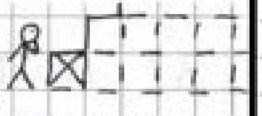
INDICE



BLOCCO INTRODUTTIVO

PG.

FINE BLOCCO INTRODUTTIVO

Successioni

Funzioni

Derivate

Integrali

Serie

MATEMATICA:

TEORIA ASSIOMATICA LOGICO DEDUTTIVA

BASATA APPUNTO SUGLI

ASSIOMI: CONCETTI PRIMITIVI DATI PER VERI SENZA DIMOSTRAZIONE

- LEMMI
- TEOREMI
- COROLLARI

TRATTI DAGLI ASSIOMI TRAMITE PASSAGGI LOGICI

Analisi Matematica I per Informatica

Appunti: Giulia Stazio

Docente: Annamaria Barbagallo

AA: 2023/2024

Gruppo III (N-Z)

Spero che questi appunti possano essere di aiuto per voi, come lo sono stati per me.
Buona fortuna con lo studio.
Mettetecela tutta.
-G

TEORIA DEGLI INSIEMI

CONCETTI PRIMITIVI:
- INSIEME
- ELEMENTO
- APPARTENENZA

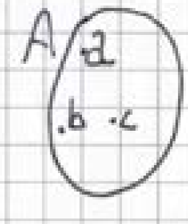
INSIEMI: $A, B, C, \ldots$

ELEMENTI: $a, b, c, \ldots$

APPARTENENZA: $\in$

PER INDICARE UN INSIEME

$A = \{a, b, c\}$



$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10\}$

INSIEME CON NESSUN ELEMENTO:

INSIEME VUOTO: $\emptyset$, $\{\}$

INCLUSIONE:

- $C \subseteq A$: C È CONTENUTO IN A:

TUTTI GLI ELEMENTI DI C SONO PRESENTI ANCHE IN A

- $C \subset A$ / $C \subsetneq A$: $C \subseteq A$ + CI SONO ELEMENTI IN A NON PRESENTI IN C

CONTENUTO PROPRIAMENTE → C È UN SOTTOINSIEME

- SE $A \subseteq C \wedge C \subseteq A \overset{def.}{\iff} A = C$

A E C SONO EQUIVALENTI

OPERAZIONI FRA INSIEMI

- $A \cup B$ (UNIONE): TUTTI GLI ELEMENTI UNICI DI A E B

$A \cup B = \{a \in A \text{ oppure } b \in B\}$

ELEMENTO NEUTRO

$\emptyset$

- $A \cap B$ (INTERSEZIONE): TUTTI GLI ELEMENTI COMUNI SIA A B CHE AD A

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$

(TALE CHE)

ELEMENTO NEUTRO

U

! $A \cap C = \emptyset \overset{def.}{\iff}$ A e C SONO DISGIUNTI

- $A - B$ / $A \setminus B$ (SOTTRAZIONE): TUTTI GLI ELEMENTI DI A NON PRESENTI IN B

$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$

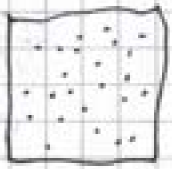
ELEMENTO NEUTRO (?)

$\emptyset$

! • LA SOTTRAZIONE NON È TRANSITIVA: $A \setminus B \neq B \setminus A$

INSIEME UNIVERSO : U

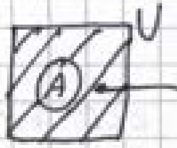
$U = \{$ TUTTI GLI ELEMENTI $\}$

$U \rightarrow$ 

QUANTIFICATORI

- UNIVERSALE: $\forall$ PER OGNI
- ESISTENZIALE: $\exists$ ESISTE
- $\nexists$ NON ESISTE
- $\exists!$ ESISTE ED È UNICO

- A^c / $\bar{A}$ $= U \setminus A$ TUTTI GLI ELEMENTI NON PRESENTI IN A



$\rightarrow \bar{A}$

! $\bar{U} = \emptyset$

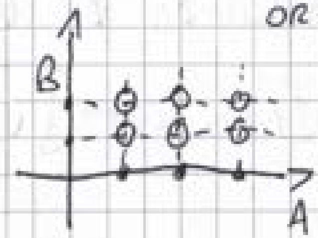
! SI POSSONO APPLICARE LE LEGGI DI DE MORGAN

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^B$ / $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

PRODOTTO CARTESIANO :

SE $A, B \neq \emptyset$ $\quad A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

COPPIA ORDINATA $((a,b) \neq (b,a))$



$\leftarrow A \times B$

SE PRENDIAMO $\mathbb{R}$ COME INSIEME

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{R}^2 \rightarrow$ DIAGRAMMA CARTESIANO

IL SOTTOINSIEME DI UN PRODOTTO CARTESIANO VIENE CHIAMATO RELAZIONE

$B \subseteq A^2$

- A/B : INSIEME QUOZIENTE

$\downarrow$

A QUOZIENTATO B

È UN INSIEME I QUALI ELEMENTI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI B

Es. $B = \{1, 2, a, b\} \to A/B = \{\text{NUM.}, \text{LETT.}\}$

CI SONO DUE TIPI DI RELAZIONI PARTICOLARI:

- RELAZIONE DI EQUIVALENZA
- RELAZIONE DI ORDINAMENTO PARZIALE

EQUIVALENZA	ORDINAMENTO P.
- PROP. RIFLESSIVA	- PROP. RIFLESSIVA
- PROP. SIMMETRICA	- PROP. ANTISIMMETRICA
- PROP. TRANSITIVA	- PROP. TRANSITIVA

- PROPRIETÀ RIFLESSIVA: $(a,a) \in R, \forall a \in A$

- PROPRIETÀ TRANSITIVA: $(a,b) \in R \to (b,a) \in R$

- PROPRIETÀ SIMMETRICA: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$

$$\Downarrow$$

$$(a,c) \in R$$

- PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \to a = b$$

- ORDINAMENTO TOTALE: (Es. $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ È TOTALMENTE ORDINATO SE

$\forall x,y \in \mathbb{R}, \; x \neq y \to x < y \vee y < x$

L'ORDINAMENTO È

PARZIALE: SE NON TUTTI I SUOI ELEMENTI SONO CONFRONTABILI

TOTALE: TUTTI I SUOI ELEMENTI POSSONO ESSERE MESSI IN RELAZIONE

SI DICE INSIEME <u>BEN ORDINATO</u>

SE OGNI SUO SOTTOINSIEME HA UN VALORE MINIMO (ES. $\mathbb{N}$)

INTRODUCIAMO GLI INSIEMI NUMERICI:

- $\mathbb{N}$: NUMERI NATURALI
- $\mathbb{Z}$: NUMERI INTERI RELATIVI
- $\mathbb{Q}$: NUMERI RAZIONALI
- $\mathbb{R}$: NUMERI REALI

GLI INSIEMI VENGONO IPOTIZZATI AL FINE DI TROVARE UN INSIEME IN CUI VALEVANO PER ENTRAMBE LE OPERAZIONI $(+, \cdot)$:

- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- ELEMENTO NEUTRO
- ELEMENTO OPPOSTO

NEL CASO DI $\mathbb{N}$:

- PROP. ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA ✓
- ELEMENTO NEUTRO, $\overset{+}{0}$, $\overset{\cdot}{1}$ ✓
- ELEMENTO OPPOSTO, $\overset{+}{\bigcirc}$, $\overset{\cdot}{\bigcirc}$ ✗

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$\mathbb{Z}$ ACQUISISCE L'ELEMENTO OPPOSTO PER L'ADDIZIONE, MA NON PER IL PRODOTTO

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

VIENE IPOTIZZATO $\mathbb{Q}$ PER CUI VALGONO TUTTE LE PROPRIETÀ

POI VENGONO SCOPERTI (PITAGORA)
I NUMERI IRRAZIONALI
NON RAPPRESENTABILI
TRAMITE FRAZIONE

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

SI IPOTIZZA L'INSIEME DEI NUMERI REALI

$$\mathbb{R} = \{ \pm c_i c_0 c_1 \dots c_\infty : c \in \mathbb{N},\ c_i \in \{0, 1 \dots 9\} \ \forall i \in \mathbb{N} \}$$

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ecc.

INSIEME + OPERAZIONI = CAMPO
(CAMPO DEI NUMERI REALI, NATURALI ecc.)

IL NUMERO DEGLI ELEMENTI DI UN INSIEME È
DETTO CARDINALITÀ: $|A| = n$ ANCHE $\#$

$P(A)$ INSIEME DELLE PARTI DI A:
TUTTI I POSSIBILI ~~[illegible]~~ SOTTOINSIEMI

Es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(A) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$

A

IN QUESTO CASO
- A, $\emptyset$ SONO INSIEMI IMPROPRI.
  È IL MINIMO DEGLI INSIEMI DI $P(A)$
- TUTTO IL RESTO SONO INSIEMI PROPRI

CARDINALITÀ DELL'INSIEME DELLE PARTI:

$$|P(A)| = 2^x \leftarrow |A| = x$$

SIMBOLI :

- $:$, $|$ TALE CHE
- t.c. TALE CHE
- $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ IMPLICAZIONE, COIMPLICAZIONE MATERIALE
- $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ IMPLICAZIONE, COIMPLICAZIONE LOGICA
- $()_{,}()$ TALE CHE
- $\circ$ COMPOSTO $(g \circ f)$
- $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ DEFINIZIONE
- , E ($\wedge$)
- $f: A \rightarrow B$ FUNZIONE CON $\left\langle \begin{array}{l} \text{DOMINIO IN } A \\ \text{CODOMINIO IN } B \end{array} \right.$
- $f: a \mapsto b$

LA FUNZIONE MANDA a IN b $\rightarrow$ $f(a) = b$

- f^{-1} FUNZIONE INVERSA
- (a,b), $\{a,b\}$ COPPIA ORDINATA / NON ORDINATA
- $\mapsto$ ASSOCIA

FUNZIONI

$$f: X \rightarrow Y \qquad X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y$$

DOMINIO O CAMPO DI ESISTENZA

CODOMINIO

PIÙ X POSSONO AVERE LA STESSA IMMAGINE.

SE X HA PIÙ DI UNA IMMAGINE, f NON È UNA FUNZIONE

AD X SI ASSOCIA UN ELEMENTO Y TRAMITE LA ~~[illegible]~~ FUNZIONE f:

Y È IMMAGINE DI X TRAMITE f

NON È DETTO CHE IN Y CI SIANO SOLO IMMAGINI DI X TRAMITE f

PER INDICARE IL SOTTOINSIEME DI Y CON SOLO LE IMMAGINI, SI SCRIVE L' INSIEME IMMAGINE

$$\text{Im} f = \{ y \in Y : \forall x \in X \text{ t.c. } y = f(x) \}$$

ESISTE ANCHE LA CONTRO IMMAGINE:

SERVE A CAPIRE, A PARTIRE DA Y,
QUALI ELEMENTI DI X HANNO PER IMMAGINE Y

$f^{-1}(y)$: CONTROIMMAGINE DI Y TRAMITE f

! SE Y NON È L'IMMAGINE DI NESSUNA X,
ALLORA $f^{-1}(y) = \emptyset$

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : y = f(x)$$

- SE $\mathrm{Im}f = Y$, LA FUNZIONE È DETTA SURIETTIVA
- SE $f^{-1}(y)$ HA UNA SOLA CONTROIMMAGINE, LA FUNZIONE È DETTA INIETTIVA
- SE LA FUNZIONE È ENTRAMBE, SI DICE BIETTIVA:

OGNI ELEMENTO DI X, Y HA UNA ED UNA SOLA IMMAGINE/CONTROIMMAGINE

- SE LA FUNZIONE È BIETTIVA, ALLORA È ANCHE INVERTIBILE PER DEFINIZIONE

$$\forall y \in Y \ \exists!\, x \in X : y = f(x)$$

ANCHE DOMINIO E CODOMINIO VENGONO INVERTITI

$$f: X \to Y \Leftrightarrow f^{-1}: Y \to X$$

IN QUESTO CASO, VISTO CHE $f(x)$ È SEMPRE UNA Y E VICEVERSA:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(y)) = y \qquad *$$

- DUE FUNZIONI POSSONO APPLICARSI L'UNA SULL'IMMAGINE DELL'ALTRA: ~~...~~

FUNZIONE COMPOSTA $\quad f \circ g = f(g(x))$

COMPORRE UNA FUNZIONE CON LA SUA INVERSA *
SI OTTIENE L'IDENTITÀ DI UNA FUNZIONE $f(f^{-1}(x))$

FUNZIONI RESTRIZIONE / PROLUNGAMENTO

- RESTRIZIONE $f|_C$

PRESA UNA FUNZIONE $f: A \to B$ ED UN SOTTOINSIEME DI $A \supseteq C$, SI CHIAMA RESTRIZIONE LA FUNZIONE $f: C \to B$

OVVERO LA FUNZIONE VIENE APPLICATA SOLTANTO AD UNA PARTE DEGLI ELEMENTI DI A

- PROLUNGAMENTO $\tilde{f}$

L'OPPOSTO DELLA FUNZIONE RESTRIZIONE, IL DOMINIO VIENE ALLARGATO INVECE CHE RISTRETTO:

$X, Y \neq \emptyset$, $f: X \to Y$, $X \subset B$

$f: X \to Y$

$X \supset A$

$f|_A: A \to Y$,

$x \mapsto f(x), \forall x \in A$

RESTRIZIONE

$f: X \to Y$

$X \subset B$

$g(x): B \to Y$

$x \mapsto g(x), \forall x \in B$

PROLUNGAMENTO

MONOTONIA: UNA FUNZIONE È DETTA MONOTONA SE SI VERIFICA ALMENO UNA DI QUESTE CONDIZIONI

- CRESCENTE (STRETTAMENTE CRESCENTE SE $<$)

def.

$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- DECRESCENTE (STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $>$)

def.

$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

! STRETTAMENTE $\begin{cases} \text{CRESCENTE} \\ \text{DECRESCENTE} \end{cases}$ $\to$ STRETTAMENTE MONOTONA

FUNZIONI PARI E DISPARI

IN ENTRAMBI I CASI LE FUNZIONI SONO SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ORIGINE

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in X \Rightarrow -x \in X)$ (NON PER FORZA ANCHE PER Y)

- PARI $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(-x), \forall x \in X$

IL GRAFICO DI UNA TALE FUNZIONE È SIMMETRICO/SPECULARE RISPETTO ALL'ASSE Y

- DISPARI $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = -f(-x), \forall x \in X$

QUI IL GRAFICO È SPECULARE RISPETTO ALL' ~~[illegible]~~ ORIGINE

- - - - - - - - - - - - - - -

ESISTONO 4 TIPI DI FUNZIONI ELEMENTARI
- FUNZIONE COSTANTE
- FUNZIONE IDENTITÀ
- FUNZIONE PARABOLICA
- FUNZIONE CUBICA

- FUNZIONE COSTANTE: $y = c \rightarrow f(x) = c \in \mathbb{R}$

COSTANTE

IL GRAFICO È UNA RETTA ORIZZONTALE CHE INTERSECA L'ASSE Y NEL PUNTO $y = c$

SI APPLICANO CRESCENZA E DECRESCENZA:

$f(x)$ COSTANTE È UNA FUNZIONE MONOTONA

- FUNZIONE IDENTITÀ: $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f(-x)$
- BISETTRICE QUADRANTI 1-3	- BISETTRICE QUADRANTI 2-4
- STRETTAMENTE CRESCENTE	- STRETTAMENTE DECRESCENTE

- FUNZIONE PARI
- FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA

– FUNZIONE PARABOLICA: $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

FUNZIONE PARI

PER INVERTIRE UNA PARABOLA BISOGNA APPLICARE UNA RESTRIZIONE

$$g = f|_{[0, +\infty[} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\ni y$$

$$\to x^2 \in [0, +\infty[$$

LA FUNZIONE DIVENTA BIETTIVA (E INVERTIBILE) SE

- SI ELIMINA LA PARTE $y \in]-\infty, 0[$ CHE NON HA VALORI IN Y $(Im f \neq Y)$
- SI ELIMINA LA PARTE DEI VALORI DI $-x$, ALTRIMENTI $f^{-1}(y) = 2$ VALORI DISTINTI

NON È UNA FUNZIONE

! I PUNTI FISSI DELLA SIMMETRIA DI 2 FUNZIONI SONO QUEI PUNTI CHE SONO COMUNI AD ENTRAMBE LE FUNZIONI

– FUNZIONE CUBICA: $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

È UNA FUNZIONE
- BIETTIVA (INVERTIBILE)
- STRETTAMENTE CRESCENTE
- DISPARI

UN GRAFICO SIMILE HANNO TUTTE LE $f(x) = x^n$ CON n NUMERO DISPARI

LA CURVA DIVENTA SEMPRE PIÙ STRETTA ALL'AUMENTARE DI n

ALTRE FUNZIONI: FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| \begin{cases} x & x > 0 \quad \text{STRETT. CRESCENTE} \\ -x & x < 0 \quad \text{STRETT. DECRESCENTE} \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEI VALORI ASSOLUTI:

1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$|x| = 0 \iff x = 0$

2) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ TRIANGOLARE DEL VALORE ASSOLUTO

$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

ALTRE PROPRIETÀ

$$|x| < p \iff \begin{cases} -p < x < p, & \text{PER } p > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p < 0 \end{cases}$$

SE INVECE DI $<$ C'È $\leq$ → TERZO CASO

$x = 0$, PER $p = 0$

DISEQUAZIONI SPECULARI

$$|x| \geq p \iff \begin{cases} x \leq -p \lor x \geq p, & \text{PER } p > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p \leq 0 \end{cases}$$

$$|x| > p \iff \begin{cases} x < -p \lor x > p, & \text{PER } p > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{PER } p = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p < 0 \end{cases}$$

FUNZIONI POTENZA: ESPONENTE IN $\mathbb{Z}$

$f(x) = x^m$

$m \geq 0$

↓

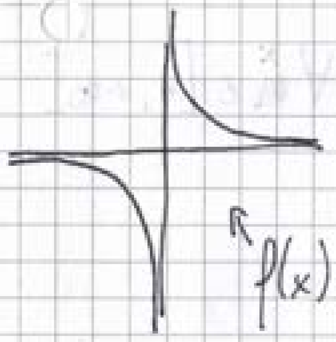
$x \cdot x \cdot x \ldots$ m VOLTE

$m < 0$

$m = -n \rightarrow x^{-n} \rightarrow \frac{1}{x^n}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

VISTO CHE X È AL DENOMINATORE, NON PUÒ ESSERE 0



$f(x) = \frac{1}{x}$

- ASSI DI SIMMETRIA = BISETTRICI DEI QUADRANTI
- ASINTOTI = ASSI ASCISSE/ORDINATE

GLI ESPONENTI PERÒ POSSONO ANCHE APPARTENERE A $\mathbb{Q}$ OPPURE $\mathbb{R}$. VEDIAMO COME: → → →

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ / $a^m / a^n = a^{(m-n)}$ / $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ /

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ / $a^n / b^n = (a/b)^n$

FUNZIONI CON ESPONENTE RAZIONALE

$$f(x)=x^q \;,\; q=m/n \quad \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m} \quad \begin{cases} n \text{ DISPARI } \exists\ \forall x\in\mathbb{R} \\ (m \text{ POSITIVO}) \\ n \text{ PARI } \exists\ \forall x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

SE $m<0 \rightarrow x^q=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

$\downarrow$

$$\begin{cases} n \text{ DISPARI } \exists\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ n \text{ PARI } \exists\ \forall x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$$

FUNZIONI POTENZA CON ESPONENTE REALE

STESSE REGOLE DEGLI ESPONENTI RAZIONALI

MA BISOGNA FARE DELLE APPROSSIMAZIONI:

SI FANNO LE POTENZE DI

Es. x^r, $r=y,c_0c_1c_2\ldots c_\infty$ $\nearrow$ C = CIFRE DOPO LA VIRGOLA

PRIMA SI CALCOLA x^y, POI x^{y,c_0}, POI x^{y,c_0c_1} ecc.

AD UN CERTO PUNTO IL VALORE DI $f(x)$ SI STABILIZZA, E VIENE PRESO QUEL VALORE

! L'ACCURATEZZA NON SARÀ MAI AL 100%

STABILIZZARSI, VUOL DIRE CHE LE PRIME n CIFRE DOPO LA VIRGOLA RIMARRANNO UGUALI QUANDO SI AGGIUNGERÀ LA PROSSIMA CIFRA ALL'ESPONENTE.

LA SCELTA DI QUANDO FERMARSI È ARBITRARIA

FUNZIONI ESPONENZIALI : FUNZIONI CON LA VARIABILE COME ESPONENTE

$f(x) = a^x$ $a > 0$ ALTRIMENTI CI SONO 2 SOLUZIONI PER UNA X

SE $a = 0$ → RETTA ORIZZONTALE
SE $a = 1$ ↗

$0 < a < 1$
STRETTAMENTE DECRESCENTE

$a > 1$
STRETTAMENTE CRESCENTE

LA FUNZIONE È BIETTIVA → INVERTIBILE

FUNZIONI < ESPONENZIALI / LOGARITMICHE SONO L'UNA L'OPPOSTA DELL'ALTRA

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$\log_a b = c$
$\to a^c = b$

1) $a > 0, a \neq 1, (x_1, x_2) > 0$

$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2) $\log_a x_1/x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$

5) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

4) $\log_b x = \log_a x / \log_a b$

6) $\log_a 1/b = \log_{1/a} b = -\log_a b$
$\to \log_{1/a} 1/b = \log_a b$

! - $\log_a a = 1$

! - $\log_a 1 = 0$

! SE X COMPRESO FRA 0 E Y : $0 < x < y$

$0 < a < 1$

$\log_a x > \log_a y$

$a > 1$

$\log_a x < \log_a y$

Equazioni di I grado:

$ax = b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$$a = 0 \begin{cases} b = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ b \neq 0 & \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

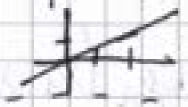
$a \neq 0 \; : \; ax = b$

Dividendo entrambi i membri di un uguaglianza per uno stesso numero, il risultato è sempre vero

$$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \to x = b/a$$

Funzione inversa:
vengono invertiti x e y

$f(x) = 2x \qquad f^{-1}(x) = x/2$

Questa x prima era la $f(x)$ y

Equazioni di II grado:

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$ può avere $\begin{cases} 0 \text{ soluzioni} \\ 2 \text{ soluzioni} \end{cases}$

4 casi:

1) $b = c = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \to x = 0 \quad (\pm 0)$

- 2 soluzioni coincidenti

2) $b \neq 0, \; c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx \to$

$$\to x(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \to x = -b/a \end{cases}$$

2 soluzioni distinte   Eq. di I grado

3) $b = 0, \; c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \to$

$$\to x^2 = -c/a \begin{cases} a \cdot c > 0 \to \nexists x \in \mathbb{R} \\ a \cdot c < 0 \to x = \pm\sqrt{-c/a} \end{cases}$$

- 2 soluzioni distinte

4) $b \neq 0, \; c \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta \begin{cases} \Delta < 0 \to \nexists x \in \mathbb{R} \\ \Delta = 0 \to x = -b/2a & \text{- 2 soluzioni coincidenti} \\ \Delta > 0 \to x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{- 2 soluzioni distinte} \end{cases}$$

TRINOMIO NOTEVOLE

È UN METODO DI SCOMPOSIZIONE:

$$x^2 + bx + c = 0$$

TRINOMIO: $(x+a_1)(x+a_2)=0$

$$x^2 + a_2 x + a_1 x + a_1 a_2 = 0$$

$$x^2 + (a_2 + a_1)x + a_1 a_2 = 0$$

$\Updownarrow$ SE $a_1 + a_2 = b$ E $a_1 \cdot a_2 = c$

$$x^2 + bx + c = 0$$

SE SI RIESCONO A TROVARE DUE NUMERI LA CUI SOMMA È b E IL CUI PRODOTTO È c, SI PUÒ UTILIZZARE IL TRINOMIO NOTEVOLE

DISEQUAZIONI DI II GRADO

	$ax^2+bx+c \underset{\geq}{>} 0$	$ax^2+bx+c \underset{\leq}{<} 0$
$\Delta>0$	$x \underset{\leq}{<} x_1 \vee x \underset{\geq}{>} x_2$	$x_1 \underset{\leq}{<} x \underset{\leq}{<} x_2$
$\Delta=0$	$>: \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ $\geq: \forall x \in \mathbb{R}$	$<: \nexists x \in \mathbb{R}$ $\leq: x = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta<0$	$>: \forall x \in \mathbb{R}$ $\geq: \forall x \in \mathbb{R}$	$<: \nexists x \in \mathbb{R}$ $\leq: \nexists x \in \mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ / $\Delta/4 = \left(b/2\right)^2 - ac \rightarrow x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$

PER SCOMPORRE I POLINOMI, C'È UN ALTRO METODO ESTREMAMENTE UTILE CHE PUÒ ESSERE APPLICATO A POLINOMI DI $n°$ GRADO:

IL METODO DI RUFFINI $\rightarrow$ $\rightarrow$

METODO DI RUFFINI

IL PRIMO PASSO PER APPLICARLO, È CERCARE UNA RADICE DEL POLINOMIO (ANCHE DETTO ZERO DI UN POL)

OVVERO UN TERMINE CHE LO ANNULLA

! LA RADICE IN QUESTO CASO DEVE APPARTENERE AD $\mathbb{Z}$ (RADICE INTERA)

1) LA RADICE È UNO DEI DIVISORI DEL TERMINE NOTO
2) CI SONO ALTRI MODI PER TROVARE LE RADICI, MA NON SONO RADICI INTERE

DOPODICHÉ SI COMPILA LA TABELLA:

COEFFICIENTI DI X (INCLUSI EVENTUALI $ax \to a=0$)

TERMINE NOTO

$$\begin{array}{c|ccc|c} & a & b & c & d \\ r & \downarrow & a\cdot r & f\cdot r & g\cdot r \\ \hline & a & +b \to f & +c \to g & +d \to 0 \end{array}$$

RADICE

DEVE ESSERE 0, ALTRIMENTI r NON È UNA RADICE

IL POLINOMIO $P(x)$ VERRÀ COSÌ SCOMPOSTO:

$$(x-r)(ax+fx+g)$$

POLINOMIO DI GRADO $n-1$ CON n CHE È IL GRADO DI $P(x)$

IL METODO DI RUFFINI SI PUÒ USARE IN MANIERA ITERATIVA FINCHÉ $n>1$

PICCOLO INCISO

$\Delta = 0 \rightarrow x = -b/2a$ | DISEQ. SEMPRE POSITIVA.

DIVENTA 0 QUANDO $x = -b/2a$

$\Delta < 0$ $x = ?$ | DISEQ. SEMPRE POSITIVA

$\Delta > 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ | DISEQ. POSITIVA PER VALORI ESTERNI ALLE 2 X

DISEQUAZIONI FRATTE:

RISOLVERE { NUMERATORE / DENOMINATORE } SEPARATAMENTE

| DENOM. $\neq 0$

RICAVARE GLI INTERVALLI IN CUI LE DISEQ. SONO POSITIVE/NEGATIVE.

A SECONDA DELLA DISEQ. $< / > 0$

SCEGLIERE GLI INTERVALLI FACENDO IL PRODOTTO DEI SEGNI

DISEQ. ~~[illegible]~~ CON VALORE ASSOLUTO

PROP. VALORI ASSOLUTI: $|\cancel{x}\, f(x)| > 9$

$f(x) > 9$ ← SE $f(x)$ POSITIVO

$-f(x) > 9$ ← NEGATIVO

$f(x) < -9$

$|x+4| > 9$

$x+4 > 9$ → RISULTATO 1

$x+4 < -9$ → RISULTATO 2

PRENDERE GLI INTERVALLI IN CUI *

RISOLVERE

QUESTO VALE SOLO SE TUTTE LE X SI TROVANO ALL'INTERNO DEL VALORE ASSOLUTO

* SE IL SEGNO ERA $>; \geq$, ~~[illegible]~~ $R_1 \cup R_2$ NON È UN SISTEMA

SE IL SEGNO ERA $<; \leq$, $R_1 \cap R_2$ SISTEMA

DISEQ. FRATTE CON VARIABILE SIA DENTRO CHE FUORI AL VALORE ASSOLUTO

LA DISEQ. SI SCOMPONE IN DUE SISTEMI:

$$\begin{cases} \text{CONTENUTO VALORE ASSOLUTO} \geq 0 \\ f(x) > y \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{CONTENUTO VALORE ASSOLUTO} < 0 \\ f(x) > y \end{cases}$$

! IN QUESTO CASO IL CONTENUTO DEL VALORE ASSOLUTO DIVENTA NEGATIVO ($|x| \to -x$

DOPODICHÉ SI FA L'UNIONE DEI DUE SISTEMI

→ (NEL SISTEMA INVECE SI FA L'INTERSEZIONE)

DISEQ. IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{A(x)} \;\; > \,\geq\, < \,\leq \;\; B(x)$$

SE n È NEGATIVO, SI MOLTIPLICANO ENTRAMBE LE PARTI PER n → RISOLVI NORMALMENTE

SE n È PARI:

COND. DI BASE $A(x) \geq 0$

CASI $>$ | $\geq$

if $B(x) <$ | ≤ 0

$\forall x$

ALTRIMENTI

$A(x) >$ | $\geq B(x)$

UNIONE DEI SISTEMI:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < \,|\, \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B(x) \geq \,|\, > 0 \\ A(x) > \,|\, \geq B(x)^n \end{cases}$$

CASI $<$ | $\leq$

COND 1 $B(x) >$ | ≥ 0

VISTO CHE IL PRIMO MEMBRO È SEMPRE POSITIVO

→ n POSITIVO < n NEGATIVO $\forall$

INOLTRE $A(x) <$ | $\leq B(x)$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > \,|\, \geq 0 \\ A(x) < \,|\, \leq B(x)^n \end{cases}$$

SISTEMA A 3 ELEMENTI

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI : $a^x = b$

RISOLVIBILI CON:

- PROPRIETÀ DELLE POTENZE: $\left(a^x > a^b \begin{cases} a > 1 \to x > b \\ a < 1 \to x < b \end{cases} \right)$ ecc.

- SOSTITUZIONE:

$a^x + 2a^{4x} = b \quad ! a^x = t \to t + 2t^4 = b$

RISOLVI $\to$ SOLUZIONI PER $t \to$ RISOSTITUISCI a^x A t

$\to$ RISOLVI DI NUOVO

- LOGARITMI R.I.P.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

SE ABBIAMO UNA PROPRIETÀ $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$

SE $P(n)$ VALE PER $n = 0^*$ E PER $n = n-1$,

$\to$ VALE PER TUTTI GLI $n \in \mathbb{N}$:

* IL PASSO BASE PUÒ VARIARE, IN QUESTO CASO POTREBBE ESSERE $1 \to P(n)$ È VERA $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- PASSO BASE: $n = 1^*$

- PASSO INDUTTIVO $\begin{cases} \text{IPOTESI INDUTTIVA} \\ \text{TESI INDUTTIVA} \end{cases}$

ES. $\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

PASSO BASE $\to 1 = \frac{1(1+1)}{2} \to 1 = 1$ ✓

IPOTESI INDUTTIVA $\sum_{l=1}^{n-1} l = \frac{n-1(n-1+1)}{2}$ SUPPONGO CHE SIA VALIDA

TESI INDUTTIVA $\sum_{l=1}^{n} l = \sum_{l=1}^{n-1} l + n$

$(n=3 \quad l=1)$

ES. $1 + 2 + 3 =$

$(n = n-1) +$

$(1+2) + n$ ✓

$$\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark$$

VALE PER:

$$\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{l=1}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{l=1}^{n} 2l-1 = n^2$$, ED ALTRI ANCORA

PERMUTAZIONI

P_n = PERMUTAZIONI DI $n = n!$

DATI n OGGETTI ED n POSTI, P_n SONO TUTTI I MODI IN CUI GLI OGGETTI POSSONO ESSERE DISPOSTI NELLO SPAZIO (L'ORDINE CONTA)

ES. P_l, $l = \{a,b,c\}$ OGGETTI, $l = 3$ POSTI $\rightarrow$

a,b,c a,c,b
b,a,c b,c,a
c,a,b c,b,a

6 MODI = 3!

! $n! = (n-1)! \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1)! \cdot n$ ecc.

PERCHÉ

ES. $n! = \overset{n}{5} \cdot \underbrace{\overset{n-1}{4} \cdot \overbrace{\overset{n-2}{3} \cdot \overset{n-3}{2} \cdot \overset{n-4}{1}}^{3!}}_{4!}$ CON $n = 5$, $2!$

$1! = 1$ $0! = 1$ PERCHÉ

$1! = 1 \cdot (1-1)! \rightarrow 1 = 1 \cdot (0!)$

COMBINAZIONI

$C_{x,y} = \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$

$x \geq y$

$y = 0 \rightarrow \frac{x!}{x!} = 1$

$y = 1 \rightarrow \frac{x!}{(x-1)!} = \frac{(x-1)! \cdot x}{(x-1)!} = x$

$y = x \rightarrow \frac{x!}{x!} = 1$

LE COMBINAZIONI $C_{x,y}$ SONO I DIVERSI MODI IN CUI GLI OGGETTI x POSSONO ESSERE DISPOSTI IN y

! NON IN ORDINE $\rightarrow a,b = b,a$

$\rightarrow$ TUTTI I SOTTOINSIEMI DI X CON Y ELEMENTI

BINOMIO DI NEWTON

È UN MODO PER CALCOLARE LA POTENZA n DI UN BINOMIO:

$a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (IN TEORIA VALE ANCHE PER ZERO)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Es. $n=3$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

1 3 3 1

$\rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ← CUBO DI UN BINOMIO

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE SI PUÒ APPLICARE ANCHE ALLE DISEQUAZIONI: Es.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

PASSO BASE: $n=1$

$$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} \quad = \quad 1 \leq 1 \quad \checkmark$$

PASSO INDUTTIVO:

IPOTESI $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1}$

SE SOMMIAMO $\frac{1}{n^2}$ AD ENTRAMBI I MEMBRI

TESI $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

DIMOSTRAZIONE $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$$

MA QUESTO È $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$\rightarrow$ SE $2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

ALLORA LO SARÀ ANCHE $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$

$$\cancel{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \cancel{2} - \frac{1}{n}$$

$$-\frac{n^2-n+1}{(n-1)n^2} \leq -\frac{1}{n}$$

ENTRAMBI PRODOTTO PER $-n$

$$\frac{n^2-n+1}{n(n-1)} \geq 1 \Rightarrow \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{n(n-1)}} + \frac{1}{n(n-1)} \geq 1$$

$$= \cancel{1} + \frac{1}{n(n-1)} \geq \cancel{1}$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \geq 0$$

$n \in \mathbb{N}$ SEMPRE POSITIVO

$n-1 \geq 0$ SEMPRE VERIFICATO NEL PASSO INDUTTIVO PERCHÈ $n \geq 2$

(IN TEORIA SI POTEVA FARE ANCHE LO STUDIO DEL SEGNO)

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

SIA a UN NUMERO REALE : $a \geq -1$

$$(a+1)^n \geq na+1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

PASSO BASE $n=0$ /

$$(a+1)^0 \geq 0 \cdot a + 1$$

$$1 \geq 1 \ \checkmark$$

IL CASO 0° VIENE DATO COME BUONO DANDO IL VALORE $0^0 = 1$ ANCHE SE IN REALTÀ È INDETERMINATO

PASSO INDUTTIVO $n \geq 1$

IPOTESI: $(a+1)^{n-1} \geq a(n-1)+1$

TESI $(a+1)^{n} \geq an+1$

DIMOSTRAZIONE

$$(a+1)^n = (a+1)^{n-1}(a+1)$$ E PER IPOTESI

$$(a+1)^{n-1} \geq a(n-1)+1$$

$$(a+1)^{n-1}(a+1) \geq (a(n-1)+1)(a+1)$$

$(a+1)^n \geq (an-a+1)(a+1)$

$(a+1)^n \geq a^2n+an-a^2\cancel{-a}+\cancel{a}+1$

$(a+1)^n \geq an+1+a^2(n-1)$

CONSIDERIAMO
$(a+1)^n = x$, $an+1=y$
$a^2(n-1)=z$

QUESTA ERA LA TESI DA DIMOSTRARE

$a^2(n-1)$ È SEMPRE POSITIVO PERCHÉ NEL PASSO INDUTTIVO $n \geq 1$

SE $x \geq y+z$ CON $z \geq 0$

ALLORA $x \geq y$

OVVERO $(a+1)^n \geq an+1$

COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

SIANO $A, B \subseteq \mathbb{R} \wedge A, B \neq \emptyset$

ESSI SONO <u>SEPARATI</u> SE $\overset{def.}{\iff} \forall a \in A \wedge \forall b \in B$
$a \leq b$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

PRESI GLI INSIEMI SEPARATI DI PRIMA

$\exists p \in \mathbb{R} : a \leq p \leq b \quad , \forall a \in A \wedge \forall b \in B$

SI CHIAMA <u>ELEMENTO DI SEPARAZIONE</u>

ADESSO:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ = INSIEMI DISCRETI $\quad \mathbb{R}$ = INSIEME **<u>CONTINUO</u>**

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x < y \wedge x < z < y$

SE A, B SONO ~~SEPA~~ SEPARATI E $\exists! p \in \mathbb{R}$:

$\forall a \in A \wedge \forall b \in B \quad a \leq p \leq b$

VENGONO CHIAMATI <u>CONTIGUI</u>

A, B si chiamano sezione se

DEF.

- Condizione 1 sono disgiunti : $A \cap B = \emptyset$
- Condizione 2 sono separati : $a < b$
- Condizione 3 sono complementari (in $\mathbb{R}$) : $A \cup B = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A, B sono una <u>Sezione</u> di $\mathbb{R}$

Assioma di Dedekind

Ogni sezione A, B di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento di separazione :

$$\exists!\, p \in \mathbb{R} : a \leq p \leq b \quad \forall a \in A \wedge \forall b \in B$$

Visto che in esso si verificano tutti questi assiomi, $\mathbb{R}$ si dice <u>Completo</u>

Per altri insiemi $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, ecc.)$ non valgono tutti, quindi non sono completi (discreti)

Intervalli <u>Limitati</u>

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- intervallo chiuso : $[a, b]$
- intervallo aperto : $]a, b[$
- intervallo semiaperto a destra : $[a, b[$
- intervallo semiaperto a sinistra $]a, b]$

Tutti di estremi a, b $][a, b][$

ovvero $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Intervalli <u>Illimitati</u> $(a \in \mathbb{R})$

Intervallo chiuso / aperto illimitato superiormente: $[a, +\infty[$; $]a, +\infty[$

Intervallo chiuso / aperto illimitato inferiormente: $]-\infty, a]$; $]-\infty, a[$

Intervallo illimitato: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

TOPOLOGIA: DEFINIZIONI

INTORNO DI UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$

$I_\delta(x_0)$: INTORNO DI CENTRO x_0 E RAGGIO δ

$\hookrightarrow]x_0-\delta, x_0+\delta[$ CON $\delta > 0$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, \quad x_0 \in A$

---

x_0 SI DICE PUNTO INTERNO ALL'INSIEME A SE

$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \subseteq A$

---

x_0 SI DICE PUNTO ESTERNO AD A SE

$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ CON $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

---

x_0 SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A SE

$$\forall \delta > 0 \quad \begin{cases} I^-_\delta(x_0) \subseteq A \wedge I^+_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \\ I^+_\delta(x_0) \subseteq A \wedge I^-_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

$\Bigg($ $I^+_\delta(x_0)$: INTORNO DESTRO $= [x_0, x_0+\delta[$

$I^-_\delta(x_0)$: INTORNO SINISTRO $=]x_0-\delta, x_0]$ $\Bigg)$

L'INSIEME DEI PUNTI DI FRONTIERA DI A SI CHIAMA

FRONTIERA DI A: $\mathrm{Fr}A$ OPPURE ∂A

SIA $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

INSIEME APERTO: A SI DICE INSIEME APERTO SE

TUTTI I SUOI PUNTI SONO INTERNI, OVVERO

$\forall x \in A, A \subseteq \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : I_\delta(x) \subseteq A$

INSIEME CHIUSO: UN INSIEME A SI DICE

CHIUSO SE $\mathbb{R} \setminus A$ È APERTO

(IL COMPLEMENTARE È UN INSIEME APERTO)

! $\mathbb{R} \wedge \emptyset$ SONO DELLE ANOMALIE PERCHÉ SONO

CONTEMPORANEAMENTE APERTI E CHIUSI

Chiusura di A: $\overline{A}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

La chiusura di A è il più piccolo insieme chiuso che contiene A

$\overline{A} = A \cup F_r A$

Interno di A: $\mathring{A}$

È l'insieme di tutti i punti interni di A

$\mathring{A} = A \setminus F_r A$

Punto di accumulazione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

x_0 è un punto di accumulazione per A se

DEF. $\forall \delta > 0 \quad (I_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

ovvero ogni intorno di x_0 deve avere un elemento diverso da x_0 in comune con A

Derivato di A è l'insieme di punti di accumulazione di A: DA

- $D\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$: retta reale estesa $= [-\infty, +\infty]$
- $\mathbb{N}$ ha un solo punto di accumulazione: $+\infty$

Punto isolato

$x_0 \in A, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

x_0 è un punto isolato se esiste un intorno di x_0 che non ha intersezioni con $A \setminus \{x_0\}$:

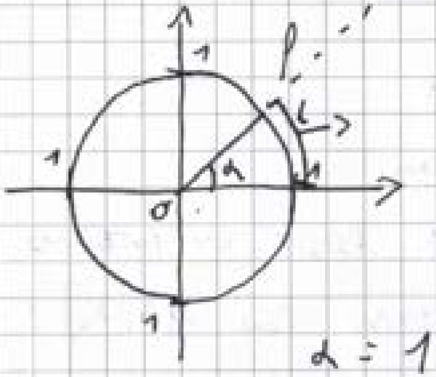
$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \cap A = \{x_0\}$

ovvero esiste un intervallo in cui l'intorno $I_\delta(x_0)$ ed A hanno solo x_0 in comune (intersecato ad A)

TRIGONOMETRIA

UNA DELLE NOZIONI PRINCIPALI DELLA TRIGONOMETRIA

È IL RADIANTE: SI USA PER MISURARE ANGOLI



α = ANGOLO

r = SEMIRETTA

l = ARCO

$\alpha = 1$ RADIANTE

QUANDO L'ARCO CHE SOTTENDE HA

MISURA PARI AL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA

MISURA IN GRADI	MISURA IN RADIANTI
$0/360^0$	0
90^0	$\pi/2$
180^0	π
270^0	$\frac{3}{2}\pi$

! • CIRCONFERENZA GONIOMETRICA: CIRCONFERENZA DI

RAGGIO 1 E CENTRO IN O

SENO, COSENO E TANGENTE

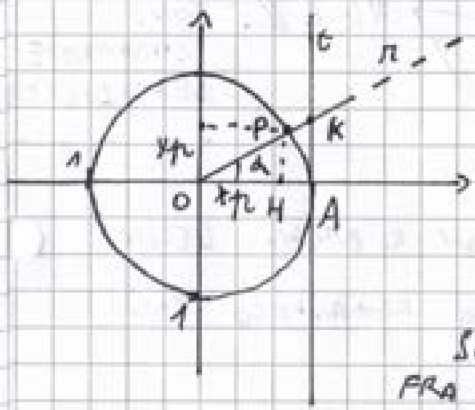
MISURE PIÙ USATE:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	ecc.
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0	ecc.
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1	ecc.
$tg\,\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0	ecc.

A 2π IL CICLO SI RESETTA: $0 \to 2\pi$

COSA SONO $\sin$, $\cos$ E tg DI α?

CIRC. CARTESIANA.



PRESO UN ANGOLO α:

- $\sin\alpha = y_P$
- $\cos\alpha = x_P$
- $tg = \pm \overline{AK}$

SIA P IL PUNTO DI INTERSEZIONE FRA LA RETTA r E LA CIRCONFERENZA

PROIEZIONI DI P SULL'ASSE DELLE ASCISSE = COS

PROIEZIONI DI P SULL'ASSE DELLE ORDINATE = SIN

tg →

IL SEGMENTO DELLA RETTA (TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO $X=1$) $\overline{AK}$, DOVE:

TANGENTE

A: PUNTO DI INCONTRO FRA RETTA E CIRCONFERENZA

K: PUNTO DI INTERSEZIONE FRA LA RETTA TANGENTE E LA SEMIRETTA CHE FORMA CON L'ORIGINE L'ANGOLO α

LE TRE MISURE SONO CICLICHE, QUINDI

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha \\ tg(\alpha + k\pi) &= tg\,\alpha \end{aligned}\right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

$2k\pi \wedge \pi$ SONO CHIAMATE PERIODICITÀ

SENO E COSENO FORMANO CON IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA, UN TRIANGOLO RETTANGOLO CON IPOTENUSA $= 1$

$\downarrow$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

I VALORI DI sin, cos, tg ASSUMONO VALORI POSITIVI/NEGATIVI A SECONDO DEL QUADRANTE:

$\sin\alpha$ + $\cos\alpha$ − $tg\,\alpha$ −	$\sin\alpha$ + $\cos\alpha$ + $tg\,\alpha$ +
$\sin\alpha$ − $\cos\alpha$ − $tg\,\alpha$ +	$\sin\alpha$ − $\cos\alpha$ + $tg\,\alpha$ −

1° Q + + +

2° Q + − −

3° Q − − +

4° Q − + −

ALCUNE NOZIONI SU SIN E COS

- $\cos\alpha = \cos -\alpha$
- $\sin\alpha = -\sin -\alpha$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

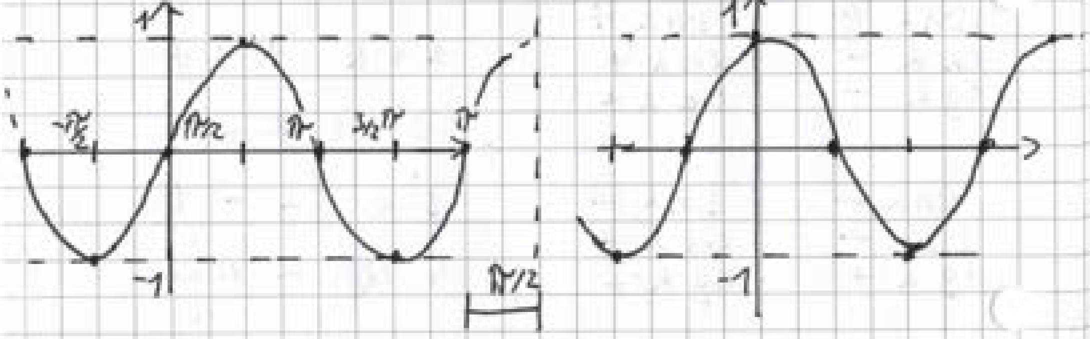
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

SE $\alpha = \beta$

- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

FUNZIONI SENO E COSENO

SINUSOIDE | COSINUSOIDE



- ENTRAMBE LE FUNZIONI SONO COMPRESE FRA -1 E 1
- NON SONO INIETTIVE
- NON SONO BIETTIVE

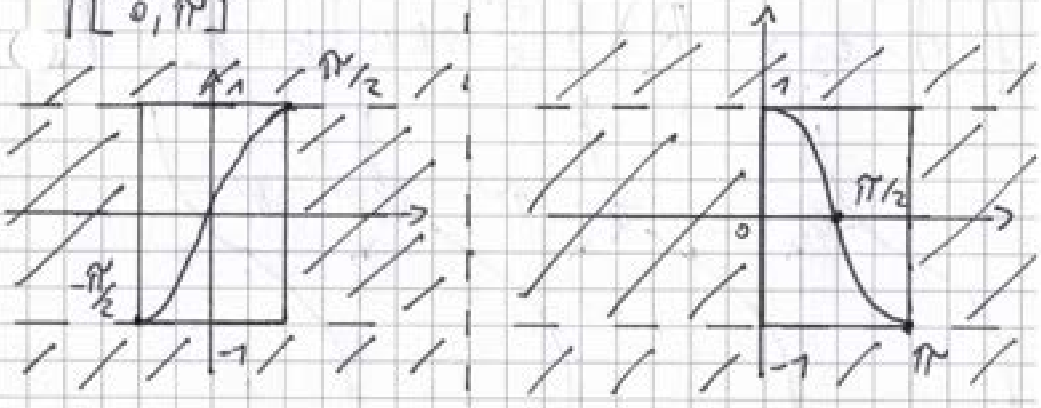
PER INVERTIRLE BISOGNA RESTRINGERLE SIA AL DOMINIO CHE AL CODOMINIO

FUNZIONE sin $\quad f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

FUNZIONE cos $\quad f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

SINUSOIDE RISTRETTA | COSINUSOIDE RISTRETTA

- $f\big|_{[-\pi/2,\, \pi/2]}(x) = \sin x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$
- $f\big|_{[0,\, \pi]}(x) = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$



DA QUESTE RESTRIZIONI SI DEFINISCONO LE FUNZIONI INVERSE:

$\underline{\arcsin}: [-1, 1] \ni y \mapsto x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ t.c.

$y = \sin x, \quad x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ $\boxed{\text{ARCOSENO}}$

$\underline{\arccos}: [-1, 1] \ni y \mapsto x \in [0, \pi]$ t.c.

$y = \cos x, \quad x = f^{-1}(y) = \arccos y$ $\boxed{\text{ARCOCOSENO}}$

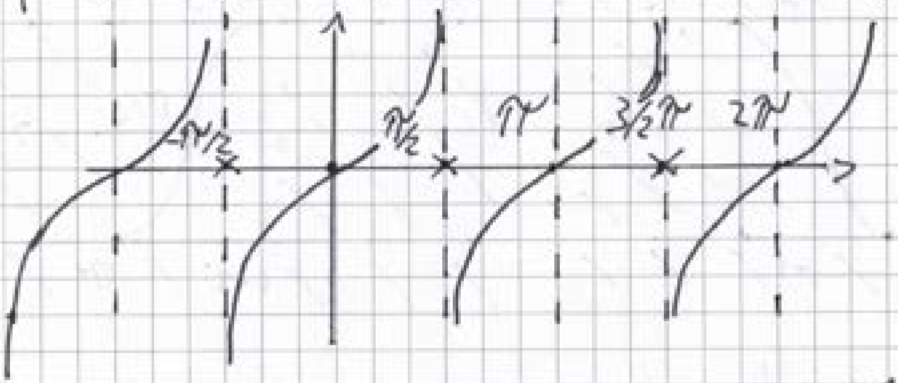
PARLIAMO DI TANGENTI

$\tan = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (tan o tg)

IL GRAFICO DI tan È

UN PO' SPECIALE:

$f(x) = tg\, x : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$



RESTRINGIAMOLA AL FINE DI CREARE LA f^{-1}

$f|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(x) = \tan x :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{ARCOTANGENTE}}$

arctan: $\mathbb{R} \ni y \mapsto \exists!\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ t.c.

$y = \tan x \qquad x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

INSIEMI NUMERICI LIMITATI

$A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$:

• A È LIMITATO SUPERIORMENTE SE

$\overset{def.}{\iff} \exists r \in \mathbb{R} : a \leq r \quad \forall a \in A$

→ IN QUESTO CASO, r SI CHIAMA MAGGIORANTE PER A

- IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI SI CHIAMA:

ESTREMO SUPERIORE DI A = $\sup A$

- SE $\sup A \in A$ SI DICE MASSIMO DI A = $\max A$

• A È INVECE LIMITATO INFERIORMENTE SE

$\overset{def.}{\iff} \exists r \in \mathbb{R} : a \geq r \quad \forall a \in A$

- IN QUESTO CASO, r SI CHIAMA MINORANTE ~~MAGGIORANTE~~ PER A

- IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI SI CHIAMA:

ESTREMO INFERIORE ~~[illegible]~~ DI A = $\inf A$

- SE $\inf A \in A$ SI DICE MINIMO DI A = $\min A$

! SE ESISTE UN $\begin{cases}\text{MAGGIORANTE}\\ \text{MINORANTE}\end{cases}$ NE ESISTONO INFINITI

TEOREMA DELL'ESISTENZA DI SUP A

- SE A È <u>LIMITATO SUPERIORMENTE</u>, $\exists \sup A$
- SE A NON AMMETTE MAGGIORANTI, SI DICE ILLIMITATO SUPERIORMENTE, OVVERO:

$$\forall r \in \mathbb{R} \ \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > r$$

IN QUESTO CASO, PER DEFINIZIONE $\boxed{\sup A = +\infty}$

TEOREMA DELL'$\exists$NZA DI inf A

- SE A È <u>LIMITATO INFERIORMENTE</u>, $\exists \inf A$
- SE A NON AMMETTE MINORANTI, SI DICE ILLIMITATO INFERIORMENTE, OVVERO:

$$\forall r \in \mathbb{R} \ \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < r$$

IN QUESTO CASO, PER DEFINIZIONE $\boxed{\inf A = -\infty}$

SE A È $\begin{cases}\text{ILLIMITATO}\\ \text{LIMITATO}\end{cases}$ SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE SI DICE $\begin{cases}\text{ILLIMITATO}\\ \text{LIMITATO}\end{cases}$

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI $\sup A / \inf A$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A LIMITATO:

- SUPERIORMENTE $\rightarrow$ L È L'ESTREMO SUPERIORE DI A SE:
  - $a \leq L, \forall a \in A$
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A : (\bar{a} > L - \varepsilon)$

- INFERIORMENTE $\rightarrow$ l È L'ESTREMO INFERIORE DI A SE:
  - $a \geq l, \forall a \in A$
  - $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A : (\bar{a} < l + \varepsilon)$

! ε = QUANTITÀ MOLTO PICCOLA

ANCHE LE FUNZIONI POSSONO ESSERE CONSIDERATE LIMITATE/ILLIMITATE:

f È $\begin{cases}\text{LIMITATA SE } \operatorname{Im} f \text{ È LIMITATO}\\ \text{ILLIMITATA SE } \operatorname{Im} f \text{ È ILLIMITATO}\end{cases}$ $\rightarrow$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$

f SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE SE:

DEF. $f(A)$ È LIMITATA SUPERIORMENTE, QUINDI

$\sup f(A) = \sup\limits_A f$ OPPURE $\sup\limits_{x \in A} f(x)$

(SI LEGGE "ESTREMO SUPERIORE DI f IN A" OPPURE "ESTR. SUPERIORE DI $f(x)$ AL VARIARE DI x IN A")

SE $\sup f(A) \in f(A)$ SI DICE MASSIMO DI f IN A:

$\max f(A) = \max\limits_A f$ OPPURE $\max\limits_{x \in A} f(x)$

RICORDA! $f(A)$ È IL CODOMINIO

SE INVECE $f(A)$ È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, ALLORA PER DEFINIZIONE

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$

f SI DICE LIMITATA INFERIORMENTE SE

$f(A)$ È LIMITATO INFERIORMENTE:

$\inf f(A) = \inf\limits_A f = \inf\limits_{x \in A} f(x)$

SE $\inf f(A) \in f(A)$ ALLORA

$\min f(A) = \min\limits_A f$ OPPURE $\min\limits_{x \in A} f(x)$

SE INVECE $f(A)$ È ILLIMITATO INFERIORMENTE:

PER DEFINIZIONE

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$

DI CONSEGUENZA

f È LIMITATA SE $\begin{cases} \text{È LIMITATA SUPERIORMENTE} \\ \text{È LIMITATA INFERIORMENTE} \end{cases}$

f È ILLIMITATA SE $\begin{cases} \text{È ILLIMITATA SUPERIORMENTE} \\ \text{È ILLIMITATA INFERIORMENTE} \end{cases}$

Proprietà caratteristiche di $\sup_A f$, $\inf_A f$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, f: A \to \mathbb{R}$:

• f limitata superiormente:

L è l'estremo superiore di f se:

- $f(x) \leq L, \forall x \in A$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A \; (f(\bar{x}) > L - \varepsilon)$

• f limitata inferiormente:

l è l'estremo inferiore di f se:

- $f(x) \geq l, \forall x \in A$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \in A \; (f(\bar{x}) < l + \varepsilon)$

Disequazioni goniometriche

$\sin x \quad \cos x \quad tg\, x$

Iniziamo da quella più facile

Tangente $tg\, x$, $a \in \mathbb{R}$

Ricordando che la tangente tende a: $+\infty$ andando verso $\pi/2$, $-\infty$ (da 0π) $3/2\pi$

• $tg\, x \leq a$ $(< a)$

$$\frac{3}{2}\pi + k\pi \overset{<}{} x \leq a + k\pi \left(\forall k \in \mathbb{Z} \quad (\dots < x < \dots) \right)$$

spesso sottinteso — $tg\, x < a$

• $tg\, x \geq a$ $(> a)$

$$a + k\pi \leq x < \frac{1}{2}\pi + k\pi \left(\forall k \in \mathbb{Z} \quad (\dots < x < \dots) \right)$$

! Ricorda che in disequazioni con la tangente di secondo grado (o più), lo studio dei segni conviene farlo sul piano cartesiano. (ogni tangente la sua circonf.)

SENO / COSENO

LE DISEQUAZIONI CON SENO E COSENO SI DIVIDONO PER CASI. INIZIAMO DAL

SENO ≤ a $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sin x \le a$	$\sin x < a$
• $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
• $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ $\forall k \in Z$
$-1 < a < 1$ $\pi - a + 2k\pi \le x \le a + 2k\pi$	• $-1 < a < 1$ $--- < x < ---$
• $a = -1$ $x = 3/2\,\pi + 2k\pi$	• $a = -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$	• $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

SENO ≥ a $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sin x \ge a$	$\sin x > a$
• $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$	• $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $a = 1$ $x = \pi/2 + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$	$a = 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $-1 < a < 1$ $a + 2k\pi \le x \le \pi - a + 2k\pi$	• $-1 < a < 1$ $--- < x < ---$
• $a = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$
• $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Coseno $\leq a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

• $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
• $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
• $-1 < a < 1$ $a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi$	• $-1 < a < 1$ $--- < x < ---$
• $a = -1$ $x = \pi + 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$	• $a = -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$	• $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

Coseno $\geq a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

• $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$	• $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $a = 1$ $x = 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$	• $a = 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
• $-1 < a < 1$ $2\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi$	• $-1 < a < 1$ $--- < x < ---$
• $a = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a = -1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}$
• $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$	• $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

TABELLA ESTESA VALORI sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan

RADIANTI	sin	cos	tan	arcsin	arccos	arctan
0	0	1	0	VALORE SENO $\downarrow$	VALORE COSENO $\downarrow$	VALORE TANGENTE $\downarrow$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	ANGOLO	ANGOLO	ANGOLO
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	IN RADIANTI	IN RADIANTI	IN RADIANTI
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$			
$\pi/2$	1	0	$\nexists$			
$2/3\,\pi$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$			
$3/4\,\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1			
$5/6\,\pi$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$			
π	0	-1	0			
$7/6\,\pi$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$			
$5/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1			
$4/3\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$			
$3/2\,\pi$	-1	0	$\nexists$			
$5/3\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$			
$7/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1			
$11/6\,\pi$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$			
2π	0	1	0			

SUCCESSIONI

SONO FUNZIONI DA $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

CON X ILLIMITATO SUPERIORMENTE

QUESTA X SI INDICA CON $\mathcal{N}$

$$f: \mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) \overset{def.}{\Rightarrow} a_n$$

LA SUCCESSIONE SI INDICA CON $\{a_n\}_n$, $\{a_n\}$
(OPPURE CON PARENTESI TONDE)

ES. DI SUCCESSIONI $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$

- $a_n = 1/n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

n:	1	2	3	4	5	6
a_n:	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$

- $a_n = -1^n, \forall n \in \mathbb{N}$

n:	0	1	2	3	4	5	6
a_n:	1	-1	1	-1	1	-1	1

TIPI DI SUCCESSIONI: <u>SUCCESSIONE CONVERGENTE</u>

SIA $\{a_n\}$ LA NOSTRA SUCCESSIONE NUMERICA

ESSA CONVERGE VERSO UN NUMERO $a \in \mathbb{R}$ PER $n \to +\infty$

a VIENE CHIAMATO <u>LIMITE</u> DI $\{a_n\}$

OPPURE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ | $a_n \underset{n \to +\infty}{\to} a$ | $a_n \to a$ | $\lim a_n = a$

<u>DEFINIZIONE DI LIMITE</u>

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu :$

$|a_n - a| < \varepsilon$ OVVERO: $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

! SE UN NUMERO VA VERSO UN PUNTO: - CONVERGE -
SE VA VERSO ∞: - TENDE -

LETTERA GRECA NI $= \nu$

SE SOMMIAMO $+a$ A TUTTI I MEMBRI OTTENIAMO

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

! PIÙ PICCOLO È ε, PIÙ GRANDE DIVENTA ν

! CON $[x]$ SI INTENDE LA PARTE INTERA DI X

VISTO CHE ε È UN NUMERO REALE, CAPITA SPESSO NELLA DISUGUAGLIANZA $|a_n - a| < \varepsilon$ DI TROVARSI UN n IN RELAZIONE CON UN NUMERO REALE:

PER DETERMINARE UN ν : $\forall n > \nu$

Es. $n > 1/\varepsilon \to \nu = [1/\varepsilon] + 1$

SI AGGIUNGE 1 ALLA PARTE INTERA DI $1/\varepsilon$ PER ESSERE SICURI CHE $n > 1/\varepsilon$

<u>TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE</u>

UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE NON PUÒ AVERE 2 LIMITI DISTINTI

DIMOSTRAZIONE

DIAMO PER ASSURDO CHE CI SIANO 2 LIMITI $a_1 \neq a_2$

CHE HANNO DUE $\nu \to \nu_1 \; \nu_2$

SCEGLIAMO COME ε IL VALORE $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

QUINDI, COME NELLA DEFINIZIONE

$\lim a_n = a_1 \quad \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_1| < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

$\lim a_n = a_2 \quad \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a_2| < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

2ε

$\forall n > \nu_1 ; \nu_2$

$|a_1 - a_2|$ LO SCRIVIAMO COME $|a_1 - a_2 + x - x|$

SCEGLIAMO $x = a_n$

- + QUANTITÀ SI ANNULLANO

+ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\geq$

$|(a_1 - a_n) + (-a_2 + a_n)|$ ADESSO PROPRIETÀ TRIANGOLARE DEL VALORE ASSOLUTO

$|a_1 - a_n| + |a_n - a_2| \geq$ QUINDI SE VOGLIAMO USIAMO QUESTO QUI

$\to |a_n - a_1| + |a_n - a_2|$

PERCHÉ SE $|x| < y \wedge z > y \to |x| < z$

$|(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n)| \leq |a_1 - a_n| + |a_2 - a_n|$

SE ESISTONO 2 ν, ALLORA SICURAMENTE QUELLO PIÙ GRANDE VALE PER ENTRAMBI

Es. $a_1 : n > 5 \quad a_2 : n > 7 \to n > 7$

QUINDI INDICHIAMO IL $\max\{\nu_1, \nu_2\}$ CON $\bar{\nu}$

ADESSO SE $x < y \wedge z < w \to x + z < y + w$

PRENDIAMO $x = |a_n - a_1|$
$z = |a_n - a_2|$ E $y = w = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

OTTENIAMO

$$|a_n - a_1| + |a_n - a_2| < |a_1 - a_2|$$

MA PRIMA DICEVAMO CHE

$|a_n - a_1| + |a_n - a_2| \geq |\cancel{-a_n} + a_1 + \cancel{a_n} - a_2|$

TROVIAMO CHE $x \geq y \wedge x < y$ ↯ $\forall \bar{\nu}$

! $\bar{\nu}$ VUOL DIRE CHE ANDAVA BENE SIA

SE PRENDEVI $|a_n - a_1| < \ldots$

CHE $|a_n - a_2| < \ldots$

E AGGIUNGEVI A SINISTRA UN NUMERO, ED A DESTRA UN ALTRO NUMERO PIÙ GRANDE

"L'OPPOSTO" DI CONVERGENZA È

DIVERGENZA

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE:

ESSA DIVERGE

NEGATIVAMENTE — SE — POSITIVAMENTE

$$\forall M > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu$$

$a_n < -M$ $\qquad\qquad$ $a_n > M$

$\lim a_n = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim a_n = +\infty$

$\{a_n\}$ TENDE A $-\infty$ $\qquad\qquad$ $\{a_n\}$ TENDE A $+\infty$

! SENZA VALORE ASSOLUTO, PERCHÈ GIÀ C'È LA DIVISIONE $-\infty / +\infty$

! • ε = QUANTITÀ MOLTO PICCOLA

M = QUANTITÀ MOLTO GRANDE

ν RIMANE $[x] + 1$

ALCUNE DEFINIZIONI:

SE $\{a_n\}$:

- CONVERGE AD UN PUNTO / DIVERGE = REGOLARE
- NON AMMETTE LIMITE = IRREGOLARE
- CONVERGE A 0 CON $n \to +\infty$ = INFINITESIMA
- TENDE A $\pm\infty$ = INFINITA

SI DICE LIMITATA SE

$$\exists M > 0 : |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

OVVERO $\quad -M \leq a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Es. $\{\sin n\} \to |\sin n| \leq 1$

$\{1/n\} \to |1/n| \leq 1$

$\{(-1)^n\} \to |(-1)^n| = 1$

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \to \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1$

TEOREMA: CONVERGENZA IMPLICA LIMITATEZZA

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE $\to$ È LIMITATA

(NON VALE IL CONTRARIO)

DIMOSTRAZIONE

PER DEFINIZIONE $a_n \to a \quad \varepsilon = 1 \quad \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}:$

$$\forall n > \bar{\nu} \quad |a_n - a| < 1$$

$|a_n|$ PUÒ ESSERE SCRITTA $|a_n - a + a| \to \underbrace{|(a_n - a) + a|}_{\text{ASSOCIATIVA}}$

PER LA PROPRIETÀ TRIANGOLARE V.A.

$$|(a_n - a) + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

È MINORE DI 1 $\to$

QUINDI $|a_n| < 1 + |a| \quad \forall n > \bar{\nu}$

COME M PRENDIAMO IL VALORE PIÙ GRANDE FRA LE a_x: $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots |a_{\bar{\nu}}|, 1 + |a|\}$

FINO ALL'ELEMENTO DOPO IL LIMITE

VISTO CHE $|a_n| < 1 + |a|$, (SICURAMENTE SARÀ MINORE DELL' ~~ELEMENTO~~ ELEMENTO PIÙ GRANDE DELL'INSIEME

QUINDI $|a_n| \le M \leftarrow$ DEF. LIMITATA

OPERAZIONI CON I LIMITI

PRESE DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$

1) $\{a_n \pm b_n\}$ CONVERGE AD $a \pm b$

2) $\{a_n \cdot b_n\}$ CONVERGE AD $a \cdot b$

3) $\{a_n \cdot b_n\}$ CONVERGE AD $a/b \iff b \neq 0 \wedge b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONI

1) $\{a_n + b_n\}: \ a_n + b_n \to a + b$

SCRIVO LE DEFINIZIONI DI LIMITE

- $a_n \to a \iff \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists \nu_1 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \nu_1$

- $b_n \to b \iff \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists \nu_2 \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \nu_2$

CONTINUA - - - $\to$

TESI:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : |(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon \quad \forall n>\nu$$

USO PROP. TRIANGOLARE SU QUESTO:

$$\le |a_n-a|+|b_n-b| < \varepsilon$$

SE QUESTO È MINORE DI UN X, LO È ANCHE QUELLO DI SOPRA

DIMOSTRIAMO CHE IL SECONDO È $<\varepsilon$

SE PRENDIAMO $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ ALLORA SICURAMENTE VALGONO SIA $a_n \to a$ CHE $b_n \to b$ OVVERO

$$|a_n-a| < \varepsilon/2 \ , \ |b_n-b| < \varepsilon/2$$

CONSIDERANDO CHE $x_1<y_1$, $x_2<y_2 \to x_1+x_2<y_1+y_2$

$$\to |a_n-a|+|b_n-b| < \varepsilon/2+\varepsilon/2$$ OVVERO

$$|a_n-a|+|b_n-b| < \varepsilon$$ CHE IMPLICA

$$\boxed{|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon} \quad \checkmark$$

2) PRENDO UN ε COME $\varepsilon/2$[redacted] >0

$\cdot \ a_n \to a \Leftrightarrow \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n-a| < \varepsilon/2$[redacted]$, \forall n>\nu_1$

$\cdot \ b_n \to b \Leftrightarrow \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |b_n-b| < \varepsilon/2$[redacted]$, \forall n>\nu_2$

TESI

$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon \quad \forall n>\nu$$

AGGIUNGO/SOTTRAGGO $a_n \cdot b$

$$|a_n \cdot b_n + a_n \cdot b - a_n \cdot b - a \cdot b|$$ RIASSOCIO E METTO IN EVIDENZA

$$|a_n \cdot (b_n-b) + b(a_n-a)|$$ PROP. TRIANGOLARE V.A.

$$\le |a_n(b_n-b)| + |b(a_n-a)|$$ PROP. VALORI ASSOLUTI $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$|a_n| \cdot |b_n-b| + |a_n-a| \cdot |b| \le M \cdot |b_n-b| + |a_n-a| \cdot |b|$$

VISTO CHE ESISTE SEMPRE UN $M>0$ t.c. $|a_n| \le M$

VISTO CHE PER $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ SIA $|a_n-a|<\varepsilon/2$, CHE $|b_n-b|<\varepsilon/2$

$$< M \cdot \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \cdot |b| = \varepsilon/2 (M+|b|)$$ TESI DIMOSTRATA

VISTO CHE M SI PUÒ SCEGLIERE A PIACERE $>2 \to \checkmark$

APPLICAZIONE DELLA PROPRIETÀ 2

PRENDO UNA SUCCESSIONE INFINITESIMA $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \rightarrow$ PROP. 2 $\lim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0$

$\rightarrow$ APPLICANDO RIPETUTAMENTE $\lim \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$ $\alpha \in \mathbb{N}$

MA VISTO CHE LO 0 ANNULLA QUALSIASI PRODOTTO

$\left\{c \cdot \frac{1}{n}\right\}$: $\lim \frac{c}{n} = 0$ C'È UNA SUCCESSIONE COSTANTE

DA QUI SI PUÒ DEDURRE CHE IL LIMITE DI UN POLINOMIO CON GRADO MASSIMO AL DENOMINAT. È 0, PERCHÉ MESSO IN EVIDENZA LA VARIABILE SI OTTIENE $\left\{\frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} \cdot \ldots\right\}$ $n^{\alpha}/n^{\alpha+1} = \frac{1}{n} \rightarrow$

$\rightarrow \lim \frac{1}{n} \cdot \ldots = 0 \cdot \ldots = 0$ MESSO 1, MA BASTAVA CHE FOSSE >0 ES. $n^{\alpha+5}$

FORME DETERMINATE

- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \nearrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$; $a_n \searrow -\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$ $\Rightarrow a_n + b_n \nearrow +\infty$, $\searrow -\infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |a_n \cdot b_n| \rightarrow +\infty$ (SEGNO DIPENDE DAL PRODOTTO DEI SEGNI)
- $a_n \rightarrow \pm\infty$, $b_n \pm\infty \Rightarrow |a_n \cdot b_n| \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n/b_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |b_n/a_n| \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$, $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n/b_n| \rightarrow +\infty$

FORME INDETERMINATE $[+\infty-\infty]$

$a_n = xn + c \to +\infty$
$b_n = -yn + d \to -\infty$

$a_n + b_n$: SE $x = y \to c + d$; $x > y \to +\infty$; SE $y > x \to -\infty$

SE INVECE a_n E b_n HANNO GRADO DIFFERENTE $a_n + b_n \to$ VERSO IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE DI GRADO MASSIMO

$[\infty / \infty]$

$a_n = xn_1 \to +\infty$
$b_n = yn_2 \to +\infty$

a_n / b_n: SE n_1 E n_2 HANNO LO STESSO GRADO $\to x/y$

SE HANNO GRADO DIFFERENTE:

x GRADO MASSIMO $\to +\infty$

y GRADO MASSIMO $\to 0$

$[0 \cdot \infty]$

$a_n = x/n_1 \to 0$
$b_n = yn_2 \to +\infty$

$a_n \cdot b_n$: STESSO GRADO $\to x/y$; n_1 GRADO MAX $\to 0$; n_2 GRADO MAX $\to +\infty$

TEOREMA DEL CONFRONTO:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

CONSIDERIAMO $\{a_n\}$ CON $a > 0$:

$\exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n > \nu$

DIMOSTRAZIONE

PRESO UN $\varepsilon = a/2$

$a_n \to a \Rightarrow \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu}, |a_n - a| < a/2$

$\to -a/2 < a_n - a < a/2$ SOMMO a A TUTTI

$\to a/2 < a_n < \frac{3}{2} a$

VISTO CHE $a > 0$, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA MINORANZA, $a_n > 0$ $(\forall \nu > \bar{\nu})$

COROLLARIO

1) SE IN $a_n \to a$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow a \geq 0$

2) PRESI $a_n \to a$, $b_n \to b$ SE $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

Dimostrazione Corollario 1

Diciamo per assurdo $a<0$ ovvero $-a>0$

Per il teorema della permanenza del segno risulta che se $a<0$, $\exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}: a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lightning$ visto che $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione Corollario 2

Consideriamo una successione ausiliaria $\{c_n\}$

$c_n = b_n - a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (per ipotesi $b_n \geq a_n \to c_n \geq 0$)

(se $c_n = 0 \to b_n = a_n$)

Il limite di c_n sarà $b-a$

Per il corollario 1, se $c_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ allora lo sarà anche il suo limite $b-a \geq 0$

ovvero $a \leq b$

Teorema dei carabinieri

Consideriamo le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

t.c. $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Tesi: se $a_n \to a \wedge b_n \to a$ allora $c_n \to a$

Dimostrazione

$$\begin{array}{l} a_n \to a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \\ b_n \to a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \end{array} \forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \\ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right. \text{t.c.} \begin{array}{l} |a_n - a| < \varepsilon \\ |b_n - a| < \varepsilon \end{array}$$

ovvero

$$\forall n > \begin{cases} \nu_1 \\ \nu_2 \end{cases}$$

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$

$\forall n > \nu$

Vogliamo che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$

Per ipotesi

se $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ allora $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \ \forall n > \bar{\nu}$

Esempio $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ CON $-1 \le \sin \le 1$

TUTTO $\cdot 1/n \to -1/n \le \frac{\sin}{n} \le 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\to \lim 1/n = \lim -1/n = 0$

$\to \quad 0 \le \lim \frac{\sin n}{n} \le 0 \to \lim \frac{\sin n}{n} = 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO

PER SUCCESSIONI INFINITE

CONSIDERIAMO $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

RISULTA CHE

1) SE $a_n \to +\infty$ ALLORA $b_n \to +\infty$

2) SE $b_n \to -\infty$ ALLORA $a_n \to -\infty$

DIMOSTRAZIONE 1

FISSATO UN $M > 0$: $a_n \to +\infty$ SE $\exists \bar{\nu}$:

$a_n > M, \forall n > \bar{\nu}$

PER IPOTESI $b_n \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $- - - - \to$

$\forall n > \bar{\nu},\ a_n > M \Rightarrow b_n \ge a_n > M$

$\to b_n > M \quad \forall n > \bar{\nu}$

TEOREMA SE $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

ESPLICITO LE SUCCESSIONI

- $a_n \to 0 \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}, |a_n - 0| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$
- $|a_n| \to 0 \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}, ||a_n - 0|| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$

OVVERO $|a_n| < \varepsilon$, $||a_n|| < \varepsilon$

$|x|$ ∧ $||x||$ SONO DUE FORMULE EQUIVALENTI

TEOREMA DEL PRODOTTO TRA UNA SUCCESSIONE LIMITATA ED UNA SUCCESSIONE INFINITESIMA

TESI SE $\{a_n\}$ È LIMITATA

E $\{b_n\}$ È INFINITESIMA

ALLORA $\{a_n \cdot b_n\}$ È INFINITESIMA continua (continua) →

PRODOTTO TRA SUCCESSIONE < SUCCESSIONE LIMITATA / SUCCESSIONE INFINITESIMA

↓

È INFINITESIMA

- $\{a_n\}$ È LIMITATA: $\exists M>0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{b_n\}$ È INFINITESIMA: $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : |b_n - 0| < \varepsilon$

(SE SCEGLIAMO $\varepsilon/M \rightarrow |b_n| < \varepsilon/M$)

(TESI)

- $\{a_n \cdot b_n\}$ È INFINITESIMA, OVVERO

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n>\nu, \ |a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$$

RISCRIVO COME

$|a_n| \cdot |b_n|$ VISTO CHE $|a_n| \leq M$

$|a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot b_n$ PONIAMO $< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

VISTO CHE $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

QUINDI ANCHE $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$ (PERCHÉ DEVE VALERE $|b_n| < \varepsilon/M$)

SUCCESSIONI ESTRATTE

SE DI UNA SUCCESSIONE VENGONO PRESI SOLTANTO ALCUNI VALORI, LA SUCCESSIONE CHE NE RISULTA SI CHIAMA ESTRATTA

Es. $\mathbb{N} \ni n \mapsto n \in \mathbb{N}$ ESTRAGGO $\mathbb{N} \ni n \mapsto k_n \in \mathbb{N}$

SUCCESSIONE DI INDICI

- UNA SUCCESSIONE IRREGOLARE PUÒ AVERE COME ESTRATTE DELLE SUCCESSIONI REGOLARI.
- UNA SUCCESSIONE REGOLARE HA COME ESTRATTE DELLE SUCCESSIONI REGOLARI
- DI CONSEGUENZA, SE CI SONO DELLE ESTRATTE DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ CON LIMITI DIVERSI, $\{a_n\}$ NON AMMETTE LIMITI, OVVERO È IRREGOLARE

LIMITI NOTEVOLI

SUCCESSIONE ESPONENZIALE $\{a^n\}$

$$\lim a^n = \begin{cases} \cdot\ a^n \to +\infty & \text{SE } a>1 \text{ (INFINITA)} \\ \cdot\ a^n \to 1 & \text{SE } a=1 \text{ (COSTANTE)} \\ \cdot\ a^n \to 0 & \text{SE } -1<a<1 \\ \cdot\ \nexists & \text{SE } a<-1 \text{ (INFINITESIMA)} \\ \cdot\ a^n \to 0 & \text{SE } a=0 \text{ (COSTANTE)} \end{cases}$$

$\cdot \lim \sqrt[n]{a} = a^{\overset{\to 0}{1/n}} \Rightarrow \lim = 1$

(CON $a>0$)

$\cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1$

$\cdot \lim \sqrt[n]{n^b} = 1$ CON $b \in R$

LIMITI NOTEVOLI CON OP. TRIGONOMETRICHE

PRESA UNA $a_n \to 0$:

- $\lim \sin a_n = 0$
- $\lim \sin 1/n = 0$ {VISTO CHE $\sin 0 = 0$}
- $\lim \sin n \ \nexists$ (SUCCESSIONE PERIODICA)

PRESA $a_n \to 0$:

- $\lim \cos a_n = 1$
- $\lim \cos 1/n = 1$
- $\lim \cos n \ \nexists$ (PERIODICA, LIMITATA)

PRESA $a_n \to 0$ CON $a_n \neq 0$, $\forall n \in N$:

- $\lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ $\left(\text{"}\frac{0}{0} = 1\text{"}\right)$
- $\lim \frac{\cos a_n}{a_n} = +\infty$ $\left(\text{"}\frac{1}{0} = \infty\text{"}\right)$
- $\lim \frac{1-\cos a_n}{a_n} = 0$ $\left(\text{"}\frac{1-1}{0} = 0\text{"}\right)$

CON 0 INTESO COME N INFINIT. PICCOLO (infinitamente piccolo)

SUCCESSIONI MONOTONE

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE, ESSA SI DICE:

• CRESCENTE (STRETTAMENTE CRESCENTE)	• DECRESCENTE (STRETTAMENTE DECRESCENTE)
$a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in N$	$a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in N$
$(a_n < a_{n+1})$	$(a_n > a_{n+1})$

ESSA È MONOTONA SE SI VERIFICA UNA DI QUESTE (una di queste) $\leq, <, \geq, >$

IN PARTICOLARE, SE ESSA È STRETTAMENTE $>, <$ SI DICE STRETTAMENTE MONOTONA

TEOREMA DI REGOLARITÀ SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

OGNI SUCCESSIONE MONOTONA È REGOLARE

IN PARTICOLARE

- SE È ANCHE LIMITATA, CONVERGE $\Rightarrow a_n \to a$
- SE NON È LIMITATA, DIVERGE $\Rightarrow a_n \to \pm\infty$

DIMOSTRAZIONE 1: $\left(\begin{array}{l} \text{CRESCENTE} \\ + \\ \text{LIMITATA} \end{array} \right. \to$ CONVERGENTE

$$a_n \leq a_{n+1} \quad , \quad |a_n| \leq M$$

VISTO CHE OGNI a_n È PIÙ PICCOLO DI a_{n+1}, a_0 È IL VALORE PIÙ PICCOLO, OVVERO

a_0 È IL LIMITE INFERIORE

VISTO CHE $\exists M \geq a_n$, ALLORA ESISTE ANCHE L'ESTREMO SUPERIORE (PIÙ PICCOLO $M \geq a_n$)

$\to$ PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI $\sup a_n$

$\sup a_n = L$ SE
- $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : a_{\bar{\nu}} > L - \varepsilon$

QUINDI ABBIAMO:

MAGGIORANTE

- $a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

- VISTO CHE $a_n \leq a_{n+1} \to a_{\bar{\nu}} \leq a_n \quad \forall n > \bar{\nu}$
- ALLO STESSO TEMPO $a_{\bar{\nu}} > L - \varepsilon$

COMBINIAMO LE MAGGIORAZIONI

$$L - \varepsilon < a_{\bar{\nu}} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$
$$\forall n > \bar{\nu}$$

QUINDI $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n > \bar{\nu} \iff$

$\iff -\varepsilon < a_n - L < +\varepsilon \iff$

$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n > \bar{\nu}$ CHE È LA DEF. DI LIMITE

$$\lim \{a_n\} = L$$

$\{a_n\}$ CONVERGE AL LIMITE SUPERIORE DI $\{a_n\}$

- LO STESSO RAGIONAMENTO VALE AL CONTRARIO CON $\{a_n\}$ DECRESCENTE, LIMITATA

DIMOSTRAZIONE 2: CRESCENTE + ILLIMITATA → DIVERGENTE

SIA $\{a_n\}$ CRESCENSE, NON LIMITATA

OVVERO $a_n \leq a_{n+1}$, $\sup a_n = +\infty$

SE UNA SUCCESSIONE È ILLIMITATA SUPERIORMENTE → NON AMMETTE MAGGIORANTI $\cdot\ \forall k>0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : a_{\bar{\nu}} > K$

ALLO STESSO TEMPO $\cdot\ \forall n > \bar{\nu}, a_n \geq a_{\bar{\nu}}$

- QUINDI $a_n \geq a_{\bar{\nu}} > K$ OVVERO

$$a_n > K \quad \forall n > \bar{\nu}, \forall k > 0$$

OVVERO CRESCENTE ~~ILLIMITATA~~ + ILLIMITATA → DIVERGENTE

$[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[ecc.]$ FORME INDETERMINATE $[\ ]$

! NUMERO DI NEPERO: $e = 2.7182....$

DALLA FORMULA $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ SI POSSONO RICAVARE DIVERSI LIMITI NOTEVOLI:

ALTRI LIMITI NOTEVOLI

- $a_n \to \pm\infty \Rightarrow \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

CONSIDERANDO SOLO LE PARTI INTERE DI a_n

- $b_n \to 0 \Rightarrow (1 + b_n)^{1/b_n} \to e$

CONSIDERANDO $a_n = 1/b_n \to \infty$

$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

- $\dfrac{\log_a (1 + b_n)}{b_n} \to \log_a e \quad \forall a > 0, a \neq 1$

VISTO CHE $\log_a (1 + b_n)^{1/b_n} \to \log_a e$

$1/b_n$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{1-\cos a_n}{a_n} = 0$

DOPPIONI DI 5 PAGINE INDIETRO PRESENTI

DIMOSTRATO COSÌ $\frac{(1-\cos a_n)\cdot(1+\cos a_n)}{a_n \cdot (1+\cos a_n)} =$

$= \frac{1^2-\cos^2 a_n}{a_n(1+\cos a_n)} \cdot \frac{a_n}{a_n} =$

$\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{a_n}{(1+\cos a_n)} =$

$\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_n}{1+\cos a_n}\right)$

$\lim = 1$ $\lim = 0/2 = 0$

$\lim = 1 \cdot 0 = 0$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = 1/2$

(COME SOPRA MA SENZA $\cdot\frac{a_n}{a_n}$, QUINDI IL LIMITE DIVENTA $1 \cdot 1/2$)

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\arcsin a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\tan a_n}{a_n} = 1$

CRITERIO DI RAPPORTO PER SUCCESSIONI

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE t.c. $\{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

DEFINIAMO $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$:

DICIAMO CHE $b_n \to b < 1$ IMPLICA $a_n \to 0$

PROVIAMO AD APPLICARE SUGLI INFINITI:

ORDINE DEGLI INFINITI

CON $a>1$, $b>0$: $\log_a n < n^b < a^n < n! < n^n$

POSSIAMO DIMOSTRARE CON QUESTO CRITERIO CHE

$$\lim \frac{\log_a n}{n^b} = \lim \frac{n^b}{a^n} = \lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

SALTEREMO QUESTA DIMOSTRAZIONE (SEMPRE CON $a>1, b>0$)

• $\lim \frac{n^b}{a^n} = 0$ CHIAMIAMO $a_n = \frac{n^b}{a^n}$

VEDIAMO SE $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to b<1$

$$b_n = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \Big/ \frac{n^b}{a^n} = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^b} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a}$$

CON $n \to +\infty$, $\frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow 1^b = 1$

$1/a$ (CON $a>1$) È $<1 \to \lim b_n = 1 \cdot x$ CON $x<1$ $\to$

$\to b_n \to b < 1$

QUINDI $a_n = \frac{n^b}{a^n} \to 0$

• $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ CHIAMANDO $a_n = \frac{a^n}{n!}$

STESSA MODALITÀ:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{a^n}} =$$

$$a \cdot n!/n! \cdot (n+1) = a/_{n+1} \xrightarrow[\text{CON } n \to +\infty]{} 0$$

$b_n \to b$ CON $b<1 \Rightarrow a_n = a^n/_{n!} \to 0$

• $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ $a_n = n!/n^n$

$$b_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = n^n/(n+1)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = 1/\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\text{LIMITE} = e}$$

QUINDI $\lim b_n = \frac{1}{e} < 1$

$a_n = n!/n^n \to 0$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

ASSEGNATO a_1 , $a_{n+1} = f(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

CON f CONTINUA IN $\mathbb{R}$

Esempi

- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
- $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -a_n/2 - 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

UN ALTRO MODO PER SCRIVERE UNA SUCCESSIONE RICORSIVA, È IL SEGUENTE:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sqrt{3a_n} & n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \end{cases}$$

TEOREMA DEL PONTE

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\underline{x_0 \in \mathcal{D}X}$

x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{def.}{\iff}$

$\overset{def.}{\iff} \forall \{x_n\} \subseteq X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in X$, $\underline{0 < |x - x_0| < \delta}$

$\underline{|f(x) - l| < \varepsilon}$

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

VISTO CHE $|\ldots| \geq 0$, EQUIVALE A DIRE $x - x_0 \neq 0$ OVVERO $x \neq x_0$

PERCHÈ STIAMO STUDIANDO IL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE QUANDO SI AVVICINA AD UN CERTO PUNTO, SENZA PERÒ MAI TOCCARLO

DIMOSTRAZIONE *

* **DIMOSTRAZIONE** PER DOPPIA IMPLICAZIONE

① → ②   DICIAMO PER ASSURDO ① V, ② F

NEGHIAMO ②: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in X$ t.c.

$$0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

SCELGO $\delta = \frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, QUINDI DEVE ANCHE VALERE $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists x \in X :$

$$0 < \underbrace{|x - x_0|}_{n \to +\infty} < \frac{1}{n}, |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

0   0 PER $n \to +\infty$

QUINDI $x \to x_0$

MA PER ① SAPPIAMO CHE $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x) \to l$$

QUINDI CI TROVIAMO CON

$$f(x) \to l \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon \ \lightning$$

DI CONSEGUENZA ① → ②

② → ①

PRENDIAMO UN

?

$$\{x_n\} \subseteq X, x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to x_0 \ (f(x_n) \to l)$$

NOTO CHE   INOLTRE x_n TENDE A x_0 SE E SOLO SE

$0 < |x - x_0|$

$\forall \varepsilon = \delta > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} :$

$\forall n > \nu \ \ 0 < |x - x_0| < \delta$

MA QUESTE SONO TUTTE CONDIZIONI DEL

②: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_n \in X$

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \to |f(x_n) - l| < \varepsilon \ \forall n > \nu$$

MA QUESTO È COME DIRE

$$f(x_n) \to l \ \text{o} \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

QUINDI SE VALGONO TUTTE LE CONDIZIONI PER ② VALE $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$

OVVERO ② → ①

Mi sono accorta all'ultimo che mancava. Non ce l'ho fatta a rifare tutto da capo, sorry, l'ho buttata lì :/

QUESTO VALE ANCHE SE IL LIMITE È $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty) \overset{def.}{\iff}$$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to +\infty \ (-\infty)$
- $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ f(x) > M \ (f(x) < -M)$

VISTO CHE ANCHE $\pm\infty$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{R}$, SE X È ILLIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) SI PUÒ CALCOLARE IL LIMITE PER $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)

LIMITI DI FUNZIONE CON X CHE TENDE A $\pm\infty$

PRESI $X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset,\ X$ illimitato sup., $f: X \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \overset{def.}{\iff}$$

(IN TEORIA MANCA $+\infty \in DX$, MA ∞ LÌ È DI DEFAULT)

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall x \in X,\ x > r,\ |f(x) - l| < \varepsilon$

RAGGIO DELL'INTORNO

SCRITTURA ALTERNATIVA

$$\forall x \in \,]r, +\infty[\, \cap X$$

IN QUESTO CASO, IL LIMITE DI $f(x_n)$ ERA FINITO, MA PUÒ ANCHE ESSERE $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \overset{def.}{\iff}$$

$\pm\infty$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to +\infty \ (-\infty)$
- $\forall M > 0\ \exists r > 0 : \forall x \in X^{x > r}\ f(x) > M \ (< -M)$

LA STESSA COSA PUÒ ESSERE FATTA CON X illimitato inf. ED $x \to -\infty$

QUANDO STUDIAMO I LIMITI, CONSIDERIAMO SEMPRE L'INTORNO DI x_0. SI POSSONO PERÒ VERIFICARE DELLE CONDIZIONI IN CUI GLI INTORNI DESTRI E SINISTRI SI COMPORTANO DIVERSAMENTE. QUINDI CONVIENE STUDIARE I LIMITI DEGLI INTORNI SEPARATAMENTE:

$$x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$\overset{-}{I}_\delta(x_0) \qquad \overset{+}{I}_\delta(x_0)$$

$$]x_0 - \delta, x_0] \quad \cup \quad [x_0, x_0 + \delta[$$

SE I DUE LIMITI OTTENUTI SONO DIVERSI,

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

! QUANDO DICIAMO $\lim f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

INTENDIAMO CHE l PUÒ ESSERE ANCHE $\pm \infty$

LIMITI DI INTORNI

– $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{def.}{\iff}$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X, \ x_n > x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad x_0 < x < x_0 + \delta$ $\quad |f(x) - l| < \varepsilon$

– $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X, \ x_n < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad x_0 - \delta < x < x_0$ $\quad |f(x) - l| < \varepsilon$

--> SIANO $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, \ f: X \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \Delta X$

RISULTA CHE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$:

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n > x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \pm\infty$
- $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ x_0 < x < x_0 + \delta,\ f(x) > M$ $(f(x) < -M)$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$:

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n < x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \pm\infty$
- $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ x_0 + \delta < x < x_0,\ f(x) > +M$ $(f(x) < -M)$

Limiti per funzioni elementari

$f(x) = a^x$:

$0 < a < 1$	$a > 1$	$a < 0$
$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$	Non ammette limite
$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$a = 1$: $\lim = 1$; $a = 0$: $\lim = 0$

$f(x) = \log_a x$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

! Per i limiti di funzione valgono le forme determinate/indeterminate delle successioni

Limiti per funzioni composte

presi $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$

t.c. $f(X) \subseteq Y$, $x_0 \in DX$, $\leftarrow$ (x_0 punto di accumulazione per X)

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

diciamo che $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

Infiniti ed Infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$

$\left(\begin{array}{l} x_0 = +\infty : X \text{ illimitata sup} \\ x_0 = -\infty : X \text{ --- inf.} \end{array} \right)$

f è infinitesima al tendere di x ad x_0

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$:

Se prendiamo due funzioni $f, g: X \to \mathbb{R}$ infinitesime

Diremo che:

1) f, g sono infinitesime dello stesso ordine $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) f è infinitesimo di ordine superiore a $g \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$

3) f è infinitesimo di ordine inferiore a $g \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \pm\infty$

4) f e g sono infinitesime non confrontabili $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

"Funzioni supposte infinite" cit. Annamaria Barbagallo

---

f è infinita al tendere di x ad x_0

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Se prendiamo due funzioni f, g infinite,

Diremo che:

1) f e g sono infinite dello stesso ordine $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) f È INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A $g \overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \pm\infty$

3) f È INFINITO DI ORDINE INFERIORE A $g \overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$

4) f E g SONO INFINITE NON CONFRONTABILI $\overset{def.}{\iff} \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$

$f_1, f_2, \dots f_n$

$g_1, g_2, \dots g_n$ FUNZIONI INFINITESIME PER $x \to x_0$

SE
- $f_2, f_3 \dots f_n$ SONO INFINITESIME DI ORDINE SUPERIORE A f_1
- $g_2, g_3 \dots g_n$ SONO INFINITESIME DI ORDINE SUPERIORE A g_1

ALLORA RISULTA CHE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots g_n(x)} = \lim_{x \to x_0} f_1(x)/g_1(x)$$

DIMOSTRAZIONE

SE METTESSIMO $f_1(x)$ IN EVIDENZA, OTTERREMMO

$f_1(x) \cdot \left(1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} + \frac{f_3(x)}{f_1(x)} + \text{ecc.}\right)$ NOTIAMO CHE

$(f_{2,3 \dots n})$ $\underbrace{f_n(x)/f_1(x)}_{0}$ HA SEMPRE IL GRADO MASSIMO AL NUMERATORE

QUINDI AVREMMO $f_1(x) \cdot (1 + 0 + 0 + \text{ecc.})$

STESSA COSA AL DENOMINATORE $(g) \to \frac{f_1(x) \cdot 1}{g_1(x) \cdot 1}$

LO STESSO PRINCIPIO SI APPLICA AGLI INFINITI, CON L'UNICA ECCEZIONE CHE $f_2, f_3 \dots f_n$ E $g_2, g_3 \dots g_n$ SONO INFINITI DI ORDINE INFERIORE A f_1, g_1

FUNZIONI CONTINUE

PRESI $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f: X \to \mathbb{R}, x_0 \in X$

f SI DICE CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \iff$

def. $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

OVVERO

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

DISTINGUO DUE CASI

DOVE • $x_0 \in DX$

• $x_0 \notin DX$

SCRITTO IN MODO FORMALE

• $x_0 \in X \cap DX \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

• $x_0 \in X \setminus DX \to X$ È UN PUNTO ISOLATO:

$\exists \bar{\delta} > 0$ t.c. $]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[\cap X = \{x_0\}$

QUINDI SE SCELGO L'INTERVALLO $]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[$

NELLA FORMULA DI CONTINUITÀ:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{\delta}>0\ \forall x\in X\cap]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[$$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

L'UNICO X IN QUESTO INTERVALLO È X_0

$$|f(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon \rightarrow 0<\varepsilon$$

OVVERO, UNA FUNZIONE È SEMPRE CONTINUA NEI PUNTI ISOLATI

SE f È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI X

f SI DICE CONTINUA IN X

ADESSO VEDIAMO QUANDO f NON È CONTINUA

CASI SENZA CONTINUITÀ PER $x\in X\cap DX$

LE CONDIZIONI PER LA CONTINUITÀ SONO:

1) $\exists f(x_0)$ PER $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2) $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

3) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

SE UNA DELLE 3 NON È SODDISFATTA, ABBIAMO UN PUNTO DI NON CONTINUITÀ.

CI SONO 3 TIPI DI DISCONTINUITÀ:

1) X_0 È PUNTO DI DISCONTINUITÀ (P.D.D) DI PRIMA SPECIE $\longleftrightarrow$

def. $\longleftrightarrow$ $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ LIMITI FINITI

$\neq$

MA I LIMITI SONO DIVERSI

LA DISTANZA IN VALORE ASSOLUTO DEI LIMITI OVVERO LA LORO DIFFERENZA, SI DICE: SALTO DI DISCONTINUITÀ $S=|\lim 1-\lim 2|$

(valore assoluto)

2) x_0 È P.D.D. DI <u>SECONDA SPECIE</u> $\overset{def.}{\longleftrightarrow}$ ALMENO UNO DEI DUE LIMITI

- $\nexists$
- È INFINITO, OVVERO $\lim\limits_{x \to x_0^{+(-)}} f(x) = \pm\infty$

(POSSONO ANCHE CAPITARE SITUAZIONI IN CUI x_0 È PUNTO DI DISCONTINUITÀ SIA PER $x \to x_0^+$ CHE PER $x \to x_0^-$)

3) x_0 È P.D.D. DI <u>TERZA SPECIE</u> (O ELIMINABILE)

$$\overset{def.}{\longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \wedge$$

- $\lim 1° = \lim 2° \neq f(x_0)$
- $\nexists\, f(x_0)$

SI DICE ANCHE ELIMINABILE PERCHÉ SI PUÒ DEFINIRE UNA FUNZIONE $\tilde{f}(x)$ UGUALE ALLA PRIMA, TRANNE CHE NEL PUNTO $f(x_0)$ CHE VIENE SOSTITUITO CON UN VALORE ACCETTABILE, ELIMINANDO COSÌ LA DISCONTINUITÀ

<u>TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO PER FUNZIONI CONTINUE</u>

PRESI $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0 \in X, f: X \to \mathbb{R}$

$f(x_0) > 0$ CON f CONTINUA IN x_0,

$$\exists \delta : f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$$

DIMOSTRAZIONE

PRENDO COME ε, $\frac{f(x_0)}{2} > 0$

PER LA DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ:

$$\exists \bar{\delta} > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \cap \left]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}\right[\quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

SVOLGO I CALCOLI

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3 f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) \text{ COMPRESO FRA DUE VALORI POSITIVI} \to f(x) \text{ SEMPRE POSITIVO}$$

TEOREMA DEGLI ZERI

(ANCHE TEOREMA DELL'$\exists$NZA DEGLI ZERI)

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ FUNZIONE CONTINUA

CHIUSO E LIMITATO

SE $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\left(f(a) < 0 \text{ XOR } f(b) < 0 \right)$

$\exists x_0 \in \,]a,b[$ t.c. $f(x_0) = 0$

OVVERO HANNO SEGNO OPPOSTO

È UNA TECNICA USATA PER OTTENERE IL VALORE APPROSSIMATO DI UNO ZERO DI $f(x)$ QUANDO LE TECNICHE CONVENZIONALI SONO POCO EFFICACI O INUTILIZZABILI

ES. $f: x^3 + x - 1 = 0$ PER QUALI x?

OSSERVO CHE PER
- $x_1 = 0$, $f(x_1) < 0$ (-1)
- $x_2 = 1$, $f(x_2) > 0$ $(+1)$

$\Downarrow$

$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

QUINDI PER $x \in \,]0,1[$

$\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = 0$

PER OTTENERE UN APPROSSIMAZIONE SEMPRE PIÙ ACCURATA, POSSIAMO RIDURRE L'INTERVALLO CON LA TECNICA DELLA

BISEZIONE DELL'INTERVALLO

QUINDI DA $[0,1] \to \left[0, \frac{1}{2}\right] \Big| \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

SE IN 0 $f(x) < 0$ E IN 1 $f(x) > 0$

SE:
- $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, CONSIDERO $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, CONSIDERO $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

PIÙ VIENE RIPETUTA LA BISEZIONE, PIÙ ACCURATA SARÀ L'APPROSSIMAZIONE

(DIMOSTRAZIONE E INFORMAZIONI DETTAGLIATE SULL'UTILIZZO IN SEGUITO (5 PAGINE →))

I Teorema di $\exists$nza dei valori intermedi

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato)

f assume tutti i valori compresi tra $f(a), f(b)$

<u>Dimostrazione</u> (per $f(a) < f(b)$)

Tesi

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in [a,b] : y = f(x)$$

Distinguo tre casi:

1) $y = f(a) \to x = a$
2) $y = f(b) \to x = b$

casi basilari

3) $f(a) < y < f(b)$

Per dimostrare il 3° caso, costruisco una funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - y : [a,b] \to \mathbb{R}$

Calcolo i valori $\begin{cases} h(a) = f(a) - y \\ h(b) = f(b) - y \end{cases}$

Visto che $y \in]f(a), f(b)[$ allora

$$f(a) < y < f(b)$$

quindi

$$f(a) - y < 0 \quad , \quad f(b) - y > 0$$

Visto che $h(a)$ ed $h(b)$ hanno segno opposto, per il teorema degli zeri:

$$\exists \bar{x} \in]a,b[: h(\bar{x}) = 0$$

$$h(\bar{x}) = f(\bar{x}) - y = 0 \implies y = f(\bar{x})$$

Quindi con $\bar{x} \in]a,b[$, vale la tesi, ovvero:

$$\forall y \in]f(a), f(b)[, \exists x \in [a,b] : y = f(x)$$

! Potrebbero esserci dei casi in cui $\exists x \in [a,b] : f(x) \notin]f(a), f(b)[$, ovvero <u>non vale il contra</u> (contrario)

Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

(chiuso, limitato)

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : \underset{\min f[a,b]}{\underset{\uparrow}{f(x_1)}} \leq f(x) \leq \underset{\max f[a,b]}{\underset{\uparrow}{f(x_2)}} \quad \forall x \in [a,b]$$

Quindi x_1 è il punto di minimo assoluto

x_2 è il punto di massimo assoluto

Osservazioni

1) Insieme non chiuso, limitato: $[a,b[$

Es. $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]0,1]$

$\min = 1 \left(\frac{1}{1}\right) \quad \max \nexists \left(\frac{1}{0^+}\right)$

$\Downarrow$

Esiste solo il $\sup \frac{1}{x} = +\infty$

2) Insieme chiuso non limitato $[a,+\infty[$

Es. $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1,+\infty[$

$\max = 1 \left(\frac{1}{1}\right) \quad \min \nexists \left(\frac{1}{+\infty}\right)$

$\Downarrow$

Esiste solo il $\inf \frac{1}{x} = 0$

3) Insieme chiuso limitato, f non continua in $[a,b]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \{0\} \end{cases}$$

$\max = 1 \left(1^2 \mid -1^2\right) \quad \min \nexists \left((0^+)^2\right)$

$\Downarrow$

Esiste solo $\inf f = 0$

Quindi abbiamo visto che se anche una delle 3 condizioni non è verificata, il teorema di Weierstrass fallisce

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEGLI ZERI

RICORDIAMOCI LA FORMULA:

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

ED $f(a) \cdot f(b) < 0$, $\exists x_0 \in]a,b[: f(x_0) = 0$

SUPPONGO $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (PER CONVENZIONE)

APPLICO LA BISEZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$ TRAMITE IL PUNTO $c = \frac{a+b}{2}$

OTTENGO GLI INTERVALLI $[a,c]$, $[c,b]$

IL VALORE DI $f(c)$ PUÒ ESSERE:

- $f(c) = 0 \to$ JACKPOT, c È LO ZERO DI $f:[a,b]$
- $f(c) > 0 \to f(c) \cdot f(a) < 0 \to$ SCELGO $[a,c]$
- $f(c) < 0 \to f(c) \cdot f(b) < 0 \to$ SCELGO $[c,b]$

DEFINISCO UN NUOVO INTERVALLO $[a_1, b_1]$ t.c. $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, QUINDI DISTINGUO I CASI

- $f(c) > 0 \to \begin{matrix} a_1 = a \\ b_1 = c \end{matrix}$ | - $f(c) < 0 \to \begin{matrix} a_1 = c \\ b_1 = b \end{matrix}$

CONSIDERIAMO ADESSO L'INTERVALLO $[a_1, b_1]$

L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO È DIMEZZATA,

OVVERO $Amp.[a_1, b_1] = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

RIPETO LA BISEZIONE CON IL PUNTO $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

OTTENGO $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$

DISTINGUO I CASI:

$$f(c_1): \begin{cases} = 0 \to c_1 \text{ È LO ZERO CHE STIAMO CERCANDO} \\ > 0 \to \text{SCELGO } [a_1, c_1] \to a_2 = a_1 ; b_2 = c_1 \\ < 0 \to \text{SCELGO } [c_1, b_1] \to a_2 = c_1 ; b_2 = b_1 \end{cases}$$

OTTENGO L'INTERVALLO $[a_2, b_2]$ CON

$$Amp.[a_2, b_2] = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$$

TUTTI GLI INTERVALLI OTTENUTI IN QUESTO MODO

- HANNO AMPIEZZA DIMEZZATA
- HANNO ESTREMI DI SEGNO OPPOSTO
- HANNO f CONTINUA IN LORO, VISTO CHE SONO SOTTOINSIEMI DI INTERVALLI CON f CONTINUA

QUINDI POSSIAMO GENERALIZZARE LA FORMULA:

PRENDIAMO L'INTERVALLO $[a_{n-1}, b_{n-1}]$

CON $f(a_{n-1})<0$, $f(b_{n-1})>0$

LA SUA AMPIEZZA SARÀ: $\text{AMP.}[\ldots,\ldots] = \frac{b-a}{2^{n-1}} \left(= b_{n-1} - a_{n-1}\right)$

CALCOLO $c_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

CONSIDERO I CASI

$$f(c_{n-1}) \begin{cases} =0 \to c_{n-1} \text{ È UNO ZERO DI } f:[a,b] \\ >0 \to \text{SCELGO } [a_{n-1}, c_{n-1}] & a_n = a_{n-1} \quad b_n = c_{n-1} \\ <0 \to \text{SCELGO } [c_{n-1}, b_{n-1}] & a_n = c_{n-1} \quad b_n = b_{n-1} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ OTTENGO $[a_n, b_n]$

DOVE $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$

$\text{AMP.}[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

VISTO CHE POSSO RIPETERE LA PROCEDURA ∞ VOLTE, ABBIAMO OTTENUTO 2 SUCCESSIONI: $\{a_n\}, \{b_n\}$ $n \to +\infty$

$\boxed{\text{POSSIAMO NOTARE CHE}}$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} \to \text{VALORE RESTA} = \\ c_{n-1} \to \text{VISTO CHE } c_{n-1} > a_{n-1}, \text{ IL VALORE AUMENTA} \end{cases}$$

- $a_n \geq a_{n-1}$

RAGIONAMENTO OPPOSTO PER $\{b_n\}$

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} \to \text{VALORE} = \\ c_{n-1} \to \text{VALORE DIMINUISCE} \end{cases}$$

- $b_n \leq b_{n-1}$

QUINDI ABBIAMO: $\begin{cases} \{a_n\} \text{ MONOTONA CRESCENTE} \\ \{b_n\} \text{ MONOTONA DECRESCENTE} \end{cases}$

ENTRAMBE LIMITATE IN $[a,b]$

$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (PER DEFINIZIONE)

PER IL TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE, $\{a_n\}, \{b_n\}$ HANNO UN LIMITE FINITO CHE, PER COME HO DEFINITO a_n, b_n, DEVE APPARTENERE AD $]a,b[$

ABBIAMO VISTO PRIMA CHE

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

DICIAMO CHE $\lim_{n \to +\infty} a_n \rightarrow \bar{x}$ E $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$

QUINDI IL LIMITE DI $b_n = \bar{x} + 0 = \bar{x}$
PER $n \to +\infty$

VISTO CHE
- $f(a_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$$\lim f(a_n) \leq 0 \quad \wedge \quad \lim f(b_n) \geq 0$$

QUESTO PERCHÉ SE $\lim f(a_n) > 0$

$\exists \nu \in \mathbb{N} : f(a_n) > 0 \quad \forall n > \nu$ ↯

(RAGIONAMENTO ANALOGO PER $\lim f(b_n) < 0$)

POSSIAMO ADESSO APPLICARE IL TEOREMA DEL PONTE SU $f: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN x_0 CON $x_0 \in X \cap DX$:

$$\forall \{x_n\} \subseteq X, \; x_n \to x_0, \; f(x_n) \to f(x_0)$$

SE CONSIDERIAMO X COME $[a,b]$

E $\{x_n\}$ COME $\{a_n\}, \{b_n\}$ TROVIAMO CHE

VISTO CHE $\cdot \lim a_n = \bar{x}$ E $\cdot \lim b_n = \bar{x}$,

ALLORA $\cdot \lim f(a_n) = f(\bar{x})$ E $\cdot \lim f(b_n) = f(\bar{x})$

MA PRIMA ABBIAMO DETTO CHE PER LA PERMANENZA DEL SEGNO
- $\lim f(a_n) \leq 0$
- $\lim f(b_n) \geq 0$

QUINDI $f(\bar{x}) \geq 0 \wedge f(\bar{x}) \leq 0$

OVVERO $f(\bar{x}) = 0$

QUINDI IL LIMITE DELLE SUCCESSIONI

$\{a_n\}, \{b_n\}$ È LO ZERO DI f IN $[a,b]$

! RICORDA CHE POTREBBERO ESSERCI ALTRI ZERI DI f. QUELLO TROVATO CON QUESTA PROCEDURA, POTREBBE NON ESSERE L'UNICO

II TEOREMA DI ∃NZA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
(CHIUSO, LIMITATO)

f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MASSIMO E IL SUO MINIMO

DIMOSTRAZIONE

VISTO CHE f È CONTINUA IN $[a,b]$, POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

$$\to \exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

VOGLIAMO FAR VEDERE CHE: (TESI)

$$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \quad \exists x \in [a,b] : y = f(x)$$

DISTINGUO 3 CASI:

1) $y = f(x_1) \Rightarrow x = x_1$

2) $y = f(x_2) \Rightarrow x = x_2$

3) $f(x_1) < y < f(x_2)$

CONSIDERO LA FUNZIONE AUSILIARIA h:

$h(x) = f(x) - y : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

SUPPONGO $x_1 < x_2$ PER CONVENZIONE

CONSIDERO L'INTERVALLO $I = [x_1, x_2]$

RESTRINGO h AD I → FUNZIONE ANCORA CONTINUA

$h|_I \to h: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN I

VISTO CHE $f(x_1) < y < f(x_2)$

- $h(x_1) = f(x_1) - y < 0$
- $h(x_2) = f(x_2) - y > 0$

QUINDI VISTO CHE HANNO SEGNO OPPOSTO,

$\exists x_0 \in \mathring{I} : h(x_0) = 0$ (TEOREMA DEGLI ZERI)

$\to h(x_0) = f(x_0) - y = 0 \Rightarrow f(x_0) = y$

$\to \exists x \in [a,b] : y = f(x)$ VISTO CHE x_0 È COMPRESO FRA x_1, x_2

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

E STRETTAMENTE MONOTONA (CRESCENTE PER QUESTO ESEMPIO)

f È INVERTIBILE IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE (INIETTIVA + SURIETTIVA)

(INIETTIVITÀ)

PRENDO $x_1, x_2 \in [a,b]$ CON $x_1 \neq x_2$

NE SEGUE $x_1 > x_2 \lor x_1 < x_2$

VISTO CHE f È STRETT. CRESCENTE: $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

OVVERO $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

$\to f$ È INIETTIVA

(SURIETTIVITÀ)

PER IL PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$$f(a) < f(x) < f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

VISTO CHE È STRETTAMENTE CRESCENTE

$\to f:[a,b] \to [f(a), f(b)]$ È SURIETTIVA

TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE MONOTONA

$\forall x_0 \in \,]a,b[$ ESISTONO I SEGUENTI LIMITI FINITI:

$$\cdot \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \cdot \lim_{x \to b^-} f(x) \quad \cdot \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \cdot \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

INOLTRE f: O È CONTINUA IN $[a,b]$, O PRESENTA PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE AGLI ESTREMI E/O 1° SPECIE NEI PUNTI INTERNI

INOLTRE VALE:

CRITERIO DI CONTINUITÀ PER FUNZIONI MONOTONE

$$f \text{ È CONTINUA IN } [a,b] \leftrightarrow \mathrm{Im} f = I(f(a), f(b))$$

- DIMOSTRAZIONE $\to$

! LA SCRITTURA $I(x,y)$ CON PARENTESI TONDE INDICA UN INTERVALLO DI ESTREMI x,y DI CUI NON SI SA CHI SIA L'ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

($\rightarrow$) VISTO CHE f È MONOTONA

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

INOLTRE PER IL TEOREMA DELL'$\exists$NZA DEI VALORI INTERMEDI (II) f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MASSIMO E IL SUO MINIMO

$$\rightarrow \operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$$

($\leftarrow$) PARTIAMO ADESSO DAL PRESUPPOSTO CHE

$$\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$$

SE f NON FOSSE CONTINUA, PER IL TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE, DOVREBBE AVERE DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ:

- DI PRIMA SPECIE IN $x_0 \in]a,b[$
- DI TERZA SPECIE IN a O b (a OPPURE b)

DIMOSTRIAMO CHE QUESTE DISCONTINUITÀ NON POSSONO PRESENTARSI: • $x_0 = a$ • $x_0 = b$ • $x_0 \in]a,b[$

• $x_0 = a$ DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE

VISTO CHE $f(a)$ ESISTE, PER OTTENERE UN P.D.D. DI 3° SPECIE, DOVREBBE ACCADERE CHE

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

MA QUESTO IMPLICHEREBBE L'ESISTENZA DI UN INTERVALLO $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[\subseteq [f(a), f(b)]$

IN CUI NON CI SONO IMMAGINI DI f, OVVERO $y \in [f(a), f(b)] \wedge y \notin \operatorname{Im} f$, CHE È IN NETTA CONTRAPPOSIZIONE CON L'IPOTESI $\lightning$

• $x_0 = b$ STESSA PROCEDURA, QUESTA VOLTA CON L'INTERVALLO $]\lim_{x \to b^-} f(x), f(b)[$ $\lightning$

• $x_0 \in]a,b[$ DISCONTINUITÀ DI 1° SPECIE

OVVERO I LIMITI PER $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ ESISTONO, MA SONO DIVERSI. IN QUESTO CASO AVREMMO UN INTERVALLO $]\lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x)[$ IN CUI NON CI SONO IMMAGINI DI f $\lightning$ $\rightarrow$ NO PUNTI DI DISC. $\rightarrow$ f È CONTINUA

CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA

f CONTINUA IN $[a,b] \Leftrightarrow f^{-1}$ CONTINUA IN $[f(a),f(b)]$

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $f:[a,b]\to\underbrace{[f(a),f(b)]}_{\mathrm{Im}\, f}$

RICAVIAMO:

$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to\underbrace{[a,b]}_{\mathrm{Im}\, f^{-1}}$

f È STRETTAMENTE 'CRESCENTE' (PER 'CONVENZIONE')

$\to \forall x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$

VOGLIAMO VERIFICARE SE ANCHE f^{-1} È STRETT. CRESC.

OVVERO: $\forall y_1,y_2\in[f(a),f(b)],\ y_1<y_2\to f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

SE PER ASSURDO DICIAMO:

$y_1<y_2\to f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$ OTTERREMO CHE

$x_1>x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)=y_1>y_2$ ↯

(VISTO CHE f È STRETTAMENTE CRESCENTE)

DI CONSEGUENZA, PER IL PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, f^{-1} ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA $f^{-1}(f(a))$ E $f^{-1}(f(b))$ CHE SONO ANCHE IL SUO MINIMO E MASSIMO, QUINDI f^{-1} È CONTINUA

DERIVATE

SIA $X\subseteq\mathbb{R},\ X\neq\emptyset,\ x_0\in X\cap DX,\ f:X\to\mathbb{R}$

DEFINIAMO:

RAPPORTO INCREMENTALE ALLA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

CON $h\in I(0)\setminus\{0\}$ CHIAMATO INCREMENTO

(VALORE MOLTO PICCOLO MA $\neq$ DA ZERO)

PER LA DEFINIZIONE DI PUNTO DI ACCUMULAZIONE, VISTO CHE h È UN VALORE MOLTO PICCOLO, POSSIAMO DIRE CHE $x_0+h\in X$

CONTINUA

SE $\exists$ IL LIMITE FINITO:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DIREMO CHE f È <u>DERIVABILE</u> NEL PUNTO x_0

IL VALORE DI QUESTO LIMITE VIENE CHIAMATO <u>DERIVATA</u> DI f IN x_0 E SI PUÒ INDICARE COSÌ:

$$f'(x_0) \;\Big|\; \frac{df(x_0)}{dx} \;\Big|\; Df(x_0)$$

(A VOLTE SI TROVERÀ $y(x_0)$ AL POSTO DI $f(x_0)$)

PRESO UN $X=[a,b]$, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN (TUTTO) X SE:

- f È DERIVABILE IN a: $\exists f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- f È DERIVABILE IN b: $\exists f'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$
- f È DERIVABILE IN x_0: $\exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathring{X}$ (INTERNO DI X)

SE X INVECE È UN INTERVALLO APERTO, VALE SOLTANTO IL TERZO PUNTO, OVVERO f È DERIVABILE IN X SE È DERIVABILE IN OGNI SUO PUNTO

DERIVATA DI UNA <u>FUNZIONE COSTANTE</u>

PRESI $f(x)=c$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in I(0)\setminus\{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0/h \to 0 \quad \text{PER } h \to 0$$

$$\to D[c]_{(x_0)} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

QUINDI, OGNI FUNZIONE COSTANTE È DERIVABILE E LA SUA DERIVATA VALE SEMPRE 0

<u>FUNZIONE LINEARE AFFINE</u>

$f(x) = ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in I(0)\setminus\{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(a\cdot(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{ax_0}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax_0}-\cancel{b}}{h} = \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a \to a \quad \text{PER } h \to 0$$

QUINDI LA FUNZIONE LINEARE AFFINE È SEMPRE DERIVABILE E LA SUA DERIVATA VALE a:

$$D[ax+b]_{(x_0)} = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

PROPOSIZIONE

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$

TESI: f È DERIVABILE IN $x_0 \to f$ È CONTINUA IN x_0

CONSIDERO $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ABBIAMO DETTO IN PRECEDENZA CHE $x_0+h \in X$
QUINDI QUEL VALORE È UN $x \in X$

$\to x = x_0 + h \to h = x - x_0$ ← SE $x \to x_0$ ALLORA $h \to 0$

POSSO ALLORA APPLICARE DELLE SOSTITUZIONI:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$$

LA DERIVATA QUINDI DIVENTERÀ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ALTRO MODO PER SCRIVERE UNA DERIVATA

VERIFICHIAMO ORA LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE f IN x_0: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

ADESSO RISCRIVO $f(x)$ IN DIVERSE FORME EQUIVALENTI:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)$$

IL LIMITE DI QUESTE TRE FORME È LO STESSO:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{0} + \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} = f(x_0)$$

$$f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0)$$

QUINDI f È CONTINUA IN x_0

COME COROLLARIO ABBIAMO CHE

f NON CONTINUA IN $x_0 \to f$ NON DERIVABILE IN x_0

! UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO, NON È NECESSARIAMENTE IVI DERIVABILE, COME NEL CASO DI $x_0 = 0$ IN $f(x) = |x|$

DIMOSTR. →

SIA $x_0 = 0$ IN $f(x) = |x|$ CHE È CONTINUA IN TUTTO $\mathbb{R}$

CALCOLO DERIVATA DESTRA E SINISTRA

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = 1$$

$\neq$

QUINDI $f(x)$ CONTINUA, MA NON DERIVABILE IN 0

DERIVATE SUCCESSIVE

$X \subseteq \mathbb{R}$, X APERTO, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN X

DEFINISCO $f': x \in X \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$

SE f' È A SUA VOLTA DERIVABILE IN UN $x_0 \in X$, DIREMO CHE f È DERIVABILE 2 VOLTE IN x_0 E CHIAMEREMO DERIVATA SECONDA DI f IN x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

E LA INDICHIAMO NEI SEGUENTI MODI:

$f''(x_0)$ | $\frac{d^2 f(x_0)}{d x^2}$ | $D^2 f(x_0)$ | OPPURE CON $y(x_0)$ AL POSTO DI $f(x_0)$

QUESTO PROCESSO POTREBBE POTERSI RIPETERE PIÙ VOLTE: DIREMO ALLORA CHE f È DERIVABILE IN $x_0 \in X$ <u>n VOLTE</u> ED INDICHEREMO LA DERIVATA n-ESIMA COME $f^{(n)}_{(x_0)}$. SE POI f È DERIVABILE n VOLTE IN TUTTI I PUNTI DI X, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN X n VOLTE:

$$f^{(n)}: X \to \mathbb{R}$$

! PER VALORI PICCOLI DI n USIAMO I CARATTERI ROMANI: f', f'', f^{v}, PERÒ ENTRAMBE LE SCRITTURE SONO CORRETTE: $f'' = f^{(2)}$

Operazioni con le derivate

$X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap \mathcal{D}X$,

$f: X \to \mathbb{R} \wedge g: X \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0

risulta che:

1) $f+g$ derivabile in x_0:

$$D[f+g]_{(x_0)} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f-g$ derivabile in x_0:

$$D[f-g]_{(x_0)} = f'(x_0) - g'(x_0)$$

3) $f \cdot g$ derivabile in x_0:

$$D[f \cdot g]_{(x_0)} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

4) f/g derivabile in x_0: (con $g(x) \neq 0\ \forall x \in X$)

$$D[f/g]_{(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x))^2}$$

Dimostrazione somma

(ipotesi) Hp. $\exists$ finiti $f'(x_0)$, $g'(x_0)$

Tesi $\exists$ finito $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$

calcolo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

riassocio

e spezzo la frazione:

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\frac{\Delta f}{\Delta x}} + \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\frac{\Delta g}{\Delta x}} \xrightarrow[h \to 0]{\text{tende a}}$$

Dimostrazione differenza

Si dimostra in maniera completamente analoga, considerando $f-g$ al posto di $f+g$

DIMOSTRAZIONE PRODOTTO

HP. $\exists$ FINITI $f'(x_0), g'(x_0)$

TESI $\exists$ FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} =$

$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

- SOTTRAGGO E AGGIUNGO $f(x_0) \cdot g(x_0+h)$
- DOPODICHE', RIASSOCIO, SPEZZO LA FRAZIONE E
- METTO IN EVIDENZA $g(x_0+h)$ E $f(x_0)$ IN QUESTO MODO

$$g(x_0+h) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

PER h CHE TENDE A 0 I LIMITI SONO: $g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

QUINDI VALE LA TESI: $D[f \cdot g]_{(x_0)} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE RAPPORTO

HP $\exists$ FINITI $f'(x_0), g'(x_0) \wedge g(x) \neq 0 \; \forall x \in X$

TESI $\exists$ FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{(f/g)(x_0+h) - (f/g)(x_0)}{h} =$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

CALCOLO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f/g}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{1}{h}$$

QUESTA EQUAZIONE IN FORMA $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{h}$ LA POSSO RISCRIVERE NELLA FORMA EQUIVALENTE $\frac{a}{h} \cdot \frac{1}{b}$ OTTENENDO:

$$\frac{1}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{h}$$

SOTTRAGGO E AGGIUNGO $f(x_0) \cdot g(x_0)$

ADESSO RIASSOCIO, SPEZZO LA FRAZIONE E METTO IN EVIDENZA $g(x_0)$ E $f(x_0)$ OTTENENDO:

$$\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}\cdot\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

IL LIMITE CON $h\to 0$ È: $\frac{1}{(g(x_0))^2}\cdot\left(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)\right)$

OVVERO $$\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

! PICCOLO BONUS;

LA DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE COSTANTE c E UNA FUNZIONE f DERIVABILE IN X È SEMPRE $c\cdot f'(X)$

$$D[c\cdot f]_{(x)} = c\cdot f'(x)$$

← FORMALIZZATO COSÌ

TEOREMA DI DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

SIANO $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X, Y \neq \emptyset$

$f: X\to\mathbb{R} \wedge g: Y\to\mathbb{R}$ t.c. $f(X)\subseteq Y$

PRESI I PUNTI $x_0 \in X\cap DX \wedge \underbrace{y_0}_{=f(x_0)} \in Y\cap DY$

POSSIAMO DIRE CHE:

SE f È DERIVABILE IN x_0 $\wedge$ g DERIVABILE IN y_0

$g\circ f$ È DERIVABILE IN x_0 E LA DERIVATA SARÀ

$$D[g\circ f]_{(x_0)} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Es. PRESE LE FUNZIONI $g(x)=x^2 \wedge f(x)=3x+2$

E LE LORO DERIVATE $g'(x)=2x \wedge f'(x)=3$

$$D[g\circ f]_{(x)} = D[(3x+2)^2]_{(x)} = \underbrace{2\cdot\underbrace{(3x+2)}_{f(x)}}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{3}_{f'(x)}$$

TEOREMA DI DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI INVERSE

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E STRETTAMENTE MONOTONA

SE f È DERIVABILE IN $x_0 \in]a,b[\wedge f'(x_0) \neq 0$

ALLORA f^{-1} È DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ IMPORTANTE

$$D[f^{-1}] = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Es. SE $f(x) = x^2$ E $f'(x) = 2x$

PRENDO $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ E NE FACCIO LA DERIVATA

$$D[\sqrt{y}] = D[f^{-1}]_{(y)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$$

GENERALIZZANDO: $x = f^{-1}(y)$

FORMULA DI DERIVAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DI X:

$$D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

FORMULA DI DERIVAZIONE DELLA POTENZA N-ESIMA DI X

$$D[x^n] = n \cdot x^{n-1}$$

DIMOSTRABILE CON PRINCIPIO DI INDUZIONE

PB. $n = 0$

$$D[x^0] = 0 \cdot x^{-1} \Rightarrow D[1] = 0 \quad \checkmark$$

PI. $n \geq 1$

Hp $D[x^{n-1}] = (n-1)x^{n-2}$

TESI $D[x^n] = n \cdot x^{n-1}$

DIMOSTRAZIONE

$$D[x^n] = D[x \cdot x^{n-1}]$$

DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$= D[x] \cdot x^{n-1} + x \cdot D[x^{n-1}] =$$

$$1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = x^{n-1} + x^{n-1}(n-1) =$$

$$= x^{n-1}(1 + 1(n-1)) = nx^{n-1} \quad \checkmark$$

DERIVATA DI FUNZIONI POLINOMIALI

FACOLTATIVO (PER ADESSO)

PER FARE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE, SI COMBINANO OPERAZIONI:

- DERIVATA DELLA POTENZA N-ESIMA DI X
- DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE DERIVABILE
- DERIVATA DELLA SOMMA DI FUNZIONI DERIVABILI

FACCIAMO VEDERE:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots a_1 \cdot x + a_0$$

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \ldots 2 a_2 \cdot x^1 + a_1 + 0$$

LO STESSO PROCEDIMENTO SI APPLICA AD OGNI PARTE DEL POLINOMIO, MA FACCIAMO LA SPIEGAZIONE DI UNA PARTE SOLA

$$a_{n-2} \cdot x^{n-2} \qquad (n-2) \cdot a_{n-2} \cdot x^{n-3}$$

DERIVATA FRA COSTANTE (a_{n-2}) E FUNZIONE DERIVABILE (x^{n-2})

$$a_{n-2} \cdot f'(x^{n-2})$$

DERIVATA DELLA POTENZA N-ESIMA DI X

FUNZIONE ESPONENZIALE

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

PRESO UN QUALUNQUE $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I_{(0)} \setminus \{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

CON h CHE TENDE A 0 ABBIAMO $a^{x_0} \cdot \log a$

QUINDI $f(x)$ È DERIVABILE IN x_0.

MA VISTO CHE x_0 È SCELTO AD ARBITRIO, LO STESSO VALE $\forall x \in \mathbb{R} \to f(x)$ DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

$$D[a^x] = a^x \cdot \log a$$

CASO PARTICOLARE: $D[e^x] = e^x$

FUNZIONE LOGARITMO

LA DERIVATA DELLA FUNZIONE LOGARITMICA PUO' ESSERE TROVATA IN DUE MODI:

- CON IL METODO TRADIZIONALE $\left(\Delta f / \Delta x, \lim_{n \to \infty} \dots\right)$
- CON LA DERIVATA INVERSA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

PER QUESTA DIMOSTRAZIONE, USEREMO IL SECONDO

CONSIDERO $f^{-1}(y) = \log_a y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ CON $a>0, a \neq 1 \ \forall y \in]0, +\infty$

QUINDI $f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \cdot \log a$

USO LA FORMULA $D[f^{-1}] = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} =$

$$= \frac{1}{a^{\log_a y} \cdot \log a} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\log a} \to = \frac{1}{y} \cdot \log_a e$$

QUINDI GENERALIZZANDO

$$\underline{D[\log_a x] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e}$$

CASO PARTICOLARE: $D[\log x] = 1/x$

FUNZIONE POTENZA

$$f(x) = x^b \quad \text{CON } b \in \mathbb{R}$$

CI SONO DI NUOVO PIU' METODI PER OTTENERE LA DERIVATA:

- METODO TRADIZIONALE
- CONSIDERARE $f(x)$ COME COMPOSIZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI, OVVERO:

$x^b = e^{\log x^b} = e^{b \cdot \log x}$ QUINDI $D[x^b] = D[e^{b \cdot \log x}]$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{b \cdot \log x}}_{g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{b \cdot \frac{1}{x}}_{f'(x_0)} = x^b \cdot \frac{1}{x} \cdot b = x^{b-1} \cdot b$$

$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \leftarrow$ FORMULA DI DERIVAZIONE PER FUNZIONI COMPOSTE

QUINDI GENERALIZZANDO

$$\underline{D[x^b] = b \cdot x^{b-1}}$$

INOLTRE, VISTO CHE $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, POSSIAMO USARE LA STESSA FORMULA PER LE DERIVATE DI POTENZE E RADICI, PER ESEMPIO:

$$f(x) = \sqrt{x^3} \to D[\sqrt{x^3}] = D[x^{3/2}] = \frac{3}{2} \cdot x^{+\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

FUNZIONE SENO

$$f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

PRESO UN $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

APPLICO LA FORMULA DEL SENO DI UNA SOMMA

$$= \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

METTO $\sin x_0$ E $\cos x_0$ IN EVIDENZA

$$\sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h}$$

CON h CHE TENDE A ZERO → $\sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1$

VISTO CHE x_0 È PRESO AD ARBITRIO, QUESTO VALE $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D[\sin x] = \cos x$$

FUNZIONE COSENO

$$f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

PRESO UN $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h}$$

APPLICO FORMULA DEL COSENO DI UNA SOMMA

OTTENGO $\dfrac{\cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h - \cos x_0}{h}$

METTO IN EVIDENZA $\cos x_0$ E $\sin x_0$

$$\cos x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin h}{h}$$

CON h CHE TENDE A ZERO → $\cos x_0 \cdot 0 - \sin x_0 \cdot 1$

VISTO CHE x_0 È SCELTO AD ARBITRIO, QUESTO VALE $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D[\cos x] = -\sin x$$

FUNZIONE TANGENTE

$$f(x) = \tan x : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]$$ DERIVATA DI UN RAPPORTO DI FUNZIONI DERIVABILI

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$ 2 FORMULE EQUIVALENTI, ENTRAMBE UTILI IN DIVERSI CONTESTI

$$D[\tan x] = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ADESSO RICAVIAMO LE ~~[illegible]~~ DERIVATE ~~[illegible]~~ DELLE FUNZIONI INVERSE DI $\sin$, $\cos$, $\tan$, OVVERO

- ARCOSENO $\arcsin$
- ARCOCOSENO $\arccos$
- ARCOTANGENTE $\arctan$

FUNZIONE ARCOSENO

CONSIDERIAMO $f(x) = \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to [-1, 1]$

E LA SUA INVERSA $f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

APPLICANDO IL TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE, OTTENIAMO CHE:

$f^{-1}(y)$ È DERIVABILE NELL'INTERVALLO $]-1, 1[$

(-1 ED 1 ESCLUSI PERCHÈ PER IL TEOREMA $f'(x) \neq 0$ INFATTI SE $x = \arcsin \pm 1 = \pm \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = \cos(x) = 0$)

QUINDI ABBIAMO

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

CONSIDERANDO CHE IN QUESTO INTERVALLO

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$ OTTENIAMO

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

QUINDI GENERALIZZANDO LA FORMULA:

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

FUNZIONE ARCOCOSENO

PROCEDIMENTO ANALOGO A QUELLO EFFETTUATO PER L'ARCOSENO:

$$f(x) = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$f^{-1}(y) = \arccos y : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

↪ DERIVABILE IN $]-1, 1[$

$$D[\arccos y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sin(\arccos y)}$$

ANCHE QUI POSSIAMO DIRE CHE

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, METTIAMO AL POSTO DI α, $\arccos y$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ANDANDO A GENERALIZZARE LA FORMULA:

$$D[\arccos x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

FUNZIONE ARCOTANGENTE

ANCORA UNA VOLTA, LO STESSO PROCEDIMENTO:

$$f(x) = \tan x :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \arctan y : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$D[\arctan y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

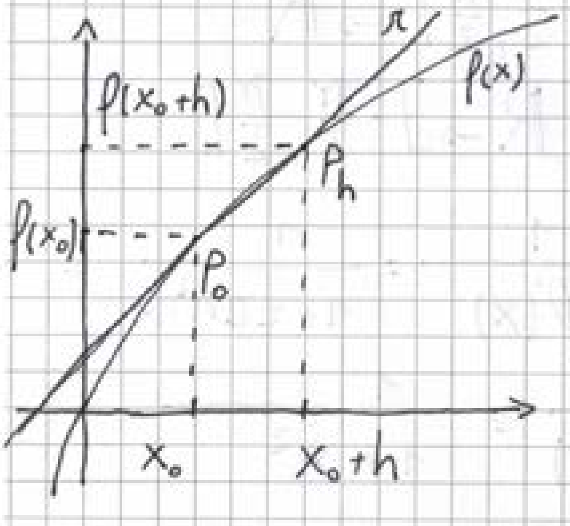
DERIVABILE IN TUTTO $\mathbb{R}$.

GENERALIZZANDO LA FORMULA:

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE DERIVATE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$



f DERIVABILE IN x_0

FISSO $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CONSIDERO I PUNTI:

$P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$

$P_h \equiv (x_0+h, f(x_0+h))$

CONSIDERO LA RETTA r PASSANTE PER $P_0 \wedge P_h$

CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI r

$$m_r = \frac{y_{P_h} - y_{P_0}}{x_{P_h} - x_{P_0}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

CHE È ESATTAMENTE LA FORMULA PER IL RAPPORTO INCREMENTALE

DETTO FORMALMENTE:

IL RAPPORTO INCREMENTALE RELATIVO AD UNA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0, È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA SECANTE AD f NEI PUNTI DI ASCISSA $<^{x_0+h}_{x_0}$

CONSIDERIAMO ADESSO LA DERIVATA, OVVERO

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

SE h TENDE A ZERO, I PUNTI P_h E P_0 SI AVVICINANO SEMPRE DI PIÙ, FINO A QUASI SOVRAPPORSI.

LA RETTA r QUINDI DIVENTERÀ TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO P_0.

LA DERIVATA DI $f(x_0)$ QUINDI È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA r TANGENTE AD f NEL PUNTO P_0 DI ASCISSA x_0

PROPOSIZIONE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE NEL PUNTO x_0,

ALLORA $\exists$ RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO DI ASCISSA x_0:

$$r: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

DIMOSTRAZIONE →

CONSIDERO L'EQUAZIONE GENERICA DELLA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO

$$t: \; y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{CON} \quad P \equiv (x_1, y_1)$$

ED m IL COEFFICIENTE ANGOLARE

ADESSO CONSIDERO LA RETTA π TANGENTE AD f NEL PUNTO $P(x_0, f(x_0))$. CONSIDERANDO CHE IN QUEL PUNTO m SARÀ = DERIVATA DI x_0:

$$\pi: \; y - f(x_0) = f'(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{OVVERO}$$

$$y = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

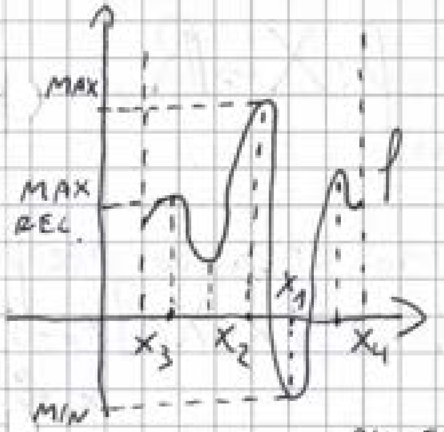
INOLTRE SE FACCIO IL LIMITE DELLA LORO DIFFERENZA $(x \to x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{\text{LIMITE RAPPORTO DIFFERENZIALE} \; = f'(x_0)} - \frac{f'(x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = 0$$

QUINDI IN UN INTERVALLO PICCOLO, LE FUNZIONI SONO (QUASI) UGUALI $\to f(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ SE $x \in I(x_0)$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI



$$f: [a, b] \to ?$$

ABBIAMO I PUNTI x_1 E x_2 CHE SONO RISPETTIVAMENTE PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO ASSOLUTO

CI SONO POI DEI PUNTI x_3 CHE, SE RISTRETTA LA FUNZIONE AD UN INTORNO DEL PUNTO STESSO, VERIFICA TUTTE LE CONDIZIONI PER ESSERE PUNTO DI MINIMO/MASSIMO.

QUESTI PUNTI VENGONO CHIAMATI:

PUNTI DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO

! I PUNTI DI MASSIMO/MINIMO ASSOLUTO SONO ANCHE PUNTI DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO FINCHÉ NON SONO GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO

DEFINIZIONI:

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$,
$x_0 \in X \cap DX$, DIREMO:

1) x_0 È PUNTO DI MASSIMO RELATIVO PER f
$\iff \exists \delta : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

2) x_0 È PUNTO DI MINIMO RELATIVO PER f
$\iff \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0), \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

TEOREMA DI FERMAT

CONSIDERO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$,
$x_0 \in X \cap DX$:

SE x_0 È PUNTO DI MIN/MAX RELATIVO PER f ED f DERIVABILE IN x_0, ALLORA

$f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE (STESSO RAGIONAMENTO PER MIN/MAX)

CONSIDERO $h \in I(0) \setminus \{0\}$ E DISTINGUO I CASI IN CUI

- $h > 0 \Rightarrow x_0 + h > x_0$
- $h < 0 \Rightarrow x_0 + h < x_0$

OSSERVIAMO IL COMPORTAMENTO DEL SEGNO DELLA DERIVATA DESTRA/SINISTRA

- $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

VISTO CHE x_0 È PUNTO DI MASSIMO, $f(x_0+h) < f(x_0)$
QUINDI IL NUMERATORE È NEGATIVO

NEGATIVO

LIMITE SINISTRO

$\geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

- $\lim_{h \to 0^+}$ - - -

STESSA COSA PER IL NUMERATORE, MA QUESTA VOLTA h È POSITIVO

LIMITE DESTRO

$\leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$f'(x_0)$

PER IPOTESI $\exists \lim_{h \to 0} = \lim_{h \to 0^+} = \lim_{h \to 0^-} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \to \lim_{h \to 0} = 0$

Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

derivabile in $]a,b[$

se $f(a)=f(b)$ allora $\exists\, c\in\,]a,b[\,: f'(c)=0$

Dimostrazione:

f continua in $[a,b]$ $\to$ Teorema di Weierstrass:

$\exists\, x_1,x_2\in[a,b]: f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$
$\forall x\in[a,b]$

distinguo due casi:

1) $x_1=a \wedge x_2=b$ quindi

$f(a)\le f(x)\le f(b)$ ma per ipotesi abbiamo $f(a)=f(b)$

quindi

$f(a)\le f(x)\le f(a)\to f(x)=f(a)=f(b)$

$\forall x\in[a,b]$, ovvero f è una funzione costante $\to f'(x)=0\ \forall x\in\,]a,b[$

2) $x_1\in\,]a,b[\ \vee\ x_2\in\,]a,b[$

per convenzione diciamo che $x_1<x_2$

consideriamo il caso $x_1\in\,]a,b[$,

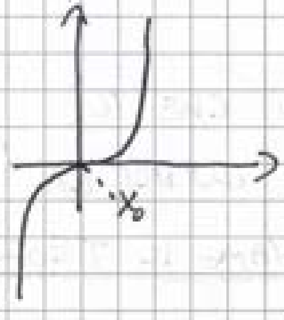
x_1 è punto di minimo assoluto, ma visto che è un punto interno, è anche punto di minimo relativo.

Inoltre per ipotesi, f è continua in x_1, quindi si può applicare il teorema di Fermat:

$\to f'(x_1)=0$ quindi x_1 è il c della tesi

- Noto che esistono dei punti con derivata prima $=0$ che non sono punti di min/max

Es. $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f'(x_0)=0$



Questi punti in cui la derivata si annulla, si chiamano

Punti stazionari o critici

TEOREMA DI CAUCHY

SIANO $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ · CONTINUE IN $[a,b]$
· DERIVABILI IN $]a,b[$

SE $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ VALE CHE:

$$\exists c \in]a,b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

CONTROLLIAMO CHE IL DENOMINATORE NON SI ANNULLI, OVVERO $g(b) \neq g(a)$

SE PER ASSURDO AVESSIMO $g(b) = g(a)$
PER IL TEOREMA DI ROLLE AVREMMO CHE

$$\exists \bar{x} \in]a,b[: g'(\bar{x}) = 0 \quad \lightning$$

DI CONSEGUENZA $g(a)$ NON PUÒ ESSERE $= g(b)$

ADESSO CHE ABBIAMO VERIFICATO CHE IL DENOMINATORE NON SI ANNULLA, E QUINDI LA FRAZIONE È VALIDA, <u>DIMOSTRIAMO IL TEOREMA</u> →

CONSIDERO LA COMBINAZIONE LINEARE DI f E g:

$$H: [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$H(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \text{ CON } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

LAMBDA ↗ MI ↑

PER LE PROPRIETÀ DELLA COMBINAZIONE LINEARE, ESSA CONSERVA LA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DI f E g.

NOI VORREMMO SERVIRCI DEL TEOREMA DI ROLLE, QUINDI VOGLIAMO VEDERE ~~SE~~ QUANDO $H(a) = H(b)$:

$$H(a) = H(b) \iff \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot g(a) = \lambda f(b) + \mu \cdot g(b)$$

⇒ RIARRANGIO GLI ELEMENTI DELL'UGUAGLIANZA ⇒ $\lambda(f(b)-f(a)) = \mu(g(a)-g(b))$

QUINDI SCEGLIENDO · $\lambda = g(a) - g(b)$ ∧
· $\mu = f(b) - f(a)$ OTTENGO

$$(g(a)-g(b)) \cdot (f(b)-f(a)) = (f(b)-f(a)) \cdot (g(a)-g(b))$$

QUINDI VALE IL TEOREMA DI ROLLE →

RISCRIVIAMO $H(x)$ CON LAMBDA E MI SOSTITUITI

$$H(x)=(g(a)-g(b))\cdot f(x)+(f(b)-f(a))\cdot g(x)$$

PER IL T. (teorema) DI ROLLE INVECE ABBIAMO CHE

$$\exists c\in\,]a,b[\,:\ H'(c)=0$$

CONSIDERO LA DERIVATA DI H IN C

$$H'(c)=(g(a)-g(b))\cdot f'(c)+(f(b)-f(a))\cdot g'(c)=0$$

TRASFERISCO A DESTRA DELL' = CAMBIANDO IL SEGNO DENTRO LA PARENTESI:

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c)=(g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

DIVIDO ENTRAMBI PER $g'(c)\cdot(g(b)-g(a))$ E SEMPLIFICO, OTTENENDO

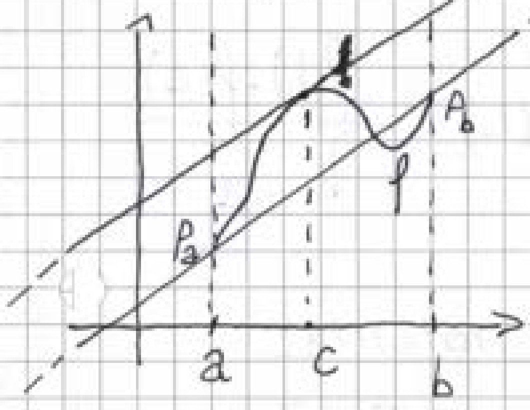
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE

TEOREMA DI LAGRANGE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

DERIVABILE IN $]a,b[$



$\exists c\in\,]a,b[$ t.c.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

OVVERO ESISTE ALMENO UN PUNTO IN CUI LA TANGENTE AL GRAFICO E LA RETTA SECANTE, PASSANTE PER P_a E P_b, HANNO LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, OVVERO SONO PARALLELE

DIMOSTRAZIONE

CI SERVIREMO DEL TEOREMA DI CAUCHY:

CONSIDERO $g(x)=Id_{[a,b]}(x)\to g(x)=x\quad\forall x\in[a,b]$

ESSA SODDISFA LE CONDIZIONI:

- CONTINUA IN $[a,b]$
- DERIVABILE IN $]a,b[$
- $g'(x)=1\ (\neq 0)\quad \forall x\in\,]a,b[$

QUINDI $\exists c \in]a,b[: \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

MA NELLA FUNZIONE g:

- $g(x) = x$
- $g'(x) = 1 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CRITERIO DI MONOTONIA

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$, DERIVABILE IN $]a,b[$

RISULTA CHE:

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\iff f$ È CRESCENTE IN $[a,b]$

2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[\iff f$ È DECRESCENTE IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE 1 (LA SECONDA HA LO STESSO PROCEDIMENTO)

CON DOPPIA IMPLICAZIONE

($\Rightarrow$)

$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ APPLICO UNA RESTRIZIONE:

CONSIDERO $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$ E CONSIDERO

$f|_{[x_1,x_2]}$ CONTINUA IN $[x_1,x_2]$ E DERIVABILE IN $]x_1,x_2[$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$x_2 - x_1$ È SEMPRE UN VALORE POSITIVO, PERCHÉ x_2 È L'ESTREMO SUPERIORE DELL'INTERVALLO $]x_1,x_2[$

VISTO CHE IL PUNTO $c \in]x_1,x_2[\to c \in [a,b]$

$\to f'(c) \geq 0$ PER IPOTESI, DI CONSEGUENZA

$f(x_2) \geq f(x_1)$, ALTRIMENTI LA DERIVATA VIENE < 0

QUINDI ABBIAMO $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

($\Leftarrow$) FISSO $x_0 \in]a,b[$, $h \in I_{(0)} \setminus \{0\}$

CONSIDERO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \begin{cases} \text{SE } h>0,\ f(x_0+h) \geq f(x_0) \\ \text{(PER LA CRESCENZA)} \\ \text{SE } h<0,\ f(x_0+h) \leq f(x_0) \end{cases}$$

QUINDI NUMERATORE E DENOMINATORE HANNO SEMPRE LO STESSO SEGNO

$\rightarrow \Delta f / \Delta x \geq 0$ IN TUTTO L'INTERVALLO $]a,b[$

VISTO CHE x_0 È STATO SCELTO ARBITRARIAMENTE QUINDI PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

$$f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO

SIA $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. DIREMO CHE:

f È COSTANTE IN $[a,b] \Leftrightarrow f$ È DERIVABILE IN $[a,b] \wedge f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

DIMOSTRAZIONE CON DOPPIA IMPLICAZIONE

$(\Rightarrow)$ COSTANTE $\rightarrow$ DERIVABILE. IN PIÙ LA DERIVATA DI UNA COSTANTE È SEMPRE 0

$(\Leftarrow)$ f DERIVABILE IN $[a,b] \rightarrow$ CONTINUA IN $[a,b]$

IN PIÙ $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

PER IL CRITERIO DI MONOTONIA, f È SIA CRESCENTE CHE DECRESCENTE IN $[a,b]$, QUINDI È PER FORZA COSTANTE

CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA

SIA $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
DERIVABILE IN $]a,b[$

RISULTA CHE:

1) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[\wedge f'$ NON SI ANNULLA IDENTICAMENTE IN UN SOTTOINSIEME DI $]a,b[\leftrightarrow f$ È <u>STRETTAMENTE CRESCENTE</u>

2) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[\wedge f'$ NON SI ANNULLA IDENTICAMENTE IN UN SOTTOINSIEME DI $]a,b[\leftrightarrow f$ È <u>STRETTAMENTE DECRESCENTE</u>

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$

DIREMO CHE f È:

- <u>CONCAVA</u> IN $[a,b] \overset{def.}{\iff} f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  $\forall x, x_0 \in [a,b]$
- <u>CONVESSA</u> IN $[a,b] \overset{def.}{\iff} f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
  $\forall x, x_0 \in [a,b]$

UN PUNTO $c \in\,]a,b[$ SI DIRÀ:

<u>PUNTO DI FLESSO</u> $\overset{def.}{\iff}$
- f È CONVESSA IN $[a,c]$ $\wedge$
- f È CONCAVA IN $[c,b]$

OPPURE AL CONTRARIO.

QUINDI c È IL PUNTO IN CUI LA FUNZIONE PASSA DA CONCAVA A CONVESSA

(ESISTE UN'ALTRA DEFINIZIONE PIÙ COMPLICATA, MA CE L'HANNO RISPARMIATA)

CRITERIO DI CONVESSITÀ/CONCAVITÀ

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$
DERIVABILE 2 VOLTE IN $]a,b[$

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI

1) f È CONVESSA (CONCAVA) IN $[a,b]$
2) f' È CRESCENTE (DECRESCENTE) IN $[a,b]$
3) $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ $\forall x \in\,]a,b[$

UN PUNTO DI UNA FUNZIONE, PER ESSERE UN PUNTO DI FLESSO, DEVE SODDISFARE:

- $f''(x)=0$ (OPPURE IN RARI CASI $f''(x) \nexists$)
- $f''(x^+)\geq 0 \wedge f''(x^-)\leq 0$ (O VICEVERSA)

QUINDI LA DERIVATA SECONDA DEVE ESSERE NULLA O INESISTENTE NEL PUNTO E DEVE AVERE SEGNO OPPOSTO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO

! SE IN UN PUNTO C LA DERIVATA SECONDA SI ANNULLA MA ASSUME LO STESSO SEGNO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO, C È UN PUNTO DI MINIMO/MASSIMO RELATIVO

I TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

CONDIZIONI: $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f \wedge g : X \to \mathbb{R}$,

$x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, (INDIFFERENTE)

$g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, $f \wedge g$ DERIVABILI IN $I_{(x_0)} \setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$ (POTREBBE ANNULLARSI SOLO IN x_0),

$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ FINE CONDIZIONI

$$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

II TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

CONDIZIONI: $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f \wedge g : X \to \mathbb{R}$,

$x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

(I LIMITI POSSONO ESSERE DIVERSI) $f \wedge g$ DERIVABILI IN $I_{(x_0)} \setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$ (POTREBBE ANNULLARSI SOLO IN x_0),

$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) / g'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ FINE CONDIZIONI

$$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

LE DIMOSTRAZIONI DEI DUE TEOREMI SONO MOLTO SIMILI, PER IL SECONDO CI SONO DA IMPOSTARE DELLE CONDIZIONI UN PO' PIÙ RIGOROSE, MA IL PROCEDIMENTO È LO STESSO. NOI COMUNQUE DIMOSTREREMO SOLO IL PRIMO →

DIMOSTRAZIONE DE L'HÔPITAL I

PRENDO UN $x \neq x_0 \in X$

CONSIDERO IL RAPPORTO $f(x)/g(x)$

VISTO CHE IN x_0 LE FUNZIONI TENDONO A ZERO, POSSO SOMMARLE AL RAPPORTO,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

DIVIDO NUMERATORE E DENOMINATORE PER $x-x_0$ SENZA CAMBIARE IL VALORE DEL RAPPORTO

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

QUESTI SONO DUE RAPPORTI INCREMENTALI, QUINDI SE $x \to x_0$ ABBIAMO

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

CHE È IL RAPPORTO DA CUI SIAMO PARTITI

FORMULA DI TAYLOR

CON RESTO DI PEANO

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN x_0, n VOLTE

DIREMO CHE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x)$$

DOVE $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

IL CHE ESPLICITATO CI DÀ:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)/2! \cdot (x-x_0)^2 + f'''(x_0)/3! \cdot (x-x_0)^3 \dots + f^{(n)}(x_0)/n! \cdot (x-x_0)^n + R_n(x)$$

IL POLINOMIO DI TAYLOR CON $x_0 = 0$, È CHIAMATO POLINOMIO DI MC LAURIN

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)$$

DOVE $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$

DERIVABILE n VOLTE IN x_0

DERIVABILE $n+1$ VOLTE NELL'INTORNO $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

DIREMO CHE:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

DOVE $\xi \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

X1 ADESSO ANALIZZIAMO ALCUNE FUNZIONI:

$\boxed{f(x) = e^x}$ D: $\mathbb{R}$ $\left(f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N} \right.$ DERIVABILE INFINITE VOLTE $\left.\right)$

SCRIVO IL POLINOMIO DI MC LAURIN $(x_0 = 0)$

$$f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \to f(x) = e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \frac{x^n}{n!} + \sigma(x^n)$$

NOTO CHE SE SOMMO -1 AD ENTRAMBI I MEMBRI E DIVIDO TUTTO PER x:

RESTO DI PEANO

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} \cdots \frac{x^{n-1}}{n!}$$

LIMITE NOTEVOLE CON $x \to 0$ $= 1$

(R_n È UN INFINITESIMO DI GRADO SUPERIORE A x^n)

$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$ D: $]-1, +\infty[$

CALCOLIAMO QUALCHE DERIVATA:

- $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ ← DERIVATA DI UNA POTENZA
- $f''(x) = -1(1+x)^{-2}$
- $f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$ ← DERIVATA DEL PRODOTTO FRA UNA FUNZIONE COSTANTE (-1, -2 ecc.) E UNA FUNZIONE DERIVABILE (FUNZIONE POTENZA: $(1+x)^{-n}$)
- $f^{IV}(x) = -3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-4}$
- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$

SCRIVIAMO ADESSO IL POLINOMIO DI MC-LAURIN:

$x_0 = 0$

CONSIDERANDO $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = -1$, $f'''(x_0) = 2$

$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$ OTTENGO IL POLINOMIO:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \sigma(x^n)$$

SE DIVIDESSIMO TUTTO PER x, OTTERREMMO IL LIMITE NOTEVOLE PER $x \to 0$ DI:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$ D: $\mathbb{R}$

$\cdot f'(x) = \cos x \quad \cdot f''(x) = -\sin x$

$\cdot f'''(x) = -\cos x \quad \cdot f^{IV}(x) = \sin x$

COME SI PUÒ OSSERVARE, LE DERIVATE DEL SENO (E DEL COSENO) SONO CICLICHE, E SI RIPETONO OGNI 4 DERIVAZIONE

SCRIVIAMO MC-LAURIN CON $x_0 = 0$

$f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = -1,\ f^{IV}(x_0) = 0$

$$\sin x = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

SE DIVIDESSIMO TUTTO PER $x \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

POSSIAMO NOTARE CHE LA FUNZIONE COSENO È UGUALE ALLA DERIVATA PRIMA DEL SENO, DI CONSEGUENZA LA DERIVATA PRIMA DEL COSENO SARÀ LA SECONDA DEL SENO, ECC. : $f^{(n)}\cos x = f^{(n+1)}\sin x$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ D: $\mathbb{R}$

$\cdot f'(x) = -\sin x \quad \cdot f''(x) = -\cos x$

$\cdot f'''(x) = \sin x \quad \cdot f^{IV}(x) = \cos x$

CON $x_0 = 0$ OTTENIAMO

$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = -1,\ f'''(x_0) = 0,\ f^{IV}(x_0) = 1$

SCRIVO IL POLINOMIO DI MC-LAURIN

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

DA QUI POSSIAMO RICAVARE 2 LIMITI NOTEVOLI:

SOMMIAMO -1 AD ENTRAMBI I MEMBRI, POI MOLTIPLICHIAMO PER -1 PER CAMBIARE IL SEGNO.

ADESSO DIVIDIAMO PER:

$\cdot x \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad \left(\frac{x^{\cancel{2}}}{2!} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right)$

$\cdot x^2 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\cancel{x^2}}{2!} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$

CRITERIO PER PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVO

SIA $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, x_0 \in X \cap DX$,
$f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE TANTE VOLTE QUANTE SONO LE DERIVATE SOTTOSTANTI IN x_0, RISULTA:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0 \to x_0 \text{ È PUNTO DI MIN. REL.} \\ f''(x_0) < 0 \to x_0 \text{ È PUNTO DI MAX. REL.} \\ f''(x_0) = 0 \to \begin{cases} f'''(x_0) \neq 0 \to x_0 \text{ NON È UN PUNTO DI MIN/MAX REL.} \quad \begin{pmatrix} >0 \Rightarrow \text{ASCENDENTE} \\ <0 \Rightarrow \text{DISCENDENTE} \end{pmatrix} \\ f'''(x_0) = 0 \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

~~DIMOSTRAZIONE~~ QUINDI CON $n \in \mathbb{N}$:

- $f^{(n)} = 0 \to$ L'ALGORITMO CONTINUA
- $f^{(n \text{ PARI})} > | < 0 \to x_0$ È PUNTO DI MAX/MIN REL $\to$ <u>FINE ALGORITMO</u>
- $f^{(n \text{ DISPARI})} > | < 0 \to x_0$ NON È PUNTO DI MAX/MIN REL. $\to$ <u>FINE ALGORITMO</u>

(IN QUESTO CASO IN REALTÀ, x_0 È PUNTO DI FLESSO)

DIMOSTRAZIONE (APPLICAZIONE DI TAYLOR)

SIANO $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ E $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x)$ NEL PUNTO x_0

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + f(x_0) + o(x - x_0)^n$$

FORMULA DI TAYLOR PER $x \to x_0$

(COMPRENDE ANCHE TUTTE LE DERIVATE NULLE $(f'(x_0), \dots f^{(n-1)}(x_0))$)

SIA $f^{(n)}(x_0) > 0$ (STESSO TIPO DI DIMOSTR. PER < 0)

CALCOLIAMO $f^{(n)}$ CON IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}$$

SOSTITUISCO CON TAYLOR $\quad \to 0$

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0 \quad \forall x \in X \cap I_{x_0 \delta} \setminus \{x_0\}$$

A PRESCINDERE DA X. QUINDI

- SE n DISPARI, $(x - x_0)^n$ POTREBBE AVERE SEGNO DIVERSO PER LIMITE DESTRO/SINISTRO
- MA SE n PARI, $(x - x_0)^n \geq 0 \to f(x) - f(x_0) > 0$

QUINDI <u>$f(x) \geq f(x_0)$</u> $\forall x \in X \cap I_{x_0 \delta}$

<u>QUINDI È UN MIN. RELATIVO</u>

Studio di Funzione Completo

1) Stabilire l'insieme di definizione

+ se il dominio è simmetrico rispetto l'origine, studiare le simmetrie:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{simmetrico rispetto all'asse } y \\ -f(x) & \text{simmetrico rispetto l'origine} \end{cases}$$

2) Intersezioni con gli assi:

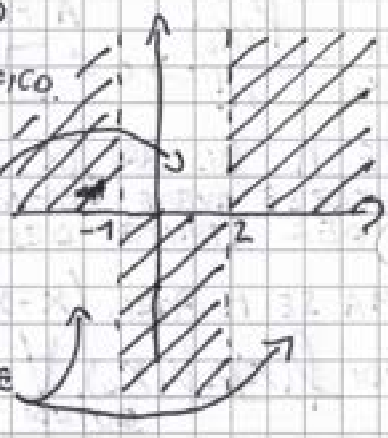
$\begin{cases} y=0 \\ f(x)=y \end{cases}$ $\cap$ asse delle ascisse

se $0 \in D$ $\begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases}$ $\cap$ asse delle ordinate

3) Positività $f(x)>0$

Rappresentare sul grafico.

Es. $f(x)>0 \quad \forall -1<x<2$



Di conseguenza, $f(x)$ sarà negativa nel complementare

4) Limiti ed asintoti

Asintoti orizzontali (obliqui) $\bar{y}$: $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)-\bar{y}|=0$

Studiare

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \bar{y}\in\mathbb{R} \to \bar{y} \text{ asintoto orizzont.} \\ \pm\infty \to \nexists \text{ asintoto o., l'asintoto è obliquo} \end{cases}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \nexists$ asintoto obliquo; $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ potrebbe esistere l'asintoto obliquo
- $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-m\cdot x) = \begin{cases} \pm\infty \ \nexists \text{ asintoto obliquo} \\ q\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\exists$ asintoto obliquo ed ha equazione

$y=mx+q$

Asintoti verticali $\bar{x}$:

Se esistono punti di accumulazione fuori dal dominio (eccetto $\pm\infty$ che abbiamo già studiato)

Studiare la discontinuità:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} l\in\mathbb{R} \to \text{punto di disc. di } 1^\circ \text{ o } 3^\circ \text{ specie} \\ \pm\infty \to 2^\circ \text{ specie} \to \exists\, \bar{x}=x_0 \end{cases}$$

5) RICAVARE LA <u>DERIVATA PRIMA</u> $y' = f'(x)$

6) RICERCA DEI <u>PUNTI CRITICI</u> CON $f'(x) = 0$

7) STUDIO DELLA <u>MONOTONIA</u> CON $f'(x) > 0$

8) TROVARE EVENTUALI <u>PUNTI DI MIN/MAX RELATIVO</u>

9) RICAVARE LA <u>DERIVATA SECONDA</u> $y'' = f''(x)$

10) <u>EVENTUALI PUNTI DI FLESSO</u> CON $f''(x) = 0$

11) <u>CONCAVITÀ/CONVESSITÀ</u> CON $f''(x) > 0$

12) IDENTIFICARE I <u>VERI PUNTI DI FLESSO</u>
CON $f''(x) = 0 \wedge f''(x^+) \cdot f''(x^-) \leq 0$
OVVERO DERIVATA SECONDA NULLA (O INESISTENTE) IN x_0 E DI SEGNO OPPOSTO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO

CONSIDERIAMO IL CASO:

- $f(x)$ DEFINITA IN $D \subseteq \mathbb{R}$
- $f'(x)$ DEFINITA IN $D \setminus \{x_0\}$

ANDANDO A STUDIARE IL LIMITE DI $f'(x)$ NEL PUNTO x_0, DIREMO CHE x_0 È:

- <u>PUNTO ANGOLOSO</u>

SE $\exists$ FINITI $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

- <u>PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE</u>

SE $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \left\langle \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \right.$

- <u>CUSPIDALE</u>, O <u>PUNTO DI CUSPIDE</u>

SE $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$

OPERAZIONI CON INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE

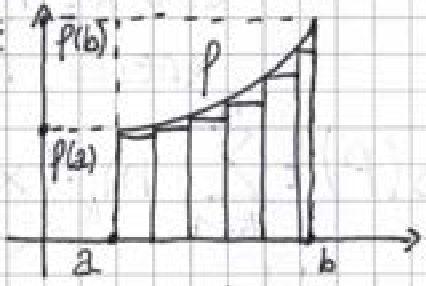
σ PICCOLO $\rightarrow$ $\underbrace{\sigma(\text{QUALCOSA})}_{\text{INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A QUALCOSA}}$

- $R_n(x) = \sigma(x^n)$
- $\sigma(x^n) + \sigma(x^n) = \sigma(x^n)$
- $\sigma(x^n)/x = \sigma(x^{n-1})$
- $\sigma(x^m) + \sigma(x^n) = \sigma(x^m)$ CON $m<n$
- $\sigma(x^m) \cdot \sigma(x^n) = \sigma(x^{m+n})$
- $c \cdot \sigma(x^n) = \sigma(x^n)$ CON $c \in \mathbb{R}$ COSTANTE

! LE VARIABILI VENGONO ESCLUSE DAGLI INFINITESIMI: $\sigma(2x^n) \rightarrow \sigma(x^n)$

INTEGRALI DEFINITI

GLI INTEGRALI SERVONO A CALCOLARE L'AREA COMPRESA FRA IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE POSITIVA LIMITATA E L'ASSE DELLE ASCISSE TRAMITE IL METODO DI ESAUSTIONE, OVVERO RIEMPIRE UNA FIGURA IRREGOLARE CON POLIGONI REGOLARI, O ALTRE FIGURE DI CUI SI CONOSCE L'AREA.



SIA $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

CONSIDERO UNA PARTIZIONE DELL'INTERVALLO:

$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ OTTENENDO $n+1$ PUNTI CHE DIVIDONO L'INTERVALLO $[a,b]$ IN n PARTI, OVVERO n INTERVALLI

$[x_{k-1}, x_k]$ CON $k = 1, 2 \ldots n$

SOTTOINTERVALLI DI f LIMITATA $\rightarrow$ LIMITATI $\rightarrow \exists$ INF $\wedge$ SUP

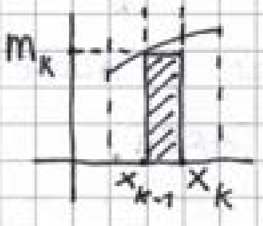
DEFINISCO GLI INF E I SUP DI QUESTI INTERVALLI

- $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
- $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

CON $k = 1, 2 \dots n$

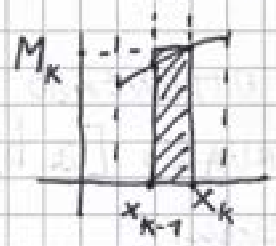
ADESSO DEFINISCO:

- $s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ SOMMA INTEGRALE INFERIORE



BASE · ALTEZZA = AREA DEL RETTANGOLO IN DIFETTO

- $S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ SOMMA INTEGRALE SUPERIORE



BASE · ALTEZZA = AREA DEL RETTANGOLO IN ECCESSO

VISTO CHE $(x_k - x_{k-1})$ È LO STESSO PER ENTRAMBE LE SOMMATORIE E $m \le M$,
$s(P) \le S(P)$ $\forall P$ PARTIZIONE DI $[a,b]$

VALE IL SEGUENTE LEMMA

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA IN $[a,b]$

$\forall P, Q$ PARTIZIONI DI $[a,b]$ VALE CHE:

$$m \cdot (b-a) \le s(P) \le S(Q) \le M \cdot (b-a)$$

DOVE $m = \inf_{[a,b]} f$ E $M = \sup_{[a,b]} f$

NOTIAMO INOLTRE CHE VISTO CHE OGNI ELEMENTO DI s È $\le$ DELL'ELEMENTO DI S CORRISPONDENTE, s ED S SONO DUE INSIEMI SEPARATI INOLTRE SE FOSSERO ANCHE CONTIGUI, OVVERO HANNO UN UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE, LA FUNZIONE f SI DIRÀ INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$ E CHIAMEREMO INTEGRALE DEFINITO PROPRIO QUELL'UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE, OVVERO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \sup\{s(P) : P \text{ PARTIZIONE}\} \\ \inf\{S(P) : P \text{ PARTIZIONE}\} \end{cases}$$

INTEGRALE: $\int_a^b f(x)\,dx$

VARIABILE DI INTEGRAZIONE

FUNZIONE INTEGRANDA

ESTREMI DI INTEGRAZIONE

DIFFERENZIALE RISPETTO ALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE

INOLTRE

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

TEOREMA DI RIEMANN

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA IN $[a,b]$

f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists P_\varepsilon$ PARTIZIONE DI $[a,b]$: $S(P_\varepsilon)-s(P_\varepsilon)<\varepsilon$

(MINORE DI ε)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

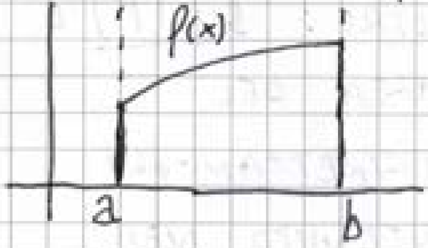
SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE SECONDO RIEMANN (S.R.) IN $[a,b]$

CON $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$

INDICO IL RETTANGOLOIDE CON

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b] \wedge 0\leq y\leq f(x)\}$$

OVVERO L'INSIEME DI PUNTI COMPRESI FRA IL GRAFICO DELLA FUNZIONE E L'ASSE DELLE ASCISSE NELL'INTERVALLO $[a,b]$



FISSATA UNA PARTIZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$:

$$P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$$

CONSIDERIAMO I DUE PLURIRETTANGOLI

(DEF. DI PLURIRETTANGOLO:

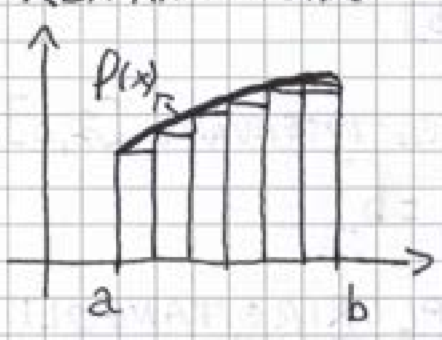
UNIONE DI RETTANGOLI CON BASE INTERVALLI A DUE A DUE PRIVI DI PUNTI INTERNI IN COMUNE) →

$$\cdot\, s(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot(x_k - x_{k-1})$$

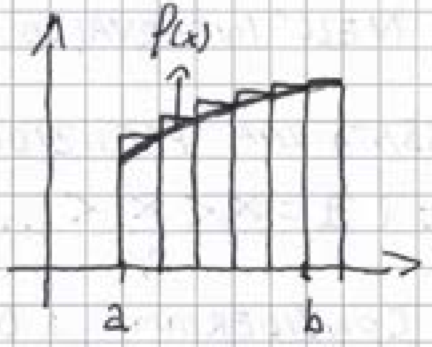
$$\cdot\, S(P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot(x_k - x_{k-1})$$

CON m_k ESTREMO INFERIORE ED M_k ESTREMO SUPERIORE DEGLI INTERVALLI $[x_{k-1}, x_k]$

INOLTRE: $\underline{s(P)}$ È L'AREA DEL PLURIRETTANGOLO <u>CONTENUTO</u> NEL RETTANGOLOIDE



$\underline{S(P)}$ È L'AREA DEL PLURIRETTANGOLO <u>CONTENENTE</u> IL RETTANGOLOIDE



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA DI } R$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

<u>PROPRIETÀ INTEGRALI DEFINITI</u>

- <u>PROP. DI ADDITIVITÀ</u> DELL'INTEGRALE S.R. RISPETTO ALL'INTERVALLO

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R.

SIA $c\in[a,b]$, AVREMO CHE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- <u>PROP. DI LINEARITÀ</u> DELL'INTEGRALE S.R.

SIANO $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATE ED INTEGRABILI S.R.

1) $f+g$ È INTEGRABILE S.R. 2) $\alpha\cdot f(x)$ INTEGRABILE S.R. CON $\alpha\in\mathbb{R}$

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (\alpha\cdot f(x))\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\alpha$

- PROP. DEL CONFRONTO DELL'INTEGRALE S.R.

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATE ED INTEGRABILI S.R. CON $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$, ALLORA VALE:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- PROP. DEL VALORE ASSOLUTO DELL'INTEGRALE S.R.

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

($f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R.)

I TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$m = \text{INF}\{f(x) : x \in [a,b]\}$ $\quad$ $M = \text{SUP}\{---\}$

DIMOSTRAZIONE

PER LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE:

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(P)$$

MA SE SCELGO COME PARTIZIONE $\bar{P} = \{a < b\}$

LE DUE SOMMATORIE SI RIDUCONO A:

- $s(P) \Rightarrow m(b-a)$ $\quad$ - $S(P) \Rightarrow M(b-a)$

QUINDI VALE

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

CONTINUITÀ UNIFORME

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE:

f È UNIFORMEMENTE CONTINUA IN $[a,b]$

$\overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X$

$$|x_1 - x_2| < \delta, \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

! CI SONO FUNZIONI CONTINUE CHE NON SONO UNIFORMEMENTE CONTINUE (Es. $f(x) = x^2$)

TEOREMA DI CANTOR

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA NELL' INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$

$\Rightarrow f$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA IN $[a,b]$

($f(x) = x^2$ DIVENTA UNIFORM. CONTINUA SE SI LIMITA IL DOMINIO AD UN INTERVALLO $[a,b]$)

TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

$\to f$ È INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

FISSO UN $\varepsilon > 0$: $\varepsilon = \varepsilon / b-a$

PER IL TEOREMA DI CANTOR, f È UNIFORMEMENTE CONTINUA IN $[a,b]$,

QUINDI $\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|x_1 - x_2| < \bar{\delta}, \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

FISSO UNA PARTIZIONE $P_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$: t.c. $|x_k - x_{k-1}| < \bar{\delta}$, $\forall k = 1, 2 \ldots n$

$$\hookrightarrow |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon / b-a$$

CONSIDERIAMO ADESSO LA DIFFERENZA FRA SOMMA INTEGRALE SUPERIORE ED INFERIORE

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

SICCOME M_k ED m_k SONO VALORI ASSUNTI, QUELLO CHE VALEVA PER $f(x_k)$ E $f(x_{k-1})$, VALE ANCHE PER LORO

$$|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

(m E M SONO COMUNQUE DEGLI $f(x)$)

QUINDI È VALIDA LA MINORAZIONE

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

VISTO CHE $\varepsilon / b-a$ NON DIPENDE DA k, LO TIRO FUORI DALLA SOMMATORIA

$$\rightarrow \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})}$$

SOMMA DI TUTTI I SOTTO INTERVALLI DI $[a,b]$, OVVERO LA LUNGHEZZA DI TUTTO

QUINDI LA **MINORAZIONE** DIVENTA

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{(b-a)}$$

AMPIEZZA DI $[a,b]$

DA CUI SEGUE

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

QUINDI PER IL TEOREMA DI RIEMANN, f È INTEGRABILE S.R. NELL'INTERVALLO $[a,b]$

II TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA IN $[a,b]$

$$\rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

DIMOSTRAZIONE

PER IL I TEOREMA DELLA MEDIA:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

MIN f MAX f

DIVIDO TUTTA LA CATENA PER $b-a$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}}$$

$$\downarrow$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

RAPPORTO DELLA MEDIA INTEGRALE → È UN NUMERO REALE

PER IL 2° TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI, f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MIN (m) E MAX (M),

QUINDI $\exists\, f(x_0) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER $b-a$

$$f(x_0)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

CHE È ESATTAMENTE LA TESI DA DIMOSTRARE

TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ MONOTONA IN $[a,b]$

$\Rightarrow$ È INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

CASO f CRESCENTE: (DIMOSTRAZIONE ANALOGA PER DECRESCENTE)

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$$

SE CONSIDERIAMO ANCHE GLI ESTREMI COME PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO OTTENIAMO

$$f(a) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(b)$$

COSTRUISCO UNA PARTIZIONE P t.c. TUTTI GLI INTERVALLI ABBIANO AMPIEZZA $\frac{b-a}{n}$, OVVERO I PUNTI x_k SIANO EQUIDISTANTI

DA CUI $x_k = x_0 + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$

PARTI DA x_0 — AGGIUNGI k VOLTE L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO

x_0 IN QUESTO CASO È a QUINDI

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$ SE K FOSSE = n

$$x_k = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b$$

VISTO CHE TUTTI GLI INTERVALLI $[x_k, x_{k-1}]$ SONO UGUALI, SOSTITUIAMOLI NELLA FORMULA:

$$S(P_n) - s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} m \cdot \frac{b-a}{n}$$

VALORE COMUNE NON DIPENDENTE DA K

METTO A FATTORE COMUNE

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)$$

$$M_k \to f(x_k) \qquad m_k \to f(x_{k-1})$$

VISTO CHE f È CRESCENTE

ESPLICITO PARZIALMENTE LA SOMMATORIA E FACCIO UN'OSSERVAZIONE

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)} \ldots \cancel{f(x_{n-2})} \; \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_{n-2})} + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}$$

DA QUALCHE PARTE LI DENTRO

TUTTI I TERMINI DELLA SOMMATORIA SI ELIDONO TRA LORO, ECCETTO $-f(x_0)$ E $f(x_n)$

$$x_0 = a \qquad x_n = b$$

QUINDI LA SOMMATORIA SI RIDUCE A $f(b) - f(a)$.

LA SOSTITUISCO CON QUESTO NELLA FORMULA

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$ CHE DIVENTA 0 CON $n \to +\infty$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

PER IL TEOREMA DI REIMANN, QUESTO VUOL DIRE CHE f È INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

FUNZIONE INTEGRALE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

DEFINISCO LA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b]$$

- SE $x=a \to F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$
- SE $x=b \to F(b)=\int_a^b f(t)\,dt=$ INTEGRALE DEFINITO DI f IN $[a,b]$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

ANCHE CHIAMATO TEOREMA DELL'ESISTENZA DELLE PRIMITIVE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b]$ È

DERIVABILE IN $[a,b]$. INOLTRE

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

! REMINDER: NEL PUNTO a SI PARLA DI DERIVATA DESTRA E NEL PUNTO b SI PARLA DI DERIVATA SINISTRA, VISTO CHE a E b SONO GLI ESTREMI

DIMOSTRAZIONE

FISSO UN $x_0\in]a,b[$

FISSO UN $h\in I(0)\setminus\{0\}$

CONTINUA

CONSIDERO IL RAPPORTO INCREMENTALE $\frac{\Delta F}{\Delta x}$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h}=$$

USANDO LA PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ DEGLI INTEGRALI

$$\frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}}{h}=$$

SEMPLIFICO E RISCRIVO $\frac{---}{h}$ COME $\frac{1}{h}\cdot ---$

$$=\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

ADESSO CONSIDERO

$[x_0, x_0+h]$ SE AVEVO SCELTO $h>0$

$[x_0+h, x_0]$ SE AVEVO SCELTO $h<0$

ENTRAMBI SONO CONTINUI IN $[a,b]$

QUINDI PER ENTRAMBI I CASI VALE IL II TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE:

$$\exists\ x(h)\in I(x_0, x_0+h): \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt=f(x(h))\cdot \underbrace{h}_{(x_0+h)-x_0}$$

QUINDI $\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt=\frac{1}{\cancel{h}}\cdot f(x(h))\cdot\cancel{h}$

RICORDIAMO CHE $x(h)\in I(x_0, x_0+h)$ OVVERO

$x(h)\in[x_0, x_0+h)$ CON h POSITIVO $\quad$ $x(h)\in[x_0+h, x_0]$ CON h POSITIVO

QUINDI

$x_0\leq x(h)\leq x_0+h \quad\quad x_0+h\ x(h)\leq x_0$

QUANDO h TENDE A 0, PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI $x(h)$ TENDE AD x_0, A PRESCINDERE DAL SEGNO DI h. QUINDI:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{h\to 0} f(x(h))=f(x_0)=F'(x_0)$$

RISCRITTO MEGLIO

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$$

! DA QUI SI NOTA ANCHE CHE L'INTEGRALE È L'OPERATORE INVERSO DELLA DERIVATA

FUNZIONI PRIMITIVE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X PRIVO DI PUNTI ISOLATI,
SIA $f: X \to \mathbb{R}$; DIREMO CHE:

$F: X \to \mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ SI VERIFICA:

1) F DERIVABILE IN X
2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

PROPRIETÀ

SE $F: X \to \mathbb{R}$ PRIMITIVA DI f ALLORA ANCHE $F(x) + c$ È UNA PRIMITIVA DI f, CON c = COSTANTE, $c \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE

SE $F(x)$ È DERIVABILE IN X, ALLORA LO SARÀ ANCHE $F(x) + c$, PERCHÈ c È COSTANTE $\to$ DERIVATA DI $c = 0$:

INOLTRE $D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$

QUINDI $F(x) + c$ VERIFICA TUTTE LE CONDIZIONI DELLE PRIMITIVE DI f

---

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE

DI UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTERVALLO

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, SIANO $F, G: [a,b] \to \mathbb{R}$ DUE PRIMITIVE DI f

ALLORA:

$$\exists c \in \mathbb{R}: \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE

INTRODUCO $H(x) = G(x) - F(x): [a,b] \to \mathbb{R}$
($H(x)$: FUNZIONE AUSILIARIA)

GIÀ SAPPIAMO CHE $F'(x) = G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

H È UNA DIFFERENZA DI FUNZIONI DERIVABILI $\to$ H È DERIVABILE

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

QUINDI $H'(x)=0$

MA SE LA DERIVATA DI H È ZERO $\forall x$,
VUOL DIRE CHE H È UNA FUNZIONE COSTANTE.

$$\exists c \in \mathbb{R} : H(x)=c$$

$$G(x)-F(x)=c$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad G(x)=F(x)+c \quad \forall x \in [a,b]$$

C PRENDE IL NOME DI <u>COSTANTE D'INTEGRAZIONE</u>

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ CON G PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$ VALE L'UGUAGLIANZA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b)-G(a)$$

(G DI X CALCOLATO NELL'INTERVALLO $[a,b]$)

DIMOSTRAZIONE

APPLICHIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE AD f:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

G ED F SONO ENTRAMBE PRIMITIVE DI f

$\Rightarrow$ CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE:

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x)=F(x)+c \quad \forall x \in [a,b]$$

SOSTITUISCO $F(x)$ CON LA FORMULA

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c$$

NOTO CHE CON $x=a$

$$G(a)=\int_a^a f(t)\,dt + c = c$$

$\int_a^a$ SEMPRE ZERO

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt + G(a) \quad \forall x \in [a,b]$$

CON $x=b$ INVECE ABBIAMO

$$G(b)=\int_a^b f(t)\,dt + G(a) \text{ DA CUI}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$$ COME NELLA TESI

INTEGRALE INDEFINITO (DI f)

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

CHIAMEREMO INTEGRALE INDEFINITO L'INSIEME DI TUTTE LE DERIVATE DI f E LO INDICHIAMO COSÌ: $\boxed{\int f(x)\,dx}$

VISTO CHE LE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE SI DIFFERENZIANO PER UNA COSTANTE C (COSTANTE DI INTEGRAZIONE), POSSIAMO DIRE:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$! \int 1\,dx \Rightarrow \int dx$$

ALCUNE PROPRIETÀ:

SIANO $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$:

1) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (\alpha\cdot f(x))\,dx = \alpha\cdot\int f(x)\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ con $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + c = a^x \cdot \log_a e + c$ $(a>0, a\neq 1)$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos + c$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

- $\int (f(x))^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = (f(x))^{\alpha+1}/_{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
- $\int f'(x)/_{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$
- $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\,dx = a^{f(x)}/_{\log a} + c$
- $\int f'(x) \cdot \sin(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c$
- $\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\,dx = \sin(f(x)) + c$
- $\int f'(x)/_{\cos^2(f(x))}\,dx = \tan(f(x)) + c$
- $\int f'(x)/_{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \arcsin(f(x)) + c$
- $\int -f'(x)/_{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \arccos(f(x)) + c$
- $\int f'(x)/_{(1+(f(x))^2)}\,dx = \arctan(f(x)) + c$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON DERIVATA CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA VALE:

$$\int \underset{\text{FATTORE FINITO}}{f(x)} \cdot \underset{\text{FATTORE DIFFERENZIALE}}{g'(x)}\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int \underset{\text{DERIVATA DEL FATTORE FINITO}}{f'(x)} \cdot \underset{\text{PRIMITIVA DEL FATTORE DIFFERENZIALE}}{g(x)}\, dx$$

LA FORMULA VIENE ESTRAPOLATA DA:

$$\underbrace{D[f(x)\cdot g(x)]} = \underbrace{f'(x)\cdot g(x)} + \underbrace{f(x)\cdot g'(x)}$$

(TUTTI INTEGRABILI)

(C'È UN CAMBIO DI SEGNO)

$$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx$$

PICCOLO RIPASSO: SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

SIANO $a(x)$ E $b(x)$ DUE POLINOMI E SIA IL GRADO DI $a(x)$ MAGGIORE O UGUALE AL GRADO DI $b(x)$ ($\deg a(x) \geq \deg b(x)$)

ALLORA POSSIAMO SCOMPORRE IL RAPPORTO

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \underset{\text{QUOZIENTE}}{q(x)} + \frac{r(x)}{b(x)} \leftarrow \text{RESTO}$$

VEDIAMO PRIMA UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA: SIANO

$$\begin{array}{l|l} a(x) & b(x) \\ \hline & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

Es. $a(x) = 2x^3 - 6x + 10$ - - -

$b(x) = x + 3$ - - -

$\deg a(x) = 3 > \deg b = 1$

I GRADI INFERIORI DI QUELLO MASSIMO VANNO SCRITTI CON COEFF. 0

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 0x^2 - 6x + 10 & x + 3 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

1. COME PRIMA COSA SI PRENDE L'ELEMENTO CON GRADO MASSIMO DI $a(x)$ E LO SI DIVIDE CON QUELLO DI GRADO MASSIMO DI $b(x)$

2. IL RISULTATO VIENE INSERITO NELLO SPAZIO DI $q(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+0x^2-6x+10 & x+3 \\
\hline
-2x^3-6x^2 & 2x^2 \\
\hline
// \quad -6x^2-6x+10 &
\end{array}
$$

3 DOPODICHÉ SI FA IL PRODOTTO CON OGNI ELEMENTO DI $b(x)$ E LO SI INSERISCE CON SEGNO CAMBIATO SOTTO L'ELEMENTO DI GRADO CORRISPONDENTE

4 POI SI FA LA SOMMA ALGEBRICA IN VERTICALE.

IL PROCESSO PUÒ ESSERE RIPETUTO FINCHÈ $\deg a(x) \geq \deg b(x)$

VEDIAMO LA SCOMPOSIZIONE FINITA

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+0x^2-6x+10 & x+3 \leftarrow b(x) \\
\hline
-2x^2-6x^2 & 2x^2-6x+12 \\
\hline
// \quad -6x^2-6x+10 & \quad \nwarrow q(x) \\
\quad +6x^2+18x & \\
\hline
\quad // \quad +12x+10 & \\
\qquad -12x-36 & \\
\hline
\qquad // \quad -26 & \deg(-26) < \deg b(x)
\end{array}
$$

$-26 \leftarrow r(x)$; $\deg(-26)$: GRADO 0 ; $\deg b(x)$: GRADO 1

FINE DELLA SCOMPOSIZIONE

QUINDI $\dfrac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{b(x)}$ DIVENTA

$$\frac{2x^3-6x+10}{x+3} = 2x^2-6x+12+\frac{-26}{x+3}$$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

SIA $\displaystyle\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx$ L'INTEGRALE DI UN RAPPORTO DI POLINOMI

PER CALCOLARLO, CONSIDERIAMO 2 CASI:

1) $\deg a(x) \geq \deg b(x)$

SI SCOMPONE IL RAPPORTO DI POLINOMI:

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx = \int q(x)+\frac{r(x)}{b(x)}\,dx$$

USO PROP. INTEGRALE SOMMA = SOMMA DI INTEGRALI

OTTENGO

$$\underbrace{\int q(x)\,dx}_{\text{FACILE DA RICAVARE}} + \underbrace{\int \frac{r(x)}{b(x)}\,dx}_{2^\circ \text{ CASO}}$$

DOVE $\deg r(x) < \deg b(x)$

2) $\deg a(x) < \deg b(x)$

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx$$

SCOMPONGO $b(x)$ AI MINIMI TERMINI:

SI POSSONO VERIFICARE 3 CASI

- POLINOMIO 1° GRADO es. $\boxed{(x+1)}$
- QUADRATO DI POLINOMIO DI 1° GRADO es. $\boxed{(x+1)^2}$
- POLINOMIO DI 2° GRADO CON $\Delta<0$, OVVERO NON ULTERIORMENTE SCOMPONIBILE es. $\boxed{(x^2+x+1)}$

NOI VOGLIAMO OTTENERE L'UGUAGLIANZA

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{\frac{l}{RAD.1} + \frac{h}{RAD.2} + \cdots}_{} = \frac{l\cdot(RAD_2) + h\cdot(RAD_1)}{b(x)}$$

CON $l, h \in \mathbb{R}$ E RAD. LE SCOMPOSIZIONI DI $b(x)$

! È QUI CHE ENTRANO IN GIOCO I $\boxed{3 \quad CASI}$ ← (IMPORTANTI)

- SE RAD. È <u>POLINOMIO DI PRIMO GRADO</u>, OTTENIAMO $\dfrac{l}{RAD}$

- SE RAD È <u>QUADRATO DI POLINOMIO DI PRIMO GRADO</u>, OTTENIAMO

$$\frac{l}{RAD} + \frac{h}{RAD^2}$$

UNA VOLTA CON, E UNA VOLTA SENZA QUADRATO

- SE RAD È <u>POLINOMIO DI 2° GRADO</u> CON <u>Δ NEGATIVO</u> $(\Delta<0)$

$$\frac{lx+h}{RAD}$$

CON $l, h \in \mathbb{R}$, QUINDI SI INTRODUCE UNA FUNZIONE LINEARE DI 1° GRADO

FATTO QUESTO PER OGNI RAD, PRENDIAMO LE NUOVE COSTANTI COSÌ OTTENUTE (l, h, ecc.) E ...

RIMETTIAMO TUTTO A PASTOR COMUNE.

PER RICAPITOLARE

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{h}{RAD_1} + \frac{l}{RAD_2} + \frac{K}{RAD_3} \text{ ecc.} = \frac{COSE}{b(x)}$$

SI MOLTIPLICA PER $b(x)$

OTTENENDO $a(x) = COSE$

VEDIAMO COSA SONO LE COSE OTTENUTE

ESEMPIO CONCRETO

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\, dx$$

SCOMPONGO $b(x)$ AI MINIMI TERMINI

$$b(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

COSE

PROCEDO CON

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{l}{(x-1)} + \frac{h}{(x-2)} = \frac{l(x-2)+h(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

SEMPLIFICO

$$x+1 = lx - 2l + hx - h \quad (a(x) = COSE)$$

ADESSO USIAMO UN SISTEMA PER RICAVARE l E h

$$\begin{cases} \text{GRADO 1}: & 1 = l+h \\ \text{GRADO 0}: & 1 = -2l+h \end{cases}$$

COEFFICIENTE DI X IN

$a(x) = 1x+1$

RISOLVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} l = 1-h \\ h = -2l-1 \end{cases} \Rightarrow l = \frac{2}{3} \Downarrow h = -\frac{7}{3}$$

TORNIAMO ALLE FRAZIONI ISOLATE

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} = \int \frac{2}{3(x-1)} - \frac{7}{3(x-2)}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{(x-1)}\, dx - \frac{7}{3} \int \frac{1}{(x-2)}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \log|x-1| - \frac{7}{3} \cdot \log|x-2|$$

FINE

FACOLTATIVO

ESERCIZIO PER RICAPITOLARE

$a(x) = x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27$

$b(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx \qquad \deg \overset{7}{a(x)} \geq \deg \overset{5}{b(x)}$$

POCHI COMMENTI, CERCATE DI CAPIRE COSA STA SUCCEDENDO, QUALI CRITERI VENGONO APPLICATI ecc.

INIZIO

SCOMPONGO $a(x)$

$b(x)$: $\boxed{x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}$

$q(x)$: $\boxed{x^2 + 6x + 9}$

$$\begin{array}{l}
x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27 \\
-x^7 - x^6 + 4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 \\
\hline
// \quad 6x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 2x^3 + x^2 - 27x + 27 \\
-6x^6 - 6x^5 + 24x^4 - 24x^3 + 30x^2 - 18x \\
\hline
// \quad 9x^5 + 9x^4 - 26x^3 + 31x^2 - 45x + 27 \\
-9x^5 - 9x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 45x - 27 \\
\hline
// \quad // \quad 10x^3 - 5x^2 \quad // \quad //
\end{array}$$

$r(x) = 10x^3 - 5x^2$

TORNIAMO SULL'INTEGRALE

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}\,dx$$

$$= \int x^2 + 6x + 9\,dx + \int \frac{10x^3 - 5x^2}{x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}\,dx$$

$$= \int (x+3)^2\,dx + 5\int \frac{2x^3 - x^2}{b(x)}\,dx$$

$$\frac{(x+3)^3}{3}$$

$\deg r(x) < \deg b(x)$

SCOMPONGO IL DENOMINATORE

$b(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

USO RUFFINI: RADICE $x = 1$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 1 & -4 & 4 & -5 & 3 \\
1 & & 1 & 2 & -2 & +2 & -3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & +2 & -3 & 0
\end{array}$$

$b(x) = (x-1)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3)$

RUFFINI DI NUOVO: RADICE $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\
1 & & 1 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0
\end{array}$$

$b(x) = (x-1)^2(x^3 + 3x^2 + x + 3)$

RECAP.

$$\frac{(x+3)^3}{3} + 5\int \frac{2x^3-x^2}{(x-1)^2(x^3+3x^2+x+3)}\,dx$$

(POTREI USARE ANCORA RUFFINI)

NOTO UN PATTERN SIMILE:

RACCOGLIMENTO PARZIALE

$$x^3+3x^2+x+3 = x^2(x+3) + (x+3)$$

1 SOTTINTESO

$$(x+3)(x^2+1)$$

TORNANDO ALL'INTEGRALE

$$\int \frac{(2x^3-x^2)}{(x+3)(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c}{(x+3)} + \frac{d}{(x-1)} + \frac{e}{(x-1)^2} + \frac{fx+h}{(x^2+1)} =$$

$$\frac{(cx^2-2cx+c)(x^2+1) + (dx-d)(x+3)(x^2+1) + (ex+3e)(x^2+1) + (fx+h)(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)(x^2+1)}$$

I RISULTATI DEI CALCOLI SONO

COSTANTE

- c : $cx^4-2cx^3+2cx^2-2cx+c$
- d : $dx^4+2dx^3-2dx^2+2dx-3d$
- e : $ex^3+3ex^2+ex+3e$
- f : $fx^4+fx^3-5fx^2+3fx$
- h : $hx^3+hx^2-5hx+3h$

LA SOMMA DI QUESTI $= a(x) = 2x^3-x^2$

GRADO MAX. 4 -> SISTEMA A 5

GRADI

$$\begin{array}{l} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 0 \end{array}\begin{cases} 0 = c+d+f \\ 2 = -2c+2d+e+f+h \\ -1 = 2c-2d+3e-5f+h \\ 0 = -2c+2d+e+3f-5h \\ 0 = c-3d+3e+3h \end{cases}$$

DIFF.: $2 = -2f-6h$

$$f = -3h-1$$
$$h = \frac{-f-1}{3}$$

USARE QUALSIASI METODO OPPORTUNO PER RISOLVERE IL SISTEMA

$c = -d - f \leftarrow f = -c - d = -3h - 1$

$$\begin{cases} c = -d - f \\ e = -4d - 3f - h + 2 \Rightarrow e = -4d + 8h + 5 \\ h = 5f - 3e + 2d - 2c - 1 \quad +7f \quad +4d \\ f = -3h - 1 \\ 0 = -d - f - 3d + 3e - f - 1 \Rightarrow f = -4d + 3e - 1 \end{cases}$$

diff. *

$$\begin{cases} c = -d - 5/19 \\ e = 4d + 16/19 \\ h = 7f - 3e + 4d - 1 \\ f = 24/19 - 1 = 5/19 \\ h = 6f - 2 \Rightarrow h = -18h - 6 - 2 \Rightarrow h = -\frac{8}{19} \end{cases}$$

SOMMA

MA $f = -3h - 1$

$$\begin{cases} c = \frac{9 - 80}{304} = -\frac{71}{304} \\ d = \frac{55}{76}\cdot\frac{1}{4} - \frac{16}{19}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{55-64}{76}\right) = -\frac{9}{304} \\ e = \frac{f + 8h + 6}{4} = \frac{5}{76} - \frac{16}{19} + \frac{3}{2} = \frac{55}{76} \\ f = 5/19 \\ h = -\frac{8}{19} \end{cases}$$

ABBIAMO I VALORI

$c = -\frac{71}{304} \quad d = -\frac{9}{304} \quad e = \frac{55}{76} \quad f = \frac{5}{19} \quad h = -\frac{8}{19}$

QUINDI IL TUTTO VIENE:

$$\int \frac{x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27}{x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{(x+3)^3}{3}}_{\int q(x)dx} - \underbrace{\frac{71}{304}\log|x+3|}_{\int c/_{x+3}dx} - \underbrace{\frac{9}{304}\log|x-1|}_{\int d/_{(x-1)}dx} + \underbrace{\frac{55}{76}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}}_{\int e/_{(x-1)^2}dx} = \frac{-55}{76(x-1)}$$

$$+ \underbrace{\frac{5}{38}\log(x^2+1)}_{\int fx/_{(x^2+1)}dx} - \underbrace{\frac{8}{19}\arctan x}_{\int h/_{(x^2+1)}dx} + \underbrace{C}_{\text{COSTANTE DI INTEGRAZIONE}}$$

FINE

OSSERVAZIONI

(2° GRADO)

$(1°\text{ GRADO})^2$

DA NOTARE CHE SULLA SCALA (1° GRADO), OVVERO $(x+1) \rightarrow (x+1)^2 \rightarrow (x^2+1)$

LE COSTANTI HANNO VALORI PIÙ GESTIBILI AI GRADI ALTI $\left(-8/19 \;,\; 5/19\right)$ CHE AI GRADI BASSI $\left(-\frac{71}{304} \;,\; 55/76\right)$, MA SOLO SE SONO PRESENTI ENTRAMBI. IL SUPERIORE $(fx+h)$ COMPLICA L'INFERIORE (c)

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E
SIA $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$ E CON DERIVATA CONTINUA

ALLORA VALE CHE $\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

Es. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$\Downarrow$

$dx = 2t\,dt$

$\int \frac{t}{t-1} \cdot 2t\,dt$

$g'(t)$

$2 \int \frac{t^2}{t-1}\,dt \Rightarrow$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO 1

$2 \cdot \int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2 \int \frac{\overbrace{t^2-1}^{(t+1)(t-1)}}{(t-1)} + \frac{1}{(t-1)}\,dt$

$2 \cdot \int \frac{(t+1)\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}}\,dt + 2 \cdot \int \frac{1}{t-1}\,dt =$

$2\int t\,dt + 2\int dt + 2\log|t-1| =$

$2 \cdot \frac{t^2}{2} + 2t + \log(t-1)^2$ RIPRENDIAMOCI ADESSO LA VARIABILE ORIGINALE $\sqrt{x} = t$

SOSTITUISCO

$x + 2\sqrt{x} + \log(\sqrt{x}-1)^2 + c$ FINE

IMPORTANTE

L'ESERCIZIO È CONCLUSO. QUELLO CHE SEGUE HA UN UTILITÀ MOLTO RISTRETTA, QUINDI IN GENERE SI FA SOLO PER FORMA/ESTETICA (IN QUALCHE CASO PERÒ È UTILE VERAMENTE)

$x + 2\sqrt{x} + \log(\sqrt{x}-1)^2 \underbrace{+1-1} + c =$

$(\sqrt{x}+1)^2 + \log\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{e}\right) + C$

ULTIMA SEZIONE SUGLI INTEGRALI DEFINITI

• CALCOLO DELL'AREA DI UN RETTANGOLOIDE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
CON $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$

CONSIDERIAMO IL RETTANGOLOIDE CON BASE $|b-a|$: LA SUA AREA SARÀ

$$A(R)=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ o ANCHE $[F(x)]_a^b$

NEL CASO CI SIANO PIÙ FUNZIONI (FUNZIONI COMPOSTE PER ESEMPIO)

VALGONO LE STESSE REGOLE

Es. $f(x)=g(x)+h(x)$ $\quad [G(x)+H(x)]_a^b$

$$A(R)=\int_a^b g(x)\,dx+\int_a^b h(x)\,dx=$$

(diversi modi per scrivere la stessa cosa)

$$(G(b)+H(b))-(G(a)+H(a))$$

RICORDA! $\cancel{+c}$
NO COSTANTE DI INT. PER INTEGRALI DEFINITI

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI, PER INTEGRALI DEFINITI

SIANO $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUE E CON DERIVATA CONTINUA IN $[a,b]$

VALE CHE:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx=[f(x)\cdot g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE, PER INTEGRALI DEFINITI

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E SIA

$g:[c,d]\to[a,b]$ DERIVABILE E CON DERIVATA CONTINUA INVERTIBILE (IN $[a,b]$)

VALE CHE:

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}=\int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

$a=g(c)\Rightarrow c=g^{-1}(a)$
$b=g(d)\Rightarrow d=g^{-1}(b)$

ESEMPIO
g = ELEVAMENTO A ^{2}
$a=c^2\Rightarrow c=\sqrt{a}$
$b=d^2\Rightarrow d=\sqrt{b}$

Volumi di solidi di rotazione

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

con $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$

Facendo ruotare la funzione f (il grafico della f)

attorno all'asse delle ascisse, si ottiene

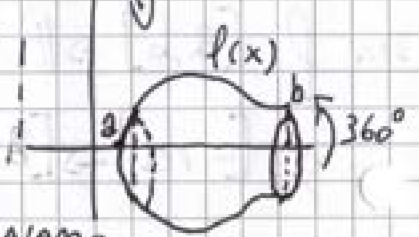
un solido, chiamato di rotazione

con volume $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ $\quad (V=r^2\pi\cdot h)$

Cilindro

con $b-a=h$ altezza del solido

$\int (f(x))^2$ raggio del solido



Inoltre è possibile

ottenere solidi con

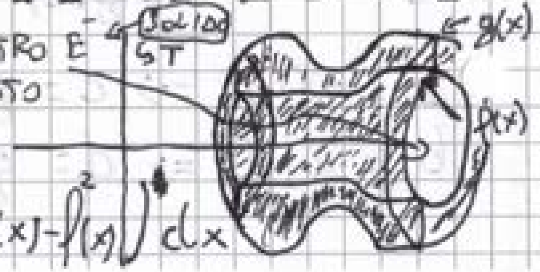
concavità se ci sottraiamo

un solido più piccolo:

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ t.c.

$0\leq f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Dentro è vuoto



$A(T)=\pi\int_a^b \left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$

Serie numeriche

Consideriamo la successione $\{a_n\}$

Termine generale della serie

Vogliamo studiare la sommatoria (chiamata serie)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Chiamiamola (1)

Ovviamente non possiamo fare la somma di infiniti termini,

Somme parziali:

$S_0=a_0$

$S_1=a_0+a_1$

$S_n=a_0+a_1+\dots a_n$

Anche questa è una successione: $\{S_n\}$ è la

successione delle somme parziali

CARATTERE DI UNA SERIE

STUDIANDO IL LIMITE PER $n \to +\infty$ DELLA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI, SI DETERMINA IL CARATTERE DELLA SERIE

UNA SERIE SI DICE:

- **CONVERGENTE** SE $\lim_{n \to +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$
- **DIVERGENTE** SE $\lim_{n \to +\infty} S_n = \pm \infty$
- **INDETERMINATA** SE $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

SERIE DI CARATTERE CONVERGENTE O DIVERGENTE SI DICONO **REGOLARI**

FACCIAMO DEGLI ESEMPI:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ ecc.

$S_0 = 1$

$\{S_n\}$ NON HA LIMITE $\quad S_1 = 1 - 1 = 0$

$S_2 = 1 - 1 + 1 = 0$ ecc.

$\to$ SERIE INDETERMINATA

- $\sum_{n=0}^{+\infty} K = \frac{n(n+1)}{2} \quad n \to +\infty \quad \lim S_n = +\infty$

SERIE DIVERGENTE

- **SERIE DI MENGOLI** (CONVERGENTE)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \text{ecc}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CON IL PRINCIPIO DI INDUZIONE CHE

$$\{S_n\} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

P.B. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

P.I. $n>1$

TESI

$$\sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(K+1)\cdot K} = \frac{n-1}{n-1+1} \qquad \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(K+1)\cdot K} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(K+1)\cdot K} + \frac{1}{(n+1)\cdot n} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{(K+1)\cdot K}$$

$$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^{\cancel{2}} - \cancel{1} + \cancel{1}}{\cancel{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \checkmark$$

QUINDI

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

LA SERIE È DI CARATTERE <u>CONVERGENSE</u> E CONVERGE AD 1

<u>CONDIZIONI NECESSARIE PER CONVERGENZE DI SERIE</u>

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ È CONVERGENTE} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

1 CONVERGE $\Leftrightarrow \{S_n\}$ CONVERGE $\rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = S$

VISTO CHE

$$S_n = a_0 + a_1 \dots a_n$$
$$S_{n-1} = a_0 + a_1 \dots a_{n-1}$$
$$\rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\downarrow n \to +\infty$$

$$S - S = a_n = 0$$

QUINDI IL TERMINE GENERALE a_n È INFINITESIMO: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \rightarrow$ NON È UNA SERIE CONVERGENTE

SUCCESSIONE DI CAUCHY (DEFINIZIONE)

$\{a_n\}$ È UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall m,n > \nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

CRITERIO DI CAUCHY PER SUCCESSIONI

$\{a_n\}$ È CONVERGENTE $\Longleftrightarrow$ È UNA S. DI CAUCHY

! VALE IN $\mathbb{R}$ MA NON IN $\mathbb{Q}$ PERCHÈ

$\exists \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \subseteq \mathbb{Q}$ È DI CAUCHY MA $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

ED $e \notin \mathbb{Q}$

CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}:$

$$\forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE

PER DEFINIZIONE ① CONVERGE $\Longleftrightarrow \{s_n\}$ CONVERGE

$\{s_n\}$ È UNA SUCCESSIONE, APPLICO IL CRITERIO DI CAUCHY PER SUCCESSIONI

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall m,n > \nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon$$

PRENDO UN $p \in \mathbb{N}$ E CONSIDERO

$m = n+p$

$$\forall n > \nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

OVVERO $|a_0 + a_1 + \ldots a_{n+p} - (a_0 + a_1 + \ldots a_n)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}| < \varepsilon$

NOTE SUL TEOREMA DELLE CONDIZIONI NECESSARIE PER CONVERGENZE DI SERIE

IL TEOREMA DICE CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

È UN IMPLICAZIONE, NON VALE IL CONTRARIO, MA IL TEOREMA PUÒ ESSERE USATO IN MANIERA <u>DISTRUTTIVA</u> TRAMITE LA TAUTOLOGIA DELLA CONTRAPPOSIZIONE DELLA NEGAZIONE:

$$p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p \quad \text{OVVERO}$$

a_n NON È INFINITESIMO $\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ DIVERGE

(OPPURE È IRREGOLARE)

OPERAZIONI FRA SERIE

SIANO a, b DUE SERIE REGOLARI:

- LA SOMMA DI DUE SERIE REGOLARI, È A SUA VOLTA UNA SERIE REGOLARE
- SE a E b CONVERGONO $\to a+b$ CONVERGE
- SE a E b DIVERGONO $\to a+b$ DIVERGE
- SE a CONVERGE E b DIVERGE $\to a+b$ DIVERGE
- $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CON c COSTANTE
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \text{CONVERGE} : < +\infty \\ \text{DIVERGE} : = +\infty \end{cases}$
- $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{(n+k)}$

<u>SERIE RESTO</u>: LA SERIE CALCOLATA DA UN CERTO k IN POI, HA LO STESSO CARATTERE DELLA SERIE COMPLETA (A MENO CHE $k = \pm\infty$)

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI (POSITIVI)

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ SI CHIAMA $\begin{cases}\text{SERIE A TERMINI NON NEGATIVI} \\ \text{SERIE A TERMINI POSITIVI}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{(NON NEG.)} \iff a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(POSITIVI)} \iff a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

TEOREMI SU SERIE A TERMINI NON NEGATIVI, SI APPLICANO IN AUTOMATICO PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

TEOREMA SULLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI È SEMPRE REGOLARE: O CONVERGE, O DIVERGE ($+\infty$)

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = a_0, a_1 \dots a_n = S_{n-1} + a_n \to S_n \geq S_{n-1}$$

LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI È CRESCENTE

PER IL TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE

$\{S_n\}$ — CONVERGE $\to$ LA SERIE CONVERGE

— DIVERGE $\to$ LA SERIE DIVERGE

— ~~IRREGOLARE~~

SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ CON $x \in \mathbb{R}$ CHIAMATO <u>RAGIONE</u>

OSSERVO I CASI:

- $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 0^0 + 0^1 + 0^2 \dots = 1 + 0 + 0 \dots$

  <u>CONVERGE</u> A 1 (OPPURE A 0 SENZA $0^0 = 1$)

- $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1^0 + 1^1 + 1^2 \dots = +\infty$

  <u>DIVERGE</u>

- $x > 1$ ANCHE OVVIAMENTE <u>DIVERGE</u>

• $x < 1$ USIAMO UNA FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA (DIMOSTRABILE PER INDUZIONE)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \nexists & x \leq -1 \text{ INDETERMINATA} \\ \dfrac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

COMPRENDE ANCHE IL CASO $x=0$ CHE INFATTI FA $1/1 \to 1$

DIREMO QUINDI CHE PER

• $-1 < x < 1$ => LA SERIE È CONVERGENTE
$(|x| < 1)$

ED AVRÀ COME $S = \frac{1}{1-x}$

SOMMA

$$S = \lim_{n \to +\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \dots$$ DIVERGE

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \frac{1}{n^p} + \dots$$

CON $p \in \mathbb{R}$

IL CARATTERE DELLA SERIE DIPENDE DA p

• $p > 1$ => CONVERGE
• $p = 0$ => DIVERGE POSITIVAMENTE
• $p < 0$ => DIVERGE P.
• $p \leq 1$ => DIVERGE P.

DIVERGONO SEMPRE, MA PER MOTIVI DIVERSI

SI POTREBBE DIRE

• $p > 1$ => CONVERGE
• $p \leq 1$ => DIVERGE POSITIVAMENTE

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

CRITERI DEL CONFRONTO

CONSIDERIAMO DUE SERIE E LE LORO CORRISPETTIVE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $0 \le a_n \le b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

RISULTA CHE

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ (CARABINIERI)

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$ (CONFRONTO PER SUCCESSIONI INF.)

DIMOSTRAZIONI

1) CONSIDERO A_n (S_n DI a) E B_n (S_n DI b)

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$$
$$B_n = b_0 + b_1 + \dots b_n$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow 0 \le A_n \le B_n$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\leftrightarrow \{B_n\}$ CONVERGE

MA $0 \le A_n \le B_n$, QUINDI PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI, A_n CONVERGE DA CUI ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE

2) ALLO STESSO MODO

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE $\leftrightarrow \{A_n\}$ DIVERGE

MA VISTO CHE $B_n \ge A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, PER PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER SUCCESSIONI INFINITE, B_n DIVERGE

QUINDI ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ DIVERGE (POSITIVAMENTE)

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI NON NEGATIVI

SUPPONGO CHE PER UN $p \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} n^p \cdot a_n = l \quad \text{RISULTA CHE}$$

1) $l \neq +\infty$, $p > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $l \neq 0$, $p \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

IN REALTÀ $n^p \cdot a_n = \dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ → CHE È LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CON $p>1$, $p \leq 1$ A SECONDA DEI CASI

a_n / SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

DIMOSTRAZIONE

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \; |n^p \cdot a_n - l| < \varepsilon$$

1) SCELGO $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu}$

$$|n^p \cdot a_n - l| < 1 \Rightarrow -1 < n^p \cdot a_n - l < 1$$

SOMMO A TUTTI l

$$l - 1 < n^p \cdot a_n < l + 1$$

DIVIDO TUTTI PER n^p

$(l-1)/n^p < a_n < (l+1)/n^p$ ANCHE SCRITTO

$$(l-1) \cdot \frac{1}{n^p} < a_n < (l+1) \cdot \frac{1}{n^p}$$

COSTANTI — SERIE ARMONICHE CONVERGENTI ($p>1$)

a_n COMPRESO FRA DUE VALORI CONVERGENTI

→ a_n È CONVERGENTE (IN REALTÀ BASTA $a_n < (l+1)\frac{1}{n^p}$)

2) $\varepsilon = l/2 \Rightarrow \exists \bar{\bar{\nu}}$: «STESSI PASSAGGI»

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{n^p} < a_n < \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \; \begin{array}{ll} < +\infty & \text{CASO ①} \\ = +\infty & ② \end{array}$$

SERIE ARMONICA DIVERGENTE ($p \leq 1$) → a_n È PER FORZA DIVERGENTE

CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI

SUPPONGO:

$$\exists\, \ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ DA CUI RISULTA:

1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\ell = 1 \Rightarrow$ <u>CASO DUBBIO</u> $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$?

3) $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Es. DI CASI DUBBI

SERIE DI MENGOLI: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n+\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$ E LA SERIE CONVERGE

$\lim = 1$ DUBBIO

SERIE ARMONICA: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ MA LA SERIE DIVERGE

SERIE ESPONENZIALE

$$x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots$$

APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{LA SERIE È CONVERGENTE}$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} :$$

1) $\ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\ell = 1 \Rightarrow$ CASO DUBBIO: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = ?$

3) $\ell > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

SERIE ALTERNATE (O A SEGNO ALTERNO)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

CON $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

CRITERIO DI LEIBNITZ

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI, INFINITESIMA E DECRESCENTE:

$\rightarrow$ LA SERIE A SEGNO ALTERNO CONVERGE

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n < +\infty$ INOLTRE:

DETTI S = LA SOMMA DELLA SERIE E

S_n = LA (SOMMA) RIDOTTA n-ESIMA $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot a_k$

SI HA CHE

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty$ OVVERO, CONVERGE

INOLTRE VALE:

CONVERGENZA ASSOLUTA $\rightarrow$ CONVERGENZA

DIMOSTRAZIONE

PER IL CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu},$$

$$\forall p \in \mathbb{N} : \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots |a_{n+p}|\big| < \varepsilon$$

PER LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ VALGONO LE STESSE CONDIZIONI, MA SENZA IL VALORE ASSOLUTO DEI SINGOLI TERMINI: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+p}| < \varepsilon$

MA PER LE PROPRIETÀ DEI VALORI ASSOLUTI ($|x+y| \leq |x| + |y|$) VALE LA CATENA

$$|a_{n+1} + \dots a_{n+p}| \leq \big||a_{n+1}| + \dots |a_{n+p}|\big| < \varepsilon$$

QUINDI SE VALE PER $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$, AUTOMATICAMENTE È VALIDO PER $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ OVVERO $\boxed{\left(\sum |a_n| < +\infty\right) \rightarrow \left(\sum a_n < +\infty\right)}$