Sia V uno spazio vettoriale su un campo K.

$T: V \longrightarrow V$ endomorfismo

Se $\dim V = n$, possiamo fissare una base di V finita e ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ in cui rappresentiamo T mediante una matrice:

$$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$$

Se $\bar{\mathcal{B}} = (\bar e_1, \dots, \bar e_n) \neq \mathcal{B}$, $\quad \bar A = M_{\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{B}}}(T)$

$\exists\ P \in M_n(K)$ invertibile: $\quad A = P^{-1}\bar A P$

$$PAP^{-1} = \bar A \qquad Q = P^{-1}$$
$$PAP^{-1} = Q^{-1}AQ$$

Def. Uno scalare $\lambda \in K$ è detto autovalore di T se l'insieme:

$$U_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$$ non è nullo (e si dice autospazio)

ossia se: $\exists\ v \in V \setminus \{\underline{0}\} : T(v) = \lambda v$

Oss. $\forall \lambda \in K$,
- $U_\lambda \ni \underline{0} \qquad T(\underline{0}) = \underline{0} = \lambda \underline{0}$
- U_λ è un sottosp. vett.

$\forall\ v, v' \in U_\lambda, \quad T(v) = \lambda v$ e $T(v') = \lambda v'$

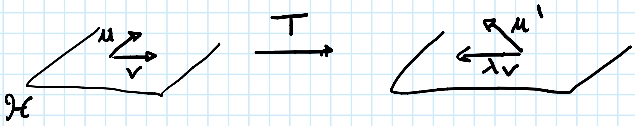
$$T(v+v') = T(v) + T(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v+v') \Rightarrow v+v' \in U_\lambda$$

$\forall v \in U_\lambda, \forall a \in K, \quad T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = (a\lambda)v = (\lambda a)v = \lambda(av) \Rightarrow$

$\Rightarrow av \in U_\lambda$.

Se λ è autovalore, U_λ è detto autospazio di T relativo a λ.

$V_{\mathcal{H}}$



$T(v) = \lambda v \qquad \lambda < 0$

$T(u) = u' \nparallel u$

Esempio: $T: \mathbb{R}[x]_{\le 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\le 2} \qquad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$$1 \rightsquigarrow 1+x$$
$$x \rightsquigarrow 1-x$$
$$x^2 \rightsquigarrow -3x^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$$

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$

$$(a,b) \rightsquigarrow (a-b, a+b) = {}^t\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$$

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$

$$(a,b) \rightsquigarrow (a-b, a+b) = {}^t\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$$

Esiste $(a,b) \neq \underline{0}$: $T((a,b)) = \lambda(a,b)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$?

$$(a-b, a+b) = \lambda(a,b) \qquad \begin{cases} a-b = \lambda a \\ a+b = \lambda b \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)a = b \\ (1-\lambda)b = -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)a = b \\ (1-\lambda)(1-\lambda)a = -a \end{cases}$$

$$((1-\lambda)^2+1)\, a = 0 \underset{(a,b)\neq \underline{0}}{\Longrightarrow} \underline{(1-\lambda)^2+1=0} \iff 1-2\lambda+\lambda^2+1=0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

determinante

$$\lambda = 1 \mp \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Come si calcolano gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo?

$T: V \longrightarrow V \qquad \dim V = n, \qquad K$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \qquad A = M_{\mathcal{B}}(T)$

$\lambda \in K$ è autovalore di $T \iff \exists\, v \in V \setminus \{\underline{0}\} : T(v) = \lambda v \iff$

$\iff \exists\, v \in V \setminus \{\underline{0}\} : \phi_{\mathcal{B}}(T(v)) = \phi_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda\, \phi_{\mathcal{B}}(v)$

Se $(x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(v)$:

$$\iff \exists\, (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} : \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$ $\quad$ equazione caratteristica

Proposizione

- $\det(A-\lambda I_n)$ è un polinomio in λ di grado n detto polinomio caratteristico
- Le soluzioni di $(A-\lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ sono le componenti degli autovettori

$$S_0 = \phi_{\mathcal{B}}(U_\lambda)$$

Esempio: $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Esempio: $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$$T(1) = 1 + 2x^2$$
$$T(x) = x - x^2$$
$$T(x^2) = -1 - x - x^2$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)[\lambda^2 - 1 - 1] + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 \cancel{-2} \cancel{+2}] =$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)\lambda^2} = 0 \iff \lambda = 1 \text{ opp } \lambda = 0$$

$U_0 = \operatorname{Ker} T$: $(A - 0 I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - 2\underline{e}^1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

$\phi_{\mathcal{B}}(U_0) = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1))$ autospazio della matrice

$U_0 = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$ $\phi_{\mathcal{B}}(1 + x + x^2) = (1, 1, 1)$

U_1 : $(A - 1 I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} -x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\phi_{\mathcal{B}}(U_1) = S_0 = \{(x_1, 2x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,2,0))$ $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$

$U_1 = \mathcal{L}(1 + 2x)$

$T: V \longrightarrow V$ $\mathcal{B}$ $\overline{\mathcal{B}}$

$A = M_{\mathcal{B}}(T)$ $\overline{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T)$ $A = P^{-1}\overline{A}P$

$$|A - \lambda I_n| = |P^{-1}\overline{A}P - \lambda I_n| = |P^{-1}\overline{A}P - \underbrace{\lambda P^{-1}P}_{= P^{-1}\lambda I P}| =$$

$$= |P^{-1}(\overline{A}P - \lambda I P)| = |P^{-1}(\overline{A} - \lambda I)P| \underset{\text{Binet}}{=} \overbrace{|P^{-1}|}^{=|P|^{-1}} |\overline{A} - \lambda I| |P| = |\overline{A} - \lambda I|$$

Quindi: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$p(x) \in K[x]$

$b \in K$ si dice soluzione o radice di $p(x)$ se e solo se $p(b) = 0$

Teorema di Ruffini: $p(x) \in K[x]$. $b \in K$

b è radice di $p(x) \iff \exists\, q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)$

("$x-b$ divide $p(x)$")

Def. $p(x) \in K[x]$, b radice di $p(x)$

$m_a(b) = \max\{k \in \mathbb{N} : (x-b)^k \text{ divide } p(x)\}$ molteplicità algebrica di b (come radice di $p(x)$)

Esempio: $p(x) = (x-3)(x-4)^5(x-3) = (x-3)^2(x-4)^5$

Def. $T : V \longrightarrow V$ $\quad \dim V = n$ su K

λ autovalore $\quad \dim U_\lambda = m_g(\lambda)$ molteplicità geometrica di λ

<u>Oss</u> $1 \leq m_g(\lambda)$

Proposizione. λ autovalore di $T : V \longrightarrow V$ (senza dim)

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$$

(come soluzione del pol. caratteristico)

Proposizione $T : V \longrightarrow V$ $\quad \dim V = n$ $\quad K$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, a due a due distinti

$v_1, \dots, v_t$ autovettori (non nulli)

$T(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\vdots \qquad \vdots$

$T(v_t) = \lambda_t v_t$

Allora: $\{v_1, \dots, v_t\}$ lin. indip.

<u>DIM</u> procediamo per induzione su t

$t = 1$ $\quad v_1 \neq \underline{0}$ $\quad \{v_1\}$ è lin. indip.

$t > 1$ <u>Th</u>: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = \underline{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_{t-1} = \alpha_t = 0$

- $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = T(\underline{0}) = \underline{0}$

$$\parallel$$

$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(v_{t-1}) + \alpha_t T(v_t)$

$$\parallel$$

$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t$

Quindi: $\quad \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t = \underline{0} \qquad (*)$

- $\lambda_t (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \lambda_t \underline{0} = \underline{0}$

$\lambda_t \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_t \alpha_{t-1} v_{t-1} + \lambda_t \alpha_t v_t = \underline{0} \qquad (**)$

(*) − (**) :

$$a_1(\underbrace{\lambda_1-\lambda_t}_{\neq 0})v_1 + \dots + a_{t-1}(\underbrace{\lambda_{t-1}-\lambda_t}_{\neq 0})v_{t-1} + \underline{0} = \underline{0}$$

Per hp di induzione $\{v_1, \dots, v_{t-1}\}$ è lin. indip., allora:

$$\begin{cases} a_1(\underbrace{\lambda_1-\lambda_t}_{\neq 0}) = 0 \\ \vdots \\ a_{t-1}(\underbrace{\lambda_{t-1}-\lambda_t}_{\neq 0}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{t-1} = 0 \end{cases}$$

Quindi $a_1v_1 + \dots + a_{t-1}v_{t-1} + a_tv_t = \underline{0}$

diventa $\begin{matrix} a_tv_t = \underline{0} \\ v_t \neq \underline{0} \end{matrix} \Rightarrow a_t = 0$.

Osservazione: $T: V \longrightarrow V$ $\dim V = n$ K

λ_1, λ_2 autovalori. Allora $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \underline{0}$. Infatti:

$$u \in U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \Rightarrow u \in U_{\lambda_1} \text{ e } u \in U_{\lambda_2} \Rightarrow T(u) = \lambda_1 u = \lambda_2 u$$

$$\Rightarrow \lambda_1 u - \lambda_2 u = \underline{0} \Rightarrow (\underbrace{\lambda_1-\lambda_2}_{\neq 0})u = \underline{0} \Rightarrow u = \underline{0}$$

Quindi $U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2}$.

Teorema $T: V \longrightarrow V$ $\dim V = n$ K

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori a due a due distinti.

Allora: $U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t}$

<u>DIM</u> Th: $\forall i \in \{1, \dots, t\}$, $U_{\lambda_i} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{i-1}} + U_{\lambda_{i+1}} + \dots + U_{\lambda_t}) = \{\underline{0}\}$

per esempio $i = 1$

$$u \in U_{\lambda_1} \cap (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t}) \Rightarrow \exists\, u_2 \in U_{\lambda_2}, \dots, u_t \in U_{\lambda_t} :$$

$$u = u_2 + \dots + u_t$$

$$\underset{1}{u} - \underset{-1}{u_2} - \dots - \underset{-1}{u_t} = \underline{0}$$

Per la prop. precedente se $u, u_2, \dots, u_t$ non sono nulli sono lin. indip.

Questo è assurdo, perciò $u = u_2 = \dots = u_t = \underline{0}$.

In particolare, $u = \underline{0}$.