Metodo Gauss-Jordan

 - 

Il metodo Gauss-Jordan per risolvere un sistema di equazioni consiste di due step:

(1) <u>riduzione a gradini</u> della matrice completa;

(2) **(i)** <u>SOSTITUZIONE A RITROSO</u> delle variabili che corrispondono ai pivot (**NON** libere);

oppure **(ii)** <u>riduzione completa a gradini</u> della matrice completa.

Infine, si scrive l'insieme S.

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad c^1 \longleftrightarrow c^2 \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} c^3 \to c^3 + c^1 \\ c^4 \to c^4 - c^1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

riga

$$r_4 \to r_4 - \tfrac{3}{2} r_2$$

$$(0,-3,3,2,-2,2) - \tfrac{3}{2}(0,-2,2,1,-1,1) =$$

$$= \left(0-0, -3+3, 3-3, 2-\tfrac{3}{2}, -2+\tfrac{3}{2}, 2-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \left(0, 0, 0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}\right) \quad c^4 \to c^4 + \tfrac{1}{6} c^3 \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ridotta a scalini. Procediamo con (ii)

$$\begin{matrix} c^1 \to -c^1 \\ c^2 \to -\tfrac{1}{2} c^2 \\ c^3 \to -\tfrac{1}{3} c^3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} c^2 \to c^2 + \tfrac{1}{2} c^3 \\ c^1 \to c^1 - c^3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad c^1 \to c^1 + c^2 \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc:c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \quad & \quad & x_3 & \quad & x_5 & \quad \end{matrix} \end{array} = C'$$

$$\Sigma': \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_5 + 1 \end{cases}$$

$$S = S' = \{(-x_3 - 1, x_3, x_3, x_5 + 1, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

Prodotto righe per colonne

DEF $A \in M_{m\times n}(K)$ $\quad B \in M_{p\times q}(K)$

La coppia di matrici (A,B) si dice conformabile se $n=p$, ossia il numero di colonne della prima matrice A è uguale al numero di righe della seconda matrice B.

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad (A,B)$ è conformabile, ma (B,A) no.

Prodotto scalare numerico, o standard, o canonico, o naturale su K^n.

$s: ((a_1,\dots,a_n), (b_1,\dots,b_n)) \in K^n \times K^n \longmapsto a_1b_1 + \dots + a_nb_n \in K.$

Esempio:

$\mathbb{R}^4$ $\quad s((3,1,-2,1),(-1,3,1,1)) = -\cancel{3}+\cancel{3}-2+1 = -1$

DEF Sia (A,B) una coppia conformabile, $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times q}(K)$.

Allora il prodotto righe per colonne è:

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} a^1b_1 & a^1b_2 & \dots & a^1b_q \\ a^2b_1 & a^2b_2 & \dots & a^2b_q \\ \vdots & & & \\ a^mb_1 & a^mb_2 & \dots & a^mb_q \end{pmatrix} \in M_{m\times q}(K)}$$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} a^1b_1 & a^1b_2 \\ a^2b_1 & a^2b_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$a^1b_1 = (2,-3,4)(-1,0,2) = -2+0+8 = 6$ $\qquad a^1b_2 = (2,-3,4)(1,1,-2) = 2-3-8 = -9$

$a^2b_1 = (0,1,7)(-1,0,2) = 0+0+14 = 14$ $\qquad a^2b_2 = (0,1,7)(1,1,-2) = 0+1-14 = -13$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 14 & -13 \end{pmatrix}$

Anche BA è conformabile, ma $AB \neq BA \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. L'operazione NON è commutativa.

Proprietà (no DIM):

(1) $A \in M_{m\times n}(K)$ $\quad B \in M_{n\times q}(K)$ $\quad C \in M_{q\times t}(K)$

$(AB)C = A(BC) \in M_{m\times t}(K)$

(2) $A, B \in M_{m\times n}(K)$ $\quad C \in M_{n\times q}(K)$

$(A+B)C = AC + BC$

Gruppo lineare generale

Prodotto righe per colonne $\circ : M_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K)$

$(M_n(K), \circ)$ struttura algebrica $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica elemento neutro

$Gl_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \exists B \in M_n(K) : AB = BA = I_n\}$ $\quad B = A^{-1} \quad I_n^{-1} = I_n$

$(Gl_n(K), \circ)$ è un gruppo non abeliano <u>gruppo lineare generale di ordine n su K</u>

$\Sigma : \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + \dots + a_n^m x_n = b_m \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Sigma : AX = b$ forma matriciale

PROP $\Sigma_0 : AX = 0$ $\quad S_0$ insieme delle soluzioni $\subseteq K^n$

Allora <u>S_0 è un sottospazio vettoriale di K^n</u>.

DIM Proviamo che S_0 è linearmente chiuso.

- $\underline{0} \in S_0$ banale $\Rightarrow S_0 \neq \emptyset$. ✓
- $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_0$ $\quad$ Th: $y + z \in S_0$

  $\Rightarrow A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \;\wedge\; A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$

  $\Rightarrow A\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] \overset{(2)}{=} A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0.$ ✓
- $\alpha \in K$ $\quad$ Th: $\alpha y \in S_0$

  $A\left[\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \alpha\left[A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \alpha \cdot 0 = 0.$ ▨

Teorema. (di Rouché-Capelli)

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma : AX = b \qquad (A, b) = C = (A \,\vdots\, b) \\ \Sigma \text{ è compatibile} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C). \end{array}}$$

DIM Prima o poi...

in realtà è alla prossima pagina

Geometria

Lez. 12 - 19/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Matrici e Rouché-Capelli

Teorema. (di Rouché-Capelli)

$$\boxed{\begin{array}{ll}\Sigma: \ AX = b & C = (A, b) = (A \,\vdots\, b) \\ \Sigma \text{ è compatibile} \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C).\end{array}}$$

DIM

$$\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + a^m_2 x_2 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

Cioè $x_1 \begin{pmatrix} a^1_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a^1_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a^1_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ← ho messo in evidenza le x

Σ è compatibile $:\iff \exists (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in K^n : A\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = b \iff b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C).$

Procediamo dimostrando l'ultima doppia-implicazione:

"$\Rightarrow$" $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \overset{\text{banale}}{\supseteq} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rango}(C) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \text{rango}(A).$

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \overset{\text{per ipotesi}}{=} \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \\ \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) \supseteq \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n).$ ▨

PROP $A \in M_{m \times n}(K)$

$\Sigma_0: \ AX = \underline{0} \qquad S_0 \subseteq K^n$ sottosp. vett. $\qquad C = (A, 0)$

$\tilde{T}_A: K^n \to K^m \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è un'app. lineare

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$\tilde{T}_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto {}^t\!\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\!\begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$

$\tilde{T}_A((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 3x_2 + 5x_3, \ x_1 - x_3).$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\tilde{T}_A((1,0,0)) = (-2, 1) \qquad \tilde{T}_A((0,1,0)) = (3, 0) \qquad \tilde{T}_A((0,0,1)) = (5, -1)$

$\text{Im}\,\tilde{T}_A = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \dim \text{Im}\,\tilde{T}_A = \text{rango}(A) \qquad \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{2}{\dim \text{Im}\,\tilde{T}_A} + \underset{1}{\dim \text{Ker}\,\tilde{T}_A}$

Scrivere sottosp. vett. come sistemi omogenei

OSS $\boxed{\Sigma_0: AX = 0 \quad S_0 = \operatorname{Ker} \tilde{T}_A \implies \dim S_0 = n - \text{rango}(A), \text{ dove } n \text{ è il numero di incognite.}}$

Esempio:

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \underbrace{1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; -1 \;\; -2}_{A} & & & & & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[a^3 \to a^3 - a^1]{a^2 \to a^2 - 2a^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^3 \to a^3 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

riduco completamente: $a^2 \to -a^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^1 \to a^1 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = -2\bar{x}_3 + \bar{x}_4 + 2\bar{x}_5 \\ x_2 = 3\bar{x}_3 - 3\bar{x}_4 - 3\bar{x}_5 \end{cases}$ ← indica che li abbiamo parametrizzati

$$S_0 = \{(-2\bar{x}_3 + \bar{x}_4 + 2\bar{x}_5,\ 3\bar{x}_3 - 3\bar{x}_4 - 3\bar{x}_5,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4,\ \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\}$$

Metto in evidenza: $\bar{x}_3(-2, 3, 1, 0, 0) + \bar{x}_4(1, -3, 0, 1, 0) + \bar{x}_5(2, -3, 0, 0, 1) \implies S_0 = \mathcal{L}((-2, 3, 1, 0, 0), (1, -3, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1))$

i 3 vettori sono lin. indip. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim S_0 = n - \text{rango}(A) = 5 - 2 = 3$ = num di variabili libere.

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ 5 incognite, $K = \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{a^1 \leftrightarrow a^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^3 \to a^3 - a^1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{a^4 \to a^4 + a^2 \\ a^3 \leftrightarrow a^4}]{a^3 \to a^3 - a^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^3 \to \frac{1}{5}a^3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[a^1 \to a^1 + a^3]{a^2 \to a^2 - 2a^3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^1 \to a^1 - 2a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = -3\bar{x}_3 + 4\bar{x}_5 \\ x_2 = \bar{x}_3 - 13/5\,\bar{x}_5 \\ x_4 = \frac{4}{5}\bar{x}_5 \end{cases}$

$$S_0 = \{(-3\bar{x}_3 + 4\bar{x}_5,\ \bar{x}_3 - 13/5\,\bar{x}_5,\ \bar{x}_3,\ \tfrac{4}{5}\bar{x}_5,\ \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\}$$

$\dim S_0 = n - \text{rango}(A) = 5 - 3 = 2$

$\bar{x}_3$	$\bar{x}_5$	
1	0	$(-3, 1, 1, 0, 0)$
0	1	$(4, -\frac{13}{5}, 0, \frac{4}{5}, 1)$

$\implies S_0 = \mathcal{L}((-3, 1, 1, 0, 0), (4, -\frac{13}{5}, 0, \frac{4}{5}, 1))$.

Teorema.

> Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale.
> Allora $\exists\, \Sigma_0 : AX = 0$ tale che $S_0 = W$.

DIM Sia $\dim W = h$ $\quad B_W = \{w_1, \dots, w_h\} \subseteq K^n$

$w_1 = (a^1_1, a^2_1, \dots, a^n_1)$
$\vdots$
$w_h = (a^1_h, a^2_h, \dots, a^n_h)$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a^1_1 & \cdots & a^1_h \\ a^2_1 & & a^2_h \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & & a^n_h \end{matrix}}_{\text{ha rango } h} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \end{pmatrix} = h$$

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n : (x_1, \dots, x_n) \in W \iff (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h)$. Riduco a gradini:

$$\begin{pmatrix} p^1_1 & \cdots\cdots & & b^1_1 x_1 + \dots + b^1_n x_n & \\ 0 & p^2_2 \cdots & & b^2_1 x_1 + \dots + b^2_n x_n & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \vdots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & p^h_h & b^h_1 x_1 + \dots + b^h_n x_n & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \left\{\begin{matrix} b^{h+1}_1 x_1 + \dots + b^{h+1}_n x_n = 0 \\ \vdots \\ b^n_1 x_1 + \dots + b^n_n x_n = 0 \end{matrix}\right. & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & & \end{pmatrix}$$ ← questo è il sistema trovato

$\blacksquare$

Rappresentazione Cartesiana e Parametrica

Proviamo quello appena discusso con qualche esempio che speriamo possa essere chiarificatore.

Esempio:

- $W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad W = \mathcal{L}((1,0,1,1),(2,1,2,3)) \qquad \dim W = 2$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{matrix} a^3 \to a^3 - a^1 \\ a^4 \to a^4 - a^1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad a^4 \to a^4 - a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- $W = \mathcal{L}((2,1,0,3,1),(2,-1,1,4,0)) \subseteq \mathbb{R}^5 \qquad \dim W = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^1 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^2 \to a^2 - 2a^1 \\ a^4 \to a^4 - 3a^1 \\ a^5 \to a^5 - a^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^3 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^3 \to a^3 - 4a^2 \\ a^4 \to a^4 - 7a^2 \\ a^5 \to a^5 - a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_5 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

OSS

$(V,K,+,\cdot)$ $\dim V = n$ $\quad U \subseteq V$ sottosp. vett. di V, $\dim U = h \qquad B_V = (e_1, \dots, e_n)$

$\Phi_B : V \to K^n \qquad \Phi_B(U) = W \subseteq K^n$ sottosp. vett.

$W = S_0 \quad \Sigma_0 : AX = 0$ rappresentazione cartesiana di U nella base B.

Esempio:

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad B = (1, x, x^2)$

$U = \mathcal{L}(1-x) \quad \dim U = 1 \qquad 1 - x = 1 \cdot 1 + (-1)x + 0x^2$

$\Phi_B : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3 \quad \Phi_B(U) = \mathcal{L}(\Phi_B(1-x)) = \mathcal{L}((1,-1,0)) = W.$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} a^2 \to a^2 + a^1 \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

DEF

Se alle incognite vengono assegnate variabili parametrizzate, si parla di rappresentazione parametrica.

$w_1 = (a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n), \dots, w_h = (a^h_1, a^h_2, \dots, a^h_n)$

$(x_1, \dots, x_n) \in W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h) \iff \exists\, t_1, \dots, t_h \in K : (x_1, \dots, x_n) = t_1(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n) + \dots + t_h(a^h_1, a^h_2, \dots, a^h_n).$

$$\iff \begin{cases} x_1 = a^1_1 t_1 + \dots + a^h_1 t_h \\ x_2 = a^1_2 t_1 + \dots + a^h_2 t_h \\ \vdots \\ x_n = a^1_n t_1 + \dots + a^h_n t_h \end{cases} \qquad t_i \text{ parametri} \in K$$

Nell'esempio precedente: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Teorema.
(di Cramer)

$\Sigma : AX = b \qquad A \in M_n(K)$ ← qui il prodotto righe per colonne è un'operazione interna

Se $A \in Gl_n(K)$, ovvero al gruppo delle matrici invertibili, allora $|S| = 1$.

DIM

Per ipotesi $\exists\, A^{-1} : AA^{-1} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$AX = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}b \quad \overset{\text{associatività}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n}X = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}b$

Geometria

Lez. 13 - 26/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Determinante di una matrice

DEF $A \in M_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$, K campo $\quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$

(1) A è **simmetrica** $:\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^i_j = a^j_i$, quindi $A = {}^tA$;

(2) A è **triangolare inferiore** (o **superiore**) $:\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $j > i \Rightarrow a^i_j = 0$ $\quad (a^j_i = 0)$;

(3) A è **diagonale** $:\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j \Rightarrow a^i_j = 0$;

(4) A è **antisimmetrica** $:\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^j_i = -a^i_j$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1) $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) inf $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) sup $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4)

Gli elementi sulla diagonale devono essere necessariamente pari a zero. Perché?

Siano ora $\mathbb{N}^*_n = \{1,\dots,n\}$ e $P_n = \{ f : \mathbb{N}^*_n \to \mathbb{N}^*_n \mid f \text{ biettiva} \}$

$n = 1 \Rightarrow id : \{1\} \mapsto \{1\}$

$n = 2 \Rightarrow id : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{matrix}$, $f_1 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{matrix}$

$n = 3 \Rightarrow$ f_0, $id : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix}$ $\quad f_1 : \begin{matrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}$ $\quad f_2 : \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix}$

$f_3 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{matrix}$ $\quad f_4 : \begin{matrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{matrix}$ $\quad f_5 : \begin{matrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{matrix}$

OSS Se f deve essere biettiva, allora vi sono $n!$ modi di costruire l'applicazione.

Infatti: $\left.\begin{matrix} 1 \mapsto f(1) & n \text{ possibili scelte} \\ 2 \mapsto f(2) & n-1 \quad " \quad " \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \mapsto f(n-1) & 2 \quad " \\ n \mapsto f(n) & 1 \quad " \end{matrix}\right\} n! \text{ scelte}$

DEF Diciamo che $f \in P_n$ ha una **inversione** $:\Leftrightarrow \exists i,k \in \{1,\dots,n\} : i < k \wedge f(i) > f(k)$.

$\text{segno}(f) = \begin{cases} -1, & \text{se } \# \text{ inversioni dispari} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Nell'esempio $n=3$, f_0 non ha inversioni, f_1 ne ha una, f_2 tre, f_3 ha una inversione, f_4 ne ha due, f_5 due.

Possiamo, dunque, dare la definizione formale di **determinante** di una matrice:

DEF **det**: $A \in M_n(K) \mapsto \underset{|A|}{\det(A)} \in K$

$$\det(A) = \left(\sum_{f \in P_n} \text{segno}(f)\, a^1_{f(1)} a^2_{f(2)} a^3_{f(3)} \cdots a^{n-1}_{f(n-1)} a^n_{f(n)} \right)$$

N.B. Non abbattetevi se non vi è chiaro, non useremo mai questa cosa. ☺

Esempio:

- Poniamo $n=1$. Allora $A = (a^1_1)$ $\quad |A| = a^1_1$

  Se $A = (-3)$, $|A| = -3$
- Poniamo $n=2$. $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$

  $A = \begin{pmatrix} \pi & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 = -\pi + 6$
- Se $n=3$, $|A| = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$

Modi per determinare il determinante

("determinano il determinante" )

Per matrici 3×3, è possibile applicare la **regola di Sarrus**:

$$\left(\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{matrix}$$

— addiziono
— sottraggo

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 2+3+0-6-4-0 = -5$.

Proprietà: $A \in M_n(K)$

- $\det(A) = \det({}^tA)$;
- Se $B \in M_n(K)$ è la matrice ottenuta da A mediante un'operazione elementare:
  - (i) del primo tipo: $\underline{a}^i \longleftrightarrow \underline{a}^k$, allora $|B| = -|A|$;
  - (ii) del secondo tipo: $\underline{a}^i \xrightarrow{\neq 0} \lambda\underline{a}^i$, allora $|B| = \lambda|A|$;
  - (iii) del terzo tipo: $\underline{a}^i \to \underline{a}^i + \lambda\underline{a}^k$, allora $|B| = |A|$.

OSS Se B è ottenuta da A mediante op. elementari, allora $|A| \neq 0 \iff |B| \neq 0$.

DEF Cancellando la riga e la colonna su cui sta l'elemento a^k_j ottengo una sottomatrice quadrata di ordine $n-1$, che denoto con M^k_j e chiamo **minore complementare** di a^k_j.

$|M^k_j|$ $\quad A^k_j = (-1)^{k+j}|M^k_j|$ **complemento algebrico** di a^k_j.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad a^3_2 = -6 \quad M^3_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |M^3_2| = 2 \quad A^3_2 = (-1)^{3+2}\cdot 2 = -2$.

Teorema di Laplace.

$A \in M_n(K) \quad n \in \mathbb{N} \quad K$ campo

- $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $|A| = a^k_1 A^k_1 + a^k_2 A^k_2 + \dots + a^k_n A^k_n$
- $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $|A| = a^1_j A^1_j + a^2_j A^2_j + \dots + a^n_j A^n_j$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k=1$ (scelta **NON** ottimale)

$M^1_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^1_1 = (-1)^2|M^1_1| = -1 \quad A^1_2 = (-1)^3|M^1_2| = -3 \quad A^1_3 = (-1)^4|M^1_3| = -3 \quad \Rightarrow \quad |A| = 2(-1)+(-1)(-3)+2(-3) = -5$.

Binet e Laplace

PROP Sia $B \in M_n(K)$ triangolare. Allora $|B| = b^1_1 b^2_2 \dots b^n_n$.

DIM Per induzione:

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots \\ 0 & \begin{pmatrix} b^2_2 & & \\ 0 & \ddots & \\ \dots & 0 & b^n_n \end{pmatrix} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} \quad B' \in M_{n-1}(K)$$

$n = 1$ $\quad B = (b^1_1)$ $\quad |B| = b^1_1$ ✓

$n > 1$

$n-1 \Rightarrow n$ $\quad |B'| = b^2_2 b^3_3 \dots b^n_n$ per ipotesi.

Applichiamo il Teorema di Laplace sviluppando $|B|$ rispetto alla prima colonna: $J = 1$.

$$|B| = b^1_1 B^1_1 + 0 + \dots + 0 = b^1_1 |B'| (-1)^{1+1} = b^1_1 b^2_2 \dots b^n_n.$$

Esempio:

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad |B| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad |B| = 0$

Corollario.

Sia B una matrice a gradini ottenuta da $A \in M_n(K)$.

$|A| \neq 0 \iff |B| \neq 0 \iff n = \#\text{pivot } B \iff \text{rango}(B) = n = \text{rango}(A)$.

Inoltre, possiamo osservare che $|A| = 0 \iff \text{rango}(A) < n$.

Esempio:

$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & -3 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ per quali valori di t la matrice A ha rango massimo?

$|A_t| = -3t + t + 0 - 6 - 0 - 0 \neq 0 \Rightarrow -2t - 6 \neq 0 \Rightarrow t \neq -3 \iff \text{rango}(A_t) = 3$.

Teorema di Binet.

$$\boxed{A, B \in M_n(K) \qquad |AB| \overset{\in M_n(K)}{=} |A||B|}$$

Secondo teorema di Laplace.

$$\forall k, h \in \{1, \dots, n\}, \quad k \neq h \Rightarrow a^k_1 A^h_1 + \dots + a^k_n A^h_n = 0 \qquad \leftarrow \text{tolgo la riga delle } h$$

$$\forall J, \ell \in \{1, \dots, n\}, \quad J \neq \ell \Rightarrow a^1_J A^1_\ell + \dots + a^n_J A^n_\ell = 0 \qquad \leftarrow \text{tolgo la colonna delle } \ell$$

Teorema generalizzato di Laplace.

$$\delta^h_k = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

simbolo di Kronecker

$$\forall k, h \in \{1, \dots, n\}, \quad a^k_1 A^h_1 + \dots + a^k_n A^h_n = \delta^k_h |A|$$

$$\forall J, \ell \in \{1, \dots, n\}, \quad a^1_J A^1_\ell + \dots + a^n_J A^n_\ell = \delta^J_\ell |A|$$

Invertibilità

Prima di procedere, ricordiamo: $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Longleftrightarrow \exists B = A^{-1} \in M_n(K) : AB = I_n = BA$

Teorema. $\boxed{\text{Sia } A \in M_n(K). \text{ Allora: } \exists A^{-1} \Longleftrightarrow |A| \neq 0.}$

DIM

"$\Rightarrow$"

$$AA^{-1} = I_n \quad |A||A^{-1}| \overset{\text{Binet}}{=} |AA^{-1}| = |I_n| = 1 \overset{|A^{-1}| = |A|^{-1}}{\Longrightarrow} |A| \neq 0.$$

"$\Leftarrow$"

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & & & \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix} \qquad \text{Th: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t(A^{\#})$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|A|} \underbrace{\begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \dots & A^n_1 \\ \vdots & & & \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^n_n \end{pmatrix}}_{= B} \qquad \text{Th: (1) } AB = |A| I_n \qquad \text{(2) } BA = |A| I_n$$

Uso il teorema generalizzato di Laplace: per esempio, $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_n)(A^2_1, A^2_2, \dots, A^2_n) = a^1_1 A^2_1 + a^1_2 A^2_2 + \dots + a^1_n A^2_n = \delta^1_2 |A| = 0$.

$$AB = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = I_n$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2+3+0-6-4-0 = -5 \neq 0.$$

$$A^1_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A^1_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^1_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^2_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^2_2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A^2_3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^3_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A^3_2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A^3_3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 & -2/5 \\ 3/5 & -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = B$$

È possibile controllare se i calcoli sono giusti. Ad esempio, $(a^1_1, a^1_2, a^1_3)(b^1_1, b^2_1, b^3_1) = (2, -1, 2)\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{5}{5} = 1$ ✓

Geometria

Lez. 14 - 28/04

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Orlati di una matrice

DEF $A \in M_{m,n}(K)$ $\quad A = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$

Una sottomatrice quadrata di A sarà detta un "minore di A".

Se un minore M di A ha ordine $k < \min\{m,n\}$, possiamo individuare un minore M' di A di ordine $k+1$ di cui M è sottomatrice. Allora M' si dice orlato di M in A.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ devo necessariamente prendere le colonne (la seconda e la quarta) e le righe (la prima e la terza) su cui vi sono gli elementi di M. Per M', posso scegliere 1ª o 3ª colonna, e 2ª riga. Ad esempio, $M' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

ha ordine 2
$2 < \min\{3,4\} = 3$

M

Teorema degli orlati (o di Kronecker).

$A \in M_{m,n}(K)$
Il rango di A è uguale a $k \le \min\{m,n\}$ $\iff$
$\exists$ minore M di ordine k: $|M| \neq 0$ e:
- $k = \min\{m,n\}$ $\vee$
- $k < \min\{m,n\}$ e tutti gli orlati di M hanno determinante nullo.

Ricordiamo:
Sia $B \in M_n(K)$. Abbiamo visto che $\text{rango}(B) = n \iff |B| \neq 0$.

... ancora una volta senza DIM

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Scelgo $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|M| = 2 \neq 0$. Provo quindi $k = 2$.

  Prendo 3ª riga e 3ª colonna. $M' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $|M'| = -1+4+0-0-1-2 = 0$

  Prendo 4ª riga e 3ª colonna. $M'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|M''| = -1+2+0-0-0-2 = -1 \neq 0$. Allora provo $k = 3$.

  Prendo 3ª riga (unica rimasta) e 1ª colonna. $M''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Notiamo che 3ª riga = 2ª riga − 1ª riga. Stesso dicasi per l'eventuale M^{IV}.

  Ma allora $|M'''| = 0 = |M^{IV}|$ $\Rightarrow$ $\text{rango}(A) = k = 3$.

- $\mathbb{R}^3$ $\quad W = \mathcal{L}((1,-2,1))$ $\quad \dim W = 1$

  Posto $M = (-2)$ $\quad |M| = -2 \neq 0$,

  $(x_1,x_2,x_3) \in W \iff \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \iff |M'| = \left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ -2 & x_2 \end{pmatrix}\right| = 0$ e $|M''| = \left|\begin{pmatrix} -2 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}\right| = 0 \iff \begin{cases} x_2 + 2x_1 = 0 \\ -2x_3 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$

- $V = \mathbb{R}[x]_{\le 4}$ $\quad \dim V = 5$ $\quad W = \mathcal{L}(1+x,\ 1-x+x^3,\ x^2-x^4)$ $\quad B = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

  $\Phi_B(1+x) = (1,1,0,0,0)$ $\quad \Phi_B(1-x+x^3) = (1,-1,0,1,0)$ $\quad \Phi_B(x^2-x^4) = (0,0,1,0,-1)$ $\quad U = \Phi_B(W) = \mathcal{L}((1,1,0,0,0),(1,-1,0,1,0),(0,0,1,0,-1))$.

  Trovo una rappresentazione cartesiana di U, che chiamerò anche rappresentazione cartesiana di $W = \Phi_B^{-1}(U)$ in B.

  $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 \end{pmatrix} = 3 \iff M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \ \wedge\ |M'| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix}\right| = 0 \ \wedge\ |M''| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 \end{pmatrix}\right| = 0 \iff$

  $\iff |M'| = (-1)^6 \cdot 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix}\right| = -x_4 + x_1 + x_2 - x_4$ $\ \wedge\ |M''| = (-1)^6 \cdot 1 \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix}\right| + (-1)^7(-1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\right| = (-1)^6\left(x_5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = -2x_5 - 2x_3$.

  Quindi: $\begin{cases} -2x_4 + x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_5 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -x_5 \end{cases}$.

Matrici associate

Ricordiamo:

$A \in M_{m,n}(K)$ $\quad \tilde{T}_A : (x_1, \dots, x_n) \in K^n \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$ è un'app. lineare

$\operatorname{Im} \tilde{T}_A = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ $\quad \dim \operatorname{Im} \tilde{T}_A = \text{rango}(A)$ $\quad \operatorname{Ker} \tilde{T}_A : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ $\quad \dim \operatorname{Ker} \tilde{T}_A = n - \text{rango}(A)$

V, W campo K $\quad \dim V = n$, $\dim W = m$ $\quad T : V \to W$ app. lineare

$B = (e_1, \dots, e_n)$ $\quad B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ $\quad T(e_1) \equiv_{B'} (a^1_1, \dots, a^m_1)$, $\dots$, $T(e_n) \equiv_{B'} (a^1_n, \dots, a^m_n)$

Teorema. $\forall u \in V$, considero $u \equiv_B (x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u)$ e $T(u) \equiv_{B'} (y_1, \dots, y_m) = \Phi_{B'}(T(u))$

Allora: $\exists!\, A \in M_{m,n}(K)$ tale che: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ rappresentazione di T in B e B'

DEF A si dice matrice associata a T in B e B': $\quad A = M_{BB'}(T)$

DIM $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$ $\quad u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$T(u) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) = x_1 (a^1_1 e'_1 + \dots + a^m_1 e'_m) + \dots + x_n (a^1_n e'_1 + \dots + a^m_n e'_m) =$

$= a^1_1 x_1 e'_1 + \dots + a^m_1 x_1 e'_m + \dots + a^1_n x_n e'_1 + \dots + a^m_n x_n e'_m = (a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n) e'_1 + \dots + (a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n) e'_m \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ← abbiamo dimostrato che tale A esiste, ora manca da dimostrare l'unicità!

Sia $B \in M_{m,n}(K)$: $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots & b^1_n \\ \vdots & & \\ b^m_1 & \dots & b^m_n \end{pmatrix}$

$u = e_1 \equiv_B (1, 0, \dots, 0)$ $\qquad T(e_1) \equiv_{B'} (a^1_1, \dots, a^m_1)$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$e_n \equiv_B (0, \dots, 0, 1)$ $\qquad T(e_n) \equiv_{B'} (a^1_n, \dots, a^m_n)$

$\underline{b}_1 = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{a}_1$, $\dots$, $\underline{b}_n = B\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{a}_n$ $\quad \Rightarrow \quad B = A.$ ▨

Esempio:

$T : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto a + b + (a - b)x + (2a + b)x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ app. lineare

$B = ((1,1), (1,-1))$ $\quad \Phi_B : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right) \in \mathbb{R}^2$ ← $(a, b) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + \beta + \beta \Rightarrow \beta = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ \alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$

$B' = (1, x, x^2)$ $\quad \Phi_{B'} : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longmapsto (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ ← base canonica, prendo i coefficienti

$T((1,1)) = 2 + 3x^2 \equiv_{B'} (2, 0, 3)$

$T((1,-1)) = 2x + x^2 \equiv_{B'} (0, 2, 1)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ← Componenti delle immagini dei vettori di B in B'

OSS

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & W \arrow[d, "\Phi_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "\tilde{T}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n) = u$ $\qquad u \equiv_B (x_1, \dots, x_n)$

$T(\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = T(u)$ $\qquad \Phi_{B'} \circ T \circ \Phi_B^{-1} = \tilde{T}_A$

$\Phi_{B'}(T(\Phi_B^{-1}(x_1, \dots, x_n))) = \Phi_{B'}(T(u)) = (y_1, \dots, y_m) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Geometria

Lez. 15 - 03/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Matrici di passaggio

Continuiamo il discorso sulle matrici associate introdotto nella pagina precedente, usando le stesse notazioni.
Possiamo distinguere due casi:

(1) $id_V : \underset{B}{V} \longrightarrow \underset{\bar{B}}{V}$ $\qquad P = M_{B\bar{B}}(id_V) \in GL_n(K)$ matrice di passaggio da B a $\bar{B}$.

$u \in V \qquad (x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u) \qquad (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \Phi_{\bar{B}}(u) = \Phi_{\bar{B}}(id_V(u))$.

(2) $T : \underset{B = \bar{B}}{V \longrightarrow V}$ endomorfismo $\qquad A = M_B(T)$

Esempio:

(1) $V = M_2(\mathbb{R}) \quad id_V : V \to V$

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \Phi_B : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \longmapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$\bar{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \Phi_{\bar{B}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \longmapsto (b, a, c-a, d-b-c+a) \in \mathbb{R}^4$

$\Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (0, 1, -1, 1) \qquad \Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (0, 0, 1, -1)$

$\Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1, 0, 0, -1) \qquad \Phi_{\bar{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (0, 0, 0, 1)$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \exists P^{-1}$

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \overbrace{(P^{-1}P)}^{= I_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = M_{\bar{B}B}(id_V)$$

OSS

- $T : \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W}$ isomorfismo
  $A = M_{BB'}(T) \quad \exists A^{-1} \quad A^{-1} = M_{B'B}(T^{-1})$
- $T : \underset{B}{V} \to \underset{B'}{W} \qquad T' : \underset{B'}{W} \to \underset{B''}{U}$
  $A = M_{BB'}(T) \qquad A' = M_{B'B''}(T') \qquad A'A = M_{BB''}(T' \circ T)$

Esempio:

(2) $T : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (a-b, a+b) \in \mathbb{R}^2$

$B = ((1,1), (1,0)) \qquad \Phi_B : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (b, a-b) \in \mathbb{R}^2$

$(a,b) = x_1(1,1) + x_2(1,0) \Rightarrow (a,b) = (x_1 + x_2, x_1) \Rightarrow \begin{cases} a = x_1 + x_2 \\ b = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = a - b \end{cases}$

$T((1,1)) = (0,2) \equiv_B (2,-2) \qquad T((1,0)) = (1,1) \equiv_B (1,0) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$u \in \mathbb{R}^2, \ u \equiv_B (x_1, x_2) \qquad T(u) \equiv_B (y_1, y_2) \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$u \in V, \quad u \equiv_B (x_1, \dots, x_n) \qquad\qquad u \equiv_{\bar{B}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$T(u) \equiv_B (y_1, \dots, y_n) \qquad\qquad T(u) \equiv_{\bar{B}} (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \to$

si ricorda che P è la matrice di passaggio

$\bar{A} P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow (P^{-1} \bar{A} P) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

OSS

$T : V_{B_{\bar{B}}} \to V_{B_{\bar{B}}}$ endom. $\quad \dim V = n$

$A = M_B(T) \qquad \bar{A} = M_{\bar{B}}(T) \Rightarrow \exists P \in GL_n(K) : A = P^{-1} \bar{A} P$.

Vale anche il viceversa: $Q = P^{-1} \Rightarrow \bar{A} = Q^{-1} A Q$.

Matrici simili

DEF $A, \bar{A} \in M_n(K)$

A e $\bar{A}$ sono **simili** $:\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(K) : A = P^{-1}\bar{A}P$

OSS Per definizione, A è simile a sè, infatti è sufficiente considerare $P = I_n$.

Esempio:

$T : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2a+b, 2b)$ $\quad B = ((1,0),(0,1))$ $\quad \bar{B} = ((1,1),(-1,1))$

$T((1,0)) = (2,0)$ $\quad T((0,1)) = (1,2)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$T((1,1)) = (3,2) \equiv_{\bar{B}} \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad T((-1,1)) = (-1,2) \equiv_{\bar{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$Q = M_{\bar{B}B}(id_{\mathbb{R}^2})$ $\quad (1,1) \equiv_B (1,1)$ $\quad (-1,1) \equiv_B (-1,1)$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = Q^{-1} = \dfrac{Q^{*}}{|Q|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A = P^{-1}\bar{A}P \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

Autovalori, Autovettori e Autospazi

DEF $T : V \to V$ endomorfismo $\quad \forall \lambda \in K \quad U_\lambda = \{ u \in V \mid T(u) = \lambda u \} \ni \underline{0}$ $\quad T(\underline{0}_V) = \underline{0}_V = \lambda \cdot \underline{0}_V$

$\lambda \in K$ si dice **autovalore** di T se $\{\underline{0}_V\} \subsetneq U_\lambda$ e i vettori **NON** nulli di U_λ si dicono **autovettori** di autovalore λ.

PROP U_λ è sottospazio vettoriale.

DIM $\underline{0}_V \in U_\lambda \Rightarrow U_\lambda \neq \emptyset$ $\qquad$ Proviamo che è linearmente chiuso

$u, v \in U_\lambda \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} T(u) = \lambda u, T(v) = \lambda v \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$ ✓

$\alpha \in K, u \in U_\lambda \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha(\lambda u) = (\alpha\lambda)u = (\lambda\alpha)u = \lambda(\alpha u)$ ▨

DEF Se $\lambda \in K$ è autovalore, U_λ si dice **autospazio** di autovalore λ.

PROP λ e λ' autovalori di T $\quad \lambda \neq \lambda'$

Allora $U_\lambda + U_{\lambda'} = U_\lambda \oplus U_{\lambda'}$.

DIM $u \in U_\lambda \cap U_{\lambda'} \Rightarrow u \in U_\lambda \wedge u \in U_{\lambda'} \Rightarrow \lambda u = T(u) = \lambda' u \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda u - \lambda' u = \underline{0} \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \lambda')}_{\neq 0 \text{ per ipotesi}} u = \underline{0} \Rightarrow u = \underline{0}$, cioè la somma è diretta ▨

Esempio:

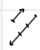
$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$1 \longmapsto 1+x$

$x \longmapsto 1-x$

$x^2 \longmapsto -3x^2$

$x^2 \in U_{-3}$



Caratterizzazione degli autovalori

PROP $T: V \to V \quad B$ base di $V \quad A = M_B(T)$

(i) $\forall \lambda \in K$, λ è autovalore di $T \iff |A - \lambda I_n| = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in K$, $\Phi_B(U_\lambda)$ è l'insieme delle soluzioni di $(A - \lambda I_n)X = 0$.

DEF Se λ è autovalore, i vettori di $\Phi_B(U_\lambda)$ si dicono componenti dei suoi autovettori.

DIM (i) $u \in V =_B (x_1, \dots, x_n) \quad \Phi_B(T(u)) = \Phi_B(\lambda u) = \lambda \Phi_B(u) = \lambda(x_1, \dots, x_n)$

$\lambda \in K$ autovalore di $T \overset{def}{\iff} \exists u \in U_\lambda \setminus \{0_V\} \iff \exists u \in V \setminus \{0_V\} : T(u) = \lambda u \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff$

$\iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}: A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$, cioè $(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \overset{\text{Teorema di Cramer}}{\iff} |A - \lambda I_n| = 0$

$\exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0\}: (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Insieme delle soluzioni $S \neq \{0\} \iff \text{rango}(A - \lambda I_n) < n \iff |A - \lambda I_n| = 0$

(ii) No dim ■

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 3 è autovalore ed è unico.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 2, −1, 7 sono autovalori e ciascuno genera un autospazio di dimensione 1.

- $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \quad B = (1, x, x^2) \quad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$T(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 = 1 + 2x^2 \qquad T(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 = x - x^2 \qquad T(x^2) = -1 \cdot 1 + (-1)x + (-1)x^2 = -1 - x - x^2$

$\forall \lambda \in K$, λ è autovalore di $T \iff \underbrace{|A - \lambda I_3|}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$ equazione caratteristica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - 1] = (1-\lambda)(\cancel{-1} + \lambda^2 + \cancel{1}) = \lambda^2(1-\lambda)$$

$\underbrace{\lambda^2(1-\lambda)}_{\text{polinomio caratteristico di } T} = 0 \iff \lambda = 0 \quad U_0: (A - 0I_3)X = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = x_2 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$

$\lor$

$\lambda = 1 \quad U_1: (A - 1I_3)X = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-x_3 = 0} \\ -x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\dim U_1 = 3 - 2 = 1$

$\Phi_B(U_0) = \mathcal{L}((1,1,1)) \Rightarrow U_0 = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$

$\Phi_B(U_1) = \mathcal{L}((1,2,0)) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(1 + 2x)$

$\underset{1}{U_0} + \underset{1}{U_1} = \underset{2}{U_0 \oplus U_1} = \mathcal{L}(1 + x + x^2, 1 + 2x) \subsetneq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Molteplicità e radici

DEF K $\quad p(x) \in K[x]$

$b \in K$ si dice radice (o soluzione) di $p(x) \iff p(b) = 0$. Sia b radice di $p(x)$. Allora,
la molteplicità algebrica di b è il massimo numero intero h: $\exists q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)^h$.

Cioè, quante volte $(x-b)$ divide $p(x)$.

PROP $T: V \to V$, $\bar{\lambda}$ autovalore di T.
Allora $m_a(\bar{\lambda}) \geq m_g(\bar{\lambda}) = \dim U_{\bar{\lambda}} \geq 1$

DIM NO!

Sono sfinitoooooooo... 01:05, 03/05/2023

PROP Con le stesse notazioni di sempre:

$$A = M_B(T) \wedge \bar{A} = M_{\bar{B}}(T) \implies |A - \lambda I_n| = |\bar{A} - \lambda I_n|$$

DIM $A = P^{-1}\bar{A}P$

$$|A - \lambda I_n| = |P^{-1}\bar{A}P - \lambda P^{-1} I_n P| = |P^{-1}(\bar{A} - \lambda I_n)P| \overset{\text{Teorema di Binet}}{=} \underbrace{|P^{-1}|}_{\in K}\underbrace{|\bar{A} - \lambda I_n|}_{\in K}\underbrace{|P|}_{\in K} = \overset{|P|^{-1}}{|P^{-1}|}|P||\bar{A} - \lambda I_n| = |\bar{A} - \lambda I_n|. \blacksquare$$

できました!
おやすみ zzz

Geometria

Lez. 16 - 05/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Ancora autovalori, App. diagonalizzabili

PROP $T: V \to V$ endomorfismo

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T a due a due distinti.

$v_1 \in U_{\lambda_1} \setminus \{0\}, \dots, v_t \in U_{\lambda_t} \setminus \{0\} \implies \{v_1, \dots, v_t\}$ lin. indipendente.

DIM Per induzione

$t = 1 \qquad v_1 \neq 0 \implies \{v_1\}$ lin. indip.

$[t > 1,\ t-1 \implies t]$ Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = 0$.

(1) $0 = T(0) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(v_{t-1}) + \alpha_t T(v_t) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t$

(2) $\lambda_t (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \lambda_t 0 = 0$

Da $\underset{\text{sottraggo}}{(2) - (1)}$ ottengo: $\alpha_1 (\lambda_t - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_{t-1} (\lambda_t - \lambda_{t-1}) v_{t-1} = 0 \overset{\text{per hp di induzione}}{\implies} \begin{cases} \alpha_1 \overbrace{(\lambda_t - \lambda_1)}^{\neq 0} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} \underbrace{(\lambda_t - \lambda_{t-1})}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} = 0 \end{cases}$

Ma allora $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{t-1} + \alpha_t v_t = 0 \implies \alpha_t \overbrace{v_t}^{\neq 0} = 0 \implies \alpha_t = 0$. ▨

Corollario. $T: V \to V$ endomorfismo. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ autovalori a due a due distinti. Allora, $U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_t} = U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t}$.

DIM Tesi: $\forall i \in \{1, \dots, t\},\ U_{\lambda_i} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{i-1}} + U_{\lambda_{i+1}} + \dots + U_{\lambda_t}) = 0$

Poniamo $i = 1$. Gli altri casi sono del tutto analoghi.

$u \in U_{\lambda_1} \cap (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t}) \implies u \in U_{\lambda_1} \wedge u \in U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t} \implies u \in U_{\lambda_1} \wedge \exists u_2 \in U_{\lambda_2}, \dots, u_t \in U_{\lambda_t} : u = u_2 + \dots + u_t \implies$

$\implies \underset{1}{u} \underset{-1}{-u_2} - \dots \underset{-1}{-u_t} = 0 \implies u = 0,\ u_2 = \dots = u_t = 0$ dalla PROP precedente

(altrimenti, $u, u_2, \dots, u_t$ dovrebbero essere lin. indip., impossibile per la presenza di coefficienti NON nulli). ▨

DEF $T: V \to V$ endomorfismo

T si dice diagonalizzabile $:\iff \exists \bar{B}$ base di V : $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T)$ è diagonale $\qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \bar{a}_n \end{pmatrix}$

Cioè, se una qualsiasi sua matrice associata è simile a una matrice diagonale.

DEF $A \in M_n(K)$

A è diagonalizzabile $:\iff A$ è simile a una matrice diagonale, ossia: $\exists P \in GL_n(K) : A = P^{-1} \bar{A} P$,

oppure, $Q = P^{-1}$ e $Q^{-1} A Q = \bar{A}$ (dove $\bar{A}$ è una matrice diagonale).

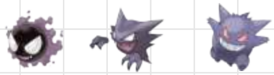
Q è detta matrice che diagonalizza A.

Quindi: T è diagonalizzabile $:\iff T$ ha una matrice associata diagonale $\iff$

$\iff$ ogni sua matrice associata è diagonalizzabile.

Teorema Spettrale brrr..

Teorema spettrale.



$T: V \to V$ endomorfismo $\dim V = n$ K campo, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V, $A = M_B(T)$.

Sono del tutto equivalenti tra loro:

(a) A è diagonalizzabile

(b) $\exists B'$ base di V costituita da autovettori (base spettrale)

(c) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, $\sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n$

(d) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

(e) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T, (i) $\sum_{i=1}^{t} ma(\lambda_i) = n$ $\wedge$ (ii) $\forall i \in \{1, \dots, t\}$, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

DIM

(a)<=>(b) T è diagon. $\iff$ $\exists$ base spettrale di V

"=>" Per ipotesi $\exists \bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base di V tale che $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \bar{a}'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}^n_n \end{pmatrix}$ diagonale.

Quindi $T(\bar{e}_1) = \bar{a}'_1 \bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \dots + 0\bar{e}_n = \bar{a}'_1 \bar{e}_1 \Rightarrow \bar{e}_1$ è autovettore di autovalore $\bar{a}'_1$.

$\vdots$

$T(\bar{e}_n) = 0\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \dots + \bar{a}^n_n \bar{e}_n = \bar{a}^n_n \bar{e}_n \Rightarrow \bar{e}_n$ è autovettore di autovalore $\bar{a}^n_n$.

Ma allora $\bar{B}$ è base spettrale.

"<=" Se $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ è base spettrale, allora $T(\bar{e}_1) = \lambda_{J_1} \bar{e}_1, \dots, T(\bar{e}_n) = \lambda_{J_n} \bar{e}_n$, con $\lambda_{J_1}, \dots, \lambda_{J_n} \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$

e quindi $\bar{A} = M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_{J_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{J_n} \end{pmatrix}$ è diagonale ✓

(b)=>(c) $\exists \bar{B}$ base spettrale $\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n$

Riordiniamo i vettori di $\bar{B}$ in modo che quelli relativi allo stesso autovalore siano vicini:

$\bar{B} = (\underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_2}}_{\lambda_2}, \dots, \underbrace{\overbrace{\dots\dots}^{r_t}}_{\lambda_t})$ $\quad r_1 + r_2 + \dots + r_t = n$

$U_{\lambda_1} \Downarrow \quad U_{\lambda_t} \Downarrow$

$\dim U_{\lambda_1} \geq r_1, \dots\dots\dots, \dim U_{\lambda_t} \geq r_t$

la somma degli autospazi è diretta

$\Rightarrow n \geq \dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_t} \geq r_1 + \dots + r_t = n \Rightarrow n = \underbrace{\dim U_{\lambda_1}}_{mg(\lambda_1)} + \dots + \underbrace{\dim U_{\lambda_t}}_{mg(\lambda_t)}$. ✓

(c)=>(d) $\sum_{i=1}^{t} mg(\lambda_i) = n \Rightarrow U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

Sappiamo che $\dim U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \dim U_{\lambda_t} = \dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_t} = n$. Ma allora è immediato $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$. ✓

(d)=>(b) Per ipotesi $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t} = V$

Siano B_{λ_1} base di $U_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_t}$ base di U_{λ_t}, allora $\bar{B} = B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_t}$ è base di V ed è costituita da autovettori. ▨

Teorema Spettrale : tipici esercizi

Esempio :

- $T: V \to V$, campo $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$

  $A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A è diagonalizzabile ?

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(-\lambda) \overset{\text{Lo pongo uguale a 0}}{=} 0 \iff \underset{ma(1)=2}{\lambda = 1} \vee \underset{ma(0)=1}{\lambda = 0}$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ $S = \{(-x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((-1,-1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(\underbrace{-e_1 - e_2 + e_3}_{B_0})$

  Quindi $\dim U_0 = 1$. **N.B.** In realtà, è esattamente il risultato che ci aspettavamo, in quanto vale SEMPRE: $ma(\lambda) \geq \overset{\dim U_\lambda}{\overset{\shortparallel}{mg(\lambda)}} \geq 1$.

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \{x_3 = 0$ $S = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(\underbrace{e_1, e_2}_{B_1})$.

  Come ci aspettiamo: $U_0 + U_1 = U_0 \oplus U_1 = \mathcal{L}(e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ $\quad B_0 \cup B_1$ è base di $U_0 \oplus U_1$.

  $\dim(U_0 \oplus \overset{\subseteq V}{U_1}) = 3 \Rightarrow U_0 \oplus U_1 = V$.

  Allora $\bar{B} = (e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ è una base spettrale e $\Rightarrow$

  $Q = M_{\bar{B}B}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice che diagonalizza $\quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A}$, oppure $\Rightarrow$

  $\bar{\bar{B}} = (-e_1 - e_2 + e_3, e_1, e_2)$ e $\bar{\bar{Q}} = M_{\bar{\bar{B}}B}(id_V) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{\bar{Q}}^{-1}A\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}}$, T è diagonalizzabile.

- $T: V \to V$ $\quad \dim V = 3$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad B = (e_1, e_2, e_3)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0 \iff \underset{\substack{ma(0)=2 \\ \Rightarrow 2 \geq \dim U_0 \geq 1}}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1}{\lambda = 1} \Rightarrow \dim U_1 = 1$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

  $S = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,0)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(e_2) \Rightarrow \dim U_0 = 1 \neq 2$, allora T non diagonalizzabile.

  Infatti, anche senza calcolare U_1, so che $\dim U_0 \oplus \dim U_1 = 2 \neq 3 = \dim V \Rightarrow U_0 \oplus U_1 \subsetneq V$.

- $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad B = (1, x, x^2)$ $\quad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)(-1)^2\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| + (-1)(-1)^4\left|\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1] + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 \cancel{-1} \cancel{-1+2}] = (1-\lambda)\lambda^2$.

  $\Rightarrow |A - \lambda I_3| = 0 \iff \underset{ma(0)=2}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1}{\lambda = 1}$.

  $U_0 = \operatorname{Ker} T$: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$.

  $\dim U_0 = 1 \Rightarrow T$ non è diagonalizzabile (inoltre, dato che $U_0 = \operatorname{Ker} T$, T non è neanche iniettiva).

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$ $S = \{(x_1, 2x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,2,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + 2x)$.

  $\dim U_0 \oplus U_1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow$ Non esiste una base spettrale

Ruffini

Teorema. Sia $p(x) \in K[x]$ e sia $b \in K$.
Allora, b è **radice** di $p(x)$ $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)$.

Esempio:

- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \qquad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0 \iff ?$$

Applico Ruffini e noto che se $\lambda = 2$, allora $-2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 32 = 0$, cioè 2 è radice del mio polinomio.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -36 & 32 \\ 2 & & -2 & 20 & -32 \\ \hline & -1 & 10 & -16 & /\!/ \end{array} \Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = (-\lambda^2 + 10\lambda - 16)(\lambda - 2) = (\lambda - 8)(\lambda - 2)^2 = 0 \iff \underset{ma(8)=1 \;=\; \dim U_8 = 1}{\lambda = 8} \vee \underset{ma(2)=2}{\lambda = 2}.$$

rango $= 1 \Rightarrow \dim S = 3 - 1 = 2$

$$U_2 : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_3 = -x_1 - x_2$$

B base canonica $\Rightarrow \Phi_B$ è l'identità

$$S = \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)) = \Phi_B(U_2) \Rightarrow U_2 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sappiamo già che $\dim U_2 + \dim U_8 = \dim U_2 \oplus \dim U_8 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, quindi T è diagonalizzabile, ma per scrupolo calcoliamo U_8.

$$U_8 : \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{a^1 \leftrightarrow a^2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[a^3 \to a^3 - a^1]{a^2 \to a^2 + 2a^1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{a^1 \to \frac{1}{2} a^1 \\ a^2 \to -\frac{1}{6} a^2}]{a^3 \to a^3 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \{ x_1 = x_3 = x_2$$

$$\Rightarrow S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_8) = U_8 \text{ perché } \Phi_B \text{ biettiva.}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

provare per credere! :)

Geometria

Lez. 17 - 10/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Prodotto scalare

DEF V $\mathbb{R}$ $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{array}{c} V\times V \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle \end{array}$

Si dice **prodotto scalare** su V :<=>

- è simmetrico : $\forall u,v \in V,\ \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
- è bilineare : $\forall u,v,w \in V,\ \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ e $\forall u,v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$
- è definito positivo: $\forall u \in V,\ \langle u,u\rangle \geq 0$, $=0 \iff u=\underline{0}$

In tal caso, la coppia $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ viene chiamata **spazio vettoriale euclideo**.

OSS $\forall u \in V,\ \langle \underline{0},u\rangle = 0.$ Infatti: $\langle \underline{0},u\rangle = \langle 0\cdot\underline{0},u\rangle = 0\langle \underline{0},u\rangle = 0.$

Ecco alcuni esempi di spazi vettoriali euclidei:

(a) $V=\mathbb{R}^n$ $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle : ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longmapsto a_1b_1+\dots+a_nb_n \in \mathbb{R}$ ⟵ Vi ricorda nulla? Prodotto righe per colonne, pag. 53

(b) $V=\mathbb{R}^2$ $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle : ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longmapsto 2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2 \in \mathbb{R}$

(c) $V=M_2(\mathbb{R})$ $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R}) \longmapsto 3aa'+2bb'+cc'+dd' \in \mathbb{R}$

(d) $V=\mathbb{V}$ vettori liberi $\quad \langle\cdot,\cdot\rangle : (u,v) \in \mathbb{V}\times\mathbb{V} \longmapsto |u|\cdot|v|\cdot\cos\widehat{uv} \in \mathbb{R}$

DEF $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ sp. vett. euclideo

$\forall u \in V$, definiamo come **lunghezza** o **norma** : $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

OSS Notiamo che, anche così definita, funziona per i vettori liberi. Infatti:

$\forall u \in \mathbb{V},\ \|u\| = \sqrt{|u|\cdot|u|\cdot\cos\widehat{uu}} = \sqrt{|u|^{\cancel{2}}} = |u|$ ✓

Inoltre, $\forall u \in V$ (vale per qualsiasi sp. euclideo), $\forall\lambda\in\mathbb{R} : \|\lambda u\| = \sqrt{\langle\lambda u,\lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle u,u\rangle} = |\lambda|\,\|u\|.$

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\quad u=(-2,1)$ $\qquad v=(2,-3)$

$\|u\|_{(a)} = \sqrt{(-2,1)(-2,1)} = \sqrt{5}$ $\qquad \|v\|_{(a)} = \sqrt{13}$

$\|u\|_{(b)} = \sqrt{2\cdot4-2-2+1} = \sqrt{5}$ $\qquad \|v\|_{(b)} = \sqrt{3}$

Schwarz e Pitagora

Disuguaglianza di Schwarz.

$$\boxed{\forall u,v \in V,\quad |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.}$$

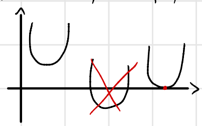
DIM Se $u=\underline{0} \vee v=\underline{0}$, la proposizione è banalmente vera, $0 \leq 0$. √

Allora suppongo $u,v \neq \underline{0}$.

$\beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \langle u+\beta v, u+\beta v\rangle = \langle u+\beta v, u\rangle + \langle u+\beta v, \beta v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle \beta v, u\rangle + \langle u, \beta v\rangle + \langle \beta v, \beta v\rangle =$

$= \|u\|^2 + 2\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\|v\|^2 \geq 0$

$$\frac{-2\langle u,v\rangle \pm \sqrt{\underbrace{4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2}_{\leq 0}}}{2\|v\|^2}$$



$\Rightarrow \langle u,v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.$ ■

Notiamo che, per quanto dimostrato: $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$, cioè $-1 \leq \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$

DEF Sia $\cos: \varphi \in [0,\pi] \longmapsto \cos\varphi \in [-1,1]$.

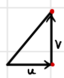
Allora $\exists!\, \varphi \in [0,\pi]: \cos\varphi = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$. Definiamo φ come angolo.

OSS Come per la lunghezza: $\forall u,v \in V$ $\cos\varphi = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{\cancel{|u|}\cancel{|v|}\cos\hat{uv}}{\cancel{|u|}\cancel{|v|}}$.

DEF $\forall u,v \in V$, u e v sono ortogonali $:\Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$. Si denota come $u \perp v$.

Teorema di Pitagora.

$$\boxed{\forall u,v \in V,\quad u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.}$$



DIM $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$.

Ma allora basta osservare che: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$, cioè se $u \perp v$ per definizione. ■

Basi ortonormali

PROP Siano $v_1, \dots, v_t$ vettori non nulli di V a due a due ortogonali, ossia $\forall i,j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Allora, $v_1, \dots, v_t$ sono lin. indipendenti.

DIM Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t = \underline{0}$ Th: $\alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0$.

$$0 = \langle v_1, \underline{0} \rangle = \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t \rangle = \alpha_1 \overset{\neq 0}{\langle v_1, v_1 \rangle} + \dots + \alpha_t \overset{= 0}{\langle v_1, v_t \rangle} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Reitero lo stesso ragionamento per i rimanenti vettori ed ottengo: $\alpha_2 = \dots = \alpha_t = 0$, cioè la tesi. ∎

DEF Sia $u \in V$. Se $\|u\| = 1$, allora u si dice versore. Sia $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base di V.
B si dice ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali.
B si dice ortonormale se è ortogonale e i suoi vettori sono versori.

OSS $\forall v \in V$: $v \neq \underline{0} \wedge \|v\| \neq 1$, versore $\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v$.

Esempio:

$\mathbb{R}^2$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare numerico

$B = ((1,1), (-1,1))$ $\quad (1,1) \cdot (-1,1) = -1 + 1 = 0$. $\quad$ <- base ortogonale

$\|(1,1)\| = \sqrt{2} = \|(-1,1)\|$ $\quad B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ <- base ortonormale -> $B = ((1,0),(0,1))$.

PROP $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio euclideo $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad B = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormale

(1) $\forall u \in V$, sia $\Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$. Allora, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = \langle u, e_i \rangle$.

(2) $\forall u, v \in V$, siano $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u)$ e $(y_1, \dots, y_n) = \Phi_B(v)$. Allora, $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

DIM (1) $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$$\langle u, e_1 \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_1 \rangle = x_1 \overset{= 1}{\langle e_1, e_1 \rangle} + \dots + x_n \overset{= 0}{\langle e_n, e_1 \rangle} = x_1 \overset{1}{\|e_1\|^2} = x_1.$$

Processo identico per i casi $i \in \{2, \dots, n\}$. ✓

(2) Per semplicità, imponiamo $n = 2$. Quindi: $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$.

$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 \rangle = \langle x_1 e_1, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, y_2 e_2 \rangle + \langle x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \overset{\|e_1\|^2 = 1}{\langle e_1, e_1 \rangle} + x_1 y_2 \overset{= 0}{\langle e_1, e_2 \rangle} + x_2 y_1 \overset{= 0}{\langle e_2, e_1 \rangle} + x_2 y_2 \overset{\|e_2\|^2 = 1}{\langle e_2, e_2 \rangle} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$ ∎

Esempio: (da quello precedente)

$B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ $\quad$ Siano $u \equiv_{B'} (3, -5)$, cioè $u = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v \equiv_{B'} (1, 2)$, cioè $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

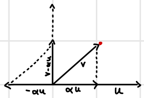
Allora $\langle u, v \rangle = 3 - 10 = -7$. Provare per credere 

Gram-Schmidt

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\dim V = n$ $\quad B = (u_1, \dots, u_n)$ base di V.

Il **metodo di Gram-Schmidt** è un'algoritmo che trasforma B in una base ortogonale.

Vediamo il caso $n=2$.



αu proiezione ortogonale di v su u

$v + (-\alpha u)$ è ortogonale a u.

Impongo $\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$.

$$0 = \langle v - \alpha u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle \implies \langle v, u \rangle = \alpha \langle u, \overset{\neq 0}{u} \rangle \implies \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}.$$

Allora il vettore che sto cercando è: $v - \alpha u = v - \dfrac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

Esempio:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : ((\overset{u}{a_1, a_2}), (\overset{v}{b_1, b_2})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R}$$

$B = ((1,0),(0,1))$ $\qquad \langle (1,0),(0,1) \rangle = 2\cdot 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0.$

$v' = v - \dfrac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u = (0,1) - \dfrac{1}{2}(1,0) = (-\frac{1}{2}, 1).$ $\quad$ Allora, $B' = (\overset{u}{(1,0)}, \overset{v'}{(-\frac{1}{2}, 1)})$ è base ortogonale.

$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 2+0+0+0 = 2$ $\qquad \|v\| = \sqrt{\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi, $B'' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, 1))$ è ortonormale.

L'algoritmo è il seguente:

$B = (u_1, \dots, u_n)$ base di $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

- $v_1 = u_1$
- $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$
- $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

  $\vdots$
- $v_n = u_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$

$B' = (v_1, \dots, v_n)$ ortogonale.

$B'' = (\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \dots, \frac{1}{\|v_n\|} v_n)$ ortonormale.

Esempio:

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ prodotto scalare numerico

$B = (\overset{u_1}{(1,1,0)}, \overset{u_2}{(1,0,1)}, \overset{u_3}{(0,0,1)})$ base di $\mathbb{R}^3$

$v_1 = u_1 = (1,1,0).$ $\quad \|v_1\|^2 = 2 \implies \|v_1\| = \sqrt{2}.$

$v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,0,1) - \dfrac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$ $\qquad \|v_2\|^2 = \frac{3}{2} \implies \|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

$v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (0,0,1) - \dfrac{2}{3}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$ $\qquad \|v_3\|^2 = \frac{1}{3} \implies \|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{3}}.$

$B' = ((1,1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ è ortogonale.

... e quella ortonormale? A voi i calcoli!

Geometria

Lez. 18 - 12/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Prodotto vettoriale

DEF $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $K = \mathbb{R}$ $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $\dim V = n$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ e $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ basi ortonormali di V.

$A = M_{B\bar{B}}(id_V) \in M_n(\mathbb{R})$ matrice di passaggio pag. 70

Componenti di e_j in $\bar{B}$

$M_{B\bar{B}}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$.

A è ortogonale $:\iff A^{-1} = {}^tA$

Osserviamo anche che A è ortogonale $\Rightarrow |A| = 1$, ma non il viceversa. $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1$ ma non è ortogonale

DEF $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $\boxed{\dim V = 3}$ B base di V

(V, B) spazio euclideo orientato

B' base di V si dice concorde con B se $|M_{BB'}(id_V)| > 0$.

Siano poi $u, v \in V$.

Il prodotto vettoriale $u \times v$ è uguale a 0 se $\{u, v\}$ è lin. dip., altrimenti è l'unico vettore tale che:

$(u, v, u \times v)$ è concorde con B. $\quad |u \times v| = \|u\| \|v\| \sin \widehat{uv}$ $\quad$ $u \times v$ è ortogonale a u e a v $\quad$ $\sin \widehat{uv} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$

PROP $u, v \in V$, spazio euclideo di dimensione 3.

$\{u, v\}$ lin. indip., $\bar{B}$ ortonormale e $u \equiv_B (x_1, x_2, x_3)$, $v \equiv_B (y_1, y_2, y_3)$.

Allora $u \times v \equiv_B \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.

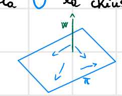
N.B. $\boxed{\text{Il prodotto vettoriale è anti-commutativo: } u \times v = - v \times u.}$

DEF $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $K = \mathbb{R}$ $\dim V = n$ $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ e $U = \mathcal{L}(S)$.

Il complemento ortogonale di U è: ${}^{\perp}U := \{ v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U \}$.

Esempio:

Sia U la chiusura lineare di due vettori lin. indip.



Allora, sono ortogonali ad U tutti i vettori proporzionali a w, cioè: ${}^{\perp}U_\pi = \mathcal{L}(w)$.

Complemento Ortogonale

PROP $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\dim V = n$ $U = \mathcal{L}(u_1,\dots,u_t) \subseteq V$

(1) ${}^{\perp}U = \{ v \in V : \langle v,u\rangle = 0,\ \forall u \in \{u_1,\dots,u_t\}\}$;

(2) ${}^{\perp}U$ è un sottospazio vettoriale ;

(3) a) $U, W \subseteq V$ sottosp. vett. : $U \subseteq W \Rightarrow {}^{\perp}U \supseteq {}^{\perp}W$;

b) ${}^{\perp}({}^{\perp}U) = U$;

(4) $U + {}^{\perp}U = U \oplus {}^{\perp}U = V$, quindi $\dim {}^{\perp}U = n - \dim U$.

DIM (1) "$\subseteq$" banale

"$\supseteq$" $w \in \{v \in V : \langle v,u\rangle = 0,\ \forall u \in \{u_1,\dots,u_t\}\}$ Th: $\langle w,u\rangle = 0\ \forall u \in U$

$u \in U \Rightarrow \exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_t \in \mathbb{R} : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow \langle w,u\rangle = \langle w, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle w,u_1\rangle}_{=0} + \dots + \alpha_t \underbrace{\langle w,u_t\rangle}_{=0} = 0.$ ✓

(2) $w, w' \in {}^{\perp}U$. Proviamo che è stabile risp. $+$ e $\cdot$.

$i \in \{1,\dots,t\}$
$\langle w+w', u_i\rangle = \langle w, u_i\rangle + \langle w', u_i\rangle = 0+0 = 0.$ ✓

$\lambda \in \mathbb{R}$
$\langle \lambda w, u_i\rangle = \lambda\langle w, u_i\rangle = \lambda \cdot 0 = 0.$ ✓

(3) a) $w' \in {}^{\perp}W \Rightarrow \forall w \in W, \langle w', w\rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U, \langle w', u\rangle = 0$, cioè $U \subseteq W \Rightarrow \forall w' \in {}^{\perp}W,\ w' \in {}^{\perp}U$, quindi ${}^{\perp}W \subseteq {}^{\perp}U$. ✓

b) Sappiamo che, per definizione, $u \in U \Rightarrow \forall w \in {}^{\perp}U, \langle u,w\rangle = 0$; $u \in {}^{\perp}({}^{\perp}U) \Rightarrow \forall w \in {}^{\perp}U, \langle u,w\rangle = 0$. <~ si noti che così U e ${}^{\perp}({}^{\perp}U)$ sono definiti nello stesso modo

Inoltre da (2) sappiamo che ${}^{\perp}({}^{\perp}U)$ è sottosp. vett. di V, mentre U lo è per ipotesi. Ma allora ${}^{\perp}({}^{\perp}U) = U$ NECESSARIAMENTE. ✓

(4) Th: $U \cap {}^{\perp}U = \{\underline{0}\}$ basta osservare che: $\forall u \in V, \langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = \underline{0}$.

Sia B_U una base ortonormale di U. Completiamo B_U ad una base B di V.

$B_U = \{v_1,\dots,v_t\}$ $B = \{v_1,\dots,v_t,v_{t+1},\dots,v_n\}$

Rendiamo B una base ortogonale mediante il metodo di Gram-Schmidt:

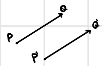
$\bar{B} = \{v_1,\dots,v_t, w_{t+1},\dots,w_n\}$ $\overset{\text{ortogonali}}{w_{t+1},\dots,w_n} \in {}^{\perp}U$ $\wedge$ $\{w_{t+1},\dots,w_n\}$ è lin. indip. $\Rightarrow \mathcal{L}(w_{t+1},\dots,w_n) = {}^{\perp}U$. ▨

Spazio affine euclideo

DEF Uno spazio affine è una terna costituita da $\mathcal{E}$ insieme, i cui elementi sono detti punti.

$\vec{\mathcal{E}}$ spazio vettoriale

$\pi : (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longmapsto \pi((P,Q)) = \overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}$



π deve soddisfare le seguenti proprietà:

(1) $\forall A \in \mathcal{E},\ \forall u \in \vec{\mathcal{E}},\ \exists !\, X \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AX} = u$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Se $\vec{\mathcal{E}}$ è uno sp. vett. euclideo, allora la terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ è detta spazio (affine) euclideo.

PROP Uno spazio affine euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ gode delle seguenti proprietà:

- $\overrightarrow{PQ} = \underline{o} \iff P = Q$
- $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$

DIM "$\Leftarrow$" $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{PP} \overset{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QP} \text{ per hp}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{PP} + \cancel{\overrightarrow{PP}} = \cancel{\overrightarrow{PP}} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \underline{o}$ ✓

"$\Rightarrow$" Per hp. $\overrightarrow{PQ} = \underline{o}$ e, per quanto appena dimostrato, $\overrightarrow{PP} = \underline{o}$.

Dalla proprietà (1) ottengo che $Q = X = P \Rightarrow P = Q$. ✓

- Th: $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$

$\underline{o} = \overrightarrow{PP} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \Rightarrow \underline{o} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \Rightarrow -\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$. ▨

Esempio:

$\vec{\mathcal{E}}$ sp. vettoriale e $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}$ $\quad \pi_{\vec{\mathcal{E}}} : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$

è ciò che avviene tipicamente quando disegnamo su $\mathbb{R}^2$

$(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}}, \pi_{\vec{\mathcal{E}}})$ spazio affine euclideo.

Riferimento cartesiano

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ spazio affine (euclideo), con $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$.

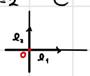
Diciamo che $\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}} = n$.

Un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}$ è una coppia $R = (O, B)$ costituita da un punto $O \in \mathcal{E}$ (origine del riferimento) e da una base ordinata (ortonormale) di $\vec{\mathcal{E}}$.

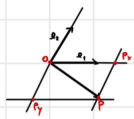
Le coordinate di un punto $P \in \mathcal{E}$ in R sono le componenti del vettore $\vec{OP}$ in B: $P \equiv_R (x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(\vec{OP})$.

Esempio:

- $n=2$ $\quad \vec{\mathcal{E}}$ $\quad B = (e_1, e_2)$



oppure anche



$\underset{\alpha e_1}{\vec{OP_x}} + \underset{\beta e_2}{\vec{OP_y}} = \vec{OP}$

$P \equiv_R (\alpha, \beta)$

$|e_1| = |e_2| \Rightarrow |\vec{OP_x}| = |\alpha| \wedge |\vec{OP_y}| = |\beta|$

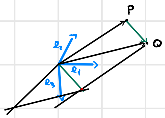
- $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$ $\quad K = \mathbb{R}$

$R = (O, B)$ $\quad O \equiv_R \Phi_B(\vec{OO}) = \Phi_B(\underline{0}) = (0,0,0)$

$P \equiv_R (3,-2,1) = \Phi_B(\vec{OP})$ $\quad Q \equiv_R (2,0,4) = \Phi_B(\vec{OQ})$

$\Phi_B(\vec{PQ}) = ?$ $\rightsquigarrow$

$= (2,0,4) - (3,-2,1) = (-1,2,3)$



$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$\Rightarrow \Phi(\vec{PQ}) = \Phi_B(\vec{OQ} - \vec{OP}) = \Phi_B(\vec{OQ}) - \Phi_B(\vec{OP})$.

PROP $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ spazio affine euclideo $\quad R = (O, B)$ $\quad \dim \mathcal{E} = n$

$P, Q \in \mathcal{E}$, $\quad P \equiv_R (x_1, \dots, x_n)$ $\quad Q \equiv_R (y_1, \dots, y_n)$

Allora $\Phi_B(\vec{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Esempio:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$ $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad R = (O, B)$

$X \equiv_R (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{TX} \equiv_B (x_1+3, x_2-7, x_3-4) = (3,-2,5) \Rightarrow X \equiv_R (0,5,9)$

Ricordiamo che $\exists! X \in \mathcal{E} : \vec{TX} = u$.

$T \equiv_R (-3,7,4)$ coordinate di T in R $\qquad u \equiv_B (3,-2,5)$ componenti di u in B

Geometria

Lez. 19 - 19/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Sottospazio affine euclideo

Ricordiamo:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \pi : (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longmapsto \pi((P,Q)) = \vec{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}$

(1) $\forall A \in \mathcal{E}, \ \forall u \in \vec{\mathcal{E}}, \ \exists! X \in \mathcal{E} : \ \vec{AX} = u$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \quad \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

Esempio:

$\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}} \qquad \pi : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$

u vettore $\in \vec{\mathcal{E}}$ $\quad v = A$ punto $\in \mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}$ $\qquad$ Qual è l'unico punto X tale che: $\pi(A, X) = u$?

$\pi(A,X) = X - A = X - V \implies u = X - V \implies X = u + V$

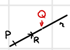
$\vec{PQ} = Q - P \qquad \vec{QR} = R - Q \qquad \cancel{Q} - P + R - \cancel{Q} = R - P = \vec{PR}$

DEF $H \subseteq \mathcal{E}$ si dice *sottospazio (affine) euclideo* :<=>

- $\pi_{|H \times H} : H \times H \to \pi(H \times H) =: \vec{H}$ (giacitura di H) è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$
- $\forall A \in H, \ \forall u \in \vec{H}, \ \exists! X \in H : \ \vec{AX} = u$

N.B. La prop (2) non è richiesta, ma vale ancora!

Esempio:

- $H = r \setminus \{Q\}$ 

  $\vec{PR} \in \vec{H}$, mentre $\vec{PQ} = \alpha \cdot \vec{PR}$. $\quad$ Se $\vec{H}$ è sp. vett., allora $\mathcal{L}(\vec{PQ}) \subseteq \vec{H}$

  Inoltre, se due punti $A, B \in H$, allora necessariamente $\vec{AB} \in \vec{H}$.
- Su un piano la situazione è la seguente:  $\quad \vec{H} = \mathcal{L}(u, v)$.
- Pongo $H = \{P\}$, un punto solo. Allora: $(P, P) \in H \times H \longmapsto \underbrace{\vec{PP}}_{\{0\}} \in \underbrace{\vec{H}}_{= \{0\}}$.
- Con l'esempio precedente:

  $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}} \qquad \pi : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longmapsto w - v \in \vec{\mathcal{E}}$

  $H \subseteq \mathcal{E} \qquad \vec{H} = \{ w - v \mid w, v \in H \}$ sottosp. vett. $\implies \vec{H} = \{ w - v_0 \mid w \in H \}$ $\quad v_0 \in H$

  $w - v = w - v_0 + v_0 - v \qquad H = \{ v_0 + u \mid u \in \vec{H} \} = v_0 + \vec{H}$ traslato, laterale

Varietà lineare

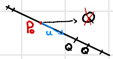
DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad P_0 \in \mathcal{E}$, U sottosp. di $\vec{\mathcal{E}}$

La varietà lineare per P_0 e parallela a U è l'insieme di punti:

$P_0 + U = (P_0, U) = \{ Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U \}$

Esempio:

$P_0 + \mathcal{L}(u) = \{ Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in \mathcal{L}(u) \}$



PROP

(i) Una varietà lineare è un sottosp. (affine) euclideo

(ii) Un sottospazio euclideo è una varietà lineare

Ci limiteremo a dimostrare la (ii)

DIM $(\vec{H}, H, \pi_{|H\times H})$ $\quad$ Th: $\forall P_0 \in H$, $H = (P_0, \vec{H})$

"$\subseteq$" $\quad Q \in H \Rightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H} \Rightarrow Q \in (P_0, H)$

"$\supseteq$" $\quad Q \in (P_0, H) \Rightarrow \underset{"u",\ A=P_0}{\overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H}} \quad \exists! \underset{Q=X}{X \in H : \overrightarrow{P_0X} = u} \Rightarrow Q \in H$

Teorema. $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = n \quad \mathcal{R} = (O, B) \quad H = (P_0, \vec{H})$

Esiste un sistema lineare $\Sigma: AX = \underline{b}$ il cui insieme delle soluzioni coincide con l'insieme dei vettori delle coordinate dei punti di H.

DEF $\Sigma: AX = \underline{b}$ si dice rappresentazione di H in $\mathcal{R}$.

DIM $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (a_1, \dots, a_n) \qquad Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{H} \Leftrightarrow \Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) \in \Phi_B(\vec{H}) \subseteq K^n \Rightarrow \exists\, AX = 0 : S_0 = \Phi_B(\vec{H})$.

$Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n) \qquad \Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

$A\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{= \underline{b}}$

questo è $\Sigma: AX = \underline{b}$.

È bene sapere che vale anche il viceversa:

$\forall\, \Sigma: AX = \underline{b}$ compatibile, esiste un sottosp. euclideo H tale che le soluzioni di Σ sono tutte e sole le coordinate dei punti di H. $\qquad \vec{H}: AX = 0 \qquad \dim H = \dim \vec{H} = n - \text{rango}(A)$

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \quad \mathcal{R}(O, B) \qquad P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (0,4,2) \qquad U = \mathcal{L}(u(1,0,3), v(0,1,0)) = \vec{H}$

$H = (P_0, U) \qquad Q^{\in \mathcal{E}} \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, x_3)$

$Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in U \Leftrightarrow (x_1, x_2 - 4, x_3 - 2) \in \Phi_B(\mathcal{L}(u,v)) = \mathcal{L}(\Phi_B(u), \Phi_B(v)) = \mathcal{L}((1,0,3),(0,1,0)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 4 \\ 3 & 0 & x_3 - 2 \end{vmatrix} = x_3 - 2 - 3x_1$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $\qquad$ teorema degli orlati

$H: -3x_1 + x_3 - 2 = 0$

$U = \vec{H}: -3x_1 + x_3 = 0$

Spazi paralleli, rette sghembe

DEF Un sottosp. euclideo di dim $n-1$ si dice iperpiano.

Siano H, H' sottosp. euclidei. H e H' sono paralleli $:\Leftrightarrow \vec{H} \subseteq \vec{H'} \vee \vec{H} \supseteq \vec{H'}$ e si denotano: $H \parallel H'$.

Due rette r e r' si dicono sghembe $:\Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \wedge r \not\parallel r'$.

Esempio:

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R(O,B)$ $\quad P_0 \equiv_R (1,0,3)$ $\quad U = \mathcal{L}(u(1,2,3))$ $\quad r = (P_0, U)$ $\quad U = \vec{r}$

  $Q \equiv_R (x_1, x_2, x_3) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 Q} \in \mathcal{L}(u(1,2,3)) \Leftrightarrow (x_1 - 1, x_2, x_3 - 3) \in \mathcal{L}(\Phi_B(u)) = \mathcal{L}((1,2,3)) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{1} & x_1-1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3-3 \end{pmatrix} = 1 \overset{\text{teorema degli orlati}}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 3 & x_3-3 \end{vmatrix} = 0$

  $\begin{cases} x_2 - 2x_1 + 2 = 0 \\ x_3 \cancel{-3} - 3x_1 \cancel{+3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}: \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

  In alternativa: $\exists t \in K : (x_1 - 1, x_2, x_3 - 3) = t(1,2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3 + 3t \end{cases}$ rapp. parametrica di r

  ~ Come funzione la rapp. parametrica? ~

  Sia $r: \begin{cases} x_1 = -2 + 7t \\ x_2 = 2 - 5t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$.

  coordinate di P_0 — componenti del vettore direzione $\vec{r}$

  Quindi: $P_0 \equiv_R (-2, 2, 1)$ e $\vec{r} = \mathcal{L}(u(7,-5,1))$. Se avessi $\mathcal{L}(-u)$, allora $r: \begin{cases} x_1 = -2 - 7t \\ x_2 = 2 + 5t \\ x_3 = 1 - t \end{cases}$

- $\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad R = (O,B)$ $\quad P_0 \equiv_R (-7, 3)$ $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(-1,4))$ $\quad r = (P_0, \vec{r})$

  $Q \equiv_R (x_1, x_2) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 Q} \in \vec{r} \Leftrightarrow (x_1 + 7, x_2 - 3) \in \mathcal{L}((-1,4)) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & x_1+7 \\ \boxed{4} & x_2-3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & x_1+7 \\ 4 & x_2-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x_2 + 3 - 4x_1 - 28 = 0 \Leftrightarrow 4x_1 + x_2 + 25 = 0$

  $\begin{cases} x_1 = -7 - t \\ x_2 = 3 + 4t \end{cases}$ $\quad r: 4x_1 + x_2 + 25 = 0$ $\quad \vec{r}: 4x_1 + x_2 = 0$

  retta s: $s \parallel r$ e $R(2,4) \in s$ $\quad s: 4\overset{2}{x_1} + \overset{4}{x_2} + k = 0 \Rightarrow k = -12$ $\quad s: 4x_1 + x_2 - 12 = 0$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O,B)$ $\quad r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Trovare un piano H: $r \parallel H \overset{\vec{r} \subseteq \vec{H}}{\Leftrightarrow}$, $R(1,0,-1) \in H$

  $\vec{r}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,1))$

  Sia allora $\vec{H} = \mathcal{L}(u(1,2,1), v(1,0,0))$

  $Q(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E}$ $\quad Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{RQ} \in \vec{H} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x_1 - 1, x_2, x_3 + 1) = \alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0)$.

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \alpha + \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = -1 + \alpha \end{cases}$ $\quad \text{rango}\begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

  Questa è la rappresentazione parametrica di H

Geometria

Lez. 20 - 24/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Lo spazio euclideo pt. 1

- **Rette su un piano**

$\dim \mathcal{E} = 2 \qquad R = (O, B)$

$r: ax + by - c = 0$

$r': a'x + b'y - c' = 0$

$r \cap r': \begin{cases} ax+by-c=0 \\ a'x+b'y-c'=0 \end{cases}$

$$C = \left(\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

$r \cap r' \neq \emptyset \iff \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \qquad \boxed{1 \le \text{rango}(A) \le \text{rango}(C) \le 2}$

$\overrightarrow{r \cap r'}: \begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$

Ho tre possibili casi:

(I) $\text{rango}(A) = \text{rango}(C) = 2$

In tal caso, $\emptyset \neq r \cap r' = P(x,y)$, $r \not\parallel r'$ $(r \neq r')$. Le rette sono incidenti in un punto.

(II) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2$

$\Downarrow$ $\vec{r'} = \vec{r}$, quindi $r \parallel r'$ e $r \cap r' = \emptyset$. Le rette sono parallele.

(III) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$

Allora $r = r'$. Si tratta dunque della stessa retta.

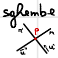
PROP $\dim \mathcal{E} = n$ ← non è necessario che si parli di un piano, rimane valido anche per spazi di 3, 4, 5 ... dimensioni

r e r' sghembe $\iff$ r e r' **non** sono complanari.

DIM "$\Rightarrow$" Già noto per quanto appena verificato nei 3 possibili casi.

"$\Leftarrow$" Per assurdo siano r e r' non sghembe.

r e r' sghembe $:\iff r \cap r' = \emptyset \ \wedge \ r \not\parallel r'$, da cui: r e r' non sghembe $\iff \overset{(1)}{r \cap r' \neq \emptyset} \ \vee \ \overset{(2)}{r \parallel r'}$

(1) 

$H = (P, \mathcal{L}(u, u'))$

(2) 

$\{u, u'\}$ lin. dip. $\quad H = (P, \mathcal{L}(u, \overrightarrow{PP'}))$

In entrambi i soli possibili casi, r e r' giacciono sullo stesso piano, quindi sono complanari. ▨

Esercizio: $\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B) \qquad r: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{r}: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

- Determinare la retta r': $r' \parallel r \ \wedge \ P'(2,-1,2) \in r'$.

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(-4,2,3)) \qquad r': \begin{cases} x_1 = 2 - 4t' \\ x_2 = -1 + 2t' \\ x_3 = 2 + 3t' \end{cases}$

- Determinare il piano che contiene r e r'.

Per $r: \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2} \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \qquad P(-2,1,2) \in r \qquad H = (P, \mathcal{L}(u(-4,2,3)), \overrightarrow{PP'}) \qquad \overrightarrow{PP'} = (4,-2,0)$

$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 + 1 & x_3 - 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ dall'equazione che ne deriva trovo H.

Lo spazio euclideo pt. 2

• Rette in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

N.B. Essendo in uno spazio, ho bisogno di due equazioni per designare una retta!

$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$

$r': \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta' \end{cases}$

$r \cap r': \begin{cases} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases} \qquad C = \left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right)$ (A = prime tre colonne)

$\left[2 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 4\right]$

Stavolta, ho 4 possibili casi:

(I) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow r = r'$

(II) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3 \Rightarrow r \cap r' = \emptyset, \quad r \parallel r'$

(III) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow \emptyset \neq r \cap r' = P$

(IV) $3 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 4 \Rightarrow$ r e r' sghembe

• Piani e rette in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$

$H: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \qquad r \cap H: \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \qquad C = \left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right)$

$\left[2 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 3\right]$

Sono nuovamente 3 i possibili casi:

(I) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow r \subseteq H$, r giace sul piano

(II) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3 \Rightarrow r \cap H = \emptyset, \ \vec{r} \subseteq \vec{H}$ (quindi $r \parallel H$)

(III) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow \emptyset \neq r \cap H = P$

• Piani in uno spazio

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

$H: \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$

$H': \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\delta' \qquad H \cap H': \begin{cases} \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases} \qquad C = \left(\begin{array}{ccc:c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right)$

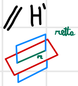
$\left[1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 2\right]$

Ancora una volta, 3 possibili casi:

(I) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow H = H'$

(II) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2 \Rightarrow H \cap H' = \emptyset, \quad H \parallel H'$

(III) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow H \cap H' =$ retta



visivamente, è una cosa del genere, ma sullo spazio infinito

Ortogonalità tra rette e piani

DEF $\dim \mathcal{E} = n$ $\quad R = (O, B)$, con B ortonormale

r r' rette $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u) \quad \vec{r}' = \mathcal{L}(u')$

r e r' sono ortogonali $:\iff \langle u, u' \rangle = 0 \iff u \perp u' \iff {}^{\perp}\vec{r}' \supseteq \vec{r} \iff \vec{r}' \subseteq {}^{\perp}\vec{r}$.

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad r: \begin{cases} x_1 = 2+3t \\ x_2 = -4-t \\ x_3 = 5+t \end{cases}$

Determinare una retta r' ortogonale a r

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(3,-1,1)) \qquad u'(l', m', n') : \langle u, u' \rangle = 0 \qquad$ Prodotto scalare numerico: $3l' - m' + n' = 0 \implies u'(1,3,0)$ è soluzione.

$r': \begin{cases} x_1 = t' \\ x_2 = 3t' \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad$ N.B. Si tratta di UNA DELLE possibili soluzioni.

PROP $H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, $\quad \vec{H}: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$

Allora ${}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(a_1, \ldots, a_n))$.

DIM Ricordiamo $\dim {}^{\perp}\vec{H} = n - \underbrace{\dim \vec{H}}_{n-1} = 1$. $\quad$ Th: $\forall u \in \vec{H}$, $\langle u, w \rangle = 0$

$u(y_1, \ldots, y_n) \in \vec{H} \iff a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0$

è fondamentale che B sia ortonormale $\rightarrow$ $\quad (a_1, \ldots, a_n)(y_1, \ldots, y_n) = \langle w, u \rangle$. $\blacksquare$

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 2 \qquad r: -3x+7y = c \qquad w(-3,7) \perp r$

$\vec{r}: -3x+7y=0 \qquad u(7,3) \in \vec{r} \qquad$ NON si confondano u e w.

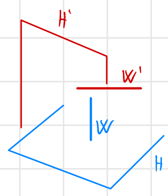
DEF $\dim \mathcal{E} = n$ $\quad R = (O, B)$, con B ortonormale

r retta, $H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$

$r \perp H :\iff \vec{r} = {}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(a_1, \ldots, a_n))$.

Sia ora $H': a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b'$.

$H \perp H' :\iff w \perp w'$, dove $w(a_1, \ldots, a_n)$ e $w'(a'_1, \ldots, a'_n)$.



Ortogonalità e fasci di piani

Esempio:

- $\dim \mathcal{E} = 3$, $R = (O, B)$ $\quad H: -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad \vec{H}: -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad {}^{\perp}\vec{H}: \mathcal{L}(w(-3,1,2))$

  Rappresentare la retta r ortogonale ad H e passante per $P(-2,4,1)$.

  $r \perp H \iff \vec{r} = {}^{\perp}\vec{H} = \mathcal{L}(w(-3,1,2))$.

  $$r: \begin{cases} x_1 = -2 - 3t \\ x_2 = 4 + t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 3(x_2 - 4) \\ t = x_2 - 4 \\ x_3 = 1 + 2(x_2 - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10 \\ -2x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$

  $$r: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^2 \to a^2 + a^1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ da cui } \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1/3 \end{cases} \text{ oppure: } \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = t \end{cases}$$

  $$S = \{(\bar{x}_3, 1/3, \bar{x}_3) \mid \bar{x}_3 \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1/3, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \vec{r} = \mathcal{L}(u(1,0,1)) \qquad P(0, 1/3, 0) \in r$$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad H: x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$ $\quad w(1,-4,2)$ vettore ortogonale ad H

  Rappresentare un piano ortogonale ad H passante per $P(3,1,-3)$.

  $H': a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = b' \qquad w'(a'_1, a'_2, a'_3)$

  $H' \perp H \iff w' \perp w \iff \langle w, w' \rangle = 0 \iff (1,-4,2)(a'_1, a'_2, a'_3) = a'_1 - 4a'_2 + 2a'_3 = 0$.

  $w'(0,1,2) \quad H': x_2 + 2x_3 = b' \qquad$ oppure $\qquad w''(2,1,1) \quad H'': 2x_1 + x_2 + x_3 = b''$

  $P \in H' \Rightarrow 1 - 6 = b' \Rightarrow b' = -5 \qquad P \in H'' \Rightarrow 6 + 1 - 3 = b'' \Rightarrow b'' = 4$

DEF

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B) \qquad H: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

Il **fascio improprio** determinato da H è l'insieme di tutti i piani di $\mathcal{E}$ paralleli ad H.

Si denota con: $\mathcal{F}_H: ax_1 + bx_2 + cx_3 = k, \ \forall k \in \mathbb{R}$.

Invece, sia $r: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d' \end{cases}$.

Il **fascio proprio** di asse r è l'insieme di tutti i piani di $\mathcal{E}$ che contengono r; si denota con $\mathcal{F}_r$.

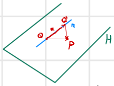
Si può dimostrare che un piano appartiene a $\mathcal{F}_r \iff$ è rappresentato da un'equazione del tipo:

$$\lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 - d) + \mu(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 - d') = 0.$$

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B) \qquad r: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad P(0,0,-1) \notin r$.

Determinare il piano H: $P \in H \wedge r \subseteq H$.



(1) $H: \lambda(x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \mu(2x_1 + x_2 - x_3) = 0$.

$P \in H \Rightarrow \lambda(0 - 0 + 1 + 1) + \mu(0 + 0 + 1) = 0 \Rightarrow \mu = -2\lambda$. Allora $H: x_1 - x_2 - x_3 + 1 - 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{H: -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 1 = 0.}$

(2) altro metodo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{a^2 \to a^2 - 2a^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^2 \to \frac{1}{3}a^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{a^1 \to a^1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad r: \begin{cases} x_1 = -1/3 + 2/3\, t \\ x_2 = 2/3 - 1/3\, t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$S = \{(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \qquad Q(-1/3, 2/3, 0) \qquad u(2/3, -1/3, 1) \qquad Q'(1/3, 1/3, 1) \qquad \vec{QP}(1/3, -2/3, -1)$

$\vec{H} = \mathcal{L}(u, \vec{QP}) \qquad H = (P, \vec{H}) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 + 1 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{4}{9}x_3 - \frac{4}{9} + \frac{1}{9}x_3 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} = 0$.

Quindi $\boxed{H: x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} = 0.}$

N.B. Il fatto che i due risultati siano tra loro proporzionali ci assicura della loro correttezza (dovreste essere dei geni per fare due errori diversi che rendano le due soluzioni proporzionali... quindi potete stare tranquilli ☺)

Geometria

Lez. 21 - 26/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Distanza

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$ $\quad R = (O, B)$, B ortonormale

Siano $P, Q \in \mathcal{E}$. Allora la distanza tra P e Q è $\|\vec{PQ}\|$ e si denota con $d(P,Q)$.

OSS L'ordine dei punti NON ha importanza:

$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \|-\vec{QP}\| = |-1|\,\|\vec{QP}\| = \|\vec{QP}\| = d(Q,P)$.

Inoltre, $d(P,Q) \geq 0$ necessariamente, per definizione.

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad P(3,-5,2) \qquad Q(0,1,-4)$

$\vec{PQ}(-3,6,-6) \implies d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle} \overset{B \text{ ortonormale}}{=} \sqrt{(-3,6,-6)(-3,6,-6)} = \sqrt{81} = 9.$

DEF $X, Y \subseteq \mathcal{E}$ sottoinsiemi

$d(X,Y) = \inf\{d(P,Q) \mid P \in X, Q \in Y\} \in \mathbb{R}$.

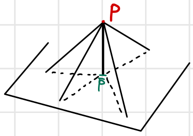
N.B. Si considera l'estremo inf perché non è detto che vi sia il minimo!

Sia H un iperpiano. $H: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$. Sia $P \in \mathcal{E}$. Allora:

- $P \in H \implies d(P,H) = 0$.
- $P \notin H \implies d(P,H) = d(P,\bar{P})$, dove per il teorema di Pitagora

$\bar{P} = H \cap r \;\wedge\; r$ ortogonale ad H e $P \in r$.

proiezione ortogonale di P in H



Notiamo che $\vec{P\bar{P}}$ risulta essere un "cateto", mentre gli altri vettori sono "ipotenuse".

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \qquad H: x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \qquad P(1,0,1) \notin H \qquad d(P,H) = ?$

r retta: $r \perp H \wedge P \in r \qquad r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 1-t \end{cases} \qquad P_r(1+t, -3t, 1-t) \in r \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$P_r \in H \iff (1+t) - 3(-3t) - (1-t) = 1 \iff \frac{\cancel{11}}{\cancel{11}} t = \frac{1}{11}$

$\bar{P}\left(1 + \frac{1}{11}, -\frac{3}{11}, 1 - \frac{1}{11}\right)$, cioè $\bar{P}\left(\frac{12}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{10}{11}\right)$ da cui: $\vec{P\bar{P}}\left(\frac{1}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}\right)$

$d(P,H) = d(P,\bar{P}) = \|\vec{P\bar{P}}\| = \sqrt{\frac{1}{121} + \frac{9}{121} + \frac{1}{121}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

$d(P,H) = \frac{|\cancel{1} - 3\cdot\cancel{0} - \cancel{1} - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ ✓

Generalizziamo l'esempio:

$H: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \qquad P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \qquad r: \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + a_1t \\ \vdots \\ x_n = \bar{x}_n + a_nt \end{cases} \qquad \vec{r} = \mathcal{L}(w(a_1, \dots, a_n)) = {}^{\perp}\vec{H}$, $w \neq 0$

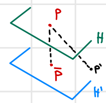
$r \cap H: a_1(\bar{x}_1 + a_1t) + \dots + a_n(\bar{x}_n + a_nt) = b \iff (a_1^2 + \dots + a_n^2)t = b - a_1\bar{x}_1 - \dots - a_n\bar{x}_n \iff t = \frac{b - a_1\bar{x}_1 - \dots - a_n\bar{x}_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

$\bar{P}(\bar{x}_1 + a_1t, \dots, \bar{x}_n + a_nt) \qquad \vec{P\bar{P}}(a_1t, \dots, a_nt)$

$d(P,H) = d(P,\bar{P}) = \|\vec{P\bar{P}}\| = \sqrt{a_1^2t^2 + \dots + a_n^2t^2} = |t|\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \frac{|b - a_1\bar{x}_1 - \dots - a_n\bar{x}_n|}{a_1^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \frac{|a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$

Distanza pt.2

$H: a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0$, $H': a'_1x_1+\ldots+a'_nx_n-b'=0$, $H\cap H': \begin{cases} a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0 \\ a_1x_1+\ldots+a_nx_n-b=0 \end{cases}$



$H\cap H' \neq \emptyset \implies d(H,H')=0$ c'è almeno un punto in cui si toccano

$H\cap H' = \emptyset \implies d(H,H') = \inf\{d(P,P') \mid P\in H,\ P'\in H'\} = \inf\{d(P,\bar{P}) \mid P\in H,\ \bar{P}$ proiezione ortog. di P in $H\}$

PROP $\forall P\in H,\ d(P,\bar{P}) = d(P,H')$ è costante.

DIM $H /\!/ H' \implies \vec{H} = \vec{H'}: a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0.$

Allora: $H': a_1x_1+\ldots+a_nx_n-\bar{b}=0.$

$\forall P\in H,\quad P(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n),\ a_1\bar{x}_1+\ldots+a_n\bar{x}_n-b=0 \implies b = a_1\bar{x}_1+\ldots+a_n\bar{x}_n.$

$d(P,H') = \dfrac{|a_1\bar{x}_1+\ldots+a_n\bar{x}_n-\bar{b}|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}} = \dfrac{|b-\bar{b}|}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}}\quad \forall P\in H$ non dipende da P

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3\qquad \mathcal{R}=(O,B)$

$H: 2x_1+x_2-x_3+1=0\qquad w(2,1,-1)\qquad b=-1$

$H': 4x_1+2x_2-2x_3-7=0\qquad w'(4,2,-2)\qquad b'=7$

$w /\!/ w' \implies \vec{H}=\vec{H'}\qquad H': 2x_1+x_2-x_3-7/2=0\qquad \bar{b}=7/2$

$d(H,H') = \dfrac{|-1-7/2|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{9/2}{\sqrt{6}}$

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)\qquad \dim\mathcal{E}=2$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette ed $\mathcal{E}$ stesso.

Qui, dunque, sappiamo calcolare la distanza tra i possibili sottospazi.

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)\qquad \dim\mathcal{E}=3$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette, i piani ed $\mathcal{E}$ stesso.

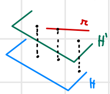
- **distanza di una retta da un iperpiano** (= piano in questo caso)

r retta: $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b \\ a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3=b' \end{cases}$

H piano: $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta\qquad r\cap H = \begin{cases} P \implies d(r,H)=0 \\ \emptyset \implies d(r,H)=? \end{cases}$

Sia H' iperpiano: $H /\!/ H' \wedge r\subseteq H'$. Questo iperpiano esiste, infatti: $r /\!/ H \implies \vec{r}\subseteq\vec{H}=\vec{H'}\qquad P\in r,\ H'=(P,\vec{H})$

$\forall P\in H',\ d(P,H)$ è costante. Allora, $\forall P\in r\subseteq H',\ d(P,H)$ è costante: $d(P,H') = d(r,H')$



In conclusione: $d(r,H) = d(P,H)\quad \forall P\in r.$

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3\qquad \mathcal{R}=(O,B)$

$H: -x_1+3x_2+2x_3-5=0\qquad r: \begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=-t \end{cases}\qquad \vec{r}=\mathcal{L}(u(1,1,-1)).$

$\vec{H}: -x_1+3x_2+2x_3=0$; $-1+3-2=0 \implies \vec{r}\subseteq\vec{H} \implies r /\!/ H\qquad O(0,0,0)\in r \wedge O\notin H \implies r\not\subseteq H$

$d(r,H)=d(P,H)\ \forall P\in r\qquad O\in r\qquad d(O,H) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}}.$

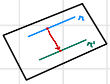
Distanza pt.3

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$

- distanza tra rette r e r':

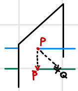
(1) $r \cap r' \neq \emptyset \implies d(r,r') = 0$

(2) $r \parallel r' \wedge r \neq r' \implies r$ e r' complanari



$\forall P \in r,\ d(P, r')$ è costante. $\quad d(r,r') = d(P,r') \quad \forall P \in r$. Fisso P.

Allora considero H iperpiano: $H \perp r'$ e $P \in H$.



$r' \cap H = \bar{P}$ proiezione ortog. di P su r'. $\quad d(r,r') = d(P, r') = d(P, \bar{P})$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$

$r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = -1+2t \\ x_3 = 3-t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x_1 = 2t' \\ x_2 = 4t' \\ x_3 = 1-2t' \end{cases} \qquad r \parallel r'$, infatti: $\vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,-1))$ e $\vec{r'} = \mathcal{L}(v(2,4,-2)) \qquad v = 2u$

$P'(0,0,1) \in r' \qquad d(r,r') = d(r, P') \qquad H:\ H \perp r,\ P' \in H$

$H \perp r \implies H:\ x_1 + 2x_2 - x_3 - k = 0 \qquad P' \in H \implies -1-k = 0 \implies k = -1 \qquad$ Allora $H:\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$

$\bar{P'} = r \cap H$: $P_r \in r$, $P_r(1+t, -1+2t, 3-t) \in H \iff (1+t) + 2(-1+2t) - 1(3+t) + 1 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = 1/2$.

$\bar{P'}(1+1/2, -1+2 \cdot 1/2, 3-1/2) \qquad \bar{P'}(3/2, 0, 5/2) \qquad d(r,r') = d(\bar{P'}, P') = \|\bar{P'}P'\| = \sqrt{9/4 + 9/4} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(3) r e r' sghembe

Prossima pagina

(già, lo spazio qua sotto NON era sufficiente ☺)

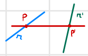
Distanza pt.4

Teorema della perpendicolare.

> $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad n = \dim \mathcal{E} = 3 \quad R = (O, B)$, B orton.
> Siano r e r' due rette non parallele. Allora esiste un'unica retta s:
> $s \perp r$, $s \perp r'$ $\wedge$ $s \cap r = P$, $s \cap r' = P'$. In particolare: $d(r, r') = d(P, P')$.

DIM

$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = x_0' + l't' \\ y = y_0' + m't' \\ z = z_0' + n't' \end{cases}$



$P_r(x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt) \qquad \vec{r} = \mathcal{L}(u(l, m, n))$

$P_{r'}(x_0' + l't', y_0' + m't', z_0' + n't') \qquad \vec{r'} = \mathcal{L}(u'(l', m', n')) \qquad r \not\parallel r' \Rightarrow u \not\parallel u'$

Se la retta s esiste, deve passare per un punto tipo P_r e uno tipo $P_{r'}$ e quindi $\overrightarrow{P_rP_{r'}} \in \vec{s} \subseteq \vec{r}^\perp, \subseteq \vec{r'}^\perp$, da cui $\overrightarrow{P_rP_{r'}} \perp u, \perp u'$, ossia:

$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_rP_{r'}}, u \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_rP_{r'}}, u' \rangle = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{P_rP_{r'}}(x_0' + l't' - x_0 - lt,\ y_0' + m't' - y_0 - mt,\ z_0' + n't' - z_0 - nt)$

$\begin{cases} l(x_0' + l't' - x_0 - lt) + m(y_0' + m't' - y_0 - mt) + n(z_0' + n't' - z_0 - nt) = 0 \\ l'(x_0' + l't' - x_0 - lt) + m'(y_0' + m't' - y_0 - mt) + n'(z_0' + n't' - z_0 - nt) = 0 \end{cases}$

$(*) \begin{cases} (ll' + mm' + nn')t' - (l^2 + m^2 + n^2)t + \ldots = 0 \\ (l'^2 + m'^2 + n'^2)t' - (l'l + m'm + n'n)t + \ldots = 0 \end{cases} \qquad A \begin{pmatrix} \langle u, u' \rangle & -\|u\|^2 \\ \|u'\|^2 & -\langle u, u' \rangle \end{pmatrix} \qquad |A| = -\langle u, u' \rangle^2 + \|u\|^2 \|u'\|^2$

Ricordiamo la disuguaglianza di Schwartz: $|\langle u, u' \rangle| \leq \|u\| \, \|u'\| \qquad \langle u, u' \rangle^2 \underset{=}{\leq} \|u\|^2 \|u'\|^2 \iff \{u, u'\}$ lin. dip.

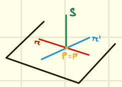
Abbiamo $|A| = 0 \iff \langle u, u' \rangle^2 = \|u\|^2 \|u'\|^2 \iff \{u, u'\}$ lin. dip. IMPOSSIBILE perché $r \not\parallel r'$.

Allora, deve essere $|A| \neq 0$. Per il teorema di Cramer: $\exists! (\bar{t}, \bar{t}') \in \mathbb{R}^2$ che soddisfa il sistema $(*)$.

Sia P il punto di r determinato dal valore $\bar{t}$ per il parametro t. Sia P' il punto di r' determinato dal valore $\bar{t}'$ per il parametro t'.

La retta s $(s \perp r \wedge s \perp r')$ passante per P e P' è la retta cercata e $d(r, r') = d(P, P')$. ▨

OSS



È necessario dire che $s \perp r$, $s \perp r'$ per il caso di rette incidenti.

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3 \qquad R = (O, B)$

$r: \begin{cases} x = 3/2 - t \\ y = 1/2 + t \\ z = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \qquad r$ e r' sghembe

$\vec{r} = \mathcal{L}(u(-1, 1, 1)) \qquad \vec{r'} = \mathcal{L}(u'(1, 2, -1)) \qquad P_r(\tfrac{3}{2} - t, \tfrac{1}{2} + t, t) \qquad P_{r'}(1 + t', 2t', 1 - t')$

$\overrightarrow{P_rP_{r'}}(1 + t' - \tfrac{3}{2} + t, 2t' - \tfrac{1}{2} - t, 1 - t' - t)$

$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_rP_{r'}}, u \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_rP_{r'}}, u' \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-1} - \cancel{t'} + \cancel{3/2} - t + \cancel{2t'} - \cancel{1/2} - t + 1 - \cancel{t'} - t = 0 \\ \cancel{1} + t' - 3/2 + \cancel{t} + 4t' - \cancel{1} - \cancel{2t} - 1 + t' + \cancel{t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3t + 1 = 0 \\ 6t' - 5/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1/3 \\ t' = 5/12 \end{cases}$

$P(3/2 - 1/3, 1/2 + 1/3, 1/3) \quad P(7/6, 5/6, 1/3) \qquad P'(1 + 5/12, 2 \cdot 5/12, 1 - 5/12) \quad P'(\tfrac{17}{12}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{7}{12})$

$\overrightarrow{PP'}(3/12, 0, 3/12) \qquad \overrightarrow{PP'}(1/4, 0, 1/4) \qquad d(r, r') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{1/16 + 1/16} = \sqrt{\tfrac{2}{16}} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$s: \begin{cases} x = 7/6 + 1/4\, t'' \\ y = 5/6 \\ z = 1/3 + 1/4\, t'' \end{cases}$

È possibile determinare un piano H: $H \parallel r \wedge H \parallel r'$?
Scopritelo, nella prossima puntata!

Geometria

Lez. 22 - 31/05

Made by: Gianluca Fiorentino

GF

Cambio base e riferimento

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad R = (O, B)$ $\quad R' = (O', B')$

$P \in \mathcal{E}$ $\quad P \equiv_R \Phi_B(\overrightarrow{OP}) = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad P \equiv_{R'} \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P}) = (y_1, \dots, y_n)$

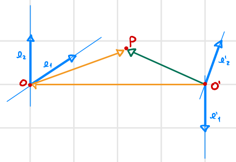
<u>Che relazione c'è tra $\Phi_B(\overrightarrow{OP})$ e $\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P})$?</u> N.B. $\boxed{\overrightarrow{OP} \neq \overrightarrow{O'P}}$

$u \in \vec{\mathcal{E}}$ $\quad \Phi_B(u) = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \Phi_{B'}(u) = (x'_1, \dots, x'_n)$

$\exists A \in Gl_n(K):$ $\quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A = M_{BB'}(id_{\vec{\mathcal{E}}})$

$$\overrightarrow{O'P} \overset{\text{regola del parallelogramma}}{=} \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} \implies \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'P}) = \underbrace{\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O})}_{\text{coordinate di } O \text{ in } R'} + \Phi_{B'}(\overrightarrow{OP}) \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}).$$

Graficamente, si sta dicendo quanto segue:



Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad K = \mathbb{R}$ $\quad O, O' \in \mathcal{E}$ $\quad B = (e_1, e_2)$ $\quad B' = (e'_1 = e_1 + 3e_2,\ e'_2 = 2e_1 - e_2)$

$R = (O, B)$ $\quad R' = (O', B')$ $\quad O' \equiv_R (2, 1) = \Phi_B(\overrightarrow{OO'})$

$M = M_{B'B}(id_{\vec{\mathcal{E}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad M^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$ ← abbiate fede

attenti all'ordine

$\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}) = \Phi_{B'}(-\overrightarrow{OO'}) = -\Phi_{B'}(\overrightarrow{OO'}) = -A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 \\ -5/7 \end{pmatrix}$

Dalla relazione precedente ottengo: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + {}^t\Phi_{B'}(\overrightarrow{O'O}) \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/7 \\ -5/7 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} y_1 = 1/7\, x_1 + 2/7\, x_2 - 4/7 \\ y_2 = 3/7\, x_1 - 1/7\, x_2 - 5/7 \end{cases}$

Punto medio, asse, circonferenza

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad R = (O, \bar{B})$ $\quad \bar{B}$ base ortonormale

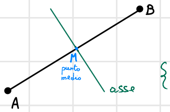
Siano $A, B \in \mathcal{E}$. Allora $\exists!\, M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, e M si dice **punto medio del segmento** AB.

L'insieme dei punti equidistanti da A e B si chiama **asse del segmento** AB.

$A \equiv_R (a_1, \dots, a_n)$

$B \equiv_R (b_1, \dots, b_n)$

$M \equiv_R (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$



$\{P \in \mathcal{E} \mid d(P, A) = d(P, B)\} = \mathcal{Q}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \iff \Phi_B(\overrightarrow{AM}) = \Phi_B(\overrightarrow{MB}) \iff (\bar{x}_1 - a_1, \dots, \bar{x}_n - a_n) = (b_1 - \bar{x}_1, \dots, b_n - \bar{x}_n) \iff \begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 = b_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n - a_n = b_n - \bar{x}_n \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \vdots \\ \bar{x}_n = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O, B)$ $\quad A(-3, 2, 5),\ B(1, 7, 3) \implies M(-1, 9/2, 4)$

$P \equiv_R (x_1, \dots, x_n)$

$$P \in \mathcal{Q} \iff \overset{\geq 0}{\|\overrightarrow{PA}\|} = \overset{\geq 0}{\|\overrightarrow{PB}\|} \iff \|\overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2 \iff \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA} \rangle = \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PB} \rangle \iff$$

$$\iff (a_1 - x_1, \dots, a_n - x_n)(a_1 - x_1, \dots, a_n - x_n) = (b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)(b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n) \underset{\text{prodotto scalare numerico}}{\iff} (a_1 - x_1)^2 + \dots + (a_n - x_n)^2 = (b_1 - x_1)^2 + \dots + (b_n - x_n)^2 \iff$$

$$\iff a_1^2 + \cancel{x_1^2} - 2a_1x_1 + \dots + a_n^2 + \cancel{x_n^2} - 2a_nx_n = b_1^2 + \cancel{x_1^2} - 2b_1x_1 + \dots + b_n^2 + \cancel{x_n^2} - 2b_nx_n \underset{\text{sposto a} \leftarrow \text{, evidenzio le } x \text{ e divido tutto per 2}}{\iff} \underbrace{\cancel{2}(b_1 - a_1)x_1 + \dots + \cancel{2}(b_n - a_n)x_n}_{} + \underbrace{\frac{(a_1^2 - b_1^2 + \dots + a_n^2 - b_n^2)}{2}}_{\text{termine noto}} = 0$$

vettore direzionale della retta per A e B $\quad w(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$

Verifichiamo che $M \in \mathcal{Q}$:

$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$ $\quad$ sostituisco le coordinate di M nelle x ed ottengo:

$$\cancel{2}(b_1 - a_1)\frac{a_1 + b_1}{\cancel{2}} + \dots + \cancel{2}(b_n - a_n)\frac{a_n + b_n}{\cancel{2}} + a_1^2 - b_1^2 + \dots + a_n^2 - b_n^2 = 0 \underset{\text{prodotto somma per differenza}}{\iff} \cancel{b_1^2} - \cancel{a_1^2} + \dots + \cancel{b_n^2} - \cancel{a_n^2} + \cancel{a_1^2} - \cancel{b_1^2} + \dots + \cancel{a_n^2} - \cancel{b_n^2} = 0 \quad \checkmark$$

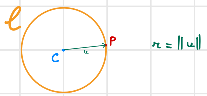
Proviamo, infine, a descrivere una **circonferenza**:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 2$ $\quad R = (O, \bar{B})$

$C \equiv_R (c_1, c_2)$ $\quad r \overset{\in K}{>} 0$ $\quad P \equiv_R (x_1, x_2)$

$\{P \in \mathcal{E} \mid d(C, P) = r\} = \mathcal{C}$ $\quad P \in \mathcal{C} \iff 0 < \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff \|\overrightarrow{CP}\|^2 = r^2 \iff (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$

Graficamente, si presenta così:



Executive producer:

Miranda Pasquale (non ha fatto un cazzo a parte dare ordini)

Co-writer:

(Dota Luigi)

Beta-Tester:

Donnarumma Francesco

aka, correttore di typo

Elena Riccardo

Mennillo Vincenzo

... e dalla mente creativa di me medesimo... è tutto gente!

Special thanks to everyone.

E ricordate, il modo migliore di ringraziare del lavoro svolto è superare l'esame.

The End