Appunti di geometria

22/23

Docente: Cioffi F

Made by: Gaia G.

LEZIONE 1

INSIEMI

Un insieme é una collezione di oggetti. I suoi elementi possono essere rappresentati con i diagrammi di ven, per elencazione o per caratteristica.
Consideriamo:

$$X = \{ \text{studente } x \mid x \text{ sta in aula A6} \}$$
$$Y = \{ \text{studente } y \mid y \text{ sta in aula A6} \}$$

Possiamo eseguire diverse operazioni:

$X \cap Y$ (intersezione) = elem. che $\in$ almeno in uno dei 2 insiemi

$X \cup Y$ (unione) = elem. che $\in$ sia ad X che Y

$X \setminus Y$ (differenza) = elem. che $\in$ ad X ma non Y

PRODOTTO CARTESIANO

Siano $A, B \neq \emptyset$ il prodotto cartesiano é dato da $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \ \ b \in B \}$ ⇒ le varie coppie formate da tutti gli elementi di A e quelli di B

si osserva che $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow$ o $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

inoltre se $A \neq B$ allora $A \times B \neq B \times A$

RELAZIONI

Siano $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ una relazione di A e B é un sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$

Esempio: $A = \{a, b, c\}$ $B = \{x, y\}$
$\mathcal{R} = \{ (a,x), (a,y), (c,y) \}$

RELAZIONI INVERSE

Siano $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. se $\mathcal{R}$ é una relazione fra A e B, diremo RELAZIONE INVERSA di $\mathcal{R}$ la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ fra B e A definita come $\{ (b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathcal{R} \}$

ESEMPIO: consideriamo $\mathcal{R} = \{ (a,x), (z,y), (c,y) \}$ possiamo dire $\mathcal{R}^{-1} = \{ (x,z), (y,a), (y,c) \}$

RELAZIONE D'EQUIVALENZA

Una relazione di A in se é detta RELAZIONE BINARIA.

Sia $\mathcal{R}$ una relazione binaria sull'insieme A allora:

- $\mathcal{R}$ si dice RIFLESSIVA se $\forall x \in A$, $x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ si dice SIMMETRICA se $\forall x, y \in A$, $x \mathcal{R} y$ allora $y \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ si dice TRANSITIVA se $\forall x, y, z \in A$, $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ sull'insieme A si dice di equivalenza se é contemporaneamente RIFLESSIVA, SIMMETRICA, TRANSITIVA.

ESEMPIO:

$A=\{a,b,c\}$ $\quad R=\{\underbrace{(a,a),(b,b),(c,c)}_{\text{riflessiva}},(b,c),(c,b)\}$ ← è una rel. d'equiv.

transitiva

simmetrica

$R_1=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$ ← non è riflessiva. NON È d'equiv.

CLASSI D'EQUIVALENZA

Supponiamo di avere un insieme $A\neq\emptyset$ e R rel. d'equiv. su A, se $a\in A$ diremo **classe d'equivalenza** di A l'insieme:

$$[a]=\{x\in A \mid xRa\}$$

ogni elemento di una classe d'equivalenza si dice **RAPPRESENTANTE** della sua classe

LEMMA:

i) $a\in[a]$

DIM $a\in[a] \iff aRa \iff (a,a)\in R$

ii) $b\in[a] \Rightarrow [b]=[a]$

DIM $\subseteq$ se $b\in[a]$ allora bRa.

sia $x\in[b]$ allora xRb.

$xRb \wedge bRa$ per transitività xRa quindi $x\in[a]$

$\supseteq$ $[b]\subseteq[a]$ per simmetria si dimostra che $[a]\subseteq[b]$ e quindi $[b]=[a]$

iii) $[a]\cap[b]\neq\emptyset \Rightarrow [a]=[b]$

DIM Supponiamo $x\in[a]\cap[b]$ dunque $x\in[a]$ e $x\in[b]$ quindi $[x]=[a]$ e $[x]=[b]$ per la transitività dell'uguaglianza abbiamo $[a]=[b]$

OSS Sia R rel. equiv. su A se $C=\{[a]\mid a\in A\}$ allora $A=\bigcup_{a\in A}[a]$

L'insieme C è detto **INSIEME QUOZIENTE** ed è una partizione di A

è = all'unione disgiunta di $[a]$ al variare di $[a]$ in C

VETTORI APPLICATI

Indichiamo con F l'insieme dei punti dello spazio della geometria elementare. Gli elementi di $F\times F$ si dicono **vettori applicati** oppure **segmenti orientati**, essi sono caratterizzati da **intensità**, **direzione**, **verso**.

APPLICAZIONI

Siano $A,B\neq\emptyset$ diremo **applicazione** o **Funzione** di A in B è una relazione $F\subseteq A\times B$ tale che:

$\forall a\in A\ \exists!\, b\in B: aFb$

L'applicazione si può anche indicare in questo modo: $F:\underset{(\text{dominio})}{A}\rightarrow B$ (codominio)

LEZIONE 2

APPLICAZIONI SURR. INIETT. BIETT.

Sia $f: A \to B$ con $A, B \neq \emptyset$

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\forall a, a' \in A$ se $a \neq a'$ allora $f(a) \neq f(a')$

dunque a elementi distinti corrispondono immagini distinte

f è surriettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = B$ cioè: $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

f è biettiva $\Leftrightarrow$ $\forall b \in B \ \exists! a \in A : f(a) = b$

inoltre possiamo dire che $f: A \to B$ è biettiva $\Leftrightarrow$ f^{-1} è un applicazione e a sua volta biettiva

INSIEMI EQUIPOTENTI

Siano $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

A e B si dicono equipotenti $\Leftrightarrow$ $\exists$ un app. $f: A \to B$ biettiva

IMMAGINE / CONTROIMMAGINE

Sia $f: A \to B$ un'applicazione e X un sottoinsieme di A. Diremo immagine di X l'insieme:

$f(x) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ $\Rightarrow$ (insieme delle immagini di x, $f(x)$: $x \in X$)

supponendo adesso y sottoinsieme di B diremo controimmagine di y l'insieme:

$f^{-1}(y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$

INSIEME DELLE PARTI

Sia S un insieme $P(S) = \{ x \mid x \subseteq S \}$ è l'insieme delle parti di S. Esso è $\neq \emptyset$ poiché $\emptyset \in P(S)$.

Appartiene sempre a $P(S)$ dunque è un elemento di $P(S)$

$P(S)$ è un singleton $\Leftrightarrow$ $S = \emptyset$

$P(S)$ se S ha n elementi, avrà 2^n elementi.

FUNZIONE COMPOSTA

Consideriamo le app. $f: A \to B$ e $g: B \to C$ chiameremo composta l'applicazione $g \circ f : A \to C$ definita $\forall a \in A : (g \circ f)(a) = g(f(a))$

ESEMPIO:	$f: A \to B$	$g: B \to C$	$g \circ f: A \to C$
$A = \{a, b, c\}$	$a \rightsquigarrow x$	$x \rightsquigarrow 2$	$a \rightsquigarrow x \rightsquigarrow 2 \Rightarrow a \rightsquigarrow 2$
$B = \{x, y\}$	$b \rightsquigarrow y$	$y \rightsquigarrow 3$	$b \rightsquigarrow y \rightsquigarrow 3 \Rightarrow b \rightsquigarrow 3$
$C = \{1, 2, 3, 4\}$	$c \rightsquigarrow y$		$c \rightsquigarrow y \rightsquigarrow 3 \Rightarrow c \rightsquigarrow 3$

Si noti che se abbiamo $f: A \to A$ e $g: A \to A$ allora sia $g \circ f$ che $f \circ g$ vanno da A in A, però in generale $f \circ g \neq g \circ f$

APPLICAZIONI INVERTIBILI

Sia un'appli. $f: A \to B$ se $\exists$ un'applicazione $f': B \to A$: $f' \circ f = id_A$ e $f \circ f' = id_B$ allora f è invertib.

PROP: Un'applicazione $f: A \to B$ è invertibile $\iff$ è biettiva. In tal caso abbiamo che la relazione inversa f^{-1} è un'app. invertibile che coincide con f'

PROP: Se A è finito e ha esattamente n elementi allora A è equipotente all'insieme $\{1, \dots, n\}$

RESTRIZIONE

Consideriamo un'applicazione $f: A \to B$. Per ogni X sottoinsieme di A ($X \subseteq A$) possiamo considerare la restrizione di f a x la quale diventa un'appli. $f_{|X}: X \to B$ che $\forall x$ associa $f(a)$. Naturalmente se abbiamo $Y \subseteq B$ allora è possibile anche restringere il codominio.

PRINCIPIO D'INDUZIONE

Data, $\forall n$, un'affermazione $A(n)$ se succede che:

1) $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : A(\bar{n})$ è vera (base d'induzione)
2) $\forall n \geq \bar{n}$, se $A(n)$ è vera allora è vera anche $A(n+1)$ (passo d'induzione)

Se sono vere base e passo allora $A(n)$ è v a $\forall n \geq \bar{n}$
er

ESEMPIO:

$b = 0$ $A = \emptyset$ $|A| = 0$

$P(A) = \{\emptyset\}$ $|P(A)| = 1 = 2^0$

Hp:

$A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ $|P(A_n)| = 2^n$

Th:

$A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ $|P(A_{n+1})| = 2^{n+1}$

$P(A_{n+1}) = P(A_n) \,\dot{\cup}\, \{X \cup \{a_{n+1}\} \mid X \in P(A_n)\}$

$|P(A_{n+1})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

OPERAZIONE BINARIA

Siano $A, B, C \neq \emptyset$ un applicazione $\perp : A \times B \to C$ si dice operazione binaria.

composto

Se $A = B = C$ allora parleremo di operazione interna

Se invece $B = C$ allora si parla di operazione esterna con operatori in A

LEZIONE 3

STRUTTURE ALGEBRICHE

è una n-upla costituita da insiemi e operazioni su di essi

ESEMPIO: $(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

Una struttura algebrica costituita da un insieme e da un'operazione interna su tale insieme è detta gruppoide. Se abbiamo un gruppoide $(A, \perp)$ ha senso considerare le seguenti proprietà per la sua operazione interna:

(i) l'operaz. $\perp$ è associativa se
$\forall a,b,c \in A \quad (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$

(ii) l'operazione $\perp$ è commutativa se
$\forall a,b \in A \quad a \perp b = b \perp a$

(iii) un elemento $u \in A$ si dice neutro se $\forall a \in A$

(iv) se $\perp$ ammette elem. neutro, possiamo chiedere:
$\forall a \in A, \exists a' \in A: \quad a \perp a' = a' \perp a = u$ elem. neutro

In tal caso a è detto invertibile e a' si dice inverso o simmetrico

GRUPPO

Un gruppoide si dice gruppo se l'operazione è associativa, ammette elem. neutro, ogni elem è invertibile. Se l'operazione è anche commutativa allora si parla di gruppo abeliano.

CAMPO

Sia $\mathbb{K}$ un insieme e $+, \cdot$ due operazioni binarie interne su $\mathbb{K}$. La struttura algebrica $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è detta campo se:

(i) $(K, +)$ è un gruppo abeliano

(ii) se 0 è l'elem. neutro di $(K, +)$ e $K^* = K / \{0\}$ allora $(K^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano

(iii) il prodotto è distributivo rispetto alla somma cioè:
$\forall a,b,c \in K \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

SPAZI VETTORIALI

Sia $V \neq \emptyset$ e sia $(K, +, \cdot)$ campo

siano: $\boxed{+}: V \times V \to$ un'operaz. interna su V
$\boxed{\cdot}: K \times V \to V$ un'operazione esterna

Allora $(V, +, \cdot)$ si dice spazio vettoriale sul campo k se

(i) $(V, +)$ è un gruppo abeliano, l'elem. neutro si indica con $\underline{0}$ vettore nullo

(ii) $\forall \alpha \in K$ (scalare), $\forall u,v \in V$ $\boxed{\alpha\cdot(u+v) = (\alpha\cdot u)+(\alpha\cdot v)}$

(iii) $\forall \alpha,\beta \in K, \forall u \in V$ $\boxed{(\alpha+\beta)\cdot u = (\alpha\cdot u)+(\beta\cdot u)}$

(iv) $\forall \alpha,\beta \in K, \forall u \in V$ $\boxed{(\alpha\cdot\beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)}$

(v) Sia 1 rispetto alla moltiplicazione di K $\forall u \in V,\ 1\cdot u = u$

POLINOMI SU CAMPI

$(K,+,\cdot)$ campo

$K[x] = \{\underbrace{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}_{p(x)} \mid a_0,\dots,a_n \in K\}$

$+ : \boxed{K[x]\times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x-x^3,\ -2+x^2+2x^3+x^4) \to 1+2x+x^2+x^3+x^4$

$$\text{grado}(p(x)) = \begin{cases} \max\{i\in\mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} & \text{se } p(x)\neq 0 \\ -1 \text{ opp qualsiasi grado}, & \text{se } p(x)=0 \end{cases}$$

$\cdot : \boxed{K[x]\times K[x] \to K[x]}$

$(3+2x,\ -2+x^2) \to -6-4x+3x^2+2x^3$

$(K,+,\cdot)$ campo $n\in\mathbb{N}^*$ $K^n = \underbrace{K\times \dots \times K}_{n \text{ volte}}$

$\boxed{+} : \boxed{K^n\times K^n \to K^n}$

$((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \to (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$

PROP $(K^n, K, +, \cdot)$ è spazio vett. su K

DIM per n=2

(1.) $(K^2,+)$ gr. abeliano

comm $\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2) \in K^2$

$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1,\ b_2+a_2) = (b_1,b_2)+(a_1,a_2)$

ass $\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2) \in K^2$ come per la commutatività, si ricava da +.

neut $(0,0)$: $\forall (a_1,a_2)\in K^2$, $(a_1,a_2)+(0,0) = (a_1,a_2) = (0,0)+(a_1,a_2)$

simm $\forall (a_1,a_2)\ \exists (a_1',a_2') \in K^2$ $(a_1,a_2)+(a_1',a_2') = (a_1+a_1', a_2+a_2') = (a_1+(-a_1), a_2(-a_2)) = (0,0)$

LEZIONE 4

PROPRIETA' ARITMETICHE di uno SPAZIO VETTORIALE

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo $(K,+,\cdot)$

1) $\forall u \in V, \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot u = \underline{0} \iff \alpha = 0$ oppure $u = \underline{0}$

DIM

$\Leftarrow$ se $\alpha = 0$ allora $0 \cdot u = (0+0) \cdot u$ per la 3^a proprietà dello spazio vettoriale

abbiamo $0 \cdot u = (0 \cdot u) + (0 \cdot u)$ sommo ai 2 membri dell'uguaglianza $-0 \cdot u$

abbiamo dunque $0 \cdot u + (-0 \cdot u) = ((0 \cdot u) + (0 \cdot u)) + (-0 \cdot u)$, si ha così sfruttando l'associatività

$\underline{0} = 0 \cdot u + (0 \cdot u + (-0 \cdot u)) \Rightarrow \underline{0} = 0 \cdot u + \underline{0} \Rightarrow \underline{0} = 0 \cdot u$

Ragionamento simile per $u = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Se $\alpha \neq 0$ allora α è invertibile rispetto alla moltiplicazione del campo. Sia α^{-1} l'inverso di α

Per ipotesi abbiamo $\alpha \cdot u = \underline{0}$ allora moltiplichiamo α^{-1} a entrambi membri dell'uguaglianza e abbiamo quindi $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot u) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$.

Sappiamo che $\alpha^{-1} \cdot \underline{0}$ è uguale $\underline{0}$ sfruttiamo poi la 4^a proprietà degli spazi vettoriali e abbiamo $\Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u \Rightarrow 1 \cdot u$ che per la 5^a proprietà è $= u \Rightarrow u = 0$

2) $\forall \alpha \in K, \forall u \in V$ l'opposto di $\alpha \cdot u$ può essere $-(\alpha \cdot u) = (-\alpha) \cdot u = \alpha \cdot (-u)$

DIM $\alpha \cdot u + (-\alpha) \cdot u$ sfruttiamo la 3^a proprietà degli spazi vettoriali $\Rightarrow (\alpha + (-\alpha)) \cdot u \Rightarrow 0 \cdot u = \underline{0}$

se abbiamo $\alpha \cdot u + \alpha \cdot (-u)$ utilizzando la 2^a proprietà degli spazi vettoriali troviamo $\alpha \cdot (u + (-u))$ e $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$

3) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V \setminus \{\underline{0}\}$ se $\alpha \cdot u = \beta \cdot u$ allora i due scalari sono uguali

DIM abbiamo $\alpha \cdot u = \beta \cdot u$, sommiamo a entrambi i membri $-\beta \cdot u$ abbiamo dunque

$\alpha \cdot u + (-\beta \cdot u) = \beta \cdot u + (-\beta \cdot u)$ e ci troviamo $\alpha \cdot u + (-\beta \cdot u) = \underline{0}$ utilizzando la 3^a proprietà degli spazi vettoriali avremo $(\alpha + (-\beta)) \cdot u = \underline{0}$ MA $u \neq \underline{0}$ dunque per la 1^a proprietà deve essere $\alpha + -\beta = 0$.

Sono nel campo quindi $-\beta$ è l'opposto di α il che vuol dire $\alpha = \beta$

4) $\forall \alpha \in A \setminus \{0\}, \forall u, v \in V$ se $\alpha \cdot u = \alpha \cdot v$ allora $u = v$

DIM $\alpha \cdot u = \alpha \cdot v$; sommiamo a entrambi $-\alpha \cdot v \Rightarrow \alpha \cdot u + (\alpha \cdot (-v)) = \underline{0}$ sfruttando la 2^a proprietà.

$\alpha \cdot (u + (-v)) = \underline{0}$ MA $\alpha \neq 0$ per ipotesi $\Rightarrow$ il che vuol dire che $u = v$

LINEARMENTE CHIUSO

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo K e sia X un sottoinsieme di V. X si dice linearmente chiuso se:

- $X \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in X$ e $\forall \alpha \in K$ abbiamo che $u + v \in X$, $\alpha u \in X$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su K e sia X un sottoinsieme di V linearmente chiuso. Siccome X è lin. chiuso possiamo restringere le operazioni di V a X:

$+: V \times V \to V$

$+|_{X \times X}: X \times X \to X$

$(u,v) \rightsquigarrow u+v \in X$

$\cdot: K \times V \to V$

$\cdot|_{X \times X}: K \times X \to X$

$(\alpha,u) \rightsquigarrow \alpha u$

dunque sia X sottoinsieme di V si dice sottospazio di V se:

- X è linearmente chiuso
e
- $(X, +|_X, \cdot|_X)$ è uno spazio vettoriale

X con le operazioni ereditate da V

TEOREMA

Sia V spazio vettoriale.

Un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow W$ è linearmente chiuso

DIM

$\Rightarrow$ è ovvia per definizione

$\Leftarrow$ per ipotesi possiamo considerare le op. ristrette $+|_X$ e $\cdot|_X$

Esse ereditano tutte le proprietà di $+$ e $\cdot$. Rimane da dimostrare che $\underline{0} \in W$ e $\forall u \in W, -u \in W$

Considero $\underline{0}$ come $\overset{(zero)}{0} \cdot u$ ma se $0 \in K$ e $u \in W$ poiché W è lin. chiusa allora $0 \cdot u \in W$ cioè $\underline{0} \in W$

abbiamo poi $\forall u \in W \ \exists -u \in V$, si vuole dimostrare che $-u \in W$. Sappiamo che $-u$ può essere visto come $(-1) \cdot u$ ma $-1 \in K$ e $u \in W$ quindi $(-1)u = -u \in W$

Quindi è sufficiente l'ipotesi che W sia linearmente chiuso per essere anche sottospazio vettoriale di V.

ESEMPIO:

- $W \neq \emptyset \quad (0,P),(0,Q) \in W$

$\forall u,v \in W \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \alpha', \beta': \ u = \alpha(0,P) + \beta(0,Q) \ +$

$v = \alpha'(0,P) + \beta'(0,Q)$

$u+v = (\alpha+\alpha')(0,P) + (\beta,\beta')(0,Q) \in W$

dunque W chiusa rispetto a $+$

- $\gamma \in W, \quad u = \alpha(0,P) + \beta(0,Q) = \gamma(\alpha(0,P)) + \gamma(\beta(0,Q)) =$

$\gamma u = \gamma(\alpha(0,P) + \beta(0,Q)) = \gamma(\alpha(0,P)) + \gamma(\beta(0,Q)) =$

$= \gamma\alpha(0,P) + \gamma\beta(0,Q) \in W$

dunque w è chiusa per $\cdot$

COMBINAZIONI

Consideriamo $(V, +, \cdot)$ un spazio vettoriale su K. Sia $u_1, \dots, u_n$ una n-upla di vettori di V. Un vettore u si dice combinazione lineare di questa n-upla se esiste una n-upla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K^n$ tali che $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$

ESEMPIO:

$\mathbb{R}^3$ $u = (3,-2,4)$ $u_2 = (1,0,1)$ $(\alpha_1, \alpha_2) = (-2,1)$

$-2u_1 + u_2$ è una comb. lineare poichè

$-2(3,-2,4) + 1(1,0,1) = (-6,4,-3) + (1,0,1) = (-5,4,-7)$

se i vettori della n-upla sono a 2 a 2 distinti, posso parlare di insieme piuttosto che di n-upla

SISTEMA DI GENERATORI

le sottospazio vettoriale $L(x)$ si dice generato da x e x si dice sistema di generatori di $L(x)$. Quindi un sistema di generatori di V è un sottoinsieme S di V tali che $L(S) = V$

Uno spazio vettoriale V si dice Finitamente generato su un campo k. Se esiste un sottoinsieme Finito S di V tale che $L(S)=V$. Si noti che S può essere $\emptyset$ poiché il $\emptyset$ e sistema di genitori dello spazio nullo.

OSS $(V, K, +, \cdot)$

Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un sistema di generatori di V, cioè $L(S) = V$.

Definiamo adesso $T = S \cup \{u\}$ con $u \notin S$

T è ancora un sistema di generatori di V.

LEZIONE 5

CHIUSURE LINEARI

DEF

Consideriamo $(V,+,\cdot)$ un spazio vettoriale su K. Dato un sottoinsieme $X \neq \emptyset$ di V si dice chiusura lineare di X il sottoinsieme $L(X)$ di V, costituito da tutti e soli i vettori che sono combinazioni lineari di vettori di X. Dunque: $L(x)=\{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid n \in \mathbb{N}, u_1 \dots u_n \in X, \alpha_1 \dots \alpha_n \in K\}$

Se $X=\emptyset$ allora si pone $L(\emptyset) = 0$ (zero).

TEO

Sia $(V,+,\cdot)$ spazio vettoriale sul campo K e consideriamo X sott'insieme di V.

i) abbiamo che la chiusura lineare di X $L(x) \supseteq X$,

ii) $L(x)$ è linearmente chiuso

iii) se W è un sottospazio vettoriale di V tale che $X \subseteq W$ allora $L(x) \subseteq W$

DIM

(i) nel caso $X=\emptyset$ allora banalmente $X \subseteq L(x)=\{\underline{0}\}$

se $X \neq \emptyset$ possiamo considerare $\forall u \in X$ che $u = 1 \cdot u$ e dunque $\in L(X)$ di conseguenza $X \subseteq L(X)$

ii) sia $X \neq \emptyset$ e consideriamo $u, v \in L(x)$ abbiamo che:

- $\exists t \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1 \dots \alpha_t \in K, \exists u_1 \dots u_T \in X$: $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_t u_T$
- $\exists k \in \mathbb{N}, \exists \beta_1 \dots \beta_K \in K, \exists v_1 \dots v_K \in X$: $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_K v_K$

Supponiamo $t \leq K$, abbiamo che $u+v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_T u_T + \beta_t v_t + \beta_{t+1} v_{t+1} + \dots + \beta_K v_K$ banalmente abbiamo che $u+v$ è una combinazione lineare di vettori di X il che implica che $u+v \in L(x)$ dunque $L(x)$ è chiuso rispetto a $+$.

Consideriamo adesso $\gamma \in K$, abbiamo che $\gamma u = \gamma(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_T u_T) = \gamma(\alpha_1 u_1) + \dots + \gamma(\alpha_T u_T) = (\gamma\alpha_1)u_1 + \dots + (\gamma\alpha_T)u_T$ abbiamo dunque che γu è una combinazione lineare di X dunque $\gamma u \in L(x)$ di conseguenza $L(x)$ è linearmente chiuso

iii) Sia $u \in L(x)$ con $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_T u_T$ dobbiamo far vedere che $u \in W$. Per ipotesi $u_1 \dots u_T \in X$ e $X \subseteq W$ ma W è sottospazio vettoriale dunque $\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_T u_T \in W$ visto che W è chiuso rispetto a $\cdot$, e $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_T u_T \in W$ visto che W è chiuso rispetto a $+$. Abbiamo dimostrato che $u \in W$ il che implica che comunque prendiamo un vettore in $L(x)$ esso $\in$ al sottospazio W se W contiene X.

COROLLARIO

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vett. sul campo K e prendiamo 2 sottoinsiemi S,T di V. Essi generano lo stesso spazio vettoriale dunque $L(S)=L(T) \Rightarrow S \subseteq L(T)$ e $T \subseteq L(S)$

DIM

$\Rightarrow$ Sappiamo che $S \subseteq L(S)$ e per ipotesi $L(S)=L(T)$ dunque $S \subseteq L(T)$ e naturalmente $T \subseteq L(T)$
$L(T)=L(S)$ quindi $T \subseteq L(S)$

$\Leftarrow$ Abbiamo che $S \subseteq L(T)$ dunque, poiché $L(T)$ è un sottospazio vettoriale, si ha che $L(S) \subseteq L(T)$
La stessa cosa vale per $T \subseteq L(S)$ sempre poiché $L(S)$ è un sottospazio vettoriale, abbiamo $L(T) \subseteq L(S)$
e poiché $L(S) \subseteq L(T)$ e $L(T) \subseteq L(S)$ allora $L(S)=L(T)$

ESEMPIO

• $\mathbb{R}^3$ $\quad S=\{\underset{u_1}{(1,0,1)},\underset{u_2}{(0,1,1)}\}$ $\quad T=\{\underset{v_1}{(1,1,2)},\underset{v_2}{(2,-1,1)},\underset{v_3}{(0,2,2)}\}$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1+u_2 \\ v_2 &= 2u_1+(-1)u_2 \\ v_3 &= 2u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T \subseteq L(S)$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}v_3 \\ v_1 &= u_1+\frac{1}{2}v_3 \Rightarrow u_1 = v_1-\frac{1}{2}v_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S \subseteq L(T)$$

Quindi
$L(S)=L(T) \neq V$

LINEARMENTE (IN)DIPENDENTE

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo K.
Una n-upla di vettori di V si dice linearmente dipendente se esiste un n-upla di scalari $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tutti nulli tale che $\underline{0}=\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_n u_n$ cioè il valore nullo si esprime come combinazione lineare di vettori della n-upla. La n-upla di vettori di V si dice linearmente indipendente se non è lin. dip. cioè se: $\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K^n$ abbiamo che $\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_n u_n=\underline{0}$.
Allora gli scalari $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ devono essere tutti nulli

OSS Preso $\{\underline{0}\}$ per cui $\underline{0}=\alpha\cdot\underline{0}$ $\forall \alpha \in K$ allora $\{\underline{0}\}$ è LIN. DIP.

ESEMPIO

• $K[x]$ $\quad \{1+x, x+x^2\}$ è LIN. IND.

$\alpha,\beta \in K=\mathbb{R}$

$\alpha(1+x)+\beta(x+x^2)=0 \Rightarrow \alpha+(\alpha+\beta)x+\beta x^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$ $\quad \alpha=0=\beta$ quindi è lin. indi.

Spazio generato da tutti i vettori tranne u

TEOREMA

Considerato un sottoinsieme X dello spazio vettoriale V. X è LIN. DIP $\Leftrightarrow \exists u \in X : u \in L(X \setminus \{u\})$ inoltre in tal caso $L(X) = L(X \setminus \{u\})$

DIM

Caso 1) Nel caso in cui X ha un solo elemento $|X| = 1$ allora

X è LIN. DIP $\Leftrightarrow X = \{\underline{0}\}$ in tal caso $X \setminus \{\underline{0}\} = \underline{0}$ e abbiamo che

$L(\emptyset) = L(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$

Caso 2) Consideriamo il caso in cui $|X| \geq 2$

$\Rightarrow$ • Per ipotesi esiste un sottoinsieme $\{u_1, \dots, u_t\}$ Finito di X linearmente dipendente dunque $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ non tutti nulli tale che $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = \underline{0}$. Possiamo considerare $\alpha_t \neq 0$ il che vuol dire che $\exists \alpha_t^{-1} \in K$ reciproco di α_t

Moltiplico a destra e sinistra per α_t^{-1} ottenendo $u_t = -(\alpha_t^{-1}\alpha_1)u_1 + \dots - (\alpha_t^{-1}\alpha_{t-1})u_{t-1} \in L(u_1, u_{t-1}) \subseteq L(X \setminus \{u_t\})$

Abbiamo dimostrato che $u \in X : u \in L(X \setminus \{u\})$

• Adesso bisogna dimostrare che $\boxed{L(X) = L(X \setminus \{u_t\})}$. Banalmente già sappiamo che $X \setminus \{u_t\} \subseteq X$ dunque $L(X \setminus \{u_t\}) \subseteq L(X)$, dobbiamo dimostrare il viceversa:

Prendiamo $u \in L(X)$ quindi $\exists$ vettori $v_1, \dots, v_p \in X$ e scalari $\beta_1, \dots, \beta_p \in K$: $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p$.

Abbiamo $u \in L(X \setminus \{u_t\})$ se $u_t \neq v_i$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.

se invece $u_t = v_i$ per qualche i, supponendo $i = p$ abbiamo che: $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p u_t$ ma noi sappiamo scrivere u_t come combinazione lineare. Abbiamo dunque $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p(-(\alpha_t^{-1}\alpha_1)u_1 + \dots - (\alpha_t^{-1}\alpha_{t-1})u_{t-1})$

quindi anche in questo caso $u \in L(X \setminus \{u_t\})$ quindi $L(X) \subseteq L(X \setminus \{u_t\}) \Rightarrow \boxed{L(X) = L(X \setminus \{u_t\})}$

$\Leftarrow$

Per ipotesi $\exists u \in X : u \in L(X \setminus \{u\})$ allora $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p$ ed $\exists v_1, \dots, v_p \in X \setminus \{u\}$: $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$

$\Rightarrow \underline{0} = -u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$ ma $-u = (-1)u$ e poiché -1 non è nullo allora possiamo tranquillamente scrivere il vettore nullo $\underline{0}$ come combina. lin. di un sottoinsieme finito di vettori di X con scalari non tutti nulli il che vuol dire che abbiamo un sottoinsieme di X dipendente $\rightarrow X$ è dipendente

LEZIONE 6

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Un sistema di generatori indipe. è detto base.
Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e K^n uno spazio vettoriale numerico. Sia ora $B = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,0\dots,1)\}$
$|B| = n$ Allora B si dice base canonica

BASI e SISTEMI DI GENERATORI

$K[x]$ non ha sistemi di generatori finito. Cioè $\forall S \subseteq K[x] : |S| = n \in \mathbb{N}$
$L(S) \subsetneq K[x]$

DIM $S = \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ $\alpha_1 = gr(p_1), \dots, \alpha_n = gr(p_n)$ $\alpha = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$
$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ $gr(\alpha_1 p_1, \dots, \alpha_n p_n) \leq \alpha$
Ma allora sicuramente $x^{\alpha+1} \notin L(S)$, ma $x^{\alpha+1} \in K[x]$
Quindi $L(S) \subsetneq K[x]$, cioè è incluso propriamente

TEOREMA D'ESTRAZIONE DI UNA BASE

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato, e sia S un sistema di generatori finito di V allora esiste una base B di V tale che B è contenuta in S e B si può estrarre.

DIM

i) Se $V = \{0\}$ allora $S = \emptyset$ quindi è una base di $\{0\}$ oppure $S = \{0\}$ cioè è LIN. DIP quindi possiamo levare il vettore nullo. Abbiamo quindi che $\{0\} = L(\emptyset) = L(S \setminus \{0\})$ dunque c'è una base contenuta in S.

ii) Se $V \neq \{0\}$ e S è LIN. IND. allora la base $B = S$.
se S è LIN. DIP. allora $\exists u \in S$, ad esempio u_t, tale che $L(S \setminus \{u_t\}) = L(S)$. Considero dunque $S' = S \setminus \{u_t\}$ e ripeto se S' è LIN. IND. Allora $B = S'$ altrimenti ripeto fino ad ottenere un sottoinsieme LIN. IND.

ESEMPIO

in $\mathbb{R}^2$ prendiamo $S = \{(1,1), (-3,3), (0,1), (2,7)\}$ è LIN. DIP poiché
$(-3,3) = -3(1,1) + 0(0,1) + 0(2,7)$ quindi $S' = S \setminus \{(-3,3)\} = \{(1,1), (0,1), (2,7)\}$

consideriamo $\alpha(1,1) + \beta(0,1) + \gamma(2,7) = (0,0)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -2\gamma \\ -2\gamma + \beta + 7\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -5\gamma \end{cases}$
$(-2,-2) + (0,-9) + (2,7) = (0,0)$

possiamo eliminare uno tra $(1,1)(0,1),(2,7)$. Eliminiamo $(2,7)$ e otteniamo $S'' = S' \setminus \{2,7\} = \{(1,1),(0,1)\}$

LEMMA DI STEINITZ

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale, su un campo K finitamente generato e sia $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ un sistema di generatori di V finito con n elementi. Un sottoinsieme finito $X=\{v_1,\dots,v_m\}$ di V è LIN. DIP. se $m>n$.

Se X è LIN. IND. invece m è $\leq n$, dunque un sottoinsieme indipendente non può avere più elementi di un sistema di generatori.

DIM

Si suppone che $\underline{0} \notin X$, se no banale. Per ipotesi $L(S)=V$ in particolare si ha

$$\boxed{\exists \gamma_1,\dots,\gamma_n \in K \mid v_1=\gamma_1 u_1+\dots+\gamma_n u_n.}$$

Poichè $v_1 \neq \underline{0}$ supponiamo sia γ_1 non nullo, allora $\exists \gamma_1^{-1}$ e moltiplichiamo a destra e sinistra per γ_1^{-1} ottenendo: $\boxed{\alpha_1^{-1}v_1=u_1+\alpha_1^{-1}\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_1^{-1}\alpha_n u_n}$ porto u_1 a dx così ho a sx una combinazione lineare dei vettori $L=(v_1,u_2,\dots,u_n)$ ε i vettori $u_1,u_2,\dots,u_n$. Si ha quindi $\boxed{L(v_1,u_2,\dots,u_n)\subseteq L(u_1,\dots,u_n) \text{ ma } L(u_1,\dots,u_n)=L(S)=V}$ dunque $L(v_1,u_2,\dots,u_n)\subseteq V$.

Ma a sua volta $V\subseteq L(v_1,u_2,\dots,u_n)$ dunque abbiamo $V=L(v_1,u_2,\dots,u_n)$. Quindi sostituendo un vettore di X a un vettore di S si può avere ancora un sistema di generatori.

Sapendo che $V=L(v_1,u_2,\dots u_n)$ e $v_2\in V$ allora: $\exists \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n \in K$ tale che $v_2=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\dots+\beta_n u_n$.

In questo caso si hanno 2 possibilità:

1) se accade che $\beta_2,\dots,\beta_n$ sono tutti nulli allora resta che $v_2=\beta_1 v_1$. Ho che $v_2\in X$ si scrive come combinazione lineare di $v_1\in X$ il che vuol dire che $\{v_1,v_2\}$ è LIN. DIP e poichè esso è un sottoinsieme di X allora X è linearmente dip.

2) Altrimenti $\exists \beta_i\neq 0$ con $i\geq 2$, tipo $\beta_2\neq 0$, allora $\exists \beta_2^{-1}\in K$ quindi:

$$\boxed{\begin{aligned}&\beta_2^{-1}v_2=(\beta_2^{-1}\beta_1)v_1+(\beta_2^{-1}\beta_2)u_2+\dots+(\beta_2^{-1}\beta_n)u_n \Rightarrow\\ &\qquad u_2=\beta_2^{-1}v_2-(\beta_2^{-1}\beta_1)v_1-(\beta_2^{-1}\beta_3)u_3-\dots(\beta_2^{-1}\beta_n)u_n \in L(v_1,v_2,u_3,\dots,u_n)\\ \Rightarrow\ &V=L(S')\subseteq L(v_1,v_2,u_3,\dots,u_n)\subseteq V, \text{ ma allora } S''=\{v_1,v_2,u_3,\dots,u_n\}\Rightarrow L(S'')=V\end{aligned}}$$

Reiterando il ragionamento, troviamo la dipendenza come nel caso (1) oppure $L(v_1,\dots,v_n)=V=v_{n+1},\dots,v_m$ dato che $m>n$ per ipotesi

COROLLARIO

$(V,K,+,\cdot)$ sp. vett. f.g. Sia $S\subseteq V: L(S)=V$. Allora $T\subseteq V$: T LIN.IND $\Rightarrow |T|\leq|S|$

DIM

$|T|>|S| \Rightarrow T$ è LIN. DIP., dal lemma di Steinitz
Ma allora ricordando una tautologia $[(p \Rightarrow \neg\sigma) \Leftrightarrow (\neg p \Leftarrow \neg\sigma)]$
abbiamo che $|T| \leq |S| \Leftarrow T$ è LIN. IND.

N.B Non si tratta di una doppia implicazione.

TEOREMA D'EQUIPOTENZA DI BASI

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo K, finitamente generato. Tutte le basi di V sono finite e hanno la stessa cardinalità

DIM

Per ipotesi esiste un sistema di generatori S di V finito. Sia $B \subseteq S$ una base estratta da S e sia la cardinalità di $B = n$. Consideriamo poi B' un'altra base di V. Per il corollario al lemma di Steinitz, tutti i sottoinsiemi finiti di B' non hanno più vettori di B essendo B' LIN. IND. si ha dunque che $|B'| \leq |B|$. Scambiando il ruolo di B e B' si ha naturalmente $|B| \leq |B'|$ dunque troviamo alla fine che $|B| = |B'|$

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

PROP

Sia V uno spazio vettoriale. Consideriamo un insieme $X \subseteq V$ di t elementi LIN. IND $\Rightarrow X = \{u_1, \dots, u_t\}$. Se $\exists u \in V \mid u \notin L(X)$ allora: $X \cup \{u\}$ è ancora LIN. IND.

u NON è comb. lineare dei vettori di X

DIM

Dimostriamo per assurdo: supponiamo che $X \cup \{u\} = \{u_1, \dots, u_t, u\}$ è LIN. DIP. dunque $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha \in K$ non tutti nulli : $\underline{0} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \alpha u$.

Possiamo avere 2 casi:

1) Sia $\alpha = 0$ abbiamo $\underline{0} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ NON tutti nulli ma ciò è assurdo poiché i vettori $u_1, \dots, u_t$ sono LIN. IND.
2) Sia $\alpha \neq 0$ abbiamo che $\exists \alpha^{-1} \in K$ che è il reciproco di α. Moltiplichiamo a dx e sx di $\underline{0}$ per α^{-1} ottenendo $\underline{0} = \alpha^{-1}\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_t u_t + u$ possiamo dunque ottenere $u = -\alpha^{-1}\alpha_1 u_1 + \dots - \alpha^{-1}\alpha_t u_t$ ma ciò è assurdo poiché sappiamo che $u \notin L(u_1, \dots, u_t) = L(X)$

DIMENSIONE

$(V, K, +, \cdot)$ f.g

La dimensione di V è il numero di vettori di una sua base

PROP

Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio F.g. sul campo K avente dimensione finita $=n$. Sia $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ un insieme di cardinalità $=n$, abbiamo che S è LIN.IND. $\Leftrightarrow$ S è un sistema di generatori di V

DIM

contenuto ma diverso

$\Rightarrow$ Per assurdo diciamo S NON è un sistema di generatori dunque $L(S) \subsetneq V$. Allora $\exists u \in V : u \notin L(S)$. Noi sappiamo che $S \cup \{u\}$ è LIN. IND. ma $S \cup \{u\}$ ha cardinalità $n+1$ che è maggiore della dimensione di V e ciò è assurdo per il lemma di Steinitz

$\Leftarrow$ Per assurdo S è LIN. DIP. allora: $\exists u \in S$, supponiamo u_n, tale che $L(S)=L(S \setminus \{u_n\})$ e $u_n \in L(S \setminus \{u_n\})$ quindi $L(S \setminus \{u_n\})$ è un sistema di generatori di V con $n-1$ vettori allora esisterà una base di V contenuta in $S \setminus \{u_n\}$ che quindi avrà meno di n vettori e ciò è assurdo.

DEF di DIMENSIONE:

Sia $(V,+,\cdot)$ f.g su K, il numero di vettori di una qualsiasi base di V si dice dimensione di V.

LEZIONE 7

TEOREMA DI COMPLETAMENTO DI UNA BASE

Sia V uno spazio vettoriale f.g. su K avente dimensione finita n e sia X un sottoinsieme LIN. IND. di V avente cardinalità $t<n$. Allora $\exists$ un sottoinsieme Y di V avente cardinalità $n-t$ tale che $X \cup Y$ è una base di V.

DIM

Siccome la cardinalità di X, cioè $t<n$ allora X non è base di V, e poiché è LIN. IND. allora $L(X) \subsetneq V$. Dunque $\exists u_{t+1} \in V : u_{t+1} \notin L(X)$ e sapendo che X è LIN. IND. allora $X' = X \cup \{u_{t+1}\}$ è LIN. IND. Abbiamo dunque che X' ha cardinalità $t+1$ e abbiamo che se $t+1=n$ allora X' è BASE di V altrimenti X' NON è base ma X' è LIN. IND quindi X' non è SISTEMA DI GENERATORI di V quindi $L(X') \subsetneq V$.

Posso allora ricominciare e continuare fino a quando non ha aggiunto abbastanza elementi da trovare un sottoinsieme che contiene X è LIN. IND. e ha potenza n.

PROP

Sia W un sottospazio vettoriale di V.

i) $\dim W = 0 \iff W = \{\underline{0}\}$;

ii) $\dim W \le \dim V = n$

iii) $\dim W = \dim V \iff W = V$

DIM

i) $\Rightarrow$ Per ipotesi, $\emptyset$ è una base di $W = L(\emptyset) = \{\underline{0}\}$

$\Leftarrow$ $W = \{\underline{0}\}$ $\quad S = \{\underline{0}\}$ è LIN. DIP $\Rightarrow \underline{0} \in L(S) = L(S \setminus \{\underline{0}\}) = L(\emptyset) \Rightarrow \emptyset$ è una base $\Rightarrow$ $\dim \{\underline{0}\} = 0$

ii) Sia B_W una base di W, dunque B_W è un sottoinsieme di V linearmente indipendente e $L(B_W) = W$. Poiché B_W è un sottoinsieme di V LIN. IND allora per il corollario al lemma di Steinitz abbiamo che $|B_W| \le \dim(V)$ ma $|B_W| = \dim(W)$ quindi $\dim W \le \dim V$

iii) $\Leftarrow$ Banale

$\Rightarrow$ B_W base di W. La cardinalità di B_W è $\le n$ poiché $n = \dim V$. Se $|B_W| = n$ allora B_W sarebbe un insieme LIN. IND contenuto in V con la cardinalità $= \dim V$ $\Rightarrow B_W$ è un sistema di generatori di V. Allora B_W è una base di V quindi $L(B_W) = V$ a sua volta $L(B_W) = W$ e possiamo dire $W = V$

Basi ordinate

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $\dim V = n$

Sia $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base ordinata di V. Allora:

$\forall u \in V$, $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in K^n : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

DEF Si dice che gli scalari $x_1, \dots, x_n$ sono le componenti di un vettore in B e che $(x_1, \dots, x_n)$ è la n-pla delle componenti di u in B.

DIM Per ipotesi i vettori $e_1, \dots, e_n$ formano una base di V, quindi in particolare formano un sistema di generatori:

$\forall u \in V$ $\exists x_1, \dots, x_n \in K : u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

Sia $(y_1, \dots, y_n) \in K^n : u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, procedo a sottrarre. Ottengo

$$0 = u - u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n - y_1 e_1 - \dots - y_n e_n \overset{\text{metto in evidenza}}{=} \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in K} e_1 + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in K} e_n$$

$$e_1, \dots, e_n \neq \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

, come volevasi dimostrare

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\quad B((1,1),(1,-1))$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^2$

Determinare le componenti di $u = (5,-3)$ in B

$(5,-3) = x_1(1,1) + x_2(1,-1) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

$$\begin{cases} 5 = x_1 + x_2 \\ -3 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = (1,4)$$

PROP Si considera un'applicazione

$\Phi_B : V \to K^n$

associa

$u \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — n-upla delle componenti di u in B

Φ_B si dice isomorfismo di V associato a B

Riferimento

PROP Φ_B è biettiva

DIM

$\boxed{\text{iniett.}}$ Siano $u, v \in V$ e $u \neq v$ Tesi: $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u) \neq \Phi_B(v) = (y_1, \dots, y_n)$

Per assurdo: $\Phi_B(u) = \Phi_B(v) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = v$ ← assurdo

$\boxed{\text{surri.}}$ Sia $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ Basta osservare che se $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$ allora $\Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$

LEZIONE 8

SOTTOSPAZIO VETTORIALE : unione ed intersezione

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo K e $W_1, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V

i) $W_1 \cap W_2, \dots \cap W_p$ è un sottospazio vettoriale di V

ii) $W_1 \cup W_2, \dots \cup W_p$ non è un sottospazio vettoriale di V

DIM

sappiamo sicuramente che $0 \in W_1 \cap \dots \cap W_p \neq \emptyset$. La prima cosa da dimostrare è che $\forall u, v \in W_1 \cap \dots \cap W_p$ allora $u + v \in W_1 \cap \dots \cap W_p$. Abbiamo che $u, v \in W_1$, $u, v \in W_2, \dots, u, v \in W_p$ ma poiché $W_1, W_2, \dots, W_p$ sono tutti sottospazi di V dunque tutti chiusi rispetto alla somma allora $u + v \in W_1, u + v \in W_2, \dots, u + v \in W_p$ di conseguenza $u + v \in W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_p$.

dobbiamo dimostrare la chiusura rispetto al prodotto.

$\forall u \in W_1 \cap \dots \cap W_p$, u naturalmente $\in$ a $W_1, W_2, \dots, W_p$ che sono tutti sottospazi dunque tutti chiusi rispetto alla moltiplicazione $\Rightarrow \forall \alpha \in K$ abbiamo che $\alpha u \in W_1, \alpha u \in W_2, \dots, \alpha u \in W_p$ e di conseguenza $\alpha u \in W_1 \cap \dots \cap W_p$

PROP $(V, K, +, \cdot)$ $p \in \mathbb{N}^*$

Sia $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V

$W_1 \cup W_2 \dots \cup W_p$ non è generalmente un sott. vettoriale, ma la chiusura lineare della loro unione, in particolare, equivale al sottospazio somma così definito:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1 \wedge \dots \wedge w_p \in W_p \}$$

DIM Notiamo innanzitutto che $W_1 + \dots + W_p$ è diverso dal vuoto e stabile rispetto alle operazioni per come è stato definito. Dato che è linearmente chiuso, è anche un sottospazio vettoriale. Non resta che esplicitare che $L(W_1 \cup \dots \cup W_p) = W_1 + \dots + W_p$.

$\subseteq$: ricordiamo che $W_1 \cup \dots \cup W_p \subseteq W_1 + \dots + W_p \Rightarrow L(W_1 \cup \dots \cup W_p) \subseteq W_1 + \dots + W_p$.
$w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 = w_1 + \underline{0} + \dots + \underline{0}$; $w_2 \in W_2 \Rightarrow w_2 = \underline{0} + \dots + \underline{0}$ etc

$\supseteq$ $u \in W_1 + \dots + W_p \Rightarrow \exists w_1 \in W_1, \dots, w_p \in W_p : u = w_1 + \dots + w_p \in L(W_1 \cup \dots \cup W_p)$
cioè u è comb. lineare di vettori che appartengono a $W_1 \cup \dots \cup W_p$

RELAZIONE DI GRASSMAN

Se la somma di W_1 e W_2 sono sottospazi finitamente generati di V abbiamo che:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

SOMMA DIRETTA

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi di V

$W_1 + W_2 + \dots + W_p$ si dice somma diretta se $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ abbiamo che

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$$

PROP $W_1, \dots, W_p \subseteq V$ sott. vett.

$\dim W_1 = n_1$ $B_1 = \{e_{11}, \dots, e_{1n_1}\}, \dots, \dim W_p = n_p$ $B_p = \{e_{p1}, \dots, e_{pn_p}\}$

Se $W_1 + \dots + W_p = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$ allora $(e_{1_1}, \dots, e_{1n_1}, \dots, e_{p_1}, \dots, e_{pn_p})$ è LIN. IND

ed è una base di $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$

DIM si procede per induzione per $p=1$, la proposizione è banalmente vera. Supponiamo valga per $(p-1)$ e verifichiamo per p.

$$\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1n_1} e_{1n_1} + \alpha_{2_1} e_{2_1} + \dots + \alpha_{2n_2} + \dots + \alpha_{p_1} e_{p_1} + \dots + \alpha_{pn} e_{pn} = \underline{0} \iff$$

$$\underbrace{\alpha_{1_1} e_{1_1} + \dots + \alpha_{1n_1} e_{1n_1}}_{\in W_1} = \underbrace{-\alpha_{2_1} e_{2_1} - \dots - \alpha_{2n_2} - \dots - \alpha_{p_1} e_{p_1} - \dots - \alpha_{pn} e_{pn}}_{\in W_2 + \dots W_p} = \underline{0} \Rightarrow \alpha_{1_1} = \dots = \alpha_{1n_1} = 0$$

per def di somma diretta

Per induzione la proposizione è vera per $p-1$ sp. vett, ossia $(e_{2_1}, \dots, e_{2n_2}, \dots, e_{p_1}, e_{pn_p})$ è LIN. IND. e per ipotesi di induzione $\alpha_{2_1} = \dots = \alpha_{2n_2} = \dots = \alpha_{p_1} = \dots = \alpha_{pn_p} = 0$