

$A \in M_{m \times n}(K)$, dove K è un campo, $A = (\underline{a}_j^i)$

Ricordiamo che il rango di A è la dimensione dello spazio vett. $\subseteq K^m$ generato dalle colonne di A . Si può dimostrare che il rango di A è uguale al rango di A^T e, quindi, alle dimensioni dello spazio vettoriale $\subseteq K^n$ generato dalle righe di A .

Trasformazioni o operazioni elementari (sulle righe):

- (I) $i, h \in \{1, \dots, m\}$, $\underline{a}^i \leftrightarrow \underline{a}^h$
- (II) $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K - \{0\}$ $\underline{a}^i \rightarrow \lambda \underline{a}^i$
- (III) $i, h \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq h$, $\beta \in K$, $\underline{a}^i \rightarrow \underline{a}^i + \beta \underline{a}^h$

Queste trasformazioni sono invertibili:

Se $B = (b_j^i)$ è la matrice ottenuta da A seguendo una di queste operazioni elementari, poniamo di nuovo A effettuando su B una operazione dello stesso tipo:

- (I) per ottenere A , $\underline{b}^i \leftrightarrow \underline{b}^h$
- (II) per ottenere A , ottieniamo $\underline{b}^i = \lambda \underline{a}^i$ e basta $\underline{b}^i \rightarrow \lambda^{-1} \underline{b}^i = \underline{a}^i$
- (III) per ottenere A , ottieniamo $\underline{b}^i = \underline{a}^i + \beta \underline{a}^h$ e basta $\underline{b}^i = \underline{b}^i - \beta \underline{b}^h = \underline{a}^i$
 $\underline{b}^h = \underline{a}^h$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I) \quad i=1, h=2 \quad \underline{a}^1 \leftrightarrow \underline{a}^2 \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(II) \quad i=3, \lambda=2 \quad \underline{a}^3 \rightarrow 2 \cdot \underline{a}^3 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(III) \quad i=3, h=2, \beta=-\frac{1}{2} \quad \underline{a}^3 \rightarrow \underline{a}^3 - \frac{1}{2} \underline{a}^2 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1, 1, 0, 1) - \frac{1}{2} (2, 0, -1, 1)$$

Quindi, applicare queste trasformazioni implica di sostituire una riga con una comb. lineare di righe: le righe di B sono comb. lin. delle righe di A e viceversa.

$$\begin{aligned} (\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) &\subseteq \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) = \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) \\ (\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) &\subseteq \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) \end{aligned}$$

In particolare $\dim \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) = \dim \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) = \text{rango}(A)$

Def. Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. A si dice ridotta a gradini (opp. a scalelli) se esiste b , $0 \leq b \leq m$, tale che:

- (1) $\forall i \in \{1, \dots, b\}$, posto $j_2 = \min \{j \in \{i, \dots, m\} \mid \underline{a}_{ij}^2 \neq 0\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_b$
- (2) $\forall i \in \{b+1, \dots, m\}$, $\underline{a}^i = 0$. $\underline{a}_{j_2}^i$ si dice pivot

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 8 \end{array} \right) \quad \text{è una matrice ridotta a gradini.}$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ è una matrice ridotta a gradini.}$$

Def. Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. A si dice completamente ridotta se è ridotta a gradini e

$$(3) \forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad a_{ii}^i = 1 \quad \text{e} \quad a_{ij}^i = 0, \quad \forall j < i.$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ è una matrice completamente ridotta.}$$

Teorema Ogni matrice in un campo K può essere trasformata in una matrice a gradini.

Ovv. in una matrice completamente ridotta mediante un numero finito di trasformazioni elementari. (Algoritmo di Gauss)

Esempio. Consideriamo $A = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \in M_{3 \times 5}(R)$

Individuo il minimo indice di una colonna non nulla: $k=3$

Individuo il minimo indice ^{di neg} di un elemento non nullo sulla colonna 3: $h=2$

$$\underline{a^1} \leftrightarrow \underline{a^2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underline{a^3} \rightarrow \underline{a^3} + \beta \underline{a^2}$$

$$1 + \beta \cdot 2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{a^3} \rightarrow \underline{a^3} + (-\frac{1}{2}) \underline{a^2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underline{a^3} \rightarrow \underline{a^3} + (-1) \underline{a^1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{array} \right)$$

è ridotta a gradini.

$$\underline{a^1} \rightarrow \frac{1}{2} \underline{a^1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{-3}{2}} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4} = -\frac{5}{3}$$

$$\underline{a^1} \rightarrow \underline{a^1} + (-2) \underline{a^3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right)$$

$$-2 + (-2)(-\frac{5}{3}) = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\underline{a^1} \rightarrow \underline{a^1} + \frac{1}{2} \underline{a^3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{5}{3}} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{5}{3}) = \frac{3-5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

è completamente ridotta.

DIM. (del Teorema)

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{array} \right) \quad \text{Sia } k = \min \{ j \in \{1, \dots, m\} \mid a_{ij}^j \neq 0 \} \quad \text{e } h = \min \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid a_{ih}^i \neq 0 \}$$

Effettuiamo le trasformazioni $\underline{a^i} \leftrightarrow \underline{a^h}$

$$i_1 = k$$

$$A := \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \quad \text{pivot della prima riga}$$

Effettuiamo la trasformazione $\underline{a}^i \leftrightarrow \underline{a}^j$

$$J_{ij} = k \quad A := \begin{pmatrix} \dots & \dots & \underline{a}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \underline{a}^j \end{pmatrix}$$

RINOMINIAMO dobbiamo rendere nulli tutti gli elementi che ritrovano qui

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \underline{a}^i \rightarrow \underline{a}^i + \beta_i \underline{a}^j$$

$$\text{dove } \beta_i \text{ deve essere tale che } a_{ik}^i + \beta_i a_{jk}^i = 0 \Rightarrow \beta_i = -a_{ik}^i \cdot (a_{jk}^i)^{-1}$$

In seguito a queste trasformazioni:

$$A := \begin{pmatrix} \dots & \dots & \underline{a}^i & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

matrice e ci applichiamo lo stesso ragionamento.

Ripetuiamo questo tipo di trasformazione finché è grande n : ottieniamo matrice a gradini.

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Per trasformare questa matrice a gradini in matrice completamente ridotta, eseguiamo anche le seguenti trasformazioni:

sia p il numero di pivot:

- $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \underline{a}^i \rightarrow \frac{1}{a_{ii}} \underline{a}^i \quad \text{"normalizziamo" i pivot}$
- $\forall r = p+1, \dots, n \quad (\text{step } -1), \quad \underline{a}^r \rightarrow \underline{a}^r + a_{ir}^i \underline{a}^i \quad \square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^1 \leftrightarrow \underline{a}^3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^4 \rightarrow \underline{a}^4 - \underline{a}^1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^3 \rightarrow \underline{a}^3 - 2\underline{a}^1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta a gradini

$$\underline{a}^3 \rightarrow -\frac{1}{2}\underline{a}^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^1 \rightarrow \underline{a}^1 - \underline{a}^3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^1 \rightarrow \underline{a}^1 - \underline{a}^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

completamente ridotta

Proposizione. Sia $A \in M_{m \times n}(k)$ ridotta a gradini.

Allora $\text{rang}(A) = \# \text{pivot} = \# \text{righe non nulle di } A$

Allora $\text{range}(A) = \mathbb{K}$ pivot = # righe non nulle di A

DIM: procediamo per induzione sul numero di pivot b :

$$A = \begin{pmatrix} \square & - & - & - & - \\ 0 & 1 & \square & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & - & - & - & 0 \end{pmatrix}$$

- $b=0$, la matrice A è nulla per cui $\text{range}(A)=0$
- supponiamo vero l'enunciato per matrici con $b-t$ pivot alberi, il range della matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga è $b-t$, per ipotesi di induzione. Questo vuol dire che $\{\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^b\}$ è lin. indip.

Osserviamo che $\underline{e}^t \notin \mathcal{L}(\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^b)$

Da cui $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \dots, \underline{e}^b\}$ è lin. indip.

• $\text{range}(A) = b$.

□

Esercizio $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ $W = \mathcal{L}(1+x^2, 1-x-x^2)$, $U = \mathcal{L}(2-x, x+x^2+x^3)$

Vedremo se $W+U$ è somma diretta oppure no. Ricordiamo che

$W+U$ è somma diretta $\Leftrightarrow W \cap U = \{0\}$.

In tal caso, usando la relazione di Gramm:

$$\dim(W+U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U)$$

$\overset{W+U \text{ dir}}{\Leftrightarrow} \overset{W \cap U = \{0\}}{= 0}$

Quindi $W+U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W+U) = \dim W + \dim U$

Osserviamo che: $\dim W = 2 = \dim U$

Allora: $W+U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W+U) = 2+2=4$

$$W+U = \mathcal{L}(1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3)$$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3) \quad \begin{aligned} \Phi_{\mathcal{B}}(1+x^2) &= (1, 0, 1, 0) \\ \Phi_{\mathcal{B}}(1-x-x^2) &= (1, -1, -1, 0) \\ \Phi_{\mathcal{B}}(2-x) &= (2, -1, 0, 0) \\ \Phi_{\mathcal{B}}(x+x^2+x^3) &= (0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$\{1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3\}$ lin. indip $\Leftrightarrow \{(1, 0, 1, 0), (1, -1, -1, 0), (2, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\} \Rightarrow$ è lin. indip.

$$\Leftrightarrow \text{range} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{array}{l} \underline{e}^1 \rightarrow \underline{e}^1 - \underline{e}^2 \\ \underline{e}^3 \rightarrow \underline{e}^3 - 2\underline{e}^1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \underline{e}^3 \rightarrow \underline{e}^3 - \underline{e}^2 \\ \underline{e}^4 \rightarrow \underline{e}^4 + \underline{e}^1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \underline{e}^3 \leftrightarrow \underline{e}^4$$

$$\text{range} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 4 \quad W+U \neq W \oplus U$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE: $(K, +, \cdot)$ campo

Una coppia di matrici (A, B) , con $A \in M_{m \times n}(K)$ e $B \in M_{p \times q}(K)$, si dice CONFORMABILE se e solo se $m=p$ (<# colonne di A = # righe di B>)

Quindi, se (A, B) è conformabile i vettori righe di A e i vettori colonne di B appartengono allo stesso spazio vettore numerico (K^m).

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(R)$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(R)$

(A, B) , (B, A) sono conformabili.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(A, C) è conformabile
 (C, A) non è conformabile
 (C, B) è conformabile
 (B, C) non è conformabile

PRODOTTO SCALARE NUMERICO (opp. canonico opp. naturale opp...)

$$K^m \times K^m \longrightarrow K$$

$$((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_n)) \rightsquigarrow \underline{a_1 b_1} + \dots + \underline{a_m b_m} =: (a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_m)$$

PROPRIETÀ: $\forall (a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in K^m$, $\forall (c_1, \dots, c_m) \in K^m$
 (dim. facoltativa)

- $(a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_m) \cdot (a_1, \dots, a_m)$ simmetria
- $((a_1, \dots, a_m) + (b_1, \dots, b_m)) \cdot (c_1, \dots, c_m) = (a_1, \dots, a_m) \cdot (c_1, \dots, c_m) + (b_1, \dots, b_m) \cdot (c_1, \dots, c_m)$
- $\forall \lambda \in K$, $(\lambda(a_1, \dots, a_m)) \cdot (b_1, \dots, b_m) = \lambda((a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_m))$
- Se $K=R$, $(a_1, \dots, a_m) \cdot (a_1, \dots, a_m) = a_1^2 + \dots + a_m^2 \geq 0$
 $= 0 \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_m) = \underline{0}$

(A, B) coppia conformabile di matrici in K , $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times q}(K)$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^q \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^q \end{array} \right) \text{def. } \left(\begin{array}{cccc} \underline{a_1^1 \cdot b_1} & \underline{a_1^2 \cdot b_2} & \dots & \underline{a_1^q \cdot b_q} \\ \underline{a_2^1 \cdot b_1} & \underline{a_2^2 \cdot b_2} & \dots & \underline{a_2^q \cdot b_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a_n^1 \cdot b_1} & \underline{a_n^2 \cdot b_2} & \dots & \underline{a_n^q \cdot b_q} \end{array} \right) \in M_{m \times q}(K)$$

prodotto righe
per colonne

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(R)$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(R)$ trasposta

$$\underline{a_1^1} = (2, -3) \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{\triangle}{=} (1, -3)$$

$$\underline{a_1^2} = (4, 7) \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\triangle}{=} (0, 1)$$

$$\underline{b_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\triangle}{=} (-2, 1)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{a_1^1} \cdot b_1 & \underline{a_1^2} \cdot b_2 & \underline{a_1^3} \cdot b_3 \\ \underline{a_2^1} \cdot b_1 & \underline{a_2^2} \cdot b_2 & \underline{a_2^3} \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -3 & -7 \\ -17 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a_1^1} \cdot b_1 = (2, -3)(1, -3) = 2+9 = 11$$

$$\underline{a_1^2} \cdot b_2 = (2, -3)(0, 1) = -3$$

$$\underline{a_1^3} \cdot b_3 = (2, -3)(-2, 1) = -4-3 = -7$$

$$\underline{a_2^1} \cdot b_1 = (4, 7)(1, -3) = 4-21 = -17$$

$$\underline{a_2^2} \cdot b_2 = (4, 7)(0, 1) = 7$$

$$\underline{a_2^3} \cdot b_3 = (4, 7)(-2, 1) = -8+7 = -1$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{\alpha^1} b_1 & \underline{\alpha^1} b_2 & \underline{\alpha^1} b_3 \\ \underline{\alpha^2} b_1 & \underline{\alpha^2} b_2 & \underline{\alpha^2} b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -7 \\ -17 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\alpha^2} b_3 = (6, 7)(-2, 1) = -8 + 7 = -1$$

$\in M_{2 \times 3}(R)$

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \neq CA = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{non è comm.}$

PROPRIETÀ (senza dim.)

$$(1) \quad A \in M_{m \times m}(K), \quad B \in M_{m \times q}(K), \quad C \in M_{q \times n}(K)$$

$$(AB) \cdot C = A(BC) \quad (\text{proprietà associativa})$$

$\in M_{m \times q} \quad \in M_{m \times n}$

$$(2) \quad A, B \in M_{m \times m}(K), \quad C \in M_{m \times q}(K), \quad D \in M_{n \times q}(K)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad (\text{distributività})$$

$$A(C+D) = AC + AD$$

Osservazione - Consideriamo $M_m(K)$ matrice quadrata.

Allora prodotto righe per colonne : $M_m(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_m(K)$

è un'operazione interna

- non è commutativa

- è associativa

- ha elemento neutro : (Esercizio)

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{identità o matrice identica}$$

- non tutte le matrici quadrate sono invertibili : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ non è invertibile

Consideriamo $Gl_m(K) = \{A \in M_m(K) \mid A \text{ invertibile}\} \ni I_m$

$(Gl_m(K), \text{ prodotto righe per colonne})$ gruppo non abeliano di ordine $m \times m$ di K .

$$\underline{(1)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_2(K)$$

$$\sum: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sist. di } m \text{ eqz. lin. in } n \text{ incognite o variabili} \\ \text{n compone} \quad (a_{ij}^1, b_i \in K) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{21}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^1 & \dots & a_{mn}^1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti

colonna dei termini noti

$$\Sigma: \quad A \cdot X = b \quad \text{forma matriciale}$$

$$(A, b)$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^1 & \dots & a_{mn}^1 & | & b_m \end{pmatrix} \quad \text{matrice completa}$$