OPERAZIONE INTERNA

Sia $S \neq \emptyset$

$f: S \times S \to S$

OPERAZIONE ESTERNA

Siano $S, A \neq \emptyset$

$\perp : S \times A \to S$

Quest'operazione sarà detta "operazione ESTERNA ad S con dominio di operatori in A"

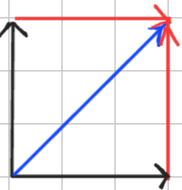
OSS

Tutte le operazioni INTERNE sono ESTERNE $(A = S)$

Es.

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$((a,b),(c,d)) \to (a+c, b+d)$



$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$((a,b),c) \to (a \cdot c, b \cdot c)$

$\mathbb{R}^n$ (n intero positivo)

$\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\underline{a}$ è detto vettore numerico di ordine n

PRODOTTO SCALARE STANDARD

$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} a = (a_1, a_2, ..., a_n) \\ b = (b_1, b_2, ..., b_n) \end{array}\right. \longrightarrow a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

Il PRODOTTO SCALARE STANDARD non un' operazione ne INTERNA ne ESTERNA

Es.

$n=2$ $\quad (3,4) \bullet (2,6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 6 + 24 = 30$

PROPRIETA' (FORMA BILINEARE DEFINITA POSITIVA)

① $a \bullet b = b \bullet a$ SIMMETRIA

② $(h \cdot a + k b) \bullet \underline{c} = h(\underline{a} \bullet \underline{c}) + k(\underline{b} \bullet \underline{c})$

$\underline{a} \bullet (h \underline{b} + k \underline{c}) = h(\underline{a} \bullet \underline{b}) + k(\underline{a} \bullet \underline{c})$ BILINEARITA'

③ $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0 \quad \wedge \quad \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = (0,0,\dots,0)$ DEFINITO POSITIVO

OSS

$\underline{a}$ = n-pla, vettore

sse = se e solo se

MATRICE (in $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} \cdots\cdots & a_{2m} \\ a_{n1} \cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

n righe

m colonne

$n \times m$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; 3 \times 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; 2 \times 3$$

$$A : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{nm})$$

$M_{n,m}(\mathbb{R})$ e' l' INSIEME delle matrici su $\mathbb{R}$

con n righe e m colonne

In alternativa $M_{n,m}$ o $\mathbb{R}_{n,m}$

OPERAZIONI MATRICIALI

SOMMA

$+ : \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R}_{n,m} \longrightarrow \mathbb{R}_{n,m}$ (interna)

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1m} \\ a_{n1} \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} \dots & b_{1m} \\ b_{n1} \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{n1}+b_{n1} \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

PRODOTTO

$\cdot : \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{n,m}$ (esterna)

$$((a_{ij}), k) \longrightarrow (k a_{ij})$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, 2 \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGA × COLONNA

$\bullet : \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R}_{m,l} \longrightarrow \mathbb{R}_{n,l}$

$$((a_{ij}, b_{ij})) \longrightarrow (c_{ij})$$

$$\left.\begin{array}{l} i\text{-esima riga di } (a_{ij}) = A \\ j\text{-esima colonna di } (b_{ij}) = B \end{array}\right\} a_i \bullet b^j = c_{ij}$$

$$b^j = (b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{m,j})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$(1,2,0)\cdot(0,1,2) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 =$

$(3,4,1)\cdot(0,1,2) = 3\cdot 0 + 4\cdot 1 + 1\cdot 2 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$2\times 3 \quad 3\times 1 = 2\times 1$

$AB = (a_i \cdot b^j)$

La matrice risultante avrà il numero di COLONNE della seconda e il numero di RIGHE della prima

OSS

Per effettuare il prodotto, il numero di RIGHE della prima matrice devono essere uguali al numero di COLONNE della seconda

PROPRIETA' DEL PRODOTTO RIGA x COLONNA

DISTRIBUTIVITA'

$\forall A \in \mathbb{R}_{m,n} \wedge B, C \in \mathbb{R}_{n,q}$

$A(B+C) = AB + AC$

DIMOSTRAZIONE

$A = a_{ij} \qquad B = b_{ke} \qquad C = c_{op}$

$$A(B+C) = a_{ij}\,\underbrace{(b_{ke} + c_{ke})}_{d_{ke}} = (\underline{a}_i \cdot \underline{d}^j) = (\underline{a}_i \cdot (\underline{b}^j + \underline{c}^j))$$

$$= (a_i \cdot \underline{b}^j) + (\underline{a}_i \cdot \underline{c}^j) = AB + AC$$

② $\forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $\forall C \in \mathbb{R}_{n,q}$

$(A+B)C = AC + BC$

③ $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' un caso particolare

MATRICE IDENTICA

E' una matrice QUADRATA, la cui DIAGONALE PRINCIPALE e' formata da tutti 1, i restanti sono tutti 0

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ MATRICE IDENTICA DI ORDINE 2

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Diagonale principale = 1

OSS

$\forall A \in \mathbb{R}_n$

$I_n A = A I_n = A$ (due matrici QUADRATE)

MATRICI SCALARI

Sono matrici date dal prodotto di una matrice IDENTICA per un numero scalare

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ MATRICE SCALARE DI ORDINE 3

OSS

- Tutte le matrici scalari COMMUTANO con matrici dello stesso ordine: $AS = SA$ S, A matrici di ordine n

- I valori diversi da 0 devono essere tutti uguali

MATRICI DIAGONALI

Sono matrici i cui valori sono tutti nulli al più della diagonale principale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

OSS

- GENERALMENTE NON commutano
- la MATRICE SCALARE è una particolare matrice DIAGONALE

4 $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,q}, \forall h \in \mathbb{R}$

$$A(hB) = h(AB) = (hA)B$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la prima uguaglianza

$$(a_{ij})[h(b_{ij})] = (a_{ij})\underbrace{(hb_{ij})}_{c_{ij}} = (a_i \cdot c^j)$$

$$(a_i \cdot c^j) = (a_i \cdot hb^j) = h(a_i \cdot b^j)$$

5 $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,q}, \forall C \in \mathbb{R}_{q,j}$

$A(BC) = (AB)C$ ASSOCIATIVITA'

DIMOSTRAZIONE

$D = BC$

$$a_i \cdot d^j = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} d_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{y} (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j})\right)\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n,y} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}$$

OSS

$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}_1$ = matrici di ordine 1

MATRICE TRASPOSTA

$t: \mathbb{R}_{n,m} \to \mathbb{R}_{m,n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \qquad\qquad A^t$

$a_i \xrightarrow{t} (a_i)^t = a_J$

PROPRIETA' DELLE MATRICI TRASPOSTE

$A \in \mathbb{R}_{m,n}\ ,\ B \in \mathbb{R}_{n,o}$

1. $(AB)^t = B^t A^t$ $\qquad\qquad A^t = A'$

DIMOSTRAZIONE

$D = (AB)^t \qquad E = B^t A^t \qquad C = AB$

$A, B \to AB \xrightarrow{t} (AB)^t$ svolgo prodotto e poi trasposizione

$$d_{iJ} = c_{Ji} = a_J b_i = \sum_{l=1}^{n} a_{Jl} b_{li} = \sum_{l=1}^{n} a'_{lJ} b'_{il} = \sum_{l=1}^{n} b'_{il} a'_{lJ}$$

$$\sum_{l=1}^{n} b'_{il} a'_{lJ} = b'_i \cdot a'^J = e_{iJ}$$

② $B^t A^t \neq A^t B^t$ (in generale)

$(ABC)^t = C^t B^t A^t$

③ $(hA + KB)^t = h(A)^t + K(B)^t$ $\quad h, K \in \mathbb{R}$

in generale $(h_1 A_1 + h_2 A_2 + \dots h_n A_n)^t = h_1 (A_1)^t + \dots h_n (A_n)^t$

④ $(A^t)^t = A$

MATRICE A GRADINI

Sono matrici in cui il NUMERO DI ZERI che precedono il primo elemento diverso da 0 (PIVOT) in ogni riga AUMENTA di riga in riga fino ad eventuali righe costituite da soli 0.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

OSS

A priva di righe nulle $\Rightarrow$ n righe $\leq$ n colonne

OSS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n} \qquad A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$$ è un' abbreviazione

$\underline{a}_i$ = tutta la riga con indice (delle righe) i

OPERAZIONI ELEMENTARI DI RIGA

① $E_1^{ij} : \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$ $\qquad i < j$

$$A \longrightarrow E_A^{ij}(A) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$$

La matrice risultante scambia le RIGHE $\underline{a}_i$ e $\underline{a}_j$ di A

② $E_2^{h,i}: \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A \longrightarrow E_2^{h,i}(A) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ h\underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix} \qquad \underline{a}_i \to h\underline{a}_i$$

La matrice risultante ha la i-esima riga MOLTIPLICATA per h

③ $E_3^{i,j}: \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad i \neq j$

ad $\underline{a}_j$ SOSTITUISCE $\underline{a}_i + \underline{a}_j$

Es.

$$E_1^{12}\left[\begin{pmatrix} 102 \\ 342 \\ 100 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 342 \\ 102 \\ 100 \end{pmatrix}$$ scambio 1ª riga con 2ª riga

$$E_2^{31}\left[\begin{pmatrix} 123 \\ 456 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 369 \\ 456 \end{pmatrix}$$ moltiplico 3 per la 1ª riga

$$E_3^{12}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ la 2ª riga è data dalla 1ª + 2ª riga

OSS

- Possiamo definire una quarta operazione combinando E_2 ed E_3:

$E_4^{h_{ij}} : \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$

$\underline{a}_j \longrightarrow (h\,\underline{a}_i) + \underline{a}_j$ moltiplico la i-esima riga per h e sostituisco la j-esima riga con la somma tra queste due $(h\underline{a}_i + \underline{a}_j)$

- $i \neq j$ $\quad E_4 \not\Rightarrow E_2 \;/\; E_4 \Rightarrow E_3 \quad (h=1)$

  $i = j$ $\quad E_4 \Leftrightarrow E_2, E_3$

COROLLARIO

Se A' è una matrice che si può ottenere da A mediante un numero finito di OPERAZIONI ELEMENTARI, allora diremo che

A e A' sono EQUIVALENTI (per righe)

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2^{(-2)1}]{} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3^{12}]{} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE

Per ogni matrice esiste una MATRICE A GRADINI ad essa EQUIVALENTE

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per induzione sul numero di righe

$A \in \mathbb{R}_{n,m}$

- $n=1$ $\quad A=(a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots, a_{1m})$ È già a gradini ✓

- $n>1$ $\quad$ Se $A=0$ è banale

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

a^j prima colonna non nulla

In a^j ci sarà almeno un elemento diverso da 0, tramite E_1 possiamo scambiare a_{1j} (ipotizzando che sia 0) con la riga in cui $a_{ij} \neq 0$

A questo punto possiamo supporre $a_{1j} \neq 0$.

Per iniziare a "costruire" i gradini dobbiamo annullare tutta la a^j tranne a_{1j}

Applichiamo E_4:

$\underline{a}_2 \to k\underline{a}_1 + \underline{a}_2 \qquad (k = -a_{2j}\, a_{1j}^{-1})$

Così facendo a_{2j} è sicuramente 0

Possiamo iterare le successive righe e colonne ✓

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4^{(-1)1\,2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1^{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4^{(-3)2\,3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(superfluo)

(in questo esempio la prima riga è già ordinata a gradini)

OSS

La forma (a gradini) NON è UNICA

EQUAZIONI LINEARI

Chiamiamo EQUAZIONE LINEARE nel campo $\mathbb{R}$ nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ un'equazione del tipo:

$$a x + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \qquad a_i, b \in \mathbb{R}$$

a_i è l'i-esimo COEFFICIENTE dell'incognita x_i

b è il TERMINE NOTO

Es.

$$2x_1 + 3x_2 = e$$

se $b=0$ avremo un' EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA

SISTEMA LINEARE di m equazioni in n incognite

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + \end{cases}$$

il primo pedice indica a quale equazione facciamo riferimento

SOLUZIONE DEL SISTEMA

La SOLUZIONE DEL SISTEMA e' una n-pla $(y_1, \dots, y_n)$ tale che ciascuna delle equazioni risulta verificata sostituendo ad x_i y_i ($\bar{S}$ sara' l'insieme delle soluzioni di S)

SISTEMI COMPATIBILI e INCOPATIBILI

Se il sistema ammette soluzioni si dice COMPATIBILE, altrimenti INCOMPATIBILE

SISTEMA COMPATIBILE $\begin{cases} 1 \text{ soluzione} \Rightarrow \text{DETERMINATO} \\ \infty \text{ soluzioni} \Rightarrow \text{INDETERMINATO} \end{cases}$

OSS

TUTTI i sistemi compatibili sono DETERMINATI o INDETERMINATI

MATRICI COMPLETE e INCOMPLETE

Data un sistema di n INCOGNITE in m equazioni, definiamo

MATRICE INCOMPLETA la matrice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ formata da tutti i coefficienti delle equazioni.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se aggiungiamo un'ulteriore matrice formata da tutti i **TERMINI NOTI** parleremo di **MATRICE COMPLETA**

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots & \dots, & a_{1n}, & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots & \dots, & a_{mn}, & b_m \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}_{m,n+1}$$

OSS

Se la matrice ha una particolare forma, anche il sistema avrà la stessa forma

Es.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{INCOMPLETA}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{COMPLETA}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Per cercare le soluzioni del sistema possiamo sommare le equazioni

$$(2x + 3y = 0) + (2x - 3y = 0) = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

OSS

tecnicamente abbiamo applicato E_3 al sistema di equazione

OSS

Ai sistemi di equazioni possiamo applicare tutte le operazioni di riga.

SISTEMI EQUIVALENTI

Due sistemi si dicono **EQUIVALENTI** se ammettono le stesse soluzioni

Es.

$$S\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \quad \text{e' } \underset{(E_3^{12})}{\text{EQUIVALENTE}} \text{ a } \quad S'\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x=0 \end{cases}$$

Quindi $\overline{S}=\overline{S'}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $\overline{S}\subseteq\overline{S'} \land \overline{S'}\subseteq\overline{S}$

- $\overline{S}\subseteq\overline{S'}$

E' banale in quanto basta prendere una qualsiasi soluzione di S e sara' automaticamente soluzione di S' ✓

- $\overline{S'}\subseteq\overline{S}$

Si puo' dimostrare grazie all' "invertibilita'" di E_3 (con E_4)

Es

$\begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}$ è un sistema INCOMPATIBILE

$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ 8x+6y=0 \end{cases} \iff 4x+3y=0$ è un sistema INDETERMINATO

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y+z=2 \\ \qquad z=3 \\ \qquad 0=0 \end{cases}$ sistema a GRADINI

PROPOSIZIONE

Ogni sistema di EQUAZIONI LINEARI è EQUIVALENTE ad un sistema a GRADINI

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che le 3 operazioni per riga non influiscano nell'insieme delle soluzioni del sistema lineare:

- E_1: scambia due righe, la soluzione non cambia ✓
- E_2: $\underline{a}_i \to h\underline{a}_i \quad h \neq 0$

  Y = soluzione del Sistema

  $\underline{Y} = (y_1, \dots, y_n) \in \overline{S}$ (n-pla di soluzioni)

$y_1 \cdot a_{i1} + y_2 a_{i2} + \dots + y_n a_{in} = b_i$

$y_1 \cdot (h a_{i1}) + \dots + y_n (h a_{in}) = h(y_1 a_{i1} + \dots + y_n a_{in}) = h b_i$ ✓

Abbiamo dimostrato che le soluzioni sono le medesime ($\overline{S} \subseteq \overline{S'}$), ma non abbiamo dimostrato che non ne sono state aggiunte di nuove ($\overline{S'} \subseteq \overline{S}$)

Questo è dimostrato perché potremmo invertire E_2 scegliendo come nuovo h h^{-1}, quindi torneremmo alle nostre soluzioni in $\overline{S}$

OSS

Marcolino sta dimostrando che le operazioni "E" lasciano le soluzioni immutate grazie alla doppia inclusione, questo per ogni operazione.

$\overline{S} \subseteq \overline{S^E} \wedge \overline{S^E} \subseteq \overline{S}$

- E_3: $\underline{a}_i \longrightarrow \underline{a}_i + \underline{a}_j \quad i \neq j$

$$S = \begin{cases} \dots \\ a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i \\ \dots \\ a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n = b_j \\ \dots \end{cases}$$

Sommiamo $\underline{a}_i$ e $\underline{a}_j$ e sostituiamola a $\underline{a}_j$

$$\underbrace{(a_{i1} + a_{j1})}_{a'_{j1}} x_1 + \dots + \underbrace{(a_{in} + a_{jn})}_{a'_{jn}} x_n = \underbrace{b_i + b_j}_{b'_j} \quad (\text{nuova } \underline{a}_j)$$

$$S' = \begin{cases} \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a'_{j1}x_1 + \dots + a'_{jn}x_n = b'_j \\ \dots \end{cases}$$

Verifichiamo a questo punto la doppia inclusione

▶ $\overline{S} \subseteq \overline{S'}$

Prendiamo una soluzione del sistema S. Per definizione sara' soluzione dell' i-esima equazione e della j-esima equazione. Questo significa che sara' anche soluzione in S'

$\overline{S} \subseteq \overline{S'}$

▶ $\overline{S'} \subseteq \overline{S}$

Possiamo invertire E_3 nel seguente modo ricordando che E_3 effettua la somma di due righe

$$S' \xrightarrow{E_2^{-1,i}} S'' \xrightarrow{E_3^{1,j}} S''' \xrightarrow{E_2^{-1,i}} S$$

Grazie a quanto dimostrato prima possiamo dire che:

$\overline{S'} = \overline{S''} \subseteq \overline{S'''} = \overline{S}$ quindi $\overline{S'} \subseteq \overline{S}$ ✓

Es.

$$S \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ completa}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x - x_3 = 3 \\ 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Dalla matrice a gradini è banale trovare una soluzione del sistema

OSS

Grazie alla dimostrazione possiamo ridurre a GRADINI la matrice COMPLETA associata ad un sistema di equazioni per poi trovare facilmente le soluzioni

OSS

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \iff x_1 + x_2 = 1$$

In questo caso possiamo effettuare due semplificazioni:

- Elidere l'equazione $0=0$ (sempre valida)

  Elidere la terza equazione in quanto possiamo sommare l'inverso della prima $(E_4^{(-1)13})$ due volte e ottenere $0=0$

SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

m = numero di equazioni

n = numero di incognite

$m=1$, $n=1$

$$a_{11}x_1 = b_1 \quad \begin{cases} a_{11} = b_1 = 0 & \bar{S} = \mathbb{R} & \text{INDETERMINATO} \\ a_{11} \neq 0 & x_1 = a_{11}^{-1} b_1 & \text{DETERMINATO} \\ a_{11} = 0 \text{ e } b_1 \neq 0 & \nexists \text{ SOLUZIONI} & \text{INCOMPATIBILE} \end{cases}$$

$m=1$, $n>1$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

- $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = b_1 = 0$

  $\bar{S} = \mathbb{R}^n$ INDETERMINATO

- $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ e $b_1 \neq 0$

  $\bar{S} = \emptyset$ INCOMPATIBILE

- $\exists\, a_{1i} \neq 0$

  $a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n$

Per ogni $n-1$-pla di valori $y_2, ..., y_n$ per $x_2, ..., x_n$

$\exists! \; y_1 : (y_2, ..., y_n)$ sia soluzione

Diremo che il sistema ammette ∞^{n-1} SOLUZIONI

$m > 1$

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_m = b_m \end{cases}$$

① Per comodità trasformiamo il nostro sistema nel suo equivalente a GRADINI S' (dimostrato)

② Dopo la riduzione possiamo eliminare le equazioni IDENTICHE $0=0$

③ A questo punto avremo p equazioni NON identiche (p = n° di Pivot della matrice COMPLETA di S')

Dopo la riduzione e l'eliminazione delle equazioni identiche nominiamo il nostro sistema S'' che è ancora EQUIVALENTE a S

Andiamo a vedere i vari casi che ci si possono presentare in S''

- Esiste un'equazione "$0 = b_{ij}$" con $b_{ij} \neq 0$

  S'' è INCOMPATIBILE

- NON esiste un' equazione del tipo $0 = b_{1J}$ $b_{1J} \neq 0$

Questo implica che la matrice INCOMPLETA del nostro sistema NON ha righe NULLE.

RICORDA: Se una matrice a gradini non ha righe nulle allora il numero di righe e' minore del numero di colonne

Nel nostro caso:

il n° di Pivot di S'' (= n° di EQUAZIONI) ≤ n° INCOGNITE

quindi $m \leq n$.

A questo punto abbiamo due casi:

$m = n$

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{12}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \qquad a_{nm}x_n = b_m \end{cases}$$

tutti gli elementi della DIAGONALE PRINCIPALE sono NON nulli

Quindi possiamo dedurre che $x_n = b_m / a_{nm}$

Trovata x_n possiamo ricavare tutti i valori delle equazioni precedenti andando a sostituire (sono UNICI i valori)

S e' DETERMINATO

$\bar{S} = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \,\middle|\, y_n = b_n a_{nn}^{-1}, \dots \right\}$

$m < n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \end{cases} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 0 \ \dots \\ a_{1i} = \text{PIVOT} \end{array}$$

Prendiamo l'indice di colonna del PIVOT di ogni equazione

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = b_1 \\ \dots \end{array}$$

Matrice INCOMPLETA associata

Ci sarà sicuramente almeno una variabile "mancante" perché non "scelta" (in questo caso x_3).

Porto questa variabile al secondo membro

(per ogni equazione, per ogni variabile mancante)

$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = b_1 \longrightarrow x_1 + 2x_2 = b_1 - 3x_3$

......

Possiamo (a fini dimostrativi) rinominare le variabili in ordine crescente:

$x_1 + x_2 + x_4 = x_3 \longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = x_4$ CAMBIA SOLO IL NOME

Abbiamo p righe

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_p - a_{1p+1}x_{p+1} + \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} + \dots - a_{pn}x_n \end{cases} \qquad p = m$$

A questo punto il caso è analogo a quello precedente, possiamo ricavarci le soluzioni del sistema.

Per ogni scelta di $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ ho una sola soluzione

$$S' = \{ (\underbrace{\dots\dots}_{\text{funzione delle altre}}, x_{p+1}, a \dots, x_n) \mid x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

OSS

Nel caso della dimostrazione, troviamo le soluzioni di S' e non di S perché abbiamo "riordinato" le variabili. Tecnicamente andrebbero riconvertite alle variabili originali

Es.

① $S\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ MATRICE COMPLETA

Effettuiamo la riduzione a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Caso $m = n$

② $S\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + \quad - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

L'ultima riga corrisponde a $0 = 2$ IMP! è INCOMPATIBILE

③ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

manca x_2

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$m < n$

Porto x_2 a destra in ogni equazione ove possibile

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 + x_2 & c_1 \\ x_3 + x_4 = 1 & c_2 \\ x_4 = 3 & c_3 \end{cases}$$

$x_4 = 3$, $\quad x_3 = 1 - x_4 = c_2 - c_3 = -2$ $\quad$ troviamoci x_1

$$x_1 = \frac{c_1 - x_3 + x_4}{2} = \frac{c_1 - (c_2 - c_3) + c_3}{2} = \frac{c_1 - c_2 + 2c_3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + x_2 - 1 + 2 \cdot 3}{2} = \frac{x_2 + 6}{2} = \frac{x_2}{2} + 3 = \frac{h}{2} + 3$$

rinomino x_2 per comodità.

$$\overline{S} = \left\{ \left(\underset{x_1}{\frac{h}{2} + 3}, \underset{x_2}{h}, \underset{x_3}{-2}, \underset{x_4}{3} \right) \middle| \, h \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

Sia i = numero di variabili aleatorie (h)

Il sistema ha ∞^i soluzioni

(4) $$\begin{cases} 2x + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 1 & 1 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

mancano x_2, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 - x_2 + x_4 \\ -x_3 = -3 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

ho portato a destra le incognite "mancanti"

$x_4 = h$, $x_5 = k$, $x_2 = i$

$x_3 = 3 + h + k$

$x_1 = -3 - \cancel{h} - k + 2 - i + \cancel{h} = -1 - h - i$

$S = \{(-1-h-i, i, 3+h+k, h, k) \mid i, h, k \in \mathbb{R}\}$ ∞^3 soluzioni

SISTEMI OMOGENEI

Sono sistemi in cui tutti i termini noti 0

E' sempre COMPATIBILE, perché ammette come soluzione banale $x_1, \ldots, x_n = 0$, ma non per forza è DETERMINATO

NOTAZIONE PER SISTEMI LINEARI

Possiamo scrivere in forma MATRICIALE tutti i sistemi di equazioni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX$$

$AX = B$ $\qquad$ B = matrice dei termini noti

SPAZI VETTORIALI

SPAZI VETTORIALI

Sia V un insieme non vuoto con operazione interna + ed esterna ·

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(V, +, \cdot)$ è detto SPAZIO VETTORIALE sul campo $\mathbb{R}$ se:

- $(V, +)$ è un GRUPPO ABELIANO
- $\forall h, k \in \mathbb{R}, \underline{v} \in V$

  $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
- $\forall \underline{v} \in V$

  $1\underline{v} = \underline{v}$
- · DISTRIBUTIVA' rispetto + in $\mathbb{R}$

  $\forall h, k \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v} \in V$

  $(h + k)v = h\underline{v} + k\underline{v}$

- · DISTRIBUTIVA' rispetto + in V

  $\forall h \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

  $h(v + w) = h\underline{v} + h\underline{w}$

Diremo che

- Gli elementi di V sono VETTORI
- Gli elementi di $\mathbb{R}$ sono SCALARI

PROPOSIZIONE

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale in $\mathbb{R}$, allora:

- $\exists!$ neutro rispetto $+$ $\quad (\underline{0})$

DIMOSTRAZIONE

P.a. $\underline{v}_0$ e $\underline{w}_0$ sono neutri

$\underline{v}_0 = \underline{v}_0 + \underline{w}_0 = \underline{w}_0$

- $\forall \underline{v} \in V$ $\exists!$ opposto di $\underline{v}$ $\quad (\underline{v})$

DIMOSTRAZIONE

P.a. v' e v'' opposti di $\underline{v}$

$v' = v' + 0 = v'(v + v'') = (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v''$

OSS

- $\underline{v} - \underline{w}$ è abbreviazione di $\underline{v} + (-\underline{w})$
- vettore nullo : $\underline{0}$
- l'opposto di $\underline{0}$ è $\underline{0}$

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

① $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(v_i, w_i) \to (v_i + w_i)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(h, \underline{v}) \to (hv_1, hv_2 \dots)$

② $(\mathbb{R}_{mn}, +, \cdot)$

$+ : \mathbb{R}_{mn} \times \mathbb{R}_{mn} \to \mathbb{R}_{mn}$

$(a_{ij}, b_{ij}) \to (a_{ij} + b_{ij})$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{mn} \to \mathbb{R}_{mn}$

$(h, a_{ij}) \to (ha_{ij})$

③ Spazio vettoriale dei POLINOMI ad una indeterminata x sul campo $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$(h, a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \to ha_0 + \dots + ha_nx^n$

$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$

$(a_0 + \dots + a_nx^n, b_0 + \dots + b_mx^m) \to (a_0b_0 + (a_1 + b_{m_1})x_1 + b_{m+1}x^{m+1} + \dots + b_m{}^m) \quad n < m$

PRINCIPIO D' IDENTITA' DEI POLINOMI

$a_0+\dots+a_n x^n = b_0+\dots+b_m x^m \iff n=m \wedge a_0=b_0,\dots,a_n=b_m$

OSS

- $\delta(q[x]),\ \delta(p[x]) \le n \Rightarrow \delta(q[x]+p[x]) \le n$
- $\delta(q[x])=n,\ h\in\mathbb{R} \Rightarrow \delta(h\,q[x])=n$

$+$ e $\cdot$ sono BEN DEFINTE :

$+:\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$

(3,5) $\mathbb{R}_n[x],\ +,\ \cdot$

(4) Spazio della GEOMETRIA EUCLIDEA S (piano S_π)

Sia O un punto di tale spazio

$\overrightarrow{OA}$: SEGMENTO ORIENTATO di estremi O e A

OSS

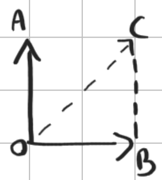
Per parlare del **MODULO** dei vettori dobbiamo fissare un'unità di misura

$S_0 = \{ \overrightarrow{OA} \mid A \in S \}$ (insieme dei segmenti orientati di estremo O)

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in S_0$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{BC}$ è **EQUIPOLLENTE** ad $\overrightarrow{OA}$ (stesso verso, direzione, modulo)

SOMMA E PRODOTTO

$+ : S_0 \times S_0 \rightarrow S_0$

$\cdot : \mathbb{R} \times S_0 \rightarrow S_0$

$(h, \overrightarrow{OA}) \rightarrow \overrightarrow{hOA}$

- $h > 0$, moltiplico il modulo di $\overrightarrow{OA}$ e lo moltiplico per h
- $h < 0$, cambio verso e moltiplico il modulo di $\overrightarrow{OA}$ e lo moltiplico per $|h|$
- $h = 0$, ottengo il vettore nullo

$(S_O, +, \cdot)$ è lo SPAZIO VETTORIALE dei vettori geometrici applicati in un punto

$\overrightarrow{OO}$ è elemento NEUTRO

L'opposto di $\overrightarrow{OA}$ è un vettore che ha stesso modulo e direzione, ma verso opposto

5 Spazio vettoriale dei vettori geometrici LIBERI (o ordinari)

OSS

L' EQUIPOLLENZA è una RELAZIONE D'EQUIVALENZA

Consideriamo la classe d'equivalenza di $\overrightarrow{AB}$

$[\overrightarrow{AB}] = \{ \overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CB} \text{ è equipollente a } \overrightarrow{AB} \}$

$[\overrightarrow{AB}]$ è un VETTORE GEOMETRICO LIBERO

$V = \{ [\overrightarrow{AB}] \mid A, B \in S \}$ è l' INSIEME QUOZIENTE

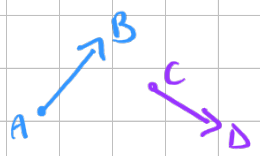
$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

OSS

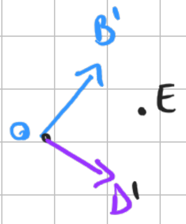
$(V_\pi, +, \cdot)$ è lo spazio vettoriale con sostegno l'insieme quoziente dei vettori geometrici liberi sul PIANO π

$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} := \overrightarrow{OE} = [\overrightarrow{OE}]$



Posso traslare i vettori ovunque nello spazio (per il concetto di classe)



$\overrightarrow{OB'} \equiv \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{OD'} \equiv \overrightarrow{CD}$

$+$ è BEN DEFINITA

Diremo che $+$ di S_0 è COMPATIBILE rispetto all'equipollenza

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$(h, [\overrightarrow{AB}]) \to [\overrightarrow{hAB}]$

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{hAB} \equiv \overrightarrow{hCD}$

OSS

- Si applicano le stesse regole di prodotto in S_0, considerando ovviamente la CLASSE D'EQUIPOLLENZA del vettore

- Si applicano le stesse proprietà (distributività) di S_0

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

$[\overrightarrow{OO}] = \underline{0}$ vettore nullo

$\overline{AB} = [\overrightarrow{AB}] \Rightarrow -\overrightarrow{AB} = [-\overrightarrow{AB}]$

PROPIETA' DEGLI SPAZI VETTORIALI

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

① $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$

$\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$

② $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}$

③ $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h \cdot \underline{0} \qquad \forall h \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

$0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$0v = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v} = \underline{0}$ (per la prop ②)

$h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$h \cdot \underline{0} = h(\underline{0} + \underline{0}) = h \cdot \underline{0} + h \cdot \underline{0} = h \cdot \underline{0} = \underline{0}$ (per la prop ②)

④ $h\, \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow h = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}$

DIMOSTRAZIONE

- $\Leftarrow$

Dimostrato per la prop. ③

- $\Rightarrow$

Sia $h \neq 0$

$h\underline{v} = \underline{0}$ moltiplico per l'inverso di h

$(h^{-1})h\underline{v} = (h^{-1})\underline{0}$ sfrutto l'associatività

$(h^{-1}h)\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow 1 \cdot \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

⑤ $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$

$h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $h(-v) + (h\underline{v}) = \underline{0}$

metto h in evidenza

$h(\underline{v} + (-\underline{v})) = h(\underline{0}) = \underline{0}$

Analogamente si dimostra la seconda uguaglianza (con $\underline{v}$ in evidenza)

⑥ $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$

$(-h)(-v) = h\underline{v}$

DIMOSTRAZIONE

- $(-1)\underline{v} = -(1\underline{v}) = -\underline{v}$
- $(-h)(-\underline{v}) = -[h(-\underline{v})] = -[-h\underline{v}] = h\underline{v}$

⑦ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA GENERALIZZATA

$$(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\underline{v}_3=\underline{v}_1+(\underline{v}_2+\underline{v}_3)$$

si può generalizzare con n vettori sommando due a due

OSS

Ne deriva che possiamo rimuovere le parentesi

⑧ PROPRIETÀ COMMUTATIVA GENERALIZZATA

$$\underline{v}+\underline{w}=\underline{w}+\underline{v}$$

Si può generalizzare per n vettori

⑨ PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA GENERALIZZATA

$$(h_1+\dots+h_n)\underline{v}=h_1\underline{v}+\dots+h_2\underline{v}$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo con il 1° principio d'induzione:

- Base d'induzione $n=2$ vera (assioma)
- Supponiamo vera per $n\geq 2 \Rightarrow n+1$

$$(h_1+\dots+h_n+h_{n+1})\underline{v}=\underbrace{(h_1+\dots+h_n)\cdot\underline{v}}_{\text{vera per ipotesi}}+\underbrace{h_{n+1}\cdot\underline{v}}_{\text{vera per definizione}}$$

L' uguaglianza è verificata ✓

COMBINAZIONE LINEARE

$\forall k_1 \dots k_n \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}_1 \dots \underline{v}_n \in V$

$\underline{v} = k_1 v_1 + \dots + k_n \underline{v}_n$ è detta COMBINAZIONE LINEARE

dei vettori $\underline{v}_i$ mediante gli scalari $\underline{k}_i$

Es.

$\mathbb{R}^3$ $(3,0,1) = 3(1,0,0) + 1(0,0,1)$

Combinazione lineare di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ mediante 3 e 1

OSS

L' ordine è rilevante

VETTORI PROPORZIONALI

$v, w \in V$ si dicono PROPORZIONALI se $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\underline{v} = k\,\underline{w}$$

Es.

$\mathbb{R}[x]$ $3x+3 = 3(x+1)$ i due membri sono proporzionali

$3 \in \mathbb{R}[x]$ $\quad \underline{0} = 0 \cdot 3$ ✗ $\quad 0 \in \mathbb{R}$

$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0}$ ✓ $\quad \underline{0} \in \underline{V}$

OSS

La proporzionalità è una relazione d'equivalenza

PARTI CHIUSE

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, $H \subseteq V$ $(H \neq \emptyset)$ è detto CHIUSO rispetto alla moltiplicazioni per uno scalare se:

$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \qquad h\underline{v} \in H$

$+_{|H} : H \times H \longrightarrow H$

$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} + \underline{w}$

Se consideriamo $+$ ristretto ad H, $+$ è ben definita

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, $H \subseteq V$ $(H \neq \emptyset)$,

Se H è chiusa rispetto $+$ e $\cdot$, $(H, +, \cdot)$ è detto SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$H \leq V$

H SOTTOSPAZIO DI V

OSS

$$\text{SOTTOSPAZIO} \Rightarrow \text{SOTTINSIEME}$$
$$\cancel{\Leftarrow}$$

Es: $\emptyset$

ESEMPI DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

① SOTTOSPAZI BANALI

$\{0\}, V$

② $\{(0,0,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$

③ in $\mathbb{R}^2$

$$H = \{(x,y) \mid x=y\}$$

- $H \neq \emptyset$ ✓
- $\forall v, w \in H \quad v+w \in H$

$(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t)$

sappiamo che $x=y$ e $z=t$ ma quindi la somma è banale

- $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \Rightarrow h\underline{v} \in H$

$h(x,y) = (hx, hy) \qquad hx = hy$ ✓

OSS

Per verificare se un insieme è un sottospazio vettoriale possiamo vedere l'equazione che definisce gli elementi:

GENERALMENTE se l'equazione è lineare e omogenea potrebbe essere

⑤ $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = a+c \\ \cancel{c=c} \end{matrix} \quad \begin{matrix} a+b = b+d \\ c+d = d \end{matrix}$$

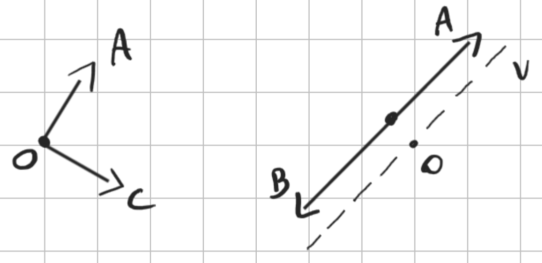
$$\begin{cases} c+d = d \Rightarrow c = 0 \\ a+b = b+d \Rightarrow a = d \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & a+a' \end{pmatrix} \in H$ ✓

- $h \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha & hb \\ 0 & ha \end{pmatrix} \in H$ ✓

⑥ SPAZIO DEI VETTORI GEOMETRICI APPLICATI IN O



$OA + OB \in V$

La retta V è SOTTOSPAZIO VETTORIALE

OSS

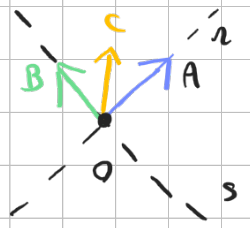
Anche il piano π è SOTTOSPAZIO VETTORIALE

OSS

L' UNIONE di sottospazi vettoriali in genere NON è un sottospazio

Es.

1) L' unione di due rette



$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$

$\overline{OC}$ non appartiene ne a r ne a s (sottospazi)

2) $\mathbb{R}_2$ $\quad H_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad H_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$H_1, H_2 \leq \mathbb{R}^2$ ma $H_1 \cup H_2 \not\leq \mathbb{R}^2$

perché non è chiusa rispetto alla SOMMA

PROPRIETÀ DEI SOTTOSPAZI VETTORIALI

1) $W \leq V$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$ Sappiamo che

$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \Rightarrow (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + \underline{w}_3 \in W \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n \in W$

$h_1, \dots, h_n \Rightarrow h_1 w_1, \dots, h_n w_n \in W$ $\qquad$ h scalare

$\Rightarrow \underline{h_1 w_1 + \dots + h_n w_n} \in W$

W contiene ogni COMBINAZIONE LINEARE dei suoi elementi

② Sia "$\mathcal{L}$" FAMIGLIA (insieme) di sottospazi di V

l' INTERSEZIONE $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \leq V$ è sottospazio di V

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che siano verificate le 3 condizioni:

- L'intersezione non è mai vuota perché l'elemento neutro è sempre contenuto ✓

- $\underline{w}, \underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \Rightarrow \underline{v} \in L$ e $\underline{w} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$

  $\Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$ ✓

- Analogamente vale per il prodotto ✓

SOTTOSPAZIO GENERATO

Siano $H, K \leq V$

L' INTERSEZIONE di tutti i sottospazi L di V che contengono $H \cup K$ è il più piccolo sottospazio che contiene sia H che K ed è detto SOTTOSPAZIO GENERATO

Lo indicheremo con

$$\langle H,K\rangle = \langle H \cup K\rangle = H+K = \{ \underline{h}+\underline{k} \mid \underline{h}\in H, \underline{k}\in K \}$$

DIMOSTRAZIONE

▶ Dimostriamo anzitutto che $\langle H,K\rangle$ e' sottospazio

- $\underline{0} = \underset{\in H}{\underline{0}} + \underset{\in K}{\underline{0}}$ il neutro appartiene ad entrambi gli insiemi e puo' essere scritto come somma (per definizione)

- $\underline{w}, \underline{w}_1 \in H+K \Rightarrow \exists\, \underline{h}\in H, \underline{k}\in K \mid \underline{w} = \underline{h}+\underline{k}$
  $\exists\, \underline{h}_1\in H, \underline{k}_1\in K \mid \underline{w}_1 = \underline{h}_1+\underline{k}_1$

$$\underline{w}+\underline{w}_1 = (\underline{h}+\underline{k}) + (\underline{h}_1+\underline{k}_1) = (\underbrace{\underline{h}+\underline{h}_1}_{\in H}) + (\underbrace{\underline{k}+\underline{k}_1}_{\in K}) \in H+K$$

- Analogamente vale il prodotto

▶ Dimostriamo ora che $H \subseteq H+K$ e $K \subseteq H+K$

- $\underline{h}\in H \Rightarrow \underline{h} = \underset{\in H}{\underline{h}} + \underset{\in K}{0} \in H+K \Rightarrow H \subseteq H+K$

- Analogamente vale per $K \subseteq H+K$

▶ Dimostriamo ora che è il più piccolo

● Preso un sottospazio $L \leq V \mid H \cup K \subseteq L$

$\forall \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \Rightarrow \underline{h}, \underline{k} \in L \Rightarrow \underline{h} + \underline{k} \in L \Rightarrow H + K \subseteq L$

Ma se $H+K$ è contenuto in qualsiasi L sottospazio che contiene $H \cup K$, allora $H+K$ sarà sottospazio ed è verificata l'uguaglianza di sottospazio GENERATO

$$\langle H, K \rangle = \{ \underline{h} + \underline{k} \mid h \in H, k \in K \}$$

Es.

$H_1 = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$

$H_2 = \{ (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \}$

$H_1 + H_2 = \{ (x, 0) + (y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$H_1 + H_2 \leq \mathbb{R}^2$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in H_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in H_2} \in H_1 + H_2$$

$H_1 + H_2 = \mathbb{R}^2$

OSS

- Generalizzando risulta che:

$H_1, \dots, H_n \qquad \langle H_1, \dots, H_n \rangle = H_1 + \dots + H_n = \{\underline{h}_1 + \dots + \underline{h}_n \mid \underline{h}_i \in H_i\}$

- $H \leq V \Rightarrow \langle H \rangle = H$

- $v_1, \dots, v_n \in V$

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{h_1 v_1 + \dots + h_n v_n \mid h_i \in \mathbb{R}\}$

risulta essere l'insieme di tutte le possibili COMBINAZIONI LINEARI

SOMMA DI SPAZI VETTORIALI

$H_1, H_2 \leq V \qquad H_1 + H_2$ è detto sottospazio SOMMA di H_1 e H_2

SOMMA DIRETTA

$H_1, H_2 \leq V$

se $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$ la somma sarà detta SOMMA DIRETTA

$$H_1 \oplus H_2$$

Es.

$H_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad H_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2 = H_1 + H_2 \qquad H_1 \cap H_2 = \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 = H_1 \oplus H_2$ $\quad \mathbb{R}^2$ è SOMMA DIRETTA di H_1 e H_2

SOTTOSPAZI COMPLEMENTARI e SUPPLEMENTARI

Siano $H_1, H_2 \leq V$

sono detti SUPPLEMENTARI se $V = H_1 + H_2$

sono detti COMPLEMENTARI se $V = H_1 \oplus H_2$

OSS

Generalizzando la SOMMA DIRETTA avremo:

$H_1, \dots, H_m \leq V$ sono in somma diretta se

$H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{\underline{0}\}$

$H_1 \cap \langle H_2, \dots, H_m \rangle = \{\underline{0}\}$

$H_2 \cap \langle H_1, H_3, \dots, H_m \rangle = \{\underline{0}\}$

Es.

1) $H_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ A due a due sono in somma diretta ma

$H_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ NON sono in somma diretta perché

$H_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$H_3 \cap \langle H_1, H_2 \rangle = H_3 \cap \mathbb{R}^2 = H_3 \neq \{(0,0)\}$$

2) $H_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{(0,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$H_3 = \{(0,0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

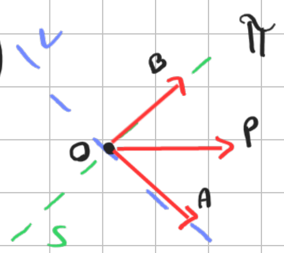
$H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \Rightarrow H_1 \cap \langle H_2, H_3 \rangle = \{\underline{0}\}$

$\langle H_2, H_3 \rangle = H_2 + H_3 = \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$H_1 \cap \langle H_2, H_3 \rangle = \{(0,0,0)\} = \{\underline{0}\}$ ✓

Analogamente varrà per $H_2 \cap \langle H_1, H_3 \rangle$ e $H_3 \langle H_1, H_2 \rangle$

H_1, H_2 e H_3 sono in somma diretta

3) 

$\langle v, s \rangle = v + s$ è tutto π perchè ogni vettore appartenente a π può essere scritto come somma di vettori che giaciono su v ed s

$v \cap s = \overrightarrow{OO}$ ✓ $\Longrightarrow v \oplus s$

(Ricorda, π spazio, s, v sottospazi)

DIPENDENZA e INDIPENDENZA LINEARE

Sia V uno spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono detti DIPENDENTI se e solo se

$$\exists\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} \mid h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$$

altrimenti i vettori saranno detti INDIPENDENTI

$$\left(h_1 v_1 + \dots h_n v_n = \underline{0} \Rightarrow h_1 = \dots = h_n = 0 \right)$$

Es.

- $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$$h_1(1,0) + h_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow h_1 = 0 \wedge h_2 = 0$$

sono INDIPENDENTI

- $(0,0), (1,0) \in \mathbb{R}^2$

$$3 \cdot (0,0) + 0 \cdot (1,0) = (0,0)$$

sono DIPENDENTI $(3 \neq 0)$

OSS

▶ Se tra i vettori figura il vettore NEUTRO saranno DIPENDENTI

▶ Se i due vettori sono PROPORZIONALI sono DIPENDENTI

- $(1,0),(2,0)$ $\quad -2(1,0)+(2,0)=(0,0)$ $\quad$ DIPENDENTI

VETTORE DIPENDENTE

$\underline{v}$ DIPENDE da $v_1,\dots,v_n \iff \underline{v}$ è COMBINAZIONE LINEARE dei $\underline{v_i} \Rightarrow \exists\, h_1,\dots,h_n \in \mathbb{R} \mid \underline{v} = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n$

OSS

- $\underline{0}$ DIPENDE sempre da qualunque sistema $\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$

$v_i = 0\,\underline{v}_1 + \dots + 0\,v_i$

- $\underline{v_i}$ DIPENDE da $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ perché possiamo scrivere:

$\underline{v}_i = 0\cdot\underline{v}_1 + \dots + 1\cdot\underline{v}_i + 0\cdot\underline{v}_{i+1} + \dots + 0\cdot\underline{v}_n$

Ogni vettore dipende dal sistema a quale appartiene

- $\left.\begin{array}{l}\underline{v} \text{ dipende da } \underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n \\ \underline{v}_i \text{ dipende da } \underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m\end{array}\right\} \underline{v}$ dipende da $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m$

$\exists\, h_i \in \mathbb{R} \mid \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n$

$\exists\, K_{ij} \in \mathbb{R} \mid \underline{v}_i = K_{ij}\,\underline{w}_1 + \dots + K_{im}\,\underline{w}_m$

$\underline{v} = h_1(K_{11}\underline{w}_1 + \dots + K_{1m}\underline{w}_m) + \dots + h_n(K_{n1}\underline{w}_1 + \dots + K_{nm}\underline{w}_m) =$

$= c_1 w_1 + \dots + c_m w_m$

- $\underline{v}, \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \Rightarrow \underline{v}+\underline{w}$ DIPENDE da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$

$\underline{v} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m$

$\underline{w} = k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_m \underline{v}_m$

$\Rightarrow \underline{v}+\underline{w} = (h_1+k_1)\underline{v}_1 + \dots + (h_m+k_m)\underline{v}_m$

PROPOSIZIONE

Sia $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \left\{ k_1\underline{v}_1 + \dots + k_n\underline{v}_n \;\middle|\; k_i \in \mathbb{R} \right\}$ allora

$\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \iff \underline{v} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $H = \left\{ k v_1 + \dots + k_m v_m \;\middle|\; k_i \in \mathbb{R} \right\} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

Dimostriamo che H e' sottospazio:

- $\underline{0}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \Rightarrow \underline{0} \in H \quad (H \neq \emptyset)$
- $\underline{v}, \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \Rightarrow v + w$ e $v \cdot w$ dipendono da H

Sappiamo che tutti i $\underline{v}_i$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, quindi H contiene tutti i $\underline{v}_i$

A questo punto dobbiamo dimostrare che H sia il piu' piccolo

Fissiamo $W \leq V$ e $\underline{v}_i \in W \Rightarrow H \leqslant W$ perche' H contiene tutti i $\underline{v}_i$

Siccome questo vale per ogni W, H e' il piu' piccolo sottospazio.

OSS

$$W_1 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$$
$$W_2 = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$
$$\Rightarrow W_1 + W_2 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, w_1, \dots, w_m \rangle$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la doppia inclusione

- Per definizione $W_1 + W_2 = \left\{ a+b \,\middle|\, a \in W_1 \text{ e } b \in W_2 \right\}$

$$= W_1 \cup W_2 = \langle v_1, \dots, v_m \rangle \cup \langle w_1, \dots, w_m \rangle$$

$$= W_1 + W_2 \geq \langle v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m \rangle \quad \text{(banale)}$$

Adesso dimostriamo l'altra inclusione

- $\underline{v} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \underline{v} = a + b \,|\, a = h_1 v_1 + \dots + h_m v_m$ e $b = k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_m \underline{w}_m$

$\underline{v} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m + k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_m \underline{w}_m \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$

per la prop. precedente

Quindi $W_1 + W_2 \leq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$

OSS

- $W = \langle \langle v_1, \dots, v_m \rangle, \langle w_1, \dots, w_m \rangle \rangle = \langle v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m \rangle$
- $\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la doppia implicazione

- $\underline{v}$ e $\underline{w}$ dipendono banalmente da $\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle$

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \leq \langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle$

- Possiamo dimostrare che ogni vettore di $\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle$ dipende da $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$
  - $\underline{v}$ dipende da $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$
  - $\underline{0}$ dipende da tutti i sistemi
  - $\underline{w}$ dipende da $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

Quindi

$\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle \geq \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ ✓

SISTEMI DI VETTORI EQUIVALENTI

Due sistemi di vettori sono detti **EQUIVALENTI** se i vettori dei due sistemi dipendono gli uni dagli altri

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ $\quad$ $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ $\quad$ $\underline{w}_j$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

OSS

Due sistemi di vettori sono detti **EQUIVALENTI** se **GENERANO** lo stesso sottospazio

Es.

- $\langle (0,1), (1,0) \rangle \quad , \langle (1,1), (1,0) \rangle$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

$(0,1) = (1,1) - (1,0)$

- $\langle (0,1),(0,2),(0,0)\rangle = \{(0,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

- $\langle \{v\in\mathbb{R} \mid v \text{ intero pari}\}\rangle = H$

ogni oggetto di H puo' essere scritto come combinazione lineare:

$1\in H$: $v = v\cdot 1 \Rightarrow \mathbb{R}\subseteq H \Rightarrow \mathbb{R}=H$

Tutti gli spazi definiti in $\mathbb{R}$ hanno come sottospazio generato $\mathbb{R}$

SISTEMI DIPENDENTI

Sia V spazio vettoriale

$\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n \in V \quad (n\geq 2)$

$\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ e' DIPENDENTE $\Leftrightarrow \exists i \mid v_i$ dipende dai rimanenti

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$

$\exists h_1,\dots,h_n\in\mathbb{R} \mid h_1v_1+\dots+h_nv_n = 0$

$h_1\neq 0 \mid h_1v_1 = -(h_2v_2+\dots+h_nv_n)$

$$\underline{v}_1 = (-h_1^{-1}h_2)v_2+\dots+(-h_1^{-1}h_n)v_n$$

$$\underline{v}_1 \in \langle \underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n\rangle$$

$\Leftarrow$

$\exists i \mid \underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n$

Supponiamo che $\underline{v}_1$ dipende dai rimanenti

$\exists\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} \mid \underline{v}_1 = h_2 \underline{v}_2 + \dots + h_n \underline{v}_n$

$$1 \cdot \underline{v}_1 - h_2 \underline{v}_2 + \dots - h_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$(1, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Il sistema è dipendente

OSS

Un Sistema è linearmente INDIPENDENTE $\Leftrightarrow$

nessun $\underline{v}_i$ dipende dai rimanenti

Altri casi di dipendenza lineare (n numero di vettori)

- $n = 1$: $\underline{v}_1$ è dipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_1 = \underline{0}$ $\quad (h \cdot v_1 = 0 \Leftrightarrow h = 0$ con $\underline{v} \neq 0)$

  $\underline{v}_1$ è indipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_1 \neq \underline{0}$

- $n = 2$: $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \neq \underline{0}$ è dipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_1$ dipende da $\underline{v}_2$ (o viceversa)

  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \neq \underline{0}$ è indipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono PROPORZIONALI

Es.

Possiamo verificare la dipendenza di un sistema in due modi:
Possiamo verificare che ogni vettore dipenda dai restanti oppure
verificare che dipenda dall'unità

- $(1,0,0), (1,2,3), (0,0,1)$ sono dipendenti?

$h_1(1,0,0) + h_2(1,2,3) + h_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$(h_1+h_2, 2h_2, 3h_2+h_3) = (0,0,0)$

$\begin{cases} h_1+h_2=0 \\ 2h_2=0 \\ 3h_2+h_3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} h_1=0 \\ h_2=0 \\ h_3=0 \end{cases}$ è INDIPENDENTE

- $(4,1,4), (4,1,3)$

non sono proporzionali $\Rightarrow$ sono indipendenti

- $(1,0,0), (1,3,0), (3,4,4)$

$(1,0,0)$ dipende dai restanti ?

$(1,0,0) = h(1,3,0) + K(3,4,4)$

$h=0,\ K=0 \Rightarrow$ è indipendente

- $(1,-\frac{1}{2},0), (4,3,1), (1,2,\frac{1}{2})$

$(4,3,1) = 2\cdot(1,-\frac{1}{2},0) + 2(1,2,\frac{1}{2})$

OSS

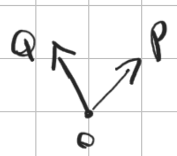
La forma (gli scalari) per un sistema dipente NON è unica

- $(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)$

$x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,0,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sistema a gradini $\Rightarrow$ indipendenti

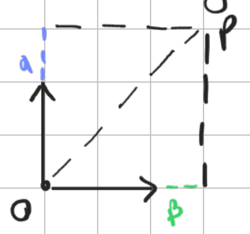
- Spazio dei vettori geometrici applicati in O



$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ sono proporzionali

$\Leftrightarrow$ giacciono sulla stessa retta

Tre vettori geometrici sono dipendenti $\Leftrightarrow$ giacciono sullo stesso piano



$\overrightarrow{OP} = \alpha\,\overrightarrow{OQ} + \beta\,\overrightarrow{OR}$

- $\underline{v}, \underline{v}, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ e' sempre dipendente

$1 \cdot v + (-1) \cdot v + 0 \cdot \underline{w}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{w}_m$

- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \quad \Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \quad \Uparrow$

DIPENDENTE $\Rightarrow$ DIPENDENTE $\qquad$ INDIPENDENTE $\Rightarrow$ INDIPENDENTE

(Fisso gli λ da n a $m = 0$)

PROPOSIZIONE

Sia V spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ INDIPENDENTI

Ogni $\underline{v}$ che DIPENDE da $v_1, \dots, v_n$ vi dipende in modo UNICO

$$\begin{aligned} \underline{v} &= h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n \\ &= k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n \end{aligned} \implies h_1 = k_1, \dots, h_n = k_n$$

DIMOSTRAZIONE

$$h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n$$

$$(h_1 - k_1)\underline{v}_1 + \dots + (h_n - k_n)\underline{v}_n = \underline{0}$$

Essendo i vettori INDIPENDENTI $\implies h_i - k_i = 0 \implies h_i = k_i$

PROPOSIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale, siano H e K sottospazi di V tali che $H \cap K = \{\underline{0}\}$. Presi $\underline{h} \in H$ e $\underline{k} \in K$ (diversi da $\underline{0}$) allora

$\underline{h}, \underline{k}$ formano un sistema INDIPENDENTE

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo siano h e K non siano indipendenti

$$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \big|\ (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

Supponiamo $\alpha \neq 0$

$\alpha \underline{h} + \beta \underline{k} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{h} = (-\alpha^{-1} \beta)\underline{k} \neq \underline{0}$ (per ipotesi)

$\underline{h} \in H$ per ipotesi, ma vediamo che può essere scritto come uno scalare per $\underline{k}$, quindi sicuramente apparterrà a K, quindi $\underline{h} \in H \cap K$

Per ipotesi $\underline{h} \neq \underline{0}$ e $H \cap K = \{\underline{0}\}$ ASSURDO!

GENERALIZZAZIONE

Sia V uno spazio vettoriale

Siano $H_1, \dots, H_n \leq V$, $\underline{v}_i \in H_i \neq \underline{0}$

Il sistema $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è INDIPENDENTE

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dipendenti:

$\exists\, h_i \in \mathbb{R} \mid h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$ con $(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$

supponiamo $h_1 \neq 0$

$\underline{v}_1 = (-h_1^{-1} h_2)\underline{v}_2 + \dots + (-h_1^{-1} h_n)\underline{v}_n \in H_1 \cap (H_2 + \dots + H_n) = \{\underline{0}\}$ (somma diretta)

ma $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ per ipotesi ASSURDO!

Es.

$H_1 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\Rightarrow (0,1),(1,0)$ sono indipendenti

$H_3 = \langle (1,1) \rangle$

Per dimostrare che H_3 NON é in somma diretta possiamo confutare la tesi della prop. precedente

Presi 3 oggetti appartenenti a 3 sottospazi di $\mathbb{R}^2$ questi devono formare un sistema INDIPENDENTE

Se prendiamo $(0,1),(1,0),(1,1)$ abbiamo che:

$1 \cdot (0,1) + (-1)(1,0) + (-1)(1,1) = (\underline{0}, \underline{0})$ sistema DIPENDENTE

PROPOSIZIONE

Sia $v \in H_1 \oplus H_2$

$\exists! \, \underline{v}_1 \in H_1, \underline{v}_2 \in H_2 \mid \underline{v} = \underline{v}_1 + v_2$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, siano

$$\underline{v} = v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \Rightarrow \underbrace{(v_1 - v_1')}_{\in H_1} + \underbrace{(v_2 - v_2')}_{\in H_2} = \underline{0}$$

ma se $\begin{matrix} v_1 - v_1' \neq \underline{0} \\ v_2 - v_2' \neq \underline{0} \end{matrix} \Rightarrow$ ASSURDO! allora $v_1 = v_1'$ e $v_2 = v_2'$

Ne deriva che la scrittura è unica.

OSS

Viceversa,

$$\forall v \in H_1 + H_2 \text{ e } \exists! \, v_1 \in H_1, v_2 \in H_2 \mid \underline{v} = v_1 + v_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\underline{v} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \underline{v} = \underbrace{\underline{v}}_{H_1} + \underbrace{\underline{0}}_{H_2} = \underbrace{\underline{0}}_{H_1} + \underbrace{\underline{v}}_{H_2} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \text{ e } \underline{0} = \underline{v} \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$$

PROPOSIZIONE (inversa)

Sia V uno spazio vettoriale, siano $H_1, H_2 \leq V$

$H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\} \iff \forall \underline{v} \in H_1 + H_2 \quad \exists! \, \underline{h}_1 \in H_1, \underline{h}_2 \in H_2 \mid \underline{v} = \underline{h}_1 + \underline{h}_2$

GENERALIZZAZIONE

$H_1, \dots, H_m$ sono in somma diretta $\iff$

$$\forall \underline{v} \in H_1 + \dots + H_m, \; \exists! \, \underline{h}_i \in H_i \mid \underline{v} = \underline{h}_1 + \dots + \underline{h}_m$$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ già dimostrato

$\Leftarrow$

$v \in H_1 \cap (H_2 + \dots + H_m)$ (somma diretta)

$\exists \; \underline{h}_i \in H_i \; (i \geq 2) \mid \underline{v} = \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_m$

$$\underline{v} = \underbrace{\underline{v}}_{H_1} + \underbrace{\underline{0}}_{H_2} + \dots + \underbrace{\underline{0}}_{H_m} = \underline{0} + \underline{v} = \underbrace{\underline{0}}_{H_1} + \underbrace{\underline{h}_2}_{H_2} + \dots + \underbrace{\underline{h}_m}_{H_m} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

PROPOSIZIONE

Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ INDIPENDENTI e $\underline{v} \in V$ NON DIPENDE da $\underline{v}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v}$ sono INDIPENDENTI

DIMOSTRAZIONE

$h_1 v_1 + \dots + h_m v_m + h v = \underline{0}$

Analizziamo due casi :

- $h \neq 0 \Rightarrow \underline{v} = (-h^{-1}h_1)\underline{v}_1 + \dots + (-h^{-1}h_m)\underline{v}_m$

ASSURDO! perché $\underline{v}$ NON è DIPENDENTE

- $h = 0 \Rightarrow h_1 v_1 + \dots + h_m v_m = \underline{0} \Rightarrow h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0 \Rightarrow$ INDIPENDENTE

COROLLARIO

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m & \text{INDIPENDENTE} \\ \underline{v} \in V & \\ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{v} & \text{DIPENDENTE} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v} \text{ DIPENDE da } v_1, \dots, v_m$$

Es.

$(1,2,0), (3,2,0), (0,0,1)$ vediamo se il sistema è DIPENDENTE

$(1,2,0), (3,2,0)$ non sono proporzionali $\Rightarrow$ INDIPENDENTI

$(0,0,1)$ NON DIPENDE (per la terza coordinata)

Il sistema è INDIPENDENTE

SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERABILE

V spazio vettoriale è detto FINITAMENTE GENERABILE se

$$\exists\, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V \mid V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle$$

$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ è detto sistema GENERATORE.

OSS

Ogni elemento di V si scrive come combinazione lineare di elementi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

BASE

Un sistema di generatori INDIPENDENTE è detto BASE

RIFERIMENTO

Una base ORDINATA è detta RIFERIMENTO

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base $\Rightarrow (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ riferimento

$(\underline{e}_2, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ riferimento

...

Es.

- in $\mathbb{R}^2$

cerchiamo una BASE, quindi:

▸ un sistema di generatori = vettori che danno come sottospazio $\mathbb{R}^2$

quindi ogni oggetto di $\mathbb{R}^2$ può essere scritto come combinazione lineare dei due vettori

- indipendente: nessuno dei vettori può essere scritto come combinazione lineare dell'altro

Prendiamo $(1,0)$, $(0,1)$.

$(x,y) = h(1,0) + k(0,1)$

- $(1,0)$, $(2,0)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$?

No, perché le combinazioni lineari saranno tutte del tipo $(x,0)$

quindi $(0,1) \in \langle (1,0),(2,0) \rangle$

- $(1,0),(1,1)$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$?

$(x,y) = h(1,0) + k(1,1)$

$\begin{cases} h+k = x \\ k = y \end{cases}$ deve ammettere soluzione

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right)$ gradini $2\times 2 \Rightarrow \exists !$ soluzione $\forall_{(x,y)} \in \mathbb{R}^2$

Essendo unica la soluzione, sono anche indipendenti

- $\langle (1,0), (0,1), (2,-1) \rangle = \mathbb{R}^2$?

Sappiamo che $\langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$ sono DIPENDENTI

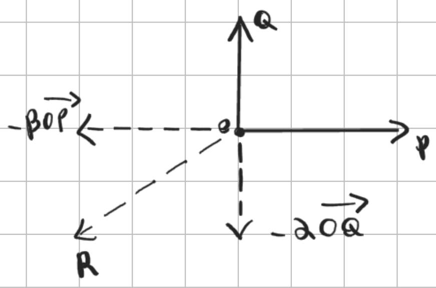
- $\mathbb{R}^3$, $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,-1),(0,0,0)$

$$(x,y,z)=h_1(1,0,0)+h_2(0,2,0)+h_3(0,0,-1)+h_4(0,0,0)$$

$$\begin{cases} h_1=x \\ 2h_2=y \\ -h_3=z \end{cases}$$ soluzione unica $\Rightarrow$ INDIPENDENTE

- $\mathbb{R}^n$, $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$ e' una base

- Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in O



E' FINITAMENTE GENERABILE perche' qualsiasi vettore applicato in O (ad esempio $\overrightarrow{OR}$), esistono α,β tali che $\beta\overrightarrow{OP}+\alpha\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$

- $\mathbb{R}_n[x]$, e' finitamente generabile? SI

con tutti i polinomi $1,x,\dots,x^n$

- $\mathbb{R}[x]$ (grado libero) NON e' finitamente generabile

$$\nexists\, p_1(x),\dots,p_n(x) \mid \mathbb{R}[x]=\langle p_i(x)\rangle$$

$\mathbb{R}[x] = \left\{ \alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_m p_m(x) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$

Se così fosse esisterebbe un grado massimo ASSURDO!

- $\mathbb{R}_{2,3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano una base

- $\mathbb{R}_{n,m}$ vale lo stesso ragionamento

- In $\mathbb{R}^2$

$(1,0)$ genera un sistema INDIPENDENTE ma NON non una base

- In $\mathbb{R}$

1 è base, (1) matrice è riferimento

2 è base, ...

...

PROPOSIZIONE

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ spazio vettoriale FINITAMENTE GENERATO,
V ammette BASI

DIMOSTRAZIONE

Sia $v_1, \dots, v_n$ sistema di generatori

Se sono indipendenti è banale.

Ipotizziamo siano dipendenti

$\exists v_i \mid v_i$ dipende dai rimanenti

ipotizziamo v_1 dipendente dal sistema

$\langle v_2, \dots, v_n \rangle$ è ancora generatore.

se non è indipendente itero i passaggi finché non trovo

un sistema indipendente che sarà la nostra base.

OSS

Da ogni sistema di GENERATORI si può estrarre una BASE

Es.

$(1,0), (2,0), (3,4), (5,6), (1,1)$ generatore di $\mathbb{R}^2$

Possiamo elidere $(2,0)$ perché dipende da $(1,0)$ (sono proporzionali)

Possiamo elidere $(3,4), (5,6)$ perché dipendono dal sistema

$(1,0), (1,1)$ è una base.

LEMMA DI STEINITZ

Sia V uno Spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n$ INDIPENDENTI $\in$

$\in \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, allora $m \geq n$

COROLLARIO

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ Spazio vettoriale, tutte la basi hanno lo stesso ordine (DIMENSIONE di V)

DIMOSTRAZIONE

Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ due basi

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un sistema indipendente e contenuto in $V = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$

Per il lemma di Steinitz

$m \geq n$

Viceversa

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ è un sistema indipendente e contenuto in $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

Per Steinitz

$n \geq m$

Allora $n = m$

OSS

- Il sottospazio generato dal vuoto è $\{\underline{0}\}$ (deve contenere l'elemento neutro)
- $\{\underline{0}\}$ ha come base $\emptyset$

PROPOSIZIONE

Sia V spazio vettoriale, sia $\dim(V)$ la cardinalità di una base:

- $V = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim(V) = 0$
- V NON finitamente generato $\Rightarrow \dim(V) = \infty$

Es. $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$, $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$

OSS

Si utilizza V_n per indicare che V è spazio vettoriale di
DIMENSIONE n e non nullo

PROPOSIZIONE

Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ e $\dim(V) = n$, allora:

① $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indipendenti $\Rightarrow m \leq n$

DIMOSTRAZIONE

Sia $e_1, \dots, e_n$ base di V_n

$v_1, \dots, v_m$ indipendenti $\in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = V_n$

Per Steinitz $m \leq n$

② $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendente $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è una BASE

DIMOSTRAZIONE

Verifichiamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sia un sistema di generatori

Per assurdo $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \underset{\neq}{\leq} V$

$\exists \underline{v} \in V \mid \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \underline{v}$ non dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

allora abbiamo un sistema $\langle v_1, \dots, v_n, \underline{v} \rangle$ di cardinalità $n+1$,
ASSURDO! per Steinitz

③ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generatori $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e' una base

DIMOSTRAZIONE

Se non fossero indipendenti, potremmo rimuovere i vettori e avere ancora un sistema di generatori. Allora avremo una base di cardinalità $< n$ ASSURDO! (Steinitz)

④ **COMPLETAMENTO DI UN SISTEMA INDIPENDENTE AD UNA BASE**

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indipendenti $\Rightarrow \exists\, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n \mid \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n$ base

DIMOSTRAZIONE

- $m = n$

  Verificato per il punto ②

- $m < n$

  $m < n \Rightarrow \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle < V$ (tutte le basi hanno cardinalità n)

  $\exists\, \underline{w}_{m+1} \in V \mid \underline{w}_{m+1}$ non dipende da $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle$

  Sappiamo che $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1} \rangle$ e' indipendente a sua volta

  Se e' una base avremo terminato, se non lo e' posso iterare i passaggi fino a un massimo di n vettori

Es.

in $\mathbb{R}^3$

$\langle(1,0,0)\rangle < \mathbb{R}^3$

Prendiamo un vettore che appartenga a $\mathbb{R}^3$ ma non a $\langle(1,0,0)\rangle$

$(2,3,4) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (1,0,0),(2,3,4)$ sono indipendenti

NON sono una base perché devono essere 3 (dimensione)

(sappiamo che $\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ è una base)

$(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (1,0,0),(2,3,4),(0,0,1)$ sono indipendenti

Questi formano una base

PROPOSIZIONE

Sia V spazio vettoriale per $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono equivalenti:

1. È una BASE (dimensione n)
2. È massimale rispetto all'INDIPENDENZA
3. È minimale rispetto all'essere un SISTEMA DI GENERATORI
4. È un sistema indipendente di cardinalità MASSIMA
5. È un sistema di generatori di cardinalità MINIMA

DIMOSTRAZIONE

① $\Rightarrow$ ②

$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{base}}, w_1, \dots, w_m$ è dipendente perché la cardinalità di una base è il massimo numero di vettori indipendenti individuabili

② $\Rightarrow$ ①

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ massimale indipendente

Se non e' una base, potremo aggiungere altri vettori indipendenti per ottenere una base, ma e' ASSURDO perché per ipotesi il sistema e' massimale indipendente

① $\Rightarrow$ ④

Il numero di vettori indipendenti e' al più la dimensione di V. Per ipotesi la dimensione e' n quindi e' verificata l'implicazione.

④ $\Rightarrow$ ①

Per lo stesso motivo di ② $\Rightarrow$ ①

① $\Rightarrow$ ③

Se non fosse minimale generatore possiamo togliere un vettore dal sistema per ottenere una base di cardinalità $n-1$

ASSURDO! perché tutte le basi hanno la stessa cardinalità, e
il sistema per ipotesi è una base (con cardinalità n)

⑤ $\Rightarrow$ ①

Analogo di ③ $\Rightarrow$ ①

PROPOSIZIONE

Sia $W < V_n$ spazio vettoriale, allora

① W è FINITAMENTE GENERABILE e $\dim(W) < n$

② $\dim(W) = n \iff W = V_n$

DIMOSTRAZIONE ①

Dimostriamo che W è finitamente generato

Per assurdo W non è finitamente generato

$\exists\, \underline{w}_1 \in W \mid W \neq \langle \underline{w}_1 \rangle$ (non è f.g.)

$\exists\, \underline{w}_2 \in W \mid \underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono indipendenti e $W \neq \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$

Possiamo iterare questi passaggi all'infinito, ma sappiamo
che essendo la $\dim(V) = n$ e i vettori $\underline{w}_i$ indipendenti,
il numero massimo di vettori indipendenti dovrebbe essere al più n

ASSURDO!

OSS

Presa una base di W, $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$, saranno indipendenti anche in V

$\Rightarrow m \leq n$

DIMOSTRAZIONE ②

$\Leftarrow$

è banale

$\Rightarrow$

Se $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ è base di W, significa che è un sistema indipendente di cardinalità n in V, il sistema sarà per quindi una base di V

COROLLARIO

Siano $W, Z \leq V_n$, allora

- $W \leq Z \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(Z)$
- $W \leq Z$ e $\dim(W) = \dim(Z) \Rightarrow W = Z$

Es.

1) $\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$, $\langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

hanno entrambi dimensione 2 ma non sono contenuti l'uno nell'altro

2) Esistono infiniti sottospazi con stessa dimensione ma distinti

$\langle (0,1) \rangle$, $\langle (1,1) \rangle$, $\langle (2,1) \rangle \dots$

3) In $\mathbb{R}^4$

$(2,3,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,0)$

Sappiamo che non formano una base perchè ogni base in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4.

Il vettore che dovremmo aggiungere è ad esempio $(0,0,1,0)$.

In questo modo $\langle(2,3,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$ è base

4) $H_1,\dots,H_n \leq V$ in somma diretta

$\Rightarrow \dim(H_1\oplus\dots\oplus H_n) = \dim(H_1)+\dots+\dim(H_n)$

Nel primo esempio non sono in somma diretta (abbiamo $(0,1,0)$ in comune), e la dimensione non risulta essere la somma delle singole dimensioni

PROPOSIZIONE

$H_1, \dots, H_n \leq V$ in somma diretta

$\dim(H_1 \oplus \dots \oplus H_n) = \dim H_1 + \dots + \dim H_n$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\underline{e}_{ij}$ la base j-esima dell'i-esimo spazio vettoriale

$\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1m_1}$ base di H_1

$\dots$

$\underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{nm_n}$ base di H_n

Dimostriamo che l'unione delle basi è base del sottospazio somma di $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$:

- È sicuramente un sistema di generatori perché essendo contenute tutte le n basi banalmente esisteranno degli $h \in \mathbb{R}$ tali che ogni spazio Hi è generabile

- Dimostriamo che sono indipendenti:

$$h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1m_1}\underline{e}_{1m_1} + \underbrace{\dots + h_{n_1}\underline{e}_{n1} + \dots + h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n}}_{\in H_2 \oplus \dots \oplus H_n}$$

Isolo la base di H_1

$$h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1m_1}\underline{e}_{1m_1} = - \dots - h_{n_1}\underline{e}_{n1} - \dots - h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n}$$

Abbiamo un oggetto scritto in due modi:

Un modo $\in H_1$ e un modo $\in (H_2 + \dots H_n)$

L' oggetto $\in H_1 \cap (H_2 \oplus \dots \oplus H_n)$ che per definizione di somma diretta $= \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow h_{11} \underline{e}_{11} + \dots + h_{1m_1} \underline{e}_{1m_1} = \underline{0}$

Ma essendo una base sono indipendenti, ne deriva che

$h_{11} = \dots = h_{1m_1} = 0$

Ma questo ragionamento si può applicare ad ogni sottospazio H_i

Quindi tutti i vettori sono indipendenti, la base è verificata ✓

Es.

$(1,0,0), (2,3,1), (1,0,1)$ sono indipendenti di $\mathbb{R}^3$

Ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto in un UNICO modo come combinazione lineare dei 3 vettori perchè l' indipendenza lineare implica l' unicità di scrittura. Allora possiamo scrivere $\mathbb{R}^3$ come somma diretta dei 3 sottospazi:

$\langle(1,0,0)\rangle \oplus \langle(2,3,1)\rangle \oplus \langle(1,0,1)\rangle$ è equivalente a

$\langle(1,0,0),(2,3,1)\rangle \oplus \langle(1,0,1)\rangle$

RELAZIONE DI GRASSMAN

Siano $H, K \leq V_n$

$\dim(H) + \dim(K) = \dim(H+K) + \dim(H \cap K)$

DIMOSTRAZIONE

Escludiamo il caso in cui $H \cap K = \{\underline{0}\}$ altrimenti sono in somma diretta (già dimostrato)

$\dim(H \cap K) = t \geq 1$

$\exists\ \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t$ base di $H \cap K$

Completiamo la base in H e K

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$ base di H

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$ base di K

Uniamo le basi

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s \Rightarrow$ sono $r+s-t$ oggetti

$r = \dim(H)$, $s = \dim(K)$

$r + s - t = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$

Dimostriamo che quest' uguaglianza equivale a $\dim(H+K)$

Dimostriamo che il nostro oggetto è una base:

- **Sistema di generatori:**

$v \in H+K \Rightarrow \exists \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \mid \underline{v} = \underline{h} + \underline{k}$

$\underline{h}$ è combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$

$\underline{k}$ è combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$

Ne deriva, per definizione di combinazione lineare, che

v è combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$

- **Sistema indipendente:**

poniamo a coefficiente dei vettori $\in H$ e b coefficiente dei vettori $\in K$

$$a_1\underline{e}_1 + \dots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \dots + a_r\underline{h}_r + b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \dots + b_s\underline{k}_s = \underline{0}$$

Isolo i vettori di K

$$a_1\underline{e}_1 + \dots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \dots + a_r\underline{h}_r = -b_{t+1}\underline{k}_{t+1} - \dots - b_s\underline{k}_s$$

Abbiamo un oggetto che appartiene a H e K, quindi

$x \in H \cap K = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t \rangle$

Possiamo quindi scrivere il nostro oggetto x nel seguente modo

$x = c_1\underline{e}_1 + \dots + c_t\underline{e}_t$

Ma ricordiamo che il nostro oggetto poteva essere anche scritto come

$x = -b_{t+1}\underline{k}_{t+1} - \dots - b_s\underline{k}_s$

Allora posso eguagliare le due espressioni:

$c_1\underline{e}_1 + \dots + c_t\underline{e}_t + b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \dots + b_s\underline{k}_s = \underline{0}$

Essendo indipendenti $c_1 = \dots = c_t = b_{t+1} = \dots = b_s = 0$

avendo scoperto che i $b_i = 0$ possiamo dire che

$a_1\underline{e}_1 + \dots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \dots + a_r\underline{h}_r = \underline{0}$

Essendo indipendenti $a_1 = \dots = a_r = 0$

Es.

$$\mathbb{R}_2[x] \qquad \overset{H}{\underset{\dim 2}{\langle 1, x\rangle}} + \overset{K}{\underset{\dim 2}{\langle 1, x^2\rangle}}$$

Sappiamo che $\langle 1, x\rangle \cap \langle 1, x^2\rangle = \underset{\dim 1}{\langle 1\rangle}$

$\dim(H+K) = 2+2-1 = \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

Se non è possibile individuare l'elemento comune si può generalizzare un elemento di H e uno di K e li eguaglio. Ne risulterà un sistema che ci darà le caratteristiche che caratterizzano l'elemento neutro, potendolo così individuare

COMPONENTI IN UN RIFERIMENTO

Sia V_n spazio vettoriale e $R = (e_1, \dots, e_n)$ RIFERIMENTO

$\forall \underline{v} \in V_n \quad \exists!\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} \mid \underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n$

$(h_1, \dots, h_n)$ è detta n-pla di COMPONENTI nel riferimento R

Es.

In $\mathbb{R}_{2,1}$

$R = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ dato $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ le componenti in R sono $(3,5)$

$R' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ dato $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ le componenti in R' sono $(5,3)$

COMPONENTI IN R $\longrightarrow$ COMPONENTI IN R'

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \longrightarrow R' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$

$\underline{e}_1 = a_{11} \underline{e}'_1 + \dots + a_{1n} \underline{e}'_n$

$\dots$

$\underline{e}_n = a_{n1} \underline{e}'_1 + \dots + a_{nn} \underline{e}'_n$

Preso $\underline{v} \in V_n$ sappiamo che avrà delle componenti

- $(x_1, \dots, x_n)$ in R (che conosciamo)
- $(x'_1, \dots, x'_n)$ in R' (che vogliamo conoscere)

def. di componenti

$$\underbrace{\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n}_{\text{def. di componenti}} = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1})\underline{e}'_1 + \dots + (x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn})\underline{e}'_n$$

$$= x'_1 \underline{e}'_1 + \dots + x'_n \underline{e}'_n$$

Per l'unicità di scrittura i coefficienti devono essere uguali

$x'_1 = x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}$ FORMULE DI PASSAGGIO

$\dots$

$x'_n = x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn}$

Attraverso le FORMULE DI PASSAGGIO abbiamo trovato la relazione tra le componenti nel vecchio riferimento (x_i) e quelli nel nuovo (x'_i) tramite i coefficienti da esplicitare (a)

MATRICE COMPONENTI COMPONENTI'

$A = (a_{ij})$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow X' = AX$

prodotto righe x colonne

Es.

In $\mathbb{R}^3$

$R = ((1,4,1),(1,5,0),(2,5,-1))$

$R' = ((1,0,-1),(0,2,1),(2,3,-2))$

Dobbiamo anzitutto trovare come i vettori di R si esplicitano in R' (i coefficienti "a"):

$(1,4,1) = 1 \cdot (1,0,-1) + 2(0,2,1) + 0(2,3,-2)$

$(1,5,0) = -1(1,0,-1) + 1(0,2,1) + 1(2,3,-2)$

$(2,5,-1) = 0 \cdot (1,0,-1) + 1(0,2,1) + 1(2,3,-2)$

Adesso applichiamo le formule di passaggio

$$\begin{cases} x_1' = 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \\ x_3' = 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 \end{cases}$$

Il vettore $(-3,2,4)$ (ad esempio) ha come componenti in R

$(-3,2,4) = 3(1,4,1) + 2(1,5,0) - 4(2,5,-1)$

Nel nuovo riferimento saranno:

$x_1' = x_1 - x_2 = 3 - 2 = 1$

$x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \cdot 3 + 2 - 4 = 4$

$x_3' = x_2 + x_3 = 2 - 4 = -2$

$(-3,2,4) = 1 \cdot (1,0,-1) + 4(0,2,1) - 2(2,3,-2)$

RIFERIMENTI CANONICI

- $\mathbb{R}^n$ $(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$

- $\mathbb{R}_n[x]$ $1, x, x^2, \dots, x^n$

- $\mathbb{R}_{2,3}$ $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

- Analogamente per $\mathbb{R}_{n,m}$

Es.

$H = \langle (1,0,1,2), (-1,2,3,0), (3,-2,-1,4), (2,4,6,0) \rangle \leq \mathbb{R}^4$

Cerchiamo una base per H

- Notiamo che 2 vettori sono proporzionali (quindi dipendenti), ne possiamo rimuovere uno (ad esempio $(2,4,6,0)$)

Notiamo anche che:

$(3,-2,-1,4) = 2(1,0,1,2) - 1(-1,2,3,0)$ quindi è dipendente

La nostra base di H è: $\langle (1,0,1,2), (-1,2,3,0) \rangle$

OSS

Tutti i sistemi di ordine 2 sono una base

- Un altro metodo può essere costruire la matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ⇒ NON SONO PROPORZIONALI

Le operazioni elementari di riga NON modificano il sottospazio generato dalle righe

OSS

La dim(H) e' pari al numero di pivot di un sistema a gradini equivalente

Scoperta così la dim(H) ci basterà prendere 2 vettori indipendenti e questi sicuramente formeranno una base.

Le n righe della matrice a gradini formeranno una base per la matrice di partenza

COROLLARIO

Due matrici a gradini di una data hanno lo stesso numero di pivot.

MATRICE COMPLEMENTARE

Sia A una matrice, $a_{ij} \in A$

$\forall a_{ij}$, $A_{(ij)}$ e' MATRICE COMPLEMENTARE di a_{ij} se

$A_{(ij)} = A \setminus$ i-riga, j-colonna

$A_{(nn)}$ complementare di a_{nn} sara' $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

Sia A una matrice, $a_{ij} \in A$

Diciamo COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{(ij)}$$

dove $\det A_{(ij)}$ e' il DETERMINANTE di $A_{(ij)}$

OSS

$\det(x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$

SVILUPPO DEL DETERMINANTE

Sia $a_{ij} \in A$ e A_{ij} il suo complemento algebrico, allora

$$\begin{matrix} a_{11}A_{11}+\dots+a_{1n}A_{1n} \\ = \\ \dots \\ a_{n1}A_{n1}+\dots+a_{nn}A_{nn} \end{matrix} = \det A = \begin{matrix} a_{11}A_{11}+\dots+a_{n1}A_{n1} \\ = \\ \dots \\ a_{1n}A_{1n}+\dots+a_{nn}A_{nn} \end{matrix}$$

SVILUPPO RISPETTO LE RIGHE   SVILUPPO RISPETTO LE COLONNE

Es.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aA_{11} + bA_{12} = ad - bc$

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2(-3) = -2$

- $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot A_{33} = 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1\,(1 \cdot 0 - 6) = -6$

REGOLA DI SORRUS

Sia A una matrice 3×3.

Duplichiamo le prime 2 colonne. Il DETERMINANTE sara'.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$\det = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

OSS

Se una matrice ha una riga/colonna nulla, il suo determinante e' 0.

PROPRIETA' DEL DETERMINANTE

① $\det A = \det A^t$

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per induzione sull' ordine di A

Base d' induzione:

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc \qquad \left|\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$$

Applichiamo l' ipotesi induttiva:

$$\det A = \sum a_{1i} A_{1i}$$

$$\det A^t = \sum a'_{i1} A^t_{i1} \qquad A^t_{i1} = (A_{1i})^t$$

② Se una riga dipende dalle rimanenti $\Rightarrow \det = 0$

OSS

Se il $\det \neq 0 \Rightarrow$ le righe sono indipendenti

③ TEOREMA DI CAUCHY-BINET

$A, B \in \mathbb{R}_n$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Es

$$\left|\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&1 \\ 3&2&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&\pi&4 \\ 3&2&1 \\ 0&1&7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&1 \\ 3&2&2 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1&\pi&4 \\ 3&2&1 \\ 0&1&7 \end{pmatrix}\right| = 0$$

④ $h \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_n$

Se moltiplichiamo una riga/colonna per h, Il determinante sarà

$$\det A \cdot h$$

⑤ Scambiando 2 righe/colonne il determinante cambia segno

Es.

$$\left|\begin{pmatrix} 1&1 \\ 2&1 \end{pmatrix}\right| = 1-2 = -1 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1&1 \\ 2&1 \end{pmatrix}\right| = 2-1 = 1$$

⑥ Se aggiungo ad una riga/colonna un multiplo di un'altra il determinante NON cambia

Es.

$$\left|\begin{pmatrix} 1&2&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&2 \end{pmatrix}\right| = 1\left|\begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&2 \end{pmatrix}\right| + 2\left|\begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&2 \end{pmatrix}\right| + 1\left|\begin{pmatrix} 0&0 \\ 0&0 \end{pmatrix}\right| = 1\left|\begin{pmatrix} 0&1 \\ 0&2 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&3\\0&0&2\end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\right| = 0$$ (seconda riga = prima riga x2)

⑤ Sia A una matrice e D la matrice a gradini equivalente ad A

$$|A| \neq 0 \iff |D| \neq 0$$

MATRICE INVERTIBILE

Sia $A \in \mathbb{R}_n$, è detta INVERTIBILE se e solo se

$$\exists B \in \mathbb{R}_n \mid AB = I_n = BA$$

I_n è la matrice IDENTICA

B è detta INVERSA di A

PROPOSIZIONE

Una matrice A è INVERTIBILE se e solo se $|A| \neq 0$

Essa si può calcolare:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ & \ddots & A_{nn}\end{pmatrix}$$ matrice trasposta dei componenti algebrici

Es.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 4 - 6 = -2 \Rightarrow A$ è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

COROLLARIO

Siano $A, B \in \mathbb{R}_n$ e $AB = I_n$

A, B sono invertibili e $B = A^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

Applichiamo Cauchy-Binet

$\det(AB) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \neq \det B$

Quindi A e B sono invertibili ($\det \neq 0$)

$AB = I_n \Rightarrow (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$

RANGO DI RIGA

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

Definiamo RANGO DI RIGA la dimensione del sottospazio generato dalle righe

RANGO DI COLONNA

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

Definiamo **RANGO DI COLONNA** la dimensione del sottospazio generato dalle colonne

OSS

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_r(A) = 0 = r_c(A)$$

MINORE DI ORDINE H

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

Si $h \in \mathbb{R} \mid 0 < h \leq \min\{3,4\}$

Scelti h indici di riga e h indici di colonna, eliminiamo le restanti righe, colonne.

La matrice risultante $A' \in \mathbb{R}_h$ è detta matrice **MINORE DI ORDINE h**

Es.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad 0 < 2 \leq \{3,4\} \qquad h = 2$

scelgo come indici di riga 1,2 e come indici di colonna 1,4

Elimino quindi la 3ª riga e 2ª,3ª colonna

La matrice minore di ordine 2 sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h = 1$

$A(1;2)$ ← colonne scelte

↑ righe scelte

DETERMINANTE DI UN MINORE

Essendo il minore una matrice quadrata, possiamo individuare il suo determinante

$$|A| \left(i_1, \dots, i_k ; j_1, \dots, j_k\right)$$

MINORE DI ORDINE MASSIMO

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

Definiamo un minore DI ORDINE MASSIMO se il se l'ordine del minore è:

$$|A| = \min \{n, m\}$$

Es.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A(1,2; 1,2)$ minore di ordine massimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS

Se A è una matrice QUADRATA, il minore di ordine massimo è la matrice stessa.

ORLATO DI UN MINORE

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

Supponiamo $A(i_1, \dots, i_k ; j_1, \dots, j_k)$ con $k < \{m, n\}$

$\exists\ \bar{i} \neq i_1, \dots, i_k \leq \min\{n, m\}$ indice di RIGA

$\exists\ \bar{j} \neq j_1, \dots, j_k \leq \min\{n, m\}$ indice di COLONNA

Definiremo ORLATO del minore, il minore

$$A(i_1, \dots, i_k, \bar{i} ; j_1, \dots, j_k, \bar{j})$$

OSS

- l'ordine degli indici in parentesi e' irrilevante
- L'indice per l'orlato puo' essere maggiore o minore degli indici del minore scelto in precedenza

<u>Es.</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad A(2,3; 1,4) \to \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{MINORE}$$

$$A(1,2,3 ; 1,2,4) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{MINORE ORLATO}$$

FONDAMENTALE

Sia A una matrice.

Un suo minore si dice FONDAMENTALE se

- Il suo determinante $\neq 0$
- Il determinante di ogni orlato e' $= 0$

OSS

- NON ci sono SEMPRE fondamentali.

Es. $A = 0$

- Se NON posso costruire orlati (e il suo determinante e' $\neq 0$) sara' un minore FONDAMENTALE

Es.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A|(3,5) = 1 \neq 0$$

parto da un minore 1×1

Controlliamo i possibili orlati

righe: 1, 2

colonne: 1, 2, 3, 4

$$|A|(1,2,3\,;\,1,3,5) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-7 = -6 \neq 0$$

Questo è un orlato di ordine massimo. Non potendo più orlare siamo sicuri che sia un FONDAMENTALE

OSS

- Un minore di ordine MASSIMO con $|A| = 0$ è sicuramente un FONDAMENTALE perché non possiamo orlare
- I FONDAMENTALI hanno stesso ORDINE
- Se $A \neq 0$ SICURAMENTE esiste un minore FONDAMENTALE

TEOREMA DEGLI ORLATI

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$ e $A(i_1, \dots, i_k\,;\, j_1, \dots, j_k)$ minore fondamentale

$\Rightarrow$ le righe $i_1, \dots, i_k$ formano una BASE del sottospazio generato dalle righe

Analogamente vale per le colonne.

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(1,2,3;1,3,5) \text{ minore fondamentale}$$

$\langle (2,0,1,3,7),(1,0,0,0,0),(3,1,1,1,1) \rangle$ dim $=3$

$\langle (2,1,3),(1,0,1),(7,0,1) \rangle$ dim 3

COROLLARIO

Il rango di riga = rango di colonna = **RANGO** di A $r(A)$

$r(A) =$ n° di pivot di una matrice a gradini equivalente per righe

COROLLARIO

TUTTI i minori **FONDAMENTALI** hanno lo stesso **ORDINE**

COROLLARIO

$A \in \mathbb{R}_n$

$|A| \neq 0 \iff$ le righe/colonne sono **INDIPENDENTI**

OSS

$|A| = 0 \iff$ le righe/colonne sono dipendenti

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ righe indipendenti per ipotesi

questo già lo sappiamo

$\Leftarrow$

Per ipotesi le righe sono indipendenti $\Rightarrow r(A) = n$

perché il rango (di riga) è la dimensione del sottospazio generato, se sono indipendenti sarà il numero di righe n.

Prendiamo un minore fondamentale di A, ma essendo A quadrata sarà A stesso (unico minore di ordine n).

Per il TEOREMA DEGLI ORLATI $|A| \neq 0$

Es.

Calcolare una base di

$\langle (1,2,0,0), (5,2,3,4), (1,0,0,0), (6,4,3,4), (0,0,0,0), (\pi,0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A|(1,2;1,2) \neq 0$

Orliamo con $|A|(1,2,3;1,2,3) \neq 0$

Trovato questo nuovo minore 3x3, si può verificare che tutti gli altri orlati sono 0

CRITERI DI COMPATIBILITÀ

Dato un sistema di equazioni lineari:

① S è COMPATIBILE $\Longleftrightarrow$ la colonna dei termini noti è COMBINAZIONE LINEARE della MATRICE INCOMPLETA

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} = \text{matrice } AX = C$$

termini noti

$$C = \underline{A}_1 x_1 + \dots + \underline{A}_n x_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

C è COMBINAZIONE LINEARE di A

② TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

S è COMPATIBILE $\Longleftrightarrow$ la matrice COMPLETA e quella INCOMPLETA hanno lo stesso RANGO

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$

$h = r(A) = r(A')$

A = matrice COMPLETA   A' = matrice INCOMPLETA

Prendiamo h colonne INDIPENDENTI di A $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sono INDIPENDENTI anche in A'

Per definizione di rango, queste h colonne di A generano una BASE per A'. Questo implica che la colonna c si scrive come combinazione lineare di A e X

Per il 1° criterio di compatibilità, S è COMPATIBILE

$\Rightarrow$

Supponiamo S COMPATIBILE e h rango di A

Prendiamo h colonne INDIPENDENTI di A

Prendiamo il sottospazio generato da TUTTE le colonne di A

$V = \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \rangle$

Essendo S compatibile, per il 1° criterio di compatibilità

C è combinazione lineare delle altre colonne.

Ma quindi il sottospazio generato dalle colonne di A

è uguale al sottospazio generato dalle colonne di A'
(perché possiamo escludere C essendo dipendente)

Es.

- Verifichiamo che il sistema è compatibile

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Partiamo da $A(1,1)$ e orliamo

$$(2) \rightarrow \underset{\det = -3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{\det = 12}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

la matrice incompleta è minore fondamentale con rango 3

sarà minore fondamentale anche dell'incompleta (perché non posso orlare)

Hanno stesso rango $\Rightarrow$ il sistema è COMPATIBILE per Rauchy-Capelli

- Determinare h tale che il sistema è compatibile

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & h \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & h & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Partiamo da $A(1,1)$ e orliamo

$2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A \qquad |A| = -4+6+h-(-6h+1+4) = 7h-3$

$|A|=0 \iff h=\frac{3}{7} \implies r(A)=2$ perchè la matrice 2×2 è minore fondamentale

▷ per $h \neq \frac{3}{7}$ $r(A)=3$ ed è massimo $\implies r(A')=3$

Il sistema è compatibile

▷ per $h=\frac{3}{7}$ $r(A)=2$ e $r(A')=3$ perchè possiamo orlare la matrice 2×2 con la 4ª colonna anzichè la 3ª

$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right|$ $\det \neq 0$

quindi il sistema è INCOMPATIBILE

CALCOLO DELE SOLUZIONI DI UN SISTEMA COMPATIBILE

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \dots \\ \qquad \dots a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Calcoliamo il minore fondamentale di A (che lo sarà anche per A')
Eliminiamo le righe al di fuori del minore fondamentale (perché sono dipendenti).
Resteranno solo righe indipendenti con n° equazioni ≤ n° incognite
Andiamo a vedere i possibili casi

n equazioni = n incognite

La matrice completa è quadrata. Le righe sono indipendenti,
Il determinante $|A| \neq 0$ e possiamo dire che

$$AX = C \iff X = A^{-1}C$$

Il sistema è quindi DETERMINATO

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} + & + A_{n1} \\ \vdots & \\ A_{1n} + & + A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_n A_{n1}}{|A|}$$

Per studiare questa nostra soluzione usiamo una matrice ausiliaria tale che la prima colonna è la colonna C e il resto della matrice è uguale ad A meno la prima colonna.

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_1 + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ \dots \\ c_n + a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante rispetto la prima colonna notiamo che i complementi algebrici di B_1 sono uguali a quelli di A (perché eliminiamo la prima colonna), il determinante è quindi:

$$|B_1| = \underline{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_n A_{n1}}$$

ma questo è il numeratore della nostra x_1, quindi

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}$$ questa è detta REGOLA DI CRAMER

in generale $$x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

Es.

$$S = \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 8$$

$$x_1 = \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{8} = 1$$

$$\bar{S} = \{(2,1,1)\}$$

$$x_2 = \frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{8} = 1$$

(2) n° equazioni < n° incognite

Prendiamo in esempio il seguente sistema

$$S = \begin{cases} 2x+y+z+2t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$

Prendiamo un minore fondamentale

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Portiamo le incognite fuori dal minore fondamentale a destra

$$\begin{cases} 2x+y=-z-2t \\ x+y=-z-t \end{cases}$$

E fissiamo le incognite escluse

$$\begin{cases} 2x+y=c_1 \\ x+y=c_2 \end{cases}$$

Le righe sono sicuramente indipendenti, possiamo applicare CRAMER

$x = c_1 - c_2 \qquad y = 2c_2 - c_1$

Sostituiamo nel sistema

$x = c_1 - c_2 = -z - 2t + z + t = -t$

$y = 2c_2 - c_1 = 2(-z-t) + z + 2t = -z$

fissate t e z avremo come sistema di soluzioni:

$\bar{S} = \{(-t, -z, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

$\bar{S}$ e' indeterminato con ∞^2 soluzioni

PROPRIETA' DEI SISTEMI OMOGENEI

$S: AX = 0$ sistema omogeneo

① $\bar{S} \leq \mathbb{R}^n$ (sottospazio vettoriale)

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare che:

- $\bar{S} \neq \emptyset$
- $+$ e $\cdot$ sono chiuse in $\bar{S}$

- $\bar{S}$ ammette la soluzione banale $(0,..,0) \in \bar{S}$
- Siano $y_1, y_2 \in \bar{S}$

Sappiamo che $AY_1 = 0$ e $AY_2 = 0$

$A(y_1+y_2) = Ay_1 + Ay_2 = 0+0 = 0$ $\quad y_1+y_2 \in \bar{S}$ la somma è chiusa.

$\lambda \in \mathbb{R} \mid A(\lambda y_1) = \lambda(AY_1) = 0$ $\quad$ il prodotto è chiuso

TROVARE UNA BASE DI $\bar{S}$

Consideriamo lo stesso caso visto prima, quindi esplicitato il minore e isolate le colonne

$$\begin{cases} 2x+y = -2-2t \\ x+y = -z-t \end{cases} \qquad \bar{S} = \left\{ \alpha(z,t), \beta(z,t), z, t \mid z,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Prendiamo dei valori arbitrari di z e t

$z=1,\ t=0 \rightarrow (\alpha(1,0), \beta(1,0), 1, 0)$

$z=0,\ t=1 \rightarrow (\alpha(0,1), \beta(0,1), 0, 1)$

I due vettori soluzione sono INDIPENDENTI

Verifichiamo che formino una base, quindi

$\forall\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \in \bar{S}$, la soluzione è combinazione lineare di

$(\alpha(1,0), \beta(1,0), 1, 0),\ (\alpha(0,1), \beta(0,1), 0, 1)$

Quindi in particolare

$(\alpha(\bar{z},\bar{t}), \beta(\bar{z},\bar{t}), \bar{z}, \bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ soluzioni generalizzate

Per CRAMER $\exists!$ soluzione di $\begin{cases} 2x+y=-\bar{z}-2\bar{t} \\ x+y=-\bar{z}-\bar{t} \end{cases}$

Notiamo che le due matrici soluzione generiche hanno i valori esterni di un ipotetico minore fondamentale uguali

Ma se per cramer questi sono definiti unicamente, e la prima matrice ha i primi due valori che dipendono dagli altri due, allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ devono per forza coincidere con questi.

$\alpha(\bar{z},\bar{t}) = \bar{x}$, $\beta(\bar{z},\bar{t}) = \bar{y}$

Ma noi volevamo dimostrare la lineare dipendenza quindi:

$\bar{z}(\alpha(1,0), \beta(1,0), \bar{z}, \bar{t}) + \bar{t}(\alpha(0,1), \beta(0,1), 0, 1) = (\cdot, \cdot, \bar{z}, \bar{t}) \in S$

Ma essendoci l'unicità del minore fondamentale per Cramer, i due

- sono proprio $\bar{x}$ e $\bar{y}$

RELAZIONE TRA SISTEMA GENERALE ED OMOGENEO ASSOCIATO

Sia $S: Ax = C$ il sistema GENERALE e

$S_0: AX = 0$ l' OMOGENEO associato

Fissato $y \in \bar{S}$

① $\forall z \in \bar{S} \quad \exists z_0 \in \bar{S}_0 \mid z = y + z_0$

② $\forall z_0 \in \bar{S}_0 \mid y + z_0 \in \bar{S}$

DIMOSTRAZIONE

② $A(y+z_0) = AY + AZ_0 = C + 0 = C \Rightarrow y + z_0 \in \bar{S}$ e' soluzione ✓

↖ definizione di omogeneo

① Sia $z \in \bar{S}$

$$A(z-y) = AZ - AY = C - C = 0 \Rightarrow z - y \in S_0$$

$$z = y + (z-y)$$

Es.

$$S: \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases} \qquad S_0: \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$\bar{S}_0 = \langle (0,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$

Fisso $z = 0$ e $t = 0$ (a scelta)

$Y \in \overline{S}$: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=0 \; , \; y=1$

$Y = (0,1,0,0) \in \overline{S}$ $\qquad \overline{S} = (0,1,0,0) + \overline{S}_0$

n incognite, n-1 equazioni

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \qquad + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1\,n} \end{pmatrix} \quad r(A) = n-1 \quad (\text{rango max})$$

Sappiamo che $\dim \bar{S} = 1$ perché fuori dal minore fondamentale possiamo portare solo un' incognita

Dobbiamo trovare solo UNA soluzione non nulla

Prendiamo i minori di A di ordine n-1, che saranno n.

Ce ne sarà almeno uno il cui determinante diverso da 0 (perché abbiamo $r(A)=n-1$ quindi il minore fondamentale ha ordine n-1 per il teorema degli orlati, quindi il minore deve esistere)

Quindi $\quad \exists\, \lambda_i = \det(A_i) \mid \lambda \neq 0$

Consideriamo la n-pla dei determinanti dei minori

$(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n) \in \bar{S}$ (il segno cambia per definizione di det)

Siamo sicuri che ci sarà un $\lambda_i \neq 0$, verifichiamo che la n-pla sia soluzione.

Consideriamo una matrice quadrata

$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & a_{n-1n} \end{pmatrix}$ duplico la 1^a riga e l'aggiungo sopra $\det C_1 = 0$

Sviluppiamo il determinante rispetto alla prima riga

$\lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{12} + \ldots + (-1)^{n-1} \lambda_n a_{1n} = 0$

se consideriamo $\lambda_i = x_i$ abbiamo proprio la prima equazione del sistema di partenza

Es.

$S: \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Sono equazioni indipendenti perchè non proporzionali

$\bar{S} = \left\langle \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \right\rangle$

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e V' spazi vettoriali

L'applicazione $f: V \to V'$ e' detta **LINEARE** se

① $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

Sono anche detti OMOMORFISMI

Se $V=V'$ → ENDOMORFISMO

Se f è INIETTIVA → MONOMORFISMO

" SURIETTIVA → EPIMORFISMO

" ~~ISOMORFISMO BIETTIVO →~~ AUTOMORFISMO (endorfismo biettivo)

Es.

① $f: V \to V$, $\underline{v} \to \underline{0}$ endorfismo NULLO

② $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3$

verifichiamo la linearità

- $f((x,y)+(x',y')) = f((x+x'),(y+y')) = (x+x', x+x'+y+y', y+y')$

  $f(x+y)+f(x'+y') = (x, x+y, y) + (x', x'+y'+y') = (x+x', x+x'+y+y', y+y')$

- $f(\lambda(x+y)) = \lambda f(x+y)$ ✓

E' iniettiva?

$(x,y) \neq (x',y)' \Rightarrow f(x,y) \neq f(x',y')$

è iniettiva, NON è suriettiva (Es. (1,0,1))

è un MONOMORFISMO

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x$

è lineare, suriettiva, non iniettiva, e' un EPIMORFISMO

④ $i: V \to V$ IDENTITA'

$\underline{v} \to \underline{v}$

⑤ $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ è isomorfismo

$ax^2+bx+c \to (a,b,c)$

⑥ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è lineare

$x \to x^2$

⑦ $A \in \mathbb{R}_{m,n}$

$f: x \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m$

$f(x_1+x_2) = A(x_1+x_2) = AX_1 + AX_2 = f(x_1) + f(x_2)$

Es.

$$f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + y + 2z \\ 2x + \quad + z \end{pmatrix}$$

⑧ $f: ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] \to 2ax+b \in \mathbb{R}_2[x]$

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V'$ LINEARE

$\forall h, k \in \mathbb{R}, \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

① $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

② $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_{V'}$

③ $f(h_1 v_1 + \dots + h_n v_n) = h_1 f(\underline{v}_1) +$

④ $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$

DIMOSTRAZIONE

① $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = f(h\underline{v}) + f(k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

② $f(\underline{0}) = f(\underline{0} + \underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0}) \quad \Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0}$

③ Si dimostra per induzione.

Sia la base dimostrata il punto ①.

Sia $P(n)$ vera, dimostriamo $P(n+1)$

$f(h_1 v_1 + \dots + h_{n-1} v_{n-1}) = h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_{n-1} f(\underline{v}_{n-1})$

④ $f(-\underline{v}) = f(-1\cdot \underline{v}) = -1\, f(\underline{v}) = -f(\underline{v})$

PROPOSIZIONE

Sia $f\ V \to V'$ lineare

① $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t \in V$ dipendenti $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t)$ dipendenti in V'

f CONSERVA la linearità

DIMOSTRAZIONE

$\exists\, h_i \in \mathbb{R}$ non tutti nulli $\mid h_1\underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_t = \underline{0}$

$f(h_1\underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_t) = f(\underline{0}) = \underline{0}$

allora $h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_t f(\underline{v}_t)$ sono INDIPENDENTI

② $\underline{v} \in \langle S \rangle \Rightarrow f(\underline{v}) \in \langle f(S) \rangle$

DIMOSTRAZIONE

$\underline{v} = h_1 \underline{s}_1 + \dots + h_m \underline{s}_m$ con $S = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_m\}$

$f(\underline{v}) = h_1 f(\underline{s}_1) + \dots h_m f(\underline{s}_m)$

$f(\underline{v}) \in \langle f(\underline{s}_1) + \dots + f(\underline{s}_m) \rangle = \langle f(S) \rangle$

Es.

$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}$

$(1,0) \to 1$

$(1,1) \to$

OSS

L' INDIPENDENZA non si conserva

3 $W \leq V \Rightarrow f(W) \leq V'$

DIMOSTRAZIONE

$W \neq \emptyset$ (sottospazio) $\Rightarrow f(W) \neq \emptyset$

Verifichiamo la stabilità rispetto alla somma (e prodotto)

$\underline{v}', \underline{w}' \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{v}, \underline{w} \in W \mid f(\underline{v}) = \underline{v}' \wedge f(\underline{w}) = \underline{w}'$

$\underline{v}' + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}) \qquad \underline{v} + \underline{w} \in W$

Analogamente vale per il prodotto

4 $W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle \Rightarrow f(W) = \langle f(w_1), \dots, f(w_m) \rangle$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo la doppia inclusione

- $w_i \in W \Rightarrow f(w_i) \in f(W) \Rightarrow \langle f(w_1), \dots, f(w_m) \rangle \leq f(W)$

  generatori di W

- $w' \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{w} \in W \mid \underline{w}' = f(\underline{w})$

Per definizione di generatore

$\exists\, h_i \in \mathbb{R} \mid \underline{w} = h_1 \underline{w}_1 + \dots + h_m w_m$ applichiamo f ambo i membri

$\underline{w}' = h_1 f(\underline{w}_1) + \dots + h_n f(\underline{w}_n)$

$\underline{w}'$ e' combinazione lineare delle $f(\underline{w}_i)$, quindi

$\underline{w}' \leq \langle f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n) \rangle$ (possiamo ignorare gli h)

KER e Im f

Sia $f: V \to V'$ lineare definiamo gli insiemi

- $\operatorname{Im} f = f(V) = \{ f(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V \}$

- $\operatorname{Ker} f = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che Ker$f$ e' sottospazio vettoriale del dominio

- $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$ perche' $\underline{0} \in \operatorname{Ker} f$
- $\underline{v}, \underline{w} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \operatorname{Ker} f$

  $f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ ✓

- $\lambda \in \mathbb{R}$

  $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ✓

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V'$ lineare

V finitamente generato e $e_1, \dots, e_n$ base $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$

Es

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

  $(x,y,z) \to (x,y)$

$$\begin{array}{ccc} (1,0,0) & \xrightarrow{f} & (1,0) \\ (0,1,0) & \to & (0,1) \\ (0,0,1) & \to & (0,0) \\ \text{basi di } \mathbb{R}^3 & & \text{basi di } \operatorname{Im} f \end{array}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(0,0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  $(x,y) \to xy$

  NON e' lineare, non valgono le prop. precedenti

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

  $(x,y) \to (x, x+y, y)$

  $\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in V \mid (x, x+y, y) = (0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}$

$\mathrm{Im}\, f = \{ (u,v,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (u,v,z) \}$

$\{ (x, x+y, y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$

Possiamo applicare la proposizione e applicare f ad un sistema di basi di f

$(1,0) \to (1,1,0)$
$(0,1) \to (0,1,1)$

$\mathrm{Im}\, f = \{ (1,1,0), (0,1,1) \}$

- $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

$F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m$

$AX = 0$ è un sistema di equazioni lineari

In questo caso il Ker f è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo.

$$\mathrm{Im}\, F_A = \langle \underbrace{A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{immagini delle basi}} \rangle$$

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V'$

- f è SURIETTIVA $\iff \mathrm{Im}\, f = V'$
- f è INIETTIVA $\iff \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE

- Ovvia

- $\Rightarrow$

$\underline{0} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \{\underline{0}\} \leq \operatorname{Ker} f$

$\underline{v} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0}$ $\quad f$ e' iniettiva e $f(\underline{0}) = \underline{0}$ $\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

quindi $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$ ✓

$\Leftarrow$

$f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = \underline{0}$

$f(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$

PREPOSIZIONE

Sia $f : V \to V'$ un MONOMORFISMO (lineare e iniettiva)

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ indipendente $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_m)$ INDIPENDENTI

DIMOSTRAZIONE

$h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_m f(\underline{v}_m) = \underline{0}$

Dobbiamo dimostrare che tutti gli $h_i = 0$ (lineare indipendenza)

$h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_n f(\underline{v}_n) = f(h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n) = \underline{0} \implies h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n \in \operatorname{Ker} f$

Ma sappiamo che nel nostro caso $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \implies h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$

Essendo i vettori indipendenti $\implies h_1, \dots, h_n = 0$ ✓

TEOREMA

Sia $f: V_n \to V$ lineare

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V = n$$

DIMOSTRAZIONE

Analizziamo prima alcuni casi particolari e poi quello generale

- $\operatorname{Ker} f = V_n \implies f$ è l'app. nulla $\implies n + 0 = n$
- $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \implies f$ e' iniettiva

  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base di $V \implies f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ base di $\operatorname{Im} f$

  $0 + n = n$ ✓

- $\{\underline{0}\} < \operatorname{Ker} f < V_n$

  Prendiamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ base di $\operatorname{Ker} f$

  Completiamo propriamente la base:

  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t, \underline{v}_{t+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V_n

Proviamo che $f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n)$ è base di $\operatorname{Im} f$:

Per trovare una base di $\operatorname{Im} f$ possiamo applicare f ad una base di V_n

$\operatorname{Im} f = \langle f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t), f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$

ma $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t) = \underline{0}$ (Ker) quindi possiamo escluderli

$\operatorname{Im} f = \langle f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$

Dobbiamo dimostrare che però siano indipendenti :

$h_{t+1} f(\underline{v}_{t+1}) + \dots + h_n f(\underline{v}_n) = \underline{0}$ possiamo riscriverlo come

$f(h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n) = \underline{0} \implies h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n \in \operatorname{Ker} f$

Possiamo scrivere il nostro vettore come combinazione lineare della base del Ker f

$\exists\, h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R} \mid$

$h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_t \implies$

$h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n - h_1 \underline{v}_1 - \dots - h_t \underline{v}_t = \underline{0}$

Essendo i vettori una base per V_n sono indipendenti :

$h_1, \dots, h_n = 0$

ISOMORFISMO COORDINATO

Sia V_n spazio vettoriale e $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ un riferimento

$C_R: \underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n \in V_n \to (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

C_R è detto ISOMORFISMO COORDINATO

L'applicazione è ben definita per l'unicità di scrittura ed è lineare

È INIETTIVA ?

$\operatorname{Ker} C_R = \{ \underline{v} \in V_n \mid C_R(\underline{v}) = (0, \dots, 0) \} = \{ \underline{0} \}$ ✓

È SURIETTIVA ?

$\operatorname{Im} C_R = \langle C_R(\underline{e}_1), \dots, C_R(\underline{e}_n) \rangle$ per come è definita

$\operatorname{Im} C_R = \langle (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^n$ ✓

TEOREMA

Ogni spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n è ISOMORFO ad $\mathbb{R}^n$

PROPOSIZIONE

Sia $f: V \to V'$ un ISOMORFISMO LINEARE allora $f^{-1}: V' \to V$ e' un ISOMORFISMO

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che f^{-1} (che esiste perchè f e' suriettiva) è lineare

- $\underline{v}', \underline{w}' \in V' \Rightarrow f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$

$$\exists \, \underline{v}, \underline{w} \in V \mid \underline{v}' = f(\underline{v}) \wedge \underline{w}' = f(\underline{w})$$

$$f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}(f(\underline{v}) + f(\underline{w})) = f^{-1}(f(\underline{v} + \underline{w})) = \underline{v} + \underline{w} = f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}') \checkmark$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(\lambda \underline{v}') = f^{-1}(\lambda f(\underline{v})) = f^{-1}(f(\lambda \underline{v})) = \lambda \underline{v} = \lambda f^{-1}(\underline{v}') \checkmark$$

COROLLARIO

Sia $f: V \to V'$ un ISOMORFISMO. Allora:

1. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ INDIPENDENTI $\Leftrightarrow$ $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ INDIPENDENTI
2. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ DIPENDENTI $\Leftrightarrow$ $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ DIPENDENTI

③ Sia W sottospazio di V

Sia $\underline{w}_1, ---, \underline{w}_n$ base di W $\Leftrightarrow$ $f(\underline{w}_1), ---, f(\underline{w}_n)$ base di $f(W)$

Questi corollari sfruttano tutti il fatto che se f è un isomorfismo allora anche f^{-1} è un isomorfismo

Es.

$\mathbb{R}_2[x]$ $\quad W = \langle x^2+2x, x-1, 2x^2+3x, x^2+3x-2 \rangle$

$\mathbb{R}_3[x]$ $\quad f(W) = \langle (1,2,0), (0,1,-1), (2,3,0), (1,3,-2) \rangle$

(f è l'isomorfismo coordinato)

Volendo cercare una base di W, possiamo trovare una base di $f(W)$ e applicare f^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ trovo il minore fondamentale e avrò la base

APPLICAZIONI NOTE

Sia $f: V \to V_m$ lineare, è detta NOTA quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base

DIMOSTRAZIONE

Sia $e_1, \dots, e_n$ una base di V_n e siano note le immagini $f(e_1), \dots, f(e_n) \Rightarrow \exists\, v \in V_n \mid f(v) = f(h_1 e_1 + \dots + h_n e_n) =$
$= h_1 f(v_1) + \dots + h_n f(v_n)$ ✓

MATRICE ASSOCIATA AD f NEI RIFERIMENTI R ed R'

Sia $f: V_n \to V_m$ lineare

sia $R = (e_1, \dots, e_n)$ RIFERIMENTO di V_n e

$R' = (e'_1, \dots, e'_m)$ RIFERIMENTO di V_m

$$f(e_1) = a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \dots + a_{m1} e'_m$$
$$\dots$$
$$f(e_n) = a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \dots + a_{mn} e'_m$$

Definiamo MATRICE ASSOCIATA AD f NEI RIFERIMENTI R ed R' la matrice dei coefficienti delle immagini del riferimento R.

$$M_{RR'}(f)$$

- Se $V_n = V_m$ (endomorfismo) scegliamo lo stesso riferimento
- $R = R'$ allora $M_R(f)$ è QUADRATA

$$M_{RR'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Applichiamo al riferimento R la f e i coefficienti risultanti verranno poste sulle m righe ed n colonne

PROPRIETA' DI $M_{RR'}(f)$

Sia $v \in V_n$, X insieme delle componenti di $\underline{v}$ in R

X' insieme delle componenti di $f(\underline{v})$ in R'

$$X' = M_{RR'}(f)\, X$$

X' e X sono COLONNE

DIMOSTRAZIONE

$X' = (x'_1, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

le indichiamo come righe ma sono COLONNE

$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$ applichiamo f $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\underline{v}) = x_1 f(\underline{e}_1) + \dots + x_n f(\underline{e}_n)$

ma $f(\underline{e}_1) = a_{11} \underline{e}'_1 + \dots + a_{m1} \underline{e}'_m$ e di conseguenza

$$f(\underline{v}) = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n})\, \underline{e}'_1 + \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn})\, \underline{e}'_m$$

Per l' unicità di scrittura $(x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) = x'_1$ e
$(x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) = x'_m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + a_{1n} x_n \\ \\ x_1 a_{m1} + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{m1} \end{pmatrix}$$

OSS

Si può dimostrare che se $A \in \mathbb{R}_{m,n} \mid X' = AX$

$X = C_R(\underline{v})$ e $X' = C_{R'}(f(\underline{v}))$ $\forall \underline{v} \Rightarrow A = M_{RR'}(f)$

Es.

- $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (2x-3y, -x+y, 0) \in \mathbb{R}^3$

  $R = ((1,1),(2,-1))$ $R' = ((0,0,1),(1,0,1),(0,0,1))$

Applichiamo f ai vettori del riferimento

$f(1,1) = (-1,0,0)$ esprimiamolo come combinazione lineare dei riferimenti del codominio

$(-1,0,0) = 0 \cdot (0,1,1) - 1(1,0,1) + 1(0,0,1)$

$f(2,-1)=(7,-3,0)=-3(0,1,1)+7(1,0,1)-4(0,0,1)$

$$M_{RR'}(f)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

Prendiamo un vettore di $\mathbb{R}^2$ e ne troviamo le componenti

$(3,0)=1\cdot(1,1)+1\cdot(2,-1) \Longrightarrow C_R((3,0))=(1,1)$

$$\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 6\\ -3\end{pmatrix}$$

$$f(3,0)=-3(0,1,1)+6(1,0,1)+3(0,0,1)$$

Qual e' Ker f?

$\underline{v}\in \operatorname{Ker} f \iff C_R(f(\underline{v}))=(0,\dots,0) \iff AX=0$

Dopodiche' risolviamo $AX=0$ ....

$\operatorname{Ker} f=\{\underline{v}\in V \mid C_R(\underline{v})$ e' soluzione di $AX=0\}$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nei riferimenti } R = \begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (1,1,0) \\ (0,1,1) \end{pmatrix} \text{ e } R' = ((0,5),(-1,1))$$

Generalizziamo un vettore di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di R

$$(x,y,z) = x_1(1,0,1) + x_2(1,1,0) + x_3(0,1,1)$$

andiamo a trovare le COMPONENTI

$$C_{R'}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3)(0,5) + (2x_1 + 3x_2 + x_3)(-1,1)$$

▸ Troviamo il Ker f

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ risolviamo il sistema ...

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$ riduco a gradini e prendo il minore fondamentale ...

$$S = \{(10a, -7a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (10,-7,1) \rangle$$

Questo non è il Ker di f finale, è il sottospazio delle componenti degli oggetti del Ker

$$\text{Ker } f = \{ 10a\,(1,0,1) - 7a\,(1,1,0) + a\,(0,1,1) \mid a \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (3a, -6a, 11a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \langle (3,-6,11) \rangle$$

- $A \in \mathbb{R}_{m\,n}$

$F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m$ $\qquad AX = X^t$

$R_{NATURALE}$ di $\mathbb{R}^n$ e $R'_{NAT.}$ di $\mathbb{R}^m$ $\qquad R_{NAT}$ = base canonica ordinata

$$M_{R_{NAT}\,R'_{NAT}}(F_A) = A \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{1^o \text{ vettore di } R_{NAT}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{1^a \text{ colonna}} \cdots$$

OSS

Il vettore delle componenti nel riferimento naturale e' esso stesso

Es.

$$(2,0) = 2 \cdot \underbrace{(1,0) + 0\,(0,1)}_{\text{rif. canonico}}$$

PROPOSIZIONE

La matrice di PASSAGGIO da R a R' e' INVERTIBILE

DIMOSTRAZIONE

Si ricordi che la matrice di passaggio da R a R' e' data dalle componenti di R in R' come COLONNE

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$A = \begin{pmatrix} C_{R'}(\underline{e}_1) & \dots & C_{R'}(\underline{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$ e' QUADRATA

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ sono INDIPENDENTI

La coordinazione $(C_{R'})$ e' un ISOMORFISMO, quindi anche le sue immagini sono indipendenti.

le COLONNE di A sono indipendenti, A e' quadrata $\Rightarrow$

$\Rightarrow r(A)$ e' MASSIMO $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ (teorema degli orlati) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ e' INVERTIBILE

OSS

L'inversa di A e la matrice di passaggio da $R' \to R$

COROLLARIO

Se P e' MATRICE DI PASSAGGIO da $R \to R'$ allora P^{-1} e di passaggio da $R' \to R$

DIMOSTRAZIONE

Sappiamo che $X' = PX \Rightarrow P^{-1}X' = X$? con $X = C_R(\underline{v})$ e $X' = C_{R'}(\underline{v})$

I riferimenti sono $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, $R' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$

La matrice di passaggio $R' \to R$ e' data (per colonne) dalle componenti di R' in R, quindi:

$$\underline{e}'_1 = x_{11}\underline{e}_1 + \dots + x_{n1}\underline{e}_n$$
$$\dots$$
$$\underline{e}'_n = x_{1n}\underline{e}_1 + \dots + x_{nn}\underline{e}_n$$

$$\longrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Le componenti di $\underline{e}'_1$ in R sono messe in prima colonna di B, se consideriamo però le componenti in R' saranno banalmente $(1, 0, \dots, 0)$ (in colonna)

Possiamo dire che

$$P\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = 1^{o} \text{ colonna di } P^{-1} = \begin{pmatrix}x_{11}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix} = 1^{o} \text{ colonna di } B$$

Così via per tutte le colonne, abbiamo dimostrato che P^{-1} è matrice di passaggio da $R' \to R$

MATRICI SIMILI

Siano $A, A' \in \mathbb{R}_n$, esse si dicono SIMILI se e solo se

$$\exists P \mid \det(P) \neq 0 \wedge P^{-1}AP = A'$$

La similitudine è una RELAZIONE D'EQUIVALENZA

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che è una relazione d'equivalenza, quindi sia:

- RIFLESSIVA

  $A \sim A$

  Possiamo prendere come matrice P la matrice identica

- SIMMETRICA

  $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$

  Sappiamo che $\exists P \mid P^{-1}AP = A'$

Moltiplichiamo ambo i membri per P e P^{-1}

$\cancel{P(P^{-1}}A\cancel{P)P^{-1}} = PA'P^{-1}$ associatività del prodotto righe x colonne

$A = PA'P^{-1} = (P^{-1})^{-1}A'P^{-1}$

E' soddisfatta prendendo come matrice $P = P^{-1}$

- TRANSITIVA

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Sappiamo che

$\exists P \mid P^{-1}AP = B$

$\exists P_1 \mid P_1^{-1}BP_1 = C$

sostituisco nella 2° espressione la 1ª

SCAMBIO LE MATRICI

$$C = P_1^{-1}(P^{-1}AP)P_1 = (P_1^{-1}P^{-1})A(PP_1) = (PP_1)^{-1}A(PP_1)$$

La matrice PP_1 ha det. $\neq 0$ per il teorema di Cauchy-Binet

Quindi $A \sim C$

TEOREMA

Sia $f: V_n \to V_n$ un ENDOMORFISMO, R e R' riferimenti di V_n

$$A = M_R(f) \sim M_{R'}(f) = A'$$

con $M_R(f)$ matrice associata ad f nel riferimento R

DIMOSTRAZIONE

Sia P di passaggio $R \to R'$ e $\underline{v} \in V_n$

Rinominiamo (per comodità) e ricordiamo che:

$$X = C_R(\underline{v}) \; , \; X' = C_{R'}(\underline{v}) \; , \; Y = C_R(f(\underline{v})) \; , \; Y' = C_{R'}(f(\underline{v}))$$

$$X' = PX \; , \; Y' = PY \; , \; Y = AX \; , \; Y' = A'X'$$

Allora possiamo dedurre che $PY = A'PX \Rightarrow Y = \underbrace{P^{-1}A'P}_{Z} X$

Questa matrice Z ha la proprietà che, qualora moltiplichiamo a destra per le componenti di un certo vettore ($X = C_R(\underline{v})$) otteniamo le componenti dell'immagine dello stesso vettore.

Ma quindi per definizione Z è la matrice ASSOCIATA, che è unica, quindi è uguale alla matrice associata ad f nel riferimento R ($A = M_R(f)$):

$$P^{-1}A'P = A \Rightarrow A \sim A'$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

Sia $A \in \mathbb{R}_n$

il polinomio dato da $\det(A - tI_n)$, dove t è un'incognita, è detto POLINOMIO CARATTERISTICO di A

Si osservi che

$$A-tI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & \\ \dots & & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

l'equazione $\det(A-tI_n)=0$ e' detta EQUAZIONE CARATTERISTICA

LEMMA

Matrici SIMILI hanno lo stesso POLINOMIO CARATTERISTICO

DIMOSTRAZIONE

Siano $A \sim A' \Rightarrow \exists P$ invertibile $|\ A' = P^{-1}AP$

$\det(A'-tI_n) = \det(P^{-1}AP - tI_n) =$

Si noti che I_n (matrice identica) $= P^{-1}P$ e sostituiamo

$= \det(P^{-1}AP - t\,P^{-1}P) = \det[P^{-1}(A-tI_n)P] =$ reinserisco I_n (indifferente)

Per il teorema di Cauchy-Binet possiamo scrivere:

$= \det(P^{-1})\det(A-t)\det(P)$

Essendo questi numeri reali possiamo applicare la commutativita'

$= \det(P^{-1})\det(P)\det(A-t) = \det(A-t)$

$\det(P^{-1})$ inverso di $\det(P)$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI UN ENDOMORFISMO

Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo, R riferimento e $A = M_R(f)$

Il polinomio caratteristico di f e' quello di A

OSS

- Il polinomio di f e' BEN DEFINITO (non dipende da R scelto) perchè cambiando R le matrici associate continuano ad essere SIMILI tra loro (teorema) e quindi hanno lo stesso polinomio caratteristico (lemma)
- L' equazione caratteristica di f e' quella di A

Es.

$f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x+3y, -x-2y) \in \mathbb{R}^2$

$R_{NAT} = ((1,0),(0,1))$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0) = (1,-1) = 1 \cdot (1,0) - 1(0,1) \\ f(0,1) = (3,-2) = 3(1,0) - 2(0,1) \end{array}\right\rangle M_R(f) \quad \text{(per colonne)}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = M_R(f)$, troviamo il polinomio caratteristico

$$\left|\begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ -1 & -2-t \end{pmatrix}\right| = (1-t)(-2-t)+3 = -2-t+2t+t^2+3 = t^2+t+1$$

ENDOMORFISMO DIAGONALIZZABILE

Sia $f: V_n \to V_n$ e' detto DIAGONALIZZABILE se

$\exists R \mid M_R(f)$ e' diagonale

MATRICE DIAGONALIZZABILE

$A \in \mathbb{R}_n$ è detta DIAGONALIZZABILE se e' simile ad una matrice diagonale

PROPOSIZIONE

Sia $f: V_n \to V_n$ un ENDORFISMO DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ogni matrice associata ad f e' DIAGONALIZZABILE

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi $\exists R \mid M_R(f)$ e' diagonale

$\forall R'$ rif. di V_n

$M_R(f) \sim M_{R'}(f) \Rightarrow M_{R'}(f)$ e' DIAGONALIZZABILE

PROPOSIZIONE

Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo, R riferimento e $M_R(f)$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ f è DIAGONALIZZABILE

DIMOSTRAZIONE

Sia $A = M_R(f)$ simile a una diagonale, quindi:

$\exists P$ invertibile $\mid P^{-1}AP = D$ e D diagonale

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = C_R(\underline{e}_1) = (1,0,\dots,0) \\ \dots \\ x_n = C_R(\underline{e}_n) = (0,0,\dots,0,1) \end{array}\right\} \text{sono indipendenti}$$

Sia $F_P : X \in \mathbb{R}^n \to PX \in \mathbb{R}^n$ un isomorfismo

Se applichiamo F_P ai vettori $x_1, \dots, x_n$ avremo ancora un insieme di vettori indipendenti $Px_1, \dots, Px_n$

Date queste immagini, calcoliamo la CONTROIMMAGINE dell'isomorfismo coordinato per ricavarci i vettori che hanno come componenti nel riferimento R proprio PX_i (che è un vettore n-pla colonna)

$C_R^{-1}(PX_i) = \underline{e}_i'$

Questi n vettori ricavati dalla controimmagine sono ancora indipendenti, ed essendo n la dimensione del dominio allora $(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ è una base (volendo un riferimento R')

Troviamo adesso la matrice di passaggio da $R' \to R$:
ricordiamo che $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ e $R' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$
e le matrici a loro associate sono A e A'
Vogliamo dimostrare che $P^{-1}AP = A'$, la matrice di passaggio si costruisce per colonne con le componenti del vecchio riferimento (in questo caso R') nel nuovo (R).
Vogliamo quindi trovare $C_R(\underline{e}'_i)$ ma prima abbiamo visto che
$C_R^{-1}(PX_i) = \underline{e}'_i$ quindi applicando C_R ambo i membri avremo
$C_R(\underline{e}'_i) = PX_i$ ma PX_i restituisce l'i-esima colonna di P

Quindi gli n vettori $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ generano i vettori X_i che in colonna formano proprio la matrice di passaggio
quindi $P^{-1}AP = A'$

COROLLARIO

$f: V_n \to V_n$ endomorfismo diagonalizzabile $\iff M_R(f)$ è diagonalizz.

Es.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad F_A = X \in \mathbb{R}^3 \to AX \in \mathbb{R}^3$

F_A è diagonalizzabile perchè preso R_{NAT} (che è diagonale)
$M_{R_{NAT}}(F_A) = A$ e A è diagonale

- id_V (endomorfismo identico) è diagonalizzabile perchè
$\forall R \quad M_R(id_V) = I_n$

- 0_V (endomorfismo nullo) è diagonalizzabile perchè
$\forall R \quad M_R(0_V) =$ matrice nulla (quindi diagonale)

AUTOVETTORE

$f: V_n \to V_n$ endomorfismo

$\underline{v} \in V_n$ è un **AUTOVETTORE** di **AUTOVALORE** $\lambda \in \mathbb{R} \iff$

- $\underline{v} \neq \underline{0}$
- $f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

PROPOSIZIONE

Se $\underline{v}$ è autovettore di autovalori λ_1 e $\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

DIMOSTRAZIONE

$f(\underline{v}) = \lambda_1 \underline{v} = \lambda_2 \underline{v} \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = \underline{0}$

ma $\underline{v}$ e' un autovettore $\implies \underline{v} \neq 0 \implies \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2$

TEOREMA

$f: V_n \to V_n$ è DIAGONALIZZABILE $\iff$ $\exists$ base di AUTOVETTORI

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$

Per definizione di diagonalizzabile

$$\exists R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \mid M_R(f) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 & \vdots \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{e}_1) = a_1 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{e}_n = a_1 \underline{e}_1$$

$\dots$

$$f(\underline{e}_n) = 0 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n = a_n \underline{e}_n$$

$\underline{e}_i$ è un autovettore per definizione.

Quindi la base di autovettori è proprio il riferimento R

$\Leftarrow$

Supponiamo $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \mid \underline{e}_i$ autovettore

Per definizione $\exists \lambda_i \in \mathbb{R} \mid f(\underline{e}_i) = \lambda_i \, \underline{e}_1$

La matrice associata $M_R(f)$ sarà:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ le componenti dell'i esimo autovettore sono tutti 0 tranne λ_i

PROPOSIZIONE

Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo, $R=(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, $A = M_R(f)$

- h è **AUTOVALORE** $\iff$ $\det(A - hI_n) = 0$
- $\underline{v}$ è **AUTOVETTORE** di autovalore h $\iff$

$C_R(\underline{v})$ è soluzione non banale di $(A - hI_n)X = 0$

$$\underset{\text{colonna}}{X}$$

DIMOSTRAZIONE

Per definizione di autovalore $h \Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq 0 \mid f(\underline{v}) = h\underline{v}$

Sia $Z = C_R(\underline{v}) \neq 0$

$f(\underline{v})$ sottoforma di matrice si ottiene grazie alla matrice associata (A):

$AZ = hZ \Rightarrow AZ - hI_nZ = 0 \Rightarrow (A - hI_n)Z = 0$

h è autovalore se $Z \neq 0$ e se $(A - hI_n)Z = 0$ ha soluzioni

Sappiamo che un sistema omogeneo ha $0, 1$ o ∞ soluzioni

La nostra espressione ammette almeno 2 soluzioni:

una è quella banale e l'altra è quella con Z per la quale h è autovalore $\Rightarrow$ Il sistema ha ∞ soluzioni

La matrice $(A - hI_n)$ è quadrata (sistema di n equazioni in n incognite), se il suo rango fosse massimo avrebbe 1 sola soluzione

Il rango non è massimo quindi il suo determinante $=0$ (altrimenti sarebbe un minore fondamentale)

Per dimostrare la parte sugli autovettori le deduzioni sono già date dalla parte precedente.

Es.

$f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \longrightarrow (-y,x,z)\in\mathbb{R}^3$

$R=\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$

$$M_R(f)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}=A$$

calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p(f)=\det\begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}=(1-t)[t^2+1]$$ la soluzione è $t=1$

sviluppa rispetto alla riga/colonna con più 0

1 è un autovalore

Cerchiamo gli autovettori risolvendo $(A-hI_n)X=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

$\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$ sono gli autovettori

AUTOSPAZIO RELATIVO AD h

Sia h autovalore di $f: V_n \to V_n$

$V(h) = \{ \underline{v} \in V_n \mid f(\underline{v}) = h\underline{v} \}$ è detto AUTOSPAZIO RELATIVO AD h

PROPRIETÀ DELL'AUTOSPAZIO RELATIVO AD h

① $V(h) \leq V_n$ e $\dim V(h) \geq 1$

DIMOSTRAZIONE

- h è autovalore $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq \underline{0} \mid \underline{v} \in V(h)$ quindi $\dim V(h) \geq 1$

Dimostriamo che $V(h) \leq V_n$ con la chiusura di somma e prodotto

- $\underline{v}, \underline{w} \in V(h) \Rightarrow f(\underline{v}) = h\underline{v}$ e $f(\underline{w}) = h\underline{w}$

$$f(\underline{v}+\underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = h\underline{v} + h\underline{w} = h(\underline{v}+\underline{w})$$

- $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda h\underline{v} = h(\lambda\underline{v})$

f è lineare

② $V(h) \simeq \{ X \mid (A - hI_n)X = 0 \} = S$

$V(h)$ è ISOMORFO all'insieme delle soluzioni di $(A - hI_n)X = 0$

DIMOSTRAZIONE

Si dimostra semplicemente grazie alla coordinazione associata, registrando il dominio a $V(h)$.

$\underline{v} \in V(h) \rightarrow C_R(\underline{v}) \in \overline{S}$

così facendo la coordinazione avviene solo sulle componenti che andranno (per la prop precedente) in $\overline{S}$.

Viceversa se l'elemento di S è 0 va banalmente in $V(h)$, altrimenti è un autovettore e quindi esistono le componenti in $\overline{S}$

Per studiare l'autospazio basta studiare l'insieme delle soluzioni.

③ $V(h) \cap V(k) = \{\underline{0}\} \qquad h \neq k$

DIMOSTRAZIONE

$\underline{v} \in V(h) \cap V(k) \Rightarrow f(\underline{v}) = h\underline{v}$ e $f(\underline{v}) = k\underline{v}$

$h\underline{v} = k\underline{v} \rightarrow h\underline{v} - k\underline{v} = \underline{0} \rightarrow \underline{v}(h-k) = \underline{0} \qquad \underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow h = k$

④ $V(h_1), V(h_2), \dots, V(h_t)$ sono in SOMMA DIRETTA

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo per induzione sul numero di autospazi

- La base (per 2 autospazi) già è stata dimostrata
- Dimostriamo che

$\underline{v} \in V(h_1) \cap \langle V(h_2), \ldots, V(h_t) \rangle = \underline{0}$

Per ipotesi d'induzione $\langle V(h_2), \ldots, V(h_t) \rangle \Rightarrow V(h_2) \oplus \ldots \oplus V(h_t)$

$\Downarrow$

$\underline{v} = \underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_t$

$f(\underline{v}) = h_1 \underline{v}$

$f(\underline{v}) = f(\underline{v}_2) + \ldots + f(\underline{v}_t) = h_2 \underline{v}_2 + \ldots + h_t \underline{v}_t$

$= h_1(\underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_t) = h_1 \underline{v}_2 + \ldots + h_1 \underline{v}_t$

Essendo in somma diretta, l'espressione è univoca, quindi

$h_2 = h_1, \; h_3 = h_1, \ldots, h_t = h_1$

Questa contraddizione ci dice che $\underline{v} = \underline{0}$

⑤ $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_t$ autovettori di autovalori DISTINTI sono INDIPENDENTI

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo siano i $\underline{v}_i$ dipendenti

Sia $\underline{v}_i$ autovettore di autovalore h_i

$\underline{v}_1 \in \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \rangle$ ($\underline{v}_1$ dipende da $\langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \rangle$)

Quindi $\underline{v}_1 \in V(\lambda_1) \cap \langle V(\lambda_{i \neq 1}) \rangle \neq \{\underline{0}\}$ ASSURDO!

COROLLARIO

Se l' EQUAZIONE CARATTERISTICA di f ha n RADICI reali e distinte

$\Rightarrow f$ (endomorfismo) è DIAGONALIZZABILE

DIMOSTRAZIONE

n radici reali $\Rightarrow \exists$ n autovalori $= \lambda_1, \dots, \lambda_n$

(ogni radice abbiamo visto essere un autovalore)

gli n autovalori sono associati a n autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Questi vettori abbiamo dimostrato essere indipendenti

e sono tanti quanti la dimensione del dominio $\Rightarrow$ formano una base

Il nostro endomorfismo ammette una base di autovettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ l' endomorfismo è DIAGONALIZZABILE

OSS

Non vale l' implicazione inversa

Es.

- $id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile

$(1-t)(1-t)=0 \Rightarrow t=1$ soluzione ($\dim \mathbb{R}^2 \neq 1$)

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

Sia $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0$ un polinomio, in $\mathbb{C}$ ha sempre al più n soluzioni.

Si può fattorizzare in $\mathbb{C}$ come $p(x)=(x-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_t)^{m_{\lambda_t}}$

Gli esponenti $m_{\lambda_1},\dots,m_{\lambda_t}$ sono detti MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELLA RADICE λ_t

In particolare varrà sempre $t \leq n$ e $m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_t}=n$ (grado di $p(x)$)

Es.

- $x^2+1=(x-i)(x+i) \begin{cases} x=i \\ x=-i \end{cases}$ $\quad m_a=1$

- $(x+1)(x-1)(x-1)=(x^2-1)(x-1)=x^3-x^2-x+1$

$=(x+1)^1(x-1)^2$

radice 1 : $m_a(1)=2$

$2+1=3$

radice -1 : $m_a(-1)=1$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

$\dim V(h)$ è detta **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** di h $(m_g(h))$

OSS

Per h autovalore: $m_a(h) = m_a(h)$ in $\det(A - tI_n) = 0$

PROPOSIZIONE

$m_g(h) \leq m_a(h)$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo una base per $V(h) = e_1, \dots, e_t$ $\quad (m_g(h) = t)$

Completiamo ad una base di V_n: $e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_n$

$R = (e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_n)$

Cerchiamo la matrice associata.

Si noti che $f(e_1) = h\, e_1$ quindi

$$A = M_R(f) = \begin{array}{c} \qquad\qquad\quad \overbrace{}^{\text{don't cares}} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} h & & 0 & \times & \times \\ & h & & \times & \times \\ 0 & & h & \times & \times \end{array}\right) \\ \underbrace{}_{t \text{ colonne}} \qquad\quad \end{array}$$

il polinomio caratteristico sarà:

$$|A - \lambda I_n| = (h - \lambda)^t \det[\dots]$$

Questo e' un polinomio, di soluzione h con $m_a(h) \geq t = m_g(h)$

($m_a(h)$ sara' sicuramente $\geq t$ perche' gia' abbiamo t come esponente)

COROLLARIO

$$m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$$

DIMOSTRAZIONE

$$m_g(h) \geq 1 \quad \wedge \quad m_g(h) \leq m_a(h) = 1 \quad \Rightarrow m_g(h) = 1$$

TEOREMA

Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo, e' DIAGONALIZZABILE $\iff$

- Il polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{R}$
- $\forall$ radice h $\quad m_a(h) = m_g(h)$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$

Per teorema $\exists\, R = (e_1, \dots, e_n)$ autovettori
Consideriamo gli autovettori in base agli autovalori (che non sono per forza tutti distinti):

AUTOVALORE

$\langle e_1, \dots, e_{i_1} \rangle \leq V(\lambda_1)$ perche' hanno autovalore λ_1

....

$\langle e_{i_m}, \dots, e_{i_n} \rangle \leq V(\lambda_m)$

$V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m) = V_n$

Essendo i sottospazi in somma diretta, possiamo dedurre che vi e' un'uguaglianza tra i sottospazi generati e i $V(\lambda_i)$, altrimenti se fossero contenuti strettamente la somma diretta sarebbe contenuta strettamente.

Consideriamo la molteplicità geometrica degli autospazi:

$m_g(\lambda_1) = i_1$

...

$m_g(\lambda_m) = n - m$

È uguale al numero di elementi nei sottospazi costruiti perché formano tutti una base, essendo indipendenti e generatori

Ricaviamoci ora il polinomio caratteristico:

$$M_R(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & 0 \\ \cdot & & & \lambda_2 & & & & \\ \cdot & & & & \ddots & & & 0 \\ \cdot & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & \lambda_m & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\det = \underbrace{(\lambda_1 - x)^{i_1}}_{m_a(\lambda_1) = i_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_m - x)^{n-m}$$

Notiamo quindi che il polinomio ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ (λ_i è in $\mathbb{R}$) e $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$

$\Leftarrow$

Abbiamo visto che in $\mathbb{C}$ possiamo decomporre ogni polinomio (e quindi anche quello caratteristico):

$p(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_t)^{n_t}$

ovviamente il grado del polinomio $n = n_1 + \ldots + n_t$

In particolare, per ipotesi

$n_1 = m_g(\lambda_1)$

$n_t = m_g(\lambda_t)$

$\dim \left(V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t) \right) = \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_t)$

$= n_1 + \ldots + n_t = n$

Ma quindi $V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t) = V_n$ perchè è un sottospazio con stessa dimensione dello sp. vett. V_n

Possiamo ottenere una base di V dall'unione delle basi dei $V(\lambda_i)$. Ma quindi V ammette una base di autovettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è diagonalizzabile

Es. $f: (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (3x, 3z, 3y) \in \mathbb{R}^3$

E' diagonalizzabile?

Prendiamo come riferimento quello naturale

$M_R(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ polinomio caratteristico

$$\left| \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 3 & -t \end{pmatrix} \right| = (3-t)\left[-t(-t) - 3 \cdot 3\right] = t = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \right. \text{RADICI}$$

Verificħiamo che $\forall h \quad m_a(h) = m_g(h)$:

- $m_a(-3) = 1 \Rightarrow m_g(-3) = 1 \rightarrow$ già verificato
- $m_a(3) = 2$

$V(3): (A - 3I_3)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \iff y = z \quad x$ varia

$\bar{S} = \{(x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ sarà uguale a una base di $\bar{S}$

nel nostro caso $\bar{S} = \langle (0,1,1), (1,0,0) \rangle$ quindi $\dim(V(3)) = 2$

- $V(-3)$: $\begin{cases} 6x = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

$\bar{S} = \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,-1) \rangle$

SUPERFLUO

Una base di autovettori ad esempio sarà $<(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,1)>$

DIAGONALIZZAZIONE MATRICIALE

Sia $A \in \mathbb{R}_n$

A è DIAGONALIZZABILE $\iff$ F_A è DIAGONALIZZABILE

RICORDA

$F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^n$

AUTOVETTORE

Sia $Y \in \mathbb{R}^n \neq 0 \mid AY = h Y$

Y è l'AUTOVETTORE di AUTOVALORE h

$V(h) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid AX = hX \right\}$ è l'AUTOSPAZIO

OSS

A diagonaliz. $\Rightarrow$ F_A diagonaliz. $\Rightarrow \exists R$ di autovettori per F_A

Presi due riferimenti R (di autovettori) e R_{NAT}

$M_R(F_A) \sim M_{R_{NAT}}(F_A)$ perché sono due matrici associate a due riferimenti dello stesso endomorfismo.

Se $A = M_R(f_A)$ e $D = M_{R_{NAT}}(f_A)$, essere simili significa:

$\exists P$ di passaggio da $R \to R_{NAT}$ | $P^{-1}AP = D$

(deduzione della dimostrazione di matrici simili)

$$P = \begin{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \\ e_1 & & e_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1 &= a_{11}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{n1}(0,0,\dots,1) \\ &\dots \\ e_n &= a_{1n}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{nn}(0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

D risulta essere la matrice degli AUTOVALORI nell'ordine

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ È diagonalizzabile?

Calcolo direttamente il polinomio caratteristico associato ad A perché $A = M_{R_{NAT}}(f_A)$ e per determinare il pol. carat. ci basta prendere una qualunque matrice associata, scegliamo A stessa e $R = R_{NAT}$

$$\left| \begin{pmatrix} 2-t & 3 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} \right| = (4-t)(t^2-3t-4) \to t = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$m_a(4)=2 \quad m_a(-1)=1=m_g(-1)$

- Per $t=4$

$$\begin{cases} -2x+3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \iff x=\frac{3}{2}y \qquad V(4)=\left\{\left(\frac{3}{2}y, y, z\right) \,\middle|\, y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle \left(\frac{3}{2},1,0\right),(0,0,1)\right\rangle$$

- Per $t=-1$

$$V(-1):\begin{cases} 3x+3y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 5z=0 \end{cases} \qquad S=\left\{(x,-x,0) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$$

Quale matrice realizza la diagonalizzabilità?

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ matrice diagonale risultante

autovalori nell'ordine di P

(i primi due sono autovalori di

4, il terzo di -4

PRODOTTO DIRETTO ESTERNO

Siano V, W spazi vettoriali e

$$V \times W = \{ (\underline{v}, \underline{w}) \mid \underline{v} \in V, \underline{w} \in W \}$$

Definiamo una somma interna e un prodotto esterno

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \to V \times W$$

$$((\underline{v}, \underline{w}), (\underline{v}', \underline{w}')) \to (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times (V \times W) \to V \times W$$

$$(\lambda, (\underline{v}, \underline{w})) \to (\lambda \underline{v}, \lambda \underline{w})$$

$(V \times W, +, \cdot)$ e' spazio vettoriale

- Il neutro e' $(\underline{0}, \underline{0})$
- L' opposto di $(\underline{v}, \underline{w})$ e' $(-\underline{v}, -\underline{w})$
- $H = \{ (\underline{0}, \underline{w}) \mid \underline{w} \in W \}$, $K = \{ (\underline{v}, \underline{0}) \mid \underline{v} \in V \}$

  $H \cap K = \{ (\underline{0}, \underline{0}) \} \Rightarrow V \times W = H \oplus K$

  in particolare $K \simeq V$ e $H \simeq W$ con le applicazioni

  $\underline{v} \in V \to (\underline{v}, \underline{0}) \quad \underline{w} \in W \to (\underline{0}, \underline{w})$

$$\dim(V \times W) = \dim(H) + \dim(K) = \dim(V) + \dim(W)$$

Es.

$\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_{3,1}$

$$\left(x^2+x, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) + \left(1, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(x^2+x+1, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$\left(0, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ e' neutro e $-\left(1, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(-1, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

PIANO

Consideriamo il PIANO ovvero lo spazio dei vettori geometrici liberi, composto da CLASSI DI EQUIPOLLENZA.

CRITERI DI PARALLELISMO

Siano $\underline{a} = \overline{AB}$ e $\underline{b} = \overline{CD}$ vettori non nulli

$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff AB$ e CD sono segmenti paralleli

Questo è un criterio algebrico, geometricamente avremo:

Fissato O

rappresentanti di $\underline{a}$ (punti applicati in O)

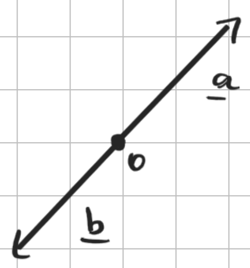
$a \parallel b \iff OA'$ e OB' sono paralleli

$\iff OA'$ e OB' giaciono sulla stessa retta

$\iff OA'$ e OB' sono proporzionali

$\iff \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono proporzionali

$\iff \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono DIPENDENTI



OSS

Per definizione il vettore nullo è parallelo a tutti i vettori

Sia V lo spazio, $a, b, c \in V$ e preso un punto O

siano $\underline{a} = \overline{OA}$ $\underline{b} = \overline{OB}$ $\underline{c} = \overline{OC}$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sono dipendenti $\iff \underline{a} = h\underline{b} + k\underline{c}$ $\quad h, k \in \mathbb{R}$

$\iff OA = hOB + kOC$

Da questa relazione abbiamo due possibilità:

- Se O, B, C sono ALLINEATI $\Rightarrow \exists$ retta per cui passa A
- Se O, B, C NON sono allineati $\Rightarrow \exists!$ piano per O, B, C

Nella prima ipotesi, ricorda che per una retta passano infiniti piani. Quindi

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sono dipendenti $\iff OA, OB, OC$ sono contenuti nello stesso piano

DEFINIZIONE

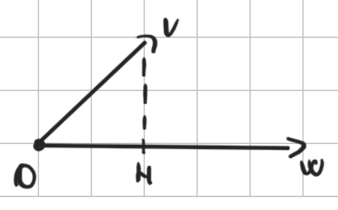
Siano $\underline{a} = \overline{OP}$, $\underline{b} = \overline{OQ} \in V$ non nulli e preso O

L'ANGOLO $a \hat{} b$ è la misura in radianti dell'angolo convesso ($\leq 180°$) formato da OP e OQ

PRODOTTO SCALARE STANDARD

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}$, il prodotto $\underline{v} \cdot \underline{w}$ è

- $= 0$ se $\underline{v} = 0$ o $\underline{w} = 0$
- $= |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v} \hat{} \underline{w}) = |w| \, |OH|$



PROPRIETÀ

① SIMMETRIA

$\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{w} \wedge \underline{v}$

② BILINEARITÀ

$(h\underline{u} + k\underline{v}) \cdot \underline{w} = h(\underline{u} \cdot \underline{w}) + k(\underline{v} \cdot \underline{w})$

③ DEFINITO POSITIVO

$\forall \underline{v} \in \mathcal{V}, \quad \underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$

$\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{v} = 0$

OSS

$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 \Rightarrow \quad |\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$

VERSORE = vettore di lunghezza unitaria

VERSORE DI UNA RETTA ORIENTATA

è un versore parallelo a una retta data

VETTORI PERPENDICOLARI

$\underline{a} = \overline{AB}$ e $\underline{b} = \overline{CD} \neq 0$ in $\mathcal{V}$

$\underline{a} \perp \underline{b} \iff CD \perp AB$

Fissato O

$\underline{a} \perp \underline{b} \iff OA \perp OB \iff \vartheta = \underline{a} \wedge \underline{b} = \frac{\pi}{2} \iff \cos\vartheta = 0 \iff \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

OSS

$\dim \mathcal{V}_\pi = 2$, $\dim \mathcal{V} = 3$

RIFERIMENTO ORTONORMALE

E' un riferimento i cui vettori sono 2 a 2 ortogonali e tutti VERSORI

$R_\pi = (\underline{v}, \underline{w})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ $\quad R = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$ con $\underline{v} \cdot \underline{u} = 0 \dots$

PROPOSIZIONE

Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{V}_\pi$, $\underline{a} = a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}$, $\underline{b} = b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w}$ allora

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

con $R_\pi = (\underline{v}, \underline{w})$
a_i, b_i sono COMPONENTI

DIMOSTRAZIONE

sia $\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}) \cdot (b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w})$

Applichiamo la bilinearità

$$a_1 b_1 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{v})}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{w})}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{v})}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{w})}_{1}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

COROLLARIO

$|\underline{v}| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad C_R(\underline{v}) = (a,b)$

$|\underline{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\qquad C_R(\underline{v}) = (a,b,c)$

RIF. CARTESIANO ORTOGONALE MONOMETRICO

E' un riferimento del tipo

$R = (O, (\underline{e}_x, \underline{e}_y))$ in cui

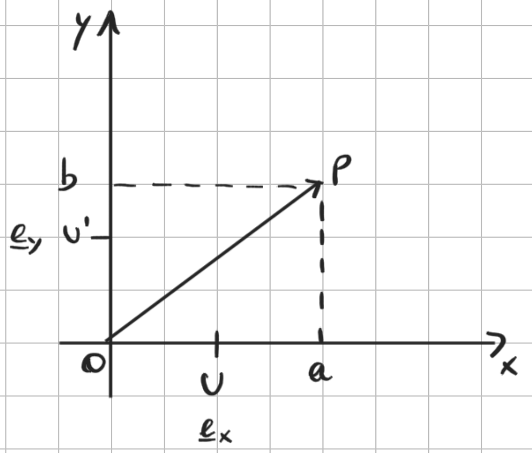
O e l' ORIGINE e $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ e' un riferimento ortonormale del piano

Se $\overline{OU} = \underline{e}_x$ e $\overline{OU'} = \underline{e}_y$ $\quad U, U'$ sono PUNTI UNITARI

Le rette che passano per OU e OU' sono ASSI COORDINATI

$OU \downarrow$ asse x

$OU' \downarrow$ asse y



$OP = a\,\overline{OU} + b\,\overline{OU'}$

a e' l' ASCISSA

b e' l' ORDINATA

$P(a,b)$ e a,b sono UNICHE per l'unicità di scrittura

$O(0,0)$, $U(1,0)$, $U'(0,1)$ $\qquad \overline{OO} = 0 \cdot \overline{OU} + 0 \cdot \overline{OU'}$

PROPOSIZIONE

Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Le componenti di $\overline{AB}$ sono $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$

DIMOSTRAZIONE

Si osservi anzitutto che $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

Applichiamo l' isomorfismo coordinato all' espressione

Generalizziamo le componenti di $\overline{AB}$ a (x,y).

$(x,y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

OSS

$\overline{OP}\,(a,b) \equiv P(a,b)$

perché le coordinate di OP è come se fossero $(a-0, b-0)$

PROPOSIZIONE

Siano $\underline{v}(v_x, v_y)$ e $\underline{w}(w_x, w_y) \neq \underline{0}$

$$\cos \underline{v}\hat{\ }\underline{w} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}||\underline{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2}}$$

$$\cos \underline{v}\hat{\ }\underline{e}_x = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \cos \underline{v}\hat{\ }\underline{e}_y = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

CAMBIO DI RIFERIMENTO

Siano $R = (O, (e_x, e_y))$, $R' = (O', (e'_x, e'_y))$

due riferimenti cartesiani ortogonali monometrici (da ora r.c.o.m.)

Vediamo come passare dalle coordinate in R a quelle in R'

	R	R'
$P =$	(x, y)	(x', y')
$O =$	$(0, 0)$	(c_1, c_2)
$\overline{OP} =$	(x, y)	$(x' - c_1, y' - c_2)$

RICORDA

Le COORDINATE del punto P sono le COMPONENTI del vettore $\overline{OP}$

Sia B la MATRICE DI PASSAGGIO, moltiplicando B a destra per la colonna delle componenti di un vettore nel "vecchio" riferimento, otteniamo la colonna delle componenti nel nuovo riferimento

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - c_1 \\ y' - c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - c_1 = b_{11}x + b_{12}y \\ y' - c_2 = b_{21}x + b_{22}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + c_1 \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + c_2 \end{cases}$$

FORMULE DI PASSAGGIO

PRODOTTO VETTORIALE nello spazio

Sia $R = (O, R_V = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z))$ r.c.o.m. di V spazio (NON piano)

Siano i nostri vettori:

$\underline{v}(v_x, v_y, v_z) = v_x \underline{e}_x + v_y \underline{e}_y + v_z \underline{e}_z$

$\underline{w}(w_x, w_y, w_z) = w_x \underline{e}_x + w_y \underline{e}_y + w_z \underline{e}_z$

componenti

Il PRODOTTO VETTORIALE è dato dal determinante della "matrice" (si applica come fosse una matrice ma non lo è) sviluppato rispetto la prima riga:

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - w_y v_z)\underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y)\underline{e}_z$$

Es.

$\underline{v} = (1, 0, 1) \qquad \underline{w} = (2, 2, 0)$

La "matrice" sarà: $\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 2, 2)$$

PROPRIETA'

① $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0 \quad , \quad (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0$

DIM

Svolgiamo i calcoli

$$\left[(v_y w_z - w_y v_z)\underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y)\underline{e}_z\right] \cdot \underline{v} =$$

$$= v_y w_z \cancel{v_x} - w_y \cancel{v_z} v_x - v_x \cancel{w_z} v_y + v_z \cancel{w_x} v_y + v_x \cancel{w_y} v_z - \cancel{w_x} v_y v_z$$

$= 0$

OSS

Il prodotto vettoriale è sempre PERPENDICOLARE ai vettori del prodotto stesso

② $\underline{v} \times \underline{w} = 0 \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono DIPENDENTI
$\iff \underline{v} \parallel \underline{w}$

DIM

le componenti del prodotto vettoriale sono date dai determinanti di ordine 2 della matrice:

$$\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

ogni minore di ordine 2 deve avere $\det = 0$
(così il det della matrice del prodotto sarà 0)

Il rango sarà 1 (minore fond. ha ordine 1) $\Rightarrow \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti

③ $\underline{v} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{v}$

DIM

Per le proprietà del determinante, scambiando due righe (componenti dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$) il determinante avrà segno opposto

④ $\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z \quad \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x \quad \underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y$

DIM

le componenti sono:

$\underline{e}_x = (1,0,0)$

$\underline{e}_y = (0,1,0)$

$\underline{e}_z = (0,0,1)$

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

RAPPRESENTABILITÀ

Sia X un insieme di punti del piano, è RAPPRESENTABILE $\iff \exists$ sistema di equazioni S_T in 2 incognite (ed eventuali parametri T) tale che

$P \in X \iff \exists \overline{T} \mid$ le coordinate di P nel riferimento $\in S_{\overline{T}}$

(P appartiene ai punti del piano sse esistono dei valori dei parametri tali che le coordinate di P nel riferimento appartengono all' insieme delle soluzioni)

RAPPRESENTAZIONE DI UN PIANO (parametrica)

Sia π un PIANO dello spazio. Allora π e' rappresentato da un sistema monometrico a coefficienti reali del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + l s + l' t \\ y = y_0 + m s + m' t \\ z = z_0 + n s + n' t \end{cases}$$

con (l, m, n) e (l', m', n') INDIPENDENTI REALI ed s, t PARAMETRI reali

x, y e z saranno soluzioni se esistono dei valori per s, t tali che Il sistema e' soddisfatto

DIMOSTRAZIONE

Sia $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

Siano $\underline{v}(l, m, n)$ $\underline{v}'(l', m', n')$ vettori liberi indipendenti $\parallel$ a π

OSS

Un piano e' definito da 3 punti oppure un punto e due rette che ne scandiscano le direzioni

$P \in \pi \iff \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}'$ applicati nello stesso punto A sono COMPLANARI

$\iff \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}'$ sono DIPENDENTI ($\underline{v}$ e $\underline{v}'$ indipendenti)

$\iff \overline{AP} \in \langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle$ ($\overline{AP}$ dipende da $\underline{v}, \underline{v}'$)

Quest' ultima espressione, in termini di componenti, equivale a:
(Applicando la coordinazione associata)

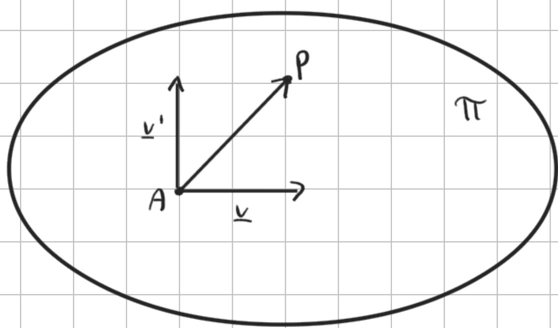
$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \in \langle (l, m, n), (l', m', n') \rangle$

COORDINATE DI P - COORDINATE DI A

Quindi questa terna puo' essere scritta come combinazione lineare di $(l, m, n), (l', m', n')$. Questo significa che

$$\exists t, s \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x-x_0 = sl + tl' \\ y-y_0 = sm + sm' \\ z-z_0 = sn + sn' \end{cases}$$

ovvero e' RAPPRESENTABILE



OSS

Ogni sistema del tipo $\begin{cases} x = x_0 + l s + l' t \\ y = y_0 + m s + m' t \\ z = z_0 + n s + n' t \end{cases}$ rappresenta un piano

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Il piano π è rappresentato da un' equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ e $\underline{w}(a,b,c) \perp \pi$

DIMOSTRAZIONE

Ragioniamo come prima, sviluppando come determinante e non come combinazione lineare il fatto che sono dipendenti:

$P \in \pi \iff \underline{v}, \underline{v}'$ e $\overline{AP}$ dipendenti $\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$

Sviluppiamo il determinante rispetto la 1ª riga

$$\underbrace{(mn' - m'n)}_{a}(x-x_0) + \underbrace{(l'n - ln')}_{b}(y-y_0) + \underbrace{(lm' - l'm)}_{c}(z-z_0) = 0$$

$(ax - ax_0) + (by - by_0) + (cz - cz_0) = 0$ se $d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax + by + cz + d = 0$

Abbiamo verificato la forma, dobbiamo ora dimostrare che $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ e $\underline{w}(a,b,c) \perp \pi$.

- Si noti che a,b,c sono le componenti del prodotto vettoriale tra $\underline{v}$ e $\underline{v}'$. Questi non sono paralleli $\Rightarrow$ sono dipendenti $\Rightarrow$ $\Rightarrow (a,b,c) \neq (0,0,0)$ (perché eguagliato al vettore nullo)

- Il prodotto vettoriale è perpendicolare ai due vettori, quindi $\underline{w}(a,b,c) \perp (\ell,m,n)$ e $\underline{w}(a,b,c) \perp (\ell',m',n')$ ne consegue banalmente che $\underline{w}(a,b,c) \perp \pi$

PROPOSIZIONE

Ogni equazione del tipo $ax+by+cz+d=0$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ rappresenta un piano π ortogonale a (a,b,c)

DIMOSTRAZIONE

Mi trovo 2 vettori ortogonali a (a,b,c) indipendenti:

$\underline{v} \cdot (a,b,c) = 0 \quad \Rightarrow \quad S: a v_x + b v_y + c v_z = 0$

ipotizziamo $a \neq 0$ e cerchiamo la soluzione del sistema:

$v_x = -\frac{1}{a}(bv_y + cv_z) \qquad \overline{S} = \left\{\left(-\frac{1}{a}(bv_y + cv_z), v_y, v_z\right) \middle| v_y, v_z \in \mathbb{R}\right\}$

la $\dim \overline{S} = 2$ quindi posso estrarre 2 vettori.

Prendo π' parallelo a questi 2 vettori che sono perpendicolari ad $(a,b,c) \Rightarrow \pi' \perp (a,b,c)$

Rappresento π:

Fisso $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e soluzione di $ax+by+cz+d=0$

$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ con $(a', b', c') \perp \pi' \Rightarrow$

$\Rightarrow (a', b', c') \perp (a,b,c) \Longleftrightarrow Kax + Kby + Kcz + d' = 0$ con $K \neq 0$

Vogliamo che $Kax + Kby + Kcz + d' = ax + by + cz + d$

Dividiamo l'equazione per K:

$ax + by + cz + \frac{d'}{K} = 0$

Ricordiamo che le coordinate di A soddisfano $ax+by+cz=0$

ma anche $ax + by + cz + \frac{d'}{K} = 0$

Questo significa che necessariamente $\frac{d'}{K} = d \Rightarrow d' = dK$

le due espressioni sono equivalenti

OSS

Due equazioni che rappresentano lo stesso piano sono PROPORZIONALI e viceversa.

Es.

- Come si rappresenta tutto lo spazio?

  $0=0$ (sistema sempre verificato)

- Come si rappresenta il $\emptyset$?

  $0\neq 0$ (mai verificato)

- π per $A(4,3,-2)$ e $\parallel$ $\underline{v}(1,-1,0)$, $\underline{v}'(2,1,3)$

$$\pi=\begin{cases} x=4+s+2t \\ y=3-s+t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = x+y-z-9=0$$

- $x=0$ piano passante per yz

  $y=0$ piano passante per xz

  $z=0$ piano passante per xy

RAPPRESENTAZIONE DELLA RETTA NEL PIANO

r RETTA si rappresenta mediante un sistema parametrico:

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases} \qquad (\ell, m) \neq (0,0) \quad e \quad t \text{ parametro}$$

DIMOSTRAZIONE

Preso un punto $A(x_0, y_0) \in r$ e $\underline{v}(\ell, m) // r$ vettore direzione con $(\ell, m) \neq (0,0)$

$P \in r \iff \overline{AP} // \underline{v} \iff \overline{AP}$ e $\underline{v}$ sono dipendenti

$\uparrow$
?

$\overset{C_R}{\iff} (x - x_0, y - y_0), (\ell, m)$ dipendenti

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = t\ell \\ y - y_0 = tm \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE ORDINARIA

Mettiamo a matrice le componenti e calcoliamo il determinante (=0 perché dipendenti)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0 \iff m(x - x_0) - \ell(y - y_0) = 0$$

Siano $m = a$, $-\ell = b$, $c = \ell y_0 - m x_0$ abbiamo la forma

$ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$

è il vettore $(-b,a) \,//\, \underline{v}$ (perché $(-b,a)=(\ell,m)$)

OSS

Viceversa

- Ogni sistema $\begin{cases} x = x_0 + s\ell \\ y = y_0 + sm \end{cases}$

rappresenta la retta che passa per (x_0,y_0) e $// \underline{v}(\ell,m)$

Il parametro s indica di quanto si sposta il nostro vettore dal punto (x_0,y_0) sulla retta r

- $ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ rappresenta una retta $// (-b,a)$:

$a'x+b'y+c'=0$ passa per $A(x_0,y_0)$ soluzione di $ax+by+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} (-b',a') \,//\, (-b,a) \\ (x_0,y_0) \text{ soluzione} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a' = Ka \\ b' = Kb \\ c' = Kc \end{array}$$

OSS

Due equazioni ordinarie rappresentano lo stesso vettore $\Leftrightarrow$ sono proporzionali $(K \neq 0)$

PARAMETRI DIRETTORI

Sia $\underline{v}(l,m) \parallel r$, (l,m) sono detti PARAMETRI DIRETTORI

Sono ben definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

Sia $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) \in \pi$

$\overline{AB} \parallel r$ passante per A e B

$$r: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 = (x_2 - x_1)t \\ y - y_1 = (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

i vettori di coordinate $(x-x_1, y-y_1)$ e (x_2-x_1, y_2-y_1) sono proporzionali quindi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-x_1)(y_2-y_1) = (y-y_1)(x_2-x_1)$$

e quindi se $y_2 - y_1 \neq 0 \neq x_2 - x_1 \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

la retta non è parallela agli assi

Questa forma è detta dei **RAPPORTI UGUALI**

FORMA ESPLICITA DI UNA RETTA

Sia $ax+by+c=0$ una retta r

- Passa per $(0,0) \iff c=0$
- Se $b \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ $\qquad -\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$

$y = mx + q$ è detta FORMA ESPLICITA

m è il COEFFICIENTE ANGOLARE

COSENI DIRETTORI

Sia r una retta orientata e $\underline{v} // r$

$\cos(\underline{e}_x \hat{\ } \underline{v})$ e $\cos(\underline{e}_y \hat{\ } \underline{v})$ ($\underline{e}_x$ = asse ascisse $\underline{e}_y$ = asse ordinate)

sono detti COSENI DIRETTORI

Sia $ax + by + c = 0$ la nostra retta, $\underline{v}(-b, a) // r$

- $\cos(\underline{e}_x \hat{\ } \underline{v}) = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $\cos(\underline{e}_y \hat{\ } \underline{v}) = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\pm$ a seconda che $(-b, a)$ sia concorde o discorde

RETTE PARALLELE

Due rette r, r' sono PARALLELE $\iff r \cap r' = \emptyset$ o $r = r'$

- Siano $\underline{v}(\ell, m) // r$ e $\underline{v}(\ell', m') // r'$

$r // r' \iff (\ell, m), (\ell', m')$ sono proporzionali

- $r: ax+by+c=0 \quad (-b,a) \parallel r$

  $r': a'x+b'y+c'=0 \quad (-b',a) \parallel r'$

$r \parallel r' \iff (-b,a)$ prop. a $(-b',a') \iff (a,b)$ prop. a (a',b')

A questo punto abbiamo 2 possibilità:

- ▶ Se (a,b,c) è prop. a $(a',b',c') \Rightarrow r = r'$
- ▶ Se (a,b,c) NON prop. a $(a',b',c') \Rightarrow r \cap r' = \emptyset$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \quad \text{con } (a,b)\sim(a',b) \text{ e } (a,b,c) \nsim (a',b',c')$$

La matrice incompleta ha rango 1 (sono proporzionali), quella completa ha rango 2. Per Rouchy-Capelli il sistema è INCOMPATIBILE $\Rightarrow r \cap r' = \emptyset$

DISTANZA TRA DUE INSIEMI del piano

Siano $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) \in \pi$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = |\overline{AB}|$$

è la DISTANZA tra A e B

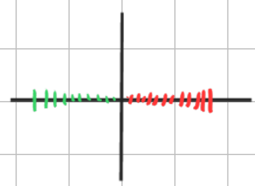
DISTANZA TRA DUE SOTTINSIEMI del piano

Siano $S, T \subseteq \pi$

$$dist(S,T) = \inf \left\{ d(P,Q) \mid P \in S, Q \in T \right\} \geq 0$$

Es.

- $X = \left\{ \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$



  $Y = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

  $dist(X,Y) = 0$

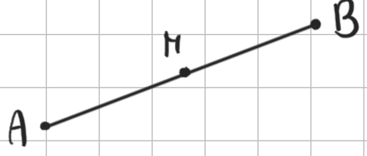
- $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow dist(X,Y) = 0$

  $\exists P \in X \cap Y \quad d(P,P) = 0$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Siano $A(x_1, y_1) \neq B(x_2, y_2) \in \pi$

$M(x_M, y_M)$ è detto **PUNTO MEDIO** e si trova alla stessa da A a B



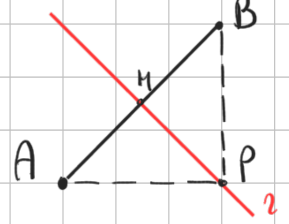
$$\overline{AM} = \overline{MB} \stackrel{C_R}{\Longrightarrow} (x_M - x_1, y_M - y_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M)$$

Per trovare le coordinate di M risolvo il sistema:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

ASSE DEL SEGMENTO

P(x,y) è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B



$P \in r \iff d(AP) = d(B,P)$

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$$

$$2x(x_2-x_1) + 2y(y_2-y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

Se $\overline{AB}\,\underset{=}{(x_2-x_1, y_2-y_1)}$ allora $\underset{=}{(y_1-y_2, x_2-x_1)} \parallel r$

(a,b) $\qquad$ $(-b,a) \rightarrow$ vettore parallelo alla retta

$-ab+ab=0 \Rightarrow r \perp \overline{AB}$

prodotto scalare tra i 2

RAPPRESENTAZIONE ORDINARIA RETTA NELLO SPAZIO

$$\begin{matrix} \pi \\ \pi' \end{matrix} \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$(a,b,c) \not\propto (a',b',c')$

(i piani non sono paralleli)

La matrice incompleta ha rango 2 quindi l' omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni.

Le soluzioni si scriveranno:

$(x_0, y_0, z_0) + \langle (l, m, n) \rangle$ $\rightarrow$ l' INTERSEZIONE di due piani non paralleli è una RETTA

(x_0, y_0, z_0) è soluzione delle due equazioni

(l, m, n) è soluzione dell' omogeneo associato

$\uparrow$

$\dim(\bar{S}) = 1$