LEZIONE 9

Sottospazio somma

Siano $W_1, W_2, \dots, W_p$ sottospazi vettoriali di V. La somma di tali sottospazi è
$W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ u_1 + u_2 + \dots + u_p \mid u_1 \in W_1, \dots, u_p \in W_p \}$

PROP: Se $W_1 = L(S_1), \dots, W_p = L(S_p)$ allora:

i) $W_1 + \dots + W_p$ è un sottospazio vettoriale

ii) $W_1 + \dots + W_p = L(S_1 \cup \dots \cup S_p)$ ~ la somma è il più piccolo sottospazio che contiene l'unione di $S_1, \dots, S_p$

DIM

i) Bisogna verificare che $W_1 + \dots + W_p$ è sott. vett. e partiamo col verificare la chiusura della somma. Sicuramente $0 \in W_1 + \dots + W_p$ dunque $W_1 + \dots + W_p \neq \emptyset$. Consideriamo $u, v \in W_1 + \dots + W_p$ allora si ha: $\exists u_i \in W_i$ e $\exists v_i \in W_i$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$: $u = u_1 + \dots + u_p$ e $v = v_1 + \dots + v_p$. Facendo la somma $u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \dots + (u_p + v_p)$, si può facilmente notare che $u + v \in W_1 + \dots + W_p$.
Per il prodotto è banale.

ii)

$\supseteq$ Se considero $S_1 \cup \dots \cup S_p$ essa è $\subseteq W_1 + W_2 + \dots + W_p$ poiché se prendo $u \in S_1 \cup S_2 \dots \cup S_p$ allora $\exists i \in \{1, \dots, p\} : u \in S_i$ ma $S_i \subseteq W_i$ quindi posso scrivere $u = 0 + \dots u + \dots 0 \in W_1 + W_2 + \dots + W_p$

$\subseteq$ Sia $u \in W_1 + \dots + W_p$ allora $\exists u_i \in W_i$ $\forall i \in \{1, \dots, p\} : u = u_1 + \dots + u_i + \dots + u_p$ ma se $u_i \in W_i$ allora $u_i \in L(S_i)$ il che vuol dire che $\exists t_i \in \mathbb{N}$, $\exists v_1^i, \dots, v_{t_i}^i \in S_i$, $\exists \alpha_1^i, \dots, \alpha_t^i \in K$:
$u_i = \alpha_1^i v_1^i + \dots + \alpha_{t_i}^i v_{t_i}^i$.
Abbiamo quindi che $u = \alpha_1^1 v_1^1 + \alpha_{t_1}^1 v_{t_1}^1 + \dots + \alpha_1^i v_1^i + \dots + \alpha_{t_i}^i v_{t_i}^i + \dots + \alpha_{t_p}^p v_{t_p}^p$, possiamo dire che $u = u_1 + \dots + u_i + \dots + u_p \in L(S_1 \cup \dots \cup S_i \cup \dots \cup S_p)$. Abbiamo così dimostrato che $W_1 + W_2 + \dots + W_p = L(S_1 \cup \dots \cup S_p)$

TRASFORMAZIONI LINEARI

$\Phi_B : u \in V \to (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

Abbiamo già visto che tale applicazione è biettiva

OSS Φ_B gode delle seguenti proprietà:

1) $\forall u, v \in V$ $\Phi_B(u+v) = \Phi_B(u) + \Phi_B(v)$;
2) $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in K$ $\Phi_B(\lambda u) = \lambda \Phi_B(u)$

DEF Siano V, W spazi vett. su un campo K. Un'applicazione $T: V \to W$ si dice applicazione lineare se $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in K$ si ha:

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ - l'immagine della somma di 2 vettori sia = alla somma delle im.

ii) $T(\alpha \cdot u) = \alpha T(u)$

Inoltre sia $T: V \to W$ un'app. lineare avremo che se:

- T è INIETTIVA si dice monomorfismo
- T è SURIETTIVA si dice epimorfismo
- T è BIETTIVA si dice isomorfismo
- $V = W$, T si dice endomorfismo
- $V = W$ e T è biettiva, T si dice automorfismo

PROPRIETA' APP. LINEARI

Sia $T: V \to W$ app. lineare

i) $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ [immagine del vettore nullo del dominio è = al vettore nullo del codominio]

DIM $\to$ $T(\underline{0}_V) = T(0 \cdot \underline{0}_V) = 0 \cdot T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

ii) $\forall u_1, \dots, u_t \in V$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ possiamo considerare $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$ e abbiamo:

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_t T(u_t)$ [imm. della comb. lineare = alla comb. lineare con gli scalari moltiplicata per l'immag. dei vettori]

DIM

$\hookrightarrow$ Per induzione: con $t=1$ abbiamo $T(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 T(u_1)$ as we already know.

Passo d'induzione $\to$ $t > 1 \Rightarrow T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1} + \alpha_t u_t)$ sfruttando l'associatività della somma ottengo: $T((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) \alpha_t u_t)$

Possiamo sfruttare la 1ª proprietà delle app. lineari e avere

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + \alpha_t u_t) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + T(\alpha_t u_t)$.

A questo punto sfrutto l'ipotesi d'induzione che l'enunciato è vero con $t-1$ vettori e quindi: $T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{t-1} u_{t-1} + \alpha_t u_t) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(u_{t-1}) + \alpha_t T(u_t)$

PROP $T: V \to W$ app. lineare

Se $(u_1, \dots, u_n)$ è una n-pla di vettori di V LIN. DIP., allora anche $(T(u_1), \dots, T(u_n)) \in W$ è LIN. DIP, non posso dire nulla se la n-pla di V è IND.

DIM Per ipotesi $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ non tutti nulli: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{0}_V$.

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$. $\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n)$ dove gli scalari NON sono tutti nulli. Allora anche la n-pla $(T(u_1), \dots T(u_n))$ è LIN. DIP.

APPLICAZIONI LINEARI

$T: V \to W$ app. lineare

PROP Sia $U \subseteq V$ un sott. vett. Allora $T(U)$ è un sott. vett. di W

DIM

$0_W = T(0_V) \in T(U) \Rightarrow T(U) \neq \emptyset$

$u', v' \in T(U) = \{T(u) \mid u \in U\} \Rightarrow \exists u, v \in U : T(u) = u'$

$u' + v' = T(u) + T(v) \overset{(1)}{=} T(u+v) \in T(U)$

Fissiamo ora $\lambda \in K$.

$\lambda u' = \lambda T(u) \overset{(2)}{=} T(\lambda u) \in T(U)$

Per quanto appena detto, $\mathrm{Im} T = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V)$ sottospa. vett. di W

PROP $S \subseteq V : U = L(S)$ allora $T(U) = L(T(S))$

DIM

per la prop. preced.

$\supseteq$ $S \in U \Rightarrow T(S) \subseteq T(U) \Rightarrow L(T(S)) \subseteq T(U)$

$\subseteq$ $u \in T(U) \Rightarrow \exists u \in U = L(S) : T(u) = u'$

$u \in L(S) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists u_1, \dots, u_n \in S, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \Rightarrow$

$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \overset{(ii)}{=} \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) \in L(T(S))$

KERNEL

Indichiamo con $\ker(T)$ il nucleo o kernel di T

$\ker(T) = \{u \in V \mid T(u) = 0_W\}$ [è l'insieme degli elementi di V che hanno come immagine il vettore nullo]

PROP: T è suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im} T = W$

T è iniettiva $\Leftrightarrow \ker T = \{0_V\}$

DIM T è suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im} T = W$ già noto

Dimostriamo l'altra

$\Rightarrow$ sia $u \in U$ con $u \neq \emptyset$ sapendo che T è iniettiva, abbiamo che $T(u) \neq T(0_V)$ ma noi sappiamo che $T(0_V) = 0_W$ dunque $T(u) \neq 0_W$ il che vuol dire che $u \notin \ker(T)$ e quindi $\ker(T) = \{0_V\}$ unico

$\Leftarrow$ Siano $u, v \in V$ e $T(u) = T(v)$ possiamo dire che $T(u) - T(W) \Leftrightarrow T(u) - T(v) = 0_W$ $\Rightarrow T(u-v) = 0_W$ quindi abbiamo che $u - v \in \ker(T)$ ma $\ker(T) = \{0_V\}$ quindi $u - v = 0_V$ il che vuol dire $u = v$.

PROP

Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare
se la n-pla di vettori è LIN. IND e T è iniettiva allora la n-pla di immagini è LIN. IND.

DIM

Siano $\beta_1, \dots, \beta_n \in K : \beta_1 T(u_1) + \dots + \beta_n T(u_n) = \underline{0}_W$
possiamo quindi scrivere $T(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n) = \underline{0}_W$ il che significa che $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \in \ker(T)$
ma poiché T è iniettiva sappiamo che $\ker(T) = \{\underline{0}_V\}$ di conseguenza $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = \underline{0}_V$
e sapendo che i vettori $u_1, \dots, u_n$ sono linear. IND. allora $\beta_1, \dots, \beta_n$ sono tutti nulli.

LEZIONE 10

TEOREMA DELL' EQUAZIONE DIMENSIONALE

Siano V, W spazi vettoriali su campo K, con V fin. gen. e $\dim(V)=n$.
Sia $T: V \to W$ un' app. lineare si ha che $\underbrace{n}_{\dim V} = \dim \underbrace{\ker}_{\text{nucleo}}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE APP. LINEARI

Siano V, W spazi vett. su un campo K con V f.g. e avente $\dim = n$. Sia $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base ordinata di V definiamo l'app. $\overset{f_1}{\varphi}: B \to W$ NON LINEARE.

Il teorema dice che: $\exists!\ T: V \to W : \underbrace{T(e_1)}_{\text{imm. di } e_1 \text{ in } T} = \varphi(e_1), \dots, T(e_n) = \varphi(e_n)$

DIM (leggila giusto per)

Dimostriamo l'esistenza. Sia $u \in V$ e consideriamo le sue componenti $(x_1, \dots, x_n)$ in B. Allora definisco $T(u) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$ abbiamo dunque che l'app. $T: V \to W$ associa a $u \in V$ $x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$.

Verifichiamo che T è lineare. Consideriamo oltre al vettore u anche w e le sue componenti $y_1, \dots, y_n$ in B. Abbiamo che le componenti di $u+v$ in B sono $x_1+y_1, \dots, x_n+y_n$

immagine

$\Rightarrow T(u+v) = (x_1+y_1)\varphi(e_1) + \dots + (x_n+y_n)\varphi(e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) + y_1\varphi(e_1) + \dots + y_n\varphi(e_n) = T(u) + T(v)$

Facciamo lo stesso col $\times$ ed esce che è LINEARE.

Dimostriamo l'unicità: consideriamo un'altra applicazione $T': V \to W$ LINEARE $\mid T'(e_1) = \varphi(e_1), \dots$
$\dots T'(e_n) = \varphi(e_n)$. Dunque abbiamo che: $T'(u) = T'(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)$ ma poiché T' è lineare quindi conserva le comb. lineari dunque $T'(u) = x_1T'(e_1) + \dots + x_nT'(e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = T(u)$.

APPLICAZIONI LINEARI

PROP $T: V \to W$ isomorfismo $S \subseteq V$
S è LIN. IND $\Leftrightarrow T(S)$ è LIN. IND.

DIM

$\Rightarrow$ T è iniettiva per cui conserva la lineare indipendenza

$\Leftarrow$ $T^{-1}: W \to V$ è uno isomorfismo. Allora $S = T^{-1}(T(S))$ è LIN. IND. Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$
$T^{-1}(T(S)) = T^{-1}(\{T(v_1), \dots, T(v_t)\}) = \{T^{-1}(T(v_1)), \dots, T^{-1}(T(v_t))\} = \{v_1, \dots, v_t\}$

RANGO

Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1^1, a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \\ a_1^m, a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$ abbiamo che $\dim(\underbrace{L(a_1, \dots, a_n)}_{\text{colonne}})$ è detta rango della matrice ed è il max numero di colonne di A LIN. IND.

Il rango di una m è = al rango di una sua trasposta.

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dim L((2,0,1),(0,1,0),(0,0,1)) = 3 = \text{rango}(A) = \dim L((2,0,0)(0,1,0)(1,0,1))$

DEF: $A \in M_{m \times n}(K)$

A si dice ridotta a scalini (o a gradini) $:\Leftrightarrow$

i) a^i è una riga nulla di A $\Rightarrow$ Tutte le righe succes. sono nulle

ii) il primo elemento da sinistra NON nullo si dice pivot e deve stare più a sinistra dei pivot delle righe successive. Inoltre A si dice completamente ridotta a gradini se è vero anche che:

iii) i pivot sono tutti uguali ad 1

iv) gli elementi sopra a tutti i pivot sono nulli

PROP $A \in M_{m\times n}(K)$, A è ridotta a gradini $\Rightarrow$ rango $(A) = k$ dove k è il numero di pivot.

OPERAZIONI o TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Si definiscono trasformazioni elementari di riga le seguenti modifiche sulle righe (NON colonne) di una matrice $A \in M_{m\times n}(K)$:

i) scambiare 2 righe differenti $a^i \to a^j$

ii) Preso $\alpha \in K\setminus\{0\}$, moltiplicare per tale elemento α NON NULLO di K $a^i \leftarrow \alpha \cdot a^i$

iii) Preso uno scalare $\alpha \in K$, sommare a una riga una differente riga moltiplicare per α: $a^i \leftarrow a^i + \alpha a^j$

Tutte queste operazioni sono invertibili e conservano il rango.

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $a^1 \leftrightarrow a^2$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Per tornare indietro, basterebbe fare $b^2 \leftrightarrow b^1$. Adesso $b^2 \to \lambda b^2$, dove $\lambda = \frac{1}{2}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $c^3 \to c^3 + (-2)c^1$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Anche queste operazioni sono reversibili chiaramente. Adesso $d^4 \to d^4 + (-1)d^1$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $e^4 \to e^4 + (-1)e^3$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f^3 \to f^3 + 2f^2$ $G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è finalmente ridotta a scalini, ma continuiamo. Adesso $g^3 \to \frac{1}{3} g^3$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $h^1 \to h^1 + h^3$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $i^1 \to i^1 - i^2$ $J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è completamente ridotta a gradini.

We did it!

Questo algoritmo, piuttosto intuitivo, è anche detto **Metodo di riduzione di Gauss**, utile per risolvere sistemi di equazioni velocemente. Vediamolo, a titolo informativo, un po' più nel dettaglio.

$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_J & \dots & a^1_n \\ a^k_1 & a^k_2 & \dots & a^k_J & \dots & a^k_n \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_J & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$ J indice della prima colonna non nulla, K indice della riga su cui c'è il primo elemento non nullo della colonna J

$a^1 \leftrightarrow a^k \qquad \forall i \in \{2,\dots,m\} \qquad a^i \to a^i + \left(-\frac{a^i_J}{a^1_J}\right) a^1$

$a^i_J + \alpha_i \underbrace{a^1_J}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = -\frac{a^i_J}{a^1_J}$ $\to$ Creo colonna di tutti zeri sotto il pivot e procedo iterativamente nella sotto-matrice

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $a^1 \leftrightarrow a^k = a^3$ $J=2 \quad K=3$ $A' = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $a^4 \to a^4 + \left(\frac{-a^4_2}{a^1_2}\right) a^1$ $-(-\frac{1}{7})^{-}$

LEZIONE 11

SISTEMA DI EQUAZIONI

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite su un campo k è un n-upla di equazioni lineari in n incognite a coefficienti in k.

$$\underset{\text{sigma}}{\Sigma} = \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = b^1 \\ a_1^2 x_1 + \dots + a_n^2 x_n = b^2 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + \dots + a_n^m x_n = b^m \end{cases}$$

A un sistema di equazioni lineari possiamo associare 2 matrici:

- Prima matrice \ matrice incompleta: è costituita solo dai coeff. delle incognite
- Seconda matrice \ matrice completa: costituita sia dai coeff. delle incognite sia dai termini noti

ESEMPIO

$n = 3 \quad K = \mathbb{R} \quad \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

incomp. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ completa $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$

DEF • Il sistema Σ è compatibile se ammette almeno 1 soluzione cioè se

$$S = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in k^n \;\middle|\; A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = b \right\} \neq \emptyset$$

prodotto tra a e la trasposta della n-pla di scalari

altrimenti Σ è incompatibile

- Σ e Σ' sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni: $S = S'$

TRASFORMARE I SISTEMI DI EQUAZIONE

Sia Σ un sistema lineare di m equazioni in n incognite su k e sia C la sua matrice completa. Se effettuiamo su C un numero finito di operazioni elementari, otteniamo una matrice C' tale che il sistema lineare Σ' che ha C' come matrice completa è equivalente a Σ

DIM $\quad \Sigma : \begin{cases} a_1^1 x + \dots + a_n^1 x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_1^m x + \dots + a_n^m x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b_m \end{pmatrix}$

i) $i, k \in \{1, \dots, m\} \quad a^i \leftrightarrow a^k$

$\Sigma : \begin{cases} \vdots \\ a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n - b_i = 0 \\ a_1^k x_1 + \dots + a_n^k x_n - b_k = 0 \end{cases} \qquad \Sigma' : \begin{cases} \vdots \\ a_1^k x_1 + \dots + a_n^k x_n - b_k = 0 \\ a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n - b_i = 0 \end{cases}$ le equazioni sono le stesse $\quad S = S'$

ii) $i \in \{1, \dots, m\}$ $\lambda \in K - \{0\}$, $a^i \to \lambda a^i$

$$\Sigma: \begin{cases} \lambda a^i_1 x_1 + \dots + \lambda a^i_n x_n - \lambda b_i = 0 \\ \vdots \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \end{cases} \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in S \Rightarrow e_1(y) = 0, \dots, e_i(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_1(y) = 0, \dots, \lambda e_i(y) = \lambda \cdot 0 = 0, \dots, e_n(y) = 0 \iff (y_1, \dots, y_n) \in S'$$

iii) $i, k \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha \in K$, $a^i \to a^i + \alpha a^k$

$$\Sigma: \begin{cases} (a^i_1 + \alpha a^k_1) x_1 + \dots + (a^i_n + \alpha a^k_n) x_n - (b_i + \alpha b_k) = 0 \\ a^k_1 x_1 + \dots + a^k_n x_n - b_k = 0 \end{cases} \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in S \Rightarrow$$

$$e_1(y) = 0, \dots, e_i(y) = 0, \dots, e_n(y) = 0 \Rightarrow e_1(y) = 0, \dots, \underbrace{e_i(y)}_{=0} + \underbrace{\alpha e_k(y)}_{=\alpha \cdot 0} = 0, \dots, e_n(y) = 0 \iff (y_1, \dots, y_n) \in S'$$

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a^2 \to a^2 + a^1 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \Sigma': \begin{cases} x_1 = -x_2 - 2 + 1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$S = S' = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ Si dice che il sistema ha ∞^1 soluzioni, dove l'esp dipende dal numero di var libere.

$$a^2 \to -a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a^1 \to a^1 + 2a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Sigma'': \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Notiamo che $\underline{0} \notin S = \{(-x_2 - 1, x_2, -1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ quindi S **NON** è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$.

METODO GAUSS-JORDAN

Il metodo GAUSS-JORDAN per risolvere un sistema di equazioni consiste di 2 step:

1) riduzione a gradini della matrice completa

2) i) SOSTITUZIONE A RITROSO delle variabili che corrispondono ai pivot (NON libere)

oppure

ii) RIDUZIONE COMPLETA a GRADINI della matrice completa.

Infine si scrive l'insieme S.

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} -2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad c^1 \leftrightarrow c^2 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^3 \to c^3 + c^1 \\ c^4 \to c^4 - c^1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

riga

$r_4 \to r_4 - 3/2\, r_2$

$(0, -3, 3, 2, -2, 2) - 3/2\,(0, -2, 2, 1, -1, 1) =$

$= (0 - 0, -3 + 3, 3 - 3, 2 - \frac{3}{2}, -2 + \frac{3}{2}, 2 - \frac{3}{2})$

$= (0, 0, 0, 1/2, -1/2, 1/2)$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad c^4 \to c^4 + \tfrac{1}{6} c^3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ridotta a scalini. Procediamo con (ii)

$$\begin{array}{l} c^1 \to -c^1 \\ c^2 \to -\frac{1}{2} c^2 \\ c^3 \to -\frac{1}{3} c^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c^2 \to c^2 + \frac{1}{2} c^3 \\ c^1 \to c^1 - c^3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad c^1 \to c^1 + c^2 \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & & x_3 & & x_5 \end{array} \end{array} = C'$$

$$\Sigma': \begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_5 + 1 \end{cases} \qquad S = S' = \{(-x_3 - 1, x_3, x_3, x_5 + 1, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

PRODOTTO RIGHE × COLONNE

Data una coppia di matrici (A, B) conformabile (se $n=p$ ossia il numero di colonne della prima matrice è = al numero di righe della 2ª matrice B) definisco il prodotto righe per colonne facendo il prodotto scalare numerico tra le righe di A e tutte le colonne di B.

ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$a^1 b_1 = ((2 \cdot -1) + (-3 \cdot 0) + (4 \cdot 2)) = -2 + 0 + 8 = 6$ $\quad a^1 b_2 = ((2 \cdot 1) + (-3 \cdot 1) + (4 \cdot -2)) = -9$

$a^2 b_1 = ((0 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (7 \cdot 2)) = 0 + 0 + 14 = 14$ $\quad a^2 b_2 = ((0 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + (7 \cdot -2)) = -13$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 14 & -13 \end{pmatrix}$

tale operazione non è commutativa, associativa, distributiva, e il suo elemento neutro è la matrice identica fatta da tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove.

GRUPPO LINEARE GENERALE

Prende il nome di gruppo generale lineare l'insieme di tutte le matrici quadrate invertibili, dello stesso ordine e a coefficienti in uno stesso campo, dotato dell'operazione di prodotto tra matrici. Più nello specifico, fissiamo un numero naturale $n \geq 1$ e consideriamo un campo k, quale potrebbe essere campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideriamo poi l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ e invertibili. Se dotiamo tale insieme dell'operazione di prodotto tra matrici si viene a formare un gruppo detto gruppo generale lineare.

$$\{GL(n, \mathbb{K}) = A \in M_n(\mathbb{K}) : A \text{ è invert.}\}$$

PROP $\Sigma_0: Ax = 0$ $\quad S_0$ insieme delle soluzioni $\subseteq K^n$. Allora S_0 è un sott.spa. vett. di K^n

DIM Proviamo che S_0 è LIN. CHIUSO:

- $0 \in S_0$ banale $\Rightarrow S_0 \neq \emptyset$
- $y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in S_0$ $\quad$ Th: $y + z \in S_0$

  $\Rightarrow A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \wedge A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0 \rightarrow A\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right] = 0 + 0 = 0$
- $\alpha \in K$ $\quad$ Th: $\alpha y \in S_0$

  $A\left[\alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \alpha\left[A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \alpha \cdot 0 = 0$

LEZIONE 12

TEOREMA DI ROUCHÈ - CAPELLI

Sia Σ un sistema di equazioni lineari tali che $Ax=b$ allora consideriamo la matrice completa C di tale sistema, abbiamo che:

Σ è compatibile $\Leftrightarrow$ rango (A) = rango (C)

incompleta — completa

DIM

sigma

Posso scrivere Σ in forma vettoriale cioè

$$\Sigma : \left\{ x_1 \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a^1_n \\ a^2_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right.$$

dire che $y_1, \dots, y_n \in K^n$ è soluzione di tale sistema vuol dire che sostituendo ordinatamente $y_1, \dots, y_n$ nelle variabili del sistema ottengo l'uguaglianza con $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ma dunque $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle colonne dei coefficienti. Quindi possiamo dire che

Σ è compatibile $\Leftrightarrow \underline{b} \in L(a_1, \dots, a_n)$.

colonne termini noti

Adesso dobbiamo dimostrare che $\underline{b} \in L(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$ rango(A) = rango (C)

$\Rightarrow$ Abbiamo che $b \in L(a_1, \dots, a_n)$ ma noi sappiamo che $a_1, \dots, a_n \in L(a_1, \dots, a_n)$ dunque per il teorema sulla chiusura lineare abbiamo che $L(\underline{b}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \subseteq L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ ma poiché il viceversa è ovvio abbiamo che $L(\underline{b}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ quindi $\dim L(\underline{b}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \dim L(a_1, \dots, a_n)$ il che ci permette di dire che rango (C) = rango(A)

$\Leftarrow$ Per ipotesi sappiamo che rango(C) = rango(A), inoltre sappiamo che $L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) \subseteq L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ e poiché essi hanno la stessa dimensione allora abbiamo che $L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$ è $= L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ ma si può notare banalmente che $b \in L(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b})$ dunque l'implicazione è dimostrata.

PROP Consideriamo un sistema omogeneo $\Sigma_0 : Ax = 0$. Sappiamo che prendendo una matrice A di tipo $m \times n$ possiamo considerare l'applicazione lineare $\tilde{T}_A : (x_1, \dots, x_n) \in K^n \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$. Il nucleo di $\tilde{T}_A$ cioè $\ker(\tilde{T}_A) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} = S_0$ dunque è un sottospazio vettoriale.

associa

trasposta di $(x_1, \dots, x_n)$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ $\qquad \tilde{T}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \to {}^t\!\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = {}^t\!\begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 \quad -x_3 \end{pmatrix}$

$\tilde{T}_A((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 3x_2 + 5x_3, x_1 - x_3)$.

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\qquad \tilde{T}_A((1,0,0)) = (-2, 1) \quad \tilde{T}_A((0,1,0)) = (3,0) \quad \tilde{T}_A((0,0,1)) = (5,-1)$

$\mathrm{Im}\tilde{T}_A = L(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\tilde{T}_A = \text{rango}(A)$ $\qquad \dim\mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im}\tilde{T}_A + \dim\ker\tilde{T}_A$

SCRIVERE SOTTOSPAZI VETT. COME SISTEMI OMOGENEI

OSS: $\Sigma_0 : AX=0 \qquad S_0 = \ker f_A \Rightarrow \dim S_0 = n - \text{rango}(A)$, dove n è il num. di incognite

Esempio:

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1 \quad +2x_3-x_4-2x_5=0 \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)}_{A} \begin{matrix} a^2 \to a^2-2a^1 \\ a^3 \to a^3-a^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to a^3-a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

riduco completamente: $a^2 \to -a^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^1 \to a^1-a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -2\bar{x}_3+\bar{x}_4+2\bar{x}_5 \\ x_2 = 3\bar{x}_3-3\bar{x}_4-3\bar{x}_5 \end{cases}$$

ci indica che le abbiamo parametrizzate

$S_0 = \{(-2\bar{x}_3+\bar{x}_4+2\bar{x}_5,\ 3\bar{x}_3-3\bar{x}_4-3\bar{x}_5,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4,\ \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\}$

Metto in evidenza: $\bar{x}_3(-2,3,1,0,0)+\bar{x}_4(1,-3,0,1,0)+\bar{x}_5(2,-3,0,0,1) \Rightarrow S_0 = \mathcal{L}((-2,3,1,0,0),(1,-3,0,1,0),(2,-3,0,0,1))$

i 3 vettori sono lin indip $\left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\dim S_0 = n - \text{rango}(A) = 5-2 = 3$ = num di variabili libere.

- $\Sigma_0 : \begin{cases} x_2-x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ x_1+3x_2 \quad +x_4+3x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$ 5 incognite, $K=\mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) a^1 \leftrightarrow a^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to a^3-a^1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^3 \to a^3-a^2 \\ a^4 \to a^4+a^2 \\ a^3 \leftrightarrow a^4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^3 \to \tfrac{1}{5}a^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^2 \to a^2-2a^3 \\ a^1 \to a^1+a^3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a^1 \to a^1-2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -3\bar{x}_3+4\bar{x}_5 \\ x_2 = \bar{x}_3 - 13/5\,\bar{x}_5 \\ x_4 = \frac{4}{5}\bar{x}_5 \end{cases}$$

$S_0 = \{(-3\bar{x}_3+4\bar{x}_5,\ \bar{x}_3-13/5\,\bar{x}_5,\ \bar{x}_3,\ \frac{4}{5}\bar{x}_5,\ \bar{x}_5) \mid \bar{x}_3, \bar{x}_5 \in \mathbb{R}\}$ $\qquad \dim S_0 = n - \text{rango}(A) = 5-3 = 2$

$\bar{x}_3$	$\bar{x}_5$	
1	0	$(-3,1,1,0,0)$
0	1	$(4,-\frac{13}{5},0,\frac{4}{5},1)$

$\Rightarrow S_0 = \mathcal{L}((-3,1,1,0,0),(4,-\frac{13}{5},0,\frac{4}{5},1))$.

TEOREMA

Sia W un sottospazio vettoriale numerico in K^n avente dimensione h. Il teorema ci dice che $\exists\, \Sigma_0 : Ax=0$ tale che $S_0 = W$

DIM

Sia $B=(w_1, \dots, w_h)$ una base di W. I vettori della base sono così costituiti

$w_1 = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_n^m)$

$\vdots$

$w_h = (a_h^1, a_h^2, \dots, a_h^m)$

e naturalmente sappiamo che $W = L(B)$.

Considero un vettore $u=(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, sappiamo che

$$u \in W = L(B) \iff \text{rango} \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_h^1 & x_1 \\ a_1^2 & \ddots & a_h^2 & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_h^n & x_n \end{pmatrix} = h$$

è la dimensione di W

poiché l'ultima colonna deve essere comb. linea. delle precedenti

matrice costituita dai vettori di B avente rango h

colonna costituita dal vettore u

Per verificare che il rango della matrice, che chiameremo D, sia effettivamente h, abbiamo 2 metodi: RIDUZIONE DI GRAUSS, TEOREMA DEGLI ORLATI.

che usiamo.

Esempio:

- $W \subseteq \mathbb{R}^4 \quad W = \mathcal{L}((1,0,1,1),(2,1,2,3)) \qquad \dim W = 2$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{matrix} a^3 \to a^3 - a^1 \\ a^4 \to a^4 - a^1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad a^4 \to a^4 - a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

- $W = \mathcal{L}((2,1,0,3,1),(2,-1,1,4,0)) \subseteq \mathbb{R}^5 \qquad \dim W = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^1 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^2 \to a^2 - 2a^1 \\ a^4 \to a^4 - 3a^1 \\ a^5 \to a^5 - a^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{per comodità} \\ a^3 \leftrightarrow a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 4 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 7 & x_4 - 3x_2 \\ 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^3 \to a^3 - 4a^2 \\ a^4 \to a^4 - 7a^2 \\ a^5 \to a^5 - a^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 0 & 0 & x_4 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 0 & 0 & x_5 - x_2 - x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Sia V uno spazio finitamente generato su k, avente dim=n. Consideriamo $B=(e_1,..,e_n)$ una base ordinata di V. Consideriamo l'isomorfismo associato a B $\Phi_B: V \to K^n$ abbiamo che $\forall W \subseteq V$ sappiamo che $\Phi_B(W)$ è un sottospazio vettoriale di K^n.
$W = S_0 \quad \Sigma_0 : AX = 0$ è rappresentazione cartesiana di U nella base B.

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

Sia $B = (w_1, \dots, w_h)$ una base di W. E naturalmente sappiamo che $W = L(B)$, considero un vettore $u = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, sappiamo che $u \in W = L(B) \Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_h \in K$:
$(x_1, \dots, x_n) = t_1(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n) + t_2(a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^n) + \dots + t_n(a_n^1, \dots, a_n^m)$
la quale può essere scritta come:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 a_1^1 + \dots + t_n a_n^1 \\ x_2 = t_1 a_1^2 + \dots + t_n a_n^2 \\ \vdots \\ x_m = t_1 a_1^m + \dots + t_n a_n^m \end{cases} \leftarrow$$

tale rappresentazione è detta parametrica

TEOREMA DI KRAMER

Sia Σ un sistema di equazioni lineari tali che $Ax = \underline{b}$ con A che è una matrice quadrata. Se $\exists A^{-1}$, allora l'insieme delle soluzioni è fatta da un solo elemento cioè: $\underset{\text{insieme soluzioni}}{S} = \{A^{-1}b\}$

DIM

Per ipotesi A è invertibile, ossia: $\exists A^{-1} \in M_n(K) \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ / matrice identica
Allora consideriamo $Ax = \underline{b}$ e moltiplichiamo entrambi i membri per A^{-1}. Abbiamo così $A^{-1}(AX) = A^{-1}\underline{b}$, poiché il prodotto righe x colonne è associativa, posso scrivere $(A^{-1}A)X = A^{-1}\underline{b}$ il che è uguale: $I_n X = A^{-1}\underline{b}$ ma $I_n X$ è proprio X quindi abbiamo un'unica soluzione cioè: $X = A^{-1}\underline{b}$

Lezione 13: 1ª Prova intercorso !

LEZIONE 14

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

- Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **SIMMETRICA** se $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $a^i_j = a^j_i$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- A si dice **ANTISIMMETRICA** se $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $a^i_j = -a^j_i$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ -2 & -7 & 0 & \pi \\ 5 & -10 & \pi & 0 \end{pmatrix}$
- A si dice **TRIANGOLARE SUPERIORE** se $\forall i,j \in \{1,\dots,n\} : i > j$ allora $a^i_j = 0$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
  invece si dice **TRIANGOLARE INFERIORE** se $\forall i,j \in \{1,\dots,n\} :$ $i < j$ allora $a^i_j = 0$
- A si dice **DIAGONALE** se $\forall i,j \in \{1,\dots,n\} :$ $i \neq j$ allora $a^i_j = 0$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

DEF Sia la permutazione $f \in P_n$, diciamo che f presenta un' **inversione** se:
$\exists\, i,j \in \{1,\dots,n\} \mid i < j$ e $f(i) > f(j)$
immagine

OSS: Se S è un' insieme finito, una **permutazione** di S è un' applicazione biettiva di S in se. In particolare si indica con P_n l'insieme delle permutazioni di $\{1,\dots,n\}$ ovvero le applicazioni $f: \{1,\dots,n\} \rightarrow \{1,\dots,n\} \mid f$ è biettiva

MODI PER RICAVARE IL DETERMINANTE

Ricordiamo la definizione: Il **determinante** di una matrice è un numero associato a ciascuna matrice quadrata e ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche.

Per matrici 3x3 è possibile applicare la **regola di Sarrus**:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{matrix}$$

- sottraggo
- addiziono

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$$|A| = \{(2\cdot1\cdot1) + (-1\cdot-1\cdot3) + (2\cdot0\cdot-2) - (-1\cdot0\cdot1) - (2\cdot-1\cdot-2) - (2\cdot1\cdot3)\}$$

$$2 + +3 + 0 - 0 - (+4) - 6$$

$$5 - 10 = -5$$

PROPRIETÀ:

Si può dimostrare che esiste un'unica applicazione da $M_n(K)$ in K che ad ogni matrice $A \rightsquigarrow \det(A)$

Tale applicazione ha le seguenti proprietà:

- il determinante della matrice identica è 1
- Se B è la matrice ottenuta da A:
  - scambiando 2 righe, allora $|B| = -|A|$
  - moltiplicando una riga per uno scalare $\alpha \in K$ allora $|B| = \alpha |A|$
  - applicando la 3ª operazione elementare di riga allora $|B| = |A|$
- il determinante della matrice è = al det. della trasposta.

OSS: Dalle proprietà del determinante si deduce che se B è la matrice ottenuta da A applicando un numero finito di operazioni elementari allora $|B| \neq 0 \to |A| \neq 0$

DEF Suppongo che A sia una matrice NON necessariamente quadrata. Suppongo $m, n \in \mathbb{N}$, considero $k \leq \min\{m, n\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & & a_n^m \end{pmatrix}$$

Fisso k indici di riga e k indici di colonna

Definisco il minore di A, individuato da tali indici di riga e colonna fissati, la sottomatrice quadrata di A formata dagli elementi di A in cui si incrociano le rispettive righe e colonne.

Se A è quadrata possiamo individuare alcuni minori molto particolari di A: comunque fisso $i, j \in \{1, \dots, n\}$ cancello la riga iesima e colonna j-esima, il minore rimanente si dice minore complementare di a_j^i e si indica con M_j^i.

Il complemento algebrico di a_j^i, indicato con A_j^i è $(-1)^{i+j} \cdot |M_j^i|$

determinante del minore complem.

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad a_2^3 = -6 \quad M_2^3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |M_2^3| = 2 \quad A_2^3 = (-1)^{3+2} \cdot 2 = -2$$

TEOREMA DI LA PLACE

Considero una matrice $A \in M_n(K)$, dunque quadrata, il teorema dice che:

- $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad |A| = a^k_1 A^k_1 + \dots + a^k_n A^k_n$

  indice di riga — componente alg. di a^n_i

- $\forall J \in \{1, \dots, n\} \quad |A| = a^1_J A^1_J + \dots + a^n_J A^n_J$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fisso tale elemento

$$\Rightarrow A^2_1 (-1)^{2+1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2_3 (-1)^{2+3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2_4 (-1)^{2+4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot A^2_1 + 1\, A^2_2 + 2\, A^2_3 + 1\, A^2_4$$

PROP: Sia la matrice $A \in M_n(K)$ triangolare superiore allora:

$|A| = a^1_1 \cdot a^2_2 \cdot \dots \cdot a^n_n$ — prodotto degli elem. sulla diagonale princ.

(rispettivamente anche per le matrici triangolari inferiori.

DIM

Per induzione:

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots \\ 0 & \begin{pmatrix} b^1_2 & & \\ 0 & \ddots & \\ \dots & 0 & b^n_n \end{pmatrix} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$B' \in M_{n-1}(K)$

$n = 1 \quad B = (b^1_1) \quad |B| = b^1_1$ ✓

$n > 1$

$n-1 \Rightarrow n \quad |B'| = b^1_2\, b^3_3 \dots b^n_n$ per ipotesi.

Applichiamo il Teorema di Laplace sviluppando $|B|$ rispetto alla prima colonna: $J = 1$.

$|B| = b^1_1 B^1_1 + 0 + \dots + 0 = b^1_1 |B'| (-1)^{1+1} = b^1_1\, b^2_2 \dots b^n_n$. ▨

ESEMPIO

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad |B| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

COROLLARIO

Sia B una matrice a gradini ottenuta da A.

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0 \Leftrightarrow n. \#\text{pivot } B \Leftrightarrow \text{rango}(B) = n = \text{rango}(A)$.

Inoltre possiamo osservare che $|A| = 0 \Leftrightarrow \text{rango}(A) < n$

TEOREMA DI BINET

Siano le matrici $A, B \in M_n(K)$ allora $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

2° TEOREMA DI LAPLACE

Considero una matrice $A \in M_n(K)$, dunque quadrata, il teorema dice che:

- $\forall i, h \in \{1, \dots, n\}, \; i \neq h \qquad a_1^h A_1^i + \dots + a_n^h A_n^i = 0$
- $\forall k, j \in \{1, \dots, n\}, \; k \neq j \qquad a_k^1 A_j^1 + \dots + a_k^n A_j^n = 0$

Ricapitolando:

Il 1° teorema di Laplace afferma che il determinante di una matrice quadrata M di ordine n è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga qualsiasi (o una colonna qualsiasi) per i rispettivi complementi algebrici.

Il 2° teorema afferma che è sempre nulla la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) della matrice stessa.

Con lo sviluppo di Laplace si può verificare, che il determinante di una matrice diagonale è il prodotto dei valori sulla diagonale, che il determinante di una matrice triangolare è ancora il prodotto dei valori sulla diagonale o che gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi sulla diagonale.

TEOREMA GENERALIZZATO DI LAPLACE

$\forall k, h \in \{1, \dots, n\}, \; a_1^k A_1^h + \dots + a_n^k A_n^h = \delta_h^k |A|$

$\forall j, \ell \in \{1, \dots, n\}, \; a_j^1 A_\ell^1 + \dots + a_j^n A_\ell^n \qquad \delta_\ell^j \; |A|$

$$\delta_k^h = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

simbolo di kronecker

INVERTIBILITA'

Prima di procedere ricordiamo $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $\exists B = A^{-1} \in M_n(K) : AB = I_n = BA$

TEOREMA Considero la matrice quadrata $A \in M_n(K)$ abbiamo che A è invertibile cioè: $\exists A^{-1} \in M_n(K) \Leftrightarrow |A| \neq 0$

DIM

$\Rightarrow$ Per ipotesi sappiamo che A è invertibile dunque $I_n = A^{-1}A$ ma noi sappiamo che $|I_n| = 1$ dunque $|I_n| = |A^{-1}A|$ il che implica che $|A^{-1}A|$ che per il teorema di Binet e $|A^{-1}| \cdot |A| = 1$ allora possiamo dire che $|A| \neq 0$

$\Leftarrow$ Considero $A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & \cdots & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$ e la matrice $A^{\#}$ che al posto di ogni elem. di A ha il rispettivo complemento algebrico

Abbiamo bisogno del 1° e 2° teorema di Laplace; quindi prendiamo

2 indici di riga $\forall h, i \in \{1, .., n\}$ $\quad a^h_1 A^i_1 + \ldots + a^h_n A^i_n = \delta^h_i \, |A|$

e 2 indici di colonna: $\forall k, j \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad a^1_k A^1_j + \ldots + a^n_k A^n_j = \delta^k_j \, |A|$

con δ^i_j che è 1 se $i = j$ altrimenti vale 0.

considero il prodotto $A \cdot {}^t(A^{\#}) = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ a^h_1 & \cdots & a^h_n \\ \vdots & & \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^i_1 & \cdots & A^n_1 \\ \vdots & & & & \\ A^1_n & \cdots & A^i_n & \cdots & A^n_n \end{pmatrix}$ preso l'elemento di posto h, i esso è: $a^h_1 A^i_1 + \ldots + a^h_n A^i_n$ che sappiamo essere: $\delta^i_k \, |A|$

abbiamo quindi che $A \cdot {}^t(A^{*}) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & & \\ 0 & & \ddots & |A| \end{pmatrix}$ — matrice che sulla diagonale principale, i determinanti di A e tutti 0 nelle altre posizioni

analogamente se consideriamo ${}^t(A^{*}) \cdot A$ e prendiamo l'elemento di posto (j, k) è: $A^1_j a^1_k + \ldots + A^n_j a^n_k = \delta^k_j \, |A|$ di conseguenza abbiamo che ${}^t(A^{*}) \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & & \\ \vdots & & |A| & \\ 0 & \cdots & & |A| \end{pmatrix}$ otteniamo così la nostra TESI cioè: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, {}^t(A^{*})$

ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 2+3+0-6-4-0 = -5 \neq 0$

$A^1_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A^1_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A^1_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$A^2_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A^2_2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A^2_3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$A^3_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A^3_2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A^3_3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 & -2/5 \\ 3/5 & -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = B$

È possibile controllare se i calcoli sono giusti. Ad esempio, $(a^1_1, a^1_2, a^1_3)(b^1_1, b^2_1, b^3_1) = (2, -1, 2)(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{5}{5} = 1$ ✓

LEZIONE 15

ORLATI DI UNA MATRICE

Sia A una matrice con m righe e n colonne:

- una **sottomatrice** di A è una qualsiasi matrice estratta da A eliminando un numero arbitrario di righe e/o colonne
- Detta A' una sottomatrice di A, prende il nome di **sottomatrice orlata** ogni matrice ottenuta da A' aggiungendo una riga e una colonna di A
- Un **minore** di A di ordine p è definito come il determinante di una qualsiasi sottomatrice quadrata di A di ordine p, ossia con p righe e p colonne; se tale determinante è diverso da 0, il minore è detto non nullo.
- un **minore orlato** è invece il determinante di una sottomatrice di ordine p+1 ottenuta orlando una sottomatrice di A di ordine p

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ← devo necessariamente prendere le colonne (2^a e 4^a) e le righe (1^a e 3^a) su cui vi sono gli elementi di M. Per M', posso scegliere 1^a o 3^a colonna, e 2^a riga. Ad esempio $M' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

ha ordine 2
$2 < \min\{3,4\} = 3$

TEOREMA DEGLI ORLATI (o di Kronecker)

Sia una matrice A di tipo m×n, il teorema dice che

rango $(A) = r \iff \exists$ un minore M di A di ordine r tale che $|M| \neq 0$ e:

determinante

- $r = \min\{m, n\}$
- tutti gli orlati di M hanno determinante nullo

MATRICI ASSOCIATE

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE

Consideriamo V, W 2 spazi vettoriali finitamente generati su K con $\dim V = n$ e $\dim W = m$.
Considero un'applicazione lineare $T: V \to W$ e 2 basi $B = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata di V e $B' = (u'_1, \dots, u'_m)$ base ordinata di W.
Il teorema dice: $\exists$ un'unica matrice $A \in M_{m,n}(K)$ tale che:
$\forall u \in V$ prendiamo $u \equiv_B (x_1, \dots, x_n)$ e $T(u) \equiv_{B'} (y_1, \dots, y_m)$ si ha che: $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$
A si dice matrice associata a T nelle basi B e B'. Si indica con $M_{BB'}$

DIM

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$ $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$

$T(u) = T(x_1e_1+\dots+x_ne_n) = x_1T(e_1)+\dots+x_nT(e_n) = x_1(a_1^1 e'_1 + \dots + a_1^m e'_m) + \dots$

$\dots + x_n(a_n^1 e'_1 + \dots + a_n^m e'_m) = a_1^1 x_1 e'_1 + \dots + a_1^m x_1 e'_m + \dots + a_n^1 x_n e'_1 + \dots + a_n^m x_n e'_m = (a_1^1x_1+\dots+a_n^1x_n)e'_1 + \dots$

$\dots + (a_1^m x_1 + \dots + a_n^m x_n)e'_m \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1x_1+\dots+a_n^1x_n \\ \vdots \\ a_1^m x_1+\dots+a_n^m x_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ← abbiamo dimostrato che A esiste, manca da dimostrare l'unicità.

Considero $B \in M_{m\times n}(K)$ tale che $B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$ devo dimostrare che $B=A$, prendo $u = u_1 \equiv_B (1,0,\dots,0)$ allora per ipotesi $B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1^1\\a_1^2\\ \vdots \\ a_1^m\end{pmatrix} = \underline{a_1}$ 1ª colonna di A ma è anche uguale a $\underline{b_1}$ dunque $\underline{a_1} = \underline{b_1}$.

Ma anche se considero $u = u_n = (0,0,\dots,1)$ allora $b_n = B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n^1\\ \vdots \\ a_n^m\end{pmatrix} = a_n$ dunque ultima colonna di B $\underline{b_n} = \underline{a_n}$ di conseguenza poiché tutte le colonne di B e A sono uguali allora $B = A$

ESEMPIO

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$

$(a,b) \rightsquigarrow a+b+(a-b)x+(2a+b)x^2$

$B = ((1,1),(1,-1))$ base ordinata di $\mathbb{R}^2$

$B' = (1, x, x^2)$ base canonica di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$

Costruiamo $M_{BB'}(T)$:

$T((1,1),(1,-1)) \equiv_B (2,0,3)$

$T((1,-1)) = 2x + x^2 \equiv_B (0,2,1)$

$M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ← rappresenta T in B e B'

OSS:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi_B"'] & W \arrow[d, "\phi_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "\tilde{T}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$(x_1,\dots,x_n) \in K^n$

$\phi_B^{-1}(x_1,\dots,x_n) = u$ $\quad u \equiv_B (x_1,\dots,x_n)$

$T(\phi_B^{-1}(x_1,\dots,x_n)) = T(u)$

$= \phi_{B'} \circ T \circ \phi_B^{-1} = \tilde{T}_A$

$\phi_{B'}(T(\phi_B(x_1,\dots,x_n))) = \phi_{B'}(T(u)) = (y_1,\dots,y_m) = A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$