Es.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 2 \\ 4T(n/4) + n^2 & n > 2 \end{cases}$$

1) n^2

2) $4^2 \left(\frac{n}{4^2}\right)^2$

3) $4^3 \left(\frac{n}{4^3}\right)^2$

i) $\cancel{4^i} \left(\frac{n}{4^i}\right)^2 = \frac{n^2}{4^i}$ contributo locale

foglia $\iff \frac{n}{4^h} = 2 \rightarrow \log_4\left(\frac{n}{2}\right) = \log_4(4^h) = h$

n foglie $= n/2$

$$T(n) = \frac{n}{2} + \sum_{i=0}^{h-1} \frac{n^2}{4^i}$$

$$1 \leq \sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{1}{4^i}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

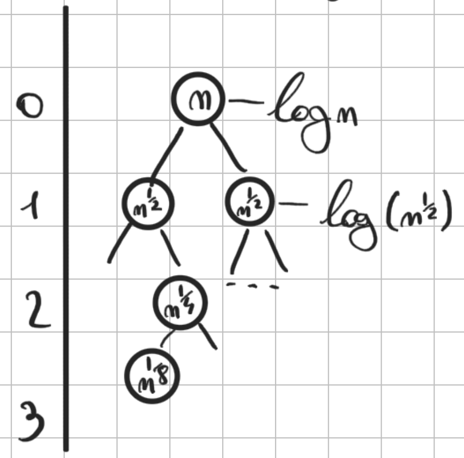
converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$$\sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{1}{4^i}\right) = \Theta 1$$

$$T(n) = \Theta \frac{n}{2}$$

ESERCIZI

(1) $T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + \log n & n > 2 \end{cases}$



$\log n$

$\cancel{2} \log(n^{\cancel{1/2}}) = \log n$

$\cancel{4} \log(n^{\cancel{1/4}}) = \log n$

$\ldots = \log n$

Ogni livello riceve in input $n^{\frac{1}{2^i}}$ partecipando con $\log_2 n$.

$T(n) = 2^h + \sum_{0}^{h-1} \log_2 n = 2^h + \log_2 n \cdot h$

Caso base (foglia) $= n^{1/2^h} = 2 \rightarrow \log_2 n^{1/2^h} = 1 \rightarrow \log_2 n = 2^h \rightarrow$

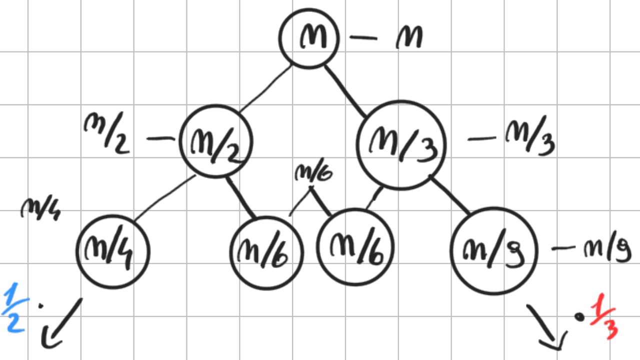
$\rightarrow \log_2(\log_2 n) = h$

$T(n) = 2^{\log_2(\log_2 n)} + \log_2 n \left(\log(\log_2 n)\right) = \log_2 n + \log_2 n \left(\log(\log_2 n)\right)$

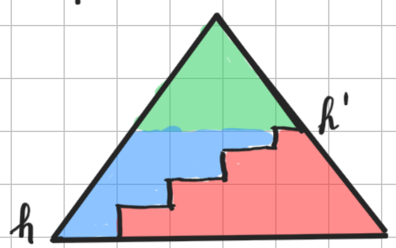
$\log_2 n$ viene "mangiato" quindi $T(n) = \Theta \log n(\log(\log n))$

ALBERI

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n\le 1 \\ T(n/2)+T(n/3)+n & n>1 \end{cases}$$



Siamo in presenza di un albero NON pieno in quanto alcuni input arriveranno al caso base prima di altre.



Fino ad un valore h' l'albero è pieno (h' = livello al quale un primo input raggiunge il caso base)

$$T'(n)=\sum_{i=0}^{h'} f(i) \le T(n) \le T''(n)=\sum_{i=0}^{h} f(i)$$

$T'(n)$ è una SOTTOSTIMAZIONE di $T(n)$ (solo la parte piena)

$T''(n)$ è una SOVRASTIMAZIONE di $T(n)$ (ipotesi in cui l'albero è tutto pieno)

Per la parte piena avremo un contributo (per ogni livello):

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)n = \frac{5}{6}n$

2) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)n = \left(\frac{5}{6}\right)^2 n$

Il contributo generale sarà $\left(\frac{5}{6}\right)^i n$, che sarà la nostra $f(i)$

$$T'(n) = \sum_{i=0}^{h'} \left(\frac{5}{6}\right)^i n \leq T(n) \leq T''(n) = \sum_{i=0}^{h} \left(\frac{5}{6}\right)^i n$$

Troviamo h e h' notando che gli input che portano ad h (quindi il primo percorso che arriva al caso base) sono quelli che prendono sempre $\frac{n}{3}$ come input. Viceversa, l'ultimo che arriverà al caso base è quello che prenderà sempre in input $\frac{n}{2}$, quindi:

- $\frac{n}{2^h} = 1 \to n = 2^h \to h = \log_2 n$

- $\frac{n}{3^{h'}} = 1 \to n = 3^{h'} \to h' = \log_3 n$

Sostituiamo nell'equazione

$$T'(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{5}{6}\right)^i n \leq T(n) \leq T''(n) = \sum_{i=0}^{\log_3 n} \left(\frac{5}{6}\right)^i n$$

Le due serie CONVERGONO perché serie armonica generalizzata.

in particolare convergono a due costanti, ovvero:

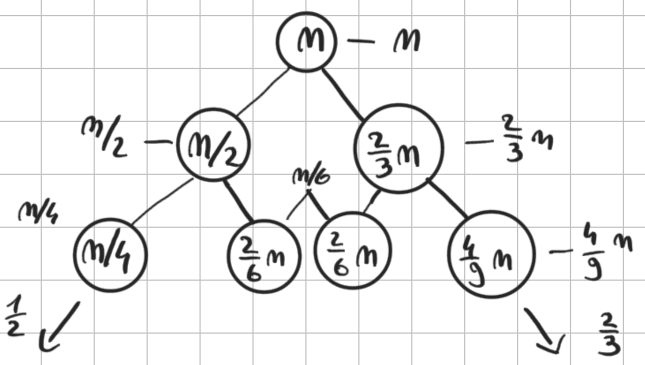
$$n \sum_{i=0}^{\lg_2 n} \left(\frac{5}{6}\right)^i \le T(n) \le n \sum_{i=0}^{\lg_3 n} \left(\frac{5}{6}\right)^i$$

$\downarrow$ $T'(n) = \Theta n$ $\qquad$ $\downarrow$ $T''(n) = \Theta n$

Essendo che entrambe sono Θn (n che moltiplica una costante) possiamo dire che $T(n) = \Theta n$

Es.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \le 1 \\ T(n/2) + T\left(\frac{2}{3}n\right) + n & n > 1 \end{cases}$$



Si osservi che in questo caso h' è "guidata" da $\frac{1}{2}$ e h da $\frac{2}{3}$

Il termine generale per h' sarà $\frac{1}{2}n$ e per h sarà $\frac{2}{3}n$

Il contributo di ogni livello è dato da $\left(\frac{7}{6}\right)^i$ (calcolato sommando i singoli contributi). Troviamo h e h':

$h' : \left(\frac{1}{2^{h'}}\right) n = 1 \rightarrow h = \log n$

$h : \left(\frac{2}{3}\right)^h n = 1 \rightarrow h = \log_{3/2} n$

$$\sum_{0}^{h'-1}\left(\frac{7}{6}\right)^i n \le T(n) \le \sum_{0}^{h-1}\left(\frac{7}{6}\right)^i n \longrightarrow n\sum_{0}^{\log n}\left(\frac{7}{6}\right)^i \le T(n) \le n\sum_{0}^{\log_{3/2} n}\left(\frac{7}{6}\right)^i$$

Siamo in presenza di due serie armoniche generalizzate con ragione >1

quindi la serie assume la forma generale $\frac{x^{h+1}-1}{x-1}$:

$$\sum_{0}^{H}\left(\frac{7}{6}\right)^i = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)^H - 1}{1/6} = 7\left(7/6\right)^H - 6$$

Vediamo i nostri casi in cui $H = h$ e $H = h'$ (ricordando che n

moltiplica la sommatoria):

$$T'(n) = 7n\left(\frac{7}{6}\right)^{\lg n} - 6n$$

$$T''(n) = 7n\left(\frac{7}{6}\right)^{\lg_{\frac{3}{2}} n} - 6n$$

Si osservi che $x^{\log_k y} = y^{\log_k x}$ e quindi

$$T'(n) = 7n^{\left(1+\lg\frac{7}{6}\right)} - 6n$$

$$T''(n) = 7n^{\left(1+\lg_{\frac{3}{2}}\frac{7}{6}\right)} - 6n$$

Escludendo $6n$ che viene "mangiato" dal primo termine dell'espressione,

$T'(n)$ e $T''(n)$ sono due polinomi di grado differente quindi

non possiamo dedurre esattamente $T(n)$, in particolare sappiamo solo che

$T(n) = \Omega(T'(n))$ e $T(n) = O(T''(n))$