

Teorema di completamento in una base:

$(V, +, \cdot)$  su  $K$ ,  $\dim V = m$ .

Sia  $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$  lin. indip.

Se  $t = |S| < m$ , allora esiste  $X = \{u_{t+1}, \dots, u_m\}$ ,  $|X| = m - t$ ,  
 $\subseteq V$

tale che  $S \cup X$  è base di  $V$ .

DIM. Ricordiamo che se  $u \in V$  tale che  $u \notin \mathcal{L}(S)$ , allora  
 essendo  $S$  lin. indip. si ha  $S \cup \{u\}$  è lin. indip.

Per ipotesi  $t < m$  per cui  $S$  non è base di  $V$ . Siccome  $S$  è lin. indip.  
 allora  $S$  non è un sst. di gen:  $\mathcal{L}(S) \neq V$ , ovvero non tutti i  
 vettori di  $V$  si scrivono come comb. lineare dei vettori di  $S$ .

Allora:  $\exists u \in V$  tale che  $u \notin \mathcal{L}(S)$

e per quanto abbiamo ricordato:  $S \cup \{u\}$  è lin. indip.

Ricordiamo:  $S' = S \cup \{u\}$  lin. indip. e  $|S'| = t+1$ .

Se  $t+1 = m$ , allora  $S'$  è una base per quanto la lezione scorsa.

Se  $t+1 < m$ , allora ripetiamo il ragionamento:

pongo  $u_{m+1} = u$ ,  $S' = \{u_1, \dots, u_t, u_{t+1}\}$

Siccome  $t+1 < m$  e  $S'$  è lin. indip., allora  $S'$  non è un sst. di gen:  
 poniamo:  $\exists v \in V$  tale che  $v \in \mathcal{L}(S')$ ,

per cui:  $S' \cup \{v\}$  è lin. indip.

$$|S' \cup \{v\}| = t+2. \quad u_{t+2} = v$$

Se  $t+2 = m$ , abbiamo finito

Se  $t+2 < m$ , ricominciamo e così via fino a trovare  
 dei vettori  $u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_m$  tali che

$S \cup \underbrace{\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_m\}}_X$  è base di  $V$ .

Esempi:

(1) Costruire una base di  $\mathbb{R}^3$  che contiene il vettore  $(1, 2, 2)$

Possiamo considerare  $S = \{(1, 2, 1)\}$  e applicare il Teor. di completamento  
 in una base.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 \quad |S| = 1, \quad S$  è lin. indip.

Ma  $\mathcal{L}(S) \neq \mathbb{R}^3$ .  $\exists u \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}(S)$

$$\mathcal{L}(S) = \{2(1, 2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \neq u$$

Per esempio  $(1,0,0) \notin \mathcal{L}(S)$

p.e.  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : (1,0,0) = \alpha(1,2,1) = (\alpha, 2\alpha, \alpha)$

$$\text{e quindi } \begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = 2\alpha \\ 0 = \alpha \end{cases} \rightarrow \text{assurdo}$$

Di conseguenza  $S' = S \cup \{(1,0,0)\} = \{(1,2,1), (1,0,0)\}$  è lin. indip.

$$|S'| = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}(S')$$

$$\mathcal{L}(S') = \{\alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$\stackrel{''}{=} (\underline{\alpha}, \underline{2\alpha}, \underline{\alpha}) + (\underline{\beta}, 0, \underline{\alpha}) = (\alpha + \beta, \underline{2\alpha}, \underline{\alpha})$$

Possiamo prendere  $(0,0,1)$   $0 \neq 2 \cdot 1$   
 $\notin \mathcal{L}(S')$

Quindi  $S' \cup \{(0,0,1)\} = \{(1,2,1), (1,0,0), (0,0,1)\}$  è lin. indip.  
 ha cardinalità 3 =  $\dim \mathbb{R}^3$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow S' \cup \{(0,0,1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

(2)  $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  costruire una base contenente i vettori  $1+x^2, x+x^3$

$$\dim \mathbb{R}[x] \leq 3 = 4 \quad S = \{1+x^2, x+x^3\} \text{ è lin. indip.}$$

$$\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1+x^2) + \beta(x+x^3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\stackrel{''}{=} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}x^2 + \underline{\beta}x + \underline{\beta}x^3 \quad 1+x \notin \mathcal{L}(S)$$

$$\alpha = 1, \beta = 1 \quad 1+x = 1 + 0x^2 + 1x + 0x^3$$

$$2 \times 2 \quad \beta \times \beta$$

$$S' = S \cup \{1+x\} = \{1+x^2, x+x^3, 1+x\} \text{ lin. indip.}$$

$$|S'| = 3 < 4$$

$$\mathcal{L}(S') = \{\alpha(1+x^2) + \beta(x+x^3) + \gamma(1+x) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$\stackrel{''}{=} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}x^2 + \underline{\beta}x + \underline{\beta}x^3 + \underline{\gamma} + \underline{\gamma}x = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \underline{\alpha}x^2 + \underline{\beta}x^3$$

Possiamo scegliere  $\alpha = 0, \beta = 0$  e  $\gamma$  qualunque:  $\gamma + \gamma x$

Allora prendo  $1-x \notin \mathcal{L}(S')$ .

$S' \cup \{1-x\}$  è lin. indip.  $\Rightarrow \{1+x^2, x+x^3, 1+x, 1-x\}$  è base  
 ha cardinalità 4 =  $\dim \mathbb{R}[x] \leq 3$  di  $\mathbb{R}[x] \leq 3$ .

→

Sia  $(V, +, \cdot)$  sp. vett. f.g. in un campo  $K$ ,  $\dim V = n$

essa  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  una sua base ordinata (riferimento vettoriale)

Proposizione.

$\forall u \in V, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  tali che  $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

DIM: se sono  $B$  è una base si dimostra che non esiste

$\forall u \in V, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m$  tali che  $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$

DIM Siccome  $B$  è una base, in particolare è un sistema di generatori di  $V$ , per cui ogni vettore di  $V$  si scrive come comb. lineare dei vettori di  $B$ . Quindi  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m$  con le caratteristiche richieste esiste

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$$

Se  $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in K^m$  è tali che  $u = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m$ ,

possiamo procedere nel seguente modo:  $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m -$

$$u = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m$$

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) e_m$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m = \beta_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m - \beta_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{comb. lineare nulla di} \\ \text{vettori lin. indip.} \end{array}$$

Allora,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  è unica tali che  $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$ .

Def. Sia  $B = (e_1, \dots, e_m)$  base ordinata ordinata di  $V$ .

Per ogni  $u \in V$ , l'unica  $m$ -uple  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m$  tali che

$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$  si dice vettore delle componenti di  $u$  in  $B$   
e i suoi elementi si dicono componenti di  $u$  in  $B$

Esempi:

$$V = \mathbb{R}[x] \leq 2 \quad \dim V = 3$$

$$B = (1+x, 1-x, 1+x^2) \text{ base ordinata}$$

• determiniamo il vettore delle componenti di  $u = 3 + 2x - x^2$

$$\begin{aligned} 3 + 2x - x^2 &= \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1+x^2) = \\ &= \alpha_1 + \alpha_1 x + \alpha_2 - \alpha_2 x + \alpha_3 + \alpha_3 x^2 = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2)x + \alpha_3 x^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ -1 = \alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 2 + \alpha_2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 3$$

le componenti di  $u$  in  $B$  sono  $(3, 1, -1)$

• determinare il vettore che ha come componenti in  $B$   $(-2, 4, 1)$

$$\begin{aligned} u = -2(1+x) + 4(1-x) + 1(1+x^2) &= -2 - 2x + 4 - 4x + 1 + x^2 = \\ &= 3 - 6x + x^2 \end{aligned}$$

Questo risultato dà luogo alla seguente applicazione:

$$\Phi_B : V \longrightarrow K^m$$

$u \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  vettore delle componenti di  $u$  in  $B$

Vediamo che  $\phi_B$  è iniettiva e suriettiva (per ogni  $B$ ).

$$\text{Si scrive } u \equiv_B (a_1, \dots, a_m) \quad \text{opp} \quad \phi_B(u) = (a_1, \dots, a_m)$$

Esercizio.

$$V = \mathbb{R}[x] \leq 2$$

Dimostrare che  $X = \{a + (a+b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  è un sottospazio vett. di  $V$ . Determinare la dimensione e una base di  $X$ .

Osserviamo:  $u \in X \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}: u = a + (a+b)x + bx^2$

$$\begin{aligned} u = a + (a+b)x + bx^2 &= a + ax + bx + bx^2 = \\ &= a(1+x) + b(x+x^2) \in \mathcal{L}(1+x, x+x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1+x, x+x^2 \in X \\ \begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ b=1 \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi: } X &\subseteq \mathcal{L}(1+x, x+x^2) \subseteq X \\ \Rightarrow X &= \mathcal{L}(1+x, x+x^2) \end{aligned}$$

$$S = \{1+x, x+x^2\} \text{ è un sot. lin. gen. di } X$$

$$\alpha(1+x) + \beta(x+x^2) = 0$$

$$\begin{matrix} \Downarrow \\ \alpha + \alpha x + \beta x + \beta x^2 = \alpha + (\alpha+\beta)x + \beta x^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S$  è lin. indip.

Di conseguenza,  $S$  è una base di  $X$  e  $\dim X = 2$ .

Proposizione  $(V, +, \cdot)$  sp. vett. f.g.  $\dim V = m$

$\text{Sia } W$  un sottospazio vettoriale di  $V$

- $\dim W = 0 \Leftrightarrow W = \{0\}$
- $\dim W = m \leq m$
- $\dim W = m \Leftrightarrow W = V$ .

DIM •  $\dim W = 0 \Leftrightarrow$  l'unica base di  $W$  è il vuoto  $\emptyset \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow W = \mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$

- Sia  $B_W$  una base di  $W$ .

Allora  $B_W \subseteq W \subseteq V$        $\Rightarrow |B_W| \leq m = \dim V$   
 $B_W$  è lin. indip.

- $\dim W = m \Rightarrow$  se  $B_W$  è base di  $W$ ,  $|B_W| = m$   
 $B_W$  lin. indip.  $\subseteq V$        $\Rightarrow B_W$  base di  $V$   
 $|B_W| = m = \dim V$

$$W = \mathcal{L}(B_W) = V$$

" $\Leftarrow$ " è ovvio.

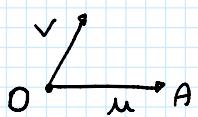
Esempio. Sia  $V$  lo sp. vett. dei vettori liberi.

Sia  $u \in V - \{0\}$

$$\mathcal{L}(u) = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \dim \mathcal{L}(u) = 1$$

tutti i vettori paralleli a  $u$ ; come rappresentabili in una stessa retta su cui possiamo disegnarli

Siano  $u, v \in V - \{0\}$ ,  $u \neq v$ . Sappiamo che  $\{u, v\}$  è lin. indip.

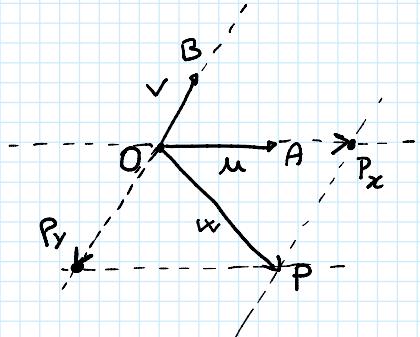


Rappresentiamo  $u + v$  applicati in un punto  $O$  e consideriamo l'unico piano  $\mathcal{P}$  individuato da  $u$  e dagli estremi di  $u + v$  rappresentati in  $O$ .  
O, A, B non collineari.

$\mathcal{L}(u, v) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  è l'insieme di tutti i vettori che hanno un rappresentante applicato in  $O$  tutto contenuto in  $\mathcal{P}$ , ossia parallelo ad  $\mathcal{P}$ .

Infatti,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha u + \beta v$  è contenuto in  $\mathcal{P}$  per def. di parallelo e somma.

Inoltre, sia  $w$  un vettore parallelo a  $\mathcal{P}$ :



$$w = OP_x + OP_y$$

$$OP_x \parallel u \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: OP_x = \alpha u$$

$$OP_y \parallel v \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}: OP_y = \beta v$$

$$w = \alpha u + \beta v \in \mathcal{L}(u, v)$$

Possiamo estendere affermando che i vettori paralleli a un dato piano formano uno sp. vett. di dim 2.

Def.  $\forall$  vettori liberi,  $u, v, w \in V$

$u, v, w$  complanari  $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} u, v, w$  sono paralleli a uno stesso piano

Per quanto osservato nel precedente esempio, abbiamo:

$u, v, w$  complanari  $\Rightarrow u, v, w$  appartengono a uno sp. vett. di  $\dim 2$

$\Rightarrow \{u, v, w\}$  è lin. dipendente.

Per cond. 3

Vediamo che vale anche il viceversa.

Se  $\{u, v, w\}$  è lin. dip., uno dei tre vettori si scrive come comb. lineare degli altri due, per cui non complanari.

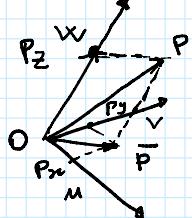
Vediamo che  $\dim V = 3$ .

Siano  $u, v, w \in V$  tali che  $\{u, v, w\}$  lin. indip.

Per quanto appena osservato nell'esempio,  $u, v, w$  non sono complanari.

Vediamo che ogni vettore libero si scrive come comb. lineare di  $u, v, w$ .

$$OP \in V$$



tracciamo la parallela a  $w$  passante per  $P$   
e sia  $\bar{P}$  il suo punto di intersezione con  
il piano individuato da  $u$  e  $v$

$$\text{sappiamo che } \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \bar{OP} = \alpha u + \beta v$$

Tracciamo la retta per  $P$  parallela a  $\bar{OP}$  che interseca  
la retta  $u$  in un punto  $w$  in un punto  $P_z$

$$\text{Ora vediamo che } OP = \bar{OP} + OP_z = *$$

$$OP_z \parallel w \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} : OP_z = \gamma w$$

$$* = \alpha u + \beta v + \gamma w \in \mathcal{L}(u, v, w).$$

Da cui:  $V = \mathcal{L}(u, v, w)$  e  $\dim V = 3$ .

Dimostriamo il Lemma di Steinitz

Lemma di Steinitz:  $(V, +, -)$  in  $K$

Sia  $W$  un sottosp. vett. di  $V$  f.g. con sistema di generatori  $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ .

Se  $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$  con  $m > n$ , allora  $X$  è lin. dipendente.

DIM. Se  $0 \in X$ , è ovvio che  $X$  è lin. dip.

Allora supponiamo che  $0 \notin X$ . Siccome  $\mathcal{L}(S) = W$ , ogni vettore di  $W$  è  
comb. lineare dei vettori di  $S$ . In particolare:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K : v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \quad v_1 \neq 0$$

$\Rightarrow$  almeno un coeff. è non nullo. Per esempio  $\lambda_1 \neq 0$ . Allora  $\exists \lambda_1^{-1} \in K$

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \underbrace{\lambda_1^{-1} \lambda_1}_{=1} u_1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_1^{-1} \lambda_n u_n$$

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \Rightarrow$$

$$u_2, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq W$$

$$\Rightarrow \mathcal{W} = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_m) \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m) \subseteq \mathcal{W}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  è sott. di gen. di  $\mathcal{W}$ .

$$\left( \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{K} : v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_m u_m \quad v_2 \neq 0 \right)$$

$$\text{se } \beta_2, \dots, \beta_m = 0 \text{ allora } \beta_1 \neq 0 \text{ e } v_2 = \beta_1 v_1 \quad (*)$$

per cui  $X$  è lin. dip. e abbiamo finito.

altrimenti, vale per esempio  $\beta_2 \neq 0$ :  $\exists \beta_2^{-1} \in \mathbb{K}$

$$\underline{\beta_2^{-1} v_2} = \beta_2^{-1} \beta_1 v_1 + \underbrace{\beta_2^{-1} \beta_2 u_2 + \dots + \beta_2^{-1} \beta_m u_m}_1 \Rightarrow$$

$$u_2 = -\beta_2^{-1} \beta_1 v_1 + \beta_2^{-1} v_2 - \dots - \beta_2^{-1} \beta_m u_m \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m)$$

$$v_1, u_2, \dots, u_m \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_m)$$

$$\Rightarrow \mathcal{W} = \mathcal{L}(v_1, u_2, u_3, \dots, u_m) \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_m) \subseteq \mathcal{W}$$

$$\Rightarrow \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_m\}$$
 è sott. di gen. di  $\mathcal{W}$ .

Continuiamo questo procedimento fin quando o non otteniamo qualcosa del tipo  $(*)$  oppure:  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  è sott. di gen. di  $\mathcal{W}$ .

Siccome  $m > m$ ,  $m$ -la  $v_{m+1} \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  per cui:

$X$  è lin. dipendente.  $\square$

$$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_m u_m$$

$$\text{se } \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0, \text{ allora: } v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

$$\Rightarrow X \text{ è lin. dip.}$$