Lezione 4

venerdì 19 marzo 2021 10:59

Altri esempi di spazi vettoriali su un campo K:

- Sia $(K,+,\cdot)$ un campo, un polinomio su K nella variabile x è una scrittura del tipo:

$$\underset{a_0 \cdot x^0}{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$

Il grado di un polinomio $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p(x)$ è il numero intero $\max\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$, se $p(x) \neq 0$; se invece $p(x) = 0$ allora per convenzione si dice che il suo grado è -1.

$gr(p(x)) = i$, $\quad gr(0) = -1$.

Denotiamo con $K[x]$ l'insieme dei polinomi su un campo K.
Denotiamo con $K^h[x]$ opp $K[x]_{\leq h}$ l'insieme dei polinomi su K di grado $\leq h \in \mathbb{N}$.

Consideriamo le operazioni che già conosciamo sui polinomi:

$$+ : K[x] \times K[x] \longrightarrow K[x]$$

$$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \rightsquigarrow (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots\dots$$

$$\cdot : K \times K[x] \longrightarrow K[x]$$

$$(\alpha, a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \rightsquigarrow \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n$$

Esempio $\quad K = \mathbb{R}$

$p(x) = 2 + x - 3x^2 + 4x^4 \qquad q(x) = -1 + 2x + x^2 + 3x^3 - 4x^4$

$$p(x) + q(x) = 1 + 3x - 2x^2 + 3x^3$$

$$\alpha = -7, \qquad \alpha p(x) \overset{def.}{=} -14 - 7x + 21x^2 - 28x^4$$

Si può dimostrare che $(K[x], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.
Inoltre, osserviamo che le operazioni considerate si possono <u>restringere</u> a $K[x]_{\leq h}$:

$$+_1 : K[x]_{\leq h} \times K[x]_{\leq h} \longrightarrow K[x]_{\leq h}$$

$$\cdot_1 : K \times K[x]_h \longrightarrow K[x]_{\leq h}$$

e si ha che $(K[x]_{\leq h}, +_1, \cdot_1)$ è uno sp. vett. su K.

- Sia X un insieme $\neq \emptyset$ qualsiasi e siano m, n numeri naturali.

Def. Una matrice su X di tipo $m \times n$ $([m,n])$ è un'applicazione

$$A : \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \longrightarrow X$$

$$(i,j) \rightsquigarrow A((i,j))$$

$A = (a^i_j)$

$\in M \quad (X)$

$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to X$

$$(i, j) \rightsquigarrow A((i,j)) \qquad A = (a^i_j) \in M_{m \times n}(X)$$

$$a^i_j \quad \text{opp} \quad a_{ij}$$

Se $m = n$, A si dice matrice quadrata su X di ordine n.

Esempio: se $X = \{ \square, 0, \pi, \sqrt{2} \}$, $m = 2$, $n = 3$

$$A : \{1,2\} \times \{1,2,3\} \longrightarrow X$$

$$\begin{array}{ccc}
(1,1) & \rightsquigarrow & 0 \\
(1,2) & \rightsquigarrow & \pi \\
(1,3) & \rightsquigarrow & \square \\
(2,1) & \rightsquigarrow & \pi \\
(2,2) & \rightsquigarrow & \sqrt{2} \\
(2,3) & \rightsquigarrow & \square
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \pi & \square \\ \pi & \sqrt{2} & \square \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$a^1_1 = 0 \qquad a^1_2 = \pi \qquad a^1_3 = \square$$
$$a^2_1 = \pi \qquad a^2_2 = \sqrt{2} \qquad a^2_3 = \square$$

Se:
$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
ho una matrice quadrata di ordine 2 su X

$$B : \{1,2\} \times \{1,2\} \longrightarrow X$$

$$\begin{array}{ccc}
(1,1) & \rightsquigarrow & \sqrt{2} \\
(1,2) & \rightsquigarrow & \pi \\
(2,1) & \rightsquigarrow & 0 \\
(2,2) & \rightsquigarrow & \sqrt{2}
\end{array}$$

Siamo interessati a considerare matrici su un <u>campo K</u>.
Denotiamo con $M_{m \times n}(K)$ l'insieme delle matrici <u>su K</u> di tipo $m \times n$.
In particolare denotiamo con $M_n(K)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n su K. Consideriamo le seguenti operazioni: $(K, +, \cdot)$

$$+ : M_{m \times n}(K) \times M_{m \times n}(K) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \dots & b^1_n \\ \vdots & & & \\ b^m_1 & b^m_2 & \dots & b^m_n \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a^1_1 + b^1_1 & a^1_2 + b^1_2 & \dots & a^1_n + b^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m_1 + b^m_1 & a^m_2 + b^m_2 & \dots & a^m_n + b^m_n \end{pmatrix}$$

somma di K

$$\cdot : K \times M_{m \times n}(K) \longrightarrow M_{m \times n}(K)$$

$$\left(\lambda, \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda a^1_1 & \lambda a^1_2 & \dots & \lambda a^1_n \\ \vdots & & & \\ \lambda a^m_1 & \lambda a^m_2 & \dots & \lambda a^m_n \end{pmatrix}$$

prodotto di K

Si può dimostrare che $(M_{m \times n}(K), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

Esempio: $m = 3$, $n = 2$, $K = \mathbb{Q}$ $\qquad M_{3 \times 2}(\mathbb{Q})$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 3$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9/2 & 12 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Def. Sia $A \in M_{m\times n}(K)$. La matrice trasposta di A si indica con ${}^tA$ ed è la matrice che nel posto di indici (p,q) ha l'elemento di indici (q,p) di A.

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q}) \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$$

Per comodità, data una matrice $A = (a^i_j) \in M_{m\times n}(K)$, denotiamo con $\underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^m$ le righe di A $\quad (\underline{a}^i = (a^i_1, a^i_2, \dots, a^i_n) \in K^n)$

con $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ le colonne di A
$$\left(\underline{a}_j = \begin{pmatrix} a^1_j \\ a^2_j \\ \vdots \\ a^m_j \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(K) \right)$$

Oss. $\quad {}^t\underline{a}_j = (a^1_j, a^2_j, \dots, a^m_j) \in K^m$

Spesso identificheremo $\underline{a}_j$ con ${}^t\underline{a}_j$

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$\underline{a}^1 = (1, -3, 5) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{a}^2 = (0, 2, 6) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{a}_1 \cong (1, 0) \in \mathbb{R}^2$

$\underline{a}_2 \cong (-3, 2) \in \mathbb{R}^2$

$\underline{a}_3 \cong (5, 6) \in \mathbb{R}^2$

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo K. Denoteremo con $\underline{0}$ l'elemento neutro di V rispetto a $+$ e lo chiameremo vettore nullo.

<u>Proprietà aritmetiche</u>:

(i) $\alpha \in K$, $v \in V$, $\qquad \alpha \cdot v = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0$ opp. $v = \underline{0}$

"$\Leftarrow$" • $\quad v = 1\cdot v = (1+0)\cdot v = 1\cdot v + 0\cdot v = v + 0\cdot v$

$v = v + 0\cdot v \qquad$ sommo ad ambo i membri $-v$

$-v + v = -v + (v + 0\cdot v)$

$\underline{0}$ $\;\|\;$ $\quad \| \leftarrow$ + è associativa $\quad \Rightarrow$

$$(-v+v)+0v$$

$$\Rightarrow \quad \underline{0} = \underline{0} + 0 \cdot v = 0v \quad \Rightarrow \quad 0v = \underline{0}$$

- $\alpha v = \alpha(v+\underline{0}) = \alpha v + \alpha\underline{0}$ sommiamo l'opposto di αv: $-\alpha v$

$$-\alpha v + \alpha v = -\alpha v + (\alpha v + \alpha \underline{0})$$

$$\underline{0} = \underbrace{(-\alpha v + \alpha v)}_{=\underline{0}} + \alpha \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{0} = \alpha \underline{0}$$

"$\Rightarrow$" se $\alpha \neq 0$, allora $\exists\, \alpha^{-1} \in K$. $\quad \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad v = \underline{0}$

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \underbrace{(\alpha^{-1}\alpha)}_{=1} v$$

(ii) $\alpha \in K$, $v \in V \qquad (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$

Th: $(-\alpha)v$ e $\alpha(-v)$ si comportano come $-(\alpha v)$.

$$(-\alpha)v + \alpha v = (-\alpha+\alpha)v = 0v = \underline{0}$$

$$\alpha(-v) + \alpha v = \alpha(-v+v) = \alpha\underline{0} = \underline{0}$$

(iii) $\alpha, \beta \in K$, $v \in V \setminus \{\underline{0}\} \qquad \alpha v = \beta v \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\alpha v = \beta v \Rightarrow \alpha v + (-\beta v) = \underline{0} \Rightarrow \alpha v + (-\beta)v = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(\alpha-\beta)v = \underline{0} \\ v \neq \underline{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

(iv) $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $u, v \in V$, $\qquad \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$

$$\alpha u = \alpha v \Rightarrow \alpha u + (-\alpha v) = \underline{0} \Rightarrow \alpha u + \alpha(-v) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha(u-v) = \underline{0} \\ \alpha \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow u - v = \underline{0} \Rightarrow u = v$$

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su K.

Def. Un sottoinsieme $X \subseteq V$ di V si dice linearmente chiuso se:

- $X \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in X$, $\quad u+v \in X \qquad$ (X è chiuso rispetto a $+$)
- $\forall \alpha \in K$, $\forall u \in X$, $\quad \alpha u \in X \qquad$ (X è chiuso rispetto a $\cdot$)

Per le proprietà elencate, possiamo sempre restringere le operazioni di V a un suo sottoinsieme linearmente chiuso:

$$+_{|X \times X} : X \times X \longrightarrow X$$

OPERAZIONE RISTRETTE a X
(op. ereditate da X)

$$K \times X \longrightarrow X$$

$+|_{X\times X}$

$\cdot|_{K\times X} : K \times X \longrightarrow X$

OPERAZIONE RISTRETTE a X
(op. ereditate da X)

Esempio: $V = \mathbb{R}[x]$ $X = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ è linearmente chiuso

$Y \ni 1 + x - x^2 + x^3 +$
$Y \ni 2 + 3x - 2x^2 - x^3 =$
$3 + 4x - 3x^2 \notin Y$

$Y = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid gr(p(x)) = 3 \} \cup \{\underline{0}\}$
non è lin. chiuso

<u>Def</u>. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ linearmente chiuso si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se $(W, +|_{W\times W}, \cdot|_{K\times W})$ è uno spazio vettoriale su K.

<u>Teorema</u>. Ogni sottoinsieme $W \subseteq V$ linearmente chiuso è un sottospazio vettoriale di V.

<u>DIM</u>. Th: $(W, +|_{W\times W}, \cdot|_{K\times W})$ soddisfa le proprietà di sp. vett. su K

Le proprietà: + associativa, + commutativa, (1), (2), (3), (4) sono ancora soddisfatte dalle operazioni ristrette perché ogni vettore di W appartiene a V.

Vediamo inoltre che $\underline{0} \in W$ e che: $\forall u \in W$, $-u \in W$.

Sia $u \in W$, $\underline{0} = 0 \cdot u \in W$. E abbiamo finito.

$-u = (-1)\, u \in W$

Esempio: $\mathbb{R}^3$

- $W = \{\underline{0}\}$ è lin. chiuso. $W = \{\underline{0}\}$ è detto sottosp. banale (questo vale in ogni sp. vettoriale)
- $W = \{ (1,0,1) + \alpha(0,1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$u = (1,0,1) + \alpha(0,1,0)$, $v = (1,0,1) + \beta(0,1,0) \in W$

$u + v = (1,0,1) + \alpha(0,1,0) + (1,0,1) + \beta(0,1,0) = (2,0,2) + (\alpha+\beta)(0,1,0) \overset{?}{\in} W$

$u + v \in W \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} : \underbrace{(2,0,2) + (\alpha+\beta)(0,1,0)}_{(2,0,2) + (0,\alpha+\beta,0) = (2,\alpha+\beta,2)} = \underbrace{(1,0,1) + \gamma(0,1,0)}_{(1,\gamma,1)} \iff$

$\iff (2, \alpha+\beta, 2) = (1, \gamma, 1) \iff \begin{cases} 2 = 1 \\ \alpha + \beta = \gamma \\ 2 = 1 \end{cases} \leadsto$ IMPOSSIBILE

Quindi $u + v \notin W$. W non è chiuso rispetto a $+$.

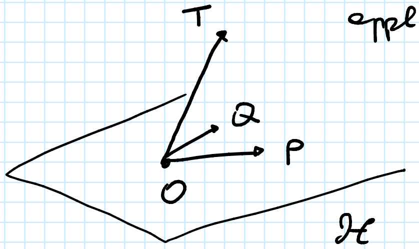
- $W = \{ \alpha(0,1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$ è lin. chiuso

$(0,0,0) = \underline{0} \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

$u = \alpha(0,1,0) \quad v = \beta(0,1,0), \quad u+v = (\alpha+\beta)(0,1,0) \in W$

$\gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma u = \gamma(\alpha(0,1,0)) = (\gamma\alpha)(0,1,0) \in W$

Esempio $\mathcal{I}(O)$ Sia $\mathcal{H}$ un piano che contiene O e sia $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}(O) \subseteq \mathcal{I}(O)$ il sottoinsieme dei vettori applicati in O che sono contenuti in $\mathcal{H}$



$(O,Q), (O,P) \in \mathcal{I}_{\mathcal{H}}(O)$

$(O,T) \in \mathcal{I}(O) \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{H}}(O)$

$\mathcal{I}_{\mathcal{H}}(O)$ è linearmente chiuso

Def. Sia $(V,+,\cdot)$ uno sp. vett. su un campo K e sia $(u_1,\dots,u_t)$ una t-upla di vettori di V. Una combinazione lineare di $(u_1,\dots,u_t)$ è un vettore u che si può esprimere nel seguente modo:

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t, \quad \text{per degli scalari } \alpha_1,\dots,\alpha_t \in K$$

mediante / secondo $\quad (\alpha_1,\dots,\alpha_t) \in K^t$

Analogamente, u è combinazione dei vettori di un insieme $X \subseteq V$ se $\exists\, u_1,\dots,u_t \in X$, $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_t \in K$ tali che $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$.

Def. Sia $X \subseteq V$. Definiamo la chiusura lineare di X nel seguente modo:

- Se $X = \emptyset$, $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$
- Se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{L}(X) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \mid t \in \mathbb{N}^*, u_1,\dots,u_t \in X, \alpha_1,\dots,\alpha_t \in K\}$

Esempio:

$M_2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\alpha\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$

Teorema $X \subseteq V$, $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene X:
- $X \subseteq \mathcal{L}(X)$
- $\forall\, W \subseteq V$ (sottosp. vett.) $: X \subseteq W, \quad \mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM prossima lezione.

Def. $(V,+,\cdot)$ sp. vett. su K.
Un sistema di generatori di V è un sottoinsieme $S \subseteq V$ tale che $\mathcal{L}(S) = V$, ossia:

$\forall u \in V, \quad \exists u_1, \dots, u_t \in S, \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K : \quad u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t .$

Esempio : $\quad K^n, \quad S = \{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,\dots,1)\}$

$\mathcal{L}(S) = K^n$

$(a_1, \dots, a_n) = a_1 (1,0,\dots,0) + a_2 (0,1,\dots,0) + \dots + a_n (0,\dots,0,1)$

Def. Uno sp vett. $(V, +, \cdot)$ si dice finitamente generato (f.g.) se ha un sistema di generatori finito

Esempio: K^n è finitamente generato

$K[x]$ non è finitamente generato.