Lezione 21

martedì 25 maggio 2021 08:38

Esercizio $\quad (\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) \quad \dim \mathcal{E} = 3 \quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \qquad P'(1+t', -1+2t', 1-t')$$

Verificare che le rette r ed r' sono sghembe, determinare la loro distanza e determinare un piano che sia parallelo sia a r sia a r'.

$$\vec{r}' = \mathcal{L}(u'(1,2,-1)) \qquad \vec{r} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$r \parallel r' \iff \vec{r} = \vec{r}' \qquad u' \in \vec{r} \iff \begin{cases} 1 + 4 + 1 = 0 \\ 2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{NO}$$

Allora $r \nparallel r'$

$$\exists\, P' \in r' : P' \in r \iff \begin{cases} \cancel{1} + t' - 2 + 4t' - 1 + t' = \cancel{1} \\ -\cancel{1} + 2t' + 1 - t' = -\cancel{1} \end{cases} \iff \begin{cases} 6t' = 3 \Rightarrow t' = \frac{1}{2} \\ t' = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{INCOMPATIBILE}$$

Quindi $r \cap r' = \emptyset$.

Di conseguenza, r e r' sono sghembe.

Trovo una rappresentazione parametrica di r: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{a}^1 \to \underline{a}^1 - 2\underline{a}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = -z - 1 \end{cases} \qquad \{(3z+3, -z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

$$r : \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \qquad P(3t+3, -t-1, t) \qquad P'(1+t', -1+2t', 1-t')$$

$$\vec{r} = \mathcal{L}(u(3,-1,1)) \qquad \vec{r}' = \mathcal{L}(u'(1,2,-1))$$

$$\begin{matrix} \overrightarrow{PP'} \perp u \\ \overrightarrow{PP'} \perp u' \end{matrix} \iff \begin{cases} 3\cancel{t'} - 9t - 6 - \cancel{2t'} - t + 1 - \cancel{t'} - t = 0 \\ t' - 3t - 2 + 4t' + 2t - 1 + t' + t = 0 \end{cases} \iff$$

$$\overrightarrow{PP'}(1 + t' - 3t - 3, -\cancel{1} + 2t' + t + \cancel{1}, 1 - t' - t)$$
$$\parallel$$
$$(t' - 3t - 2, 2t' + t, 1 - t' - t)$$

$$\iff \begin{cases} -11t = 5 \Rightarrow t = -\frac{5}{11} \\ 6t' = 3 \Rightarrow t' = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad P\left(-\frac{15}{11} + 3, \frac{5}{11} - 1, -\frac{5}{11}\right) = \left(\frac{18}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}\right)$$

$$P'\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$d(r, r') = d(P, P') = \sqrt{\left(\frac{63}{22}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{21}{22}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{PP'}\left(\frac{1}{2} - \frac{15}{11} - 2, 1 - \frac{5}{11}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{11}\right) = \left(\frac{11 - 30 - 44}{22}, \frac{6}{11}, \frac{22 - 11 + 10}{22}\right) = \left(-\frac{63}{22}, \frac{6}{11}, \frac{21}{22}\right)$$

$$\mathcal{H} \parallel r \text{ e } \mathcal{H} \parallel r' \Rightarrow \vec{\mathcal{H}} \supseteq \vec{r} \cup \vec{r}' \Rightarrow \vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(u, u')$$

$$\begin{cases} x = 3t_1 + t_2 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \dots \end{vmatrix} \qquad P(\dots) \in \mathcal{H}$$

$\mathcal{H} \parallel r$ e $\mathcal{H} \parallel r' \Rightarrow \mathcal{H} \supseteq r \cup r' \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{L}(u, u')$

$$\underbrace{\mathcal{H} : \begin{cases} x = 3t_1 + t_2 \\ y = -t_1 + 2t_2 \\ z = t_1 - t_2 \end{cases}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x-\bar{x} & y-\bar{y} & z-\bar{z} \end{vmatrix} = 0 \qquad \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{H}$$

Se $\bar{P} = O$:

$$\begin{cases} x = 6z + 3y + y + z \\ y = -z - t_2 + 2t_2 \Rightarrow t_2 = y + z \\ t_1 = z + t_2 \qquad \Rightarrow t_1 = 2z + y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6z + x + y - 2x + 3y + z = 0$$

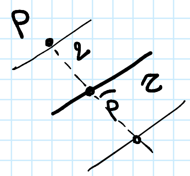
$$r: \begin{cases} x + \boxed{y - z} = 1 \\ 3x + \boxed{2y - 2z} = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad R^2 \to R^2 - 3R^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^1 \to R^1 + R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Esercizio $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, $\dim \mathcal{E} = 2$, $R = (O, \mathcal{B})$

Data la $r: -x + 2y = 3$, determinare una retta che abbia distanza 2 da r.

$-x + 2y - 3 = 0$



$P(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{E}$: $\quad d(P, r) = 2$

$$\frac{|b' + 3|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow |b' + 3| = 2\sqrt{5}$$

$$b' + 3 = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow b' = 3 \pm 2\sqrt{5}$$

$$[-x + 2y - 3 \mp 2\sqrt{5} = 0]$$

OPPURE: $\quad d(P, r) = 2$

$$\frac{|-\bar{x} + 2\bar{y} - 3|}{\sqrt{5}} \qquad |-\bar{x} + 2\bar{y} - 3| = 2\sqrt{5}$$

$$-\bar{x} + 2\bar{y} - 3 = \pm 2\sqrt{5}$$

per esempio: $\quad -\bar{x} + 2\bar{y} - 3 = 2\sqrt{5} \Rightarrow \bar{x} = 2\bar{y} - 3 - 2\sqrt{5}$

$\bar{P}(-3 - 2\sqrt{5}, 0)$

$$r': \begin{cases} x = -3 - 2\sqrt{5} + 2t' \\ y = t' \end{cases}$$

Esercizio $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

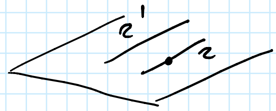
Determinare la retta r' parallela a r e passante per $Q'(2, 1, 1) \notin r$

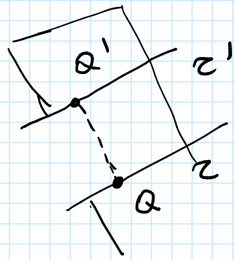
$\vec{r} = \mathcal{L}(u(0, 1, 1))$

$$r': \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$$

$$\bar{r}: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

e poi calcolare la distanza tra r e r'





$d(r', r) = d(Q', r) = d(Q', Q)$

Prendo il piano $\mathcal{H}$ ortogonale a r e passante per Q':

$\mathcal{H}: \; 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 z + d = 0$

$Q' \in \mathcal{H} \Rightarrow 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

$\mathcal{H}: \; y + z - 2 = 0$

$Q = r \cap \mathcal{H}: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \qquad Q(0, 1, 1)$

$\overrightarrow{Q'Q}\,(-2, 0, 0) \qquad \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \sqrt{4 + 0 + 0} = 2$

$\longrightarrow$

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) \qquad \dim \mathcal{E} = n$

Vi ripropongo la def. di sottospazi sghembi nel seguente modo (diverso dal libro):

$\mathcal{H}, \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono sghembi se e solo se il più sottospazio che li contiene ha dimensione $= \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{H}' = 1$.

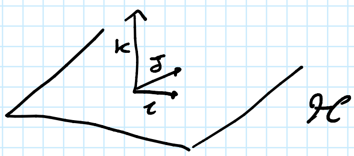
$\longrightarrow$

UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA del DETERMINANTE di una matrice di ordine 2 o 3. (Facoltativo)

V spazio vettoriale dei vettori liberi, $\dim V = 3$, $K = \mathbb{R}$

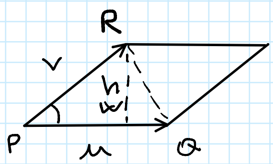
$\mathcal{B} = (i, j, k)$ base ortonormale $\qquad (\bar{V}, \mathcal{B})$ è uno sp. vett. euclideo orientato.

$\mathcal{H}: \; z = 0$



$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$u(u_1, u_2, 0), \quad v(v_1, v_2, 0) \; /\!/ \; \mathcal{H}$



Th: $|\det(A)| = $ area del parallelogramma del disegno.
$\|u\| \cdot h$

Teorema del seno: $h = \|w\| = \|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

Se $\{u, v\}$ lin. indip., possiamo ortogonalizzarlo:
$\langle v, u \rangle$

Se $\{u,v\}$ lin. indip., possiamo ortogonalizzarlo:

$$w = v - \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}u$$

$$h^2 = \|w\|^2 = \langle w,w\rangle = \left\langle v - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}u,\ v - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}u\right\rangle =$$

$$= \langle v,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\cancel{\|u\|^2}} + \frac{\langle u,v\rangle^{\cancel{2}}}{\|u\|^{\cancel{4}2}}\cancel{\|u\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} =$$

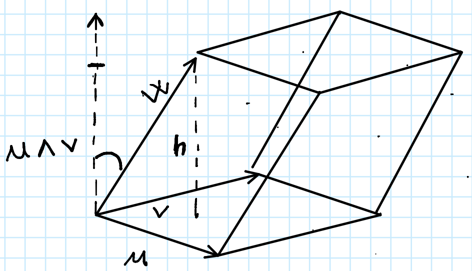
$$= \|v\|^2\left(1 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2}\right) = \|v\|^2(1-\cos^2\widehat{uv}) = \|v\|^2\operatorname{sen}^2\widehat{uv}$$

$$\Rightarrow \quad h = \|v\|\operatorname{sen}\widehat{uv}.$$

$$\|u\|\cdot h = \|u\|\|v\|\operatorname{sen}\widehat{uv} = \|u\wedge v\| = \sqrt{0+0+(u_1v_2-u_2v_1)^2} = |u_1v_2-u_2v_1| =$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0\\ v_1 & v_2 & 0\end{pmatrix} \qquad u\wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & 0\\ v_2 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & 0\\ v_1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right) = |\det(A)|.$$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} \qquad u(u_1,u_2,u_3),\ v(v_1,v_2,v_3),\ w(w_1,w_2,w_3)$$



$$h = \|w\|\cos\widehat{u\wedge v\ w} =$$

$$= \cancel{\|w\|}\frac{|u\wedge v\cdot w|}{\|u\wedge v\|\,\cancel{\|w\|}}$$

volume del parallelepipedo = PRODOTTO MISTO

$$= \cancel{\|u\wedge v\|}\cdot\frac{|u\wedge v\cdot w|}{\cancel{\|u\wedge v\|}} = |u\wedge v\cdot w|$$

$$u\wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

$$w \equiv_{\mathcal{B}} (w_1, w_2, w_3)$$

$$u\wedge v\cdot w = w_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - w_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + w_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix} = \det(A)$$

SVILUPPO DI LAPLACE rispetto alla terza riga.

FUORI PROGRAMMA:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $(\vec{\mathcal{E}}', \mathcal{E}', \pi')$ spazi affini.

$f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ è un'applicazione affine se:

$$\forall P\in\mathcal{E},\quad T_P: \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}}' \\ \overrightarrow{PX} & \leadsto & \overrightarrow{f(P)f(X)}\end{array}$$ è un'appl lineare.

Proposizione. $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ appl. affine.

Allora, $\forall\ P, Q \in \mathcal{E}$, $\quad T_P = T_Q$

<u>DIM</u> (facile!)

<u>Teorema</u> $\quad \dim \mathcal{E} = n, \quad \dim \mathcal{E}' = m$

$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) \qquad \mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$

$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ è un'appl. affine $\Leftrightarrow$

$\exists\ \underline{u} \in \mathbb{K}^m: \quad \forall\ P \in \mathcal{E} \qquad P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f(P) \equiv_{\mathcal{R}'} (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$

$A = \underline{M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}(T_P) \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underline{u}$

Esempi:

- se $n = m$, $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) = (\vec{\mathcal{E}}', \mathcal{E}', \pi')$ e $A = I_n$, allora f è una traslazione

$P \bullet \xrightarrow{\underline{u}} \qquad f(P) = P + u(\underline{u})$

- se $n = m$ e A è ortogonale, allora f si dice isometria e T_P si dice <u>ortogonale</u>.

In questo caso: f conserva le distanze

T_P conserva il prodotto scalare

Se in particolare $n = m = 2$, A ortogonale può essere solo di due tipi:

$\alpha \in [0, 2\pi] \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ opp. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ [Esempio 3.2 del libro]

- se $n = m$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ e $A \begin{pmatrix} h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ & \cdots & & h \end{pmatrix} \quad h \neq 0$

f si dice OMOTETIA.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$T(e_1) = h e_1$

$\vdots$

$T(e_n) = h e_n$

- Nelle prossime lezioni studieremo come individuare quegli endomorfismi

$T: V \to V$

tali che esiste una base di V, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, per cui:

$T(e_1) = \lambda_1 e_1$

$\vdots$

$T(e_m) = \lambda_m e_m.$