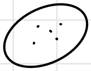
Geometria

Lez. 1 - 08/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Insiemi



$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad \Longleftrightarrow \quad$ $\{x \mid x$ è uno dei primi 4 numeri naturali dispari$\}$

$3 \in A \qquad A \ni 3$

$\emptyset \qquad 4 \notin A \qquad A \not\ni 4$

Siano A, B insiemi; allora:

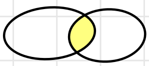
$A \subseteq B \iff \forall x \in A,\ x \in B$

$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

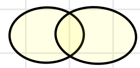
Prop 1 $\Rightarrow$ Prop 2

~~Prop 1~~ $\Leftarrow$ ~~Prop 2~~

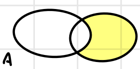
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



- $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$



A B

Siano ora $A \neq \emptyset \neq B$

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

  $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

$(a, a) \neq \{a\}$

Sia $n \in \mathbb{N}$; una n-pla è nella forma:

- $A_1, A_2, \dots, A_n \qquad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \qquad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\leftarrow$ oppure $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} = \{a.c_1 c_2 c_3 \dots \mid a \in \mathbb{Z} \wedge c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

$\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Polinomi e Prodotto Cartesiano

DEF $n \in \mathbb{N}^*$, n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

- un termine è un prodotto di potenze di variabili: $x_1^3 x_4^7$
- un monomio è il prodotto di un numero per un termine: $-5 x_1^3 x_4^7$
- un polinomio è una somma finita di monomi: $3x_1^3 - 5x_4^7$

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \{$ polinomi in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R} \}$

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_i \qquad \tau_i \text{ termini}$$

$$p = x^2 + 2$$

Dalla nozione di prodotto cartesiano discendono due nozioni importanti:

- relazioni (di equivalenza);
- applicazioni.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione o corrispondenza di A in B è un sottoinsieme $R \subseteq A \times B$ cioè (A, B, R) con $R \subseteq A \times B$

Esempio:

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\qquad B = \{x, y, z\}$

$R = \{(1, x), (1, y), (5, z), (7, y), (7, z)\}$

$1 \, R \, x \qquad 3 \not R \, x$

In generale:

$R \subseteq A \times B$, $a \in A$, $b \in B$ $\qquad a \, R \, b \iff (a, b) \in R$

DEF Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione. La relazione inversa di R è

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Esempio:

$$R^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (z, 5), (y, 7), (z, 7)\}$$

Relazioni d'Equivalenza

$A = B \Rightarrow R \subseteq A \times A$ si dice relazione in A.

R è:

- riflessiva $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ (x,x) \in R \quad [\, x R x \,]$
- simmetrica $\Leftrightarrow \forall x,y \in A,\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \quad [\, xRy \Rightarrow yRx \,]$
- transitiva $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in A \quad (x,y),\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$$[\, xRy,\ yRz \Rightarrow xRz \,]$$

Esempio:

$A = \{1, 3, 5, 7\} \qquad R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3)\}$

NON è riflessiva $\quad (3,3)$ e $(7,7) \notin R$

sì è simmetrica

NON è transitiva $\quad (3,1) \wedge (1,3) \not\Rightarrow (3,3)$

DEF Una relazione $R \subseteq A \times A$ si dice d'equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

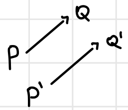
Esempi:

1. $R \cup \{(3,3), (5,5), (7,7)\}$

2. $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \ni (m,n)$

   $R \subseteq A \times A \qquad R = \{ (\underbrace{(m,n),(m',n')}_{\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}}) \mid mn' = m'n \}$ dà origine a $\mathbb{Q}$

3. $A = \{ (P, Q) \mid P, Q$ punti dello spazio della geometria elementare $\}$



> Un vettore applicato è un oggetto univocamente individuato da una direzione, un verso, una lunghezza e da un punto di applicazione.

$R \subseteq A \times A$

$R = \{ ((P,Q), (P',Q')) \mid (P,Q), (P',Q')$ hanno uguale $\begin{cases} \text{direzione} \\ \text{verso} \\ \text{lunghezza} \end{cases} \}$

Si tratta di una r. d'eq. detta equipollenza.

Classi d'Equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una rel. d'eq.

$a \in A \quad [a]_R \quad [a] = \{ x \in A \mid x R a \}$ classi di equivalenza di a rispetto a R.

Lemma

(i) $a \in [a]$ <u>DIM</u> $a \in [a] \iff a R a \iff (a,a) \in R$ vero perché R riflessiva

(ii) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

<u>DIM</u> "$\subseteq$" $\left. \begin{array}{l} x \in [b] \Rightarrow x R b \\ hp: b R a \end{array} \right) \overset{\text{transitività}}{\Rightarrow} x R a \Rightarrow x \in [a]$

"$\supseteq$" $\left. \begin{array}{l} z \in [a] \Rightarrow z R a \\ hp: b R a \end{array} \right) \underset{\text{simm.}}{\Rightarrow} a R b \Big) \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} z R b \Rightarrow z \in [b]$

(iii) $a, b \in A, \quad [a] \cap [b] = \emptyset$ opp. $[a] = [b]$

<u>DIM</u> se esiste $y \in [a] \cap [b] \Rightarrow y \in [a] \wedge y \in [b]$

Per (ii) $[a] = [y] = [b]$ ✓

<u>OSS</u> $\boxed{A = \bigcup_{a \in A} [a] \qquad A/_R = \{ [a] \mid a \in A \} \quad \text{insieme quoziente}}$

Esempi:

1. $[1] = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$
   $[7] = \{7\} \qquad A = [1] \cup [7] \qquad A/_R = \{[1], [7]\}$

2. $A/_R = \mathbb{Q}$

3. $A/_R = \{$ vettori liberi o geometrici $\} = \{ \vec{PQ} \mid (P,Q)$ vettore applicato $\}$

$P \longrightarrow Q \qquad (P,Q) \neq (P',Q')$ vettori applicati diversi

$P' \longrightarrow Q' \qquad \vec{PQ} = \vec{P'Q'}$ vettore libero

Applicazioni

Dal concetto di relazioni discende la nozione di applicazione.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice applicazione di A in B e si denota $f: A \to B$ se:
$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B \; : \; y = f(x)$, cioè $x f y$

Se $X \subseteq A$ $\quad f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ $\quad$ funzione immagine di X
Se $Y \subseteq B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$ $\quad$ contro-immagine di Y

Geometria

Lez. 2 - 10/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Applicazioni

Sia $f: A \to B$ un'app. $\boxed{A \text{ dominio di } f \,;\quad B \text{ codominio di } f}$

- f si dice **iniettiva** $\iff \forall x,y \in A \; (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
  oppure $(x = y \Leftarrow f(x) = f(y))$

  Esempio:

  $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{x,y\}$ $\quad f: B \to A$, $x \mapsto 1$, $y \mapsto 2$ ✓

- f si dice **suriettiva** $\iff \forall b \in B, \; \exists a \in A : f(a) = b$

  Esempio:

  $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{x,y\}$ $\quad f: A \to B$, $1 \mapsto x$, $2 \mapsto x$, $3 \mapsto y$ ✓

- f si dice **biettiva** o **biunivoca** $\iff$ f è sia iniettiva che suriettiva, cioè:
  $\forall b \in B, \; \exists! a \in A : f(a) = b$

  Esempio:

  $\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

  $a \mapsto \begin{cases} -\frac{a+1}{2}, & \text{se } a \text{ dispari} \\ \frac{a}{2}, & \text{se } a \text{ pari} \end{cases}$ $\quad$ è biettiva. ✓

DEF Si dice che A e B sono due insiemi **equipotenti** se esiste un'app. biettiva $f: A \to B$ e che A e B hanno la stessa cardinalità o potenza.

$|A| = |B|$ $\qquad |\emptyset| = 0$ $\qquad \mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\qquad |\mathbb{N}_n| = n$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $\qquad f: \mathbb{N}_n \to A$, $1 \mapsto a_1$, $2 \mapsto a_2$, $\vdots$, $n \mapsto a_n$ $\quad$ app. biettiva

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

$\aleph_0$ aleph-zero

Insieme delle parti

Sia A un insieme. $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ insieme delle parti di A.

$A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

$\{1,2\} \in P(A) \qquad \{1,2\} \subseteq A$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ si può dimostrare per induzione.

$f: A \to B$

$f = \{(a,b) \mid f(a) = b\} \qquad f^{-1} = \{(b,a) \mid f(a) = b\}$

f^{-1} è un'app. $\iff \underbrace{\forall b \in B, \exists! a \in A}_{\Updownarrow}: b f^{-1} a$ cioè $(b,a) \in f^{-1}$

f è biettiva

Funzione composta

Siano $f: A \to B \quad g: B \to C$ app.

$g \circ f: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$

$\forall a \in A$

L'applicazione composta è associativa: $h: C \to D \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

N.B. $g \circ f \neq f \circ g$ generalmente

$f: A \to A$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$

$g: A \to A$
$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto 2$

$g \circ f: A \to A \to A$
$1 \mapsto 2 \mapsto 1$
$2 \mapsto 3 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 1$

$\neq$

$f \circ g: A \to A \to A$
$1 \mapsto 3 \mapsto 2$
$2 \mapsto 1 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 3$

Invertibilità

DEF f si dice invertibile $\iff$ esiste: $f': B \to A$: $id_B = f \circ f'$, $id_A = f' \circ f$

Quindi, f è invertibile $\iff$ f è biettiva

$f: A \to B$ biett. $\iff f^{-1}: B \to A$ biett.

Principio d'induzione

$P(n) =$ "affermazione"

$|A| = n$

$P(n) = \quad |\mathcal{P}(A)| = n$ "ipotesi"

(i) $\exists b \in \mathbb{N}$, $P(b)$ è vera "base di induzione"

(ii) $\forall n \geq b$, $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vera "passo induttivo"

Se (i) e (ii) valgono, allora $P(n)$ vera $\forall n \geq b$

Esempio:

(1) $b = 0 \quad A = \emptyset \quad |A| = 0$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \quad |\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$

Hp:

$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad |\mathcal{P}(A_n)| = 2^n$

Th:

$A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} \qquad |\mathcal{P}(A_{n+1})| = 2^{n+1}$

$$\mathcal{P}(A_{n+1}) = \underbrace{\mathcal{P}(A_n)}_{2^n} \,\dot{\cup}\, \underbrace{\{ X \cup \{a_{n+1}\} \mid X \in \mathcal{P}(A_n)\}}_{2^n}$$

$|\mathcal{P}(A_{n+1})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

Ristrette e Ridotte

$A, B \neq \emptyset \quad f: A \to B$

$X \subsetneq A \qquad f_{|X}: X \to B$
$\qquad a \mapsto f(a)$

Esempio:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$
$\quad x \mapsto x+1$

$D = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ dispari} \}$
$P = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ pari} \}$

$f_{|D}: D \to \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x+1$ ristretta $\qquad f_{|D}: D \to D$, $x \mapsto x+1$ NON ammesso

Se $Y \subseteq B : f(X) \subseteq Y$ posso ridurre anche il codominio.

Esempio:

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ristretta e ridotta

Operazioni

DEF $A, B, C \neq \emptyset$

Un' app. $\perp : A \times B \to C$ si dice operazione binaria.

Si dice interna se $A = B = C$ $\qquad \perp \; A \times A \to A$
$\qquad (a, a') \mapsto \perp(a, a') \qquad a \perp a'$

Si dice esterna con operatori in A se $B = C$

$V = \{ \vec{PQ} \mid P, Q$ punti dello spazio della geometria elementare $\}$

$\mathbb{R} \times V \to V$

$(\alpha, \vec{PQ}) \mapsto \alpha \cdot \vec{PQ}$

Ad esempio...

Se $\alpha = 0$, allora $0 \cdot \vec{PQ} = \vec{PP} = 0$

Se $\alpha > 0$, allora $\alpha \cdot \vec{PQ}$ è il vettore libero con direzione e verso uguali a quelli di $\vec{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\vec{PQ}|$.

Se $\alpha < 0$, allora $\alpha \cdot \vec{PQ}$ è il vettore libero con direzione uguale ma verso opposto a quello di $\vec{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\vec{PQ}|$.

Geometria

Lez. 3 - 15/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Operazioni interne : proprietà

Sia $\perp$ un' operazione $A \times A \to A$.

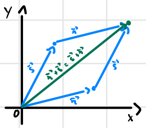
Tale op.:

- è **commutativa** $\iff \forall a,b \in A \quad a \perp b = b \perp a$
- è **associativa** $\iff \forall a,b,c \in A \quad a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$
- ammette **neutro** $\iff \exists\, e \in A \quad \forall x \in A : \ x \perp e = x = e \perp x$
- se ammette neutro e, y si dice **simmetrico** di $x \in A \iff \exists\, y \in A : \ x \perp y = e = y \perp x$

Esempio:

$E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$

La somma tra due vettori gode di tutte le proprietà di cui sopra.



Il neutro altri non è che il vettore nullo, di lunghezza 0.

Il simmetrico di un generico vettore $\vec{r}$ è se stesso, ma con verso opposto, $-\vec{r}$. $(\vec{r} + (-\vec{r}) = 0)$

PROP $\perp : A \times A \to A$

(i) se $\perp$ ammette el. neutro, allora esso è unico.

(ii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se $x \in A$ ha simmetrico y, y è unico, non ha altri simmetrici.

(iii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se x e x' hanno simmetrico y e y' rispettivamente, allora $x \perp x'$ ha simmetrico $y' \perp y$.

DIM

(i) Siano e e e' due elementi neutri.

Allora $e \overset{\text{neutro dx}}{=} e \perp e' \overset{\text{neutro sx}}{=} e'$.

(ii) Siano y e z simmetrici di $x \in A$.

$y = y \perp e = y \perp (x \perp z) =$

$(y \perp x) \perp z = e \perp z = z$

(iii) $(y' \perp y) \perp (x \perp x') = e$

$(x \perp x') \perp (y' \perp y) = e$

$(y' \perp y) \perp (x \perp x') = y' \perp (y \perp (x \perp x'))$

$= y' \perp \underbrace{(y \perp x)}_{e} \perp x' = y' \perp x' = e$

Strutture Algebriche

DEF Una struttura algebrica è una n-pla costituita da insiemi non vuoti e operazioni definite su di essi.

Esempi: • $(\mathrm{Hom}(A), \circ)$ • $(V, \mathbb{R}, \cdot)$ • $(V, \mathbb{R}, \cdot, +)$

$(A, \perp)$ $\quad \perp : A \times A \to A$

DEF Si dice gruppo se l'op. $\perp$ è associativa, ammette neutro, e $\forall x \in A$ esiste il simmetrico.
Si dice gruppo abeliano se è anche commutativo.

Esempio:

- $\mathrm{Hom}(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ appl.} \}$
  $(\mathrm{Hom}(A), \circ)$ non è un gruppo.
- Lo diventa se considero:
  $G(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ biett.} \} \subseteq \mathrm{Hom}(A)$
  $(G(A), \circ)$ gruppo non abeliano.

- $(\mathbb{R}, \cdot)$ non è un gruppo, ma $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

DEF $K \neq \emptyset$, $\quad + : K \times K \to K \qquad \cdot : K \times K \to K$

$(K, +, \cdot)$ si dice campo se:

- $(K, +)$ è un gruppo abeliano, con 0 come neutro;
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano;
- $\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad (a+b) \cdot c = ac + bc$.

Alternativamente, se:

$(K, +, \cdot)$ è un anello unitario, commutativo, ogni el. non nullo ammette simm. rispetto a $\cdot$.

$(K, +)$ è un gruppo abeliano, $\cdot$ è assoc. e distr.

Esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{R}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{C}, +, \cdot)$

PROP Siano $a, b \in K$.
$ab = 0 \implies a = 0 \lor b = 0$

DIM Pongo $a \neq 0 \implies \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$.
$b = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(0) = 0$ ∎

$K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ campo

$+ : \boxed{K \times K \to K}$

$(0, 0) \mapsto 0$
$(0, 1) \mapsto 1$
$(1, 0) \mapsto 1$
$(1, 1) \mapsto 0$

$\cdot : \boxed{K \times K \to K}$

$(0, 0) \mapsto 0$
$(0, 1) \mapsto 0$
$(1, 0) \mapsto 0$
$(1, 1) \mapsto 1$

Spazi Vettoriali

DEF $V \neq \emptyset$ $\quad (K, +, \cdot)$ campo

$\boxplus : \boxed{V \times V \to V}$ $\quad \boxdot : \boxed{K \times V \to V}$ $\quad$ scalare × vettore → vettore

$\boxplus \neq +$, $\quad \boxdot \neq \cdot$

$(V, K, \boxplus, \boxdot)$ si dice **spazio vettoriale** su K :<=>

0. $(V, \boxplus)$ gruppo abeliano
1. $\forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V : \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$
2. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : (\alpha + \beta) \boxdot u = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u)$
4. $1 \in K, \ \forall u \in V : 1 \boxdot u = u$

   neutro risp. a $\cdot$

Esempio:

- $E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$

  $+ : E(O) \times E(O) \to E(O)$ $\quad$ vettori applicati

  $\cdot : \mathbb{R} \times E(O) \to E(O)$
- $+ : V \times V \to V$ vettori liberi

  $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

Sono esempi tipici di due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

Polinomi su campi

$(K, +, \cdot)$ campo

$K[x] = \{\underbrace{a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n}_{p(x)} \mid a_0, \dots, a_n \in K\}$

grado $(p(x)) = \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{se } p(x) \neq 0 \\ -1 \text{ opp. qualsiasi grado}, & \text{se } p(x) = 0 \end{cases}$

$\boxplus = + : \boxed{K[x] \times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x-x^3, -2+x^2+2x^3+x^4) \longmapsto 1+2x+x^2+x^3+x^4$

$\boxdot = \cdot : \boxed{K[x] \times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x, -2+x^2) \mapsto -6-4x+3x^2+2x^3$

$(K, +, \cdot)$ campo $\quad n \in \mathbb{N}^* \quad K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}}$

$\boxplus : \boxed{K^n \times K^n \to K^n}$

$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \longmapsto (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\boxdot : \boxed{K \times K^n \to K^n}$

$(\alpha, (a_1, \dots, a_n)) \mapsto (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

PROP $(K^n, K, \boxplus, \boxdot)$ è spazio vettoriale su K.

DIM per $n=2$

0. $(K^2, \boxplus)$ gr. abeliano

comm. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

assoc. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$ Come per la commutatività, si ricava da $+$. ✓

neutro $(0,0)$: $\forall (a_1, a_2) \in K^2$, $(a_1, a_2) \boxplus (0,0) = (a_1, a_2) = (0,0) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

simmet. $\forall (a_1, a_2), \exists (a_1', a_2') \in K^2$ $(a_1, a_2) \boxplus (a_1', a_2') = (a_1+a_1', a_2+a_2') = (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2)) = (0,0)$ ✓

1. $\forall \alpha \in K, \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$\alpha \boxdot ((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \overset{def}{=} \alpha \boxdot (a_1+b_1, a_2+b_2) \overset{def}{=} (\alpha(a_1+b_1), \alpha(a_2+b_2)) \overset{\text{distr.}}{=} (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) \overset{def}{=}$

$= (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\alpha b_1, \alpha b_2) \overset{def}{=} (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\alpha \boxdot (b_1, b_2))$ ✓

2. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha + \beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} ((\alpha+\beta) \cdot a_1, (\alpha+\beta) \cdot a_2) \overset{distr.}{=} (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) \overset{def}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def}{=}$

$= (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

3. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha \cdot \beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} (\alpha \beta a_1, \alpha \beta a_2) \overset{\text{def e assoc.}}{=} \alpha \boxdot (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def}{=} \alpha \boxdot (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

4. $1 \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$1 \boxdot (a_1, a_2) \overset{def}{=} (1 \cdot a_1, 1 a_2) \overset{\text{neutro molt.}}{=} (a_1, a_2)$ ✓

Geometria

Lez. 4 - 17/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Spazi Vettoriali: proprietà aritmetiche

PROP

1. $\forall \alpha \in K, \ \forall u \in V: \ \alpha u = \underline{0} \iff \alpha = 0 \ \vee \ u = \underline{0}$:= vettore nullo
2. $\forall \alpha \in K, \ \forall u \in V: \ -\alpha u = (-\alpha) u = \alpha(-u)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V \setminus \{\underline{0}\}: \ \alpha u = \beta u \implies \alpha = \beta$
4. $\forall \alpha \in K \setminus \{0\}, \ \forall u, w \in V: \ \alpha u = \alpha w \implies u = w$

DIM

1. "⇐" (Caso $\alpha = 0$): $0u = (0+0)u \overset{\text{"distr."}}{=} 0u + 0u \implies \underbrace{0u + (-0u)}_{\text{vettore nullo}} = 0u + \underbrace{(0u + (-0u))}_{\text{vettore nullo}} \implies \underline{0} = 0u + \underbrace{\underline{0}}_{\text{neutro}} = 0u \implies \underline{0} = 0u$.

   Ragionamento simile per $u = \underline{0}$.

   "⇒": se $\alpha \neq 0$, $\exists \alpha^{-1} \in K$. Allora $\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}\underline{0} \overset{\text{"associat."}}{\implies} (\alpha^{-1} \cdot \alpha) u = \underline{0} \implies u = \underline{0}$. ✓

2. $\alpha u - \alpha u = \underline{0}$, ovvio.

   $\alpha u + (-\alpha) u = (\alpha + (-\alpha)) u = 0u = \underline{0}$

   $\alpha u + \alpha(-u) = \alpha(u + (-u)) = \alpha \underline{0} = \underline{0}$, quindi $(-\alpha) u = -\alpha u = \alpha(-u)$. ✓

3. $\alpha u = \beta u$, $u \neq \underline{0}$

   $\alpha u = \beta u \implies \alpha u + (-\beta u) = \beta u + (-\beta u) \implies \alpha u + (-\beta) u = \underline{0} \implies (\alpha + (-\beta)) u = \underline{0} \overset{u \neq \underline{0} \text{ per ipotesi}}{\implies} \alpha + (-\beta) = 0 \implies \alpha = \beta$ ✓

4. $\alpha u = \alpha w$, $\alpha \neq 0$

   $\alpha u = \alpha w \implies \alpha u + (-\alpha w) = \alpha w + (-\alpha w) \implies \alpha u + \alpha(-w) = \underline{0} \implies \alpha(u + (-w)) = \underline{0} \overset{\alpha \neq 0 \text{ per ipotesi}}{\implies} u + (-w) = \underline{0} \implies u = w$ ✓

Matrici

Sia $X \neq \emptyset$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$

$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow X$

$(i, j) \longmapsto A((i,j)) = a_{ij} = a^i_j$

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ a^3_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

i posizione della riga

j posizione della colonna

DEF Un'applicazione di questo tipo si dice matrice su X di tipo $m \times n$ $[m, n]$.

Esempio:

$X = \{\square, \Delta, \times, 2\}$ $\quad m = 3 \quad n = 2$

$A : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} \rightarrow X$

$(1, 1) \mapsto \Delta \qquad (1, 2) \mapsto \times$

$(2, 1) \mapsto \square \qquad (2, 2) \mapsto \times$

$(3, 1) \mapsto 2 \qquad (3, 2) \mapsto \times$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \Delta & \times \\ \square & \times \\ 2 & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

DEF Sia $(K, +, \cdot)$ un campo.

$m, n \in \mathbb{N}^*$ $\qquad M_{m,n}(K) = \{A \mid A \text{ matrice di tipo } m \times n \text{ su } K\}$.

Se $m = n$, con $M_n(K)$ indichiamo matrici quadrate.

$+$: $\boxed{\begin{array}{l} M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K) \\ ((a^i_j), (b^i_j)) \longmapsto (a^i_j + b^i_j) \end{array}}$

$\cdot$: $\boxed{\begin{array}{l} K \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K) \\ (\alpha, (a^i_j)) \longmapsto (\alpha a^i_j) \end{array}}$

$(M_{m,n}(K), +)$ è un gruppo abeliano. $\quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ è il neutro.

Il simmetrico ha gli stessi elementi, nelle stesse posizioni, ma opposti.

$(M_{m,n}(K), K, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

Sottospazio Vettoriale

$(V, K, +, \cdot)$

Sia $W \subseteq V$.

W si dice linearmente chiuso $:\Longleftrightarrow$

- $W \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in W : u+v \in W$
- $\forall \alpha \in K, \forall u \in W . \ \alpha u \in W$

Esempio:

$\mathbb{R}^2 \qquad U = \{ (\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \neq \emptyset$

$+: (\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha+\beta, 0) \in U$

$\cdot: (\alpha, 0) \cdot (\beta, 0) = (\alpha\beta, 0) \in U$

Se $W \subseteq V$ è lin. chiuso, allora posso considerare:

$+_{|W}: W \times W \to W, \ (u, v) \mapsto u+v \in W \qquad \cdot_{|W}: K \times W \to W, \ (\alpha, u) \mapsto \alpha u \in W$ operazioni ristrette

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ linearmente chiuso tale che $(W, K, +_{|W}, \cdot_{|W})$ è uno spazio vettoriale. E se fosse superflua questa condizione?

Teorema. $(V, K, +, \cdot) \quad W \subseteq V$

W è un sottospazio vettoriale di $V \Longleftrightarrow W$ è linearmente chiuso.

DIM

"$\Rightarrow$" OVVIA! È nella definizione di sottospazio vettoriale.

"$\Leftarrow$" Per ipotesi, possiamo considerare le op. ristrette $+_{|W}$ e $\cdot_{|W}$.

Esse ereditano tutte le proprietà di $+$ e $\cdot$. Rimane da dimostrare che $\underline{0} \in W$ e $\forall u \in W, -u \in W$.

Allora, in quanto W linearmente chiuso, $\forall \alpha \in K, \forall u \in W : \alpha u \in W$.

$\alpha = 0 \Rightarrow \forall u \in W, \ \alpha u \in W$, cioè $0u = \underline{0} \in W$.

$\alpha = -1 \Rightarrow \forall u \in W, \ \alpha u \in W$, cioè $(-1)u = -u \in W$. $\blacksquare$

Quindi, è sufficiente l'ipotesi che W sia linearmente chiuso per essere anche sottospazio vettoriale di V.

Esempio.

$(K[x], K, +, \cdot) \qquad n \in \mathbb{N}$

$K[x]_n = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_n \neq 0 \}$ non linearmente chiuso

$n = 3$, $K = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} 1 + 2x^3 + \\ 4 - 2x^3 = \\ \hline 5 \end{array} \notin \mathbb{R}[x]_3$$

Con $K[x]_{\leq n}$ sarebbe linearmente chiuso.

Combinazioni e Chiusure Lineari

DEF ~Con le usuali notazioni~

Sia $(u_1, \dots, u_n)$ una n-pla di vettori di V.

Una combinazione lineare di $(u_1, \dots, u_n)$ è un vettore del tipo:

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$, dove $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sottoinsieme di n vettori di V, una sua combinazione lineare è una comb. lin. di $(v_1, \dots, v_n)$.

Esempio:

$\mathbb{R}^3 \quad \{(1,0,1), (1,1,0)\} = S$

è vero che il vettore $(2,1,1)$ è una comb. lin. di S?

$? \; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (2,1,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha) \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ ✓

Combinazioni lineari di $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ generano tutte le possibili terne (a_1, a_2, a_3).

DEF $(V, K, +, \cdot)$ e $X \subseteq V$

La chiusura lineare di X è:

- se $X = \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$
- se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \mid t \in \mathbb{N}^* \wedge \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K \wedge u_1, \dots, u_t \in X\}$

PROP $(V, K, +, \cdot) \qquad X \subseteq V$

(1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale

(2) Se W è un sottosp. vettoriale di V tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM Coming soon

pag. 24!

Sistema di Generatori

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Un sottoinsieme $S \subseteq V$ si dice sistema di generatori di V $:\Leftrightarrow \mathcal{L}(S) = V$, cioè ogni vettore di V si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S.

Esempio:

$S = \{(1,0), (0,1)\}$ $\quad \mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$

$B = \{(1,1), (-1,1), (3,3)\}$ $\quad \mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{L}(V) = V$

DEF $(V, K, +, \cdot)$

V si dice finitamente generato se ammette un sistema di generatori finito.

Esempio:

$\mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{L}((1,1,2), (0,-1,1)) = \{\alpha(1,1,2) + \beta(0,-1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$K[x]$ **NON** è finitamente generato!

OSS $(V, K, +, \cdot)$

Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un sistema di generatori di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$.
Definiamo adesso $T = S \cup \{u\}$ con $u \notin S$.
T è ancora un sistema di generatori di V.

~È sufficiente moltiplicare u per lo scalare nullo.~

Geometria

Lez. 5 - 22/03

Made by: Gianluca Fiorentino

Chiusure Lineari pt.1

Prima di procedere con la dimostrazione di un'importante proposizione riguardo le chiusure lineari, è bene riportare alla mente di cosa stiamo trattando.

DEF $(V, K, +, \cdot)$ e $X \subseteq V$

La chiusura lineare di X è:

- se $X = \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$
- se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \mid t \in \mathbb{N}^* \land \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K \land u_1, \dots, u_t \in X\}$

Si tratta, dunque, di tutte le possibili combinazioni lineari con scalari di K e vettori di X.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad X \subseteq V$

(1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale

(2) Se W è un sottosp. vettoriale di V tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM

(1) $\forall v \in X$, $\quad v = 1 \cdot v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \subseteq \mathcal{L}(X)$

stiamo usando il teorema a pag. 20

Ora resta da dimostrare che $\mathcal{L}(X)$ sia un sottospazio vettoriale, e cioè che sia linearmente chiuso.

$\underline{0} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \neq \emptyset$, banale (basta moltiplicare ogni vettore di X per lo scalare nullo).

$\forall u, u' \in \mathcal{L}(X)$: $\exists t \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$, $\exists u_1, \dots, u_t \in X$: $\quad u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \quad$ e

$\exists t' \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha'_1, \dots, \alpha'_{t'} \in K$, $\exists u'_1, \dots, u'_{t'} \in X$: $\quad u' = \alpha'_1 u'_1 + \dots + \alpha'_{t'} u'_{t'}$

Allora, $u + u' = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \alpha'_1 u'_1 + \dots + \alpha'_{t'} u'_{t'} \in \mathcal{L}(X) \quad \Rightarrow \mathcal{L}(X)$ stabile rispetto a $+$.

$\forall \beta \in K$, $\forall u \in \mathcal{L}(X)$: $\beta \cdot u = \beta(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \beta(\alpha_1 u_1) + \dots + \beta(\alpha_t u_t) \overset{\text{associat.}}{=} (\beta\alpha_1)u_1 + \dots + (\beta\alpha_t)u_t \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X)$ stabile rispetto a $\cdot$, quindi la dimostrazione di (1) è conclusa.

(2) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V.

Th: $X \subseteq W \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$, cioè $\forall u \in \mathcal{L}(X)$, $u \in W$.

W è linearmente chiuso per ipotesi.

$u \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$, $\exists u_1, \dots, u_t \in X$: $\quad u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_1 u_1 \in W \\ \vdots \\ u_t \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_t u_t \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \in W$$

, perché W linearmente chiuso.

E con questo la dimostrazione può dirsi conclusa. ▨

Chiusure Lineari pt.2

OSS Adesso possiamo dire che X è un sistema di generatori di $\mathcal{L}(X)$.

Corollario. Siano $S, T \subseteq V$.
Allora $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \iff T \subseteq \mathcal{L}(S) \wedge S \subseteq \mathcal{L}(T)$.

DIM

"$\Rightarrow$" $S \subseteq \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \Rightarrow S \subseteq \mathcal{L}(T)$

$T \subseteq \mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S) \Rightarrow T \subseteq \mathcal{L}(S)$

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(S) \\ S \subseteq \mathcal{L}(T) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$

Dalla PROP (2)

∎

Esempio:

- $\mathbb{R}^3$ $\quad S = \{\underset{u_1}{(1,0,1)}, \underset{u_2}{(0,1,1)}\}$ $\quad T = \{\underset{v_1}{(1,1,2)}, \underset{v_2}{(2,-1,1)}, \underset{v_3}{(0,2,2)}\}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_2 = 2u_1 + (-1)u_2 \\ v_3 = 2u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow T \subseteq \mathcal{L}(S)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = \frac{1}{2} v_3 \\ v_1 = u_1 + \frac{1}{2} v_3 \Rightarrow u_1 = v_1 - \frac{1}{2} v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow S \subseteq \mathcal{L}(T)$$

Quindi:
$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \neq V$

- $\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{\underset{u_1}{(1,0)}, \underset{u_2}{(0,1)}\}$ $\quad T = \{\underset{v_1}{(2,1)}\}$

$\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2$ $\quad T \subseteq \mathcal{L}(B)$ ma $B \nsubseteq \mathcal{L}(T)$ perché $\nexists \alpha \in \mathbb{R}: (1,0) = \alpha(2,1)$.
Allora $\mathcal{L}(B) \neq \mathcal{L}(T)$
Siano ora $X = \{\underset{w_1}{(1,1)}, \underset{w_2}{(0,1)}, \underset{w_3}{(2,2)}\}$ e $X' = X \setminus \{(2,2)\}$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = w_1 + (-w_2) \\ u_2 = w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B \subseteq \mathcal{L}(X)$$

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq \mathcal{L}(X) \\ X \subseteq \mathcal{L}(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(X)$$

banale

Chiaramente, anche $\mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^2$

Linearmente (in)dipendente

DEF $(V, K, +, \cdot)$

Sia $(u_1, \dots, u_n)$ una n-pla di vettori di V. Allora $(u_1, \dots, u_n)$ si dice **linearmente dipendente** $:\iff$ esistono n scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ **NON tutti nulli** : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \underline{0}$.

Altrimenti, $(u_1, \dots, u_n)$ si dice **linearmente indipendente**.

OSS Se nella n-pla ci sono due vettori u_1 e u_2 uguali, allora è lin. dipendente.

$1 \cdot u_1 + (-1) u_2 + 0 \cdot u_3 + \dots + 0 \cdot u_n = \underline{0}$

Se la n-pla ha vettori a due a due distinti, considero l'insieme $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

La n-pla è lin. indipendente $\iff \left(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$.

Il vettore si scrive come comb. lin. nulla dei vettori $u_1, \dots, u_n$ **SOLO** mediante scalari nulli.

Esempio:

$K[x]$ $\quad \{1+x, x+x^2\}$ è linearmente indipendente.

$\alpha, \beta \in K = \mathbb{R}$

$\alpha(1+x) + \beta(x+x^2) = 0 \Rightarrow \alpha + (\alpha+\beta)x + \beta x^2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ Ma allora $\alpha = 0 = \beta$, quindi è lin. indipendente

- V vettori liberi $K = \mathbb{R}$. Siano $u, v \in V \setminus \{\underline{0}\}$

$\{u, v\}$ lin. dip. $\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli : $\alpha u + \beta v = 0$

Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha u + \beta v) = \underline{0} \Rightarrow u + \alpha^{-1}\beta v = \underline{0}$

$u + (\alpha^{-1}\beta) v = \underline{0} \Rightarrow u = \underbrace{-(\alpha^{-1}\beta)}_{\lambda} v \Rightarrow u \parallel v$ u e v sono vettori liberi paralleli

Quindi:

$\{u, v\}$ lin. dip. $\Rightarrow u \parallel v$, ma è vera anche l'implicazione inversa $\Leftarrow$?

Siano $\hat{u} = \frac{1}{|u|} u$ e $\hat{v} = \frac{1}{|v|} v$ versori rispettivamente di u e v. $\quad \hat{u} \parallel u$ e $\hat{v} \parallel v$ per definizione.

Se $u \parallel v$, allora $\hat{u} \parallel \hat{v}$, quindi $\hat{u} = \pm \hat{v}$

Allora $u = |u| \hat{u} = \pm |u| \hat{v} = \pm |u| \frac{1}{|v|} v \Rightarrow u = \underbrace{\pm \frac{|u|}{|v|}}_{\beta} v$ (scalare) $\Rightarrow \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot u + \underbrace{(-\beta)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow \{u, v\}$ è lin. dipendente

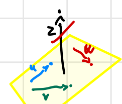
OSS Sia $X = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. $\quad \underline{0} \in X \Rightarrow X$ è lin. dipendente.

$\{\underline{0}\}$ è lin. dipendente; $\quad u \neq \underline{0} \Rightarrow \{u\}$ è lin. indipendente.

V vettori liberi $\quad K = \mathbb{R}$

$\forall u, v \in V$, $\{u, v\}$ lin. dip. $\iff u \parallel v$

u, v e w sono complanari. z, invece, non lo è.



$\forall u, v, w \in V$, $\{u, v, w\}$ lin. dip. $\iff u, v, w$ sono **complanari**, cioè si possono disegnare sullo stesso piano.

... e con insiemi infiniti?

DEF $(V, K, +, \cdot)$ $X \subseteq V$ con $|X|$ qualsiasi

X si dice lin. dipendente se esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq X$ che è lin. dipendente.

X si dice lin. indipendente se per ogni sottoinsieme finito $S \subseteq X$, S è lin. indipendente.

Teorema.

> $(V, K, +, \cdot)$ $X \subseteq V$
> X è lin. dipendente $\iff \exists u \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$

DIM

Caso $|X| \leq 1$ NOTA: $X = \emptyset \Rightarrow X$ è lin. indipendente

$X = \{u\}$ dip. $\iff u = \underline{0}$ $X \setminus \{u\} = \emptyset$ $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\} = \mathcal{L}(\emptyset)$

Caso $|X| \geq 2$

"$\Rightarrow$" Per ipotesi, esiste un sottoinsieme finito $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq X$ che è lin. dipendente.

Quindi $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ NON tutti nulli : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = \underline{0}$

Supponiamo $\alpha_1 \neq 0$. Allora $\alpha_1^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow u_1 = -(\alpha_1^{-1}\alpha_2) u_2 - \dots - (\alpha_1^{-1}\alpha_t) u_t \in \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$

Ma allora $(X \setminus \{u_1\}) \cup \{u_1\} \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\}) \overset{\text{PROP (2)}}{\Rightarrow} \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$, $\supseteq$ è banale, quindi $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u_1\})$

"$\Leftarrow$" Per ipotesi $\exists u \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$ quindi $u \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$

$\Rightarrow \exists u_2, \dots, u_t \in X \setminus \{u\}$ $\wedge$ $\exists \alpha_2, \dots, \alpha_t \in K$: $u = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t$

$\Rightarrow \underline{0} = \underbrace{(-1)}_{\neq 0} u + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow \{u, u_2, \dots, u_t\} \subseteq X$ è lin. dip. $\Rightarrow X$ è lin. dipend. ▨

Esempio.

$K[x]$ $A = \{1+x, 1-x, 2+x, x^2\}$

$\alpha(1+x) + \beta(1-x) + \gamma(2+x) + \delta x^2 = 0 \iff (\alpha + \beta + 2\gamma) + (\alpha - \beta + \gamma)x + \delta x^2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2}\gamma \\ \beta = -\frac{1}{2}\gamma \\ \delta = 0 \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Se $\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow (2+x) \cdot 1 = \frac{3}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) + 0x^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 2+x$.

Sia ora $A' = A \setminus \{1+x\}$
A' è tale che:
$\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$.

N.B.

> Avrei potuto scegliere indifferentemente uno qualsiasi tra $\{1+x, 1-x, 2+x\}$.

Geometria

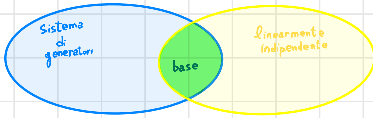
Lez. 6 - 24/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Base di uno Spazio Vettoriale

DEF Una base di V è un sistema di generatori linearmente indipendente.



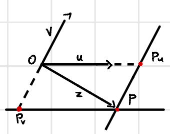
Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e K^n uno spazio vettoriale numerico.
Sia ora $B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1)\}$ $\qquad |B| = n$
Allora B si dice base canonica di K^n.

Similmente, altri esempi di basi canoniche sono:

- $M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canonica per matrici di tipo $m \times n$;
- $K[x]$ $\{1, x, \dots, x^n, \dots\} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base canonica per polinomi su un campo;
- $K[x]_{\leq r}$ $r \in \mathbb{N}$ $\{1, x, \dots, x^r\}$ base canonica per polinomi su un campo di cardinalità $r+1$;
- V vettori liberi $\{u, v, w\}$ con u, v, w non complanari base canonica per vettori nelle 3 dimensioni.

Proviamo a capire meglio le basi canoniche dei vettori con un esempio a due dimensioni:

$V_H = \{u \in V \mid u \parallel H\}$ è linearmente chiuso. Si tenga presente che H indica il piano.
Siano $u, v \in V_H$, $u \not\parallel v$ $\qquad \mathcal{L}(u, v) = V_H$ $\quad \{u, v\}$ base canonica



$\overrightarrow{OP_u} \parallel u \implies \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP_u} = \alpha u$

$\overrightarrow{OP_v} \parallel v \implies \exists\, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP_v} = \beta v$

$z = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_u} + \overrightarrow{OP_v} = \alpha u + \beta v$

In altre parole, se ho due vettori u, v non nulli e non paralleli, posso sempre trovare il modo di scrivere un qualsiasi altro vettore come combinazione lineare di u e v.
Nello spazio a tre dimensioni la situazione è analoga, e la richiesta è che i 3 vettori u, v, w non siano tra loro complanari, cioè - ricordiamo - non si possono disegnare sullo stesso piano.

Basi e Sistemi di generatori

Teorema. $\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{K}[x] \text{ non ha sistemi di generatori finito.} \\ \text{Cioè, } \forall S \subseteq \mathbb{K}[x] : |S| = n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{L}(S) \subsetneq \mathbb{K}[x]\end{array}}$

DIM $S = \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ $\quad d_1 = gr(p_1), \dots, d_n = gr(p_n) \quad d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad gr(\alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n) \leq d$

Ma allora sicuramente $x^{d+1} \notin \mathcal{L}(S)$, ma $x^{d+1} \in \mathbb{K}[x]$.

Quindi $\mathcal{L}(S) \subsetneq \mathbb{K}[x]$, cioè è incluso propriamente.

Teorema. (di astrazione di una base)

$\boxed{\begin{array}{l}(V, \mathbb{K}, +, \cdot) \text{ uno sp. vett. finitamente generato.} \\ \text{Sia } S = \{u_1, \dots, u_n\} \text{ un suo sistema di generatori finito.} \\ \text{Allora } S \text{ contiene una base } B \text{ di } V.\end{array}}$

DIM Se S è lin. indipendente, allora abbiamo $B = S$.

Altrimenti, usando il teorema a pag. 27: $\exists u \in S : \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{u\})$.

Poniamo $S' = S \setminus \{u\}$. Se supponiamo $u = u_n$, allora $S' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Adesso è sufficiente reiterare lo stesso ragionamento su S' fino ad ottenere un insieme lin. indipendente. Se esso è $\emptyset$, allora $V = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

Esempio:

- $\mathbb{K}[x] \quad S = \{1+x, 1-x, 2+x, x^2\} \quad W = \mathcal{L}(S) = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$

  S è lin. dipendente (vedasi pag. 27).

  $S' = S \setminus \{1+x\}$ è lin. indipendente, quindi l'algoritmo termina.

- $\mathbb{R}^2 \quad S = \{(1,1), (2,2), (2,-1), (1,2)\}$

  $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2 \qquad \overset{2}{\alpha}(1,1) + \overset{-1}{\beta}(2,2) + \overset{0}{\gamma}(2,-1) + \overset{0}{\delta}(1,2) = (0,0)$

  Considero allora $S' = S \setminus \{(2,2)\}$ e reitero il procedimento.

  $\alpha(1,1) + \beta(2,-1) + \gamma(1,2) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 3\beta \\ \alpha = -5\beta \end{cases}$

  S' è ancora lin. dipendente. Infatti: $(2,-1) = 5(1,1) - 3(1,2)$.

  Considero allora $S'' = S' \setminus \{(2,-1)\}$

  S'' è lin. indipendente? sì. Infatti $\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (0,0) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

  $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S'') \ \wedge \ S''$ lin. indip. $\Rightarrow S''$ è base di $\mathbb{R}^2$

Steinitz: lemma e conseguenze

Lemma di Steinitz.

Sia $(V, K, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema di generatori finito di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$.
Se $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ è un altro sotto-insieme di V e $|X| = m > n = |S|$, allora X è linearmente dipendente.

DIM Coming Soon  pag. 36!

Esempio: $\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{(1,0), (0,1)\}$ $\quad X = \{(1,7), (\pi, \sqrt{2}), (100, 12!)\}$

$|B| = 2 < 3 = |X| \Rightarrow X$ è lin. dipendente

Corollario.

$(V, K, +, \cdot)$ sp. vett. f.g. Sia $S \subseteq V : \mathcal{L}(S) = V$.
Allora, $T \subseteq V$: T lin. indipendente $\Rightarrow |T| \leq |S|$.

DIM $|T| > |S| \Rightarrow T$ è lin. dipendente, dal lemma di Steinitz.

Ma allora, ricordando una tautologia $[(\varphi \Rightarrow \sigma) \Leftrightarrow (\neg\varphi \Leftarrow \neg\sigma)]$,

abbiamo che: $|T| \leq |S| \Leftarrow T$ è linearmente indipendente. ▨

N.B. **Non si tratta di una doppia-implicazione!!**

$\mathbb{R}^3$ $\quad B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\quad X = \{(1,1,1), (2,2,2)\}$

$|X| \leq |B|$, ma <u>X è lin. dipendente.</u>

Teorema (di equipotenza di basi)

$(V, K, +, \cdot)$ f.g.
Tutte le basi di V sono equipotenti.

DIM Esiste un sistema di generatori finito S di V.

Per il teorema di estrazione di una base, esiste una base $B \subseteq S$, quindi finita, di V.

Sia B' un'altra base di V. B' lin. indip. per definizione $\overset{\text{corollario}}{\Rightarrow} |B'| \leq |B|$.

B' sistema di generatori $\wedge$ B lin. indip. $\overset{\text{corollario}}{\Rightarrow} |B| \leq |B'|$.

Ma allora $(|B| \leq |B'|) \wedge (|B'| \leq |B|) \Rightarrow |B| = |B'|$. ▨

Dimensione di uno Spazio Vettoriale

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad X = \{u_1, \dots, u_n\}$ lin. indip. $\subseteq V$.
Se $\exists u \in V : u \notin \mathcal{L}(X)$, allora $X \cup \{u\}$ è lin. indip.

DIM Per assurdo
$X \cup \{u\}$ è lin. dip.. Allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ non tutti nulli : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \underset{\alpha \neq 0}{\alpha u} = \underline{0}$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = 0 \Rightarrow u = (-\alpha^{-1}\alpha_1)u_1 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)u_n \in \mathcal{L}(X)$.

Ma $u \notin \mathcal{L}(X)$ per ipotesi, quindi IMPOSSIBILE! Allora $X \cup \{u\}$ deve essere ancora lin. indip.

Esempio :

$\mathbb{R}^2$ $\quad X = \{(1,1)\}$, $\mathcal{L}(X) \neq \mathbb{R}^2$ $\quad (1,0) \in \mathbb{R}^2 \wedge (1,0) \notin \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \cup \{(1,0)\} = \{(1,1), (1,0)\}$ è lin. indip.

DEF $(V, K, +, \cdot)$ f.g.
La dimensione di V è il numero di vettori di una sua **BASE**.

OSS Se $\dim(V) = n$ e $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ è una base, allora $n = t$.

PROP Se $t = n \wedge (S$ è lin. indip. $\vee$ S è un sist. di gen.$) \Rightarrow S$ è una base.
In altre parole : Sia $S \subseteq V$ e sia $|S| = n = \dim V$.
Allora S è lin. indipendente $\Leftrightarrow$ S è sist. di generatori.

DIM "$\Rightarrow$" Per assurdo S non è sistema di generatori, ossia $\mathcal{L}(S) \subsetneq V \Rightarrow \exists u \in V : u \notin \mathcal{L}(S)$.
Dalla PROP precedente, ottengo che $S \cup \{u\}$ è lin. indip.
$|S \cup \{u\}| = n+1$ $\rightsquigarrow$ ASSURDO per il corollario al lemma di Steinitz!

"$\Leftarrow$" Per assurdo S è lin. dipendente $\Rightarrow \exists u \in S : \mathcal{L}(S) = V = \mathcal{L}(S \setminus \{u\})$.
Per il teorema di estrazione di una base, $\exists B \subseteq S \setminus \{u\}$: B sia una base.
Ma $|S \setminus \{u\}| = n-1$ $\rightsquigarrow$ ASSURDO di nuovo per il corollario e le ipotesi !

Esempio :

- $\mathbb{R}^2$ $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$ $\quad \{u, v\}$ lin. indip. $\Leftrightarrow \{u, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^3$ $\quad \{(1,1,0), (0,1,1), (3,0,0)\}$ è lin. indip., quindi è anche una base.
- Quale dei seguenti sottoinsiemi è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$? $\quad B = \{1, x\}$ $\quad \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$

  $\{1+x, \cancel{2+2x}\}$ lin. dip. $\quad \{3, 2+x, \cancel{5-x}\}$ Card. $> |B|$ $\quad \{\cancel{2+x}\}$ Card. $< |B|$ $\quad \{\underline{0}, \cancel{1+x}\}$ lin. dip. $\quad \{1+x, 1-x\}$ ✓

Geometria

Lez. 7 - 29/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Basi e dimensioni

Teorema. (di completamento a una base)

$(V, K, +, \cdot)$ Siano $\dim V = n$ e $X = \{u_1, \dots, u_t\}$ lin. ind.
Allora esistono $u_{t+1}, \dots, u_n \in V$: $X \cup \{u_{t+1}, \dots, u_n\}$ è una base.

DIM Per il corollario al lemma di Steinitz si ha $t \leq n$.

Se $t = n$, allora X è anche un sistema di generatori, per cui è una base. $n - t = 0$

Se $t < n$, allora X non è una base, in particolare non è un sistema di generatori di V: $\mathcal{L}(X) \subsetneq V \Rightarrow \exists u_{t+1} \in V \setminus \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \cup \{u_{t+1}\}$ lin. ind.

Se $|X \cup \{u_{t+1}\}| = n$, allora si tratta di una base di V. Altrimenti, vuol dire che $|X \cup \{u_{t+1}\}| < n$.

Posso quindi reiterare il ragionamento fino ad ottenere un sistema di generatori, che è anche lin. ind., e quindi una base. ▨

Esempio :

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad \dim \mathbb{R}[x] = 3$ $\quad S = \{x + x^2\}$ lin. ind.

$x+1 \notin \mathcal{L}(S) \Rightarrow S' = S \cup \{x+1\}$ $\quad |S'| = 2 < 3$, allora continuo.

$1 \notin \mathcal{L}(S') \Rightarrow S'' = S' \cup \{1\} = \{x+x^2, x+1, 1\}$ è lin. ind. ed è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n$

$W \subseteq V$ sottosp. vett. di V:

(i) $\dim W = 0 \iff W = \{\underline{0}\}$;

(ii) $\dim W \leq \dim V = n$;

(iii) $\dim W = \dim V \iff W = V$.

DIM (i) "⇒" Per ipotesi, $\emptyset$ è una base di $W = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

"⇐" $W = \{\underline{0}\}$ $\quad S = \{\underline{0}\}$ è lin. dip. $\Rightarrow \underline{0} \in \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\underline{0}\}) = \mathcal{L}(\emptyset) \Rightarrow \emptyset$ è una base $\Rightarrow \dim\{\underline{0}\} = 0$.

(ii) Sia B_W una base di W. Allora B_W è un sottoinsieme lin. ind. di V $\overset{\text{corollario al lemma di Steinitz}}{\Longrightarrow} \dim W = |B_W| \leq \dim V = n$.

(iii) "⇐" Banale.

"⇒" Sia B_W una base di W. Allora $B_W \subseteq V$ lin. ind. $\quad |B_W| = \dim W = \dim V$.

Allora B_W è una base anche di V, cioè: $W = \mathcal{L}(B_W) = V$, abbiamo ottenuto la tesi. ▨

Basi Ordinate

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n$

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ORDINATA di V. Allora:

$\forall u \in V,\ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in K^n : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

DEF Si dice che gli scalari $x_1, \dots, x_n$ sono le componenti di un vettore in $\mathcal{B}$ e che $(x_1, \dots, x_n)$ è la n-pla delle componenti di u in $\mathcal{B}$.

DIM Per ipotesi, i vettori $e_1, \dots, e_n$ formano una base di V, quindi in particolare formano un sistema di generatori:

$\forall u \in V \quad \exists\, x_1, \dots, x_n \in K : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. $\quad (x_1, \dots, x_n) \in K^n$.

Sia $(y_1, \dots, y_n) \in K^n : u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, procedo a sottrarre. Ottengo:

$$\underline{o} = u - u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n - y_1 e_1 - \dots - y_n e_n \overset{\text{metto in evidenza}}{=} \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in K} e_1 + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in K} e_n$$

$e_1, \dots, e_n \neq \underline{o} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$, come volevasi dimostrare.

Esempio:

$\mathbb{R}^2 \quad B((1,1),(1,-1))$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^2$.

- Determinare le componenti di $u = (5, -3)$ in B.

$(5, -3) = x_1 (1,1) + x_2 (1,-1) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2)$.

$\begin{cases} 5 = x_1 + x_2 \\ -3 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ Quindi $(x_1, x_2) = (1, 4)$.

- Determinare le componenti di $u = (a_1, a_2)$ in B.

$(a_1, a_2) = x_1 (1,1) + x_2 (1,-1) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2)$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 - x_2 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \\ x_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} \end{cases}$ Quindi $(a_1, a_2) = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right)(1,-1)$

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n \quad B = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata

L'applicazione $\Phi_B : V \to K^n$ tale che $u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ [ad ogni vettore associa le sue componenti in B]

è biettiva e, in particolare, si tratta di un isomorfismo associato a B.

Esempio:

$V = \mathbb{R}[n]_{\leq 1} \quad \dim V = 2 \quad B = (1+n, 1-n)$

$a_0 + a_1 n = x_1 (1+n) + x_2 (1-n) = x_1 + x_2 + x_1 n - x_2 n = (x_1 + x_2) 1 + (x_1 - x_2) n$

$\begin{cases} a_0 = x_1 + x_2 \\ a_1 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_0 + a_1}{2} \\ x_2 = \frac{a_0 - a_1}{2} \end{cases}$ Quindi $\Phi_B : a_0 a_1 x \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \mapsto \left(\frac{a_0 + a_1}{2}, \frac{a_0 - a_1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$

Per ora, limitiamoci a dimostrare che l'applicazione è biettiva.

Prosegui

Riferimento

PROP Φ_B è biettiva.

DIM iniett.: Siano $u, v \in V$ e $u \neq v$. Tesi: $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u) \neq \Phi_B(v) = (y_1, \dots, y_n)$

Per assurdo $\Phi_B(u) = \Phi_B(v) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = v$ → assurdo!

suriett.: Sia $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Basta osservare che se $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ allora $\Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$.

OSS Nei polinomi su un campo: $\mathbb{R}[x]_{\leq r}$, $B = (1, x, \dots, x^r)$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r \xmapsto{\Phi_B} (a_0, a_1, \dots, a_r).$$

Similmente, per matrici: $M_{m,n}(K)$, $B\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \xmapsto{\Phi_B} (a^1_1, a^1_2, \dots, a^m_1, a^m_2, \dots, a^m_n).$$

Tali basi ordinate vengono definite come **RIFERIMENTO**.

Steinitz: dimostrazione

Prima di dimostrare il lemma, riportiamo alla mente l'enunciato:

Lemma di Steinitz. Sia $(V, K, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema di generatori finito di V, cioè $\mathcal{L}(S) = V$. Se $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ è un altro sotto-insieme di V e $|X| = m > n = |S|$, allora X è linearmente dipendente.

DIM Supponiamo $\underline{o} \notin X$, altrimenti banale.

$\mathcal{L}(S) = V \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K: v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ $\quad v_1 \neq \underline{o} \Rightarrow \exists \lambda_i \neq 0$, supponiamo $\lambda_1 \neq 0$.

Allora $\exists \lambda_1^{-1} \in K$, quindi $\lambda_1^{-1} v = \underbrace{(\lambda_1^{-1}\lambda_1)}_{=1} u_1 + \dots + (\lambda_1^{-1}\lambda_n) u_n \Rightarrow u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - (\lambda_1^{-1}\lambda_2) u_2 - \dots - (\lambda_1^{-1}\lambda_n) u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$.

$u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq V \Rightarrow V = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq V$.

Allora $S' = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ è ancora un sistema di generatori di V. Procedo con $v_2 \in X$:

$\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K: v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$. (1) Se $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, allora $v_2 = \beta_1 v_1 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ lin. dip. $\Rightarrow X$ è lin. dip.

(2) Altrimenti, $\exists \beta_i \neq 0$ con $i \geq 2$, ad esempio $\beta_2 \neq 0$, allora $\exists \beta_2^{-1} \in K$, quindi:

$\beta_2^{-1} v_2 = (\beta_2^{-1}\beta_1) v_1 + \underbrace{(\beta_2^{-1}\beta_2)}_{=1} u_2 + \dots + (\beta_2^{-1}\beta_n) u_n \Rightarrow u_2 = \beta_2^{-1} v_2 - (\beta_2^{-1}\beta_1) v_1 - (\beta_2^{-1}\beta_3) u_3 - \dots - (\beta_2^{-1}\beta_n) u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n)$

$\Rightarrow V = \mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n) \subseteq V$, ma allora $S'' = \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_n\} \Rightarrow \mathcal{L}(S'') = V$.

Reiterando il ragionamento, troviamo la dipendenza come nel caso (1) oppure $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V \ni v_{n+1}, \dots, v_m$ dato che $m > n$ per ipotesi.

Geometria

Lez. 8 - 31/03

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazi Vettoriali: unione ed intersezione

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_p$ è ancora un sottosp. vettoriale.

DIM $\underline{0} \in W_1 \cap \dots \cap W_p$, banale.

$\forall u, v \in W_1 \cap \dots \cap W_p \Rightarrow u, v \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

$\Rightarrow u+v \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap \dots \cap W_p$.

$\forall \alpha \in K, \forall u \in W_1 \cap \dots \cap W_p \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_i, \forall i \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_1 \cap \dots \cap W_p$.

$W_1 \cap \dots \cap W_p$ è linearmente chiuso $\Rightarrow W_1 \cap \dots \cap W_p$ è un sottosp. vett. di V. ▨

Esempio:

$\mathbb{R}^3$ $\quad U = \mathcal{L}((1,0,1),(0,0,1))$ $\dim U = 2$ $\quad W = \mathcal{L}((0,1,0),(1,1,0))$ $\dim W = 2$

$u \in U \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in K: u = \alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) = (\alpha, 0, \alpha+\beta)$ $\quad w \in W \Rightarrow \exists \gamma, \delta \in K: w = \gamma(0,1,0) + \delta(1,1,0) = (\delta, \gamma+\delta, 0)$

$v \in U \cap W \Leftrightarrow v \in U \wedge v \in W \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K: v = (\alpha, 0, \alpha+\beta) = (\delta, \gamma+\delta, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ 0 = \gamma + \delta \Rightarrow \gamma = -\delta \\ \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -\gamma = \delta \end{cases}$

$$v = \begin{cases} \alpha(1,0,1) + \beta(0,0,1) = \alpha(1,0,1) - \alpha(0,0,1) = \alpha(1,0,0) \\ \gamma(0,1,0) + \delta(1,1,0) = -\delta(0,1,0) + \delta(1,1,0) = \delta(1,0,0) \end{cases}$$

$U \cap W = \mathcal{L}((1,0,0))$.

OSS La prop. di cui si è discusso sopra **NON** vale se scambio $\cap$ con $\cup$.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p$ non è generalmente un sottosp. vettoriale, ma la chiusura lineare della loro unione si è, in particolare, equivale al sottospazio somma così definito:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1 \wedge \dots \wedge w_p \in W_p \}$$

DIM Notiamo innanzitutto che $W_1 + \dots + W_p$ è diverso dal vuoto e stabile rispetto alle operazioni per come è stato definito.

Dato che è linearmente chiuso, è anche un sottospazio vettoriale. Non resta che esplicitare che $\mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) = W_1 + \dots W_p$.

"$\subseteq$": ricordiamo che $W_1 \cup \dots \cup W_p \subseteq W_1 + \dots + W_p \Rightarrow \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) \subseteq W_1 + \dots + W_p$.

$w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 = w_1 + \underbrace{\underline{0} + \dots + \underline{0}}_{p-1 \text{ volte}}$; $w_2 \in W_2 \Rightarrow w_2 = \underline{0} + w_2 + \underline{0} + \dots + \underline{0}$ etc... $w_p \in W_p \Rightarrow w_p = \underline{0} + \dots + \underline{0} + w_p$.

"$\supseteq$": $u \in W_1 + \dots + W_p \Rightarrow \exists w_1 \in W_1, \dots, w_p \in W_p : u = w_1 + \dots + w_p \in \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p)$,

cioè u è combinazione lineare di vettori che appartengono a $W_1 \cup \dots \cup W_p$. ▨

Grassmann e Somma diretta

Relazione di Grassmann.

$(V, K, +, \cdot)$ $\quad W_1, W_2$ sottosp. vett. di V, $\dim W_1 = r$ e $\dim W_2 = s$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Nell'esempio precedente, in $\mathbb{R}^3$, abbiamo osservato come $\dim U = 2 = \dim W \neq \dim(U \cap W) = 1$.

DEF $W_1, W_2 \leq V$

$W_1 + W_2$ si dice **somma diretta** e si scrive $W_1 \oplus W_2$ se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$.

Si dice anche che W_1 e W_2 sono linearmente indipendenti.

$p \in \mathbb{N}^*$ $\quad W_1, W_2, \dots, W_p \leq V$

$W_1 + W_2 + \dots + W_p$ si dice **somma diretta** e si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_p$ se:

- $W_1 \cap (W_2 + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$;
- $W_2 \cap (W_1 + W_3 + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$;

  $\vdots$
- $W_p \cap (W_1 + \dots + W_{p-1}) = \{\underline{0}\}$.

PROP $W_1, \dots, W_p \leq V$ sottosp. vett.

$\dim W_1 = n_1 \quad B_1 = \{e_{1_1}, \dots, e_{1_{n_1}}\}$, $\dots$, $\dim W_p = n_p \quad B_p = \{e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}}\}$

Se $W_1 + \dots + W_p = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$, allora $\underbrace{(e_{1_1}, \dots, e_{1_{n_1}}, \dots, e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}})}_{t\text{-uple}}$ è lin. indipendente ed è una base di $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$. $\quad t = n_1 + \dots + n_p$

DIM Procediamo per induzione. Per $p = 1$, la proposizione è banalmente vera. Supponiamo valga per $(p-1)$ e verifichiamo per p.

$$\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1_{n_1}} e_{1_{n_1}} + \alpha_{2_1} e_{2_1} + \dots + \alpha_{2_{n_2}} e_{2_{n_2}} + \dots + \alpha_{p_1} e_{p_1} + \dots + \alpha_{p_{n_p}} e_{p_{n_p}} = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1_{n_1}} e_{1_{n_1}}}_{\in W_1} = \underbrace{-\alpha_{2_1} e_{2_1} - \dots - \alpha_{2_{n_2}} e_{2_{n_2}} - \dots - \alpha_{p_1} e_{p_1} - \dots - \alpha_{p_{n_p}} e_{p_{n_p}}}_{\in W_2 + \dots + W_p} \underset{\text{per def di somma diretta}}{=} \underline{0} \Rightarrow \alpha_{1_1} = \dots = \alpha_{1_{n_1}} = 0.$$

Per induzione, la proposizione è vera per $p-1$ sp. vett., ossia $(e_{2_1}, \dots, e_{2_{n_2}}, \dots, e_{p_1}, \dots, e_{p_{n_p}})$ è lin. indipendente e per ipotesi di induzione $\alpha_{2_1} = \dots = \alpha_{2_{n_2}} = \dots = \alpha_{p_1} = \dots = \alpha_{p_{n_p}} = 0$. ∎

Geometria

Lez. 9 - 05/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazio somma

Si ricorda la definizione di "sottospazio somma", presente a pag. 38.

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\quad p \in \mathbb{N}^*$

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V.

$W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p$ non è generalmente un sottosp. vettoriale, ma la chiusura lineare della loro unione sì e, in particolare, equivale al sottospazio somma così definito:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1 \wedge \dots \wedge w_p \in W_p \}$$

Si intende ora dimostrare quanto segue:

PROP $W_i = \mathcal{L}(S_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$

Allora il sottospazio somma è uguale a $\mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p)$.

DIM

- $\mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p) \subseteq \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p)$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \subseteq W_1 \\ \vdots \\ S_p \subseteq W_p \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 \cup \dots \cup S_p \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_p \Rightarrow \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p) \subseteq \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p).$$

- $u \in \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) \Rightarrow \exists w_1 \in W_1, \dots, \exists w_p \in W_p : u = w_1 + \dots + w_p$

$w_1 \in W_1 = \mathcal{L}(S_1) \Rightarrow \exists t_1 \in \mathbb{N}^*, \exists u'_1, \dots, u'_{t_1} \in S_1, \exists \beta'_1, \dots, \beta'_{t_1} \in K : w_1 = \beta'_1 u'_1 + \dots + \beta'_{t_1} u'_{t_1}$

$\vdots$

$w_p \in W_p = \mathcal{L}(S_p) \Rightarrow \exists t_p \in \mathbb{N}^*, \exists u^p_1, \dots, u^p_{t_p} \in S_p, \exists \beta^p_1, \dots, \beta^p_{t_p} \in K : w_p = \beta^p_1 u^p_1 + \dots + \beta^p_{t_p} u^p_{t_p}.$

$$\Rightarrow u = \underbrace{\beta'_1 u'_1 + \dots + \beta'_{t_1} u'_{t_1}}_{\in \mathcal{L}(S_1)} + \dots + \underbrace{\beta^p_1 u^p_1 + \dots + \beta^p_{t_p} u^p_{t_p}}_{\in \mathcal{L}(S_p)} \in \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p).$$

Trasformazioni lineari

$\phi_B : u \in V \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in K^n$.

Abbiamo già visto che tale applicazione è **biettiva**.

pag. 35 - 36

OSS ϕ_B gode delle seguenti proprietà.

(1) $\forall u, v \in V \quad \phi_B(u+v) = \phi_B(u) + \phi_B(v)$;

(2) $\forall u \in V, \forall \lambda \in K \quad \phi_B(\lambda u) = \lambda \phi_B(u)$.

DIM (1) $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$; $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ $\quad \phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$, $\phi_B(v) = (y_1, \dots, y_n)$

$u+v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = \underbrace{(x_1+y_1)}_{\in K} e_1 + \dots + \underbrace{(x_n+y_n)}_{\in K} e_n \Rightarrow \phi_B(u+v) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \phi_B(u) + \phi_B(v)$.

(2) $\lambda u = \lambda(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = (\lambda x_1) e_1 + \dots + (\lambda x_n) e_n \Rightarrow \phi_B(\lambda u) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda \phi_B(u)$. ▨

DEF $(V, K, +, \cdot) \qquad (W, K', +, \cdot) \qquad K \subseteq K'$ ma per semplicità $K = K'$

$T : V \to W$ si dice applicazione o trasformazione lineare se:

(1) $\forall u, v \in V, \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$;

(2) $\forall u \in V, \forall \lambda \in K, \ T(\lambda u) = \lambda T(u)$

Inoltre:

- se T è iniettiva si dice monomorfismo;
- se T è suriettiva si dice epimorfismo;
- se T è biettiva si dice isomorfismo; ← è proprio il caso di ϕ_B !!
- se $V = W$, T si dice endomorfismo;
- se $V = W$ e T biettiva, T si dice automorfismo.

Esempio:

- $V, W \quad K \quad V\ \underline{o}_V \quad W\ \underline{o}_W$: rispettivi vettori nulli

  $f : V \to W \ : \ u \mapsto \underline{o}_W$

  $\forall u, v \in V, \ f(u+v) = \underline{o}_W = \underline{o}_W + \underline{o}_W = f(u) + f(v)$ ✓

  $\forall u \in V, \ \forall \alpha \in K, \ f(\alpha u) = \underline{o}_W = \alpha \underline{o}_W = \alpha f(u)$ ✓ $\qquad$ Allora f è un'app. lineare.

- Sia ora $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : g((a_1, a_2)) = (2, 3, -7) \in \mathbb{R}^3$.

  $g(3,-1) = (2,3,-7) = g(6,-2) = g(2(3,-1)) \neq 2g(3,-1) = 2(2,3,-7) = (4,6,-14)$.

  g non rispetta la prop (2) (neanche la (1) in realtà), quindi non è un'app. lineare.

Trasformazioni lineari: proprietà

$T: V \to W$ tras. lineare

(i) $T(\underline{o}_V) = \underline{o}_W$

DIM $T(\underline{o}_V) = T(0 \cdot \underline{o}_V) \overset{(2)}{=} 0 \cdot T(\underline{o}_V) = \underline{o}_W$.

N.B. $\boxed{\text{Condizione necessaria ma NON sufficiente!!}}$

Infatti:

Sia $f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0 \cdot a_1, a_2)$

$f(0) = (0,0)$ banalmente, ma f non è una trasformazione lineare.

$f(1 + x + 2x^2) = (1, 2)$.

$$\underline{f(2(1+x+2x^2))} = f(2+2x+4x^2) = (4,4) \neq (2,4) = 2(1,2) = \underline{2 f(1+x+2x^2)}.$$

(ii) $t \in \mathbb{N}^*$, $\forall u_1, \dots, u_t \in V$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$:
$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_t T(u_t)$

Si dice che T conserva le combinazioni lineari.

DIM Per induzione. $t=1$ banale: $T(\alpha_1 u_1) \overset{(2)}{=} \alpha_1 T(u_1)$

$t > 1$ $(t-1) \Rightarrow t$ $\quad T((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + (\alpha_t u_t)) \overset{(1)}{=}$

$= T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + T(\alpha_t u_t)$

$\overset{\text{per hp. d'induzione}}{=} \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(u_{t-1}) + \overset{(2)}{=} \alpha_t T(u_t)$, come volevasi dimostrare.

PROP $T: V \to W$ app. lineare

Se $(u_1, \dots, u_n)$ è una n-pla di vettori di V lin. dipendente, allora anche $(T(u_1), \dots, T(u_n)) \in W$ è lin. dipendente. NON posso dire nulla se la n-pla di V è indipendente.

DIM Per ipotesi, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ NON tutti nulli: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{o}_V$.

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = T(\underline{o}_V) \overset{(1)}{=} \underline{o}_W$.

$\overset{(2)}{=} \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n)$, dove -ricordiamo- gli scalari non sono tutti nulli.

Allora necessariamente anche la n-pla $(T(u_1), \dots, T(u_n))$ è lin. dipendente.

Esempio:

- $T: (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare
  $((0,1),(0,2))$ è lin. dip. $\Rightarrow (T(0,1), T(0,2)) = ((0,0),(0,0))$ è lin. dip.
- $g: (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1 - a_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare
  $((2,1),(1,0))$ è lin. indip., ma $(g(2,1), g(1,0)) = ((1,0),(1,0))$ è lin. dip.

Per quest'ultimo esempio, è bene notare l'importanza di parlare di una n-pla, e non di un insieme.

Infatti se considerassimo l'insieme $\{(1,0), (1,0)\}$, sarebbe lin. indipendente!!

Non si cada nel tranello: $\{(1,0),(1,0)\} = \{(1,0)\}$, che è chiaramente lin. indip.

Applicazioni lineari e Kernel pt.1

$T: V \to W$ app. lineare

PROP Sia $U \subseteq V$ un sottosp. vett.. Allora $T(U)$ è un sottosp. vett. di W.

DIM $\underline{0}_W = T(\underline{0}_V) \in T(U) \Rightarrow T(U) \neq \emptyset$.

$u', v' \in T(U) = \{T(u) \mid u \in U\} \Rightarrow \exists u, v \in U : T(u) = u' \wedge T(v) = v'$

$u' + v' = T(u) + T(v) \overset{(1)}{=} T(\underbrace{u+v}_{\in U}) \in T(U)$.

Fissiamo ora $\lambda \in K$.

$\lambda u' = \lambda T(u) \overset{(2)}{=} T(\underbrace{\lambda u}_{\in U}) \in T(U)$. $\blacksquare$

Ma allora, per quanto appena detto, $\operatorname{Im} T = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V)$ è un sottosp. vett. di W.

PROP $S \subseteq V : U = \mathcal{L}(S)$. Allora $T(U) = \mathcal{L}(T(S))$.

DIM "$\supseteq$" $S \subseteq U \Rightarrow T(S) \subseteq T(U) \Rightarrow \mathcal{L}(T(S)) \overset{\text{per la prop precedente}}{\subseteq} T(U)$.

"$\subseteq$" $u' \in T(U) \Rightarrow \exists u \in U = \mathcal{L}(S) : T(u) = u'$

$u \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists u_1, \dots, u_n \in S, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \Rightarrow$

$\Rightarrow T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \overset{(ii)}{=} \alpha_1 \underbrace{T(u_1)}_{\in T(S)} + \dots + \alpha_n \underbrace{T(u_n)}_{\in T(S)} \in \mathcal{L}(T(S))$.

Esempio:

$f : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a_1 - a_2, a_1 - a_2) \in \mathbb{R}^2$ app. lineare

$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}(f(1,0), f(0,1))$

$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}((1,0),(0,1)) \Rightarrow f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}((1,1), \underbrace{\cancel{(-1,-1)}}_{\text{lin. dip.}}) = \mathcal{L}((1,1))$.

DEF $\operatorname{Ker} T = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\}$ si dice nucleo o kernel di T.

Esempio:

Con la stessa app. f dell'esempio precedente:

$\operatorname{Ker} f = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \underset{\underset{(a_1 - a_2,\, a_1 - a_2)}{\shortparallel}}{f(a_1, a_2)} = (0,0)\}$

$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1, a_2) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Quindi $\operatorname{Ker} f = \{(a_1, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1))$ è un caso che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$

Applicazioni lineari e Kernel pt. 2

OSS T è surriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$.
T è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{\underline{o}_V\}$

DIM T surriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$ già noto.

Dimostriamo allora l'altra osservazione.

"$\Rightarrow$" $u \in V \setminus \{\underline{o}_V\}$

$u \neq \underline{o}_V \overset{T \text{ iniettiva}}{\Rightarrow} T(u) \neq T(\underline{o}_V) = \underline{o}_W \Rightarrow u \notin \operatorname{Ker} T$.

"$\Leftarrow$" $u, v \in V : T(u) = T(v) \Rightarrow T(u-v) \overset{(1)}{=} T(u) - T(v) = \underline{o}_W \Rightarrow$

$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} T = \{\underline{o}_V\} \Rightarrow u - v = \underline{o}_V \Rightarrow u = v$, cioè T è iniettiva. ▨

PROP $T: V \to W$ app. lineare

Se T è iniettiva, $\forall (u_1, \dots, u_n)$ n-pla di vettori di V lin. indipendente, allora anche $(T(u_1), \dots, T(u_n)) \in W$ è lin. indipendente.

DIM Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = \underline{o}_W$

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \overset{\text{per (ii)}}{=} \dots \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in \operatorname{Ker} T \overset{T \text{ iniettiva}}{=} \{\underline{o}_V\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{o}_V \overset{(u_1, \dots, u_n) \text{ lin. indip.}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, come volevasi dimostrare. ▨

Geometria

Lez. 10 - 12/04

GF

Made by: Gianluca Fiorentino

Applicazioni lineari pt. 3

Teorema. (dell'equazione dimensionale)

$(V, K, +, \cdot)$ f.g., $\dim V = n$, $(W, K, +, \cdot)$
Sia $T: V \to W$ app. lineare. Allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$.

$V = \mathcal{L}(S)$ $\quad \operatorname{Im} T = T(V) = \mathcal{L}(T(S))$.

DIM NEIN! Senza dimostrazione!

Teorema. (fondamentale delle app. lineari)

$(V, K, +, \cdot)$, $(W, K, +, \cdot)$ $\quad B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base di V.
Sia $\varphi: u_i \in B \mapsto \varphi(u_i) \in W$
Allora $\exists!\ T: V \to W$ app. lineare tale che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $T(u_i) = \varphi(u_i)$.

"DIM" Idea di dimostrazione:

è sufficiente osservare che l'unica app. lineare che soddisfa la prop. richiesta è:

$\forall u \in V$, $\exists! (u_1, \dots, u_n) \in K^n$: $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$\Phi_B : u \in V \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ $\quad T(u) = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 T(u_1) + \dots x_n T(u_n) = x_1 \varphi(u_1) + \dots + x_n \varphi(u_n)$.

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ Determinare un'app. lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $(3,-1) \in \operatorname{Ker} T$ e $(2,4) \in \operatorname{Im} T$.

$\varphi: \begin{matrix} (3,-1) \mapsto (0,0) \\ (7,2) \mapsto (2,4) \end{matrix}$ $\qquad \{(3,-1), (7,2)\}$ base di $\mathbb{R}^2$

$(a_1, a_2) = x_1(3,-1) + x_2(7,2) = (3x_1 + 7x_2, -x_1 + 2x_2)$

$\begin{cases} a_1 = 3x_1 + 7x_2 \\ a_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{a_1 + 3a_2}{13} \\ x_1 = \frac{2a_1 - 7a_2}{13} \end{cases}$

$(a_1, a_2) = \left(\frac{2}{13}a_1 - \frac{7}{13}a_2\right)(3,-1) + \left(\frac{1}{13}a_1 + \frac{3}{13}a_2\right)(7,2) = \left(\frac{6}{13}a_1 - \cancel{\frac{21}{13}a_2} + \frac{7}{13}a_1 + \cancel{\frac{21}{13}a_2}, -\cancel{\frac{2}{13}a_1} + \frac{7}{13}a_2 + \cancel{\frac{2}{13}a_1} + \frac{6}{13}a_2\right) = (a_1, a_2)$ ✓

$T((a_1, a_2)) = \left(\frac{2}{13}a_1 - \frac{7}{13}a_2\right)(0,0) + \left(\frac{1}{13}a_1 + \frac{3}{13}a_2\right)(2,4)$

Esercizio:

$T: \mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}^3$ $\qquad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mapsto (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2)$

$\operatorname{Ker} T = \{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mid (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ $\qquad \begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 = a_2 \\ a_0 = -2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = a_2 \\ a_0 = -2a_2 \end{cases}$

$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \in \operatorname{Ker} T \iff a_1 = a_2,\ a_0 = -2a_2$ $\quad$ ossia $\quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 = -2a_2 + a_2 x + a_2 \cdot x^2$

$\operatorname{Ker} T = \{-2a_2 + a_2 x + a_2 x^2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_2(-2 + x + x^2) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(-2 + x + x^2)$.

$B_{\operatorname{Ker} T} = \{-2 + x + x^2\}$ $\quad \dim \operatorname{Ker} T = 1$ $\quad \underset{1}{\dim \operatorname{Ker} T} + \dim \operatorname{Im} T = \underset{3}{\dim K[x]_{\le 2}} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$

$\operatorname{Im} T = T(\mathbb{R}[x]_{\le 2}) = T(\mathcal{L}(1, x, x^2)) = \mathcal{L}(T(1), T(x), T(x^2)) = \mathcal{L}((1,0,1), (2,1,0), \cancel{(0,-1,2)})$ lin. dip.

$B_{\operatorname{Im} T} = \{(1,0,1), (2,1,0)\}$

Applicazioni lineari e Matrici

PROP $T: V \to W$ isomorfismo $\quad S \subseteq V$

S è lin. indip. $\iff$ $T(S)$ è lin. indip.

DIM "$\Rightarrow$" T è iniettiva, per cui conserva la lineare indipendenza.

"$\Leftarrow$" $T^{-1}: W \to V$ è un isomorfismo. Allora $S = T^{-1}(T(S))$ è lin. indip. $\quad$ Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$

$$T^{-1}(T(S)) = T^{-1}(\{T(v_1), \dots, T(v_t)\}) = \{\underbrace{T^{-1}(T(v_1))}_{=v_1}, \dots, \underbrace{T^{-1}(T(v_t))}_{=v_t}\} = \{v_1, \dots, v_t\} \quad \blacksquare$$

Esempio:

$(V, K, +, \cdot)$ $\quad \dim V = n \quad B = (e_1, \dots, e_n) \qquad \Phi_B: V \to K^n \quad u \mapsto (x_1, \dots, x_n) \qquad u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad B = (1, x, x^2, x^3)$

$S = \{3 - 2x + 4x^3,\ 1 + x - x^2,\ 2 - 3x + x^2 + 4x^3\}$ è lin. ind.?

$$\begin{array}{ccc} 3-2x+4x^3 & 1+x-x^2 & 2-3x+x^2+4x^3 \\ \downarrow \Phi_B & \downarrow \Phi_B & \downarrow \Phi_B \\ (3,-2,0,4) & (1,1,-1,0) & (2,-3,1,4) \end{array}$$

S è lin. ind. $\iff$ $\{(3,-2,0,4), (1,1,-1,0), (2,-3,1,4)\}$ è lin. ind.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a^1 = (3, -2, 0, 4) \\ a^2 = (1, 1, -1, 0) \\ a^3 = (2, -3, 1, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv (4, 0, 4) \end{array}$$

N.B. Sia $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$

La trasposta di A è la matrice che si ottiene invertendo righe e colonne e si indica con ${}^tA$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$$

Rango e Matrici ridotte a scalini

DEF $A \in M_{m\times n}(K)$

Il rango di A è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A:
$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \subseteq K^m$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{L}((2,0,1),(0,1,0),(0,0,1)) = 3 = \text{rango}(A) = \dim \mathcal{L}((2,0,0),(0,1,0),(1,0,1))$.

Teorema.

$A \in M_{m\times n}(K)$
$\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA) = \dim \mathcal{L}(a^1, \dots, a^m)$.

~~DIM~~
Nessuna dim.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{L}((2,0,0),(1,0,0),(0,1,2),(1,1,2)) = \text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA) = \dim \mathcal{L}((2,1,0,1),(0,0,1,1),(0,0,\cancel{2},2)) = 2$.

DEF $A \in M_{m\times n}(K)$

A si dice ridotta a scalini (o a gradini) $:\Longleftrightarrow$

(i) a^i è una riga nulla di A $\Rightarrow$ tutte le righe successive sono nulle;

(ii) il primo elemento da sinistra non nullo si dice pivot e deve stare più a sinistra dei pivot delle righe successive.

Inoltre, A si dice completamente ridotta a gradini se è vero anche che:

(iii) i pivot sono tutti uguali a 1;

(iv) gli elementi sopra a tutti i pivot sono nulli.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non è a gradini, ma posso renderla tale invertendo $a^2 \longleftrightarrow a^3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ è ridotta a gradini, ma non completamente. Nei riquadri sono indicati i pivot delle rispettive righe.

PROP $A \in M_{m\times n}(K)$, A è ridotta a gradini $\Rightarrow$ $\text{rango}(A) = k$, dove k è il numero di pivot.

DIM Per induzione

Sia $\#\text{pivot} = k$. $\quad A = \begin{pmatrix} \circ \dots \square \dots & & \\ \circ \dots \circ \dots \square \dots & & \\ \vdots & & \\ \circ \dots & \dots\dots \square \dots & \\ \circ \dots & \dots\dots\dots & \circ \end{pmatrix} k\text{-esima}$

Se $k=0$, allora A è la matrice nulla, quindi $\text{rango}(A) = 0$. Suppongo ora vero $k-1$ e provo per k.

$A = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \circ \dots \square \dots & & \\ \circ \dots \circ \dots \square \dots & & \\ \vdots & & \\ \circ \dots & \dots\dots \square \dots & \\ \circ \dots & \dots\dots\dots & \circ \end{pmatrix}}_{=B}\right) k\text{-esima} \qquad \#\text{pivot } B = k-1 \overset{\text{hp. di induzione}}{=} \text{rango}(B)$ ossia $\{a^2, \dots, a^k\}$ è lin. indip.

Ma sicuramente $a^1 \in \mathcal{L}(a^2, \dots, a^k)$ in quanto il pivot di a^1 è necessariamente diverso da 0 e non può essere ottenuto come comb. lin. di scalari che moltiplicano zero.

Ma allora l'insieme formato da $\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$ è ancora lin. indip., cioè $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) + 1 = (k-1) + 1 = k$. ▨

Operazioni o trasformazioni elementari (di riga)

$A \in M_{m \times n}(K)$

I $\quad i, k \in \{1, \dots, m\}$: $\quad \boxed{a^i \longleftrightarrow a^k}$

II $\quad i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$: $\quad \boxed{a^i \longrightarrow \lambda a^i}$

III $\quad i, k \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$: $\quad \boxed{a^i \longrightarrow a^i + \lambda a^k}$

Queste operazioni sono tali che anche se le righe della matrice cambiano, non cambia lo spazio vettoriale generato dalla loro chiusura lineare.

NON vale lo stesso per le colonne.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad a^1 \longleftrightarrow a^2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tornare indietro, basterebbe fare $b^2 \longleftrightarrow b^1$. Adesso $b^2 \longrightarrow \lambda b^2$, dove $\lambda = \frac{1}{2}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad c^3 \longrightarrow c^3 + (-2)c^1 \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Anche queste operazioni sono reversabili chiaramente. Adesso $d^4 \longrightarrow d^4 + (-1)d^1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad e^4 \longrightarrow e^4 + (-1)e^3 \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g^3 \longrightarrow g^3 + 2g^2$$

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è finalmente ridotta a scalini, ma continuiamo. Adesso $g^3 \longrightarrow \frac{1}{3} g^3$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h^1 \longrightarrow h^1 + h^3 \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i^1 \longrightarrow i^1 - i^2$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è completamente ridotta a gradini.

We did it!

Questo algoritmo, piuttosto intuitivo, è anche detto **Metodo di riduzione di Gauss**, utile per risolvere sistemi di equazioni velocemente. Vediamolo, a titolo informativo, un po' più nel dettaglio.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \dots & a^1_J \dots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^k_1 & a^k_2 \dots & a^k_J \dots & a^k_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 \dots & a^m_J \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(K)$$

J indice della prima colonna non nulla, K indice della riga su cui c'è il primo elemento non nullo della colonna J

$a^1 \longleftrightarrow a^k \qquad \forall i \in \{2, \dots, m\} \qquad a^i \longrightarrow a^i + \left(-\frac{a^i_J}{a^1_J}\right) a^1$

$a^2_J + \alpha_2 \underbrace{a^1_J}_{\neq 0} = 0 \implies \alpha_2 = -\frac{a^2_J}{a^1_J}$ $\longrightarrow$ Creo colonne di tutti zeri sotto al pivot e procedo iterativamente nelle sotto-matrici

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad a^1 \longleftrightarrow a^k = a^3 \quad J = 2 \quad k = 3 \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad a^4 \longrightarrow a^4 + \left(\frac{-a^4_2}{a^1_2}\right) a^1$$

$-\left(-\frac{1}{7}\right) =$

Geometria

Lez. 11 - 14/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sistemi di Equazioni

DEF $(K, +, \cdot)$ campo

$x_1, \dots, x_n \quad n \in \mathbb{N}^* \quad a_1, \dots, a_n, b \in K \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b = 0.$

Una soluzione di questa equazione lineare è una n-pla $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in K^n$ di scalari che sostituiti ordinatamente alle variabili soddisfano l'equazione, ossia: $a_1 \bar{y}_1 + \dots + a_n \bar{y}_n - b = 0$

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite sul campo K è una m-pla di equazioni lineari:

$$\Sigma : \begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n = b_1 & S_1 \\ \vdots & \vdots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n = b_m & S_m \end{cases}$$

Insieme delle soluzioni: $S = S_1 \cap \dots \cap S_m$.

Una soluzione di Σ è una soluzione di ciascuna equazione di Σ:

$(y_1, \dots, y_n) \in K^n : \forall i \in \{1, \dots, m\} : a^i_1 y_1 + \dots + a^i_n y_n = b_i.$

$A = \begin{pmatrix} a^1_1 \dots a^1_n \\ \vdots \\ a^m_1 \dots a^m_n \end{pmatrix}$ matrice dei coefficienti o prima matrice o matrice incompleta

$C = \begin{pmatrix} a^1_1 \dots a^1_n & b_1 \\ \vdots & \\ a^m_1 \dots a^m_n & b_m \end{pmatrix}$ matrice completa o seconda matrice

Esempio:

$n = 3 \quad K = \mathbb{R} \quad \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$

DEF Siano Σ e Σ' due sistemi lineari in n incognite su K.

Σ e Σ' sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. $S = S'$.

Un sistema lineare Σ si dice compatibile se il suo insieme delle soluzioni $S \neq \emptyset$. Altrimenti si dice incompatibile.

Esempio:

- $n = 2 \quad K = \mathbb{R} \quad \Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ incompatibile! $2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 3 = 6 \neq 0$

- $n = 4 \quad K = \mathbb{R}$

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

variabili libere (x_3, x_4)

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 + 1 = x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

Sostituzione a ritroso

$$S = \{(x_3 + x_4 + 1, x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Alternativamente:

$$a^2 \to -a^2 \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \quad a^1 \to a^1 - a^2 \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

Ridotto completamente

cioè $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$

Trasformare i sistemi di equazioni

Teorema. Sia Σ un sistema lineare di m equazioni in n incognite su K e sia C la sua matrice completa. Se effettuiamo su C un numero finito di operazioni elementari, otteniamo una matrice C' tale che il sistema lineare Σ' che ha C' come matrice completa è equivalente a Σ.

DIM $\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + \ldots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \ldots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & \ldots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$

(I) $i, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad a^i \longleftrightarrow a^k$

$\Sigma: \begin{cases} \vdots \\ a^i_1 x_1 + \ldots + a^i_n x_n - b_i = 0 \\ a^k_1 x_1 + \ldots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\qquad \Sigma: \begin{cases} \vdots \\ a^k_1 x_1 + \ldots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ a^i_1 x_1 + \ldots + a^i_n x_n - b_i = 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\qquad$ Le equazioni sono le stesse $\quad S = S'$ $\quad \checkmark$

(II) $i \in \{1, \ldots, m\} \qquad \lambda \in K \setminus \{0\}, \qquad a^i \longrightarrow \lambda a^i$

e: equazione

$\Sigma: \begin{cases} \vdots \\ \lambda a^i_1 x_1 + \ldots + \lambda a^i_n x_n - \lambda b_i = 0 \\ a^k_1 x_1 + \ldots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\qquad y = (y_1, \ldots, y_n) \in S \Rightarrow e_1(y) = 0, \ldots, e_i(y) = 0, \ldots, e_n(y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1(y) = 0, \ldots, \lambda e_i(y) = \lambda \cdot 0 = 0, \ldots, e_n(y) = 0 \quad \Longleftrightarrow (y_1, \ldots, y_n) \in S'$ $\quad \checkmark$

(III) $i, k \in \{1, \ldots, m\}, \quad \alpha \in K, \quad a^i \longrightarrow a^i + \alpha a^k$

$\Sigma: \begin{cases} \vdots \\ (a^i_1 + \alpha a^k_1) x_1 + \ldots + (a^i_n + \alpha a^k_n) x_n - (b_i + \alpha b_k) = 0 \\ a^k_1 x_1 + \ldots + a^k_n x_n - b_k = 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\qquad y = (y_1, \ldots, y_n) \in S \Rightarrow$

$e_1(y) = 0, \ldots, e_i(y) = 0, \ldots, e_n(y) = 0 \Rightarrow e_1(y) = 0, \ldots, \underbrace{e_i(y)}_{=0} + \underbrace{\alpha\, e_k(y)}_{=\alpha \cdot 0} = 0, \ldots, e_n(y) = 0 \quad \Longleftrightarrow (y_1, \ldots, y_n) \in S'$ $\quad \blacksquare$

Esempio:

$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad a^2 \longrightarrow a^2 + a^1$ $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \Sigma': \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2 + 1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

$S = S' = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ Si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni, dove l'exp dipende dal numero di var libere.

$a^2 \longrightarrow -a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a^1 \longrightarrow a^1 + 2a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma'': \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Notiamo che $\underline{0} \notin S = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ quindi S **NON** è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$.

Metodo Gauss - Jordan

 - 

Il metodo Gauss-Jordan per risolvere un sistema di equazioni consiste di due step:

(1) riduzione a gradini della matrice completa ;

(2) **(i)** SOSTITUZIONE A RITROSO delle variabili che corrispondono ai pivot (**NON** libere);

oppure

(ii) riduzione completa a gradini della matrice completa.

Infine, si scrive l'insieme S.

Esempio:

$$\Sigma : \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad c^1 <\!\!-\!\!> c^2 \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^3 \to c^3 + c^1 \\ c^4 \to c^4 - c^1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

riga

$r_4 \to r_4 - 3/2\, r_2$

$(0, -3, 3, 2, -2, 2) - 3/2\,(0, -2, 2, 1, -1, 1) =$

$= (0-0, -3+3, 3-3, 2-\frac{3}{2}, -2+\frac{3}{2}, 2-\frac{3}{2})$

$= (0, 0, 0, 1/2, -1/2, 1/2).$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad c^4 \to c^4 + \frac{1}{6} c^3 \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ridotta a scalini. Procediamo con (ii)

$$\begin{array}{l} c^1 \to -c^1 \\ c^2 \to -\frac{1}{2} c^2 \\ c^3 \to -\frac{1}{3} c^3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^2 \to c^2 + \frac{1}{2} c^3 \\ c^1 \to c^1 - c^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad c^1 \to c^1 + c^2 \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc:c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} & & x_3 & & x_5 & \end{array} \end{array} = C'$$

$$\Sigma' : \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_5 + 1 \end{cases} \qquad S = S' = \{ (-x_3 - 1, x_3, x_3, x_5 + 1, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^5$$

Prodotto righe per colonne

DEF $A \in M_{m \times n}(K)$ $\quad B \in M_{p \times q}(K)$

La coppia di matrici (A, B) si dice conformabile se $n = p$, ossia il numero di colonne della prima matrice A è uguale al numero di righe della seconda matrice B.

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad (A, B)$ è conformabile, ma (B, A) no.

Prodotto scalare numerico, o standard, o canonico, o naturale su K^n.

$s: ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in K^n \times K^n \longmapsto a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in K.$

Esempio:

$\mathbb{R}^4 \quad s((3,1,-2,1),(-1,3,1,1)) = -\cancel{3}+\cancel{3}-2+1 = -1$

DEF Sia (A, B) una coppia conformabile, $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times q}(K)$.

Allora il prodotto righe per colonne è:

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 & \dots & a^1 b_q \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 & \dots & a^2 b_q \\ \vdots & & & \\ a^m b_1 & a^m b_2 & \dots & a^m b_q \end{pmatrix} \in M_{m \times q}(K)}$$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$a^1 b_1 = (2,-3,4)(-1,0,2) = -2+0+8 = 6$ $\qquad a^1 b_2 = (2,-3,4)(1,1,-2) = 2-3-8 = -9$

$a^2 b_1 = (0,1,7)(-1,0,2) = 0+0+14 = 14$ $\qquad a^2 b_2 = (0,1,7)(1,1,-2) = 0+1-14 = -13$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 14 & -13 \end{pmatrix}$

Anche BA è conformabile, ma $AB \neq BA \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. L'operazione NON è commutativa.

Proprietà (no DIM):

(1) $A \in M_{m \times n}(K)$ $\quad B \in M_{n \times q}(K)$ $\quad C \in M_{q \times t}(K)$

$(AB)C = A(BC) \in M_{m \times t}(K)$

(2) $A, B \in M_{m \times n}(K)$ $\quad C \in M_{n \times q}(K)$

$(A+B)C = AC + BC$

Gruppo lineare generale

Prodotto righe per colonne $\circ : M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$

$(M_n(K), \circ)$ struttura algebrica $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica elemento neutro

$Gl_n(K) = \{ A \in M_n(K) \mid \exists B \in M_n(K) : AB = BA = I_n \}$ $\quad B = A^{-1} \quad I_n^{-1} = I_n$

$(Gl_n(K), \circ)$ è un gruppo non abeliano <u>gruppo lineare generale di ordine n su K</u>

$\Sigma : \begin{cases} a^1_1 x_1 + \ldots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \ldots + a^m_n x_n = b_m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Sigma : AX = b$ forma matriciale

PROP $\Sigma_0 : AX = 0$ $\quad S_0$ insieme delle soluzioni $\subseteq K^n$

Allora <u>S_0 è un sottospazio vettoriale di K^n</u>.

DIM Proviamo che S_0 è linearmente chiuso.

- $\underline{0} \in S_0$ banale $\Rightarrow S_0 \neq \emptyset$. ✓
- $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in S_0$ $\qquad$ Th: $y + z \in S_0$

  $\Rightarrow A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$

  $\Rightarrow A \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right] \overset{(2)}{=} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0.$ ✓
- $\alpha \in K$ $\qquad$ Th: $\alpha y \in S_0$

  $A \left[\alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \alpha \left[A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot 0 = 0.$ ▨

Teorema. (di Rouché-Capelli)

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma : AX = b \qquad (A, b) = C = (A : b) \\ \Sigma \text{ è compatibile} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C). \end{array}}$$

DIM Prima o poi ... 😴

in realtà è alla prossima pagina 😐

Geometria

Lez. 12 - 19/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Matrici e Rouché-Capelli

Teorema. (di Rouché-Capelli)

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma: \ AX = b \qquad C = (A, b) = (A : b) \\ \Sigma \text{ è compatibile} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C). \end{array}}$$

DIM $\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + a^m_2 x_2 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$

Cioè $x_1 \begin{pmatrix} a^1_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a^1_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a^1_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ <- ho messo in evidenza le x

Σ è compatibile $:\iff \exists (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in K^n : A\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = b \iff b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C).$

Procediamo dimostrando l'ultima doppia-implicazione:

"$\Rightarrow$" $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \overset{\overset{\text{banale}}{\supseteq}}{\subseteq} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rango}(C) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \text{rango}(A).$

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \overset{\text{per ipotesi}}{=} \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \\ \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \supseteq \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n).$ ▨

PROP $A \in M_{m \times n}(K)$

$\Sigma_0: \ AX = 0 \qquad S_0 \subseteq K^n$ sottosp. vett. $\qquad C = (A, 0)$

$\tilde{T}_A: K^n \to K^m \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è un'app. lineare

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$\tilde{T}_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto {}^t\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$

$\tilde{T}_A((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 3x_2 + 5x_3, \ x_1 - x_3).$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\tilde{T}_A((1,0,0)) = (-2, 1) \qquad \tilde{T}_A((0,1,0)) = (3, 0) \qquad \tilde{T}_A((0,0,1)) = (5, -1)$

$\text{Im}\, \tilde{T}_A = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \dim \text{Im}\, \tilde{T}_A = \text{rango}(A) \qquad \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{2}{\dim \text{Im}\, \tilde{T}_A} + \underset{1}{\dim \text{Ker}\, \tilde{T}_A}$

Scrivere sottosp. vett. come sistemi omogenei

OSS $\Sigma_0 : AX = 0 \quad S_0 = \operatorname{Ker} \tilde{T}_A \implies \dim S_0 = n - \operatorname{rango}(A)$, dove n è il numero di incognite.

Esempio:

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} a^2 \to a^2 - 2a^1 \\ a^3 \to a^3 - a^1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to a^3 - a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con "A" la parte dei coefficienti.

riduco completamente: $a^2 \to -a^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^1 \to a^1 - a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -2\bar{x}_3 + \bar{x}_4 + 2\bar{x}_5 \\ x_2 = 3\bar{x}_3 - 3\bar{x}_4 - 3\bar{x}_5 \end{cases}$$

← indica che li abbiamo parametrizzati

$$S_0 = \{(-2\bar{x}_3 + \bar{x}_4 + 2\bar{x}_5, 3\bar{x}_3 - 3\bar{x}_4 - 3\bar{x}_5, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\}$$

Metto in evidenza: $\bar{x}_3(-2,3,1,0,0) + \bar{x}_4(1,-3,0,1,0) + \bar{x}_5(2,-3,0,0,1) \implies S_0 = \mathcal{L}((-2,3,1,0,0),(1,-3,0,1,0),(2,-3,0,0,1))$

i 3 vettori sono lin. indip. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim S_0 = n - \operatorname{rango}(A) = 5 - 2 = 3 =$ num di variabili libere.

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ 5 incognite, $K = \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) a^1 \leftrightarrow a^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to a^3 - a^1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a^3 \to a^3 - a^2 \\ a^4 \to a^4 + a^2 \\ a^3 \leftrightarrow a^4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to \tfrac{1}{5} a^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a^2 \to a^2 - 2a^3 \\ a^1 \to a^1 + a^3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^1 \to a^1 - 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -3\bar{x}_3 + 4\bar{x}_5 \\ x_2 = \bar{x}_3 - 13/5\,\bar{x}_5 \\ x_4 = \frac{4}{5}\bar{x}_5 \end{cases}$$

$$S_0 = \{(-3\bar{x}_3 + 4\bar{x}_5, \bar{x}_3 - 13/5\,\bar{x}_5, \bar{x}_3, \tfrac{4}{5}\bar{x}_5, \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\} \qquad \dim S_0 = n - \operatorname{rango}(A) = 5 - 3 = 2$$

$\bar{x}_3$	$\bar{x}_5$	
1	0	$(-3, 1, 1, 0, 0)$
0	1	$(4, -\frac{13}{5}, 0, \frac{4}{5}, 1)$

$\implies S_0 = \mathcal{L}((-3,1,1,0,0),(4,-\frac{13}{5},0,\frac{4}{5},1))$.

Teorema. Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale. Allora $\exists\, \Sigma_0 : AX = 0$ tale che $S_0 = W$.

DIM Sia $\dim W = h \quad B_W = \{w_1, \dots, w_h\} \subseteq K^n$

$w_1 = (a^1_1, a^2_1, \dots, a^n_1)$
$\vdots$
$w_h = (a^1_h, a^2_h, \dots, a^n_h)$

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_h & x_1 \\ a^2_1 & & a^2_h & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^n_1 & & a^n_h & x_n \end{pmatrix} = h$$

ha rango h

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n : (x_1, \dots, x_n) \in W \iff (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h)$. Riduco a gradini:

$$\begin{pmatrix} p^1_1 & \cdots & & & b^1_1 x_1 + \dots + b^1_n x_n \\ 0 & p^2_2 & \cdots & & b^2_1 x_1 + \dots + b^2_n x_n \\ 0 & \cdots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & p^h_h & b^h_1 x_1 + \dots + b^h_n x_n \\ 0 & \cdots & & 0 & b^{h+1}_1 x_1 + \dots + b^{h+1}_n x_n = 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & b^n_1 x_1 + \dots + b^n_n x_n = 0 \end{pmatrix}$$

← questo è il sistema trovato

Rappresentazione Cartesiana e Parametrica

Proviamo quello appena discusso con qualche esempio che speriamo possa essere chiarificatore.

Esempio:

- $W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad W = \mathcal{L}((1,0,1,1),(2,1,2,3)) \qquad \dim W = 2$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{matrix} a^3 \to a^3 - a^1 \\ a^4 \to a^4 - a^1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad a^4 \to a^4 - a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & \left\{\begin{matrix} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

- $W = \mathcal{L}((2,1,0,3,1),(2,-1,1,4,0)) \subseteq \mathbb{R}^5 \qquad \dim W = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^1 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} a^2 \to a^2 - 2a^1 \\ a^4 \to a^4 - 3a^1 \\ a^5 \to a^5 - a^1 \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^3 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \ \begin{matrix} a^3 \to a^3 - 4a^2 \\ a^4 \to a^4 - 7a^2 \\ a^5 \to a^5 - a^2 \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & \left\{\begin{matrix} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_5 - x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

OSS

$(V,K,+,\cdot) \quad \dim V = n \qquad U \subseteq V$ sottosp. vett. di V, $\dim U = h \qquad B_V = (e_1, \dots, e_n)$

$\Phi_B : V \to K^n \qquad \Phi_B(U) = W \subseteq K^n$ sottosp. vett.

$W = S_0 \quad \Sigma_0 : AX = 0$ **rappresentazione cartesiana** di U nella base B.

Esempio:

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad B = (1, x, x^2)$

$U = \mathcal{L}(1-x) \quad \dim U = 1 \qquad 1 - x = 1 \cdot 1 + (-1)x + 0x^2$

$\Phi_B : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi_B(U) = \mathcal{L}(\Phi_B(1-x)) = \mathcal{L}((1,-1,0)) = W.$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \ a^2 \to a^2 + a^1 \ \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

DEF

Se alle incognite vengono assegnate variabili parametrizzate, si parla di **rappresentazione parametrica**.

$w_1 = (a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n), \dots, w_h = (a^h_1, a^h_2, \dots, a^h_n)$

$(x_1, \dots, x_n) \in W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h) \iff \exists\, t_1, \dots, t_h \in K : (x_1, \dots, x_n) = t_1(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n) + \dots + t_h(a^h_1, a^h_2, \dots, a^h_n).$

$$\iff \begin{cases} x_1 = a^1_1 t_1 + \dots + a^h_1 t_h \\ x_2 = a^1_2 t_1 + \dots + a^h_2 t_h \\ \vdots \\ x_n = a^1_n t_1 + \dots + a^h_n t_h \end{cases} \qquad t_i \text{ parametri} \in K \qquad \text{Nell'esempio precedente: } \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Teorema. (di Cramer)

$\Sigma : AX = b \qquad A \in M_n(K)$ ← qui il prodotto righe per colonne è un'operazione interna

Se $A \in GL_n(K)$, ovvero al gruppo delle matrici invertibili, allora $|S| = 1$.

DIM

Per ipotesi $\exists\, A^{-1} : AA^{-1} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$AX = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}b \quad \overset{\text{associatività}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(A^{-1}A)}_{= I_n} X = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}b$

Geometria

Lez. 13 - 26/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Determinante di una matrice

DEF $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$, K campo $\quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$

(1) A è **simmetrica** $:\Longleftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^i_j = a^j_i$, quindi $A = {}^tA$;

(2) A è **triangolare inferiore** (o superiore) $:\Longleftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $j > i \Rightarrow a^i_j = 0$ $\quad (a^j_i = 0)$;

(3) A è **diagonale** $:\Longleftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j \Rightarrow a^i_j = 0$;

(4) A è **antisimmetrica** $:\Longleftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^j_i = -a^i_j$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1) $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) inf $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) sup $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4)

Gli elementi sulla diagonale devono essere necessariamente pari a zero. Perché?

Siano ora $\mathbb{N}^*_n = \{1,\dots,n\}$ e $P_n = \{ f : \mathbb{N}^*_n \to \mathbb{N}^*_n \mid f \text{ biettiva} \}$

$n = 1 \Rightarrow id : \{1\} \mapsto \{1\}$

$n = 2 \Rightarrow id : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{matrix}, \quad f_1 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{matrix}$

$n = 3 \Rightarrow$

$\overset{f_0}{\|}\; id : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix} \qquad f_1 : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix} \qquad f_2 : \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix}$

$f_3 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix} \qquad f_4 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix} \qquad f_5 : \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}$

OSS Se f deve essere biettiva, allora vi sono $n!$ modi di costruire l'applicazione.

Infatti:

$$\left.\begin{matrix} 1 \longmapsto f(1) & n \text{ possibili scelte} \\ 2 \longmapsto f(2) & n-1 \quad '' \quad '' \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \longmapsto f(n-1) & 2 \quad '' \\ n \longmapsto f(n) & 1 \quad '' \end{matrix}\right\} n! \text{ scelte}$$

DEF Diciamo che $f \in P_n$ ha un'**inversione** $:\Longleftrightarrow \exists i,k \in \{1,\dots,n\} : i < k \wedge f(i) > f(k)$.

$\underline{\text{segno}(f)} = \begin{cases} -1, & \text{se \# inversioni dispari} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Nell' esempio $n=3$,
f_0 non ha inversioni, f_1 ne ha una, f_2 tre,
f_3 ha una inversione, f_4 ne ha due, f_5 due.

Possiamo, dunque, dare la definizione formale di **determinante** di una matrice:

DEF **det**: $A \in M_n(K) \mapsto \underset{\overset{\|}{|A|}}{\det(A)} \in K$

$$\det(A) = \left(\sum_{f \in P_n} \text{segno}(f)\, a^1_{f(1)} a^2_{f(2)} a^3_{f(3)} \cdots a^{n-1}_{f(n-1)} a^n_{f(n)} \right)$$

N.B. Non abbattersi se non è chiaro, non userai mai questa cosa. ☺

Esempio:

- Poniamo $n=1$. Allora $A = (a^1_1)$ $\quad |A| = a^1_1$

  Se $A = (-3)$, $|A| = -3$
- Poniamo $n=2$. $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$

  $A = \begin{pmatrix} \pi & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 = -\pi + 6$
- Se $n=3$, $|A| = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$

Modi per determinare il determinante

("determinano il determinante" )

Per matrici 3×3, è possibile applicare la regola di Sarrus : $\left(\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{matrix}\right)\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{matrix}$

— addiziono
— sottraggo

Esempio : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = 2+3+0-6-4-0 = -5$.

Proprietà : $A \in M_n(K)$

- $\det(A) = \det({}^tA)$;
- Se $B \in M_n(K)$ è la matrice ottenuta da A mediante un'operazione elementare:
  - (i) del primo tipo : $\underline{a}^i \leftrightarrow \underline{a}^k$, allora $|B| = -|A|$;
  - (ii) del secondo tipo : $\underline{a}^i \xrightarrow{\neq 0} \lambda\,\underline{a}^i$, allora $|B| = \lambda|A|$;
  - (iii) del terzo tipo : $\underline{a}^i \to \underline{a}^i + \lambda\,\underline{a}^k$, allora $|B| = |A|$.

OSS Se B è ottenuta da A mediante op. elementari, allora $|A| \neq 0 \iff |B| \neq 0$.

DEF Cancellando la riga e la colonna su cui sta l'elemento a^k_j ottengo una sottomatrice quadrata di ordine $n-1$, che denoto con M^k_j e chiamo minore complementare di a^k_j.

$|M^k_j| \qquad A^k_j = (-1)^{k+j}\,|M^k_j|$ complemento algebrico di a^k_j .

Esempio : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad a^3_2 = -6 \quad M^3_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |M^3_2| = 2 \qquad A^3_2 = (-1)^{3+2}\cdot 2 = -2$.

Teorema di Laplace.

$A \in M_n(K) \quad n \in \mathbb{N} \quad K$ campo

- $\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad |A| = a^k_1 A^k_1 + a^k_2 A^k_2 + \dots + a^k_n A^k_n$
- $\forall J \in \{1,\dots,n\}, \quad |A| = a^1_J A^1_J + a^2_J A^2_J + \dots + a^n_J A^n_J$

Esempio : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k=1$ (scelta NON ottimale)

$M^1_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^1_1 = (-1)^2|M^1_1| = -1 \quad A^1_2 = (-1)^3|M^1_2| = -3 \quad A^1_3 = (-1)^4|M^1_3| = -3 \quad \Rightarrow \quad |A| = 2(-1) + (-1)(-3) + 2(-3) = -5$.

Binet e Laplace

PROP Sia $B \in M_n(K)$ triangolare. Allora $|B| = b^1_1 b^2_2 \dots b^n_n$.

DIM Per induzione:

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots \\ 0 & \begin{pmatrix} b^2_2 & & \\ 0 & \ddots & \\ \cdots & 0 & b^n_n \end{pmatrix} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$B' \in M_{n-1}(K)$

$n = 1 \quad B = (b^1_1) \quad |B| = b^1_1$ ✓

$n > 1$

$n-1 \Rightarrow n \quad |B'| = b^2_2 b^3_3 \dots b^n_n$ per ipotesi.

Applichiamo il Teorema di Laplace sviluppando $|B|$ rispetto alla prima colonna: $j = 1$.

$$|B| = b^1_1 B^1_1 + 0 + \dots + 0 = b^1_1 |B'| (-1)^{1+1} = b^1_1 b^2_2 \dots b^n_n.$$

Esempio:

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad |B| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad |B| = 0$

Corollario.

Sia B una matrice a gradini ottenuta da $A \in M_n(K)$.

$|A| \neq 0 \iff |B| \neq 0 \iff n = \#\text{pivot } B \iff \text{rango}(B) = n = \text{rango}(A)$.

Inoltre, possiamo osservare che $|A| = 0 \iff \text{rango}(A) < n$.

Esempio:

$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & -3 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per quali valori di t la matrice A ha rango massimo?

$$|A_t| = -3t + t + 0 - 6 - 0 - 0 \neq 0 \Rightarrow -2t - 6 \neq 0 \Rightarrow t \neq -3 \iff \text{rango}(A_t) = 3.$$

Teorema di Binet.

$A, B \in M_n(K) \qquad |AB| \overset{\in M_n(K)}{=} |A||B|$

Secondo teorema di Laplace.

$\forall k, h \in \{1, \dots, n\}, \quad k \neq h \Rightarrow a^k_1 A^h_1 + \dots + a^k_n A^h_n = 0$ <- tolgo la riga della h

$\forall j, l \in \{1, \dots, n\}, \quad j \neq l \Rightarrow a^1_j A^1_l + \dots + a^n_j A^n_l = 0$ <- tolgo la colonna della l

Teorema generalizzato di Laplace.

$\forall k, h \in \{1, \dots, n\}, \quad a^k_1 A^h_1 + \dots + a^k_n A^h_n = \delta^k_h |A|$

$\forall j, l \in \{1, \dots, n\}, \quad a^1_j A^1_l + \dots + a^n_j A^n_l = \delta^j_l |A|$

$$\delta^h_k = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

simbolo di Kronecker

Invertibilità

Prima di procedere, ricordiamo: $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow \exists B = A^{-1} \in M_n(K) : AB = I_n = BA$

Teorema.

$\boxed{\text{Sia } A \in M_n(K). \text{ Allora: } \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0.}$

DIM

"$\Rightarrow$" $AA^{-1} = I_n \quad |A||A^{-1}| \overset{\text{Binet}}{=} |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$ $\quad |A^{-1}| = |A|^{-1}$

"$\Leftarrow$" $A^{\#} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & & & \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix}$ Th: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t(A^{\#})$

$\Rightarrow \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \dots & A^n_1 \\ \vdots & & & \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}}_{B}$ Th: (1) $AB = |A| I_n$ (2) $BA = |A| I_n$

Uso il teorema generalizzato di Laplace: per esempio, $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n)(A^2_1, A^2_2, \dots, A^2_n) = a^1_1 A^2_1 + a^1_2 A^2_2 + \dots + a^1_n A^2_n = \delta^1_2 |A| = 0.$

$$AB = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = I_n$$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 2+3+0-6-4-0 = -5 \neq 0.$

$A^1_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A^1_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^1_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$A^2_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^2_2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A^2_3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$A^3_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A^3_2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A^3_3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 & -2/5 \\ 3/5 & -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = B$

È possibile controllare se i calcoli sono giusti. Ad esempio, $(a^1_1, a^1_2, a^1_3)(b^1_1, b^2_1, b^3_1) = (2, -1, 2)(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{5}{5} = 1$ ✓

Geometria

Lez. 14 - 28/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Orlati di una matrice

DEF $A \in M_{m,n}(K)$ $\quad A = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \\ \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$

Una sottomatrice quadrata di A sarà detta un "minore di A".

Se un minore M di A ha <u>ordine k</u> $< \min\{m,n\}$, possiamo individuare un minore M' di A di <u>ordine $k+1$</u> di cui M è sottomatrice. Allora M' si dice orlato di M in A.

Esempio: $\quad A = \begin{pmatrix} 7 & \boxed{8} & -1 & \boxed{1} \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & \boxed{6} & -5 & \boxed{4} \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ← devo necessariamente prendere le colonne (la seconda e la quarta) e le righe (la prima e la terza) su cui vi sono gli elementi di M. Per M', posso scegliere 1^a o 3^a colonna, e 2^a riga. Ad esempio, $M' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

ha ordine 2
$2 < \min\{3,4\} = 3$

Teorema degli orlati (o di Kronecker).

$A \in M_{m,n}(K)$

Il rango di A è uguale a $k \leq \min\{m,n\}$ $\iff$

$\exists$ minore M di ordine k : $|M| \neq 0$ e:

- $k = \min\{m,n\}$ $\quad \vee$
- $k < \min\{m,n\}$ e tutti gli orlati di M hanno determinante nullo.

Ricordiamo:

Sia $B \in M_n(K)$. Abbiamo visto che $\text{rango}(B) = n \iff |B| \neq 0$.

... ancora una volta senza DIM

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Scelgo $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |M| = 2 \neq 0$. Provo quindi $k = 2$.

  Prendo 3^a riga e 3^a colonna. $M' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |M'| = -1+4+0-0-1-2 = 0$

  Prendo 4^a riga e 3^a colonna. $M'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |M''| = -1+2+0-0-0-2 = -1 \neq 0$. Allora provo $k = 3$.

  Prendo 3^a riga (unica rimasta) e 1^a colonna. $M''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Notiamo che 3^a riga $= 2^a$ riga $- 1^a$ riga. Stesso dicasi per l'eventuale M^{IV}.

  Ma allora $|M'''| = 0 = |M^{IV}|$ $\Rightarrow$ $\text{rango}(A) = k = 3$.

- $\mathbb{R}^3$ $\quad W = \mathcal{L}((1,-2,1))$ $\quad \dim W = 1$

  Posto $M = (-2)$ $\quad |M| = -2 \neq 0$,

  $(x_1, x_2, x_3) \in W \iff \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \iff |M'| = \left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -2 & x_2 \end{pmatrix}\right| = 0$ e $|M''| = \left|\begin{pmatrix} -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}\right| = 0 \iff \begin{cases} x_2 + 2x_1 = 0 \\ -2x_3 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$

- $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ $\quad \dim V = 5$ $\quad W = \mathcal{L}(1+x,\ 1-x+x^3,\ x^2-x^4)$ $\quad B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

  $\Phi_B(1+x) = (1,1,0,0,0)$ $\quad \Phi_B(1-x+x^3) = (1,-1,0,1,0)$ $\quad \Phi_B(x^2-x^4) = (0,0,1,0,-1)$ $\quad U = \Phi_B(W) = \mathcal{L}((1,1,0,0,0),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,0,-1))$.

  Trovo una <u>rappresentazione cartesiana</u> di U, che chiamerò anche <u>rappresentazione cartesiana</u> di $W = \Phi_B^{-1}(U)$ in B.

  $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 \end{pmatrix} = 3 \iff M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \ \wedge\ |M'| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix}\right| = 0 \ \wedge\ |M''| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 \end{pmatrix}\right| = 0 \iff$

  $\iff |M'| = (-1)^6 \cdot 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix}\right| = -x_4 + x_1 + x_2 - x_4 \ \wedge\ |M''| = (-1)^6 \cdot 1 \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix}\right| + (-1)^7(-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\right| = (-1)^6\left(x_5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = -2x_5 - 2x_3.$

  Quindi: $\begin{cases} -2x_4 + x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_5 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -x_5 \end{cases}$.

Matrici associate

Ricordiamo:

$A \in M_{m,n}(K)$ $\quad \tilde{T}_A : (x_1, \dots, x_n) \in K^n \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$ è un'app. lineare

$\operatorname{Im} \tilde{T}_A = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ $\quad \dim \operatorname{Im} \tilde{T}_A = \text{rango}(A)$ $\quad \operatorname{Ker} \tilde{T}_A : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ $\quad \dim \operatorname{Ker} \tilde{T}_A = n - \text{rango}(A)$

V, W campo K $\quad \dim V = n$, $\dim W = m$ $\quad T : V \to W$ app. lineare

$B = (e_1, \dots, e_n)$ $\quad B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ $\quad T(e_1) \equiv_{B'} (a^1_1, \dots, a^m_1)$, …, $T(e_n) \equiv_{B'} (a^1_n, \dots, a^m_n)$

Teorema. $\forall u \in V$, considero $u \equiv_B (x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u)$ e $T(u) \equiv_{B'} (y_1, \dots, y_m) = \Phi_{B'}(T(u))$

Allora: $\exists!\, A \in M_{m,n}(K)$ tale che: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ rappresentazione di T in B e B'

DEF A si dice matrice associata a T in B e B': $\quad A = M_{BB'}(T)$

DIM $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$ $\quad u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$T(u) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) = x_1(a^1_1 e'_1 + \dots + a^m_1 e'_m) + \dots + x_n(a^1_n e'_1 + \dots + a^m_n e'_m) =$

$= a^1_1 x_1 e'_1 + \dots + a^m_1 x_1 e'_m + \dots + a^1_n x_n e'_1 + \dots + a^m_n x_n e'_m = (a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n) e'_1 + \dots + (a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n) e'_m \implies$

$\implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ← abbiamo dimostrato che tale A esiste, ora manca da dimostrare l'unicità!

Sia $B \in M_{m,n}(K)$: $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots & b^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ b^m_1 & \dots & b^m_n \end{pmatrix}$

$u = e_1 \equiv_B (1, 0, \dots, 0)$ $\quad T(e_1) \equiv_{B'} (a^1_1, \dots, a^m_1)$

$\vdots$ $\quad \vdots$

$e_n \equiv_B (0, \dots, 0, 1)$ $\quad T(e_n) \equiv_{B'} (a^1_n, \dots, a^m_n)$

$\underline{b}_1 = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{a}_1$, …, $\underline{b}_n = B\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{a}_n$ $\quad \implies B = A$. ▨

Esempio:

$T : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto a + b + (a - b)x + (2a + b)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ app lineare

$B = ((1,1), (1,-1))$ $\quad \Phi_B : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right) \in \mathbb{R}^2$ ← $(a, b) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha - \beta \end{cases} \implies \begin{cases} a = b + \beta + \beta \implies \beta = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ \alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$

$B' = (1, x, x^2)$ $\quad \Phi_{B'} : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\le 2} \longmapsto (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ ← base canonica, prendo i coefficienti

$T((1,1)) = 2 + 3x^2 \equiv_{B'} (2, 0, 3)$

$T((1,-1)) = 2x + x^2 \equiv_{B'} (0, 2, 1)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ← Componenti delle immagini dei vettori di B in B'

OSS

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & W \arrow[d, "\Phi_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "\tilde{T}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n) = u$ $\quad u \equiv_B (x_1, \dots, x_n)$

$T(\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = T(u)$ $\quad \Phi_{B'} \circ T \circ \Phi_B^{-1} = \tilde{T}_A$

$\Phi_{B'}(T(\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n))) = \Phi_{B'}(T(u)) = (y_1, \dots, y_m) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Geometria

Lez. 15 - 03/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Matrici di passaggio

Continuiamo il discorso sulle matrici associate introdotto nella pagina precedente, usando le stesse notazioni.

Possiamo distinguere due casi:

(1) $id_V : \underset{B}{V} \longrightarrow \underset{\bar{B}}{V}$ $\qquad P = M_{B\bar{B}}(id_V) \in Gl_n(K)$ matrice di passaggio da B a $\bar{B}$.

$u \in V \qquad (x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u) \qquad (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \Phi_{\bar{B}}(u) = \Phi_{\bar{B}}(id_V(u))$.

(2) $T : V \longrightarrow V$, $B = \bar{B}$ $\quad$ endomorfismo $\qquad A = M_B(T)$

Esempio:

(1) $V = M_2(\mathbb{R}) \quad id_V : V \to V$

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \Phi_B : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \longmapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$\bar{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \Phi_{\bar{B}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \longmapsto (b, a, c-a, d-b-c+a) \in \mathbb{R}^4$

$\Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 1, -1, 1) \qquad \Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 1, -1)$

$\Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0, 0, -1) \qquad \Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 0, 1)$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \exists P^{-1}$

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{(P^{-1}P)}_{= I_n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = M_{\bar{B}B}(id_V)$$

OSS

- $T : \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W}$ isomorfismo
  $A = M_{BB'}(T) \quad \exists A^{-1} \quad A^{-1} = M_{B'B}(T^{-1})$
- $T : \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W} \qquad T' : \underset{B'}{W} \to \underset{B''}{U}$
  $A = M_{BB'}(T) \qquad A' = M_{B'B''}(T') \qquad A'A = M_{BB''}(T' \circ T)$

Esempio:

(2) $T : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (a-b, a+b) \in \mathbb{R}^2$

$B = ((1,1), (1,0)) \qquad \Phi_B : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (b, a-b) \in \mathbb{R}^2$

$(a, b) = x_1(1,1) + x_2(1,0) \Rightarrow (a, b) = (x_1 + x_2, x_1) \Rightarrow \begin{cases} a = x_1 + x_2 \\ b = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = a - b \end{cases}$

$T((1,1)) = (0, 2) \equiv_B (2, -2) \qquad T((1,0)) = (1,1) \equiv_B (1, 0) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$u \in \mathbb{R}^2, \ u \equiv_B (x_1, x_2) \qquad T(u) \equiv_B (y_1, y_2) \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$u \in V, \quad u \equiv_B (x_1, \dots, x_n) \qquad\qquad u \equiv_{\bar{B}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$T(u) \equiv_B (y_1, \dots, y_n) \qquad\qquad T(u) \equiv_{\bar{B}} (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \bar{A}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \quad \to$

si ricorda che P è la matrice di passaggio

$\bar{A}P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow (P^{-1}\bar{A}P)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

OSS

$T : V_B \longrightarrow V_{\bar{B}}$ endom. $\quad \dim V = n$

$A = M_B(T) \qquad \bar{A} = M_{\bar{B}}(T) \Rightarrow \exists P \in Gl_n(K) : A = P^{-1}\bar{A}P$.

Vale anche il viceversa: $Q = P^{-1} \Rightarrow \bar{A} = Q^{-1}AQ$.

Matrici simili

DEF $A, \bar{A} \in M_n(K)$

A e $\bar{A}$ sono simili $:\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(K): A = P^{-1}\bar{A}P$

OSS Per definizione, A è simile a sè, infatti è sufficiente considerare $P = I_n$.

Esempio:

$T: (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2a+b, 2b)$ $\quad B = ((1,0),(0,1))$ $\quad \bar{B} = ((1,1),(-1,1))$

$T((1,0)) = (2,0)$ $\quad T((0,1)) = (1,2)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$T((1,1)) = (3,2) \equiv_{\bar{B}} (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ $\quad T((-1,1)) = (-1,2) \equiv_{\bar{B}} (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$Q = M_{\bar{B}B}(id_{\mathbb{R}^2})$ $\quad (1,1) \equiv_B (1,1)$ $\quad (-1,1) \equiv_B (-1,1)$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = Q^{-1} = \frac{Q^*}{|Q|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A = P^{-1}\bar{A}P \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

Autovalori, Autovettori e Autospazi

DEF $T: V \to V$ endomorfismo $\forall \lambda \in K$ $\quad U_\lambda = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} \ni \underline{0}$ $\quad T(\underline{0}_V) = \underline{0}_V = \lambda \cdot \underline{0}_V$

$\lambda \in K$ si dice **autovalore** di T se $\{\underline{0}_V\} \subsetneq U_\lambda$ e i vettori **NON** nulli di U_λ si dicono **autovettori** di autovalore λ.

PROP U_λ è sottospazio vettoriale.

DIM $\underline{0}_V \in U_\lambda \Rightarrow U_\lambda \neq \emptyset$ $\quad$ Proviamo che è linearmente chiuso

$u, v \in U_\lambda \overset{\text{def}}{\Rightarrow} T(u) = \lambda u, T(v) = \lambda v \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$ ✓

$\alpha \in K, u \in U_\lambda \overset{\text{def}}{\Rightarrow} T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha(\lambda u) = (\alpha\lambda)u = (\lambda\alpha)u = \lambda(\alpha u)$ ▨

DEF Se $\lambda \in K$ è autovalore, U_λ si dice **autospazio** di autovalore λ.

PROP λ e λ' autovalori di T $\quad \lambda \neq \lambda'$

Allora $U_\lambda + U_{\lambda'} = U_\lambda \oplus U_{\lambda'}$.

DIM $u \in U_\lambda \cap U_{\lambda'} \Rightarrow u \in U_\lambda \wedge u \in U_{\lambda'} \Rightarrow \lambda u = T(u) = \lambda' u \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda u - \lambda' u = \underline{0} \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \lambda')}_{\neq 0 \text{ per ipotesi}} u = \underline{0} \Rightarrow u = \underline{0}$, cioè la somma è diretta ▨

Esempio:

$T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad$ $1 \mapsto 1+x$, $\; x \mapsto 1-x$, $\; x^2 \mapsto -3x^2$ $\quad x^2 \in U_{-3}$

Caratterizzazione degli autovalori

PROP $T: V \to V$ $\quad B$ base di V $\quad A = M_B(T)$

(i) $\forall \lambda \in K$, λ è autovalore di $T \iff |A - \lambda I_n| = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in K$, $\Phi_B(U_\lambda)$ è l'insieme delle soluzioni di $(A - \lambda I_n)X = 0$.

DEF Se λ è <u>autovalore</u>, i vettori di $\Phi_B(U_\lambda)$ si dicono componenti <u>dei suoi autovettori</u>.

DIM

(i) $u \in V =_B (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \Phi_B(T(u)) = \Phi_B(\lambda u) = \lambda \Phi_B(u) = \lambda(x_1, \dots, x_n)$

$\lambda \in K$ autovalore di $T \overset{\text{def}}{\iff} \exists u \in U_\lambda \setminus \{\underline{0}_V\} \iff \exists u \in V \setminus \{\underline{0}_V\} : T(u) = \lambda u \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff$

$\iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, cioè $(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \overset{\text{Teorema di Cramer}}{\iff} |A - \lambda I_n| = 0$

$\exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} : (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Insieme delle soluzioni $S \neq \{\underline{0}\} \iff \text{rango}(A - \lambda I_n) < n \iff |A - \lambda I_n| = 0$

(ii) No dim

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ 3 è autovalore ed è unico.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ 2, −1, 7 sono autovalori e ciascuno genera un'autospazio di dimensione 1.

- $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad B = (1, x, x^2)$ $\quad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$T(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 = 1 + 2x^2$ $\quad T(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 = x - x^2$ $\quad T(x^2) = -1 \cdot 1 + (-1)x + (-1)x^2 = -1 - x - x^2$

$\forall \lambda \in K$, λ è autovalore di $T \iff \underbrace{|A - \lambda I_3|}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$ equazione caratteristica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - 1\right] = (1-\lambda)(\cancel{-1} + \lambda^2 + \cancel{1}) = \lambda^2(1-\lambda)$$

$\underbrace{\lambda^2(1-\lambda)}_{\text{polinomio caratteristico di } T} = 0 \iff \lambda = 0 \lor \lambda = 1$

$U_0 : (A - 0 I_3)X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = x_2 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$

$U_1 : (A - 1 I_3)X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-x_3 = 0} \\ -x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\dim U_1 = 3 - 2 = 1$

$\Phi_B(U_0) = \mathcal{L}((1, 1, 1)) \Rightarrow U_0 = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$

$\Phi_B(U_1) = \mathcal{L}((1, 2, 0)) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(1 + 2x)$

$\underset{1}{U_0} + \underset{1}{U_1} = \underset{2}{U_0 \oplus U_1} = \mathcal{L}(1 + x + x^2, 1 + 2x) \subsetneq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

Molteplicità e radici

DEF K $\quad p(x) \in K[x]$

$b \in K$ si dice radice (o soluzione) di $p(x) \iff p(b) = 0$. Sia b radice di $p(x)$. Allora, la molteplicità algebrica di b è il massimo numero intero h: $\exists q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)^h$.

Cioè, quante volte $(x-b)$ divide $p(x)$.

PROP $T: V \to V$, $\bar{\lambda}$ autovalore di T.

Allora $m_a(\bar{\lambda}) \geq m_g(\bar{\lambda}) = \dim U_{\bar{\lambda}} \geq 1$

DIM NO!

Sono sfinitoooooooo... 01:05, 09/05/2023

PROP Con le stesse notazioni di sempre:

$A = M_B(T) \wedge \bar{A} = M_{\bar{B}}(T) \implies |A - \lambda I_n| = |\bar{A} - \lambda I_n|$

DIM $A = P^{-1}\bar{A}P$

$|A - \lambda I_n| = |P^{-1}\bar{A}P - \lambda P^{-1} I_n P| = |P^{-1}(\bar{A} - \lambda I_n)P| \overset{\text{Teorema di Binet}}{=} \underbrace{|P^{-1}|}_{\in K}\underbrace{|\bar{A} - \lambda I_n|}_{\in K}\underbrace{|P|}_{\in K} = \underbrace{|P^{-1}|}_{=|P|^{-1}}|P||\bar{A} - \lambda I_n| = |\bar{A} - \lambda I_n|$. ▨

できました!

おやすみ zzz

Geometria

Lez. 16 - 05/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Ancora autovalori, App. diagonalizzabili

PROP $T: V \to V$ endomorfismo

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T a due a due distinti.

$v_1 \in U_{\lambda_1} \setminus \{\underline{0}\}, \dots, v_t \in U_{\lambda_t} \setminus \{\underline{0}\} \implies \{v_1, \dots, v_t\}$ lin. indipendente.

DIM Per induzione

$t=1 \qquad v_1 \neq \underline{0} \implies \{v_1\}$ lin. indip.

$[t>1,\ t-1 \implies t]$ Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K: \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = \underline{0}$.

(1) $\underline{0} = T(\underline{0}) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(v_{t-1}) + \alpha_t T(v_t) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t$

(2) $\lambda_t (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \lambda_t \underline{0} = \underline{0}$

Da $\underset{\text{sottraggo}}{(2)-(1)}$ ottengo: $\alpha_1(\lambda_t - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_{t-1}(\lambda_t - \lambda_{t-1}) v_{t-1} = \underline{0} \overset{\text{per hp di induzione}}{\implies} \begin{cases} \alpha_1 \overbrace{(\lambda_t - \lambda_1)}^{\neq 0} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} \underbrace{(\lambda_t - \lambda_{t-1})}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} = 0 \end{cases}$

Ma allora $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{t-1} + \alpha_t v_t = \underline{0} \implies \alpha_t \overset{\neq \underline{0}}{v_t} = \underline{0} \implies \alpha_t = 0$.

Corollario. $T: V \to V$ endomorfismo. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ autovalori a due a due distinti. Allora, $U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_t} = U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t}$.

DIM Tesi: $\forall i \in \{1, \dots, t\},\ U_{\lambda_i} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{i-1}} + U_{\lambda_{i+1}} + \dots + U_{\lambda_t}) = \underline{0}$

Poniamo $i=1$. Gli altri casi sono del tutto analoghi.

$u \in U_{\lambda_1} \cap (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t}) \implies u \in U_{\lambda_1} \wedge u \in U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t} \implies u \in U_{\lambda_1} \wedge \exists u_2 \in U_{\lambda_2}, \dots, u_t \in U_{\lambda_t}: u = u_2 + \dots + u_t \implies$

$\implies \underset{1}{u} \underset{-1}{-u_2} - \dots \underset{-1}{-u_t} = \underline{0} \implies u = \underline{0},\ u_2 = \dots = u_t = \underline{0}$ dalla PROP precedente

(altrimenti, $u, u_2, \dots, u_t$ dovrebbero essere lin. indip., impossibile per la presenza di coefficienti NON nulli).

DEF $T: V \to V$ endomorfismo

T si dice diagonalizzabile $:\iff \exists \bar{B}$ base di V : $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T)$ è diagonale $\qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{a}_n \end{pmatrix}$

Cioè, se una qualsiasi sua matrice associata è simile a una matrice diagonale.

DEF $A \in M_n(K)$

A è diagonalizzabile $:\iff A$ è simile a una matrice diagonale, ossia: $\exists P \in GL_n(K): A = P^{-1} \bar{A} P$,

oppure, $Q = P^{-1}$ e $Q^{-1} A Q = \bar{A}$ (dove $\bar{A}$ è una matrice diagonale).

Q è detta matrice che diagonalizza A.

Quindi: T è diagonalizzabile $:\iff T$ ha una matrice associata diagonale $\iff$

$\iff$ ogni sua matrice associata è diagonalizzabile.

Teorema Spettrale brrr..



Teorema spettrale.

$T: V \to V$ endomorfismo $\dim V = n$ K campo, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V, $A = M_B(T)$.

Sono del tutto equivalenti tra loro:

(a) A è diagonalizzabile

(b) $\exists B'$ base di V costituita da autovettori (base spettrale)

(c) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, $\sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n$

(d) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

(e) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, (i) $\sum_{i=1}^{t} ma(\lambda_i) = n$ $\wedge$ (ii) $\forall i \in \{1, \dots, t\}$, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

DIM

(a)<=>(b) T è diagon. $\iff \exists$ base spettrale di V

"=>" Per ipotesi $\exists \bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base di V tale che $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \bar{a}'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}^n_n \end{pmatrix}$ diagonale.

Quindi $T(\bar{e}_1) = \bar{a}'_1 \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + \dots + 0 \bar{e}_n = \bar{a}'_1 \bar{e}_1 \Rightarrow \bar{e}_1$ è autovettore di autovalore $\bar{a}'_1$.

$\vdots$

$T(\bar{e}_n) = 0 \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + \dots + \bar{a}^n_n \bar{e}_n = \bar{a}^n_n \bar{e}_n \Rightarrow \bar{e}_n$ è autovettore di autovalore $\bar{a}^n_n$.

Ma allora $\bar{B}$ è base spettrale.

"<=" Se $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ è base spettrale, allora $T(\bar{e}_1) = \lambda_{J_1} \bar{e}_1, \dots, T(\bar{e}_n) = \lambda_{J_n} \bar{e}_n$, con $\lambda_{J_1}, \dots, \lambda_{J_n} \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$

e quindi $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_{J_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{J_n} \end{pmatrix}$ è diagonale ✓

(b)=>(c) $\exists \bar{B}$ base spettrale $\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n$

Riordiniamo i vettori di $\bar{B}$ in modo che quelli relativi allo stesso autovalore siano vicini:

$\bar{B} = (\underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_2}}_{\lambda_2}, \dots, \underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_t}}_{\lambda_t})$ $\quad r_1 + r_2 + \dots + r_t = n$

$U_{\lambda_1} \Downarrow$ $\dim U_{\lambda_1} \geq r_1, \dots\dots, \dim U_{\lambda_t} \geq r_t$ $\Downarrow U_{\lambda_t}$

la somma degli autospazi è diretta

$\Rightarrow n \geq \dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_t} \geq r_1 + \dots + r_t = n \Rightarrow n = \underbrace{\dim U_{\lambda_1}}_{mg(\lambda_1)} + \dots + \underbrace{\dim U_{\lambda_t}}_{mg(\lambda_t)}$. ✓

(c)=>(d) $\sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n \Rightarrow U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

Sappiamo che $\dim U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \dim U_{\lambda_t} = \dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_t} = n$. Ma allora è immediato $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$. ✓

(d)=>(b) Per ipotesi $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

Siano B_{λ_1} base di $U_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_t}$ base di U_{λ_t}, allora $\bar{B} = B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_t}$ è base di V ed è costituita da autovettori. ▨

Teorema Spettrale : tipici esercizi

Esempio :

- $T: V \to V$, campo $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$

  $A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\underline{A \text{ è diagonalizzabile}}$?

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(-\lambda) \overset{\text{Lo pongo uguale a 0}}{=} 0 \iff \underset{ma(1)=2}{\lambda = 1} \vee \underset{ma(0)=1}{\lambda = 0}$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ $S = \{(-x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((-1,-1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(\underbrace{-e_1 - e_2 + e_3}_{B_0})$

  Quindi $\dim U_0 = 1$. **N.B.** In realtà, è esattamente il risultato che ci aspettavamo, in quanto vale SEMPRE: $ma(\lambda) \geq \overset{\dim U_\lambda}{mg(\lambda)} \geq 1$.

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \{x_3 = 0$ $S = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(\underbrace{e_1, e_2}_{B_1})$.

  Come ci aspettiamo: $U_0 + U_1 = U_0 \oplus U_1 = \mathcal{L}(e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ $B_0 \cup B_1$ è base di $U_0 \oplus U_1$.

  $\dim(U_0 \oplus \overset{\subseteq V}{U_1}) = 3 \Rightarrow U_0 \oplus U_1 = V$.

  Allora $\bar{B} = (e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ è una base spettrale e

  $Q = M_{\bar{B}B}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice che diagonalizza $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A}$, oppure

  $\bar{\bar{B}} = (-e_1 - e_2 + e_3, e_1, e_2)$ e $\bar{\bar{Q}} = M_{\bar{\bar{B}}B}(id_V) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bar{\bar{Q}}^{-1}A\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}}$, T è diagonalizzabile.

- $T: V \to V$ $\dim V = 3$ $\mathbb{R}$ $B = (e_1, e_2, e_3)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0 \iff \underset{ma(0)=2 \Rightarrow 2 \geq \dim U_0 \geq 1}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1}{\lambda = 1} \Rightarrow \dim U_1 = 1$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

  $S = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,0)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(e_2) \Rightarrow \dim U_0 = 1 \neq 2$, allora T non diagonalizzabile.

  Infatti, anche senza calcolare U_1, so che $\dim U_0 \oplus \dim U_1 = 2 \neq 3 = \dim V \Rightarrow U_0 \oplus U_1 \subsetneq V$.

- $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $B = (1, x, x^2)$ $A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)(-1)^2 \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| + (-1)(-1)^4 \left|\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1] + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 \cancel{-1} \cancel{-1} \cancel{+2}] = (1-\lambda)\lambda^2$.

  $\Rightarrow |A - \lambda I_3| = 0 \iff \underset{ma(0)=2}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1}{\lambda = 1}$.

  $U_0 = \operatorname{Ker} T$: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$.

  $\dim U_0 = 1 \Rightarrow T$ non è diagonalizzabile (inoltre, dato che $U_0 = \operatorname{Ker} T$, T non è neanche iniettiva).

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$ $S = \{(x_1, 2x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,2,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + 2x)$.

  $\dim U_0 \oplus U_1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow$ Non esiste una base spettrale

Ruffini

Teorema. Sia $p(x) \in K[x]$ e sia $b \in K$.
Allora, b è **radice** di $p(x)$ $:\iff \exists\, q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)$.

Esempio :

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ $\qquad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0 \iff ?$$

Applico Ruffini e noto che se $\lambda = 2$, allora $-2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 32 = 0$, cioè 2 è radice del mio polinomio.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -36 & 32 \\ 2 & & -2 & 20 & -32 \\ \hline & -1 & 10 & -16 & // \end{array} \implies -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = (-\lambda^2 + 10\lambda - 16)(\lambda - 2) = (\lambda - 8)(\lambda - 2)^2 = 0 \iff \underset{ma(8)=1}{\lambda = 8} \vee \underset{ma(2)=2}{\lambda = 2}.$$

$\dim U_8 = 1$

rango $= 1$ $\implies \dim S = 3-1 = 2$

$$U_2 : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \implies \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies \{ x_3 = -x_1 - x_2$$

B base canonica $\implies \Phi_B$ è l'identità

$$S = \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)) = \Phi_B(U_2) \implies U_2 = \Phi_B^{-1}(S) \overset{\downarrow}{=} \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sappiamo già che $\dim U_2 + \dim U_8 = \dim U_2 \oplus \dim U_8 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, quindi T è diagonalizzabile, ma per scrupolo calcoliamo U_8.

$$U_8 : \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{e^1 \leftrightarrow e^2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[e^3 \to e^3 - e^1]{e^2 \to e^2 + 2e^1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{e^1 \to \frac{1}{2} e^1 \\ e^2 \to -\frac{1}{6} e^2}]{e^3 \to e^3 + e^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \implies \{ x_1 = x_3 = x_2$$

$$\implies S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_8) = U_8 \text{ perché } \Phi_B \text{ biettiva.}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

provare per credere! ☺

Geometria

Lez. 17 - 10/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Prodotto scalare

DEF V $\mathbb{R}$ $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{matrix} V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle \end{matrix}$

Si dice **prodotto scalare** su V :<=>

- è **simmetrico** : $\forall u,v \in V,\ \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
- è **bilineare** : $\forall u,v,w \in V,\ \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ e $\forall u,v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$
- è **definito positivo**: $\forall u \in V,\ \langle u,u\rangle \overset{=0 \iff u=\underline{0}}{\geq 0}$

In tal caso, la coppia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ viene chiamata **spazio vettoriale euclideo**.

OSS $\forall u \in V,\ \langle \underline{0},u\rangle = 0$. Infatti: $\langle \underline{0},u\rangle = \langle 0\cdot\underline{0},u\rangle = 0\langle \underline{0},u\rangle = 0$.

Ecco alcuni esempi di spazi vettoriali euclidei:

(a) $V = \mathbb{R}^n$ $\quad\langle\cdot,\cdot\rangle : ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longmapsto a_1b_1+\dots+a_nb_n \in \mathbb{R}$ ← Vi ricorda nulla? Prodotto righe per colonne, pag. 55

(b) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad\langle\cdot,\cdot\rangle : ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longmapsto 2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2 \in \mathbb{R}$

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$ $\quad\langle\cdot,\cdot\rangle : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R}) \longmapsto 3aa'+2bb'+cc'+dd' \in \mathbb{R}$

(d) $V = \mathbb{V}$ vettori liberi $\quad\langle\cdot,\cdot\rangle : (u,v) \in \mathbb{V}\times\mathbb{V} \longmapsto |u|\cdot|v|\cdot\cos\hat{uv} \in \mathbb{R}$

DEF $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sp. vett. euclideo

$\forall u \in V$, definiamo come **lunghezza** o **norma** : $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

OSS Notiamo che, anche così definita, funziona per i vettori liberi. Infatti:
$\forall u \in \mathbb{V},\ \|u\| = \sqrt{|u|\cdot|u|\cdot\cos\hat{uu}} = \cancel{\sqrt{|u|^2}} = |u|$ ✓

Inoltre, $\forall u \in V$ (vale per qualsiasi sp. euclideo), $\forall\lambda\in\mathbb{R}$: $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle\lambda u,\lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle u,u\rangle} = |\lambda|\,\|u\|$.

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\quad u = (-2,1) \qquad v = (2,-3)$

$\|u\|_{(a)} = \sqrt{(-2,1)(-2,1)} = \sqrt{5} \qquad \|v\|_{(a)} = \sqrt{13}$

$\|u\|_{(b)} = \sqrt{2\cdot 4-2-2+1} = \sqrt{5} \qquad \|v\|_{(b)} = \sqrt{5}$

Schwarz e Pitagora

Disuguaglianza di Schwarz.

$$\boxed{\forall u,v \in V, \quad |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.}$$

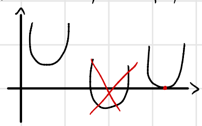
DIM Se $u=\underline{0}$ v $v=\underline{0}$, la proposizione è banalmente vera, $0\leq 0$. ✓

Allora suppongo $u,v\neq \underline{0}$.

$\beta\in\mathbb{R}$, $0\leq \langle u+\beta v, u+\beta v\rangle = \langle u+\beta v, u\rangle + \langle u+\beta v, \beta v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle \beta v, u\rangle + \langle u, \beta v\rangle + \langle \beta v, \beta v\rangle =$

$= \|u\|^2 + 2\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\|v\|^2 \geq 0$

$$\frac{-2\langle u,v\rangle \pm \sqrt{\left(4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2\right)^{\leq 0}}}{2\|v\|^2}$$



$\Rightarrow \langle u,v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.$ ▨

Notiamo che, per quanto dimostrato: $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$, cioè $-1 \leq \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$

DEF Sia $\cos: \varphi\in[0,\pi] \longmapsto \cos\varphi \in [-1,1]$.

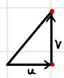
Allora $\exists!\, \varphi\in[0,\pi]: \cos\varphi = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$. Definiamo φ come angolo.

OSS Come per la lunghezza: $\forall u,v\in V$ $\cos\varphi = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{\cancel{|u|}\cancel{|v|}\cos\hat{uv}}{\cancel{|u|}\cancel{|v|}}$.

DEF $\forall u,v\in V$, u e v sono ortogonali $:\Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$. Si denota come $u\perp v$.

Teorema di Pitagora.

$$\boxed{\forall u,v\in V, \quad u\perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.}$$



DIM $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$.

Ma allora basta osservare che: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$, cioè se $u\perp v$ per definizione. ▨

Basi ortonormali

PROP Siano $v_1, \dots, v_t$ vettori non nulli di V a due a due ortogonali, ossia $\forall i,j \in \{1,\dots,t\}$, $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Allora, $v_1,\dots,v_t$ sono lin. indipendenti.

DIM Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t = \underline{0}$ Th: $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0$.

$$0 = \langle v_1, \underline{0} \rangle = \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t \rangle = \alpha_1 \overset{\neq 0}{\langle v_1, v_1 \rangle} + \overset{0}{\dots} + \alpha_t \overset{0}{\langle v_1, v_t \rangle} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Reitero lo stesso ragionamento per i rimanenti vettori ed ottengo: $\alpha_2 = \dots = \alpha_t = 0$, cioè la tesi. $\blacksquare$

DEF Sia $u \in V$. Se $\|u\| = 1$, allora u si dice **versore**. Sia $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base di V.
B si dice **ortogonale** se i suoi vettori sono <u>a due a due ortogonali</u>.
B si dice **ortonormale** se è <u>ortogonale</u> e i suoi vettori sono <u>versori</u>.

OSS $\boxed{\forall v \in V: v \neq \underline{0} \wedge \|v\| \neq 1, \quad \text{versore } \hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v.}$

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\langle \cdot , \cdot \rangle$ prodotto scalare numerico

$B = ((1,1),(-1,1))$ $(1,1)\cdot(-1,1) = -1+1 = 0$.   <- base ortogonale

$\|(1,1)\| = \sqrt{2} = \|(-1,1)\|$ $B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ <- base ortonormale -> $B = ((1,0),(0,1))$.

PROP $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ spazio euclideo $K = \mathbb{R}$ $B = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormale

(1) $\forall u \in V$, sia $\Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$. Allora, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $x_i = \langle u, e_i \rangle$.

(2) $\forall u,v \in V$, siano $(x_1,\dots,x_n) = \Phi_B(u)$ e $(y_1,\dots,y_n) = \Phi_B(v)$. Allora, $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

DIM (1) $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$$\langle u, e_1 \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_1 \rangle = x_1 \overset{1}{\langle e_1, e_1 \rangle} + \overset{0}{\dots} + x_n \overset{0}{\langle e_n, e_1 \rangle} = x_1 \overset{1}{\|e_1\|^2} = x_1.$$

Processo identico per i casi $i \in \{2,\dots,n\}$. ✓

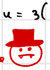
(2) Per semplicità, imponiamo $n=2$. Quindi: $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$.

$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 \rangle = \langle x_1 e_1, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, y_2 e_2 \rangle + \langle x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \overset{\|e_1\|^2 = 1}{\langle e_1, e_1 \rangle} + x_1 y_2 \overset{0}{\langle e_1, e_2 \rangle} + x_2 y_1 \overset{0}{\langle e_2, e_1 \rangle} + x_2 y_2 \overset{\|e_2\|^2 = 1}{\langle e_2, e_2 \rangle} = x_1 y_1 + x_2 y_2. \quad \blacksquare$$

Esempio: (da quello precedente)

$B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ Siano $u \equiv_{B'} (3,-5)$, cioè $u = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v \equiv_{B'} (1,2)$, cioè $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

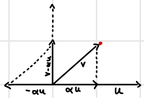
Allora $\langle u, v \rangle = 3 - 10 = -7$.   Provare per credere 

Gram-Schmidt

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $\dim V = n$ $\quad B = (u_1, \dots, u_n)$ base di V.

Il metodo di Gram-Schmidt è un'algoritmo che trasforma B in una base ortogonale.

Vediamo il caso $n = 2$.



αu proiezione ortogonale di v su u

$v + (-\alpha u)$ è ortogonale a u.

Impongo $\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$.

$$0 = \langle v - \alpha u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle \implies \langle v, u \rangle = \alpha \overset{\neq 0}{\langle u, u \rangle} \implies \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}.$$

Allora il vettore che sto cercando è: $v - \alpha u = v - \dfrac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

Esempio:

$\langle \cdot,\cdot \rangle : ((\overset{u}{a_1, a_2}), (\overset{v}{b_1, b_2})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R}$

$B = ((1,0),(0,1))$ $\qquad \langle (1,0),(0,1) \rangle = 2\cdot 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0.$

$v' = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u = (0,1) - \frac{1}{2}(1,0) = (-\frac{1}{2}, 1).$ $\quad$ Allora, $B' = (\overset{u}{(1,0)}, \overset{v'}{(-\frac{1}{2}, 1)})$ è base ortogonale.

$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$ $\qquad \|v\| = \sqrt{\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+1}} = \sqrt{1/2}$. Quindi, $B'' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, 1))$ è ortonormale.

L'algoritmo è il seguente: $\quad B = (u_1, \dots, u_n)$ base di $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

- $v_1 = u_1$
- $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$
- $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

  $\vdots$
- $v_n = u_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$

$B' = (v_1, \dots, v_n)$ ortogonale.

$B'' = (\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \dots, \frac{1}{\|v_n\|} v_n)$ ortonormale.

Esempio:

$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare numerico

$B = (\overset{u_1}{(1,1,0)}, \overset{u_2}{(1,0,1)}, \overset{u_3}{(0,0,1)})$ base di $\mathbb{R}^3$

$v_1 = u_1 = (1,1,0).$ $\quad \|v_1\|^2 = 2 \implies \|v_1\| = \sqrt{2}.$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$ $\qquad \|v_2\|^2 = \frac{3}{2} \implies \|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (0,0,1) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$ $\qquad \|v_3\|^2 = \frac{1}{3} \implies \|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{3}}.$

$B' = ((1,1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ è ortogonale.

... e quella ortonormale? A voi i calcoli!

Geometria

Lez. 18 - 12/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Prodotto vettoriale

DEF $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $K = \mathbb{R}$ $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad \dim V = n$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ e $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ basi ortonormali di V.

$A = M_{B\bar{B}}(id_V) \in M_n(\mathbb{R})$ ← matrice di passaggio pag. 70

componenti di e_j in $\bar{B}$

$M_{B\bar{B}}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$.

A è ortogonale $:\iff A^{-1} = {}^tA$

Osserviamo anche che A è ortogonale $\Rightarrow |A| = 1$, ma non il viceversa. $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1$ ma non è ortogonale

DEF $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\boxed{\dim V = 3}$ B base di V

(V, B) spazio euclideo orientato

B' base di V si dice concorde con B se $|M_{BB'}(id_V)| > 0$.

Siano poi $u, v \in V$.

Il prodotto vettoriale $u \times v$ è uguale a 0 se $\{u, v\}$ è lin. dip, altrimenti è l'unico vettore tale che:

$(u, v, u \times v)$ è concorde con B. $\quad |u \times v| = \|u\| \|v\| \sin \widehat{uv}$ $\quad u \times v$ è ortogonale a u e a v $\quad \sin \widehat{uv} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$

PROP $u, v \in V$, spazio euclideo di dimensione 3.

$\{u, v\}$ lin. indip., $\bar{B}$ ortonormale e $u \equiv_B (x_1, x_2, x_3)$, $v \equiv_B (y_1, y_2, y_3)$.

Allora $u \times v \equiv_B \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

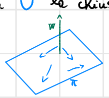
N.B. $\boxed{\text{Il prodotto vettoriale è anti-commutativo: } u \times v = - v \times u.}$

DEF $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $K = \mathbb{R}$ $\dim V = n$ $\quad S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ e $U = \mathcal{L}(S)$.

Il complemento ortogonale di U è: ${}^{\perp}U := \{ v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U \}$.

Esempio:

Sia U la chiusura lineare di due vettori lin. indip.



Allora, sono ortogonali ad U tutti i vettori proporzionali a w, cioè: ${}^{\perp}U_{\pi} = \mathcal{L}(w)$.

Complemento Ortogonale

PROP $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\dim V = n$ $\quad U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_t) \subseteq V$

(1) ${}^{\perp}U = \{ v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in \{u_1, \dots, u_t\} \}$;

(2) ${}^{\perp}U$ è un sottospazio vettoriale ;

(3) **a)** $U, W \subseteq V$ sottosp. vett. : $U \subseteq W \Rightarrow {}^{\perp}U \supseteq {}^{\perp}W$;

b) ${}^{\perp}({}^{\perp}U) = U$;

(4) $U + {}^{\perp}U = U \oplus {}^{\perp}U = V$, quindi $\dim {}^{\perp}U = n - \dim U$.

DIM (1) "$\subseteq$" banale

"$\supseteq$" $w \in \{ v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in \{u_1, \dots, u_t\} \}$ Th: $\langle w, u \rangle = 0 \ \forall u \in U$

$u \in U \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R} : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow \langle w, u \rangle = \langle w, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \rangle = \alpha_1 \langle w, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{u_1}} \rangle + \dots + \alpha_t \langle w, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{u_t}} \rangle = 0$. $\checkmark$

(2) $w, w' \in {}^{\perp}U$. Proviamo che è stabile risp. $+$ e $\cdot$.

$i \in \{1, \dots, t\}$
$\langle w + w', u_i \rangle = \langle w, u_i \rangle + \langle w', u_i \rangle = 0 + 0 = 0$. $\checkmark$

$\lambda \in \mathbb{R}$
$\langle \lambda w, u_i \rangle = \lambda \langle w, u_i \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$. $\checkmark$

(3) a) $w' \in {}^{\perp}W \Rightarrow \forall w \in W, \langle w', w \rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U, \langle w', u \rangle = 0$, cioè $U \subseteq W \Rightarrow \forall w' \in {}^{\perp}W, \ w' \in {}^{\perp}U$, quindi ${}^{\perp}W \subseteq {}^{\perp}U$. $\checkmark$

b) Sappiamo che, per definizione, $u \in U \Rightarrow \forall w \in {}^{\perp}U, \langle u, w \rangle = 0$; $\quad u \in {}^{\perp}({}^{\perp}U) \Rightarrow \forall w \in {}^{\perp}U, \langle u, w \rangle = 0$. <~ si noti che così U e ${}^{\perp}({}^{\perp}U)$ sono definiti nello stesso modo

Inoltre da (2) sappiamo che ${}^{\perp}({}^{\perp}U)$ è sottosp. vett. di V, mentre U lo è per ipotesi. Ma allora ${}^{\perp}({}^{\perp}U) = U$ NECESSARIAMENTE. $\checkmark$

(4) Th: $U \cap {}^{\perp}U = \{\underline{0}\}$ $\quad$ basta osservare che: $\forall u \in V, \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = \underline{0}$.

Sia B_U una base ortonormale di U. Completiamo B_U ad una base B di V.

$B_U = \{ v_1, \dots, v_t \}$ $\qquad B = \{ v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n \}$

Rendiamo B una base ortogonale mediante il metodo di Gram-Schmidt:

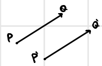
$\bar{B} = \{ v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_n \}$ $\qquad \overset{\text{ortogonali}}{w_{t+1}, \dots, w_n} \in {}^{\perp}U \ \wedge \ \{w_{t+1}, \dots, w_n\}$ è lin. indip. $\Rightarrow \mathcal{L}(w_{t+1}, \dots, w_n) = {}^{\perp}U$. $\blacksquare$

Spazio affine euclideo

DEF Uno spazio affine è una terna costituita da $\mathcal{E}$ insieme, i cui elementi sono detti punti.

$\vec{\mathcal{E}}$ spazio vettoriale

$\pi : (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longmapsto \pi((P,Q)) = \overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}$



π deve soddisfare le seguenti proprietà:

(1) $\forall A \in \mathcal{E},\ \forall u \in \vec{\mathcal{E}},\ \exists!\, X \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AX} = u$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Se $\vec{\mathcal{E}}$ è uno sp. vett. euclideo, allora la terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ è detta spazio (affine) euclideo.

PROP Uno spazio affine euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ gode delle seguenti proprietà:

- $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$
- $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$

DIM "$\Leftarrow$" $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{PP} \overset{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QP} \text{ per hp}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{PP} + \cancel{\overrightarrow{PP}} = \cancel{\overrightarrow{PP}} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \underline{0}$ ✓

"$\Rightarrow$" Per hp. $\overrightarrow{PQ} = \underline{0}$ e, per quanto appena dimostrato, $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$.

Dalla proprietà (1) ottengo che $Q = X = P \Rightarrow P = Q$. ✓

- Th: $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$

$\underline{0} = \overrightarrow{PP} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \Rightarrow \underline{0} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \Rightarrow -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$. ▨

Esempio:

$\vec{\mathcal{E}}$ sp. vettoriale e $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad \pi_{\vec{\mathcal{E}}} : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$ ← è ciò che avviene tipicamente quando disegnamo su $\mathbb{R}^2$

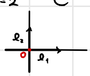
$(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}}, \pi_{\vec{\mathcal{E}}})$ spazio affine euclideo.

Riferimento cartesiano

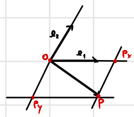
DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ spazio affine (euclideo), con $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$.
Diciamo che $\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}} = n$.
Un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ costituita da un punto $O \in \mathcal{E}$ (origine del riferimento) e da una base ordinata (ortonormale) di $\vec{\mathcal{E}}$.
Le coordinate di un punto $P \in \mathcal{E}$ in $\mathcal{R}$ sono le componenti del vettore $\vec{OP}$ in $\mathcal{B}$: $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP})$.

Esempio:

- $n=2$ $\quad \vec{\mathcal{E}} \quad \mathcal{B} = (e_1, e_2)$



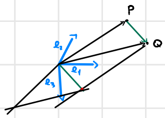
oppure anche



$\underset{\alpha e_1}{\vec{OP_x}} + \underset{\beta e_2}{\vec{OP_y}} = \vec{OP}$
$P \equiv_{\mathcal{R}} (\alpha, \beta)$

$|e_1| = |e_2| \Rightarrow |\vec{OP_x}| = |\alpha| \wedge |\vec{OP_y}| = |\beta|$

- $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3 \quad K = \mathbb{R}$
  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) \qquad O \equiv_{\mathcal{R}} \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OO}) = \Phi_{\mathcal{B}}(\underline{0}) = (0,0,0)$
  $P \equiv_{\mathcal{R}} (3,-2,1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP}) \qquad Q \equiv_{\mathcal{R}} (2,0,4) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})$
  $\Phi_{\mathcal{B}}(\vec{PQ}) = ?$ $\rightsquigarrow$
  $\quad = (2,0,4) - (3,-2,1) = (-1,2,3)$



$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$
$\Rightarrow \Phi(\vec{PQ}) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OQ} - \vec{OP}) = \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OQ}) - \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP})$.

PROP $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ spazio affine euclideo $\qquad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) \quad \dim \mathcal{E} = n$
$P, Q \in \mathcal{E}, \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n) \quad Q \equiv_{\mathcal{R}} (y_1, \dots, y_n)$
Allora $\Phi_{\mathcal{B}}(\vec{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Esempio:
$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3 \quad K = \mathbb{R} \quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$
$X \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, x_3)$
$\vec{TX} \equiv_{\mathcal{B}} (x_1+3, x_2-7, x_3-4) = (3,-2,5) \Rightarrow X \equiv_{\mathcal{R}} (0,5,9)$
Ricordiamo che $\exists! X \in \mathcal{E} : \vec{TX} = u$.
$T \equiv_{\mathcal{R}} (-3,7,4)$ coordinate di T in $\mathcal{R}$ $\qquad u \equiv_{\mathcal{B}} (3,-2,5)$ componenti di u in $\mathcal{B}$

Geometria

Lez. 19 - 19/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazio affine euclideo

Ricordiamo:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \pi : (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longmapsto \pi((P,Q)) = \vec{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}$

(1) $\forall A \in \mathcal{E},\ \forall u \in \vec{\mathcal{E}},\ \exists! X \in \mathcal{E} : \vec{AX} = u$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E},\quad \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

Esempio:

$\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}} \qquad \pi : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$

u vettore $\in \vec{\mathcal{E}}$ $\quad v = A$ punto $\in \mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad$ Qual è l'unico punto X tale che: $\pi(A, X) = u$?

$\pi(A,X) = X - A = X - v \implies u = X - v \implies X = u + v$

$\vec{PQ} = Q - P \qquad \vec{QR} = R - Q \qquad \cancel{Q} - P + R - \cancel{Q} = R - P = \vec{PR}$

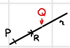
DEF $H \subseteq \mathcal{E}$ si dice sottospazio (affine) euclideo $:\Longleftrightarrow$

$\pi_{|H \times H} : H \times H \to \pi(H \times H) =: \vec{H}$ (giacitura di H) è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$

- $\forall A \in H,\ \forall u \in \vec{H},\ \exists! X \in H : \vec{AX} = u$

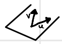
N.B. La prop (2) non è richiesta, ma vale ancora!

Esempio:

- $H = r \setminus \{Q\}$ 

$\vec{PR} \in \vec{H}$, mentre $\vec{PQ} = \alpha \cdot \vec{PR}$. $\quad$ Se $\vec{H}$ è sp. vett., allora $\mathcal{L}(\vec{PQ}) \subseteq \vec{H}$

Inoltre, se due punti $A, B \in H$, allora necessariamente $\vec{AB} \in \vec{H}$.

- Su un piano la situazione è la seguente:  $\quad \vec{H} = \mathcal{L}(u, v)$.
- Pongo $H = \{P\}$, un punto solo. Allora: $(P,P) \in H \times H \longmapsto \underbrace{\vec{PP}}_{\{0\}} \in \underbrace{\vec{H}}_{\{0\}}$.
- Con l'esempio precedente:

$\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}} \qquad \pi : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$

$H \subseteq \mathcal{E} \qquad \vec{H} = \{ w - v \mid w, v \in H \}$ sottosp. vett. $\implies \vec{H} = \{ w - v_0 \mid w \in H \}$ $\quad v_0 \in H$

$w - v = w - v_0 + v_0 - v \qquad H = \{ v_0 + u \mid u \in \vec{H} \} = v_0 + \vec{H}$ traslato, laterale

Varietà lineare

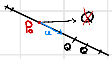
DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad P_0 \in \mathcal{E}$, U sottosp. di $\vec{\mathcal{E}}$

La varietà lineare per P_0 e parallela a U è l'insieme di punti:

$$P_0 + U = (P_0, U) = \{ Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U \}$$

Esempio:

$$P_0 + \mathcal{L}(u) = \{ Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in \mathcal{L}(u) \}$$



PROP

(i) Una varietà lineare è un sottosp. (affine) euclideo

(ii) Un sottospazio euclideo è una varietà lineare

Ci limiteremo a dimostrare la (ii)

DIM $(\vec{H}, H, \pi_{|H \times H})$ $\quad$ Th: $\forall P_0 \in H,\ H = (P_0, \vec{H})$

"$\subseteq$" $\quad Q \in H \Rightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H} \Rightarrow Q \in (P_0, H)$

"$\supseteq$" $\quad Q \in (P_0, H) \Rightarrow \underset{{}^{\shortparallel}u\ ,\ A = P_0}{\overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H}} \quad \underset{Q = X}{\exists! X \in H : \overrightarrow{P_0X} = u} \quad \Rightarrow Q \in H$ $\square$

Teorema. $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = n$ $\quad R = (O, B)$ $\quad H = (P_0, \vec{H})$

Esiste un sistema lineare $\Sigma : AX = \underline{b}$ il cui insieme delle soluzioni coincide con l'insieme dei vettori delle coordinate dei punti di H.

DEF $\Sigma : AX = \underline{b}$ si dice rappresentazione di H in R.

DIM $P_0 \equiv_R (a_1, \dots, a_n)$ $\quad Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H} \Leftrightarrow \underbrace{\Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) \in \underline{\Phi_B(\vec{H}) \subseteq K^n}} \Rightarrow \exists\, AX = 0 : S_0 = \Phi_B(\vec{H})$.

$Q \equiv_R (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ $\quad A\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overset{\underline{b}}{\overset{\shortparallel}{A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}}$

questo è $\Sigma : AX = \underline{b}$. $\square$

È bene sapere che vale anche il viceversa:

$\forall\, \Sigma : AX = \underline{b}$ compatibile, esiste un sottosp. euclideo H tale che le soluzioni di Σ sono tutte e sole le coordinate dei punti di H. $\quad \vec{H} : AX = 0$ $\quad \dim H = \dim \vec{H} = n - \text{rango}(A)$

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R(O, B)$ $\quad P_0 \equiv_R (0, 4, 2)$ $\quad U = \mathcal{L}(u(1,0,3), v(0,1,0)) = \vec{H}$

$H = (P_0, U)$ $\quad \overset{\in \mathcal{E}}{Q} \equiv_R (x_1, x_2, x_3)$

$Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in U \Leftrightarrow (x_1, x_2 - 4, x_3 - 2) \in \Phi_B(\mathcal{L}(u, v)) = \mathcal{L}(\Phi_B(u), \Phi_B(v)) = \mathcal{L}((1,0,3), (0,1,0)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{vmatrix} = x_3 - 2 - 3x_1$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $\qquad$ teorema degli orlati

$H : -3x_1 + x_3 - 2 = 0$

$U = \vec{H} : -3x_1 + x_3 = 0$

Spazi paralleli, rette sghembe

DEF Un sottosp. euclideo di dim $n-1$ si dice iperpiano.

Siano H, H' sottosp. euclidei. H e H' sono paralleli $:\iff \vec{H} \subseteq \vec{H'} \vee \vec{H} \supseteq \vec{H'}$ e si denotano: $H \parallel H'$.

Due rette r e r' si dicono sghembe $:\iff r \cap r' = \emptyset \wedge r \nparallel r'$.

Esempio:

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R(O,B) \quad P_0 \equiv_R (1,0,3) \quad U = \mathcal{L}(u(1,2,3)) \quad r = (P_0, U) \quad U = \vec{r}$

$Q \equiv_R (x_1,x_2,x_3) \in r \iff \overrightarrow{P_0 Q} \in \mathcal{L}(u(1,2,3)) \iff (x_1-1, x_2, x_3-3) \in \mathcal{L}(\Phi_B(u)) = \mathcal{L}((1,2,3)) \iff$

$\iff \text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{1} & x_1-1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3-3 \end{pmatrix} = 1 \overset{\text{teorema degli orlati}}{\iff} \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 3 & x_3-3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{cases} x_2 - 2x_1 + 2 = 0 \\ x_3 \cancel{-3} - 3x_1 \cancel{+3} = 0 \end{cases} \implies \vec{r}: \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

In alternativa: $\exists t \in K: (x_1-1, x_2, x_3-3) = t(1,2,3) \iff \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3+3t \end{cases}$ rapp. parametrica di r

~ Come funziona la rapp. parametrica? ~

Sia $r: \begin{cases} x_1 = -2 + 7t \\ x_2 = 2 - 5t \\ x_3 = 1 + t \end{cases} \quad \dim \mathcal{E} = 3.$

coordinate di P_0 — componenti del vettore che genera $\vec{r}$

Quindi: $P_0 \equiv_R (-2,2,1)$ e $\vec{r} = \mathcal{L}(u(7,-5,1))$. Se avessi $\mathcal{L}(-u)$, allora $r: \begin{cases} x_1 = -2 - 7t \\ x_2 = 2 + 5t \\ x_3 = 1 - t \end{cases}$

- $\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad R = (O,B) \quad P_0 \equiv_R (-7,3) \quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(-1,4)) \quad r = (P_0, \vec{r})$

$Q \equiv_R (x_1,x_2) \in r \iff \overrightarrow{P_0 Q} \in \vec{r} \iff (x_1+7, x_2-3) \in \mathcal{L}((-1,4)) \iff$

$\iff \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & x_1+7 \\ \boxed{4} & x_2-3 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{vmatrix} -1 & x_1+7 \\ 4 & x_2-3 \end{vmatrix} = 0 \implies -x_2+3-4x_1-28=0 \iff 4x_1+x_2+25=0$

$\begin{cases} x_1 = -7-t \\ x_2 = 3+4t \end{cases} \quad r: 4x_1+x_2+25=0 \quad \vec{r}: 4x_1+x_2=0$

retta s: $s \parallel r$ e $R(2,4) \in s$ $\quad s: 4\overset{2}{x_1} + \overset{4}{x_2} + k = 0 \implies k = -12 \quad s: 4x_1 + x_2 - 12 = 0$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O,B) \quad r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare un piano H: $r \parallel H \overset{\vec{r} \subseteq \vec{H}}{\iff}$, $R(1,0,-1) \in H$

$\vec{r}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,1))$

Sia allora $\vec{H} = \mathcal{L}(u(1,2,1), v(1,0,0))$

$Q(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{E} \qquad Q \in H \iff \overrightarrow{RQ} \in \vec{H} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (x_1-1, x_2, x_3+1) = \alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0).$

$\iff \begin{cases} x_1 = 1 + \alpha + \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = -1 + \alpha \end{cases} \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x_2 & x_3+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

Questa è la rappresentazione parametrica di H

Geometria

Lez. 20 - 24/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Lo spazio euclideo pt. 1

- **Rette su un piano**

$\dim \mathcal{E} = 2 \qquad R = (O, B)$

$r: ax + by - c = 0$

$r': a'x + b'y - c' = 0$

$r \cap r': \begin{cases} ax+by-c=0 \\ a'x+b'y-c'=0 \end{cases}$

$C = \left(\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

$r \cap r' \neq \emptyset \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\qquad [1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 2]$

$\vec{r} \cap \vec{r'}: \begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$

Ho tre possibili casi:

(I) $\text{rango}(A) = \text{rango}(C) = 2$

In tal caso, $\emptyset \neq r \cap r' = P(x,y)$, $r \not\parallel r'$ $(r \neq r')$. Le rette sono incidenti in un punto.

(II) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2$

$\Downarrow$

$\vec{r} = \vec{r'}$, quindi $r \parallel r'$ e $r \cap r' = \emptyset$. Le rette sono parallele.

(III) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$

Allora $r = r'$. Si tratta dunque della stessa retta.

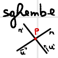
PROP $\dim \mathcal{E} = n$ ← non è necessario che si parli di un piano, rimane valido anche per spazi di 3, 4, 5 ... dimensioni

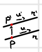
r e r' sghembe $\iff$ r e r' **non** sono complanari.

DIM "$\Rightarrow$" Già noto per quanto appena verificato nei 3 possibili casi.

"$\Leftarrow$" Per assurdo siano r e r' non sghembe.

r e r' sghembe $:\iff r \cap r' = \emptyset \wedge r \not\parallel r'$, da cui: r e r' non sghembe $\iff \overset{(1)}{r \cap r' \neq \emptyset} \vee \overset{(2)}{r \parallel r'}$

(1)  $H = (P, \mathcal{L}(u, u'))$

(2)  $\{u, u'\}$ lin. dip. $\quad H = (P, \mathcal{L}(u, \vec{PP'}))$

In entrambi i soli possibili casi, r e r' giacciono sullo stesso piano, quindi sono complanari. ▨

Esercizio: $\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B) \qquad r: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{r}: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

- Determinare la retta r': $r' \parallel r \wedge P'(2,-1,2) \in r'$.

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(-4,2,3)) \qquad r': \begin{cases} x_1 = 2 - 4t' \\ x_2 = -1 + 2t' \\ x_3 = 2 + 3t' \end{cases}$

- Determinare il piano che contiene r e r'.

$P \in r: \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} x_2 + \frac{1}{2} \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \qquad P(-2,1,2) \in r \qquad H = (P, \mathcal{L}(u(-4,2,3)), \vec{PP'}) \qquad \vec{PP'} = (4,-2,0)$

$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 + 1 & x_3 - 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$ dall'equazione che ne deriva trovo H.

Lo spazio euclideo pt. 2

- ## Rette in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

N.B. Essendo in uno spazio, ho bisogno di due equazioni per designare una retta!

$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

$r': \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{cases}$

$r \cap r': \begin{cases} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases}$

$C = \left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array} \right)$, A = prime tre colonne

$\boxed{2 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 4}$

Stavolta, ho 4 possibili casi:

(I) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $r = r'$

(II) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3$ $\Rightarrow$ $r \cap r' = \emptyset, \quad r \parallel r'$

(III) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $\emptyset \neq r \cap r' = P$

(IV) $3 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 4$ $\Rightarrow$ r e r' sghembe

- ## Piani e rette in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

$H: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$r \cap H: \begin{cases} \cdots \\ \text{---} \\ \cdots \end{cases}$

$C = \left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} \right)$, A = prime tre colonne

$\boxed{2 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 3}$

Sono nuovamente 3 i possibili casi:

(I) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $r \subseteq H$, r giace sul piano

(II) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3$ $\Rightarrow$ $r \cap H = \emptyset, \; \vec{r} \subseteq \vec{H}$ (quindi $r \parallel H$)

(III) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $\emptyset \neq r \cap H = P$

- ## Piani in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

$H: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$H': \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$

$H \cap H': \begin{cases} \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases}$

$C = \left(\begin{array}{ccc:c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array} \right)$, A = prime tre colonne

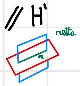
$\boxed{1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 2}$

Ancora una volta, 3 possibili casi:

(I) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $H = H'$

(II) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2$ $\Rightarrow$ $H \cap H' = \emptyset, \quad H \parallel H'$

(III) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$ $\Rightarrow$ $H \cap H' =$ retta



visivamente, è una cosa del genere, ma sullo spazio infinito

Ortogonalità tra rette e piani

DEF $\dim \mathcal{E} = n$ $\quad R = (O, B)$, con B ortonormale

r r' rette $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u) \quad \vec{r'} = \mathcal{L}(u')$

r e r' sono ortogonali $:\iff \langle u, u' \rangle = 0 \iff u \perp u' \iff {}^{\perp}\vec{r} \supseteq \vec{r'} \iff \vec{r'} \subseteq {}^{\perp}\vec{r}$.

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad r: \begin{cases} x_1 = 2+3t \\ x_2 = -4-t \\ x_3 = 5+t \end{cases}$

Determinare una retta r' ortogonale a r

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(3,-1,1)) \qquad u'(l', m', n'): \langle u, u' \rangle = 0 \qquad$ Prodotto scalare numerico: $3l' - m' + n' = 0 \implies u'(1,3,0)$ è soluzione.

$r': \begin{cases} x_1 = t' \\ x_2 = 3t' \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad$ N.B. Si tratta di UNA DELLE possibili soluzioni.

PROP $H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, $\quad \vec{H}: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$

Allora ${}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(a_1, \ldots, a_n))$.

DIM Ricordiamo $\dim {}^{\perp}\vec{H} = n - \underbrace{\dim \vec{H}}_{n-1} = 1$. $\quad$ Th: $\forall u \in \vec{H}, \langle u, w \rangle = 0$

$u(y_1, \ldots, y_n) \in \vec{H} \iff a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0$

è fondamentale che B sia ortonormale $\rightarrow$ (\\)

$(a_1, \ldots, a_n)(y_1, \ldots, y_n) = \langle w, u \rangle$. ▨

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 2 \qquad r: -3x + 7y = c \qquad w(-3,7) \perp r$

$\vec{r}: -3x + 7y = 0 \qquad u(7,3) \in \vec{r} \qquad$ NON si confondano u e w.

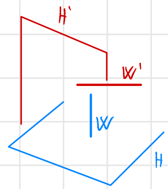
DEF $\dim \mathcal{E} = n$ $\quad R = (O, B)$, con B ortonormale

r retta, $H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$

$r \perp H :\iff \vec{r} = {}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(a_1, \ldots, a_n))$.

Sia ora $H': a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b'$.

$H \perp H' :\iff w \perp w'$, dove $w(a_1, \ldots, a_n)$ e $w'(a'_1, \ldots, a'_n)$.



Ortogonalità e fasci di piani

Esempio:

- $\dim \mathcal{E} = 3$, $R = (O, B)$ $\quad H: -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ $\quad \vec{H}: -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ $\quad {}^{\perp}\vec{H}: \mathcal{L}(w(-3,1,2))$

  Rappresentare la retta r ortogonale ad H e passante per $P(-2,4,1)$.

  $r \perp H \iff \vec{r} = {}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(-3,1,2))$.

  $$r: \begin{cases} x_1 = -2 - 3t \\ x_2 = 4 + t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 3(x_2 - 4) \\ t = x_2 - 4 \\ x_3 = 1 + 2(x_2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10 \\ -2x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$

  $$r: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \quad - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^2 \to a^2 + a^1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ da cui $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$ oppure: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = t \end{cases}$

  $$S = \{(\bar{x}_3, 1/3, \bar{x}_3) \mid \bar{x}_3 \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1/3, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \vec{r} = \mathcal{L}(u(1,0,1)) \qquad P(0, 1/3, 0) \in r$$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad H: x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$ $\quad w(1,-4,2)$ vettore ortogonale ad H

  Rappresentare un piano ortogonale ad H passante per $P(3,1,-3)$.

  $H': a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = b'$ $\qquad w'(a'_1, a'_2, a'_3)$

  $H' \perp H \iff w' \perp w \iff \langle w, w' \rangle = 0 \iff (1,-4,2)(a'_1, a'_2, a'_3) = a'_1 - 4a'_2 + 2a'_3 = 0$.

  $w'(0,1,2)$ $\quad H': x_2 + 2x_3 = b'$ $\qquad$ oppure $\qquad w''(2,1,1)$ $\quad H'': 2x_1 + x_2 + x_3 = b''$

  $P \in H' \Rightarrow 1 - 6 = b' \Rightarrow b' = -5$ $\qquad P \in H'' \Rightarrow 6 + 1 - 3 = b'' \Rightarrow b'' = 4$

DEF $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad H: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

Il *fascio improprio* determinato da H è l'insieme di tutti i piani di $\mathcal{E}$ paralleli ad H.

Si denota con: $\mathcal{F}_H: ax_1 + bx_2 + cx_3 = k, \ \forall k \in \mathbb{R}$.

Invece, sia $r: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$.

Il *fascio proprio* di asse r è l'insieme di tutti i piani di $\mathcal{E}$ che contengono r; si denota con $\mathcal{F}_r$.

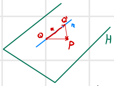
Si può dimostrare che un piano appartiene a $\mathcal{F}_r \iff$ è rappresentato da un'equazione del tipo:

$$\lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 - d) + \mu(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 - d') = 0.$$

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad r: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad P(0,0,-1) \notin r$.

Determinare il piano $H: P \in H \wedge r \subseteq H$.



(1) $H: \lambda(x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \mu(2x_1 + x_2 - x_3) = 0$.

$P \in H \Rightarrow \lambda(0 - 0 + 1 + 1) + \mu(0 + 0 + 1) = 0 \Rightarrow \mu = -2\lambda$. Allora $H: x_1 - x_2 - x_3 + 1 - 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{H: -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 1 = 0.}$

(2) (altro metodo)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{a^2 \to a^2 - 2a^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^2 \to \frac{1}{3}a^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^1 \to a^1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{cases} x_1 = -1/3 + 2/3\, t \\ x_2 = 2/3 - 1/3\, t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$S = \{(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\qquad Q(-1/3, 2/3, 0)$ $\qquad u(2/3, -1/3, 1)$ $\qquad Q'(1/3, 1/3, 1)$ $\qquad \vec{QP}(1/3, -2/3, -1)$

$\vec{H} = \mathcal{L}(u, \vec{QP})$ $\qquad H = (P, \vec{H})$ $\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3+1 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{9}x_3 - \frac{4}{9} + \frac{1}{9}x_3 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} = 0.$

Quindi $\boxed{H: x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} = 0.}$ **N.B.** Il fatto che i due risultati siano tra loro proporzionali ci assicura della loro correttezza (dovreste essere dei geni per fare due errori diversi che rendano le due soluzioni proporzionali... quindi potete stare tranquilli ☺)

Geometria

Lez. 21 - 26/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Distanza

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \pi: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ $\quad R=(O,B)$, B ortonormale

Siano $P,Q\in\mathcal{E}$. Allora la distanza tra P e Q è $\|\vec{PQ}\|$ e si denota con $d(P,Q)$.

OSS L'ordine dei punti NON ha importanza:

$d(P,Q)=\|\vec{PQ}\| = \|-\vec{QP}\| = |-1|\,\|\vec{QP}\| = \|\vec{QP}\| = d(Q,P)$.

Inoltre, $d(P,Q)\ge 0$ necessariamente, per definizione.

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3$ $\quad P(3,-5,2)$ $\quad Q(0,1,-4)$

$\vec{PQ}(-3,6,-6) \Rightarrow d(P,Q)=\|\vec{PQ}\| = \sqrt{\langle \vec{PQ},\vec{PQ}\rangle} \overset{B \text{ ortonormale}}{=} \sqrt{(-3,6,-6)(-3,6,-6)} = \sqrt{81}=9$.

DEF $X,Y\subseteq\mathcal{E}$ sottoinsiemi

$d(X,Y)=\inf\{d(P,Q)\mid P\in X, Q\in Y\}\subseteq\mathbb{R}$.

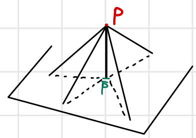
N.B. Si considera l'estremo inf perché non è detto che vi sia il minimo!

Sia H un iperpiano. $H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$. Sia $P\in\mathcal{E}$. Allora

- $P\in H \Rightarrow d(P,H)=0$. per il teorema di Pitagora
- $P\notin H \Rightarrow d(P,H) = d(P,\bar P)$, dove

$\bar P = H\cap r$ $\wedge$ r ortogonale ad H e $P\in r$.

proiezione ortogonale di P in H



Notiamo che $\vec{P\bar P}$ risulta essere un "cateto", mentre gli altri vettori sono "ipotenuse".

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3$ $\quad H: x_1-3x_2-x_3=1$ $\quad P(1,0,1)\notin H$ $\quad d(P,H)=?$

r retta: $r\perp H$ $\wedge$ $P\in r$ $\quad r: \begin{cases} x_1=1+t\\ x_2=-3t\\ x_3=1-t\end{cases}$ $\quad P_r(1+t,-3t,1-t)\in r$ $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$P_r\in H \iff (1+t)-3(-3t)-(1-t)=1 \iff \frac{\cancel{11}t}{\cancel{11}}=\frac{1}{11}$

$\bar P\left(1+\frac{1}{11}, -\frac{3}{11}, 1-\frac{1}{11}\right)$, cioè $\bar P\left(\frac{12}{11},-\frac{3}{11},\frac{10}{11}\right)$ $\quad$ da cui: $\vec{P\bar P}\left(\frac{1}{11},-\frac{3}{11},-\frac{1}{11}\right)$

$d(P,H)=d(P,\bar P)=\|\vec{P\bar P}\|=\sqrt{\frac{1}{121}+\frac{9}{121}+\frac{1}{121}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

$d(P,H)=\frac{|\cancel{1\cdot 1}-\cancel{3\cdot 0}-\cancel{1\cdot 1}-1|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ ✓

Generalizziamo l'esempio:

$H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ $\quad P(\bar x_1,\dots,\bar x_n)$ $\quad r:\begin{cases}x_1=\bar x_1+a_1t\\ \vdots\\ x_n=\bar x_n+a_nt\end{cases}$ $\quad \vec r=\mathcal{L}(\overset{\neq 0}{w}(a_1,\dots,a_n)) = {}^{\perp}\vec H$

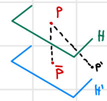
$r\cap H: a_1(\bar x_1+a_1t)+\dots+a_n(\bar x_n+a_nt)=b \iff (a_1^2+\dots+a_n^2)t = b-a_1\bar x_1-\dots-a_n\bar x_n \iff t=\frac{b-a_1\bar x_1-\dots-a_n\bar x_n}{a_1^2+\dots+a_n^2}$

$\bar P(\bar x_1+a_1t,\dots,\bar x_n+a_nt)$ $\qquad \vec{P\bar P}(a_1t,\dots,a_nt)$

$d(P,H)=d(P,\bar P)=\|\vec{P\bar P}\| = \sqrt{a_1^2t^2+\dots+a_n^2t^2} = |t|\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2} = \frac{|b-a_1\bar x_1-\dots-a_n\bar x_n|}{a_1^2+\dots+a_n^2}\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2} = \frac{|a_1\bar x_1+\dots+a_n\bar x_n-b|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}$

Distanza pt. 2

$H: a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0$, $H': a'_1x_1+\ldots+a'_nx_n-b'=0$, $H\cap H': \begin{cases} a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0 \\ a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0 \end{cases}$



$H\cap H' \neq \emptyset \implies d(H,H')=0$ c'è almeno un punto in cui si toccano

$H\cap H' = \emptyset \implies d(H,H') = \inf\{d(P,P') \mid P\in H,\ P'\in H'\} = \inf\{d(P,\bar P) \mid P\in H,\ \bar P$ proiezione ortog. di P in $H\}$

PROP $\forall P\in H$, $d(P,\bar P) = d(P,H')$ è costante.

DIM $H /\!/ H' \implies \vec H = \vec{H'}: a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$.

Allora: $H': a_1x_1+\ldots+a_nx_n-\bar b=0$.

$\forall P\in H$, $P(\bar x_1,\ldots,\bar x_n)$, $a_1\bar x_1+\ldots+a_n\bar x_n-b=0 \implies b = a_1\bar x_1+\ldots+a_n\bar x_n$.

$d(P,H') = \dfrac{|a_1\bar x_1+\ldots+a_n\bar x_n-\bar b|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}} = \dfrac{|b-\bar b|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}$ $\forall P\in H$ non dipende da P

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3$ $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$

$H: 2x_1+x_2-x_3+1=0$ $W(2,1,-1)$ $b=-1$

$H': 4x_1+2x_2-2x_3-7=0$ $W'(4,2,-2)$ $b'=7$

$W /\!/ W' \implies \vec H = \vec{H'}$ $H': 2x_1+x_2-x_3-\frac{7}{2}=0$ $\bar b = \frac{7}{2}$

$d(H,H') = \dfrac{|-1-\frac{7}{2}|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{\frac{9}{2}}{\sqrt6}$

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ $\dim\mathcal{E}=2$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette ed $\mathcal{E}$ stesso.

Qui, dunque, sappiamo calcolare la distanza tra i possibili sottospazi.

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ $\dim\mathcal{E}=3$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette, i piani ed $\mathcal{E}$ stesso.

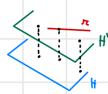
- distanza di una retta da un iperpiano (= piano in questo caso)

r retta: $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b \\ a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3=b' \end{cases}$

H piano: $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$ $r\cap H = \begin{cases} P \implies d(r,H)=0 \\ \emptyset \implies d(r,H)=? \end{cases}$

Sia H' iperpiano: $H /\!/ H' \wedge r\subseteq H'$. Questo iperpiano esiste, infatti: $r /\!/ H \implies \vec r\subseteq \vec{H'}=\vec H$ $P\in r$, $H'=(P,\vec H)$

$\forall P\in H'$, $d(P,H)$ è costante. Allora, $\forall P\in r\subseteq H'$, $d(P,H)$ è costante: $d(P,H') = d(r,H')$



In conclusione: $d(r,H) = d(P,H)$ $\forall P\in r$.

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3$ $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$

$H: -x_1+3x_2+2x_3-5=0$ $r: \begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=-t \end{cases}$ $\vec r = \mathcal{L}(u(1,1,-1))$.

$\vec H: \underset{-1\,+\,3\,-\,2\,=\,0}{-x_1+3x_2+2x_3=0} \implies \vec r\subseteq \vec H \implies r /\!/ H$ $O(0,0,0)\in r \wedge O\notin H \implies r\not\subseteq H$

$d(r,H) = d(P,H)$ $\forall P\in r$ $O\in r$ $d(O,H) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

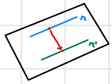
Distanza pt. 3

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$

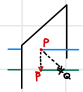
- **distanza tra rette r e r':**

(1) $r \cap r' \neq \emptyset \implies d(r, r') = 0$

(2) $r \parallel r' \wedge r \neq r' \implies r$ e r' complanari



$\forall P \in r$, $d(P, r')$ è costante. $\quad d(r, r') = d(P, r')$ $\forall P \in r$. Fisso P.



Allora considero H iperpiano: $H \perp r'$ e $P \in H$.

$r' \cap H = \bar{P}$ proiezione ortog. di P su r'. $\quad d(r, r') = d(P, r') = d(P, \bar{P})$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$

$r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = -1+2t \\ x_3 = 3-t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x_1 = 2t' \\ x_2 = 4t' \\ x_3 = 1-2t' \end{cases} \qquad r \parallel r'$, infatti: $\vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,-1))$ e $\vec{r'} = \mathcal{L}(v(2,4,-2))$ $\quad v = 2u$

$P'(0,0,1) \in r' \quad d(r, r') = d(r, P') \qquad H: H \perp r,\ P' \in H$

$H \perp r \implies H: x_1 + 2x_2 - x_3 - k = 0 \qquad P' \in H \implies -1 - k = 0 \implies k = -1 \qquad$ Allora $H: x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$

$\bar{P'} = r \cap H$: $P_r \in r$, $P_r(1+t, -1+2t, 3-t) \in H \iff (1+t) + 2(-1+2t) - 1(3+t) + 1 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = 1/2$.

$\bar{P'}(1 + 1/2, -1 + 2 \cdot 1/2, 3 - 1/2) \qquad \bar{P'}(3/2, 0, 5/2) \qquad d(r, r') = d(\bar{P'}, P') = \|\bar{P'}P'\| = \sqrt{9/4 + 9/4} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(3) r e r' sghembe

Prossima pagina (già, lo spazio qua sotto NON era sufficiente ☺)

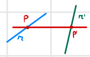
Distanza pt.4

Teorema della perpendicolare.

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $n = \dim \mathcal{E} = 3$ $R = (O, B)$, B orton.
Siano r e r' due rette non parallele. Allora esiste un'unica retta s:
$s \perp r$, $s \perp r'$ $\wedge$ $s \cap r = P$, $s \cap r' = P'$. In particolare: $d(r, r') = d(P, P')$.

DIM

$r: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x = x_0' + \ell' t' \\ y = y_0' + m' t' \\ z = z_0' + n' t' \end{cases}$



$P_r(x_0 + \ell t, y_0 + mt, z_0 + nt)$ $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(\ell, m, n))$

$P_{r'}(x_0' + \ell' t', y_0' + m' t', z_0' + n' t')$ $\quad \vec{r'} = \mathcal{L}(u'(\ell', m', n'))$ $\quad r \not\parallel r' \Rightarrow u \not\parallel u'$

Se la retta s esiste, deve passare per un punto tipo P_r e uno tipo $P_{r'}$ e quindi $\overrightarrow{P_r P_{r'}} \in \vec{s} \subseteq \vec{r}^{\perp}, \subseteq \vec{r'}^{\perp}$, da cui $\overrightarrow{P_r P_{r'}} \perp u, \perp u'$, ossia:

$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_r P_{r'}}, u \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_r P_{r'}}, u' \rangle = 0 \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{P_r P_{r'}}(x_0' + \ell' t' - x_0 - \ell t, y_0' + m' t' - y_0 - mt, z_0' + n' t' - z_0 - nt)$

$\begin{cases} \ell(x_0' + \ell' t' - x_0 - \ell t) + m(y_0' + m' t' - y_0 - mt) + n(z_0' + n' t' - z_0 - nt) = 0 \\ \ell'(x_0' + \ell' t' - x_0 - \ell t) + m'(y_0' + m' t' - y_0 - mt) + n'(z_0' + n' t' - z_0 - nt) = 0 \end{cases}$

$(*) \begin{cases} (\ell\ell' + mm' + nn')t' - (\ell^2 + m^2 + n^2)t + \ldots = 0 \\ (\ell'^2 + m'^2 + n'^2)t' - (\ell'\ell + m'm + n'n)t + \ldots = 0 \end{cases}$ $\quad A \begin{pmatrix} \langle u, u' \rangle & -\|u\|^2 \\ \|u'\|^2 & -\langle u, u' \rangle \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -\langle u, u' \rangle^2 + \|u\|^2 \|u'\|^2$

Ricordiamo la disuguaglianza di Schwartz: $|\langle u, u' \rangle| \leq \|u\| \|u'\|$ $\quad \langle u, u' \rangle^2 \underset{=}{\leq} \|u\|^2 \|u'\|^2 \iff \{u, u'\}$ lin. dip.

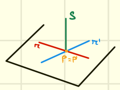
Abbiamo $|A| = 0 \iff \langle u, u' \rangle^2 = \|u\|^2 \|u'\|^2 \iff \{u, u'\}$ lin. dip. IMPOSSIBILE perché $r \not\parallel r'$.

Allora, deve essere $|A| \neq 0$. Per il teorema di Cramer: $\exists! (\bar{t}, \bar{t}') \in \mathbb{R}^2$ che soddisfa il sistema $(*)$.

Sia P il punto di r determinato dal valore $\bar{t}$ per il parametro t. Sia P' il punto di r' determinato dal valore $\bar{t}'$ per il parametro t'.

La retta s $(s \perp r \wedge s \perp r')$ passante per P e P' è la retta cercata e $d(r, r') = d(P, P')$. $\blacksquare$

OSS



È necessario dire che $s \perp r$, $s \perp r'$ per il caso di rette incidenti.

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$

$r: \begin{cases} x = 3/2 - t \\ y = 1/2 + t \\ z = t \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ $\quad r$ e r' sghembe

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(-1, 1, 1))$ $\quad \vec{r'} = \mathcal{L}(u'(1, 2, -1))$ $\quad P_r(\frac{3}{2} - t, \frac{1}{2} + t, t)$ $\quad P_{r'}(1 + t', 2t', 1 - t')$

$\overrightarrow{P_r P_{r'}}(1 + t' - \frac{3}{2} + t, 2t' - \frac{1}{2} - t, 1 - t' - t)$

$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_r P_{r'}}, u \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_r P_{r'}}, u' \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-1} - t' + \cancel{\frac{3}{2}} - t + 2t' - \cancel{\frac{1}{2}} - t + 1 - \cancel{t'} - t = 0 \\ \cancel{1} + t' - \frac{3}{2} + \cancel{t} + 4t' - \cancel{1} - \cancel{2t} - 1 + t' + \cancel{t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t + 1 = 0 \\ 6t' - 5/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1/3 \\ t' = 5/12 \end{cases}$

$P(3/2 - 1/3, 1/2 + 1/3, 1/3)$ $\quad P(7/6, 5/6, 1/3)$ $\quad P'(1 + 5/12, 2 \cdot 5/12, 1 - 5/12)$ $\quad P'(\frac{17}{12}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12})$

$\overrightarrow{PP'}(3/12, 0, 3/12)$ $\quad \overrightarrow{PP'}(1/4, 0, 1/4)$ $\quad d(r, r') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{1/16 + 1/16} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$s: \begin{cases} x = 7/6 + 1/4 t'' \\ y = 5/6 \\ z = 1/3 + 1/4 t'' \end{cases}$

È possibile determinare un piano H: $H \parallel r \wedge H \parallel r'$?
Scopritelo, nella prossima puntata!

Geometria

Lez. 22 - 31/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Cambio base e riferimento

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad R = (O, B)$ $\quad R' = (O', B')$

$P \in \mathcal{E}$ $\quad P \equiv_R \Phi_B(\overrightarrow{OP}) = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad P \equiv_{R'} \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P}) = (y_1, \dots, y_n)$

Che relazione c'è tra $\Phi_B(\overrightarrow{OP})$ e $\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P})$? $\quad$ N.B. $\boxed{\overrightarrow{OP} \neq \overrightarrow{O'P}}$

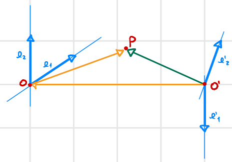
$u \in \vec{\mathcal{E}}$ $\quad \Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \Phi_{B'}(u) = (x'_1, \dots, x'_n)$

$\exists A \in GL_n(K)$: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A = M_{BB'}(id_{\vec{\mathcal{E}}})$

regola del parallelogramma $\quad$ coordinate di O in R'

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} \implies \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P}) = \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}) + \Phi_{B'}(\overrightarrow{OP}) \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}).$$

Graficamente, si sta dicendo quanto segue:



Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad O, O' \in \mathcal{E}$ $\quad B = (e_1, e_2)$ $\quad B' = (e'_1 = e_1 + 3e_2,\ e'_2 = 2e_1 - e_2)$

$R = (O, B)$ $\quad R' = (O', B')$ $\quad O' \equiv_R (2, 1) = \Phi_B(\overrightarrow{OO'})$

$M = M_{B'B}(id_{\vec{\mathcal{E}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad M^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$ ← abbiate fede

attenti all'ordine

$\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}) = \Phi_{B'}(-\overrightarrow{OO'}) = -\Phi_{B'}(\overrightarrow{OO'}) = -A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ -5/7 \end{pmatrix}$

Dalla relazione precedente ottengo: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}) \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/7 \\ -5/7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{4}{7} \\ y_2 = \frac{3}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{5}{7} \end{cases}$$

Punto medio, asse, circonferenza

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad R = (O, \bar{B})$ $\quad \bar{B}$ base ortonormale

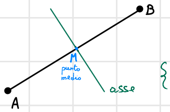
Siano $A, B \in \mathcal{E}$. Allora $\exists!\, M \in \mathcal{E} : \vec{AM} = \vec{MB}$, e M si dice **punto medio del segmento** AB.

L'insieme dei punti equidistanti da A e B si chiama **asse del segmento** AB.

$A \equiv_R (a_1, \dots, a_n)$

$B \equiv_R (b_1, \dots, b_n)$

$M \equiv_R (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$



$\{P \in \mathcal{E} \mid d(P, A) = d(P, B)\} = \mathcal{A}$

$$\vec{AM} = \vec{MB} \iff \Phi_B(\vec{AM}) = \Phi_B(\vec{MB}) \iff (\bar{x}_1 - a_1, \dots, \bar{x}_n - a_n) = (b_1 - \bar{x}_1, \dots, b_n - \bar{x}_n) \iff \begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 = b_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n - a_n = b_n - \bar{x}_n \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \vdots \\ \bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad A(-3, 2, 5),\ B(1, 7, 3) \Rightarrow M(-1, 9/2, 4)$

$P \equiv_R (x_1, \dots, x_n)$

$$P \in \mathcal{A} \iff \overset{\geq 0}{\|\vec{PA}\|} = \overset{\geq 0}{\|\vec{PB}\|} \iff \|\vec{PA}\|^2 = \|\vec{PB}\|^2 \iff \langle \vec{PA}, \vec{PA} \rangle = \langle \vec{PB}, \vec{PB} \rangle \iff$$

$$\iff (a_1 - x_1, \dots, a_n - x_n)(a_1 - x_1, \dots, a_n - x_n) = (b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)(b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n) \overset{\text{prodotto scalare numerico}}{\iff} (a_1 - x_1)^2 + \dots + (a_n - x_n)^2 = (b_1 - x_1)^2 + \dots + (b_n - x_n)^2 \iff$$

$$\iff a_1^2 + \cancel{x_1^2} - 2a_1x_1 + \dots + a_n^2 + \cancel{x_n^2} - 2a_nx_n = b_1^2 + \cancel{x_1^2} - 2b_1x_1 + \dots + b_n^2 + \cancel{x_n^2} - 2b_nx_n \overset{\text{sposto a} \leftarrow\text{, evidenzio le } x \text{ e divido tutto per 2}}{\iff} \cancel{2}(b_1 - a_1)x_1 + \dots + \cancel{2}(b_n - a_n)x_n + \underbrace{\frac{(a_1^2 - b_1^2 + \dots + a_n^2 - b_n^2)}{2}}_{\text{termine noto}} = 0$$

vettore direzionale della retta per A e B $\quad w(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$

Verifichiamo che $M \in \mathcal{A}$:

$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$ sostituisco le coordinate di M nelle x ed ottengo:

$$\cancel{2}(b_1 - a_1)\frac{a_1 + b_1}{\cancel{2}} + \dots + \cancel{2}(b_n - a_n)\frac{a_n + b_n}{\cancel{2}} + a_1^2 - b_1^2 + \dots + a_n^2 - b_n^2 = 0 \overset{\text{prodotto somma per differenza}}{\iff} \cancel{b_1^2} - \cancel{a_1^2} + \dots + \cancel{b_n^2} - \cancel{a_n^2} + \cancel{a_1^2} - \cancel{b_1^2} + \dots + \cancel{a_n^2} - \cancel{b_n^2} = 0 \quad \checkmark$$

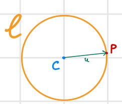
Proviamo, infine, a descrivere una **circonferenza**:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 2$ $\quad R = (O, \bar{B})$

$C \equiv_R (c_1, c_2)$ $\quad r \overset{\in K}{>} 0$ $\quad P \equiv_R (x_1, x_2)$

$\{P \in \mathcal{E} \mid d(C, P) = r\} = \mathcal{C}$ $\quad P \in \mathcal{C} \iff 0 < \|\vec{CP}\| = r \iff \|\vec{CP}\|^2 = r^2 \iff (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$

Graficamente, si presenta così:



$r = \|u\|$

Executive producer:

Miranda Pasquale (non ha fatto un cazzo a parte dare ordini)

Co-writer:

(Dota Luigi)

Beta-Tester:

Donnarumma Francesco

aka, correttore di typo — Elena Riccardo

Mennillo Vincenzo

... e della mente creativa di me medesimo... è tutto gente!

Special thanks to everyone.
E ricordate, il modo migliore di ringraziare del lavoro svolto è superare l'esame.

The End