# Lezione 13

martedì 27 aprile 2021 08:11

$A \in M_{m\times n}(K)$ $\quad$ $K$ campo

**Def.** Una sottomatrice quadrata di $A$ di ordine $k$ $(k \le \min\{m,n\})$ si dice minore di $A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 8 & 3 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

indice riga: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ $\quad$ indice di colonna: $j_1 = 2$, $j_2 = 3$ $\quad$ $M = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ di ordine 2

$i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$ $\quad$ $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$ $\quad$ $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & 5 & -3 \\ 8 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ di ordine 3

$M, M'$ sono minori di $A$

$M$ non è minore di $M'$ (non è sottomatrice di $M'$)

**Def.** Sia $M$ un minore di $A$ di ordine $k < \min\{m,n\}$.
Un orlato di $M$ (in $A$) è un minore di ordine $k+1$ di $A$ di cui $M$ è sottomatrice

Tornando all'esempio precedente $\quad$ $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$ $\quad$ $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$ $\quad$ $M'' = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{-7} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 5 \\ 8 & \boxed{3} & \boxed{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

è un orlato di $M$

**Teorema degli orlati (o di Kronecker)** (senza dimostrazione)

$A \in M_{m\times n}(K)$. Il rango di $A$ è uguale a $k$ $(\le \min\{m,n\})$ se e solo se esiste un minore $M$ di $A$ di ordine $k$ con determinante non nullo e

(i) $k = \min\{m,n\}$

OPPURE

(ii) tutti gli orlati di $M$ hanno determinante nullo.

**Esempio** $\quad$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -13 & 1 \end{pmatrix}$

$M = (3)$ $\quad$ $|(3)| = 3 \neq 0$

$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $|M'| = 1 - 6 = -5 \neq 0$

$i_1 = 1$, $i_2 = 2$ $\quad$ $j_1 = 2$, $j_2 = 3$

orlati di $M'$:

$i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$ $\quad$ $j_1 = 2$, $j_2 = 3$, $j_3 = 1$

$$\left|\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{= M''}\right| = 8 - 3 + \cancel{2} - \cancel{2} = 5 \neq 0 \qquad \text{rango}(A) \ge 3$$

orlati di $M''$:

$i_4 = 4$, $j_4 = 4$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -13 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -10 \\ -3 & 1 & -13 \end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -10 \\ -3 & 1 & -13 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= 2(-52 - 3 + 30 + 18 + 20 - 13) - (-26 + 7 + 30 - 42 + 10 - 39) =$$

$$= 2(-68 + 68) - (-107 + 107) = 0$$

$i_h = 4,\ j_h = 5$ $\quad \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| =$

$$= 2(4-3-2+1) - (2-9-1+6-1+3) = 2(0) - (11-11) = 0$$

$\text{rango}(A) = 3$

---

Torniamo a parlare di applicazioni lineari, in particolare tra spazi vettoriali finitamente generati.

- le matrici determinano appl. lineari.

$A \in M_{m\times n}(K)$

$$\tilde{T}_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \left[\,{}^t\!\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)\right]$$

$\tilde{T}_A$ è un'applicazione lineare. Vediamo:

$$\forall \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{=x},\ \underbrace{(x'_1, \dots, x'_n)}_{=x'} \in K^n, \quad \tilde{T}_A(x+x') = \tilde{T}_A(x) + \tilde{T}_A(x')$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n,\ \forall \lambda \in K, \quad \tilde{T}_A(\lambda x) = \lambda \tilde{T}_A(x)$$

- $\tilde{T}_A((x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n)) = A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \tilde{T}_A(x) + \tilde{T}_A(x')$
- $\tilde{T}_A(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = A\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \tilde{T}_A(x)$

- $T : V \longrightarrow W$ appl. lineare, $K$, $\dim V = n$, $\dim W = m$

Possiamo "associare" a $T$ una matrice di tipo $m \times n$. Vediamo:

Dobbiamo fissare: una base ordinata $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ di $V$
" " " $\mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ di $W$

Consideriamo:

$$T(u_1) \equiv_{\mathcal{B}'} (a^1_1, a^2_1, \dots, a^m_1)$$
$$\vdots$$
$$T(u_n) \equiv_{\mathcal{B}'} (a^1_n, a^2_n, \dots, a^m_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & & a^2_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} =: M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$$

MATRICE ASSOCIATA a $T$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\tilde{T}_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{T}_A((x_1,x_2)) = (3x_1+x_2,\ 2x_1-2x_2,\ x_1-3x_2)$

Osserviamo che $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\tilde{T}_A)$ con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi canoniche

Infatti:

$\tilde{T}_A((1,0)) = (3,2,1) \equiv_{\mathcal{B}'} (3,2,1)$ colonne di $A$

$\tilde{T}_A((0,1)) = (1,-2,-3) \equiv_{\mathcal{B}'} (1,-2,-3)$ $\quad \mathrm{Im}\,\tilde{T}_A = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\tilde{T}_A = \mathrm{rango}(A)$

questo è vero per ogni $\tilde{T}_A$

Quindi, per il Teorema dell'equazione dimensionale:

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker \tilde{T}_A + \dim \mathrm{Im}\,\tilde{T}_A \Rightarrow n = \dim \ker \tilde{T}_A + \mathrm{rango}(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \ker \tilde{T}_A = n - \mathrm{rango}(A)$. Anche questo è vero in generale:

Allora:

- $A \in M_{m\times n}(K)$ $\qquad \tilde{T}_A : K^n \longrightarrow K^m$

$\qquad\qquad X \rightsquigarrow AX$

$\dim \mathrm{Im}\,\tilde{T}_A = \mathrm{rango}(A)$

$\dim \ker \tilde{T}_A = n - \mathrm{rango}(A)$

$\ker \tilde{T}_A = \{(x_1,\dots,x_n) \in K^n \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0\} = S_0$ insieme delle soluzioni del sistema lineare

$\Sigma_0 : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0$

Allora $\boxed{\dim S_0 = n - \mathrm{rango}(A)}$

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\le 2}$

$(a,b) \rightsquigarrow a+b + (a-b)x + (2a+b)x^2$

$\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ base ordinata di $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$ base canonica di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$

Costruiamo $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$:

$T((1,1)) = 2 + 3x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (2,0,3)$

$T((1,-1)) = 2x + x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (0,2,1)$

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

rappresenta $T$ in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Esercizio $\quad T: \mathbb{R}[x]_{\le 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$a_0 + a_1x + a_2x^2 \rightsquigarrow (2a_0 + 3a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 - 2a_2)$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$\mathcal{B}' = ((1,1,0),(0,1,1),(0,0,1))$

Ho calcolato: $\quad \phi_{\mathcal{B}'} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1,x_2,x_3) \rightsquigarrow (x_1,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2 + x_1)$

$T(1) = (2,0,0) \equiv_{\mathcal{B}'} (2,-2,2)$

$T(x) = (3,1,1) \equiv_{\mathcal{B}'} (3,-2,3)$

$T(x^2) = (0,1,-2) \equiv_{\mathcal{B}'} (0,1,-3)$

$$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{Im} T = \text{rango}(A)$

$\dim \operatorname{Ker} T = n - \text{rango}(A) = 3 - \text{rango}(A)$

<u>Teorema</u> (caratterizzazione di $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$) $T: V \to W$ appl. lin. $\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata di $V$

$\mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_m)$ " " " $W$

La matrice associata a $T$ in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è l'<u>unica</u> matrice $\in M_{m\times n}(K)$ tale che:

$\forall u \in V$, prendiamo $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$ e $T(u) \equiv_{\mathcal{B}'} (y_1, \dots, y_m)$

RAPPRESENTAZIONE di $T$ in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

$$\left[ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right] \qquad (*)$$

<u>DIM</u> Sappiamo: $\qquad A = (a^i_j)$

$\underline{a}_1 = \phi_{\mathcal{B}'}(T(u_1))$

$\vdots$

$\underline{a}_n = \phi_{\mathcal{B}'}(T(u_n))$

$$T(u) = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 T(u_1) + \dots + x_n T(u_n) =$$
$$= x_1(a^1_1 u'_1 + \dots + a^m_1 u'_m) + \dots + x_n(a^1_n u'_1 + \dots + a^m_n u'_m) =$$
$$= (x_1 a^1_1 + \dots + x_n a^1_n) u'_1 + \dots + (x_1 a^m_1 + \dots + x_n a^m_n) u'_m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n \\ \vdots \\ y_m = a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

UNICITÀ: Sia $B = (b^i_j) \in M_{m\times n}(K)$ : $B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $\forall u \in V$

Th: $B = A$

$u = u_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1,0,\dots,0)$, $\quad T(u_1) \equiv_{\mathcal{B}'} \underline{a}_1 = (a^1_1, a^2_1, \dots, a^m_1)$

per ipotesi: $\quad \underline{b}_1 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{a}_1$

$\vdots$

$u = u_n \equiv_{\mathcal{B}} (0,\dots,0,1)$, $\quad T(u_n) \equiv_{\mathcal{B}'} \underline{a}_n = (a^1_n, a^2_n, \dots, a^m_n)$

per ipotesi: $\quad \underline{b}_n = B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{a}_n$

Quindi, tutte le colonne di $B$ sono uguali a quelle di $A$ di egual indice, per cui $B = A$. $\square$

per cui $B = A$. $\square$

Oss:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[r, "\tilde{T}_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$

Abbiamo: $\boxed{\tilde{T}_A = \phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}}$

Controlliamo! $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, sia $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$
cioè: $\phi_{\mathcal{B}}(u) = (x_1, \dots, x_n)$

$$\phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}((x_1, \dots, x_n)) =$$
$$= \phi_{\mathcal{B}'}(T(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}((x_1, \dots, x_n)))) = \phi_{\mathcal{B}'}(T(u)) = (y_1, \dots, y_m) =$$
$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{T}_A(x_1, \dots, x_n).$$

Oss:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_{K^n} = \phi_{\mathcal{B}}"'] & K^m \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}'} = id_{K^m}"] \\ K^n \arrow[r, "\tilde{T}_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi canoniche

$\Rightarrow T = \tilde{T}_A$

Ogni applicazione lineare $T: K^n \longrightarrow K^m$ è del tipo $\tilde{T}_A$ dove $A$ è la matrice associata a $T$ nelle basi canoniche.

---

Def. Sia $(V, +, \cdot)$ sp. vett. su $K$, $\dim V = n$
$\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}$ basi ordinate di $V$.
$id_V : V \longrightarrow V$ la matrice associata a $id_V$ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ si dice matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$
opp. di cambiamento di basi da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$

Esempio $id_V : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\overline{\mathcal{B}} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\phi_{\overline{\mathcal{B}}} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow (b, a, c-a, d-b-c+a)$

$id_V\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{B}} (0,1,-1,1)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{B}} (1,0,0,-1)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{B}} (0,0,1,-1)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{B}} (0,0,0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango $A = 4 = \dim \operatorname{Im}(id_V)$
$\Rightarrow$ isomorfismo

---

Per il Teorema: $u \in V$ $\quad u \equiv_B (x_1, \ldots, x_n)$
$u \equiv_{\overline{B}} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

$$M_{B\overline{B}}(id_V) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Oss: le matrici di cambiamento di base hanno rango massimo, perciò sono invertibili.

Proprietà (senza dim.)

- $T: \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W}$ isom. $\Rightarrow$ $A = M_{BB'}(T)$ è invertibile e $A^{-1} = M_{B'B}(T^{-1})$

- $T: \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W}$, appl. lin. $\qquad A = M_{BB'}(T)$
  $T': \underset{B'}{W} \to \underset{B''}{U}$ appl. lin. $\qquad B = M_{B'B''}(T')$

$T' \circ T: \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W} \to \underset{B''}{U}$ $\qquad BA = M_{BB''}(T' \circ T)$

---

Consideriamo $T: V \to V$ endomorfismo

$B \quad B'$ $\qquad \underline{B = B'}$ $\qquad A = M_B(T)$

$\overline{B} \quad \overline{B}'$ $\qquad \underline{\overline{B} = \overline{B}'}$ $\qquad \overline{A} = M_{\overline{B}}(T)$

Vediamo che relazione c'è tra $A$ e $\overline{A}$

Sia $P = M_{B\overline{B}}(id_V)$ $\qquad u \in V$, $\quad u \equiv_B (x_1, \ldots, x_n)$
$u \equiv_{\overline{B}} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \quad (**) \quad \left[ P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \right]$$

$T(u) \equiv_B (y_1, \ldots, y_n)$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \quad (1)$$

$T(u)\equiv_{\mathcal{B}}(y_1,\dots,y_n)$

$T(u)\equiv_{\bar{\mathcal{B}}}(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$

$$\bar{A}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ \vdots\\ \bar{y}_n\end{pmatrix} \quad (2)$$

In (2) sostituiamo $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ e $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$ usando le $(**)$

$$\bar{A}P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \qquad \exists\, P^{-1}$$

$$\underbrace{P^{-1}\bar{A}P}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

si comporta come $A$, che per il Teorema è l'unica ad avere questa proprietà!

$\Longrightarrow \quad A=P^{-1}\bar{A}P$ si dice che $A$ e $\bar{A}$ sono SIMILI

Def. $A,\bar{A}\in M_n(K)$

$A$ è simile ad $\bar{A} \Longleftrightarrow \exists\ E\in M_n(K)$ invertibile tale che
$$A=E^{-1}\bar{A}E$$

Questa è una relazione di equivalenza: relazione di similitudine.
Quindi se $A$ è simile ad $\bar{A}$ anche $\bar{A}$ è simile ad $A$ e possiamo dire che $A$ e $\bar{A}$ sono SIMILI

---

Quindi abbiamo provato il seguente risultato:

Proposizione: $T: V\to V$ endomorfismo
$\mathcal{B}$ $\quad A=M_{\mathcal{B}}(T)$
$\bar{\mathcal{B}}$ $\quad \bar{A}=M_{\bar{\mathcal{B}}}(T)$
$\Rightarrow$ $A$ e $\bar{A}$ sono simili.

Si può dimostrare che due matrici simili sono matrici associate a uno stesso endomorfismo in opportune basi. (Teorema 5.38)
(senza dim.)