

$(V, +, \cdot)$ sp. vett. su un campo K

W_1, W_2 sottosp. vett. di V

- $W_1 \cap W_2 \ni 0$

Vediamo che $W_1 \cap W_2$ è sottosp. vett., ovvero è lin. chiuso.

$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ perché $0 \in W_1 \cap W_2$

$\forall u, v \in W_1 \cap W_2$, vediamo che $u+v \in W_1 \cap W_2$



$u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$



$u+v \in W_1$ e $u+v \in W_2 \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2$

$\forall u \in W_1 \cap W_2, \forall \lambda \in K$, vediamo che $\lambda u \in W_1 \cap W_2$



$u \in W_1$ e $u \in W_2$



$\lambda u \in W_1$ e $\lambda u \in W_2 \Rightarrow \lambda u \in W_1 \cap W_2$.

- $W_1 \cup W_2$ non è in generale un sottosp. vett., $0 \in W_1 \cup W_2$

Esempio: \mathbb{R}^2 $W_1 = \mathcal{L}((1,0))$, $W_2 = \mathcal{L}((0,1))$

$$(1,0) \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$$

$$\text{ma } (1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$$

$$(0,1) \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$$

L'idea è allora di considerare il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene $W_1 \cup W_2$: $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$.

Procediamo però nel seguente modo:

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$

Somma di W_1 e W_2

Proposizione: (i) $W_1 + W_2$ è un sottosp. vett. di V

$$(ii) W_1 + W_2 = \mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$$

OSS: (esercizio). Se $W_1 = \mathcal{L}(S_1)$ e $W_2 = \mathcal{L}(S_2)$, allora

$$W_1 + W_2 = \mathcal{L}(S_1 \cup S_2).$$

DIM (delle Proposizioni)

$$(i) W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

Infatti, $\forall w_1 \in W_1$, $w_1 = w_1 + 0 \in \begin{matrix} W_1 \\ \in W_1 \end{matrix} + \begin{matrix} W_2 \\ \in W_2 \end{matrix} \subseteq W_1 + W_2$

$$\forall w_2 \in W_2, \quad w_2 = \underset{\in W_2}{\underline{0}} + w_2 \in W_1 + W_2$$

quindi: $W_1 + W_2 \neq \emptyset$.

$$w_1 + w_2, \quad w_1' + w_2' \in W_1 + W_2 \Rightarrow (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \\ = \frac{w_1 + w_1'}{\in W_1} + \frac{w_2 + w_2'}{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

$$\gamma \in K, \quad w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow \gamma(w_1 + w_2) = \gamma w_1 + \gamma w_2 \in \underset{\in W_1}{\underline{\gamma}} w_1 + \underset{\in W_2}{\underline{\gamma}} w_2 \in W_1 + W_2.$$

Allora possiamo chiamare $W_1 + W_2$ SPAZIO SOMMA.

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq L(W_1 \cup W_2) = \text{insieme delle comb. lineari dei vettori di } W_1 \cup W_2.$$

Ogni vettore di $W_1 + W_2$ è comb. lineare di vettori di $W_1 \cup W_2$

$$\forall u \in W_1 + W_2, \exists w_1 \in W_1 \text{ e } \exists w_2 \in W_2 \text{ tali che } u = w_1 + w_2 \in L(W_1 \cup W_2)$$

Siccome $W_1 + W_2$ è un sottospazio vett. che contiene $W_1 \cup W_2$

e $L(W_1 \cup W_2)$ è il più piccolo sottospazio vett. con queste stesse proprietà,
allora $L(W_1 \cup W_2) \subseteq W_1 + W_2$. \square

Esempio \mathbb{R}^3 $W_1 = L((1,0,1), (2,3,2))$, $W_2 = L((0,0,1), (1,3,2))$
 $W_1 + W_2 = L((1,0,1), (2,3,2), (0,0,1), (1,3,2)) \quad (1,3,1) \in W_1 \cap W_2$

Def. W_1, W_2 sono indipendenti se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. In tal caso la somma $W_1 + W_2$ si dice SOMMA DIRETTA e si scrive $W_1 \oplus W_2$.

Proposizione $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \forall u \in W_1 + W_2, \exists! (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$
tale che $u = w_1 + w_2$.

DIM "=>" $u \in W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

$$\begin{aligned} u &= w_1 + w_2 \\ &= w_1' + w_2' \Rightarrow w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow \text{PER IPOTESI} \\ &\Rightarrow w_1 - w_1' = -w_2 + w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ &\in W_1 \quad \in W_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_1' = -w_2 + w_2' = \underline{0} \Rightarrow w_1 = w_1' \text{ e } w_2 = w_2'$$

"=<" Th: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$$v \in W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \quad \text{per l'ipotesi}$$

$$\begin{aligned} v &= v + \underline{0} \\ &= \underset{\in W_1}{\underline{0}} + v \in W_1 \quad \underset{\in W_2}{\underline{0}} + v \in W_2 \end{aligned} \Rightarrow v = \underline{0} \quad \square$$

Nell'esempio precedente $(1,3,1) \in W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ non è somma diretta

$$(1,3,1) = (1,3,1) + \underline{0} = \underline{0} + (1,3,1).$$

Proposizione. Sia $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ una base di W_1 e sia $B_2 = (v_1, \dots, v_r)$ una base di W_2 . Allora, se $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ si ha che $B_1 \cup B_2$ è base di $W_1 \oplus W_2$.

DIM (facoltativa). Dall'osservazione precedente si deduce che

$$B_1 \cup B_2 \text{ è un ins. ol. gen. di } W_1 \oplus W_2 : \quad W_1 = \mathcal{L}(B_1), \quad W_2 = \mathcal{L}(B_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathcal{L}(B_1 \cup B_2).$$

Th: $B_1 \cup B_2$ è lin. indip.
 $\begin{cases} \text{Oss. } B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ \text{perciò } W_1 \cap W_2 = \{0\} \end{cases}$

$$\text{p.d. } B_1 \cup B_2 \text{ è lin. indip.} \quad \begin{array}{l} W_1 \neq \{0\} \Rightarrow |B_1| \geq 1 \\ W_2 \neq \{0\} \Rightarrow |B_2| \geq 1 \end{array} \Rightarrow |B_1 \cup B_2| \geq 2.$$

quindi scrivere un vettore di $B_1 \cup B_2$ che mi serve come comb. lineare degli elts.

$$\text{Per esempio: } u_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$$

$$\Rightarrow u_1 - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r \in W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ \in W_1 \qquad \qquad \qquad \in W_2$$

$$\Rightarrow u_1 - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_n u_n = 0 \quad \Rightarrow B_1 \text{ è lin. indip.} \\ \text{con scalari non tutti nulli!!!} \quad \rightsquigarrow \text{assurdo. } \square$$

Dalla proposizione precedente deduciamo che se $\dim W_1 = h$ e $\dim W_2 = r$, e $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, allora $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

Questo risultato si generalizza a n-dimensioni f.g. qualunque nel seguente modo:

REGOLARE DI GRASSMANN: Se W_1 e W_2 sono sottospazi vett. finitamente generati,

$$\text{allora: } \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

(dimonstrazione facoltativa)

$$\text{Esempio: } \mathbb{R}^3 \quad W_1 = \mathcal{L}((2,4,1)) \quad W_2 = \mathcal{L}((0,1,2))$$

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}, \quad W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 = \mathcal{L}((2,4,1), (0,1,2))$$

$$B_1 = \{(2,4,1)\} \quad B_2 = \{(0,1,2)\} \quad B_1 \cup B_2 \text{ è basi sl. } W_1 \oplus W_2$$

Esiste un sottospazio vett. di \mathbb{R}^3 tale che $W_2 + U = W_2 \oplus U = \mathbb{R}^3$?

Completeremo B_2 in una base di \mathbb{R}^3 :

$$B_2 \cup \{(0,1,2), (0,0,1)\} \text{ base di } \mathbb{R}^3. \quad \text{Basta considerare:}$$

$$U = \mathcal{L}((0,1,2), (0,0,1))$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$U = L((0, 1, 1), (0, 0, 1))$$

v_1, v_2, \dots, v_p si dicono sommanti diretti.

Rimane generalizzare quanto detto a più di 2 sottosp. vett:

v_1, v_2, \dots, v_p sottosp. vett. di V , $p \geq 2$

• $v_1 \cap v_2 \cap \dots \cap v_p$ è un sottosp. vett.

• $v_1 + v_2 + \dots + v_p = \{v_1 + v_2 + \dots + v_p \mid v_1 \in v_1, v_2 \in v_2, \dots, v_p \in v_p\}$
è un sottosp. vett., $= L(v_1 \cup v_2 \cup \dots \cup v_p)$

$$v_1 = L(s_1)$$

:

$$v_p = L(s_p)$$

$$\Rightarrow v_1 + \dots + v_p = L(s_1 \cup \dots \cup s_p)$$

Def. v_1, v_2, \dots, v_p sono lin. indip. se:

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad v_i \cap (v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_p) = \{0\}.$$

In questo caso le somme $v_1 + \dots + v_p$ si dice diretta e si scrive

$$v_1 \oplus \dots \oplus v_p.$$

Anche nel caso $p \geq 3$, si ha:

$$v_1 + \dots + v_p = v_1 \oplus \dots \oplus v_p \Leftrightarrow \forall u \in v_1 + \dots + v_p,$$

$$\exists! (v_1, \dots, v_p) \in v_1 \times \dots \times v_p \text{ tale che} \\ u = v_1 + \dots + v_p$$

$$v_1 + \dots + v_p = v_1 \oplus \dots \oplus v_p$$

B_1 basi di v_1

\vdots
 B_p basi di v_p

$$\Rightarrow B_1 \cup \dots \cup B_p \text{ basi di} \\ v_1 \oplus \dots \oplus v_p.$$

Ricordiamo: $(V, +, \cdot)$ f.g. su un campo K $\dim V = n$

$B = (e_1, \dots, e_m)$ basi ordinata

$$\phi_B : V \longrightarrow K^m$$

$$u \rightsquigarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \text{ tale che: } u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$$

• ϕ_B è biettiva:

$$\phi_B \text{ è iniettiva. } u, v \in V, \quad \phi_B(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m \\ \phi_B(v) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \quad v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m$$

e quindi immediato ovvero che $\phi_B(u) = \phi_B(v)$ allora $u = v$.

$$\phi_B \text{ è suriettiva. } \forall (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in K^m, \text{ basta considerare } u = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m \\ \text{ per avere } \phi_B(u) = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$$

Φ_B gode anche delle seguenti proprietà:

$$(1) \forall u, v \in V, \Phi_B(u) + \Phi_B(v) = \Phi_B(u+v)$$

$$(2) \forall n \in V, \forall \gamma \in K, \Phi_B(\gamma n) = \gamma \Phi_B(n)$$

$$(1) \begin{aligned} u &= \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m \\ v &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{proprietà delle operazioni}} \begin{aligned} u+v &= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) e_m \\ \Rightarrow \Phi_B(u+v) &= (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m) = \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) + (\beta_1, \dots, \beta_m) = \Phi_B(u) + \Phi_B(v) \end{aligned}$$

$$(2) \gamma u = \gamma (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m) = \gamma(\alpha_1 e_1) + \dots + \gamma(\alpha_m e_m) =$$

$$= (\gamma \alpha_1) e_1 + \dots + (\gamma \alpha_m) e_m \Rightarrow \Phi_B(\gamma u) = (\gamma \alpha_1, \dots, \gamma \alpha_m) = \\ = \gamma (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \gamma \Phi_B(u).$$

Φ_B si dice ISOMORFISMO ASSOCIAZO A B ,
ed è un caso particolare di applicazioni che sono dette LINEARE.

APPPLICAZIONI O FUNZIONI O TRASFORMAZIONI LINEARI:

Def. Siano V e W due spazi vett. su un campo K .

Un'applicazione $T: V \rightarrow W$ si dice LINEARE
applicazione
funzione
trasformazione

se soddisfa le seguenti proprietà:

$$(1) \forall u, v \in V, T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$(2) \forall n \in V, \forall \gamma \in K, T(\gamma u) = \gamma T(u).$$

Esempi: • $V = W$, $\text{id}_V: V \rightarrow V$ è un'appl. lineare

• $T: V \rightarrow W$ $\begin{matrix} \sim \\ u \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0_W \\ \end{matrix}$ applicazione nulla, è lineare.

• $V, W \neq \{0_W\}$, $w \in W - \{0_W\}$ $K = \mathbb{R}$

$f: V \rightarrow W$ non è lineare. Infatti:
 $m \sim w$ $m, -m \in V$

$$f(u + (-u)) = f(0) = w$$

$$f(u) + f(-u) = w + w = 2w \quad X$$

• $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$T: (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \sim (a-c, b-c) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

- $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$

$$T: (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow (\alpha - c, \beta - c) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e' lineare.}$$

$$u = (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$v = (\alpha', \beta', \gamma')$$

$$u+v = (\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma')$$

$$T(u+v) = (\alpha+\alpha' - (\gamma+\gamma'), \beta+\beta' - (\gamma+\gamma'))$$

$$T(u) + T(v) = (\alpha - c, \beta - c) + (\alpha' - c', \beta' - c') \quad //$$

$$\gamma \in \mathbb{K}, \quad \gamma u = (\gamma \alpha, \gamma \beta, \gamma \gamma) \quad T(\gamma u) = (\gamma \alpha - \gamma c, \gamma \beta - \gamma c)$$

$$\gamma T(u) = \gamma (\alpha - c, \beta - c) \quad //$$

Proprietà: $T: V \rightarrow W$ appl. lineare

$$(i) \quad T(0_V) = 0_W. \quad \text{Infatti: } T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_W$$

$$(ii) \quad \forall u_1, \dots, u_m \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \quad | \quad T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_m T(u_m)$$

(S1 CONSERVANO LE COMBINAZIONI LINEARI).

Infatti: procediamo per induzione su m :

$$m=1, \quad T(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 T(u_1) \quad \text{per la proprietà (i) della definizione di appl. lineare}$$

$$m>1 \quad \text{Per ipotesi di induzione } T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{m-1} T(u_{m-1})$$

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} + \alpha_m u_m) &= T((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) + \alpha_m u_m) = \\ (i) \rightsquigarrow &= T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) + T(\alpha_m u_m) = \xrightarrow{\text{ipotesi di induzione e (i)}} \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{m-1} T(u_{m-1}) + \alpha_m T(u_m). \end{aligned}$$

Osservazione: • $T: V \rightarrow W, \quad T': W \rightarrow U$ appl. lineari lin.

Allora $T' \circ T: V \rightarrow U$ e' lineare

• $T: V \rightarrow W$ appl. lineare biettiva

Allora $T^{-1}: W \rightarrow V$ e' un'appl. lineare biettiva.

Def. $T: V \rightarrow W$ appl. lineare

• T si dice MONOMORFISMO se T e' iniettiva

• T si dice EPIMORFISMO se T e' suriettiva

• T si dice ISOMORFISMO se T e' biettiva

• T si dice ENDOMORFISMO se $V = W$

• T si dice AUTOMORFISMO se $V = W$ e T e' biettiva.

(ϕ_B si dice ISOMORFISMO per e' biettiva e lineare)

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

- T si dice AUTOMORFISMO se $V=W$ e T è biettiva.

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{matrix} & \\ (\alpha, b) & \sim (\alpha + 2b, b) \end{matrix}$ $\begin{matrix} & \\ & \text{è un isomorfismo} \end{matrix}$

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare, non posso essere iniettiva
 $\dim 3 \quad \dim 2$ Vediamo perché...

Def: $T: V \rightarrow W$ app. lineare.

Il nucleo o kernel di T è $\text{Ker } T = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\}$.

• Nell'esempio precedente $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{matrix} & \\ (\alpha, b) & \sim (\alpha + 2b, b) \end{matrix}$ $\begin{matrix} & \\ & \text{è im.} \end{matrix}$

$$\text{Ker } T = \{(\alpha, b) \mid T((\alpha, b)) = (\alpha + 2b, b) = (0, 0)\}$$

$$(\alpha, b) \in \text{Ker } T \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{Ker } T = \{(0, 0)\}$$

• $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(\alpha, b, c) \sim (\alpha - c, b - c)$

$$(\alpha, b, c) \in \text{Ker } T \Leftrightarrow (\alpha - c, b - c) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ b = c \end{cases}$$

$$\text{Ker } T = \{(c, c, c) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{c(1, 1, 1) \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 1, 1)) \neq \{\underline{0}\}$$

$$T((3, 3, 2)) = (3, 2) \quad \text{MA} \quad (3, 3, 2) \neq (6, 6, 3) \quad T \text{ non è im.}$$

$$T((4, 4, 3)) = (3, 2)$$

Proposizione: $T: V \rightarrow W$ app. lineare

T è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\underline{0}_V\}$. \downarrow T è iniettiva

DIM. " \Rightarrow " $u \in \text{Ker } T \Rightarrow T(u) = \underline{0}_W = T(\underline{0}_V) \Rightarrow u = \underline{0}_V$

" \Leftarrow " $u, v \in V, T(u) = T(v) \quad \text{Th: } u = v$

$$T(u) - T(v) = \underline{0}_W \Rightarrow u - v \in \text{Ker } T = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow$$

$$T(u) + (-1)T(v) = T(u - v) \Rightarrow u - v = \underline{0}_V \Rightarrow u = v$$

Oss. Ricordiamo che se $T: V \rightarrow W$ è un'applicazione,

$$\text{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V)$$

e inoltre T è suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = W$

Adesso vediamo che se $T: V \rightarrow W$ è app. lineare, allora

- $\text{Im}(T)$ è un sottosp. vett. di W Potremo dimostrare che $\text{Im}(T)$ è

• $\text{Ker}(T)$ è un sottosp. vett. di V .

$\text{Ker}(T)$ sono lin. chiusi. Ma facendo discendere queste proprietà dalla seguente proposizione ci dà un risultato più generale.

Proposizione. Sia $T: V \rightarrow W$ un'appl. lineare.

(i) Se X è un sottosp. vett. di V , allora $T(X)$ è un sottosp. vett. di W .

In particolare, $T(V) = \text{Im}(T)$ è sottosp. vett. di W .

(ii) Se Y è un sottosp. vett. di W , allora $T^{-1}(Y) = \{u \in V \mid T(u) \in Y\}$ è un sottosp. vett. di V .

In particolare, $\text{Ker}(T) = T^{-1}(\{0\})$ è sottosp. vett. di V .

DIM. (i) $Tb: T(X) = \{T(u) \mid u \in X\}$ è lin. chiuso.

$$\forall v \in X \Rightarrow \underline{\Omega}_v = T(v) \in T(X). \quad \text{Quindi } T(X) \neq \emptyset$$

$$w, w' \in T(X) \Rightarrow \exists u, u' \in X: w = T(u), w' = T(u')$$

$$w + w' = T(u) + T(u') = T(u + u') \stackrel{(1)}{\Rightarrow} u + u' \in X \Rightarrow w + w' = T(u + u') \in T(X)$$

$$\gamma \in K, w \in T(X) \Rightarrow \gamma w = \gamma T(u) = T(\gamma u) \in T(X)$$

$$u \in X \Rightarrow \gamma u \in X$$

(ii) $Tb: T^{-1}(Y) \stackrel{(1)}{\subseteq} \{u \in V \mid T(u) \in Y\}$ è lin. chiuso. (Y sottosp. vett.)

$$\underline{\Omega}_w \in Y, T^{-1}(\underline{\Omega}_w) = \text{Ker}(T) \ni \underline{\Omega}_v. \quad \text{Quindi:}$$

$$\underline{\Omega}_v \in T^{-1}(\underline{\Omega}_w) \subseteq T^{-1}(Y) \Rightarrow T^{-1}(Y) \neq \emptyset$$

$$u, u' \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(u), T(u') \in Y \Rightarrow T(u) + T(u') \in Y$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} T(u + u')$$

$$\Rightarrow u + u' \in T^{-1}(Y).$$

$$u \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(u) \in Y \quad \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \gamma T(u) \in Y \Rightarrow \gamma u \in T^{-1}(Y)$$

Esempio: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è lineare

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & ab & a+c \end{pmatrix}$$

Esempio: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è lineare
 $(a, b, c) \mapsto (2a+b, 2b-c, a+c)$

$U = \mathcal{L}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$, $\underline{T(U)}$ è un sottospazio vett. di \mathbb{R}^3

Vediamo: $T(U) = \mathcal{L}(T(1, 2, 0), T(0, 1, 1))$.

$U = \{\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$$T(U) = \{T(\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \checkmark \quad T \text{ è lineare}$$

$$= \{\alpha T(1, 2, 0) + \beta T(0, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(T(1, 2, 0), T(0, 1, 1))$$

Osservazione: le applicazioni lineari CONSERVANO i SISTEMI DI GENERATORI