

Lezione 11

martedì 20 aprile 2021 08:25

$(K, +, \cdot)$ campo, $m \in \mathbb{N}$

$$\Sigma: \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^m x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^m x_m = b_m \end{cases}$$

m equazioni o coefficienti in K
in m incognite (o variabili)

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^m & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^m & b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti
prima matrice o matrice incompleta

matrice completa o
seconda matrice

$$AX = \underline{b} \quad \text{forma matriciale del sistema lineare } \Sigma$$

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2 equazioni in 3 incognite
 $K = \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad AX = \underline{b}$$

Def. Una soluzione di un sistema lineare $\Sigma: AX = \underline{b}$ di m equazioni in m incognite sul campo K è una m -upla di scalari $(y_1, \dots, y_m) \in K^m$ tali che sostituiti ordinatamente alle m variabili soddisfano le equazioni del sistema, ovvero:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad a_{1i}^1 y_1 + a_{1i}^2 y_2 + \dots + a_{1i}^m y_m = b_i.$$

$$\text{opp. } A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Esempio. Tornando all'esempio di prima:

$$\Sigma: \begin{cases} 2(3x_1 + 2x_3) - x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow 6x_2 + 4x_3 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_4 = 3x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2 = 1 - 8x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3 \\ x_4 = 3(\frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3)x_3 - 8x_3 = \frac{3}{5} - \frac{24}{5}x_3 - 8x_3 = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x_3, \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{è l'insieme delle soluzioni di } \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$$

Def. Sia $\Sigma: AX = \underline{b}$ un sistema lineare.

Σ si dice incompatibile o impossibile se non ammette soluzioni;
ormai il suo insieme \mathcal{S} delle soluzioni è vuoto.

Altrimenti Σ si dice compatibile

$$\text{Esempio: } \Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{incompatibile}$$

Se $\Sigma: Ax = \underline{b}$ è un insieme di equazioni lineari; si provi a scrivere $\Sigma = (A, \underline{b})$. Il insieme $\Sigma_0: Ax = 0$ si dice insieme omogeneo associato a Σ . Se \mathcal{S}_0 è l'insieme delle soluzioni di Σ_0 , nile $(0, \dots, 0) \in \mathcal{S}_0$. Quindi un sistema omogeneo è sempre compatibile. Inoltre:

Proposizione: $\Sigma_0: Ax = 0, \quad \mathcal{S}_0 \subseteq K^m$

\mathcal{S}_0 è un sottospazio vettoriale di K^m

DIM $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$ perché $\underline{0} \in \mathcal{S}_0$

$$(z_1, \dots, z_m), (z'_1, \dots, z'_m) \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \underline{0} \quad e \quad A \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow A \left[\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix} \right] = A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_0$$

associatività

$$(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\lambda \in K$

$$A \left(\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \lambda \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \lambda (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{S}_0 \quad \square$$

ESERCIZIO

Teorema di Rouché-Capelli: $\Sigma: Ax = \underline{b}$ $C = (A : \underline{b})$

Σ è compatibile $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(C)$

DIM.

$$\Sigma: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{pro-} \\ \text{essen} \\ \text{nello} \\ \text{anche} \\ \text{nella} \\ \text{seguente} \\ \text{modo:} \end{matrix}$$

$$\Sigma: x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{forma} \\ \text{vettoriale} \\ \text{di} \\ \Sigma \end{matrix}$$

Da questa forma di Σ si evince subito che:

Σ è compatibile $\Rightarrow \underline{b} \in \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$

$$\Leftrightarrow \exists (y_1, \dots, y_m) \in K^m: y_1 \cdot a_{11} + y_2 \cdot a_{12} + \dots + y_m \cdot a_{1m} = \underline{b}$$

Dimostriamo il teorema scrivendo di questa osservazione:

" \Rightarrow " per ipotesi $\underline{b} \in \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$ Th: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(C)$

$$\begin{matrix} \Downarrow \\ \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \underline{b}) \subseteq \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \\ \subseteq \text{e-omia} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \underline{b}) = \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(\text{d. } \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \underline{b})) = \dim(\text{d. } \mathcal{L}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rang}(A)$$

$$\Rightarrow \dim (\text{range } C) = \dim (\text{range } A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{range}(A)$$

" \Leftarrow " per ipotesi $\text{range}(A) = \text{range}(C)$ th: $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$

$$\dim \mathcal{L}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m) = \dim \mathcal{L}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m, \underline{b}) \Rightarrow \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m) = \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m, \underline{b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m, \underline{b}) = \mathcal{L}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m).$$

□

Esempio. Tornando all'esempio precedente:

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{range}(A) = 1 \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{range}(C) = 2$$

$$\underline{a}^T \rightarrow \underline{a}^T - 2\underline{a}^T \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Teorema di Cramer

$$\Sigma: AX = \underline{b}, \quad A \in M_n(K), \quad A \text{ invertibile} \quad (\text{esiste } A^{-1})$$

Allora, $|\mathcal{S}| = 1$.

$$\underline{\text{DIM}} \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}\underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(A^{-1}A)}_{= I_m} X = A^{-1}\underline{b} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}\underline{b}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{S} = \{A^{-1}\underline{b}\} \quad \square$$

Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare.

$$\Sigma: AX = \underline{b} \quad \mathcal{S} \text{ unione delle soluzioni di } \Sigma$$

$$\Sigma_0: AX = 0 \quad \mathcal{S}_0 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \Sigma_0$$

Presa una soluzione di Σ , $(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S}$, si ha

$$\mathcal{S} = \{(y_1, \dots, y_m) + (z_1, \dots, z_m) \mid (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{S}_0\}.$$

$$\underline{\text{DIM}} \quad "\subseteq" \quad \text{sia } (y'_1, \dots, y'_m) \in \mathcal{S} \Rightarrow A \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Ovviamente $A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{b}$ per ipotesi.

$$A \left(\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{b} - \underline{b} = 0 \Rightarrow$$

distributività

$$\Rightarrow (y'_1, \dots, y'_m) - (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S}_0$$

$$\text{Allora posto } (z_1, \dots, z_m) = (y'_1, \dots, y'_m) - (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S}_0,$$

$$\text{abbiamo } (y_1 \rightarrow y_m) = (y_1, \dots, y_m) + (z_1 \rightarrow z_m)$$

" \exists " Consideriamo $(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{S}$

$$A \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_m \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_m \end{pmatrix} = b + 0 = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1, \dots, y_m) + (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{S} \quad \square$$

• Metodo di risoluzione di un sistema lineare detto di Gauß-Jordan

Def. $\Sigma: AX = b$, $\Sigma': A'X = b'$ sistema lineare in m incognite su \mathcal{S} soluz. d' Σ \mathcal{S}' soluz. d' Σ' in campo

Σ e Σ' sono equivalenti $\Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'$

Esempio

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \Sigma': \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti

Teorema

$\Sigma: AX = b$ sistema lineare di m equazioni in n incognite su K .
 $C = (A : b)$

Se $\Sigma': A'X = b'$ è un sistema lineare la cui matrice completa C' è ottenuta da C mediante un numero finito di operazioni elementari (di riga) allora Σ e Σ' sono equivalenti.

DIM

$$\Sigma: \begin{cases} a_{11}^1 x_1 + a_{12}^1 x_2 + \dots + a_{1n}^1 x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}^1 x_1 + a_{22}^1 x_2 + \dots + a_{2n}^1 x_n - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}^1 x_1 + a_{m2}^1 x_2 + \dots + a_{mn}^1 x_n - b_m = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} e_1(x) = 0 \\ e_2(x) = 0 \\ \vdots \\ e_m(x) = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \{(y_1, \dots, y_m) \in K^m \mid A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_m \end{pmatrix} = b\} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^1 & \dots & a_{mn}^1 & b_m \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad i, h \in \{1, \dots, m\} \quad \underline{a^i} \leftrightarrow \underline{a^h}$$

Σ' contiene le stesse equazioni di Σ , in ordine diverso:

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}$$

$$(II) \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad \underline{a^i} \rightarrow \alpha \underline{a^i} \quad e_i(x) \rightarrow \alpha e_i(x)$$

$$\alpha \in K - \{0\}$$

$$\text{da } a_{11}^i x_1 + a_{12}^i x_2 + \dots + a_{1n}^i x_n - b_i = 0 \quad \text{si ottiene}$$

$$\alpha(a_{11}^i x_1 + a_{12}^i x_2 + \dots + a_{1n}^i x_n - b_i) = 0 \quad \text{ormai}$$

$$\alpha(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m - b) = 0 \quad \text{dove}$$

$$\alpha a_1 x_1 + \alpha a_2 x_2 + \dots + \alpha a_m x_m - \alpha b = 0$$

$$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S} \Rightarrow \ell_a(y) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ell_a(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{S}'$$

\Leftrightarrow
 $\alpha \neq 0$

$$(III) \quad i, h \in \{1, \dots, m\}$$

$a^i \rightarrow a^i + \beta a^h$ $\ell_a(x) \rightarrow \ell_a(x) + \beta \ell_h(x)$

$\alpha \neq h$ $\beta \in K$

$$a_1^i x_1 + \dots + a_m^i x_m - b_i = 0 \rightarrow a_1^i x_1 + \dots + a_m^i x_m - b_i + \beta(a_1^h x_1 + \dots + a_m^h x_m - b_h) = 0$$

$$a_1^h x_1 + \dots + a_m^h x_m - b_h = 0$$

$$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S} \Rightarrow \ell_a(y) = 0 \quad \text{e} \quad \ell_h(y) = 0 \Rightarrow \ell_a(y) + \beta \ell_h(y) = 0$$

$$\Rightarrow y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S}'$$

$$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{S}' \Rightarrow \begin{cases} \ell_a(y) + \beta \ell_h(y) = 0 \\ \ell_h(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_a(y) + \beta \cdot 0 = 0 \\ \ell_h(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ell_a(y) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{S}.$$

Esempio:

$$\Sigma : \begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{RIDUCI A GRADINI}$$

$$\underline{a}^1 \leftrightarrow \underline{a}^2 \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \underline{a}^3 \rightarrow \underline{a}^3 - 2\underline{a}^1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right) \quad \Sigma' : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Σ e Σ' sono equivalenti per il Teorema precedente

Allora poniamo scegliere te:

(1) Sostituzione o ritorno

(2) Continua o ridurre completamente la matrice

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 2x_4 = -x_2 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 1 = -2(-\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3) - x_4 + 1 \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 = -2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_4 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} + 2x_4 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (-2x_4, \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

\mathbb{R} variabili libere

Le variabili che compongono le colonne che non contengono pivot
indicano variabili libere - Erre sono $m - \text{range}(A)$

$$= \left\{ (-2x_4, \frac{7}{3}x_4, -\frac{5}{3}x_4, x_4) + (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ (-2x_4, \frac{7}{3}x_4, -\frac{5}{3}x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Abbiamo così un rientro di quanto affermato nel Teorema di struttura.

(2)

$$\left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{array} \right) \quad \underline{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}\underline{x^3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \underline{x^2} \rightarrow \underline{x^2} - 2\underline{x^3} \\ \underline{x^1} \rightarrow \underline{x^1} + \underline{x^3} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\underline{x^1} \rightarrow \underline{x^1} - \underline{x^2} \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad \sum": \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (-2x_4, \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Osservazione.

Quando accade che $\text{range}(A) \neq \text{range}(C)$, si ha $\text{range}(A) = \text{range}(C) - 1$

$$C = \left(\underbrace{\quad}_{A} \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right) \quad \text{notando a quadri.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & \square & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & | & \square \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ 0 = e_{x_0} \\ \text{incompatibile} \end{array} \right.$$

Esercizio. Risolvere il seguente sistema lineare:

Esercizio. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\sum : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 eqz. in 5 incognite in \mathbb{R}

$$\underline{x}_1^2 \rightarrow \underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_3^3 \rightarrow \underline{x}_3^3 - \underline{x}_1^2$$

$$\underline{x}_4^4 \rightarrow \underline{x}_4^4 + \underline{x}_1^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_3^3 \leftrightarrow \underline{x}_4^4$$

x_4 \swarrow $x_5 \searrow$ variabile libera

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

riduciamo completamente

$$\underline{x}_1^2 \rightarrow (-1) \underline{x}_1^2$$

$$\underline{x}_3^3 \rightarrow (-1) \underline{x}_3^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1^2 \rightarrow \underline{x}_1^2 - 3\underline{x}_3^3$$

$$\underline{x}_2^2 \rightarrow \underline{x}_2^2 + 2\underline{x}_3^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1^2 \rightarrow \underline{x}_1^2 - \underline{x}_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -8 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 11x_4 - 8x_5 = -11 \\ x_2 + 6x_4 + 5x_5 = 6 \\ x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 11x_4 + 8x_5 - 11 \\ x_2 = -6x_4 - 5x_5 + 6 \\ x_3 = 3x_4 + 2x_5 - 3 \end{cases}$$

$$\text{O} \quad \mathcal{S} = \{(11x_4 + 8x_5 - 11, -6x_4 - 5x_5 + 6, 3x_4 + 2x_5 - 3, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

||

$$(11x_4 + 8x_5, -6x_4 - 5x_5, 3x_4 + 2x_5, x_4, x_5) + (-11, 6, -3, 0, 0)$$