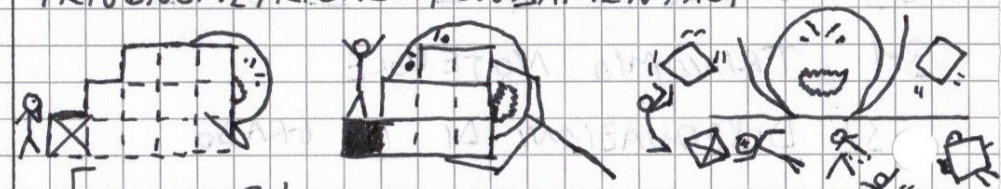
INDICE

BLOCCO INTRODUTTIVO

PG.	
1	MATEMATICA, TEORIA DEGLI INSIEMI
4	OPERAZIONI FRA INSIEMI
6	PRODOTTO CARTESIANO
7	INSIEME QUOZIENTE, TIPI DI RELAZIONI
9	TIPI DI ORDINAMENTO, INSIEMI NUMERICI
11	CARDINALITÀ
12	INSIEME DELLE PARTI
13	SIMBOLI
14	FUNZIONI, TIPI DI FUNZIONE
18	MONOTONIA
19	FUNZIONI PARI/DISPARI, FUNZIONI ELEMENTARI
22	ALTRI TIPI DI FUNZIONI
28	PROPRIETÀ DEI LOGARITMI
29	EQUAZIONI DI I E II GRADO
31	TRINOMIO NOTEVOLE
32	DISEQUAZIONI DI II GRADO
33	METODO DI RUFFINI
35	DISEQUAZIONI FRATTE
38	DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
39	DISEQUAZIONI ESPONENZIALI
40	PRINCIPIO DI INDUZIONE
42	COMBINAZIONI
43	BINOMIO DI NEWTON
46	DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI
48	COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$
49	ASSIOMA DI DEDEKIND
50	INTERVALLI LIMITATI / ILLIMITATI
51	TOPOLOGIA
55	TRIGONOMETRIA
62	INSIEMI NUMERICI LIMITATI, ESTREMO INFERIORE/SUPERIORE, MINIMO/MASSIMO, ecc.
64	FUNZIONI LIMITATE / ILLIMITATE
68	DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE
73	TABELLA ESTESA DEI VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE FONDAMENTALI



FINE BLOCCO INTRODUTTIVO

Successioni

74 SUCCESSIONI NUMERICHE

75 CONVERGENZA, DEFINIZIONE DI LIMITE

76 TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

79 DIVERGENZA

80 ALCUNE DEFINIZIONI SULLE SUCCESSIONI

82 OPERAZIONI CON I LIMITI

86 FORME DETERMINATE

87 FORME INDETERMINATE

88 TEOREMI DEL CONFRONTO (PERMANENZA DEL SEGNO, CARABINIERI, SUCCESSIONI INFINITE)

92 PRODOTTO TRA SUCCESSIONI LIMITATE E INFINITESIME

94 SUCCESSIONI ESTRATTE

95 LIMITI NOTEVOLI

96 SUCCESSIONI MONOTONE

97 TEOREMA DI REGOLARITÀ SU SUCCESSIONI MONOTONE

100 ALTRI LIMITI NOTEVOLI

102 CRITERIO DI RAPPORTO PER SUCCESSIONI (ORDINE DEGLI INFINITI)

105 SUCCESSIONI RICORSIVE

Funzioni

106 TEOREMA DEL PONTE

107 LIMITI DI FUNZIONI

109 LIMITI DI INTORNI DESTRI E SINISTRI (LIMITI DESTRI / SINISTRI)

111 LIMITI PER FUNZIONI ELEMENTARI

112 LIMITI PER FUNZIONI COMPOSTE

113 INFINITI ED INFINITESIMI

115 PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI (E DEGLI INFINITI

118 FUNZIONI CONTINUE

120 PUNTI DI DISCONTINUITÀ

122 PERMANENZA DEL SEGNO PER FUNZIONI CONTINUE

123 TEOREMA DELL'∃NZA DEGLI ZERI

125 I TEOREMA DI ∃NZA DEI VALORI INTERMEDI

127 TEOREMA DI WEIERSTRASS

129 DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEGLI ZERI

135 II TEOREMA DI ∃NZA DEI VALORI INTERMEDI

137 CRITERIO DI INVERTIBILITÀ

138 TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE
CRITERIO DI CONTINUITÀ PER FUNZIONI MONOTONE

141 CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE

Derivate

142 DERIVATE

144 DERIVATA DI UNA FUNZIONE COSTANTE
DERIVATA DI UNA FUNZIONE LINEARE AFFINE

145 PROPOSIZIONE: DERIVABILE → CONTINUA

147 DERIVATE SUCCESSIVE

149 OPERAZIONI CON LE DERIVATE

154 DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

155 DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI INVERSE

156 DERIVAZIONE DELLA POTENZA N-ESIMA DI X

157 DERIVATA DI FUNZIONI POLINOMIALI

158 DERIVATA DI FUNZIONI: ESPONENZIALE, LOGARITMO, POTENZA, SENO, COSENO, TANGENTE, ARCOSENO, ARCOCOSENO, ARCOTANGENTE

167 SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE DERIVATE

168 PROPOSIZIONE: DERIVABILE IN $x_0 \Rightarrow \exists$ TANGENTE IN x_0

170 MASSIMI E MINIMI RELATIVI

171 TEOREMA DI FERMAT

173 TEOREMA DI ROLLE

174 PUNTI STAZIONARI, O PUNTI CRITICI

175 TEOREMA DI CAUCHY

178 TEOREMA DI LAGRANGE

179 CRITERIO DI MONOTONIA

181 CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO

182 CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA

183 FUNZIONI CONCAVE/CONVESSE

184 CRITERIO DI CONCAVITÀ/CONVESSITÀ

185 TEOREMI DI DE L'HÔPITAL

188 FORMULA DI TAYLOR (CON RESTO DI PEANO), POLINOMIO DI MC-LAURIN

189 FORMULA DI TAYLOR (CON RESTO DI LAGRANGE)

189 TAYLOR APPLICATO ALLE FUNZIONI: ESPONENZIALE, LOGARITMO, SENO, COSENO

193 CRITERIO PER PUNTI DI MAX./MIN. RELATIVO

195 STUDIO DI FUNZIONE COMPLETO

198 PUNTO ANGOLOSO, CUSPIDE, PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

199 OPERAZIONI CON o PICCOLO (INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE A QUALCOSA...

Integrali

200 INTEGRALI DEFINITI

203 TEOREMA DI RIEMANN

204 SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INT. DEFINITI

206 PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

208 I TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

209 CONTINUITÀ UNIFORME, TEOREMA DI CANTOR

210 TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

212 II TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

214 TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

217 FUNZIONE INTEGRALE

218 TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, O ANCHE TEOREMA DELL'ESISTENZA DELLE PRIMITIVE

221 FUNZIONI PRIMITIVE

222 CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE

224 FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

225 INTEGRALE INDEFINITO

227 INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

228 DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

229 FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

230 SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI (RIPASSO)

232 INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

237 ESERCIZIO INUTILE FACOLTATIVO

243 FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

245 ULTIMA SEZIONE SUGLI INTEGRALI DEFINITI: CALCOLO DELL'AREA DI UN RETTANGOLOIDE

246 FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI / FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE PER INTEGRALI DEFINITI

247 SOLIDI DI ROTAZIONE

Serie

248 SERIE NUMERICHE (SUCCESSIONI DELLE SOMME PARZIALI)

249 CARATTERE DI UNA SERIE

252 CONDIZIONI NECESSARIE PER LA CONVERGENZA

253 SUCCESSIONE DI CAUCHY, CRITERIO DI CAUCHY PER SUCCESSIONI, CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE

256 OPERAZIONI FRA SERIE (SERIE RESTO)

257 SERIE A TERMINI NON NEGATIVI / POSITIVI, TEOREMA SULLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

258 LA SERIE GEOMETRICA

260 LA SERIE ARMONICA (S. ARMONICA GENERALIZZATA)

261 CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI: CRITERI DEL CONFRONTO

263 CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

265 CRITERIO DEL RAPPORTO

266 SERIE ESPONENZIALE, CRITERIO DELLA RADICE

267 SERIE ALTERNATE (O A SEGNO ALTERNO) CRITERIO DI LEIBNITZ

268 CONVERGENZA ASSOLUTA, CONVERGENZA ASSOLUTA IMPLICA CONVERGENZA REGOLARE

Analisi Matematica I per Informatica

Appunti: Giulia Stazio

Docente: Annamaria Barbagallo

AA: 2023/2024

Gruppo III (N-Z)

Spero che questi appunti possano essere di aiuto per voi, come lo sono stati per me.
Buona fortuna con lo studio.
Mettetecela tutta.
-G

MATEMATICA:

TEORIA ASSIOMATICA LOGICO DEDUTTIVA

BASATA APPUNTO SUGLI

ASSIOMI: CONCETTI PRIMITIVI DATI PER VERI SENZA DIMOSTRAZIONE

- LEMMI
- TEOREMI
- COROLLARI

TRATTI DALLI ASSIOMI TRAMITE PASSAGGI LOGICI

TEORIA DEGLI INSIEME

CONCETTI PRIMITIVI:
- INSIEME
- ELEMENTO
- APPARTENENZA

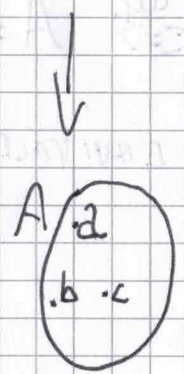
INSIEMI: $A, B, C, \dots$

ELEMENTI: $a, b, c, \dots$

APPARTENENZA: $\in$

PER INDICARE UN INSIEME

$A = \{a, b, c\}$



$A = \{n \in N : 1 \leq n \leq 100\}$

INSIEME CON NESSUN ELEMENTO:

INSIEME VUOTO: $\emptyset$, $\{\}$

INCLUSIONE:

- $C \subseteq A$: C È CONTENUTO IN A:
  TUTTI GLI ELEMENTI DI C SONO PRESENTI ANCHE IN A

- $C \subset A / C \subsetneq A$: $C \subseteq A$ + CI SONO ELEMENTI IN A NON PRESENTI IN C
  CONTENUTO PROPRIAMENTE
  → C È UN SOTTOINSIEME

- SE $A \subseteq C \wedge C \subseteq A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A = C$
  A E C SONO EQUIVALENTI

OPERAZIONI FRA INSIEMI

- $A \cup B$ (UNIONE): TUTTI GLI ELEMENTI UNICI DI A E B

$$A \cup B = \{a \in A \text{ oppure } b \in B\}$$

ELEMENTO NEUTRO
$\emptyset$

- $A \cap B$ (INTERSEZIONE): TUTTI GLI ELEMENTI COMUNI SIA A B CHE AD A

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

(TALE CHE)

ELEMENTO NEUTRO
U

! • $A \cap C = \emptyset \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A e C SONO DISGIUNTI

- $A - B / A \setminus B$ (SOTTRAZIONE): TUTTI GLI ELEMENTI DI A NON PRESENTI IN B

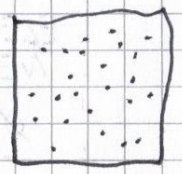
$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$$

ELEMENTO NEUTRO
$\emptyset$ (?)

! • LA SOTTRAZIONE NON È TRANSITIVA: $A \setminus B \neq B \setminus A$

INSIEME UNIVERSO : U

$U = \{$ TUTTI GLI ELEMENTI $\}$

$U \rightarrow$ 

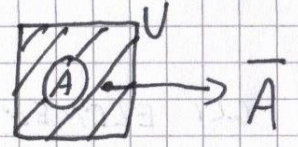
QUANTIFICATORI

- UNIVERSALE: $\forall$ PER OGNI
- ESISTENZIALE: $\exists$ ESISTE

$\nexists$ NON ESISTE

$\exists!$ ESISTE ED È UNICO

$-A^c / \bar{A} = U \setminus A$ TUTTI GLI ELEMENTI NON PRESENTI IN A



! $\bar{U} = \emptyset$

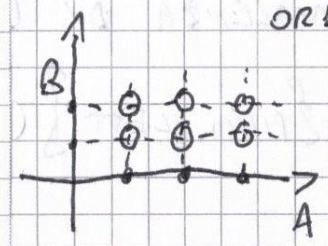
! SI POSSONO APPLICARE LE LEGGI DI DE MORGAN

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ / $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

PRODOTTO CARTESIANO :

SE $A, B \neq \emptyset$ $\quad A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

COPPIA ORDINATA $\quad ((a,b) \neq (b,a))$



$\leftarrow A \times B$

SE PRENDIAMO $\mathbb{R}$ COME INSIEME

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{R}^2 \rightarrow$ DIAGRAMMA CARTESIANO

IL SOTTOINSIEME DI UN PRODOTTO CARTESIANO VIENE CHIAMATO RELAZIONE

$B \subseteq A^2$

- A/B : INSIEME QUOZIENTE

$\downarrow$

A QUOZIENTATO B

È UN INSIEME I QUALI ELEMENTI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI B

es. $B = \{1, 2, a, b\} \rightarrow A/B = \{NUM., LETT.\}$

C'I SONO DUE TIPI DI RELAZIONI PARTICOLARI:

- RELAZIONE DI EQUIVALENZA
- RELAZIONE DI ORDINAMENTO PARZIALE

EQUIVALENZA	ORDINAMENTO P.
- PROP. RIFLESSIVA	- PROP. RIFLESSIVA
- PROP. SIMMETRICA	- PROP. ANTISIMMETRICA
- PROP. TRANSITIVA	- PROP. TRANSITIVA

- PROPRIETÀ RIFLESSIVA: $(a,a) \in R, \forall a \in A$

- PROPRIETÀ TRANSITIVA: $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

- PROPRIETÀ SIMMETRICA: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$

$$\Downarrow$$

$$(a,c) \in R$$

- PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$$

- ORDINAMENTO TOTALE: (es. $\mathbb{R}$)

R È TOTALMENTE ORDINATO SE

$$\forall x, y \in R, \; x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x$$

L'ORDINAMENTO È

PARZIALE:

SE NON TUTTI I SUOI ELEMENTI SONO CONFRONTABILI

TOTALE:

TUTTI I SUOI ELEMENTI POSSONO ESSERE MESSI IN RELAZIONE

SI DICE INSIEME <u>BEN ORDINATO</u>

SE OGNI SUO SOTTOINSIEME HA UN VALORE MINIMO (es. $\mathbb{N}$)

INTRODUCIAMO GLI INSIEMI NUMERICI:

- $\mathbb{N}$: NUMERI NATURALI
- $\mathbb{Z}$: NUMERI INTERI RELATIVI
- $\mathbb{Q}$: NUMERI RAZIONALI
- $\mathbb{R}$: NUMERI REALI

GLI INSIEMI VENGONO IPOTIZZATI AL FINE DI TROVARE UN INSIEME IN CUI VALEVANO PER ENTRAMBE LE OPERAZIONI $(+, \cdot)$:

- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- ELEMENTO NEUTRO
- ELEMENTO OPPOSTO

NEL CASO DI $\mathbb{N}$:

- PROP. ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA ✓
- ELEMENTO NEUTRO, $\overset{+}{0}$, $\overset{\cdot}{1}$ ✓
- ELEMENTO OPPOSTO, $\overset{+}{\bigcirc}$, $\overset{\cdot}{\bigcirc}$ ✗

$\mathbb{Z}$ ACQUISISCE L'ELEMENTO OPPOSTO PER L'ADDIZIONE, MA NON PER IL PRODOTTO

VIENE IPOTIZZATO $\mathbb{Q}$ PER CUI VALGONO TUTTE LE PROPRIETÀ

POI VENGONO SCOPERSI (PITAGORA) I NUMERI IRRAZIONALI NON RAPPRESENTABILI TRAMITE FRAZIONE

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

SI IPOTIZZA L'INSIEME DEI NUMERI REALI

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm c_1 c_0 c_1 \ldots c_\infty : c \in \mathbb{N},\ c_i \in \{0, 1, \ldots 9\}\ \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ecc.

INSIEME + OPERAZIONI = CAMPO

(CAMPO DEI NUMERI REALI, NATURALI ecc.)

IL NUMERO DEGLI ELEMENTI DI UN INSIEME È DETTO CARDINALITÀ: $|A| = n$ (ANCHE #)

$P(A)$ INSIEME DELLE PARTI DI A:

TUTTI I POSSIBILI SOTTOINSIEMI

Es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(A) = \{\emptyset, 1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

A

IN QUESTO CASO

- A, $\emptyset$ SONO INSIEMI IMPROPRI.
  È IL MINIMO DEGLI INSIEMI DI $P(A)$
- TUTTO IL RESTO SONO INSIEMI PROPRI

CARDINALITÀ DELL'INSIEME DELLE PARTI:

$$|P(A)| = 2^x \leftarrow |A| = x$$

SIMBOLI:

- $:, |$ TALE CHE
- t.c. TALE CHE
- $\rightarrow, \leftrightarrow$ IMPLICAZIONE, COIMPLICAZIONE MATERIALE
- $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ IMPLICAZIONE, COIMPLICAZIONE LOGICA
- $(\,|\,)$ TALE CHE
- $\circ$ COMPOSTO $(g \circ f)$
- $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ DEFINIZIONE
- $,$ E $(\wedge)$
- $f: A \rightarrow B$ FUNZIONE CON DOMINIO IN A, CODOMINIO IN B
- $f: a \mapsto b$

LA FUNZIONE MANDA a IN b $\rightarrow$ $f(a) = b$

- f^{-1} FUNZIONE INVERSA
- $(a,b), \{a,b\}$ COPPIA ORDINATA / NON ORDINATA
- $\mapsto$ ASSOCIA

FUNZIONI

$$f: X \rightarrow Y \qquad X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y$$

DOMINIO O CAMPO DI ESISTENZA

CODOMINIO

A x SI ASSOCIA UN ELEMENTO y TRAMITE LA FUNZIONE f:

! PIÙ x POSSONO AVERE LA STESSA IMMAGINE.

SE x HA PIÙ DI UNA IMMAGINE, f NON È UNA FUNZIONE

y È IMMAGINE DI x TRAMITE f

NON È DETTO CHE IN Y CI SIANO SOLO IMMAGINI DI X TRAMITE f

PER INDICARE IL SOTTOINSIEME DI Y CON SOLO LE IMMAGINI, SI SCRIVE L' <u>INSIEME IMMAGINE</u>

$$\mathrm{Im} f = \{ y \in Y : \forall x \in X \text{ t.c. } y = f(x) \}$$

ESISTE ANCHE LA CONTRO IMMAGINE:

SERVE A CAPIRE, A PARTIRE DA Y, QUALI ELEMENTI DI X HANNO PER IMMAGINE Y

$f^{-1}(y)$: CONTROIMMAGINE DI Y TRAMIE f

! • SE Y NON È L'IMMAGINE DI NESSUNA X, ALLORA $f^{-1}(y) = \emptyset$

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X : y = f(x)$$

- SE $Im_f = Y$, LA FUNZIONE È DETTA <u>SURIETTIVA</u>
- SE $f^{-1}(y)$ HA UNA SOLA CONTROIMMAGINE, LA FUNZIONE È DETTA <u>INIETTIVA</u>
- SE LA FUNZIONE È ENTRAMBE, SI DICE BIETTIVA:

OGNI ELEMENTO DI X, Y HA UNA E DA UNA SOLA IMMAGINE/CONTROIMMAGINE

- SE LA FUNZIONE È BIETTIVA, ALLORA È ANCHE INVERTIBILE PER DEFINIZIONE

$$\forall y \in Y \ \exists! \ x \in X : y = f(x)$$

ANCHE DOMINIO E CODOMINIO VENGONO INVERTITI

$$f : X \to Y \iff f^{-1} : Y \to X$$

IN QUESTO CASO, VISTO CHE $f(x)$ È SEMPRE UNA Y E VICEVERSA:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(y)) = y \qquad *$$

- DUE FUNZIONI POSSONO APPLICARSI L'UNA SULL'IMMAGINE DELL'ALTRA:

<u>FUNZIONE COMPOSTA</u> $\quad f \circ g = f(g(x))$

COMPORRE UNA FUNZIONE CON LA SUA INVERSA SI OTTIENE L'IDENTITÀ DI UNA FUNZIONE $f(f^{-1}(x))$ *

FUNZIONI RESTRIZIONE / PROLUNGAMENTO

- RESTRIZIONE $f|_C$

PRESA UNA FUNZIONE $f: A \to B$ ED CON SOTTOINSIEME DI $A \supseteq C$, SI CHIAMA RESTRIZIONE LA FUNZIONE $f: C \to B$

OVVERO LA FUNZIONE VIENE APPLICATA SOLTANTO AD UNA PARTE DEGLI ELEMENTI DI A

- PROLUNGAMENTO $\tilde{f}$

L'OPPOSTO DELLA FUNZIONE RESTRIZIONE, IL DOMINIO VIENE ALLARGATO INVECE CHE RISTRETTO:

$X, Y \neq \emptyset$, $f: X \to Y$, $X \subset B$

$f: X \to Y$

$X \supset A$

$f|_A: A \to Y$,

$x \mapsto f(x), \forall x \in A$

$f: X \to Y$

$X \subset B$

$g(x): B \to Y$

$x \mapsto g(x), \forall x \in B$

RESTRIZIONE | PROLUNGAMENTO

MONOTONIA: UNA FUNZIONE È DETTA MONOTONA SE SI VERIFICA ALMENO UNA DI QUESTE CONDIZIONI

- CRESCENTE (STRETTAMENTE CRESCENTE SE $<$)

$\Updownarrow$ def.

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- DECRESCENTE (STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $>$)

$\Updownarrow$ def.

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

! STRETTAMENTE $\begin{cases} \text{CRESCENTE} \\ \text{DECRESCENTE} \end{cases} \to$ STRETTAMENTE MONOTONA

FUNZIONI PARI E DISPARI

IN ENTRAMBI I CASI LE FUNZIONI SONO SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ORIGINE

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X \Rightarrow -x \in X$ (NON PER FORZA ANCHE PER Y)

- PARI $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(-x), \forall x \in X$

IL GRAFICO DI UNA TALE FUNZIONE È SIMMETRICO/SPECULARE RISPETTO ALL'ASSE Y

- DISPARI $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x) = -f(-x), \forall x \in X$

QUI IL GRAFICO È SPECULARE RISPETTO ALL'ORIGINE

ESISTONO 4 TIPI DI FUNZIONI ELEMENTARI
- FUNZIONE COSTANTE
- FUNZIONE IDENTITÀ
- FUNZIONE PARABOLICA
- FUNZIONE CUBICA

- FUNZIONE COSTANTE: $y = c \rightarrow f(x) = c \in \mathbb{R}$

COSTANTE

IL GRAFICO È UNA RETTA ORIZZONTALE CHE INTERSECA L'ASSE Y NEL PUNTO $y = c$

SI APPLICANO CRESCENZA E DECRESCENZA:

$f(x)$ COSTANTE È UNA FUNZIONE MONOTONA

- FUNZIONE IDENTITÀ: $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f(-x)$
- BISETTRICE QUADRANTI 1-3	- BISETTRICE QUADRANTI 2-4
- STRETTAMENTE CRESCENTE	- STRETTAMENTE DECRESCENTE

- FUNZIONE PARI
- FUNZIONE STRETTAMENTE MONOTONA

— FUNZIONE PARABOLICA : $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

FUNZIONE PARI

PER INVERTIRE UNA PARABOLA BISOGNA APPLICARE UNA RESTRIZIONE

$$g = f|_{[0,+\infty[} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\ni y$$

$$\rightarrow x^2 \in [0, +\infty[$$

LA FUNZIONE DIVENTA BIETTIVA (E INVERTIBILE) SE

- SI ELIMINA LA PARTE $y \in]-\infty, 0[$ CHE NON HA VALORI IN $-y$ $(\mathrm{Im} f \neq Y)$
- SI ELIMINA LA PARTE DEI VALORI DI $-X$, ALTRIMENTI $f^{-1}(y) = 2$ VALORI DISTINTI

NON È UNA FUNZIONE

! • I PUNTI FISSI DELLA SIMMETRIA DI 2 FUNZIONI SONO QUEI PUNTI CHE SONO COMUNI AD ENTRAMBE LE FUNZIONI

— FUNZIONE CUBICA: $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

È UNA FUNZIONE — BIETTIVA (INVERTIBILE)
— STRETTAMENTE CRESCENTE
— DISPARI

UN GRAFICO SIMILE HANNO TUTTE LE $f(x) = x^n$ CON n NUMERO DISPARI

LA CURVA DIVENTA SEMPRE PIÙ STRETTA ALL'AUMENTARE DI n

ALTRE FUNZIONI : FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$f(x) = |x| \begin{cases} x & x > 0 \quad \text{STRETT. CRESCENTE} \\ -x & x < 0 \quad \text{STRETT. DECRESCENTE} \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEI VALORI ASSOLUTI:

1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

2) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ TRIANGOLARE DEL VALORE ASSOLUTO

$|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

ALTRE PROPRIETÀ

$$|x| < p \iff \begin{cases} -p < x < p, & \text{PER } p > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p < 0 \end{cases}$$

SE INVECE DI $<$ C'È $\leq$ → TERZO CASO

$x = 0$, PER $p = 0$

DISEQUAZIONI SPECULARI

$$|x| \geq p \iff \begin{cases} x \leq -p \vee x \geq p, & \text{PER } p > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p \leq 0 \end{cases}$$

$$|x| > p \iff \begin{cases} x < -p \vee x > p, & \text{PER } p > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{PER } p = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \text{PER } p < 0 \end{cases}$$

FUNZIONI POTENZA: ESPONENTE IN $\mathbb{Z}$

$$f(x) = x^m$$

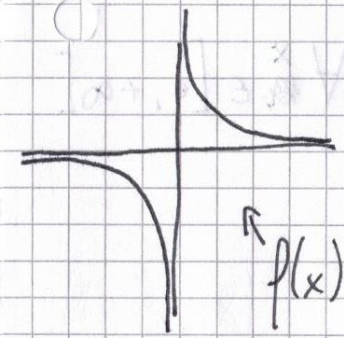
$m \geq 0$ → $x \cdot x \cdot x \ldots$ m VOLTE

$m < 0$

$m = -n \to x^{-n} \to \frac{1}{x^n}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

VISTO CHE x È AL DENOMINATORE, NON PUÒ ESSERE 0



$f(x) = \frac{1}{x}$

- ASSI DI SIMMETRIA = BISETTRICI DEI QUADRANTI
- ASINTOTI = ASSI ASCISSE/ORDINATE

GLI ESPONENTI PERÒ POSSONO ANCHE APPARTENERE A $\mathbb{Q}$ OPPURE $\mathbb{R}$. VEDIAMO COME: → → →

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

- $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ / $a^m / a^n = a^{(m-n)}$ / $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ /

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ / $a^n / b^n = (a/b)^n$

FUNZIONI CON ESPONENTE RAZIONALE

$$f(x) = x^q \quad , \quad q = m/n \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} \begin{cases} n \text{ DISPARI} & \exists \ \forall x \in \mathbb{R} \\ (m \text{ POSITIVO}) \\ n \text{ PARI} & \exists \ \forall x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

SE $m < 0 \rightarrow x^q = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

$$\begin{cases} n \text{ DISPARI} & \exists \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ n \text{ PARI} & \exists \ \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

FUNZIONI POTENZA CON ESPONENTE REALE

STESSE REGOLE DEGLI ESPONENTI RAZIONALI

MA BISOGNA FARE DELLE APPROSSIMAZIONI:

SI FANNO LE POTENZE DI

Es. x^p , $p = Y, c_0 c_1 c_2 \ldots c_\infty$ → C = CIFRE DOPO LA VIRGOLA

PRIMA SI CALCOLA x^Y, POI x^{Y,c_0}, POI $x^{Y,c_0 c_1}$ ecc.

AD UN CERTO PUNTO IL VALORE DI $f(x)$ SI STABILIZZA, E VIENE PRESO QUEL VALORE

! L'ACCURATEZZA NON SARÀ MAI AL 100%

STABILIZZARSI, VUOL DIRE CHE LE PRIME n CIFRE DOPO LA VIRGOLA RIMARRANNO UGUALI QUANDO SI AGGIUNGERÀ LA PROSSIMA CIFRA ALL'ESPONENTE.

LA SCELTA DI QUANDO FERMARSI È ARBITRARIA

FUNZIONI ESPONENZIALI : FUNZIONI CON LA VARIABILE COME ESPONENTE

$f(x) = a^x$ $\quad a > 0$ ALTRIMENTI CI SONO 2 SOLUZIONI PER UNA x

SE $a = 0$ → RETTA ORIZZONTALE

SE $a = 1$ ↗

$0 < a < 1$

STRETTAMENTE DECRESCENTE

$a > 1$

STRETTAMENTE CRESCENTE

LA FUNZIONE È BIETTIVA → INVERTIBILE

FUNZIONI < ESPONENZIALI / LOGARITMICHE SONO L'UNA L'OPPOSTA DELL'ALTRA

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$\log_a b = c$

→ $a^c = b$

1) $a > 0, a \neq 1, (x_1, x_2) > 0$

$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2) $\log_a x_1/x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$

4) $\log_b x = \log_a x / \log_a b$

5) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

6) $\log_a 1/b = \log_{1/a} b = -\log_a b$

→ $\log_{1/a} 1/b = \log_a b$

! $\log_a a = 1$

! $\log_a 1 = 0$

! SE x COMPRESO FRA 0 E Y : $0 < x < Y$

$0 < a < 1$ $\qquad a > 1$

$\log_a x > \log_a Y$ $\qquad \log_a x < \log_a Y$

EQUAZIONI DI I GRADO:

$ax = b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

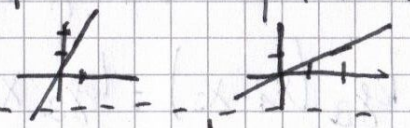
$a = 0 \begin{cases} b = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ b \neq & \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$a \neq 0 : \quad ax = b$

$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \rightarrow x = b/a$

FUNZIONE INVERSA: VENGONO INVERTITI X e Y

$f(x) = 2x \qquad f^{-1}(x) = x/2$



QUESTA X PRIMA ERA LA $f(x)$!

DIVIDENDO ENTRAMBI I MEMBRI DI UN UGUAGLIANZA PER UNO STESSO NUMERO, IL RISULTATO E SEMPRE VERO

EQUAZIONI DI II GRADO:

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$ PUÒ AVERE $\begin{cases} 0 \text{ SOLUZIONI} \\ 2 \text{ SOLUZIONI} \end{cases}$

4 CASI:

1) $b = c = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\pm 0)$

- 2 SOLUZIONI COINCIDENTI

2) $b \neq 0, \ c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx \rightarrow$

$\rightarrow x(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -b/a \end{cases}$

2 SOLUZIONI DISTINTE — EQ. DI I GRADO

3) $b = 0, \ c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = -c/a \begin{cases} a \cdot c > 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ a \cdot c < 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-c/a} \end{cases}$

- 2 SOLUZIONI DISTINTE

4) $b \neq 0, \ c \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta \begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ \Delta = 0 \rightarrow x = -b/2a & \text{- 2 SOLUZIONI COINCIDENTI} \\ \Delta > 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{- 2 SOLUZIONI DISTINTE} \end{cases}$

TRINOMIO NOTEVOLE

È UN METODO DI SCOMPOSIZIONE:

$$x^2 + bx + c = 0$$

TRINOMIO: $(x+a_1)(x+a_2)=0$

$$x^2 + a_2 x + a_1 x + a_1 a_2 = 0$$

$$x^2 + (a_2 + a_1)x + a_1 a_2 = 0$$

$\Updownarrow$ SE $a_1 + a_2 = b$ E $a_1 \cdot a_2 = c$

$$x^2 + bx + c = 0$$

SE SI RIESCONO A TROVARE DUE NUMERI LA CUI SOMMA È b E IL CUI PRODOTTO È c, SI PUÒ UTILIZZARE IL TRINOMIO NOTEVOLE

DISEQUAZIONI DI II GRADO

	$ax^2+bx+c > 0$ ($\geq$)	$ax^2+bx+c < 0$ ($\leq$)
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$ ($\leq$, $\geq$)	$x_1 < x < x_2$ ($\leq$, $\leq$)
$\Delta = 0$	$>$: $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ $\geq$: $\forall x \in \mathbb{R}$	$<$: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ $\leq$: $x = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	$>$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\geq$: $\forall x \in \mathbb{R}$	$<$: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ $\leq$: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Big/ \Delta/4 = \left(b/2\right)^2 - ac$$

$$\rightarrow x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$$

PER SCOMPORRE I POLINOMI, C'È UN ALTRO METODO ESTREMAMENTE UTILE CHE PUÒ ESSERE APPLICATO A POLINOMI DI n° GRADO:

IL METODO DI RUFFINI $\rightarrow$ $\rightarrow$

METODO DI RUFFINI

IL PRIMO PASSO PER APPLICARLO, È CERCARE UNA RADICE DEL POLINOMIO (ANCHE DETTO ZERO DI UN POL.)

OVVERO UN TERMINE CHE LO ANNULLA

! LA RADICE IN QUESTO CASO DEVE APPARTENERE AD $\mathbb{Z}$ (RADICE INTERA)

1) LA RADICE È UNO DEI DIVISORI DEL TERMINE NOTO

2) CI SONO ALTRI MODI PER TROVARE LE RADICI, MA NON SONO RADICI INTERE

DOPODICHÉ SI COMPILA LA TABELLA:

	a	b	c	d
r	$a \cdot r$	$f \cdot r$	$g \cdot r$	
a	$a+b$	$a+c$	$a+d$	
	f	g	0	

COEFFICIENTI DI x (INCLUSI EVENTUALI $ax \to a \cdot 0$)

TERMINE NOTO

RADICE

DEVE ESSERE 0, ALTRIMENTI r NON È UNA RADICE

IL POLINOMIO $P(x)$ VERRÀ COSÌ SCOMPOSTO:

$$(x-r)(ax+fx+g)$$

POLINOMIO DI GRADO $n-1$ CON n CHE È IL GRADO DI $P(x)$

IL METODO DI RUFFINI SI PUÒ USARE IN MANIERA ITERATIVA FINCHÉ $n > 1$

PICCOLO INCISO

$\Delta = 0 \rightarrow x = -b/2a$ | DISEQ. SEMPRE POSISIVA. DIVENTA 0 QUANDO $x = -b/2a$

$\Delta < 0$ $x = ?$ | DISEQ. SEMPRE POSITIVA

$\Delta > 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ | DISEQ. POSITIVA PER VALORI ESTERNI ALLE 2 X

DISEQUAZIONI FRATTE:

RISOLVERE $\begin{cases} \text{NUMERATORE} \\ \text{DENOMINATORE} \end{cases}$ SEPARATAMENTE

! DENOM. $\neq 0$

RICAVARE GLI INTERVALLI IN CUI LE DISEQ. SONO POSITIVE/NEGATIVE, A SECONDA DELLA DISEQ. $< / > 0$

SCEGLIERE GLI INTERVALLI FACENDO IL PRODOTTO DEI SEGNI

DISEQ. CON VALORE ASSOLUTO

PROP. VALORI ASSOLUTI: $|f(x)| > q$

$f(x) > q$ ← SE $f(x)$ POSITIVO

$-f(x) > q$ ← NEGATIVO

$(f(x) < -q)$

$|x+4| > 9$

$x+4 > 9 \rightarrow$ RISULTATO 1

$x+4 < -9 \rightarrow$ RISULTATO 2

PRENDERE GLI INTERVALLI IN CUI *

RISOLVERE

! QUESTO VALE SOLO SE TUTTE LE X SI TROVANO ALL'INTERNO DEL VALORE ASSOLUTO

* SE IL SEGNO ERA $>$; $<$, $R_1 \cup R_2$ NON È UN SISTEMA

SE IL SEGNO ERA $<$; $>$, $R_1 \cap R_2$ SISTEMA

DISEQ. FRATTE CON VARIABILE SIA DENTRO CHE FUORI AL VALORE ASSOLUTO

LA DISEQ. SI SCOMPONE IN DUE SISTEMI:

$$\begin{cases} \text{CONTENUTO VALORE ASSOLUTO} \geq 0 \\ f(x) > y \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{CONTENUTO VALORE ASSOLUTO} < 0 \\ f(x) > y \end{cases}$$

! IN QUESTO CASO IL CONTENUTO DEL VALORE ASSOLUTO DIVENTA NEGATIVO ($|x| \to -x$

DOPODICHÉ SI FA L'UNIONE DEI DUE SISTEMI

(NEL SISTEMA INVECE SI FA L'INTERSEZIONE)

DISEQ. IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{A(x)} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} B(x)$$

SE n È NEGATIVO, SI MOLTIPLICANO ENTRAMBE LE PARTI PER n → RISOLVI NORMALMENTE

SE n È PARI:

COND. DI BASE $A(x) \geq 0$

CASI $> ; \geq$

if $B(x) < ; \leq 0$

$\forall x$

ALTRIMENTI

$A(x) > ; \geq B(x)$

UNIONE DEI SISTEMI:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < ; \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(x) \geq ; > 0 \\ A(x) > ; \geq B(x)^n \end{cases}$$

CASI $< ; \leq$

COND 1 $B(x) > ; \geq 0$

VISTO CHE IL PRIMO MEMBRO È SEMPRE POSITIVO

→ n POSITIVO < n NEGATIVO

INOLTRE $A(x) < ; \leq B(x)$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > ; \geq 0 \\ A(x) < ; \leq B(x)^n \end{cases}$$

SISTEMA A 3 ELEMENTI

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI: $a^x = b$

RISOLVIBILI CON:

- PROPRIETÀ DELLE POTENZE: $\left(a^x > a^b \begin{cases} a > 1 \to x > b \\ a < 1 \to x < b \end{cases} \right)$

  ecc.

- SOSTITUZIONE:

$a^x + 2a^{4x} = b$! $a^x = t \to t + 2t^4 = b$

RISOLVI → SOLUZIONI PER t → RISOSTITUISCI a^x A t

→ RISOLVI DI NUOVO

- LOGARITMI R.I.P.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

SE ABBIAMO UNA PROPRIETÀ $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$

SE $P(n)$ VALE PER $n = 0^*$ E PER $n = n-1$,

→ VALE PER TUTTI GLI $n \in \mathbb{N}$:

* IL PASSO BASE PUÒ VARIARE. IN QUESTO CASO POTREBBE ESSERE $1 \to P(n)$ È VERA $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- PASSO BASE: $n = 1^*$

- PASSO INDUTTIVO $\begin{cases} \text{IPOTESI INDUTTIVA} \\ \text{TESI INDUTTIVA} \end{cases}$

es. $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

PASSO BASE → $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ → $1 = 1$ ✓

IPOTESI INDUTTIVA $\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{n-1(n-1+1)}{2}$

SUPPONGO CHE SIA VALIDA

TESI INDUTTIVA $\sum_{p=1}^{n} p = \sum_{p=1}^{n-1} p + n$

$(n=3 \quad p=1)$

es. $1 + 2 + 3 =$

$(n = n-1) +$

$(1 + 2) + n$ ✓

$$\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \checkmark$$

VALE PER:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$$, ED ALTRI ANCORA

PERMUTAZIONI

P_n = PERMUTAZIONI DI $n = n!$

DATI n OGGETTI ED n POSTI, P_n SONO TUTTI I MODI IN CUI GLI OGGETTI POSSONO ESSERE DISPOSTI NELLO SPAZIO (L'ORDINE CONTA)

Es. P_f, $f = \{a,b,c\}$ OGGETTI, $f = 3$ POSTI $\rightarrow$ a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a

6 MODI $= 3!$

$$n! = (n-1)! \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1)! \cdot n \quad \text{ecc.}$$

PERCHÉ

Es. CON $n=5$

$$n! = \overset{n}{5} \cdot \overset{n-1}{4} \cdot \overbrace{\overset{n-2}{3} \cdot \overset{n-3}{2} \cdot \overset{n-4}{1}}^{3!}$$

$4!$ $2!$

$1! = 1$ $0! = 1$ PERCHÉ

$$1! = 1 \cdot (1-1)! \rightarrow 1 = 1 \cdot (0!)$$

COMBINAZIONI

$$C_{x,y} = \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$$

$y = 0 \rightarrow \frac{x!}{x!} = 1$

$y = 1 \rightarrow \frac{x!}{(x-1)!} = \frac{(x-1)! \cdot x}{(x-1)!} = x$

$y = x \rightarrow \frac{x!}{x!} = 1$

x z y

LE COMBINAZIONI $C_{x,y}$ SONO I DIVERSI MODI IN CUI GLI OGGETTI X POSSONO ESSERE DISPOSTI IN Y

! NON IN ORDINE $\rightarrow$ a,b = b,a

$\rightarrow$ TUTTI I SOTTOINSIEMI DI X CON Y ELEMENTI

BINOMIO DI NEWTON

È UN MODO PER CALCOLARE LA POTENZA n DI UN BINOMIO:

$a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (MA TEORIA VALE ANCHE PER ZERO)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Es. $n = 3$

$$(a+b)^3 = \underset{1}{\binom{3}{0}} \cdot a^3 \cdot b^0 + \underset{3}{\binom{3}{1}} \cdot a^2 \cdot b^1 + \underset{3}{\binom{3}{2}} a^1 b^2 + \underset{1}{\binom{3}{3}} a^0 b^3$$

$$\rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

CUBO DI UN BINOMIO

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE SI PUÒ APPLICARE ANCHE ALLE DISEQUAZIONI: Es.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

PASSO BASE: $n = 1$

$$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} \quad = \quad 1 \leq 1 \quad \checkmark$$

PASSO INDUTTIVO:

IPOTESI $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1}$

SE SOMMIAMO $\frac{1}{n^2}$ AD ENTRAMBI I MEMBRI

TESI $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

DIMOSTRAZIONE $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$$

MA QUESTO È $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$\rightarrow$ SE $2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

ALLORA LO SARÀ ANCHE $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$

$$\cancel{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \leq \cancel{2} - \frac{1}{n}$$

$$-\frac{n^2-n+1}{(n-1)n^2} \leq -\frac{1}{n}$$

ENTRAMBI PRODOTTO PER $-n$

$$\frac{n^2-n+1}{n(n-1)} \geq 1 \Rightarrow \frac{{}^{1}\cancel{n(n-1)}^{1}}{{}_{1}\cancel{n(n-1)}_{1}} + \frac{1}{n(n-1)} \geq 1$$

$$= \cancel{1} + \frac{1}{n(n-1)} \geq \cancel{1}$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \geq 0$$

$n \in \mathbb{N}$ SEMPRE POSITIVO

$n-1 \geq 0$ SEMPRE VERIFICATO NEL PASSO INDUTTIVO PERCHÈ $n \geq 2$

(IN TEORIA SI POTEVA FARE ANCHE LO STUDIO DEL SEGNO)

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

SIA a UN NUMERO REALE : $a \geq -1$

$$(a+1)^n \geq na + 1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

PASSO BASE $n=0$ /

$$(a+1)^0 \geq 0 \cdot a + 1$$

$$1 \geq 1 \quad \checkmark$$

IL CASO 0^0 VIENE DATO COME BUONO DANDO IL VALORE $0^0 = 1$ ANCHE SE IN REALTÀ È INDETERMINATO

PASSO INDUTTIVO $n \geq 1$

IPOTESI: $(a+1)^{n-1} \geq a(n-1) + 1$

TESI $(a+1)^n \geq an + 1$

DIMOSTRAZIONE

$$(a+1)^n = (a+1)^{n-1}(a+1)$$

E PER IPOTESI $(a+1)^{n-1} \geq a(n-1)+1$

$$(a+1)^{n-1}(a+1) \geq (a(n-1)+1)(a+1)$$

$$(a+1)^n \geq (an-a+1)(a+1)$$

$$(a+1)^n \geq a^2n+an-a^2-\cancel{a}+\cancel{a}+1$$

$$(a+1)^n \geq an+1+a^2(n-1)$$

QUESTA ERA LA TESI DA DIMOSTRARE

CONSIDERIAMO $(a+1)^n = x$, $an+1=y$, $a^2(n-1)=z$

$a^2(n-1)$ È SEMPRE POSITIVO PERCHÈ NEL PASSO INDUTTIVO $n \geq 1$

SE $x \geq y+z$ CON $z \geq 0$

ALLORA $x \geq y$

OVVERO

$$(a+1)^n \geq an+1$$

COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

SIANO $A, B \subseteq \mathbb{R} \wedge A, B \neq \emptyset$

ESSI SONO <u>SEPARATI</u> SE $\overset{def.}{\iff}$ $\forall a \in A \wedge \forall b \in B$ $a \leq b$

ASSIOMA DI COMPLESEZZA

PRESI GLI INSIEMI SEPARATI DI PRIMA

$$\exists p \in \mathbb{R} : a \leq p \leq b, \ \forall a \in A \wedge \forall b \in B$$

p SI CHIAMA <u>ELEMENTO DI SEPARAZIONE</u>

ADESSO:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ = INSIEMI DISCRETI $\quad$ $\mathbb{R}$ = <u>INSIEME CONTINUO</u>

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x < y \wedge x < z < y$$

SE A, B SONO ~~SERA~~ SEPARATI E $\exists! \, p \in \mathbb{R}$:

$$\forall a \in A \wedge \forall b \in B \quad a \leq p \leq b$$

VENGONO CHIAMATI <u>CONTIGUI</u>

A, B SI CHIAMANO SEZIONE SE

DEF.

- CONDIZIONE 1 SONO DISGIUNTI : $A \cap B = \emptyset$
- CONDIZIONE 2 SONO SEPARATI : $a < b$
- CONDIZIONE 3 SONO COMPLEMENTARI : $A \cup B = \mathbb{R}$ (IN $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ A, B SONO UNA <u>SEZIONE</u> DI $\mathbb{R}$

ASSIOMA DI DEDEKIND

OGNI SEZIONE A, B DI $\mathbb{R}$ HA UN UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE :

$$\exists!\, p \in \mathbb{R} : a \leq p \leq b \quad \forall a \in A \wedge \forall b \in B$$

VISTO CHE IN ESSO SI VERIFICANO TUTTI QUESTI ASSIOMI, $\mathbb{R}$ SI DICE <u>COMPLETO</u>

PER ALTRI INSIEMI ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, ecc.) NON VALGONO TUTTI, QUINDI NON SONO COMPLETI (DISCRETI)

INTERVALLI <u>LIMITATI</u>

SIANO $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

- INTERVALLO CHIUSO : $[a, b]$
- INTERVALLO APERTO : $]a, b[$
- INTERVALLO SEMIAPERTO A DESTRA : $[a, b[$
- INTERVALLO SEMIAPERTO A SINISTRA $]a, b]$

TUTTI DI ESTREMI a, b $]a, b[$

OVVERO $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

INTERVALLI <u>ILLIMITATI</u> ($a \in \mathbb{R}$)

INTERVALLO < CHIUSO / APERTO > ILLIMITATO SUPERIORMENTE

$[a, +\infty[$

$]a, +\infty[$

INTERVALLO < CHIUSO / APERTO > ILLIMITATO INFERIORMENTE

$]-\infty, a]$

$]-\infty, a[$

INTERVALLO ILLIMITATO: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

TOPOLOGIA : DEFINIZIONI

INTORNO DI UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$

$I_\delta(x_0)$: INTORNO DI CENTRO x_0 E RAGGIO δ

$\hookrightarrow]x_0-\delta, x_0+\delta[$ CON $\delta > 0$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$

---

x_0 SI DICE PUNTO INTERNO ALL'INSIEME A SE

$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \subseteq A$

---

x_0 SI DICE PUNTO ESTERNO AD A SE

$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ CON $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

---

x_0 SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A SE

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} I^-_\delta(x_0) \subseteq A \wedge I^+_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \\ I^+_\delta(x_0) \subseteq A \wedge I^-_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} I^+_\delta(x_0) : \text{INTORNO DESTRO} = [x_0, x_0+\delta[\\ I^-_\delta(x_0) : \text{INTORNO SINISTRO} =]x_0-\delta, x_0] \end{array} \right)$$

L'INSIEME DEI PUNTI DI FRONTIERA DI A SI CHIAMA

FRONTIERA DI A : $Fr A$ OPPURE ∂A

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

INSIEME APERTO : A SI DICE INSIEME APERTO SE TUTTI I SUOI PUNTI SONO INTERNI, OVVERO

$$\forall x \in A, A \subseteq \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : I_\delta(x) \subseteq A$$

INSIEME CHIUSO : UN INSIEME A SI DICE CHIUSO SE $\mathbb{R} \setminus A$ È APERTO.

(IL COMPLEMENTARE È UN INSIEME APERTO)

! $\mathbb{R} \wedge \emptyset$ SONO DELLE ANOMALIE PERCHÈ SONO CONTEMPORANEAMENTE APERSI E CHIUSI

Chiusura di A: $\overline{A}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

La chiusura di A è il più piccolo insieme chiuso che contiene A

$$\overline{A} = A \cup F_r A$$

Interno di A: $\mathring{A}$

È l'insieme di tutti i punti interni di A

$$\mathring{A} = A \setminus F_r A$$

Punto di Accumulazione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

x_0 è un punto di accumulazione per A se

Def. $\forall \delta > 0 \quad (I_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

ovvero ogni intorno di x_0 deve avere un elemento diverso da x_0 in comune con A

Derivato di A è l'insieme di punti di accumulazione di A: DA

- $D\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$: retta reale estesa $= [-\infty, +\infty]$
- $\mathbb{N}$ ha un solo punto di accumulazione: $+\infty$

Punto isolato

$x_0 \in A, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

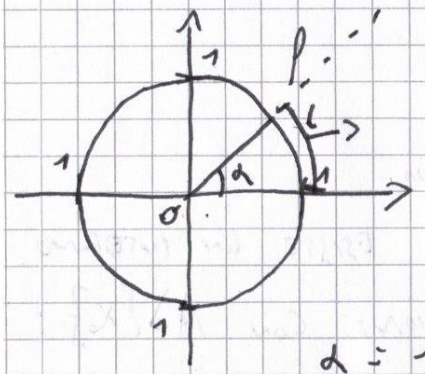
x_0 è un punto isolato se esiste un intorno di x_0 che non ha intersezioni con $A \setminus \{x_0\}$:

$$\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \cap A = \{x_0\}$$

ovvero esiste un intervallo in cui l'intorno $I_\delta(x_0)$ ed A hanno solo x_0 in comune (intersecato ad A)

TRIGONOMETRIA

UNA DELLE NOZIONI PRINCIPALI DELLA TRIGONOMETRIA È IL RADIANTE: SI USA PER MISURARE ANGOLI



α = ANGOLO

ρ = SEMIRETTA

L = ARCO

α = 1 RADIANTE

QUANDO L'ARCO CHE SOTTENDE HA MISURA PARI AL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA

MISURA IN GRADI	MISURA IN RADIANTI
0/360°	0
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3/2\pi$

! CIRCONFERENZA GONIOMETRICA: CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1 E CENTRO IN O

SENO, COSENO E TANGENTE

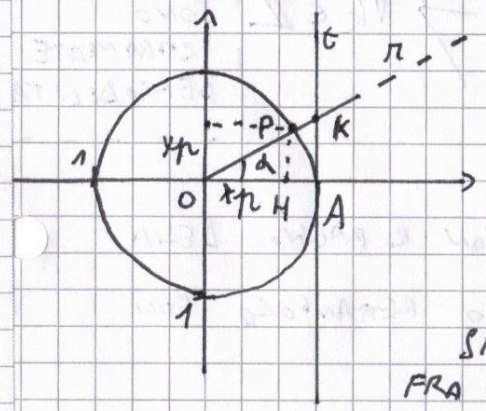
MISURE PIÙ USATE:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π	ecc.
sin α	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0	ecc.
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1	ecc.
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∄	0	∄	0	ecc.

A 2π IL CICLO SI RESETTA: $0 \Rightarrow 2\pi$

COSA SONO sin, cos E tg DI α?

CIRC. CARTESIANA:



PRESO UN ANGOLO α:

- $\sin\alpha = y_p$
- $\cos\alpha = x_p$
- $tg = \pm\overline{AK}$

SIA P IL PUNTO DI INTERSEZIONE FRA LA RETTA r E LA CIRCONFERENZA

PROIEZIONI DI P SULL'ASSE DELLE ASCISSE = COS

PROIEZIONI DI P SULL'ASSE DELLE ORDINATE = SIN

tg →

IL SEGMENTO DELLA RETTA (TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO X=1) $\overline{AK}$, DOVE:

TANGENTE

A: PUNTO DI INCONTRO FRA RETTA E CIRCONFERENZA

K: PUNTO DI INTERSEZIONE FRA LA RETTA TANGENTE E LA SEMIRETTA CHE FORMA CON L'ORIGINE L'ANGOLO α

LE TRE MISURE SONO CICLICHE, QUINDI

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \\ tg(\alpha + k\pi) = tg\,\alpha \end{array}\right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

$2k\pi$ / π SONO CHIAMATE PERIODICITÀ

SENO E COSENO FORMANO CON IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA, UN TRIANGOLO RETTANGOLO CON IPOTENUSA = 1

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

I VALORI DI sin, cos, tg ASSUMONO VALORI POSITIVI/NEGATIVI A SECONDO DEL QUADRANTE:

$\sin\alpha$ +	$\sin\alpha$ +
$\cos\alpha$ −	$\cos\alpha$ +
$tg\,\alpha$ −	$tg\,\alpha$ +
$\sin\alpha$ −	$\sin\alpha$ −
$\cos\alpha$ −	$\cos\alpha$ +
$tg\,\alpha$ +	$tg\,\alpha$ −

1° Q	+	+	+
2° Q	+	−	−
3° Q	−	−	+
4° Q	−	+	−

ALCUNE NOZIONI SU SIN E COS

- $\cos\alpha = \cos -\alpha$
- $\sin\alpha = -\sin -\alpha$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

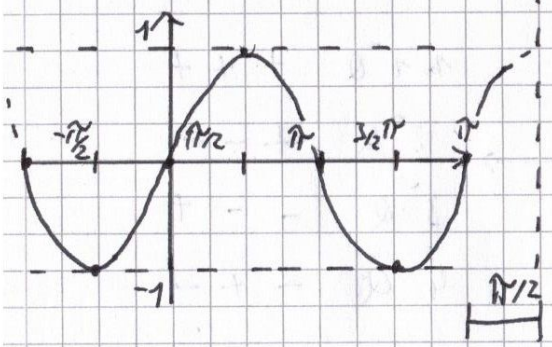
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

SE $\alpha = \beta$

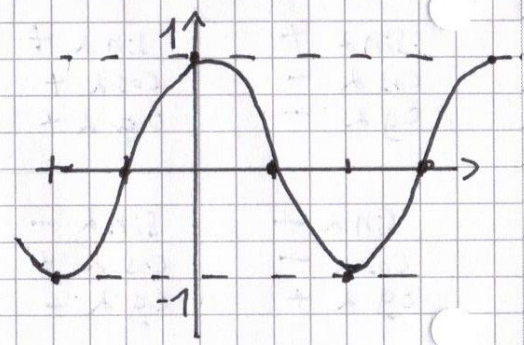
- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

FUNZIONI SENO E COSENO

SINUSOIDE



COSINUSOIDE



- ENTRAMBE LE FUNZIONI SONO COMPRESE FRA -1 E 1
- NON SONO INIETTIVE
- NON SONO BIETTIVE

PER INVERTIRLE BISOGNA RESTRINGERLE SIA AL DOMINIO CHE AL CODOMINIO

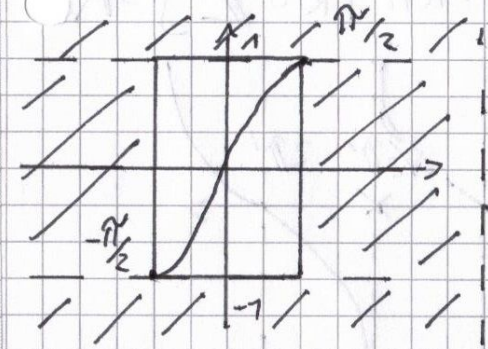
FUNZIONE sin $\quad f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

FUNZIONE cos $\quad f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\to \quad \to$

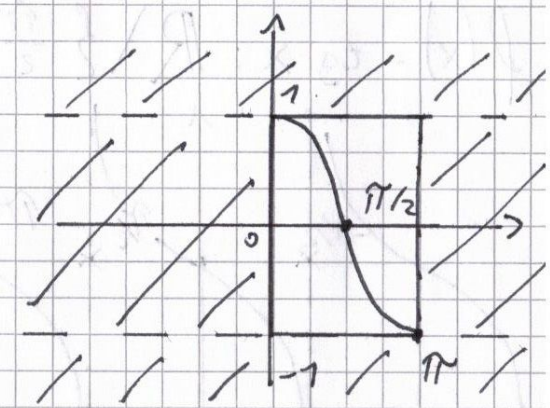
SINUSOIDE RISTRETTA

- $f|_{[-\pi/2, \pi/2]}(x) = \sin x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$



COSINUSOIDE RISTRETTA

- $f|_{[0, \pi]}(x) = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$



DA QUESTE RESTRIZIONI SI DEFINISCONO LE FUNZIONI INVERSE:

<u>arcsin</u>: $[-1, 1] \ni y \mapsto x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ t.c.

$y = \sin x, \quad x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ $\boxed{\text{ARCOSENO}}$

<u>arccos</u>: $[-1, 1] \ni y \mapsto x \in [0, \pi]$ t.c.

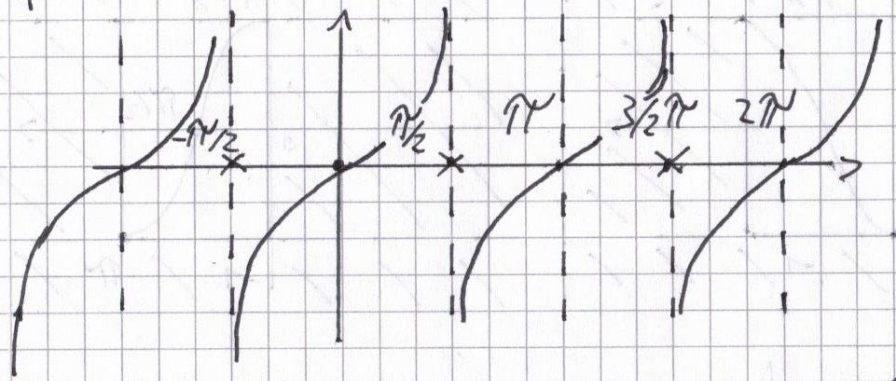
$y = \cos x, \quad x = f^{-1}(y) = \arccos y$ $\boxed{\text{ARCOCOSENO}}$

PARLIAMO DI <u>TANGENTI</u>

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\tan \text{ o } tg)$$

IL GRAFICO DI tan È UN PÓ SPECIALE:

$$f(x) = tg\, x : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$



RESTRINGIAMOLA AL FINE DI CREARE LA f^{-1}

$$f|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(x) = \tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{ARCOSANGENTE}}$

<u>arctan</u>: $\mathbb{R} \ni y \mapsto \exists\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ t.c.

$y = \tan x \qquad x = f^{-1}(y) = \text{arctg}\, y$

<u>INSIEMI NUMERICI LIMITATI</u>

$A \subseteq \mathbb{R}, \; A \neq \emptyset$:

- A È <u>LIMITATO SUPERIORMENTE</u> SE

$$\overset{def.}{\iff} \exists\, r \in \mathbb{R} : a \leq r \quad \forall a \in A$$

→ IN QUESTO CASO, r SI CHIAMA <u>MAGGIORANTE</u> PER A

- IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI SI CHIAMA: <u>ESTREMO SUPERIORE</u> DI A = $\sup A$

- SE $\sup A \in A$ SI DICE <u>MASSIMO</u> DI A = $\max A$

- A È INVECE <u>LIMITATO INFERIORMENTE</u> SE

$$\overset{def.}{\iff} \exists\, r \in \mathbb{R} : a \geq r \quad \forall a \in A$$

- IN QUESTO CASO, r SI CHIAMA MINORANTE PER A

- IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI SI CHIAMA: <u>ESTREMO INFERIORE</u> DI A = $\inf A$

- SE $\inf A \in A$ SI DICE <u>MINIMO</u> DI A = $\min A$

! SE ESISTE UN $\left\langle \begin{matrix} \text{MAGGIORANTE} \\ \text{MINORANTE} \end{matrix} \right.$ NE ESISTONO INFINITI

TEOREMA DELL'ESISTENZA DI $\sup A$

- SE A È LIMITATO SUPERIORMENTE, $\exists \sup A$
- SE A NON AMMETTE MAGGIORANTI, SI DICE ILLIMITATO SUPERIORMENTE, OVVERO:

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > r$$

IN QUESTO CASO, PER DEFINIZIONE $\sup A = +\infty$

TEOREMA DELL'∃NZA DI $\inf A$

- SE A È LIMITATO INFERIORMENTE, $\exists \inf A$
- SE A NON AMMETTE MINORANTI, SI DICE ILLIMITATO INFERIORMENTE, OVVERO:

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < r$$

IN QUESTO CASO, PER DEFINIZIONE $\inf A = -\infty$

SE A È $\left\langle \begin{matrix} \text{ILLIMITATO} \\ \text{LIMITATO} \end{matrix} \right.$ SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE SI DICE $\begin{cases} \text{ILLIMITATO} \\ \text{LIMITATO} \end{cases}$

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI $\sup A / \inf A$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A LIMITATO:

- SUPERIORMENTE $\rightarrow L$ È L'ESTREMO SUPERIORE DI A SE:
  - $a \leq L, \forall a \in A$
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{a} \in A : (\bar{a} > L - \varepsilon)$

- INFERIORMENTE $\rightarrow \ell$ È L'ESTREMO INFERIORE DI A SE:
  - $a \geq \ell, \forall a \in A$
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{a} \in A : (\bar{a} < \ell + \varepsilon)$

! • ε = QUANTITÀ MOLTO PICCOLA

ANCHE LE FUNZIONI POSSONO ESSERE CONSIDERATE LIMITATE/ILLIMITATE:

f È LIMITATA SE $\mathrm{Im} f$ È LIMITATO

ILLIMITATA SE $\mathrm{Im} f$ È ILLIMITATO

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$

<u>f SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE</u> SE:

DEF. $f(A)$ È LIMITATA SUPERIORMENTE, QUINDI

$$\sup f(A) = \sup_A f \text{ OPPURE } \sup_{x \in A} f(x)$$

(SI LEGGE ESTREMO SUPERIORE DI f IN A OPPURE ESTR. SUPERIORE DI $f(x)$ AL VARIARE DI x IN A)

SE $\sup f(A) \in f(A)$ SI DICE <u>MASSIMO DI f IN A</u>:

$$\max f(A) = \max_A f \ \boxed{\text{OPPURE}} \ \max_{x \in A} f(x)$$

RICORDA! $f(A)$ È IL CODOMINIO

SE INVECE $f(A)$ È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, ALLORA PER DEFINIZIONE

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$

<u>f SI DICE LIMITATA INFERIORMENTE</u> SE $f(A)$ È LIMITATO INFERIORMENTE:

$$\inf f(A) = \inf_A f = \inf_{x \in A} f(x)$$

SE $\inf f(A) \in f(A)$ ALLORA

$$\min f(A) = \min_A f \text{ OPPURE } \min_{x \in A} f(x)$$

SE INVECE $f(A)$ È ILLIMITATO INFERIORMENTE:

PER DEFINIZIONE

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$

DI CONSEGUENZA

f È LIMITATA SE $\begin{cases} \text{È LIMITATA SUPERIORMENTE} \\ \text{È LIMITATA INFERIORMENTE} \end{cases}$

f È ILLIMITATA SE $\begin{cases} \text{È ILLIMITATA SUPERIORMENTE} \\ \text{È ILLIMITATA INFERIORMENTE} \end{cases}$

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI $\sup_A f$, $\inf_A f$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$:

- f LIMITATA SUPERIORMENTE:

<u>L È L'ESTREMO SUPERIORE</u>

<u>DI f SE:</u>

$$- f(x) \leq L, \forall x \in A$$

$$- \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A \ (f(\bar{x}) > L - \varepsilon)$$

- f LIMITATA INFERIORMENTE:

<u>l È L'ESTREMO INFERIORE</u>

<u>DI f SE:</u>

$$- f(x) \geq l, \forall x \in A$$

$$- \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x} \in A \ (f(\bar{x}) < l + \varepsilon)$$

<u>DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE</u>

$\sin x \quad \cos x \quad tg\, x$

INIZIAMO DA QUELLA PIÙ FACILE

<u>TANGENTE</u> $tg\, x$, $a \in \mathbb{R}$

RICORDANDO CHE LA TANGENTE TENDE A: $+\infty$, $-\infty$ (DA 0π) ANDANDO VERSO $\pi/2$, $3/2\,\pi$

- <u>$tg\, x \leq a$</u> $(< a)$

$$\tfrac{3}{2}\pi + k\pi < x \leq a + k\pi \quad \left(\forall k \in \mathbb{Z} \ (\ldots < x < \ldots)\right)$$

SPESSO SOTTINTESO

- <u>$tg\, x \geq a$</u> $(> a)$

$$a + k\pi \leq x < \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \left(\forall k \in \mathbb{Z} \ (\ldots < x < \ldots)\right)$$

$tg\, x < a$

- RICORDA CHE IN DISEQUAZIONI CON LA TANGENTE DI SECONDO GRADO (O PIÙ), IL O STUDIO DEI SEGNI CONVIENE FARLO SUL PIANO CARTESIANO. (OGNI TANGENTE LA SUA CIRCONF.)

Seno / Coseno

Le disequazioni con seno e coseno si dividono per casi. Iniziamo dal

Seno $\leq a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sin x \leq a$

- $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 < a < 1$

$\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi$

- $a = -1$

$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

- $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

$\sin x < a$

- $a > 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$
- $-1 < a < 1$

$- - - < x < - - -$

- $a = -1$

$\nexists x \in \mathbb{R}$

- $a < -1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

Seno $\geq a$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sin x \geq a$

- $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
- $a = 1$

$x = \pi/2 + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

- $-1 < a < 1$

$a + 2k\pi \leq x \leq \pi - a + 2k\pi$

- $a = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sin x > a$

- $a > 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
- $a = 1$ $\nexists x \in \mathbb{R}$
- $-1 < a < 1$

$- - - < x < - - -$

- $a = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right\}$
- $a < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Coseno $\leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- $a > 1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

- $a = 1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

- $-1 < a < 1$

  $a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi$

- $a = -1$

  $x = \pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

- $a < -1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

- $a > 1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

- $a = 1$

  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

- $-1 < a < 1$

  $- - - < x < - - -$

- $a = -1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

- $a < -1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

Coseno $\geq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- $a > 1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

- $a = 1$

  $x = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

- $-1 < a < 1$

  $2\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi$

- $a = -1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

- $a < -1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

- $a > 1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

- $a = 1$

  $\nexists x \in \mathbb{R}$

- $-1 < a < 1$

  $- - - < x < - - -$

- $a = -1$

  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}$

- $a < -1$

  $\forall x \in \mathbb{R}$

TABELLA ESTESA VALORI sin, cos, tan / arcsin, arccos, arctan

RADIANTI	sin	cos	tan	arcsin	arccos	arctan
0	0	1	0	VALORE SENO ↓ ANGOLO IN RADIANTI	VALORE COSENO ↓ ANGOLO IN RADIANTI	VALORE TANGENTE ↓ ANGOLO IN RADIANTI
$\frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$			
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1			
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$			
$\pi/2$	1	0	$\nexists$			
$2/3\,\pi$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$			
$3/4\,\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1			
$5/6\,\pi$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$			
π	0	-1	0			
$7/6\,\pi$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$			
$5/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1			
$4/3\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$			
$3/2\,\pi$	-1	0	$\nexists$			
$5/3\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$			
$7/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1			
$11/6\,\pi$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$			
2π	0	1	0			

SUCCESSIONI

SONO FUNZIONI DA $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

CON X ILLIMITATO SUPERIORMENTE

QUESTA X SI INDICA CON $\mathcal{N}$

$$f: \mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) \overset{def.}{\Rightarrow} \underline{a_n}$$

LA SUCCESSIONE SI INDICA CON $\{a_n\}_n$, $\{a_n\}$

(OPPURE CON PARENTESI TONDE)

Es. DI SUCCESSIONI $(a_0, a_1, a_2, \dots a_n)$

- $a_n = 1/n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

n:	1	2	3	4	5	6
a_n:	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$

- $a_n = -1^n, \forall n \in \mathbb{N}$

n:	0	1	2	3	4	5	6
a_n:	1	-1	1	-1	1	-1	1

TIPI DI SUCCESSIONI: SUCCESSIONE CONVERGENTE

SIA $\{a_n\}$ LA NOSTRA SUCCESSIONE NUMERICA

ESSA CONVERGE VERSO UN NUMERO $a \in \mathbb{R}$ PER $n \to +\infty$

a VIENE CHIAMATO LIMITE DI $\{a_n\}$

OPPURE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ | $a_n \to a$ | $a_n \to a$ | $\lim a_n = a$

! SE UN NUMERO VA VERSO UN PUNTO: - CONVERGE -

SE VA VERSO ∞: - TENDE -

DEFINIZIONE DI LIMITE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu :$

$|a_n - a| < \varepsilon$ OVVERO: $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

LETTERA GRECA $|N| = \nu$

SE SOMMIAMO $+a$ A TUTTI I MEMBRI OTTENIAMO

$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

! PIÙ PICCOLO È ε, PIÙ GRANDE DIVENTA ν

! CON $[x]$ SI INTENDE LA PARTE INTERA DI x

VISTO CHE ε È UN NUMERO REALE, CAPITA SPESSO NELLA DISUGUAGLIANZA $|a_n - a| < \varepsilon$ DI TROVARSI UN n IN RELAZIONE CON UN NUMERO REALE:

PER DETERMINARE UN ν : $\forall n > \nu$

es. $n > 1/\varepsilon \to \nu = [1/\varepsilon] + 1$

SI AGGIUNGE 1 ALLA PARTE INTERA DI $1/\varepsilon$ PER ESSERE SICURI CHE $n > 1/\varepsilon$

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE NON PUÒ AVERE 2 LIMITI DISTINTI

DIMOSTRAZIONE

DIAMO PER ASSURDO CHE CI SIANO 2 LIMITI $a_1 \neq a_2$

CHE HANNO DUE $\nu \to \nu_1 \; \nu_2$

SCEGLIAMO COME ε IL VALORE $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

QUINDI, COME NELLA DEFINIZIONE

$\lim a_n = a_1 \quad \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_1| < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

$\lim a_n = a_2 \quad \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a_2| < \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

$2\varepsilon \quad \forall n > \nu_1 ; \nu_2$

$|a_1 - a_2|$ LO SCRIVIAMO COME $|a_1 - a_2 + x - x|$

SCEGLIAMO $x = a_n$ — + QUANTITÀ SI ANNULLANO

+ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$|(a_1 - a_n) + (-a_2 + a_n)|$ ADESSO PROPRIETÀ TRIANGOLARE DEL VALORE ASSOLUTO

$|a_1 - a_n| + |a_n - a_2| \leq$ QUINDI SE VOGLIAMO USIAMO QUESTO QUI

$\to |a_n - a_1| + |a_n - a_2|$

PERCHÉ SE $|x| < y \wedge z > y \to |x| < z$

$|(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n)| \leq |a_1 - a_n| + |a_2 - a_n|$

SE ESISTONO 2 ν, ALLORA SICURAMENTE QUELLO PIÙ GRANDE VALE PER ENTRAMBI

es. $a_1 : n > 5 \quad a_2 : n > 7 \to n > 7$

QUINDI INDICHIAMO IL $\max\{\nu_1, \nu_2\}$ CON $\bar{\nu}$

ADESSO SE $x < y \wedge z < w \to x + z < y + w$

PRENDIAMO $x = |a_n - a_1|$, $z = |a_n - a_2|$ E $y = w = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$

OTTENIAMO

$$|a_n - a_1| + |a_n - a_2| < |a_1 - a_2|$$

MA PRIMA DICEVAMO CHE

$$|a_n - a_1| + |a_n - a_2| \geq |\cancel{-a_n} + a_1 + \cancel{a_n} - a_2|$$

TROVIAMO CHE $x \geq y \wedge x < y$ ↯ $\forall \bar{\nu}$

! $\bar{\nu}$ VUOL DIRE CHE ANDAVA BENE SIA SE PRENDEVI $|a_n - a_1| < ---$

CHE $|a_n - a_2| < ---$

E AGGIUNGEVI A SINISTRA UN NUMERO, ED A DESTRA UN ALTRO NUMERO PIÙ GRANDE

"L'OPPOSTO" DI CONVERGENZA È

DIVERGENZA

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE:

ESSA DIVERGE

NEGATIVAMENTE — SE — POSITIVAMENTE

$$\forall M>0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu$$

$a_n < -M$ $\qquad$ $a_n > M$

$\lim a_n = -\infty$ $\qquad$ $\lim a_n = +\infty$

$\{a_n\}$ TENDE A $-\infty$ $\qquad$ $\{a_n\}$ TENDE A $+\infty$

! SENZA VALORE ASSOLUTO, PERCHÉ GIÀ C'È LA DIVISIONE $-\infty/+\infty$

! ε = QUANTITÀ MOLTO PICCOLA

M = QUANTITÀ MOLTO GRANDE

ν RIMANE $[x]+1$

ALCUNE DEFINIZIONI:

SE $\{a_n\}$:

- CONVERGE AD UN PUNTO / DIVERGE = REGOLARE
- NON AMMETTE LIMITE = IRREGOLARE
- CONVERGE A 0 CON $n \to +\infty$ = INFINITESIMA
- TENDE A $\pm\infty$ = INFINITA

SI DICE LIMITATA SE

$$\exists M>0 : |a_n| \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

OVVERO $\quad -M \le a_n \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Es. $\{\sin n\} \to |\sin n| \le 1$

$\{1/n\} \to |1/n| \le 1$

$\{(-1)^n\} \to |(-1)^n| = 1$

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \to \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \le 1$

TEOREMA: CONVERGENZA IMPLICA LIMITATEZZA

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE $\rightarrow$ È LIMITATA

(NON VALE IL CONTRARIO)

DIMOSTRAZIONE

PER DEFINIZIONE $a_n \rightarrow a$ $\quad \varepsilon = 1 \quad \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}$:

$$\forall n > \bar{\nu} \,.\, |a_n - a| < 1$$

$|a_n|$ PUÒ ESSERE SCRITTA $|a_n - a + a| \rightarrow |(a_n - a) + a|$

ASSOCIATIVA

PER LA PROPRIETÀ TRIANGOLARE V.A.

$$|(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a|$$

È MINORE DI 1 $\rightarrow$ $\quad 1 + |a|$

QUINDI $|a_n| < 1 + |a| \quad \forall n > \bar{\nu}$

COME M PRENDIAMO IL VALORE PIÙ GRANDE FRA LE a_x: $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots |a_{\bar{\nu}}|, 1 + |a|\}$

FINO ALL'ELEMENTO DOPO IL LIMITE

(SICURAMENTE SARÀ MINORE DELL'~~[illegible]~~ ELEMENTO PIÙ GRANDE DELL'INSIEME

VISTO CHE $|a_n| < 1 + |a|$,

QUINDI $|a_n| \leq M \leftarrow$ DEF. LIMITATA

OPERAZIONI CON I LIMITI

PRESE DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$

1) $\{a_n \pm b_n\}$ CONVERGE AD $a \pm b$

2) $\{a_n \cdot b_n\}$ CONVERGE AD $a \cdot b$

3) $\{a_n \cdot b_n\}$ CONVERGE AD $a/b \Longleftrightarrow b \neq 0 \wedge b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONI

1) $\{a_n + b_n\}$: $a_n + b_n \rightarrow a + b$

SCRIVO LE DEFINIZIONI DI LIMITE

- $a_n \rightarrow a \Longleftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \nu_1$
- $b_n \rightarrow b \Longleftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \nu_2$

CONTINUA - - - →

TESI:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : |(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

USO PROP. TRIANGOLARE SU QUESTO:

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

SE QUESTO È MINORE DI UN X, LO È ANCHE QUELLO DI SOPRA

DIMOSTRIAMO CHE IL SECONDO È $< \varepsilon$

SE PRENDIAMO $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ ALLORA SICURAMENTE VALGONO SIA $a_n \to a$ CHE $b_n \to b$

OVVERO

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad , \quad |b_n - b| < \varepsilon/2$$

CONSIDERANDO CHE $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2 \to x_1 + x_2 < y_1 + y_2$

$$\to |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \text{OVVERO}$$

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{CHE IMPLICA}$$

$$\boxed{|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon} \quad \checkmark$$

2) PRENDO UN ε COME $\varepsilon/2 > 0$

- $a_n \to a \iff \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon/2, \ \forall n > \nu_1$
- $b_n \to b \iff \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon/2, \ \forall n > \nu_2$

TESI

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : |a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

AGGIUNGO/SOTTRAGGO $a_n \cdot b$

$$|a_n \cdot b_n + a_n \cdot b - a_n \cdot b - a \cdot b|$$ RIASSOCCIO E METTO IN EVIDENZA

$$|a_n \cdot (b_n - b) + b(a_n - a)|$$ PROP. TRIANGOLARE V.A.

$$\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$$ PROP. VALORI ASSOLUTI $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$|a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \leq M \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|$$

VISTO CHE ESISTE SEMPRE UN $M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$

VISTO CHE PER $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ SIA $|a_n - a| < \varepsilon/2$, CHE $|b_n - b| < \varepsilon/2$

$$< M \cdot \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \cdot |b| = \varepsilon/2 (M + |b|)$$

VISTO CHE M SI PUÒ SCEGLIERE A PIACIERE $> 2 \to$ TESI DIMOSTRATA $\checkmark$

APPLICAZIONE DELLA PROPRIETÀ 2

PRENDO UNA SUCCESSIONE INFINITESIMA $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \rightarrow$ PROP. 2 $\lim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0$

$\rightarrow$ APPLICANDO RIPETUTAMENTE $\lim \frac{1}{n^x} = 0$ $x \in \mathbb{N}$

MA VISTO CHE LO 0 ANNULLA QUALSIASI PRODOTTO

$\left\{c \cdot \frac{1}{n}\right\}$: $\underline{\lim \frac{c}{n} = 0}$ C'È UNA SUCCESSIONE COSTANTE

DA QUI SI PUÒ DEDURRE CHE IL LIMITE DI UN POLINOMIO CON GRADO MASSIMO AL DENOMINAT. È 0, PERCHÉ MESSO IN EVIDENZA LA VARIABILE SI OTTIENE $\left\{\frac{n^x}{n^{x+1}} \cdot \dots\right\}$ $n^x / n^{x+1} = \frac{1}{n} \rightarrow$

$\rightarrow \lim \frac{1}{n} \cdot \dots = 0 \cdot \dots = 0$

MESSO 1, MA BASTAVA CHE FOSSE > 0 es. n^{x+5}

FORME DETERMINATE

- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$
- $a_n \nearrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$ / $a_n \searrow -\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$ $\Rightarrow a_n + b_n \nearrow +\infty$ / $\searrow -\infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |a_n \cdot b_n| \rightarrow +\infty$ (SEGNO DIPENDE DAL PRODOTTO DEI SEGNI)
- $a_n \rightarrow \pm\infty$, $b_n \pm\infty \Rightarrow |a_n \cdot b_n| \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow a_n / b_n \rightarrow 0$
- $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |b_n / a_n| \rightarrow +\infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0$, $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n / b_n| \rightarrow +\infty$

FORME INDETERMINATE $[+\infty - \infty]$

$a_n = xn + c \to +\infty$
$b_n = yn + d \to -\infty$
$a_n + b_n$

SE $x = y \to c + d$
$x > y \to +\infty$
SE $y > x \to -\infty$

SE INVECE a_n E b_n HANNO GRADO DIFFERENTE
$a_n + b_n \to$ VERSO IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE DI GRADO MASSIMO

$$[\infty / \infty]$$

$a_n = xn_1 \to +\infty$
$b_n = yn_2 \to +\infty$
a_n / b_n

SE n_1 E n_2 HANNO LO STESSO GRADO $\to x/y$

SE HANNO GRADO DIFFERENTE:
x GRADO MASSIMO $\to +\infty$
y GRADO MASSIMO $\to 0$

$$[0 \cdot \infty]$$

$a_n = x/n_1 \to 0$
$b_n = yn_2 \to +\infty$
$a_n \cdot b_n$

STESSO GRADO $\to x/y$
n_1 GRADO MAX $\to 0$
n_2 GRADO MAX $\to +\infty$

TEOREMI DEL CONFRONTO:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

CONSIDERIAMO $\{a_n\}$ CON $a > 0$:

$$\exists \nu \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n > \nu$$

DIMOSTRAZIONE

PRESO UN $\varepsilon = a/2$

$$a_n \to a \Rightarrow \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu}, |a_n - a| < a/2$$

$\to -a/2 < a_n - a < a/2$ SOMMO a A TUTTI

$\to a/2 < a_n < \frac{3}{2} a$

VISTO CHE $a > 0$, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA DELLA MINORANZA, $a_n > 0$ $(\forall \nu \geq \bar{\nu})$

COROLLARIO

1) SE IN $a_n \to a$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow a \geq 0$

2) PRESI $a_n \to a$, $b_n \to b$ SE $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO 1

DICIAMO PER ASSURDO $a<0$ OVVERO $-a>0$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO RISULTA CHE SE $a<0$, $\exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lightning$ VISTO CHE $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO 2

CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE AUSILIARIA $\{c_n\}$

$c_n = b_n - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (PER IPOTESI $b_n \geq a_n \rightarrow c_n \geq 0$)

(SE $c_n = 0 \rightarrow b_n = a_n$)

IL LIMITE DI c_n SARÀ $b-a$

PER IL COROLLARIO 1, SE $c_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ALLORA LO SARÀ ANCHE IL SUO LIMITE $b-a \geq 0$

OVVERO $a \leq b$

TEOREMA DEI CARABINIERI

CONSIDERIAMO LE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

t.c. $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

TESI: SE $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow a$ ALLORA $c_n \rightarrow a$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{matrix} a_n \rightarrow a \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \\ b_n \rightarrow a \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \end{matrix} \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \\ \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \text{t.c.} \begin{matrix} |a_n - a| < \varepsilon \\ |b_n - a| < \varepsilon \end{matrix} \quad \forall n > \begin{cases} \nu_1 \\ \nu_2 \end{cases}$$

OVVERO

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$
$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \qquad \forall n > \nu$$

VOGLIAMO CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$

PER IPOTESI

SE $\bar{\nu} = \max(\nu_1, \nu_2)$ ALLORA

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n > \bar{\nu}$$

Esempio $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ con $-1 \le \sin \le 1$

susto $\cdot\ 1/n \to -1/n \le \frac{\sin n}{n} \le 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\to \lim 1/n = \lim -1/n = 0$

$\to \quad 0 \le \lim \frac{\sin n}{n} \le 0 \to \lim \frac{\sin n}{n} = 0$

Teorema del confronto per successioni infinite

Consideriamo $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

risulta che

1) se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$

2) se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$

Dimostrazione 1

Fissato un $M > 0$: $a_n \to +\infty$ se $\exists \bar{\nu}$:

$a_n > M, \forall n > \bar{\nu}$

Per ipotesi $b_n \ge a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ----→

$\forall n > \bar{\nu}, a_n > M \Rightarrow b_n \ge a_n > M$

$\to b_n > M \quad \forall n > \bar{\nu}$

Teorema se $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

esplicito le successioni

- $a_n \to 0 \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}, |a_n - 0| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$
- $|a_n| \to 0 \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N}, ||a_n - 0|| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$

ovvero $|a_n| < \varepsilon$, $||a_n|| < \varepsilon$

$|x| \wedge ||x||$ sono due formule equivalenti

Teorema del prodotto tra una successione limitata ed una successione infinitesima

Tesi se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ è infinitesima

allora $\{a_n \cdot b_n\}$ è infinitesima

continua →

PRODOTTO TRA SUCCESSIONE LIMITATA / SUCCESSIONE INFINITESIMA

↓

È INFINITESIMA

- $\{a_n\}$ È LIMITATA: $\exists M>0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{b_n\}$ È INFINITESIMA: $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : |b_n - 0| < \varepsilon$

(SE SCEGLIAMO $\varepsilon/M \rightarrow |b_n| < \varepsilon/M$)

(TESI)

- $\{a_n \cdot b_n\}$ È INFINITESIMA, OVVERO

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n>\nu, \ |a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$$

RISCRIVO COME

$|a_n| \cdot |b_n|$ VISTO CHE $|a_n| \leq M$

$|a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot b_n$ RONIAMO $< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

VISTO CHE $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

QUINDI ANCHE $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon, \forall n > \bar{\nu}$ (PERCHÈ DEVE VALERE $|b_n| < \varepsilon/M$)

SUCCESSIONI ESTRATTE

SE DI UNA SUCCESSIONE VENGONO PRESI SOLTANTO ALCUNI VALORI, LA SUCCESSIONE CHE NE RISULTA SI CHIAMA ESTRATTA

Es. $\mathbb{N} \ni n \mapsto n \in \mathbb{N}$ ESTRAGGO $\mathbb{N} \ni n \mapsto k_n \in \mathbb{N}$

SUCCESSIONE DI INDICI

- UNA SUCCESSIONE IRREGOLARE PUÒ AVERE COME ESTRATTE DELLE SUCCESSIONI REGOLARI.
- UNA SUCCESSIONE REGOLARE HA COME ESTRATTE DELLE SUCCESSIONI REGOLARI
- DI CONSEGUENZA, SE CI SONO DELLE ESTRATTE DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ CON LIMITI DIVERSI, $\{a_n\}$ NON AMMETTE LIMITI, OVVERO È IRREGOLARE

LIMITI NOTEVOLI

SUCCESSIONE ESPONENZIALE $\{a^n\}$

$\lim a^n =$
- $a^n \to +\infty$ SE $a>1$ (INFINITA)
- $a^n \to 1$ SE $a=1$ (COSTANTE)
- $a^n \to 0$ SE $-1<a<1$ (INFINITESIMA)
- $\nexists$ SE $a<-1$
- $a^n \to 0$ SE $a=0$ (COSTANTE)

- $\lim \sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Rightarrow \lim = 1$ (CON $a>0$) ($1/n \to 0$)
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim \sqrt[n]{n^b} = 1$ CON $b \in \mathbb{R}$

LIMITI NOTEVOLI CON OP. TRIGONOMETRICHE

PRESA UNA $a_n \to 0$:
- $\lim \sin a_n = 0$
- $\lim \sin 1/n = 0$ (VISTO CHE $\sin 0 = 0$)
- $\lim \sin n \ \nexists$ (SUCCESSIONE PERIODICA)

PRESA $a_n \to 0$:
- $\lim \cos a_n = 1$
- $\lim \cos 1/n = 1$
- $\lim \cos n \ \nexists$ (PERIODICA, LIMITATA)

PRESA $a_n \to 0$ CON $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
- $\lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ ("$\frac{0}{0} = 1$")
- $\lim \frac{\cos a_n}{a_n} = +\infty$ ("$\frac{1}{0} = \infty$")
- $\lim \frac{1-\cos a_n}{a_n} = 0$ ("$\frac{1-1}{0} = 0$")

CON 0 INTESO COME INFINIT. PICCOLO (infinitamente piccolo)

SUCCESSIONI MONOTONE

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE, ESSA SI DICE:

- **CRESCENTE** (STRETTAMENTE CRESCENTE): $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n < a_{n+1}$)
- **DECRESCENTE** (STRETTAMENTE DECRESCENTE): $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n > a_{n+1}$)

ESSA È MONOTONA SE SI VERIFICA $\leq, <, \geq, >$ (una di queste)

IN PARTICOLARE, SE ESSA È STRETTAMENTE $>, <$ SI DICE STRETTAMENTE MONOTONA

TEOREMA DI REGOLARITÀ SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

OGNI SUCCESSIONE MONOTONA È REGOLARE

IN PARTICOLARE

- SE È ANCHE LIMITATA, CONVERGE $\Rightarrow a_n \to a$
- SE NON È LIMITATA, DIVERGE $\Rightarrow a_n \to \pm\infty$

DIMOSTRAZIONE 1: $\left\{\begin{array}{l}\text{CRESCENTE} \\ + \\ \text{LIMITATA}\end{array}\right. \to$ CONVERGENTE

$a_n \leq a_{n+1}$, $|a_n| \leq M$

VISTO CHE OGNI a_n È PIÙ PICCOLO DI a_{n+1}, a_0 È IL VALORE PIÙ PICCOLO, OVVERO a_0 È IL LIMITE INFERIORE

VISTO CHE $\exists M \geq a_n$, ALLORA ESISTE ANCHE L'ESTREMO SUPERIORE (PIÙ PICCOLO $M \geq a_n$)

$\to$ PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DI $\sup a_n$

$\sup a_n = L$ SE
- $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{v} \in \mathbb{N} : a_{\bar{v}} > L - \varepsilon$

QUINDI ABBIAMO:

MAGGIORANTE

- $a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$
- VISTO CHE $a_n \leq a_{n+1} \to a_{\bar{v}} \leq a_n \quad \forall n > \bar{v}$
- ALLO STESSO TEMPO $a_{\bar{v}} > L - \varepsilon$

COMBINIAMO LE MAGGIORAZIONI

$$L - \varepsilon < a_{\bar{v}} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$
$$\forall n > \bar{v}$$

QUINDI $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n > \bar{v} \iff$

$\iff -\varepsilon < a_n - L < +\varepsilon \iff$

$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n > \bar{v}$ CHE È LA DEF. DI LIMITE

$\lim \{a_n\} = L$

$\{a_n\}$ CONVERGE AL LIMITE SUPERIORE DI $\{a_n\}$

- LO STESSO RAGIONAMENTO VALE AL CONTRARIO CON $\{a_n\}$ DECRESCENTE, LIMITATA!

DIMOSTRAZIONE 2: CRESCENTE + ILLIMITATA → DIVERGENTE

SIA $\{a_n\}$ CRESCENSE, NON LIMITATA

OVVERO $a_n \leq a_{n+1}$, $\sup a_n = +\infty$

SE UNA SUCCESSIONE È ILLIMITATA SUPERIORMENTE NON AMMETTE MAGGIORANTI → • $\forall K>0, \exists \bar{v} \in \mathbb{N} : a_{\bar{v}} > K$

ALLO STESSO TEMPO • $\forall n > \bar{v}, a_n \geq a_{\bar{v}}$

• QUINDI $a_n \geq a_{\bar{v}} > K$ OVVERO

$$a_n > K \quad \forall n > \bar{v}, \forall K > 0$$

OVVERO CRESCENTE + ILLIMITATA → DIVERGENTE

! • $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[\infty - \infty]$ FORME INDETERMINATE [ ]

! • NUMERO DI NEPERO:

$e = 2.7182\ldots$

DALLA FORMULA $e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

SI POSSONO RICAVARE DIVERSI LIMITI NOTEVOLI:

ALTRI LIMITI NOTEVOLI

• $a_n \to \pm\infty \Rightarrow \lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

CONSIDERANDO SOLO LE PARTI INTERE DI a_n

• $b_n \to 0 \Rightarrow (1+b_n)^{1/b_n} \to e$

CONSIDERANDO $a_n = 1/b_n \to \infty$

$\lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

• $\dfrac{\log_a(1+b_n)}{b_n} \to \log_a e \quad \forall a>0, a \neq 1$

VISTO CHE $\log_a (1+b_n)^{1/b_n} \to \log_a e$

$1/b_n$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{1-\cos a_n}{a_n} = 0$

DOPPIONI DI 5 PAGINE INDIETRO PRESENTI

DIMOSTRATO COSÌ

$$\frac{(1-\cos a_n)\cdot(1+\cos a_n)}{a_n \cdot (1+\cos a_n)} =$$

$$= \frac{1^2 - \cos^2 a_n}{a_n(1+\cos a_n)} \cdot \frac{a_n}{a_n} =$$

$$\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{a_n}{(1+\cos a_n)} =$$

$$\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_n}{1+\cos a_n}\right)$$

$\lim = 1$ $\qquad$ $\lim = 0/2 = 0$

$\lim = 1 \cdot 0 = 0$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = 1/2$

(COME SOPRA MA SENZA $\frac{a_n}{a_n}$, QUINDI IL LIMITE DIVENTA $1 \cdot 1/2$)

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\arcsin a_n}{a_n} = 1$

- $a_n \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\tan a_n}{a_n} = 1$

CRITERIO DI RAPPORTO PER SUCCESSIONI

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE t.c. $\{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

DEFINIAMO $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$:

DICIAMO CHE $b_n \to b < 1$ IMPLICA $a_n \to 0$

PROVIAMO AD APPLICARE SUGLI INFINITI:

ORDINE DEGLI INFINITI

CON $a > 1$, $b > 0$: $\log_a n < n^b < a^n < n! < n^n$

POSSIAMO DIMOSTRARE CON QUESTO CRITERIO CHE

$$\lim \frac{\log a_n}{n^b} = \lim \frac{n^b}{a^n} = \lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

SALTEREMO QUESTA DIMOSTRAZIONE

(SEMPRE CON $a>1, b>0$)

- $\lim \frac{n^b}{a^n} = 0$ CHIAMIAMO $a_n = \frac{n^b}{a^n}$

VEDIAMO SE $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to b<1$

$$b_n = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \Big/ \frac{n^b}{a^n} = \frac{(n+1)^b}{a^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^b} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a}$$

CON $n \to +\infty$, $\frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow 1^b = 1$

$1/a$ (CON $a>1$) È $<1 \to \lim b_n = 1 \cdot x$ CON $x<1 \to$

$\to b_n \to b<1$

QUINDI $a_n = \frac{n^b}{a^n} \to 0$

- $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ CHIAMANDO $a_n = \frac{a^n}{n!}$

STESSA MODALITÀ:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{a^n}} =$$

$$a \cdot n!/n! \cdot (n+1) = a/_{n+1} \to 0 \text{ CON } n \to +\infty$$

$b_n \to b$ CON $b<1 \Rightarrow a_n = a^n/n! \to 0$

- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ $a_n = n!/n^n$

$$b_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = n^n/(n+1)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = 1/\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\text{LIMITE} = e}$$

QUINDI $\lim b_n = \frac{1}{e} < 1$

$a_n = n!/n^n \to 0$

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

ASSEGNATO a_1, $a_{n+1} = f(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

CON f CONTINUA IN $\mathbb{R}$.

Esempi

- $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -a_n/2 - 1/a_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

UN ALTRO MODO PER SCRIVERE UNA SUCCESSIONE RICORSIVA, È IL SEGUENTE:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sqrt{3a_n} & n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

TEOREMA DEL PONTE

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in DX$

x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{def.}{\iff} \qquad 1)$$

$\overset{def.}{\iff} \forall \{x_n\} \subseteq X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in X$, $0 < |x - x_0| < \delta$

$|f(x) - l| < \varepsilon$

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

VISTO CHE $|\ldots| \geq 0$, EQUIVALE A DIRE $x - x_0 \neq 0$ OVVERO $x \neq x_0$

PERCHÈ STIAMO STUDIANDO IL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE QUANDO SI AVVICINA AD UN CERTO PUNTO, SENZA PERÒ MAI TOCCARLO

DIMOSTRAZIONE ✳

*

DIMOSTRAZIONE PER DOPPIA IMPLICAZIONE

① → ② DICIAMO PER ASSURDO ① V, ② F

NEGHIAMO ②: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in X$ t.c.

$$0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

SCELGO $\delta = \frac{1}{n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, QUINDI DEVE ANCHE VALERE $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists x \in X :$

$$0 < \underbrace{|x - x_0|}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0} < \underbrace{\frac{1}{n}}_{0 \text{ PER } n \to +\infty}, |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

QUINDI $x \to x_0$

MA PER ① SAPPIAMO CHE $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to l$

QUINDI CI TROVIAMO CON

$$f(x) \to l \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon \ ↯$$

DI CONSEGUENZA ① → ②

② → ①

PRENDIAMO UN

$$\{x_n\} \subseteq X, \underbrace{x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}}, \underbrace{x_n \to x_0}_{} (f(x_n) \to l)$$

NOTO CHE $0 < |x - x_0|$

INOLTRE x_n TENDE A x_0 SE E SOLO SE

$\forall \varepsilon = \delta > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \ 0 < |x - x_0| < \delta$

MA QUESTE SONO TUTTE CONDIZIONI DEL ②: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_n \in X$

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \to |f(x_n) - l| < \varepsilon \ \forall n > \nu$$

MA QUESTO → È COME DIRE

$$f(x_n) \to l \text{ o } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

QUINDI SE VALGONO TUTTE LE CONDIZIONI PER ② VALE $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$

OVVERO ② → ①

Mi sono accorta all'ultimo che mancava. Non ce l'ho fatta a rifare tutto da capo, sorry, l'ho buttata lì :/

QUESTO VALE ANCHE SE IL LIMITE È $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty} \overset{def.}{\iff}$$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \underset{(-\infty)}{+\infty}$
- $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ f(x) > M$ $\quad (f(x) < -M)$

VISTO CHE ANCHE $\pm\infty$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{R}$, SE X È ILLIMITATO SUPERIORMENTE SI PUÒ CALCOLARE IL LIMITE PER $x \to +\infty$ (INFERIORMENTE) $(x \to -\infty)$

LIMITI DI FUNZIONE CON X CHE TENDE A $\pm\infty$

PRESI $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X illimitato sup., $f: X \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \overset{def.}{\iff}$$

(IN TEORIA MANCA $+\infty$ E ΔX, MA ∞ LO È DI DEFAULT)

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to \ell$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0 : \forall x \in X,\ x > r,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

RAGGIO DELL'INTORNO

SCRITTURA ALTERNATIVA

$$\forall x \in \left]r, +\infty\right[\cap X$$

IN QUESTO CASO, IL LIMITE DI $f(x_n)$ ERA FINITO, MA PUÒ ANCHE ESSERE $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \overset{def.}{\iff} \pm\infty$$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to \underset{(-\infty)}{+\infty}$
- $\forall M > 0\ \exists r > 0 : \forall x \in X^{x > r}\ f(x) > M$ $\quad (< -M)$

LA STESSA COSA PUÒ ESSERE FATTA CON X illimitato inf. ED $x \to -\infty$

QUANDO STUDIAMO I LIMITI, CONSIDERIAMO SEMPRE L'INTORNO DI x_0. SI POSSONO PERÒ VERIFICARE DELLE CONDIZIONI IN CUI GLI INTORNI DESTRI E SINISTRI SI COMPORTANO DIVERSAMENTE. QUINDI CONVIENE STUDIARE I LIMITI DEGLI INTORNI SEPARATAMENTE:

$$x \in \left]x_0-\delta,\ x_0+\delta\right[$$

$$I^-_\delta(x_0) \qquad\qquad I^+_\delta(x_0)$$

$$\left]x_0-\delta,\ x_0\right] \cup \left[x_0,\ x_0+\delta\right[$$

SE I DUE LIMITI OTTENUTI SONO DIVERSI,

$$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

! QUANDO DICIAMO $\lim f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

INTENDIAMO CHE l PUÒ ESSERE ANCHE $\pm\infty$

$$- \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \overset{def.}{\iff}$$

LIMITI DI INTORNI

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n > x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad x_0 < x < x_0+\delta$

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$

$$- \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff$$

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n < x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \to l$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \quad x_0-\delta < x < x_0$

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$

--> SIANO $X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset,\ f: X \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \Delta X$

RISULTA CHE

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$:

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n > x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \pm\infty$
- $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ x_0 < x < x_0 + \delta,\ f(x) > M$ $(f(x) < -M)$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$:

- $\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n < x_0\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to \pm\infty$
- $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ x_0 - \delta < x < x_0,\ f(x) > +M$ $(f(x < -M)$

Limiti per funzioni elementari

$f(x) = a^x$:

$0 < a < 1$	$a > 1$	$a < 0$
• $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	• $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$	Non ammette limite
• $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$	• $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$a = 1$ $\lim = 1$
		$a = 0$ $\lim = 0$

$f(x) = \log_a x$

$0 < a < 1$	$a > 1$
• $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$	• $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
• $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$	• $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

! PER I LIMITI DI FUNZIONE VALGONO LE FORME DETERMINATE/INDETERMINATE DELLE SUCCESSIONI

Limiti per funzioni composte

PRESI $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$

t.c. $f(X) \subseteq Y$, $x_0 \in DX$, ← (x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER X)

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

DICIAMO CHE $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

INFINITI ED INFINITESIMI

$X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, f: X \to \mathbb{R}, x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} x_0 = +\infty : X \text{ ILLIMITATA SUP.} \\ x_0 = -\infty : X \text{ --- INF.} \end{cases}$$

f È INFINITESIMA AL TENDERE DI X AD X_0

$\overset{def.}{\iff} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$:

SE PRENDIAMO DUE FUNZIONI $f, g: X \to \mathbb{R}$ INFINITESIME,

DIREMO CHE:

1) f, g SONO INFINITESIME DELLO STESSO ORDINE $\overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) f È INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g $\overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$

3) f È INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g $\overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \pm\infty$

4) f E g SONO INFINITESIME NON CONFRONTABILI $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

"FUNZIONI SUPPOSTE INFINITE" cit. Annamaria Barbagallo

---

f È INFINITA AL TENDERE DI X AD X_0

$\overset{def.}{\iff} \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

SE PRENDIAMO DUE FUNZIONI f, g INFINITE,

DIREMO CHE:

1) f E g SONO INFINITE DELLO STESSO ORDINE $\overset{def.}{\iff} \exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) f È INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A g $\overset{def.}{\iff}$ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

3) f È INFINITO DI ORDINE INFERIORE A g $\overset{def.}{\iff}$ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4) f E g SONO INFINITE NON CONFRONTABILI $\overset{def.}{\iff}$ $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$

$f_1, f_2, \dots f_n$ FUNZIONI INFINITESIME PER $x \to x_0$

$g_1, g_2, \dots g_n$

SE
- $f_2, f_3 \dots f_n$ SONO INFINITESIME DI ORDINE SUPERIORE A f_1
- $g_2, g_3 \dots g_n$ SONO INFINITESIME DI ORDINE SUPERIORE A g_1

ALLORA RISULTA CHE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \dots g_n(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

DIMOSTRAZIONE

SE METTESSIMO $f_1(x)$ IN EVIDENZA, OTTERREMMO

$$f_1(x) \cdot \left(1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)} + \frac{f_3(x)}{f_1(x)} + \text{acc.}\right)$$

NOTIAMO CHE $(f_{2,3\dots n})$ $\underbrace{f_n(x)/f_1(x)}_{0}$ HA SEMPRE IL GRADO MASSIMO AL NUMERATORE

QUINDI AVREMMO $f_1(x) \cdot (1 + 0 + 0 + \text{acc.})$

STESSA COSA AL DENOMINATORE $(g) \to \frac{f_1(x) \cdot 1}{g_1(x) \cdot 1}$

LO STESSO PRINCIPIO SI APPLICA AGLI INFINITI, CON L'UNICA ECCEZIONE CHE $f_2, f_3 \dots f_n$ E $g_2, g_3 \dots g_n$ SONO INFINITI DI ORDINE INFERIORE A f_1, g_1

FUNZIONI CONTINUE

PRESI $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

f SI DICE CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \iff$

$\overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

OVVERO

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

DISTINGUO DUE CASI

DOVE
- $x_0 \in DX$
- $x_0 \notin DX$

SCRITTO IN MODO FORMALE

- $x_0 \in X \cap DX \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $x_0 \in X \setminus DX \to x$ È UN PUNTO ISOLATO:

$\exists \bar{\delta} > 0$ t.c. $]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[\cap X = \{x_0\}$

QUINDI SE SCELGO L'INTERVALLO $]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[$

NELLA FORMULA DI CONTINUITÀ:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar{\delta}>0 \quad \forall x \in X \cap]x_0-\bar{\delta}, x_0+\bar{\delta}[$$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

L'UNICO X IN QUESTO INTERVALLO È X_0

$$|f(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon \rightarrow \quad 0<\varepsilon$$

OVVERO, <u>UNA FUNZIONE È SEMPRE CONTINUA NEI PUNTI ISOLATI</u>

SE f È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI X
f SI DICE CONTINUA IN X

ADESSO VEDIAMO QUANDO f NON È CONTINUA

<u>CASI SENZA CONTINUITÀ</u> PER $x \in X \cap DX$

LE CONDIZIONI PER LA CONTINUITÀ SONO:

1) $\exists f(x_0)$; PER $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ - - - - - - - -

3) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

SE UNA DELLE 3 <u>NON</u> È SODDISFATTA, ABBIAMO UN PUNTO DI NON CONTINUITÀ.

CI SONO 3 TIPI DI DISCONTINUITÀ:

1) x_0 È PUNTO DI DISCONTINUITÀ (P.D.D.) DI <u>PRIMA SPECIE</u> $\Longleftrightarrow$

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ LIMITI FINITI

MA I LIMITI SONO DIVERSI ($\neq$)

LA DISTANZA IN VALORE ASSOLUTO DEI LIMITI OVVERO LA LORO DIFFERENZA, SI DICE: $S = |\lim 1 - \lim 2|$ (valore assoluto) ; SALTO DI DISCONTINUITÀ

2) x_0 È P.D.D. DI <u>SECONDA SPECIE</u> $\mapsto$

$\overset{def.}{\longleftrightarrow}$ ALMENO UNO DEI DUE LIMITI $\nexists$

È INFINITO, OVVERO

$$\lim_{x \to x_0^{+(-)}} f(x) = \pm\infty$$

(POSSONO ANCHE CAPITARE SITUAZIONI IN CUI x_0 È PUNTO DI DISCONTINUITÀ SIA PER $x \to x_0^+$ CHE PER $x \to x_0^-$)

3) x_0 È P.D.D. DI <u>TERZA SPECIE</u> (O ELIMINABILE)

$\overset{def.}{\longleftrightarrow}$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 1

- $\lim 1° = \lim 2° \neq f(x_0)$
- $\nexists\, f(x_0)$ SI DICE ANCHE ELIMINABILE PERCHÉ SI PUÒ DEFINIRE UNA FUNZIONE $\tilde{f}(x)$ UGUALE ALLA PRIMA, TRANNE CHE NEL PUNTO $f(x_0)$ CHE VIENE SOSTITUITO CON UN VALORE ACCETTABILE, ELIMINANDO COSÌ LA DISCONTINUITÀ

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO PER FUNZIONI CONTINUE

PRESI $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$, $f: X \to \mathbb{R}$

$f(x_0) > 0$ CON f CONTINUA IN x_0,

$$\exists \delta : f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

DIMOSTRAZIONE

PRENDO COME ε, $\frac{f(x_0)}{2} > 0$

PER LA DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ:

$$\exists \bar{\delta} > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \cap]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

SVOLGO I CALCOLI

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) \text{ COMPRESO FRA DUE VALORI POSITIVI} \to f(x) \text{ SEMPRE POSITIVO}$$

TEOREMA DEGLI ZERI

(ANCHE TEOREMA DELL'$\exists$NZA DEGLI ZERI)

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ FUNZIONE CONTINUA

CHIUSO E LIMITATO

SE $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\left(f(a) < 0 \text{ XOR } f(b) < 0 \right)$

OVVERO HANNO SEGNO OPPOSTO

$\exists x_0 \in]a,b[$ t.c. $f(x_0) = 0$

È UNA TECNICA USATA PER OTTENERE IL VALORE APPROSSIMATO DI UNO ZERO DI $f(x)$ QUANDO LE TECNICHE CONVENZIONALI SONO POCO EFFICACI O INUTILIZZABILI

Es. $f: x^3 + x - 1 = 0$ PER QUALI x?

OSSERVO CHE PER
- $x_1 = 0$, $f(x_1) < 0$ (-1)
- $x_2 = 1$, $f(x_2) > 0$ $(+1)$

$\downarrow$ $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

QUINDI PER $x \in]0,1[$

$\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = 0$

PER OTTENERE UN APPROSSIMAZIONE SEMPRE PIÙ ACCURATA, POSSIAMO RIDURRE L'INTERVALLO CON LA TECNICA DELLA

BISEZIONE DELL'INTERVALLO

QUINDI DA $[0,1] \to [0, \frac{1}{2}]$; $[\frac{1}{2}, 1]$

SE IN 0 $f(x) < 0$ E IN 1 $f(x) > 0$

SE:
- $f(\frac{1}{2}) > 0$, CONSIDERO $[0, \frac{1}{2}]$
- $f(\frac{1}{2}) < 0$, CONSIDERO $[\frac{1}{2}, 1]$

PIÙ VIENE RIPETUTA LA BISEZIONE, PIÙ ACCURATA SARÀ L'APPROSSIMAZIONE

(DIMOSTRAZIONE E INFORMAZIONI DETTAGLIATE SULL'UTILIZZO IN SEGUITO (5 PAGINE $\to$))

I TEOREMA DI $\exists$ NZA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
(CHIUSO E LIMITATO)

f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $f(a), f(b)$

<u>DIMOSTRAZIONE</u> (PER $f(a)<f(b)$)

TESI

$$\forall y\in[f(a),f(b)]\ \exists x\in[a,b]: y=f(x)$$

DISTINGUO TRE CASI:

1) $y=f(a)\to x=a$
2) $y=f(b)\to x=b$

} CASI BASILARI

3) $f(a)<y<f(b)$

PER DIMOSTRARE IL 3° CASO, COSTRUISCO UNA FUNZIONE AUSILIARIA $h(x)=f(x)-y:[a,b]\to\mathbb{R}$

CALCOLO I VALORI $\begin{cases} h(a)=f(a)-y \\ h(b)=f(b)-y \end{cases}$

VISTO CHE $y\in\,]f(a),f(b)[$ ALLORA

$$f(a)<y<f(b)$$

QUINDI

$$f(a)-y<0\ ,\quad f(b)-y>0$$

VISTO CHE $h(a)$ ED $h(b)$ HANNO SEGNO OPPOSTO, PER IL TEOREMA DEGLI ZERI:

$$\exists\,\bar{x}\in\,]a,b[\ :\ h(\bar{x})=0$$

$$h(\bar{x})=f(\bar{x})-y=0 \implies y=f(\bar{x})$$

QUINDI CON $\bar{x}\in\,]a,b[$, VALE LA TESI, OVVERO:

$$\forall y\in\,]f(a),f(b)[\ ,\ \exists x\in[a,b]: y=f(x)$$

! POTREBBERO ESSERCI DEI CASI IN CUI $\exists x\in[a,b]$: $f(x)\notin\,]f(a),f(b)[$, OVVERO <u>NON VALE</u> IL CONTRA (contrario)

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
(CHIUSO, LIMITATO)

$$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\min f[a,b] \qquad \max f[a,b]$$

QUINDI x_1 È IL PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO
x_2 È IL PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO

OSSERVAZIONI

1) INSIEME NON CHIUSO, LIMITATO: $[a,b[$

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ IN $]0,1]$

$\min = 1 \left(\frac{1}{1}\right)$ $\max \nexists \left(\frac{1}{0^+}\right)$

$\downarrow$

ESISTE SOLO IL $\sup \frac{1}{x} = +\infty$

2) INSIEME CHIUSO NON LIMITATO $[a,+\infty[$

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ IN $[1,+\infty[$

$\max = 1 \left(\frac{1}{1}\right)$ $\min \nexists \left(\frac{1}{+\infty}\right)$

$\downarrow$

ESISTE SOLO IL $\inf \frac{1}{x} = 0$

3) INSIEME CHIUSO LIMITATO, f NON CONTINUA IN $[a,b]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \{0\} \end{cases}$$

$\max = 1 \left(1^2 \,;\, -1^2\right)$ $\min \nexists \left((0^+)^2\right)$

$\downarrow$

ESISTE SOLO $\inf = 0$

QUINDI ABBIAMO VISTO CHE SE ANCHE UNA DELLE 3 CONDIZIONI NON È VERIFICATA, IL TEOREMA DI WEIERSTRASS FALLISCE

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEGLI ZERI

RICORDIAMOCI LA FORMULA:

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

ED $f(a)\cdot f(b) < 0$, $\exists\, x_0 \in \,]a,b[\, : f(x_0) = 0$

SUPPONGO $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (PER CONVENZIONE)

APPLICO LA BISEZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$ TRAMITE IL PUNTO $c = \dfrac{a+b}{2}$

OTTENGO GLI INTERVALLI $[a,c]$, $[c,b]$

IL VALORE DI $f(c)$ PUÒ ESSERE:

- $f(c) = 0 \to$ JACKPOT, c È LO ZERO DI $f: [a,b]$
- $f(c) > 0 \to f(c)\cdot f(a) < 0 \to$ SCELGO $[a,c]$
- $f(c) < 0 \to f(c)\cdot f(b) < 0 \to$ SCELGO $[c,b]$

DEFINISCO UN NUOVO INTERVALLO $[a_1, b_1]$ T.C. $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, QUINDI DISTINGUO I CASI

- $f(c) > 0 \to \begin{matrix} a_1 = a \\ b_1 = c \end{matrix}$; $f(c) < 0 \to \begin{matrix} a_1 = c \\ b_1 = b \end{matrix}$

CONSIDERIAMO ADESSO L'INTERVALLO $[a_1, b_1]$

L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO È DIMEZZATA,

OVVERO $\text{Amp.}[a_1,b_1] = b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$

RIPETO LA BISEZIONE CON IL PUNTO $c_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$

OTTENGO $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$

DISTINGUO I CASI:

$$f(c_1): \begin{cases} = 0 \to c_1 \text{ È LO ZERO CHE STIAMO CERCANDO} \\ > 0 \to \text{SCELGO } [a_1, c_1] \to a_2 = a_1 ; b_2 = c_1 \\ < 0 \to \text{SCELGO } [c_1, b_1] \to a_2 = c_1 ; b_2 = b_1 \end{cases}$$

OTTENGO L'INTERVALLO $[a_2, b_2]$ CON

$$\text{Amp.}[a_2,b_2] = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$$

TUTTI GLI INTERVALLI OTTENUTI IN QUESTO MODO

- HANNO AMPIEZZA DIMEZZATA
- HANNO ESTREMI DI SEGNO OPPOSTO
- HANNO f CONTINUA IN LORO, VISTO CHE SONO SOTTOINSIEMI DI INTERVALLI CON f CONTINUA

QUINDI POSSIAMO GENERALIZZARE LA FORMULA:

PRENDIAMO L'INTERVALLO $[a_{n-1}, b_{n-1}]$

CON $f(a_{n-1}) < 0$, $f(b_{n-1}) > 0$

LA SUA AMPIEZZA SARÀ: $Amp.[\dots,\dots] = \frac{b-a}{2^{n-1}} \left(= b_{n-1} - a_{n-1}\right)$

CALCOLO $c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

CONSIDERO I CASI

$$f(c_{n-1}) \begin{cases} = 0 \rightarrow c_{n-1} \text{ È UNO ZERO DI } f:[a,b] \\ > 0 \rightarrow \text{SCELGO } [a_{n-1}, c_{n-1}] \quad a_n = a_{n-1},\ b_n = c_{n-1} \\ < 0 \rightarrow \text{SCELGO } [c_{n-1}, b_{n-1}] \quad a_n = c_{n-1},\ b_n = b_{n-1} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ OTTENGO $[a_n, b_n]$

DOVE $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

$Amp.[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

VISTO CHE POSSO RIPETERE LA PROCEDURA ∞ VOLTE, ABBIAMO OTTENUTO 2 SUCCESSIONI: $\{a_n\}, \{b_n\}$ $n \to +\infty$

POSSIAMO NOTARE CHE

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} \rightarrow \text{VALORE RESTA} = \\ c_{n-1} \rightarrow \text{VISTO CHE } c_{n-1} > a_{n-1}, \text{ IL VALORE AUMENTA} \end{cases}$$

- $a_n \geq a_{n-1}$

RAGIONAMENTO OPPOSTO PER $\{b_n\}$

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} \rightarrow \text{VALORE} = \\ c_{n-1} \rightarrow \text{VALORE DIMINUISCE} \end{cases}$$

- $b_n \leq b_{n-1}$

QUINDI ABBIAMO: $\begin{cases} \{a_n\} \text{ MONOTONA CRESCENTE} \\ \{b_n\} \text{ MONOTONA DECRESCENTE} \end{cases}$

ENTRAMBE LIMITATE IN $[a,b]$

$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (PER DEFINIZIONE)

PER IL TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE, $\{a_n\}, \{b_n\}$ HANNO UN LIMITE FINITO CHE, PER COME HO DEFINITO a_n, b_n, DEVE APPARTENERE AD $]a,b[$

ABBIAMO VISTO PRIMA CHE

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

DICIAMO CHE $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{x}$ E $\frac{b-a}{2^n} \to 0$

QUINDI IL LIMITE DI $b_n = \bar{x} + 0 = \bar{x}$ PER $n \to +\infty$

VISTO CHE $\cdot\, f(a_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\cdot\, f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$$\underline{\lim f(a_n) \leq 0} \quad \wedge \quad \underline{\lim f(b_n) \geq 0}$$

QUESTO PERCHÉ SE $\lim f(a_n) > 0$

$\exists \nu \in \mathbb{N} : f(a_n) > 0 \quad \forall n > \nu$ ↯

(RAGIONAMENTO ANALOGO PER $\lim f(b_n) < 0$)

POSSIAMO ADESSO APPLICARE IL TEOREMA DEL PONTE SU $f: X \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN x_0 CON $x_0 \in X \cap \partial X$:

$$\forall \{x_n\} \subseteq X,\ x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0)$$

SE CONSIDERIAMO X COME $[a,b]$ E $\{x_n\}$ COME $\{a_n\}, \{b_n\}$ TROVIAMO CHE

VISTO CHE $\cdot \lim a_n = \bar{x}$ E $\cdot \lim b_n = \bar{x}$,

ALLORA $\cdot \lim f(a_n) = f(\bar{x})$ E $\cdot \lim f(b_n) = f(\bar{x})$

MA PRIMA ABBIAMO DETTO CHE PER LA PERMANENZA DEL SEGNO $\cdot \lim f(a_n) \leq 0$
$\cdot \lim f(b_n) \geq 0$

QUINDI $f(\bar{x}) \geq 0 \wedge f(\bar{x}) \leq 0$

OVVERO $f(\bar{x}) = 0$

QUINDI IL LIMITE DELLE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$ È LO ZERO DI f IN $[a,b]$

! RICORDA CHE POTREBBERO ESSERCI ALTRI ZERI DI f. QUELLO TROVATO CON QUESTA PROCEDURA, POTREBBE NON ESSERE L'UNICO

II TEOREMA DI ∃NZA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
(CHIUSO, LIMITATO)

f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MASSIMO E IL SUO MINIMO

DIMOSTRAZIONE

VISTO CHE f È CONTINUA IN $[a,b]$, POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

$\to \exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$

VOGLIAMO FAR VEDERE CHE: (TESI)

$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \quad \exists x \in [a,b] : y = f(x)$

DISTINGUO 3 CASI:

1) $y = f(x_1) \Rightarrow x = x_1$

2) $y = f(x_2) \Rightarrow x = x_2$

3) $f(x_1) < y < f(x_2)$

CONSIDERO LA FUNZIONE AUSILIARIA h:

$h(x) = f(x) - y : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

SUPPONGO $x_1 < x_2$ PER CONVENZIONE

CONSIDERO L'INTERVALLO $I = [x_1, x_2]$

RESTRINGO h AD I → FUNZIONE ANCORA CONTINUA

$h|_I \to h : I \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN I

VISTO CHE $f(x_1) < y < f(x_2)$

- $h(x_1) = f(x_1) - y < 0$
- $h(x_2) = f(x_2) - y > 0$

QUINDI VISTO CHE HANNO SEGNO OPPOSTO,

$\exists x_0 \in \mathring{I} : h(x_0) = 0$ (TEOREMA DEGLI ZERI)

$\to h(x_0) = f(x_0) - y = 0 \Rightarrow f(x_0) = y$

$\to \exists x \in [a,b] : y = f(x)$ VISTO CHE x_0 È COMPRESO FRA x_1, x_2

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E STRETTAMENTE MONOTONA (CRESCENTE PER QUESTO ESEMPIO)

f È INVERTIBILE IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE (INIETTIVA + SURIETTIVA)

(INIETTIVITÀ)

PRENDO $x_1, x_2 \in [a,b]$ CON $x_1 \neq x_2$

NE SEGUE $x_1 > x_2 \vee x_1 < x_2$

VISTO CHE f È STRETT. CRESCENTE: $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

OVVERO $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

$\to f$ È INIETTIVA

(SURIETTIVITÀ)

PER IL PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$$f(a) < f(x) < f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

VISTO CHE È STRETTAMENTE CRESCENTE

$\to f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ È SURIETTIVA

TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE MONOTONA

$\forall x_0 \in]a,b[$ ESISTONO I SEGUENTI LIMITI FINITI:

$$\cdot \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \cdot \lim_{x\to b^-} f(x) \quad \cdot \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \cdot \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

INOLTRE f: O È CONTINUA IN $[a,b]$, O PRESENTA PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE AGLI ESTREMI E/O 1° SPECIE NEI PUNTI INTERNI

INOLTRE VALE:

CRITERIO DI CONTINUITÀ PER FUNZIONI MONOTONE

$$f \text{ È CONTINUA IN } [a,b] \longleftrightarrow \operatorname{Im} f = I(f(a), f(b))$$

DIMOSTRAZIONE →

! LA SCRITTURA $I(x,y)$ CON PARENTESI TONDE INDICA UN INTERVALLO DI ESTREMI x, y DI CUI NON SI SA CHI SIA L'ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

($\rightarrow$) VISTO CHE f È MONOTONA

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

INOLTRE PER IL TEOREMA DELL'$\exists$NZA DEI VALORI INTERMEDI (II) f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MASSIMO E IL SUO MINIMO

$$\rightarrow \operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$$

($\leftarrow$) PARTIAMO ADESSO DAL PRESUPPOSTO CHE

$$\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$$

SE f NON FOSSE CONTINUA, PER IL TEOREMA SUI LIMITI DELLE FUNZIONI MONOTONE, DOVREBBE AVERE DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ:

- DI PRIMA SPECIE IN $x_0 \in]a,b[$
- DI TERZA SPECIE IN a O b (a OPPURE b)

DIMOSTRIAMO CHE QUESTE DISCONTINUITÀ NON POSSONO PRESENTARSI: • $x_0 = a$ • $x_0 = b$ • $x_0 \in]a,b[$

- $x_0 = a$ DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE

VISTO CHE $f(a)$ ESISTE, PER OTTENERE UN P.D.D. DI 3° SPECIE, DOVREBBE ACCADERE CHE

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

MA QUESTO IMPLICHEREBBE L'ESISTENZA DI UN INTERVALLO $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[\subseteq [f(a), f(b)]$

IN CUI NON CI SONO IMMAGINI DI f, OVVERO $y \in [f(a), f(b)] \wedge y \notin \operatorname{Im} f$, CHE È IN NETTA CONTRAPPOSIZIONE CON L'IPOTESI $\lightning$

- $x_0 = b$ STESSA PROCEDURA, QUESTA VOLTA CON L'INTERVALLO $]\lim_{x \to b^-} f(x), f(b)[$ $\lightning$

- $x_0 \in]a,b[$ DISCONTINUITÀ DI 1° SPECIE

OVVERO I LIMITI PER $x \to x_0^-$ E $x \to x_0^+$ ESISTONO, MA SONO DIVERSI. IN QUESTO CASO AVREMMO UN INTERVALLO $]\lim_{x \to x_0^-} f(x), \lim_{x \to x_0^+} f(x)[$ IN CUI NON CI SONO IMMAGINI DI f $\lightning$ $\rightarrow$ NO PUNTI DI DISC. $\rightarrow$ f È CONTINUA

CRITERIO DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA

f CONTINUA IN $[a,b] \Leftrightarrow f^{-1}$ CONTINUA IN $[f(a),f(b)]$

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $f:[a,b]\to\underbrace{[f(a),f(b)]}_{\mathrm{Im}\, f}$

RICAVIAMO:

$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to\underbrace{[a,b]}_{\mathrm{Im}\, f^{-1}}$

f È STRETTAMENTE 'CRESCENTE' (PER 'CONVENZIONE')

$\to \forall x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$

VOGLIAMO VERIFICARE SE ANCHE f^{-1} È STRETT. CRESC.

OVVERO: $\forall\, y_1,y_2\in[f(a),f(b)],\ y_1<y_2 \to f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

SE PER ASSURDO DICIAMO:

$y_1<y_2 \to f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$ OTTERREMO CHE

$x_1>x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) = y_1>y_2$ ↯

(VISTO CHE f È STRETTAMENTE CRESCENTE)

DI CONSEGUENZA, PER IL PRIMO TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, f^{-1} ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA $f^{-1}(f(a))$ E $f^{-1}(f(b))$ CHE SONO ANCHE IL SUO MINIMO E MASSIMO, QUINDI f^{-1} È CONTINUA

DERIVATE

SIA $X\subseteq\mathbb{R},\ X\neq\emptyset,\ x_0\in X\cap DX,\ f:X\to\mathbb{R}$

DEFINIAMO: RAPPORTO INCREMENTALE ALLA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

CON $h\in I(0)\setminus\{0\}$ CHIAMATO INCREMENTO (VALORE MOLTO PICCOLO MA $\neq$ DA ZERO)

PER LA DEFINIZIONE DI PUNTO DI ACCUMULAZIONE, VISTO CHE h È UN VALORE MOLTO PICCOLO, POSSIAMO DIRE CHE $x_0+h\in X$

CONTINUA

SE $\exists$ IL LIMITE FINITO:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DIREMO CHE f È <u>DERIVABILE</u> NEL PUNTO x_0

IL VALORE DI QUESTO LIMITE VIENE CHIAMATO <u>DERIVATA</u> DI f IN x_0 E SI PUÒ INDICARE COSÌ:

$$f'(x_0) \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad Df(x_0)$$

(A VOLTE SI TROVERÀ $y(x_0)$ AL POSTO DI $f(x_0)$)

PRESO UN $X=[a,b]$, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN (TUTTO) X SE:

- f È DERIVABILE IN a:

$$\exists f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f È DERIVABILE IN b: $\exists f'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

- f È DERIVABILE IN x_0: $\exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$
  $\forall x_0 \in \mathring{X}$
  (INTERNO DI X)

SE X INVECE È UN INTERVALLO APERTO, VALE SOLTANTO IL TERZO PUNTO, OVVERO f È DERIVABILE IN X SE È DERIVABILE IN OGNI SUO PUNTO

DERIVATA DI UNA <u>FUNZIONE COSTANTE</u>

PRESI $f(x)=c \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R},\ h \in I(0)\setminus\{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0/h \to 0$$

PER $h \to 0$

$$\to D[c]_{(x_0)} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

QUINDI, OGNI FUNZIONE COSTANTE È DERIVABILE E LA SUA DERIVATA VALE SEMPRE 0

<u>FUNZIONE LINEARE AFFINE</u>

$f(x) = ax+b,\ a,b \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R},\ h \in I(0)\setminus\{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{[a\cdot(x_0+h)+b]-(ax_0+b)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{ax_0}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax_0}-\cancel{b}}{h} = \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a \to a$$

PER $h \to 0$

QUINDI LA FUNZIONE LINEARE AFFINE È SEMPRE DERIVABILE E LA SUA DERIVATA VALE a:

$$D[ax+b]_{(x_0)} = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

PROPOSIZIONE

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$

TESI: f È DERIVABILE IN $x_0 \to f$ È CONTINUA IN x_0

CONSIDERO $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ABBIAMO DETTO IN PRECEDENZA CHE $x_0+h \in X$
QUINDI QUEL VALORE È UN $x \in X$

$\to x = x_0 + h \to h = x - x_0$ ← SE $x \to x_0$ ALLORA $h \to 0$

POSSO ALLORA APPLICARE DELLE SOSTITUZIONI:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$$

LA DERIVATA QUINDI DIVENTERÀ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ALTRO MODO PER SCRIVERE UNA DERIVATA

VERIFICHIAMO ORA LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE f IN x_0: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

ADESSO RISCRIVO $f(x)$ IN DIVERSE FORME EQUIVALENTI:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0)$$

IL LIMITE DI QUESTE TRE FORME È LO STESSO:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{0} + \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} = \underline{\underline{f(x_0)}}$$

QUINDI f È CONTINUA IN x_0

COME COROLLARIO ABBIAMO CHE

f NON CONTINUA IN $x_0 \to f$ NON DERIVABILE IN x_0

!! UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO, NON È NECESSARIAMENTE DERIVABILE, COME NEL CASO DI $x_0 = 0$ IN $f(x) = |x|$

DIMOSTR.

SIA $x_0 = 0$ IN $f(x) = |x|$ CHE È CONTINUA IN TUTTO $\mathbb{R}$

CALCOLO DERIVATA DESTRA E SINISTRA

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = 1$$

$\neq$

QUINDI $f(x)$ CONTINUA, MA NON DERIVABILE IN 0

DERIVATE SUCCESSIVE

$X \subseteq \mathbb{R}$, X APERTO, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN X

DEFINISCO $f': x \in X \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$

SE f' È A SUA VOLTA DERIVABILE IN UN $x_0 \in X$, DIREMO CHE f È DERIVABILE 2 VOLTE IN x_0 E CHIAMEREMO DERIVATA SECONDA DI f IN x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

E LA INDICHIAMO NEI SEGUENTI MODI:

$f''(x_0)$	$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$	$D^2 f(x_0)$

OPPURE CON $y(x_0)$ AL POSTO DI $f(x_0)$

QUESTO PROCESSO POTREBBE POTERSI RIPETERE PIÙ VOLTE: DIREMO ALLORA CHE f È DERIVABILE IN $x_0 \in X$ <u>n VOLTE</u> ED INDICHEREMO LA DERIVATA n-ESIMA COME $f^{(n)}_{(x_0)}$. SE POI f È DERIVABILE n VOLTE IN TUTTI I PUNTI DI X, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN X n VOLTE:

$$f^{(n)}: X \to \mathbb{R}$$

! PER VALORI PICCOLI DI n USIAMO I CARATTERI ROMANI: f', f'', f^{V}, PERÒ ENTRAMBE LE SCRITTURE SONO CORRETTE: $f'' = f^{(2)}$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

$X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$,

$f: X \to \mathbb{R} \wedge g: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILI IN x_0

RISULTA CHE:

1) $f+g$ DERIVABILE IN x_0:

$$D[f+g](x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f-g$ DERIVABILE IN x_0:

$$D[f-g](x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

3) $f \cdot g$ DERIVABILE IN x_0:

$$D[f \cdot g](x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

4) f/g DERIVABILE IN x_0: (CON $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$)

$$D[f/g](x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x))^2}$$

DIMOSTRAZIONE SOMMA

(IPOTESI) **HP.** $\exists$ FINITI $f'(x_0)$, $g'(x_0)$

TESI $\exists$ FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$

CALCOLO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

RIASSOCIO

E SPEZZO LA FRAZIONE:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{\text{TENDE A}} \cdots$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

DIMOSTRAZIONE DIFFERENZA

SI DIMOSTRA IN MANIERA COMPLETAMENTE ANALOGA, CONSIDERANDO $f-g$ AL POSTO DI $f+g$

DIMOSTRAZIONE PRODOTTO

HP. $\exists$ FINITI $f'(x_0)$, $g'(x_0)$

TESI $\exists$ FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} =$

$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

- SOTTRAGGO E AGGIUNGO $f(x_0) \cdot g(x_0+h)$
- DOPODICHÉ, RIASSOCIO, SPEZZO LA FRAZIONE E
- METTO IN EVIDENZA $g(x_0+h)$ E $f(x_0)$ IN QUESTO MODO

$$g(x_0+h) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

PER h CHE TENDE A 0 I LIMITI SONO: $g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

QUINDI VALE LA TESI: $D[f \cdot g]_{(x_0)} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE RAPPORTO

HP $\exists$ FINITI $f'(x_0)$, $g'(x_0) \wedge g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$

TESI $\exists$ FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{(f/g)(x_0+h) - (f/g)(x_0)}{h} =$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

CALCOLO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f/g}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{1}{h}$$

QUESTA EQUAZIONE IN FORMA $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{h}$ LA POSSO RISCRIVERE NELLA FORMA EQUIVALENTE $\frac{a}{h} \cdot \frac{1}{b}$ OTTENENDO:

$$\frac{1}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{h}$$

SOTTRAGGO E AGGIUNGO $f(x_0) \cdot g(x_0)$

ADESSO RIASSOLVO, SPEZZO LA FRAZIONE E METTO IN EVIDENZA $g(x_0)$ E $f(x_0)$ OTTENENDO:

$$\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}\cdot\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

IL LIMITE CON $h \to 0$ È: $\frac{1}{(g(x_0))^2}\cdot\left(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)\right)$

OVVERO $$\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

! PICCOLO BONUS:

LA DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE COSTANTE c E UNA FUNZIONE f DERIVABILE IN x È SEMPRE $c\cdot f'(x)$

$$D[c\cdot f]_{(x)} = c\cdot f'(x)$$

FORMALIZZATO COSÌ

TEOREMA DI DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

SIANO $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $\quad X, Y \neq \emptyset$

$f: X \to \mathbb{R} \wedge g: Y \to \mathbb{R}$ t.c. $f(X) \subseteq Y$

PRESI I PUNTI $x_0 \in X \cap DX \wedge y_0 \in Y \cap DY$, $y_0 = f(x_0)$

POSSIAMO DIRE CHE:

SE f È DERIVABILE IN $x_0 \wedge g$ DERIVABILE IN y_0

$g \circ f$ È DERIVABILE IN x_0 E LA DERIVATA SARÀ

$$D[g\circ f]_{(x_0)} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Es. PRESE LE FUNZIONI $g(x) = x^2 \wedge f(x) = 3x+2$

E LE LORO DERIVATE $g'(x) = 2x \wedge f'(x) = 3$

$$D[g\circ f]_{(x)} = D[(3x+2)^2]_{(x)} = \underbrace{2\cdot(3x+2)}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{3}_{f'(x)}$$

$f(x)$

TEOREMA DI DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI INVERSE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E STRETTAMENTE MONOTONA

SE f È DERIVABILE IN $x_0 \in]a,b[\wedge f'(x_0)\neq 0$

IMPORTANTE

ALLORA f^{-1} È DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$

$$D[f^{-1}] = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Es. SE $f(x) = x^2$ E $f'(x) = 2x$

PRENDO $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ E NE FACCIO LA DERIVATA

$$D[\sqrt{y}] = D[f^{-1}]_{(y)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}}$$

$x = f^{-1}(y)$

GENERALIZZANDO:

FORMULA DI DERIVAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DI X:

$$D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

FORMULA DI DERIVAZIONE DELLA POTENZA N-ESIMA DI X

$$D[x^n] = n\cdot x^{n-1}$$

DIMOSTRABILE CON PRINCIPIO DI INDUZIONE

PB. $n=0$

$$D[x^0] = 0\cdot x^{-1} \Rightarrow D[1] = 0 \quad \checkmark$$

PI. $n\geq 1$

Hp. $D[x^{n-1}] = (n-1)x^{n-2}$

Tesi $D[x^n] = n\cdot x^{n-1}$

DIMOSTRAZIONE

$$D[x^n] = D[x\cdot x^{n-1}]$$

DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$= D[x]\cdot x^{n-1} + x\cdot D[x^{n-1}] =$$

$$1\cdot x^{n-1} + x\cdot(n-1)x^{n-2} = x^{n-1} + x^{n-1}(n-1) =$$

$$= x^{n-1}(1+1(n-1)) = nx^{n-1} \quad \checkmark$$

DERIVATA DI FUNZIONI POLINOMIALI

FACOLTATIVO (PER ADESSO)

PER FARE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE POLINOMIALE, SI COMBINANO OPERAZIONI:

- DERIVATA DELLA POTENZA n-ESIMA DI x
- DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE DERIVABILE
- DERIVATA DELLA SOMMA DI FUNZIONI DERIVABILI

FACCIAMO VEDERE:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots a_1 \cdot x + a_0$$

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots 2 a_2 \cdot x^1 + a_1 + 0$$

LO STESSO PROCEDIMENTO SI APPLICA AD OGNI PARTE DEL POLINOMIO, MA FACCIAMO LA SPIEGAZIONE DI UNA PARTE SOLA

$$a_{n-2} \cdot x^{n-2} \qquad (n-2) \cdot a_{n-2} \cdot x^{n-3}$$

DERIVATA FRA COSTANTE (a_{n-2}) E FUNZIONE DERIVABILE (x^{n-2})

$$a_{n-2} \cdot f'(x^{n-2})$$

DERIVATA DELLA POTENZA n-ESIMA DI x

FUNZIONE ESPONENZIALE

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

PRESO UN QUALUNQUE $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I_{(0)} \setminus \{0\}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

CON h CHE TENDE A 0 ABBIAMO $a^{x_0} \cdot \log a$

QUINDI $f(x)$ È DERIVABILE IN x_0.

MA VISTO CHE x_0 È SCELTO AD ARBITRIO, LO STESSO VALE $\forall x \in \mathbb{R} \to f(x)$ DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

$$D[a^x] = a^x \cdot \log a$$

CASO PARTICOLARE: $D[e^x] = e^x$

FUNZIONE LOGARITMO

LA DERIVATA DELLA FUNZIONE LOGARITMICA PUÒ ESSERE TROVATA IN DUE MODI:

- CON IL METODO TRADIZIONALE $\left(\Delta f / \Delta x,\ \lim_{n\to 0} \dots\right)$
- CON LA DERIVATA INVERSA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

PER QUESTA DIMOSTRAZIONE, USEREMO IL SECONDO

CONSIDERO $f^{-1}(y) = \log_a y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ CON $a>0, a \neq 1 \quad \forall y \in]0, +\infty$

QUINDI $f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \cdot \log a$

USO LA FORMULA $D[f^{-1}] = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} =$

$$= \frac{1}{a^{\log_a y} \cdot \log a} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\log a} = \frac{1}{y} \cdot \log_a e$$

QUINDI GENERALIZZANDO

$$\underline{D[\log_a x] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e}$$

CASO PARTICOLARE: $D[\log x] = 1/x$

FUNZIONE POTENZA

$f(x) = x^b$ CON $b \in \mathbb{R}$

CI SONO DI NUOVO PIÙ METODI PER OTTENERE LA DERIVATA:

- METODO TRADIZIONALE
- CONSIDERARE $f(x)$ COME COMPOSIZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI, OVVERO:

$x^b = e^{\log x^b} = e^{b \cdot \log x}$ QUINDI $D[x^b] = D[e^{b \cdot \log x}]$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{b \cdot \log x}}_{g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{b \cdot \frac{1}{x}}_{f'(x_0)} = x^b \cdot \frac{1}{x} \cdot b = x^{b-1} \cdot b$$

$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ ← FORMULA DI DERIVAZIONE PER FUNZIONI COMPOSTE

QUINDI GENERALIZZANDO

$$\underline{D[x^b] = b \cdot x^{b-1}}$$

INOLTRE, VISTO CHE $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, POSSIAMO USARE LA STESSA FORMULA PER LE DERIVATE DI POTENZE E RADICI, PER ESEMPIO:

$$f(x) = \sqrt{x^3} \to D[\sqrt{x^3}] = D[x^{3/2}] = \frac{3}{2} \cdot x^{+\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

FUNZIONE SENO

$$f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

PRESO UN $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

APPLICO LA FORMULA DEL SENO DI UNA SOMMA

$$= \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

METTO $\sin x_0$ E $\cos x_0$ IN EVIDENZA

$$\underbrace{\sin x_0}_{} \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{} + \underbrace{\cos x_0}_{} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{}$$

CON h CHE TENDE A ZERO →

$$\sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1$$

VISTO CHE x_0 È PRESO AD ARBITRIO, QUESTO VALE $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D[\sin x] = \cos x$$

FUNZIONE COSENO

$$f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

PRESO UN $x_0 \in \mathbb{R}$ E UN $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h}$$

APPLICO FORMULA DEL COSENO DI UNA SOMMA

OTTENGO $$\frac{\cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h - \cos x_0}{h}$$

METTO IN EVIDENZA $\cos x_0$ E $\sin x_0$

$$\underbrace{\cos x_0}_{} \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{} - \underbrace{\sin x_0}_{} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{}$$

CON h CHE TENDE A ZERO →

$$\cos x_0 \cdot 0 - \sin x_0 \cdot 1$$

VISTO CHE x_0 È SCELTO AD ARBITRIO, QUESTO VALE $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D[\cos x] = -\sin x$$

FUNZIONE TANGENTE

$$f(x) = \tan x : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$ DERIVATA DI UN RAPPORTO DI FUNZIONI DERIVABILI

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

2 FORMULE EQUIVALENTI, ENTRAMBE UTILI IN DIVERSI CONTESTI

$$D[\tan x] = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ADESSO RICAVIAMO LE DERIVATE DELLE FUNZIONI INVERSE DI sin, cos, tan, OVVERO:

- ARCOSENO arcsin
- ARCOCOSENO arccos
- ARCOTANGENTE arctan

FUNZIONE ARCOSENO

CONSIDERIAMO $f(x) = \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

E LA SUA INVERSA $f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

APPLICANDO IL TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE, OTTENIAMO CHE:

$f^{-1}(y)$ È DERIVABILE NELL'INTERVALLO $]-1, 1[$

(-1 ED 1 ESCLUSI PERCHÈ PER IL TEOREMA $f'(x) \neq 0$
INFATTI SE $x = \arcsin \pm 1 = \pm\frac{\pi}{2}$, $f'(x) = \cos(x) = 0$)

QUINDI ABBIAMO

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

CONSIDERANDO CHE IN QUESTO INTERVALLO

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ OTTENIAMO

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

QUINDI GENERALIZZANDO LA FORMULA:

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Funzione Arcocoseno

Procedimento analogo a quello effettuato per l'arcoseno:

$f(x) = \cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$

$f^{-1}(y) = \arccos y : [-1, 1] \to [0, \pi]$

↳ derivabile in $]-1, 1[$

$$D[\arccos y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sin(\arccos y)}$$

Anche qui possiamo dire che

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, mettiamo al posto di α, $\arccos y$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Andando a generalizzare la formula:

$$D[\arccos x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Funzione Arcotangente

Ancora una volta, lo stesso procedimento:

$f(x) = \tan x :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \arctan y : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$D[\arctan y] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} =$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

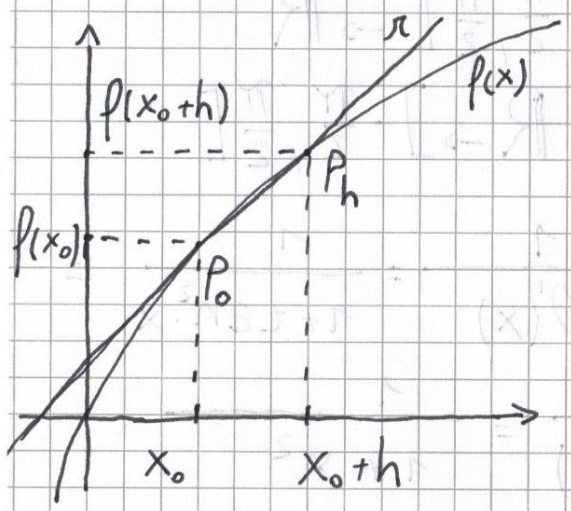
Derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Generalizzando la formula:

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLE DERIVATE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$



f DERIVABILE IN x_0

FISSO $h \in I(0) \setminus \{0\}$

CONSIDERO I PUNTI:

$$P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$$

$$P_h \equiv (x_0+h, f(x_0+h))$$

CONSIDERO LA RETTA r PASSANTE PER $P_0 \wedge P_h$

CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI r

$$m_r = \frac{y_{P_h} - y_{P_0}}{x_{P_h} - x_{P_0}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

CHE È ESATTAMENTE LA FORMULA PER IL RAPPORTO INCREMENTALE

DETTO FORMALMENTE:

IL RAPPORTO INCREMENTALE RELATIVO AD UNA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0 È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA SECANTE AD f NEI PUNTI DI ASCISSA $\begin{cases} x_0+h \\ x_0 \end{cases}$

CONSIDERIAMO ADESSO LA DERIVATA, OVVERO

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

SE h TENDE A ZERO, I PUNTI P_h E P_0 SI AVVICINANO SEMPRE DI PIÙ, FINO A QUASI SOVRAPPORSI.

LA RETTA r QUINDI DIVENTERÀ TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO P_0.

LA DERIVATA DI $f(x_0)$ QUINDI È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA r TANGENTE AD f NEL PUNTO P_0 DI ASCISSA x_0

PROPOSIZIONE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE NEL PUNTO x_0,

ALLORA $\exists$ RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO DI ASCISSA x_0:

$$r: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

DIMOSTRAZIONE →

CONSIDERO L'EQUAZIONE GENERICA DELLA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO

$t: \; y - y_1 = m(x - x_1)$ CON $P \equiv (x_1, y_1)$

ED m IL COEFFICIENTE ANGOLARE

ADESSO CONSIDERO LA RETTA r TANGENTE AD f NEL PUNTO $P(x_0, f(x_0))$. CONSIDERANDO CHE IN QUEL PUNTO m SARÀ = DERIVATA DI x_0:

$$r: \; y - f(x_0) = f'(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{OVVERO}$$

$$y = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

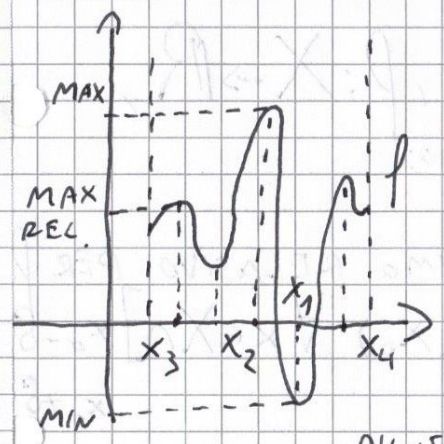
INOLTRE SE FACCIO IL LIMITE DELLA LORO DIFFERENZA $(x \to x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}_{\text{LIMITE RAPPORTO DIFFERENZIALE} \; = f'(x_0)} - \frac{f'(x_0)\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = 0$$

QUINDI IN UN INTERVALLO PICCOLO, LE FUNZIONI SONO (QUASI) UGUALI $\to f(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ SE $x \in I(x_0)$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI



$f: [a, b] \to ?$

ABBIAMO I PUNTI x_1 E x_2 CHE SONO RISPETTIVAMENTE PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO ASSOLUTO

CI SONO POI DEI PUNTI x_3 CHE, SE RISTRETTA LA FUNZIONE AD UN INTORNO DEL PUNTO STESSO, VERIFICA TUTTE LE CONDIZIONI PER ESSERE PUNTO DI MINIMO/MASSIMO.

QUESTI PUNTI VENGONO CHIAMATI: PUNTI DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO

! I PUNTI DI MASSIMO/MINIMO ASSOLUTO SONO ANCHE PUNTI DI MASSIMO/MINIMO RELASIVO FINCHÉ NON SONO GLI ESTREMI DELL' INTERVALLO

DEFINIZIONI:

SIANO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X \cap DX$, DIREMO:

1) x_0 È PUNTO DI MASSIMO RELATIVO PER f
$\iff \exists \delta : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

2) x_0 È PUNTO DI MINIMO RELATIVO PER f
$\iff \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0), \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

TEOREMA DI FERMAT

CONSIDERO $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X \cap DX$:

SE x_0 È PUNTO DI MIN/MAX RELATIVO PER f ED f DERIVABILE IN x_0, ALLORA

$f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE (STESSO RAGIONAMENTO PER MIN/MAX)

CONSIDERO $h \in I(0) \setminus \{0\}$ E DISTINGUO I CASI IN CUI

- $h > 0 \Rightarrow x_0 + h > x_0$
- $h < 0 \Rightarrow x_0 + h < x_0$

OSSERVIAMO IL COMPORTAMENTO DEL SEGNO DELLA DERIVATA DESTRA/SINISTRA

- $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

NEGATIVO

LIMITE SINISTRO ≥ 0 $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

VISTO CHE x_0 È PUNTO DI MASSIMO, $f(x_0+h) < f(x_0)$ QUINDI IL NUMERATORE È NEGATIVO

- $\lim_{h \to 0^+}$ - - - STESSA COSA PER IL NUMERATORE, MA QUESTA VOLTA h È POSITIVO

LIMITE DESTRO ≤ 0 $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$f'(x_0)$

PER IPOTESI $\exists \lim_{h \to 0} = \lim_{h \to 0^+} = \lim_{h \to 0^-} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \to \lim_{h \to 0} = 0$

TEOREMA DI ROLLE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
DERIVABILE IN $]a,b[$

SE $f(a)=f(b)$ ALLORA $\exists\, c\in]a,b[: f'(c)=0$

DIMOSTRAZIONE:

f CONTINUA IN $[a,b]$ $\to$ TEOREMA DI WEIERSTRASS:

$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$
$\forall x\in[a,b]$

DISTINGUO DUE CASI:

1) $x_1=a \wedge x_2=b$ QUINDI

$f(a)\le f(x)\le f(b)$ MA PER IPOTESI ABBIAMO $f(a)=f(b)$

QUINDI

$f(a)\le f(x)\le f(a) \to f(x)=f(a)=f(b)$

$\forall x\in[a,b]$, OVVERO f È UNA FUNZIONE COSTANTE $\to f'(x)=0\ \forall x\in]a,b[$

2) $x_1\in]a,b[\vee x_2\in]a,b[$

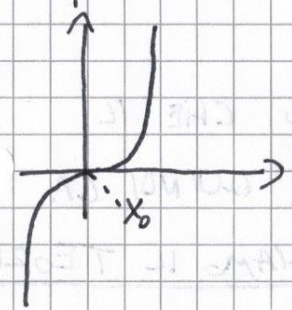
PER CONVENZIONE DICIAMO CHE $x_1<x_2$
CONSIDERIAMO IL CASO $x_1\in]a,b[$,

x_1 È PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, MA VISTO CHE È UN PUNTO INTERNO, È ANCHE PUNTO DI MINIMO RELATIVO.
INOLTRE PER IPOTESI, f È CONTINUA IN x_1, QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DI FERMAT:

$f'(x_1)=0$ QUINDI x_1 È IL C DELLA TESI

! NOTO CHE ESISTONO DEI PUNTI CON DERIVATA PRIMA $=0$ CHE NON SONO PUNTI DI MIN/MAX

Es. $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f'(x_0)=0$



QUESTI PUNTI IN CUI LA DERIVATA SI ANNULLA, SI CHIAMANO

PUNTI STAZIONARI o CRITICI

TEOREMA DI CAUCHY

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ · CONTINUE IN $[a,b]$

· DERIVABILI IN $]a,b[$

SE $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ VALE CHE:

$$\exists c \in]a,b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

CONTROLLIAMO CHE IL DENOMINATORE NON SI ANNULLI, OVVERO $g(b) \neq g(a)$

SE PER ASSURDO AVESSIMO $g(b) = g(a)$

PER IL TEOREMA DI ROLLE AVREMMO CHE

$$\exists \bar{x} \in]a,b[: g'(\bar{x}) = 0 \quad ↯$$

DI CONSEGUENZA $g(a)$ NON PUÒ ESSERE $= g(b)$

ADESSO CHE ABBIAMO VERIFICATO CHE IL DENOMINATORE NON SI ANNULLA, E QUINDI LA FRAZIONE È VALIDA, DIMOSTRIAMO IL TEOREMA

CONSIDERO LA COMBINAZIONE LINEARE DI f E g:

$$H : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$H(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \quad \text{CON } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

LAMBDA MI

PER LE PROPRIETÀ DELLA COMBINAZIONE LINEARE, ESSA CONSERVA LA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ DI f E g.

NOI VORREMMO SERVIRCI DEL TEOREMA DI ROLLE, QUINDI VOGLIAMO VEDERE ~~SE~~ QUANDO $H(a) = H(b)$:

$$H(a) = H(b) \iff \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot g(a) = \lambda \cdot f(b) + \mu \cdot g(b)$$

$\Rightarrow$ RIARRANGIO GLI ELEMENTI DELL'UGUAGLIANZA $\Rightarrow \lambda(f(b)-f(a)) = \mu(g(a)-g(b))$

QUINDI SCEGLIENDO · $\lambda = g(a)-g(b)$ $\wedge$

· $\mu = f(b)-f(a)$ OTTENGO

$$(g(a)-g(b)) \cdot (f(b)-f(a)) = (f(b)-f(a)) \cdot (g(a)-g(b))$$

QUINDI VALE IL TEOREMA DI ROLLE

RISCRIVIAMO $H(x)$ CON LAMBDA E MI SOSTITUITI

$$H(x) = (g(a) - g(b)) \cdot f(x) + (f(b) - f(a)) \cdot g(x)$$

PER IL T. (teorema) DI ROLLE INVECE ABBIAMO CHE

$$\exists c \in]a,b[: H'(c) = 0$$

CONSIDERO LA DERIVATA DI H IN c

$$H'(c) = (g(a) - g(b)) \cdot f'(c) + (f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = 0$$

TRASFERISCO A DESTRA DELL'= CAMBIANDO IL SEGNO DENTRO LA PARENTESI:

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$$

DIVIDO ENTRAMBI PER $g'(c) \cdot (g(b) - g(a))$ E SEMPLIFICO, OTTENENDO

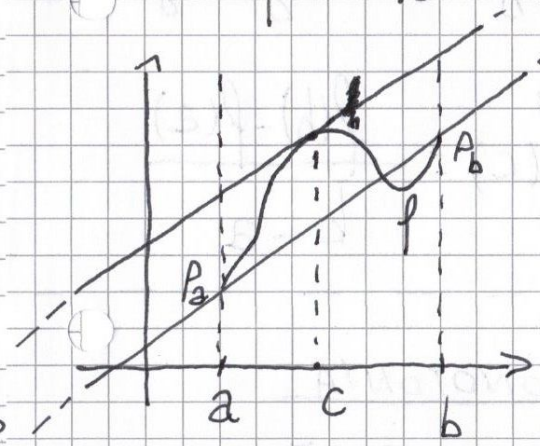
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE

TEOREMA DI LAGRANGE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

DERIVABILE IN $]a,b[$



$\exists c \in]a,b[$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

OVVERO ESISTE ALMENO UN PUNTO IN CUI LA TANGENTE AL GRAFICO E LA RETTA SECANTE, PASSANTE PER P_a E P_b, HANNO LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, OVVERO SONO PARALLELE

DIMOSTRAZIONE

CI SERVIREMO DEL TEOREMA DI CAUCHY:

CONSIDERO $g(x) = Id_{[a,b]}(x) \Rightarrow g(x) = x \quad \forall x \in [a,b]$

ESSA SODDISFA LE CONDIZIONI:

- CONTINUA IN $[a,b]$
- DERIVABILE IN $]a,b[$ · $g'(x) = 1 \ (\neq 0) \quad \forall x \in]a,b[$

QUINDI $\exists c \in]a,b[: \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

MA NELLA FUNZIONE g:

- $g(x) = x$
- $g'(x) = 1 \rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CRITERIO DI MONOTONIA

SIA $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$, DERIVABILE IN $]a,b[$

RISULTA CHE:

1) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\iff f$ È CRESCENTE IN $[a,b]$

2) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[\iff f$ È DECRESCENTE IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE 1 (LA SECONDA HA LO STESSO PROCEDIMENTO)

CON DOPPIA IMPLICAZIONE

$(\Rightarrow)$

$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ APPLICO UNA RESTRIZIONE:

CONSIDERO $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$ E CONSIDERO

$f|_{[x_1,x_2]}$ CONTINUA IN $[x_1, x_2]$ E DERIVABILE IN $]x_1, x_2[$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$x_2 - x_1$ È SEMPRE UN VALORE POSITIVO, PERCHÉ x_2 È L'ESTREMO SUPERIORE DELL'INTERVALLO $]x_1, x_2[$

VISTO CHE IL PUNTO $c \in]x_1, x_2[\rightarrow c \in [a,b]$

$\rightarrow f'(c) \geq 0$ PER IPOTESI, DI CONSEGUENZA

$f(x_2) \geq f(x_1)$, ALTRIMENTI LA DERIVATA VIENE < 0

QUINDI ABBIAMO $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$(\Leftarrow)$

FISSO $x_0 \in]a,b[$, $h \in I_{(0)} \setminus \{0\}$

CONSIDERO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \text{SE } h > 0, f(x_0+h) \geq f(x_0) \\ \text{(PER LA CRESCENZA)} \\ \text{SE } h < 0, f(x_0+h) \leq f(x_0) \end{cases}$$

QUINDI NUMERATORE E DENOMINATORE HANNO SEMPRE LO STESSO SEGNO

$\rightarrow \Delta f / \Delta x \geq 0$ IN TUTTO L'INTERVALLO $]a,b[$

VISTO CHE x_0 È STATO SCELTO ARBITRARIAMENTE QUINDI PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

$$f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. DIREMO CHE:

f È COSTANTE IN $[a,b] \Leftrightarrow f$ È DERIVABILE IN $[a,b] \wedge f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$

DIMOSTRAZIONE CON DOPPIA IMPLICAZIONE

$(\Rightarrow)$ COSTANTE $\rightarrow$ DERIVABILE. IN PIÙ LA DERIVATA DI UNA COSTANTE È SEMPRE 0

$(\Leftarrow)$ f DERIVABILE IN $[a,b] \rightarrow$ CONTINUA IN $[a,b]$

IN PIÙ $f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b]$

PER IL CRITERIO DI MONOTONIA, f È SIA CRESCENTE CHE DECRESCENTE IN $[a,b]$, QUINDI È PER FORZA COSTANTE

CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ DERIVABILE IN $]a,b[$

RISULTA CHE:

1) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[\wedge f'$ NON SI ANNULLA IDENTICAMENTE IN UN SOTTOINSIEME DI $]a,b[\Leftrightarrow f$ È <u>STRETTAMENTE CRESCENTE</u>

2) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[\wedge f'$ NON SI ANNULLA IDENTICAMENTE IN UN SOTTOINSIEME DI $]a,b[\Leftrightarrow f$ È <u>STRETTAMENTE DECRESCENTE</u>

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$

DIREMO CHE f È:

- <u>CONCAVA</u> IN $[a,b] \overset{def.}{\iff} f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$
- <u>CONVESSA</u> IN $[a,b] \overset{def.}{\iff} f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$

UN PUNTO $c \in]a,b[$ SI DIRÀ:

<u>PUNTO DI FLESSO</u> $\overset{def.}{\iff}$
- f È CONVESSA IN $[a,c]$ $\wedge$
- f È CONCAVA IN $[c,b]$

OPPURE AL CONTRARIO.

QUINDI c È IL PUNTO IN CUI LA FUNZIONE PASSA DA CONCAVA A CONVESSA

(ESISTE UN'ALTRA DEFINIZIONE PIÙ COMPLICATA, MA CE L'HANNO RISPARMIATA)

CRITERIO DI CONVESSITÀ/CONCAVITÀ

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$

DERIVABILE 2 VOLTE IN $]a,b[$

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI

1) f È CONVESSA (CONCAVA) IN $[a,b]$
2) f' È CRESCENTE (DECRESCENTE) IN $[a,b]$
3) $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ $\forall x \in]a,b[$

UN PUNTO DI UNA FUNZIONE, PER ESSERE UN PUNTO DI FLESSO, DEVE SODDISFARE:

- $f''(x)=0$ (OPPURE IN RARI CASI $f''(x)\nexists$)
- $f''(x^+) \geq 0 \wedge f''(x^-) \leq 0$ (O VICEVERSA)

QUINDI LA DERIVATA SECONDA DEVE ESSERE NULLA O INESISTENTE NEL PUNTO E DEVE AVERE SEGNO OPPOSTO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO

! SE IN UN PUNTO C LA DERIVATA SECONDA SI ANNULLA MA ASSUME LO STESSO SEGNO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO, C È UN PUNTO DI MINIMO/MASSIMO RELATIVO

I TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

CONDIZIONI: $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$,

$x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, (INDIFFERENTE)

$g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, $f \wedge g$ DERIVABILI IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$ (POTREBBE ANNULLARSI SOLO IN x_0),

$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ FINE CONDIZIONI

$$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

II TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

CONDIZIONI: $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$,

$x_0 \in DX \cap \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

(I LIMITI POSSONO ESSERE DIVERSI)

$f \wedge g$ DERIVABILI IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$g'(x) \neq 0$ (POTREBBE ANNULLARSI SOLO IN x_0),

$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ FINE CONDIZIONI

$$\Rightarrow \boxed{\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

LE DIMOSTRAZIONI DEI DUE TEOREMI SONO MOLTO SIMILI, PER IL SECONDO CI SONO DA IMPOSTARE DELLE CONDIZIONI UN PO' PIÙ RIGOROSE, MA IL PROCEDIMENTO È LO STESSO. NOI COMUNQUE DIMOSTREREMO SOLO IL PRIMO →

DIMOSTRAZIONE DE L'HÔPITAL I

PRENDO UN $x \neq x_0 \in X$

CONSIDERO IL RAPPORTO $f(x)/g(x)$

VISTO CHE IN x_0 LE FUNZIONI TENDONO A ZERO, POSSO SOMMARLE AL RAPPORTO,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

DIVIDO NUMERATORE E DENOMINATORE PER $x-x_0$ SENZA CAMBIARE IL VALORE DEL RAPPORTO

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}$$

QUESTI SONO DUE RAPPORTI INCREMENTALI, QUINDI SE $x \to x_0$ ABBIAMO

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

CHE È IL RAPPORTO DA CUI SIAMO PARTITI

FORMULA DI TAYLOR

CON RESTO DI PEANO

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN x_0, n VOLTE

DIREMO CHE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x)$$

DOVE $\lim_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

IL CHE ESPLICITATO CI DA:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)/2! \cdot (x-x_0)^2 + f'''(x_0)/3! \cdot (x-x_0)^3 \ldots + f^{(n)}(x_0)/n! \cdot (x-x_0)^n + R_n(x)$$

IL POLINOMIO DI TAYLOR CON $x_0 = 0$, È CHIAMATO POLINOMIO DI MC LAURIN

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)$$

DOVE $\lim_{x\to 0} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$, $f: X \to \mathbb{R}$

DERIVABILE n VOLTE IN x_0

DERIVABILE $n+1$ VOLTE NELL'INTORNO $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

DIREMO CHE:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

DOVE $\xi \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

X1 ADESSO ANALIZZIAMO ALCUNE FUNZIONI:

$\boxed{f(x) = e^x}$ D: $\mathbb{R}$ $\left(f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N} \right)$

DERIVABILE INFINITE VOLTE

SCRIVO IL POLINOMIO DI MC LAURIN ($x_0 = 0$)

$$f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \to f(x) = e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

NOTO CHE SE SOMMO -1 AD ENTRAMBI I MEMBRI E DIVIDO TUTTO PER x:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} \cdots \frac{x^{n-1}}{n!}$$

RESTO DI PEANO

LIMITE NOTEVOLE CON $x \to 0$ $= 1$

(R_n È UN INFINITESIMO DI GRADO SUPERIORE A x^n)

$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$ D: $]-1, +\infty[$

CALCOLIAMO QUALCHE DERIVATA:

- $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ ← DERIVATA DI UNA POTENZA
- $f''(x) = -1(1+x)^{-2}$
- $f'''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$
- $f^{IV}(x) = -3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-4}$

← DERIVATA DEL PRODOTTO FRA UNA FUNZIONE COSTANTE ($-1, -2$ ecc.) E UNA FUNZIONE DERIVABILE (FUNZIONE POTENZA: $(1+x)^{-n}$)

- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$

SCRIVIAMO ADESSO IL POLINOMIO DI MC-LAURIN:

$x_0 = 0$

CONSIDERANDO $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = -1$, $f'''(x_0) = 2$

$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$ OTTENGO IL POLINOMIO:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

SE DIVIDESSIMO TUTTO PER x, OTTERREMMO IL LIMITE NOTEVOLE PER $x \to 0$ DI:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$ $\quad D: \mathbb{R}$

- $f'(x) = \cos x$
- $f''(x) = -\sin x$
- $f'''(x) = -\cos x$
- $f^{IV}(x) = \sin x$

COME SI PUÒ OSSERVARE, LE DERIVATE DEL SENO (E DEL COSENO) SONO CICLICHE, E SI RIPETONO OGNI 4 DERIVAZIONE

SCRIVIAMO MC-LAURIN CON $x_0 = 0$

$$f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) = -1,\ f^{IV}(x_0) = 0$$

$$\sin x = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

SE DIVIDESSIMO TUTTO PER $x \to \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

POSSIAMO NOTARE CHE LA FUNZIONE COSENO È UGUALE ALLA DERIVATA PRIMA DEL SENO, DI CONSEGUENZA LA DERIVATA PRIMA DEL COSENO SARÀ LA SECONDA DEL SENO, ECC.: $f^{(n)}_{\cos x} = f^{(n+1)}_{\sin x}$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ $\quad D: \mathbb{R}$

- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{IV}(x) = \cos x$

CON $x_0 = 0$ OTTENIAMO

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = -1,\ f'''(x_0) = 0,\ f^{IV}(x_0) = 1$$

SCRIVO IL POLINOMIO DI MC-LAURIN

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

DA QUI POSSIAMO RICAVARE 2 LIMITI NOTEVOLI:

SOMMIAMO -1 AD ENTRAMBI I MEMBRI, POI MOLTIPLICHIAMO PER -1 PER CAMBIARE IL SEGNO.

ADESSO DIVIDIAMO PER:

- $x \to \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \left(\frac{x^{\cancel{2}}}{2!} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right)$
- $x^2 \to \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{2!} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$

CRITERIO PER PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVO

SIA $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X \cap DX$,
$f: X \to \mathbb{R}$ DERIVABILE TANTE VOLTE QUANTE SONO LE DERIVATE SOTTOSTANTI IN x_0, RISULTA:

$$f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0 \to x_0 \text{ È PUNTO DI MIN. REL.} \\ f''(x_0) < 0 \to x_0 \text{ È PUNTO DI MAX. REL.} \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'''(x_0) \neq 0 \to x_0 \text{ NON È UN PUNTO DI MIN/MAX REL.} \quad \left(\begin{array}{l} >0 \Rightarrow \text{ASCENDENTE} \\ <0 \Rightarrow \text{DISCENDENTE} \end{array}\right) \\ f'''(x_0) = 0 \begin{cases} - - - \\ - - - \\ - - - \end{cases} \end{cases}$$

~~DIMOSTRAZIONE~~ QUINDI CON $n \in \mathbb{N}$:

- $f^{(n)} = 0 \to$ L'ALGORITMO CONTINUA
- $f^{(n \text{ PARI})} > ; < 0 \to x_0$ È PUNTO DI MAX/MIN REL $\to$ <u>FINE ALGORITMO</u>
- $f^{(n \text{ DISPARI})} > ; < 0 \to x_0$ NON È PUNTO DI MAX/MIN REL. $\to$ <u>FINE ALGORITMO</u>

(IN QUESTO CASO IN REALTÀ, x_0 È PUNTO DI FLESSO)

DIMOSTRAZIONE (APPLICAZIONE DI TAYLOR)

SIANO $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ E $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $f(x)$ NEL PUNTO x_0

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + f(x_0) + o(x - x_0)^n$$

(COMPRENDE ANCHE TUTTE LE DERIVATE NULLE $(f'(x_0), \dots f^{(n-1)}(x_0))$)

FORMULA DI TAYLOR PER $x \to x_0$

SIA $f^{(n)}(x_0) > 0$ (STESSO TIPO DI DIMOSTR. PER < 0)

CALCOLIAMO $f^{(n)}$ CON IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \underbrace{\frac{o(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n}}_{\to 0}$$

SOSTITUISCO CON TAYLOR

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0 \quad \text{A PRESCINDERE DA } x \text{ QUINDI} \quad \exists \delta > 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0 \quad \forall x \in X \cap I_{x_0, \delta} \setminus \{x_0\}$$

- SE n DISPARI, $(x - x_0)^n$ POTREBBE AVERE SEGNO DIVERSO PER LIMITE DESTRO/SINISTRO
- MA SE n PARI, $(x - x_0)^n \geq 0 \to f(x) - f(x_0) > 0$

QUINDI $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \longrightarrow \forall x \in X \cap I_{x_0, \delta}$

<u>QUINDI È UN MIN. RELATIVO</u>

STUDIO DI FUNZIONE COMPLETO

1) STABILIRE L'INSIEME DI DEFINIZIONE

+ SE IL DOMINIO È SIMMETRICO RISPETTO L'ORIGINE, STUDIARE LE SIMMETRIE:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y} \\ -f(x) & \text{SIMMETRICO RISPETTO L'ORIGINE} \end{cases}$$

2) INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

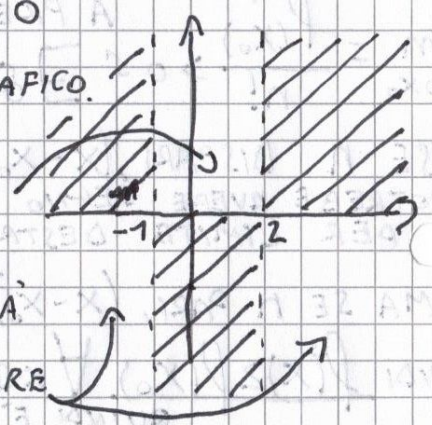
$$\begin{cases} y=0 \\ f(x)=y \end{cases} \qquad \text{SE } 0 \in D \quad \begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases}$$

$\cap$ ASSE DELLE ASCISSE $\qquad$ $\cap$ ASSE DELLE ORDINATE

3) POSITIVITÀ $f(x)>0$

RAPPRESENTARE SUL GRAFICO.

Es. $f(x)>0 \quad \forall -1<x<2$



DI CONSEGUENZA, $f(x)$ SARÀ NEGATIVA NEL COMPLEMENTARE

4) LIMITI ED ASINTOTI

ASINTOTI ORIZZONTALI (OBLIQUI) $\bar{y}$: $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)-\bar{y}|=0$

STUDIARE

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \bar{y}\in\mathbb{R} \to \bar{y} \text{ ASINTOTO ORIZZONT.} \\ \pm\infty \to \nexists \text{ ASINTOTO } \vee \text{ L'ASINTOTO È OBLIQUO} \end{cases}$

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \Big] \nexists$ ASINTOTO OBLIQUO
  $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ POTREBBE ESISTERE L'ASINTOTO OBLIQUO

- $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-m\cdot x) = \begin{cases} \pm\infty \\ q\in\mathbb{R} \end{cases} \nexists$ ASINTOTO OBLIQUO

$\exists$ ASINTOTO OBLIQUO ED HA EQUAZIONE

$$y=mx+q$$

ASINTOTI VERTICALI $\bar{x}$:

SE ESISTONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE FUORI DAL DOMINIO (ECCETTO $\pm\infty$ CHE ABBIAMO GIÀ STUDIATO)

STUDIARE LA DISCONTINUITÀ:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} l\in\mathbb{R} \to \text{PUNTO DI DISC. DI 1° O 3° SPECIE} \\ \pm\infty \to 2^\circ \text{ SPECIE} \to \exists\, \bar{x}=x_0 \end{cases}$$

5) RICAVARE LA <u>DERIVATA PRIMA</u> $y' = f'(x)$

6) RICERCA DEI <u>PUNTI CRITICI</u> CON $f'(x) = 0$

7) STUDIO DELLA <u>MONOTONIA</u> CON $f'(x) > 0$

8) TROVARE EVENTUALI <u>PUNTI DI MIN/MAX RELATIVO</u>

9) RICAVARE LA <u>DERIVATA SECONDA</u> $y'' = f''(x)$

10) <u>EVENTUALI PUNTI DI FLESSO</u> CON $f''(x) = 0$

11) <u>CONCAVITÀ/CONVESSITÀ</u> CON $f''(x) > 0$

12) IDENTIFICARE I <u>VERI PUNTI DI FLESSO</u>

CON $f''(x) = 0 \wedge f''(x^+) \cdot f''(x^-) \leq 0$

OVVERO DERIVATA SECONDA NULLA (O INESISTENTE) IN x_0 E DI SEGNO OPPOSTO NEGLI INTORNI DESTRO E SINISTRO

CONSIDERIAMO IL CASO:

- $f(x)$ DEFINITA IN $D \subseteq \mathbb{R}$
- $f'(x)$ DEFINITA IN $D \setminus \{x_0\}$

ANDANDO A STUDIARE IL LIMITE DI $f'(x)$ NEL PUNTO x_0, DIREMO CHE x_0 È:

- <u>PUNTO ANGOLOSO</u>

SE $\exists$ FINITI $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

- <u>PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE</u>

SE $\exists$ $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

- <u>CUSPIDALE</u>, O <u>PUNTO DI CUSPIDE</u>

SE $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$

OPERAZIONI CON INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE

$$\underbrace{o(\text{QUALCOSA})}_{\text{INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A QUALCOSA}}$$

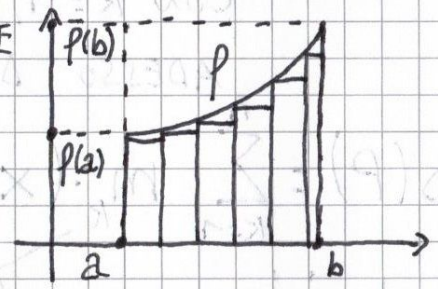
o PICCOLO →

- $R_n(x) = o(x^n)$
- $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$
- $o(x^n)/x = o(x^{n-1})$
- $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$ CON $m < n$
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $c \cdot o(x^n) = o(x^n)$ CON $c \in \mathbb{R}$ COSTANTE

! LE VARIABILI VENGONO ESCLUSE DAGLI INFINITESIMI: $o(2x^n) \to o(x^n)$

INTEGRALI DEFINITI

GLI INTEGRALI SERVONO A CALCOLARE L'AREA COMPRESA FRA IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE POSITIVA LIMITATA E L'ASSE DELLE ASCISSE TRAMITE IL METODO DI ESAUSTIONE, OVVERO RIEMPIRE UNA FIGURA IRREGOLARE CON POLIGONI REGOLARI, O ALTRE FIGURE DI CUI SI CONOSCE L'AREA.



SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

CONSIDERO UNA PARTIZIONE DELL'INTERVALLO:

$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ OTTENENDO $n+1$ PUNTI CHE DIVIDONO L'INTERVALLO $[a,b]$ IN n PARTI, OVVERO n INTERVALLI

$[x_{k-1}, x_k]$ CON $k = 1, 2 \ldots n$

SOTTOINTERVALLI DI f LIMITATA → LIMITATI → ∃ INF ∧ SUP

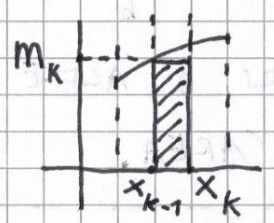
DEFINISCO GLI INF E I SUP DI QUESTI INTERVALLI

- $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
- $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

CON $k = 1, 2 \dots n$

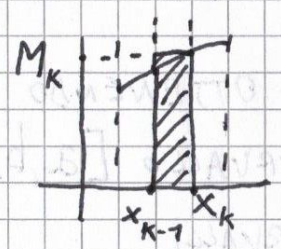
ADESSO DEFINISCO:

- $s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ SOMMA INTEGRALE INFERIORE



BASE · ALTEZZA = AREA DEL RETTANGOLO IN DIFETTO

- $S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ SOMMA INTEGRALE SUPERIORE



BASE · ALTEZZA = AREA DEL RETTANGOLO IN ECCESSO

VISTO CHE $(x_k - x_{k-1})$ È LO STESSO PER ENTRAMBE LE SOMMATORIE E $m \le M$, $s(P) \le S(P)$ $\forall P$ PARTIZIONE DI $[a,b]$

VALE IL SEGUENTE <u>LEMMA</u>

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA IN $[a,b]$

$\forall P, Q$ PARTIZIONI DI $[a,b]$ VALE CHE:

$$m \cdot (b-a) \le s(P) \le S(Q) \le M \cdot (b-a)$$

DOVE $m = \inf_{[a,b]} f$ E $M = \sup_{[a,b]} f$

NOTIAMO INOLTRE CHE VISTO CHE OGNI ELEMENTO DI s È $\le$ DELL'ELEMENTO DI S CORRISPONDENTE, s ED S SONO DUE INSIEMI <u>SEPARATI</u>. INOLTRE SE FOSSERO ANCHE <u>CONTIGUI</u>, OVVERO HANNO UN UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE, LA FUNZIONE f SI DIRÀ <u>INTEGRABILE SECONDO RIEMANN</u> IN $[a,b]$ E CHIAMEREMO <u>INTEGRALE DEFINITO</u> PROPRIO QUELL'UNICO ELEMENTO DI SEPARAZIONE, OVVERO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \sup\{s(P) : P \text{ PARTIZIONE}\} \\ \inf\{S(P) : P \text{ PARTIZIONE}\} \end{cases}$$

INTEGRALE: $\int_a^b f(x)\,dx$

VARIABILE DI INTEGRAZIONE

FUNZIONE INTEGRANDA

ESTREMI DI INTEGRAZIONE

DIFFERENZIALE RISPETTO ALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE

INOLTRE

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

TEOREMA DI RIEMANN

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA IN $[a,b]$

f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists P_\varepsilon$ PARTIZIONE DI $[a,b]$: $S(P_\varepsilon)-s(P_\varepsilon)<\varepsilon$

(MINORE DI ε)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

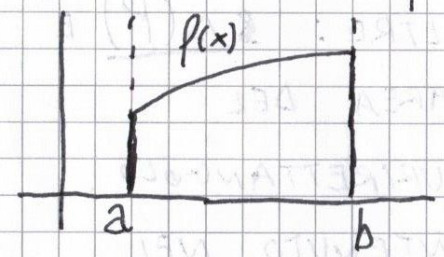
SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE SECONDO RIEMANN (S.R.) IN $[a,b]$

CON $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$

INDICO IL RETTANGOLOIDE CON

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b]\wedge 0\leq y\leq f(x)\}$$

OVVERO L'INSIEME DI PUNTI COMPRESI FRA IL GRAFICO DELLA FUNZIONE E L'ASSE DELLE ASCISSE NELL'INTERVALLO $[a,b]$



FISSATA UNA PARTIZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$: $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$

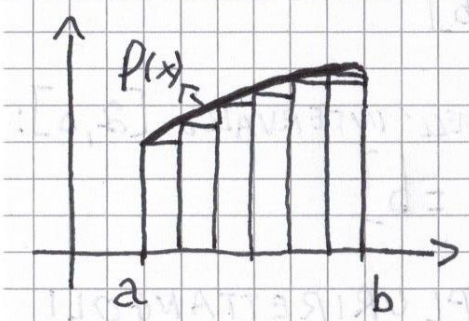
CONSIDERIAMO I DUE PLURIRETTANGOLI

(DEF. DI PLURIRETTANGOLO: UNIONE DI RETTANGOLI CON BASE INTERVALLI A DUE A DUE PRIVI DI PUNTI INTERNI IN COMUNE)

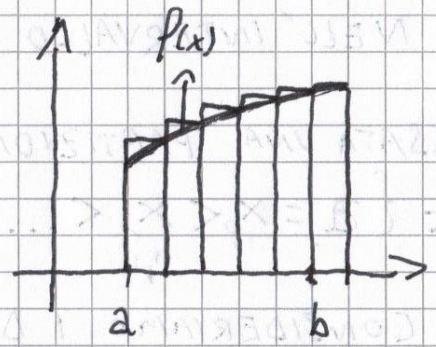
- $s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$
- $S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$

CON m_k ESTREMO INFERIORE ED M_k ESTREMO SUPERIORE DEGLI INTERVALLI $[x_{k-1}, x_k]$

INOLTRE: $s(P)$ È L'AREA DEL PLURIRETTANGOLO CONTENUTO NEL RETTANGOLOIDE



$S(P)$ È L'AREA DEL PLURIRETTANGOLO CONTENENTE IL RETTANGOLOIDE



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA DI } R$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

PROPRIETÀ INTEGRALI DEFINITI

- PROP. DI ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE S.R. RISPETTO ALL'INTERVALLO

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R.

SIA $c \in [a,b]$, AVREMO CHE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- PROP. DI LINEARITÀ DELL'INTEGRALE S.R.

SIANO $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATE ED INTEGRABILI S.R.

1) $f+g$ È INTEGRABILE S.R. 2) $\alpha \cdot f(x)$ INTEGRABILE S.R. CON $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b (\alpha \cdot f(x))\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \alpha$

- **PROP. DEL CONFRONTO DELL'INTEGRALE S.R.**

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATE ED INTEGRABILI S.R.

CON $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$, ALLORA VALE:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- **PROP. DEL VALORE ASSOLUTO DELL'INTEGRALE S.R.**

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

($f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R.)

I TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA ED INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ $\qquad$ $M = \sup\{---\}$

DIMOSTRAZIONE

PER LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE:

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(P)$$

MA SE SCELGO COME PARTIZIONE $\bar{P} = \{a < b\}$

LE DUE SOMMATORIE SI RIDUCONO A:

- $s(P) \Rightarrow m(b-a)$ $\qquad$ • $S(P) \Rightarrow M(b-a)$

QUINDI VALE

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Continuità Uniforme

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, diremo che:

f è uniformemente continua in $[a,b]$

def. $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X$

$$|x_1 - x_2| < \delta, \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

! Ci sono funzioni continue che non sono uniformemente continue (es. $f(x) = x^2$)

Teorema di Cantor

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

$\Rightarrow f$ è uniformemente continua in $[a,b]$

($f(x) = x^2$ diventa uniform. continua se si limita il dominio ad un intervallo $[a,b]$)

Teorema di integrabilità delle funzioni continue

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$

$\to f$ è integrabile s.R. in $[a,b]$

Dimostrazione

Fisso un $\varepsilon > 0$: $\varepsilon = \varepsilon / b-a$

Per il teorema di Cantor, f è uniformemente continua in $[a,b]$,

quindi $\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|x_1 - x_2| < \bar{\delta}, \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Fisso una partizione $P_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$:

t.c. $|x_k - x_{k-1}| < \bar{\delta}$, $\forall k = 1, 2 \dots n$

$\hookrightarrow |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon / b-a$

Consideriamo adesso la differenza fra somma integrale superiore ed inferiore

$$S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

SICCOME M_k ED m_k SONO VALORI ASSUNTI, QUELLO CHE VALEVA PER $f(x_k)$ E $f(x_{k-1})$, VALE ANCHE PER LORO

$$|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

(m E M SONO COMUNQUE DEGLI $f(x)$)

QUINDI È VALIDA LA MINORAZIONE

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

VISTO CHE $\varepsilon/b-a$ NON DIPENDE DA k, LO TIRO FUORI DALLA SOMMATORIA

$$\rightarrow \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})}_{\text{SOMMA DI TUTTI I SOTTO INTERVALLI DI } [a,b] \text{ OVVERO LA LUNGHEZZA DI TUTTO}}$$

QUINDI LA MINORAZIONE DIVENTA

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cdot \underbrace{\cancel{(b-a)}}_{\text{AMPIEZZA DI } [a,b]}$$

DA CUI SEGUE

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

QUINDI PER IL TEOREMA DI RIEMANN, f È INTEGRABILE S.R. NELL'INTERVALLO $[a,b]$

III TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

$$\rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

DIMOSTRAZIONE

PER IL I TEOREMA DELLA MEDIA:

$$\underbrace{m}_{\text{MIN } f}(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{M}_{\text{MAX } f}(b-a)$$

DIVIDO TUTTA LA CATENA PER $b-a$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}}$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

RAPPORTO DELLA MEDIA INTEGRALE → È UN NUMERO REALE

PER IL 2° TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI, f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI FRA IL SUO MIN (m) E MAX (M),

QUINDI $\exists\, f(x_0) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER $b-a$

$$f(x_0)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

CHE È ESATTAMENTE LA TESI DA DIMOSTRARE

TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ MONOTONA IN $[a,b]$

$\Rightarrow$ È INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

CASO f CRESCENTE: (DIMOSTRAZIONE ANALOGA PER DECRESCENTE)

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2)$$

SE CONSIDERIAMO ANCHE GLI ESTREMI COME PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO OTTENIAMO

$$f(a) \le f(x_1) \le f(x_2) \le f(b)$$

COSTRUISCO UNA PARTIZIONE P t.c. TUTTI GLI INTERVALLI ABBIANO AMPIEZZA $\frac{b-a}{n}$, OVVERO I PUNTI x_K SIANO EQUIDISTANTI

DA CUI $x_K = x_0 + K \cdot \frac{b-a}{n}$

PARTI DA x_0 — AGGIUNGI K VOLTE L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO

x_0 IN QUESTO CASO È a QUINDI

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$ SE k FOSSE $= n$

$$x_k = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b$$

VISTO CHE TUTTI GLI INTERVALLI $[x_k, x_{k-1}]$ SONO UGUALI, SOSTITUIAMOLI NELLA FORMULA:

$$S(P_n) - s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} m \cdot \frac{b-a}{n}$$

VALORE COMUNE NON DIPENDENTE DA k

METTO A FATTORE COMUNE

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)$$

$M_k \to f(x_k)$, $m_k \to f(x_{k-1})$ VISTO CHE f È CRESCENTE

ESPLICITO PARZIALMENTE LA SOMMATORIA E FACCIO UN'OSSERVAZIONE

$$\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)} \dots \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_{n-2})} + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}$$

DA QUALCHE PARTE LI DENTRO

TUTTI I TERMINI DELLA SOMMATORIA SI ELIDONO TRA LORO, ECCETTO $-f(x_0)$ E $f(x_n)$

$x_0 \to a$, $x_n \to b$

QUINDI LA SOMMATORIA SI RIDUCE A $f(b) - f(a)$.

LA SOSTITUISCO CON QUESTO NELLA FORMULA

$$\frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$ CHE DIVENTA 0 CON $n \to +\infty$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

PER IL TEOREMA DI REIMANN, QUESTO VUOL DIRE CHE f È INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

FUNZIONE INTEGRALE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

DEFINISCO LA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b]$$

- SE $x=a \to F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$
- SE $x=b \to F(b)=\int_a^b f(t)\,dt =$ INTEGRALE DEFINITO DI f IN $[a,b]$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

ANCHE CHIAMATO TEOREMA DELL'ESISTENZA DELLE PRIMITIVE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b]$ È DERIVABILE IN $[a,b]$. INOLTRE

$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

- REMINDER: NEL PUNTO a SI PARLA DI DERIVATA DESTRA E NEL PUNTO b SI PARLA DI DERIVATA SINISTRA, VISTO CHE a E b SONO GLI ESTREMI

DIMOSTRAZIONE

FISSO UN $x_0\in\,]a,b[$

FISSO UN $h\in I(0)\setminus\{0\}$

CONTINUA →

CONSIDERO IL RAPPORTO INCREMENTALE $\frac{\Delta F}{\Delta x}$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} =$$

USANDO LA PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ DEGLI INTEGRALI

$$\frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}}{h} =$$

SEMPLIFICO E RISCRIVO $\frac{---}{h}$ COME $\frac{1}{h}\cdot ---$

$$= \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

ADESSO CONSIDERO

$[x_0, x_0+h]$ SE AVEVO SCELTO $h>0$

$[x_0+h, x_0]$ SE AVEVO SCELTO $h<0$

ENTRAMBI SONO CONTINUI IN $[a,b]$

QUINDI PER ENTRAMBI I CASI VALE IL II TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE:

$$\exists\, x(h) \in I(x_0, x_0+h): \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(x(h))\cdot \underbrace{h}_{(x_0+h)-x_0}$$

QUINDI $\frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{h}}\cdot f(x(h))\cdot\cancel{h}$

RICORDIAMO CHE $x(h) \in I(x_0, x_0+h)$ OVVERO

$x(h) \in [x_0, x_0+h)$ CON h POSITIVO $\rightarrow x_0 \le x(h) \le x_0+h$

$x(h) \in [x_0+h, x_0]$ CON h POSITIVO $\rightarrow x_0+h\ x(h) \le x_0$

QUINDI

QUANDO h TENDE A 0, PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI $x(h)$ TENDE AD x_0, A PRESCINDERE DAL SEGNO DI h. QUINDI:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x_0) = F'(x_0)$$

RISCRITTO MEGLIO

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

! DA QUI SI NOTA ANCHE CHE L'INTEGRALE È L'OPERATORE INVERSO DELLA DERIVATA

Funzioni primitive

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X privo di punti isolati, sia $f: X \to \mathbb{R}$; diremo che:

$F: X \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ si verifica:

1) F derivabile in X
2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Proprietà

Se $F: X \to \mathbb{R}$ primitiva di f allora anche $F(x) + c$ è una primitiva di f, con c = costante, $c \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

Se $F(x)$ è derivabile in X, allora lo sarà anche $F(x) + c$, perché c è costante
$\to$ derivata di $c = 0$

Inoltre $D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$

Quindi $F(x) + c$ verifica tutte le condizioni delle primitive di f

---

Caratterizzazione delle primitive

di una funzione definita in un intervallo

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, siano $F, G: [a,b] \to \mathbb{R}$ due primitive di f

Allora:

$$\exists c \in \mathbb{R}: \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione

Introduco $H(x) = G(x) - F(x): [a,b] \to \mathbb{R}$
($H(x)$: funzione ausiliaria)

Già sappiamo che $F'(x) = G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

H è una differenza di funzioni derivabili
$\to H$ è derivabile

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

QUINDI $H'(x) = 0$

MA SE LA DERIVATA DI H È ZERO $\forall x$,
VUOL DIRE CHE H È UNA FUNZIONE COSTANTE:

$$\exists c \in \mathbb{R} : H(x) = c$$

$$G(x) - F(x) = c$$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

c PRENDE IL NOME DI <u>COSTANTE D'INTEGRAZIONE</u>

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ CON G PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$ VALE L'UGUAGLIANZA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

(G DI X CALCOLATO NELL'INTERVALLO $[a,b]$)

DIMOSTRAZIONE

APPLICHIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE AD f:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

G ED F SONO ENTRAMBE PRIMITIVE DI f

$\Rightarrow$ CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE:

$$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

SOSTITUISCO $F(x)$ CON LA FORMULA

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

NOTO CHE CON $x=a$

$$G(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{\int_a^a \text{ SEMPRE ZERO}} + c = c$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + G(a) \quad \forall x \in [a,b]$$

CON $x=b$ INVECE ABBIAMO

$$G(b) = \int_a^b f(t)\,dt + G(a) \quad \text{DA CUI}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \quad \text{COME NELLA TESI}$$

INTEGRALE INDEFINITO (DI f)

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$

CHIAMEREMO INTEGRALE INDEFINITO L'INSIEME DI TUTTE LE DERIVATE DI f E LO INDICHIAMO COSÌ: $\boxed{\int f(x)\,dx}$

VISTO CHE LE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE SI DIFFERENZIANO PER UNA COSTANTE c (COSTANTE DI INTEGRAZIONE), POSSIAMO DIRE:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \underline{\forall c \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{! \int 1\,dx \Rightarrow \int dx}$$

ALCUNE PROPRIETÀ:

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$:

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (\alpha \cdot f(x))\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$

INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ con $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$
- $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$
- $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c = a^{x} \cdot \log_a e + c$ $(a>0,\ a\neq 1)$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos + c$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

DERIVAZIONI DELLE FUNZIONI COMPOSTE

- $\int (f(x))^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$
- $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$
- $\int f'(x) \cdot \sin(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c$
- $\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\,dx = \sin(f(x)) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \tan(f(x)) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \arcsin(f(x)) + c$
- $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \arccos(f(x)) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{(1+(f(x))^2)}\,dx = \arctan(f(x)) + c$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

SIANO $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE CON DERIVATA CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA VALE:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{FATTORE FINITO}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{FATTORE DIFFERENZIALE}} \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int \underbrace{f'(x)}_{\text{DERIVATA DEL FATTORE FINITO}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{PRIMITIVA DEL FATTORE DIFFERENZIALE}} \, dx$$

LA FORMULA VIENE ESTRAPOLATA DA:

$$\underbrace{D[f(x) \cdot g(x)]} = \underbrace{f'(x) \cdot g(x)} + \underbrace{f(x) \cdot g'(x)}$$

(TUTTI INTEGRABILI)

(C'È UN CAMBIO DI SEGNO)

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

PICCOLO RIPASSO: SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI

SIANO $a(x)$ E $b(x)$ DUE POLINOMI E SIA IL GRADO DI $a(x)$ MAGGIORE O UGUALE AL GRADO DI $b(x)$ $(\deg a(x) \geq \deg b(x))$

ALLORA POSSIAMO SCOMPORRE IL RAPPORTO

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{q(x)}_{\text{QUOZIENTE}} + \underbrace{\frac{r(x)}{b(x)}}_{\text{RESTO}}$$

VEDIAMO PRIMA UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA: SIANO

Es. $a(x) = 2x^3 - 6x + 10$

$b(x) = x + 3$

$$\begin{array}{c|c} a(x) & b(x) \\ \hline & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

$\deg a(x) = 3 > \deg b = 1$

I GRADI INFERIORI DI QUELLO MASSIMO VANNO SCRITTI CON COEFF. 0

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 0x^2 - 6x + 10 & x + 3 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

① COME PRIMA COSA SI PRENDE L'ELEMENTO CON GRADO MASSIMO DI $a(x)$ E LO SI DIVIDE CON QUELLO DI GRADO MASSIMO DI $b(x)$

② IL RISULTATO VIENE INSERITO NELLO SPAZIO DI $q(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+0x^2-6x+10 & x+3 \\
\hline
-2x^3-6x^2 & 2x^2 \\
\hline
// \; -6x^2-6x+10 &
\end{array}
$$

③ DOPODICHÉ SI FA IL PRODOTTO CON OGNI ELEMENTO DI $b(x)$ E LO SI INSERISCE CON SEGNO CAMBIATO SOTTO L'ELEMENTO DI GRADO CORRISPONDENTE

④ POI SI FA LA SOMMA ALGEBRICA IN VERTICALE.

IL PROCESSO PUÒ ESSERE RIPETUTO FINCHÉ $\deg a(x) \geq \deg b(x)$

VEDIAMO LA SCOMPOSIZIONE FINITA

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+0x^2-6x+10 & x+3 \leftarrow b(x) \\
\hline
-2x^2-6x^2 & 2x^2-6x+12 \\
\hline
// \; -6x^2-6x+10 & \\
\quad +6x^2+18x & \\
\hline
\quad // \; +12x+10 & \\
\quad -12x-36 & \\
\hline
\quad // \; -26 &
\end{array}
$$

$q(x)$

$\deg(-26) < \deg b(x)$

GRADO 0 GRADO 1

FINE DELLA SCOMPOSIZIONE $r(x)$

QUINDI $\dfrac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{b(x)}$ DIVENTA

$$\frac{2x^3-6x+10}{x+3} = 2x^2-6x+12 + \frac{-26}{x+3}$$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

SIA $\displaystyle\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx$ L'INTEGRALE DI UN RAPPORTO DI POLINOMI

PER CALCOLARLO, CONSIDERIAMO 2 CASI:

1) $\deg a(x) \geq \deg b(x)$

SI SCOMPONE IL RAPPORTO DI POLINOMI:

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}\,dx$$

USO PROP. INTEGRALE SOMMA = SOMMA DI INTEGRALI

OTTENGO

$$\int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{b(x)}\,dx$$

DOVE $\deg r(x) < \deg b(x)$

FACILE DA RICAVARE

2° CASO

2) $\deg a(x) < \deg b(x)$

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx$$

SCOMPONGO $b(x)$ AI MINIMI TERMINI:

SI POSSONO VERIFICARE 3 CASI

- POLINOMIO 1° GRADO es. $\boxed{(x+1)}$
- QUADRATO DI POLINOMIO DI 1° GRADO es. $\boxed{(x+1)^2}$
- POLINOMIO DI 2° GRADO CON $\Delta < 0$, OVVERO NON ULTERIORMENTE SCOMPONIBILE es. $\boxed{(x^2+x+1)}$

NOI VOGLIAMO OTTENERE L'UGUAGLIANZA

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \boxed{\frac{\ell}{RAD.1} + \frac{h}{RAD.2} + \dots} = \frac{\ell\cdot(RAD_2) + h\cdot(RAD_1)}{b(x)}$$

CON $\ell, h \in \mathbb{R}$ E RAD. LE SCOMPOSIZIONI DI $b(x)$

! È QUI CHE ENTRANO IN GIOCO I $\boxed{3 \text{ CASI}}$ ← (IMPORTANTI)

- SE RAD. È <u>POLINOMIO DI PRIMO GRADO</u>, OTTENIAMO $\dfrac{\ell}{RAD}$

- SE RAD È <u>QUADRATO DI POLINOMIO DI PRIMO GRADO</u>, OTTENIAMO

$$\frac{\ell}{RAD} + \frac{h}{RAD^2}$$

UNA VOLTA CON, E UNA VOLTA SENZA QUADRATO

- SE RAD È <u>POLINOMIO DI 2° GRADO CON Δ NEGATIVO</u> $(\Delta < 0)$

$$\frac{\ell x + h}{RAD}$$

CON $\ell, h \in \mathbb{R}$, QUINDI SI INTRODUCE UNA FUNZIONE LINEARE DI 1° GRADO

- - - - - - - - - - - - - - - -

FATTO QUESTO PER OGNI RAD, PRENDIAMO LE NUOVE COSTANTI COSÌ OTTENUTE (ℓ, h ecc.) E ....

RIMETTIAMO TUTTO A FATTOR COMUNE.

PER RICAPITOLARE

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{h}{RAD_1} + \frac{l}{RAD_2} + \frac{K}{RAD_3} \ldots = \frac{COSE}{b(x)}$$

SI MOLTIPLICA PER $b(x)$

OTTENENDO $a(x) = COSE$

VEDIAMO COSA SONO LE COSE OTTENUTE

ESEMPIO CONCRETO

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$$

SCOMPONGO $b(x)$ AI MINIMI TERMINI

$$b(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

PROCEDO CON

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{l}{(x-1)} + \frac{h}{(x-2)} = \frac{\overbrace{l(x-2)+h(x-1)}^{COSE}}{(x-1)(x-2)}$$

SEMPLIFICO

$$x+1 = lx - 2l + hx - h \quad (a(x) = COSE)$$

ADESSO USIAMO UN SISTEMA PER RICAVARE l E h

$$\begin{cases} \text{GRADO 1:} & 1 = l + h \\ \text{GRADO 0:} & 1 = -2l + h \end{cases}$$

RISOLVO IL SISTEMA

COEFFICIENTE DI X IN

$$a(x) = 1x + 1$$

$$\begin{cases} l = 1 - h \Rightarrow l = \frac{2}{3} \\ h = -2l - 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$h = -\frac{7}{3}$$

TORNIAMO ALLE FRAZIONI ISOLATE

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} = \int \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)} - \frac{\frac{7}{3}}{(x-2)}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-1)}\,dx - \frac{7}{3}\int \frac{1}{(x-2)}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{7}{3}\log|x-2|$$

FINE

FACOLTATIVO

ESERCIZIO PER RICAPITOLARE

$a(x) = x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27$

$b(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx \qquad \deg a(x) \geq \deg b(x)$$

POCHI COMMENTI, CERCATE DI CAPIRE COSA STA SUCCEDENDO, QUALI CRITERI VENGONO APPLICATI ecc.

INIZIO

SCOMPONGO $a(x)$

$$\begin{array}{l|l}
x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27 & x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3 \quad \boxed{b(x)} \\
\hline
-x^7 - x^6 + 4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 & x^2 + 6x + 9 \quad \boxed{q(x)} \\
\hline
// \quad 6x^6 + 15x^5 - 15x^4 - 2x^3 + x^2 - 27x + 27 & \\
-6x^6 - 6x^5 + 24x^4 - 24x^3 + 30x^2 - 18x & \\
\hline
// \quad 9x^5 + 9x^4 - 26x^3 + 31x^2 - 45x + 27 & \\
-9x^5 - 9x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 45x - 27 & \\
\hline
// \quad // \quad 10x^3 - 5x^2 \quad // \quad // &
\end{array}$$

$r(x) = 10x^3 - 5x^2$

TORNIAMO SULL'INTEGRALE

$$\int \frac{a(x)}{b(x)}\,dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}\,dx$$

$$= \int x^2 + 6x + 9\,dx + \int \frac{10x^3 - 5x^2}{\underbrace{x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}}\,dx$$

$$= \int (x+3)^2\,dx + 5\int \frac{2x^3 - x^2}{b(x)}\,dx$$

$$\frac{(x+3)^3}{3}$$

$\deg r(x) < \deg b(x)$

SCOMPONGO IL DENOMINATORE

$b(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3$

USO RUFFINI: RADICE $x = 1$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 1 & -4 & 4 & -5 & 3 \\
1 & & 1 & 2 & -2 & +2 & -3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & +2 & -3 & 0
\end{array}$$

$b(x) = (x-1)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3)$

RUFFINI DI NUOVO: RADICE $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\
1 & & 1 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0
\end{array}$$

$b(x) = (x-1)^2(x^3 + 3x^2 + x + 3)$

RECAP.

$$\frac{(x+3)^3}{3} + 5\int \frac{2x^3-x^2}{(x-1)^2(x^3+3x^2+x+3)}\,dx$$

(POTREI USARE ANCORA RUFFINI)

NOTO UN PATTERN SIMILE:

RACCOGLIMENTO PARZIALE

$$x^3+3x^2+x+3 = x^2(x+3) + 1(x+3)$$

1 SOTTINTESO

$$(x+3)(x^2+1)$$

TORNANDO ALL'INTEGRALE

$$\int \frac{(2x^3-x^2)}{(x+3)(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c}{(x+3)} + \frac{d}{(x-1)} + \frac{e}{(x-1)^2} + \frac{fx+h}{(x^2+1)} =$$

$$\frac{(cx^2-2cx+c)(x^2+1)+(dx-d)(x+3)(x^2+1)+(ex+3e)(x^2+1)+(fx+h)(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)(x^2+1)}$$

I RISULTATI DEI CALCOLI SONO

COSTANTE

- c : $cx^4-2cx^3+2cx^2-2cx+c$
- d : $dx^4+2dx^3-2dx^2+2dx-3d$
- e : $ex^3+3ex^2+ex+3e$
- f : $fx^4+fx^3-5fx^2+3fx$
- h : $hx^3+hx^2-5hx+3h$

LA SOMMA DI QUESTI $= a(x) = 2x^3-x^2$

GRADO MAX. 4 → SISTEMA A 5

GRADI

$$\begin{cases} x^4 & 0 = c+d+f \\ x^3 & 2 = -2c+2d+e+f+h \\ x^2 & -1 = 2c-2d+3e-5f+h \\ x^1 & 0 = -2c+2d+e+3f-5h \\ 0 & 0 = c-3d+3e+3h \end{cases}$$

DIFF.: $2 = -2f-6h$

$f = -3h-1$

$h = \frac{-f-1}{3}$

USARE QUALSIASI METODO OPPORTUNO PER RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} c = -d - f \\ e = -4d - 3f - h + 2 \Rightarrow e = -4d + 8h + 5 \\ h = 5f - 3e + 2d - 2c - 1 \\ f = -3h - 1 \\ 0 = -d - f - 3d + 3e - f - 1 \Rightarrow f = -4d + 3e - 1 \end{cases}$$

$\leftarrow f = -c - d = -3h - 1$

$+7f \quad +4d$

$\uparrow$ diff. * $\downarrow$

$$\begin{cases} c = -d - 5/19 \\ e = 4d + 16/19 \\ h = 7f - 3e + 4d - 1 \\ f = 24/19 - 1 = 5/19 \\ h = 6f - 2 \Rightarrow h = -18h - 6 - 2 \Rightarrow h = -\frac{8}{19} \end{cases}$$

somma

ma $f = -3h - 1$

$$\begin{cases} c = \frac{9 - 80}{304} = -\frac{71}{304} \\ d = \frac{55}{76} \cdot \frac{1}{4} - \frac{16}{19} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{55 - 64}{76}\right) = -\frac{9}{304} \\ * \; e = \frac{f + 8h + 6}{4} = \frac{5}{76} - \frac{16}{19} + \frac{3}{2} = \frac{55}{76} \\ f = 5/19 \\ h = -\frac{8}{19} \end{cases}$$

ABBIAMO I VALORI

$c = -\frac{71}{304} \quad d = -\frac{9}{304} \quad e = \frac{55}{76} \quad f = \frac{5}{19} \quad h = -\frac{8}{19}$

QUINDI IL TUTTO VIENE:

$$\int \frac{x^7 + 7x^6 + 11x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 27x + 27}{x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{(x+3)^3}{3}}_{\int g(x)\,dx} - \underbrace{\frac{71}{304}\log|x+3|}_{\int c/(x+3)\,dx} - \underbrace{\frac{9}{304}\log|x-1|}_{\int d/(x-1)\,dx} + \underbrace{\frac{55}{76}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}}_{\int e/(x-1)^2\,dx} \quad \frac{-55}{76(x-1)}$$

$$+ \underbrace{\frac{5}{38}\log(x^2+1)}_{\int fx/(x^2+1)\,dx} - \underbrace{\frac{8}{19}\arctan x}_{\int h/(x^2+1)\,dx} + \underbrace{c}_{\text{COSTANTE DI INTEGRAZIONE}}$$

FINE

OSSERVAZIONI

DA NOTARE CHE SULLA SCALA (1° GRADO), OVVERO $(x+1) \rightarrow (x+1)^2 \rightarrow (x^2+1)$

(1° GRADO)^2 (2° GRADO)

LE COSTANTI HANNO VALORI PIÙ GESTIBILI AI GRADI ALTI $\left(-8/19,\ 5/19\right)$ CHE AI GRADI BASSI $\left(-\frac{71}{304},\ 55/76\right)$, MA SOLO SE SONO PRESENTI ENTRAMBI. IL SUPERIORE $(fx+h)$ COMPLICA L'INFERIORE (c)

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E

SIA $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$ E CON DERIVATA CONTINUA

ALLORA VALE CHE

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Es. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{t}{t-1}\cdot 2t\,dt$$

$g'(t)$

$$2\cdot\int \frac{t^2}{t-1}\,dt =$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO 1

$(t+1)(t-1)$

$$2\cdot\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int \frac{t^2-1}{(t-1)} + \frac{1}{(t-1)}\,dt$$

$$2\cdot\int \frac{(t+1)\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}}\,dt + 2\cdot\int \frac{1}{t-1}\,dt =$$

$$2\int t\,dt + 2\int dt + 2\log|t-1| =$$

$$2\cdot\frac{t^2}{2} + 2t + \log(t-1)^2$$

RIPRENDIAMOCI ADESSO LA VARIABILE ORIGINALE

SOSTITUISCO $\sqrt{x} = t$

$$x + 2\sqrt{x} + \log(\sqrt{x}-1)^2 + c$$

FINE

IMPORTANTE

L'ESERCIZIO È CONCLUSO. QUELLO CHE SEGUE HA UN UTILITÀ MOLTO RISTRETTA, QUINDI IN GENERE SI FA SOLO PER FORMA/ESTETICA (IN QUALCHE CASO PERÒ È UTILE VERAMENTE)

$$x + 2\sqrt{x} + \log(\sqrt{x}-1)^2 \underbrace{+1-1} + c =$$

$$(\sqrt{x}+1)^2 + \log\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{e}\right) + c$$

ULTIMA SEZIONE SUGLI INTEGRALI DEFINITI

- CALCOLO DELL'AREA DI UN RETTANGOLOIDE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ CON $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$

CONSIDERIAMO IL RETTANGOLOIDE CON BASE $|b-a|$: LA SUA AREA SARÀ

$$A(R)=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ .o ANCHE

$$\left[F(x)\right]_a^b$$

NEL CASO CI SIANO PIÙ FUNZIONI (FUNZIONI COMPOSTE PER ESEMPIO) VALGONO LE STESSE REGOLE

es. $f(x)=g(x)+h(x)$ $\quad \left[G(x)+H(x)\right]_a^b$

$$A(R)=\int_a^b g(x)\,dx+\int_a^b h(x)\,dx =$$

(diversi modi per scrivere la stessa cosa)

$$\left(G(b)+H(b)\right)-\left(G(a)+H(a)\right)$$

RICORDA! ~~+C~~
NO COSTANTE DI INT. PER INTEGRALI DEFINITI

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI, PER INTEGRALI DEFINITI

SIANO $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUE E CON DERIVATA CONTINUA IN $[a,b]$

VALE CHE:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE, PER INTEGRALI DEFINITI

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$ E SIA $g:[c,d]\to[a,b]$ DERIVABILE E CON DERIVATA CONTINUA INVERTIBILE (IN $[a,b]$)

VALE CHE:

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

$a=g(c) \Rightarrow c=g^{-1}(a)$

$b=g(d) \Rightarrow d=g^{-1}(b)$

ESEMPIO
g = ELEVAMENTO A ^{2}
$a=c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a}$
$b=d^2 \Rightarrow d=\sqrt{b}$

VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$
CON $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$

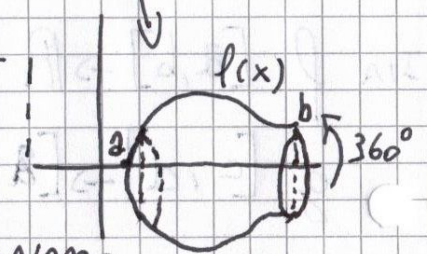
FACENDO RUOTARE (IL GRAFICO DELLA) LA FUNZIONE f ATTORNO ALL'ASSE DELLE ASCISSE, SI OTTIENE UN SOLIDO, CHIAMATO DI ROTAZIONE

CON VOLUME $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ $\quad (V=\pi r^2 \cdot h)$

CILINDRO

CON $b-a=h$ ALTEZZA DEL SOLIDO

$\int (f(x))^2$ RAGGIO DEL SOLIDO

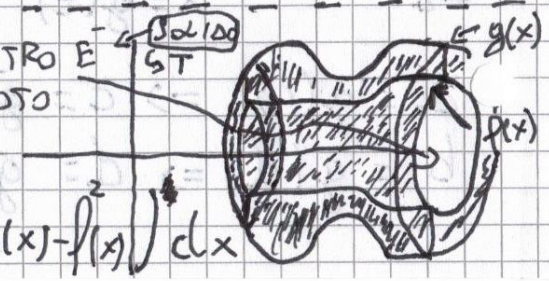


INOLTRE È POSSIBILE OTTENERE SOLIDI CON CONCAVITÀ SE CI SOTTRAIAMO UN SOLIDO PIÙ PICCOLO:

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUE IN $[a,b]$ t.c.

$0\leq f(x)\leq g(x)$ DENTRO È VUOTO

$\forall x\in[a,b]$



$$A(T)=\pi\int_a^b \left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx$$

SERIE NUMERICHE

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $\{a_n\}$

TERMINE GENERALE DELLA SERIE

VOGLIAMO STUDIARE LA SOMMATORIA (CHIAMATA SERIE)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

CHIAMIAMOLA 1

OVVIAMENTE NON POSSIAMO FARE LA SOMMA DI INFINITI TERMINI,

SOMME PARZIALI:

$S_0=a_0$

$S_1=a_0+a_1$

$S_n=a_0+a_1+\dots a_n$

ANCHE QUESTA È UNA SUCCESSIONE: $\{S_n\}$ È LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

CARATTERE DI UNA SERIE

STUDIANDO IL LIMITE PER $n \to +\infty$ DELLA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI, SI DETERMINA IL CARATTERE DELLA SERIE

UNA SERIE SI DICE:

- CONVERGENTE SE $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$
- DIVERGENTE SE $\lim_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty$
- INDETERMINATA SE $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

SERIE DI CARATTERE CONVERGENTE O DIVERGENTE SI DICONO REGOLARI

FACCIAMO DEGLI ESEMPI:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ ecc.

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 - 1 = 0$

$S_2 = 1 - 1 + 1 = 0$ ecc.

$\{S_n\}$ NON HA LIMITE

$\to$ SERIE INDETERMINATA

- $\sum_{n=0}^{+\infty} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad n \to +\infty \quad \lim S_n = +\infty$

SERIE DIVERGENTE

- SERIE DI MENGOLI (CONVERGENTE)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \text{ecc.}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CON IL PRINCIPIO DI INDUZIONE CHE

$$\{S_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

P.B. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

P.I. $n>1$

TESI

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\cdot k} = \frac{n-1}{n-1+1} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\cdot k} = \frac{n}{n+1}$$

$$+$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\cdot k} + \frac{1}{(n+1)\cdot n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\cdot k}$$

$$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^{\cancel{2}} - \cancel{n} + \cancel{1}}{\cancel{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \checkmark$$

QUINDI

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

LA SERIE È DI CARATTERE <u>CONVERGENSE</u> E CONVERGE AD 1

CONDIZIONI NECESSARIE PER CONVERGENZE DI SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ È CONVERGENTE} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

DIMOSTRAZIONE

(1) CONVERGE $\Leftrightarrow \{S_n\}$ CONVERGE $\rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = S$

VISTO CHE

$$S_n = a_0 + a_1 \dots a_n$$
$$S_{n-1} = a_0 + a_1 \dots a_{n-1}$$
$$\rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\downarrow n\to+\infty$$

$$S - S = a_n = 0$$

QUINDI IL TERMINE GENERALE a_n È INFINITESIMO: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Es. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \rightarrow$ NON È UNA SERIE CONVERGENTE

SUCCESSIONE DI CAUCHY (DEFINIZIONE)

$\{a_n\}$ È UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY $\overset{def.}{\iff}$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall m,n>\nu \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

CRITERIO DI CAUCHY PER SUCCESSIONI

$\{a_n\}$ È CONVERGENTE $\iff$ È UNA S. DI CAUCHY

! VALE IN $\mathbb{R}$ MA NON IN $\mathbb{Q}$ PERCHÈ

$\exists \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \subseteq \mathbb{Q}$ È DI CAUCHY MA $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

ED $e \notin \mathbb{Q}$

CRITERIO DI CAUCHY PER SERIE

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE $\iff \forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N}$:

$$\forall n>\nu, \forall p \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1}+a_{n+2}\dots+a_{n+p}| < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE

PER DEFINIZIONE ① CONVERGE $\iff \{s_n\}$ CONVERGE

$\{s_n\}$ È UNA SUCCESSIONE, APPLICO IL CRITERIO DI CAUCHY PER SUCCESSIONI

$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall m,n>\nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon$$

PRENDO UN $p \in \mathbb{N}$ E CONSIDERO

$m = n+p$

$$\forall n>\nu \quad |s_m - s_n| < \varepsilon \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

OVVERO $|a_0 + a_1 + \dots a_{n+p} - (a_0 + a_1 + \dots a_n)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+p}| < \varepsilon$$

NOTE SUL TEOREMA DELLE CONDIZIONI NECESSARIE PER CONVERGENZE DI SERIE

IL TEOREMA DICE CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

È UN IMPLICAZIONE, NON VALE IL CONTRARIO, MA IL TEOREMA PUÒ ESSERE USATO IN MANIERA <u>DISTRUTTIVA</u> TRAMITE LA TAUTOLOGIA DELLA CONTRAPPOSIZIONE DELLA NEGAZIONE:

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p \quad \text{OVVERO}$$

a_n NON È INFINITESIMO $\to \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ DIVERGE (OPPURE È IRREGOLARE)

OPERAZIONI FRA SERIE

SIANO a, b DUE SERIE REGOLARI:

- LA SOMMA DI DUE SERIE REGOLARI, È A SUA VOLTA UNA SERIE REGOLARE
- SE a E b CONVERGONO $\to a+b$ CONVERGE
- SE a E b DIVERGONO $\to a+b$ DIVERGE
- SE a CONVERGE E b DIVERGE $\to a+b$ DIVERGE
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CON c COSTANTE
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \text{CONVERGE} : < +\infty \\ \text{DIVERGE} : = +\infty \end{cases}$
- $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{(n+k)}$

<u>SERIE RESTO</u>: LA SERIE CALCOLATA DA UN CERTO k IN POI, HA LO STESSO CARATTERE DELLA SERIE COMPLETA (A MENO CHE $k = +\infty$)

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI (POSITIVI)

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ SI CHIAMA $\begin{cases} \text{SERIE A TERMINI NON NEGATIVI} \\ \text{SERIE A TERMINI POSITIVI} \end{cases}$

$$\begin{cases} (\text{NON NEG.}) \Longleftrightarrow a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ (\text{POSITIVI}) \Longleftrightarrow a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

TEOREMI SU SERIE A TERMINI NON NEGATIVI, SI APPLICANO IN AUTOMATICO PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

TEOREMA SULLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI È SEMPRE REGOLARE: O CONVERGE, O DIVERGE ($+\infty$)

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = a_0, a_1 \dots a_n, = S_{n-1} + a_n \rightarrow S_n \geq S_{n-1}$$

LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI È CRESCENTE

PER IL TEOREMA DI REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE

$\{S_n\}$ $\begin{cases} \text{CONVERGE} \rightarrow \text{LA SERIE CONVERGE} \\ \text{DIVERGE} \rightarrow \text{LA SERIE DIVERGE} \end{cases}$

~~IRREGOLARE~~

SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ CON $x \in \mathbb{R}$ CHIAMATO RAGIONE

OSSERVO I CASI:

- $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 0^0 + 0^1 + 0^2 \dots = 1 + 0 + 0 \dots$

  CONVERGE A 1 (OPPURE A 0 SENZA $0^0 = 1$)

- $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1^0 + 1^1 + 1^2 \dots = +\infty$

  DIVERGE

- $x > 1$ ANCHE OVVIAMENTE DIVERGE

• $x < 1$ USIAMO UNA FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA (DIMOSTRABILE PER INDUZIONE)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \nexists & x \leq -1 \quad \underline{\text{INDETERMINATA}} \\ \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

COMPRENDE ANCHE IL CASO $x=0$ CHE INFATTI FA $1/1 \to 1$

DIREMO QUINDI CHE PER

• $-1 < x < 1$ $(|x| < 1)$ $\Rightarrow$ LA SERIE È <u>CONVERGENTE</u>

ED AVRÀ COME $S = \frac{1}{1-x}$

SOMMA

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \dots \quad \underline{\text{DIVERGE}}$$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \frac{1}{n^p} + \dots$$

CON $p \in \mathbb{R}$

IL CARATTERE DELLA SERIE DIPENDE DA p

• $p > 1 \Rightarrow$ CONVERGE

• $p = 0 \Rightarrow$ DIVERGE POSITIVAMENTE

• $p < 0 \Rightarrow$ DIVERGE P.

• $p \leq 1 \Rightarrow$ DIVERGE P.

DIVERGONO SEMPRE, MA PER MOTIVI DIVERSI

SI POTREBBE DIRE

• $p > 1 \Rightarrow$ CONVERGE

• $p \leq 1 \Rightarrow$ DIVERGE POSITIVAMENTE

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

CRITERI DEL CONFRONTO

CONSIDERIAMO DUE SERIE E LE LORO CORRISPETTIVE SUCCESSIONI $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $0 \le a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

RISULTA CHE

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ (CARABINIERI)

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$ (CONFRONTO PER SUCCESSIONI INF.)

DIMOSTRAZIONI

1) CONSIDERO A_n (S_n DI a) E B_n (S_n DI b)

$A_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$

$B_n = b_0 + b_1 + \dots b_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow 0 \le A_n \le B_n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\leftrightarrow \{B_n\}$ CONVERGE

MA $0 \le A_n \le B_n$, QUINDI PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI, A_n CONVERGE

DA CUI ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ È CONVERGENTE

2) ALLO STESSO MODO

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE $\leftrightarrow \{A_n\}$ DIVERGE

MA VISTO CHE $B_n \ge A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, PER PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER SUCCESSIONI INFINITE, B_n DIVERGE

QUINDI ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ DIVERGE (POSITIVAMENTE)

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI NON NEGATIVI

SUPPONGO CHE PER UN $p \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} n^p \cdot a_n = \ell$$ RISULTA CHE

1) $\ell \neq +\infty$, $p > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\ell \neq 0$, $p \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

IN REALTÀ $n^p \cdot a_n = \dfrac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ → CHE È LA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA CON $p > 1$, $p \leq 1$ A SECONDA DEI CASI

a_n / SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

DIMOSTRAZIONE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu \; |n^p \cdot a_n - \ell| < \varepsilon$$

1) SCELGO $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu}$

$$|n^p \cdot a_n - \ell| < 1 \Rightarrow -1 < n^p \cdot a_n - \ell < 1$$

SOMMO A TUTTI ℓ

$$\ell - 1 < n^p \cdot a_n < \ell + 1$$ DIVIDO TUTTI PER n^p

$$(\ell - 1)/n^p < a_n < (\ell + 1)/n^p$$ ANCHE SCRITTO

$$(\ell - 1) \cdot \frac{1}{n^p} < a_n < (\ell + 1) \cdot \frac{1}{n^p}$$

COSTANTI — SERIE ARMONICHE CONVERGENTI ($p > 1$)

a_n COMPRESO FRA DUE VALORI CONVERGENTI

→ a_n È CONVERGENTE (IN REALTÀ BASTA $a_n < (\ell+1)\frac{1}{n^p}$)

2) $\varepsilon = \ell/2 \Rightarrow \exists \bar{\bar{\nu}}$: «« STESSI PASSAGGI »»

$$\frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{n^p} < a_n < \frac{3}{2}\ell \cdot \frac{1}{n^p}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $< +\infty$ CASO ①; $= +\infty$ CASO ②

SERIE ARMONICA DIVERGENTE ($p \leq 1$) → a_n È PER FORZA DIVERGENTE

CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE A TERMINI POSITIVI

SUPPONGO:

$$\exists\, l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ DA CUI RISULTA:

1) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $l = 1 \Rightarrow$ CASO DUBBIO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$?

3) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Es. DI CASI DUBBI

SERIE DI MENGOLI: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\cancel{(n+1)}(n+2)}}{\frac{1}{n\cancel{(n+1)}}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$ E

LA SERIE CONVERGE

$\lim = 1$ DUBBIO

SERIE ARMONICA: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ MA

LA SERIE DIVERGE

SERIE ESPONENZIALE

$$x \in \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots$$

APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$ LA SERIE È CONVERGENTE

CRITERIO DELLA RADICE

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} :$$

1) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $l = 1 \Rightarrow$ CASO DUBBIO: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = ?$

3) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Serie Alternate (o a segno alterno)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n \cdot a_n + \ldots$$

con $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Criterio di Leibnitz

sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi, infinitesima e decrescente:

$\rightarrow$ la serie a segno alterno converge

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n < +\infty$$

inoltre:

detti S = la somma della serie e S_n = la (somma) ridotta n-esima

si ha che $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot a_k$

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergenza Assoluta

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty$

ovvero, converge

inoltre vale:

Convergenza Assoluta $\rightarrow$ Convergenza

dimostrazione

per il criterio di Cauchy per serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\nu} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{\nu},$$

$$\forall p \in \mathbb{N} : \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p}|\big| < \varepsilon$$

per la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ valgono le stesse condizioni, ma senza il valore assoluto dei singoli termini: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}| < \varepsilon$

ma per le proprietà dei valori assoluti ($|x+y| \leq |x| + |y|$) vale la catena

$$|a_{n+1} + \ldots a_{n+p}| \leq \big||a_{n+1}| + \ldots |a_{n+p}|\big| < \varepsilon$$

quindi se vale per $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$, automaticamente è valido per $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ovvero $\boxed{\left(\sum |a_n| < +\infty\right) \rightarrow \left(\sum a_n < +\infty\right)}$

Volevo ringraziare in questa ultima pagina, tutte le persone che mi hanno aiutata a portare a termine questo semestre. Ma soprattutto, voglio ringraziare la professoressa Annamaria Barbagallo, la professoressa e mia cara amica, Anna Esposito, per avermi fatto apprezzare questa materia in modi che non ritenevo possibili.

Grazie

VVB

-G