

Lezione 12

venerdì 23 aprile 2021 10:20

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^1 & a_{m2}^1 & \cdots & a_{mn}^1 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_m(K), \quad K \text{ campo}, \quad A = (a_{ij}^1)$$

- A si dice triangolare superiore (rispettivamente inferiore) se:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i > j \Rightarrow a_{ij}^1 = 0$$

$$(\text{rispettivamente, } \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i < j \Rightarrow a_{ij}^1 = 0)$$

- A si dice diagonale se:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j \Rightarrow a_{ij}^1 = 0$$

- A si dice simmetrica se $A = {}^t A$, ovvero:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, a_{ij}^1 = a_{ji}^1$$

- A si dice antisimmetrica se: $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, a_{ij}^1 = -a_{ji}^1$.

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \pi \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è triang. sup.}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ \pi & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è triang. inf.}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è diagonale}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{è simmetrica}$$

$$B = {}^t B$$

$$K = \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & -\pi \\ -7 & 0 & 3 \\ \pi & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è antisimmetrica}$$

Oss: le matrici quadrate nobili e gredini sono triangolari superiori; ma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{è triangolare superiore ma non è nobile e gredino:}$$

Vogliamo definire un'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \det: & M_m(K) & \longrightarrow K \\ & A & \rightsquigarrow \det(A) \\ & & \text{opp } |A| \end{array}$$

che chiameremo determinante
e che si per dimostrare avere
l'unica applicazione con i det.
dominio e codominio tali che:
(senza dim.)

- Se B è la matrice ottenuta da A scambiando due righe, allora
 $\det(B) = -\det(A)$

- Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, allora:

(II tipo)

$$\det(B) = \lambda \det(A)$$

- Se B è la matrice ottenuta da A effettuando un'operazione elementare del III tipo, allora:

$$\det(B) = \det(A)$$

- $\det(I_m) = 1$.

Vediamo la definizione:

(1) Se X è un insieme finito, l'insieme delle sue PERMUTAZIONI è

$$P_X := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ biuniv}\}$$

In particolare, se $X = \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, servono $P_m := P_X$

Esempi:

$$m=1 \quad \text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\} \quad |P_1| = 1$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 1 \end{matrix}$$

$$m=2 \quad \text{id}: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}, \quad f: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\} \quad |P_2| = 2$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 1 \\ 2 & \rightsquigarrow & 2 \end{matrix}$$

$$(1 \ 2) \qquad \qquad (2 \ 1)$$

$$m=3 \quad f_1: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \quad f_2: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 1 \\ 2 & \rightsquigarrow & 2 \\ 3 & \rightsquigarrow & 3 \end{matrix}$$

$$(1 \ 2 \ 3) \qquad \qquad (1 \ 3 \ \underline{2})$$

$$f_3: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \quad f_4: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 3 \\ 2 & \rightsquigarrow & 2 \\ 3 & \rightsquigarrow & 1 \end{matrix}$$

$$(\underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1}) \qquad \qquad (2 \ \underline{1} \ 3)$$

$$f_5: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \quad f_6: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 2 \\ 2 & \rightsquigarrow & 3 \\ 3 & \rightsquigarrow & 1 \end{matrix} \quad \text{2 inversioni}$$

$$(\underline{2} \ \underline{3} \ \underline{1}) \qquad \qquad (\underline{3} \ \underline{1} \ 2)$$

$$|P_3| = 6$$

In generale:

$$\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & m \text{ scelte} \\ 2 & \rightsquigarrow & m-1 \text{ scelte} \\ 3 & \rightsquigarrow & m-2 \text{ scelte} \end{matrix}$$

$$|P_m| = m(m-1)(m-2) \dots \cdot 1 = m!$$

$m \rightarrow n$ & scelte

Def. Sia $f \in P_m$. Si dice che f presenta una INVERSIONE se:

$$\exists i, j \in \{1, \dots, m\} : i < j \text{ e } f(i) > f(j)$$

Il segno di f è: $\text{sign}(f) = \begin{cases} -1, & \text{se } f \text{ ha un numero dispari di inversioni} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$A = (a_{ij}^i) \in M_m(K)$$

Def. $|A| = \det(A) := \sum_{f \in P_m} \text{sign}(f) a_{f(1)}^1 a_{f(2)}^2 \cdots a_{f(m)}^m$

Esempio:

$$m=1 \quad A = (a_{11}^1) \quad |A| = a_{11}^1, \quad A = (-3), \quad |A| = -3$$

$$m=2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^2 \\ a_{21}^1 & a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = + a_{11}^1 a_{22}^2 - a_{12}^2 a_{21}^1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 2(-3) - (-1)(-1) = -6 + 7 = 1$$

$$m=3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{a_{11}^1 a_{12}^1 a_{13}^1}_+ + (-1) \underbrace{a_{11}^1 a_{13}^1 a_{22}^1}_+ + (-1) \underbrace{a_{21}^1 a_{22}^1 a_{13}^1}_+ + (-1) \underbrace{a_{21}^1 a_{23}^1 a_{31}^1}_+ +$$

$$+ \underbrace{a_{31}^1 a_{32}^1 a_{13}^1}_+ + \underbrace{a_{31}^1 a_{33}^1 a_{22}^1}_+$$

Nel caso $m=3$, la regola di Sarrus ci viene in aiuto:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 \end{matrix} - \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} a_{11}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{33}^1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 8 + 6 + 0 - 4 - 0 - 0 = 10$$

$m=4$ $|P_4| = 24$. Il calcolo del determinante diventa più complicato.

Ci viene in aiuto un teorema importante che si chiama

Teorema di Laplace opp. periamo con le riduzioni e agrediri:

Esempio. Riduciamo a agrediri. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\frac{\underline{a_3}}{\underline{a_1}} \rightarrow \underline{a_3} - \frac{1}{2} \underline{a_1}$
(III) tipo

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{2} + 4\alpha = 0 \Rightarrow 4\alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8}(-2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

$|B| = 2 \cdot \frac{5}{4} = 10 = |A|$ perciò abbiamo mato solo operazioni del III tipo.

$= b_1^1 b_2^2 b_3^3$ dimostreremo che questo è vero per ogni matrice triangolare usando il Teorema di Laplace (nel libro c'è una dimostrazione indipendente del Teor. di Laplace)

Per enunciare il Teorema di Laplace abbiamo bisogno di sapere cosa è il complemento algebrico di un elemento a_{ih} di A , per ogni $i, h \in \{1, \dots, n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \\ \hline a_{ij}^c & \dots & a_{ih}^c & \dots & a_{in}^c \\ a_{ij}^m & \dots & a_{ih}^m & \dots & a_{in}^m \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} i\text{-esima riga} \\ \uparrow \\ h\text{-esima colonna} \end{array}$$

Se cancelliamo $\underline{a_i^c}, \underline{a_{ih}^c}$ individuiamo una matrice quadrata di A di ordine $m-1$ che si denota con M_{ih}^c e si chiama minore complementare di a_{ih}^c .

Il complemento algebrico di a_{ih}^c in A è:

$$A_{ih}^c = (-1)^{i+h} |M_{ih}^c|$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $i=2, h=1$

$$M_2^1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad |M_2^1| = -3$$

$$A_2^1 = (-1)^{2+1} (-3) = 3$$

Teorema di Laplace $A \in M_m(k)$

$$\det(A) = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \dots + a_m^1 A_m^1 =$$

sviluppo di Laplace rispetto
alla riga i -esima

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$= a_{ih}^1 A_{ih}^1 + a_{ih}^2 A_{ih}^2 + \dots + a_{ih}^m A_{ih}^m$$

sviluppo di Laplace rispetto
alla colonna h -esima

$$\forall h \in \{1, \dots, m\}$$

Secondo Teorema di Laplace (senza dim.)

$A \in M_{m \times n}(K)$

$$\forall i, k \in \{1, \dots, m\}, \quad a_{i1}^k A_{i1}^k + \dots + a_{im}^k A_{im}^k = 0 \\ \text{se } i \neq k$$

$$\forall j, h \in \{1, \dots, m\}, \quad a_{j1}^h A_{j1}^h + \dots + a_{jn}^h A_{jn}^h = 0 \\ \text{se } j \neq h$$

Questi due risultati si possono unire in un unico enunciato:

Teorema di Laplace generalizzato: $A \in M_{m \times n}(K)$

$$\forall i, k \in \{1, \dots, m\} \quad a_{i1}^k A_{i1}^k + \dots + a_{im}^k A_{im}^k = \delta_{ik}^n \det(A)$$

$$\forall j, h \in \{1, \dots, m\} \quad a_{j1}^h A_{j1}^h + \dots + a_{jn}^h A_{jn}^h = \delta_{jh}^n \det(A)$$

dove $\delta_{ij}^n = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ si dice SIMBOLO DI KRONECKER.

OSSERVAZIONE: direttamente dalla def. di determinante si ha: $A \in M_{m \times n}(K), \quad \det(A) = \det({}^t A)$

Teorema di Binet: $A, B \in M_{m \times n}(K)$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A usando il Teorema di Laplace:

$$\det(A) = a_{11}^1 A_{11}^1 + a_{12}^1 A_{12}^1 + a_{13}^1 A_{13}^1 + a_{14}^1 A_{14}^1$$

$$\text{Se } i=3 \quad \stackrel{\parallel}{0} \quad \stackrel{\parallel}{0}$$

le formule riduce a:

$$= a_{11}^3 A_{11}^3 + a_{33}^3 A_{33}^3$$

$$A_1^3 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Proposizione: Se $A \in M_{m \times n}(K)$ triangolare, allora

$$|A| = a_{11}^1 a_{22}^2 \cdots a_{nn}^n$$

DIM Usiamo il Teorema di Laplace

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Procediamo per induzione sull'ordine n della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m^m \end{pmatrix}$$

Procediamo per induzione sull'ordine m
della matrice

$$[\det(A) = \det(\frac{1}{2}A)]$$

$m=1$ $A = (a_1^1)$ seppiamo $\det(A) = a_1^1$ e quindi l'enunciato vale.

$$m-1 \Rightarrow m$$

Sviluppo il determinante di A rispetto all'ultima riga col Teorema di Laplace:

$$\det(A) = a_m^m A_m^m + \cdots + a_{m-1}^m A_{m-1}^m + a_1^m A_1^m = a_m^m A_m^m$$

$$A_m^m = (-1)^{m+m} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{m-1} \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{per h.p. di induzione}} a_1^1 a_2^2 \cdots a_{m-1}^{m-1}$$

$$\text{da cui } \det(A) = a_m^m a_1^1 a_2^2 \cdots a_{m-1}^{m-1} = a_1^1 a_2^2 \cdots a_{m-1}^{m-1} a_m^m. \quad \square$$

Quindi, se abbiamo una matrice molto a quadri, possiamo calcolare il suo determinante molto velocemente.

Proposizione: $A \in M_m(K)$

$$\text{range}(A) = m \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

DIM Sia B una matrice molto a quadri ottenuta da A . Quindi:

$$\text{range}(B) = \text{range}(A)$$

$$\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\text{range}(B) = m \Leftrightarrow \# \text{ pivot di } B = m \Leftrightarrow \text{gli pivot di } B \text{ si trovano tutti sulla diagonale principale, in particolare } b_i^i \neq 0$$

$$\updownarrow$$

$$\det(B) = b_1^1 \cdots b_m^m \neq 0$$

$$\updownarrow$$

$$\det(A) \neq 0$$

\square

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) =$ per esercizio, applicate le def. opp.
il Teor. d. Laplace

$$\begin{array}{l} \underline{a_1^1} \rightarrow \underline{a_1^1} - 2 \underline{a_2^1} \\ \underline{a_3^3} \rightarrow \underline{a_3^3} - \underline{a_2^3} \\ \hline \underline{a_1^1} + \underline{a_2^1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underline{a_3^3} \rightarrow \underline{a_3^3} - \underline{a_2^3} \\ \hline \text{III terna} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\underline{\alpha^3} \rightarrow \underline{\alpha^3} - \underline{\alpha^1} \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array} \right) \quad \underline{\alpha^1} \rightarrow \underline{\alpha^1} - \underline{\alpha^2} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = B$$

III tipo

range = 2

$$|B| = 1 \cdot (5) \cdot (0) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$$

$$\underline{\alpha^3} = \underline{\alpha^1} - \underline{\alpha^2} \quad \text{range}(A) = 2 = \text{range}(B)$$

Come possiamo usare queste informazioni per ottenere informazioni sul range di qualunque matrice mediante l'uso dei determinanti?

Daremo una risposta a queste domande durante le prossime lezioni enunciando il Teorema degli ordini (o di Kronecker).

Ricordiamo che una matrice $A \in M_n(K)$ si dice INVERTIBILE (o REGOLARE) se esiste $B \in M_n(K)$ tali $AB = BA = I_m$

$$\text{e si scrive } A^{-1} = B$$

Teorema. A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

DIM " \Rightarrow " per ipotesi: $\exists A^{-1} \in M_n(K)$

$$A^{-1}A = I_m \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det(I_m) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\downarrow \Leftarrow$ Teorema di Binet

$$\frac{\det(A^{-1})}{\in K} \frac{\det(A)}{\in K}$$

$$\Rightarrow \underline{\det(A) \neq 0}, \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

" \Leftarrow " questa parte di dimostrazione è costruttiva

Consideriamo

$$A^\# = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \cdots & A_m^n \end{pmatrix} \quad \text{matrice aggiunta di } A$$

$$\text{Th: } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(A^\#)$$

$${}^t(A^\#) \cdot A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \cdots & A_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} = (c_{ij}^j)$$

$$c_{ij}^j = (A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^n) \cdot (a_1^j, a_2^j, \dots, a_m^j) =$$

$$= \alpha_1^h A_{\bar{j}}^1 + \alpha_2^h A_{\bar{j}}^2 + \dots + \alpha_n^h A_{\bar{j}}^n = \delta_{\bar{j}}^h \det(A)$$

Teorema d. Laplace
generalizzato

$$\frac{1}{\det(A)} {}^t(A^\#) \cdot A = \left(\frac{1}{\det(A)} \delta_{\bar{j}}^h \det(A) \right) = (\delta_{\bar{j}}^h) = I_m$$

$$\text{Inoltre: } A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} {}^t(A^\#) \right) = I_m$$

Si procede analogamente. \square

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 6 - 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^\# = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 \\ A_{11}^2 & A_{12}^2 & A_{13}^2 \\ A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11}^3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12}^1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12}^3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13}^1 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13}^3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21}^1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22}^1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23}^1 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{\det(A)} {}^t(A^\#) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ESERCIZIO: controllare i conti!!!}$$