ANALISI I

LEZIONE I

21/9/2022

PRELIMINARI

DANIELE CASTORINA

daniele.castorina@unina.it

RICEVIMENTO ONLINE MARTEDÌ 8:30 → 11:00
SUL CANALE TEAMS

LUNEDÌ 26 NO LEZIONE ANALISI I

MARTEDÌ 27 PRIMO RICEVIMENTO ONLINE

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = { NUMERI NATURALI } = { 1, 2, 3, ... }

INSIEME CHIUSO RISPETTO ALL'ADDIZIONE

$n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$2+3=5 \qquad 5-3=2$

$3-5=\ ??$

$\mathbb{Z}$ = { INTERI RELATIVI } = { $\underline{\underline{0}}$, ± 1, ± 2, ± 3, ... }

$3 - 5 =$

$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

b È <u>OPPOSTO</u> DI a SE $a + b = b + a = 0$

E VIENE INDICATO CON $-a$

$3 - 5 = 3 + (-5)$

MOLTIPLICAZIONE : $3 \cdot 5 = 15$

$(\mathbb{Z}, \times)$ È UN <u>INSIEME</u> <u>CHIUSO</u>

$$z_1 \times z_2 \in \mathbb{Z} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$4 : 2 = 2 \qquad\qquad 5 : 3 \notin \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Q} = \{$ NUMERI RAZIONALI $\} = \{$ FRAZIONI $\}$

$$= \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

OPERAZIONI IN $\mathbb{Q}$

$$q_1 + q_2 \in \mathbb{Q} \quad : \quad q_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad q_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$$3/5 + \frac{5}{2} = \frac{6+25}{10} = \frac{31}{10}$$

$$q_1 q_2 = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{21}{65}$$

$$q_1 : q_2 = \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^{-1} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{m_2}$$

ELEVAMENTO A POTENZA:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ \ldots}_{n \text{ VOLTE}} = a^n \qquad a^2 = b$$

$$2 \rightarrow 4 \qquad a \rightarrow a^2$$

Prop $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dim Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

Possiamo supporre che MCD$(m, n) = 1$ (ai minimi termini)

Quindi $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2}\, n = m \Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ è pari $\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

Sostituisco: $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow \cancel{2}\, n^2 = \cancel{4}^{\,2} k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow n$ è pari $\Rightarrow$ impossibile

È PIENO DI NUMERI <u>IRRAZIONALI</u>

QUALI SONO I NUMERI CHE NON SI POSSONO SCRIVERE COME FRAZIONI?

$$\frac{3}{5} = 0,6 \qquad\qquad 0,\overline{4} = \frac{4-0}{9}$$

$$2,13\overline{5} = \frac{2135-213}{900}$$

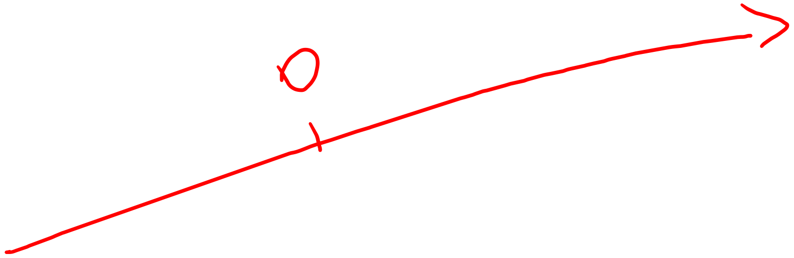
$$0,\overline{9} = 1 = \frac{\cancel{9}-0}{\cancel{9}} = 1$$

IRRAZIONALI = NUMERI DECIMALI ILLIMITATI APERIODICI

$\pi = 3,14 \ldots$

$e = 2,71 \ldots$

$\mathbb{R} = \{$ NUMERI REALI $\} = \{$ RAZIONALI E IRRAZIONALI $\}$



$\sqrt{-1} = i$

$\mathbb{C} = \{$ NUMERI COMPLESSI $\}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

$P(x) = 0$ DOVE $P(x)$ È UN POLINOMIO

∂P = DEG = GRADO DEL POLINOMIO

SCOPO DEL GIOCO: TROVARE LE RADICI REALI x

$$7x^3 - 5x + 2 = 0$$

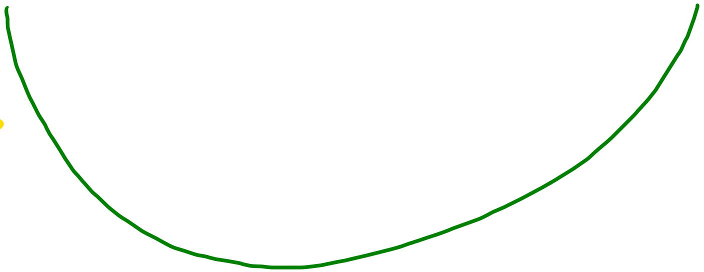
$$P(\alpha) = 0 \iff x-\alpha \mid P(x) \Rightarrow P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$$

DISEQUAZIONI DI II GRADO

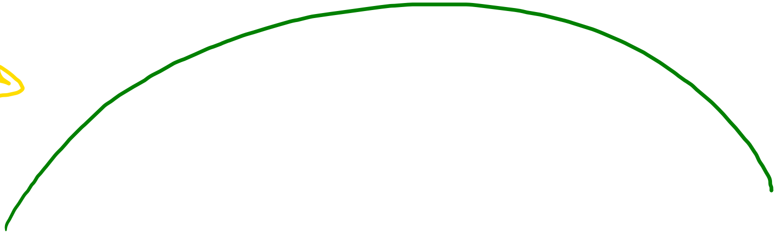
$$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \, , \quad a \neq 0$$

PARABOLA

$a > 0 \longrightarrow$



$a < 0 \longrightarrow$



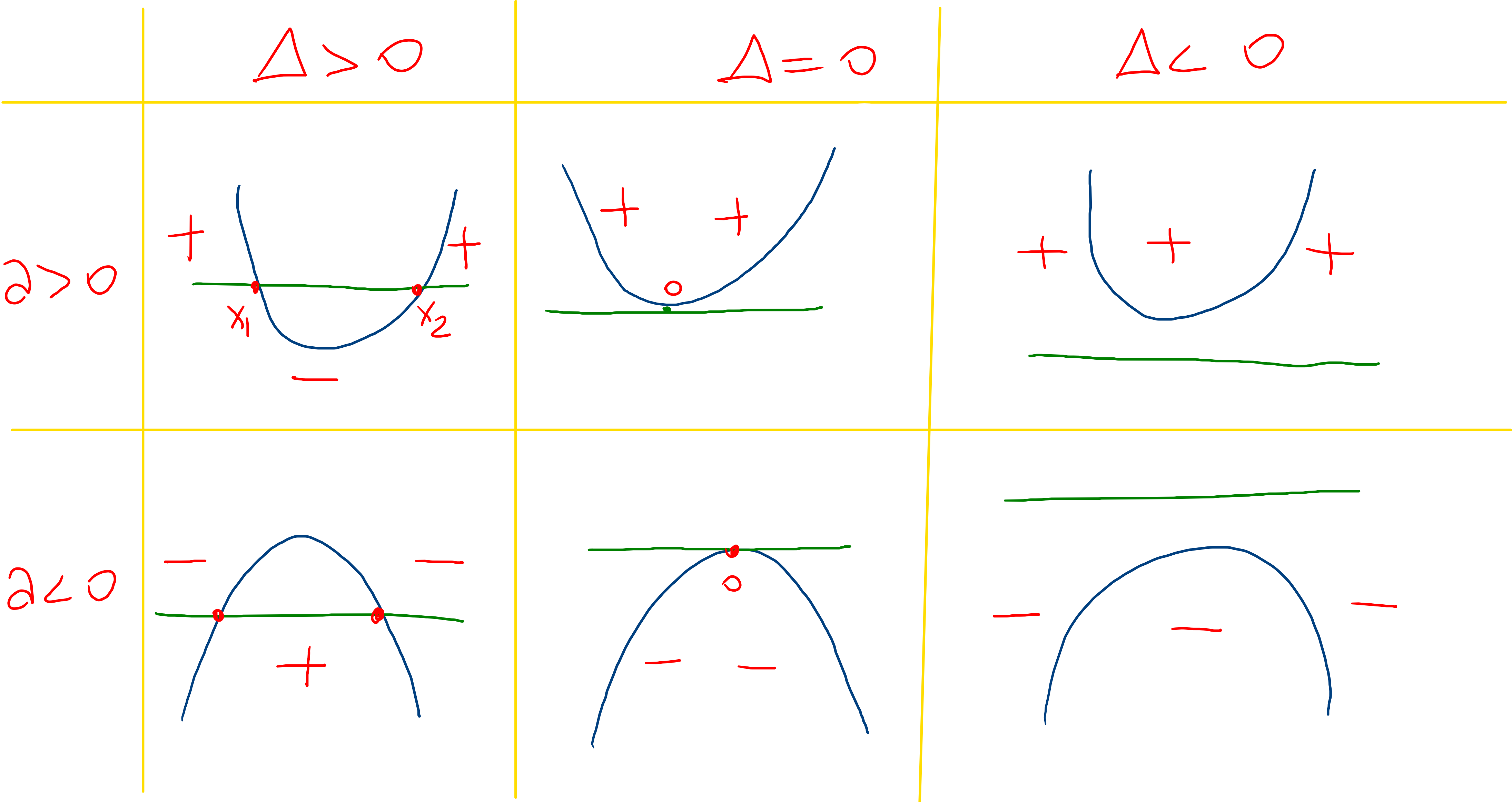
Δ = DISCRIMINANTE

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta > 0$: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 \neq x_2$ 2 SOLUZIONI

$\Delta = 0$: $x_1 = x_2 \Rightarrow$ 1 SOLUZIONE

$\Delta < 0$: $\sqrt{\Delta} \nexists \Rightarrow$ 0 SOLUZIONI



$\Delta > 0$
$\Delta = 0$
$\Delta < 0$
$a > 0$
$a < 0$
x_1
x_2
0

ESERCIZIO: RISOLVERE $-2x^2+5x+2 > 0$

ASSOCIO A $-2x^2+5x+2=0$

$b=5$

$c=2$

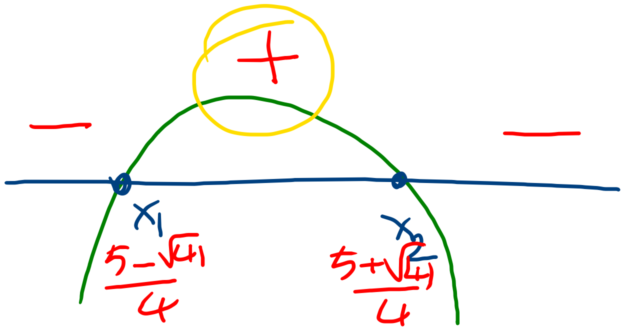
$a=-2<0$

$\Delta = b^2-4ac =$

$= 25+4(-2)(2) =$

$= 25+16 = 41 > 0$

2 SOLUZIONI



$$\frac{5-\sqrt{41}}{4} < x < \frac{5+\sqrt{41}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{41}}{-4} = \frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$$

$$= \frac{5-\sqrt{41}}{4} \text{ E } \frac{5+\sqrt{41}}{4}$$

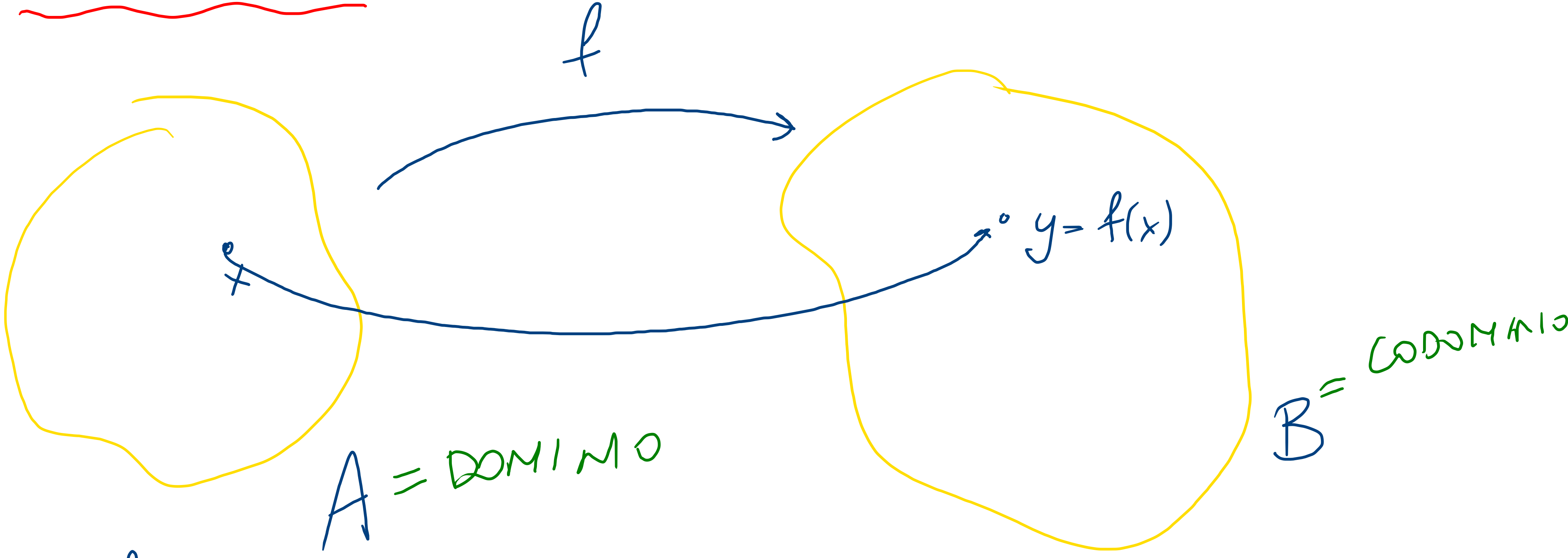
ANALISI I

LEZIONE 2

28/9/2022

FUNZIONI ELEMENTARI E GRAFICI

FUNZIONI



DEF $f: A \to B$ È UNA FUNZIONE SE ASSOCIA AD OGNI $x \in A$ UN UNICO $y \in B$ (CON $y = f(x)$).

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

$f : A \to B$ si dice <u>INIETTIVA</u> (1-1) se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in A.$$

ovvero $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$

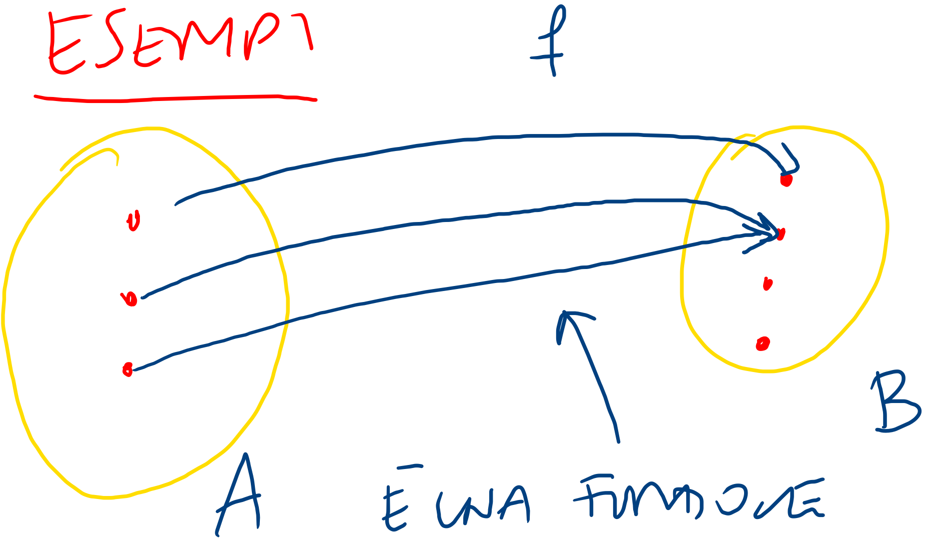
f si dice <u>SURIETTIVA</u> ('ONTO') se $f(A) = B$

ovvero se $\forall\, y \in B \;\; \exists\, x \in A : y = f(x)$

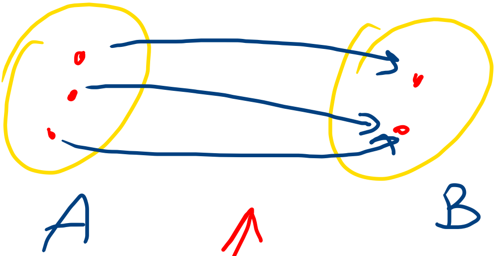
f si dice <u>BIETTIVA</u> (o <u>BIUNIVOCA</u>) se è

<u>INIETTIVA</u> e <u>SURIETTIVA</u>.

ESEMPI



È UNA FUNZIONE
NON È INIETTIVA
NON È SURIETTIVA



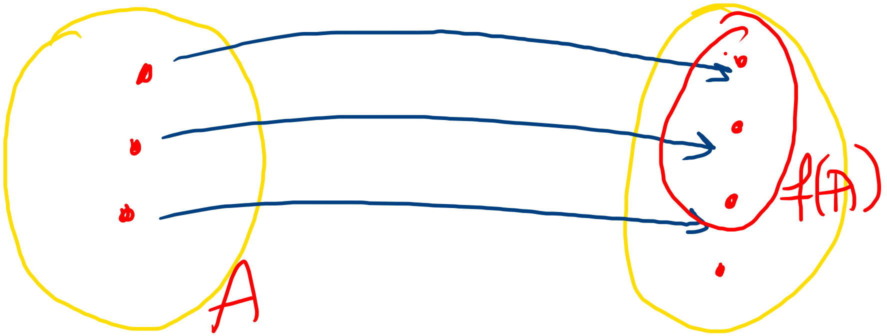
SURIETTIVA

$(\#B \leq \#A)$

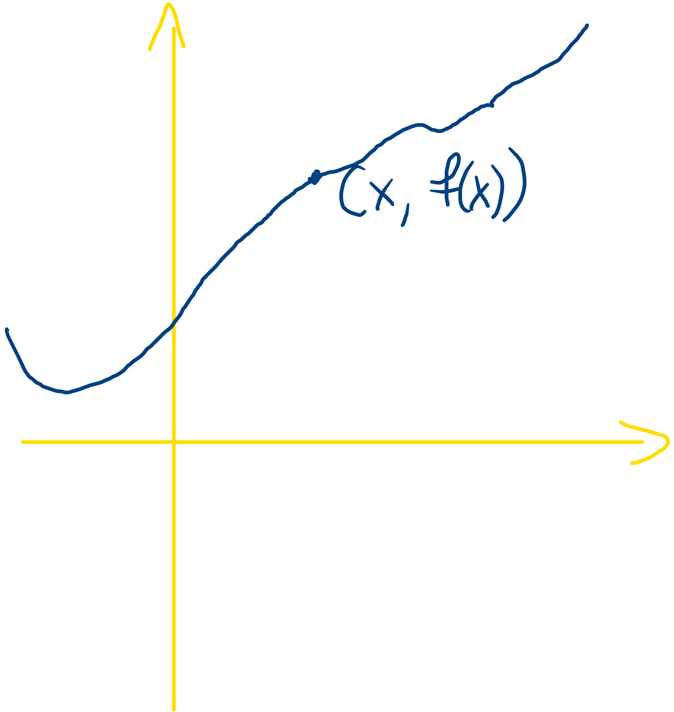
INIETTIVA

$(\#B \geq \#A)$

NUMERO DI ELEMENTI!



FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$



$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

SI DICE GRAFICO DI f L'INSIEME

$$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

ESERCIZI: 1) $y = f(x) = 3x+1$

VERIFICARE CHE È UNA FUNZIONE INIETTIVA, SURIETTIVA E QUINDI BIETTIVA.

f È INIETTIVA? $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cancel{3}x_1 + \cancel{1} = \cancel{3}x_2 + \cancel{1} \Rightarrow x_1 = x_2$ OK! È 1-1

f È SURIETTIVA? $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$

$y = f(x) \Rightarrow y = 3x+1 \Rightarrow y-1 = 3x \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$

OK! È ANCHE SURIETTIVA QUINDI BIETTIVA.

2) STESSO ESERCIZIO CON: $y = f(x) = 3x^2 - 5$

f È <u>INIETTIVA</u> ?

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cancel{3} x_1^2 - \cancel{5} = \cancel{3} x_2^2 - \cancel{5}$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ O $x_1 = -x_2$

$x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

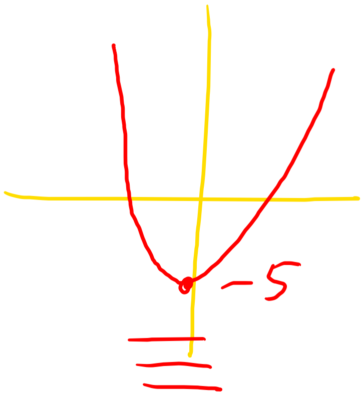
$\Rightarrow x_1 = x_2 \lor x_1 = -x_2$

<u>NON È INIETTIVA</u>

f È SURIETTIVA ? $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : \ y = f(x)$

$\Rightarrow y = 3x^2 - 5 \Rightarrow 3x^2 - 5 - y = 0$

EQ PARAMETRICA



$a = 3 \qquad b = 0 \qquad c = -5 - y$

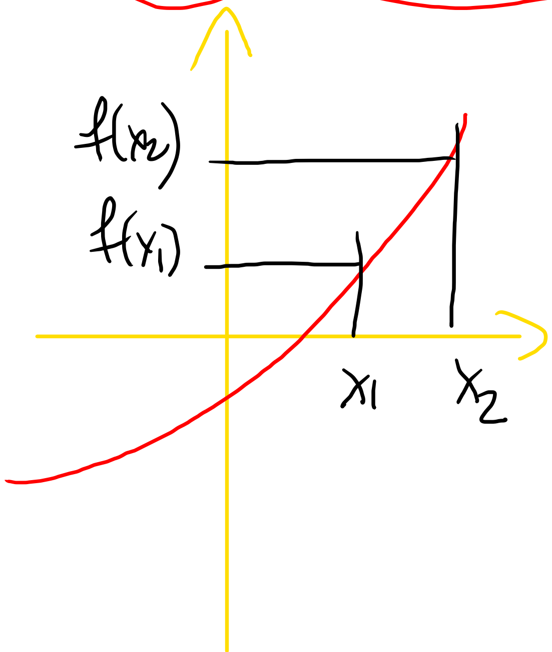
QUANDO È RISOLVIBILE ? $\Delta \geq 0$

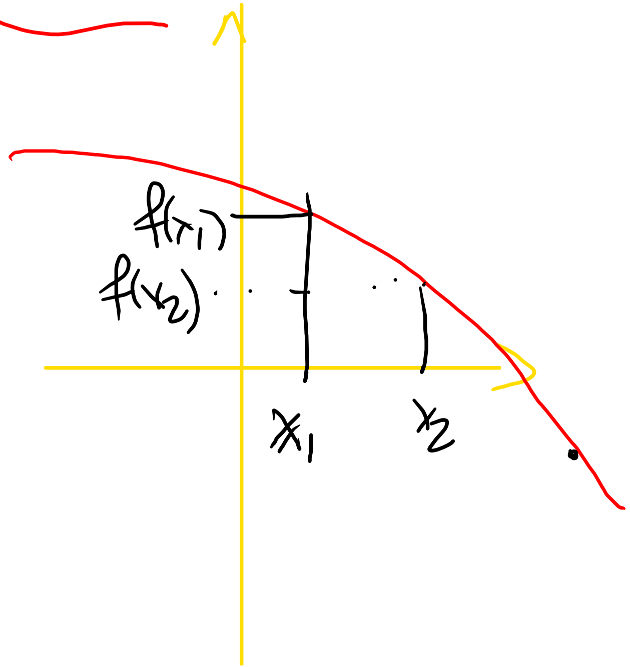
CALCOLO IL $\Delta = b^2 - 4ac = -12(-5-y) =$

$= 60 + 12y \geq 0 \Rightarrow 12y \geq -60 \Rightarrow y \geq -\frac{60}{12} = -5$

$y \geq -5$ (IMMAGINE È $[-5, +\infty)$) $\Rightarrow$ NON È SURIETTIVA!

MONOTÓNIA E INVERTIBILITÀ





f è CRESCENTE SE $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

f è DECRESCENTE SE $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

FUNZIONE INVERSA

$$y = f(x) = x + 1 \qquad g(x) = x - 1$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g(y) = g(f(x))$$

FUNZIONE COMPOSTA

$$g(f(x)) \neq f(g(x)) \; :$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x+1$$

$$g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} \neq x+1$$

DEF g È LA (FUNZIONE) INVERSA DI f SE

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x.$$

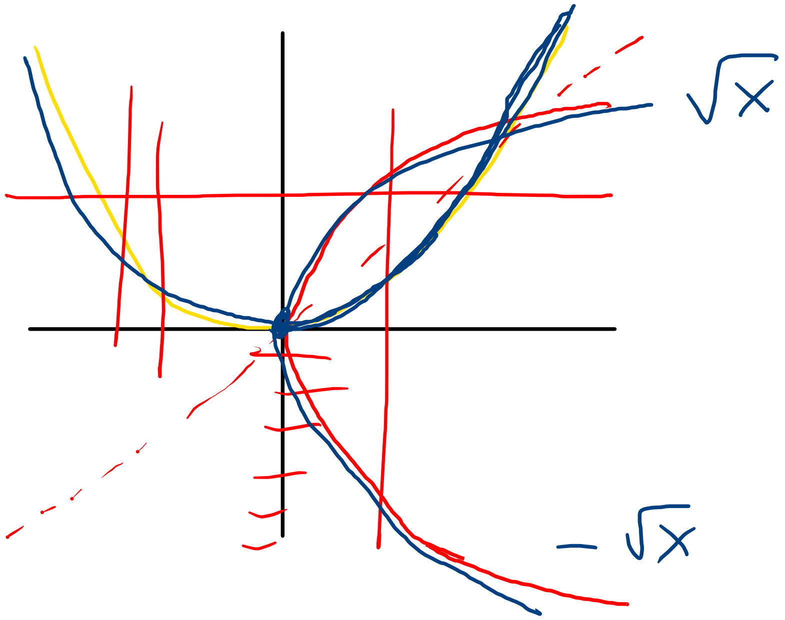
SI DENOTA CON $g = f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

$f(x) = x+1$ $\qquad f(f^{-1}(x)) = f(x-1) = (x-\cancel{1})+\cancel{1} = x$

$f^{-1}(x) = x-1$ $\qquad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+1) = (x+\cancel{1})-\cancel{1} = x$

ESEMPIO: $f(x) = x^2$ NON È INVERTIBILE

$$y = f(x) \longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



$y = x^2 \quad (x \geq 0$

$x = \sqrt{y}$

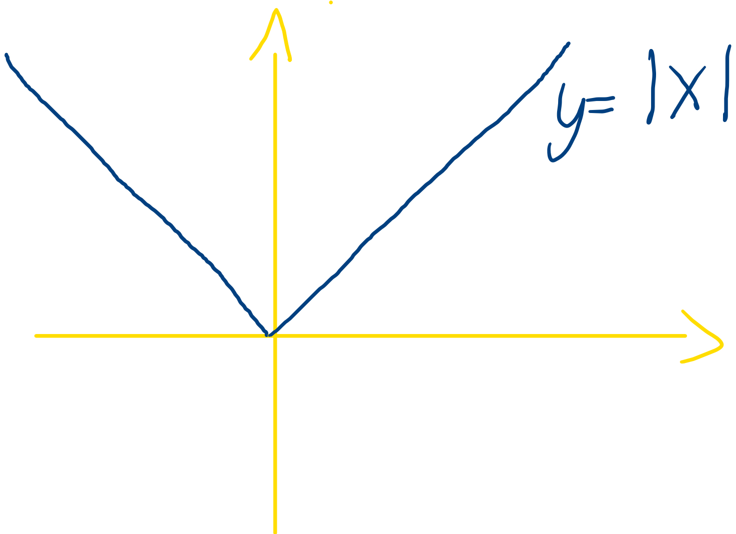
$y = x^2 \quad (x \leq 0)$

$x = -\sqrt{y}$

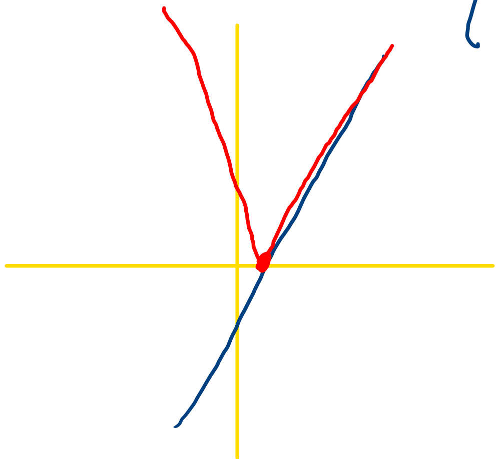
$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

MODULO (VALORE ASSOLUTO)

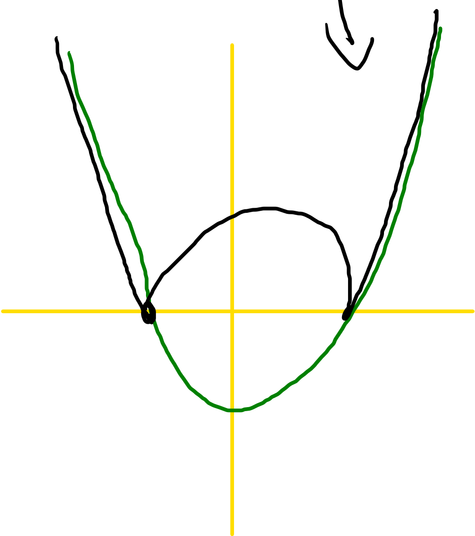
$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x; & x \ge 0 \\ -x; & x \le 0 \end{cases}$$

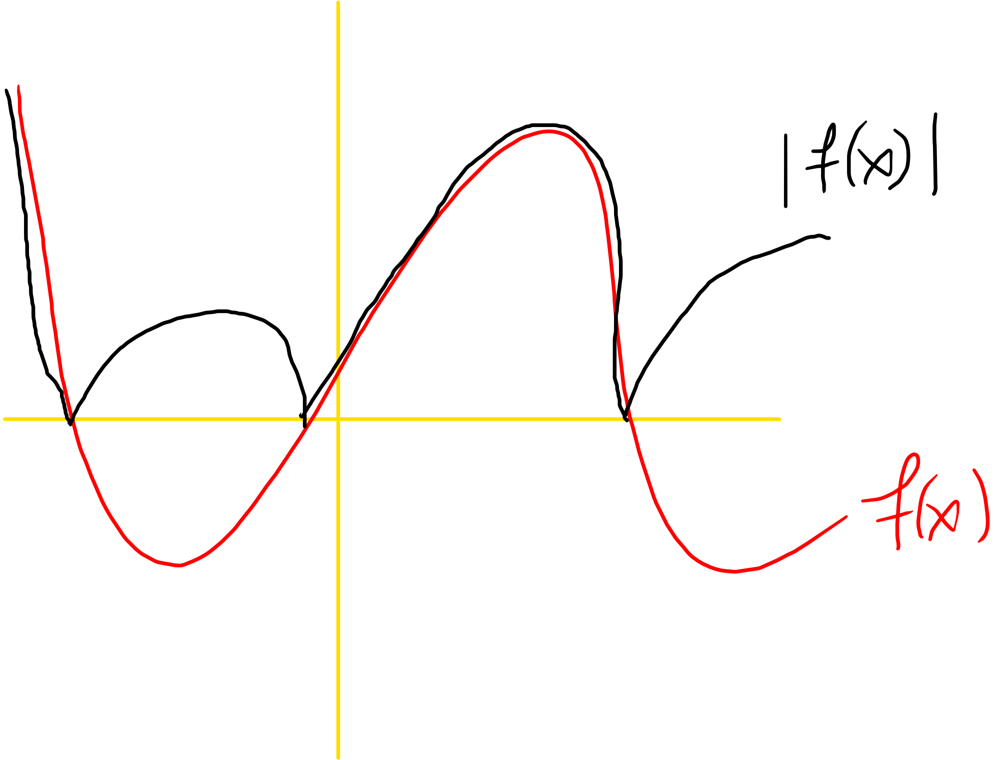


$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2; & 3x-2 \ge 0 \\ -3x+2; & 3x-2 \le 0 \end{cases}$$

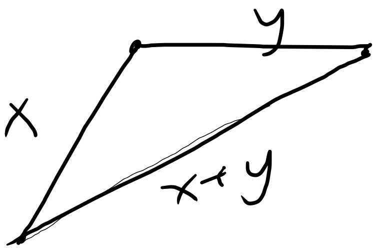


$$y = |x^2 - 1|$$





DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

DIM

$$-|x| \le x \le |x|$$

$$-|y| \le y \le |y|$$

SOMMIAMO ED ORDINIAMO

$$x+y \le |x| + |y|$$

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y| \Rightarrow -(x+y) \le |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| = \mathrm{MAX}(x+y\,;\, -(x+y)) \le |x| + |y| \quad . \square$$

ANALISI I

LEZIONE VII

17/10/2022

SUCCESSIONI NUMERICHE

SUCCESSIONI NUMERICHE

DEF UNA SUCCESSIONE a_n È UNA FUNZIONE DA $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{R}$ CIOÈ È UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI $n \in \mathbb{N}$ UN UNICO NUMERO REALE a_n.

ESEMPIO: $a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9 \; \ldots$

$$a_n = n^2$$

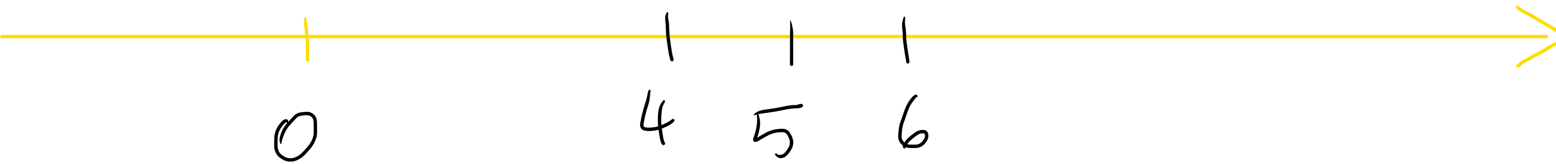
$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad \ldots$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1$

$$a_n = (-1)^n$$

LIMITI DI SUCCESSIONI



NON È POSSIBILE ACCUMULARSI VICINO AD UN NUMERO NATURALE

DEF $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon$:

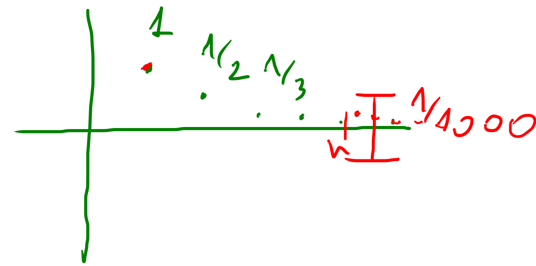
$|a_n - L| < \varepsilon$ se $n \geq n_\varepsilon$.

ESEMPIO:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$" \frac{1}{\infty} = 0 "$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots$$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff$$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad n_\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, n_\varepsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_\varepsilon$$

SCOPO DEL GIOCO: DETERMINARE <u>UN</u> n_ε

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = n_\varepsilon$$

DEF 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ SE E SOLO SE

$\forall M>0 \quad \exists\, n_M : a_n > M \quad \forall n \geq n_M$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ SE E SOLO SE

$\forall M<0 \quad \exists\, n_M : a_n < M \quad \forall n \geq n_M$

ESEMPIO: $\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$

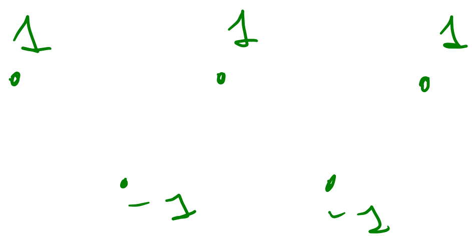
SE $\forall M > 0 \ \exists n_M : n^2 > M \ \forall n \geq n_M$

SCOPO DEL GIOCO: TROVARE n_M

$n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M} = n_M$

ESEMPIO IMPORTANTE

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$$



$$a_{2k} = 1 \quad \forall k$$

$$a_{2k+1} = -1 \quad \forall k$$

IL LIMITE NON ESISTE $\Rightarrow$ a_n È **IRREGOLARE**.

__TEOREMA__ SE IL LIMITE ESISTE ESSO È __UNICO__.

__DIM__ SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NON SIA UNICO, AD ESEMPIO

$\exists \ L_1, L_2$ CON $L_1 \neq L_2$ E

SI ABBIA

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \neq \lim_{n\to\infty} a_n = L_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_{1\varepsilon}: \quad |a_n - L_1| < \varepsilon \quad \underbrace{\forall n \geq n_{1\varepsilon}}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_{2\varepsilon}: \quad |a_n - L_2| < \varepsilon \quad \underbrace{\forall n \geq n_{2\varepsilon}}$

SE $L_1 \neq L_2 \Rightarrow |L_1 - L_2| > 0$

SCEGLIAMO $\varepsilon < \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$ ED

OSSERVIAMO CHE SE $n \geq \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$: DISUG TRIANG.

$$0 < |L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)|$$

$$\leq \underbrace{|a_n - L_1|}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon \text{ SE } n \geq n_{1\varepsilon}}} + \underbrace{|a_n - L_2|}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon \text{ SE } n \geq n_{2\varepsilon}}} < 2\varepsilon < |L_1 - L_2|$$

IMPOSSIBILE!

CIOÈ $L_1 = L_2$

$\blacksquare$

COROLLARIO SE HO DUE "CANDIDATI" COME LIMITE, ALLORA TALE LIMITE NON ESISTE.

AD ESEMPIO: $a_n = (-1)^n$

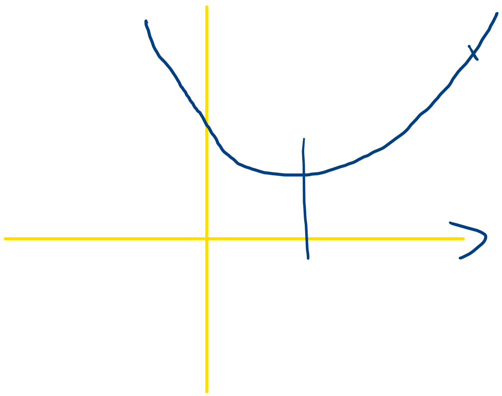
$$a_{2k} = 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$$

$$\neq \Rightarrow \nexists \text{ LIMITE}$$

$$a_{2k+1} = -1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$$

ESERCIZI: CALCOLARE E VERIFICARE CON LA DEFINIZIONE IL

$$\lim_{n \to \infty} 3n^2 - 2n + 1 = +\infty$$



$y = 3x^2 - 2x + 1$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

DIMOSTRIAMOLO :

$\forall M>0 \quad \exists\, n_M : \quad a_n > M \quad \forall\, n \geq n_M$

cioè : $\quad \forall M>0 \quad \exists\, n_M \quad :$

$$3n^2 - 2n + 1 > M \Rightarrow$$
$$3n^2 - 2n + (1 - M) > 0$$

$$\Delta = 4 - 12(1-M) = 12M - 8 > 0 \quad \forall\, M > \frac{2}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12m-8}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{3m-2}$$

BASTA SCEGLIERE $n > \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3m-2}}_{= n_m}$

AFFINCHÈ SIA VERA LA DISUGUAGLIANZA

ATTENZIONE: ESERCIZIO DIFFICILE!

ANALISI I

LEZIONE 6

17/10/2022

SUCCESSIONI LIMITATE

SUCCESSIONI LIMITATE

DEF a_n SI DICE SUP. LIMITATA SE ESISTE M : $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_n SI DICE INF LIMITATA SE ESISTE N : $a_n \geq N \quad \forall n \in \mathbb{N}$

SI DICE LIMITATA SE LO È SUP E INF.

OSSERVAZIONE

È EQUIVALENTE SCRIVERE

$N \leq a_n \leq M$ OPPURE $|a_n| \leq K$

(ESERCIZIO: DIMOSTRARE L'EQUIVALENZA)

SUCCESSIONI CONVERGENTI

SE a_n AMMETTE LIMITE FINITO SI DICE "CONVERGENTE"

VICEVERSA SE IL LIMITE È $\pm\infty$ SI DICE "DIVERGENTE"

Q UNA SUCCESSIONE LIMITATA È CONVERGENTE? E VICEVERSA?

NO! ESISTONO SUCCESSIONI LIMITATE MA NON CONVERGENTI:

SCEGLIENDO $a_n = (-1)^n$

NON HA LIMITE (QUINDI NON CONVERGE)

PERÒ SI OTTIENE CHE

$$-1 \leq a_n = (-1)^n \leq 1 \Rightarrow |(-1)^n| = 1 \leq 2$$

CIOÈ È LIMITATA.

PROP OGNI SUCCESSIONE CONVERGENTE È LIMITATA.

DIM PER IPOTESI $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L \neq \pm\infty$

PERCHÉ È CONVERGENTE CIOÈ

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \quad |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

SCEGLIAMO $\varepsilon = 1$ OTTENGO CHE $\forall n \geq n_1$ HO

$|a_n - L| \leq 1 \quad \forall n \geq n_1$

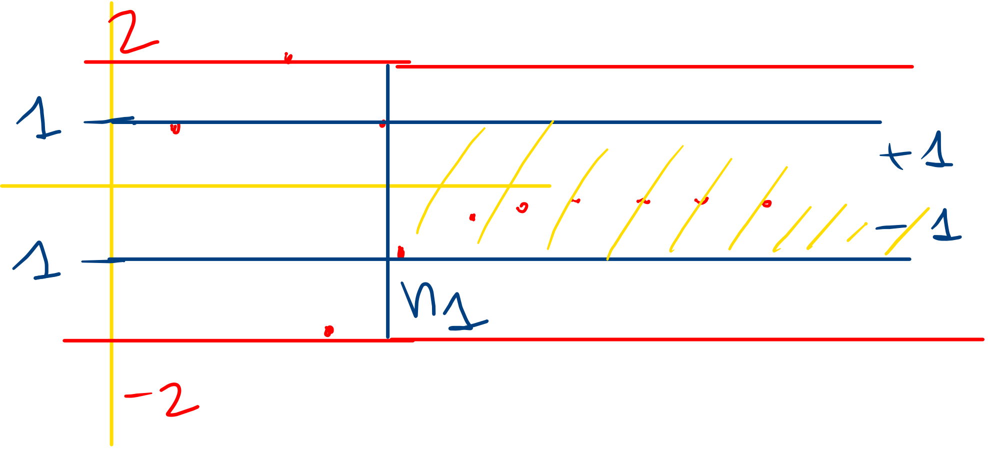
$\Rightarrow \quad -1 \leq a_n - L \leq 1 \quad \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow \quad L-1 \leq a_n \leq L+1 \quad \forall n \geq n_1$

CIOÈ È LIMITATA TRA $L-1$ ED $L+1$ $\forall n \geq n_1$

VICEVERSA SIA $K_1 = \min\limits_{n \leq n_1} a_n$, $K_2 = \max\limits_{n \leq n_1} a_n$

A QUESTO PUNTO SCELGO $N = \min(K_1, L-1)$, $M = \max(K_2, L+1)$ ED OTTENGO $N \leq a_n \leq M$. $\boxtimes$



← ESEMPIO

ESERCIZI SU SUP ED INF

$$A = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} \;;\; n \geq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

1. È LIMITATO ?

2. SE SÌ TROVARE SUP E INF.

3. SONO MAX E MIN ?

1 A È LIMITATO? $5/2$; $7/3$; $\frac{9}{4}$; ...

$$0 \le \frac{2n+3}{n+1} \le \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} = 3$$

$0 \le a_n \le 3 \rightarrow$ SÌ È <u>LIMITATA</u>

(0 È UN MINORANTE, 3 È UN MAGGIORANTE)

② SUP? INF?

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} \qquad \text{SUP} = 5/2$$

$$\frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+2+1}{n+1} =$$

$$= \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}} + \frac{1}{n+1}$$

$$= 2 + \frac{1}{n+1}$$ È DECRESCENTE →

QUINDI :

$$\sup_{n\geq 1} a_n = a_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\inf_{n\geq 1} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{\infty + 1} = 2$$

SCOMMESSA : $\sup = 5/2$; $\inf = 2$

DIMOSTRIAMO IL SUP E L'INF:

SUP $a_n = 5/2$: (1) $5/2$ È MAGGIORANTE

(2) È IL PIÙ PICCOLO

(1) $\underline{5/2}$ MAGGIORANTE $\Rightarrow a_n \leq \underline{5/2} \ \forall n \geq 1$

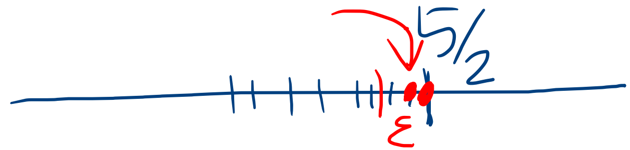
$$\Rightarrow \underbrace{2 + \frac{1}{n+1}}_{a_n =} \leq 5/2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow n \geq 1 \quad \text{OK}$$

② È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \quad a_{n_\varepsilon} \geq 5/2 - \varepsilon$

SICCOME $a_1 = 5/2$



POSSO SCEGLIERE

$a_{n_\varepsilon} = a_1 = 5/2 \quad \forall \varepsilon > 0 .$

ABBIAMO DIMOSTRATO SUP $= 5/2$

VERIFICHIAMO CHE INF = 2

(1) $a_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$ (È UN MINORANTE)

$$a_n = \cancel{2} + \frac{1}{n+1} \geq \cancel{2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geq 0$$

OVVIO

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \; a_{n_\varepsilon} \leq 2 + \varepsilon$

$$\Rightarrow \cancel{2} + \frac{1}{n+1} \leq \cancel{2} + \varepsilon \Rightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 = n_\varepsilon$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE INF = 2 .

$5/2$ È MASSIMO E SUP

2 È SOLAMENTE INF

(NON È ASSUNTO)

ANALISI I

LEZIONE 7

19/10/2022

LIMITI DI SUCCESSIONI

OPERAZIONI CON I LIMITI

PROP SE $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ E $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ ALLORA ABBIAMO:

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (PURCHÉ $b_n, b \neq 0$)

DIM (1)

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| =$$

$$= |(a_n-a)+(b_n-b)| \le$$

$$\underbrace{|a_n-a|}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon \ \forall n \geq n_{1\varepsilon}}} + \underbrace{|b_n-b|}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon \ \forall n \geq n_{2\varepsilon}}} < 2\varepsilon \quad \forall n \geq \mathrm{MAX}(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$$

ES: STESSA DIM CON LA DIFFERENZA

(2) $$|a_n b_n - ab| = |(a_n-a)(b_n-b)$$

$$+ ab_n + a_n b - 2ab| =$$

$$= \left| (a_n - a)(b_n - b) + \underline{a_n b} - \underline{a b} + \underline{a b_n} - \underline{a b} \right|$$

$$= \left| (a_n - a)(b_n - b) + b(a_n - a) + a(b_n - b) \right|$$

$$\leq \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon \ \forall n \geq n_{1\varepsilon}}}{|a_n - a|}\ \underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon \ \forall n \geq n_{2\varepsilon}}}{|b_n - b|} + |b|\,|\underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon}}{a_n - a}| + |a|\,|\underset{\substack{\wedge \\ \varepsilon}}{b_n - b}| <$$

$$< \varepsilon^2 + |b|\varepsilon + |a|\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon + |a| + |b|).$$

ES: STESSA IDEA DI DIM PER IL QUOZIENTE. $\blacksquare$

ESEMPIO:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + 3^{1/n} \right) = 0 + 1 = 1$$

$$\frac{1}{n^2} \to 0 \qquad 3^{1/n} \to 3^0 = 1$$

SPINOFF:

$$2^0 = 1$$

$$5^{340} : 5^{340} = 1$$

$$= 5^{340-340} = 5^0$$

FORME INDETERMINATE $0 \cdot \infty$; $\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^{∞} ; 0^{0} ;

$\infty - \infty$ ∞^{0}

TEOREMI DI CONFRONTO

TEOREMA (DELLA PERMANENZA DEL SEGNO)

SE $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ ALLORA

$\exists\, n_0 : \quad a_n > 0 \quad \forall\, n \geq n_0$

DIM $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \; |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$

CIOÈ $\quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$

OVVERO $\quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$

SCELGO $\varepsilon = a/2$ DA CUI $\forall\, n \geq n_0$

OTTENGO $\quad a_n > a - \varepsilon = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} > 0$

DA CUI LA TESI. $\square$

COROLLARIO SE $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$

ALLORA $\lim_{n \to \infty} a_n = a \geq 0$.

DIM PER CONTRADDIZIONE

SUPPONIAMO CHE $a < 0$

DAL TEOREMA PRECEDENTE

ESISTEREBBE n_0 : $a_n < 0 \ \forall n \geq n_0$

CHE NON È POSSIBILE VISTO $a_n \geq 0$ PER IPOTESI. $\square$

TEOREMA DI CONFRONTO

SE $a_n \geq b_n$ $\forall n \geq n_0$

ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq \lim_{n\to\infty} b_n = b$

DIM BASTA CONSIDERARE LA SUCC. $c_n := a_n - b_n$. PER IPOTESI $c_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$ E $\lim_{n\to\infty} c_n =$

$$= \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

DAL COROLLARIO PRECEDENTE SEGUE CHE $a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$. $\blacksquare$

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI

SUPPONIAMO CHE $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \ge n_0$

E CHE $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$

ALLORA ANCHE $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

DIM $\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_{1\varepsilon} : \; b-\varepsilon \le a_n \le b+\varepsilon \quad \forall n \ge n_{1\varepsilon}$

$\lim_{n\to\infty} c_n = b \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_{2\varepsilon} : \; b-\varepsilon \le c_n \le b+\varepsilon \quad \forall n \ge n_{2\varepsilon}$

SCEGLIAMO $n_{3\varepsilon} := \mathrm{MAX}(n_0, n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$

$$b-\varepsilon \le a_n \le b_n \le c_n \le b+\varepsilon \quad \forall n \ge n_{3\varepsilon}$$

MA ALLORA :

$$b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon \quad \forall \; n \geq n_{3\varepsilon}$$

OVVERO $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. $\boxtimes$

TEO. CONFRONTO CON LIMITI INFINITI

$a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq n_0$

① SE $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ ALLORA

$$\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$$

② SE $\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty$ ALLORA

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

DIM 1 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

cioè $\forall M>0 \ \exists n_M$:

$a_n > M \quad \forall n \geq n_M$

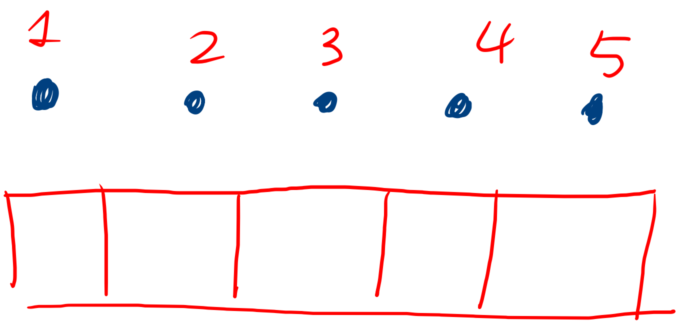
Per ipotesi $b_n \geq a_n > M$

$\forall n \geq \max(n_M, n_0)$ ovvero $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ $\boxed{}$

FATTORIALE

IN QUANTI MODI DIVERSI POTETE ORDINARE n OGGETTI ??

$n = 5$



$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2) \cdots \cdots 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \cdots (a+b)$$

$$= 1 \cdot a^n \quad n a^{n-1} b \quad \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \quad \cdots \quad b^n$$

COEFFICIENTE BINOMIALE :

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\;3!}$$

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1 = a + b$ 1   1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1   2   1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 1   3   3   1

1   4   6   4   1

1   5   10   10   5   1

ORDINE DI INFINITO

$$\log_a n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$(a>1) \quad (p>0) \quad (a>1)$$

POSTULATO: IL LIMITE VIENE DECISO DALL'ORDINE MAGGIORE

ESEMPI

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{3n^2 + n} =$$

$$= \frac{\infty^3 + 2(\infty)^2}{3(\infty)^2 + \infty} =$$

$$= \frac{\infty + \infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{3n^2 + n} =$$

CONSIDERIAMO L'ESPONENTE MAGGIORE

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\cancel{3}}\left(1 + \frac{2\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}}\right)}{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\right)}$$

$\frac{2}{\infty} = 0$

∞

$\frac{1}{\infty} = 0$

$$= +\infty \cdot \frac{1}{3} = +\infty .$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 3\log n}{n^2 + 7n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(5 - 3\frac{\log n}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{7\cancel{n}}{\cancel{n^2}}\right)}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ IN REALTA'

$\log n << n^2$ PER ORDINE DI INFINITO TENDE A ZERO

0

$$= 5 .$$

③ $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^{100}}{4^n - \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(1 + \cancel{\frac{n^{100}}{3^n}}\right)^{0}}{4^n\left(1 - \cancel{\frac{\log n}{4^n}}\right)^{0}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

ORDINE DI INFINITO

ANALISI I

24/10/2022

SUCCESSIONI

LIMITI NOTEVOLI

Prop 1 $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

DIM $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \quad |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

INOLTRE $\quad -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad$ DAI CARABINIERI.

$$\underbrace{-|a_n|}_{\to 0} \leq \underbrace{a_n}_{\to 0} \leq \underbrace{|a_n|}_{\to 0} \quad n \to \infty$$

PROP 2 SUPPONIAMO CHE $a_n \to 0$ E $|b_n| \leq M$. ALLORA

$$c_n = a_n b_n \to 0 \text{ SE } n \to \infty.$$

OSS IL PRODOTTO DI UNA INFINITESIMA PER UNA LIMITATA È INFINITESIMO.

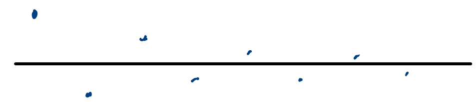
DIM $|b_n| \leq M \Rightarrow -M \leq b_n \leq M$

MOLTIPLICO PER $|a_n|$: $-M|a_n| \leq |a_n| b_n \leq M|a_n|$

$n \to \infty$ $\qquad 0 \qquad \square$

OSS SPESSO SI USA CON SUCC. OSCILLANTI

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$



$a_n = (-1)^n$ NON HA LIMITE MA È LIMITATA

$b_n = \frac{1}{n}$ CHE È INFINITESIMA (TENDE A ZERO)

QUINDI DALLA PROP2 È INFINITESIMA.

LIMITI NOTEVOLI: ESPONENZIALE

PROP SIA $a \in \mathbb{R}$. ALLORA:

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & ; \ a > 1 \\ 1 & ; \ a = 1 \\ 0 & ; \ -1 < a < 1 \\ \nexists & ; \ a \leq -1 \end{cases}$$

DIM DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x \geq -1$$
$$\forall n \geq 0$$

1) SE $a>1 \Rightarrow a = 1+x$ CON $x>0$

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx \longrightarrow +\infty$$

SE $n \to \infty$ DATO CHE $x>0$

DAL CONFRONTO SEGUE LA TESI.

(2) $1^n = 1 \quad \forall n \geq 1$, OVVIAMENTE

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$ (SUCCESSIONE COSTANTE)

(3) SUPPONIAMO: $0 < a < 1$

SE $a < 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} > 1$

$\Rightarrow b = 1 + x$, CON $x \geq 0$ QUINDI

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\underbrace{1+x}_{\to\infty})^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

SE $-1 < a < 0$ BASTA RIPETERE LA DIMOSTRAZIONE CON $|a_n|$

(4) SE $a = -1$ GIÀ NOTO, SUPPONIAMO $a < -1$

SE CONSIDERIAMO $a_{2k} = a^{2k} = (a^2)^k \to +\infty$

$\vee$
0

VICEVERSA $a_{2k+1} = a^{2k+1} = a^{2k} a_n \to -\infty$

$\wedge$
0

DOPPIO LIMITE $\Rightarrow$ IL LIMITE NON ESISTE. $\not\exists$

<u>PROP</u> SIA $a > 0$, ALLORA

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1$$

DIM $a \geq 1 \Rightarrow a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \geq 1$

CONSIDERIAMO $b_n := \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ E

DIMOSTRIAMO CHE $b_n \to 0$ SE $n \to \infty$.

$$a = (1+b_n)^n \geq 1 + n b_n$$

QUINDI: $0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$ COSÌ $b_n \to 0$.

$$0 \leftarrow \quad n \to \infty$$

VICEVERSA: SE $0 < a < 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^{1/n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}} = 1 . \quad \boxed{/\!/}$$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} \longrightarrow 1$

$a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$

PROP $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \forall \alpha$

OSS $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} =$

$= \infty^0$ F.I.

$$n^{\frac{1}{n}} = \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{e^{\log n}}\Big)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1$$

$\frac{\log n}{n} \to 0$

DIM CASO $\alpha = 1/2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{1/2}} = 1$

$b_n := \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \geq 0$. NOTIAMO CHE:

$\sqrt{n} = n^{1/2} = (1+b_n)^n \geq 1 + n b_n$ CIOÈ

$0 \leq b_n \leq \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

CIOÈ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ CVD

NEL CASO GENERALE:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(n^{1/2}\right)^{2\alpha}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{1/2}}\right)^{2\alpha} = 1^{2\alpha} = 1 \quad \forall \alpha$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE. $\boxtimes$

ANALISI I

24/10/2022 (POMERIGGIO)

SUCCESSIONI MONOTONE

MONOTONÍA

DEF a_n È (MONOTONA) CRESCENTE

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall\, n \geq 1$$

a_n È (MONOTONA) DECRESCENTE

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall\, n \geq 1$$

ESEMPI: $a_n = \dfrac{3n+5}{n^2-2}$

È DECRESCENTE PER n "GRANDE" $(n \gg 1)$

CIOÈ $a_{n+1} \le a_n \quad \forall\, n \ge n_0$

$$3n+3+5$$

$$\frac{3(n+1)+5}{(n+1)^2-2} \le \frac{3n+5}{n^2-2}$$

$$\underline{n^2} + 2n + 1 - \underline{2}$$

$$\cancel{(3n+5)(n^2-2)} + 3(n^2-2)$$

$$\leq \cancel{(3n+5)(n^2-2)} + (2n+1)(3n+5)$$

$$\Downarrow$$

$$3n^2 - 6 \leq 6n^2 + 13n + 5$$

$$\swarrow$$

$$3n^2 + 13n + 11 \geq 0 \quad \text{Vero } \forall n \geq 1$$

TEOREMA OGNI SUCCESSIONE MONOTÒNA È REGOLARE (CIOÈ AMMETTE LIMITE).

DIM È SUFFICIENTE DIM. SE a_n È CRESCENTE (IL CASO DECRESCENTE È ANALOGO)

SUPPONIAMO CHE $a_n \uparrow$: ABBIAMO DUE CASI CIOÈ SUP ILLIMITATA O LIMITATA.

SE a_n NON È SUP LIMITATA SI HA:

$\forall M > 0 \quad \exists\, n_M : a_{n_M} \geq M$

PERÒ, DATO CHE a_n È CRESCENTE

ABBIAMO CHE $a_n \geq a_{n_M} \geq M \quad \forall n \geq n_M$

CIOÈ $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

VICEVERSA, SUPPONIAMO CHE ESISTA

$$L = \sup_{n \geq 1} a_n$$

. DALLE PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE OSSERVIAMO CHE

1) $a_n \leq L \quad \forall \; n \geq 1$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; n_\varepsilon \; : \quad a_{n_\varepsilon} \geq L - \varepsilon$

DA 1), 2) E DALLA CRESCENZA SI HA:

$$\underbrace{L-\varepsilon} \le a_{n_\varepsilon} \le \underbrace{a_n} \le L < \underbrace{L+\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$\forall\, n \ge n_\varepsilon$ (VISTO CHE $a_n \ge a_{n_\varepsilon}$ $\forall\, n \ge n_\varepsilon$)

ABBIAMO OTTENUTO CHE:

$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_\varepsilon$ CIOÈ

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L. \ \boxtimes$$

OSS: LA MONOTONIA È SUFFICIENTE PER LA REGOLARITÀ, PERÒ NON È NECESSARIA: ESISTONO SUCCESSIONI CONVERGENTI O DIVERGENTI NON MONOTONE.

AD ESEMPIO: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

MA OSCILLA (NON CRESCE NÉ DECRESCE)

$$b_n = n^2 + (-1)^n n$$

È DIVERGENTE A $+\infty$ MA

NON È MONOTONA (CRESCENTE :

ANALISI I

25/10/2022

RECUPERO ONLINE

"IL NUMERO DI NEPERO"

IL NUMERO DI NEPERO

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$$

COME SI SCIOGLIE QUESTA FORMA INDETERMINATA?

SUPPONIAMO $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

E VEDIAMO ALCUNE SUE PROPRIETÀ.

PROP 1 LA SUCCESSIONE a_n È MONOTONA CRESCENTE.

DIM VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-\cancel{1}+\cancel{1}}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

DA CUI:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

PERCHÈ È VERO?

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

DISUG. DI BERNOULLI : $(1+x)^n \geq 1+nx$

APPLICHIAMO CON $x = -\frac{1}{n^2}$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{n} = 1-\frac{1}{n} \quad \text{OK!}$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE a_n È CRESCENTE. $\boxed{\cancel{\ }}$

PROP 2 LA SUCCESSIONE a_n È LIMITATA.

DIM INTRODUCIAMO UNA SECONDA SUCCESSIONE

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

NOTIAMO CHE $\forall n \geq 1$ ABBIAMO

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_n$$

OVVERO $b_n \geq a_n$ $\forall n \geq 1$. DIMOSTRIAMO $b_n \downarrow$
(È DECRESCENTE)

IN PARTICOLARE AVREMO, DALLA MONOTONIA:

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

CALCOLANDO PER $n=1$:

$$a_1 = 2 \leq a_n \leq b_n = 4$$

DOBBIAMO SOLO DIMOSTRARE CHE b_n SIA DECRESCENTE.

$$b_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

BERNOULLI: $x = \frac{1}{n^2-1}$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = 1 + \frac{1}{n}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE CIOÈ $b_n \downarrow$ $\blacksquare$

COROLLARIO: SICCOME a_n È MONOTONA (CRESCENTE E LIMITATA $\Longrightarrow$ a_n È CONVERGENTE OVVERO

$$\exists \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n := e$$

IL NUMERO DI NEPERO, CON $e \simeq 2,71\ldots$

PROP SUPPONIAMO CHE $a_n \longrightarrow \pm\infty$

ALLORA $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

DIM SEGUE DAL CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI

IDEA DI DIMOSTRAZIONE:

AD ESEMPIO SUPPONIAMO CHE $a_n \longrightarrow +\infty$

E OSSERVIAMO CHE

$$[a_n] \le a_n \le [a_n]+1$$

PARTE INTERA (FLOOR) [IL PIÙ GRANDE INTERO CHE NON SUPERA IL NUMERO]

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

$$e$$

$\blacksquare$

ANALISI I

26/10/2022

LIMITI DI FUNZIONI

INTERVALLI

$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

$$[a,b) = \{ \quad '' \quad : a \leq x < b \}$$

$$(a,b] = \{ \quad '' \quad : a < x \leq b \}$$

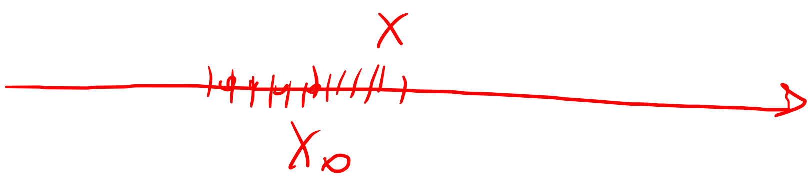
$$[a,b] = \{ \quad '' \quad : a \leq x \leq b \}$$

$$(a,+\infty) = \{ \quad '' \quad x > a \}$$

$$(-\infty, b] = \{ \quad '' \quad : x \leq b \}$$

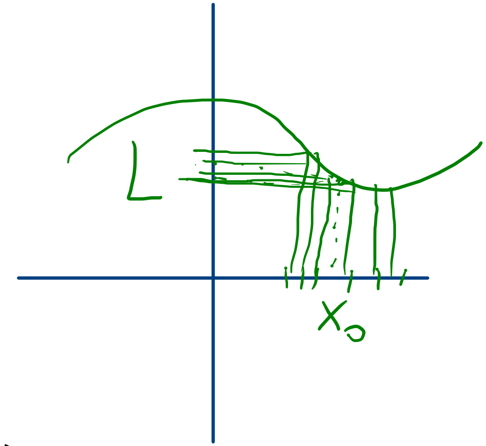
TEOREMA "PONTE"

"UNA FUNZIONE $f(x)$ HA LIMITE ℓ PER $x \to x_0$ SE E SOLO SE $f(a_n) \to \ell$ PER $n \to \infty$ PER OGNI SUCCESSIONE $a_n \to x_0$."



LIMITI DI FUNZIONI

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



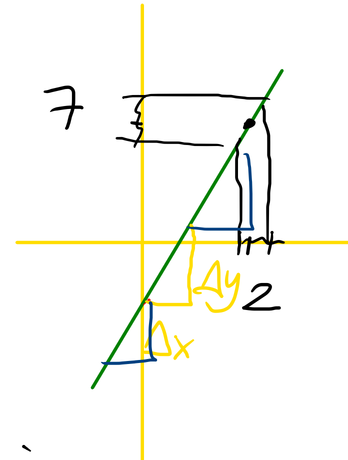
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) :$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

OSS non è necessario che f sia definita in x_0 !!

ESEMPI

1) $\lim_{x \to 2} (5x - 3) = 7$



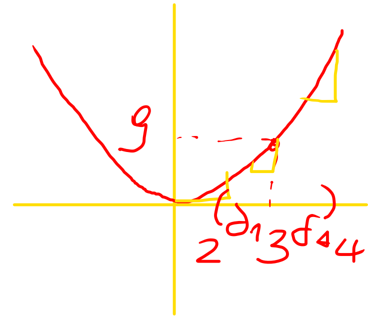
$\iff \forall \varepsilon > 0 \cdot \exists \delta = \delta(\varepsilon, 2) :$

$0 < |x-2| < \delta \implies |f(x) - 7| < \varepsilon$

$|f(x) - 7| = |5x - 3 - 7| = |5x - 10| =$

$= 5|x-2| < \varepsilon \iff |x-2| < \varepsilon/5 = \delta_\varepsilon$

2) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$



$f(x) = x^2$

$|f(x) - L| = |x^2 - 9| =$

$= |(x-3)(x+3)| = |x+3|\,|x-3| \le 7\,|x-3| < \varepsilon$

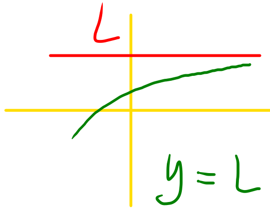
SE ASSUMESSI CHE $|x-3| < 1 = \delta_1 \Rightarrow |x+3| \le 7$

NON APPENA $|x-3| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta_2$

BASTA SCEGLIERE $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, 1\right)$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) \ /$

$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

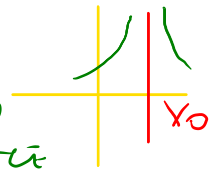


$y = L$ ASINTOTO ORIZZONTALE

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M, x_0) \ /$

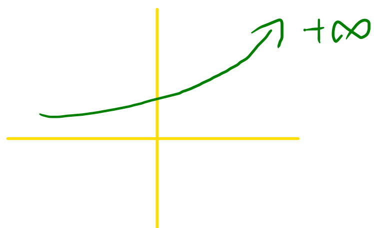
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$x = x_0$ ASINTOTO VERTICALE



4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists N = N(M) \ /$

$x > N \Rightarrow f(x) > M$.



ESEMPI

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3 - \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 3$$

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; M = M(\varepsilon)$:

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} - 3 \right| =$$

$$= \left| \frac{\cancel{3x^2} - 2x - \cancel{3x^2} - 3}{x^2+1} \right| = \frac{2x+3}{x^2+1} \leq$$

$$2x+3 < 3x$$

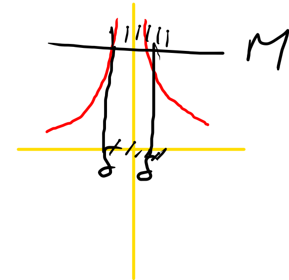
$$x > 3 = M_1$$

$$\leq \frac{3x}{x^2+1} \leq \frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{3}{x} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > \frac{3}{\varepsilon} = M_2$$

BASTA SCEGLIERE $M_\varepsilon = \max(M_1, M_2) = \max\left(3, \frac{3}{\varepsilon}\right)$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

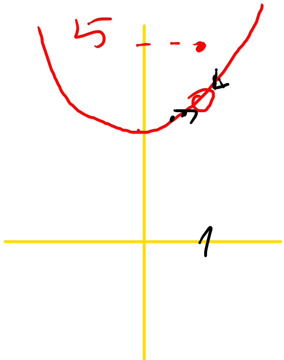


cioè $\forall M > 0 \quad \exists \delta = \delta(M, 0)$:

$f(x) > M$ se $0 < |x| < \delta$

$\frac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$

CONTRO ESEMPI IMPORTANTI



1) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \ ; & x \neq 1 \\ 5 \ ; & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 \neq f(1) = 5$$

2) $f(x) = x - 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ $\qquad x \neq -1$

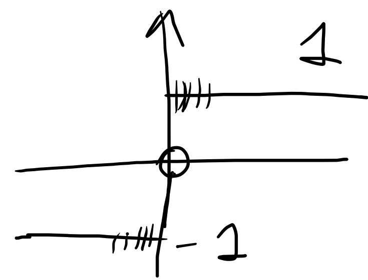
SONO LA STESSA FUNZIONE ??

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0} \qquad \underline{F.I.}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}} = -2$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \nexists$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 ; & x > 0 \\ -1 ; & x < 0 \end{cases}$$



TEOREMA PONTE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{SE E SOLO SE}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L \quad \text{SE} \quad x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$$

($\forall\, x_n$ CHE TENDE A x_0)

OSS UN LIMITE ESISTE SE E SOLO SE ESISTE LUNGO OGNI SUCCESSIONE.

COROLLARIO

SE ESISTONO DUE SUCCESSIONI LUNGO LE QUALI I LIMITI SONO DIVERSI, ALLORA IL LIMITE NON ESISTE.

APPLICAZIONE: DIMOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \nexists$

$f(x) = \frac{|x|}{x}$

$x_n^1 = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n^1|}{x_n^1} =$

$(L=1)$

$= \frac{|1/n|}{1/n} = \frac{\cancel{1/n}}{\cancel{1/n}} = 1 \longrightarrow 1$

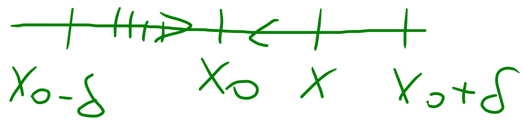
VICEVERSA: $x^2_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow f(x^2_n) =$

$$\frac{|x^2_n|}{x^2_n} = \frac{|-1/n|}{-1/n} = \frac{\cancel{1/n}}{-\cancel{1/n}} = -1 \xrightarrow{n \to \infty} -1$$

AVENDO DUE LIMITI DIVERSI, IL LIMITE NON ESISTE.

LIMITE DESTRO E SINISTRO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}$$

LIMITE DESTRO $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ SE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - L| < \varepsilon$ SE $x_0 < x < x_0 + \delta$

LIMITE SINISTRO $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ SE

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - L| < \varepsilon$ SE $x_0 - \delta < x < x_0$

OSS QUESTA NOTAZIONE È **PESSIMA**!

0^+ È UN NUMERO POSITIVO

0^- " " " NEGATIVO

-1^+ È NEGATIVO MENTRE

1^- È POSITIVO

$(1^+)^2 = 1^+$

$(-1^+)^2 = 1^-$!!

$(-0{,}9)^2 = 0{,}81$

PROP IL LIMITE ESISTE SE E SOLO SE ESISTONO UGUALI LIMITE DESTRO E SINISTRO.

DIM ($\Rightarrow$) <u>OVVIA</u> !

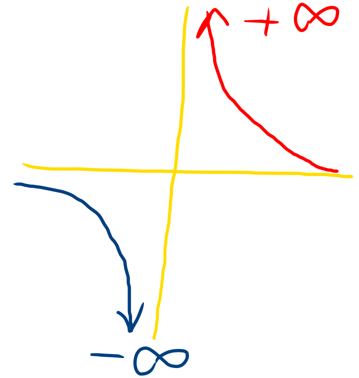
($\Leftarrow$) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x_0 < x < x_0 + \delta$

$\quad " \qquad " \qquad " \qquad \underbrace{\forall x_0 - \delta < x < x_0}_{0 < |x - x_0| < \delta}$. $\blacksquare$

ESEMPIO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

DALLA PROPOSIZIONE IL LIMITE NON ESISTE!

ESERCIZIO: CALCOLARE $\lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{x+1}{x^2-4}$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{2^+ + 1}{(2^+)^2 - 4} = \frac{3}{4^+ - 4} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$(2^+)^2 = 4^+$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{2^- + 1}{(2^-)^2 - 4} = \frac{3}{4^- - 4} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

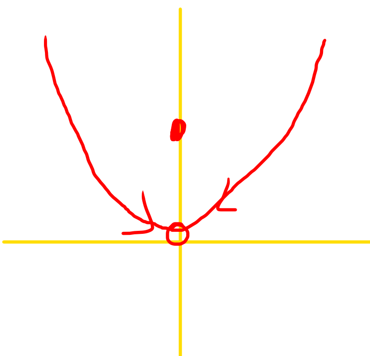
A.V. $x=2$

$$(2^-)^2 = 4^-$$

CONTINUITÀ

DEF f SI DICE CONTINUA IN $x_0 \in \text{Dom} f$

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0$ PERÒ

$f(0) = 1$

NON È CONTINUA

OSS GRAZIE ALLA DEFINIZIONE DI LIMITE ABBIAMO CHE $f(x)$ È CONTINUA IN x_0 SE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) :$$

$$|f(x) - \underset{L}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}}| < \varepsilon \quad \text{SE} \quad |x - x_0| < \delta$$

CIOÈ A "PICCOLE" VARIAZIONI DELLA X CORRISPONDONO PICCOLE VARIAZIONI DELLA $y = f(x)$

DISCONTINUITÀ

TIPI DI DISCONTINUITÀ:

1 ELIMINABILE: $x_0 \notin \mathrm{Dom}\, f$ MA

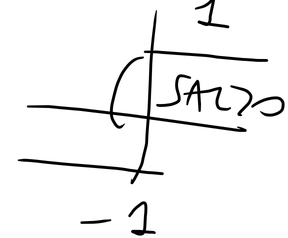
$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = L \Rightarrow$ È POSSIBILE

"ESTENDERE PER CONTINUITÀ" $f(x) := L$

ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $x \neq 1$

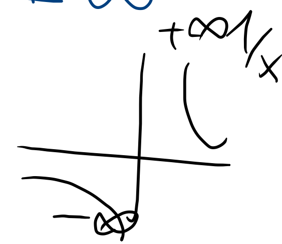
② **SALTO** : LIMITE DX E SX ESISTONO FINITI MA DIVERSI

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$



③ **ESSENZIALE** : UNO DEI DUE LIMITI DX O SX $\nexists$ OPPURE È $\pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \nexists \text{ OPPURE } \pm\infty$$



ANALISI I

2/11/2022

CONTINUITÀ E LIMITI NOTEVOLI

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

SIA $f(x)$ CONTINUA IN x_0 E SUPPONIAMO $f(x_0) > 0$.

ESISTE ALLORA $\delta > 0$: $f(x) > 0$ IN $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

DIM SE $f(x)$ È CONTINUA IN x_0 ALLORA

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{SE} \quad |x - x_0| < \delta$$

IN PARTICOLARE $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

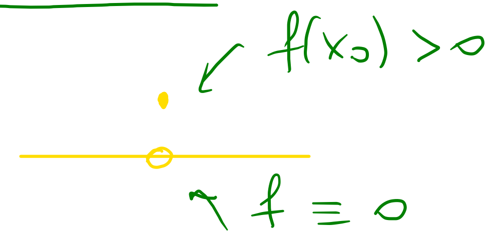
SCELGO $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ PER IPOTESI. ALLORA:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \,. \quad \blacksquare$$

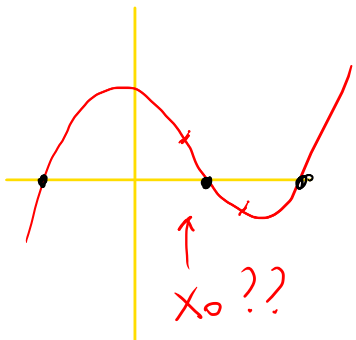
OSS 1) VALE ANCHE NEL CASO CHE $f(x_0) < 0$.

2) NON VALE SE f È <u>DISCONTINUA</u>:



3) NON VALE SE $f(x_0) = 0$:

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI



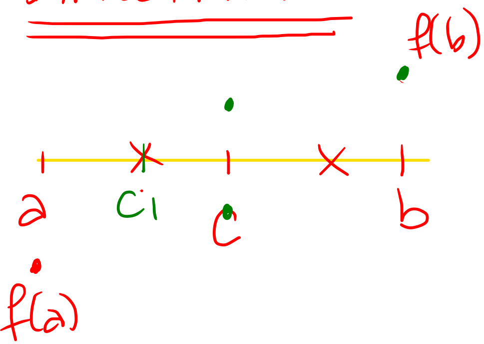
ROOT :

DEF SE $f(x_0) = 0$ SI DICE CHE x_0 È UNO ZERO (O UNA RADICE) PER $f(x)$.

METODO DI BISEZIONE

TEO SIA f CONTINUA IN $[a, b]$. SUPPONIAMO $f(a)f(b) < 0$. ALLORA ESISTE $x_0 \in (a, b)$: $f(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE UTILIZZIAMO IL METODO DI BISEZIONE.



SUPPONIAMO CHE $f(a) < 0$ E CHE $f(b) > 0$.

CONSIDERIAMO $c = \frac{a+b}{2}$

ABBIAMO TRE CASI:

1) $f(c) = 0$ ABBIAMO FINITO: SCELGO $x_0 = c$.
2) $f(c) > 0 \Rightarrow$ SCELGO L'INTERVALLO (a, c)
3) $f(c) < 0 \Rightarrow$ " " (c, b).

SUPPONIAMO PER ESEMPIO CHE $f(c) > 0$,
RIPETO LA STESSA OPERAZIONE NELL'INTERVALLO
(a, c) : CONSIDERO $c_1 = \frac{a+c}{2}$ E
RIPETO LO STESSO RAGIONAMENTO ...
RETTERANDO QUESTA COSTRUZIONE OTTENGO
TRE SUCCESSIONI a_n, c_n, b_n CON LE
SEGUENTI PROPRIETÀ :

1) a_n È <u>NON - DECRESCENTE</u>

2) b_n È <u>NON - CRESCENTE</u>

3) $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ $\forall n \geq 1$

4) $a_n < c_n^* < b_n$ CON $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

$$* \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

DALLE PROPRIETÀ 1) - 4) E LA CONTINUITÀ SEGUE LA TESI DEL TEOREMA :

$a_n \nearrow \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n = a_\infty$

$b_n \searrow \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} b_n = b_\infty$

NOTIAMO CHE: $|b_\infty - a_\infty| = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n)$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)}{2^n} = 0 \Rightarrow a_\infty = b_\infty$

IN PARTICOLARE, $a_n < c_n < b_n$ E

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = a_\infty = b_\infty$

DAI CARABINIERI.

PER SEMPLICITÀ SUPPONIAMO $x_0 := c_\infty$.

DATO CHE $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{<0} \leq 0$ DALLA CONTINUITÀ DI f

E DALLA PERM. DEL SEGNO.

ALLO STESSO MODO $f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{>0} \geq 0$. ALLORA

$0 \leq f(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$. $\boxtimes$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA $f(x)$ CONTINUA IN UN INTERVALLO $[a,b]$ CHIUSO E LIMITATO (COMPATTO)
ALLORA f AMMETTE MASSIMO E MINIMO.
CIOÈ $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ TALI CHE

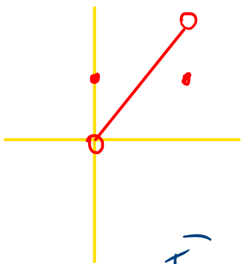
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\ x \in [a,b]$$

SENZA DIMOSTRAZIONE.

OSS IL TEOREMA È "SHARP" (OTTIMALE)

CIOÈ TUTTE LE IPOTESI SONO NECESSARIE

1) POSSO RIMUOVERE LA CONTINUITÀ? NO!



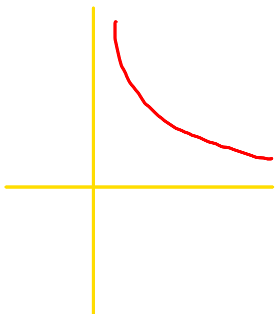
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1/2 & ; \quad x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

È DEFINITA IN $[0,1]$, È CONTINUA IN $(0,1)$ MA NON AMMETTE NÉ MAX NÉ MIN:

$\inf = 0$ MA $f(0) = 1/2$; $\max = 1$ MA $f(1) = 1/2$

2) SE NON È COMPATTO L'INTERVALLO SALTA IL TEOREMA:

$f(x) = 1/x$ PER $x \in (0, +\infty)$



SUP $= +\infty$ NON È ASSUNTO!

INF $= 0$ " "

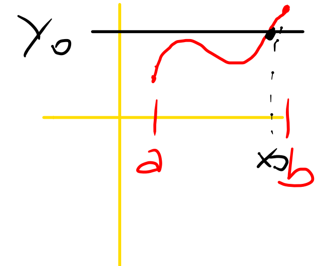
f È CONTINUA MA $(0, +\infty)$ NON È COMPATTO!

3) LA FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

DOVE È CONTINUA? È DISCONTINUA IN TUTTI I PUNTI. PERÒ AMMETTE INFINITI MINIMI DOVE VALE ZERO ED INFINITI MASSIMI DOVE VALE UNO.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI



SIA f CONTINUA IN $[a,b]$. ALLORA f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA IL SUO MASSIMO ED IL SUO MINIMO.

DIM DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO

$x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

$\forall x \in [a,b]$ $\left(\text{CIOE'} \quad f(x_1) = \min_{[a,b]} f \; ; \; f(x_2) = \max_{[a,b]} f \right)$

SUPPONIAMO CHE $f(x_1) < f(x_2)$ (SENNÒ BANALE)

SE SCELGO $y_0 = \text{MIN}$ O $y_0 = \text{MAX}$

HO FINITO PERCHÈ SONO ASSUNTI IN x_1 E x_2.

FISSIAMO y_0 : $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\exists\, x_0 : f(x_0) = y_0$.

CONSIDERO $g(x) := y_0 - f(x)$.

$g(x)$ È CONTINUA PERCHÈ DIFFERENZA DI FUNZIONI CONTINUE. INOLTRE:

$$g(x_1) = y_0 - f(x_1) > 0$$

$$g(x_2) = y_0 - f(x_2) < 0$$

DAL TEOREMA DEGLI ZERI ESISTE $x_0 \in [a,b]$ TALE CHE $g(x_0) = y_0 - f(x_0) = 0$

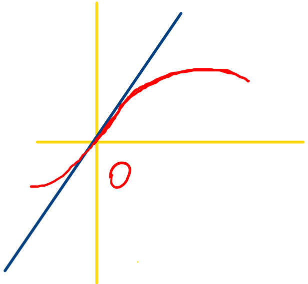
CIOÈ $f(x_0) = y_0$. $\boxtimes$

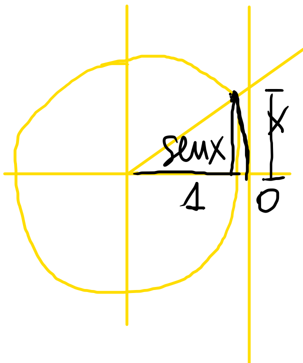
LIMITI NOTEVOLI

PROP LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUA:

SE f È CONTINUA IN x_0 E g È CONTINUA IN $y_0 = f(x_0)$ ALLORA $h(x) = g(f(x))$ È CONTINUA IN x_0.

① $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$





P(cos x, sen x)

$$\operatorname{sen} x \le x \le \tan x \qquad \left(0 < x < \pi/2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \quad 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} = \cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}$$

$$\Rightarrow \cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1$$

$$\cos x \xrightarrow{x \to 0} 1 \xleftarrow{x \to 0} 1$$

② $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

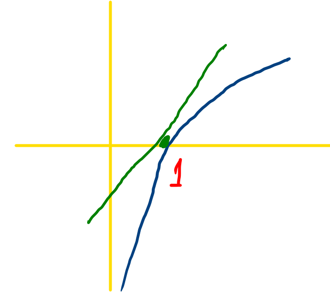
$$\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} : \quad 1^2 \cdot 1/2 = \frac{1}{2}$$

3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$



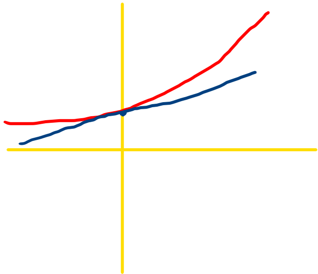
$$\lim_{n\to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad +$$

TEOREMA PONTE $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \log \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e} = \log e = \ln(e) = 1 .$$

④ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$$

$[y = e^x \longrightarrow x = \log y]$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{\log y} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\log(1+z)} = 1 .$$

$z = y - 1$

$y = 1 + z$

5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$$

$$\left[\sqrt{1+x} = e^y \rightarrow y = \log \sqrt{1+x} \right]$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\overset{\substack{1\\ \uparrow}}{e^y - 1}}{e^{2y} - 1} \cdot \frac{2y \rightarrow 1}{y} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

6 CASO GENERALE

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$$

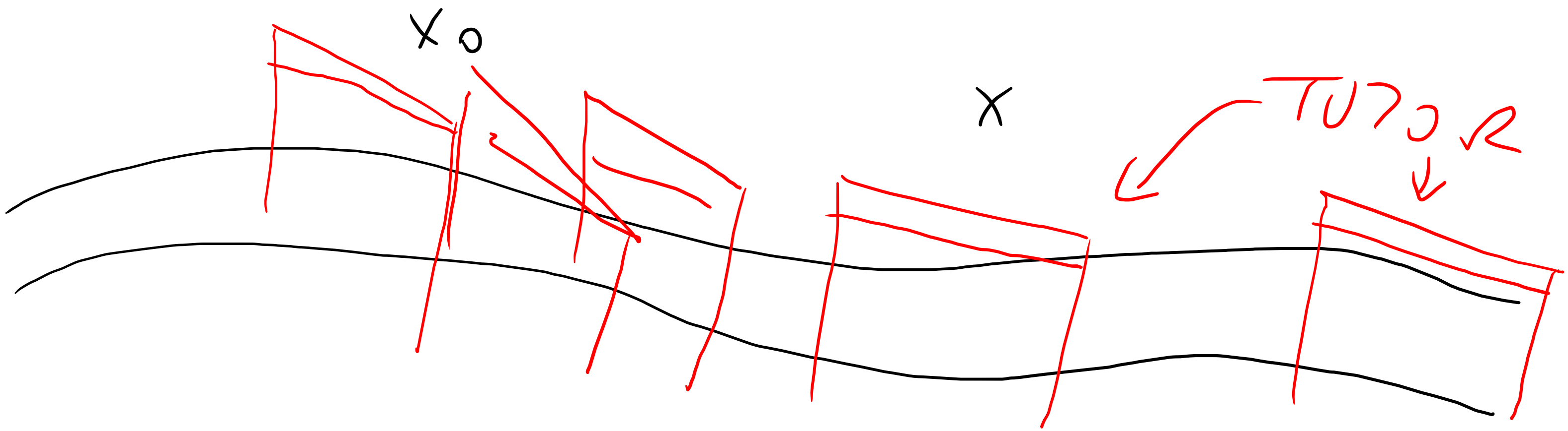
DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO PER CASA

ANALISI I

7/11/2022

DERIVATE

DERIVATA PRIMA

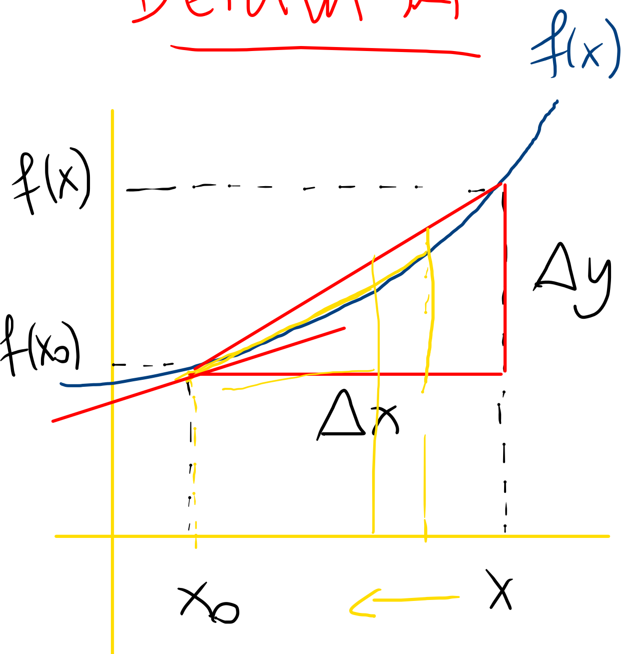


$x \to f(x)$

RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DERIVATA



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

COEFFICIENTE ANGOLARE RETTA SECANTE

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}$$

F.I.

SE TUTTO OK

= COEFF. ANG. RETTA TANGENTE

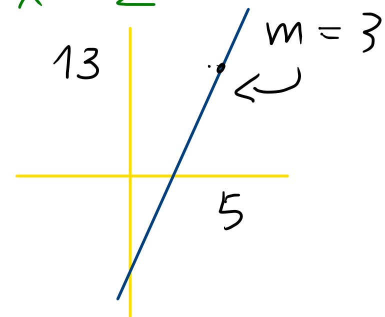
DEF

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ SE ESISTE FINITO}$$

SI DICE "DERIVATA PRIMA" DI f IN x_0 ED È IL COEFF. ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$.

ESEMPI:

① CALCOLARE $f'(x_0)$ CON $f(x) = 3x - 2$
ED $x_0 = 5$.



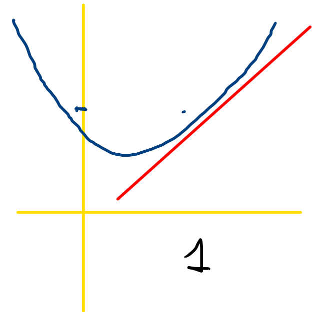
$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(3x-2) - (13)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{3x - 15}{x - 5} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}} = 3.$$

(2) STESSO CON $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ E

$x_0 = 1$.



$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{3} = \begin{matrix} 1 \\ +\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

OSSERVAZIONE: UN ALTRO MODO DI SCRIVERE IL RAPPORTO INCREMENTALE:

SE $x \to x_0 \Rightarrow h = x - x_0 \to$

$x = x_0 + h$

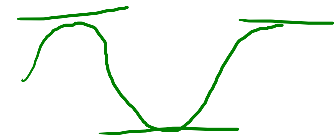
$x = x_0 + h$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(3) STESSO ESERCIZIO CON $f(x) = 3\cos x$

ED $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3\cos(h) - 3}{h} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3 \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h^2}}_{\to -1/2} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} = 0 .$$

LIMITE NOTEVOLE

DERIVABILITÀ

PROP OGNI FUNZIONE DERIVABILE È CONTINUA.

DIM PER IPOTESI ESISTE FINITO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \lim_{x \to x_0} \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow\, 0} = 0 \,. \quad \boxed{/}$$

CIOÈ f È CONTINUA!

È VERO IL VICEVERSA ?!

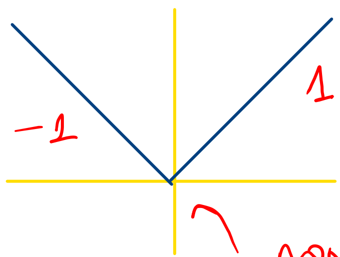
TEOREMA DI AMPERE :

OGNI FUNZIONE CONTINUA È DERIVABILE !

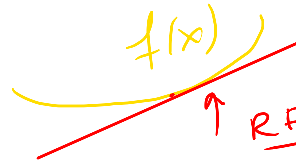
FALSO !

CONTROESEMPIO : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{\pm \cancel{h}}{\cancel{h}} = \pm 1$$



DIFFERENZIABILITÀ



RETTA TANGENTE

f È DERIVABILE (IN x_0) $\iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

f È DIFFERENZIABILE (IN x_0) $\iff$ "$\exists$ UNA APPLICAZIONE LINEARE CHE LA APPROSSIMA BENE"

OVVERO SE $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

EQ RETTA TANGENTE

PROP f È **DERIVABILE** SE E SOLO SE È **DIFFERENZIABILE**.

DIM $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff$

$f'(x_0) \simeq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ PER $x \sim x_0$

CIOÈ $f'(x_0)(x - x_0) \simeq f(x) - f(x_0)$

OVVERO $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. $\blacksquare$

REGOLE DI DERIVAZIONE

SUPPONIAMO CHE f E g SIANO DERIVABILI IN x_0.

ALLORA:

1. $$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x).$$

2. $$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(REGOLA DI LEIBNIZ)

3. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(REGOLA DEL QUOZIENTE)

DIM (1) $\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$

$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} \right) + \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x-x_0} \right)$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$.

(3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \underset{\substack{\downarrow \\ f(x_0)\,(*)}}{f(x)} \underset{\substack{\searrow \\ g'(x_0)}}{\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}} +$$

$$\lim_{x \to x_0} \underset{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}}{g(x_0)} \underset{\substack{\searrow \\ f'(x_0)}}{\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}}$$

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0) \; . \quad \blacksquare$$

(*) PERCHÉ È CONTINUA (DATO CHE È DERIVABILE)

ANALISI I

7/11/2022 (POME)

DERIVATE ELEMENTARI

DERIVATE DELLE F.NI ELEMENTARI

$f(x) = 1 \qquad f'(x) = 0$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

$$(x^3)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3h^2x + 3hx^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3\overset{0}{\cancel{hx}} + \overset{0}{\cancel{h^2}})}{\cancel{h}} = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2 \qquad (x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$$

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}\cancel{h} + \overset{0}{h^{\cancel{2}}(-)} - \cancel{x^n}}{\cancel{h}} = nx^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x \geq 0$

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{h}} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{h}{x}} - 1}{\frac{h}{x}} \right) \frac{\cancel{h}}{\sqrt{x}} =$$

$1/2$

$$\frac{\sqrt{1+y} - 1}{y} \xrightarrow{y \to 0} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x > 0$

$\Rightarrow$ LA REGOLA VALE PER $n \in \mathbb{Q}$

IN REALTÀ VALE $\forall\, n \in \mathbb{R}$.

ESPONENZIALE

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} =$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x$$

$$2^x = (e^{\log 2})^x = e^{x \log 2}$$

$$(2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \qquad \frac{a^y - 1}{y} \to \ln(a)$$

$$= 2^x \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = \qquad \frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1$$

$$= 2^x \lim_{h\to 0} \underbrace{\left(\frac{e^{h\log 2} - 1}{h\log 2}\right)}_{1} (\log 2) \qquad y = h\log 2$$

$$= 2^x \log 2$$

IN GENERALE: $\quad (a^x)' = a^x \log a$.

LOGARITMO

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$x > 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log \underbrace{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}_{e} = \frac{1}{x} .$$

$x \neq 0$

$$\lg(-x) = \dots\dots = \frac{1}{x}$$

$$(\lg|x|)' = \frac{1}{x}$$

TMG

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \Big(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} \Big) + \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{=1} = \cos x$$

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\underline{\cos x}\cosh - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \underline{\cos x}}{h} =$$

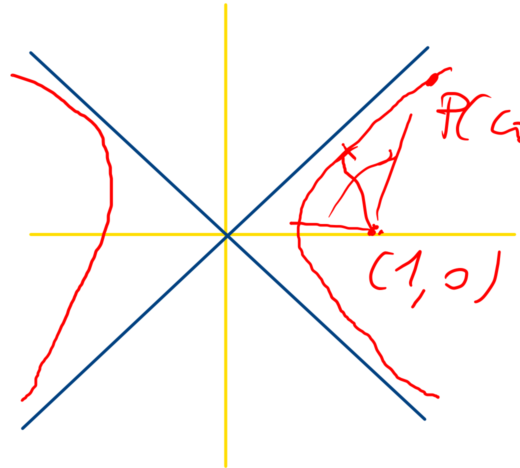
$$= \cos x \left(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\cosh - 1}{h}}_{= 0} \right) - \operatorname{sen} x \left(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{= 1} \right)$$

$$= - \operatorname{sen} x$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\operatorname{senh}(x) := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

$$\left(\operatorname{senh}(x)\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\left(\cosh(x)\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$$

TANGENTE

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' =$$ REGOLA DEL QUOZIENTE

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)'(\cos x) - (\cos x)'(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

ANALISI I

8/11/2022

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

FUNZIONE COMPOSTA

$$g(f(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend right] & f(x) \arrow[r, bend left] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

ESEMPIO:

$$f(x) = x^3 - 4 \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

$$g(f(x)) = g(x^3-4) = \sqrt{x^3-4} \neq$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 - 4 = x^{3/2} - 4$$

TEOREMA (CHAIN RULE)

SIA f DERIVABILE IN x, SIA g DERIVABILE IN $f(x)$. ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA $g(f(x))$ È DERIVABILE IN x E VALE

$$\boxed{\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

DIM SUPPONIAMO $f(x+h) \neq f(x) \quad \forall h \neq 0$ (f NON COSTANTE LOCALMENTE)

$$(g(f(x)))' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

*

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$g'(f(x)) \qquad\qquad f'(x)$$

(*) $\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$

OSSERVIAMO CHE f E g, ESSENDO DERIVABILI, SONO ANCHE CONTINUE: QUINDI SE $h \to 0$ HO CHE $f(x+h) \to f(x)$ DA CUI ANCHE $g(f(x+h)) \longrightarrow g(f(x))$ SE $h \to 0$

CAMBIAMO VARIABILI CHIAMANDO $y_0 = f(x)$, $y = f(x+h) \Rightarrow y \to y_0$ SE $h \to 0$

$\blacksquare$

ESEMPI ED ESERCIZI

(1)

$$\left(\left(x^3-2\right)^2\right)' =$$

$$2\left(x^3-2\right)\cdot\left(3x^2\right)$$

$f'(x)$

$f(x) = x^3-2$

$g(x) = x^2$

$g(f(x)) = \left(x^3-2\right)^2$

$g'(f(x))$

② $\left(\operatorname{sen}^4(x)\right)' = \left((\operatorname{sen} x)^4\right)'$

$= 4(\operatorname{sen} x)^3 \cdot (\cos x) = 4\operatorname{sen}^3 x \cos x$

$\left(\operatorname{sen}(x^4)\right)' = \cos(x^4) \cdot 4x^3$

③ $\left(e^{\tan x}\right)' = e^{\tan x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

DERIVATA DI x^x

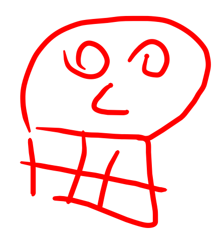
x^x NON È UNA FUNZIONE COMPOSTA !!

TIPICI ERRORI:

1) CONSIDERARE x^x POTENZA

$\Rightarrow \cancel{(x^x)' = x(x^{x-1})}$!!

NO !!



2) CONSIDERARE x^x ESPONENZIALE

$\Rightarrow \cancel{(x^x)' = x^x}$!!

NO !!

COME SI FA?

$$(x^x)' = x^x(1+\lg x)$$

$$x^x = \left(e^{\lg x}\right)^x = e^{x \lg x}$$

NON È COMPOSTA!

SÌ, È COMPOSTA!

$$(x^x)' = \left(e^{x\lg x}\right)' = e^{x\lg x} \cdot (x \lg x)' =$$

$$= e^{x\lg x}\left(1 \cdot \lg x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) = e^{x\lg x}(1+\lg x)$$

$$= x^x(1+\lg x)$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

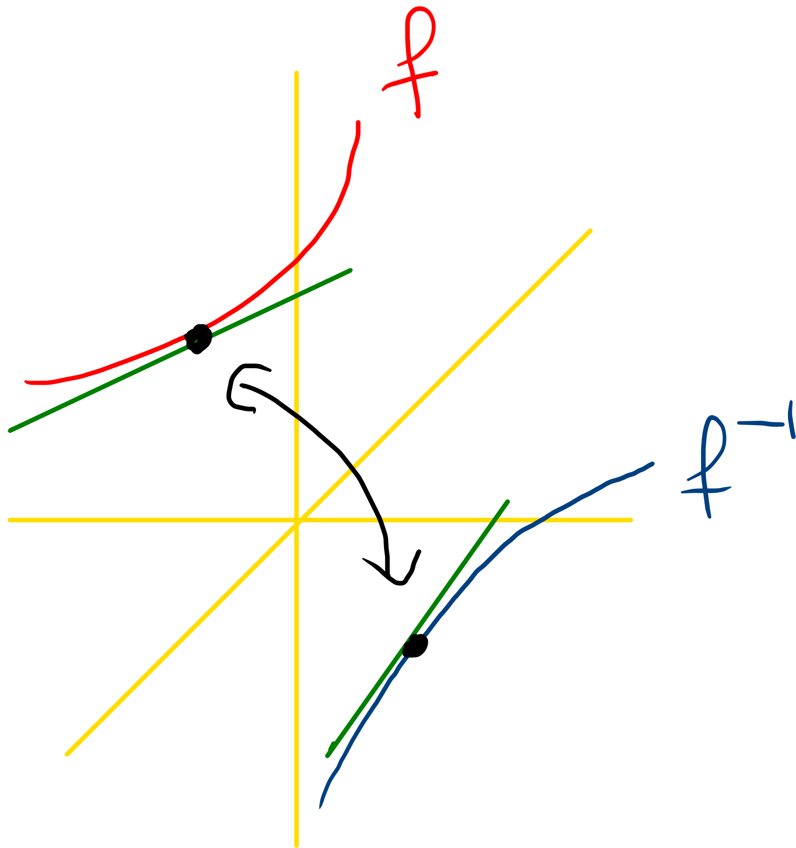
g È LA FUNZIONE INVERSA DI f
SE SUSSISTE :

$$g(f(x)) = x \quad \text{E} \quad f(g(x)) = x$$

SE TALE g ESISTE , f SI DICE
INVERTIBILE E SI PONE $g = f^{-1}$

PROP SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE E INVERTIBILE. ALLORA ANCHE f^{-1} È DERIVABILE E VALE

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



DIM PER IPOTESI ABBIAMO:

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$$

DERIVIAMO QUESTA IDENTITÀ:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (x)' = 1$$

CIOÈ: $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ OVVERO $(y = f(x))$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \boxtimes$$

APPLICAZIONI

DERIVATA DEL LOGARITMO

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

$$\log = \exp^{-1}$$

DERIVATA ARCOTANGENTE

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan)'(\arctan(x))} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \cos^2(\arctan x) = \longrightarrow$$

???

$$\left[\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \Rightarrow \tan^2(t) + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} \right.$$

$$\left. \Rightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} \right]$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} =$$

$$= \frac{1}{1+(\tan(\underbrace{\arctan x}_{= x}))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

<u>EX PER CASA</u>: $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$

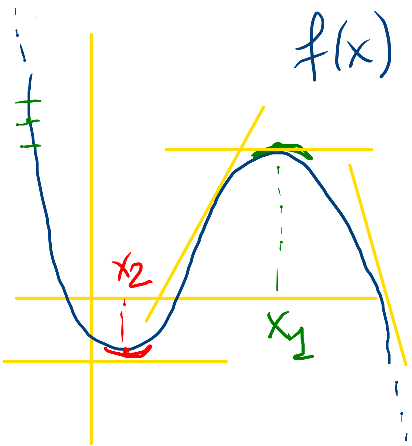
(<u>SUGG</u>: TIPO ARCTAN)

ANALISI I

9/11/2022

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

MASSIMI E MINIMI RELATIVI



(ESTREMI LOCALI)

x_1 è di MASSIMO LOCALE se $\exists\, \delta > 0$:

$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall\, x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$.

x_2 è di MINIMO LOCALE se $\exists\, \delta > 0$:

$f(x_2) \leq f(x) \quad \forall\, x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$

TEOREMA DI FERMAT

SIA f DERIVABILE E SIA x_0 UN ESTREMO LOCALE (MAX O MIN). ALLORA $f'(x_0) = 0$.

DIM SUPPONIAMO CHE x_0 SIA DI MINIMO

CIOÈ $f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$$

$x > x_0$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$ PERCHÉ È DI MINIMO

DALLA PERM. DEL SEGNO

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0^- \\ x < x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0$$

PERCHÉ DI MINIMO

DALLA PERM DEL SEGNO

f È DERIVABILE $\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

MA $f'_+(x_0) \geq 0$ MENTRE $f'_-(x_0) \leq 0$

QUINDI $f'(x_0) = 0$ NECESSARIAMENTE $\boxtimes$

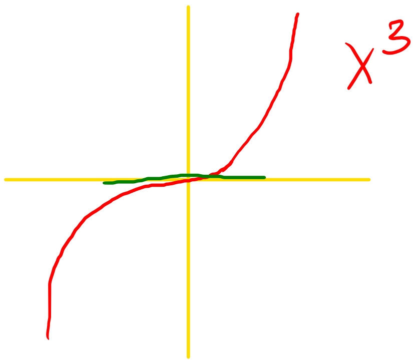
PUNTI CRITICI

DEF x_0 è un punto critico per $f(x)$ se f' non esiste oppure $f'(x_0) = 0$.

OSS Il teorema di Fermat dice che un estremo relativo è anche un punto critico ($f'(x_0) = 0$).

È vero il viceversa?? NO!

CONTROESEMPIO



$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$x_0 = 0$ È UN PUNTO CRITICO!

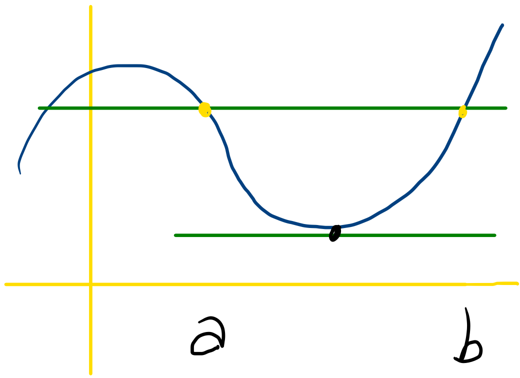
PERÒ $f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$

$f(x) \leq f(0) = 0 \quad \forall x \leq 0$

NON È NÉ DI MINIMO NÉ DI MASSIMO

FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

TEOREMA DI ROLLE



$f(a) = f(b)$

SIA $f(x)$ CONTINUA IN $[a, b]$ E DERIVABILE IN (a, b).

SUPPONIAMO CHE $f(a) = f(b)$

ALLORA ESISTE $c \in (a, b)$: $f'(c) = 0$.

OSS: ESISTE ALMENO UN PUNTO INTERNO IN CUI LA RETTA TANGENTE È PIATTA.

DIM f è continua su $[a,b]$, dal teo di Weierstrass $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a,b]$.

(x_1 minimo assoluto, x_2 massimo assoluto).

Abbiamo due casi:

(1) x_1 e x_2 sono agli estremi, ad esempio $x_1 = a$ e $x_2 = b$.

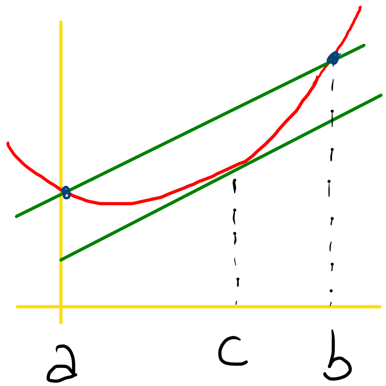
Per ipotesi $f(a) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)$

però $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) \equiv f(a)$ è costante!

MA ALLORA $f'(x) \equiv 0$, QUINDI BASTA SCEGLIERE $c \in (a,b)$ QUALSIASI.

② ALMENO UNO TRA x_1 O $x_2 \neq a, b$.
ALLORA x_1 O $x_2 \in (a,b)$.
DAL TEOREMA DI FERMAT OTTENGO CHE $f'(x_1) = 0$ OPPURE $f'(x_2) = 0$
BASTA SCEGLIERE $c = x_1$ O x_2. $\boxtimes$

TEOREMA DI LAGRANGE



SIA f CONTINUA IN $[a, b]$

E DERIVABILE IN (a, b).

ALLORA ESISTE $c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

OSS LA RETTA TANGENTE IN c È PARALLELA

ALLA RETTA SECANTE PER $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$.

DIM CONSIDERIAMO

$$g(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

OSSERVIAMO CHE $g(x)$ È CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b) PERCHÈ DIFFERENZA DI FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI.

$$g(a) = f(a) - \left[f(a) + \underset{0}{\cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)}}\right]$$

$$= 0$$

$$g(b) = \cancel{f(b)} - \left[\cancel{f(a)} + \cancel{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}} \cancel{(b-a)} \right]$$

$$= 0$$

DAL TEOREMA DI ROLLE OTTENGO $\exists$

$c \in (a,b)$ TALE CHE $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

CIOÈ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. $\blacksquare$

COMMENTI A LAGRANGE

1) SI PUÒ ANCHE DEDURRE ROLLE DA LAGRANGE: SE PER IPOTESI AGGIUNTIVA $f(a) = f(b)$ ALLORA

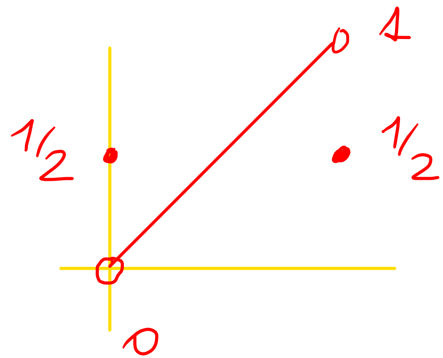
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

2) LAGRANGE È OTTIMALE !!

(A) NON SI PUÒ RIMUOVERE L'IPOTESI DI ESSERE CONTINUA IN $[a,b]$,

AD ESEMPIO RICHIEDERE SOLO CONTINUA IN (a,b):

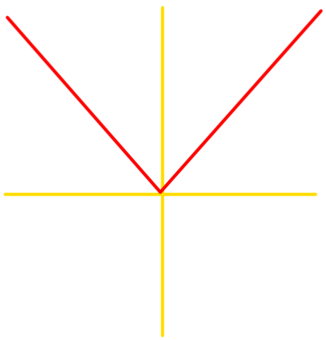
$$f(x) = \begin{cases} 1/2 \; ; & x=0 \vee x=1 \\ x \; ; & 0<x<1 \end{cases}$$



CONTINUA SU $(0,1)$, DERIVABILE SU $(0,1)$,

$f(0) = f(1) = 1/2$ MA $f'(x) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in (0,1)$

(B) NON SI PUÒ TOGLIERE LA DERIVABILITÀ:



$$f(x) = |x| \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

CONTINUA SU $[-1, 1]$

DERIVABILE $\forall\, x \neq 0$

INOLTRE $f(1) = f(-1) = 1$

PERÒ $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \neq 0$.

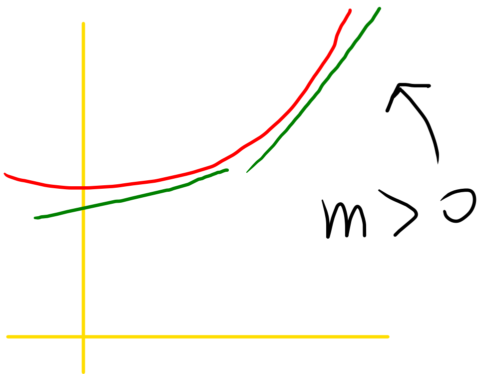
(C) NEL TEOREMA DI ROLLE È NECESSARIO CHE $f(a) = f(b)$,

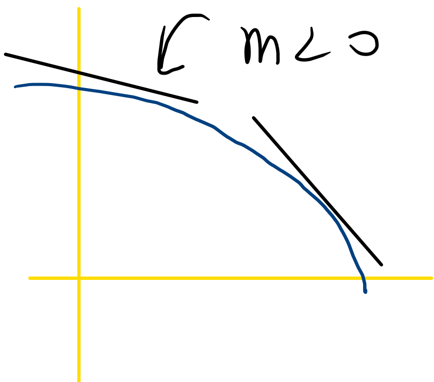
INFATTI $f(x) = x$ SU $[0, 1]$

VERIFICA TUTTO TRANNE $f(0) = f(1)$

MA $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.

CRITERIO DI MONOTONIA





SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b).

① $f'(x) \geq 0$ SE E SOLO SE f È CRESCENTE IN $[a,b]$

② $f'(x) \leq 0$ SE E SOLO SE f È <u>DECRESCENTE</u> IN $[a,b]$

DIM PER DIMOSTRARE 1 VERIFICHIAMO LA DOPPIA IMPLICAZIONE.

($\Rightarrow$) DAL TEOREMA DI LAGRANGE $\forall$ $x_1 < x_2 \in [a, b]$ OTTENGO $c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ CIOÈ f È CRESCENTE.

($\Leftarrow$) SE $h>0$, DALLA CRESCENZA DI $f(x)$ OTTENGO CHE

$f(x+h) \geq f(x)$ CIOÈ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

ALLORA ANCHE $f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

DALLA PERMANENZA DEL SEGNO.

SE $h<0 \Rightarrow f(x+h) \leq f(x) \Rightarrow$ OK. $\boxtimes$

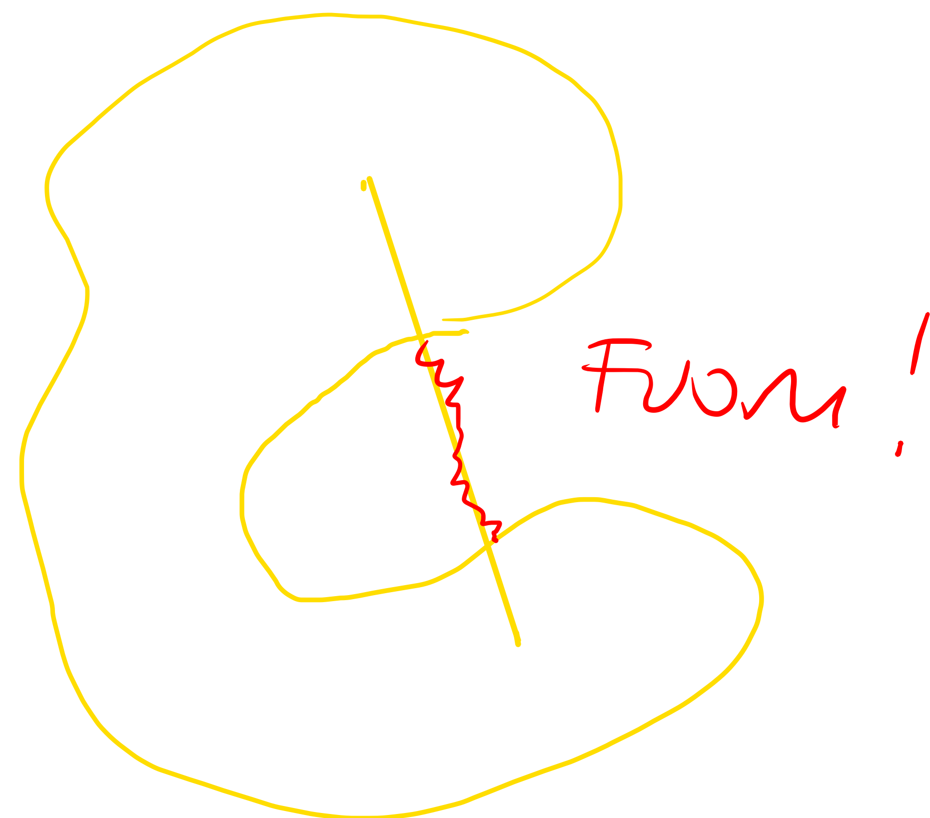
ANALISI I

14/11/2022

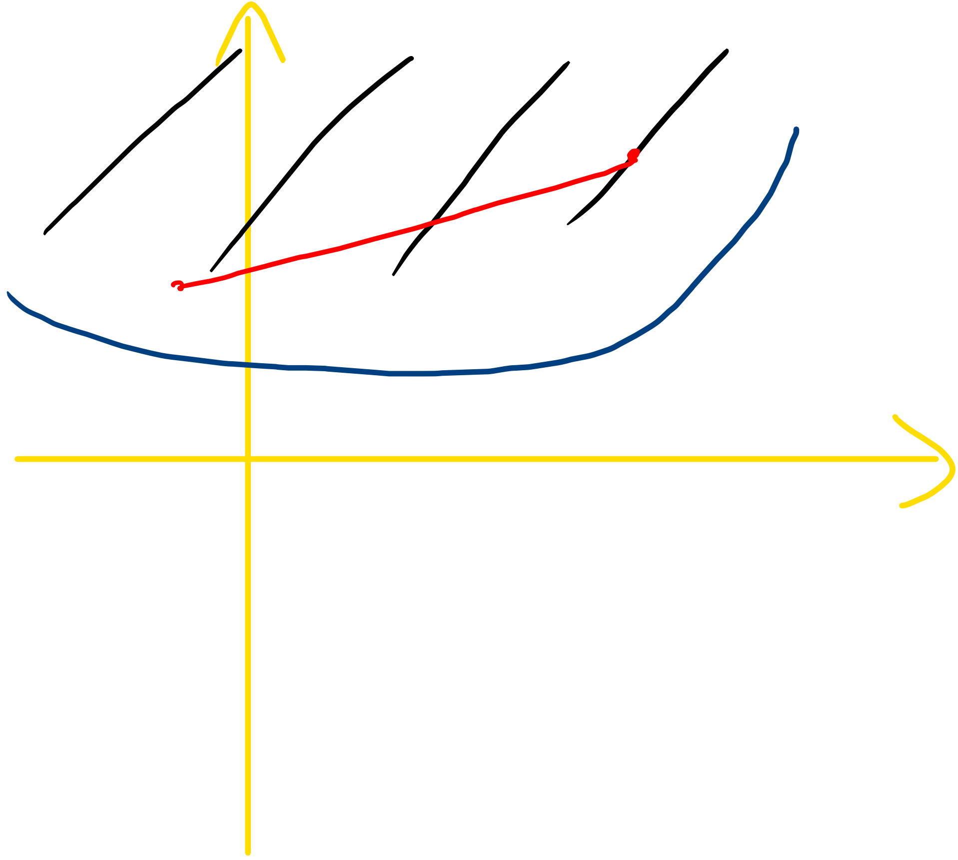
DERIVATE SUCCESSIVE

CONVESSITÀ

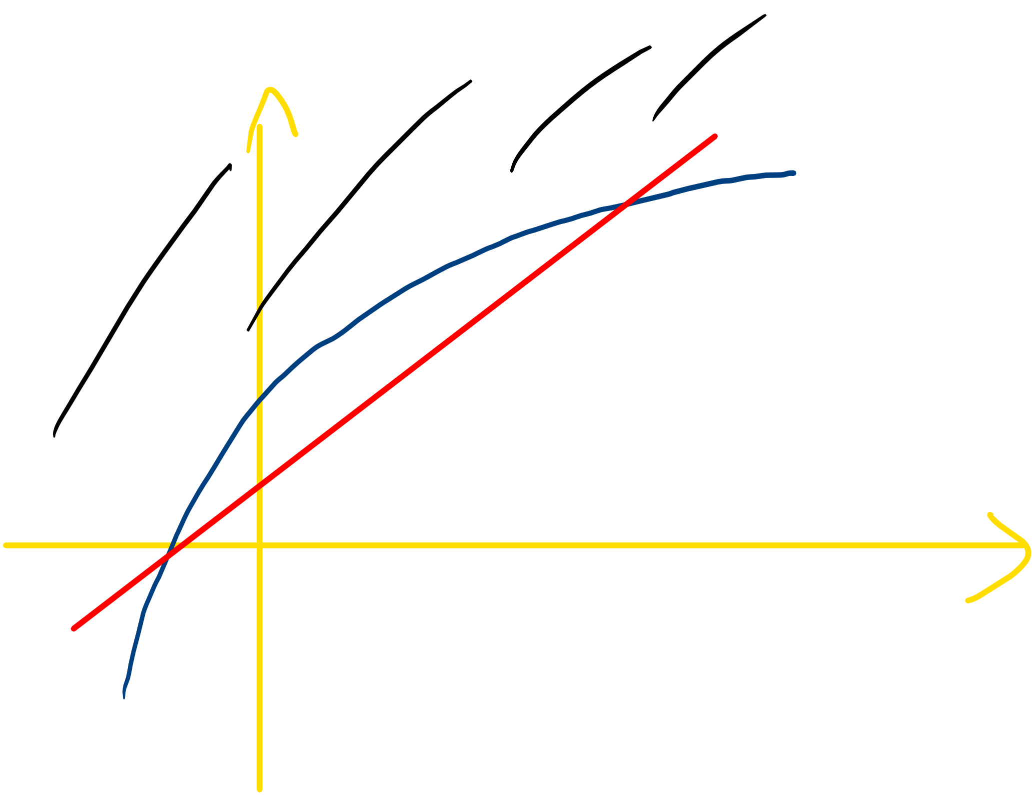
CONVESSO



CONCAVO

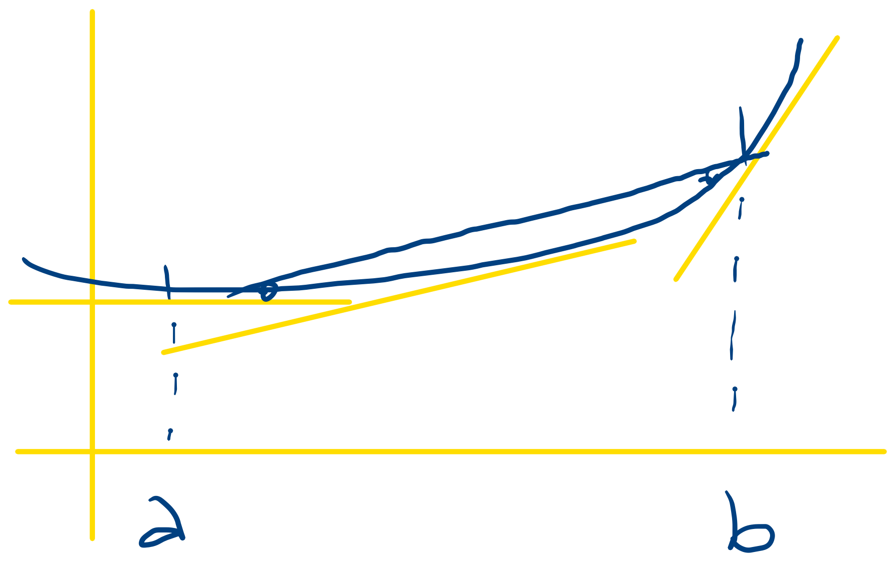


<u>CONVESSA</u>



<u>CONCAVA</u>

FUNZIONI CONVESSE

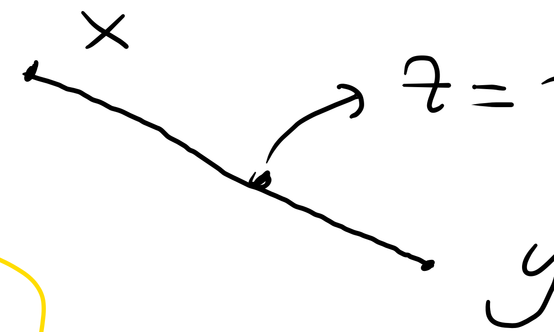


f È <u>CONVESSA</u> IN (a, b) SE L'INSIEME DI SOPRAVVELLO

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b ; y > f(x)\}$ È <u>CONVESSO</u>

OPPURE SE IL GRAFICO DI f GIACE AL DI SOPRA DELLA RETTA TANGENTE.

ANALITICAMENTE:



$z = tx + (1-t)y$

$0 \le t \le 1$

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

OSS NECESSITÀ DI $f \in C^1((a,b))$.

SE f NON È C^1 ?? BASTA CHE f SIA SEMPRE SOTTO LA RETTA SECANTE:

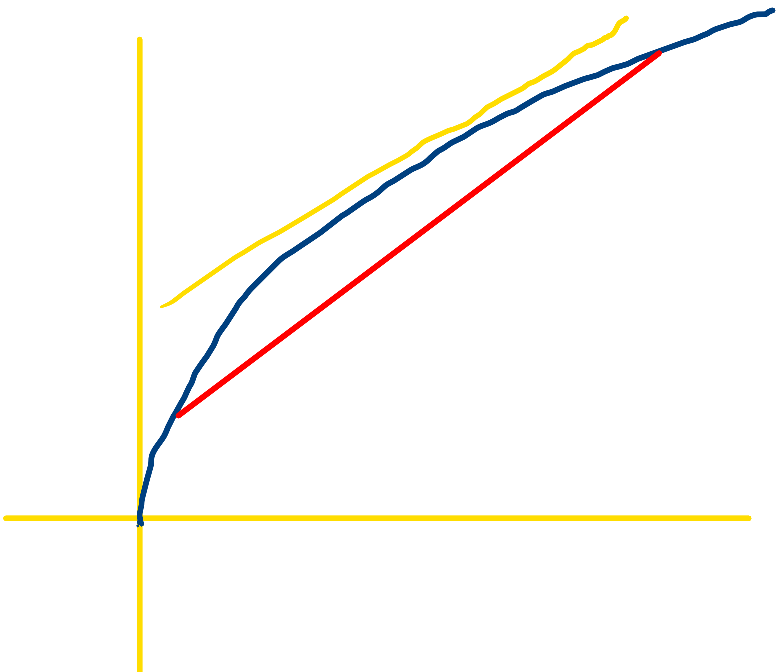
$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

$\forall x, y \in (a,b) \quad \forall t \in [0,1]$.

ALLO STESSO MODO:

f è <u>CONCAVA</u> SE

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



VALE LA DISUGUAGLIANZA OPPOSTA RISPETTO ALLE RETTE SECANTI

DERIVATE SUCCESSIVE

DEF Si chiama "derivata seconda" di f in x_0 (e si indica con $f''(x_0)$) la derivata prima di $f'(x_0)$.

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

(qualora f' sia derivabile).

OSS DERIVABILE $\Rightarrow$ CONTINUA

f' DERIVABILE $\Rightarrow$ f'' ESISTE

f'' ESISTE (CIOÈ f' DERIVABILE) $\Rightarrow f' \in C$??

NON È VERO! ESISTONO FUNZIONI DERIVABILI CHE NON HANNO DERIVATA CONTINUA!! ALLO STESSO MODO ESISTONO FUNZIONI DERIVABILI MA NON C^1

CONSIDERIAMO:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

f È CONTINUA:

$$0 = f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{\text{INFINITESIMA}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{LIMITATA}} = 0$$

OK È CONTINUA!

f È <u>DERIVABILE</u> IN $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{\cancel{h}} = 0$$

È DERIVABILE CON $f'(0) = 0$!

f non è C^1 in $x=0$ ovvero

f' non è continua in $x=0$?

$$f'(x) = \left(x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) =$$

$$= \overset{\to 0}{2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} - \overset{\to \nexists}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{\nexists} \nexists$$

CRITERIO DI CONVESSITÀ / CONCAVITÀ

SIA f DERIVABILE IN $[a, b]$ E DERIVABILE DUE VOLTE IN (a, b).

LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI:

1. f È CONVESSA IN $[a, b]$
2. f' È CRESCENTE IN $[a, b]$ ($f' \nearrow$)
3. f'' È NON-NEGATIVA IN (a, b). ($f'' \geq 0$)

ALLO STESSO MODO:

1. f È <u>CONCAVA</u> IN $[a, b]$
2. f' È <u>DECRESCENTE</u> IN $[a, b]$ ($f' \searrow$)
3. f'' È <u>NON-POSITIVA</u> IN (a, b) ($f'' \leq 0$)

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: NEIN!

SPOILER: CRITERIO DEL SECONDO ORDINE

SUPPONIAMO CHE $f \in C^2$.

CONVESSA

- SE x_0 È UN PUNTO DI MINIMO ALLORA $f'(x_0) = 0$ E $f''(x_0) \geq 0$

- SE $f'(x_0) = 0$ E $f''(x_0) > 0$ ALLORA x_0 È UN MINIMO.

OVVIAMENTE:

- SE x_0 È DI MASSIMO ALLORA

  $f'(x_0) = 0$ E $f''(x_0) \le 0$.

- SE $f'(x_0) = 0$ E $f''(x_0) < 0$

  ALLORA x_0 È DI MASSIMO.

QUESTE CONDIZIONI SONO NECESSARIE MA NON SUFFICIENTI.

CONTROESEMPI

CONSIDERO $f(x) = x^4$:

- $f(0) = 0 \le x^4 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $x_0 = 0$ È **MINIMO**.

- $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$

  (NON È **NECESSARIO** $f''(0) > 0$ PER AVERE UN MINIMO).

SE PRENDO $f(x) = -x^4$ STESSA COSA MA MASSIMO.

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

SIANO f E g CONTINUE E DERIVABILI IN UN INTORNO DI x_0.

SUPPONIAMO CHE $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ IN $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

SUPPONIAMO INOLTRE CHE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}. \quad \Longrightarrow$$

ALLORA, SE ESISTE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ,$$

VALE ANCHE CHE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

OSS VALE ANCHE SE $x_0 = \pm \infty$

VALE ANCHE SE INVECE DI $\frac{0}{0}$ HO $\frac{\infty}{\infty}$

DIMOSTRAZIONE (CASO $f, g \in C^1$)

VISTO CHE $f, g \in C^1$ E $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

ALLORA $f(x_0) = 0$ E $g(x_0) = 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \; \blacksquare$$

COMMENTI A L'HOPITAL

1) ATTENZIONE: VA USATO BENE!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0$$ ← NON È $\frac{0}{0}$!!

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$$

L'HOPITAL NON SI APPLICA!

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$(H) \quad \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} =$$

$$= \cos(0) = 1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

ANALISI I

14/11/2022 (POMERIGGIO)

STUDIO DI FUNZIONE COMPLETO

STUDIO DI FUNZIONE COMPLETO

$$y = f(x) = x e^{1/x}$$

DOMINIO, LIMITI, ASINTOTI, DERIVATA PRIMA, MONOTONIA, DER. SECONDA, CONVESSITÀ.

DOMINIO: $x \neq 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

LIMITI :

$$\lim_{x \to \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} = (\pm \infty) e^{\frac{1}{\pm\infty}} = \pm \infty$$

NON CI SONO ASINTOTI ORIZZONTALI

FORSE ASINTOTO OBLIQUO : $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x} e^{1/x}}{\cancel{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} x e^{1/x} - x =$$

$$= \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x \to -\infty} \overset{\pm\infty}{x} \, \overset{0}{\left(e^{1/x} - 1\right)}$$

$$\left[\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \, , \quad t = \frac{1}{x} \right.$$

$$\left. \Rightarrow \quad e^{1/x} - 1 \cong \frac{1}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \cancel{x} \left(\frac{1}{\cancel{x}} \right) = 1 = q \qquad [y \to -\infty]$$

ASINTOTO OBLIQUO: $y = x + 1$

ALTERNATIVAMENTE: $e^t \simeq 1+t \quad \left(t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0\right)$

$$\Rightarrow \quad x e^{1/x} \simeq x\left(1+\frac{1}{x}\right) = x+1$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}\,\underbrace{e^{1/x}} = 0\, e^{\frac{1}{0^+}} = 0\, e^{+\infty} = 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} \underset{\substack{y=\frac{1}{x}\\ y\to+\infty}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

ORDINE DI INFINITO

OPPURE: $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{1} = +\infty$

<u>ASINTOTO</u> <u>VERTICALE</u> $x = 0^+$

$$\lim_{x \to 0^-} x e^{1/x} = 0 e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

NO A.V.

(DISC. ELIMINABILE DA SX)

DERIVATA PRIMA

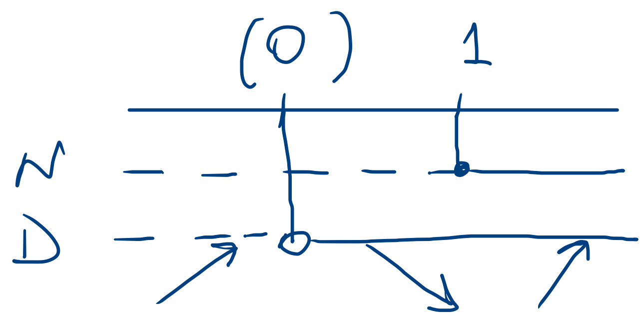
$$f'(x) = \left(xe^{1/x}\right)' = e^{1/x} + \cancel{x}e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \cancel{e^{1/x}}\left(\frac{x-1}{x}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0$$

$N: \; x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$D: \; x > 0 \rightarrow x > 0$



$$\text{MIN}(1, f(1)) =$$

$$= \text{MIN}(1, e)$$

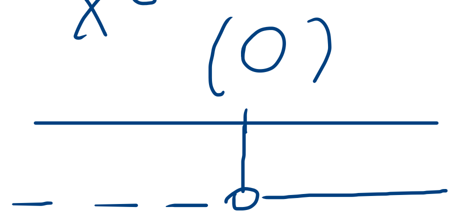
DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \left(e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-1 + \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

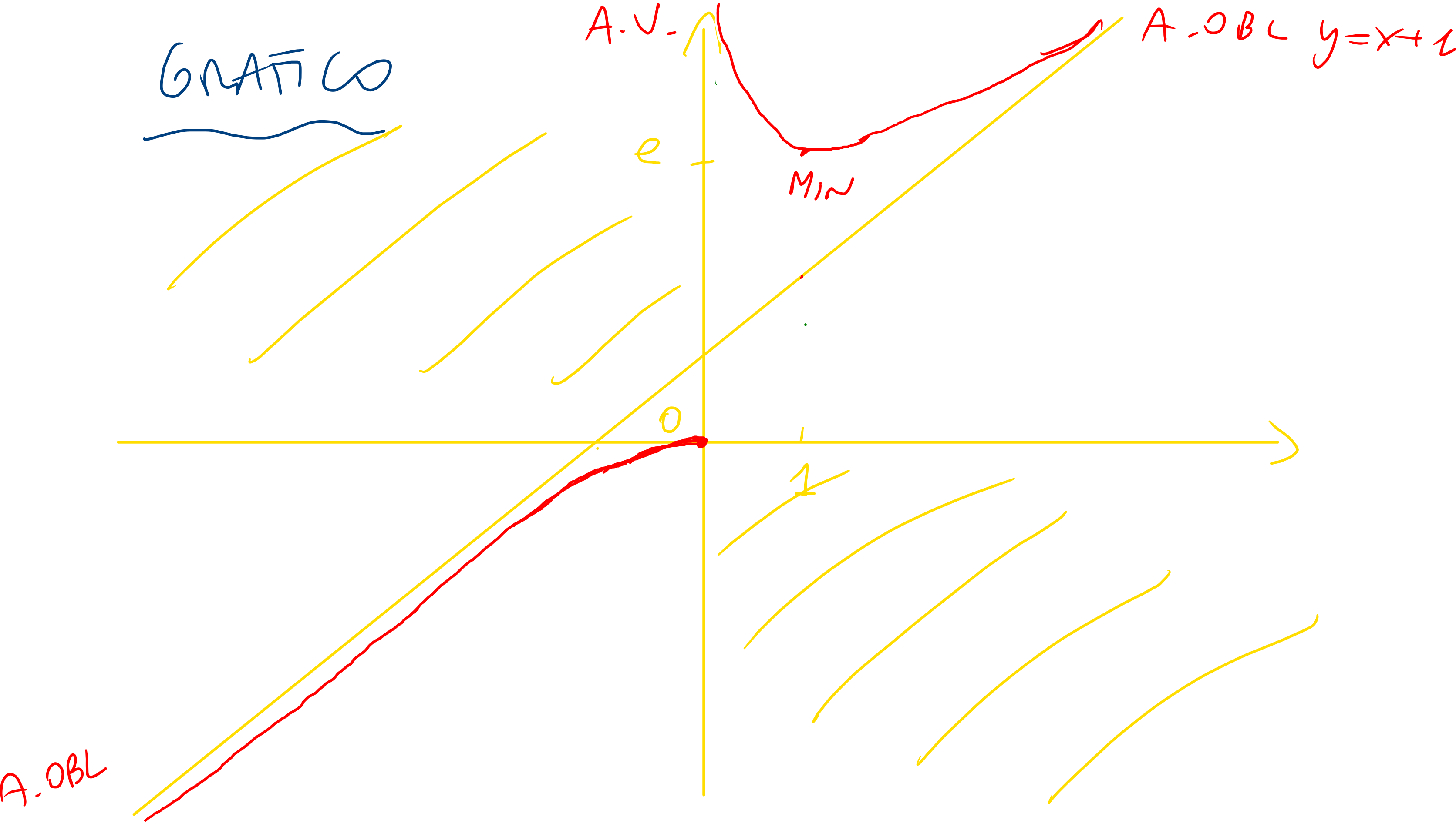
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{1}{x} - \cancel{1} + \cancel{1}\right] = \frac{e^{1/x}}{x^3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$



CONCAVA ∩ ∪ CONVESSA

GRAFICO



ANALISI I

21/11/2022

FORMULA DI TAYLOR

FORMULA DI TAYLOR

f è DIFFERENZIABILE in x_0 SE

RESTO O ERRORE

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$$

CON

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{(x - x_0)} = 0 .$$

CIOÈ f È APPROSSIMABILE ALL'ORDINE 1 CON LA "FORMULA DI TAYLOR"

DEF DIREMO CHE $g(x) = o(f(x))$ PER

$x \to x_0$ SE SUCCEDE CHE

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0}$$

O-PICCOLO

ESEMPI $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$1 - \cos(x) = o(x)$ PER $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(\sqrt{x}\right)}_{\to 0} = 0$$

$$e^x - 1 = o\left(\sqrt{x}\right) \quad \text{ptn } x \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$x = o\left(e^x\right) \quad \text{ptn } x \to +\infty .$$

<u>TEOREMA</u> SIA f DI CLASSE $C^n(\{x_0\})$.
ALLORA ESISTE UN POLINOMIO DI ORDINE n (<u>POLINOMIO DI TAYLOR</u>) CHE LA APPROSSIMA LOCALMENTE OVVERO:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

DOVE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

CIOÈ $R_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$

(RESTO (NELLA FORMA) DI PEANO)

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

POLINOMIO DI TAYLOR

SE $x_0 = 0$ SI CHIAMA "DI MCLAURIN".

DIMOSTRAZIONE PER SEMPLICITÀ $n = 2$

VOGLIO QUINDI DIMOSTRARE CHE

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x, x_0)$$

CON
$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} = 0$$

OVVERO:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} = 0$$

INFATTI $\longrightarrow$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\overset{\to f(x_0)}{f(x)} - f(x_0) - f'(x_0)\overset{\to 0}{(x - x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2}\overset{\to 0}{(x-x_0)^2}}{(x-x_0)^2} =$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\overset{\to f'(x_0)}{f'(x)} - 0 - f'(x_0) - f''(x_0)\overset{\to 0}{(x-x_0)}}{2(x-x_0)}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 0 - f''(x_0)}{2} = 0$$

CASO GENERALE: DIMOSTRIAMOLO PER INDUZIONE SU n CIOÈ VERO PER n = 2 (APPENA DIMOSTRATO), SUPPONIAMOLO VERO PER n - 1 E VEDIAMO SE È VERO PER n:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overset{C^n \ni}{f(x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \overset{\in C^n}{}}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0}$$

TAYLOR DI ORDINE (n-1) PER f'

DA L'HOPITAL :

$$\lim_{x\to x_0}\Big[f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$- \frac{f^{(4)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 - \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\Big]$$

$$\cdot \frac{1}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0 \qquad (f')^{(k)} = f^{(k+1)}$$

PER IPOTESI INDUTTIVA. $\boxtimes$

APPLICATION

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$(H) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$(H) \quad \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cancel{x} + o(x)) - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ???$$

NON BASTA !!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\Downarrow$$

TENDE A ZERO

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 + o(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\log(1+x) = x + x \cdot o(1)$$

$$= x + o(x)$$

SERVIRÀ ORDINE 2 OVVIO:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

SOSTITUISCO ED OTTENGO:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

ANALISI I

21 / 11 / 2022

SVILUPPI DI TAYLOR

SVILUPPI DI TAYLOR NOTI

1) $f(x) = e^x$ $\qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ $\qquad f''(0) = 1$

$$e^x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

2) $f(x) = \log(1+x)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad \dfrac{f''(0)}{2} = -1/2$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad \dfrac{f'''(0)}{6} = 1/3$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad \dfrac{f^{(4)}(0)}{24} = -\dfrac{1}{4}$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$$

3) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$\frac{f''(0)}{2} = 0$

$\frac{f'''(0)}{6} = -\frac{1}{6}$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120} x^5 + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

4) $f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $\frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\frac{f'''(0)}{6} = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

5) $f(x) = (1+x)^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad \dfrac{f''(0)}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(-\frac{\cancel{2}}{3}\right)\frac{1}{\cancel{2}} x^2 + o(x^2)$$

$\alpha = 1/3$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

ESEMPI

$$(x-2)^2+1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3\left(\sqrt{x^2-4x+5}-1\right)}{(x-2)\operatorname{sen}(x-2)} =$$

$$y = x-2$$

$$x = y+2$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{3\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)}{y\operatorname{sen}(y)} =$$

$$\operatorname{sen} y = y + o(y)$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z) \;;\; z = y^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - \cancel{1}\right)}{y\left(y + o(y)\right)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3/2\, y^2 + o(y^2)}{y^2 + o(y^2)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{y^2}\left(3/2 + o(\cancel{1})\right)}{\cancel{y^2}\left(1 + o(\cancel{1})\right)} = \frac{3}{2} .$$

ANALISI I

23/11/2022

APPLICAZIONI DI TAYLOR

CONDIZIONI DEL SECONDO ORDINE PER MAX | MIN

SIA $f \in C^2(x_0-\delta, x_0+\delta)$. ALLORA SE

1) $f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ È MINIMO.

2) $f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ È MASSIMO.

VICEVERSA SE

3) x_0 È MINIMO $\Rightarrow f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)\geq 0$.

4) x_0 È MASSIMO $\Rightarrow f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)\leq 0$.

DIMOSTRAZIONE $f \in C^2$, USIAMO TAYLOR ALL'ORDINE DUE CIOÈ:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

DIMOSTRIAMO LA 1): PER IPOTESI $f'(x_0) = 0$ E $f''(x_0) > 0$ OTTENIAMO

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

???

OSSERVIAMO CHE: $\lim_{x \to x_0} \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} = 0$

QUINDI ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

$$\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \geq -\frac{f''(x_0)}{4} \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

MA ALLORA:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) =$$

$$= (x-x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \right] \geq$$

$$\geq (x-x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{4} \right] =$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} \underbrace{\frac{f''(x_0)}{4}}_{> 0} \geq 0 \quad \forall\, x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

CIOÈ $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

$\Rightarrow$ x_0 È DI MINIMO LOCALE.

LA DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ 2) È ANALOGA.

DIMOSTRIAMO LA 3) : SUPPONIAMO CHE

x_0 SIA UN PUNTO DI MINIMO ($f(x) \geq f(x_0)$ IN $(x_0-\delta, x_0+\delta)$)

PER ASSURDO SUPPONIAMO $f''(x_0) < 0$. DA FERMAT:

$$0 \leq f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) =$$

$$= (x-x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \underbrace{\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}}_{\to\, o(1)} \right] \leq$$

$$\leq \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{ASSURDO!}$$

AVENDO SUPPOSTO CHE δ È ABB. PICCOLO DA AVERE

$$\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \leq \frac{f''(x_0)}{2} \quad \forall\, x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$$

QUINDI NECESSARIAMENTE $f''(x_0) \geq 0$.

OVVIAMENTE LA 4) SI DIMOSTRA

ALLO STESSO MODO. $\boxtimes$

LIMITI CON TAYLOR

1) $$\lim_{x \to -1} \frac{\tan^2(x+1)}{1+x-\log(x+2)} = \left[\begin{array}{l} y = x+1 \\ \text{SE } x \to -1 \\ \text{ALLORA } y \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\tan^2(y)}{y - \lg(1+y)}$$

$$\tan^2(y) = \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{\cos^2(y)} = \operatorname{sen}^2(y)\,(1 + o(1))$$

$$\operatorname{sen}^2(y) = (\operatorname{sen}(y))^2 = (y + o(y))^2 =$$

$$= y^2 + (o(y))^2 + 2y\, o(y) =$$

$$= y^2 + o(y^2) + o(y^2) = y^2 + o(y^2).$$

$$y - \log(1+y) = \cancel{y} - \left(\cancel{y} - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) =$$

$$= \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{y^2 + o(y^2)}{y^2/2 + o(y^2)} = \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{y^2}(1 + o(1))}{\cancel{y^2}(1/2 + o(1))} = 2.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x+x^2}-\operatorname{sen}x-\cos x}{\log(1+x)+\log(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sqrt{(x+1)^2}}-\operatorname{sen}x-\cos x}{\log(1-x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-\operatorname{sen}x-\cos x}{\log(1-x^2)}$$

$$\frac{o(x^3)}{\cancel{x^2}} = o(x) \to 0$$

$N:\ x+1-\operatorname{sen}x-\cos x = \cancel{x}+\cancel{1}-\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)$

$-\left(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+o(x^3) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$

D: $\log(1+y) = y + o(y)$

$$y = -x^2 \Rightarrow \log(1-x^2) = -x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{\cancel{x^2}\left(-1 + o(1)\right)} = -\frac{1}{2}.$$

③ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}}{3\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)}{3\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{x} \\ y\to 0 \text{ SE} \\ x\to-\infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{1+y^3}-\sqrt[3]{1-y^3}}{3y\,\mathrm{sen}^2(y)}$$

N: $(1+z)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}z-\frac{1}{9}z^2+o(z^2)$

CON $z=y^3$ E $z=-y^3$ DA CUI :

$$\sqrt[3]{1+y^3} - \sqrt[3]{1-y^3} =$$

$$\cancel{1} + \frac{1}{3}y^3 - \cancel{\frac{1}{9}y^6} + o(y^6)$$

$$-\left(\cancel{1} - \frac{1}{3}y^3 - \cancel{\frac{1}{9}y^6} + o(y^6)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}y^3 + o(y^6) = \frac{2}{3}y^3 + o(y^3).$$

$$D: \ 3y\,\mathrm{sen}^2(y) = 3y\,(y + o(y))^2 =$$

$$= 3y\,(y^2 + o(y^2)) = 3y^3 + o(y^3).$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{2}{3}y^3 + o(y^3)}{3y^3 + o(y^3)} = \frac{2}{9}.$$

4 $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \cos(\sqrt{x})}{\log(1-2\tan x)} =$$

N: $e^y = 1 + y + y^2/2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3)$; $y = \sqrt{x}$

$\cos(y) = 1 - y^2/2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5)$; $y = \sqrt{x}$

$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \cos(\sqrt{x}) = \cancel{1} + \cancel{\sqrt{x}} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6}x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x})$

$$-\sqrt{x} - \cancel{1} + \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 + o(x^{5/2})$$

$$= x + o(x)$$

$$D: \quad \log(1+y) = y + o(y) \quad ; \quad y = -2\tan x$$

$$\log(1-2\tan x) = -2\tan x + o(\tan x)$$

$$= -2x + o(x)$$

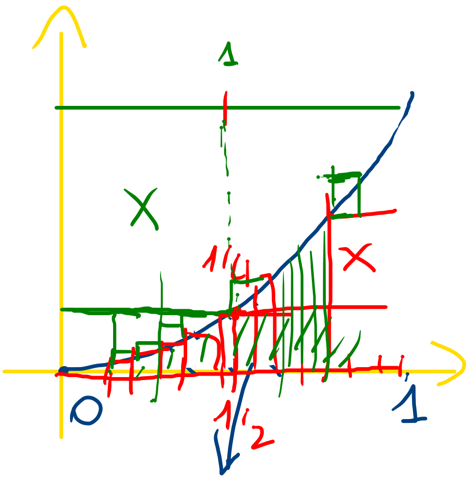
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + o(x)}{-2x + o(x)} = -\frac{1}{2} .$$

ANALISI I

28/11/2022

INTEGRALE DI RIEMANN

AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO



$y = x^2$

$$0 \le A \le 1$$

$$1/8 \le A \le 5/8$$

AREA ??

A

INF

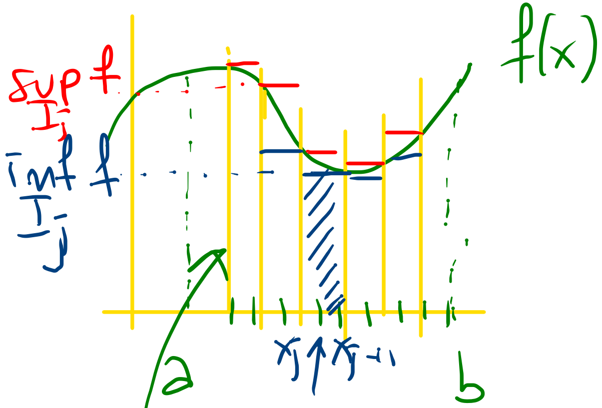
È NON DECRESCENTE

SUP

È NON CRESCENTE

∞ RETTANGOLI DI BASE $0 = \infty \cdot 0$

INTEGRALE DI RIEMANN



A = AREA

$I_j = [x_j, x_{j+1}]$

$\Delta x = (x_{j+1} - x_j)$

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left(\inf_{I_j} f\right) \Delta x$$

SOMMA INFERIORE DI RIEMANN

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left(\sup_{I_j} f\right) \Delta x$$

SOMMA SUPERIORE DI RIEMANN

1) $S_N \le A \le S_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

2) $S_N \nearrow$ AL CRESCERE DI N

3) $S_N \searrow$ AL CRESCERE DI N

$$\exists \lim_{N \to \infty} S_N = \sup_N S_N = S_\infty$$

$$\exists \lim_{N \to \infty} S_N = \inf_N S_N = S_\infty$$

DEF f SI DICE "RIEMANN INTEGRABILE" SU $[a,b]$ (INTEGRABILE SECONDO RIEMANN) SE

$S_\infty = s_\infty$ OVVERO $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_\varepsilon :$

$$S_N - s_N < \varepsilon \quad \forall\, N \geq N_\varepsilon .$$

OSS $\underset{I_j}{\operatorname{osc}} f = \left(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \right) < \varepsilon \quad \forall\, N \geq N_\varepsilon$

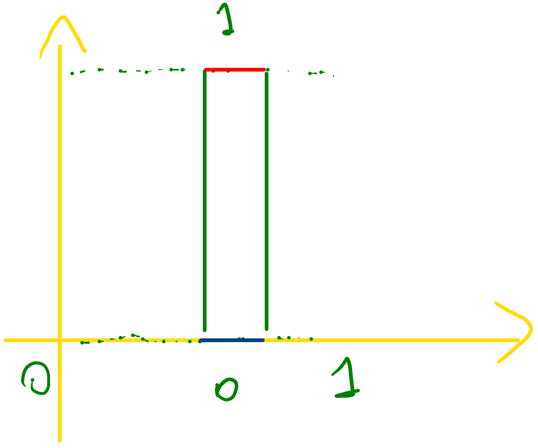
$(\operatorname{osc} \to 0$ SE $N \to \infty)$

PROP TUTTE LE FUNZIONI CONTINUE SONO RIEMANN INTEGRABILI.

SENZA DIMOSTRAZIONE!

CONTROESEMPIO: LA FUNZIONE DI DIRICHLET NON È RIEMANN INTEGRABILE:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0; & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$



$$(\text{SUP} - \text{INF}) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$$s_n = 0 \qquad S_n = 1$$

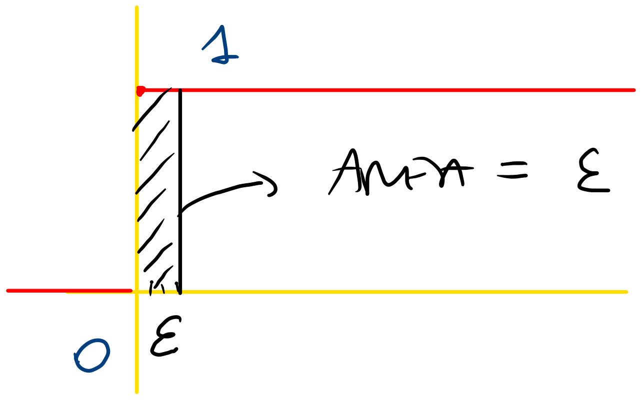
NON È RIEMANN INTEGRABILE!

(È DISCONTINUA IN TUTTI I PUNTI !!)

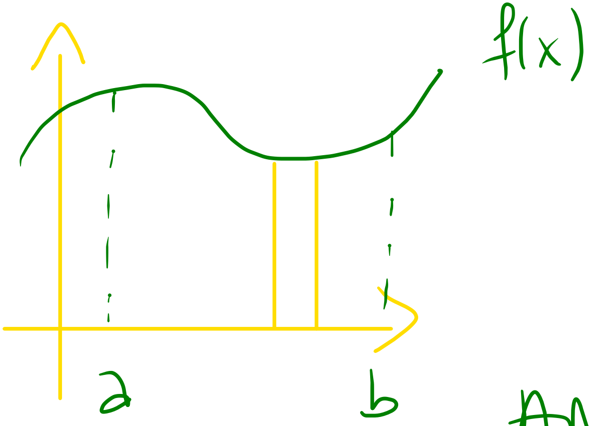
FUNZIONE DI HEAVISIDE

È DISCONTINUA IN $X = 0$

MA È RIEMANN INTEGRABILE



INTEGRALE DEFINITO



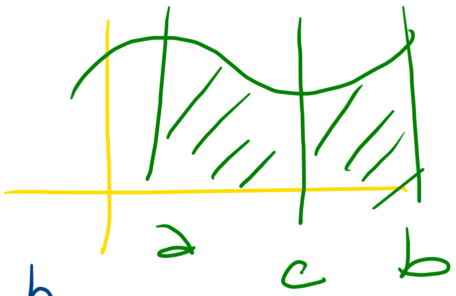
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>AREA</u> "<u>ALGEBRICA</u>" SOTTESA DAL GRAFICO DI $f(x)$ E ASSE X TRA I PUNTI $x=a$ E $x=b$

PROPRIETÀ

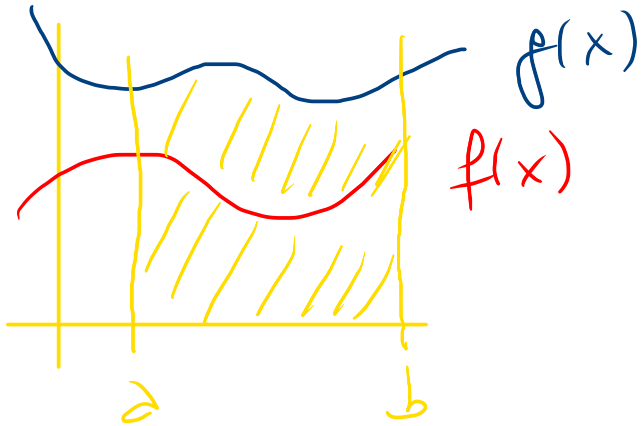
① L'INTEGRALE È <u>ADDITIVO</u>: SE $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



② L'INTEGRALE È <u>LINEARE</u>:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



$$\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

③ L'INTEGRALE È MONOTONO: SE

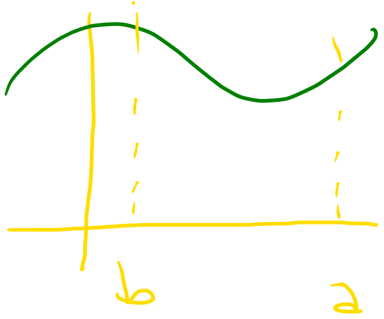
$g(x) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$ ALLORA

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

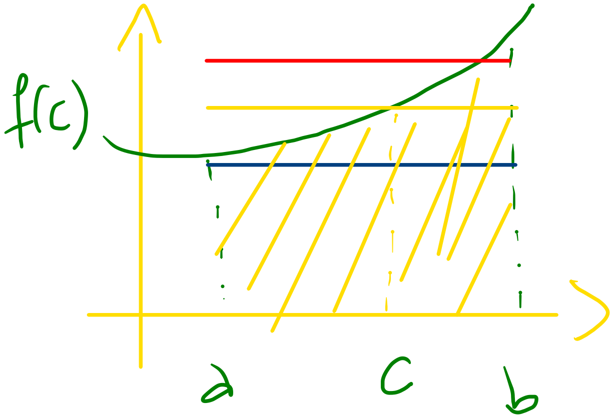
SE $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (È POSITIVO)

4

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE



SIA $f(x)$ CONTINUA SU $[a, b]$

ESISTE $c \in (a, b)$ TALE CHE

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

DEF

MU'

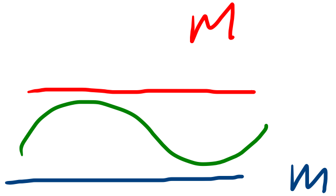
$$M := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

SI CHIAMA "MEDIA INTEGRALE".

DIM SICCOME $f(x)$ È CONTINUA SU $[a,b]$

DA WEIERSTRASS ESISTONO $m = \min_{[a,b]} f(x)$

E $M = \max_{[a,b]} f(x)$ CIOÈ



$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall \; x \in [a,b]$$

INTEGRANDO SU $[a,b]$ DALLA MONOTONIA:

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

DA CUI :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

DIVIDENDO PER $(b-a) > 0$ OTTENGO :

$$m \leq \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \quad \left(\begin{array}{c}\mu \text{ È UN} \\ \text{VALORE DI} \\ f(x)\end{array}\right)$$

DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

OTTENGO CHE ESISTE $c \in (a,b)$: $f(c) = \mu$. ☒

ANALISI I

28/11/2022 (POMERIGGIO)

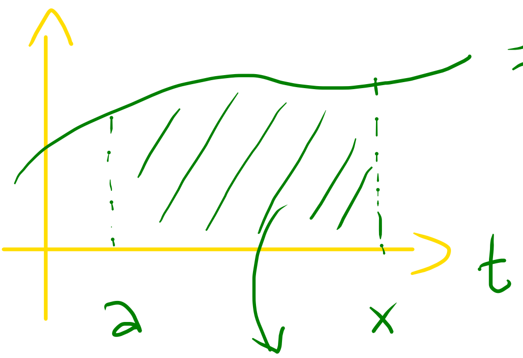
IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

PRIMITIVE

DEF $G(x)$ SI DICE PRIMITIVA DI $f(x)$ SE
G È DERIVABILE E $G'(x) = f(x)$.

ESEMPIO: $G(x) = x$ È LA PRIMITIVA DI
$f(x) = 1$; $G(x) = e^x$ " " DI
SE STESSA.

FUNZIONE INTEGRALE



$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\left[F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \right]$$

È LA FUNZIONE INTEGRALE DI $f(x)$ ED ESPRIME L'AREA ALGEBRICA DA a AD x.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO (TORRICELLI-BARROW)

SIA $f(x) \in C([a,b])$.

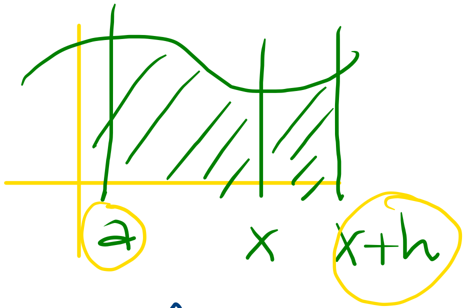
SIA $F(x)$ LA SUA FUNZIONE INTEGRALE CIOÈ

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ALLORA F È UNA PRIMITIVA DI f CIOÈ

F È DERIVABILE E $F'(x) = f(x)$.

DIM PROCEDIAMO FORMALMENTE E CALCOLIAMO LA DERIVATA DI F : $\forall h>0$ CONSIDERIAMO



$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right] =$$

ADDITIVITA'

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt}\right] =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt =$$

TEOREMA DELLA MEDIA

$$= \lim_{h \to 0^+} f(c_h) \qquad (\text{con } x < c_h < x+h)$$

$$x$$

$$= f(x)$$ perché f è continua!

Allo stesso modo si può procedere con $h < 0$ ed ottenere che

$$F'(x) = f(x)$$

OSS L'integrale è "l'antiderivata"!

È molto più difficile!!

CONSEGUENZE DEL T.F.C.

$F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ ...

COME SONO FATTE LE ALTRE ??

SE $G(x)$ È UN ALTRA PRIMITIVA, ALLORA

$G(x) = F(x) + c \quad \exists\, c \in \mathbb{R}$.

CONSIDERIAMO $H(x) = G(x) - F(x)$ E DERIVIAMO

$$H'(x) = \left(G(x) - F(x)\right)' = G'(x) - F'(x) =$$

$$= f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv c \text{ (COSTANTE)}$$

LA FAMIGLIA DI PRIMITIVE $G(x) = F(x) + c$

SI DICE <u>INTEGRALE</u> <u>INDEFINITO</u>.

COME SI CALCOLA L'INTEGRALE DEFINITO??

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) =$$

$$= (F(b) + \cancel{c}) - (F(a) + \cancel{c}) =$$

$$= F(b) - F(a)$$

SCOPO DEL GIOCO

DETERMINARE TUTTE E SOLE LE PRIMITIVE DI $f(x)$.

1. INTEGRALI IMMEDIATI
2. INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI.
3. INTEGRALE PER PARTI.
4. INTEGRALE PER SOSTITUZIONE.

INTEGRALI IMMEDIATI

$$(x)' = 1 \longrightarrow \int 1\,dx = x + c$$

$$(x^2)' = 2x \longrightarrow \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$(x^3)' = 3x^2 \longrightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \longrightarrow \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$\forall n \in \mathbb{R}$

$n+1 \neq 0 \Rightarrow n \neq -1$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + c$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + c$$

ESEMPIO

$$\int (7x^2 - 3\operatorname{sen}x + 2e^x)\,dx =$$

$$= 7\int x^2\,dx - 3\int \operatorname{sen}x\,dx + 2\int e^x\,dx$$

$$= 7\,\frac{x^3}{3} - 3(-\cos x) + 2e^x + c$$

$$= \frac{7}{3}x^3 + 3\cos x + 2e^x + c \,.$$

ANALISI I

30/11/2022

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

FUNZIONI RAZIONALI

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ DOVE P, Q SONO POLINOMI.

COME SI INTEGRANO?

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

1. $\deg P \geq \deg Q \longrightarrow$ DIVISIONE "LUNGA"

ESEMPIO

$$\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+x+1} = (x-4) + \frac{3x+6}{x^2+x+1}$$

DIVIDENDO DIVISORE

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & 0 & 2 & x^2+x+1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -x & & x-4 \\
\cline{1-4}
// & -4x^2 & -x & +2 & \\
 & +4x^2 & +4x & +4 & \\
\cline{2-4}
 & // & 3x & +6 &
\end{array}
$$

RESTO

QUOZIENTE

$\partial R < \partial D$ o $R = 0$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x + 1}\, dx =$$

$$= \int \left((x-4) + \frac{3x+6}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= \int (x-4)\, dx + \int \frac{3x+6}{x^2+x+1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{3x+6}{x^2+x+1}\, dx$$

VISTO CHE

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int M(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

POLINOMIO

FUNZIONE RAZIONALE CON $\partial R < \partial Q$

CI RICONDUCIAMO AL CASO CHE $\partial P < \partial Q$

DOBBIAMO SCOMPORRE IL DENOMINATORE!

ESEMPIO :
$$\int \frac{x^2-2x+5}{x^3-8}\,dx$$

SCOMPONGO $\quad x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$P(x) = x^3-8 \qquad$ DIVISORI DI $8 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$P(1) = 1 - 8 = -7$ no!

$P(2) = 8 - 8 = 0$ YEAH!

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 0 & -8 \\
2 & & 2 & 4 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & //
\end{array}$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

DIVISIONE CORTA

SE $Q(x) = x - x_0$ SI PUÒ FARE CON LA REGOLA DI RUFFINI:

$$x^2 + 7x - 2 \quad : \quad x - 1$$

	1	7	−2
1		1	8
	1	8	6

$x + 8$

RESTO

TEOREMA DI RUFFINI

$$(x - x_0) \mid P(x) \iff P(x_0) = 0$$

OGNI RADICE DEL POLINOMIO $P(x)$ RESTITUISCE UN FATTORE DI PRIMO GRADO.

INTEGRAZIONE CON DENOMINATORI DI GRADO I

$$\int \frac{7}{2x-5}\,dx = 7\int \frac{1}{2x-5}\,dx$$

$$= \frac{7}{2}\log|2x-5| + c$$

DENOMINATORI DI GRADO 2

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

1) $\underline{\Delta > 0}$: $\quad Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

2) $\underline{\Delta = 0}$: $\quad Q(x) = a(x - x_1)^2$

3) $\Delta < 0$: $\quad$ NON SI SCOMPONE

$\Delta > 0$ → METODO DEI FRATTI SEMPLICI

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5x+4}\,dx$$

$$x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$$

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

COME SI TROVANO A E B ??

1) METODO STANDARD :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

$$\frac{2x+3}{\cancel{(x-1)(x-4)}} = \frac{A(x-4)+B(x-1)}{\cancel{(x-1)(x-4)}}$$

$$2x+3 = Ax - 4A + Bx - B$$

$$2x + 3 = (A+B)x - 4A - B$$

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ -4A-B = 3 \end{cases}$$

$$-3A \;//\; 5 \longrightarrow A = -5/3$$

$$B = 2 + 5/3 = \frac{11}{3}$$

E SOSTITUISCO $\longrightarrow$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-5x+4}\,dx = \int \frac{-5/3}{x-1}\,dx + \int \frac{11/3}{x-4}\,dx$$

$$= -\frac{5}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{11}{3}\int \frac{1}{x-4}\,dx$$

$$= -\frac{5}{3}\log|x-1| + \frac{11}{3}\log|x-4| + c.$$

2) METODO SMART:

$$\frac{2x+3}{\cancel{(x-1)}(x-4)} = \frac{A}{\cancel{x-1}} + \frac{B}{x-4}(x-1)$$

CERCO LA COSTANTE A E MOLTIPLICO PER $(x-1)$:

$$\frac{2x+3}{x-4} = A + \frac{B(x-1)}{(x-4)}$$

SOSTITUISCO $x=1$: $-\frac{5}{3} = A + 0$

CERCHIAMO LA B E MOLTIPLICHIAMO PER $(x-4)$:

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{A(x-4)}{x-1} + B$$

SOSTITUISCO $x = 4$:

$$\frac{11}{3} = 0 + B \Rightarrow B = \frac{11}{3}$$

CASO $\Delta = 0$

$$\int \frac{5x+6}{x^2-4x+4}\,dx$$

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

$$\frac{5x+6}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\frac{5x+6}{\cancel{(x-2)^2}} = \frac{A(x-2) + B}{\cancel{(x-2)^2}}$$

$$5x + 6 = Ax + B - 2A$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B - 2A = 6 \end{cases}$$

$$\boxed{A = 5}$$
$$\boxed{B = 16}$$

SOSTITUISCO :

$$\int \frac{5x+6}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 16\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 5\log|x-2| - \frac{16}{(x-2)} + C$$

$$\left[\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\right]$$

$\Delta < 0$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log(x^2+1) + \arctan x + C$$

IDEA: RIMANE QUESTO CASO

$$\int \frac{6x-11}{x^2+4x+5}\,dx$$

METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+5-4 = (x+2)^2+1$$

$$\frac{6x-11}{\cancel{x^2+4x+5}} = \frac{2A(x+2)+B}{\cancel{(x+2)^2+1}}$$

$$6x - 11 = 2Ax + 4A + B$$

$$\begin{cases} 2A = 6 \\ 4A + B = -11 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ B = -23 \end{cases}$$

SOSTITUENDO :

$$\int \frac{6x-11}{x^2+4x+5}\,dx = 3\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$-23\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= 3 \log\left((x+2)^2 + 1\right) - 23 \arctan(x+2) + C \, .$$

ESERCIZI

$$\int \frac{3x^4-2x^2+1}{x^3-1}\,dx$$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
3x^4 & 0 & -2x^2 & 0 & 1 & x^3 \quad \cdot \quad \cdot \quad -1 \\
\hline
-3x^4 & & & +3x & & 3x \\
\hline
// & // & -2x^2 & +3x & +1 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}\, dx =$$

$$= \int 3x \, dx + \int \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 1}\, dx$$

$$= \frac{3}{2} x^2 - \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 1}\, dx$$

$$\int \frac{2x^2-3x-1}{x^3-1}\,dx$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{2x^2-3x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^2-3x-1}{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}} = \frac{A(x^2+x+1)+B(x-1)(2x+1)+C(x-1)}{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}$$

$$2x^2-3x-1 = Ax^2+Ax+A$$
$$B(2x^2-x-1)+Cx-C$$

$$2x^2-3x-1 = Ax^2+Ax+A+2Bx^2-Bx-B+Cx-C$$

$$\begin{cases} A+2B = 2 \\ A-B+C = -3 \\ A-B-C = -1 \end{cases}$$
$$// \quad // \quad 2C = -2$$

$$A = -\frac{2}{3}$$

$$A+2B = 2$$
$$A-B = -2$$
$$// \quad 3B = 4$$

$$B = 4/3$$

$$C = -1$$

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]$$

$$=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]$$

METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

PER OTTENERE ARCOTANGENTE!

$$\int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 1}\, dx =$$

$$-\frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{4}{3} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$$

$$- \int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{3}{4}\left[\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

$$= -\frac{2}{3} \log|x-1| + \frac{4}{3} \log(x^2+x+1)$$

$$-\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}\,dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{\cancel{4}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

CENNI SUI GRADI SUPERIORI

$$\int \frac{x^3+7x}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$$

DECOMPOSIZIONE DI HERMITE

DERIVATA DEL QUOZIENTE

$$\frac{x^3+7x}{x^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{2Cx+D}{x^2+4} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2+4)}\right)$$

DOPO SEMPLICI PASSAGGI ALGEBRICI ...

$$\int \frac{x^3+7x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$A\log|x| - \frac{B}{x} + C\log|x^2+4| + \frac{D}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$+ \int \frac{d}{dx}\left(\frac{Ex^2+Fx+D}{x(x^2+4)}\right)dx =$$

DAL T.F.C.

$$= \dots + \frac{Ex^2+Fx+D}{x(x^2+4)} + C$$

ANALISI I

5/12/2022

INTEGRALI PER PARTI

E PER SOSTITUZIONE

INTEGRALE PER PARTI

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

INTEGRO

DERIVO

VERSIONE 2:

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

FATTORE DIFFERENZIALE

FATTORE FINITO

$$\left[\int u\,dv = uv - \int v\,du\right]$$

DIM PARTIAMO CON LA DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

INTEGRIAMO:

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int \left(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\right) dx$$

TFC

$$\overset{\shortparallel}{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int g'(x)f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \quad \square$$

COME SI USA ?

$$\int f g = F g - \int F g'$$

COME SCELGO LE f E g ??

f = FACILE DA INTEGRARE

g = " " DERIVARE

FACCIAMO QUALCHE ESEMPIO

ESEMPI

$$\begin{bmatrix} f = e^x & F = e^x \\ g = x & g' = 1 \end{bmatrix}$$

$$\int x e^x \, dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 \, dx =$$

$$\left[x \xrightarrow{\int} \frac{x^2}{2}, \quad x \to 1 \qquad e^x \xrightarrow{\int} e^x, \quad e^x \to e^x \right]$$

$$= xe^x - \int e^x \, dx$$

$$= xe^x - e^x + c .$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} f = \cos x & F = \operatorname{sen} x \\ g = x^2 & g' = 2x \end{array}\right]$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left[x(-\cos x) + \int 1 \cdot (+\cos x) \, dx \right]$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left[-x \cos x + \operatorname{sen} x \right] =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C .$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= e^x \cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \right] =$$

$$= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \cancel{2} \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c .$$

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx =$$

$$= x \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx =$$

$$= x \log x - x + c$$

$$\int \arctan x \, dx = \int 1 \cdot \arctan x \, dx =$$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= (-\cos x) \operatorname{sen} x - \int (-\cos x) \cos x \, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen}x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen}x\cos x) + c$$

ALTRIMENTI, RICORDANDO $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + c$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \, .$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

INTEGRALE PER SOSTITUZIONE

$$\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int g(y)\, dy$$

$$\left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ dy = f'(x)\, dx \end{array}\right]$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

DIM: DERIVATA DELLA F.NE COMPOSTA. $\square$

ESEMPI

1) $\int (x^2+7)^3 \, x\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2+7 \\ dy = 2x\,dx \longrightarrow \text{“}\frac{1}{2}\,dy = x\,dx\text{”} \end{array}\right]$$

$$= \int y^3 \, \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int y^3\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{y^4}{4} + C = \frac{1}{8}(x^2+7)^4 + C$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x}\, dx =$

$$= \int (\tan x + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \left[\begin{array}{l} y = \tan x + 1 \\ dy = \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx \end{array}\right]$$

$$= \int y^{1/2}\, dy =$$

$$= \frac{y^{1/2+1}}{1/2+1} + c = \frac{2}{3} (\tan x + 1)^{3/2} + c$$

3) $$\int \frac{(\log^2 x + 2\log x)}{x}\, dx =$$

$$= \int (\log^2 x + 2\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$y = \log x$

$dy = \frac{1}{x}\, dx$

$$= \int (y^2 + 2y)\, dy =$$

$$= \frac{y^3}{3} + y^2 + c =$$

$$= \frac{\log^3 x}{3} + \log^2 x + c \,.$$

4) $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx =$

$y = \cos x$

$dy = -\operatorname{sen} x \, dx$

$= -\int e^{y} \, dy =$

$= -e^{y} + c$

$= -e^{\cos x} + c$

5) $$\int (3x+1)^6 \, x \, dx =$$

$$y = 3x+1$$
$$\downarrow$$
$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$
$$\downarrow$$
$$dx = \frac{1}{3}dy$$

$$= \int y^6 \left(\frac{y-1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} dy \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \int y^6 (y-1) \, dy =$$

$$= \frac{1}{9} \int (y^7 - y^6) \, dy = \frac{1}{9} \left[\frac{y^8}{8} - \frac{y^7}{7} \right] + c$$

$$= \frac{1}{72}(3x+1)^8 - \frac{1}{63}(3x+1)^7 + c$$

6) $$\int \frac{e^{2x} - e^{x}}{e^{3x} + 2e^{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = e^{x} \\ \downarrow \\ x = \lg y \\ \downarrow \\ dx = \frac{1}{y}\,dy \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{y^{\cancel{2}} - \cancel{y}}{y^{3} + 2y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}}\,dy =$$

$$= \int \frac{y - 1}{y^{3} + 2y}\,dy = \int \frac{y-1}{y(y^{2}+2)}\,dy = \dots$$

FUNZIONE RAZIONALE

ANALISI I

7/12/2022

SERIE NUMERICHE

SERIE NUMERICHE

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE a_n, $n \geq 1$.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

SERIE NUMERICA

SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI (RIDOTTA N-ESIMA)

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

DEF SE $\lim_{N \to \infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ESISTE

LA SERIE NUMERICA SI DICE <u>REGOLARE</u>.

SE TALE LIMITE È FINITO LA SERIE SI DICE <u>CONVERGENTE</u>, VICEVERSA SE È $\pm\infty$ SI DICE <u>DIVERGENTE</u>.

ESEMPI

(1) $$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$ SERIE DI MENGOLI

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots = 1$$

SERIE TELESCOPICA CONVERGENTE

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$$

② $$\sum_{n\geq 1} n = 1+2+3+\dots$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$$

È UNA SERIE DIVERGENTE.

③ $$\sum_{n\geq 1} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1$$

SEMBRA ESSERE CONVERGENTE...

$$S_n = \begin{cases} 0 \ ; & \text{SE } n \text{ È } \underline{\text{PARI}} \\ 1 \ ; & \text{SE } n \text{ È } \underline{\text{DISPARI}} \end{cases}$$

$$\lim_{k \to \infty} S_{2k+1} = 1 \neq \lim_{k \to \infty} S_{2k} = 0$$

CIOÈ S_n NON AMMETTE LIMITE PER $n \to \infty$ (È <u>IRREGOLARE</u>)

È QUINDI LA SERIE È IRREGOLARE!

CONDIZIONE NECESSARIA DI CAUCHY

SE $\sum_{n\geq 1} a_n$ È CONVERGENTE

ALLORA $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DIM ESISTE FINITO IL $\lim_{N\to\infty} S_N =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_\infty$. OSSERVIAMO CHE

$$S_{N+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N} + a_{N+1}$$

$$= S_N + a_{N+1}$$

PRENDO IL LIMITE $N \to \infty$;

$$\cancel{S_\infty} = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = \lim_{N\to\infty} \left(S_N + a_{N+1} \right)$$

$$= \left(\lim_{N\to\infty} S_N \right) + \lim_{N\to\infty} a_{N+1} = \cancel{S_\infty} + \lim_{N\to\infty} a_{N+1}$$

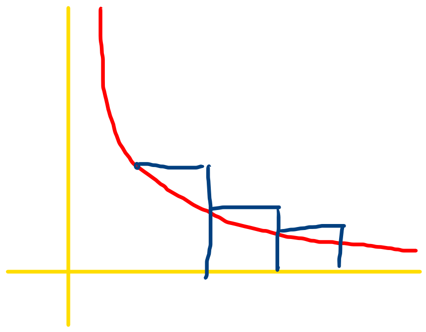
$\blacksquare$

LA SERIE ARMONICA

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

PROP LA SERIE ARMONICA È DIVERGENTE.

DIM



CONSIDERIAMO $f(x) = \frac{1}{x}$

$n \leq x \leq n+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

IN PARTICOLARE, INTEGRANDO OTTENGO:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n}(\cancel{n}+1-\cancel{n}) = \frac{1}{n}$$

CIOÈ

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$$

SOMMIAMO PER n DA 1 AD ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \log(b) = +\infty. \boxtimes$$

SERIE p-ARMONICA

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

PROP LA SERIE p-ARMONICA CONVERGE $\forall\, p > 1$ E DIVERGE $\forall\, p \leq 1$

DIM CONSIDERIAMO $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ E PROCEDIAMO COME PRIMA (CASO $p = 1$):

$$n \le x \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^p} \le \frac{1}{x^p} \le \frac{1}{n^p} \quad \forall\, p \neq 1$$

TUTTO SI RICONDUCE A CALCOLARE L'INTEGRALE IMPROPRIO CORRISPONDENTE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\, dx =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^b =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-p}\left(b^{1-p} - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{SE} \quad p > 1 \\ +\infty & \text{SE} \quad p \leq 1 \end{cases}$$

QUINDI CONVERGE SE $p > 1$ E

DIVERGE SE $p \leq 1$.

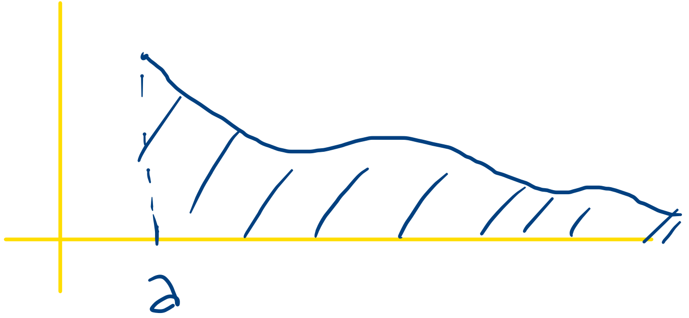
CHIARAMENTE SE $p \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n^p} \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow$ NO CONDIZIONE DI CAUCHY. $\boxtimes$

INTEGRALI IMPROPRI

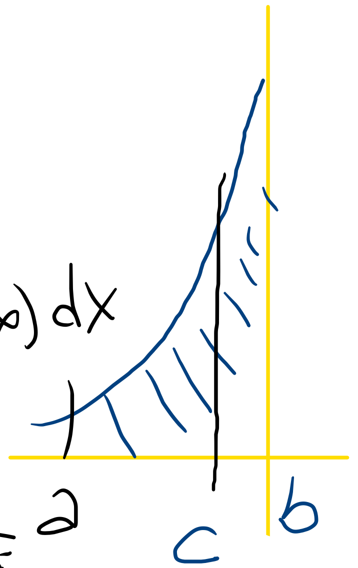
ESTENDO IL CONCETTO DI INTEGRALE A FUNZIONI O INTERVALLI NON LIMITATI.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

b = ASINTOTO VERTICALE



LA SERIE GEOMETRICA

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n \geq 1} x^n$$

CON $x \in \mathbb{R}$ (DI RAGIONE x).

PROP LA SERIE GEOMETRICA CONVERGE $\forall\, -1 < x < 1$, DIVERGE SE $x \geq 1$, È IRREGOLARE SE $x \leq -1$.

DIM USIAMO UNA IDENTITÀ ALGEBRICA:

$$1-x^2 = (1+x)(1-x) \longrightarrow 1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1-x^3 = (1+x+x^2)(1-x) \longrightarrow 1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$1-x^4 = (1+x+x^2+x^3)(1-x)$$

$$\longrightarrow 1+x+x^2+x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$$

SCOMMESSA: $1+x+x^2+\dots+x^N = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$

DIMOSTRIAMOLO PER INDUZIONE:

1) BASE INDUTTIVA: VALE PER $N = 1, 2, 3$ (PAG. PRIMA)

2) PASSO INDUTTIVO: SUPPONGO VALE PER N

E DIMOSTRO SIA VALE PER $N+1$

$$\underbrace{1+x+x^2+\dots+x^N}_{\parallel} + x^{N+1} =$$

$$\frac{1-x^{N+1}}{1-x} + x^{N+1} = \frac{1-\cancel{x^{N+1}}+\cancel{x^{N+1}}-x^{N+2}}{1-x} = \frac{1-x^{N+2}}{1-x}$$

QUINDI CONOSCO ESPLICITAMENTE S_N:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

BASTA CALCOLARE IL LIMITE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} = \begin{cases} +\infty & ; \quad x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & ; -1 < x < 1 \\ \nexists & ; \quad \forall x \leq -1 \end{cases}$$

$x^{N+1} \to +\infty$ SE $x > 1$

$x^{N+1} \to 0$ SE $|x| < 1$

$\boxed{\checkmark}$

SERIE A TERMINI POSITIVI

$$\sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{CON} \quad a_n \geq 0$$

SE CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$$

QUINDI S_N È CRESCENTE QUINDI

È REGOLARE $\Rightarrow$ LA SERIE È REGOLARE!

CRITERIO DEL CONFRONTO

SUPPONIAMO CHE $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1$.

ALLORA:

1) SE $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n = +\infty \implies \sum_{n \geq 1} b_n = +\infty$

2) SE $\displaystyle\sum_{n \geq 1} b_n < \infty \implies \sum_{n \geq 1} a_n < \infty$

OSS NEGLI ALTRI DUE CASI NON SI PUÒ DEDURRE NULLA.

DIM BASTA CONSIDERARE LE RIDOTTE N-ESIME

$$S_N^1 = \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \text{E} \quad S_N^2 = \sum_{n=1}^{N} b_n .$$

PER IPOTESI $a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq 1$

CIOÈ ANCHE $S_N^1 \leq S_N^2 \quad \forall\, N \geq 1$.

DAL CRITERIO DEL CONFRONTO PER LE SUCCESSIONI SEGUE LA TESI:

SE $\lim_{N \to \infty} S_N^1 = +\infty$ ANCHE $\lim_{N \to \infty} S_N^2 = +\infty$

SE $\lim_{n\to\infty} S_n^2 < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n^1 < \infty$. $\boxtimes$

ESEMPIO: STUDIARE LA SERIE $\sum_{n\geq 2} \frac{n+3}{n^2-1}$

- $a_n = \frac{n+3}{n^2-1} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2-1} = 0$.
- $\frac{n+3}{n^2-1} \geq \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ DIVERGE DAL CRITERIO DEL CONFRONTO.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SUPPONIAMO CHE $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ E

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \qquad L \neq 0, +\infty$$

ALLORA $$\sum_{n \geq 1} a_n < \infty \iff \sum_{n \geq 1} b_n < \infty$$

OVVERO $$\sum_{n \geq 1} a_n = +\infty \iff \sum_{n \geq 1} b_n = +\infty$$

<u>DIM</u> PER IPOTESI $\forall\, \varepsilon > 0$ $\wedge$ TALE CHE $(L-\varepsilon) > 0$ $\exists\, n_\varepsilon$ TALE CHE

$$L - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad (L-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (L+\varepsilon) b_n \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{n \geq n_\varepsilon} (L-\varepsilon) b_n}_{\shortparallel} \leq \sum_{n \geq n_\varepsilon} a_n \leq \sum_{n \geq n_\varepsilon} (L+\varepsilon) b_n$$

$$(L-\varepsilon) \sum_{n \geq n_\varepsilon} b_n \leq \sum_{n \geq n_\varepsilon} a_n \leq (L+\varepsilon) \sum_{n \geq n_\varepsilon} b_n \, . \ \boxtimes$$

ESEMPIO: STUDIARE $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+3n}{4n^4+5n^3}$

$$a_n = \frac{n^2+3n}{4n^4+5n^3} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\cancelto{0}{\frac{3n}{n^2}}\right)}{n^{\cancel{4}\,2}\left(4+\cancelto{0}{\frac{5n^3}{n^4}}\right)} \simeq \frac{1}{4n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ DAL CRITERIO ASINTOTICO

$b_n = \dfrac{1}{n^2}$ È P-ARMONICA CON $p>1$
È CONVERGENTE.