GEOMETRIA

Dati e info:

Esame strutturato in una prova scritta (5 esercizi; si passa con un punteggio di 2,5). Orale di solito nello stesso giorno.

Per il testo -> Lo Monaco

Lezione del 17-03-2020

S insieme non vuoto

Operazione interna in S (applicazione dell'insieme prodotto $S\ x\ S$ in S)

(gruppi, anelli, campi)

Operazione esterna $\perp : S\ x\ A \rightarrow S$ (operazione esterna a S con dominio di operatore A →azione di A su S)

Esempi.

1. Tutte le operazioni interne sono anche esterne $((R,+),(R,\bullet)$
2. $\mathbb{R}^2$
   - $+: \mathbb{R}^2\ x\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
     - $\big((a,b)(c,d)\big) \rightarrow (a+c, b+d)$
   - $\bullet: \mathbb{R}^2 x\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
     - $\big((a,b),(c)\big) \rightarrow (a \bullet c\ ,\ b \bullet c)$ operazione esterna non interna
3. $\mathbb{R}^n$ con n intero positivo
   - $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ suoi elementi sono anche detti vettori numerici di ordine n

Prodotto scalare standard

$\bullet: \mathbb{R}^n\ x\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \rightarrow a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ (somma dei prodotti con vettori omologhi)

Es.

$n = 2$

$$(3,4)(2,6) = 3 * 2 + 4 * 6 = 6 + 24 = 30$$

Proprietà

1. **Simmetria** $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$
2. **Linearità**
   - $\big(h \bullet \underline{a} + k \bullet \underline{b}\big) \bullet \underline{c} \quad \rightarrow \quad h\,(\underline{a}\,\underline{c}) + k\,(\underline{b}\,\underline{c})$ con h, k numeri reali
     - $(h\underline{a} = ha_1 \bullet, \dots, \bullet\, ha_n)$
3. **Definito positivo**
   - $\underline{a} \bullet \underline{a} \geq 0$ e $\underline{a} \bullet \underline{a} \Leftrightarrow \underline{a} = (0,0,\dots,0)$ DIM OVVIA da destra verso sinistra

DIM linearità con $n = 2$

$\big(\big(h(a_1,a_2) + k(b_1,b_2)\big) \bullet (c_1,c_2) \rightarrow h[(a_1,a_2) \bullet (c_1,c_2)] + k\,[(b_1,b_2) \bullet (c_1,c_2)] \rightarrow$

$$(ha_1 + kb_1, ha_2 + kb_2) \bullet (c_1,c_2) \rightarrow \ (ha_1 + kb_1)c_1 + (ha_2 + kb_2)c_2$$

$\rightarrow h(a_1c_1 + a_2c_2) + k(b_1c_1 + b_2c_2) \rightarrow \ \underline{a} \bullet \big(h\,\underline{b} + k\underline{c}\big) = h\,\big(\underline{ab}\big) + k\,(\underline{ac})$ (bilinearità)

Matrici (su $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \\ a_{n\;m} & & a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

con n righe ed m colonne

$A = (a_{ij})_{i=1\ldots n\,;\,j=1\ldots m}$

$A : \{1,2,\ldots,n\}x\,\{1,2,\ldots m\} \rightarrow \mathbb{R}$ (definizione formale)

$A : (a_{1\,1}, a_{1\,2}, \ldots, a_{1\,m}, a_{2\,1}, \ldots, a_{2\,m}, \ldots a_{n\,1}, \ldots, a_{n\;m})$ (definizione formale)

Insieme delle matrici

$M_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici su $\mathbb{R}$ con n righe e m colonne (si indica anche con $M_{n\,m}$ o $\mathbb{R}_{nm}$ o $\mathbb{R}_n$ $con\ n = m$)

$+: \mathbb{R}_{nm}\ x\ \mathbb{R}_{nm} \rightarrow \mathbb{R}_{nm}$ operazione interna

$$\left(\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,m} \\ a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1\,1} & \ldots & b_{1\,m} \\ b_{n\,1} & \ldots & b_{n\,m} \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{1\,1} + b_{1\,1} & \ldots & a_{1\,m} + b_{1\,m} \\ a_{n\,1} + b_{n\,1} & \ldots & a_{n\,m} + b_{n\,m} \end{pmatrix}$$

$$a_{i\,j} + b_{i\,j} = (a_{i\,j} + b_{i\,j})$$

$\bullet: \mathbb{R}_{nm}\ x\ \mathbb{R}_{nm} \rightarrow \mathbb{R}_{nm}$ operazione esterna

$$\left((a_{i\,j}), h \rightarrow (h, a_{i\,j})\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 2*1 & 2*2 \\ 2*3 & 2*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe colonne

$\bullet: \mathbb{R}_{nm}\ x\ \mathbb{R}_{ml} \rightarrow \mathbb{R}_{n\,l}$ (stesso numero di righe)

$$\left((a_{i\,j}), (b_{i\,j})\right) \rightarrow (c_{i\,j})$$

$(c_{i\,j}) = 1$ elemento di posto (i, j)

MEMO:

i-esima riga $(a_{i\,j}) = A$

$$\underline{a}_{\ i} = (a_{i\,1}, a_{i\,2}, \ldots, a_{i\,m})$$

i-esima colonna $(b_{i\,j}) = B$

$$\underline{b^j} = (b_{ij}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$$

La i viene usata in pedice per indicare le righe $\rightarrow A_m$

La j viene usata in apice per indicare le colonne $\rightarrow B_m$

$$\underline{a}_{\ i} \bullet \underline{b^j} = c_{ij}$$

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$a = (1,2,0)(0,1,2) = 1 * 0 + 2 * 1 + 0 * 2 = 2$$

$$b = (3,4,1)(0,1,2) = 3 * 0 + 4 * 1 + 1 * 2 = 6$$

Numero delle colonne della prima matrice = **Numero delle righe della seconda**

$$AB = (\underline{a_i}\ \underline{b^j})$$

Proprietà

1. $\forall\, A \in \mathbb{R}_{m\,n}$ e $\forall\, B \in \mathbb{R}_{nq} \quad A(B + C) = AB + AC$

DIM

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{kl}) \quad C = (c_{op})$$

$$A(B + C) = (a_{ij})(b_{kl} + c_{kl}) = (\underline{a_i}\,(\underline{b^j}\ \underline{c^j})) = (\underline{a_i}\ \underline{d^j}) = (\underline{a_i}\ \underline{b^j}) + (\underline{a_i}\ \underline{c^j}) = AB + AC$$

Lezione del 20-03

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica di ordine 2

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1\,1\,1 \rightarrow diagonale\ principale \quad 000 \rightarrow diagonale\ secondaria$

$A \in B_n$

$$I_n\, A = AI_n = A$$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ matrice scalare $\rightarrow$ si ottiene come $m * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Con m scalare

Matrice diagonale $\rightarrow$ matrice con elementi non nulli sulla diagonale principale

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_{m\,n} \quad \forall\, B \in \mathbb{R}_{mn} \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$$

$$A(hB) = h(AB) = (hA)B$$

Studio la prima uguaglianza e la scrivo come:

$$(a_{ij})[h(b_{ij})] = (a_{ij})(hb_{ij})$$

Scrivo hb_{ij} come c_{ij}. L'uguaglianza diventa quindi:

$$(\underline{a_i} * \underline{c^j}) = (\underline{a_i} * h\underline{b^j}) = h\,(\underline{a_i} * \underline{b^j})$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$\forall\, A \in \mathbb{R}_{mn} \qquad \forall\, B \in \mathbb{R}_{nq} \quad \forall\, C \in \mathbb{R}_{q\,s}$

Con BC = D posso scrivere $A(BC)$ come:

$$\underline{a_i} * \underline{d^j} = \sum_{k}^{1\,to\,n} (a_{ik}\, d_{kj})$$

Con $a_{ik} = a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ e $d_{kj} = d_{1j}, d_{2j}, \dots . d_{nj}$

$$\sum_{k}\left(a_{ik}\left(\sum_{l}^{i\,to\,q}(b_{kl} * c_{lk})\right)\right) = \sum a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Matrice trasposta (operazione unaria)

$$t\colon \mathbb{R}_{nm} \rightarrow \mathbb{R}_{m\,n}$$

(ribalta la matrice)

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow A^t \qquad \underline{a_i} \rightarrow \underline{(a^t)^i}$$

Con i-esima riga e colonna

Proprietà

$$A \in \mathbb{R}_{m\,n} \quad e \;\; B \in \mathbb{R}_{n\,o}$$

1. $(AB)^t = B^t A^t \rightarrow D = E$
2. $B^t A^t \neq A^t B^t$
   a. $(ABC)^t = \; C^t B^t A^t$
3. $(hA + kB)^t = h(A^t) + k(B)^t$ (con A e B della stessa dimensione)
4. $(A^t)^t = A$

DIM 1.

$$A, B \rightarrow AB \; (= C) \rightarrow (AB)^t \; (\rightarrow C^t = D)$$

$$d_{ij} = c_{ji} = \underline{a_j} * \underline{b^i} = \sum_l a_{jl} * b_{l\,i} = \sum_l a_{lj} * b_{i\,l}$$

Invertendo di posto ottengo:

$$\sum_l b_{i\,l} * a_{ij} = \underline{b^1}_j * \underline{a^{1j}} = e_{ij}$$

Matrici a gradini

Una matrice a gradini è una matrice quadrata o rettangolare in cui il primo elemento non nullo di ogni riga è più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots \end{matrix}$$

Il # degli zeri che precedono il primo elemento $\neq 0$ in ogni riga aumenta di riga in riga fino ad eventuali righe costituite da soli zeri.

A prive di righe nulle $\Longrightarrow \# \, righe \leq \# \, colonne$ (il pivot aumenta di riga in riga)

Operazione elementari di riga

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m\,n}$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \underline{a^1} & \underline{a^2} & \underline{a^m} \end{pmatrix}$$

$$E_1^{ij} : \mathbb{R}_{m\,n} \rightarrow \mathbb{R}_{m\,n}$$

i compreso tra $1 \dots m$ e j compreso tra $1 \dots n$

Questa operazione effettua uno scambio di righe :

$$A \rightarrow E_1^{ij}$$

$$E_2^{hi} : \mathbb{R}_{m\,n} \rightarrow \mathbb{R}_{m\,n}$$

Questa operazione effettua una moltiplicazione di un determinato h ($\in \mathbb{R}, \neq 0$) per la matrice

$$A \rightarrow E_2^{hi}(A) = \begin{pmatrix} a_i \\ h\,a_i \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{a_i} \rightarrow h\,a_i$$

$$E_3^{ij} : \mathbb{R}_{m\,n} \rightarrow \mathbb{R}_{m\,n}$$

Ad $\underline{a_j}$ sostituiamo $\underline{a_i} + \underline{a_j}$

Con $i \neq j$ (torniamo ad E_2)

Combinando $E_2 ed\ E_3$ otteniamo:

$$E_4^{hij}$$

$$\underline{a_j} \rightarrow h\,a_i + \underline{a_j}$$

$$i \neq j \rightarrow E_4 \not\Rightarrow E_1$$
$$E_4 \Longrightarrow E_3$$

$$i = j \rightarrow E_4 \Longrightarrow E_2, E_3$$

Se A^i è una matrice che si può ottenere da A mediante un numero finito di operazioni elementari allora diciamo che le due matrici A ed A^i sono equivalenti.

Lezione del 24-03

Proposizione

Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente

DIM per induzione sulle righe

$$A \in \mathbb{R}_{m,n}$$

$$con\ n = 1$$

Sistema lineare

Diciamo equazione lineare su campo $\mathbb{R}$ nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ una equazione del tipo:

$$a_1x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$$a_1x_1, a_2\,x_2, \dots, a_nx_n, b \in \mathbb{R}$$

a_i è l'i- esimo coefficiente dell'incognita x_i

b è il termine noto

Con b=0 si parla di equazione lineare omogenea

Un sistema lineare S che presenta m equazioni ed n incognite verrà rappresentata in una forma simile ad una matrice:

$$S \begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{Bmatrix}$$

La soluzione del sistema è una n-pla $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ tale che ciascuna delle equazioni risulta verificata sostituendo ad x_i y_i

Un sistema si dice **compatibile** se ammette soluzioni.

Un sistema si dice **incompatibile** se non ammette soluzioni.

$$\begin{aligned} \text{Compatibile} &\rightarrow \text{determinato} \rightarrow 1 \text{ soluzione} \\ &\rightarrow \text{indeterminato} \rightarrow \infty \text{ soluzioni} \end{aligned}$$

Matrice dei coefficienti

(assenza di coefficienti noti)

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

La matrice diventa poi completa con l'aggiunta del termine noto b

Se la matrice ha una particolare forma anche il sistema avrà quella forma

Proposizione

Ogni sistema di equazioni lineari è equivalente ad un sistema a gradini

Soluzioni sistema lineare

$$m = \#\ equazioni \qquad n = \#\ incognite$$

Con $m, n = 1$

$$\begin{aligned} a_{1\,1}x_1 = b_1 &\rightarrow a_{1\,1} = b_1 = 0 \rightarrow \text{equazione identita} \\ &\rightarrow a_{1\,1} \neq 0 \rightarrow x_1 = a_{1\,1}^{-1}\, b_1 \\ &\rightarrow a_{1\,1} = 0 \ \wedge b_1 \neq 0 \rightarrow \nexists\ soluzioni \end{aligned}$$

Con n >1

$$a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

Se $a_{1\,1}x_1 = a_{1\,2}x_2 = \cdots = a_{1n}x_n = b_1 = 0 \rightarrow$ equazione identica

Se $a_{1\,1}x_1 = a_{1\,2}x_2 = \cdots = a_{1n}x_n \ \wedge b_1 \neq 0 \rightarrow$ incompatibile.

Lezione del 27-03

Con $n \geq 2$

$$S: \{ \begin{matrix} a_{1\,1}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix} \iff S^i\ a\ gradini$$

Eliminiamo da S^I le equazioni identiche $0 = 0$

Otteniamo p equazioni non identiche (p # di pivot della matrice completa S^i)

Otteniamo così un S^{II} (che immaginiamo ancora avere m equazioni e n incognite)

Se S^{II} contiene equazioni del tipo $0 = b_i (\neq 0) \rightarrow S^{II}$ è incompatibile (la matrice incompleta presenta l'ultima riga nulla, che invece è stata eliminata già a partire da S^I)

$$\#\ pivot\ di\ A^I\ (\text{matrice completa}) = \#\ pivot\ di\ A\ (\text{matrice incompleta}) + 1$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & b_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_m \end{pmatrix}$ non può essere perché il sistema è a gradini.

Supponiamo che la matrice incompleta non abbia righe nulle.

$$\#\ pivot\ di\ A = \#\ equazioni \leq \#incognite$$

Dove $\#\ pivot\ di\ A = \#\ equazioni \rightarrow \#\ righe$ e $\#incognite \rightarrow \#colonne$

Quindi:

$$\#m \leq \#n$$

Con $m = n$

$$S: \{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_n x_n = b_n \end{array}$$

I primi elementi $\neq 0$ sono quelli della diagonale principale (aumentano gli zeri di 1 unità alla volta)

$$a_{11} \neq , a_{22} \neq 0, \dots , a_{mn} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1n} \\ 0 & a_{2\,2} & \dots \\ 0 & 0 & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,m}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nm}} = b_n * a_{nm}^{-1}$$

$$a_{n-1,m-1}\, x_{n-1} + a_{n-1,m} x_n = b_{n-1}$$

Spostiamo $a_{n-1,m}x_n$ al secondo membro e dividiamo

S è determinato ($\exists!$ soluzione)

$$\overline{S} = \{(y_1, \dots, y_n) : y_n = \ b_n * a_{nm}^{-1} , \dots \}$$

Con $m < n$

$$\{ \, a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + a_{1n}x_n = b_1$$

Dove $a_{1i}x_i$ è il primo $\neq 0$ con posizione i

Prendo per ogni riga il primo coefficiente (da sinistra) $\neq 0$ e prendo il suo indice di colonna ($\#p$)

$$\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1p}x_p = b_1 - a_{1+p}x_{p+1} + \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2\,p+1}x_{p+1} + \cdots - a_{2n}x_n \\ a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} + \cdots - a_{pn}x_n \end{array}$$

Resta ancora nella sua forma a gradini (Identifico una matrice quadrata)

Per ogni scelta di $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ ho una soluzione

$$\overline{S^{III}} = \{(funzione\ dell'altra), \quad y_{p+1}, y_{p+2}, \dots , \quad y_n : \ y_{p+1}, y_{p+2}, \dots , \quad y_n \in \ \mathbb{R}\}$$

Le prime p posizioni andranno scritte secondo una formula.

Lezione del 30-03

Sistema omogeneo→ elementi noti $= 0$ $(b_1 = b_2 = \cdots b_m = 0$

→ sempre compatibile ($\exists$ $soluzione$)

Notazione per i sistemi lineari

$$S : \{ \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

Y soluzioni → $AY = B$

Sistema omogeneo con $B = 0$

Spazio vettoriale

Dato un insieme V non vuoto, $+$ operazione interna e $\bullet$ operazione esterna definite come:

$$+ : VxV \to V$$

$$\bullet : \mathbb{R}\ x\ V \to V$$

$(V, +, \bullet)$ è detto **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$ se:

1. $(V, +)$ è un gruppo abeliano → associatività, elemento neutro, opposto, abelianità
2. $\forall\ h, k \in \mathbb{R}, \underline{v}(= \text{vettore}) \in V\ risulta$
   - $(hk)\ \bullet \underline{v} = h(k\ \bullet \underline{v})$ (associatività su operazione esterna);
3. $\forall\ \underline{v} \in V$ risulta
   - $1\ \bullet \underline{v} = \underline{v}$
4. Distributività di $\bullet$ rispetto a + in $\mathbb{R}$
   - $\forall\ h, k \in \mathbb{R}, \forall\ \underline{v} \in\ \mathbb{R}$ risulta:
     - $(h + k)\ \underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$
5. Distributività di $\bullet$ rispetto a + in V
   - $\forall\ h \in \mathbb{R}, \forall\ \underline{v}, \underline{w} \in V$ risulta:
     - $h(\underline{v} + \underline{w}) = h\underline{v} + h\underline{w}$

Gli elementi di V si dicono vettori, mentre gli elementi di $\mathbb{R}$ si dicono scalari

$+$ è detta addizione tra vettori; $\bullet$ è detta moltiplicazione tra vettore e scalare (restituisce un vettore).

Proposizione

Sia $(V, +, \bullet)$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Allora:

1. $\exists!$ elemento neutro rispetto a + (lo indicheremo con $\underline{0}$);
2. $\forall\ \underline{v} \in V\ \exists!$ opposto per $\underline{v}$.

DIM 1:

Ipotizziamo che gli elementi neutri siano due $(\underline{v}\ e\ \underline{w})$:

$$\underline{v_0} = \underline{v_0} + \underline{w_0} = \underline{w_0}\ \#$$

DIM 2:

$$v^I\ e\ v^{II} \text{ due opposti per } \underline{v}$$

$$\underline{v^I} = \underline{v^I} + 0 = \underline{v^I} + (\underline{v} + \underline{v^{II}}) = (\underline{v^I} + \underline{v}) + \underline{v^{II}} = 0 + \underline{v^{II}} = \underline{v^{II}}$$

(L'opposto di $\underline{v}$ lo indicheremo con $-\underline{v}$)

Più formalmente dovremo scrivere $\underline{0_v}$ e $-\underline{v_v}$ per indicare lo spazio vettoriale di riferimento.

La scrittura $\underline{v} - \underline{w}$ è un'abbreviazione di $\underline{v} + (-\underline{w})$

Vettore nullo: 0 → l'opposto non è altro che sé stesso.

2)

1. $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ spazio vettoriale numerico di ordine n

$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(h, \underline{v} = (v_1, \dots v_n)) \to (hv_1, \dots, hv_n)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$((v_1), (w_1) \to (v_1 + w_1)$

$\mathbb{R}^3 = -(2, 0, 3) = (-2, 0, -3)$

el. neutro è $(0, 0, 0)$

Caso particolare $n = 1 \rightarrow$ $\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}_{m.n}, +, \bullet)$

$$\bullet : \ \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R}_{m,n} \rightarrow \mathbb{R}_{m,n}$$
$$\left(h, \left(a_{ij}\right)\right) \rightarrow \left(ha_{ij}\right)$$

$$+ ; \ \mathbb{R}_{mn}\ x\ \mathbb{R}_{mn} \rightarrow \ \mathbb{R}_{mn}$$
$$\left(a_{ij}\right), \left(b_{ij}\right)\right) \rightarrow \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$$

$\mathbb{R}_{23} : -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ elemento neutro $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Spazio vettoriale dei polinomi ad una indeterminata x e sul campo $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}[x], + , \bullet)$

$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$

$$\bullet : \ \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R}[x] \rightarrow \ \mathbb{R}[x]$$
$$(h, a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \rightarrow ha_0 + \cdots + (a_n h)x^n$$

$$+ : \ \mathbb{R}[x]\ x\ \mathbb{R}\ [x] \rightarrow \ \mathbb{R}\ [x]$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n; \ \ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) \rightarrow \ a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}\, x^{n+1}$$

Con $n \leq m$

Principio di identità dei polinomi

$$\left(\begin{matrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \ \ a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \\ \Leftrightarrow \\ n = m \quad \text{e} \quad a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n \end{matrix}\right)$$

Osservazioni:

$p(x)$ e $q(x)$ polinomi di grado $\leq n$

1. La loro somma ha grado al più n
2. $h\big(p(x)\big)$ ha grado $\leq n$

$$\mathbb{R}_n[x] = \big\{p(x) \in \mathbb{R}\ [x] : \text{grado}\ \big(p(x)\big) \leq n\big\}$$

Le due operazioni sono ben definite una volta ristretto dominio e codominio.

$$+ : \ \mathbb{R}_n[x]\ x\ \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \ \mathbb{R}_n[x]$$
$$\bullet : \ \mathbb{R}\ x\ \ \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \ \mathbb{R}_n[x]$$

Spazio della geometria euclidea S (S_π) piano

Sia 0 un punto di tale spazio:

$\overrightarrow{0A}$ segmento orientato di primo estremo O e secondo A

$$S_o = \{\overrightarrow{OA} : A \in S\}$$

Per il modulo del vettore fisso un'unità di misura

Uso la regola del parallelogramma $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB} \in S$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

$+: S_o \; x \; S_o \rightarrow S_o$ è operazione interna

$\bullet : \mathbb{R} \; x \; S_o \rightarrow S_o$

$$(h, \overrightarrow{OA}) \rightarrow h \bullet \overrightarrow{OA}$$

Se $h > 0$ avremo la stessa direzione e verso; modulo moltiplicato per h

Se $h = 0$ avremo segmento nullo

Se $h < 0$ avremo la stessa direzione e verso opposto; modulo moltiplicato per $|h|$

$(S_o, +, \bullet)$ spazio vettoriale di vettori geometrici applicati in un punto.

Elemento nullo $\rightarrow$ $\overrightarrow{OO}$

Lezione del 03-04

Vettore geometrico libero

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva).

$\vec{A} e \vec{B}$ equipollenti se presentano uguale modulo e direzione.

Posso considerare le classi di equivalenza

$\overrightarrow{AB}$ segmento orientato

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} : \text{equipollente ad } \overrightarrow{AB}\} \rightarrow \text{vettore generico libero}$$

Questo vettore geometrico libero presenta più rappresentanti

$$v = \{[\overrightarrow{AB}]; A, B \in S\}$$

$(v, +, \bullet)$

$$+ : v \; x \; v \rightarrow v$$

$$\overline{AB} = [\overrightarrow{AB}] \qquad [\overline{CD}] = \overline{AB}$$

La nomenclatura così indicata sta a rappresentare la classe di equipollenza di $\overrightarrow{AB}$ segmento

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{OE} = [OE]$$

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OB'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{OD'}$$

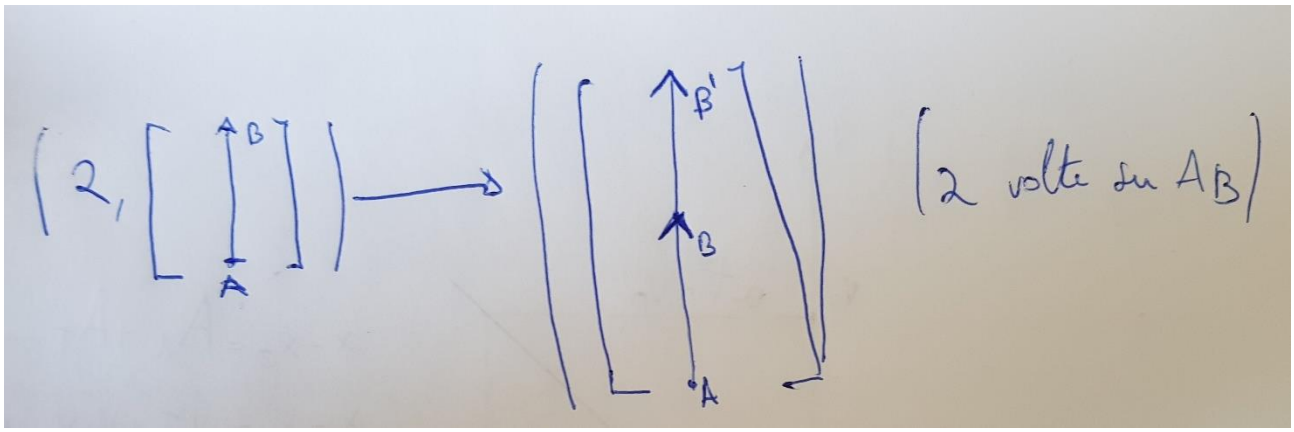
In questo modo + è ben definita

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'} \text{ e } \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{C'D'} \Longrightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'}$$

Osservazione:

+ di S_o è una congruenza rispetto all'equipollenza.

$$\bullet : \ \mathbb{R}\, x\, v \to v$$
$$(h, [\overrightarrow{AB}]) \to [h\overrightarrow{AB}]$$



$$\forall\, h, k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \underline{v}\ in\ v$$

$$(h+k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$$

$$\underline{v} = \overline{AB} = [\overrightarrow{AB}]$$

$$(h+k)\,([\overrightarrow{AB}]) = [(h+k)\,\overrightarrow{AB}] = [h\,\overrightarrow{AB}] + [k\overrightarrow{AB}] = h[\overrightarrow{AB}] + k[\overrightarrow{AB}]$$

$(v, +, \bullet)$ spazio vettoriale

$[\overrightarrow{OO}] = \underline{0}$ vettore nullo

$$\overline{AB} = [\overrightarrow{AB}] \to -\overline{AB} = [-\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{BA}]$$

Proprietà degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

1. $\forall\, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V \to \underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \to \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$
2. $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \to \underline{v} = \underline{w} - \underline{w} = 0$
3. $\forall\, h \in \mathbb{R} \to 0 \bullet \underline{v} = \underline{0} = h\,\underline{0}$
4. $h\underline{v} = 0 \iff h = 0 \vee \underline{v} = 0$
5. $\forall\, h \in \mathbb{R}, \forall\, \underline{v} \in V : h(-\underline{v}) = (-h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$
6. $(-1)\underline{v} = (-1\underline{v}) = -\underline{v}$
7. $\underline{v}_1, \dots\ \underline{v}_n$ (associazione generalizzata→ il posizionamento delle parentesi è irrilevante)
8. $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
9. $(h_1 + h_2 +, \dots, h_n)\underline{v} = h_1\underline{v} + h_2\underline{v} + \cdots + h_n\underline{v}$ (distributive generalizzata dim per induzione)

DIM 1:

$$(\underline{v} + \underline{w}) + (-\underline{w}) = \underline{z} + (-\underline{w}) \to \underline{v} + (\underline{w} + (-\underline{w})) = \underline{z} - \underline{w}$$
$$\underline{v} + 0 = \underline{z} - \underline{w} \to \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

DIM 3:

$$1.\quad 0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$$
$$2.\, h\,\underline{0} = h\,(\underline{0} + \underline{0}) = h\underline{0} + h\underline{0} \Longrightarrow h\underline{0} = \underline{0}$$

Definizione:

$$h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} \qquad \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$$

$\underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n$ sarà detto **combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ mediante gli scalari h**

Es.

$$\mathbb{R}^3\ (3,0,1) = 3(1,0,0) + 1(0,0,1)$$

Combinazione di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ mediante 3 e 1

Definizione:

$\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono proporzionali se $\exists\ h\ \neq 0 \in \mathbb{R} :\ \underline{v} = h\ \underline{w}$

Es:

$$\mathbb{R}[x] = 3x + 3 = 3\ (x + 1)$$

3x + 3 proporzionale a x+1

$3 \in \mathbb{R}[x]$ polinomio costante

$\underline{0}\ \neq 0 * 3$

polinomio nullo non proporzionale a 3, ma solo a sé stesso

$\underline{0} = 1 *\ \underline{0}$ si

La proporzionalità è una relazione di equivalenza

1. Riflessiva → $\underline{v} = 1 *\ \underline{v}$
2. simmetrica→ $\underline{v} = h\ \underline{w}$ con $h \neq 0 \rightarrow w = h^{-1}\underline{v}$
3. transitiva → $\underline{v} = h\underline{w}$ e $\underline{w} = k\underline{u} \rightarrow \quad \underline{v} = (hk)\underline{u}$

Sottospazi vettoriali

$(V, +, \bullet) \qquad H\ \subseteq V \qquad$ con $H \neq 0$

H è detto **stabile** (o **chiuso**) rispetto all'addizione se

$$\forall\ \underline{v}, \underline{w} \in H\ \Longrightarrow \underline{v} +\ \underline{w} \in H$$

H è detto stabile (o chiuso) rispetto alla moltiplicazione se

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall\ \underline{v} \in H\ \Longrightarrow h\underline{v} \in H$$

Definizione

Se H è chiuso rispetto a $+$ e $\bullet$, allora è detto sottospazio vettoriale e si indica con:

$$H \leq V$$

L'essere sottospazio indica essere sottoinsieme, ma non viceversa.

Lezione del 07-04

Proprietà:

1. $W \leq V \rightarrow \underline{w_1}, \dots, \underline{w_n} \in W$
   - Per induzione dimostro che la somma di $\underline{w_1} + \cdots + \underline{w_n} \in W$
2. $h_1, \dots, h_n \Longrightarrow h_1\underline{w_1} \dots h_n\underline{w_n} \in w$
   - W contiene ogni combinazione lineare dei suoi elementi

L una famiglia di sottospazi di V

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$$

$\mathcal{L}$ Indica la famiglia

Es

$$\{0, y\} : y \in \mathbb{R} \cap \{x, 0 : x \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\} \leq \mathbb{R}$$

Memo:

$$\{a, a\} = \{a\}$$

Insiemisticamente le ripetizioni non contano

DIM

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \neq 0 : \underline{0} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$$

ii $\underline{w}, \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$

$$\underline{v}, \underline{w} \in L \qquad \forall L \in \mathcal{L}$$
$$\underline{v} + \underline{w} \in L \qquad \forall L \in \mathcal{L}$$
$$\underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$$

iii $\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$

$$\underline{v} \in L \qquad \forall L \in \mathcal{L}$$
$$h\,\underline{v} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$$
$$h\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$$

V spazio vettoriale

$$H\ ,L \leq V$$

Il più piccolo spazio vettoriale che contiene H e K $(H \cup K)$

1. $V \geq H \cup K$
2. L'intersezione di tutti gli spazi vettoriali L di V che contengono $H \cup K$ è la soluzione

$$< H, K\ > = < H \cup K > = H + K\ = \{\underline{h} +\ \underline{k} :\ \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$$

i. $\underline{0} = \frac{0}{\in H} + \frac{0}{\in K}$ verificata #

ii. $\underline{w} \in < H + K\ > \Longrightarrow \exists\ \underline{h} \in H, \underline{k} \in K :\ \underline{w} =\ \underline{h} + \underline{k}$

$\underline{w_1} \in < H + K > \Longrightarrow \exists \underline{h_1} \in H, \underline{k_1} \in K :\ \underline{w_1} =\ \underline{h_1} + \underline{k_1}$

$$\underline{w} +\ \underline{w_1} = (\underline{h} + \underline{k}) + (\underline{h_1} + \underline{k_1}) = (\underline{h} + \underline{h_1}) + (\underline{k} + \underline{k_1}) \in H + K$$

iii. $\underline{h} \in H\ \Longrightarrow \underline{h} = \underset{\in H}{\underline{h}} + \underset{\in K}{0} \in H + K\ \Longrightarrow H\ \subseteq H + K$

Stesso ragionamento per k:

$$\underline{k} \in K\ \Longrightarrow \underline{k} = \underset{\in K}{\underline{k}} + \underset{\in H}{0} \in H + K\ \Longrightarrow K\ \subseteq H + K$$

$L \leq V : H \cup K \leq L$

$$\forall\ \underline{h} \in H\ , \underline{k} \in K\ \Longrightarrow \underline{h}, \underline{k} \in L\ \Longrightarrow\ \underline{h} + \underline{k} \in L\ \Longrightarrow H + K \subseteq L$$

$H_1 \dots H_n$ $\quad < H_1, \dots, H_n > = H_1 + \cdots + H_n = \{\underline{h_1} +\ \underline{h_2} + \cdots +\ \underline{h_n}\ :\ \underline{h_i} \in H_i\}$

$$[H \leq V \Longrightarrow < H > = H]$$

$v_1, \dots, v_n \in V$

$$< \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} > = \{h_1\underline{v_1} +\ \dots + h_n\underline{v_n} : h_i \in \mathbb{R}\}$$

Insieme di tutte le possibili combinazioni lineari

Lezione del 10-04

V spazio vettoriale

$$H_1, H_2 \leq V$$

$H_1 + H_2$ è detta somma di H_1 e H_2 $\quad (H_1 + \cdots + H_n)$

Somma diretta se $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\} \rightarrow H_1\ \oplus H_2$

$H_1\ e\ H_2$ sono detti supplementari se $V = H_1 + H_2$

$H_1 e\ H_2$ sono detti complementari se $V = H_1\ \oplus H_2$

Se $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ sono in somma diretta se $H_i \cap < H_j : j \neq i\ > = \{\underline{0}\}$

Dipendenza e indipendenza lineare

V spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono detti **linearmente dipendenti** (o legati) $\Leftrightarrow \exists\, h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathbb{R} : h_1\underline{v}_1 + \cdots h_n\underline{v}_n = 0$

$$(h_1, \dots h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Se tali scalari non esistessero allora diremmo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono **linearmente indipendenti** (o liberi)

$$h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n = \underline{0} \Longrightarrow h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0 \;\forall\, h_i \in \mathbb{R}$$

$0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n$ è l'unica

Se ci sono due elementi proporzionali $\Longrightarrow$ dipendenti

Def

$$\underline{v} \text{ dipende da } \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$$

$\Longrightarrow \underline{v}$ è combinazione dei $\underline{v}_i$

$$\exists\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \; \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n$$

Osservazioni

1. $\underline{0}$ dipende sempre da qualunque sistema $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
   - $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n$
2. $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
   - $\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_{i-1} + 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_{i+1} + \cdots + 0\underline{v}_n$
3. $\underline{v}$ dipendente da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \wedge \underline{v}_i$ dipendente da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$
   - $\underline{v}$ dipende da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$

$$\exists\, h_i \in \mathbb{R} : \; \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n$$

$$\exists h_{ij} \in \mathbb{R} : v_i = k_{ij}\, w_1 + \cdots + k_{im}\, w_m$$

Sostituisco il $\underline{v}_1$ in $\underline{v}$ e ottengo:

$$\underline{v} = h_1\big(k_{1\,1}w_1 + \cdots k_{1m}\, \underline{w}_n\big) + h_n\, \big(k_{n1}\underline{w}_1 + \cdots + k_{nm}\underline{w}_n\big)$$

Accorpo i $\underline{w}$ e ottengo un certo c: $c_1w_1 + \cdots + c_nw_n$ che rappresenta tutti gli scalari

4. $\underline{v}, \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \;\Longrightarrow\; \underline{v} + \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n$

$$\begin{matrix} \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots h_n\underline{v}_n \\ \underline{w} = k_1\underline{v}_1 + \cdots + k_n\underline{v}_n \end{matrix} \Longrightarrow \underline{v} + \underline{w} = (h_1 + k_1)\underline{v}_1 + \cdots + (h_n + k_n)\underline{v}_n$$

$$< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > = \big\{h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n : h_i \in \mathbb{R}\big\} = H$$

$\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \;\Leftrightarrow v \in < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >$

H sottospazio $\Leftrightarrow$

1. $\underline{0}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \Longrightarrow \underline{0} \in H$
2. $\underline{v}, \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_i \Longrightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$
3. $h\underline{v} \in H$
4. $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
5. $w \leq V \; e \; \underline{v}_i \in W \Longrightarrow \begin{array}{c} < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > \in W \\ \Downarrow \\ H \to H \in W \end{array}$

ND

$$L\left(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\right) = < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >$$

Copertura lineare ↗

Osservazioni

$$\begin{array}{l} w_1 = < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n > \\ w_2 = < \underline{w}_1, \dots, \underline{w_n} > \end{array} \Longrightarrow w_1 + w_2 = < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w_1}, \dots, \underline{w_n} >$$

DIM

$$w_1 + w_2 = \left\{\underline{a} + \underline{b} : a \in W_1 \wedge b \in W_2\right\}$$

$$w = << \underline{v}_1 >, < \underline{w_j} > > = < \underline{v}_i, \underline{w_j} >$$

Lezione del 17-04

V spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ con $n \geq 2$

i. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dipendente $\Leftrightarrow \exists \; i : \; \underline{v}_i$ dipende dai rimanenti
   - $A \Leftrightarrow B$

DIM $\exists \; h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}: h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n = 0$ con $(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$

Ipotizzo per comodità un $h_1 \neq 0$:

$$h_1\underline{v}_1 = -h_2\underline{v}_2 + \cdots - h_n\underline{v}_n$$

Divido tutto per h_1 e ottengo:

$$\underline{v}_1 = (-h_1h_2)\underline{v}_2 + \cdots + (-h_1h_n)\underline{v}_n$$

$$\underline{v}_1 \in < \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n >$$

$\Longleftarrow \exists \; i : \; \underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$

Ipotizziamo un $\underline{v}_i = \underline{v}_1$ per comodità:

$$\exists h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}: \underline{v}_1 = h_2\underline{v}_2 + \cdots + h_n\underline{v}_n$$

$$1\underline{v} - h_2\underline{v}_2 + \cdots - h_n\underline{v}_n = 0$$

L'insieme degli h risulta così diverso da tutti 0

ii. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è indipendente $\Leftrightarrow$nessun $\underline{v}_i$ dipende dai rimanenti

iii. $\neg A \iff \neg B$

Caso $n = 1$:

$$\underline{v}_i \text{è dipendente} \Leftrightarrow \underline{v}_i = \underline{0}$$

$$\underline{v}_i \text{è indipendente} \Leftrightarrow \underline{v}_i \neq \underline{0}$$

Caso $n = 2$:

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \neq 0 \text{ dipendenti} \Leftrightarrow \begin{matrix} \underline{v}_1 \text{dipende da } \underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 \text{ dipende da } \underline{v}_1 \end{matrix}$$

$$\exists h \neq 0, h \in \mathbb{R}: \begin{matrix} \underline{v}_1 = h\underline{v}_2 \\ \underline{v}_2 = h\underline{v}_1 \end{matrix}$$

Sono dipendenti se sono proporzionali

iv. Spazio vettoriali geometrici applicati in O

$\overrightarrow{OP}$ e $\vec{O}Q$ sono dipendenti $\begin{matrix} \Leftrightarrow \text{proporzionali} \\ \Leftrightarrow \text{giacciono sulla stessa retta} \end{matrix}$

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow$ giacciono su uno stesso piano

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OQ} + \beta\overrightarrow{OR}$$

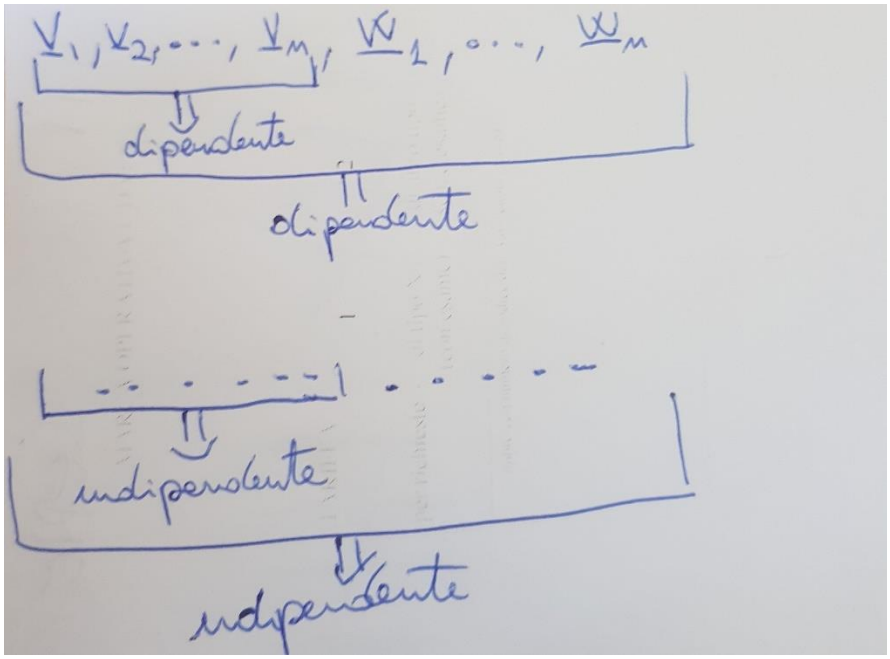
$\Longleftarrow$ vettori proporzionali Ok.

$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ non proporzionali:

$$\pi = < \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} >$$

v. $\underline{v}, \underline{v}, \underline{w}, \dots, \underline{w_n}$ dipendente?

- $\underline{1v} + (-1)\underline{v} + 0\underline{w_1}, \dots, 0\underline{w_n}$ (ottengo degli h diversi dalla classe degli zeri)



V spazio vettoriale

$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$

Ogni vettore $\underline{v}$ che dipende da $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ dipende in modo unico:

$$\underline{v} = \begin{matrix} h_1\underline{v_1} + \dots + h_n\underline{v_n} \\ k_1\underline{v_1} + \dots + k_n\underline{v_n} \end{matrix} \Rightarrow h = k$$

Confrontando le due equazioni (entrambe uguali a $\underline{v}$) ottengo alla fine tutti scalari nulli dimostrando così la veridicità dell'affermazione.

V spazio vettoriale

$H, K \leq V \quad H \cap K = \{\underline{0}\}$ $con\ degli\ \underline{h}, \underline{k} \neq 0$ indipendenti

DIM:

$$\alpha\underline{h} + \beta\underline{k} = \underline{0}$$

$\alpha, \beta \neq 0 \wedge \in \mathbb{R}$

Ipotizziamo che $\alpha \neq 0$

$$\underline{h} = (-\alpha^{-1}\beta)\underline{k} \in H \cup K$$

$$H_1, \dots, H_n \leq V$$

Con H in somma diretta

$$\underline{0} \neq \underline{v}_1 \in H_1, \dots, \underline{0} \neq \underline{v}_n \in H_n$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendenti

$$\begin{matrix} h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\,\underline{v}_n = 0 \\ (h_1, \dots., h_n) \neq (0, \dots, 0) \end{matrix} \Longrightarrow h_1 \neq 0 \Longrightarrow \underline{v}_1 = (-h_1^{-1}h_2)\underline{v}_2 + \cdots + (-h_1^{-1}h_n)\underline{v}_n$$

$$\in H_1 \cap (H_2 + \cdots + H_n) = \{\underline{0}\}$$

Prop

V spazio vettoriale

$$H_1, H_2 \leq V \qquad H_1 \oplus H_2$$

$$\underline{v} \in H_1 \oplus H_2 \; \exists\,!\; \underline{v}_1 \in H_1 \wedge \underline{v}_2 \in H_2 : \underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

DIM

$$\underline{v} = v_1 + \underline{v}_2 = \underset{\text{opposti}\ \uparrow}{\underline{v}_1^{-1} + \underline{v}_2^{-1}} \Longrightarrow \underbrace{\left(\underline{v}_1 + \underline{v}_1^{-1}\right)}_{\in H_1} + \underbrace{\left(\underline{v}_2 + \underline{v}_2^{-1}\right)}_{\in H_2} = \underline{0}$$

Se così non fosse si incapperebbe in un ASSURDO

Allora:

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_1^{-1}$$
$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_1^{-1} + \underline{v}_2^{-1}$$
$$\underline{v}_2 = \underline{v}_2^{-2}$$

$$\forall g \in H_1 + H_2, \exists! \begin{matrix} \underline{v}_1 \in H_1 \\ \underline{v}_2 \in H_2 \end{matrix} \Longrightarrow g = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \Longrightarrow H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$$

$$\underline{v} \in H_1 + H_2 \Longrightarrow \underline{v} = \underset{\in H_1}{\underline{v}} + \underset{\in H_2}{\underline{0}} = \underset{\in H_1}{\underline{0}} + \underset{\in H_2}{\underline{v}}$$

Poiché devono essere unici gli elementi in H_1 e $H_2 \Longrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Unicità struttura $\Longrightarrow \underline{v} = \underline{0}$ e $\underline{0} = \underline{v}$

In conclusione $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$

Lezione del 21-04

$H_1, H_2 \leq V$

$$H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\} \Longrightarrow \forall g \in H_1 + H_2 \quad \exists!\ \underline{h_1} \in H_1 \wedge \underline{h_2} \in H_2 : \ g = \underline{h_1} + \underline{h_2}$$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ in somma diretta

$$\forall \underline{g} \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n \ \exists\ !\ \underline{h_i} \in H_i : \ g = \underline{h_1} + \underline{h_2} + \cdots + \underline{h_n}$$

DIM

$\underline{v} \in H_1 \cap (H_2 + H_3 + \cdots + H_n)$

$$\exists\ \underline{h_2} \in H_2\ , \underline{h_3} \in H_3, \dots, \underline{h_n} \in H_n : \ \underline{v} = h_2 + \cdots + h_n$$

$$\underline{v} = \underset{\in H_1}{\underline{v}} + \underset{\in H_2}{\underline{0}} + \cdots + \underset{\in H_n}{\underline{0}} = \underline{0} + \underline{v} = \underset{\in H_1}{\underline{0}} + \underset{\in H_2}{\underline{h_2}} + \cdots + \underset{\in H_n}{\underline{h_n}}$$

Da questo $\Longrightarrow \underline{v} = \underline{0}$ (unicità di scrittura)

Prop.

Se $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_t}$ sono indipendenti e $\underline{v} \in V$ che non dipende da questi ultimi

$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_t}$ resta indipendente

Se aggiungo un elemento la struttura resta indipendente

$$h_1\underline{v_1} + h_2\underline{v_2} + \cdots + h_t\underline{v_t} + h\underline{v} = 0$$

$$h \neq 0 \ \Longrightarrow \underline{v} = (-h^{-1}h_1)\underline{v_1} + (-h^{-1}h_2\ )\underline{v_2} + \cdots + (-h^{-1}h_n)\underline{v_n}$$

Incappiamo in un assurdo perché risulterebbe dipendente (e noi abbiamo posto l'esatto contrario)

$$h = 0 \ \Longrightarrow h_1\underline{v_1} + h_2\underline{v_2} + \cdots + h_n\underline{v_t} = 0$$
$$\Longrightarrow h_1 = h_2 = \cdots = h_t = 0$$

Tutti gli scalari di quell'equazione sono tutti zero → sistema indipendente.

Corollario

$$\begin{matrix} \underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_t} \text{ indipendente} \\ \underline{v} \in V \\ \underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_t}, \underline{v} \text{ dipendente} \end{matrix} \Longrightarrow \underline{v} \text{ dipende da } \underline{v_1}, \dots, \underline{v_t}$$

Ogni vettore $(\dots, \dots, \dots)$ è indipendente se $\neq (0,0,0)$

DEFINIZIONE

V spazio vettoriale è detto **finitamente generabile** se $\exists\ \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} : V = < \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} >$ (che prende il nome di sistema di generatori)

Ogni elemento di V si scrive come combinazione di elementi di $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$

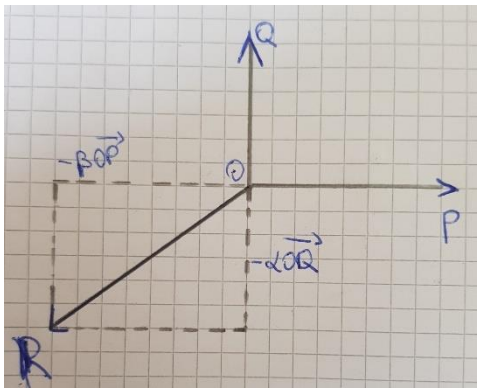
DEFINIZIONE

Un sistema di generatori indipendente è detto **base.**

Un **riferimento** è una base ordinata.

$$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \text{ base } \Rightarrow \begin{matrix} (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n) \text{ riferimento} \\ (\underline{e}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n) \text{ riferimento} \end{matrix}$$

Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicato in 0 è finitamente generato poiché



$$\mathbb{R}_n[x] \qquad 1, x, x^2, \dots, x^n$$

$(n+1)$polinomi

Non è finitamente generato:

Se lo fosse $\exists\ p_1(x_1), \dots, p_n(x_n)$: $\mathbb{R}_n[x] = < p_i >$

$$\mathbb{R}_n[x] = \{\alpha p_1(x_1) + \dots + \alpha p_n(x_n) \colon \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

$$r_1 = gr\big(p_1(x)\big), \dots, r_n = (gr\big(p_n(x)\big))$$

$$gr\ (\alpha_n p_n(x)) < \max\{r_1, \dots, r_n\}$$

Assurdo

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato $\neq \{\underline{0}\}$

V ammette basi

DIM.

Prendiamo il sistema di generatori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Se questi sono indipendenti abbiamo dimostrato l'ipotesi. Nel caso contrario:

$\exists\ i :\ \underline{v}_i$ dipenda dai rimanenti. Per comodità scelgo $\underline{v}_1$. Mi trovo così un sistema di generatori costituito da $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

Se risulta indipendente soddisfo l'ipotesi, altrimenti continuo fino a quando non arrivo a trovarmi un sistema di generatori indipendenti (costituito al massimo dal solo $\underline{v}_n$)

Osservazione: da ogni sistema di generatori si può estrarre una base.

Lemma di Steinitz

V spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indipendente $\in < \underline{w_1}, \dots, \underline{w_n} >] \Longrightarrow m \leq n$

Corollario

$V \neq \{\underline{0}\}$ spazio vettoriale finitamente generato

Tutte le basi hanno lo stesso ordine (cardinalità) detto **dimensione** di V

DIM

$$\begin{matrix} \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \\ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \end{matrix} \Longrightarrow basi \Longrightarrow n \geq m$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendente è contenuto in $V =< \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m >$

Steinitz $\Longrightarrow n \leq m$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ indipendente è contenuto in $V = < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n >$

Steinitz$\Longrightarrow m \leq n$

Quindi $n = m$

Lezione del

GEOMETRIA

pt 2

Lezione del 24-04

V spazio vettoriale

V finitamente generato

dim V è la cardinalità di una base

Se $V = \{ \underline{0} \} \rightarrow dim(V)=0$

Nel caso in cui non sia finitamente generato $\rightarrow dim(V)=\infty$

es $R[x]=\infty$

NB

Spesso scriveremo V_n per indicare che V spazio vettoriale di dimensione n e non nullo (finitamente generato)

Proposizione

V spazio vettoriale $\neq \{ \underline{0} \}$ dim $V=n$ $\rightarrow V_n$

i. $\underline{v_i},\dots,\underline{v_m}$ indipendente $\Rightarrow m \leq n$

DIM

Sia $\underline{e_1},\dots,\underline{e_n}$ base di V_n (Steinitz)

$\underline{v_1},\dots,\underline{v_m}$ indipendenti $\in$ $\langle \underline{e_1},\dots,\underline{e_n} \rangle = V_n$

$\Rightarrow m \leq n$

ii. $\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ indipendente $\Rightarrow \underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ base

DIM

$\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ sistema di generatori?

Per assurdi immaginiamo che non lo fosse

$$\langle \underline{v_1},\dots,\underline{v_n} \rangle < V$$

$$\neq$$

$$\exists \underline{v} \in V - \langle \underline{v_1},\dots,\underline{v_n} \rangle \Rightarrow \underline{v} \text{ non dipende da } \langle \underline{v_1},\dots,\underline{v_n} \rangle$$

Se aggiungo ai $\underline{v_i}$ indipendenti un $\underline{v}$ indipendente abbiamo ancora un sistema indipendente

Incappiamo in un assurdo poiché la dimensione dei $\underline{v_i}=n$

iii. $\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ sistema di generatori $\Rightarrow \underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ base

DIM

Se non fossero indipendenti potremmo estrarre una base di cardinalità minore di n

iv. $\underline{v_1},\dots,\underline{v_m}$ indipendente $\Rightarrow \exists \underline{w_{m+1}},\dots,\underline{w_n} : \underline{v_1},\dots,\underline{v_m},\dots,\underline{w_n}$ base

(completamento di un sistema indipendente ad una base)

DIM

se $m=n$ si per ii.

Caso $m<n$

Sistema indipendente non di generatori (altrimenti risulterebbe una base)

$$m<n \Rightarrow \langle \underline{v_1},\dots,\underline{v_m} \rangle < V \qquad \exists \underline{w_{m+1}} \in V - \langle \underline{v_1},\dots,\underline{v_m} \rangle$$

con $\underline{w_{m+1}}$ non dipendente

Se aggiungo ottengo qualcosa di indipendente
Base? ➔ SI? Ho finito
Base? ➔ NO? Continuo fin tanto che no trovo una base
Ci si ferma perché al massimo il numero di vettori deve essere n
La base presenta la stessa cardinalità (cardinalità invariante)

v. V spazio vettoriale finitamente generato $\neq \{\underline{0}\}$ e i seguenti vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

Per questi vettori valgono:

i. base
ii. massimale rispetto all'indipendenza
   ➔ ogni volta che prendo un sistema di vettori che contiene quello originario, questo è dipendente
   ➔ sistema di vettori originario è indipendente
iii. minimale rispetto all'essere un sistema di generatori
   ➔ è un sistema di generatori
   ➔ ogni volta che ne tolgo uno mi trovo qualcosa che non sia più un sistema di generatori
iv. il sistema di n vettori è un sistema indipendente di cardinalità massima
   ➔ gli n vettori sono indipendenti
   ➔ un qualsiasi altro sistema di vettori (non necessariamente che contenga questo) ha cardinalità $\leq n$
v. il sistema di n vettori è un sistema di generatori di cardinalità minima
   ➔ questo sistema è un sistema di generatori
   ➔ comunque prendo un altro sistema di generatori per V arbitrario, questo sistema deve avere cardinalità $\geq n$

DIM:
i. $\Rightarrow$ ii.
So che i $\underline{v}_i$ siano una base (quindi indipendenti). Aggiungendo dei vettori il sistema diventa ovviamente indipendente
ii. $\Rightarrow$ i.
Supponiamo che i $\underline{v}_i$ non siano un sistema di generatori. Sapendo che questo sistema è indipendente lo vado a completare a una base (ci devo aggiungere dei vettori). Incappo in un assurdo (perché è già base)
i. $\Rightarrow$ iv.
Il numero n dei vettori $\underline{v}_i$ che costituisce la base è la dimensione dello spazio vettoriale.
Voglio dimostrare che sia anche un sistema indipendente di cardinalità massima (punto i.) ➔ sistema qualunque di vettori indipendenti presentano una cardinalità $\leq$ della dimensione della base.

iv. $\Rightarrow$ i.
Un massimo è anche un massimale
Avendo un sistema indipendente di cardinalità massima, questo è anche massimale rispetto all'indipendenza.
Per dimostrare che sia una base iv. $\Rightarrow$ ii.
i. $\Rightarrow$ iii.
I $\underline{v_i}$ sono una base
Se non fosse minimale rispetto alla generazione di un sottosistema di $\underline{v_i}$ (proprio) che è ancora un sistema di generatori
$\Rightarrow$ possiamo estrarre una base e trovare dimensioni diverse (assurdo)
iii. $\Rightarrow$ i.
$\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ massimale indipendente
v. $\Rightarrow$ i.
Se io ho un sistema di generatori di cardinalità minima, allora è anche un sistema minimale rispetto all'essere un sistema di generatori.
Se non lo fosse potrei togliere un vettore e trovare qualcosa che sia ancora un sistema di generatori (incappo in una cardinalità strettamente $<n$, contraddicendo l'ipotesi). Per assurdo la dimostro
i. $\Rightarrow$ v.
$\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$ base
Per assurdo suppongo che esista un sistema di generatori $\underline{w_1},\dots,w_m$ con $m<n$
Da questi m vettori estraggo una base che avrà cardinalità $<n$
Troveremo così due basi con cardinalità diverse (assurdo).

Questi 5 punti sono quindi tutti equivalenti.

Prop
$W \leq V_n$

i. W è finitamente generato e la sua dimensione è $\leq n$
DIM
Per assurdo poniamo che W non sia finitamente generato

$$\underline{w_1} \in W \qquad W \neq \langle \underline{w_1} \rangle \qquad \neq \underline{0}$$

$$\exists \underline{w_2} \in W - \langle \underline{w_1} \rangle \Rightarrow \underline{w_1}, \underline{w_2} \text{ indipendenti}$$

Nel caso in cui $W \neq \langle \underline{w_1}, \underline{w_2} \rangle$ continuo per un numero di $n+1$ passi (trovando così n+1 vettori indipendenti)
Incappo quindi in un assurdo in quanto V ha n vettori.
Di conseguenza W è finitamente generato
Prendo una base di W se ($W \neq \{\underline{0}\}$) $\underline{w_1},\dots,\underline{w_t}$ (base per W)
Essendo base sono indipendenti $\Rightarrow$ di conseguenza lo sono anche in V
$\Rightarrow t \leq n$
Volendo posso completare in una base (t cardinalità di una base di W)

ii. $dim\, W = n \Leftrightarrow W = V_n$

DIM $\Leftarrow$ ovvia

$\Rightarrow$ base di W $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n}$ è anche un sistema indipendente di cardinalità n in V $\Rightarrow$ formano una base per V

Corollario

W, Z finitamente generati $\leq V_n$

i. $W \leq Z \Rightarrow dim\, W \leq dim\, Z$

ii. $W \leq Z \wedge dim\, W = dim\, Z \Rightarrow W = Z$

iii. $H_1, \dots. H_n \leq V$ in somma diretta

$$dim(H_1 + \dots + H_n) = dim\, H_1 + \dots + dim\, H_n$$

Dim $\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1,m_1}$ base di H_1

$\underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2,m_2}$ " " H_2

...

$\underline{e}_{m1}, \dots, \underline{e}_{m,m_m}$ base di H_m

$\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1,m_1}, \underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2,m_2}, \dots, \underline{e}_{m1}, \dots, \underline{e}_{m,m_m}$ base

base di $H_1 + \dots + H_n \Rightarrow$ sistema di generatori

Prendo la combinazione lineare di questi oggetti, la eguaglio al vettore nullo.

$$h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1,m_1}\underline{e}_{1,m_1} + \underbrace{\dots + h_{m1}\underline{e}_{m1} + \dots + h_{m\,m_m}\underline{e}_{m\,m_m}}_{\in H_2 + \dots + H_m} = \underline{0}$$

porto a destra

$$h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1,m_1}\underline{e}_{1,m_1} = \dots - h_{m1}\underline{e}_{m1} + \dots - h_{m\,m_m}\underline{e}_{m\,m_m}$$

$$H_1 \cap (H_2 + \dots + H_n) = \{\underline{0}\}$$

Lezione del 28-04

Relazione di Grassman

$H, K \leq V_n \qquad dim\, H + dim\, K = dim(H \cap K) + dim(H + K)$

DIM

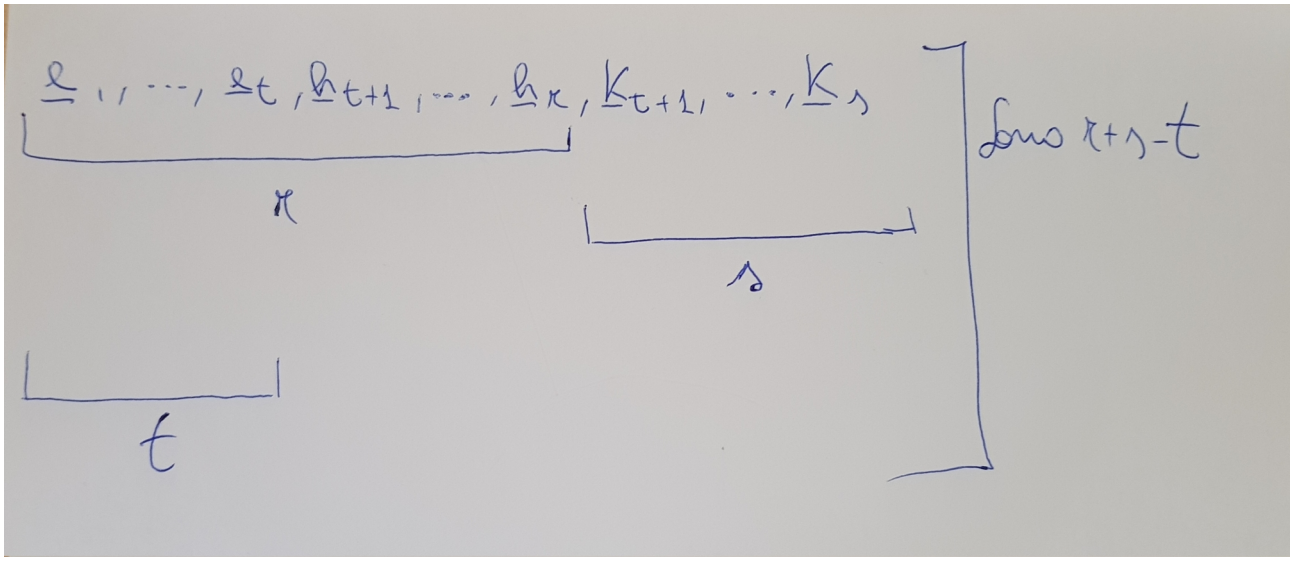
Se $H \cap K = \{\underline{0}\} \Rightarrow H \oplus K$

Supponiamo che $H \cap K \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow H + K = t$

$\exists \underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}$ base di $H \cap K$

$\underline{e_{11}}, \dots, \underline{e_t}, \underline{h_{t+1}}, \underline{h_r}$ base di H (dim H = r)

$\underline{e_{11}}, \dots, \underline{e_t}, \dots, \underline{k_{t+1}}, \underline{k_s}$ base di K (dim K = s)



$r + s - t = dim\, H + dim\, K - dim\, H \cap K = dim\, H + K$

#

1. Sistema di generatori

$$\underline{v} \in H + K \Rightarrow \exists \underline{h} \in H + K : \underline{v} = \underline{h} + \underline{k}$$

$\underline{h}$ è combinazione lineare di $\underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}, \underline{h_{t+1}}, \dots, \underline{h_r}$

$\underline{k}$ è combinazione lineare di $\underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}, \underline{k_{t+1}}, \dots, \underline{k_s}$

$\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}, \underline{h_{t+1}}, \dots, \underline{h_r}, \underline{k_{t+1}}, \dots, \underline{k_r}$

2. Sistema indipendente ($\underline{v}$)

$$a_1 \underline{e_1}, \dots, a_t \underline{e_t}, a_{t+1} \underline{h_{t+1}}, a_r \underline{h_r}, b_{t+1} \underline{k_{t+1}}, \dots, b_s \underline{k_s}$$

Li inserisco in un equazione a 0 e porto i termini con il coefficiente b al secondo membro

Indico entrambi i membri con x , in modo da poterli rappresentare in 2 modi:

1° membro $\in H$ (base di H)

2° membro $\in K$ (base di K)

$$x \in H \cap K = \langle \underline{e_1}, \dots, \underline{e_t} \rangle$$

Avendo posto l'equazione a 0 mi trovo che tutti gli scalari di H e K sono uguali a 0

V_n $\quad R=(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\dots,\underline{e}_n)$ riferimento

$$\forall\, \underline{v}\in V_n\, \exists!\, h_1,\dots,h_n\in R: \underline{v}=h_1\underline{e}_1+\dots+h_n\underline{e}_n$$

$(h_1,\dots,h_n)$ n-pla di componenti nel riferimento R

Come passare da componenti in R a componenti in R' ?

$$R=(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)\rightarrow R^1=(\underline{e}_{11}^1,\dots,\underline{e}_n^1)$$

riferimento di V_n

$$\underline{e}_1=a_{11}\underline{e}_1^1+\dots+a_{1n}\underline{e}_n^1$$
$$\underline{e}_2=a_{21}\underline{e}_1^1+\dots+a_{2n}\underline{e}_n^1$$
$$\dots$$
$$\underline{e}_n=a_{n1}\underline{e}_1^1+\dots+a_{nn}\underline{e}_n^1$$

$\underline{v}\in V$

$(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in R $\qquad (x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1)$ in R'

$$\underline{v}=x_1\underline{e}_1+\dots+x_n\underline{e}_n$$

sostituisco gli $\underline{e}_i$

$$\underline{v}=(x_1a_{11}+\dots+x_na_{n1})\underline{e}_1^1+\dots+(x_1a_{21}+\dots+x_na_{nn})\underline{e}_n^1$$

$$\underline{v}=\underset{a}{\overset{x_1^1}{\vdots}}\,\underline{e}_1^1+\dots+\underset{b}{\overset{x_n^1}{\vdots}}\,\underline{e}_n^1$$

Formule di passaggio da R a R'

$$x_1^1=x_1a_{11}+\dots+x_na_{1n}$$
$$x_n^1=x_1a_{n1}+\dots+x_na_{nn}$$

In R $\rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\qquad$ In $R^1\rightarrow x^1=\begin{pmatrix}x_1^1\\ \dots\\ x_n^1\end{pmatrix}$ $\qquad$ A = $\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$

$x^1=Ax$

Lezione del 05-05

NB: Tutti i sistemi indipendenti di ordine 2 sono una base

Corollario

Due matrici a gradini equivalenti hanno lo stesso # di pivot

Determinante di una matrice quadrata

ricorsione sull'ordine

$$n=1 \qquad A=(a) \qquad det\, A=a$$

$\forall a_{ij}$ di A matrice complementare di $a_{ij}: A(i,j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & a_{ij} & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(3,3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A(2,2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cancello riga e colonna a $i\,j$ e ottengo sempre una matrice quadratica
Complemento algebrico di $a_{ij}: A\,ij=(-1)^{i+j} \qquad det\, A(ij)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(2,2)=(1) \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\det(1)=1$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n} \qquad a_{11}A_{11}+\dots+a_{n1}A_{n1}$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\dots+a_{2n}A_{2n} \qquad a_{12}A_{12}+\dots+a_{n2}A_{n2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\dots+a_{nn}A_{nn}=\underline{\det A}=a_{1n}A_{1n}+\dots+a_{nn}A_{nn}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc$$

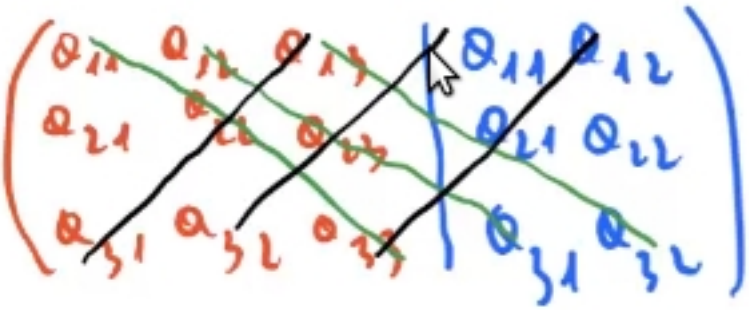
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=4-6=-2$$

Regola di Sarrus

valida solo per le matrice 3x3

Data una matrice 3x3 per calcolarne il determinante prendo le prime due colonne e le sposto a sinistra della terza e calcolo in questo modo:

$$det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$



Osservazione

Se una matrice ha una riga (o una colonna) tutta nulla il suo determinante è 0

Proprietà del determinante

i. $det\ A = det\ A^t$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \rightarrow \text{ trasposta } \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Induzione sull'ordine

$$det\ A = \sum_i a_{1i} A_{1i} \qquad det\ A^t = \sum_i a^i_{i1} A^t_{i1}$$

rispetto alla prima riga

ii. Se una riga (o colonna) dipende dalle rimanenti $\Rightarrow det\ A = 0$

Corollario $det \neq 0 \rightarrow$ righe (e colonne) indipendenti

iii. $A \in R_n \quad B \in R_n \rightarrow det(AB) = det\ A * det\ B$

Cauchy- Binet

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \right| = \underbrace{\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right|}_{0} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \right| = 0$$

iv. $h \in R \wedge A \in R_n \rightarrow h * det\ A$

v. Se scambiamo 2 righe o due colonne il determinante cambia di segno

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 - 2 = -1 \qquad \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2 - 1 = 1$$

vi. Se aggiungiamo a una riga (o a una colonna) un multiplo di un altro il determinante non cambia

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

vii. A matrice e D matrice a gradini equivalente ad A (per righe)
$(A)\neq 0 \Leftrightarrow (D)\neq 0$

Def (caso matrice quadratica)

$A\in R_n$ è detta invertibile $\Leftrightarrow \exists B\in R_n : AB = I_n = BA$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A è invertibile $\Leftrightarrow det\, A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

→ Matrice trasposta dei complementi algebrici.

Corollario

$A, B\in R_n \qquad AB = I_n \Rightarrow A, B$ invertibili e $B = A^{-1}$

con I_n matrice identica

DIM

$$\underset{det\,A * det\,B}{\underset{\downarrow}{det(AB)}} = det(I_n) = 1 \Rightarrow det\,A \neq 0 \neq det\,B$$

$$AB = I_n \rightarrow (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} \rightarrow A = B^{-1}$$

e viceversa

Def

$A \in R_{nm}$

rango di riga r_r : dimensione del sottospazio generato dalle righe

rango di colonna r_c : dimensione del sottospazio generato dalle colonne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_r(A) = 0 = r_c(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & & \cdots & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,m}$$

$0 < h \leq \min\{m, n\}$ righe $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_h}$

$\underline{a}^{j_1}, \dots, \underline{a}^{j_h}$

h < # righe e colonne

Scelgo poi h righe e colonne e cancello tutte le altre

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \end{array} \end{array}$$

$0 < \underset{h}{\underset{\shortparallel}{2}} \leq 3 = \min\{3, 4\}$

righe : 1 e 2

colonne : 1 e 3

a cancellare

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ minore di ordine $\underline{h}$ (in questo caso 2)

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (1)\, minore\, di\, ordine\, 1 \quad A(1;2)$

Se $\quad A \in R_{n,m}$

$$\begin{matrix} \underline{a_{i1}}, \dots, \underline{a_{i}}\ righe \\ \underline{a^{ji}}, \dots, \underline{a^{jn}}\ colonne \end{matrix} \rightarrow A(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n)$$

il determinante del minore lo indico con $\quad [A](i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n)$

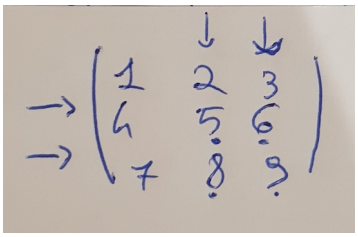
Un minore si dice di ordine massimo se il suo ordine coincide con $\quad min\{n, m\}$
Es.

$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(1,2;1,2)$ ordine massimo

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ A stessa è un minore di ordine massimo

Supponiamo $\quad A(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n)$ non sia di ordine massimo

$$\exists \begin{matrix} i \neq i_1, \dots, i_h\ indice\, di\, riga \\ j \neq j_1, \dots, j_h\ indice\, di\, colonna \end{matrix}$$



Nella matrice i vettori con i punti si indicano con la nomenclatura $\quad A(2,3;2,3)$

Orlato del minore : $\quad A(i, i_1, \dots, i_n; j, j_1, \dots, j_n)$

Orlando con 1 e 1 : $\quad A(1,2,3;1,2,3) = A$

$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

$A(2,3;1,4)$

$1 \neq 2,3$ inoltre di r.
$2 \neq 1,4$ inoltre di c.

$A(1,2,3;1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

L'orlato è un minore che estende una riga e una colonna.

Nel caso di una matrice quadrata, un minore si dice fondamentale se:

1. Il suo determinante è diverso da 0;
2. Il determinante di ogni orlato è 0

Nel caso della matrice fondamentale non esistono minori fondamentali

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$|A|(3,5) = 1 \neq 0$

controlliamo tutti i possibili orlati

righe: 1, 2

colonne: 1, 2, 3, 4

Es. $|A|(2,3;4,5) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$

$|A|(2,3;1,5) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0$

Prendiamo questo come nuovo candidato e controlliamo i minori.

righe: 1

colonne: 2, 3, 4

$|A|(1,2,3;1,3,5) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 - 4 = -6 \neq 0$

Ordine massimo → minore fondamentale e determinante diverso da 0

Alternativamente: $|A|(1,2,3;1,4,5) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 3 - 4 = -4$

Teorema degli orlati

$A \in R_{n,m}$ e $A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$ è un minore fondamentale

$\Rightarrow$ Le righe $i_1, \dots, i_h$ formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle righe

$\Rightarrow$ le colonne $j_1, \dots, j_h$ formano una base per lo spazio vettoriale generato dalle colonne

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A(1,2,3;1,3,5)$ min. fond.

$\langle (2,0,1,3,1), (1,0,0,0,0), (3,1,1,1) \rangle$ dim 3

$\langle (2,1,3), (0,0,1), (1,0,1), (3,0,1), (1,0,1) \rangle$ dim 3

Corollario

rango di riga = rango di colonna= rango di $Ar(A)$ = # di pivot di una matrice a gradini equivalente per righe

Corollario

Tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine
(Se non lo fossero potrei trovare delle basi con cardinalità diverse e questo è impossibile)

Corollario (matrice quadrata)

$A \in R_n \quad |A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} righe \\ (o\, colonne) \end{matrix}$ sono indipendenti

DIM $|A| \neq 0 \Rightarrow$ righe indipendenti (lo sappiamo)

Supponiamo che le righe siano indipendenti $\rightarrow r_r(A) = n$ (è una base)
Nel momento in cui andiamo a prendere un minore fondamentale l'ordine di quest'ultimo ha dimensione n in quanto basterebbe al più n-1 righe per generare tutto il sottospazio delle righe (impossibile perché so che ha dimensione n). Pertanto il minore fondamentale deve avere ordine n.
Per questo il minore fondamentale è la matrice stessa.

Per definizione allora $|A| \neq 0$

Corollario

$A \in V_n \qquad det\, A = 0 \Leftrightarrow$ righe (o colonne) dipendenti

Sistemi di equazioni lineari (criteri di compatibilità)

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases} \qquad AX = C$$

$$C = \underline{A}_1 x_1 + \underline{A}_2 x_2 + \dots + \underline{A}_m x_m = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m$$

1° criterio di compatibilità

S è compatibile $\Leftrightarrow$ la colonna dei termini noti è combinazione lineare della matrice incompleta

Teorema di Rouchy- Capelli

S è compatibile $\Leftrightarrow$ matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango

DIM

$\Leftarrow$ h = $r(A) = r(A^1)$

con h numero di rango di m. completa e incompleta

Prendiamo h colonne indipendenti di A

- ➔ sono indipendenti anche le colonne di A^1
- ➔ base per le colonne di A^1

C (colonna dei termini noti) si scrive come combinazione lineare delle colonne di A $\Rightarrow$ 1° criterio di compatibilità

$\Rightarrow$ Supponiamo che S sia compatibile e mostriamo che $h = r(A) \underset{?}{=} r(A^1)$

Prendiamo h colonne indipendenti di A

$\Rightarrow r = \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \rangle = \langle \underline{a}^{i_1}, \dots, \underline{a}^{i_n} \rangle$ generano anche il sottospazio

$C \in V$

$$S = \begin{cases} 2x + y + hz = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + t = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to A : \quad |A| = -4 + 6 + h - (-6h + 1 + 4)$$

$$= 7h - 3 = 0 \qquad |A| = 0 \iff h = \frac{3}{7}$$

$$h = \frac{3}{7} : \ r(A) = 2 \qquad r(A') \overset{?}{=} 3$$

incompatibile

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

$$h \neq \frac{3}{7} : \ r(A) = 3 = r(A')$$

compatibile

$$S : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = c_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2m} x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mm} x_m = c_m \end{cases}$$

Compatibile

Calcoliamo un minore fondamentale di A che sarà anche un minore fondamentale di A^1 ed eliminiamo le righe al di fuori

Quelle che restano sono indipendenti: # equazioni $\leq$ # incognite

Caso 1 $\to$ n equazioni, n incognite

Equazioni tutte indipendenti (sono all'interno di un minore fondamentale)

$\Rightarrow |A| \neq 0$

$$Ax = C \Leftrightarrow x = A^{-1} C$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \ldots + c_n A_{n1}}{|A|}$$

$$\ldots$$

$$x_n = \frac{c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \ldots + c_n A_{nn}}{|A|}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad |B_1| = c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \ldots + c_n A_{1n}$$

Divido il determinante di B_1 per il determinante di A

Regola di Cramen

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

Caso 2 → n equazioni, m equazioni con $n<m$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = c \end{cases} \qquad S = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Prendiamo un minore fondamentale e portiamo a destra le incognite fuori dalla colonna del minore fondamentale
Consideriamo fissate le incognite fuori del minore fondamentale:

$$\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases}$$

$$2x + y = c_1$$
$$x + y = c_2$$

Poiché A^1 è data da un minore fondamentale posso usare Cramen:

$det\ A^1 \neq 0$

$$x = c_1 - c_2 \qquad y = 2c_2 - c_1$$

Sostituiamo le incognite c_1 e c_2 con i loro corrispettivi precedenti

$$x = c_1 - c_2 = -\cancel{z} - 2t + \cancel{z} + t = -t$$
$$y = 2c_2 - c_1 = 2(-z - t) + z + 2t = -z$$

$$\bar{S} = \{(-t, -z, z, t) \,/\, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$\bar{S}$ indeterminato e ha ∞^2

Sistemi omogenei

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \qquad S: AX = 0$$

Proprietà

$\overline{S} \leq R^m$

DIM

Se $\overline{S} \neq 0$ $\qquad (0,\dots,0) \in \overline{S}$

$Y_1, Y_2 \in \overline{S}$

$$AY_1 = 0 \qquad AY_2 = 0$$

Controllo la stabilità rispetto alla somma e al prodotto:

$$A(Y_1, Y_2) = AY_1 + AY_2 = 0 + 0 = 0$$

scalare $\lambda \in R$ $\qquad A(\lambda Y_1) = \lambda(Y_1) = \lambda * 0 = 0$

Cerchiamo una base:

$$\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases} \qquad \overline{S} = \{(\alpha(z,t), \beta(z,t), z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 1,\ t = 0 \rightarrow (\alpha(1,0), \beta(0,1), \underline{1,0}) \\ z = 0,\ t = 1 \rightarrow (\alpha(0,1), \beta(1,0), \underline{0,1}) \end{array}\right] \text{indip.}$$

Prendiamo una generica soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) \in \overline{S}$

$$(\alpha(\overline{z}, \overline{t}), \beta(\overline{z}, \overline{t}), \overline{z}, \overline{t}) \rightarrow (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$$

Per Cramen $\exists!$ soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} 2x+y&=-\bar{z}-\bar{2}t \\ x+y&=-\bar{z}-\bar{t} \end{aligned}$$

$$\alpha(\bar{z},\bar{t})=\bar{x}\wedge\beta(\bar{z},\bar{t})=\bar{y}$$

$$\bar{z}\,(\alpha(1,0),\beta(0,1),1,0)+\bar{t}\,(\alpha(0,1),\beta(0,1),0,1)$$

$$=$$

$$(*,*,\bar{z},\bar{t})\in\bar{S}$$

$$\shortparallel$$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$$

Relazione tra sistema generale ed omogeneo associato

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1m}x_m=c_1 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2m}x_m=c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nm}x_m=c_3 \end{cases}$$

$$\bar{S}\underset{\text{vel?}}{\sim}\bar{S}_0$$

$$S_0:\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2m}x_m=0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

$$S: AX=C$$

$$S_0: AX=0$$

Teorema

Fisso $Y \in \overline{S}$

1. $\forall\ z \in \overline{S} \quad \exists z_0 \in \overline{S} : z = Y + z_0$
2. $\forall\ z_0 \in \overline{S_0} : y + z_0 \in \overline{S}$

DIM punto 2

$$A(Y + z_0) = AY + Az_0 = C + 0 = C$$

$$\Rightarrow Y + Z \in \overline{S}$$

DIM punto 1

$$A(z - Y) = Az - AY = C - C = 0$$

$$\Rightarrow z - y \in \overline{S_0}$$

$$z = y + (z - Y)$$

$$S: \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases} \qquad S_0: \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\overline{S_0} = \langle (0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$$

$$\overline{S} = (0,1,0,0) + \overline{S_0}$$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$n-1$ eq. indip.
n incognite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \qquad r(A) = n-1$$

$dim\,\overline{S}=1$, ci basta trovare una soluzione non nulla.
Se il rango è massimo il sistema è compatibile

$A_1, A_2, \dots, A_n$ minori di ordine $n-1$ di A (si ottengono eliminando le colonne)

$\lambda_1 = det\,A_1, \dots, \lambda_n = det\,A_n$ (sicuramente $\exists\ i\ :\ \lambda_i \neq 0$)

$\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n \in \overline{S}$

Prendo la matrice A e duplico la prima riga

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{n-1,1} & & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \Big] \text{duplicata} \qquad \Rightarrow \det C_1 = 0$$

E la metto come prima riga

Risulta una matrice quadrata → avendo due righe uguali (quindi dipendenti) il $det\,C_1 = 0$

Sviluppo rispetto alla prima riga:

$$\underbrace{\lambda_1}_{x_1} a_{11} \underbrace{-\lambda_2}_{x_2} a_{12} + \dots + \underbrace{(-1)^{n-1}\lambda_n}_{x_n} a_{1n} = 0$$

I λ presi a segni alterni sono soluzione della prima equazione ($\lambda_i \rightarrow x_i$)

Questa n-pla è soluzione della prima equazione. Si dimostra che vale per tutte le equazioni

Esempio

$$S: \begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$\left\langle \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \right\rangle = \bar{S}$$

Determinanti dei minori presi a segni alterni (genera tutto il sottospazio)

Applicazione lineare

V, V^1 spazi vettoriali

$f: V \rightarrow V^1$ lineare se

(f immagine)

1. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, f(\underline{v}+\underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
2. $\forall \lambda \in \Re \wedge \forall \underline{v} \in V, f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

Omomorfismo lineare

(definizioni)

Se $V = V^1$ → **endomorfismo**

Se f è iniettiva → **monomorfismo**
Se f è suriettiva → **epimorfismo**
Se f è biettiva → **automorfismo**

1) $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo nullo
$\underline{v} \longrightarrow \underline{0}$ (applicazione nulla)

Applicazione identica ($DOM = CODOM$) è una applicazione lineare

Per verificare se sia una applicazione prendo due vettori (caso R^2) e vado a farne la somma

2) $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y) \quad (x',y')$

$$f((x,y)+(x',y')) =$$
$$= f((x+x', y+y'))$$
$$= (x+x', y+y'+x+x', y+y')$$
$$\parallel$$
$$f((x,y)) + f((x',y')) = (x, x+y, y) + (x', x'+y', y')$$

$$f(\lambda(x,y)) = \lambda f((x,y))$$

È <u>iniettiva</u>? $\quad (x,y) \neq (x',y') \Rightarrow f(x,y) \neq f(x',y')$

$$\parallel$$
$$(x, x+y, y) \neq (x', x'+y', y')$$

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare

$(x,y) \mapsto x$

epimorfismo (non mono)

$(1,0)$
$(1,1)$ $\Rightarrow 1$

4) $id_V: V \to V$ appl. identica

$\underline{v} \mapsto \underline{v}$

Proposizione

$f: V \to V^1$ lineare

(i) $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \quad f(h\underline{v} + k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

(ii) $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_{V^1}$

(iii) $f(h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \ldots + h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + h_n f(\underline{v}_n)$

(iv) $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$

Dim. (i) $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = f(h\underline{v}) + f(k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

(ii) $f(\underline{0}) = f(\underline{0} + \underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0})$

$\Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0}$

(iii) $f(\underbrace{h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \ldots}_{\shortparallel} + h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + h_n f(\underline{v}_n)$

$f(h_1\underline{v}_1 + \ldots + h_{n-1}\underline{v}_{n-1}) + h_n f(\underline{v}_n)$

(iv) $f(-\underline{v}) = f(-1 \cdot \underline{v}) = -1 \cdot f(\underline{v}) = -f(\underline{v})$

Proposizione

$f: V \rightarrow V^1$ lineare

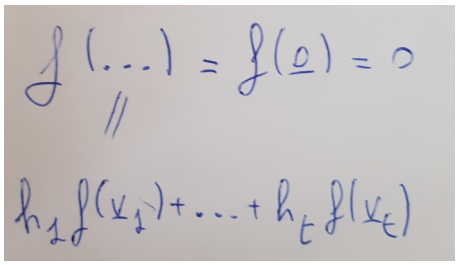
1. $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_t} \in V$ dipendenti $\Rightarrow f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_t})$ dipendenti in V^1

(f conserva la dipendenza)

DIM

$\exists\, h_i \in \Re$

Non tutti nulli $h_1 \underline{v_1} + \ldots + h_t \underline{v_t} = 0$



2. $\underline{v} \in \langle S \rangle \Rightarrow f(\underline{v}) \in \langle f(S) \rangle$

DIM

$\underline{v} = h_1 \underline{s_1} + \ldots + h_n \underline{s_n}$

con $S = \{\underline{s_1}, \ldots, \underline{s_n}\}$

$f(\underline{v}) = h_1 f(\underline{s_1}) + \ldots + h_n f(\underline{s_n})$

$$f(\underline{v}) \in \langle f(\underline{s_1}, \ldots, \underline{s_n}) \rangle = \langle f(S) \rangle$$

3. $W \leq V \Rightarrow f(W) \leq V^1$

DIM

$W \neq 0 \Rightarrow f(W) \neq \emptyset$

$$\underline{v}, \underline{w} \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{v}, \underline{w} \in V : \begin{array}{l} f(\underline{v}) = \underline{v^1} \\ f(\underline{w}) = \underline{w^1} \end{array}$$

$$\underline{v^1} + \underline{w^1} = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}) \in f(W)$$

4. $W = \langle \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n} \rangle \Rightarrow f(W) = f(\langle \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n} \rangle)$

DIM

$$\underline{w_i} \in W \Rightarrow f(\underline{w_i}) \in f(W) \qquad \langle f(\underline{w_i}) \rangle \leq f(W)$$

$\underline{w^1} \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{w} \in W : \underline{w^1} = f(\underline{w})$

$$\exists\, h_i \in \Re : \underline{w} = h_1 \underline{w_1} + \ldots + h_n \underline{w_n}$$

$$\underline{w^1} = f(h_1 \underline{w_1} + \ldots + h_n \underline{w_n}) = h_1 f(\underline{w_i}) + \ldots + h_n f(\underline{w_n})$$

Def

$f: V \to V^1$ lineare

$$ker\, f = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}\}$$

Questo $ker\, f$ prende il nome di kernel (o nucleo)

Im f $= f(V) = \{f(\underline{v}) : \underline{v} \in V\}$

Questo Im f prende il nome di immagine

$$ker\, f \leq V \quad Im\, f \leq V$$

DIM

Dim.

$Ker f \neq \emptyset \quad \underline{0} \in Ker f$

$\underline{v}, \underline{w} \in Ker f \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in Ker f$

$f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
$= \underline{0} + \underline{0}$
$= \underline{0}$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\Rightarrow \lambda \underline{v} \in Ker f$

$Im f \neq \emptyset \quad \underline{0} \in Im f$

$\underline{v}', \underline{w}' \in Im f \Rightarrow \exists \underline{v}, \underline{w} \in V :$
$\underline{v}' = f(\underline{v})$
$\underline{w}' = f(\underline{w})$

$\underline{v}' + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
$= f(\underline{v} + \underline{w}) \in Im f$

$\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \underline{v}' = \lambda f(\underline{v}) = f(\lambda \underline{v})$
$\in Im f$

Prop

$f: V \to V^1$ lineare

V spazio vettoriale finitamente generato e $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base

$\Rightarrow Im\, f = \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \rangle$

DIM

$V = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle \qquad \underline{v}' \in Im f \Rightarrow \exists \underline{v} \in V : v' = f(\underline{v})$
$\qquad\qquad\qquad

Esempio $0_V : V \longrightarrow V$ $\quad \underline{v} \longmapsto \underline{0}$ $\qquad \ker 0_V = V$

$\mathrm{Im}(f) = \{\underline{0}\}$

$id_V : V \longrightarrow V$ $\quad \underline{v} \longmapsto \underline{v}$ $\qquad \ker V = \{\underline{0}\}$

$\mathrm{Im}(f) = V$

Esempio $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ $\qquad F_A : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto AX \in \mathbb{R}^m$

$AX = 0$ sist. di eq. lineari

$$\mathrm{Im}\, F_A = \left\langle A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, A\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Prop

$f : V \rightarrow V^1$

i. f suriettiva $\Leftrightarrow Im f = V^1$
ii. f iniettiva $\Leftrightarrow ker f = \{\underline{0}\}$

DIM

i. ovvia
ii. $\Rightarrow$

$$\underline{0} \in ker f \Rightarrow \{\underline{0}\} \leq ker f$$

$$\underline{v} \in ker f \Rightarrow \begin{matrix} f(\underline{v}) = 0 \\ f(\underline{0}) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

$$ker f \leq \{\underline{0}\}$$

$$\Leftarrow f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$$

Prop

$f: V \to V^1$ monomorfismo

$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ indipendenti $\Rightarrow f(\underline{v_1}), \dots, f(\underline{v_n})$ indipendenti

In particolare la base per V → base di $f(V)$

$$h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_m f(\underline{v}_m) = \underline{0}$$
$$\shortparallel$$
$$f(h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m)$$

$$\Rightarrow \quad h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m = \underline{0}$$
$$\Downarrow$$
$$h_1 = \dots = h_m = 0$$

Th:

$f: V_n \to V$ lineare

dim $\ker f + \dim Im f = n$

$\ker f = V_n \Rightarrow n + 0 = n$

$$\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f \text{ iniettiva}$$

$$\text{base } \underline{e_1}, \dots, \underline{e_n} \text{ di } V \to \text{ base } f(\underline{e_1}), \dots, f(\underline{e_n}) \text{ di } Im f$$

$\{\underline{0}\} \underset{\neq}{<} \ker f \underset{\neq}{<} V_m$

$$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_t} \text{ base di } \ker f \quad (\dim \ker f = t)$$

$$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_t}, \underline{v_{t+1}}, \dots, \underline{v_n} \text{ base per } V_n$$

Proviamo che $f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n)$ è base di $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t), f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$$
$$= \langle f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$$

$$h_{t+1} f(\underline{v}_{t+1}) + \dots + h_n f(\underline{v}_n) = \underline{0}$$
$$\Rightarrow h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n \in \ker f$$

$$f(h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n)$$

$$\exists h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R} : \; h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_n$$

$$h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_t + h_{t+1} \underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow h_1 = \dots = h_t = h_{t+1} = \dots = h_n = 0$$

Isomorfismo coordinato

$V_n \qquad \mathcal{B} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$c_{\mathcal{B}} : \underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n \in V_n \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

lineare $\quad \ker c_{\mathcal{B}} = \{ \underline{v} \in V_n : c_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = (0, \dots, 0) \} = \{ \underline{0} \}$

$$\operatorname{Im} c_{\mathcal{B}} = \langle c_{\mathcal{B}}(\underline{e}_1), \dots, c_{\mathcal{B}}(\underline{e}_n) \rangle$$
$$= \langle (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^n$$

$f: V \to V'$ isomorfismo lineare $\Rightarrow f^{-1}: V' \to V$ isomorfismo

Dim $\underline{v}', \underline{w}' \in V' \Rightarrow f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') \overset{?}{=} f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$

$\exists \underline{v}, \underline{w} \in V: \underline{v}' = f(\underline{v})$ e $\underline{w}' = f(\underline{w})$

$$f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}(f(\underline{v}) + f(\underline{w})) = f^{-1}(f(\underline{v} + \underline{w})) = \underline{v} + \underline{w}$$

$$\shortparallel$$

$$f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\lambda \underline{v}') = f^{-1}(\lambda f(\underline{v})) = f^{-1}(f(\lambda \underline{v})) = \lambda \underline{v}$

$$= \lambda f^{-1}(\underline{v}')$$

L'inversa di un isomorfismo lineare è un isomorfismo lineare.

Corollario

$f: V \to V^1$ isomorfismo

i. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendenti $\Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ indipendenti
ii. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dipendenti $\Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ dipendenti
iii. $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ base di W $\Leftrightarrow f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n)$ base di $f(W)$ (sottospazio immagine)

Teorema

$f: V_n \to V_m^1$ lineare è "**noto**" quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base

noti → siamo in grado di calcolare le immagini del dominio

DIM $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base di V_n e siamo noti

$f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \Rightarrow \underline{v} \in V_n$ $f(\underline{v}) = f(h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n)$

$$\shortparallel$$

$$h_1 f(\underline{e}_1) + \dots + h_n f(\underline{e}_n)$$

Matrice associata

$f: V_n \rightarrow V_m^1$ lineare entrambi finitamente generati

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n

$R^1 = (\underline{e}_1^1, \dots, \underline{e}_n^1)$ di V_m^1

$$f(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{e}_1^1 + a_{21}\underline{e}_2^1 + \dots + a_{m1}\underline{e}_m^1$$

$$\dots$$

$$f(\underline{e}_n) = a_{1n}\underline{e}_1^1 + a_{2n}\underline{e}_2^1 + \dots + a_{mn}\underline{e}_m^1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n}$$

Matrice associata ad f nei riferimenti R ed R^1 $\rightarrow$ $M_{R,R^1}(f)$

Nel caso in cui $DOM = CODOM$ $\rightarrow$ scelgo $R = R^1$

Se è un endomorfismo e $R = R^1$ $\rightarrow$ $M_R(f)$ (siamo nel caso in cui la matrice sia quadrata $n = m$)

$\underline{v} \in V_n$ e X componenti di $\underline{v}$ in R

X' componenti di $f(\underline{v})$ in R'

$X' = AX$ Dim $X' = (x_1', \dots, x_m') \in \mathbb{R}^m$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n \Rightarrow f(\underline{v}) = x_1 \underbrace{f(\underline{e}_1)}_{a_{11}\underline{e}_1^1 + a_{21}\underline{e}_2^1 + \dots + a_{m1}\underline{e}_m^1} + \dots + x_n \underbrace{f(\underline{e}_n)}_{a_{1n}\underline{e}_1^1 + \dots + a_{mn}\underline{e}_m^1}$$

$$= \underbrace{(x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n})}_{x_1'} \underline{e}_1' + \dots + \underbrace{(x_1 a_{n1} + \dots + x_n a_{nn})}_{x_n'} \underline{e}_n'$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + \dots + a_{nn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che se ho una matrice $A \in \Re_{m.n}$:

$$X^1 = AX \qquad X = C_R(\underline{v}) \quad e \quad X^1 = C_R^1(f(\underline{v})) \ \ \forall \underline{v}$$

$\Rightarrow A = M_{R,R^1}(f)$

Prop.

R e R^1 la matrice di passaggio è invertibile

DIM

$R \rightarrow R^1$ le colonne erano le componenti dei vettori di R in R^1

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ C_{R'}(\underline{e}_1) & \dots & C_{R'}(\underline{e}_n) \end{pmatrix}$$

indipendenti $\Leftarrow$ isomorfismo

$\Downarrow$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile

Lezione del 22-05

Teorema

La matrice di passaggio da $\Re \rightarrow \Re^1$ è invertibile

Corollario

Se P (matrice) di passaggio da $\Re \rightarrow \Re^1$, allora P^{-1} è di passaggio da $\Re^1 \rightarrow \Re$

DIM

$$X' = PX \qquad X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) \qquad X' = C_{\mathcal{R}'}(\underline{v}) \qquad \underline{v} \in V_n$$

$$\Downarrow$$

$$P^{-1}X' = X \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} \text{ di passaggio } \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}\,?$$

$$\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \qquad \mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$$

$$\underline{e}'_1 = x_{11}\underline{e}_1 + \dots + x_{n1}\underline{e}_n$$

$$\dots$$

$$\underline{e}'_n = x_{1n}\underline{e}_1 + \dots + x_{nn}\underline{e}_n$$

matrice di passaggio $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Def

$A, A^1 \in \Re_n$

A è simile ad A^1 (A ~A^1) $\Leftrightarrow \exists P : |P| \neq 0$ e $P^{-1}AP = A^1$

(si dice che A è coniugato di A^1)

Relazioni di equivalenza

- **riflessiva**

$$A \sim A: \quad I_n \Delta I_n = A$$

$$|I_n| \quad \text{e} \quad I_n^{-1} = I_n$$

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **transitiva**

$$A \sim B \quad \text{e} \quad B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

DIM

$$\exists P \quad \text{invertibile}: \quad P^{-1} A P = B$$

$$\exists P_1 \quad \text{invertibile}: \quad P^{-1} B P = C$$

$$C = P_1^{-1} B P_1 = P_1^{-1} (P^{-1} A P) P_1 = (P_1^{-1} P^{-1}) A (P P_1) = (P P_1)^{-1} A (P P_1)$$

- **simmetrica**

$$A \sim A^1 \Rightarrow A^1 \sim A: \qquad P^{-1} A P = 1$$

$$P (P^{-1} A P) P^{-1} = P A^1 P^{-1}$$

$$A = P A^1 P^{-1} \quad = (P^{-1})^{-1} A P^{-1}$$

Teorema

$f: V_n \rightarrow V_n$ (endomorfismo)

R e R^1 riferimenti di V_n (non necessariamente distinti)

$$A = M_R(f) \sim M_{R^1}(f) = A^1$$

DIM

Sia P di passaggio da $R \rightarrow R^1$

$\underline{v} \in V_n$

$$X = C_R(\underline{v}) \qquad X^1 = C_{R^1}(\underline{v})$$

con C_R immagine coordinazione associata a $\underline{v}$

$$Y = C_R(f(\underline{v})) \qquad Y^1 = C_{R^1}(f(\underline{v}))$$

$$X^1 = PX \qquad Y^1 = PX \qquad Y = AX \quad \rightarrow \quad Y^1 = A^1 X^1$$

$$PY = A^1 P X \Rightarrow \qquad Y = P^{-1} A P X$$

proprietà della matrice associata

$$\Rightarrow P^{-1} A P = A \qquad \Rightarrow A \sim A^1$$

Diagonalizzazione

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\det(A - tI_n)$ è detto

polinomio caratteristico

$$\det(A - tI_n) = 0$$

eq caratteristica

$$A - tI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

Lemma

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

DIM

$$A \sim A^1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, P\, invertibile : A^1 = P^{-1} A P$$

$$det(A^1 - t I_n) \quad = \quad det(P^{-1} A P - t I_n)$$

ponendo $\quad I_n = PP^{-1}$

$$det(P^{-1} A P - t PP^{-1}) = det[P^{-1}(AP - t P)]$$

$$det[P^{-1}(A - t I_n)P] = det(P^{-1}) det(A - t I_n) det(P)$$

$$det(P^{-1}) det(P) det(A - t I_n) = det(A - t I_n)$$

I determinanti di $\quad P^{-1}$ e di $\quad P$ corrispondono al $\quad det(I_n)$ che è uguale a 1

Def

$f: V_n \rightarrow V_n$ endomorfismo

R riferimento

$$A = M_R(f)$$

polinomio caratteristico di f è il polinomio caratteristico di A

OSS.

La definizione è ben posta

L' equazione caratteristica di f è l' equazione caratteristica di A

Def

$f: V_n \rightarrow V_n$ endomorfismo

È detto **diagonalizzabile** se esiste un riferimento $R: M_R(f)$ è diagonale

Def

$A \in \Re_n$ è detta diagonalizzabile se è simile ad una diagonale

Prop

$f: V_n \rightarrow V_n$ endomorfismo diagonalizzabile

$\Rightarrow$ ogni matrice associata ad f è diagonalizzabile

DIM

$\exists R$ riferimento di V_n: $M_R(f)$ è diagonale

$\forall R^1$ riferimento di V_n: $M_{R^1}(f) \sim M_R(f) \Rightarrow M_{R^1}(f)$ è diagonalizzabile

Proposizione $f: V_n \to V_n$ endomorfismo, $\mathcal{R}$ rif. di V_n, $M_{\mathcal{R}}(f)$ diagonalizzabile $\Rightarrow f$ djagonalizzabile

DIM $A = M_{\mathcal{R}}(f)$ $\quad \exists P$ invertibile : $P^{-1}AP = D$ e D diagonale

$\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \quad X_1 = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1), \dots, X_n = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_n)$

$F_P : X \in \mathbb{R}^n \mapsto PX \in \mathbb{R}^n$ jsomorfismo $\quad \left(F_{P^{-1}} : X \mapsto P^{-1}X \right)$

$PX_1, \dots, PX_n$ sono indipendenti $\quad C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_1) = \underline{e}'_1, \dots, C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_n) = \underline{e}'_n$

$\mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n) \quad X_1 = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1) = (1, 0, \dots, 0)$

$\dots$

$X_n = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_n) = (0, \dots, 0, 1)$

$\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ matrice di passaggio : prima colonna

$$C_R(\underline{e}_1) = PX_1 = P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{prima colonna di} \quad P$$

$$A^1 = M_{R^1}(f) \sim M_R(f) = A$$

$$P^{-1} A P = A^1 \quad \text{diagonale}$$

Corollario

$f: V_n \rightarrow V_n$ endomorfismo è diagonalizzabile $\Leftarrow M_R(f)$ lo è

R riferimento

Def

$f: V_n \rightarrow V_n$ endomorfismo

$\underline{v} \in V_n$ è **autovettore** di **autovalore** $\lambda \Leftrightarrow$

1. $\underline{v} \neq \underline{0}$
2. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

Prop

Se $\underline{v}$ è autovettore di autovalore λ_1 e $\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

DIM

$$f(\underline{v}) = \lambda_1 \underline{v} = \lambda_2 \underline{v} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Lezione del 26-05

Th

$f: V_n \to V_n$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ base formata da autovettori

DIM

$\exists R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n : $M_R(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

$f(\underline{e}_1) = a_1 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{e}_n = a_1 \underline{e}_1$

$\dots$

$f(\underline{e}_n) = 0 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + a_n \cdot \underline{e}_n = a_n \underline{e}_n$

$\Leftarrow$) $R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ autovettori : $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} : f(\underline{e}_1) = \lambda \underline{e}_1$

$\dots$

$\exists \lambda_n \in \mathbb{R} : f(\underline{e}_n) = \lambda \underline{e}_n$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$f: V_n \to V_n$ endomorfismo

$R = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ riferimento

$A = M_R(f) = (a_{ij})$

h è **autovalore** $\Leftrightarrow det(A - hI_n) = 0$

che altro non è l'eq caratteristica
(si ottiene sostituendo x ad h)

$\underline{v}$ è autovettore di f di autovalore $h \Leftrightarrow X = C_R(\underline{v})$ è soluzione non banale di

$(A - hI_n)X = 0$

DIM

h autovalore $\Leftrightarrow \exists \underline{v} \neq \underline{0} : f(\underline{v}) = h\underline{v}$

$z = C_{\mathcal{B}}(\underline{v})$

$\neq 0$

$Az = hz \Rightarrow Az - hI_n z = 0$

$(A - hI_n) z = 0$

$\Rightarrow (A - hI_n) X = 0$ ha ∞ sol

$\Rightarrow \det(A - hI_n) = 0$

Esempio $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (-y, x, z) \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_{not}$ $\quad M_{\mathcal{B}_{not}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p(f) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t)[t^2+1]$

$\Rightarrow \underline{t = 1}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = y$

Def

h autovalore di $f : V_n \to V_n$

$V(h) = \{ \underline{v} \in V_n : f(\underline{v}) = h\underline{v} \}$

Prop

i. $V(h) \leq V_n$ e $dim\, V(h) \geq 1$

$$h \text{ autovalore } \Rightarrow \exists \underline{v} \neq \underline{0} : \underline{v} \in V(h)[dim \geq 1]$$

$$\underline{v}, \underline{w} \in V(h) \Rightarrow f(\underline{v}) = h\underline{v} \text{ e } f(\underline{w}) = h\underline{w}$$

$$f(\underline{v}+\underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = h\underline{v} + h\underline{w}$$
$$= h(\underline{v}+\underline{w})$$

$$f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda h \underline{v} = h(\lambda \underline{v})$$

ii. $V(h) \simeq \{X : (A - hI_n)X = 0\} = \overline{S}$ (è isomorfo)

DIM

$$\underline{v} \in V(h) \rightarrow C_R(\underline{v}) \in \overline{S}$$

iii. $V(h) \cap V(k) = \{\underline{0}\}$ con $h \neq k$

sottospazi in somma diretta

$$\underline{v} \in V(h) \cap V(k) \Rightarrow f(v) = h(\underline{v}) \wedge f(\underline{v}) = k\,\underline{v}$$

Ma questo è di per sé impossibile in quanto ammette solo una soluzione. Pertanto

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

iv. $V(h_1), \ldots, V(h_t)$ con $h_i \neq h_j$ sono in somma diretta

Dim. $\underline{v} \in V(h_1) \cap \underbrace{\langle V(h_2), \ldots, V(h_t) \rangle}_{V(h_2) \oplus \ldots \oplus V(h_t)}$ induzione su t

$f(\underline{v}) = h_1 \underline{v}$

$\underline{v} = \underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_t$

$$f(\underline{v}) = f(\underline{v}_2) + \ldots + f(\underline{v}_t)$$
$$= h_2 \underline{v}_2 + \ldots + h_t \underline{v}_t$$
$$= h_1 \underline{v}_2 + \ldots + h_1 \underline{v}_t$$

$\Rightarrow h_1 = h_2, \ldots, h_1 = h_t$ ↯

v. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ autovettori di autovalori distinti sono indipendenti

DIM

$\underline{v}_i$ autovalore λ_i

$$\underline{v}_i \in \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \rangle \Rightarrow V(\lambda_1) \cap \langle V(\lambda_i \, i \neq 1) \rangle \neq \{\underline{0}\}$$

Corollario

Se l'eq caratteristica di f ha n radici reali e distinte $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile

DIM

n radici distinte $\Rightarrow \exists n$ autovalori $= \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (a 2 a 2 distinti)

autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

base

#

NB: Il ragionamento inverso non vale

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}_{p(x)} = 0$$

in C (campo numeri complessi) ha sempre al più n soluzioni

$$p(x) = (x-d_1)^{m_{d_1}} \cdot \dots \cdot (x-d_t)^{m_{d_t}}$$

molteplicità algebrica della radice d_6

$t \leq n$ e

$m_{d_1} + \dots + m_{d_t} = n$

Esempio $x^2+1 = (x-i)(x+i)$ $\begin{cases} x = i \\ x = -i \end{cases}$

$$(x+1)(x-1)(x-1) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\| $$

$$(x+1)(x-1)^2$$

radice 1 : $m_a(1) = 2$

" -1 : $m_a(-1) = 1$

Def

$dim\, V(h)$ è detta **molteplicità geometrica** di $h: m_g(h)$

$$h \text{ autovalore}: \quad m_a(h) = m_a(h) \quad \text{in} \quad det(A - t\, I_n) = 0$$

con $m_a(h)$ molteplicità algebrica

Prop

$$m_g(h) \leq m_a(h)$$

Prendiamo una base per $V(h) = \underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}$ con $t = m_g(h)$

Completiamo ad una base di $V_n: \underline{e_1}, \dots, \underline{e_t}, \underline{e_{t+1}}, \dots, \underline{e_n}$

$$R = (\quad \dots \quad)$$

$$\overset{A}{\overset{\shortparallel}{M_a}}(f) = \begin{pmatrix} h & & 0 & * & * & * \\ & h & & * & * & * \\ 0 & & h & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & & 0 & * & * \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I_n| = (h - \lambda)^t \det[\ ]$$

$$t \leq m_a(h)$$

Corollario

$$\text{Se} \quad m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$$

DIM

$$1 \leq m_g(h) \leq m_a(h) = 1 \quad \Rightarrow m_g(h) = 1$$

Lezione del 29-05

Teorema

$f: V_n \to V_n$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ polinomio caratteristico. Ha tutte le radici in $\Re$ e $\forall$ radice: $h \to m_a(h) = m_b(h)$

DIM $\Rightarrow$

$\exists\ R = (\underline{e_1}, \dots, \underline{e_n})$ autovettori

$$\langle e_{1}, \dots, e_{i_1} \rangle \leq V(\lambda_1)$$

$$\dots$$

$$\langle e_{i_{m-1}+1}, \dots, e_{i_m} \rangle \leq V(\lambda_m)$$

$$V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m) = V \Rightarrow$$ c'è uguaglianza

$$m_g(\lambda_1) = i_1, \dots, m_g(\lambda_m) = i_m - i_{m-1}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \ \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots \ \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & \\ & \ddots \ \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda_1 - x)^{i_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_m - x)^{i_m - i_{m-1}}$$

$$m_a(\lambda_1) = i_1, \dots, m_a(\lambda_m) = i_m - i_{m-1}$$

$\Leftarrow$) $p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_t)^{m_t}$ $\quad m_1 + \dots + m_t = n$

$$m_1 = m_g(\lambda_1), \dots, m_t = m_g(\lambda_t)$$

$$V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$$

$$\dim(\qquad\qquad) = \dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_t)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{V(\lambda_1)}_{\text{Base } B_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{V(\lambda_t)}_{\text{Base } B_t} = V$$

$\cup B_i = B$ base di V di autovettori.

Diagonalizzazione di una matrice

$A \in \Re_n$ $\qquad$ A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow F_A$ è diagonalizzabile

$F_A : X \in \Re^n \rightarrow AX \in \Re^n$

Autovettore per $A : Y \in \Re^n \neq 0 \quad AY = hY$

$$V(h) = \{X \in \Re^n : \ AX = hX\}$$

Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile $\Rightarrow F_A$ diagonalizzabile

$\Rightarrow \exists$ riferimento di autovettori per $F_A : \Re^n \rightarrow \Re^n$

$\mathcal{R} = (e_1, \dots, e_n) \qquad M_{\mathcal{R}}(F_A) = D \sim A = M_{\mathcal{R}_{not}}(F_A)$

$P^{-1} A P = D$ dove P passaggio da $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_{not}$

$P = \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \\ e_1 \quad e_n \end{array}$ prima colonna $e_1 = a_{11}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{n1}(0,0,\dots,1)$

$\dots$

$e_n = a_{12}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{n2}(0,\dots,0,1)$

Prodotti diretti esterni

V spazio vettoriale $\qquad V = H \oplus K \qquad H \cap K = \{1\}$ **e** $V = \langle H, K \rangle$

V, W spazi vettoriali

$$V \times K = \{(\underline{v}, \underline{w}) : \ \underline{v} \in V, \underline{w} \in W\}$$

Definisco le due operazioni:

$+ : (V \times W) \times (V \times W) \rightarrow V \times W \qquad * \Re \times (V \times W) \rightarrow V \times W$

$(\underline{v}, \underline{w}), (\underline{v}^1, \underline{w}^1) \rightarrow (\underline{v} + \underline{v}^1, \underline{w} + \underline{w}^1) \qquad (\lambda, (\underline{v}, \underline{w})) \rightarrow (\lambda \underline{v}, \lambda \underline{w})$

$(V \times W, +, *)$ è spazio vettoriale

elemento neutro di $V \times W$ è $(\underline{0}, \underline{0})$ $\qquad$ opposto di $(\underline{v}, \underline{w})$ è $(-\underline{v}, -\underline{w})$

$$H = \{(\underline{0}, \underline{w}) : \underline{w} \in W\} \qquad K = \{(\underline{v}, \underline{0}) : \underline{v} \in V\}$$

$$H \cap K = \{\underline{0}, \underline{0}\} \quad \underline{u} \in V \times W \quad \underline{u} = (\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{0}) + (\underline{0}, \underline{w}) \in \langle V, W \rangle$$

$V \times W = H \oplus W \qquad H \simeq V \qquad K \simeq W \qquad \underline{v} \in V \rightarrow (\underline{v}, \underline{0}) \in V \times W \quad \underline{w} \in W \rightarrow (\underline{0}, \underline{w}) \in V \times W$

$dim(V \times W) = dim\, V + dim\, W$

Lezione del 03-06

Spazi vettoriali dei vettori geometrici liberi dello spazio (piano)

$$\underline{a}=\overline{AB} \quad \underline{b}=\overline{CD}$$

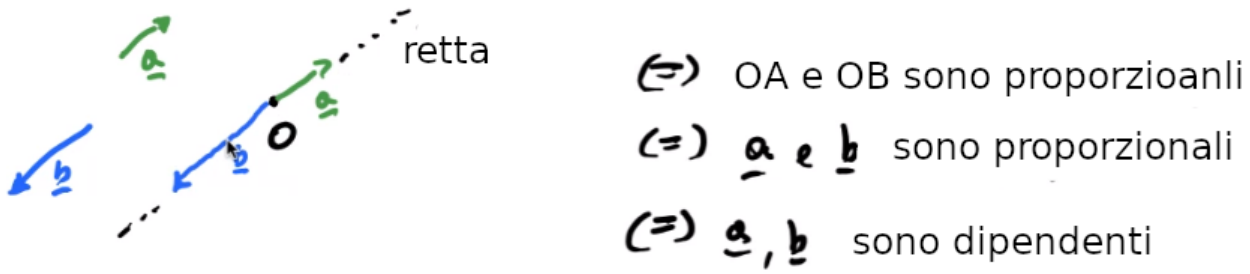
vettori geometrici non nulli e loro rappresentanti

$$\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow AB, CD \text{ sono segmenti paralleli}$$

(definizione ben posta)

Fissiamo O

$\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow OA^1 e OB^1$ sono paralleli $\Leftrightarrow OA^1 e\ OB^1$ giacciono sulla stessa retta



Per definizione il vettore nullo $(\overline{OO})$ è parallelo a ogni altro vettore

$$\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a}, \underline{b} \text{ sono dipendenti}$$

V spazio vettoriale $\qquad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V \qquad$ O punto

(NB: non li prendo nel piano perché ha dimensione 2 e quindi non sarebbero indipendenti)

$$\underline{a}=\overline{OA} \quad \underline{b}=\overline{OB} \quad \underline{c}=\overline{OC}$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ dipendenti $\qquad \Leftrightarrow \underline{a}=h\underline{b}+k\underline{c} \Leftrightarrow OA=hOB+kOC$

con $h, k \in \Re$

V spazio $\quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V \quad$ O punto

$\underline{a} = \overline{OA} \quad \underline{b} = \overline{OB} \quad \underline{c} = \overline{OC}$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ dipendenti $\iff \underline{a} = h\underline{b} + k\underline{c} \iff OA = hOB + kOC$

$h, k \in \mathbb{R}$

O,B,C allineati
∃ retta per cui
passa A

O,B,C non allineati
∃! piano per O,B,C

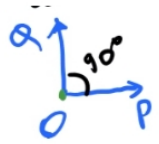
⇔ OA,OB,OC sono contenuti in uno stesso piano

Def

$\underline{a}, \underline{b} \in V$ non nulli $\qquad O$ punto

$$\underline{a} = \overline{OP} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \overline{OQ}$$

angolo $\underline{a} \wedge \underline{w}$ è la misura in radianti dell'angolo convesso (≤ 180°) formato da OP e OQ

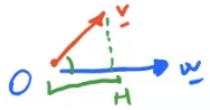


si verifica che la condizione è ben posta

Definizione $\quad \underline{v} \cdot \underline{w}$ prodotto scalare standard

$= \underline{0}$ se $\underline{v}$ o $\underline{w} = \underline{0}$

$= |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v} \wedge \underline{w}) = |\underline{w}| \cdot |OH|$



Proprietà

1. **simmetria** → dipende dal fatto che $\underline{v}\hat{}\,\underline{w}=\underline{w}\hat{}\,\underline{v}$

2. **bilinearità** $(h\underline{u}+k\,\underline{v})*w=h(\underline{u}*\underline{w})+k\,(\underline{v}*\underline{w})$

(dimostrazione geometrica)

3. **definito positivo** $\forall\,\underline{v}\in V \quad \underline{v}*\underline{v}\geq 0$

$|v|^2\cos\underline{v}\hat{}\,\underline{v}=|v|^2$

$\underline{v}*\underline{v}=0 \Leftrightarrow \underline{v}=o$

$\Leftarrow$ ovvia

$\Rightarrow$

$|\underline{v}|^2=0 \Leftrightarrow \underline{v}=\underline{0}$

$$\underline{v}*\underline{v}=|\underline{v}|^2 \Rightarrow |\underline{v}|=\sqrt{\underline{v}*\underline{v}}$$

Def

Vettore di lunghezza unitaria: **versore**

Versore di una retta orientata : **versore // e concorde alla retta**

Def

$$\underline{a}=\overline{AB} \quad \underline{b}=\overline{CD}\neq\emptyset \quad \text{in V}$$

$$\underline{a}\perp\underline{b} \Leftrightarrow CD\perp AB$$

definizione ben posta

$$\underline{a}\perp\underline{b}\Leftrightarrow OA\perp OB\Leftrightarrow \theta=\underline{a}\hat{}\,\underline{b}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \underline{a}*\underline{b}=0$$

$\underline{0}$ si pone ortogonale per definizione ad ogni vettore

$$\underline{a}*\underline{b}=0 \Leftrightarrow \underline{a}\perp\underline{b} \quad \forall\,\underline{a},\underline{b}\in V$$

Definizione V_π $\dim V_\pi = 2$ e $\dim V = 3$

Rif. ortonormale: $R_\pi = (\underline{v}, \underline{w})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$R = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

e $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 1$

Proposizione Se $\underline{a}, \underline{b} \in V_\pi$ e $\underline{a} = a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}$

$\underline{b} = b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w}$

$$\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

Dim.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}) \cdot (b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w}) =$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{v})}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{w})}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{v})}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{w})}_{1}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Corollario $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \sqrt{a^2+b^2}$ / $|\underline{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) = (a,b)$ / $C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) = (a,b,c)$

Def. $\mathcal{R} = (O, (\underline{e}_x, \underline{e}_y))$ riferimento cartesiano ortogonale monometrico

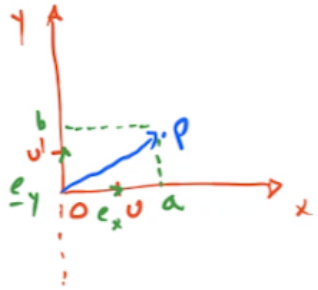
origine — riferimento ortonormale del piano

$\overline{OU} = \underline{e}_x$ e $\overline{OU'} = \underline{e}_y$ $\quad U, U'$ punti unitari

le rette per OU e OU' sono dette assi coordinati

asse x — asse y

orientate concordamente ai versori



$\overline{OP} = a\,\overline{OU} + b\,\overline{OU'}$

ordinata — ascissa

$P(a,b)$

$O(0,0) \quad U(1,0) \quad U'(0,1)$

$\overline{OO} = 0\cdot\overline{OU} + 0\cdot\overline{OU'}$

Proposizione $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ componenti di $\overline{AB}$: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$

Dimostrazione $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$\Downarrow$ isomorfismo coordinato

$(x,y) = (x_2,y_2) - (x_1,y_1)$

$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$\overline{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1)$ non è ambiguo $\overline{OP}(a,b) \equiv P(a,b)$

$\underline{v}(v_x, v_y)$ e $\underline{w}(w_x, w_y) \neq \underline{0}$

$$\cos \underline{v}\wedge\underline{w} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}\cdot\sqrt{w_x^2+w_y^2}}$$

$$\cos \underline{v}\wedge\underline{e}_x = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \qquad \cos \underline{v}\wedge\underline{e}_y = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

Lezione del 05-06

Cambiamenti di riferimento

$R=(0,(\underline{e}_x,\underline{e}_y))$ $\qquad$ $R^1=(0^1,(\underline{e}_x^1,\underline{e}_y^1))$

P : coordinate in R e R^1

	R	R'
P	(x,y)	(x',y')
O	$(0,0)$	(c_1,c_2)
$\overline{OP}$	(x,y)	$(x'-c_1,y'-c_2)$

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ matrice di post.

da $(\underline{e}_x,\underline{e}_y) \to (\underline{e}'_x,\underline{e}'_y)$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-c_1 \\ y'-c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'-c_1 = b_{11}x + b_{12}y \\ y'-c_2 = b_{21}x + b_{22}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + c_1 \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + c_2 \end{cases}$$

formule di passaggio da R a R'

Def

Prodotto vettoriale

V $\qquad$ $R=(0,R_v=(\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z))$ riferimento cartesiano ortogonale monometrico

$$\underline{v}(v_x,v_y,v_z) = v_x\underline{e}_x + v_y\underline{e}_y + v_z\underline{e}_z \qquad \underline{w}(w_x,w_y,w_z)$$

$$\underline{v}\times\underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - w_y v_z)\cdot\underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\,\underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y)\cdot\underline{e}_z$$

Esempio $\underline{v}(1,0,1)$ $\underline{w}(2,2,0)$

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{v} \times \underline{w} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$(-2, 2, 2)$$

Proprietà

(i) $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0$:

$$\left[(v_y w_z - w_y v_z) \cdot \underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\, \underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y) \cdot \underline{e}_z \right] \cdot \underline{v} =$$

$$= \cancel{v_y w_z v_x} - \cancel{w_y v_z v_x} - \cancel{v_x w_z v_y} + \cancel{v_z w_x v_y} + \cancel{v_x w_y v_z} - \cancel{w_x v_y v_z}$$

(ii) $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0$: analoga

(iii) $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0} \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti $\iff \underline{v} \parallel \underline{w}$

$\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ rango 1 $\Rightarrow$ $\underline{v}$ e $\underline{w}$ dip.

(il prodotto vettoriale è antisimmetrico)

(iv) $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$

Dim. $\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ det cambia segno

(v) $\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z$ $\quad \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x$ $\quad \underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y$

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$(0,1,0)x(1,0,0)=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,-1)$$

Def

X insieme di punti del piano è rappresentabile $\Leftrightarrow \exists$ sistema di equazioni S_T in due incognite (ed entrambi parametri T) tali che:

$$P \in X \Leftrightarrow \exists \overline{T} : x \in \overline{S_T}$$

Rappresentazione di un piano (parametrica)

Sia π un piano dello spazio. Allora π è rappresentato da un sistema monometrico e coefficienti reali del tipo:

$$\begin{cases} x = x_0 + es + e^{1t} \\ y = y_0 + ms + m^{1t} \\ z = z_0 + ns + n^1 t \end{cases}$$

con (l,m,n) ed (l^1,m^1,n^1) indipendenti ed s,t parametri reali

DIM

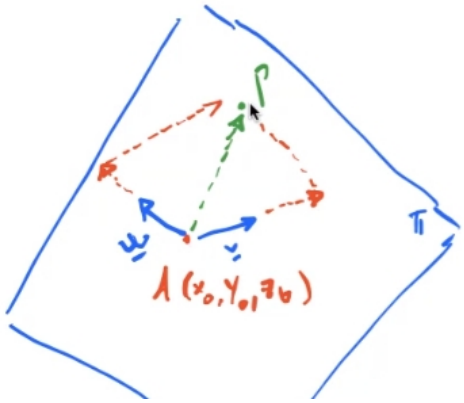
$A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ $\quad$ $\underline{v}(l,m,n)$ $\quad$ $\underline{v}^1(l^1,m^1,n^1)$ due vettori liberi indipendenti $\parallel \pi$

$P \in \pi \Leftrightarrow \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}^1$ applicati in A sono complanari $\Leftrightarrow \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}^1$ dipendenti $\Leftrightarrow \overline{AP} \in \langle \underline{v}, \underline{v}^1 \rangle$

(con $\underline{v}, \underline{v}^1$ indipendenti)

C_R $\quad (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \in \langle (l,m,n), (l',m',n') \rangle$

$\Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = sl + tl' \\ y - y_0 = sm + tm' \\ z - z_0 = sm + tm' \end{cases}$



Ogni sistema del tipo $\begin{cases} x = x_0 + sl + tl' \\ y = y_0 + sm + tm' \\ z = z_0 + sm + tm' \end{cases}$

rappresenta un piano.

Proposizione

Il piano π è rappresentato da un'equazione del tipo:

$$ax+by+cz+d=0$$

con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

(rappresentazione cartesiano o ordinaria)

$$\underline{w}(a,b,c)\perp\pi$$

Dim. $P\in\pi \iff \underline{v},\underline{v}_2,\overline{AP}$ dip. $\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$

$$\underbrace{(mn'-m'n)}_{a}(x-x_0)+\underbrace{(l'n-ln')}_{b}(y-y_0)+\underbrace{(lm'-l'm)}_{c}(z-z_0)=0$$

$d=-ax_0-by_0-cz_0$ $\quad ax+by+cz+d=0$

$(l,m,n)\times(l',m',n')=(a,b,c)\neq\underline{0}$ (non paralleli)

$\underline{w}(a,b,c)\perp(l,m,n)$ $\quad \underline{w}\perp(l',m',n') \Rightarrow \underline{w}\perp\pi$

Prop

Ogni equazione $ax+by+cz+d=0$ con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ rappresenta un piano $\pi\perp(a,b,c)$

DIM

Mi trovo due vettori ortogonali a (a,b,c) indipendenti

$$\underline{v}(a,b,c)=0 \qquad S: av_x+bv_y+cv_z=0$$

Supponiamo che (senza ledere la generalità) $a\neq0$

$$v_x=-\frac{1}{a}(bv_y+cv_z) \qquad \overline{S}=\{(-\frac{1}{a}(bv_y+cv_z),v_y,v_z):v_y,v_z\in\Re\}$$

$dim\,\overline{S}=2$

(ci posso trovare 2 vettori indipendenti)

Prendo π' passante per questi due vettori e ne lo rappresento come sopra $\Rightarrow \pi' \perp (a,b,c)$

$A(x_0,y_0,z_0) \in \pi$

$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$(a',b',c') \perp \pi'$

$\Rightarrow (a',b',c') // (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} kax + kby + kcz + d' = 0 \quad k \neq 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + \frac{d'}{k} = 0$

Poiché entrambi passano per $A(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow d = \frac{d'}{k} \Rightarrow d' = dk$

Abbiamo dimostrato anche che 2 equazioni del tipo $ax+by+cz+d=0$ che rappresentano lo stesso piano sono proporzionali $(k \neq 0)$ (e viceversa)

Esempio 1) Come si rappresenta tutto lo spazio?

$0 = 0$

2) Come si rappresenta il $\emptyset$?

$0 \neq 0$

3) π per $A(4,3,-2)$ e $// \underline{v}(1,-1,0)$

$\underline{v}'(2,1,3)$

Lezione del 09-06

Rappresentazione della retta nel piano
(parametrica)

r retta si rappresenta mediante un sistema parametrico del tipo:

$$\begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \end{cases} \qquad (l,m) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad t \quad \text{parametro}$$

(l,m) vettore direzione

DIM

$A(x_0, y_0) \in r$ e $\underline{v}(l,m) \| r$ $\qquad (l,m) \neq (0,0)$

con x_0, y_0 coordinate e d (l,m) componenti

$P \in r \Leftrightarrow \overline{AP} \| \underline{v} \Leftrightarrow \overline{AP}$ e $\underline{v}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0), (l,m)$ dipendenti

$$\Leftrightarrow \exists t \in \Re : \begin{cases} x - x_0 = t l \\ y - y_0 = t m \end{cases}$$

Rappresentazione ordinaria

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

$(m, -l) = (a, b)$ $\qquad \Leftrightarrow m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$ $\qquad (a,b) \neq (0,0)$

$(-b, a) // \underline{v}$ $\qquad ax + by + c = 0$

Viceversa $ax + by + c = 0$ $(a,b) \neq (0,0)$ rappresenta una retta.

r retta $\| (-b, a)$: $a^1 x + b^1 y + c^1 = 0$

$A(x_0, y_0)$ soluzione di $ax + by + c = 0$

$$\begin{matrix} (a^1, -b^1 \| (a, -b)) \\ x_0, y_0 \, sol \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^1 = ka \\ b^1 = kb \\ c^1 = kc \end{matrix}$$

Viceversa:

Ogni sistema $\begin{matrix} x=x_0+sl \\ y=y_0+sm \end{matrix}$ rappresenta la retta che passa per $(x_0, y_0) \| \underline{v}(l,m)$

Osservazione

Due equazioni ordinari rappresentano la stessa retta se sono proporzionali $(k \neq 0)$

Def

$\underline{v}(l,m) \| v$ (l,m) : numeri direttori (parametri)

(sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo)

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2) \in \pi$ (piano)

Parametrica

$\overline{AB} \| r$ per A e B

$$v = \begin{matrix} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{matrix}$$

Cartesiana

$$\left| \begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{matrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \quad (x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1)$$

($ab=cd$)

Se $y_2-y_1 \neq 0 \neq x_2-x_1 \Leftrightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_0}{y_2-y_1}$ rapporti uguali

Allineati;

orizzontalmente ($x_1 = x_2$ sono sulla stessa retta $\parallel$ asse x)

verticalmente ($y_1 = y_2$ sono sulla stessa retta $\parallel$ asse y)

$$ax + by + c = 0$$

retta r

Passa per $(0,0) \Leftrightarrow c = 0$

Se $b \neq 0 \Rightarrow y = \frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$

$$y = mx + p$$

(formali esplicita)

con mx coefficiente angolare di r

Coseni direttori

Retta r orientata

$\underline{v} \parallel r$

$$\cos(\underline{e_x} \hat{} \underline{v}) \downarrow \quad \pm \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad \text{e} \quad \cos(\underline{e_y} \hat{} \underline{v}) \downarrow \quad \pm \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$v : ax + by + c = 0$

$(-b, a)$

$\pm$ a seconda che $(-b, a)$ sia concorde o discorse

Due rette (r, r^1) sono parallele $\Leftrightarrow r \cap r^1 = \emptyset$ o $r = r^1$

che sono rispettivamente **propriamente** e impropriamente

$\underline{v}(l, m) \parallel r$
$\underline{v}(l^1, m^1) \parallel r^1$

$r \parallel r^1 \Leftrightarrow (l, m), (l^1, m^1)$ sono proporzionale

$$r : ax + by + c = 0 \qquad (-b, a) \parallel r$$
$$r^1 = a^{1x} + b^{1y} + c^1 = 0 \qquad (-b^1, a^1) \parallel r^1$$

$r \parallel r^1 \Leftrightarrow (-b, a)$ proporzionale a $(-b^1, a^1) \Leftrightarrow (a, b)$ proporzionale a (a^1, b^1)

Se (a,b,c) proporzionale a $(a^1,b^1,c^1) \Rightarrow \begin{matrix} ax+by+c=0 \\ a^{1x}+b^{1y}+c^1=0 \end{matrix}$

definiscono la stessa retta

Se (a,b,c) non proporzionale a $(a^1,b^1,c^1) \Rightarrow$ propriamente parallele

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

se $(a,b) \sim (a',b')$, $(a,b,c) \not\sim (a',b',c')$ $\Rightarrow \cap = \emptyset \Rightarrow$ non compatibile

se $(a,b) \sim (a',b')$, $(a,b,c) \sim (a',b',c')$ $\Rightarrow$ sist. comp. ∞ soluzioni

se $(a,b) \not\sim (a',b')$ $\Rightarrow$ sistema rango massimo $\Rightarrow \exists!$ soluzione

Distanza tra insieme

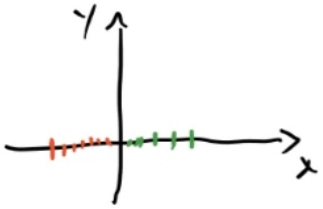
$A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2) \in \pi$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=|\overline{AB}|$$

$S,T \subseteq \pi$ (piano) = $dist(S,T)=inf\{d(P,a), P \in S, Q \in T\} \geq 0$

(sottoinsiemi)

Es.



$X = \{(-\frac{1}{n},0) / n \in \mathbb{N}\}$

$Y = \{(\frac{1}{n},0) / n \in \mathbb{N}\}$

$dist(X,Y)=0$

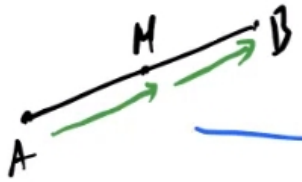
Es. $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow dist(X,Y)=0$

$\exists P \in X \cap Y \quad d(P,P)=0$

Punto medio di un segmento

$A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2) \in \pi$

$M(x_M, y_M)$ punto medio (stessa distanza)



$\longrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} \overset{CA}{\Rightarrow} (x_M - x_1, y_M - y_1)$

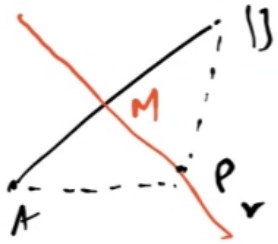
$\parallel$

$(x_2 - x_M, y_2 - y_M)$

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$$
$$y_M = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

Asse del segmento

$P(x, y)$



$P \in r \iff d(A, P) = d(B, P)$

$\iff (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$

$\iff 2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$

$(y_1 - y_2, x_2 - x_1) \parallel r$ $\qquad$ $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$-b \quad a$ $\qquad$ $a \quad b$

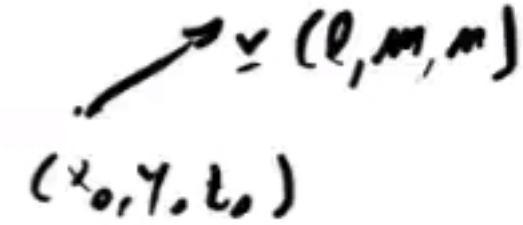
$-ab + ab = 0 \Rightarrow r \perp \overline{AB}$

Rappresentazione ordinaria retta nella spazio

$$ax+by+cz+d=0$$
$$a^{1x}+b^{1y}+c^{1z}+d=0$$

$$(a,b,c) \quad / \quad \sim(a^1,b^1,c^1)$$

matrice incompleta rango 2

∞^1 soluzioni omogeneo associato

$$(x_0,y_0,z_0)t\langle(l,m,n)\rangle$$