$\vec{\mathcal{E}}$ sp. vett. euclideo, (opp. sp. vett.) $\qquad \mathcal{E} \neq \phi \qquad \pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, $(P, Q) \rightsquigarrow \overrightarrow{PQ} \qquad Q = P + \overrightarrow{PQ}$

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (opp. affine) se:

(1) $\forall P \in \mathcal{E}, \forall a \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! X \in \mathcal{E} : \quad \overrightarrow{PX} = a \quad (X = P + a)$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

caso f.g.
$\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}} = n$

Una coppia $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ costituita da un punto $O \in \mathcal{E}$ e da una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\vec{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{B}$ qualsiasi se $\vec{\mathcal{E}}$ non è dotato di struttura euclidea) si dice riferimento cartesiano.

Le coordinate di un punto $P \in \mathcal{E}$ in $\mathcal{R}$ sono le componenti di $\overrightarrow{OP}$ in $\mathcal{B}$:

$$P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})$$

Invece di scrivere $\overrightarrow{OP}$ a volte si scrive $P - O$.

<u>Proposizione</u> $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\dim \mathcal{E} = n$, $\quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, $\quad P, Q \in \mathcal{E}$

$P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n)$, $\quad Q \equiv_{\mathcal{R}} (y_1, \dots, y_n)$. Allora:

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, x_n - y_n).$$

$-u = (-1)u$

<u>DIM</u> $\quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = \phi_{\mathcal{B}}(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = -\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) + \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ}). \ \square$$

<u>Esempio</u> $\quad \vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^2 \qquad \mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \qquad \pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \longrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

$\mathcal{R} = (O = (1,2), \mathcal{B} = ((1,1), (0,1)))$ in questo caso ho preso $\mathcal{B}$ non ortonormale

Quali sono le coordinate di $P = (3, -1)$ in $\mathcal{R}$?

$\overrightarrow{OP} = \pi((1,2), (3,-1)) = (3,-1) - (1,2) = (2,-3)$

$\phi_{\mathcal{B}}((2,-3)) = (2,-5) \qquad P \equiv_{\mathcal{R}} (2, -5)$

$(2,-3) = 2(1,1) + (-5)(0,1)$

CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) \quad \dim \mathcal{E} = n \qquad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)) \qquad \mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n))$

$P \in \mathcal{E}, \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n), \quad P \equiv_{\mathcal{R}'} (x'_1, \dots, x'_n)$

che relazione c'è tra $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$?

$(x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) \qquad (x'_1, \dots, x'_n) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'P})$

Sia $E = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_{\vec{\mathcal{E}}})$

$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} \qquad \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'P}) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'O}) + \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{OP})$

Sia $E = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_{\vec{\mathcal{E}}})$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} \qquad \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'P}) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'O}) + \underbrace{\phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{OP})}$$

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{OP}) = \underbrace{E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \underset{\text{coordinate di } O \text{ in } \mathcal{R}'}{\phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'O})} + \underbrace{E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

rappresentazione di un cambiamento di riferimento.

Esempio sia $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ con $\dim \mathcal{E} = 2$, $K = \mathbb{R}$

$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} \doteq (e_1, e_2))$ $\qquad \mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2))$ con $O' \equiv_{\mathcal{R}} (0,1)$

$$E^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_{\vec{\mathcal{E}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |E^{-1}| = -2$$

$$E = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2) \qquad P \equiv_{\mathcal{R}'} (x_1', x_2')$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'O}) + E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'}$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OO'}) = (0,1) - (0,0) = (0,1) \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{O'O}) = (0,-1)$$

$$O \equiv_{\mathcal{R}} \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OO}) = (0,0)$$

$$O \equiv_{\mathcal{R}'} \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'O}) = E\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (risp. AFFINI)

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) \qquad \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$

$\mathcal{H}$ si dice sottospazio euclideo (risp. affine) di $\mathcal{E}$ se:

- $\pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{H}\} \overset{\text{def.}}{=} \vec{\mathcal{H}}$ è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$

  $\pi_|: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \vec{\mathcal{H}}$

- $\forall A \in \mathcal{H}$, $\forall a \in \vec{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$ deve appartenere a $\mathcal{H}$.

Oss. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ è un sottosp. euclideo (risp. affine) di $\mathcal{E}$ allora $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_|)$ è uno spazio euclideo (risp. affine).

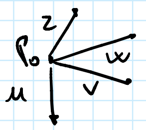
$(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

$\vec{\mathcal{H}}$ si dice giacitura di $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = \dim \vec{\mathcal{H}}$.

$\overrightarrow{(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)}$ $P_0 \in \mathcal{E}$, U sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$

$$(P_0, U) = \{ Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U \}$$
$$\overset{\shortparallel}{P_0 + U}$$

varietà lineare passante per P_0 e parallela a U

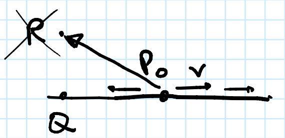


$u, v, w, z, \dots \in U$

Proposizione: $\mathcal{H} = (P_0, U)$ è un sottosp. euclideo (opp. affine) con $U = \vec{\mathcal{H}}$ } DIM FACOLTATIVA

Proposizione se $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$ è un sottosp. euclideo di $\mathcal{E}$, allora

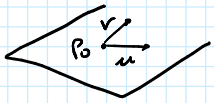
$\forall P_0 \in \mathcal{H}$, $(P_0, \vec{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.



$\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(v)$

r retta

$\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(u, v)$



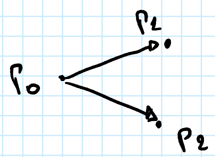
Osservazione: l'intersezione di due sottosp. euclidei è ancora un sottosp. euclideo

$\mathcal{H}$ $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$

$\mathcal{H}'$ $(\vec{\mathcal{H}}', \mathcal{H}', \pi_1)$

$\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ $\overrightarrow{\mathcal{H} \cap \mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}} \cap \vec{\mathcal{H}}'$

Def. $P_0, P_1, \dots, P_h \in \mathcal{E}$ si dicono affinemente indipendenti se $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ sono lin. indip. (si può dimostrare che l'ordine dei punti non ha importanza)



Proposizione. Sia $\mathcal{H}$ un sottosp. euclideo con $\dim \mathcal{H} = h$.
$h+1$ è il massimo numero di punti affinemente indipendenti che trovano in $\mathcal{H}$.

DIM $P_0 \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}}) = \{ Q : \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{\mathcal{H}} \}$

Sia $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{u_1, \dots, u_h\}$ base di $\vec{\mathcal{H}}$

$P_0, P_0 + u_1, \dots, P_0 + u_h$ sono affinemente indip.

Proposizione. Dati $P_0, \dots, P_h \in \mathcal{E}$ affinemente indip., esiste un unico sottosp. affine $\mathcal{H}$ di $\dim \mathcal{H} = h$ che li contiene.

DIM: $S = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}\}$ è lin indip.

Sia $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(S)$, allora $\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}}) = (P_1, \vec{\mathcal{H}}) = \dots = (P_h, \vec{\mathcal{H}})$.

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\dim \mathcal{E} = n$ $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n))$ rif. cartesiano

$(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_1)$ $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$, $\dim \mathcal{H} = h$

Vogliamo trovare una rappresentazione di $\mathcal{H}$ in $\mathcal{R}$, ovvero una relazione numerica che sia soddisfatta dalle coordinate in $\mathcal{R}$ di tutti e soli i punti di $\mathcal{H}$

$\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}}) = \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{\mathcal{H}}\}$

$\phi_{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{H}}) \subseteq K^n$ Sappiamo che $\phi_{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{H}})$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\Sigma_0 : AX = 0$ in n incognite.

$P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (a_1, \dots, a_n)$ $P_0(a_1, \dots, a_n)$

$Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n)$ $Q \in \mathcal{E}$

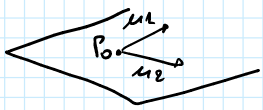
$$Q \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{\mathcal{H}} \iff \underset{\substack{\parallel \\ (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)}}{\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{P_0Q})} \in \phi_{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{H}}) = S_0 : AX = 0 \iff$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0 \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ \underline{b}}} \qquad AX = \underline{b}$$

<u>Esempio.</u> $\dim \mathcal{E} = 3$ $K = \mathbb{R}$ $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$P_0 \in \mathcal{H}$ $P_0(\underset{a_1}{3}, \underset{a_2}{-2}, \underset{a_3}{1})$ $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(u_1(1,2,0), u_2(2,-1,1))$



$$Q(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{\mathcal{H}} \iff (x_1 - 3, x_2 + 2, x_3 - 1) \in \phi_{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{H}}) =$$
$$= \mathcal{L}((1,2,0),(2,-1,1))$$

$$\iff \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 2 & -1 & x_2 + 2 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 0 & -3 & x_2 + 2 - 2x_1 + 6 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}_3 \to \underline{a}_3 + \tfrac{1}{5}\underline{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 0 & -5 & x_2 - 2x_1 + 8 \\ 0 & 0 & x_3 - 1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}: \ -\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + x_3 + \tfrac{3}{5} = 0$$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$\mathcal{H} \ni P_0(0,1,0)$ $\quad \vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(u(-3,5,2))$

$Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H} \iff (x_1, x_2 - 1, x_3) \in \mathcal{L}((-3,5,2)) \iff$

$\iff \text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 5 & 2 \\ x_1 & x_2 - 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1$ usiamo il Teor. degli orlati.

$\iff \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ x_1 & x_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\iff \mathcal{H}: \begin{cases} -3x_2 + 6 - 5x_1 = 0 \\ -3x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \vec{\mathcal{H}}: \begin{cases} -3x_2 - 5x_1 = 0 \\ -3x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$

Con il ragionamento precedente abbiamo dimostrato il seguente risultato:

- Dato un sottosp. euclideo (o affine) $\mathcal{H}$, $\dim \mathcal{H} = h$, di uno spazio euclideo $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} = n$, e fissato un rif. cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathcal{E}$, l'insieme delle coordinate in $\mathcal{R}$ dei punti di $\mathcal{H}$ coincide con l'insieme delle soluzioni di un sist. lin. $\Sigma: AX = \underline{b}$ con $\text{rango}(A) = n - h$.
  Inoltre: $\vec{\mathcal{H}}: AX = 0$.

Vale anche il viceversa.

$\Sigma: AX = 0$ in n variabili, $\text{rango}\, A = n - h$. $\qquad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

Considero $S_0: AX = 0$, $\qquad \vec{\mathcal{H}} = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(S_0)$

$$P_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n): \quad A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \underline{b}.$$

$$\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}}): \quad AX = \underline{b}.$$