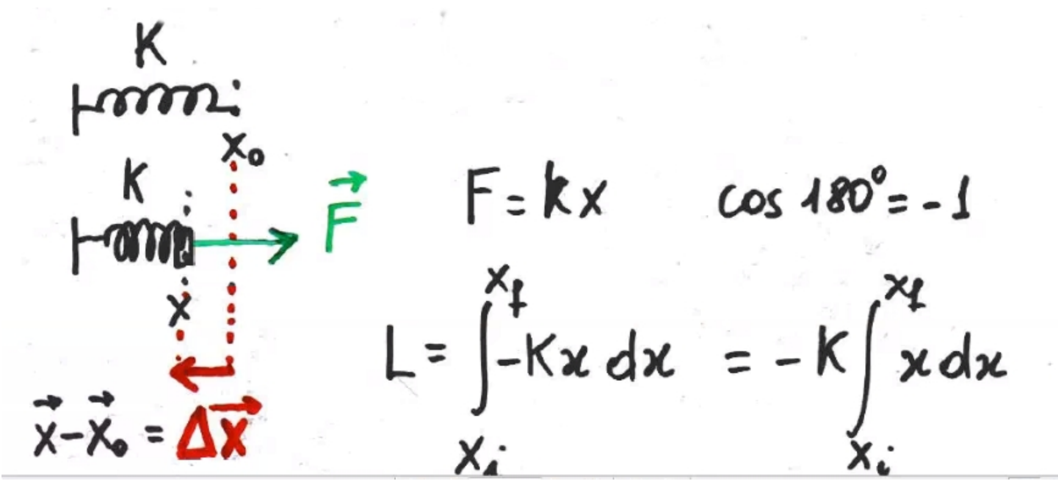
$$U = mgy + c$$

Con avremo un lavoro L

Con $U_f > U_i$ avremo un lavoro $L > 0$

La forza elastica

$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$



$$L = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

Pertanto posso scrivere come:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + c$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = -kx$$

Principio di conservazione dell'Energia meccanica

Campo di forze conservativo

Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L = E_c(P_2) - E_c(P_1)$$

$$U(P_1) - U(P_2) = E_c(P_2) - E_c(P_1)$$

MEMO

Forza conservativa $\rightarrow$ ciò che si conserva è l' Energia meccanica

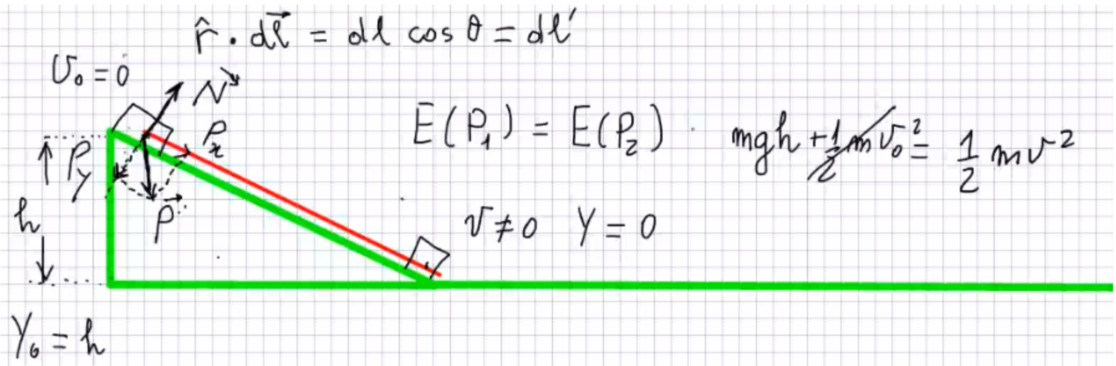
---

$$E_c(P_1) + U(P_1)$$

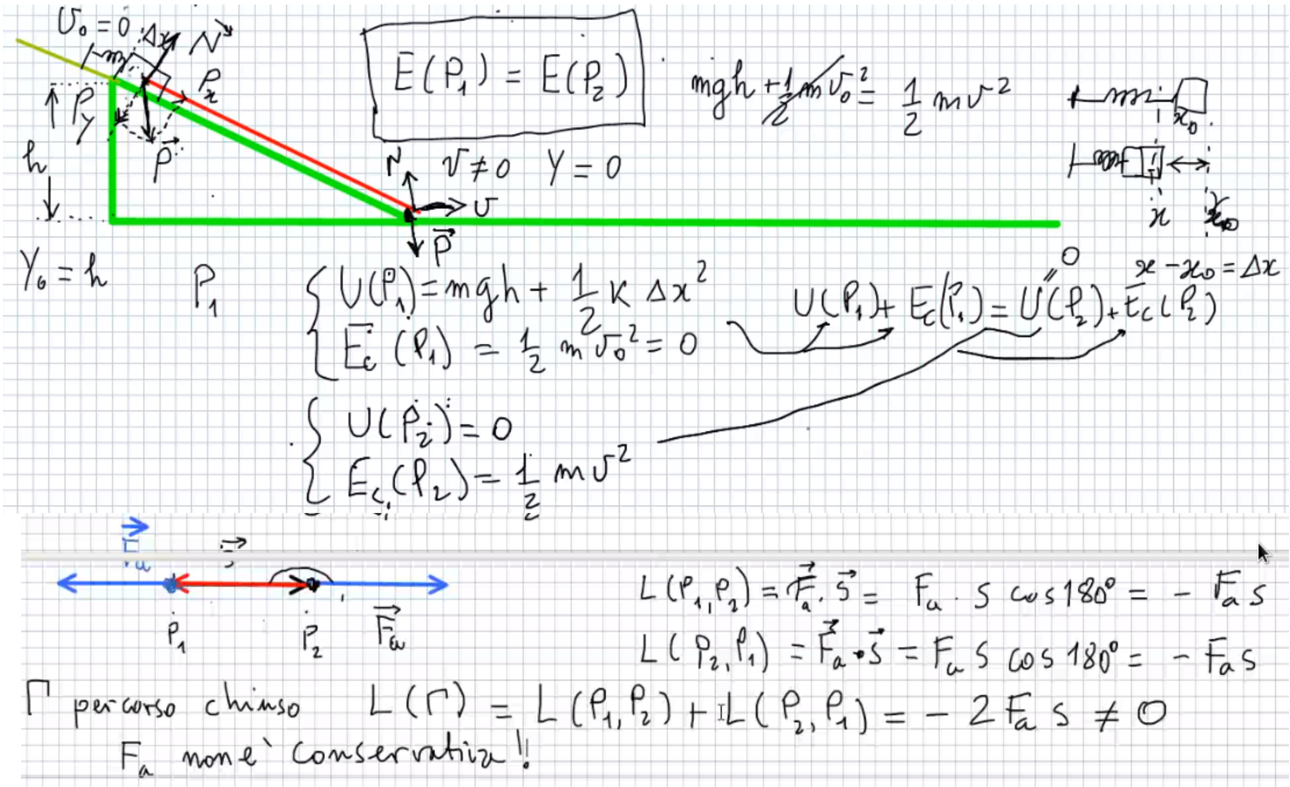
L'**ENERGIA MECCANICA** è una costante. Non cambia durante il moto.

Esempi:

Piano inclinato classico



Caso piano inclinato + energia elastica



Con forze conservative e non conservative ne basta una di forza non conservativa per far si che il sistema diventi non conservativo

Approccio energetico → studiare l'energia dei sistema

CORPO SOGGETTO A FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE.

$\vec{F}_c$ e $\vec{F}_{nc}$ $\quad \vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} \quad L = L_c + L_{nc}$

$L = -\Delta U + L_{nc} \quad L = E_c(P_2) - E_c(P_1)$

$E_c(P_2) - E_c(P_1) = U(P_1) - U(P_2) + L_{nc}$

$E_c(P_2) + U(P_2) = U(P_1) + E_c(P_1) + L_{nc}$

$E_{finale} = E_{iniziale} + L_{nc}$

$L_{nc} = E_{finale} - E_{iniziale}$

Il lavoro compiuto dalle forze non conservative è uguale alla variazione dell’energia meccanica.

MEMO:

Th dell’energia cinetica:

$$L=\Delta E_c$$

Th generalizzato dell’ Energia cinetica

$$L_{nc}=\Delta E$$

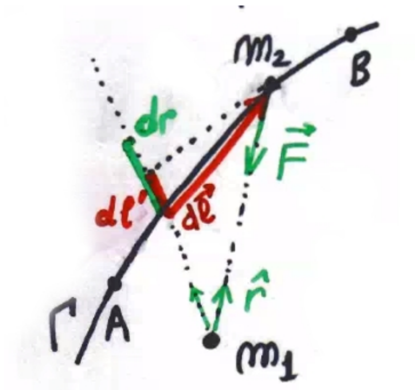
Lezione del 08-05

Energia potenziale gravitazionale per una coppia di particelle

$$F=\frac{c}{r^2} \qquad \vec{F}=-\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$L=\int_{A\Gamma}^{B}\vec{F}\,d\vec{l}$$

$$L=-\int_{A}^{B}\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}\,d\vec{l}$$



$$L=-G m_1 m_2\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr$$

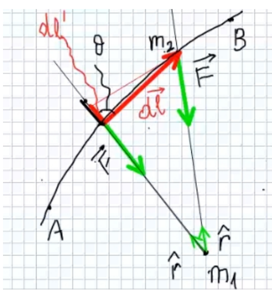
dove dr è ottenuto come:

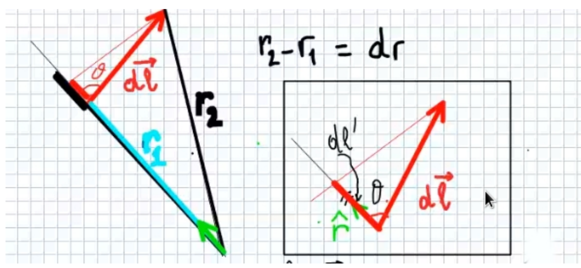
$$\hat{r}\,dl=dl\left(\cos\hat{r}\,d\vec{l}\right)=dl^1$$

Per piccoli $d\vec{l}$ vale la relazione $dl^1\simeq dr$

MEMO:

$$d\vec{l}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{r}_2+\left(-\vec{r}_1\right)$$





Pertanto facendo le dovute sostituzioni otterremo:

$$L=-G m_1 m_2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$L=-G m_1 m_2\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

$$U_i=-G m_1 \frac{m_2}{r_i} \; U_f=-G m_1 \frac{m_2}{r_f}$$

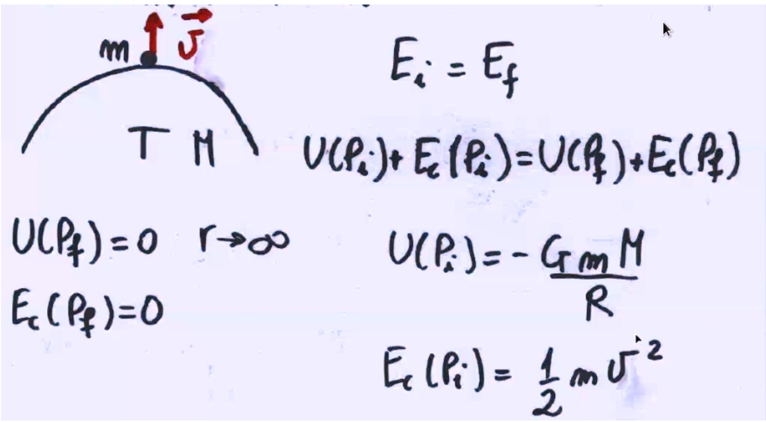
$$L=-G m_1 m_2\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

$$L=-\Delta U$$

$$U=-G m_1 \frac{m_2}{r}$$

Velocità di fuga

Aumentando la velocità con la quale il satellite viene lanciato l’orbita diventa ellittica. Per velocità ancora maggiori la traiettoria non si chiude e il satellite si allontana per sempre dalla Terra



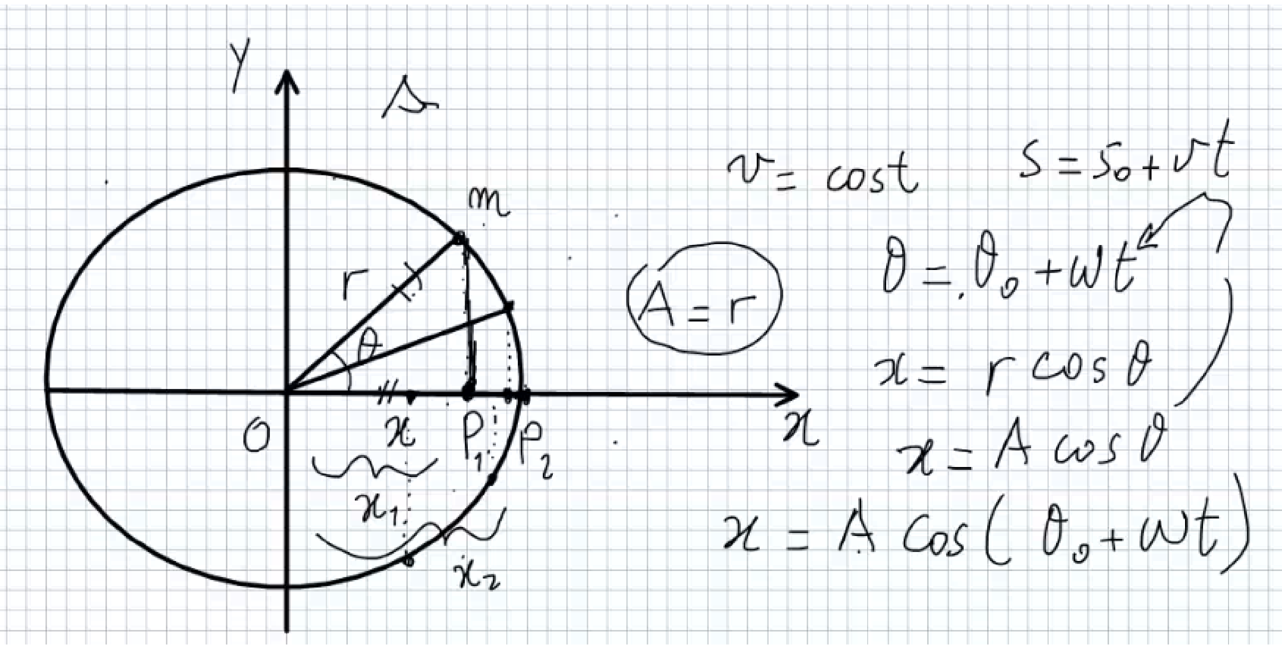
$$-\frac{G m M}{R}+\frac{1}{2} m v^2=0 \qquad v=\sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

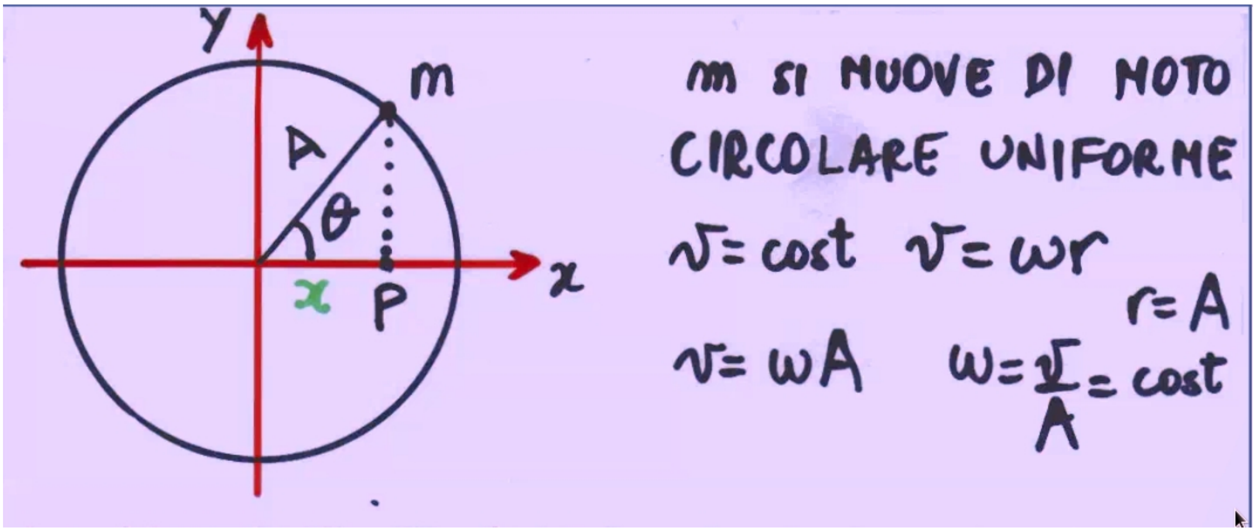
$$\frac{G M}{R_t^2}=g \qquad \rightarrow \frac{G M}{R_t}=g R_t$$

da questo

$$v=\sqrt{2 g R_t}$$

Moto armonico

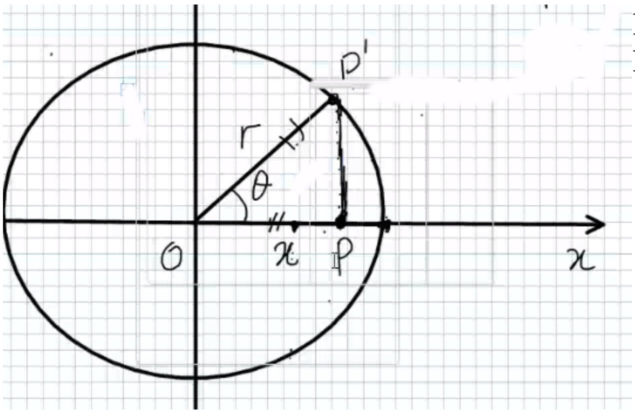




Lezione del

Moto armonico

Dato un punto che si muove su una circonferenza di moto circolare uniforme, la proiezione di tale punto si muoverà sul diametro della circonferenza di moto armonico semplice .



P^1 si muove di moto circolare uniforme
P si muove di moto armonico semplice

$v = cost \qquad s = s_0 + vt$

$\frac{v}{r} = \omega = cost \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$

$x = r\cos\theta$

$x = A\cos\theta$

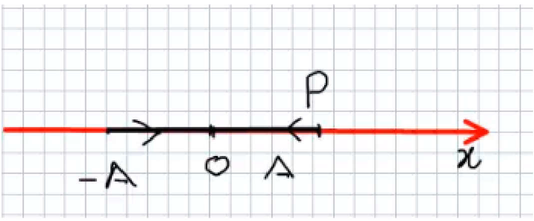
$x = A\cos(\theta_0 + \omega t)$

Posto $\theta_0 = \delta$ si ha $\theta = \omega t\, \delta$. Dove

θ è la fase del moto, δ è la fase iniziale e ω è la pulsazione

Legge oraria del moto armonico semplice

$x = A\cos(\omega t + \delta)$



dove A rappresenta l'ampiezza massima.

Data la legge oraria faccio le seguenti considerazioni:

Se all'istante $t=0$ il punto si trova nella posizione $x=A$ allora risulta $x=A\cos(\delta)=A$ e questo si verifica se la fase iniziale $\delta=0$. Pertanto la legge oraria diventa :

$$x = A\cos(\omega t)$$

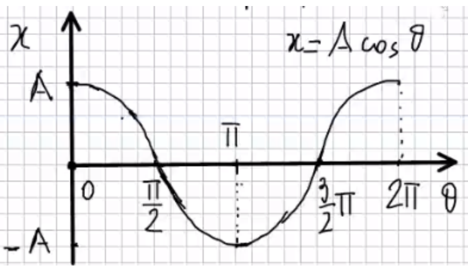
dove la fase del moto $\theta=\omega t$ e $x=A\cos\theta(t)$. Se il punto partendo da $x=A$ compie un'oscillazione completa e ritorna nello stesso punto allora sarà trascorso un intervallo di tempo pari al periodo T e risulta

$x(0) = x(T) = A$

$\theta(T) = \theta(0) + 2\pi$

$x(0) = A\cos\theta(0) = A$

$x(T) = A\cos\theta(T) = A$



Analogamente se l'istante iniziale è t per compiere una oscillazione completa sarà trascorso un tempo $t+T$ e la fase sarà aumenta di 2π

Pertanto possiamo scrivere in generale che

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi \qquad \theta(t+T) = \omega(t+T)+\delta$$
$$\theta(t) = \omega t + \delta$$

allora sostituendo si avrà:

$\omega(t+T)+\delta=\omega t+\delta+2\pi$ da cui

$$\omega t=2\pi$$

da cui ottengo

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega=2\pi f$$

La sua unità di misura è :

$$[\omega]=\frac{[rad]}{[s]}$$

$s = s_0 \cos(\omega t+\delta)$ $\quad v = -\omega s_0 \sin(\omega t+\delta)$ $\quad a = -\omega^2 s_0 \cos(\omega t+\delta)$

vediamo la rappresentazione grafica per il caso particolare $\delta = 0$

$s = s_0 \cos \omega t$ $\quad v = -\omega s_0 \sin \omega t$ $\quad a = -\omega^2 s_0 \cos \omega t$

$(V = \omega s_0$ $\quad v = -V \sin \omega t$ $\quad A_c = \omega^2 s_0$ $\quad a = -A_c \cos \omega t$

Andando nel particolare vediamo che la formula di v ed a si ottengono nel seguente modo:

$$v = \frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}s_0\cos(\omega t+\delta) = s_0\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\delta)$$

$$v = s_0\left(-\sin(\omega t+\delta)\right)\frac{d}{dt}(\omega t+\delta)$$

$$v = -\omega s_0 \sin(\omega t+\delta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega s_0 \sin(\omega t+\delta)\right] = -\omega s_0 \frac{d}{dt}\sin(\omega t+\delta)$$

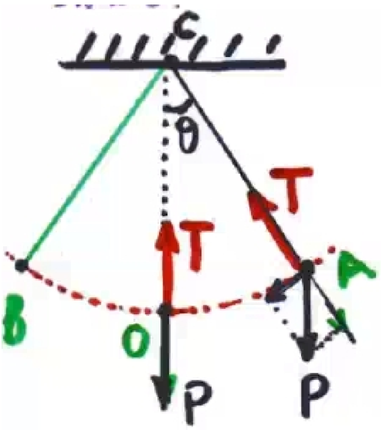
$$a = -\omega s_0 \left(\cos(\omega t+\delta)\right)\frac{d}{dt}(\omega t+\delta)$$

$$\boxed{a = -\omega^2 \underbrace{s_0 \cos(\omega t+\delta)}_{s}} \qquad \boxed{\boxed{a = -\omega^2 s}}$$

La posizione s in funzione del tempo ha l'andamento della funzione coseno
La velocità v in funzione del tempo ha l'andamento della funzione in segno cambiato

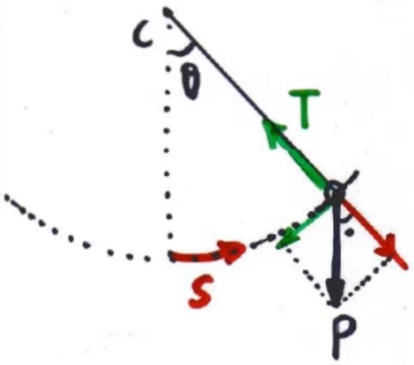
Il pendolo

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale di massa m sospeso mediante un filo inestensibile di massa trascurabile a un punto fisso c detto **centro di sospensione**. La condizione di equilibrio si ha quando il corpo è posto sulla verticale passante per il punto di sospensione c.



A→B OSCILLAZIONE SEMPLICE
A→B→C " COMPLETA
PERIODO

ANALISI DINAMICA DEL MOTO



$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = (F_t, F_r)$$
$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{P}$$
$$F_t = m a_t \qquad F_r = m a_r$$
$$F_r = T - P_r \qquad a_r = \frac{v^2}{L}$$
$$T - P_r = m\frac{v^2}{L} \qquad T = P_r + \frac{m v^2}{L}$$

T_{max} per $v = v_{max}$

$P_r = mg\cos\theta$

$$F_t = m a_t$$

$$F_t = -mg\sin\theta \qquad a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

se $s \ll L$ $\quad \frac{s}{L} = \theta$ È PICCOLO $\quad \sin\theta \cong \theta$

$$F_t = -mg\theta = -mg\frac{s}{L}$$

$$-\cancel{m}g\frac{s}{L} = \frac{d^2 s}{dt^2}\cdot \cancel{m} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s$$

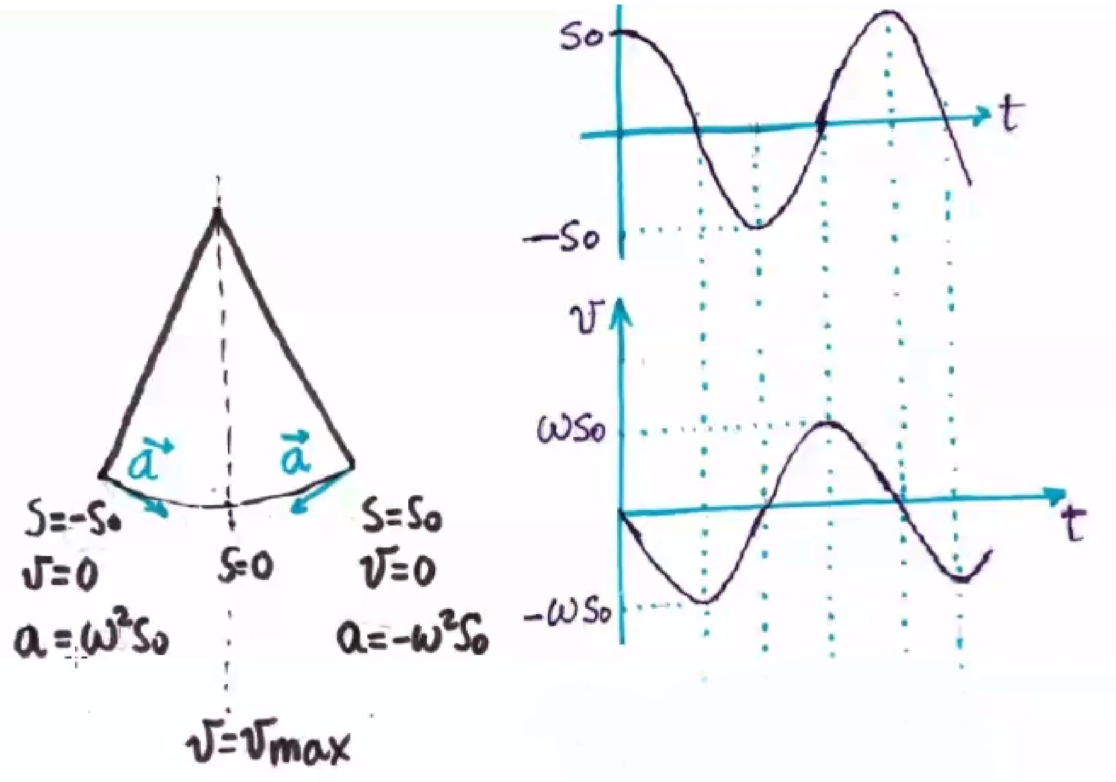
da cui ottengo la formula per il periodo T che è la seguente:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

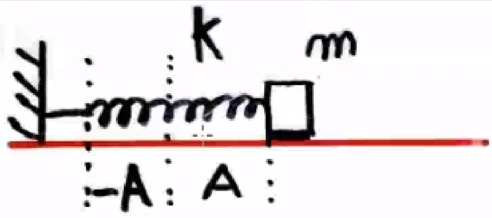
Da questo posso dedurre che il periodo è influenzato soltanto dalla lunghezza del filo.

Lezione del 15-05

NB: Il pendolo per piccole oscillazioni si muove di moto armonico



Caso corpo attaccato ad una molla



$$F = -Kx \qquad F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad \frac{K}{m} = \omega^2$$

La massa m si muoverà di moto armonico semplice

$$ma=-kx \quad \rightarrow \quad a=-\frac{k}{m}x \rightarrow$$

moto armonico semplice

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

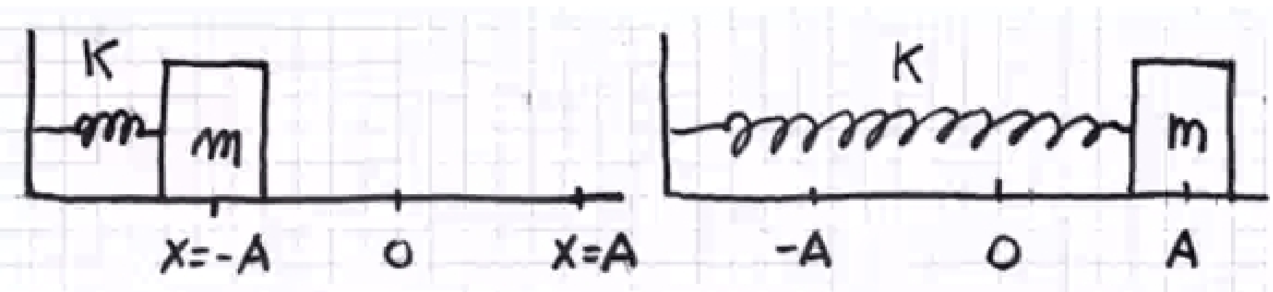
negli estremi

$E_{MECCANICA}$ si conserva

MEMO

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega=\pm\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$



L'energia meccanica di un sistema massa-molla nel caso di massima compressione o massimo allungamento della molla è uguale all'energia potenziale

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

mentre quando m si trova nella posizione di equilibrio o con la velocità v_0 l'energia meccanica sarà uguale all'energia cinetica

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

Per la conservazione dell’energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{da cui} \quad v_0^2=\frac{kA^2}{m}$$

$$v_0=\pm\sqrt{\frac{kA^2}{m}}=\pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nelle posizioni intermedie l’energia è in parte cinetica e in parte potenziale ed è possibile trovare un’utile equazione che esprime la velocità in funzione della posizione

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}kA^2 \qquad v^2=\frac{k}{m}(A^2-x^2)$$

→ $mv^2=kA^2-kx^2$

da cui

$$v=\pm\sqrt{\frac{K}{m}(A^2-x^2)} \quad \text{oppure} \quad v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\omega=\frac{k}{m}$$

Si ha anche

$$v^2=\frac{K}{m}A^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)=v_0^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right) \qquad v=\pm v_0\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

$$v^2=\underbrace{\left(\frac{K}{m}A^2\right)}_{v_0}\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)=v_0^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)$$

La v^2 qualunque si può mettere in relazione all’ampiezza $\frac{k}{m}$

$$v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2-x^2)}$$

L’ E MECCANICA in un punto qualunque = E_c+E_p

Nel caso in cui $E_c=0$ → $E_m=E_p$

MEMO sul pendolo:

Le oscillazioni di piccola ampiezza sono isocrone: pendoli con ampiezze differenti oscillano con lo stesso periodo

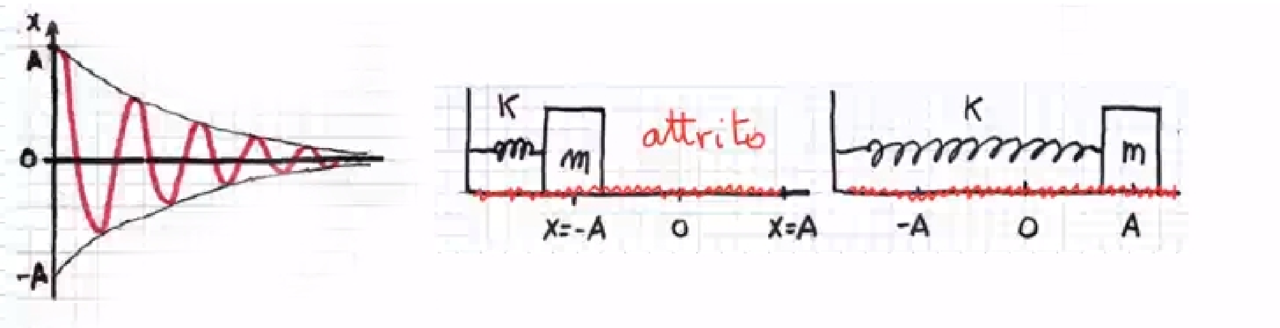
T è indipendente dalla massa

$$T \alpha \sqrt{L} \qquad T \alpha \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

La terra non essendo perfettamente sferica presenta un aumento di g ai poli

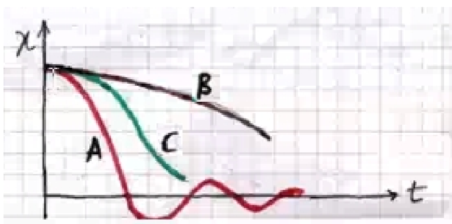
$$m g = \frac{G m M}{R^2}$$



In molti sistemi reali sono sempre presenti forze non conservatrici come l'attrito o la presenza dell'aria che frenano il moto del sistema. In questi casi l'energia meccanica diminuisce nel tempo e il moto è detto smorzato.
Quando la forza frenante è molto più piccola della forza di richiamo il moto conserva il carattere oscillatorio ma l'ampiezza delle vibrazioni diminuisce esponenzialmente con il tempo e ala fine il moto cessa: questo è il caso del **moto armonico semplice smorzato**

All'aumentare della forza frenante abbiamo tre casi

A) Situazione di sottosmorzamento (in cui il sistema compie varie oscillazioni prima di fermarsi)
B) Situazione di sovrasmorzamento (in cui lo smorzamento è così grande da far si che il sistema impieghi un tempo molto lungo per raggiungere l'equilibrio)
C) Smorzamento critico (in cui l'equilibrio viene raggiunto più velocemente)

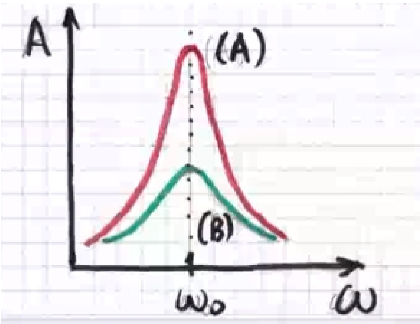


Oscillazioni forzate e risonanza

ω_0 pulsazione naturale del sistema

ω pulsazione della forza F che agisce sul sistema

L'ampiezza v_m della velocità delle oscillazioni si può descrivere più facilmente: raggiunge il valore massimo quando si verifica la condizione detta di **risonanza** ovvero se $\omega=\omega_0$
Con una certa approssimazione questa è la condizione per cui l'ampiezza A dello spostamento dello delle oscillazioni presenta il valore massimo.



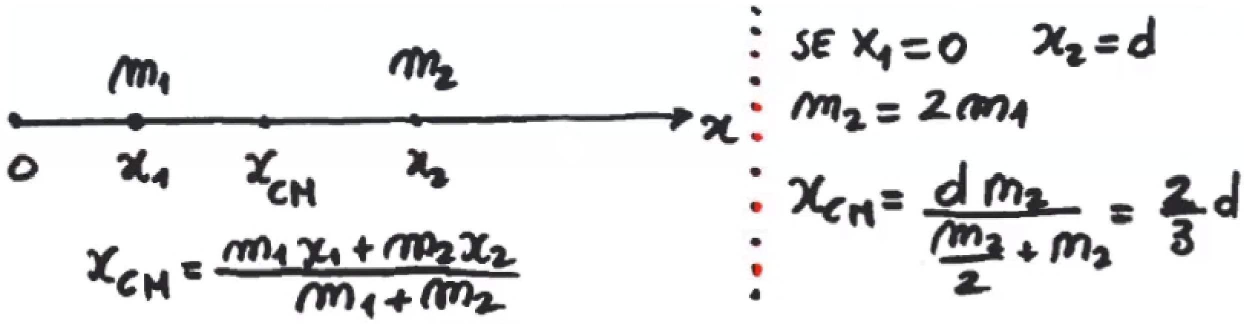
Dinamica dei sistemi

Dinamica del punto materiale → dinamica di un sistema di punti materiali

Il moto complessivo di un sistema meccanico è descrivibile facendo uso di un particolare punto detto **centro di massa del sistema**.
Si dimostra che il sistema si muove come se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa.

Il centro di massa si muove con un'accelerazione data da $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{M}$

Centro di massa di una coppia di particelle



Il centro di massa è più vicino alla particella più pesante

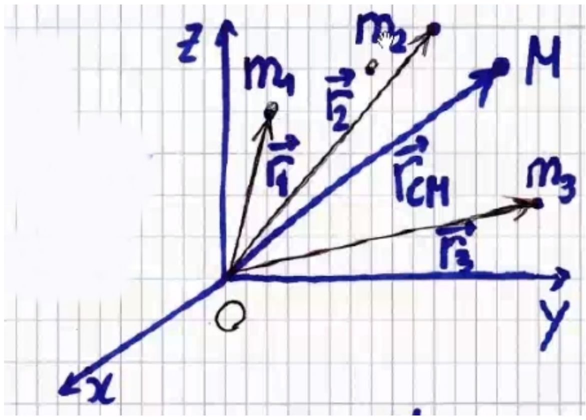
Se $m_1=m_2 \rightarrow x_{cM}=\frac{d}{2}$

É possibile estendere il concetto di centro di massa ad un sistema di particelle situate in uno spazio tridimensionale

Date n particelle di massa

$$m_1, \dots, m_n \qquad M = m_1 + \dots + m_n$$

Se la loro posizione è individuata rispettivamente dai vettori posizione $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ il centro di massa sarà individuato dal vettore posizione $\overrightarrow{r_{cM}}$



$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \dots + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_1 \vec{r}_i$$

Velocità nel centro di massa $\overrightarrow{v_{CM}}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$$

La quantità di moto P può essere scritta come:

$$\vec{P} = M\,\overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\,\overrightarrow{v_{CM}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{P} = M\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = M\,\overrightarrow{a_{CM}}$$

Pertanto:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

$$\vec{F} = M\,\overrightarrow{a_{CM}}$$

La forza è data quindi dalla somma della forza F interna e dalla forza F esterna.
Qualora la forza F interna sia uguale a 0 otterremmo che la forza F sia uguale proprio a quella esterna, ma questo equivale a dire:

$$\vec{F} = M\,a_{CM}$$

Il risultante delle forze esterne:

$$\overrightarrow{F^{(est)}} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

ma $\vec{P} = M\,\overrightarrow{v_{CM}}$ e quindi

$$\overrightarrow{F^{(est)}} = \frac{d\left(M\,\overrightarrow{v_{CM}}\right)}{dt}$$

1° legge cardinale della dinamica

Il centro di massa del sistema si muove come una particella di massa m su cui agisce il risultante delle forze esterne

Centro di massa di un corpo rigido

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Il centro di massa di un corpo omogeneo e simmetrico si deve trovare su di un asse di simmetria.

Centro di massa di un oggetto piano di forma irregolare:

se $\vec{g}=$ cost $\rightarrow$ $CM \equiv G$

Il centro di massa è equivalente al centro di gravità

Nel caso di un sistema isolato:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^{(est)}} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad M\,\overrightarrow{a_{CM}} = \vec{0}$$

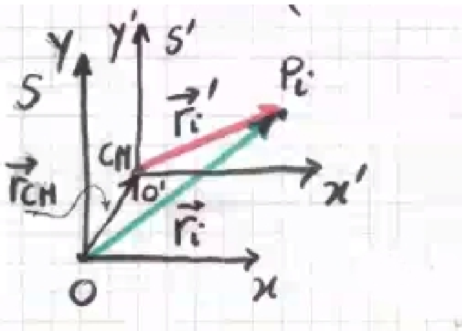
$$\vec{P} = M\,\overrightarrow{v_{CM}} = \overrightarrow{cost}$$

La quantità di moto $\vec{P}$ del sistema si conserva

Per un sistema isolato sono costanti nel tempo sia la quantità di moto totale del sistema che la velocità del centro di massa

Lezione del 18-05

Teorema dell' E_c per i sistemi di punti materiali
(Teorema del Köenig)



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \qquad (1)$$

L'energia cinetica del punto i-esimo k_i

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \quad \text{Sostituendo la (1)}$$
$$= \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') =$$
$$= \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') =$$
$$= \frac{1}{2} m_i (v_{CM}^2 + 2 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2) =$$
$$= \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

L'energia cinetica totale sarà data dalla sommatoria delle energie cinetiche di tutte le particelle

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = M \vec{v}_{CM}'$$

dove $\vec{v_{CM}}$ è la velocità del centro di massa rispetto al sistema di riferimento che ha origine nel centro di massa (ovvero la velocità di un corpo rispetto a se stessa e quindi è nulla). Quindi:

$$k = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

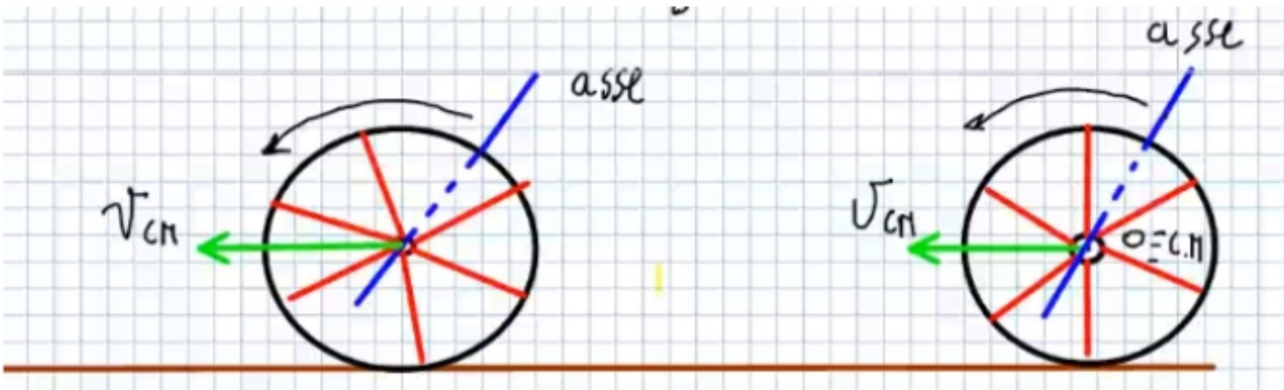
L'energia cinetica di un sistema di particelle può essere espressa come la somma di due termini:

1. $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ dove M è la massa totale del sistema (energia cinetica associata al moto del centro di massa
2. $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ dove v_i è la velocità della i-esima particella rispetto alla massa (energia cinetica dovuto al moto delle particelle rispetto al centro di massa)

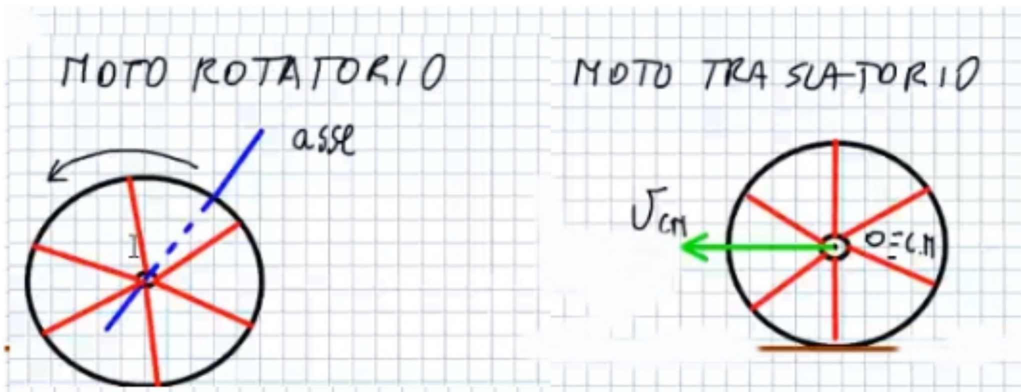
$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

Un **corpo rigido** è un sistema di punti materiali in cui la distanza relativa fra due qualunque punti del corpo non cambia. É un sistema di punti materiali continuo e indeformabile.

Moto rototraslatorio di un corpo rigido



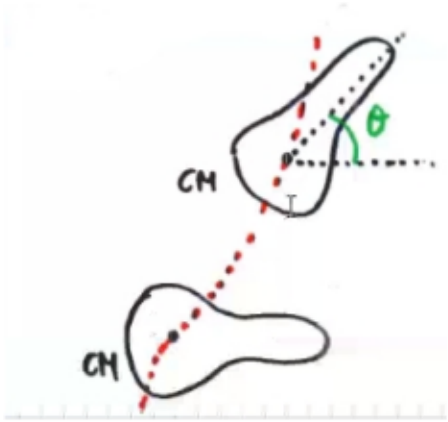
Il moto rototraslatorio di un corpo rigido è la composizione di due moti: il moto traslatorio del centro di massa e il moto rotatorio del corpo attorno ad un asse passante per il centro di massa.



La variazione di posizione di un corpo rigido è costituita da una traslazione del centro si massa più una rotazione del corpo intorno ad un asse passante per il centro di massa.

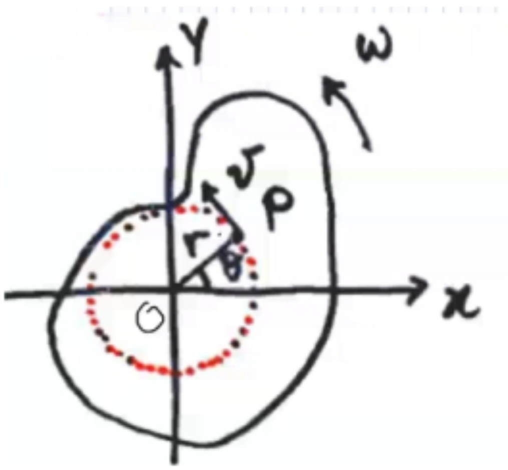
Il moto traslatorio del sistema può essere risolto applicando la dinamica del punto materiale al centro di massa, nel quale si è supposta tutta la massa del sistema.

Il moto rotatorio di un corpo è di solito molto complicato perché in generale l'asse di rotazione cambia orientazione mentre il corpo si muove (prenderemo in esame il moto rotatorio di un corpo rigido intorno ad un asse fisso).



Cinematica rotazionale di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse di rotazione fisso

Descrizione del moto rotatorio di un corpo rigido attraverso variabili angolari



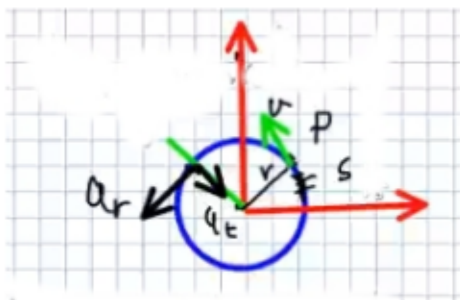
Descrizione del moto del punto P in variabili lineari

s ascissa curvilinea

v velocità

a_t, a_r accelerazione tangenziale e radiale

$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$



$v = \frac{ds}{dt}$ $\quad s = r\theta$ $\quad v = \frac{d}{dt} r\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$

$v = r\omega$

I valori di queste grandezze variano a seconda della distanza del punto di asse di rotazione (es. la velocità aumenta con la distanza r).

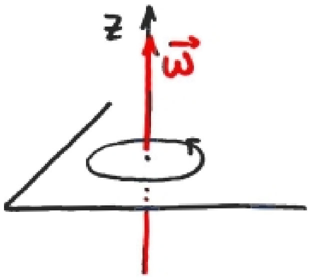
Tutti i punti invece hanno lo stesso spostamento angolare θ, la stessa velocità angolare ω e la stessa accelerazione angolare α

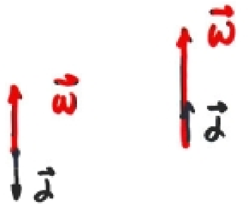
Quindi il moto rotatorio di tutto il corpo può essere descritto in variabili angolari attraverso il moto di uno qualunque dei suoi punti

Le grandezze ω e α caratterizzano il moto rotatorio di tutto il corpo rigido.

$\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ sono vettori, associamo una direzione e un verso nello spazio

Nel caso di rotazioni intorno ad un asse fisso la direzione di ω coincide con quella dell'asse di rotazione



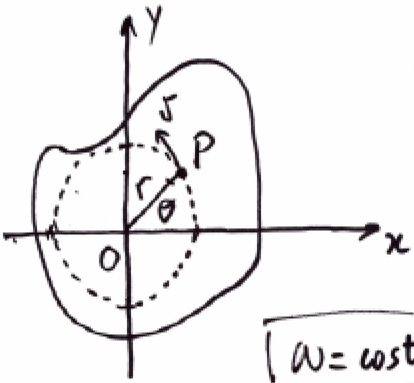


$\alpha > 0$ QUANDO ω AUMENTA

$\alpha < 0$ QUANDO ω DIMINUISCE

É possibile studiare il moto rotatorio di un corpo attaccato ad un asse fisso considerando la variazione del modulo di $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$

Cinematica rotazionale (asse di rotazione z)



$t_0 = 0 \quad \theta_0$

$t \quad \theta$

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$

ω

$\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

$\boxed{\omega = cost}$ $\quad \boxed{\theta - \theta_0 = \omega t}$

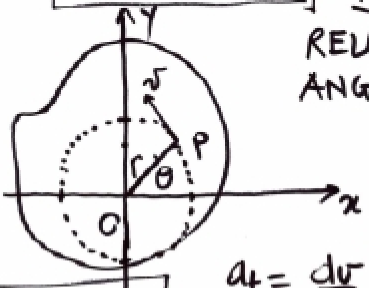
ω VARIABILE NEL TEMPO

$\alpha_m = \dfrac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \qquad \alpha_m = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \qquad \boxed{\alpha = cost} \qquad \alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$

$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \qquad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$

RELAZIONI FRA GRANDEZZE ANGOLARI E LINEARI



$\boxed{v = r\omega} \qquad a_t = \dfrac{d v}{dt}$

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d r\omega}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \boxed{a_t = r\alpha}$

$\boxed{a_r = r\omega^2}$

$a_r = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{r^{\cancel{2}}\omega^2}{\cancel{r}} = r\omega^2 \qquad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

MEMO moti e loro parallelismi

MOTO RETTILINEO

- $v = cost$

$s = s_0 + vt$

- $a = cost$

$v = v_0 + at$

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$

MOTO ROTATORIO ATTORNO AD UN ASSE FISSO

- $\omega = cost$

$\theta = \theta_0 + \omega t$

- $\alpha = cost$

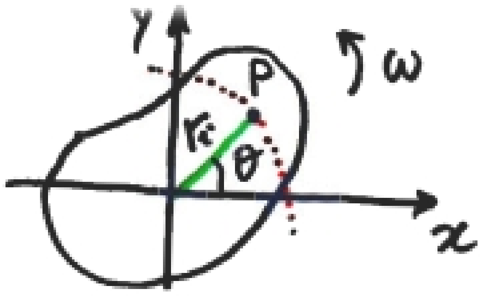
$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Energia cinetica di rotazione

Supponiamo che un corpo ruoti intorno ad una asse fisso z con velocità angolare ω



Ciascuna particella del corpo rigido ha un’energia cinetica: $k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Tutte le particelle del corpo hanno la stessa ω

$$v_i = r_i \omega \quad \rightarrow \quad k_i = \frac{1}{m_i} r_i^2 \omega^2$$

L’energia cinetica totale del corpo rigido è la soma delle singole E_c delle particelle che lo costituiscono

$$k = \sum_{i=1}^{N} k_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \quad \rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

I dipende dalla distribuzione della massa rispetto all’asse di rotazione e non dipende dal particolare moto rotatorio intorno a quell’asse

momento di inerzia

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Energia cinetica rotazionale

$$k = \frac{1}{I} \omega^2$$

$$[I] = [ML^2] \quad \rightarrow kg\, m^2 / gcm^3$$

L'energia cinetica di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso è data da:

$$k=\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

dove I è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse intorno a cui avviene la rotazione e ω è la velocità angolare

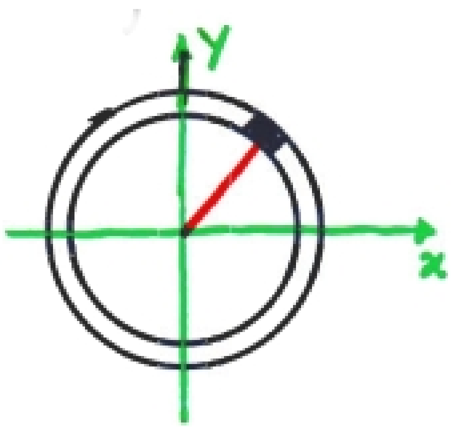
Applicando il teorema del Köenig ad un corpo rigido che si muove di moto rototraslatorio si ha che l'energia cinetica k è uguale a:

$$k=\frac{1}{2}M\,v_{CM}^2+\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

ovvero la somma della energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa

Per calcolare il momento di inerzia di un corpo rigido:

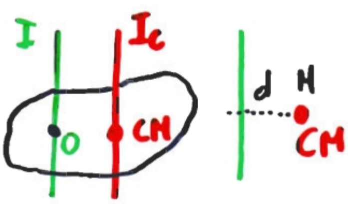
$$I=\int r^2\,dm$$



Caso momento di inerzia di un anello omogeneo di massa M e raggio R e rispetto ad una asse perpendicolare al piano dell'anello passante per il suo centro: tutti gli elementi di massa si trovano alla stessa distanza $r\approx R$ dell'asse z

$$I_z=\int r^2 dm \rightarrow\ I_z=R^2\int dm=R^2 M+c$$

Teorema degli assi paralleli



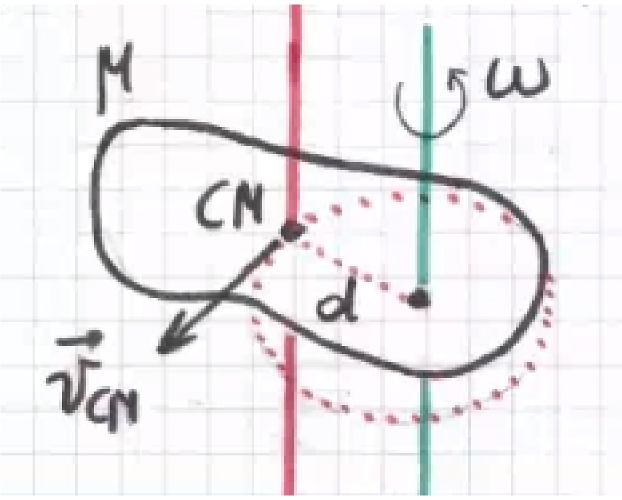
Il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse che si trova ad una distanza d dal centro di massa è dato da:

$$I=I_c+M\,d^2$$

Cioè il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi è pari alla somma del momento di inerzia che il corpo ha rispetto ad un asse parallelo al primo ma passante per il centro di massa ed al momento di inerzia che si ottiene rispetto all'asse dato supponendo che tutta la massa sia concentrata nel centro di massa

Teorema di Huygens-Steiner
(teoremi degli assi paralleli)

Consideriamo un corpo di massa M che ruota intorno ad un asse fisso non passate per il centro di massa



L' E_c del corpo si può scrivere come la somma della sua energia traslazionale dovuta al moto del centro di massa $\frac{1}{2}M v_{CM}^2$ e dell' E_c di rotazione dovuta al moto rispetto al centro di massa $\frac{1}{2}I_c\,\omega^2$ dove I_c è il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse di rotazione. Quindi l' E_c totale del corpo sarà:

$$k=\frac{1}{2}M v_{CM}^2+\frac{1}{2}I_c\,\omega^2$$

Il centro di massa è in moto lungo la traiettoria circolare di raggio d, pertanto si può sostituire $v_{CM}=d\,\omega$

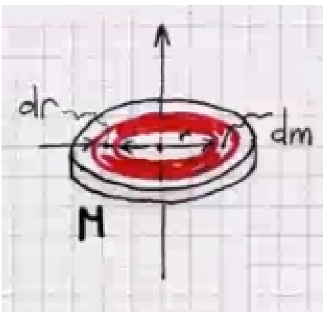
$$k=\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

$$\frac{1}{2}\;I\;\;\omega^2=\;\frac{1}{2}M d^2\omega^2+\frac{1}{2}I_c\,\omega^2$$

Facendo le dovute semplificazioni ottengo:

$$I=I_c+M d^2$$

Momento di inerzia di un disco uniforme rispetto all'asse passante per il suo centro e perpendicolare al piano del disco



Disco uniforme di raggio R e massa M il disco si può considerare costituito da anelli di massa dm, raggio r e quindi aventi momenti di inerzia

$$d\,I=r^2\,dm=\;r^2\,\rho d\,A$$

dove

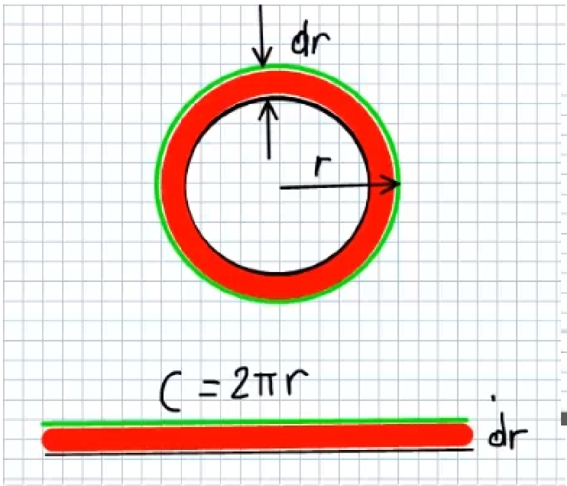
$$dA=2\,\pi r\,dr \quad \text{e} \quad \rho \quad \text{è la densità}$$

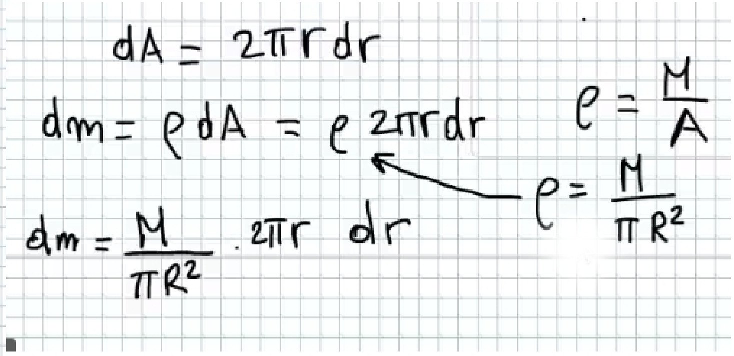
$$d\,m=\frac{M}{\pi R^2}2\,\pi r\,dr \quad .$$

Il momento di inerzia del disco I_c è uguale a $I_c=\int_0^R r^2\,dm=\int_0^R r^2\frac{M}{A}2\,\pi r\,dr$

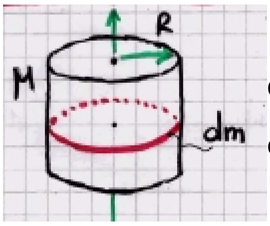
$$I_c = \frac{2\pi M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = 2\frac{M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Prendendo in esame una circonferenza:





Momento di inerzia di un cilindro rispetto al suo asse



Si può considerare il cilindro come un insieme di dischi ciascuno di massa dm e momento di inerzia $\frac{1}{2} dm R^2$. Quindi il momento di inerzia del cilindro completo è

$$I = \int \frac{1}{2} R^2 dm$$

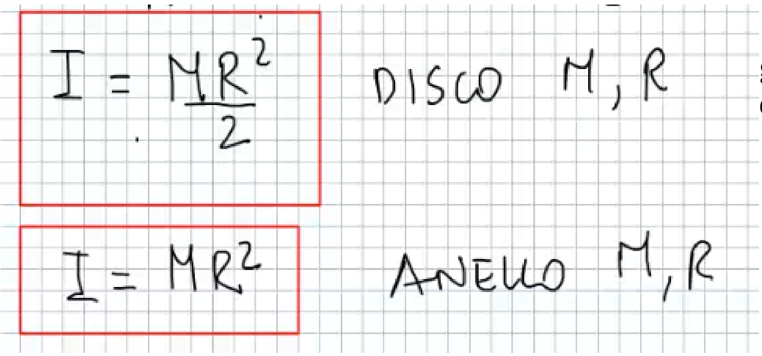
$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Momento di inerzia di un guscio cilindrico

Il guscio cilindrico si può considerare come un insieme di anelli sovrapposti aventi momento di inerzia $dI = R^2 dm$. Il momento di inerzia del guscio cilindrico è uguale a

$$I_c = \int R^2 dm = R^2 M$$

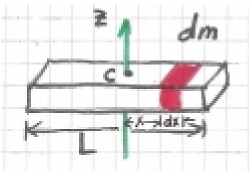
$$J_c = R^2 M$$



Riassumendo posso vedere cilindro e guscio cilindrico rispettivamente come un disco pieno e un anello cavo

Momento di inerzia di una sottile asta omogenea di massa M e lunghezza L

Caso A: momento di inerzia rispetto ad un'asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro



Detta A la sezione dell'asta
la massa $M=\rho V=\rho A L$¿

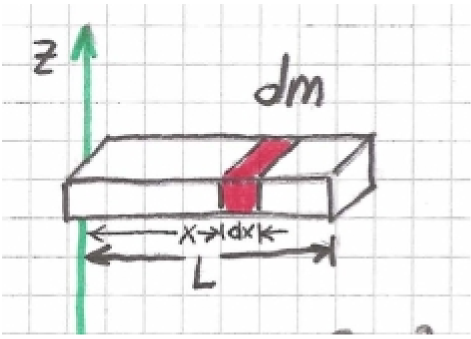
Un elemento di massa $dm=\rho d V=\rho A d x$

$$I_c=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho A x^2 d x=\rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 d x=\rho A\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

Facendo gli opportuni calcoli e sostituzioni ottengo:

$$I_c=\frac{1}{12} M L^2$$

Caso B: momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare all'asta passante per un estremo



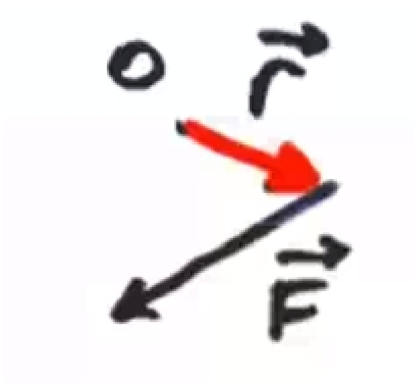
$$I=\int_{0}^{L} x^2 dm=\int_{0}^{L} \rho A x^2 dx=\rho A\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{L}$$

Facendo gli opportuni calcoli e sostituzioni ottengo:

$$I=\frac{1}{3} M L^2$$

Momento di una forza

La causa dei moti rotatori non è la forza ma una grandezza (il momento di una forza) che è definita rispetto a un polo 0



$\vec{\tau}=\vec{r}\wedge\vec{F}$ (e non viceversa: il prodotto vettoriale è antisimmetrico)

Modulo di $\vec{\tau}$

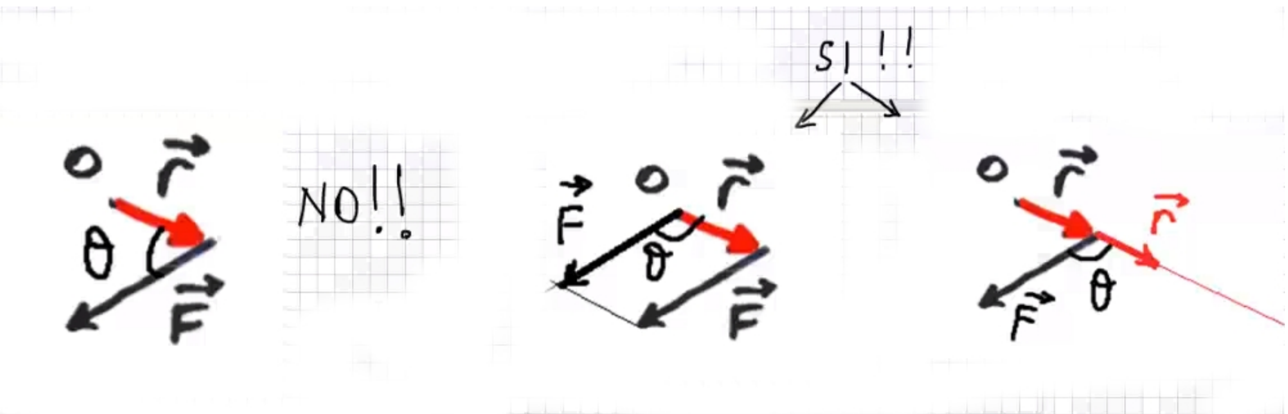
$$|\vec{\tau}|=|\vec{r}||\vec{F}|\sin(\widehat{\vec{r}\vec{F}})$$

o più semplicemente:

$$\tau=r\,F\sin\theta$$

dove θ è l'angolo più piccolo compreso tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$

Per rappresentarlo graficamente:

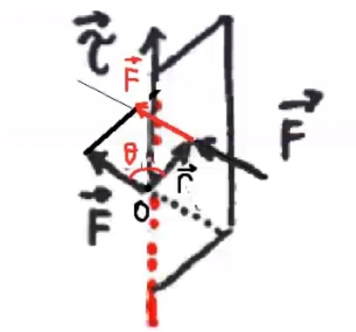


La direzione di $\vec{\tau}$ è perpendicolare al piano contente $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (è la retta sulla quale giace $\vec{\tau}$ e indica l'asse di rotazione

Considera l'asse x, y ,z (3D dove $\vec{\tau}$ è proprio l'asse z)

Il verso di $\vec{\tau}$ rappresenta il verso di rotazione. Il verso è quello di un osservatore che vede ruotare il primo vettore sul secondo vettore, secondo l'angolo più piccolo nel verso antiorario

Vedendolo il 3 dimensioni:



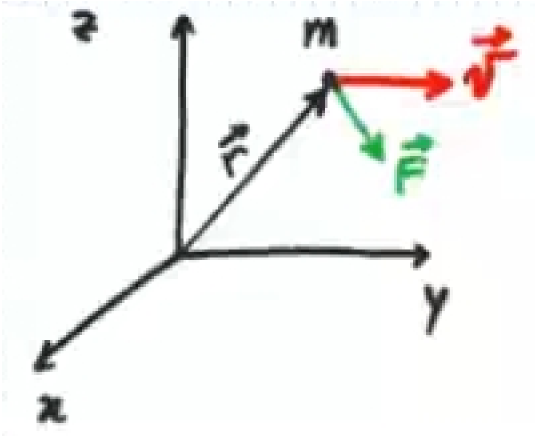
Volendo calcolare il modulo $\vec{\tau}$ usando la definizione di "braccio":

$$\tau=r\,F\sin\theta=r\sin\theta F=bF$$

Lezione del 22-05

Momento angolare

(momento della quantità di moto)



$m, \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{P}=m\vec{v}$

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{P}$$

$$\vec{\tau}=\vec{r}\wedge\vec{F} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau}=\frac{d}{dt}\vec{L}$$

DIM

$\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{P}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{P})= \quad \vec{r}\wedge\frac{d\vec{P}}{dt}+ \quad \frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\frac{d\vec{P}}{dt}+\vec{v}\wedge\vec{P}$$

$$\vec{v}\,//\,\vec{P}\Rightarrow\vec{v}\wedge\vec{P}=\vec{0}$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F} \qquad \rightarrow \vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Per un sistema di punti materiali:

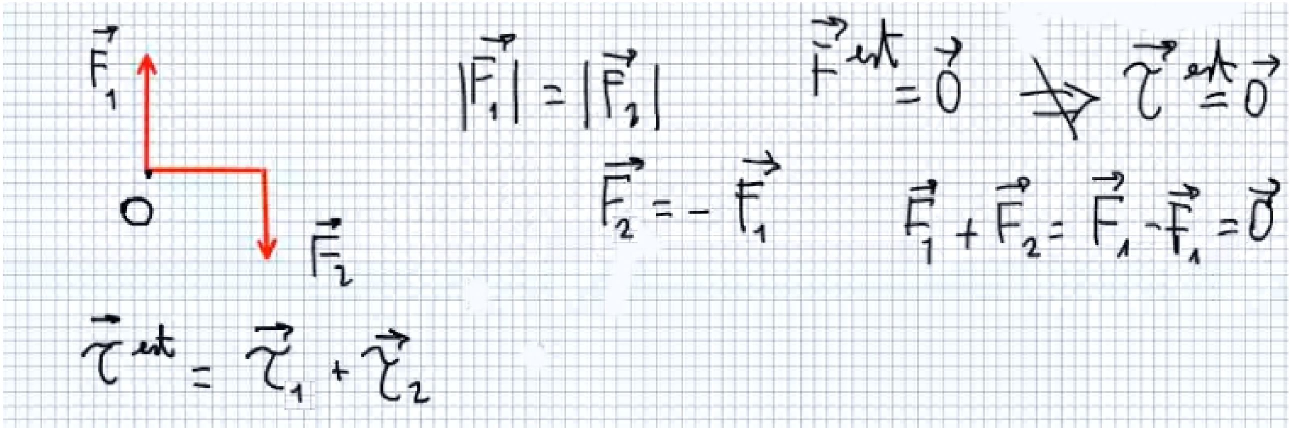
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^{interna} + \vec{\tau}^{esterna}$$

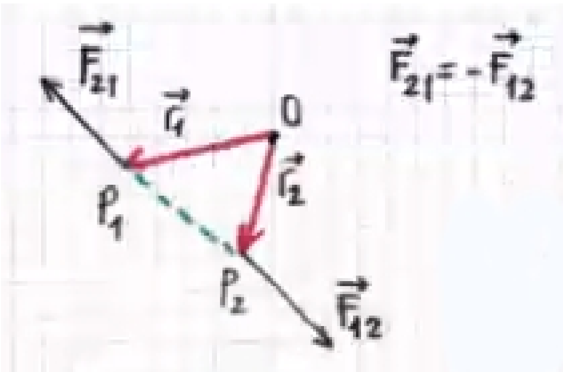
$$\vec{\tau}^{interna}=\vec{0} \qquad \vec{\tau}^{esterna}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Principio di conservazione del momento angolare

In un sistema isolato il momento angolare si conserva:

$$\vec{\tau}^{est}=\vec{0} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0} \qquad \vec{L}=\overrightarrow{cost}$$





Il risultante dei momenti delle forze interne è nullo

$$\vec{\tau}_{12}=\vec{r}_2\wedge\vec{F}_{12}+\vec{r}_1\wedge\vec{F}_{21}=$$

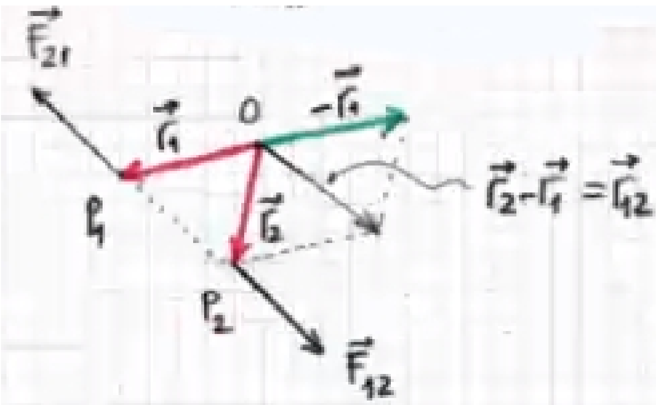
$$=\vec{r}_2\wedge F_{12}-\vec{r}_1\wedge\vec{F}_{12}=$$

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\wedge\vec{F}_{12}=\vec{0}$$

$$\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{r}_{12}//\vec{F}_{12}$$

Pertanto

$$\vec{\tau}_{12}=\vec{0}$$



Dati due punti P_i e P_L la somma dei momenti

delle due forze interne $\vec{F}_{ij}$ e $\vec{F}_{ji}$ rispetto al polo O

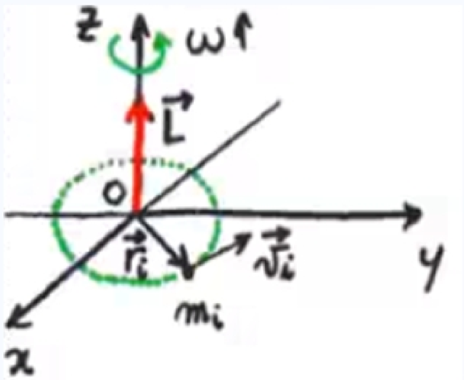
$$\vec{\tau}_{ij} = \vec{0}$$

$\vec{\tau}^{interna}$ è costituita dalla somma di tutti i possibili termini $\vec{\tau}_{ij}$ e perciò risulta identicamente nullo (qualunque sia la scelta del polo)

$$\vec{\tau}^{interna}=\vec{0}$$

Analizziamo come il momento angolare di un sistema sia collegato alle proprietà geometriche del sistema stesso.

Consideriamo un sistema in rotazione intorno ad un asse fisso che supporremo verticale

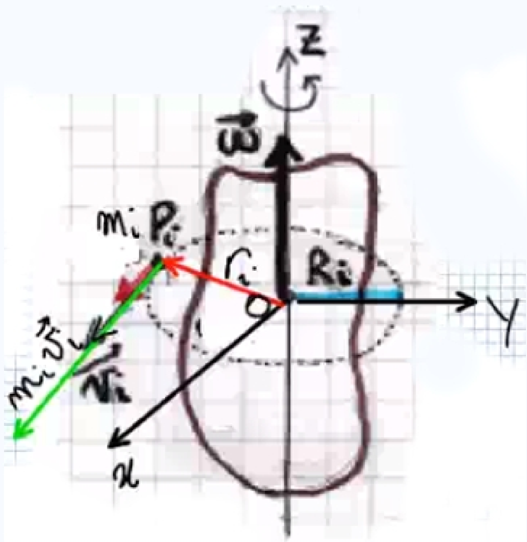


$\vec{r}_i$ è il vettore posizione della massa m_i rispetto al polo $\Omega \equiv 0$

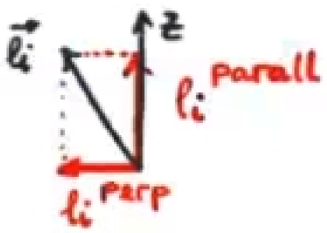
Calcoliamo quindi il momento angolare della particella i-esima

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_i \perp \vec{r}_i \quad \text{e} \quad \vec{v}_i = \vec{r}_i\,\omega$$

$$l_i = r_i\ m_i\ r_i\,\omega = m_i\,r_i^2\,\omega$$



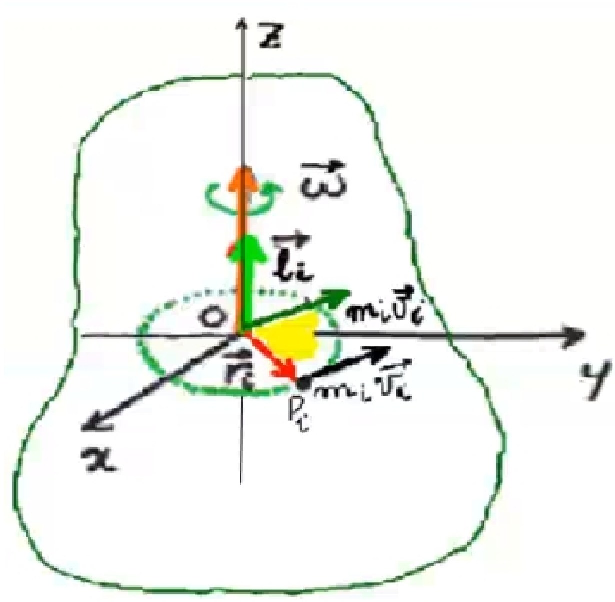
In generale



Nel nostro caso tutti gli $\vec{l}_i$ paralleli sono diretti nella direzione di $\vec{\omega}$ lungo l'asse z

Se l'asse di rotazione è un asse di simmetria →

Analizziamo come il momento angolare di un sistema sia collegato alle proprietà geometriche del sistema stesso.
Consideriamo un corpo rigido in rotazione intorno all'asse fisso verticale z di un sistema di riferimento $0xyz$



Tutte le particelle del corpo ruotano intorno all'asse z con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ su circonferenze appartenenti a piani paralleli al piano $0xy$

Consideriamo la particella i-esima (ruota sulla circonferenza appartenente al piano $0xy$)

Sia m_i la massa, $\vec{r}_i$ il vettore posizione rispetto al polo Ω coincidente con l'origine degli assi (e quindi con il centro della circonferenza

Sia $\vec{v}_i$ la velocità della particella.

Calcoliamo il momento angolare della particella:

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i \quad \rightarrow \quad = \vec{r}_i m \vec{v}_i \sin 90°$$

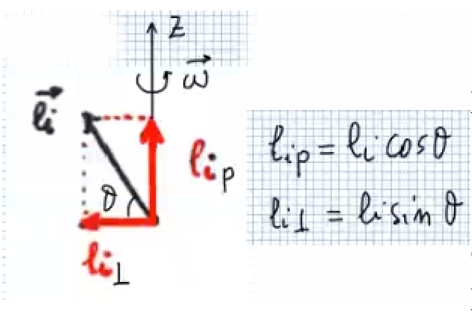
Facendo le opportune sostituzioni e considerando che $\vec{v}_i = \omega \vec{r}_i$ ottengo:

$$\vec{l}_i = m_i \vec{r_i^2} \omega$$

Il vettore $\vec{l}_i$ risulta parallelo all'asse z e quindi al vettore $\vec{\omega}$

Consideriamo il caso di particelle del corpo che ruotano su piani diversi dal piano $0xy$
Questi presentano un momento angolare $\vec{l}_i$ non parallelo all'asse z . Hanno quindi una componente $\vec{l_{ip}}$ (parallela all'asse z) e una componente $\vec{l}_{i\perp}$ (ortogonale all'asse z)

Se θ è l'angolo che si forma tra $\vec{l}_i$ e l'asse orizzontale, la componente parallela i-esima sarà:



Si dimostra che la componente parallela dell'i-esima particella è uguale a:

$$\vec{l_{ip}} = m_i \vec{r}_i$$

con $\vec{r}_i$ raggio della circonferenza e distanza della particella dall'asse di rotazione

Il momento angolare totale $\vec{L}$ del corpo che ruota attorno all'asse z avrà una componente parallela $\vec{L_p}$ data dalla risultante delle componenti parallele delle n particelle. Pertanto

$$\vec{L_p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L_{i\,p}}$$

Facendo le opportune sostituzioni:

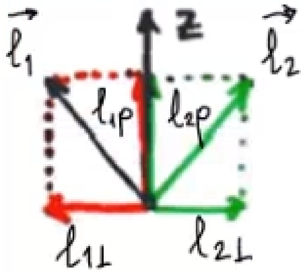
$$L_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}^2 \omega = I\,\omega$$

e una componente ortogonale $L_{\perp}$ data dalla risultante delle componenti ortogonali delle n particelle

$$L_{\perp} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l_{i\perp}}$$

Se l'asse di rotazione è anche asse di simmetria valgono le stesse proprietà per due particelle simmetriche opposte (unica differenza: componenti ortogonali opposte)

Pertanto per ogni coppia di particelle simmetriche le componenti parallele si sommano mentre quelle ortogonali si annullano.



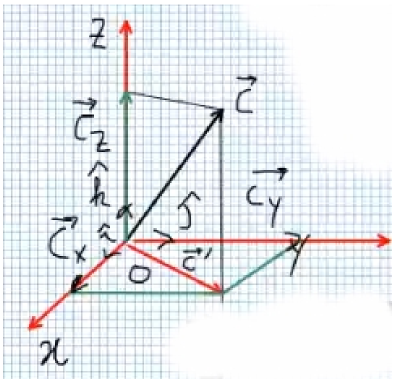
Il momento angolare totale $\vec{L}$ sarà un vettore parallelo all'asse z e quindi parallelo a $\vec{\omega}$

Corrisponde al risultante delle componenti parallele (quelle ortogonali si annullano) delle n particelle per il versore $\hat{k}$ dell'asse z

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} L_{i\,p}\hat{k}$$

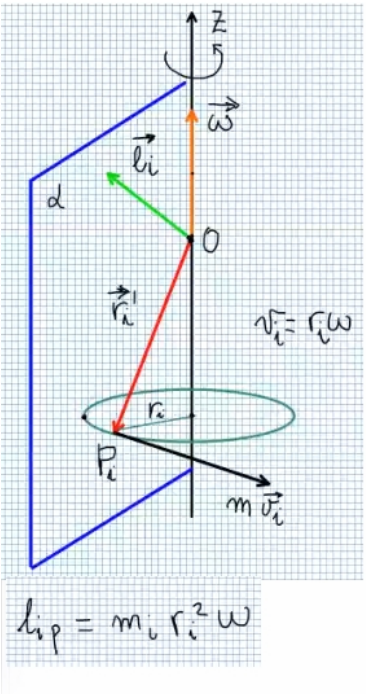
Facendo le dovute sostituzioni ottengo:

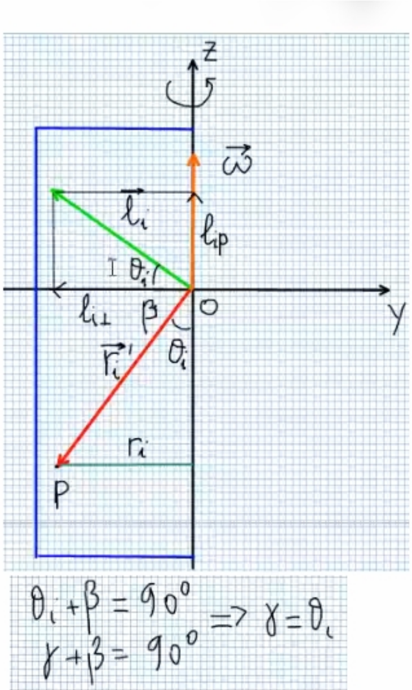
$$\vec{L} = I\,\omega$$

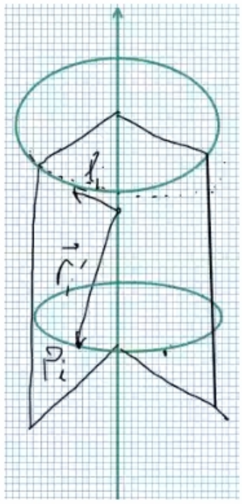


La quantità di moto $m\vec{v}$ di un punto materiale P di un sistema che ruota attorno ad un asse fisso è sempre perpendicolare a tale asse.

Anche il piano α contenente il vettore posizione $\vec{r}_i$ e il vettore momento della quantità di moto $\vec{l}$ risulta perpendicolare a $m\vec{v}$ e passa per quell'asse





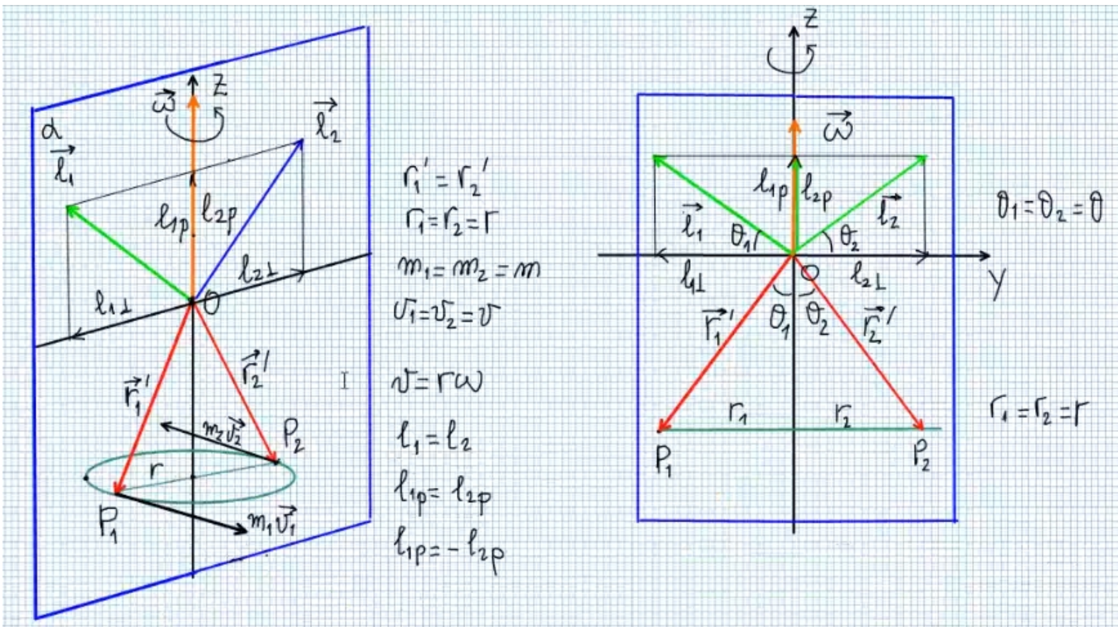


θ_i è l'angolo che $\vec{r}_i^{\,1}$ forma con l'asse z

Facendo gli opportuni calcoli ottengo:

$$l_{ip} = m_i r_i^2 \omega \qquad\qquad l_{i\perp} = m_i r_i^2 \omega \ ctg\,\theta_i$$

Caso particella simmetrica



II° legge cardinale della dinamica per un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso (che è anche di simmetria)

I è costante per un corpo rigido

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Sostituendo ottengo:

$$\vec{\tau}=\frac{d}{dt}I\vec{\omega}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=I\vec{\alpha}$$

Pertanto:

$$\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$$

dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare relativa all'asse di rotazione

$$\overrightarrow{\tau^{est}}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \overrightarrow{\tau^{est}}=I\vec{\alpha}$$

Il momento meccanico risultante delle forze agenti su un corpo rigido girevole intorno ad un asse fisso è pari al prodotto del suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione per la sua accelerazione angolare rispetto a questo asse.

$$\vec{P}=M\vec{v} \qquad \vec{L}=I\vec{\omega}$$

Equazioni cardinali della dinamica

$$\overrightarrow{F^{est}}=\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \overrightarrow{\tau^{(est)}}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Equazioni del moto con $\vec{L}\|\vec{\omega}$

La conoscenza del momento delle forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare se è noto I

Sia $\vec{\alpha}$ che $\vec{\tau}$ sono paralleli all'asse di rotazione $(\vec{\omega})$. La legge oraria è la seguente:

$$\tau=I\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{d\omega}{dt}$$
$$\alpha=\frac{\tau}{I}$$

Facendo l'integrale di α posso ottenere l'accelerazione angolare di tutto il moto

$$\int_0^t \alpha(t)dt=\int_0^t d\omega=\omega(t)-\omega(0)$$

Sapendo che $\omega=\frac{d\,\theta}{dt}$ e sostituendolo all'equazione precedente ottengo

$$\int_0^t \omega(t)\,dt=\frac{\int d\,\theta}{dt}dt=\theta-\theta_0$$

Riassumendo:

$$\omega(t)=\omega_0+\int_0^t \alpha(t)\,dt \qquad\qquad \theta(t)=\theta_0+\int_0^t \omega(t)\,dt$$

Se $\tau=0$ il corpo resta in quiete o si muove con moto circolare uniforme

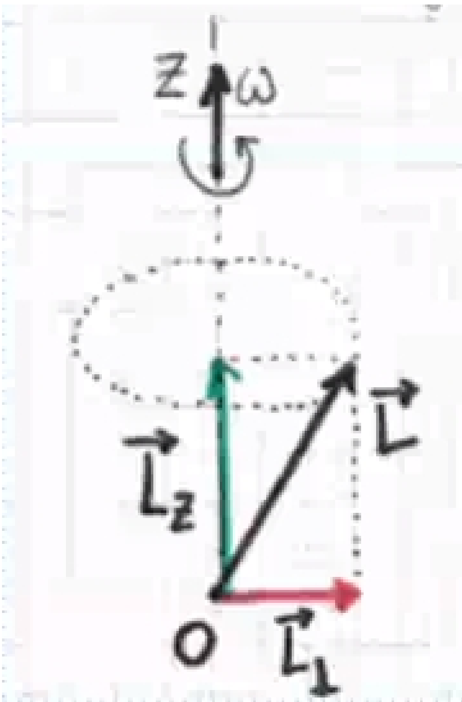
Se $\tau=cost$ il moto è circolare uniformemente accelerato

Se il momento angolare $\vec{L}$ di un corpo in rotazione non è parallelo all'asse di rotazione, ruota attorno a questo assieme al corpo. Il moto di $\vec{L}$ attorno all'asse di rotazione è chiamato **moto di precessione**

Se z è l'asse fisso di rotazione $\vec{L}$ avrà una componente L_z parallela all'asse di rotazione (detto **momento angolare assiale**) e una componente L ortogonale all'asse

La componente parallela all'asse L_z può variare in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo

Le eventuali variazioni di L_z sono dovute alla componente τ_z del momento delle forze esterne



$$\frac{d}{dt}L_z=\frac{d}{dt}\,I_Z\,\omega=I_Z\,\alpha=\tau_z$$

Quindi da $\tau_Z=I_z\,\alpha$ si ricava la formula inversa e la legge oraria:

$$\tau_\perp=\frac{d}{dt}L_\perp$$

Le eventuali variazioni di $L_\perp$ sono correlate alla componente ortogonale del momento delle forze esterne $\tau_\perp$

Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse è conveniente mettersi nel caso in cui $\vec{L}\|\vec{\omega}$

Calcolo dell'energia cinetica e del lavoro

L' E_c di un corpo in rotazione è data da:

$$k=\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

Con una variazione dall'istante iniziale a quello finale della velocità angolare avremo un lavoro che si esprimerà come:

$$W=\Delta k=\frac{1}{2}I\,\omega_f^2-\frac{1}{2}I\,\omega_i^2$$

La relazione tra momento e lavoro è la seguente:

$$dW=\tau\,d\,\theta$$

(ottenuta derivando e sostituendo con formule che conosciamo)

Integrando dalla posizione iniziale a quella finale:

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta}\tau\,d\,\theta$$

se $\tau=cost$ $\qquad W=\tau(\theta-\theta_0)=\tau\Delta\,\theta$

La potenza istantanea P è data da:

$$P=\frac{dW}{dt}=\tau\,d\,\frac{\theta}{dt}$$

Pertanto la potenza sarà uguale a:

$$P=\tau\,\omega$$

Se $\tau=cost$ $\qquad W=\Delta\,k$

e andando a sostituire ottengo

$$\tau\Delta\,\theta=\frac{1}{2}I\,\omega_f^2-\frac{1}{2}\,\omega_i^2$$

Lezione del 29-05

Impulso angolare

Momento dell’impulso

MEMO:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \vec{J}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt=\Delta P$$

Analogamente l’azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt} \;\rightarrow \vec{\tau}\,dt=d\vec{L}$$

Facendone l’integrale ottengo:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{\tau}\,dt=\vec{L}(t_2)-\vec{L}(t_1)=\Delta\vec{L}$$

Considerando il valore medio ottengo:

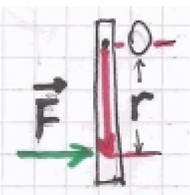
$$\vec{\tau}_m=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

Teorema dell’impulso angolare

L’integrale del momento nel tempo si chiama **impulso angolare** o **impulso del momento**. Il rapporto $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ ci da il valore medio del momento nell’intervallo di integrazione. Un modo per mettere in rotazione rispetto ad un asse fisso o per far rotolare un corpo rigido consiste nell’applicazione in un punto determinato del corpo di una forza intensa per un tempo molto breve (forza impulsiva) ovvero nell’applicazione di un impulso.

Es.

Consideriamo un corpo sospeso in O (centro di sospensione). Applicando il th dell’impulso angolare:



$$\int\vec{\tau}\,dt=\int(\vec{r}\wedge\vec{F})dt=\vec{r}\wedge\int\vec{F}\,dr=\vec{r}\wedge\vec{J}=\Delta\vec{L}$$

dove $\vec{r}\wedge\vec{F}$ è il **momento dell’impulso della forza**.

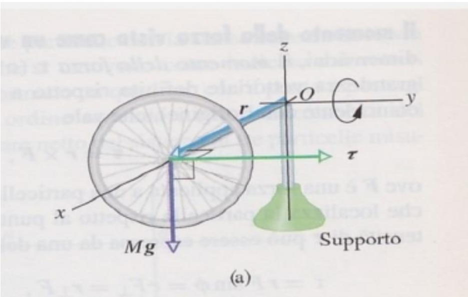
È possibile portar fuori dall'integrale $\vec{r}$ perché non dipende dal tempo.

L'applicazione dell'impulso provoca oltre ad una variazione di quantità di moto, una variazione di momento angolare eguale al momento dell'impulso.

Nell'integrale non compaiono le forze di reazione del vincolo perché hanno momento nullo essendo applicati nel polo 0. Non compare neanche la forza peso perché il suo impulso angolare si assume trascurabile rispetto all'impulso angolare dovuto a $\vec{F}$

Se applichiamo l'impulso di una forza ad un corpo per farlo rotolare o ruotare rispetto ad un asse fisso l'impulso del momento (di una forza) diventa momento dell'impulso della forza.

Giroscopio e moto di precessione



(a)

Il giroscopio semplice consiste in una ruota fissata a un albero e libera di ruotare attorno a tale albero. Andando a far ruotare la ruota il sistema si mantiene in equilibrio e notiamo che la ruota compie circonferenze intorno all'albero. Trattandosi di una rotazione il fenomeno è regolato dalla II° legge cardinale della dinamica.

Il momento della forza è dato dal braccio $\vec{r}$ e dalla forza di gravità Mg :

$$\vec{\tau}=\vec{r}\wedge Mg$$

Per calcolarne il modulo:

$$\tau= r*\ Mg*\ \sin 90°=\ r*\ Mg$$

Quindi il momento della forza $\vec{\tau}$ provoca la caduta (ovvero la rotazione) modificando il momento angolare $\vec{L}$ del giroscopio inizialmente fermo. Per un intervallo finito di tempo Δt si ha:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \vec{\tau}=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \rightarrow \vec{\tau}\Delta t=\Delta\vec{L}$$

Scomponendo $\Delta\vec{L}$ ottengo:

$$\Delta L=\vec{L_f}-\vec{L_i}$$

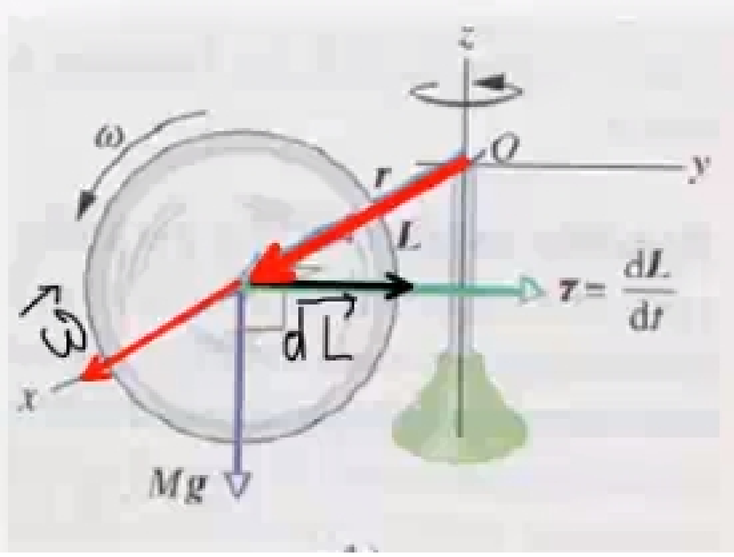
ma $\vec{L_i}=I\,\vec{\omega_i}=0$ e andando a sostituire

$$\Delta\vec{L}=\vec{L_f}$$

E quindi:

$$\vec{\tau}\Delta t=\vec{L_f}$$

con $L_f||\vec{\tau}$ e quindi parallelo all'asse y



Un giroscopio in rapida rotazione si comporta in maniera differente. Dopo aver messo in rotazione la ruota, l'albero prima ruota verso il basso leggermente, poi (mentre la ruota continua a girare attorno all'albero) ruota orizzontalmente attorno all'asse verticale z passante per il supporto e il punto O in un moto chiamato di **precessione**.
In sintesi il giroscopio in rapida rotazione rimane sospeso in aria invece di cadere a terra

Questo perché una volta in moto il momento della forza $\vec{\tau}$ dovuto a Mg modifica il momento angolare (non più nullo).

Nel caso in esame la ruota in rotazione attorno all'asse x ha un momento angolare $\vec{L}$ orientato lungo x ed essendo $\vec{L} \| \vec{r}$, il momento $\vec{\tau}$ sia $\perp \vec{L}$

Considerando che il giroscopio ruota rapidamente, il momento della forza provoca una variazione piccola di $d\vec{L}$, che sommata ad $\vec{L}$ può solo modificarne la direzione e non il modulo.

La direzione di $d\vec{L}$ è quella di $\vec{\tau}$ perpendicolare ad $\vec{L}$.
L'unico modo per modificarne la direzione senza modificare il modulo è far ruotare $\vec{L}$ attorno all'asse z (come in figura).

$\vec{L}$ mantiene il proprio modulo e la punta del vettore segna un moto circolare in modo che $\vec{\tau}$ resti sempre perpendicolare (quindi tangente alla traiettoria circolare)

Visto che $\vec{L} \|$ albero, quest'ultimo deve ruotare attorno all'asse z seguendo il verso imposto da $\vec{\tau}$ instaurando il moto di precessione.

Per ricavare la velocità di precessione ω_p :

Il modulo di $d\vec{L} = \tau\ dt = Mg\ r\ dt$

Per un incremento $d\vec{L}$ in un tempo dt l'albero e il momento angolare ruotano attorno all'asse z di un angolo incrementale:

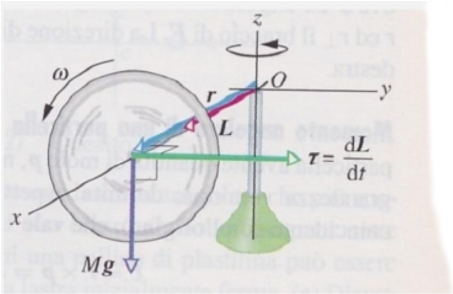
$$d\mu = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{Mg\ r\ dt}{I\ \omega}$$

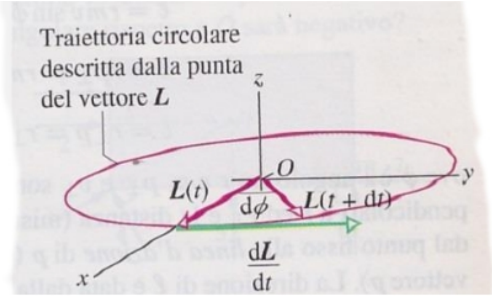
Dividendo per dt ottengo :

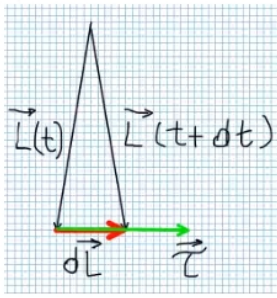
$$\frac{d\mu}{dt} = \omega_p \quad \rightarrow \quad \omega_p = \frac{Mg\ r\ dt}{I\ \omega}$$

NB: ω_p cresce al diminuire di ω e non si avrebbe precessione se non agisse la forza di gravità.

La relazione trovata vale anche per alberi del giroscopio non orizzontali.







Esempi di conservazione del momento angolare

In un sistema isolato il momento della quantità di moto si conserva. Infatti:

$$\vec{\tau}^{est}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{\tau}^{est}=\vec{0} \qquad \vec{L}=\overrightarrow{cost} \qquad \vec{L}_i=\vec{L}_f$$

Per un corpo che ruota attorno ad un asse fisso il momento angolare L rispetto a tale asse è

$$L=I\,\omega$$

e se il corpo è isolato

$$L_i=L_f \qquad I_i\,\omega_i=I_f\,\omega_f$$

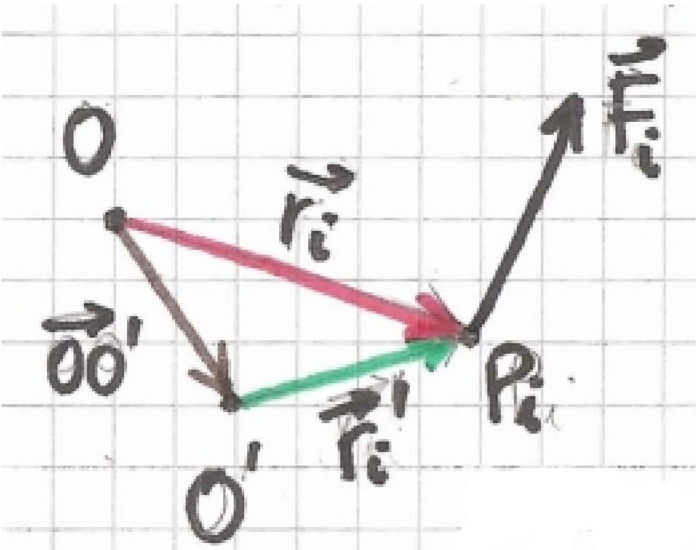
La velocità angolare è inversamente proporzionale al momento di inerzia rispetto all'asse fisso di rotazione

Proprietà dei sistemi applicate a punti diversi

Consideriamo un sistema di n punti materiali

Dimostriamo che il momento risultante dipende dal polo a meno che non sia nullo il risultante delle forze

Sia $\vec{F}_i$ la forza agente sul punto i-esimo P_i e consideriamo il momento della forza $\vec{F}_i$ rispetto ai poli O e O^1



$$\vec{\tau}_{oi}=\vec{r}_i\wedge\vec{F}_i \qquad \vec{\tau}_{oi}=\vec{r}_i^1\wedge\vec{F}_i$$

$$\vec{r}_i=\overrightarrow{OO^1}+\vec{r}_i^1 \qquad \vec{\tau}_{oi}=(\overrightarrow{OO^1}+\vec{r}_i^1)\wedge\vec{F}_i$$

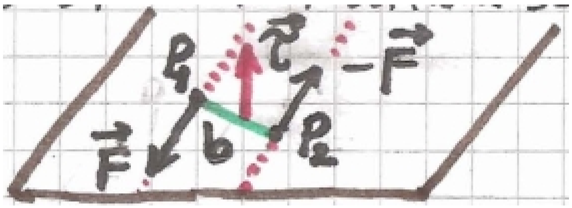
Indichiamo con $\vec{F}$ il risultante delle forze agenti sul sistema e con $\vec{\tau}_O, \vec{\tau}_{O^1}$ i momenti risultanti delle forze esterne rispetto ai poli O, O^1 rispettivamente:

$$\vec{\tau}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_{O_i}=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OO^1}+\vec{r}_i^1)\wedge\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OO^1}\wedge\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i^1\wedge\vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_o = \overrightarrow{OO^1} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,1} \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{OO^1} \wedge \vec{F} + \vec{\tau}_{O^1}$$

Chiaramente il momento non dipende dal polo cioè $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{O^1}$ solo nel caso che il risultante delle forze $\vec{F} = \vec{0}$

Un'applicazione importante di questo risultato riguarda la coppia di forze.
Sistema formato da due forze eguali e di verso opposto aventi in generale diversa retta di azione. La distanza tra le due rette d'azione è chiamata **braccio della coppia b.** Il risultante delle due forze è nullo e pertanto il momento $\vec{\tau}$ non dipende dalla scelta del polo. $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano individuato dalle due rette d'azione, ha verso determinato dalla regola del prodotto vettoriale e modulo bF come si ottiene scegliendo ad esempio P_2 come polo



Equilibrio statico del corpo rigido

La condizione di equilibrio statico per un punto materiale è che il risultante delle forze applicate al punto sia nullo

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Se il punto è inizialmente in quiete rimane in tale stato.
Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha l'equilibrio statico se

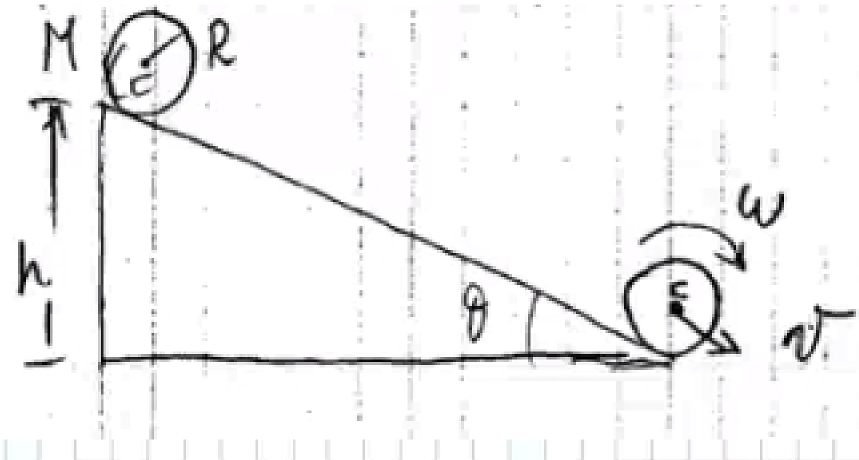
$$\vec{F} = \vec{0} \quad \vec{\tau} = \vec{0}$$

Con $\vec{F} = \vec{0}$ si realizza l'equilibrio statico del centro di massa $\overrightarrow{v_{CM}} = \vec{0}$ mentre $\vec{\tau} = \vec{0}$ non si ha moto rotatorio $\omega = 0$

Se $\vec{F} = \vec{0}$ allora $\vec{\tau}$ è indipendente dal polo. Quindi se è nullo rispetto ad un polo lo è rispetto a qualsiasi altro

Moto di puro rotolamento

Consideriamo una sfera piena che rotola su un piano inclinato senza strisciare (moto di puro rotolamento). Supponendo che la sfera parta da ferma da un'altezza h, determiniamo la velocità del centro di massa quando la sfera arriva ai piedi del piano inclinato



$$I_s = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I_{cp} = M \frac{R^2}{2} \Rightarrow I = \beta M R^2$$

$$I_{cv} = M R^2$$

L'energia meccanica si conserva

$$\omega = \frac{v}{R} \rightarrow \qquad M g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2}$$

Sapendo che $I = \beta M R^2$, vado a sostituirlo e ottengo

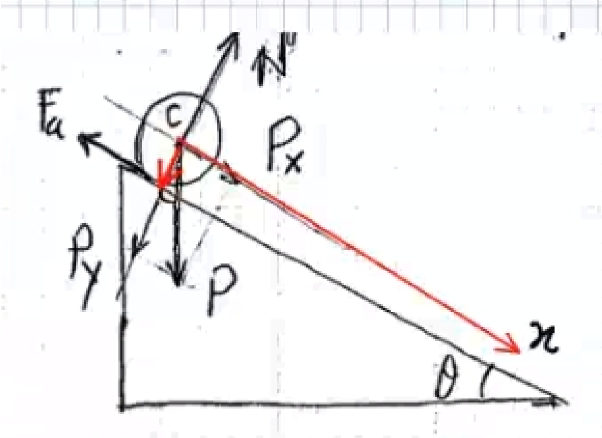
$$M g h = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \beta M R^2 \frac{v^2}{R^2}$$

semplifico e ottengo:

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1+\beta}}$$

La velocità finale non dipende dalla massa e dal raggio, ma dal coefficiente β (che ne indica la forma)

$$v_{CUBO} > V_{SFERA} > V_{CILINDRO \quad PIENO} > v_{CILINDRO \quad CAVO}$$



$$\vec{F} = M\vec{a}$$

$$\begin{cases} P_x - F_a = Ma \\ N - P_y = 0 \\ \tau = I\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - F_a = Ma \\ -Mg\cos\theta + N = 0 \\ RF_a = \beta MR^2 \cdot \frac{a}{R} \end{cases}$$

$$\tau = RF_a$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$I = \beta MR^2$$

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - F_a = Ma \\ N = Mg\cos\theta \\ F_a = \beta Ma \end{cases}$$

$$\cancel{M}g\sin\theta - \beta\cancel{M}a = \cancel{M}a$$

$$g\sin\theta = a(\beta+1)$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{\beta+1}$$

β si sostituisce con l'effettivo valore di forma del solido in esame (es Sfera → $\beta=\frac{2}{5}$)

Puro rotolamento → $F_a \leq F_{aMAX}$

$$\frac{tg\,\theta}{1+\beta^{-1}} \leq \mu_s \quad \rightarrow \quad tg\,\theta = \mu_s(1+\beta^{-1})$$

$$\theta \leq arctg(\mu_s(1+\beta^{-1}))$$

che rappresenta il caso di puro rotolamento e non scivolamento

$$\theta_{MAX} = arctg(\mu_s(1+\beta^{-1}))$$

$$\theta \leq \theta_{MAX}$$

Lezione del 12-06
(FINALE DI STAGIONE)

Urto elastico unidimensionale

Consideriamo due sfere rigide che, senza ruotare si muovono inizialmente lungo la retta congiungente i loro centri e che quindi urtano frontalmente muovendosi, dopo l’urto, sempre lungo la stessa retta e senza rotazione.

Il sistema è isolato e la quantità di moto si conserva:

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{P}_1^1+\vec{P}_2^1 \qquad M\,V+mv=M\,V_1+m\,v_1$$

L’urto è elastico: l’energia cinetica si conserva

$$\frac{1}{2}M\,V^2+\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}MV_1^2+\frac{1}{2}mv_1^2$$

Le velocità finali dopo l’urto v_1, V_1 si ricavano risolvendo il sistema:

$$M(V-V_1)=m(v-v_1) \quad (1)$$
$$M(V^2-V_1^2)=m(v^2-v_1^2) \quad (2)$$

Dividendo la (2) per la (1) ottengo:

$$V+V_1=v+v_1 \quad (3)$$

Mettendo a sistema la (1) e la (3):

$$M(V-V_1)=m(v-v_1)$$
$$V+V_1=v+v_1$$

Scompongo la prima equazione e isolo $m\,v_1$. Raggruppo al secondo membro i membri comuni e ottengo:

$$m\,v_1=MV-Mv_1-Mv+MV+mv$$

ottenuta ponendo con l’eq (3) $V_1=v_1+v-V$

Raggruppo i termini comuni:

$$(M+m)v_1=2MV+(m-M)v$$

Dividendo:

$$v_1=\frac{2M}{M+m}V+\frac{m-M}{M+m}v$$

Per simmetria posso sostituire i valori in piccoli $(v_1 \rightarrow V_1\ ,\ m \rightarrow M)$ e viceversa e ottengo:

$$v_1=\frac{2M}{M+m}V+\frac{m-M}{M+m}v \qquad\qquad V_1=\frac{2M}{M+m}v+\frac{M-m}{M+m}V$$

Casi particolari:

Se $M=m$ $\quad v_1=V \quad V_1=v$

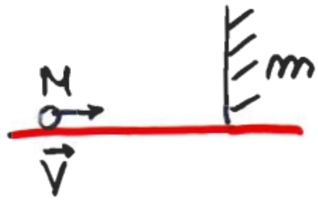
Se m è ferma → $v=0$

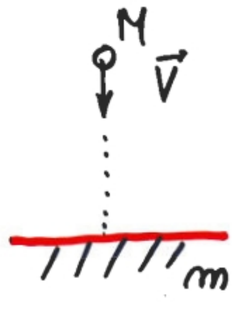
Se $M=m$ si ha:

$$v_1=V \quad V_1=0$$

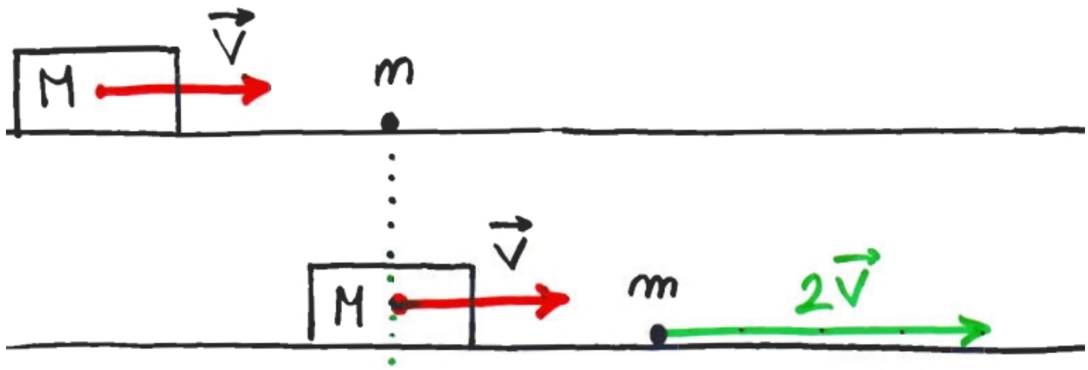
cioè la prima particella si ferma di colpo e la seconda prosegue con la velocità che aveva la prima

• $M \ll m$ $\quad V'=-V$ e $v'=0$





• $M \gg m$ $\quad V' \cong V \quad v'=2V$



Memo : forza frenante proporzionale al quadrato della velocità.

Per corpi che si muovono nell'aria ad alta velocità è possibile usare il modello di forza frenante proporzionale al quadrato della velocità. In questi casi il modulo della forza frenante può essere espresso come:

$$R=\frac{1}{2}D\rho A v^2$$

dove:

- D è una costante empirica adimensionale chiamata coefficiente di attrito viscoso;
- ρ è la densità dell'aria;
- A è l'area della sezione trasversale del corpo in moto perpendicolare alla velocità

Il coefficiente di attrito viscoso ha un valore di circa $0{,}5$ in oggetti sferici ma può raggiungere anche valori più grandi fino a un massimo di 2 (con corpi di forma irregolare).

Supponiamo che un corpo di massa m venga lasciato libero. Il modulo della forza risultante sul corpo in esame è:

$$F=mg-\frac{1}{2}D\rho A v^2$$

dove mg rappresenta la forza peso P che è esercitata sul corpo. Scriviamo con il meno in quanto abbiamo deciso di prendere come verso verticale positivo quello verso il basso (quello della forza peso appunto).

Inizialmente la forza peso P inizia ad aumentare, ma viene contrastata dalla forza R fino al punto in cui queste forze si eguagliano. A questo punto il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme in quanto la velocità non aumenterà più e il corpo cade con una velocità limite costante v detta anche **velocità di regime** o **velocità di saturazione**.

Facendo gli opportuni calcoli ottengo:

$$\frac{F}{m}=\frac{mg}{m}-\frac{1}{2}\frac{D\rho A v^2}{m}$$

Dividendo ove possibile ottengo:

$$a=g-\frac{1}{2}\frac{D\rho A}{m}v^2$$

La velocità limite si ottiene quindi quando la forza gravitazionale viene equilibrata dalla forza frenante (quando l'accelerazione vale zero):

$$0=g-\frac{1}{2}\frac{D\rho A}{m}v^2 \quad \rightarrow \quad v_{limite}=\sqrt{\frac{2gm}{D\rho A}}$$