Lezione 15

martedì 4 maggio 2021 08:28

$(V, +, \cdot)$ $\quad K = \mathbb{R}$

Def. Un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ si chiama prodotto scalare su V se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall u, v \in V, \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad$ (simmetria)
- $\forall u, v, w \in V, \quad \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
  $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (bilinearità)
- $\forall u \in V, \quad \langle u, u \rangle \geq 0$
  e $\quad ---- = 0 \Leftrightarrow u = \underline{0}$

Esempi:

(a) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ prodotto scalare naturale numerico canonico

$((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \rightsquigarrow a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$

- $(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) \overset{def.}{=} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \overset{\cdot \text{ di } \mathbb{R} \text{ è comm.}}{=} b_1 a_1 + \ldots + b_n a_n \overset{def.}{=}$
  $= (b_1, \ldots, b_n)(a_1, \ldots, a_n)$

- $(a_1, \ldots, a_n)((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = (a_1, \ldots, a_n)(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) \overset{def.}{=}$
  $= a_1(b_1 + c_1) + \ldots + a_n(b_n + c_n) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + \ldots + a_n b_n + a_n c_n =$

  \+ è comm. $\quad$ $\cdot$ di $\mathbb{R}$ è distributiva rispetto a +

  $= a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n = (a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) + (a_1, \ldots, a_n)(c_1, \ldots, c_n)$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad (a_1, \ldots, a_n) \cdot (\lambda(b_1, \ldots, b_n)) = (a_1, \ldots, a_n)(\lambda b_1, \ldots, \lambda b_n) \overset{def.}{=}$
$= a_1(\lambda b_1) + \ldots + a_n(\lambda b_n) = \lambda(a_1 b_1) + \ldots + \lambda(a_n b_n) = \lambda[(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n)]$

associatività e comm. di $\cdot$ di $\mathbb{R}$

- $(a_1, \ldots, a_n)(a_1, \ldots, a_n) = a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$
  $= 0 \Leftrightarrow a_i^2 = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) = \underline{0}$

(b) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \longrightarrow 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$ $\quad$ è un prodotto scalare

vediamo l'ultima proprietà:

$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$

$x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)$ $\quad = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$

(b') $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \rightsquigarrow -2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2$ $\quad$ Non è prodotto scalare

$\langle (1,0), (1,0) \rangle = -2 < 0$

(c) $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è prodotto scalare

$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow 3aa' + 2bb' + cc' + dd'$

(d) V vettori liberi · prodotto scalare geometrico

$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \rightsquigarrow |u|\,|v| \cos \widehat{uv}$

Osservazioni: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\forall u \in V, \quad \langle u, \underline{0} \rangle = 0$

  Infatti: $\langle u, \underline{0} \rangle = \langle u, 0 \cdot \underline{0} \rangle = 0 \langle u, \underline{0} \rangle = 0$

- Se $v \in V$ è tale che, $\forall u \in V$, $\langle v, u \rangle = 0$, allora $v = \underline{0}$

  Infatti, per ipotesi $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \underline{0}$

La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice spazio vettoriale euclideo

Def. $\forall u \in V$, la lunghezza o norma di u è

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Oss. $\forall u \in V$ vettori liberi, $|u| = \|u\|$. Infatti

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{|u||u| \cos \widehat{uu}} = \sqrt{|u|^2} = |u|$$

Proprietà:

- $\forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$. Infatti: ($|\lambda|$: valore assoluto)

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} \underset{\substack{\text{bilineare} \\ \text{e simmetrica}}}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|$$

- Disuguaglianza di Minkowski: $\forall u, v \in V, \quad \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$
- Disuguaglianza di Schwarz: $\forall u, v \in V, \quad |\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\|$

DIM β parametro $\quad u + \beta v$

$$0 \le \langle u + \beta v, u + \beta v \rangle \underset{\text{bilinearità rispetto a +}}{=} \langle u, u + \beta v \rangle + \langle \beta v, u + \beta v \rangle \underset{\text{bilinearità rispetto alla molt. per uno scalare}}{=}$$

$$= \langle u, u \rangle + \langle u, \beta v \rangle + \langle \beta v, u \rangle + \langle \beta v, \beta v \rangle \underset{\text{simmetria}}{=}$$

$$= \langle u, u \rangle + \beta \langle u, v \rangle + \beta \langle v, u \rangle + \beta^2 \langle v, v \rangle =$$

$$= \|u\|^2 + 2\beta \langle u, v \rangle + \beta^2 \|v\|^2$$

- per la dis. di Minkowski, poniamo $\beta = 1$:

$$\underset{\|u+v\|^2}{\langle u + v, u + v \rangle} = \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad \ldots\ldots$$

vedi dopo

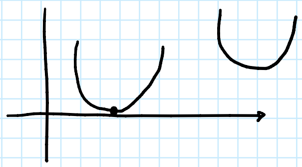
- per la disuguaglianza di Schwarz:

$$0 \leq \|u\|^2 + 2\beta \langle u,v \rangle + \beta^2 \underbrace{\|v\|^2}_{\geq 0}$$ polinomio di grado 2 in β

Se u opp. v sono nulli, il risultato è ovvio

Allora supponiamo $u \neq \underline{0}$, $v \neq \underline{0}$

$$\beta = \pm \frac{\langle u,v\rangle \pm \sqrt{\langle u,v\rangle^2 - \|v\|^2\|u\|^2}}{\|v\|^2} \qquad \frac{\Delta}{4} = \langle u,v\rangle^2 - \|v\|^2\|u\|^2 \leq 0$$



$$\Rightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|v\|^2\|u\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|v\| \, \|u\|$$

Osservazione:

Se $u, v \neq \underline{0}$, $$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

$$\exists! \, \alpha \in [0,\pi] : \cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \in [-1, 1]$$

Questo numero α si dice <u>angolo</u> tra u e v. (Definizione di angolo)

Osservazione: $\mathcal{V}$ vettori liberi, prodotto scalare geometrico

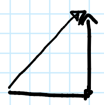
$u, v \in \mathcal{V}$ $$\cos\alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{\cancel{|u|}\cancel{|v|}\cos\widehat{uv}}{\cancel{|u|}\cancel{|v|}} = \cos\widehat{uv}$$

Def. $u, v \in V$, diciamo che u e v sono ortogonali e scriviamo $u \perp v$, se $\langle u,v\rangle = 0$

<u>Teorema di Pitagora</u>

$\forall \, u,v \in V$, $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

DIM $\langle u,v\rangle = 0$. Prima ponendo $\beta = 1$ abbiamo visto che:



v

u

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

Allora $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^2$ $\qquad u = (2,-3) \in \mathbb{R}^2$

Se usiamo il prodotto scalare numerico (a): $\|u\|_{(a)} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Se usiamo (b) $\qquad x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = \langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle$

$$\langle (2,-3),(2,-3)\rangle = 4 + (4 - 12 + 9) = 5 \qquad \|u\|_{(b)} = \sqrt{5}$$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^2$

$u=(1,0),\quad v=(0,1) \qquad (1,0)\,(0,1) = 0$

prodotto (a)

$$<(1,0),(0,1)>_{(b)} \neq 0 \qquad \square$$

Torniamo alla disuguaglianza di Minkowski:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2<u,v> + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|<u,v>| + \|v\|^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

la lunghezza di un vettore è ≥ 0 per def.

Proposizione $\{u_1,\dots,u_t\} \subseteq V \setminus \{\underline{0}\}$ $\qquad (V,<\cdot,\cdot>)$ sp. vett. euclideo

Se, $\forall i,j \in \{1,\dots,t\}$, $i\neq j$, $<u_i,u_j> = 0$, allora $\{u_1,\dots,u_t\}$ è linearmente indip.

DIM Siano $a_1,\dots,a_t \in \mathbb{R}$ tali che $a_1u_1+\dots+a_tu_t = \underline{0}$ $\qquad$ Th: $a_1,\dots,a_t=0$

$$0=<u_1,\underline{0}> = <u_1, a_1u_1+\dots+a_tu_t> \overset{\text{bilineare}}{=} <u_1,a_1u_1>+<u_1,a_2u_2>+\dots+<u_1,a_tu_t> =$$

$$= a_1\underbrace{<u_1,u_1>}_{>0} + a_2\underbrace{<u_1,u_2>}_{=0} + \dots + a_t\underbrace{<u_1,u_t>}_{=0} = a_1\underbrace{<u_1,u_1>}_{\neq 0} \Rightarrow a_1 = 0$$

Ripetiamo questo ragionamento per

$0=<u_2,\underline{0}> = \dots \Rightarrow a_2 = 0$

$\vdots$

$0=<u_t,\underline{0}> = \dots \Rightarrow a_t = 0$

Def. Sia $(V,<\cdot,\cdot>)$ uno sp. vett. euclideo fin. gen.

Una base $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ di V si dice ortogonale se:

$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i\neq j$, $<u_i,u_j> = 0$

Una base di $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ di V si dice ORTONORMALE se

- B è ortogonale
- $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\|u_i\| = 1$ $\quad (<u_i,u_i> = 1)$

Proposizione. (MOLTO IMPORTANTE) $(V,<\cdot,\cdot>)$ sp. vett. euclideo f.g.

$\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base ortonormale ordinata di V

(i) $\forall u \in V$, $\Phi_{\mathcal{B}}(u) = (<u,e_1>, <u,e_2>, \dots, <u,e_n>)$

COMPONENTI di u in $\mathcal{B}$

(ii) $\forall u,v \in V$, siano $(x_1,\dots,x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(u)$, $\quad (y_1,\dots,y_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(v)$

Allora: $<u,v> = x_1y_1+\dots+x_ny_n$

DIM (i) Siano $(x_1,\dots,x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(u)$, quindi: $u = x_1e_1+\dots+x_ne_n$

...: $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

DIM (i) Siano $(x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(u)$, quindi: $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$\langle u, e_1 \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_1 \rangle =$$
$$= \langle x_1 e_1, e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, e_1 \rangle + \dots + \langle x_n e_n, e_1 \rangle =$$
$$= x_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1} + x_2 \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_{=0} + \dots + x_n \underbrace{\langle e_n, e_1 \rangle}_{=0} = x_1$$

Procediamo in modo analogo con gli altri vettori della base:

$$\langle u, e_2 \rangle = \dots \Rightarrow x_2 = \langle u, e_2 \rangle$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\langle u, e_n \rangle = \dots \Rightarrow x_n = \langle u, e_n \rangle$$

(ii) Dimostriamo nel caso $1 \leq n \leq 3$.

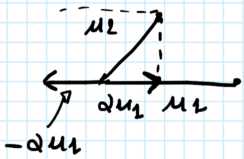
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ $\quad u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, x_2, x_3)$, $\quad v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, y_2, y_3)$

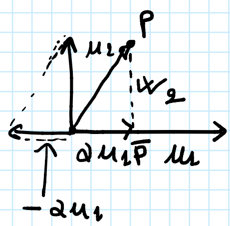
$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle =$$
$$= \langle x_1 e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle + \langle x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle + \langle x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle =$$
$$= \langle x_1 e_1, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, y_2 e_2 \rangle + \langle x_1 e_1, y_3 e_3 \rangle +$$
$$+ \langle x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle + \langle x_2 e_2, y_3 e_3 \rangle +$$
$$+ \langle x_3 e_3, y_1 e_1 \rangle + \langle x_3 e_3, y_2 e_2 \rangle + \langle x_3 e_3, y_3 e_3 \rangle =$$
$$= x_1 y_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1} + x_1 y_2 \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}_{=0} + x_1 y_3 \underbrace{\langle e_1, e_3 \rangle}_{=0} +$$
$$+ x_2 y_1 \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_{=0} + x_2 y_2 \underbrace{\langle e_2, e_2 \rangle}_{=1} + x_2 y_3 \underbrace{\langle e_2, e_3 \rangle}_{=0} +$$
$$+ x_3 y_1 \underbrace{\langle e_3, e_1 \rangle}_{=0} + x_3 y_2 \underbrace{\langle e_3, e_2 \rangle}_{=0} + x_3 y_3 \underbrace{\langle e_3, e_3 \rangle}_{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Vogliamo vedere un modo per ricavare una base ortonormale a partire da una base qualsiasi:

$n = 1$ $\quad (u_1)$ base ordinata $\quad e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 \Longrightarrow \|e_1\| = \left| \frac{1}{\cancel{\|u_1\|}} \right| \cancel{\|u_1\|} = 1$

$n = 2$ $\quad \mathcal{B} = (u_1, u_2)$





$$u_2 - \alpha u_1 = w_2$$

αu_1 si dice proiezione ortogonale di u_2 su u_1

Cos'è α? $0 = \langle w_2, u_1 \rangle = \langle u_2 - \alpha u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle - \alpha \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{= \|u_1\|^2}$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}$$

$$\overline{\mathcal{B}} = (\underbrace{u_1}_{= w_1}, \underbrace{u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1}_{= w_2}) \quad \text{è ortogonale per costruzione}$$

$\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\|w_1\|} w_1, \ \frac{1}{\|w_2\|} w_2 \right)$ è ortonormale.

In generale, per n qualsiasi, si dimostra che la seguente formula ci dà un metodo per costruire una base ortogonale:

Formula di Gram-Schmidt:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo $\qquad \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata

$n = \dim V$

$$w_1 = u_1$$
$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$
$$\vdots$$
$$w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$
$$\vdots$$
$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

$\overline{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ è base ortogonale

$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ con $e_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$, è base ortonormale

Esempio: $\mathbb{R}^2$, prodotto scalare numerico

$\mathcal{B} = ((1,1), (1,-1))$ è già ortogonale $\qquad \|(1,1)\| = \sqrt{2} = \|(1,-1)\|$

$(1,1) \cdot (1,-1) = 1 + 1(-1) = 0 \qquad \mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$

Adesso prendiamo: $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_b = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$$w_1 = (1,1)$$
$$w_2 = (1,-1) - \frac{\langle (1,-1),(1,1) \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,-1) - \frac{2 + \cancel{1} - \cancel{1} - 1}{5} (1,1) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5} \right)$$

$$\|w_1\|^2 = \langle (1,1), (1,1) \rangle = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$\overline{\mathcal{B}} = \left((1,1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5} \right) \right)$ è ortogonale $\qquad$ Calcolate voi i versori

$\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$