FATTORIALE DI UN NUMERO INTERO

Sia n un intero positivo. Il prodotto dei primi n interi positivi è chiamato il fattoriale di n e si pone:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$$

Si completa la definizione ponendo:

$$0! = 1$$

Esempio

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! \quad 6 \cdot 120 = 720$$

Esempio

$$\frac{13!}{11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 13 \cdot 12 = 156$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

ESERCIZI

- Calcolare

$$7! =$$

$$8! =$$

$$\frac{16!}{14!} =$$

$$\frac{8!}{10!} =$$

- Calcolare

$$\frac{(n+2)!}{n!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+2)!} =$$

$$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} =$$

COEFFICIENTE BINOMIALE

Siano n e K due ~~interi~~ naturali tali che $K \leq n$.

Il simbolo $\binom{n}{K}$ definito come:

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!\,(n-k)!}$$

è detto coefficiente binomiale n su K.

Osservazione Non bisogna confondere $\binom{n}{K}$ con $\frac{n}{K}$. Il professore D. KNUTH autore del famoso programma di composizione di testi (matematici) TEX ha definito una control sequence {n \choose K} per produrre $\binom{n}{K}$ (nel seguito sarà chiarito il vocabolo choose) e una control sequence {n \over K} per produrre $\frac{n}{K}$.

Esempio

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2 \quad \cancel{6!}} = 28$$

ESERCIZI

- Calcolare

$\binom{16}{3} =$ | $\binom{16}{13} =$

$\binom{12}{4} =$ | $\binom{12}{8} =$

- Dimostrare che per ogni $k \leq n$ risulta:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Calcolare

$\binom{7}{3} =$ | $\binom{6}{3} + \binom{6}{2} =$

$\binom{8}{4} =$ | $\binom{7}{4} + \binom{7}{3} =$

- Dimostrare che per ogni $1 \leq k \leq n-1$ risulta:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

IL TRIANGOLO DI PASCAL

Il triangolo di Pascal (o di TARTAGLIA) è ottenuto disponendo opportunamente i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ al crescere di n:

k

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

<u>Osservazione 1</u> Ogni elemento nel triangolo di Pascal verifica la proprietà asserita nell'ultimo esercizio.

<u>Osservazione 2</u> Ogni riga del triangolo di Pascal contiene i coefficienti dello sviluppo della potenza (corrispondente) del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

ESERCIZI

- Sviluppare le seguenti potenze di binomio:

$$(2x+y^2)^5 =$$

$$(x^2-2y)^6 =$$

- Dimostrare che la somma degli elementi della riga n-ima del triangolo di Pascal vale 2^n.

- Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

come si evince anche dall'osservazione diretta delle righe del triangolo di Pascal.

COEFFICIENTE MULTINOMIALE

Sia n un intero positivo. Siano inoltre $n_1, n_2, \ldots, n_r$ interi tali che $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$.
Il simbolo $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ definito come

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

è detto coefficiente multinomiale n su $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Esempio

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3!}} = 210$$

$$\binom{8}{4,2,2,0} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!\,0!} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot1\quad\cancel{4!}} = 420$$

ESERCIZI

- Calcolare

$$\binom{6}{3,2,1} = \qquad \binom{10}{5,3,2,2} =$$

$$\binom{8}{4,3,1} = \qquad \binom{8}{4,4,1} =$$

- Calcolare

$$\binom{7}{5,2} = \qquad \binom{8}{7,1} =$$

$$\binom{9}{3,6} = \qquad \binom{10}{8,2} =$$

- Anche sulla scorta del precedente esercizio, dire a chi equivale il coefficiente multinomiale.

$$\binom{n}{k,\, n-k}$$

IL PROBLEMA DEL "CONTARE"

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. In problemi coinvolgenti la **selezione** (choose in inglese) occorre distinguere il caso in cui questa è effettuata **con** o **senza rimpiazzamento** (ripetizione). Si può inoltre **porre** o **meno** l'attenzione sull'**ordine** con cui gli elementi di S si presentano nella selezione.

CLASSIFICAZIONE

- selezioni dove l'ordinamento è importante DISPOSIZIONI	è ammessa la <u>ripetizione</u> di qualche elemento di S <u>non</u> è ammessa la ripetizione .... (SEMPLICI)
- selezioni dove l'ordinamento non svolge alcun ruolo COMBINAZIONI	è ammessa la ripetizione .... <u>non</u> è ammessa .... (SEMPLICI)

LOCUZIONI EQUIVALENTI

Sia S un insieme costituito da un numero n finito di elementi distinti. Sia K un intero (nel caso delle disposizioni o delle combinazioni SEMPLICI deve essere $K \leq n$). Una selezione di K elementi di S verrà nel seguito denominata in maniera del tutto equivalente:

- K - selezione di S
- selezione di S di ordine K
- selezione di S di classe K
- selezione dagli n elementi di S su K posti
- selezione degli n elementi di S presi a K a K.

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Supponiamo che una assegnata procedura può essere scomposta mediante r sottoprocedure. Indicato con n_i il numero dei modi diversi di realizzazione della sottoprocedura i-ma ($i = 1, 2, \ldots, r$), il numero diverso dei modi realizzazione dell'intera procedura è dato da:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

<u>Esempio</u> Si devono catalogare degli articoli di maglieria mediante un codice che vuole al primo posto una lettera a scelta tra S, M, L (taglia) seguita da un numero a scelta tra 1, 2, 3, 4, 5 (colore). Il numero massimo di articoli catalogabili mediante questa procedura è dato da:

$$3 \cdot 5 = 15.$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è influente allora ogni K-selezione (con K qualsiasi) di S è detta essere una **K-disposizione con ripetizione di S.**

TEOREMA 1

Il numero $D^{(r)}_{n,K}$ di tutte le K-disposizioni con ripetizione di S è dato da:

$$D^{(r)}_{n;K} = n^K.$$

ESEMPIO: LA SCHEDINA DEL TOTOCALCIO

$S = \{1, 2, x\}$ per cui $\boxed{n = 3.}$

1 $\Leftrightarrow$ vittoria della squadra che gioca in casa

2 $\Leftrightarrow$ vittoria della squadra che gioca fuori casa

x $\Leftrightarrow$ pareggio

Le partite sono quattordici per cui $\boxed{K = 14.}$

La colonna vincente:

$$(xxx \ xxx \ xxx \ xxx \ 21)^T$$

rappresenta la situazione nella quale nelle prime dodici partite si è avuto pareggio, nella tredicesima ha vinto la squadra in trasferta e nella quattordicesima ha vinto la squadra in casa.

La colonna vincente:

$$(xxx \ xxx \ xxx \ xxx \ 12)^T$$

nella quale compaiono gli stessi simboli della precedente ma in diverso ordine ha un significato differente.

ESEMPIO: IL SISTEMA DELLE TARGHE

Ci riferiamo al sistema con la sigla della provincia e utilizzante le dieci cifre decimali. Per una data provincia risulta

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \boxed{n = 10}$$

mentre i posti da riempire sono sei per cui $\boxed{k = 6}$. Una possibile targa è:

NA	25
33	16

E' del tutto ovvio che le due targhe:

NA	15
25	43

NA	15
25	34

contrassegnano due veicoli del tutto diversi.

ESERCIZI

- $S = \{a, b, c\}$
  Determinare il numero di tutte le 2-disposizioni con ripetizione procedendo per enumerazione. Lo stesso per le 3-disposizioni con ripetizione.

- Risolvere l'esercizio precedente applicandolo il teorema 1

- Determinare il numero di tutte le possibili colonne del totocalcio.

- Determinare il numero massimo di veicoli targabili con il sistema delle targhe precedentemente illustrato.

- $\boxed{\text{Dimostrare il teorema 1.}}$

DISPOSIZIONI SENZA RIPETIZIONE
$\Updownarrow$
DISPOSIZIONI SEMPLICI

Sia $K \leq n$. Se nel contesto specifico l'ordine di scelta di un elemento di S è influente allora ogni k-selezione di S costituita da elementi tutti distinti tra loro è detta essere una **K-disposizione semplice di S.**

TEOREMA 2

Il numero $D_{n,K}$ di tutte le K-disposizioni semplici di S è dato da:

$$D_{n;K} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(K-1)]$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-K+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-K)!}.$$

ESEMPIO: LA CORSA TRIS

Il sistema dei pronostici valido per la corsa di cavalli denominata TRIS fornisce un'applicazione che si svolge nel contesto delle disposizioni semplici. In esso bisogna pronosticare i cavalli che si piazzeranno ai primi tre posti ($K=3$) tra quelli iscritti alla partenza ($n \geq 3$).

In tale contesto la terna:

$(7, 5, 4)$ pronostica $\begin{cases} 7 \text{ vincente} \\ 5 \text{ secondo posto} \\ 4 \text{ terzo posto} \end{cases}$

mentre la terna:

$(4, 5, 7)$ pronostica $\begin{cases} 4 \text{ vincente} \\ 5 \text{ secondo posto} \\ 7 \text{ terzo posto} \end{cases}$

Non è giocabile invece la terna:

$(7, 5, 7)$

ESERCIZI

- $S = \{a, b, c\}$
  Determinare il numero di tutte le 2-disposizioni semplici procedendo per enumerazione. Lo stesso per le 3-disposizioni semplici

- Risolvere l'esercizio precedente applicando il teorema 2.

- Nella corsa TRIS sia $\boxed{n = 8}$
  Determinare il numero di tutte le possibili terne (giocabili).

- Verificare la seguente identità
  $$(n-k)\, D_{n;k} = n\, D_{n-1;k} .$$

- Risolvere l'equazione
  $$D_{x+1;3} = 8\, D_{x;2}$$
  con x ovviamente intero.

PERMUTAZIONI SEMPLICI

Ogni n-disposizione semplice è detta essere una **permutazione** degli n elementi di S.

COROLLARIO al TEOREMA 2

Il numero P_n di tutte le permutazioni semplici di S è ottenuto ponendo $k = n$ nella formula per il calcolo di $D_{n,k}$ e quindi:

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

ESEMPIO : ANAGRAMMI

Gli anagrammi delle parole aventi lettere tutte distinte tra loro forniscono un'applicazione del concetto di permutazione. Ad esempio:

SAIO è un anagramma di OASI
SOIA è un anagramma di OASI

oppure le tre parole OASI, SAIO e OASI sono permutazioni di $S=\{A, I, O, S\}$.

Tralasciando il significato delle parole, il numero degli anagrammi di OASI è dato da:

$$P_4 = 4! = 24.$$

ESERCIZI

- Ad una gara di atletica leggera partecipano cinque concorrenti. Quante sono le possibili classifiche.

- In quanti modi un gruppo di sette persone si può disporre su sette sedie allineate.

- Risolvere il problema precedente supponendo che le sedie sono disposte in circolo.

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE ($S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$)

Sia $n = K_1 + K_2 + \dots + K_r$. Una n-selezione di S avente K_1 elementi uguali al primo elemento di S, K_2 elementi uguali al secondo elemento di S e così via fino a K_r è detta essere una $(K_1, K_2, \dots, K_r)$-permutazione con ripetizione di S

COROLLARIO al TEOREMA 2

Il numero $P^{(r)}_{n; K_1, K_2, \dots, K_r}$ di tutte le $(K_1, K_2, \dots, K_r)$-permutazioni con ripetizione di S è dato da:

$$P^{(r)}_{n; K_1, K_2, \dots, K_r} = \frac{n!}{K_1! K_2! \cdots K_r!} = \binom{n}{K_1, K_2, \dots, K_r}$$

OSSERVAZIONE

Nel caso $r = n$ e $K_1 = K_2 = \dots = K_n = 1$ si ottengono le permutazioni semplici. Risulta inoltre

$$P^{(n)}_{n; 1, 1, \dots, 1} = \frac{n!}{1! 1! \cdots 1!} = n! = P_n .$$

ESEMPIO

Gli anagrammi delle parole aventi alcune lettere che si ripetono più volte costituiscono un valido esempio del concetto di permutazione con ripetizione.

Ad esempio la parola ARCANE è un' anagramma della parola CARENA oppure una (2,1,1,1,1)- permutazione dell' insieme $S=\{A,C,E,N,R\}$.

Il numero delle permutazioni ottenibili con le lettere della parola CONNESSO è pari a:

$$P^{(r)}_{8;\underset{C}{1},\underset{E}{1},\underset{N}{2},\underset{O}{2},\underset{S}{2}} = \frac{8!}{1!\,1!\,2!\,2!\,2!} = \frac{\cancel{8}\cdot 7!}{\cancel{8}} = 5040.$$

ESERCIZI

- Quanti segnali distinti, ognuno formato da 6 bandiere allineate verticalmente si possono ottenere da 4 identiche bandiere rosse e da 2 identiche bandiere bianche?
- Quante permutazioni distinte si possono formare con tutte le lettere di ognuna delle seguenti parole:

  a) erba;

  b) mietere;

  c) tratteggiare.
- Dimostrare il secondo corollario al teorema 2.

COMBINAZIONI SEMPLICI

Sia $k \leq n$. Una **k-combinazione semplice di S** si ottiene identificando tutte le k-disposizioni semplici di S aventi i medesimi elementi posti in differente ordine (in altri termini l'ordine di presentazione degli elementi è ininfluente).

TEOREMA 3

Il numero $C_{n;k}$ di tutte le k-combinazioni semplici è dato da:

$$C_{n;k} = \binom{n}{k} .$$

ESEMPIO: SUPER ENALOTTO

In tale concorso a premi bisogna pronosticare sei numeri (da 1 a 90) che sono identificati con il primo estratto di sei diverse città (indipendentemente dall'ordine). Nel caso di un primo estratto uguale ad un altro esso viene sostituito dal secondo estratto (in tale cambio vige l'ordine alfabetico delle città).

E' del tutto evidente che le sestine:

città 1	35	24	24	35
città 2	24	35	35	75
città 3	2	75	75	24
città 4	60	2	54	2
città 5	75	54	2	54
città 6	54	60	60	60

sono equivalenti alla sestina:

$$(2 \quad 24 \quad 35 \quad 54 \quad 60 \quad 75)^T$$

che è l'unica tra di esse accettata dal sistema delle ricevitorie.

ESERCIZI

- Calcolare il numero dei possibili ambi, terni, quaterne e cinquine che possono verificarsi sulla ruota di una data città.
- Dimostrare il teorema 3.
- Quante sono le sestine giocabili al SUPER ENALOTTO?

- Quante sono le ottine giocabili al TOTO GOAL? (NO)

- Uno studente che sostiene un esame deve rispondere a otto domande su 10. Quante scelte ha?

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Una K-combinazione con ripetizione di S si ottiene identificando tutte le K-disposizioni con ripetizione di S aventi i medesimi elementi posti in un differente ordine (in altri termini è ammessa la ripetizione di qualche elemento di S e l'ordine è ininfluente.

TEOREMA 4

Il numero $C_{n,k}^{(r)}$ di tutte le K-combinazioni con ripetizione di S è dato da:

$$C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}.$$

MODELLI DI OCCUPAZIONE

Si abbiano n caselle numerate da 1 a n ($S=\{1,2,\dots,n\}$). Si abbiano inoltre K palline da collocare nelle precedenti caselle.

- Bisogna differenziare innanzitutto il caso delle palline distinguibili tra loro (ad esempio etichettate o di differente colore) dal caso delle palline indistinguibili.
- Inoltre ogni casella potrebbe ospitare al più una pallina (principio di PAULI) oppure potrebbe offrire ospitalità a s palline con $s=0,1,2,\dots,K$.

<u>OSSERVAZIONE</u> Cambiando la parola casella in stato o livello d'energia e pallina in particella si capisce l'importanza di tale contesto in MECCANICA STATISTICA.

In definitiva risultano le seguenti quattro possibili situazioni:

a) STATISTICA DI MAXWELL-BOLTZMANN
- palline distinguibili
- non vale il principio di PAULI

b) . . . . . .
- palline distinguibili
- vale il principio di PAULI

c) STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN (fotoni, atomi di idrogeno)
- palline indistinguibili
- non vale il principio di PAULI

d) STATISTICA DI FERMI-DIRAC (protoni, neutroni)
- palline indistinguibili
- vale il principio di PAULI

a) STATISTICA DI MAXWELL BOLTZMANN

Una collocazione delle K palline nelle n caselle è descrivibile mediante una K-selezione ordinata e con ripetizione da S.

Si guardino i seguenti esempi relativi al caso $n = 5$ e $K = 4$:

1	2	3	4	5	
	C	B D	A		$\Longleftrightarrow$ 4 3 2 3
	D	A C	B		$\Longleftrightarrow$ 3 4 3 2
		A	C D B		$\Longleftrightarrow$ 3 4 4 4

In tale contesto il numero di tutte le possibili collocazioni delle K palline nelle n caselle è uguale al numero delle K-disposizioni con ripetizione da S:

$$D^{(r)}_{n,K} = n^K .$$

b)

Una collocazione delle K palline nelle n caselle è descrivibile mediante una K-selezione <u>ordinata e senza ripetizione</u> da S.

Si guardino i seguenti esempi relativi al caso $n = 5$ e $K = 4$:

1	2	3	4	5		
B	A	D	C		$\Longleftrightarrow$	2 1 4 3
A	B	C	D		$\Longleftrightarrow$	1 2 3 4
C	A		B	D	$\Longleftrightarrow$	2 4 1 5

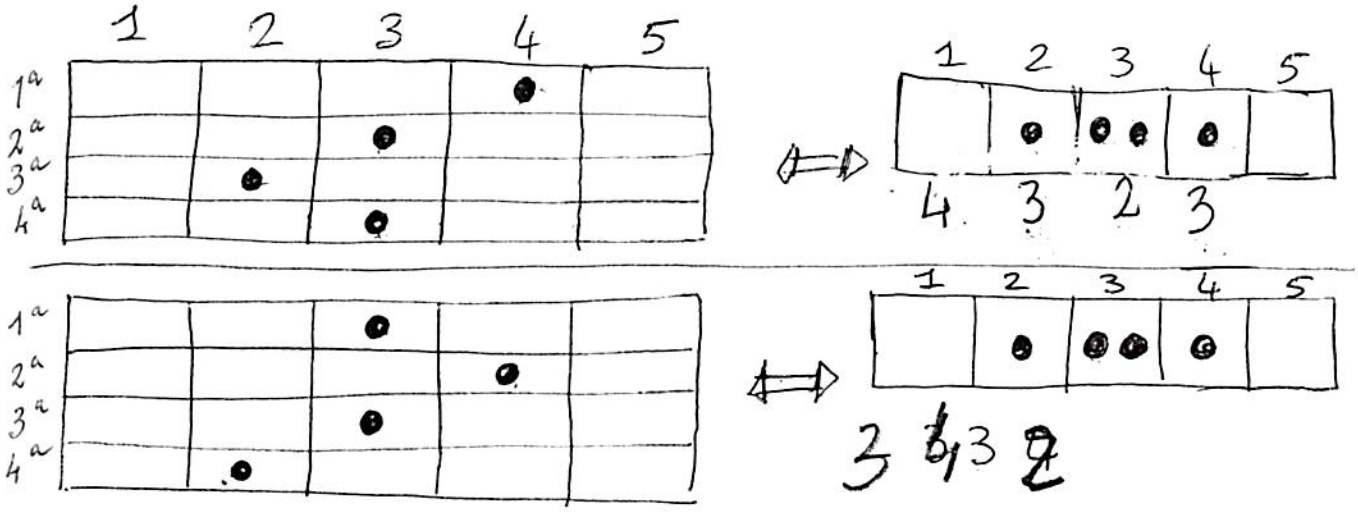
In tale contesto il numero di tutte le possibili collocazioni delle K palline nelle n caselle è uguale al numero delle K-disposizioni semplici da S:

$$D_{n,K} = \frac{n!}{(n-K)!} .$$

c) STATISTICA DI BOSE-EINSTEIN

Una collocazione delle K palline nelle n caselle è descrivibile mediante una K-selezione non ordinata e con ripetizione da S.

Si guardino i seguenti esempi relativi al caso $n = 5$ e $K = 4$:



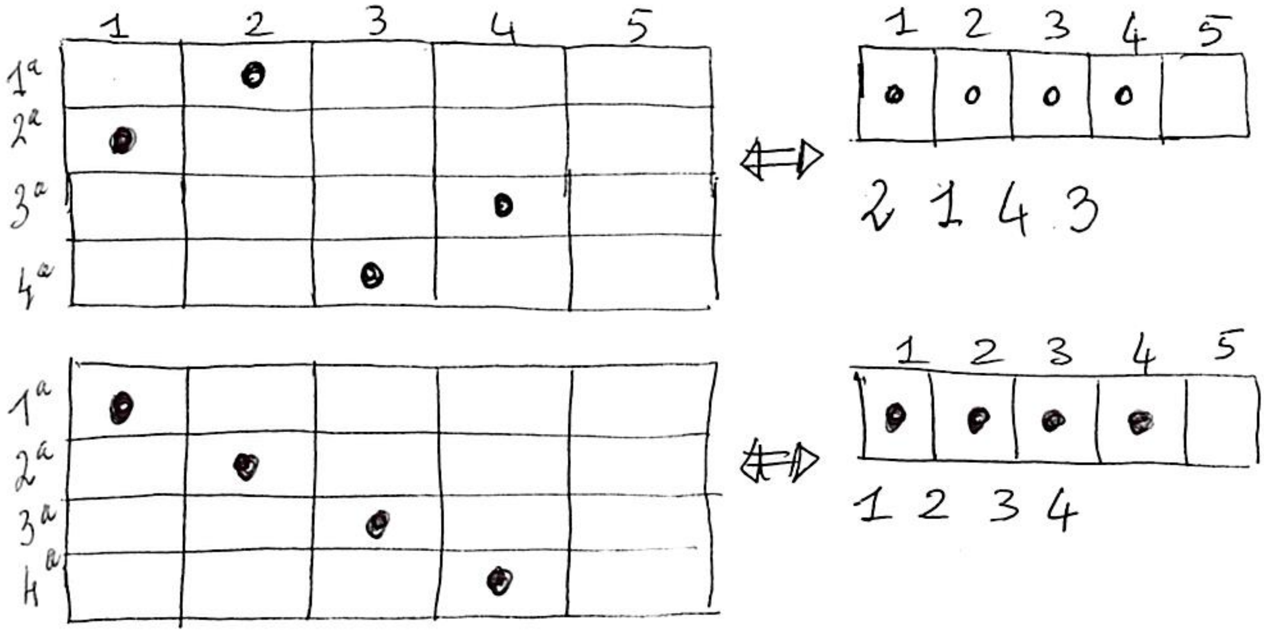
In tale contesto il numero di tutte le possibili collocazioni delle K-palline nelle n caselle è uguale al numero delle K-combinazioni con ripetizione da S:

$$C^{(r)}_{n,K} = \binom{n+K-1}{K}.$$

d) STATISTICA DI FERMI-DIRAC

Una collocazione delle K palline nelle n caselle è descrivibile mediante una K-selezione <u>non ordinata e senza ripetizione</u> da S.

Si guardino i seguenti esempi relativi al caso $n=5$ e $K=4$



In tale contesto il numero di tutte le possibili collocazioni delle K palline nelle n caselle è uguale al numero delle K-combinazioni semplici da S:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

ESERCIZI

- Illustrare la regola di identificazione delle collocazione delle palline nelle caselle mediante una K-selezione di S relativamente al caso a).
- Illustrare ..... al caso b).
- Illustrare ..... al caso c).
- Illustrare ..... al caso d).