GRANDEZZE SCALARI

Possono essere espresse da un numero (e l'unità di misura)

GRANDEZZE VETTORIALI

Sono definite da 3 elementi:

- MODULO (numero, intensità)
- DIREZIONE (retta sulla quale agisce il vettore)
- VERSO (dove è orientato il vettore, dx, sx, su, giù)

Sono rappresentate da **VETTORI** (segmenti orientati)

- $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ VETTORE
- $|\vec{v}|$, v MODULO DEL VETTORE

A = punto d'origine

B = punto di termine

VETTORI UGUALI

Due vettori si dicono **UGUALI** se hanno stesso punto di origine (A) e di termine (B), oppure se hanno tutte e 3 le caratteristiche uguali

VETTORE NULLO

Un vettore si dice nullo se il punto d'origine e di termine coincidono (modulo nullo)

VERSORE

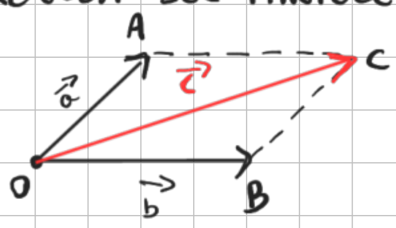
E' un vettore con modulo unitario (1)

Generalmente viene indicato con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

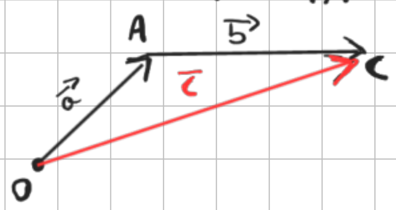
SOMMA DI DUE VETTORI

$\vec{a}, \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



METODO PUNTA-CODA



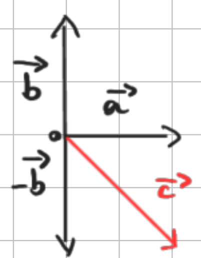
(si usa di solito per 3 o più vettori)

OPPOSTO DI UN VETTORE

$\vec{a} + \vec{b} = 0$ $\qquad$ $\vec{b} = -\vec{a}$

DIFFERENZA TRA 2 VETTORI

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

Il prodotto tra un vettore $\vec{a}$ e uno scalare m ha:

- MODULO il prodotto tra il modulo di a e lo scalare
- DIREZIONE del vettore $\vec{a}$
- VERSO opposto ad $\vec{a}$ se $m<0$, altrimenti concorde

$\vec{v} = m\vec{a}$ $\quad |\vec{v}| = m|\vec{a}|$ $\quad$ oppure $\quad v = ma$

RAPPORTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Il rapporto tra un vettore $\vec{a}$ e uno scalare m ha:

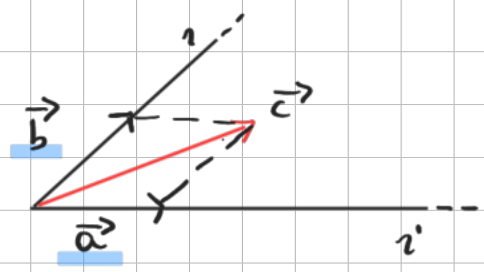
- MODULO sarà il rapporto tra $|\vec{a}|$ ed m
- DIREZIONE del vettore $\vec{a}$
- VERSO opposto ad $\vec{a}$ se $m<0$, altrimenti concorde

OSS

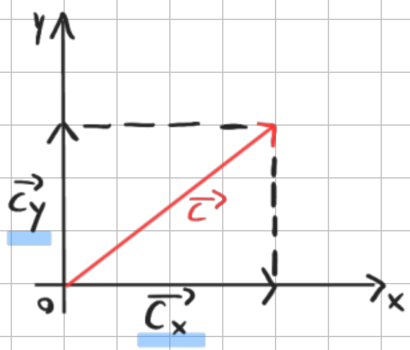
Dividendo un VETTORE per il suo MODULO otteniamo un versore (che in particolare manterrà verso, direzione e modulo 1)

DECOMPOSIZIONE DI UN VETTORE

Dato il vettore $\vec{c}$ e due rette r ed r', quali sono i vettori su r' ed r' che mi danno $\vec{c}$? (inverso del parallelogramma)



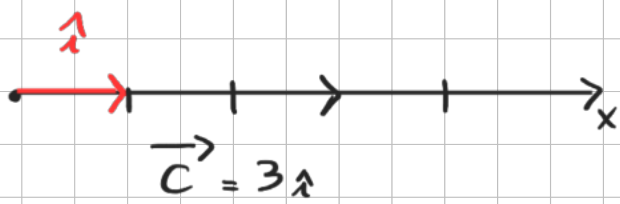
Se le due rette sono PERPENDICOLARI otteniamo un sistema di assi cartesiani



I vettori risultanti $\vec{C}_x, \vec{C}_y$ saranno I COMPONENTI di $\vec{C}$

OSS

Dato un VETTORE e un VERSORE



$\vec{C} = 3\hat{i}$

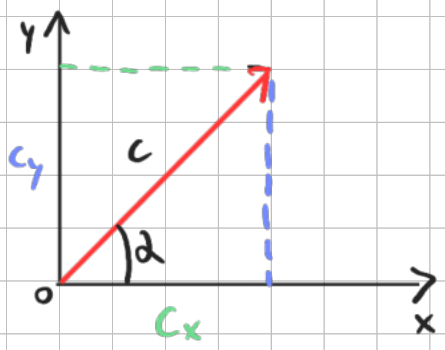
$\vec{C_x} = C_x \hat{i}$ $\quad$ C_x è LA COMPONENTE di $\vec{C_x}$

$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}$ $\quad$ C_x e C_y sono LE COMPONENTI di $\vec{C}$

COMPONENTI CARTESIANE DEL VETTORE

$\vec{C} \equiv (C_x, C_y)$

C_x e C_y corrispondono alle coordinate del punto termine



$|\vec{C}| = C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$

$C_x = C \cos\alpha$ $\qquad$ $\frac{C_y}{C_x} = \tan\alpha$

$C_y = C \sin\alpha$

$\alpha = \arccos \frac{C_x}{C} = \arcsin \frac{C_y}{y} = \arctan \frac{C_y}{C_x}$

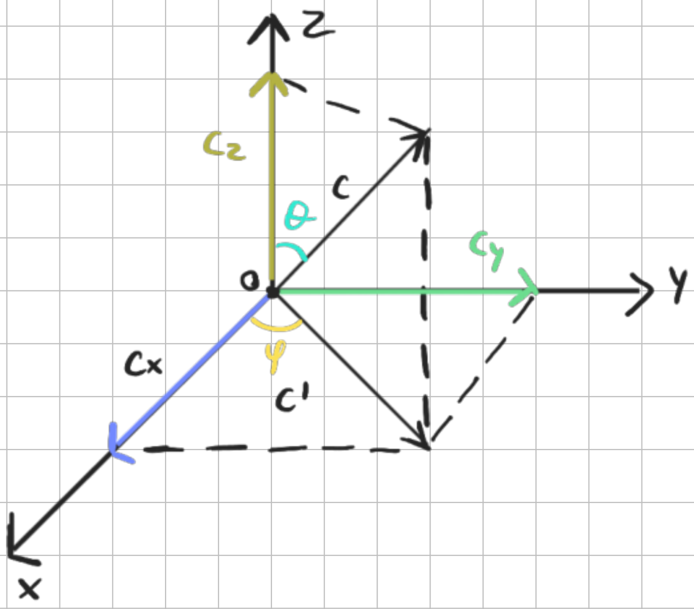
COORDINATE POLARI

Possiamo esprimere il nostro vettore attraverso la coppia data dal MODULO del vettore e l'ANGOLO che forma con l'asse delle x

$$\vec{c} \equiv (|\vec{c}|, \alpha)$$

$\vec{c} \equiv (c, \alpha) \iff \vec{c} \equiv (c_x, c_y)$ sono equivalenti

COORDINATE TRIDIMENSIONALI



$\vec{c} = \vec{c_x} + \vec{c_y} + \vec{c_z}$

$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$

$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

$c = \sqrt{c'^2 + c_z^2}$

$|\vec{c}| = c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$

$\vec{c} \equiv (c, \theta, \varphi)$

MOLTIPLICAZIONE ALGEBRICA TRA SCALARE PER VETTORE

$\vec{v} = m\vec{a}$ $\quad\quad$ $\vec{a} = a_x \hat{i}, a_y \hat{j}$

$\vec{v} = m(a_x \hat{i}, a_y \hat{j}) = \underbrace{ma_x}_{V_x} \hat{i}, \underbrace{ma_y}_{V_y} \hat{j}$

SOMMA TRA 2 VETTORI

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ $\quad b = b_x \hat{i}, b_y \hat{j}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + b_x \hat{i}, b_y \hat{j}$

$\vec{c} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} \hat{i} + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} \hat{j}$

PROPRIETA' DELLA SOMMA TRA VETTORI

① COMMUTATIVITA'

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

② ASSOCIATIVITA'

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

③ PRODOTTO SCALARE

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = ab \cos\theta$

se $\vec{a} \parallel \vec{b}$ allora $\vec{a}\vec{b} = ab$

PRODOTTO SCALARE IN FUNZIONE DELLE COMPONENTI RETTANGOLARI

Generalizziamo il prodotto scalare su 3 dimensioni:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Risulta essere la SOMMA dei PRODOTTI delle COMPONENTI OMOLOGHE dei due vettori

OSS

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ NON HA SENSO

CALCOLO DELL' ANGOLO COMPRESO TRA DUE VETTORI

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ①

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$ ②

Dall' uguaglianza ① = ② possiamo ricavarci θ:

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

RICORDA: $\vec{a} \equiv (a_x, a_y) \equiv (a, \theta)$

Es.

$\vec{a} \equiv (1, 0)$ $\vec{b} \equiv (\sqrt{3}, -1)$ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+0}{1 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$$

PRODOTTO VETTORIALE

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ E' un vettore che avrà:

- MODULO

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ $c = ab \sin\theta$

- DIREZIONE

$c \perp a$ e $c \perp b$

- VERSO

Sara' quello di un osservatore che vedra' sovrapporre il primo vettore sul secondo vettore (secondo l'angolo più piccolo) in senso ANTIORARIO

OSS

Il prodotto vettoriale NON e' COMMUTATIVO

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$

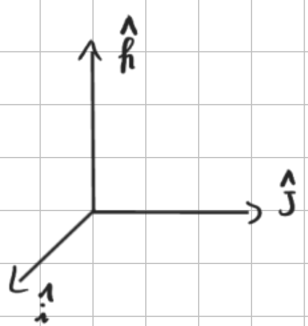
$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

Se $\vec{a} // \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ e $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$

PROPRIETA' DISTRIBUTIVA RISPETTO ALLA SOMMA

$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

PRODOTTO VETTORIALE TRA VERSORI



$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ $\quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$ $\quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0}$

PRODOTTO VETTORIALE (proprietà rettangolari)

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \wedge (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

In alternativa possiamo usare il metodo dei determinanti:

$\vec{a} \wedge \vec{b} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Cancelliamo riga e colonna di $\hat{i}$ ed eseguiamo il prodotto a X (sottraendo i fattori)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$i(a_y b_z - a_z b_y) + \dots$

Iteriamo anche per $\hat{j}$ e $\hat{k}$ sommando i 3 risultati ricordando che il versore $\hat{j}$ ha segno negativo (roba di indici)

Es.

$\vec{a} \equiv (1,0)$ $\vec{b} \equiv (\sqrt{3},-1)$

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Dobbiamo esprimere a e b tridimensionalmente (esplicitare "a_z")

Questo va fatto perchè $\vec{c}$ è sempre orientato nello spazio, quindi necessita di tutte e 3 le coordinate (c_x, c_y, c_z)

Nel caso di vettori bidimensionali, $a_z = 0$

$\vec{a} \equiv (1, 0, 0)$, $\vec{b} \equiv (\sqrt{3}, -1, 0)$

$a_x = 1 \quad a_y = 0 \quad a_z = 0$
$b_x = \sqrt{3} \quad b_y = -1 \quad b_z = 0$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(-1+0) = -\hat{k}$$

GRANDEZZE FISICHE

Esistono due tipi di grandezze: FONDAMENTALI e DERIVATE

Per stabilire il legame esistente tra queste due usiamo le EQUAZIONI DIMENSIONALI:

$[S] = [\ell^2]$ SUPERFICIE

$[V] = [\ell^3]$ VOLUME

$[v] = [LT^{-1}]$ VELOCITA'

$[\rho] = [ML^{-3}]$ DENSITA'

COERENZA DIMENSIONALE DI UN'EQUAZIONE

Ogni misura dev'essere dimensionalmente coerente, quindi ad esempio se stiamo trattando una massa l'espressione di questa dovrà "darci" una massa.

Questa proprietà si può sfruttare nella ricerca o verifica di unità dimensionali, in particolare possiamo generalizzare ogni unità di misura:

$[G] = [M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}]$

NOTAZIONE SCIENTIFICA

Possiamo esprimere cifre molto grandi (o piccole) attraverso il prodotto di un numero compreso tra 0 e 10 e una potenza di 10

Es.

$c = 3 \cdot 10^8 \, m/s$

ERRORE DI UNA MISURA

Siccome ogni strumento ha una determinata SENSIBILITÀ (la più piccola quantità misurabile), ogni MISURAZIONE è soggetta a un ERRORE pari proprio alla sensibilità dello strumento

Es.

la sensibilità della mia bilancia è 0,002 Kg, la misura sarà:

$$\underbrace{3,157}_{\text{misurazione}} \pm \underbrace{0,002}_{\text{sensibilità}} \quad \underbrace{kg}_{\text{unità di misura}}$$

CIFRE CERTE e INCERTE

Definiamo CIFRE CERTE le cifre sulle quali non ricade l'errore, diremo CIFRA INCERTA la cifra sulla quale ricade l'errore

3,157 ± 0,002 3,1,5 sono CERTE 7 è INCERTA

N.B.

Il numero di CIFRE INCERTE dipende dall'errore

CIFRE SIGNIFICATIVE

Le CIFRE SIGNIFICATIVE di una misura sono le cifre CERTE più la PRIMA CIFRA INCERTA

Es.

m= 1148,0 Kg ha 5 cifre significative

m= 1148 Kg ha 4 cifre significative

OSS

Nel caso di misure espresse senza l'errore si considera cifra INCERTA l'ULTIMA cifra.

OPERAZIONI e CIFRE SIGNIFICATIVE

- Il prodotto/divisione tra una MISURA e un NUMERO deve mantenere lo stesso numero di cifre SIGNIFICATIVE
- Qualsiasi operazione tra MISURE manterrà lo stesso numero di cifre significative della MENO precisa (approssimando)

CINEMATICA

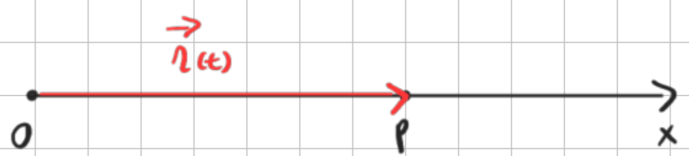
CORPO SCHEMATIZZABILE

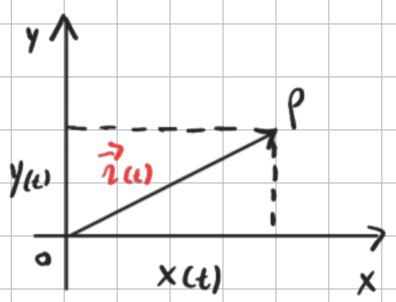
Un corpo si dice SCHEMATIZZABILE se può essere rappresentato come un PUNTO MATERIALE. Questo è possibile quando le dimensioni lineari sono piccole rispetto allo spazio.

PUNTO MATERIALE

La posizione del PUNTO MATERIALE può essere espressa attraverso un vettore

$\vec{r} = \vec{r}_{(t)}$ (al momento t)





$\vec{r}_{(t)} = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ COORDINATE DEL PUNTO P

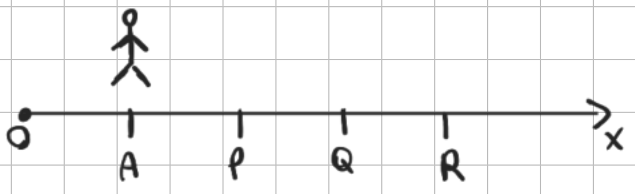
a 3 dimensioni sarà analogamente

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

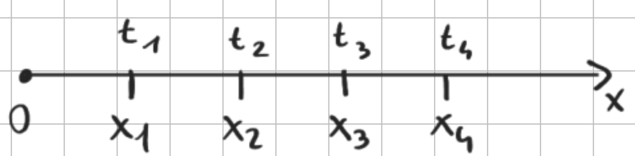
OSS

Eliminando t da queste equazioni otteniamo la legge della TRAIETTORIA

MOTO MONODIMENSIONALE



RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



momenti

spazio

tempo trascorso tra il punto x_1 al punto x_2: $t_2 - t_1 = \Delta t$

Spazio percorso dal momento t_1 al t_2: $x_1 - x_2 = \Delta x$

VELOCITA' MEDIA NELL'INTERVALLO DI TEMPO

$v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

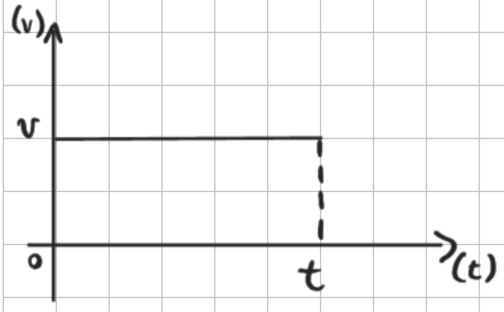
Δx = Variazione di spazio

Δt = Variazione di tempo

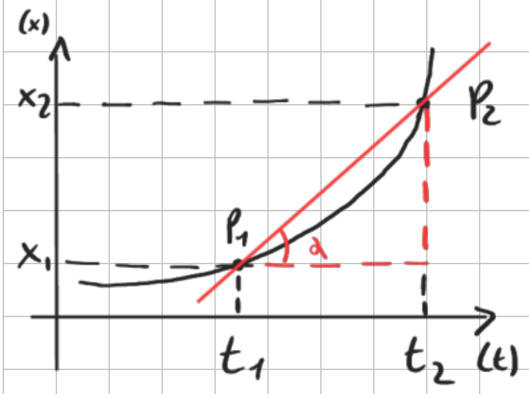
Se $t_0 = 0$ avremo la LEGGE ORARIA DEL MOTO:

$$x = x_0 + vt$$

x posizione attuale, v velocita' media, t momento attuale



Questo grafico velocità / tempo rappresenta una velocità COSTANTE



Questo DIAGRAMMA ORARIO indica un moto NON uniforme

$P_1\ (t_1, x_1) \qquad P_2\ (t_2, x_2)$

L' IPOTENUSA del TRIANGOLO indicherà la VELOCITÀ MEDIA

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan\alpha$$

OSS

Dal punto di vista analitico, non possiamo utilizzare l'equazione della velocità MEDIA per calcolare la velocità ISTANTANE $\left(\frac{0}{0}\right)$

Dobbiamo studiare il limite:

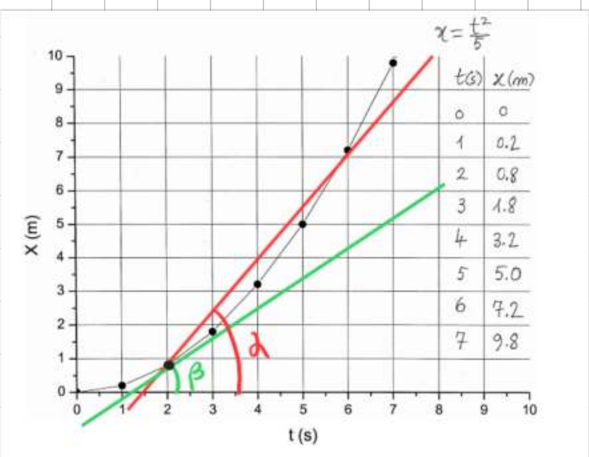
$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Graficamente, la nostra TANGENTE nel diagramma orario diventa VERTICALE

VELOCITA' ISTANTANEA

La VELOCITA' ISTANTANEA al tempo t_1 e' la tangente trigonometrica dell' angolo tra l'asse dei tempi e la tangente goniometrica passante per il punto di ascissa t_1 del grafico spazio/tempo

$$v = tg\ \beta \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



$t_1 = 2s \quad t_2 = 6s$

$x_1 = 0{,}8m \quad x_2 = 7{,}2m$

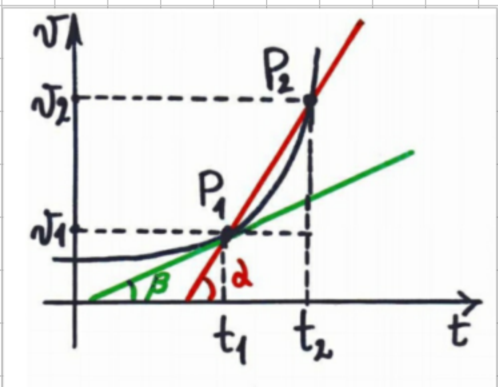
$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{7{,}2 - 0{,}8}{6 - 2} = 1{,}6\ m/s$$

$$v_m = \tan \alpha = \tan 58°$$

$v_{(2)} = \tan\beta$ β = retta passante per $t=2$ e tangente al grafico

$x = \frac{t^2}{5}$ (funzione) $v_{(2)} = \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}\frac{1}{5}t^2 = \frac{2t}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = 0{,}8\ m/s$

ACCELERAZIONE



$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \tan\alpha$$

ACCELERAZIONE MEDIA

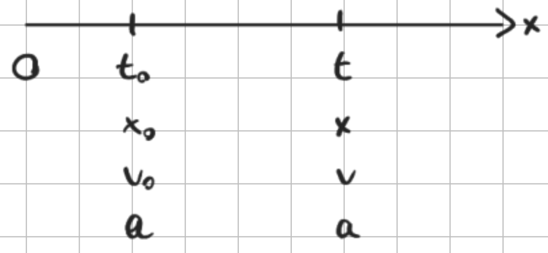
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \tan\beta$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

possiamo anche esprimere l'accelerazione istantanea in funzione dello spazio

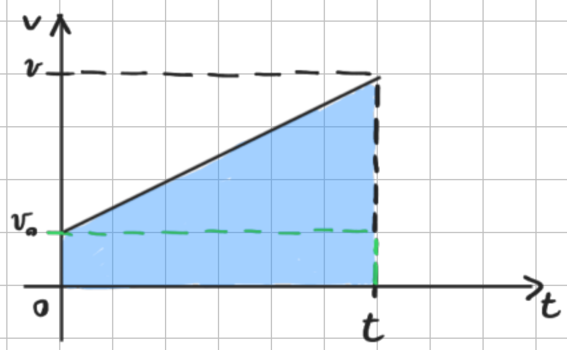
$$a = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{v} = \frac{d^2x}{d^2t}$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO



(consideriamo $t_0=0$ per comodità)

$$a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow v=v_0+at$$



l'AREA sottesa alla curva indica lo SPOSTAMENTO (Δx) del punto materiale

$$x-x_0=A_R+A_T=v_0t+\frac{(v-v_0)t}{2}=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$\begin{cases} v=v_0+at \\ x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

LEGGI ORARIE

Sostituendo il tempo nella formula avremo:

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$$

OSS

- $t = \frac{v - v_0}{a}$

- Non si puo' impostare un sistema di 3 equazioni in 3 incognite utilizzando le leggi orarie del moto.

LEGGI ORARIE (CALCOLO INTEGRALE)

Nota la legge oraria di un moto, calcoliamo le sue caratteristiche ricordando che:

$$x = x(t) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

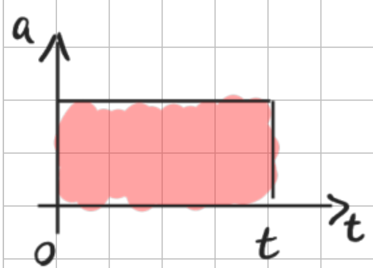
con $x(t)$, $a(t)$ e $v(t)$ leggi orarie rispetto t

- $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a(t)dt$ integriamo l'equazione

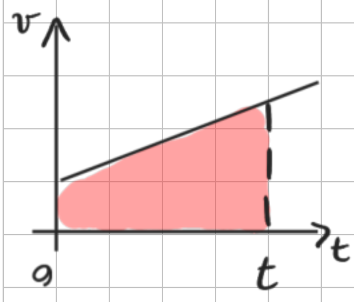
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt \Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)$$

- $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt \rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v dt$

Studiamo adesso il caso opposto (caratteristica → legge)



$$v - v_0 = \int_0^t a\, dt \rightarrow v - v_0 = a \int_0^t dt \rightarrow v - v_0 = a\, [t]_0^t = a(t-0) = at$$



$v - v_0 = a t \qquad v = v_0 + a t$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t (v_0 + a t)\, dt = v_0 t + a \int_0^t t\, dt$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

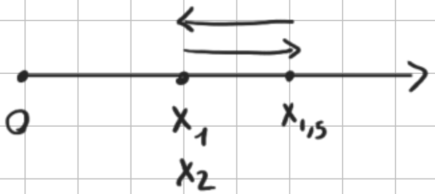
VELOCITA' MEDIA

$v_m = \frac{(x - x_0)}{(t - t_0)}$ sostituiamo $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$v_m = \frac{1}{(t - t_0)} \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$ (teorema della media integrale)

VELOCITA' INTENSIVA MEDIA

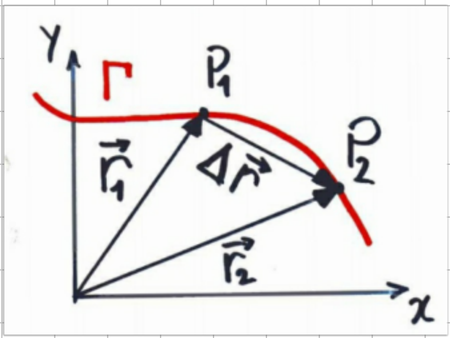
$\Delta x > 0 \Rightarrow v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$



E se $x_1 = x_2$? Possiamo calcolare la VELOCITA' INTENSIVA MEDIA

$v_m = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

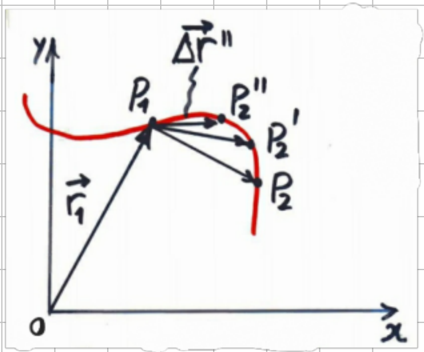
MOTI IN PIU' DIMENSIONI



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Possiamo quindi estendere i concetti del moto rettilineo al moto di un punto che si muove in due dimensioni



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

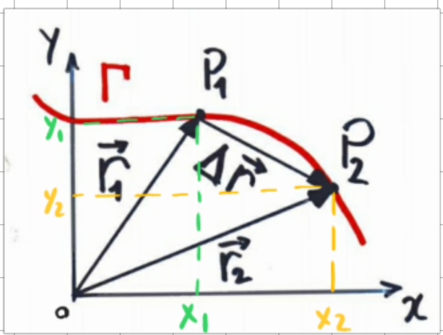
il vettore $\vec{v}$ risulterà TANGENTE al grafico

$$a_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

CALCOLO ANALITICO

Per un punto materiale di coordinate (x,y), il vettore posizione e':

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$$

- $\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \hat{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta y \hat{j}}{\Delta t}$

- $v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx\hat{i}}{dt} + \frac{dy\hat{j}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ (v_x, v_y) sono le coordinate di $\vec{v}$

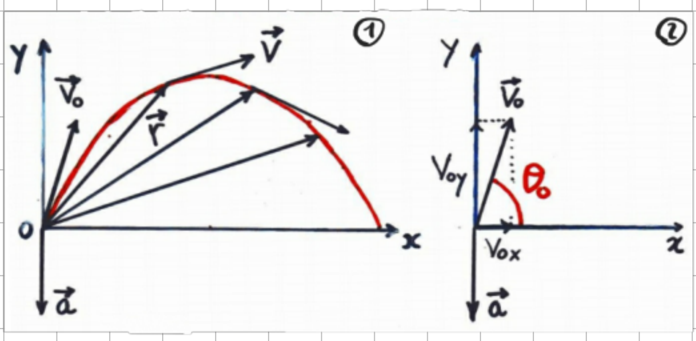
- quindi il modulo di $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

- la direzione orientata è data dall'angolo $\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$

- $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x \hat{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta v_y \hat{j}}{\Delta t}$

- $a = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

MOTO DEL PROIETTILE



Il vettore VELOCITÀ è sempre TANGENTE alla TRAIETTORIA

Studiamo come varia il vettore posizione $(\vec{r})$ quindi come cambiano le sue coordinate x e y in funzione del tempo.

L'ACCELERAZIONE è COSTANTE e verso il basso $a = -9{,}8\ m/s^2$

Il proiettile parte dall' origine quindi:

$$\vec{r}_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_0 = \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\theta_0 \\ V_{0y} = V_0 \sin\theta_0 \end{cases} \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Per studiare il moto possiamo studiare istante per istante il suo moto verticale (y) e il suo moto orizzontale

Avremo un MOTO RETTILINEO UNIFORME sull' asse delle x,

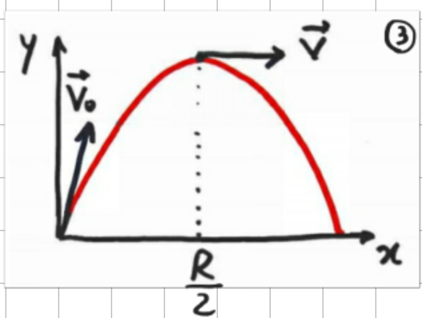
Avremo un MOTO UNIFORMEMENTE DECELLERATO sull' asse delle y,

N.B.

Orizzontalmente abbiamo un moto rettilineo uniforme perchè non agisce alcuna accelerazione orizzontalmente

LEGGE ORARIA

ASSE x) $\begin{cases} V_x = v_{0x} \\ x = V_{0x}\, t \end{cases}$ ASSE y) $\begin{cases} V_y = V_{0y} - g t \\ y = V_{0y} - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ VELOCITA' POSIZIONE



R = GITTATA = distanza orizzontale percorsa

Il tempo totale è il doppio del tempo di salita

Il tempo di salita è il tempo che il punto materiale impiega ad annullare la sua velocità (verticale)

TEMPO E GITTATA

- $V_y = V_{oy} - gt \quad V_y = 0 \rightarrow 0 = V_{oy} - gt \rightarrow t = \frac{V_{oy}}{g}$

Ora che abbiamo il tempo di salita, possiamo calcolarci la GITTATA (diviso 2) ricordando che $x = V_{ox} t$ (x = spostamento orizzontale)

$\frac{R}{2} = V_{ox} t \rightarrow \frac{R}{2} = V_{ox} \frac{V_{oy}}{g}$ ma dal grafico ② si evince che

$V_{ox} = V_0 \cos\theta_0$ e $V_{oy} = V_0 \sin\theta_0$, quindi andando a sostituire avremo:

- $R = \frac{2}{g}(V_0 \sin\theta_0 \cos\theta_0)$ che possiamo scrivere come $R = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta_0$

Quindi avremo la massima gittata quando $2\theta_0 = 90° \Rightarrow \theta_0 = 45°$

TRAIETTORIA

Possiamo adesso calcolare la TRAIETTORIA (insieme dei punti nel piano x,y, DIVERSO dalla posizione in funzione del tempo):

$$\begin{cases} x = V_{ox} t \\ y = V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ricavo t dalla prima e sostituisco nella seconda

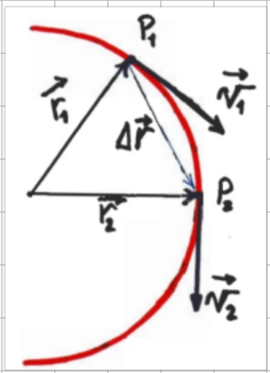
LEGGE ORARIA (POSIZIONE)

$t = \frac{x}{V_{ox}} \quad y = V_{oy}\frac{x}{V_{ox}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_{ox}}\right)^2 \rightarrow y = x\tan\theta_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_{ox}}$

EQUAZIONE PARABOLA

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

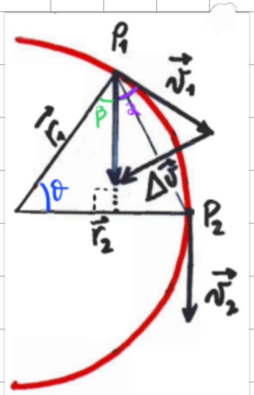
Descriviamo il moto di un punto materiale avente modulo costante del vettore $\vec{v}$. Questo vettore è sempre tangente alla traiettoria.



$|\vec{v}| = cost$

$\vec{r_2} - \vec{r_1} = spostamento = \Delta\vec{r}$

Per calcolare $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ trasliamo $\vec{v_2}$ facendo coincidere i due punti d'applicazione (P_1)



I due triangoli sono entrambi isosceli.

$\theta + \beta = 90°$ e $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow$ $\theta = \alpha$

I due triangoli sono quindi simili, possiamo mettere a rapporto i lati quindi

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \quad \frac{base}{lato}$$

(prendiamo in considerazione i moduli, ricordando che $v_1 = v_2$ e $r_1 = r$, quindi scriviamo v e r)

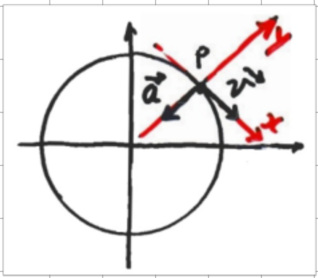
Dividiamo entrambi i membri per Δt

$$\frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\frac{1}{r}$$ passiamo tutto a limite

$$\frac{1}{v}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{v} \cdot a = \frac{1}{r} \cdot v \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

OSS

v è costante quindi anche a è costante. L'accelerazione centripeta punta sempre al centro.



Se studiamo le componenti di questi due vettori, chiameremo quelli diretti su x TANGENZIALI e quelli diretti su y RADIALI

Le componenti saranno: $v_r = 0 \qquad v_T = v$

$$a_r = -\frac{v^2}{r} \qquad a_T = 0$$

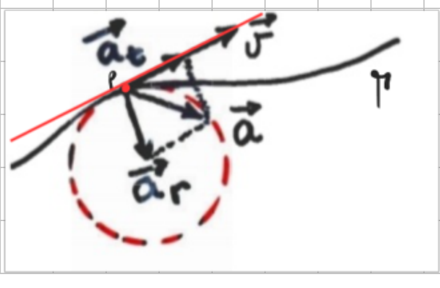
$$\vec{a} \equiv (a_r, a_T) \qquad a_r = -\frac{v^2}{r} \qquad a_T = \frac{dv}{dt}$$

OSS

a_r influisce sulla variazione dell'orientazione della velocità

a_T influisce sulla variazione del modulo della velocità

Vediamo il caso in cui il moto avviene lungo una traiettoria curvilinea



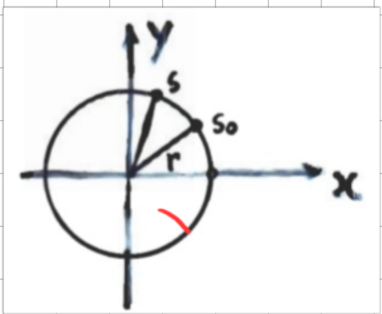
① Consideriamo un punto sulla traiettoria (P)

② Tracciamo la tangente alla traiettoria passante per P

③ Tracciamo la circonferenza tangente alla tangente in P

A questo punto abbiamo tutto cio' che ci serve per studiare il moto di questo punto materiale

LEGGE ORARIA DEL MOTO CIRCOLARE



Possiamo considerare l'ARCO $S - S_0$ come lo spazio percorso (ASCISSA CURVILINEA)

Il fatto che sia un arco non incide sul calcolo della legge oraria. $S = S_0 + vt$

T = PERIODO [s] tempo impiegato ad effettuare un giro completo

f = FREQUENZA [Hz] numero di giri effettuati nell'unità di tempo

$f = \frac{1}{T}$ $\quad a_c = \frac{v^2}{r}$ $\quad |\vec{v}| = cost$ $\quad S = S_0 + vt$

A questo punto possiamo studiare la legge oraria rispetto al periodo:

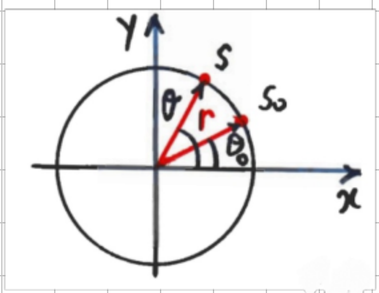
$$T = \frac{S - S_0}{v} = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{e ne deriva che} \quad f = \frac{v}{2\pi r}$$

L' ACCELERAZIONE CENTRIPETA sarà

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 \cdot r} = \frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{T^2 \cdot \cancel{r}} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

VELOCITÀ ANGOLARE

Esprimiamo la distanza percorsa dal punto materiale attraverso gli angoli:



Lo spazio percorso è rappresentato da $\theta_0 - \theta$

Quindi la VELOCITÀ ANGOLARE sarà

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega_m = cost$$

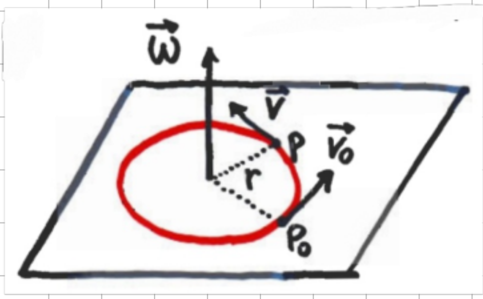
$$\theta = \frac{S}{r} \quad \text{quindi} \quad \Delta\theta = \frac{v}{r} \cdot t \implies \omega = \frac{v}{r} \implies v = \omega r$$

L'accelerazione sarà: $a = \frac{v^2}{r} \implies a = \frac{\omega^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} \implies a = \omega^2 r$

Se consideriamo $t = T$ abbiamo

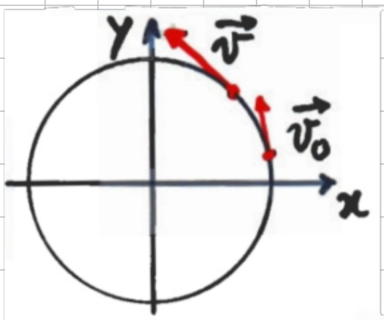
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{t} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

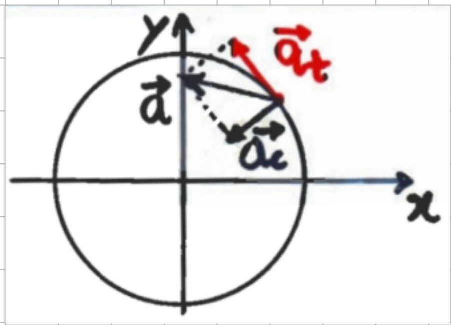
RAPPRESENTAZIONE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE



$\vec{\omega}$ ha come DIREZIONE la retta perpendicolare al piano e VERSO quello di un osservatore che vede il moto in senso antiorario

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO





In questo caso $|\vec{v}| \neq |\vec{v_0}|$ e si aggiunge l'accelerazione TANGENZIALE (che prima era 0).

Si intende per costante l'accelerazione TANGENZIALE.

Per studiare questa possiamo applicare le leggi del moto uniformemente accelerato monodimensionale:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + a_t \cdot t \\ S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \end{aligned}\right\} v^2 = v_0^2 + 2a_t (S - S_0)$$

L'accelerazione TOTALE a è data da:

$$a=\sqrt{a_t^2+a_c^2}$$

Studiamo adesso le corrispondenti angolari:

Sostituendo $v \to w$ $S \to \theta$, α = ACCELERAZIONE ANGOLARE

① $w = w_0 + \alpha t$

② $\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

③ $w^2 = w_0^2 + 2\alpha(\theta_0 - \theta)$

$\alpha_m = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ ACCELERAZIONE ANGOLARE MEDIA

$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$ ACCELERAZIONE ANGOLARE ISTANTANEA

OSS

Le leggi orarie angolari sono date dalle leggi orarie lineari DIVISO r

Se $a=\sqrt{a_c^2+a_t^2}$ analogamente $a=\sqrt{(w^2 r)^2+(\alpha r)^2} = r\sqrt{\alpha^4+w^4}$

Il vettore $\vec{\alpha}$ avrà verso concorde a $\vec{w}$ se w aumenta (accelerazione positiva), altrimenti saranno discordi (la direzione è la stessa di w)

PRINCIPIO D' INERZIA
1° principio della dinamica

Un corpo ISOLATO, cioè tale che il risultante delle forze esterne applicate è NULLO o è in quiete, si muove di moto rettilineo uniforme

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

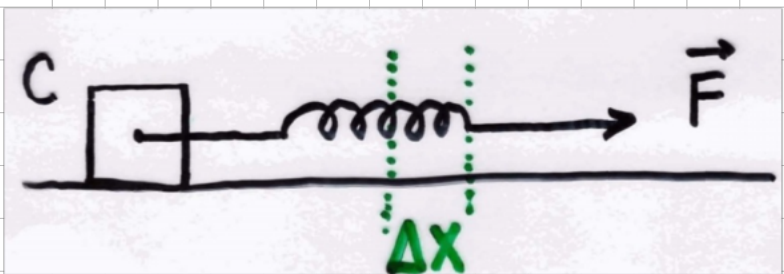
Un sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia è detto INERZIALE

Un esempio di sistema NON inerziale è il sistema accelerato

OSS

Nei sistemi inerziali valgono le stesse leggi della fisica, in forma anche più "semplificata"

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA



Sfruttiamo la DEFORMAZIONE della molla come strumento di misurazione della forza.

A questo punto fissiamo una FORZA CAMPIONE (unità) $F_c = \Delta X_c$

Allora se F è la FORZA e ΔX la DEFORMAZIONE avremo

$$F : F_c = \Delta X : \Delta X_c$$

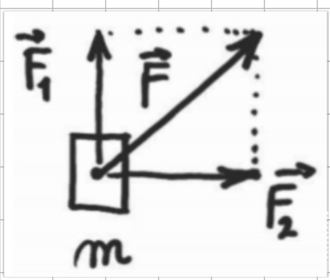
Dato un corpo C, se misuriamo la F applicata a rapporto con l'accelerazione generata, al variare di F (e di conseguenza a) avremo un rapporto COSTANTE che esprime la MASSA del corpo C.

$$F = m \cdot a$$

FORZA

La FORZA è una grandezza VETTORIALE

direttamente proporzionale alla MASSA e ACCELERAZIONE



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} \equiv m\,\vec{a}$$

Sia la massa misurata in Kg, per la FORZA avremo

$$[F] = \frac{[Kg][m]}{[s]\,[s]} = [N]$$

OSS

Sia m la massa e $\vec{v}$ la velocita' possiamo definire una nuova grandezza: la QUANTITA' DI MOTO

$\vec{p} = m\vec{v}$

Quindi possiamo esprimere F come

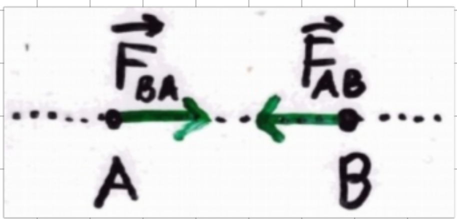
m costante

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = \cancel{\vec{v}\frac{dm}{dt}} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot a$$

derivata del prodotto

3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

le forze agiscono sempre a coppie



Le due forze avranno stesso MODULO e VERSO opposto

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ $\qquad$ $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$

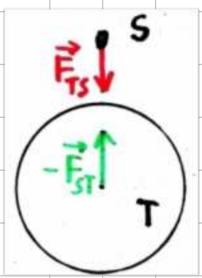
OSS

Una conseguenza del 3° principio è che in un sistema ISOLATO, la QUANTITÀ DI MOTO si conserva (o costante nel tempo)

$$F_1 = -F_2 \Rightarrow \frac{d\vec{P_1}}{dt} = -\frac{d\vec{P_2}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{P_1}+\vec{P_2}) = \vec{0}$$

$P_1+P_2 =$ costante $\Rightarrow \vec{P}$ costante ✓

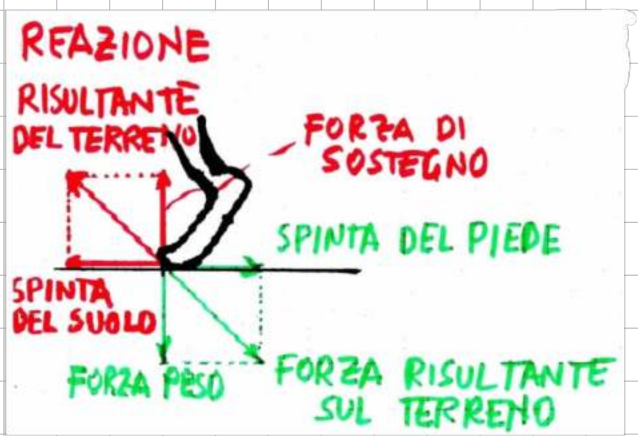
APPLICAZIONI DEL 3° PRINCIPIO



$\vec{F}_{TS} = -\vec{F}_{ST}$

Perché vediamo un corpo cadere e non vediamo la terra muoversi verso il corpo? Per la differenza delle 2 masse

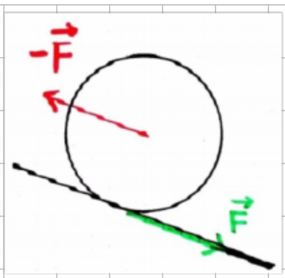
$a_T = \frac{F_{ST}}{M} \simeq 0 \qquad a_S = \frac{F_{TS}}{m} \neq 0$



Lo spostamento è dovuto alla forza contraria alla risultante sul terreno.

L'ATTRITO permette al piede di non scivolare e di avanzare

La forza del suolo è quindi prodotta dall'attrito.



Anche per le ruote di un'auto, queste spingono verso dietro e l'attrito permette lo spostamento

Es.

$m = 50 Kg$
$m_2 = 0{,}5 Kg$
$v_1 = 20 m/s$
$v_2 = ?$
$v_0 = 0$

Possiamo fare affidamento alla conservazione della quantità di moto

$\vec{P} = costante \Rightarrow \vec{P_0} = \vec{P_{1+2}}$

Il sistema è inizialmente fermo quindi

$\vec{P_0} = 0$, quindi $\vec{P_1} + \vec{P_2} = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot 20 + 50 \cdot x = 0$

$$x = -\frac{0{,}5 \cdot 20}{50} = -0{,}2\, m/s$$

PRINCIPI DELLA DINAMICA

1) Un SISTEMA DI RIFERIMENTO rispetto al quale un corpo ISOLATO (non soggetto a forze) o è in QUIETE o si muove di moto rettilineo UNIFORME è detto INERZIALE

2) Un corpo soggetto a una FORZA $\vec{F}$ si muove rispetto ad un sistema di riferimento INERZIALE con un'accelerazione $\vec{a}$ PROPORZIONALE alla forza applicata. La costante

di proporzionalità dipende dal corpo ed è detta MASSA m

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

3) Dati due corpi A e B, se A esercita una FORZA su B, B esercita una forza su A uguale in MODULO, ma diretta in verso OPPOSTO. Inoltre, entrambe le forze giacciono sulla retta che congiunge i corpi (le forze di AZIONE e REAZIONE agiscono sempre a coppie, applicate su corpi diversi)

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

TEOREMA DELL' IMPULSO

Il teorema dell' impulso ci aiuta a studiare ad esempio il comportamento di due corpi che si scontrano

L' IMPULSO di una forza applicata ad un punto materiale provoca la VARIAZIONE della QUANTITA' DI MOTO

DIMOSTRAZIONE

Sappiamo che $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$ quindi possiamo dire $\vec{F}dt = d\vec{p}$.

Se consideriamo l' azione di questa forza nell' intervallo compreso tra 0 e t, possiamo studiarla integrando l' equazione:

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_0^t d\vec{p} = [\vec{p}]_0^t = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \Delta\vec{p}$$ ✓

$\vec{J}$ è detto IMPULSO DELLA FORZA, il cui teorema è

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} \qquad [J] = Ns$$

- con m costante $\vec{J} = m\Delta\vec{v}$

FORZA MEDIA

Calcoliamo adesso la forza generata dall'azione dell'impulso, quindi in relazione al tempo Δt

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Questa forza è detta FORZA MEDIA

Es.

- Immaginiamo di saltare verticalmente e tornare sul nostro posto la nostra massa m è costante e la $v_0 = 0$.
L'impulso sarà

$$\Delta \vec{p} = m\vec{v} - \cancel{m\vec{v}_0}$$

Se vogliamo calcolare la forza media questa sarà

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p} = m\vec{v}$$

- Se volessimo colpire un oggetto, per massimizzare i danni dovremo ridurre al minimo il tempo di impatto

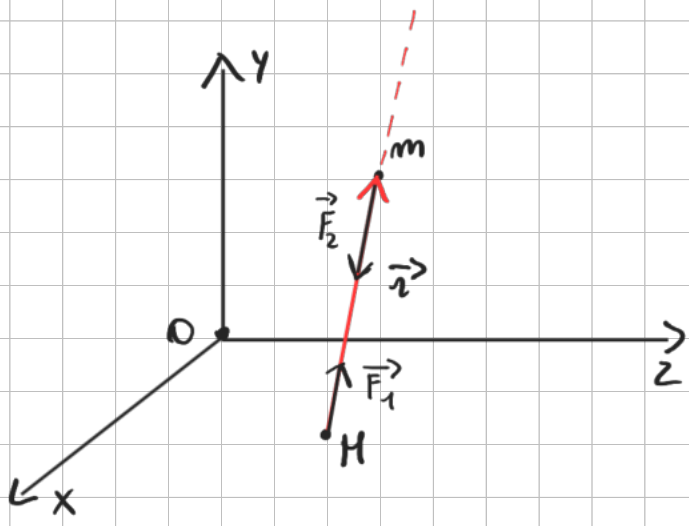
$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p}$$

- $v_0 = 2\ m/s$ $\quad v = -2\ m/s$ $\quad m = 0{,}05\ kg$ $\quad \Delta t = 10^{-3}\ s$ $\quad \Delta p = ?$ $\quad F_m = ?$

$$\Delta p = mv - mv_0 = 0{,}05(-2) - 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}05(-4) = -0{,}2$$

$$F_m \Delta t = \Delta p \rightarrow F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-0{,}2}{10^{-3}} = -200\ N$$

FORZA DI GRAVITAZIONE

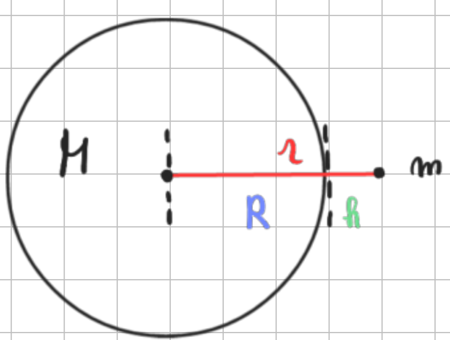


Immaginiamo che m e M siano due masse, tra queste vi è una FORZA D'ATTRAZIONE data da:

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}$$

con $G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{Kg^2}$ detta COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Nel caso di un corpo posto sulla superficie terrestre, m sarà il corpo e M sarà la terra.



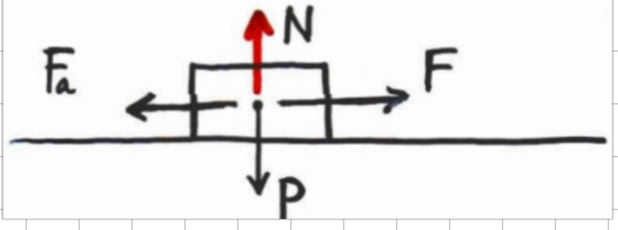
la distanza viene presa dal centro della Terra.

In particolare r è data dalla somma di R (distanza tra la crosta terrestre e il centro della terra) e h (che rappresenta la distanza tra il corpo e la crosta terrestre).

Essendo h molto più piccolo di R possiamo dire che $r = R + h \cong R$

FORZE D' ATTRITO

È una forza che si oppone al moto. Si presenta quando il corpo striscia su una superficie ruvida o è immerso in un mezzo viscoso (come aria o acqua)



La **FORZA D' ATTRITO** dipende dal tipo di superficie e non dall' area di questa

$$F_a = \mu N$$

OSS

- Si utilizza N e non P perchè racchiude tutte le eventuali forze che si applicate al piano
- La forza d'attrito può essere STATICA o DINAMICA. In particolare $\mu_D < \mu_S$
- Le componenti vettoriali, sia $\hat{v}$ versore della velocità, sono:

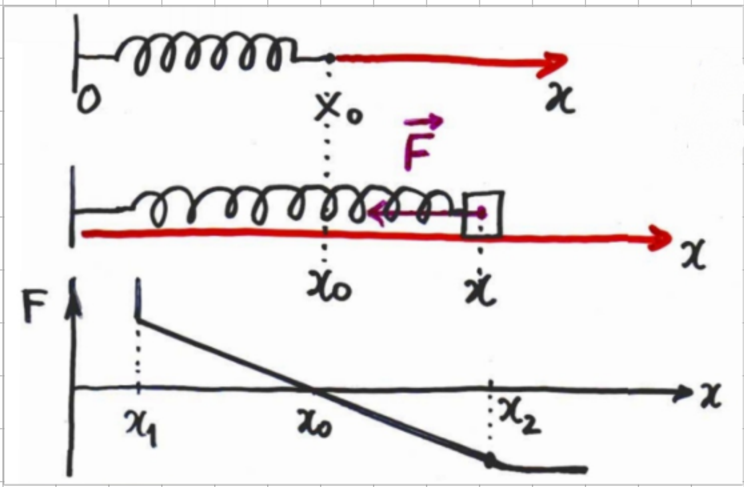
$$\vec{F} = -\hat{v}\,\mu N$$

FORZA ELASTICA

Non esistono corpi PERFETTAMENTE RIGIDI, per questo motivo, anche se impercettibile, c'è sempre una DEFORMAZIONE del corpo sul quale applichiamo una forza.
Se la deformazione cessa al cessare della forza, e il corpo torna quindi al suo stato iniziale parleremo di un corpo elastico e quindi di FORZA ELASTICA.

LEGGE DI HOOK

La legge di Hook esprime la diretta proporzionalità tra la DEFORMAZIONE e la CAUSA DEFORMANTE (di corpi elastici)



$\Delta x > 0$

$F = k\,\Delta x$

OSS

La forza elastica si OPPONE alla causa generante e ha verso opposto alla DEFORMAZIONE

$$\vec{F} = -k\,\vec{\Delta x}$$

FORZA CENTRIPETA

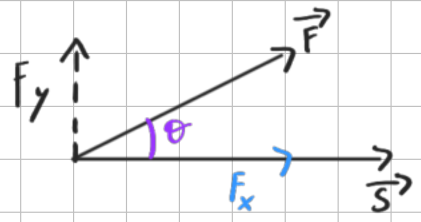
Abbiamo visto come il moto circolare risulta sempre essere accelerato (accelerazione centripeta). Allora ogni massa è soggetta a una forza CENTRIPETA

$$F = m a_c = m \frac{v^2}{r}$$

Questa forza e' generata dalla TENSIONE
di un ipotetico filo che lega la massa al centro della
circonferenza

LAVORO

Il LAVORO indica la FORZA necessaria a eseguire uno SPOSTAMENTO



con $\vec{F} = \vec{cost}$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos(\hat{FS}) = FS\cos\theta = F_x S$$

$$[L] = J = N \cdot m$$

$L > 0$ $(0 \leq \theta < 180°) \Rightarrow$ LAVORO MOTORE / FORZA MOTRICE

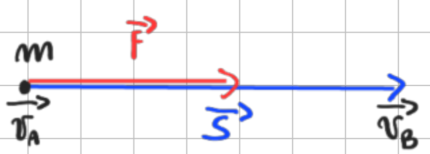
$L < 0$ $(\theta > 180°) \Rightarrow$ FORZA / LAVORO RESISTENTE

In 3 dimensioni avremo

$\vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z)$ $\quad \vec{S} \equiv (S_x, S_y, S_z)$

$$L = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z$$

Es.



$\vec{F} = \vec{cost}$

$$L = \vec{F}\vec{S} = FS\cos 0° = FS$$

Sappiamo che

$v_B^2 = v_A^2 + 2a(S - S_0) \rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2aS$ $\quad F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m}$

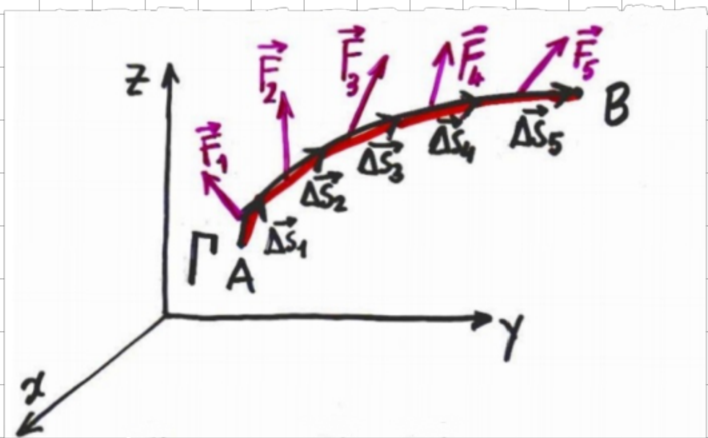
$$v_B^2 = v_A^2 + 2\frac{FS}{m} \quad \text{ma } FS = L \text{ (in questo caso)}$$

$$L = \frac{m}{2}(v_B^2 - v_A^2) = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2$$

Questa quantità $\frac{1}{2}mv^2 = E_c$ e' detta ENERGIA CINETICA

$$L = \Delta E_c$$

LAVORO DI UNA FORZA VARIABILE



Suddividiamo la traiettoria Γ in intervalli ΔS_i tali che la F al suo interno e' costante

$\vec{\Delta S}_1$	$\vec{F}_1 = \vec{cost}_1$	$\Delta L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta S}_1$
$\vec{\Delta S}_2$	$\vec{F}_2 = \vec{cost}_2$	$\Delta L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta S}_2$
......	......	......
$\vec{\Delta S}_N$	$\vec{F}_N = \vec{cost}_N$	$\Delta L_N = \vec{F}_N \cdot \vec{\Delta S}_N$

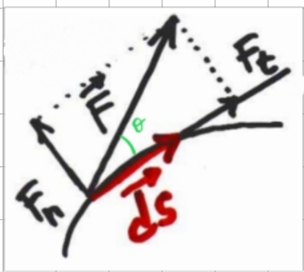
Se consideriamo la traiettoria A/B avremo

$$L_{AB} = \sum_{i=1}^{N} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta S_i}$$

Più piccoli saranno gli intervalli, maggiore sarà la precisione della sommatoria. Allora possiamo dire

$$L_{AB} = \lim_{\vec{\Delta S_i} \to \vec{0}} \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \vec{\Delta s_i} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = \int_A^B F \cos\theta \, ds$$

$F \cos\theta = F_T$ FORZA PARALLELA ALLA DIREZIONE DEL MOTO

ma allora $F_T = m a_T$ e $a_T = \frac{dv}{dt}$

$$L_{AB} = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds = m \int_{v_A}^{v_B} v \, dv = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{m}{2} v_B^2 - \frac{m}{2} v_A^2$$

sostituzione

$L = \Delta E_c$

OSS

Il teorema delle forze vive ci mostra come il lavoro espresso attraverso l'energia cinetica NON cambia se la forza e' costante o meno

POTENZA

La POTENZA indica la rapidità con la quale viene svolto ΔL

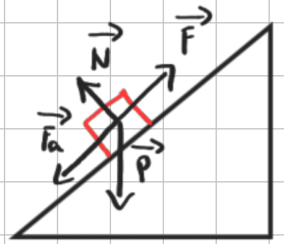
$$\bar{P} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \text{potenza media}$$

La potenza istantanea sarà $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$

Se F e' costante, avremo $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (solo in alcuni casi)

$[P] = W$

Es.

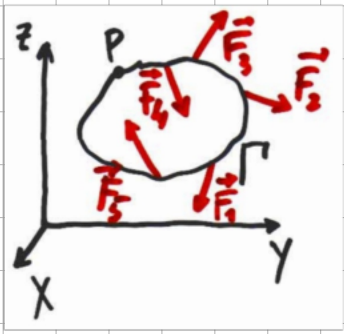


Vogliamo trovare il valore di F che mantiene l'auto in equilibrio con $\vec{v} = \vec{cost}$

Se la forza F che vogliamo trovare e' COSTANTE possiamo ricavarla come $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

CAMPO DI FORZE

Un CAMPO DI FORZE è la porzione di spazio in cui una forza agisce punto per punto.



Il lavoro compiuto dal campo di forze lungo la traiettoria chiusa Γ è dato da

$$L(\Gamma) = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

FORZA CONSERVATIVA

Una forza è detta CONSERVATIVA se il lavoro da essa compiuto per spostare un punto materiale su un percorso chiuso è nullo

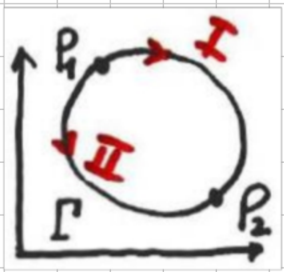
$$L(\Gamma) = 0$$

OSS

La forza d'attrito non è una forza conservativa

FORZA CONSERVATIVA

Una forza e' **CONSERVATIVA** se il lavoro da essa eseguito per spostare un punto materiale da un punto a un altro dipende **SOLO** da questi punti e non dal cammino percorso



$$L^{I}(P_1, P_2) = L^{II}(P_1, P_2)$$

OSS

Le due definizioni di forza conservativa sono equivalenti

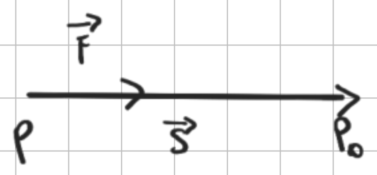
$$\forall \Gamma \text{ chiusa}, \; L(\Gamma) = 0 \iff L^{I}(P_1, P_2) = L^{II}(P_1, P_2)$$

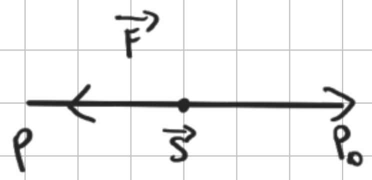
ENERGIA POTENZIALE

Preso un punto di riferimento P_0 e un punto generico P, definiamo l' **ENERGIA POTENZIALE** del punto P il lavoro compiuto per portare un punto materiale da P a P_0

$$L(P, P_0) = U(P)$$

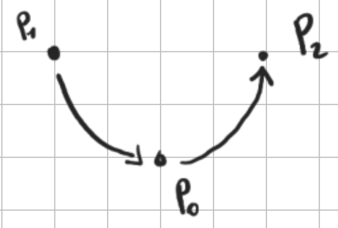
Es

- 



$$L(P,P_0) = \vec{F}\vec{S} = FS\cos\theta = FS \qquad L(P_0,P) = \vec{F}\vec{S} = \vec{F}\vec{S}\cos\theta = -FS$$

$$L(P,P_0) = -L(P_0,P)$$

- 

Il lavoro da P_1 a P_2 è:

$$L_{TOT} = L(P_1,P_0) + L(P_0,P_2) = L(P_1,P_0) - L(P_2,P_0)$$

ma $L(P_0,P_2) = -L(P_2,P_0)$

Sostituendo $L(P_1,P_0) = U(P_1)$ e $L(P_2,P_0) = U(P_2)$ avremo che

$$L_{TOT} = U(P_1) - U(P_2) = -\Delta U$$

OSS

Si dice che l'energia potenziale è definita a meno di una costante (è possibile osservare come i valori del lavoro non cambiano introducendo questa costante)

Questa costante è data da $U(P_0)$

$$U(P) = L(P,P_0) + U(P_0)$$

IN TERMINI DIFFERENZIALI

Calcoliamo il lavoro in un intervallo di spazio infinitesimo

$$dL = \vec{F}\, d\vec{s} = -dU$$

Monodimensionale: $dL = \vec{F}\, dx = -dU$

Tridimensionale: $dL = F_x dx + F_x dy + F_x dz = -dU$

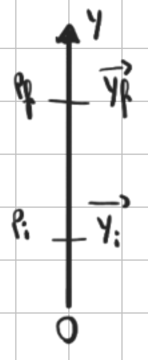
OSS

Se la forza e' conservativa, potremo dire che

$$F_{(x)} = -\frac{dU}{dx}$$

La forza e' una funzione che dipende **SOLO** dallo spostamento

Es.



immaginiamo che lo spostamento sia infinitesimale

$\Delta\vec{y} = d\vec{y}$

$$L = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{y} = \int_{y_i}^{y_f} F\, dy \cos\theta = \int_{y_i}^{y_f} -mg\, dy = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy$$

$$= -mg\, [y]_{y_i}^{y_f} = -mg\,(y_f - y_i)$$

Possiamo immaginare che $-mgy_f = U_f$ e $mgy_i = U_i$, allora

$F = -\Delta U$

OSS

Tutte le forze conservative producono un lavoro

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F\,dx\cos\theta \quad e \quad F = -\Delta U$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA MECCANICA

Sia U l'energia potenziale e E_c l'energia cinetica,

l'energia meccanica sarà

$$E = U + E_c$$

L'energia meccanica è COSTANTE

DIMOSTRAZIONE

In un sistema conservativo

$L = U(P_1) - U(P_2)$

ma sappiamo per il teorema delle forze vive

$L = E_c(P_2) - E_c(P_1)$

Possiamo eguagliare le due espressioni e dire che

$E_c(P_1) + U(P_1) = E_c(P_2) + U(P_2) = cost$

l' energia meccanica e' COSTANTE in ogni punto

OSS

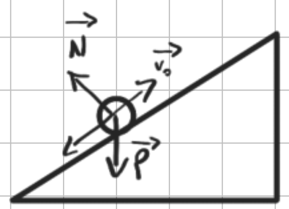
- In un sistema CONSERVATIVO, la forza e' CONSERVATIVA.
- l' energia meccanica si conserva SOLO in sistemi CONSERVATIVI

CORPO SOGGETTO A FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE

Sia $\vec{F_c}$ una forza CONSERVATIVA applicata a un corpo e $\vec{F_{nc}}$ una forza NON conservativa applicata a un corpo.

$$\vec{F} = \vec{F_c} + \vec{F_{nc}} \quad e \quad L = L_c + L_{nc}$$

Un esempio pratico potrebbe essere quello di un corpo lanciato su un piano inclinato scabro.



la forza peso $\vec{P}$ e' CONSERVATIVA e la forza d' attrito NON e' conservativa (la reazione vincolare non e' conservativa ma non produce lavoro quindi in questo caso è irrilevante)

Ricordiamo che:

- $L_c = -\Delta U = U(P_1) - U(P_2)$
- $L = E_c(P_2) - E_c(P_1)$ (teorema delle forze vive)

Quindi possiamo scrivere

$$E_c(P_2) - E_c(P_1) = U(P_1) - U(P_2) + L_{nc}$$

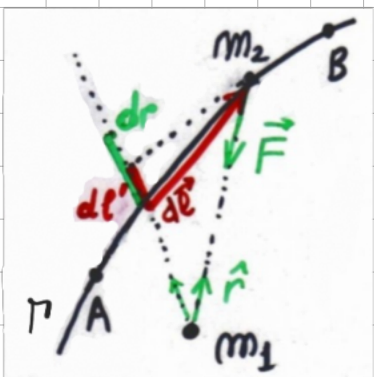
allora

$$L_{nc} = E_c(P_2) - E_c(P_1) + U(P_2) - U(P_1)$$

$$L_{nc} = \Delta E_c + \Delta U = \Delta E \quad (\text{energia MECCANICA})$$

Il lavoro compiuto dalle forze NON conservative è uguale alla VARIAZIONE dell'energia MECCANICA

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE



Tra la massa m_1 e m_2 c'è sempre una forza attrattiva, in qualsiasi punto. Definiamo lo spostamento infinitesimale $= d\vec{l}$

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

Ricordiamo per le forze conservative $L = \int_{A}^{B} \vec{F}\, d\vec{l}$

Sostituendo $\vec{F}$ avremo: $L = -\int_{A}^{B} \frac{G m_1 m_2}{r^2}\, \hat{r}\, d\vec{l}$

$\hat{r}\, d\vec{l} = dl \cos(\hat{r}\, dl) = dl' \cong dr$ (perché sono distanze infinitesime)

quindi possiamo scrivere:

$$L = -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\, dr = -G m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$$L = \frac{G m_1 m_2}{r_i} - \frac{G m_1 m_2}{r_f} = U_i - U_f = -\Delta U$$

$$U = \frac{G m_1 m_2}{r}$$

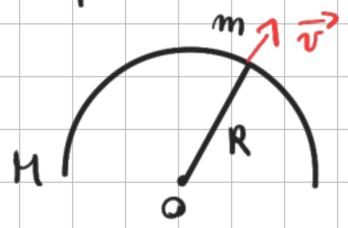
RIEPILOGO

- $\vec{F} = m\vec{g}$ $\qquad U = mgh \qquad U = mgy$
- $\vec{F} = -K\Delta\vec{x}$ $\qquad U = \frac{1}{2}K\Delta x^2$
- $\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$ $\qquad U = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

$E = E_c + U \qquad E_i = E_f$ (conservativa)

VELOCITA' DI FUGA

E' la minima velocita' che permette ad un corpo di sfuggire all'attrazione di un pianeta.



La forza e' di tipo conservativo (forza d'attrazione gravitazionale) quindi

$$E_i = E_f$$

$$U(P_i) + E_c(P_i) = U(P_f) + E_c(P_f)$$

Sappiamo che $r \to \infty$ (perche' si allontana infinitamente dal pianeta)

Per $r \to \infty$

$U(r) \to 0$ e $F \to 0$

Sappiamo che la $v_f = 0$ quindi

$U_f = 0$ $(r \to \infty)$ e $E_{cf} = \frac{1}{2} m v_f^2 = 0$

Quindi $E_f = 0 = E_i$

Ma $E_i = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_i^2}_{E_c} - \underbrace{\frac{G m_1 m_2}{R}}_{U} = 0$

Quindi la velocità di fuga risulta essere

$$v = \sqrt{\frac{2 G m_2}{R}}$$

Notiamo come $P = m_1 g$ e $F = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$ possono essere eguagliate

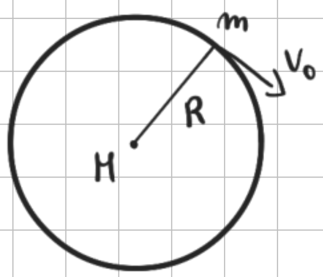
$\cancel{m_1} g = \cancel{m_1} \frac{G m_2}{R^2} \longrightarrow gR = \frac{G m_2}{R}$

Possiamo sostituire quest' espressione per il calcolo della velocità di fuga

$$v = \sqrt{2gR}$$

Es.

Vogliamo calcolare la velocità da imprimere a un pianeta per lanciare in orbita un pianeta



La FORZA CENTRIPETA è generata dalla FORZA D'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE:

$$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{R}} = \frac{G \cancel{m} M}{R^{\cancel{2}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

OSS

Se immaginiamo il caso di una stella che brucia ($R \to 0$) che ha un corpo celeste in orbita.

Quale sarà la velocità di fuga?

Per $R \to 0$ $v \to \infty$ ma questo è impossibile per la teoria della relatività.

La velocità massima raggiungibile è c (velocità della luce) secondo la teoria della relatività.

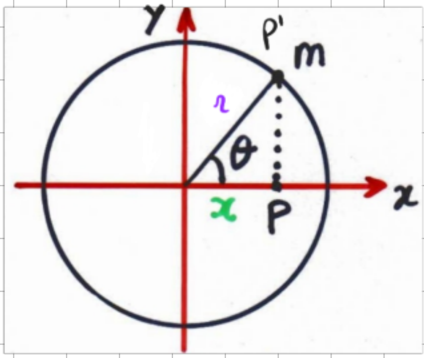
Sostituendo $v = c$ avremo

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$ RAGGIO DI SCHWARZSCHILD

Il corpo celeste in questo caso diventa un BUCO NERO

MOTO ARMONICO SEMPLICE

Dato un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme. La proiezione di tale punto si muoverà sul diametro della circonferenza di MOTO ARMONICO SEMPLICE



Sappiamo che $v = \text{cost}$ e (nel caso del moto circolare uniforme) $\frac{v}{r} = \omega = \text{cost}$. La legge oraria è

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Noi vogliamo conoscere però la distanza percorsa sul diametro:

$$x = r\cos\theta$$

ne deriva che $\max_x = r$ (r.1)

ma se $\theta = \theta_0 + wt$, allora $x = r\cos(\theta_0 + wt)$

Quindi la legge oraria è:

$$x = r\cos(wt + \delta) \qquad \theta_0 = \delta$$

$wt+\delta$ è detta FASE del moto

δ è detta FASE INIZIALE

w è detta PULSAZIONE

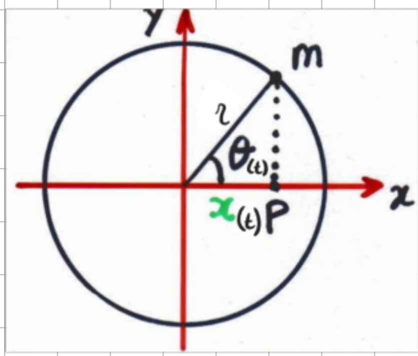
Diremo PERIODO il tempo impiegato al punto P a tornare nella sua posizione iniziale

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

ne deriva che $f = \frac{w}{2\pi}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $T = \frac{2\pi}{w}$



All'istante t, $x_{(t)} = r \cos \theta_{(t)}$

Dopo un periodo T, l'angolo sarà $\theta(t+T)$

ma $\theta_{(T)} = 2\pi$ e quindi l'angolo è $\theta_{(t)} + 2\pi$

A questo punto vediamo la legge oraria all'istante $t+T$

$$\theta_{(t+T)} = w(t+T) + \delta$$

ma $\theta(t+T) = \theta_{(t)} + 2\pi$ e $\theta_{(t)} = wt + \delta$, quindi

$$wt + \cancel{\delta} + 2\pi = w(t+T) + \cancel{\delta}$$

$$\cancel{wt} + 2\pi = \cancel{wt} + wT$$

In definitiva:

$$wT = 2\pi \qquad w = \frac{2\pi}{T} \qquad F = \frac{T}{2\pi}$$

OSS

La legge oraria viene indicata con $x = S$ e $r = S_0$

$$S = S_0 \cos(\omega t + \delta)$$

VELOCITA' E ACCELERAZIONE

- $$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} S_0 \cos(\omega t + \delta) = S_0 \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \delta)$$

$$= S_0 \left[-\sin(\omega t + \delta) \frac{d}{dt} (\omega t + \delta) \right] = S_0 \left[-\sin(\omega t + \delta) \frac{dt}{dt} \omega + \cancel{\frac{d}{dt} \delta} \right]$$

COSTANTE

$$= S_0 \left[-\sin(\omega t + \delta)\, \omega \right] = -\omega S_0 \sin(\omega t + \delta)$$

- $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega S_0 \sin(\omega t + \delta)] = -\omega S_0 \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \delta)$$

$$= -\omega S_0 [\cos(\omega t + \delta)] \frac{d}{dt} (\omega t + \delta) = -\omega^2 S_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\omega^2 S$$

OSS

L'accelerazione è proporzionale allo spostamento.

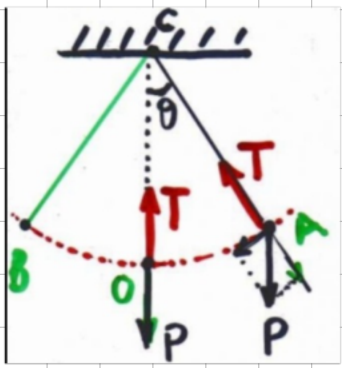
È una caratteristica unica del moto armonico.

CASO $\delta = 0$

- $S = S_0 \cos(wt)$
- $v = -w S_0 \sin(wt)$
- $a = -w_0^2 S_0 \cos(wt)$

le 3 funzioni hanno l'andamento delle funzioni seno e coseno, in particolare v e a, sono opposte a seno e coseno

PENDOLO



Il pendolo e' costituito da una massa appesa a un filo attaccato in un punt C detto CENTRO DI SOSPENSIONE.

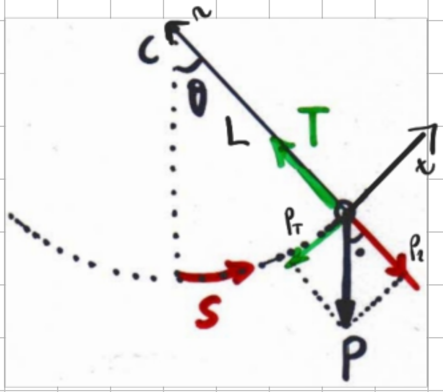
La CONDIZIONE DI EQUILIBRIO si ha quando il corpo è posto sulla VERTICALE passante per C

Quando la massa effettua uno spostamento da A a B e' detta OSCILLAZIONE SEMPLICE.

Lo spostamento effettuato tra A → B → C è detta oscillazione COMPLETA

L' intervallo di tempo in cui viene effettuata l'oscillazione completa è detto PERIODO

MOTO DEL PENDOLO



P_T = componente tangenziale

P_r = componente radiale

Studiamo lo schema delle forze ricordando che

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F} \equiv (F_T, F_r)$$

Nel nostro caso $\vec{F} = \vec{T} + \vec{P}$. Vediamo le componenti tangenziali e radiali

- $F_T = -P_T$ ($T_T = 0$ e $\vec{P_T}$ ha verso opposto nel nostro sistema di rif.)
- $F_r = T - P_r$ ($T_r = T$ e $\vec{P_r}$ ha verso opposto)

ma quindi $T = P_r + F_r$ ma $F_r = \frac{mv^2}{L}$ e $P_r = mg\cos\theta$

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg\cos\theta$$

Quando m passa per la verticale avremo:

$v = v_{max}$ $(\cos 0° = 1)$ $\qquad T_{max} = mg + \frac{m v_{max}^2}{L}$

Per le componenti tangenziali possiamo dedurre che

$$F_T = m a_t = -mg \sin\theta$$

PICCOLE OSCILLAZIONI

consideriamo lo spostamento S molto piu' piccolo di L

$$S \ll L \quad \rightarrow \quad \frac{S}{L} \ll 1\ rad$$

Possiamo dire, orientativamente, che $\theta < 0.1\ rad$

In questo caso ($\theta < 0.1\ rad$) avremo $\sin\theta \cong \theta$

e quindi

$$F_t = -mg\sin\theta = -mg\,\theta = -mg\,\frac{S}{L}$$

Possiamo dedurre un'altra cosa partendo dalla formula generale

$$F_T = m a_T \longrightarrow -\cancel{m}g\,\frac{S}{L} = \cancel{m}\,\frac{d^2S}{d^2t}$$

e quindi

$$\frac{d^2S}{d^2t} = -S\,\frac{g}{L}$$

L' ACCELERAZIONE e' PROPORZIONALE allo spostamento.

Ne deriva che il moto (per piccoli spostamenti) e' ARMONICO

Possiamo quindi studiare questo moto con le leggi del moto armonico

OSS

poiché $\frac{g}{L} > 0$ indichiamo questo rapporto con ω^2

e quindi:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = 0$$ la cui soluzione è proprio

$$S = S_0 \cos(\omega t + \delta)$$

PERIODO (piccole oscillazioni)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

OSSERVAZIONI GENERALI

- Le oscillazioni di piccola ampiezza sono ISOCRONE: pendoli con ampiezze differenti oscillano con lo stesso PERIODO

- T è INDIPENDENTE dalla massa
- $T \propto \sqrt{L}$ (direttamente proporzionali)
- $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ (inversamente proporzionale)

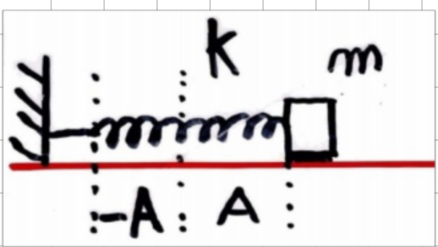
OSS

Con un pendolo possiamo osservare come varia g ai poli di un pianeta

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

Se $\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M}{R^2}$ all'equatore R è più grande che ai poli quindi g è minore, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ quindi all'equatore il periodo è MAGGIORE quindi oscilla più lentamente.

MOLLA



Nel caso di una massa attaccata a una molla produce un moto armonico.

La **FORZA** si oppone allo **SPOSTAMENTO**

Quindi, se $x =$ spostamento

$$F = -Kx$$

ma $F = ma \rightarrow -ma = Kx \longrightarrow a = -\frac{K}{m}x$

L'accelerazione è proporzionale allo spostamento, quindi siamo nel caso di un moto armonico

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -kx \implies \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

possiamo sostituire a $\frac{K}{m} = \omega^2$ (perché sempre positiva)

per il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$.

La legge oraria sarà

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad A = \text{spostamento max}$$

OSS

Al **CENTRO** abbiamo la velocità massima, agli **ESTREMI** la velocità è nulla

La forza elastica è conservativa, quindi $E_i = E_f$

Abbiamo 3 casi:

- Negli estremi $E = \frac{1}{2} K A^2$ (perché $v=0$)

- Al centro sarà:

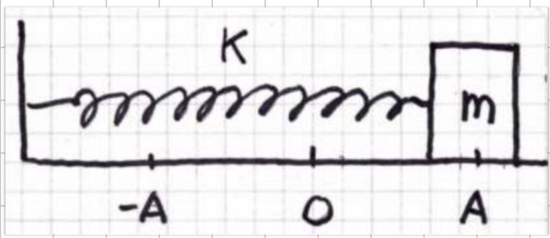
$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Possiamo vedere qual è la relazione tra l'energia meccanica e la velocità eguagliando le due formule (per il principio di conservazione)

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} K A^2 \rightarrow v = \pm A \sqrt{\frac{K}{m}}$$

OSCILLAZIONI SU UN PIANO

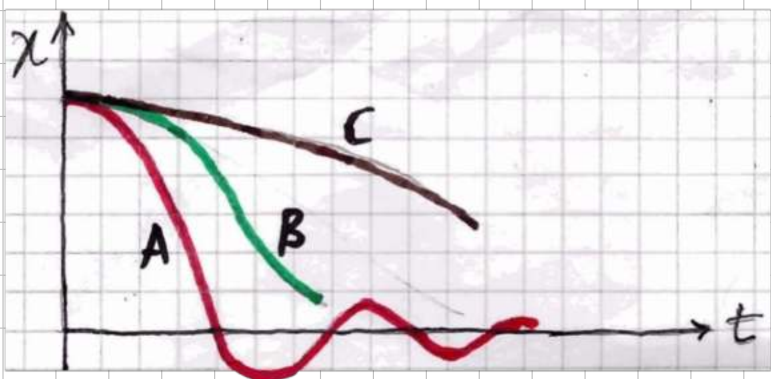
Se attacchiamo una massa a una molla su un piano senza attrito, la massa avrà una forza di RITORNO (generata dalla forza elastica) che porterà la massa ad avere un moto oscillatorio infinito



EQUILIBRIO

Se però consideriamo l'attrito del piano, il nostro corpo avrà un moto armonico SMORZATO, in cui il corpo tende a fermarsi (tendendo al punto d'equilibrio) perché l'ENERGIA diminuisce.

Possiamo avere 3 tipi diversi di SMORZAMENTO a seconda dell'intensità della forza d'attrito:



A) SOTTOSMORZAMENTO

Il sistema compie varie oscillazioni prima di fermarsi

B) SMORZAMENTO CRITICO

Il caso in cui l' equilibrio viene raggiunto più velocemente

C) SOVRASMORZAMENTO

Lo smorzamento è così grande da far sì che il sistema impieghi un tempo lunghissimo per raggiungere l' equilibrio

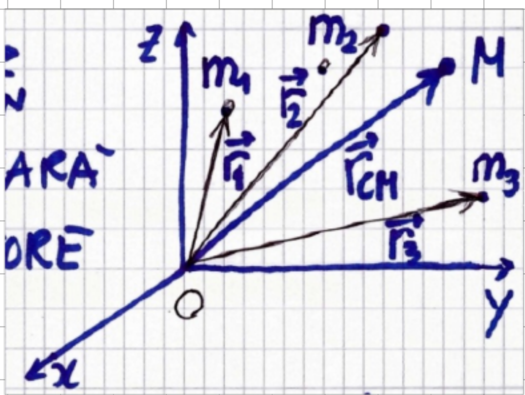
RISONANZA

Immaginiamo un bambino che dondola sull' altalena spinto da un'altra persona.
Il bambino avrà una sua OSCILLAZIONE LIBERA dovuta al movimento, ma vi sarà anche un' oscillazione FORZATA dall' altra persona. Per questo è possibile individuare due pulsazioni diverse: la PULSAZIONE NATURALE W_0 e la PULSAZIONE FORZATA W (ricorda che per il moto armonico

$\omega = \frac{2\pi}{T}$).

Se la persona spinge con una forza PERIODICA avente una pulsazione $\omega = \omega_0$ accade che l'ampiezza A aumenta sempre (potenzialmente all'infinito), potendo rompere il sistema. Questa condizione è detta di RISONANZA

DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI



Possiamo studiare la dinamica del sistema studiando la dinamica di ogni punto (tramite il 2° principio della dinamica)

$\vec{F_1} = m_1 \vec{a_1} \Rightarrow \vec{a_1} = \frac{\vec{F_1}}{m_1}$, abbiamo $\vec{r_0}$, abbiamo $\vec{v_0}$,

possiamo trovare $\vec{r} = r(t)$ e quindi studiare il moto.

Però in sistemi di punti molto diversi tra loro risulta difficile applicare questa tecnica.

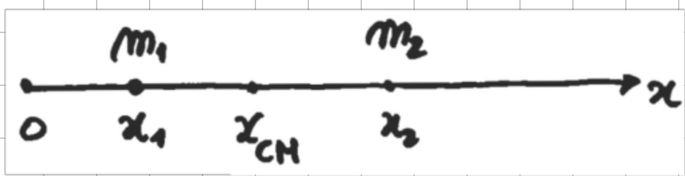
Possiamo studiare il sistema facendo uso del PUNTO DI MASSA, immaginando che la massa di tutti i punti sia concentrata in un solo punto detto CENTRO DI MASSA

Useremo come m la somma delle masse, $\vec{F}$ la risultante tra tutti i punti e $\vec{a}$ sarà

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sarà possibile studiare il moto del sistema

CENTRO DI MASSA DI UNA COPPIA DI PARTICELLE



m_1 si trova in x_1, m_2 si trova in x_2.

La POSIZIONE x_{CM} del CENTRO DI MASSA sarà

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

In uno spazio tridimensionale avremo che:

$$\vec{r_i} \equiv (x_i, y_i, z_i)$$

e così come tutte le masse, anche il centro di massa sarà individuato da un vettore posizione

$$\vec{r}_{CM} \equiv (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

Per quanto visto prima, il vettore sarà dato da

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 r_1 + \dots + m_n r_n}{m_1 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

e quindi banalmente

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

CORPO RIGIDO

Un corpo è detto RIGIDO se la distanza relativa tra due punti del corpo non cambia.

Se suddividiamo la massa M in tante piccole Δm avremo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i$$

Se studiamo il limite per $\Delta m_i \to 0$ per ridurre al minimo l'imprecisione, avremo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Come prima, se $\vec{r}_{CM} \equiv (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$ avremo

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

VELOCITA' DEL CORPO DI MASSA

Date n particelle, possiamo sicuramente trovare il centro del sistema

La velocita' e' data da:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

la massa è una costante per $\frac{d}{dt}$

$$= \frac{1}{M}\frac{d}{dt} m_1\vec{r}_1 + \dots + \frac{d}{dt} m_n \vec{r}_n = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d}{dt}\vec{r}_1 + \dots + m_n \frac{d}{dt}\vec{r}_n\right)$$

$$= \frac{1}{M}\sum^{N} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum \vec{P}_i$$

P = quantita' di moto

ma $P = \sum^{N} P_i$ quindi $\rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}$ oppure $\vec{P} = \vec{v}_{CM} M$

Abbiamo dimostrato che la velocita' del centro di massa e' la velocita del sistema.

Per definizione $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$ e $\vec{F} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM} = Ma_c$

Sappiamo che $\vec{F} = \vec{F}^{int} + \vec{F}^{est}$ ma $\vec{F}^{int} = 0$ perché tutte le particelle producono forze uguali e contrarie tra di loro

ma se $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}$ e $\vec{F} = \vec{F}^{int} + 0$ allora

$$\vec{F}^{int} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

1ª LEGGE CARDINALE DELLA DINAMICA

SISTEMA ISOLATO

Nel caso di un sistema isolato $\vec{F}^{est} = 0$

ma se $\vec{F}^{est} = \frac{d}{dt}\vec{P} = 0$ allora $\vec{P} = M\vec{v}_{CM} = \vec{cost}$

Ma allora anche $\vec{v}_{CM} = \vec{cost}$ (perché $M = cost$)

- In un sistema ISOLATO, la QUANTITÀ di moto e la VELOCITÀ del centro di massa sono COSTANTI.

Es.

- Vediamo il caso di due ragazzi che si spingono sul ghiaccio:

Siano $m_1 = 80\,Kg$, $m_2 = 40\,Kg$, $\vec{v}_1' = 0{,}3\,m/s$

Calcoliamo $\vec{v}_2'$ e l'energia MECCANICA prima e dopo la spinta.

Innanzitutto il sistema e' **ISOLATO**. Ne deriva che

$$\vec{P_i} = \vec{P_f}$$

$\vec{P_i} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}$ v = velocità iniziale

$\vec{P_f} = m_1 \vec{v_1}' + m_2 \vec{v_2}'$ v' = velocità finale

Le velocità iniziali di entrambi i corpi sono 0 perche' sono fermi quindi $\vec{P_i} = 0$, allora anche $\vec{P_f} = 0$

Possiamo calcolare $\vec{v_2}'$:

$$\vec{v_2}' = -\frac{m_1 \vec{v_1}'}{m_2} = -\frac{80 \cdot 0{,}3}{40} = -0{,}6\ m/s$$

Calcoliamo l' energia. L'energia potenziale e' sempre 0, consideriamo quindi solo la cinetica per l' energia meccanica.

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}$$

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1}' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}'$$

Inizialmente sono fermi quindi $E_{c_i} = 0$, dopo avra' un valore definito, le forze **NON** sono conservative.

- Vediamo il caso di un urto completamente anaelastico

Un proiettile a velocità $\vec{v}_1 = 400\ m/s$ di massa $m_1 = 10g$ si conficca in una massa ferma $m_2 = 390g$.

Calcolare l'energia cinetica prima e dopo l'urto e la velocità del sistema dopo l'urto (completamente anaelastico).

Il sistema è isolato (la forza peso non "riesce ad applicarsi" perché il proiettile è troppo veloce).

$P_i = P_f \quad \rightarrow \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1\,' + m_2 \vec{v}_2\,'$

$\vec{v}_2 = 0$ e $\vec{v}_1\,' = \vec{v}_2\,'$ perché le due masse sono ora un'unica massa (proiettile conficcato).

$$m_1 \vec{v}_1 = \vec{v}\,'(m_1 + m_2) \quad \rightarrow \quad \vec{v}\,' = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 400}{390 + 10} = 10\ m/s$$

Ora possiamo calcolare l'energia cinetica prima e dopo

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} = 800\ J$$

$$E_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}\,'^{\,2} = 20\ J$$

Sono stati persi 780 J in calore, le forze **NON** sono conservative.

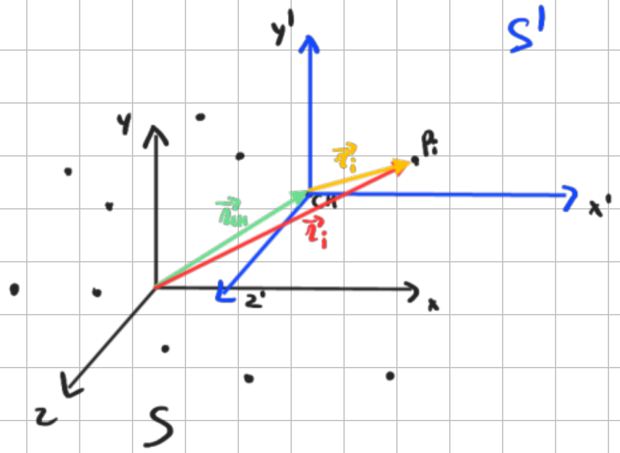
TEOREMA DEL KOENING

L'energia CINETICA di un sistema di punti è dato dalla somma di K calcolata nel centro di massa e la K di tutti i punti che si muovono attorno al centro di massa

DIMOSTRAZIONE

Calcoliamo il centro di massa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum^{N} m_i \vec{r}_i$$



Fissato un sistema di riferimento S' con origine nel centro di massa, le masse avranno differenti vettori posizione rispetto S' sapendo già che $\vec{r}'_{CM} = 0$ (origine)

Calcoliamo la velocità del sistema S' derivando $\vec{r}'_{CM}$

$$\vec{V}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}'_i$$

Sappiamo che questa quantità è 0 perché il sistema è centrato in CM quindi CM non si muoverà $\Rightarrow \vec{v}_{CM}' = 0$ (si può verificare anche formalmente)

Prendiamo ora una particella i-esima e calcoliamone $\vec{K}$ e $\vec{K'}$.
Si evince dal grafico che $\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$ e quindi derivando avremo $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$. L'energia cinetica in S sarà

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM}^2 + \vec{v}_i'^2 + 2 \vec{v}_{CM} \vec{v}_i')$$

Allora per tutto il sistema avremo

$$\vec{K} = \Sigma \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM}^2 + \vec{v}_i'^2 + 2 \vec{v}_{CM} \vec{v}_i') = \Sigma \left(\frac{m_i \vec{v}_{CM}^2}{2} + \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2} + m_i \vec{v}_{CM} \vec{v}_i' \right)$$

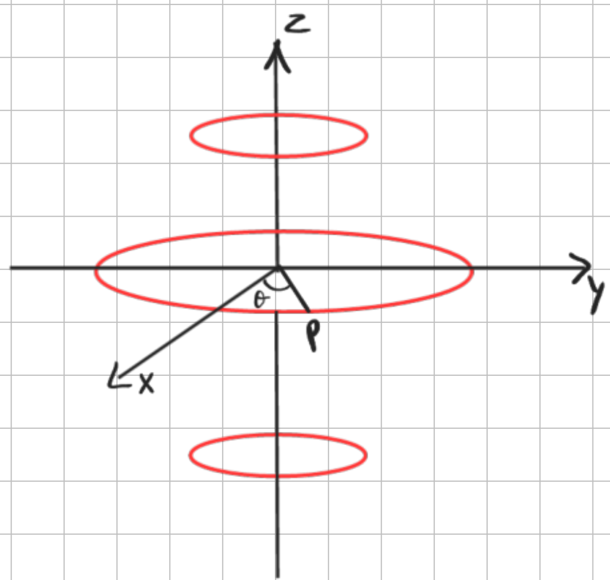
$$= \frac{1}{2} \vec{v}_{CM}^2 \Sigma m_i + \Sigma \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2} + \vec{v}_{CM} \Sigma m_i \vec{v}_i'$$

possiamo portare $\frac{1}{2}$ e $\vec{v}_{CM}$ fuori dalla sommatoria perché non dipendono dal variare di i. Ricordiamo che $\vec{v}_{CM}' = \frac{1}{M} \Sigma m_i \vec{v}_i' = 0$
Possiamo sostituire nella formula e dedurre che:

$$K = \frac{1}{2} \vec{v}_{CM}^2 M + \frac{1}{2} \Sigma m_i \vec{v}_i'^2$$

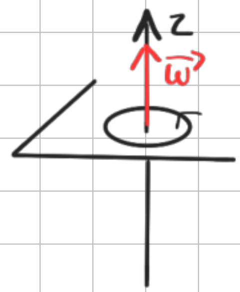
MOTO ROTOTRASLATORIO

Vediamo il moto di una ruota che gira.
Questa effettua un moto TRASLATORIO (lungo il pavimento) e uno ROTATORIO (rispetto all'asse che passa per il centro della ruota)
Generalmente il moto rotatorio cambia asse di riferimento, studieremo il caso di un asse fisso.



Ogni punto del sistema percorrerà una distanza diversa nello stesso tempo. Ma avranno stesse componenti angolari, quindi useremo le componenti angolari per studiare il moto di questo sistema.

Abbiamo il problema di come rappresentare $\vec{\omega}$ (velocità angolare) nelle 3 dimensioni.

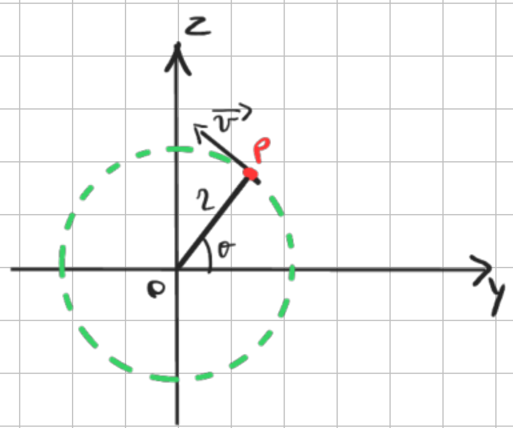


$\vec{\omega}$ avrà verso di un osservatore che vede il moto in senso ANTIORARIO. Il vettore $\vec{\alpha}$ (accelerazione angolare) sarà concorde con $\vec{\omega}$ se questo aumenta, altrimenti saranno discordi.

Per studiare il moto ci basterà studiare come variano $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$

CINEMATICA ROTAZIONALE

I casi saranno analoghi a quelli di un moto circolare.



$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ $\quad \omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $\quad \omega = cost$

$\omega t = \theta - \theta_0$ $\quad \alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

(leggi orarie del moto analoghe)

RELAZIONI TRA GRANDEZZE ANGOLARI E LINEARI

- $v = \dfrac{ds}{dt}$ $\quad S = r\theta$ $\quad v = \dfrac{d}{dt} r\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$
- $a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} r = r\alpha$

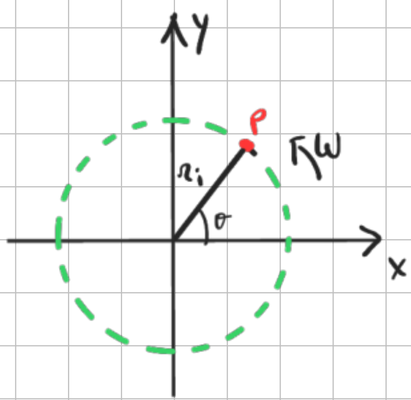
- $a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(rW)^2}{\cancel{r}} = rW^2$

- $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (W^2 r)^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + W^4 r^2} = \sqrt{r^2(\alpha^2 + W^4)} = r\sqrt{\alpha^2 + W^4}$

ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE

Supponiamo un corpo che ruota attorno a un asse z (fisso)



Ogni particella avrà energia cinetica $K_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$

Ma $\vec{v}_i = r_i W$ (la velocità angolare è unica), quindi $K_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 W_i^2$

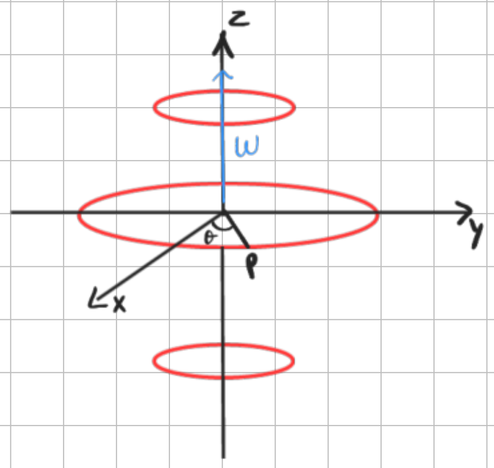
Allora l'energia cinetica del sistema sarà:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} w^2 \sum m_i \vec{r}_i^2}$$

La quantità $I = \sum m_i \vec{r}_i^2$ è detta MOMENTO D'INERZIA e indica come è distribuita la MASSA rispetto all'ASSE DI ROTAZIONE

Maggiore è il momento di inerzia, più difficile sarà mettere in rotazione la massa.

ENERGIA CINETICA ROTOTRASLATORIA



Per il teorema del Koening

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

ma $\sum m_i v_i^2 = \sum m_i r_i^2 \omega^2 = I \omega^2$

I = momento d'inerzia

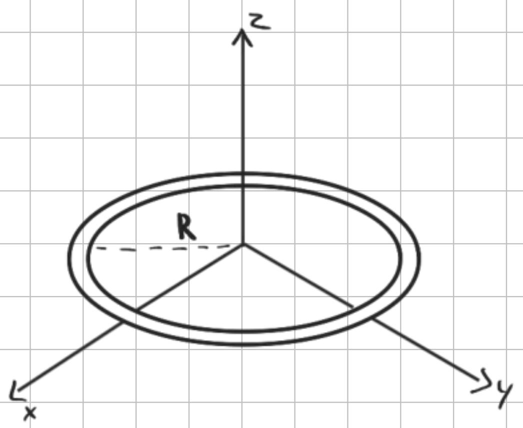
$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Si ricordi che $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ è l'energia cinetica ROTAZIONALE

MOMENTO DI INERZIA DI UN ANELLO

Un anello ruota attorno ad un asse perpendicolare a distanza r. Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto l'asse z.

Suddividiamo la massa M dell'anello in piccoli dm a distanza r dall'asse.



$dI = r^2 dm$ inerzia elementare

$I = \int r^2 dm$ inerzia totale

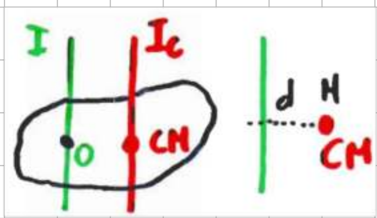
i dm sono tutti a distanza R

$I = R^2 \int dm = R^2 M$ (M= somma dei dm)

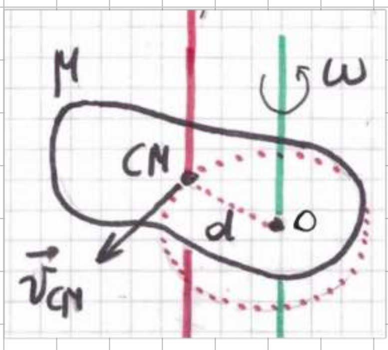
TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI

Il MOMENTO D'INERZIA di un corpo rispetto ad un asse è pari alla somma del momento d'inerzia che il corpo ha rispetto ad un asse parallelo al primo, passante per il centro di massa ed il momento d'inerzia che si ottiene rispetto all'asse supponendo che tutta la massa sia concentrata nel centro di massa

$I = I_c + Md^2$



DIMOSTRAZIONE



$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

$v_{CM} = d\,\omega$ (distanza)

$K = \frac{1}{2}(M d^2 \omega^2 + I_c \omega^2)$

Ricordiamo che l'energia cinetica rotazionale

$K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Eguagliamo le due espressioni

$$\cancel{\frac{1}{2}} I \cancel{\omega^2} = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\omega^2} (Md^2) \Rightarrow I = Md^2$$

MOMENTO D' INERZIA DI UN DISCO RIGIDO

Calcolare il momento d'inerzia di un disco di massa M rispetto all'asse passante per il suo centro e perpendicolare al piano del disco.

Suddividiamo il disco in tanti anelli concentrici, la cui massa è dm

Di conseguenza

$$dI = dm\, r^2$$

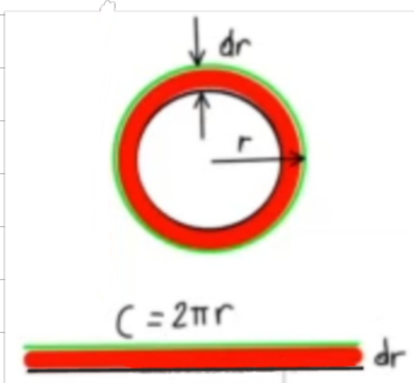
La massa sarà distribuita su una superficie di area dA

con DENSITÀ SUPERFICIALE

$$\rho = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dA = \frac{dm}{\rho}$$

Sia chiaro che la densità superficiale è la stessa sia per A ed M che per dA e dm (disco e anello)

Immaginiamo di estendere l'anello in lunghezza



$dA = 2\pi r\, dr$

$dm = \rho\, dA = \rho\, 2\pi r\, dr$ ma ρ abbiamo visto che e' la stessa anche per M, A

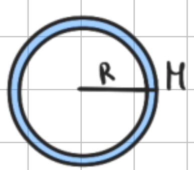
$dm = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} 2\cancel{\pi} r\, dr$ e $A = \pi R^2$, $\rho = \frac{M}{A}$

$dm = \frac{2Mr\, dr}{R^2}$, $dI = dm\, r^2 = \frac{2Mr\, dr}{R^2} r^2 = \frac{2Mr^3 dr}{R^2}$

Avendo un differenziale, invece della sommatoria (per trovare I del disco) calcoliamo l' integrale

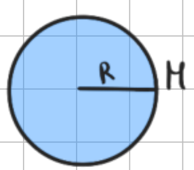
$$I = \int dI = \int_0^R \frac{2Mr^3}{R^2} dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R =$$

$$= \frac{\cancel{2}M}{\cancel{R^2}} \frac{1}{\cancel{4}_2} R^{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2} MR^2$$ (la distanza r varia tra 0 e R)



$I = MR^2$

La distribuzione della massa e' determinante



$I = \frac{MR^2}{2}$

MOMENTO D' INERZIA DEL CILINDRO

Suddividiamo il cilindro in dischi di massa dm

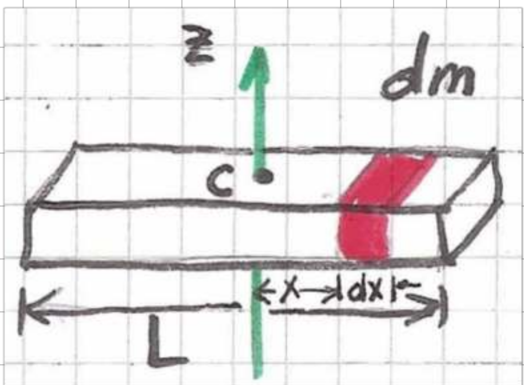
$$dI = \frac{R^2 dm}{2} \qquad I = \int dI = \int \frac{R^2}{2} dm = \frac{R^2 M}{2}$$

coincide con quello dell' anello

MOMENTO D' INERZIA DI UN ASTA

Vediamo come cambia I se l' asse di riferimento passa per il centro o l' estremo.

ASSE PASSANTE PER IL CENTRO



Consideriamo sempre un' asta elementare di massa dm.

Il volume elementare sara' $dV = A\,dx$

$$dI = x^2 dm \Rightarrow I_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm$$ ricordiamo che $dm = dV\rho = A\,dx\,\rho$

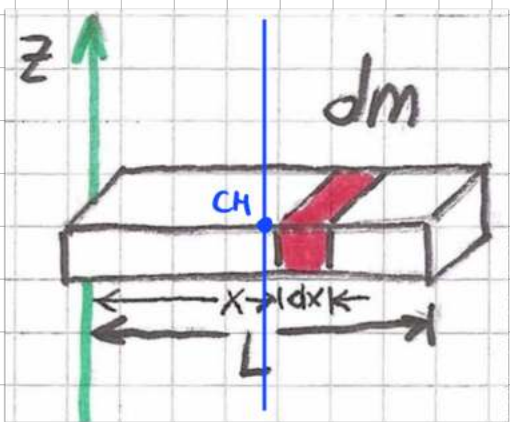
$$I_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho A \, dx = \rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho A \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \rho A \left[\frac{L^3}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{L^3}{3 \cdot 8} \right) \right]$$

$$= \rho A \left[\frac{2}{24} L^3 \right] = \frac{1}{12} \rho A L^3$$

Gli estremi di integrazione sono $-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}$ perché la distanza alla quale vengono poste le aste elementari, sia l'asta posta al centro, varia dai due estremi quindi $-\frac{L}{2}$ e $\frac{L}{2}$

ASSE PASSANTE PER UN ESTREMO

In questo caso applichiamo il teorema degli assi paralleli



$$I = I_c + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3} ML^2$$

esempio precedente

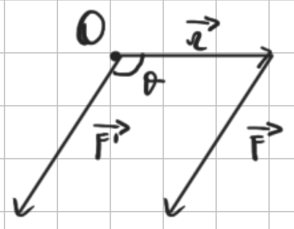
OSS

- SFERA PIENA: $I_c = \frac{2}{5} MR^2$

- GUSCIO SFERICO: $I_c = \frac{2}{3} MR^2$

MOMENTO DI UNA FORZA

Data una forza $\vec{F}$ e un POLO O

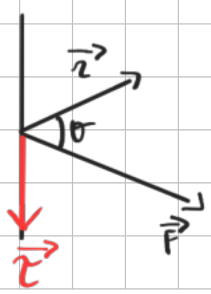


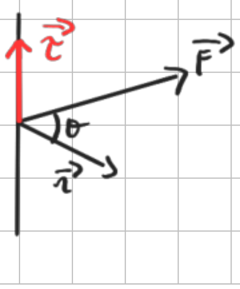
Definiamo un vettore $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ detto MOMENTO DELLA FORZA

- Il MODULO sarà $\tau = rF\sin\theta$ in cui θ è l'angolo compreso più piccolo, oppure l'angolo compreso traslando $\vec{F}$ su O.

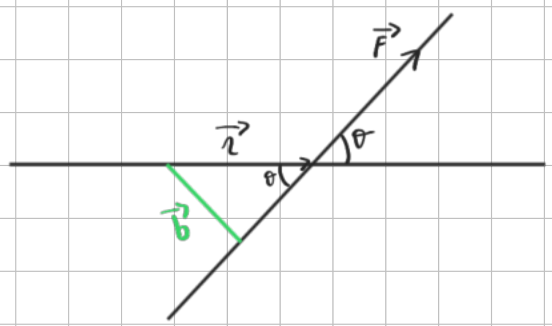
- La DIREZIONE è perpendicolare al piano

- Il VERSO è quello di un osservatore che vede il primo vettore sovrapporsi al secondo in senso antiorario.





BRACCIO DELLA FORZA



$b = r \sin\theta =$ BRACCIO DELLA FORZA

$\tau = F r \sin\theta = F b$

$F \sin\theta =$ NORMALE

Il BRACCIO DELLA FORZA è il vettore distanza tra il polo O e il punto d'applicazione della forza

II LEGGE CARDINALE DELLA DINAMICA

La 2ª legge della dinamica ci dice che per un punto materiale $F = \frac{d}{dt}\vec{p}$. Per un sistema la CAUSA del moto è il MOMENTO DELLA FORZA τ, considereremo quindi anziché la quantità di moto, il MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO $\vec{L}$ (o momento angolare)

$$\vec{\tau}^{EST} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

con $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

DIMOSTRAZIONE

$L = \vec{r} \wedge \vec{p}$ è il MOMENTO ANGOLARE

Calcoliamo la derivata rispetto t

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v} \wedge \vec{p}$$

ma $\vec{v} \wedge \vec{p} = 0$ perché il modulo è dato da $|v p \sin\theta|$ ma essendo $\vec{v}$ e $\vec{p}$ paralleli (stesso verso e direzione) allora $\theta = 0$.

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau}$$

Considerando i momenti della forza interni ed esterni vediamo che la risultante è:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^{INT} + \vec{\tau}^{EST}$$

ma $\vec{\tau}^{INT} = 0$ quindi possiamo dire che

$$\vec{\tau}^{EST} = \frac{d}{dt}\vec{L} \qquad 2^{\circ} \text{ legge}$$

OSS

In un sistema isolato, con $\vec{\tau}^{EST} = 0$, avremo che

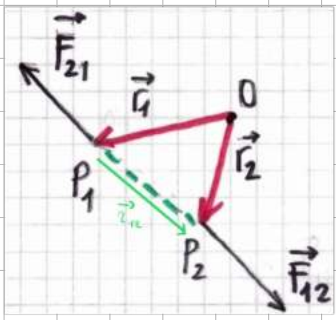
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \qquad \text{quindi} \quad \vec{L} = \vec{cost}$$

Quindi si CONSERVERÀ il momento angolare.

Se $\vec{F}^{EST} = 0$ si conserva la quantità di moto $\left(\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}\right)$
quindi $\vec{p} = \vec{cost}$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che $\vec{\tau}^{INT} = 0$



Presi due punti P_1 e P_2 sappiamo che $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (3° principio della dinamica).

Quindi sicuramente $\vec{F}^{INT} = 0$

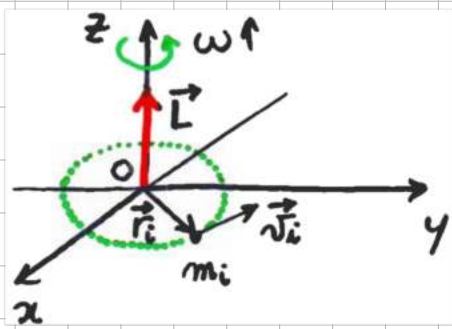
Andiamo ora a calcolare $\vec{\tau}^{INT}$

$$\vec{\tau}^{INT} = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{21} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge \vec{F}_{12}$$ (occhio all' ordine)

Notiamo che $\vec{r}_{12} \parallel \vec{F}_{12}$ quindi il prodotto vettoriale da 0.

quindi $\vec{\tau}^{INT} = 0$

RELAZIONE MOMENTO ANGOLARE - COMPONENTI ANGOLARI



Se l' asse fisso è asse DI SIMMETRIA allora $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$

DIMOSTRAZIONE

Tutti i punti ruotano attorno all'asse con la stessa velocità angolare.

Consideriamo prima i punti che appartengono al piano:

$\vec{L_i} = \vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i} \quad \Rightarrow L_i = r_i m_i v_i \sin\theta = r_i m_i v_i$

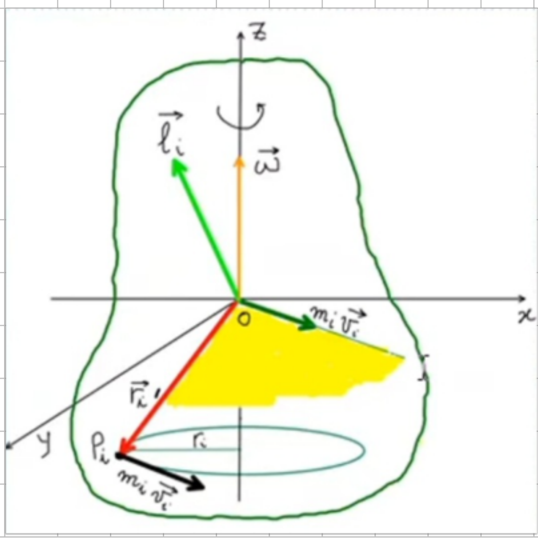
Passiamo alle componenti angolari:

$$L_i = r_i^2 m_i \omega$$

Questo è il modulo momento angolare dei punti del piano

Il verso è positivo e la direzione è parallela all'asse z e quindi anche a $\vec{\omega}$.

I punti che non appartengono al piano generano un momento angolare con un certo angolo d'inclinazione.



$\vec{L_i} = \vec{r_i}' \wedge m_i \vec{v_i}$ in cui $\vec{r_i}$ e' il vettore posizione

$L_i = r_i' m_i v_i \sin\theta = r_i' m_i v_i = r_i' m_i r_i \omega$

r_i e' il raggio della circonferenza sulla quale ruota il punto al di fuori del piano

Il vettore L_i puo' essere scomposto in $\vec{L_i} \equiv (L_{ip}, L_{i\perp})$ in cui $L_{ip} = L_i \sin\theta_i$ e $L_{i\perp} = L_i \cos\theta_i$.

Vediamo quanto vale la componente PARALLELA:

$L_{ip} = m_i r_i \omega \, r_i' \sin\theta_i$

Si puo' dimostrare che $r_i' \sin\theta_i = r_i$, sostituiamo

$$L_{ip} = m_i r_i^2 \omega$$

Per avere L_{ip} e $L_{i\perp}$ di tutte le particelle avremo:

$$L_p = \Sigma m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

$L_\perp = \Sigma L_{i\perp}$, questa quantita' vale 0 per via dell' asse di simmetria, che annulla le componenti orizzontali (in questo caso $L_\perp$) di una coppia di particelle simmetriche.

In finale quindi, sia $\hat{h}$ un versore di z (stesso verso e direzione)

$$\vec{L} = \left(\sum L_{ip}\right)\hat{h} = I\vec{\omega}$$

MOTO ROTOTRASLATORIO NOTO τ

Abbiamo visto che la causa del moto di un sistema è $\tau = I\alpha$ in cui I è il momento d'inerzia e α è l'accelerazione angolare dei punti del sistema. Ricaviamo la legge oraria:

- $\alpha = \frac{\tau}{I}$ ma ricordiamo che $\alpha = \frac{d}{dt}\omega \rightarrow \alpha\, dt = d\omega$

$$\int_0^t \alpha\, dt = \int_0^t d\omega \quad \text{Studiamo il 2° membro}$$

$$\int_0^t d\omega = \omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha\, dt$$

- $\omega = \frac{d}{dt}\theta \rightarrow \omega dt = d\theta \rightarrow \int_0^t \omega\, dt = \int_0^t d\theta = [\theta]_0^t =$

$$= \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega\, dt$$

CASO $\tau = 0$

Se $\tau = 0$ allora il corpo è fermo oppure si muove di moto uniforme perché l'accelerazione $\alpha = \frac{\tau}{I} = 0$

Possiamo anche dedurre che $\alpha = \frac{d}{dt}\omega = 0 \Rightarrow \omega = \text{cost}$

Ma allora $\theta = \theta_0 + \omega t$

$\tau = cost$

Se $\tau = cost \Rightarrow \alpha = cost$ e quindi avremo

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2$$

SISTEMA CHE RUOTA ATTORNO AD UN ASSE FISSO

Vediamo cosa succede se l'asse NON è di simmetria

Sappiamo che τ_z (componente parallela) $= \frac{d}{dt} L_z$

ma $L_z = I_z \omega \Rightarrow \tau_z = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau_z}{I_z}$

Quindi notiamo che l'accelerazione del sistema dipende unicamente dalla componente parallela

ENERGIA CINETICA e LAVORO DI UN SISTEMA CHE RUOTA ...

Vediamo l'esempio del disco pieno

$I = \frac{1}{2} MR^2 \qquad K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2$

Vediamo come il momento della forza τ genera lavoro W

Partiamo dall'energia cinetica:

$K = \frac{1}{2} I \omega^2$ consideriamo una variazione elementare

$$dK = \frac{dK}{d\omega} d\omega \rightarrow \frac{dK}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \frac{dK}{d\omega} = I\omega$$

$$\rightarrow dK = I \omega \, d\omega$$

Ricordiamo che $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = \alpha \, dt$ e sostituiamo

$$dK = I \omega \alpha \, dt$$

Ricordiamo che $\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow dK = I \alpha \frac{d\theta}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$

Ricordiamo che $I\alpha = \tau \rightarrow dK = \tau \, d\theta$

Integriamo

$$\int_{\theta_0}^{\theta} dK = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau \, dt \rightarrow \Delta K = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau \, dt = W$$

LAVORO

- Se $\tau = \text{cost}$:

$$W = \tau \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \rightarrow W = \tau \Delta\theta$$

Eguagliamo le due equazioni di W considerando
ΔK= energia cinetica rotazionale

$$\tau \Delta \theta = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

POTENZA

Ricordando che $P = \frac{d}{dt} W$ e $dW = \tau \, d\theta$ quindi

$$P = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

TEOREMA DELL' IMPULSO ANGOLARE

L' azione del MOMENTO di una forza durante un intervallo di tempo causa una VARIAZIONE del MOMENTO ANGOLARE

Questa variazione e' detta IMPULSO ANGOLARE

DIMOSTRAZIONE

Partiamo dalla 2ª legge card. della dinamica

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L} \rightarrow \vec{\tau}\,dt = d\vec{L}$$

$d\vec{L}$ puo' essere espresso come $d\vec{L}(t) = \frac{d}{dt}\vec{L}(t)\,dt$ quindi

$$\vec{\tau}\,dt = \frac{d}{dt}\vec{L}(t)\,dt$$

Consideriamo un intervallo t_1, t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\vec{L}(t)\,dt \rightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\,dt = [L(t)]_{t_2}^{t_1} = L(t_1) - L(t_2) = \Delta L$$

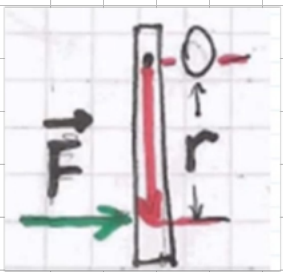
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\,dt = \Delta L$$ IMPULSO ANGOLARE

L' impulso angolare $\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt = \vec{\tau}_m \Delta t$ $\vec{\tau}_m$ = valore medio

e quindi $\vec{\tau}_m = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ valore medio del momento nell' intervallo d' integrazione

Es.

Consideriamo un corpo sospeso in un punto O libero di oscillare:



Applicando una forza F a distanza r generiamo un impulso angolare:

$$\int \vec{\tau} dt = \vec{\Delta L}$$

Noi sappiamo che $\int \tau\, dt = \int (\vec{r} \wedge \vec{F})\, dt = \vec{r} \wedge \int F\, dt = \vec{r} \wedge \vec{J} = \vec{\Delta L}$

IMPULSO ANGOLARE

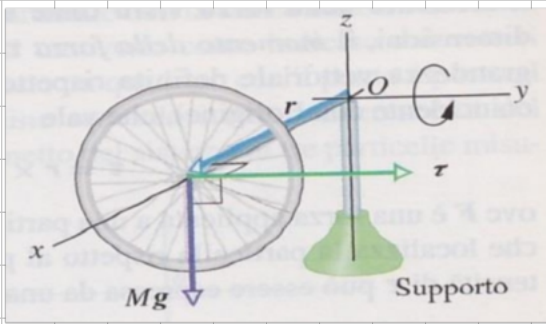
r non dipende da t

$\vec{r} \wedge \vec{J}$ è il MOMENTO DELL' IMPULSO DELLA FORZA

In questo caso l'applicazione dell'impulso genera momento dell'impulso della forza pari alla variazione di momento angolare (generata anch'essa dall'impulso).

GIROSCOPIO E MOTO DI PRECESSIONE

Il GIROSCOPIO e' composto da una ruota fissata a un albero, libera di girare



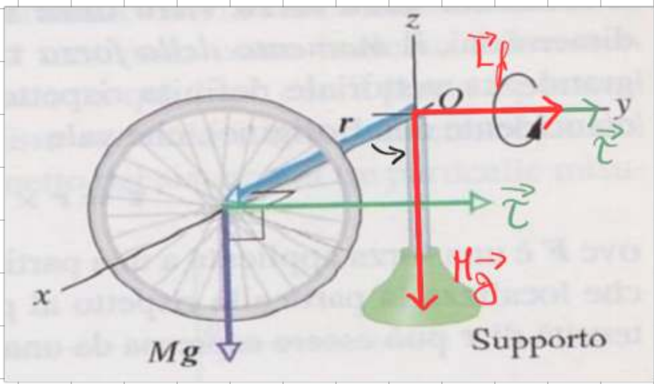
La causa del moto è il MOMENTO della FORZA PESO

La VELOCITA' ANGOLARE DI PRECESSIONE ω_p

dipende da ω (velocita' angolare, M (massa), R (raggio della ruota), r (lunghezza dell'albero)

Studiamo il moto in vari casi:

- RUOTA FERMA



La causa del moto e' il momento della forza

$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge M\vec{g}$ ($\vec{r}$ e' vettore posizione)

$= rMg \sin 90° = rMg$ sara' l'intensita'

$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} L = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \longrightarrow \vec{\tau}\Delta t = \Delta\vec{L}$

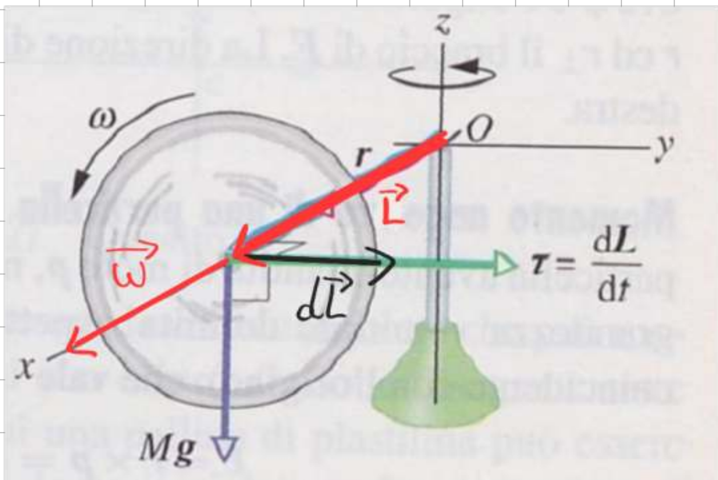
La ruota e' inizialmente ferma, quindi $\vec{L_i} = \vec{0}$

Quindi $\Delta\vec{L} = \vec{L_f} \Rightarrow \vec{\tau}\Delta t = \vec{L_f}$

I vettori $\vec{\tau}$ e $\vec{L_f}$ sono PARALLELI (perche $\vec{\tau} = \vec{L_f}$ moltiplicato per uno scalare Δt), quindi si trovano sullo stesso asse y dello spazio.

Possiamo dedurre che anche la VELOCITA' ANGOLARE si trova sull'asse y (ricavata da L), quini l'albero ruota nel piano perpendicolare a y (verso il basso)

- RUOTA IN MOVIMENTO



La ruota ha una sua velocità angolare W, e quindi un MOMENTO iniziale $\vec{L} = \vec{I}\vec{W}$

$\vec{L}$ e $\vec{W}$ si trovano sullo stesso asse x

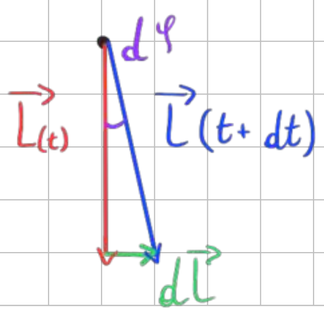
$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} L \rightarrow \vec{\tau}\, dt = dL$$

Quindi $\vec{\tau}$ agendo in un intervallo di tempo dt produce $d\vec{L}$

Possiamo immaginare che la variazione di $\vec{L}$ sarà:

$$\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + d\vec{L}$$

La variazione $d\vec{L}$ rispetto $\vec{L}(t)$ è molto più piccola, tanto da essere trascurabile



Cio' che cambia è la direzione, il modulo è praticamente uguale

$$L(t) \cong L(t+dt)$$

Sia $d\varphi$ la variazione angolare

$$d\varphi = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \frac{dL}{L}$$

ricordiamo che $dL = \tau\, dt = Mgr\, dt$ e $L = I\omega$ quindi

$$d\varphi = \frac{Mgr\, dt}{I\omega}$$

La velocita' angolare di precessione è la derivata dell' angolo rispetto al tempo quindi

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Mgr\,\cancel{dt}}{I\omega\,\cancel{dt}} = \frac{Mgr}{I\omega}$$

in definitiva $I = MR^2$, quindi sostituendo

$$\omega_p = \frac{\cancel{M}gr}{\cancel{M}R^2\omega} = \frac{gr}{R^2\omega} = \frac{\tau}{L}$$

OSS

Si noti che $\tau = \omega_p L \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Abbiamo visto per la 2ª legge cardinale della dinamica che in un sistema isolato

$$\vec{\tau}^{est} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

ma essendo il sistema isolato $\vec{\tau}^{est} = \vec{0}$ e $\vec{L} = \vec{cost}$

Prendiamo in esame il caso di uno studente seduto su una sedia girevole che mantiene dei pesi.

Seppur il sistema non è rigido, resta un sistema rigido che gira attorno ad un asse di rotazione fisso, quindi

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

e di conseguenza $I_i = I_f$, $\vec{\omega_i} = \vec{\omega_f}$

La velocità angolare finale sarà

$$\omega_f = \frac{I_i \omega_i}{I_f}$$

Se durante la rotazione allarghiamo le braccia aumenta il raggio delle masse e I_f sarà maggiore di I_i ($I = Mr^2$) e la velocità angolare diminuirà

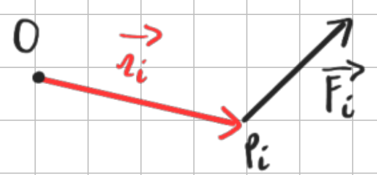
INDIPENDENZA DEL MOMENTO RISULTANTE DAL POLO

In generale il momento di una forza è un vettore che dipende dal polo.

Il momento RISULTANTE (risultante dei momenti) NON dipende dal polo, quindi possiamo sceglierne quello che ci fa più comodo

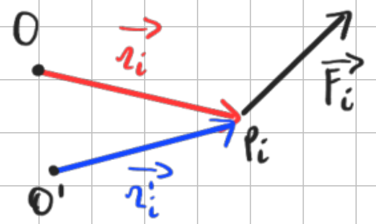
DIMOSTRAZIONE

Consideriamo una particella i-esima alla quale applichiamo una forza i-esima

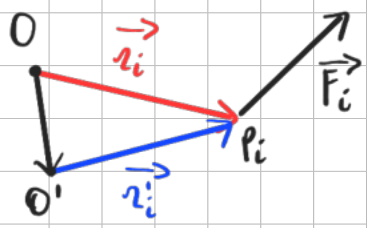


Calcoliamone il momento della forza : $\vec{\tau}_{oi} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$

Consideriamo un secondo polo O'



Di conseguenza $\vec{\tau}_{o'i} = \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$. In generale $\vec{\tau}_{oi} \neq \vec{\tau}_{o'i}$



Per il metodo punta-coda $\vec{r_i} = \vec{OO'} + \vec{r_i'}$ e sostituiamo:

$\vec{\tau_{oi}} = (\vec{OO'} + \vec{r_i'}) \wedge \vec{F_i}$

Il momento risultante sarà dato dalla sommatoria di tutti i momenti applicati ai punti:

$$\vec{\tau_o} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau_{oi}} \longrightarrow \vec{\tau_o} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OO'} + \vec{r_i'}) \wedge \vec{F_i} \longrightarrow \vec{\tau_o} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OO'} \wedge \vec{F_i} + \vec{r_i'} \wedge \vec{F_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{OO'} \wedge \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i'} \wedge \vec{F_i}$$

Notiamo che $\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i'} \wedge \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau_{o'i}} = \vec{\tau_{o'}}$ risultante delle forze applicate in O'

Andando a sostituire:

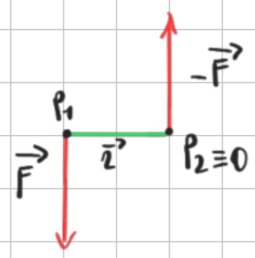
$\tau_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{OO'} \wedge \vec{F_i} + \vec{\tau_{o'}}$ $\quad \vec{OO'}$ è una costante $\Rightarrow \tau_o = \vec{OO'} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \vec{\tau_{o'}}$

ma $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F}$ (risultante delle forze). In definitiva

$\vec{\tau_o} = \vec{OO'} \wedge \vec{F} + \vec{\tau_{o'}}$ $\quad$ quindi $\quad \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau_o} = \vec{\tau_{o'}}$

Il momento risultante è quindi indipendente dal polo scelto.

Es.



Abbiamo una coppia di forze parallele
In questo caso la risultante delle forze è nulla.
Per quanto dimostrato possiamo scegliere qualsiasi polo per calcolare il momento risultante.
Ad esempio scegliendo P_2 come polo, avremo:
$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} \rightarrow \tau = rF\sin\theta = rF$ MOMENTO DI F

Il MOMENTO DI -F è nullo perché $r=0$

Il momento RISULTANTE sarà quindi rF

OSS

Si ricordi che τ ha un verso pari a quello di un osservatore....

EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO RIGIDO

Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha l' EQUILIBRIO STATICO se $\vec{F}=\vec{0}$ e $\vec{\tau}=\vec{0}$

Se $\vec{F}=\vec{0}$ anche il centro di massa sarà in equilibrio statico e quindi $\vec{v}_{CM}=\vec{0}$, per $\vec{\tau}=\vec{0}$ invece avremo $\vec{\omega}=\vec{0}$.

Essendo $\vec{F}=\vec{0}$ potremo scegliere il nostro polo liberamente

URTO ELASTICO UNIDIMENSIONALE

Ricordiamo che per la 1ª legge cardinale della dinamica

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{est} = \frac{d}{dt}\vec{P} \qquad \text{con } \vec{P}=M\vec{v}_{CM}$$

nel caso di un sistema isolato $\vec{P}=\vec{cost} \Rightarrow \vec{v}_{CM}=\vec{cost}$.

- Si parla di urto ELASTICO se dopo l' urto l' energia cinetica resta la stessa (si conserva), altrimenti è detto ANELASTICO
- Si parla di urto COMPLETAMENTE anelastico se dopo l'urto due corpi si muovono come se fosse uno solo

Vediamo il caso di urti elastici unidimensionali

Quanto valgono V' e v' (con $V>v$ perche' si urtano)

Considiriamo un sistema isolato (P si conserva):

$\vec{P_1}+\vec{P_2}=\vec{P_1'}+\vec{P_2'} \quad \rightarrow MV+mv=MV'+mv'$

$\rightarrow M(V-V')=m(v-v')$

L'energia cinetica si conserva:

$\cancel{\frac{1}{2}}MV^2+\cancel{\frac{1}{2}}mv^2=\cancel{\frac{1}{2}}MV'^2+\cancel{\frac{1}{2}}mv'^2$ sostituiamo

$\rightarrow M(V^2-V'^2)=m(v'^2-v^2)$ mettiamo a sistema

$$\begin{cases} M(V-V')=m(v'-v) \\ M(V^2-V'^2)=m(v'^2-v^2) \end{cases}$$ ricaviamo V' e v'

$$\begin{cases} M(V-V')=m(v'-v) \\ M(V+V')(V-V')=m(v'+v)(v'-v) \end{cases}$$ possiamo semplificare la 2^a

$$\frac{M\cancel{(V-V')}=m\cancel{(v'-v)}}{\cancel{M}(V+V')\cancel{(V-V')}=\cancel{m}(v'+v)\cancel{(v'-v)}}$$

$$\begin{cases} M(V-V') = m(v'-v) \\ V+V' = v+v' \quad \rightarrow \quad V' = v+v'-V \end{cases}$$

(per l'esame basta impostare il sistema e saltare a questo punto).

Sostituiamo la 2ª nella prima dopo aver sviluppato

$$mv' = mv + MV - MV' \quad \rightarrow \quad mv' = mv + MV - M(v+v'-V)$$

$$mv' = mv + MV - Mv - Mv' + MV \quad \rightarrow \quad mv' = (m-M)v + 2MV - Mv'$$

$$\rightarrow \quad v'(m+M) = (m-M)v + 2MV$$

$$\blacktriangleright \; v' = \frac{(m-M)v}{m+M} + \frac{2MV}{m+M}$$

ricaviamo V' sostituendo $m \leftrightarrows M$, $v \leftrightarrows V$, $v' \leftrightarrows V'$

$$\blacktriangleright \; V' = \frac{(M-m)V}{M+m} + \frac{2mv}{M+m}$$

Vediamo diversi casi:

- $m = M$

  Sviluppando avremo $v' = V$ e $V' = v$

- $M \ll m$ e $v = 0$ (M trascurabile)

  $$v' = \frac{2M}{m+M} = 0$$

$$V' = \frac{M - m}{M + m} V = -\frac{m}{m} V = -V$$

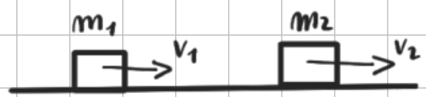
- $M >> m$ e $v = 0$ (m trascurabile)

$$v' = \frac{2M}{m+M} V + \frac{m - M}{m+M} v = \frac{2M}{m+M} V = 2V$$

1:40

$$V' = \frac{2m}{m+M} v + \frac{M-m}{m+M} V = \frac{M-m}{m+M} V = V$$

Es.



$m_1 = 4 Kg$ $v_1 = 6 m/s$ $V_1 = ?$

$m_2 = 2 Kg$ $v_2 = 3 m/s$ $V_2 = ?$

si consideri un urto elastico

Per verificarsi l' urto $v_2 < v_1$ (verificato)

Il sistema e' isolato $\rightarrow \vec{P}$ si conserva

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ v_1 + V_1 = v_2 + V_2 \end{cases}$$

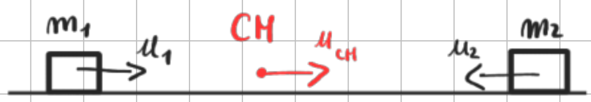
$$\begin{cases} 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 4 \cdot V_1 + 2 \cdot V_2 \\ 6 + V_1 = 3 + V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = 4 \, m/s \quad V_2 = 7 m/s$$

OSS

Si ricordi che se osserviamo da fermi un sistema di riferimento in moto che abbia al suo interno delle masse in movimento, la velocità della massa sarà data dalla velocità che osserviamo noi meno la velocità del sistema in moto

METODO ALTERNATIVO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL C.M.

Consideriamo le due masse che urtano come un unico sistema



Consideriamo il sistema di riferimento del CM quindi l'origine coincide con il CM, di conseguenza $v_{CM}=0$.

La velocità delle due masse sarà data da:

$u_1 = v_1 - u_{CM}$ $\quad$ v_1 è la velocità della massa, u quella rispetto CM

$u_2 = v_2 - u_{CM}$

$$u_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Prima dell'urto le due particelle si avvicinano, dopo l'urto invece si allontanano a velocità $-u$

Quindi la velocità dopo l'urto sarà:

$V_1 = u_{CM} - u_1$

$V_2 = u_{CM} - u_2$

MOTO ROTOTRASLATORIO DI UN SOLIDO

Sia M la massa e R il raggio

Ricordiamo che a seconda della forma del solido, il **MOMENTO DI INERZIA** avrà un coefficiente β diverso

$$I = \beta M R^2$$

Consideriamo che il solido parta da fermo.

Iniziolmente l'energia meccanica è composta solo dall'energia potenziale (energia cinetica $=0$), viceversa alla fine (si mantiene)

L'energia meccanica ha un'energia cinetica **TRASLAZIONALE** e una **ROTAZIONALE**

$$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I w^2 \qquad w = \frac{v}{R}$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \qquad I = \beta M R^2$$

$$\cancel{M} gh = \frac{1}{2} \cancel{M} v^2 + \frac{1}{2} \beta \cancel{M} \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}} \rightarrow v^2 = \frac{2gh}{(1+\beta)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{(1+\beta)}}$$

Solidi con un FATTORE DI FORMA (β) maggiore avranno una velocità minore.

La velocità del solido è INDIPENDENTE da raggio e massa.

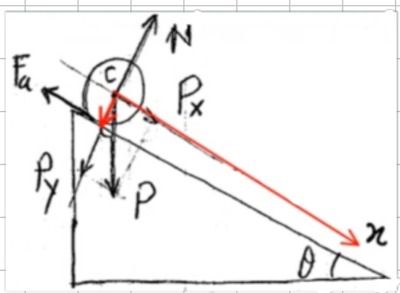
Es.

Vediamo il caso di una Sfera

$h = 0{,}29\,m \qquad g = 9{,}81\,m/s^2$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}29}{1 + 2/5}}$$

Vediamo adesso come ricavarci l'accelerazione e la forza d'attrito statica.



$a = ? \qquad F_a = ?$

Il moto di puro rotolamento è la combinazione di un moto traslatorio (nullo) e di uno rotatorio attorno ad un asse fisso.

Per il moto traslatorio abbiamo $\vec{F} = M\vec{a}$

Andiamo a vedere le componenti della risultante $\vec{F}$.

Lungo l'asse x agisce $\vec{P_x}$ e $\vec{F_a}$, la somma sara' $\vec{F_x}$

Lungo y agiscono N e P_y

$$\begin{cases} P_x - F_a = Ma \\ N - P_y = 0 \end{cases}$$

Per il moto rotatorio abbiamo $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$\begin{cases} P_x - F_a = Ma \\ N - P_y = 0 \\ \tau = I\alpha \end{cases}$$

Possiamo sostituire $\tau = RF_a$ (perche' il momento e' generato da F_a)

$I = \beta MR^2$, $\alpha = \frac{a}{R}$

$$\cancel{R}F_a = \beta M R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}} \rightarrow F_a = \beta Ma$$

Dobbiamo risolvere quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} P_x - F_a = Ma \\ N - P_y = 0 \\ F_a = \beta Ma \end{cases}$$

Sostituiamo nella prima la terza

$$\cancel{M}g \sin\theta - \beta\cancel{M}a = \cancel{M}a \rightarrow g\sin\theta = a(\beta+1) \rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{\beta+1}$$

Ricaviamoci F_a nella terza equazione

$$F_a = \beta g \frac{M\sin\theta}{1+\beta} \rightarrow F_a = \frac{Mg\sin\theta}{1+\beta^{-1}}$$

Vediamo per quali condizioni si verifica un **MOTO ROTATORIO PURO**

ovvero il corpo ruota senza strisciare.

Affinché il corpo rotoli senza strisciare lungo il piano inclinato con attrito statico μ_s, la forza d'attrito F_a dev'essere minore o uguale della forza d'attrito statico massima.

$$F_a \leq F_{a_{MAX}}$$

$$F_{a_{MAX}} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos\theta$$

$$F_a = \frac{Mg \sin\theta}{1+\beta^{-1}}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{Mg} \sin\theta}{1+\beta^{-1}} \leq \mu_s \cancel{Mg} \cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{\tan\theta}{1+\beta^{-1}} \leq \mu_s \longrightarrow \tan\theta \leq \mu_s (1+\beta^{-1}) \longrightarrow \theta \leq \arctan\left(\mu_s (1+\beta^{-1})\right)$$

$$\arctan\left(\mu_s (1+\beta^{-1})\right) = \theta_{MAX}$$ ANGOLO MASSIMO DEL PIANO INCLINATO

Es.

Sia il solido una sfera

$\beta = \frac{2}{5}$ $\quad a = \frac{2}{5} g \sin\theta$

$$F_a = \frac{Mg \sin\theta}{1+\beta^{-1}} = \frac{Mg \sin\theta}{1+\frac{5}{2}} = \frac{2}{7} Mg \sin\theta$$

$F_{MAX} = \mu_s M g \cos\theta$

$$F_a \leq F_{MAX} \rightarrow \frac{2}{7} \cancel{Mg} \sin\theta \leq \mu_s \cancel{Mg} \cos\theta$$

$$\rightarrow \theta \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{2}\mu_s\right)$$

$$\theta_{MAX} = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{2}\mu_s\right)$$

Es.

- Sia il solido un anello uniforme che rotola senza strisciare. Calcolare F_a e il valore massimo di $tg\theta$ per cui vale la condizione di puro rotolamento

$\beta = 1$

$F_a = ?$

$tg\,\theta = ?$

$$F_a = \frac{Mg \sin\theta}{1+\beta^{-1}} = \frac{1}{2} Mg \sin\theta$$

$$tg\,\theta = \mu_s (1+\beta^{-1}) = 2\mu_s$$ valore max

$$\theta_{MAX} = \operatorname{arctg} 2\mu_s$$

- $\theta = 50°$

$\beta = \frac{1}{2}$ cilindro

$\mu_s = ?$

$$tg\,\theta = \mu_s (1+\beta^{-1}) = 3\mu_s$$

$$\mu_s = \frac{tg\,\theta}{3} = \frac{tg\,50°}{3} = 0{,}4$$

$\mu \leq \mu_s$ condizione di puro rotolamento

MACCHINE SEMPLICI

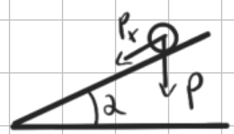
Una macchina è un dispositivo in grado di porre in equilibrio forze agenti di natura e origine differenti.

Su una macchina vengono applicate due forze:

MOTRICE e RESISTENTE

Il GUADAGNO della macchina è $V = \frac{R}{F}$

Un piano inclinato ci permette di sollevare un corpo di peso P con una forza $F < P$



$F = P_x = P \sin\alpha$

$R = P$

$$V = \frac{P}{P\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} > 1$$

OSS

La distanza tra il fulcro e il punto d'applicazione della forza è detto BRACCIO.

p = braccio motore

r = braccio resistente

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

La condizione d'equilibrio di una leva e' che i momenti delle due forze si eguagliano

$$\tau_P = \tau_R$$

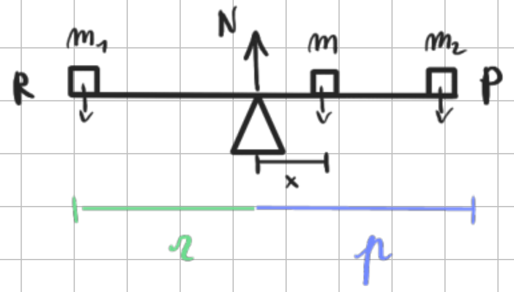
$\tau_P = \vec{p} \wedge \vec{P} = pP$ (θ e' sempre $90°$)

$\tau_R = \vec{r} \wedge \vec{R} = rR$

$$pP = rR$$

$V = \frac{R}{P} = \frac{p}{r}$

Es.



$m_1 = 70 Kg$

$m_2 = 55 Kg$

$m = 25 Kg$

$L = 6 m$

$x = ?$

$N = ?$

Avremo l'equilibrio con $\vec{F} = \vec{0}$ e $\vec{\tau} = \vec{0}$

$$\begin{cases} N - P_1 - P_2 - mg = 0 \\ \tau_1 - \tau_2 - \tau = 0 \end{cases}$$

mg = peso del bambino

il momento del padre e' positivo perche' genera una rotazione antioraria, viceversa la mamma.

Immaginiamo che il bambino sia sul

lato della mamma

$$\begin{cases} N - m_1 g - m_2 g - m g = 0 \\ m_1 g \frac{L}{2} - m_2 g \frac{L}{2} - m g x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N - m_1 g - m_2 g - m g = 0 \\ m \cancel{g} x = m_1 \cancel{g} \frac{L}{2} - m_2 \cancel{g} \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N - m_1 g - m_2 g - m g = 0 \\ x = \frac{L}{2} \frac{(m_1 - m_2)}{m} \end{cases} \rightarrow x = 3 \left(\frac{70-55}{25} \right) = 1{,}8$$

Se avessimo messo il bambino della parte del padre avremmo avuto $-1{,}8$ m

TERMODINAMICA

Studia le leggi che mettono in relazione il calore scambiato e l'energia interna di un sistema

TEMPERATURA

Descrive lo stato termico di un corpo

Se un corpo si dilata, tramite il termometro possiamo misurare la temperatura del corpo

Possiamo misurare in GRADI CELSIUS o KELVIN

$$T(K) = t(°C) + 273,15$$

SCAMBI DI CALORE

Tra due corpi che non reagiscono chimicamente, vi è un trasferimento di energia dal più caldo al più freddo

CALORIA

E' la quantità di calore necessaria ad aumentare da 14,5°C a 15,5°C 1g d'acqua

Il calore è una forma di ENERGIA

$$1\,cal = 4{,}186\,J$$

CAPACITA' TERMICA

Indica la quantità di calore da fornire a un corpo per aumentare la sua temperatura di un grado

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{[Cal]}{[°C]}$$

CALORE SPECIFICO

Ogni materiale ha il proprio calore specifico

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \Delta t} = \frac{[Cal]}{[g][°C]}$$

Il calore specifico VARIA al variare della temperatura, e in generale cambiano dalle condizioni del corpo:

c_p = a PRESSIONE costante

c_v = a VOLUME costante

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Abbiamo visto come l'energia meccanica si conserva se il corpo è soggetto a sole forze conservative.

Nei sistemi reali (in cui vi è sempre attrito) c'è sempre una quantità di calore e quindi una variazione di temperatura.

Possiamo quindi generalizzare il principio di conservazione dell'energia considerando anche il calore sottoforma di energia

$$L_{NC} = \Delta E \rightarrow E_i = E_f - L_{NC}$$

L_{NC} è sempre negativa $\Rightarrow -L_{NC} > 0$ rappresenterà quindi l'energia trasformata dell'attrito in energia termica Q

$$E_i = E_f + Q$$

L'energia totale di un sistema isolato (sistema che comprende tutti i corpi che si scambiono energia) non aumenta né diminuisce in alcun processo.
Questa può essere trasformata da una forma a un'altra o trasferita tra due corpi, ma la quantità è costante.

ENERGIA INTERNA DI UN SISTEMA TERMODINAMICO

le particelle sono in continuo movimento quindi a ognuna di queste particelle si può attribuire una certa energia cinetica

Sia K l' energia cinetica totale e W l' energia potenziale totale allora l' energia interna sarà:

$$U = W + K$$

a livello molecolare, l' energia interna di un SOLIDO è composta prevalentemente da energia potenziale.

Viceversa per un corpo GASSOSO. Nel caso di un LIQUIDO invece sono uguali.

Per i GAS PERFETTI $W=0$ quindi $U = U(T)$.

Riassumendo:

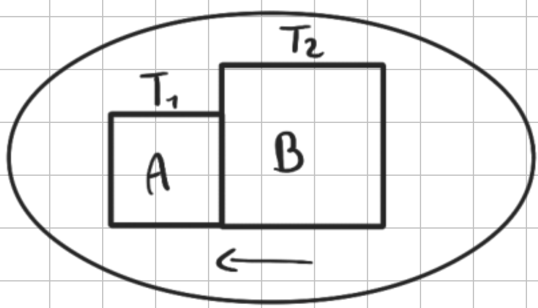
TEMPERATURA: misura dell' energia cinetica media delle molecole che costituiscono il corpo.

ENERGIA INTERNA: somma di energia cinetica e potenziale di un corpo

CALORE: trasferimento di energia da un corpo a un altro a causa di una differenza di temperatura

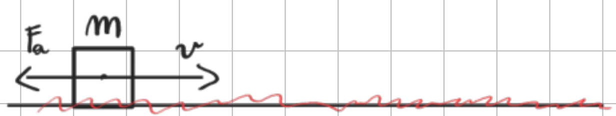
SISTEMA TERMODINAMICO

Vediamo come varia l'energia interna di un sistema termodinamico in conseguenza di uno scambio di energia con altri sistemi o con l'ambiente esterno.



Si considerino due masse A e B isolate dall'ambiente esterno (scambiano calore solo tra di loro)
La temperatura di B $T_2 > T_1$, quindi B cede CALORE (energia termica) ad A, diminuendo quindi la sua energia cinetica molecolare media.

Es.



Sia lanciata una massa su una superficie scabra.
La forza d'attrito frena il nostro corpo, per il teorema generalizzato dell'energia cinetica il LAVORO della forza

d'attrito (che e' negativo) è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo.

$$L = -F_a = \Delta E$$

l'energia meccanica e' tutta cinetica quindi:

$$\Delta E = \underset{\text{iniziale}}{0} - \underset{\text{finale}}{\frac{1}{2} m v^2}$$

Questa perdita di energia meccanica si accompagna con un riscaldamento del blocco (e del piano).

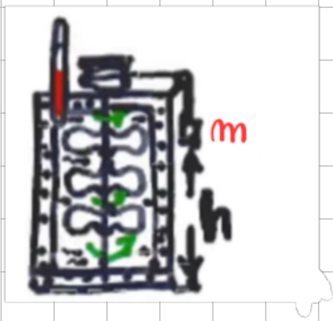
Questo significa che e' aumentata l'energia cinetica molecolare media e quindi di conseguenza l'energia interna del sistema MASSA + PIANO.

$$\Delta U = -L \qquad -L = \frac{1}{2} m v^2$$

In pratica il lavoro compiuto dalle forze d'attrito si e' trasformato in calore.

ESPERIENZA DI JOULE

Preso un recipiente contenente acqua e un mulinello.
Questo mulinello e collegato a due carrucole.
Il recipiente non consente scambi di calore con l'esterno.



Alla carrucola di sopra solleva una massa m che e' lasciata cadere attivando le palette del mulinello grazie al lavoro prodotto

$$L = mgh$$

Le palette muovono l'acqua che si riscalda, passando da una temperatura iniziale T_A a una finale T_B.
Ricordiamo che NON c'e' scambio di calore con l'ambiente esterno.
Immaginiamo di rimuovere il fondo (isolante) e posizionare un calorimetro (che contiene ghiaccio al suo interno).
Grazie allo scioglimento del ghiaccio nel calorimetro possiamo misurare il calore ceduto dall'acqua al calorimetro.

Su questo sistema non viene effettuato lavoro ma vi è una perdita di calore che riporta il nostro sistema principale alla sua temperatura originale (prima di effettuare lavoro). Si tratta di una TRASFORMAZIONE CICLICA.

Nel totale è stato fornito del lavoro L e assorbito del calore Q. Il rapporto tra queste due grandezze è COSTANTE

$$\frac{L}{Q} = 4,1855 \frac{J}{Cal}$$

Sono stati assorbiti 4,2 Joule per ogni caloria ceduta.

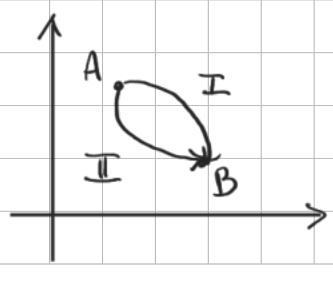
Questa quantità è detta EQUIVALENTE MECCANICO DEL CALORE

Possiamo identificare il calore come una grandezza fisica omogenea (una forma con la quale l'energia si trasmette)

In una trasformazione ciclica, calcolando il calore in Joule avremo $\frac{L}{Q} = 1$ e quindi $Q - L = 0$

Questa quantità dipende unicamente dagli stati iniziale e finale e non dalla trasformazione in sé

$$(Q-L)^{I} = (Q-L)^{II}$$

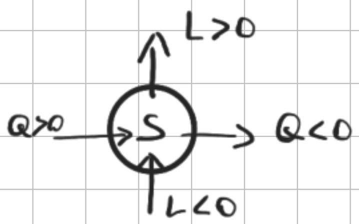


Possiamo definire una funzione U detta ENERGIA INTERNA che dipende unicamente dagli stati

$$Q - L = U(B) - U(A) = \Delta U$$

Questa relazione rappresenta il 1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA che estende a tutti i sistemi il principio di conservazione dell' energia

OSS



Il grafico mostra come prendere i segni

$Q-L>0 \quad \Delta U>0 \quad U(B)>U(A)$

$Q-L<0 \quad \Delta U<0 \quad U(B)<U(A)$

Es.

$Q = 2500\ J$ Il lavoro è compiuto sul sistema, quindi

$L = 1800\ J$ $\Delta U = Q - L = 2500 + 1800 = 4300\ J$

ESTENSIONE DEL 1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Consideriamo un corpo in movimento, quindi con energia cinetica K ed energia potenziale E_p

La 1° legge deve tener conto di queste quantità per l' energia interna

$$Q - L = \Delta E_p + \Delta K + \Delta U$$

Es.

$m = 3g$ Il nostro sistema è albero + proiettile

$v = 400 m/s$ $\Delta E + \Delta U = Q - L \rightarrow \Delta K + \Delta E_p + \Delta U = Q - L$

$v_2 = 200\ m/s$ Il sistema è isolato.

$\Delta E_c = ?$ Non c'è quindi scambio di lavoro ne viene applicato lavoro $(Q=0, L=0)$

Non vi è una variazione di energia potenziale $(\Delta E_p = 0)$ Quindi

$\Delta K + \Delta U = 0$

$$\Delta U = K_i - K_f = \frac{1}{2} m (v^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-3} (400^2 - 200^2)$$

$$= 180 J$$

l'energia cinetica ha aumentato l'energia interna.

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

Una trasformazione è detta REVERSIBILE se è possibile riportare il sistema e l'ambiente esterno nello stato INIZIALE ripercorrendo la trasformazione a ritroso.

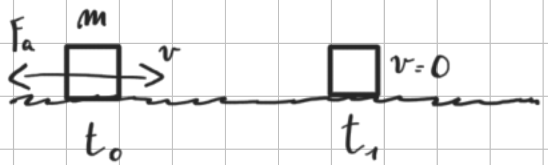
OSS

I fenomeni termici spontanei NON sono mai REVERSIBILI, come ad esempio la combustione

Per il primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - L$, se $Q - L = 0$ banalmente $Q = L$.

In natura ciò però non si verifica, vediamo degli esempi:

①



La forza d'attrito rallenta la massa fino a fermarla, dissipando l'energia cinetica accumulata dalla massa. Il risultato finale è che il piano si è riscaldato. Abbiamo fornito lavoro al sistema (piano + massa) ottenendo calore (il piano si riscalda). Quindi $L = Q$.

Per il primo principio diremo che il processo è reversibile, in realtà pur raffreddandosi il piano non otteniamo lavoro.

Quindi il processo termodinamico è compatibile col 1° principio ma non si verifica in natura

② Abbiamo due masse a contatto a temperatura T_1 e T_2

con $T_1 > T_1$.

T_1 cede calore, viceversa T_2 non cede calore

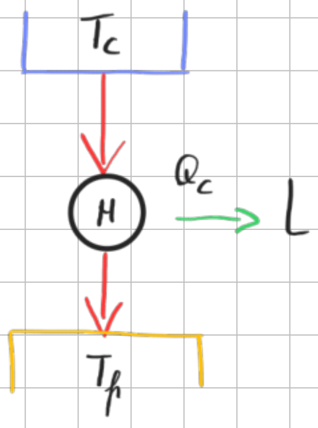
Il 2° principio della termodinamica ci dice che processi di questo tipo non avvengono e pone limitazioni alle trasformazioni del calore in lavoro

2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (KELVIN-PLANCK)

È IMPOSSIBILE realizzare una macchina operante ciclicamente che abbia come unico effetto quello di estrarre calore da una sola sorgente di calore e trasformarlo INTEGRALMENTE in lavoro.

Questa sarebbe detta MACCHINA TERMICA PERFETTA.

Si può tuttavia costruire una macchina termica:



$T_c > T_f$

Tutto il calore assorbito da una sorgente non puo' essere trasformato integralmente in lavoro ma una parte dev'essere restituita a una sorgente a temperatura piu' bassa

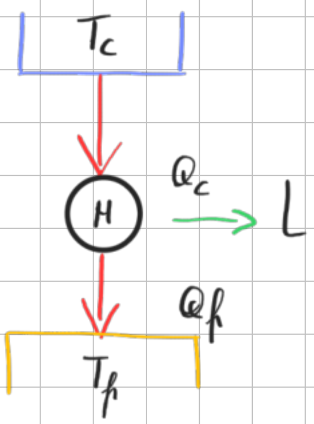
2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (CLAUSIUS)

E' impossibile realizzare una macchina frigorigena operante il cui unico effetto sia quello di trasferire calore da un corpo piu' freddo a uno piu' caldo.

Gli esempi sulla MACCHINA FRIGORIGENA sono analoghi alla macchina termica, con la unica differenza che il lavoro e' fornito per il funzionamento anziche' prodotto

I due enunciati sono equivalenti, vediamo le due macchine nello specifico.

MACCHINA TERMICA



$T_c > T_f$

Q_c = calore fornito

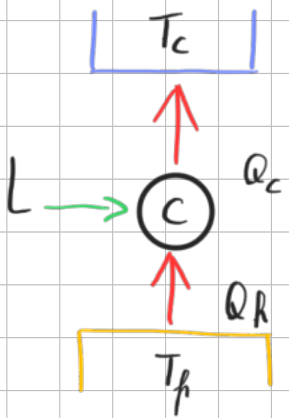
Q_f = calore ottenuto

$L = Q_c - Q_f$

RENDIMENTO

$$\eta = \frac{L}{Q_c} = \frac{Q_c - Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

MACCHINA FRIGORIGENA



$T_c > T_f$

$Q_c = L + Q_f$

$L = Q_c - Q_f$

COEFFICIENTE DI PRESTAZIONE

$$COP = \frac{Q_f}{L} = \frac{Q_f}{Q_c - Q_f}$$

- Il RENDIMENTO del motore rappresenta il limite superiore alle prestazioni di un qualunque motore reale:

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c} \qquad \eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

OSS

Una macchina termica a ciclo inverso e' una macchina frigorigena

Così come abbiamo espresso $\eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{Q_c}$, analogamente possiamo per COP:

Ricordiamo che $COP = \frac{Q_f}{L} = \frac{Q_f}{Q_c - Q_f}$ $\qquad L = Q_c - Q_f \qquad \frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c}$

$$COP = \frac{Q_f}{Q_c - Q_f} = \frac{\frac{Q_f}{Q_c}}{\cancel{\frac{Q_c}{Q_c}} - \frac{Q_f}{Q_c}} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{\frac{T_f}{T_c}}{\frac{T_c - T_f}{T_c}} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{Q_f}{T_c - T_f}$$

↑ ciclo inverso

OSS

$\eta = \frac{L}{Q_c} \neq 1$ sempre (2° principio)

mentre COP varia tra 0 e ∞

Es.

Un motore di Carnot lavora tra una sorgente alla temperatura di 819 °C e una sorgente di 0°C. a) Calcolare il rendimento del motore quando funziona come macchina termica ed il coefficiente di prestazione quando funziona come macchina frigorigena. b) Calcolare, in quest'ultimo caso, il lavoro che deve essere fornito per estrarre 2000 calorie dalla sorgente più fredda e la quantità di calore da restituire alla sorgente più calda a)

$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ (macchina termica)

RICORDA

la temperatura va sostituita in KELVIN

$T_c = 819 + 273 = 1092\,K$

$T_f = 0 + 273 = 273\,K$

$\eta = 1 - \frac{273}{1092} = 0{,}75$

vediamo il ciclo inverso:

$COP = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{273}{819} = \frac{1}{3}$

b)

$Q_f = 2000\ Cal$

$1\ Cal = 4{,}2\ J$

$L = ?\quad Q_c = ?$

$COP = \frac{Q_f}{L} \rightarrow L = \frac{Q_f}{COP} = 2000 \cdot \frac{1}{3} = 667\ Cal$

$L = 667\ Cal = 667 \cdot 4{,}2 = 2801\ J$

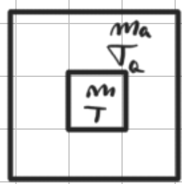
$Q_c = Q_f + L = 2000 + 667 = 2667\ Cal$

CALORE SPECIFICO

Una massa di 80 g alla temperatura di 100 °C è immersa in 250 g d'acqua alla temperatura di 17,3 °C.
L'equilibrio si ottiene a 22,7 °C.
Determinare il calore specifico

$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ CAPACITA' TERMICA

$c = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}$ CALORE SPECIFICO



$c_a = 1 \ Cal/g°C$

$c_m = ?$

L'acqua assorbe ΔQ_a, il corpo cede ΔQ $\quad (|\Delta Q_a| = |\Delta Q|)$
(l'aqua si riscalda, il corpo si raffredda)

$T_a \to T_e \qquad T \to T_e \qquad T_e =$ Temperatura d'equilibrio

$\Delta Q_a + \Delta Q = 0$ (perchè calore assorbito e ceduto hanno stesso modulo)

$C_a = \frac{\Delta Q_a}{m_a \Delta T_a} \qquad \Delta T_a = T_e - T_a \qquad \Delta Q_a = c_a m_a (T_e - T_a)$

Analogamente possiamo calcolare C (e quindi ΔQ)

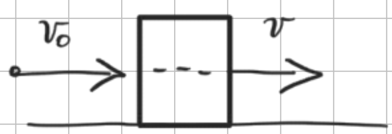
$$c_a m_a (T_e - T_a) + c\, m (T_e - T) = 0$$

$$c_a m_a (T_e - T_a) = c\, m (T - T_e)$$

$$c = \frac{c_a m_a (T_e - T_a)}{m (T - T_e)} = \frac{1 \cdot 250 (17{,}3 - 22{,}7)}{80 (22{,}7 - 100)} = 0{,}22 \ Cal/g\,°C$$

ENERGIA DISSIPATA

Un proiettile di piombo arriva alla velocità di 300 m/s in blocco di legno e fuoriesce alla velocità di 100 m/s. Calcolare l'aumento di temperatura del proiettile nell'ipotesi che tutto il calore sviluppato per attrito vada a incrementare la sua temperatura assumendo che il blocco di legno resti fermo dopo l'urto e che il calore specifico del piombo è di



OSS

Nel SI $[c] = J/Kg\,K = J/Kg\,°C$ (perché $\Delta °C = \Delta K$)

$v_0 = 300\, m/s$ $\quad v = 100\, m/s$ $\quad c_p = 0{,}031\ Cal/g\,°C$

Calcoliamo anzitutto l'energia persa nell'urto

$$L_{NC} = \Delta E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m}{2} (v^2 - v_0)$$ (solo energia cinetica)

La ΔE e' ENERGIA DISSIPATA e viene assorbita sotto forma di calore ΔQ.

Assumiamo che tutto il calore sia assorbito dal proiettile, sappiamo che

$C_s = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}$ $\quad \Delta Q = m C_s \Delta T = \Delta E$ (energia dissipata)

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = m C_s \Delta T \quad \rightarrow \Delta T = \frac{v^2 - v_0^2}{2 C_s} = \frac{300^2 - 100^2}{2 \cdot 142} = 70°C$$