Calcolo delle Probabilità e Statistica

DOCENTE: Aniello Buonocore

CFU: 9 (36 lezioni)

ESAME: Orale (SCRITTO + COLLOQUIO nello stesso giorno)

ORARIO di RICEVIMENTO: Giovedì

LIBRO: Probabilità e statistica per Ingegneria e Scienze

E-MAIL: anibuono@unina.it

LIBRO

- Capitolo 3
- Capitolo 4
- Capitolo 5

LEZIONE 01 - 07/03/2022

IL GIOCO DELLA ZARA (con 2 dadi onesti)

ROSSO

GIALLO

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(4,1)	⋱	(1,6)
(2,1)	(2,2)	⋱	⋱	⋱	(2,6)
(3,1)	⋱	⋱	⋱	⋱	(3,6)
(4,1)	⋱	⋱	(4,4)	⋱	(4,6)
(5,1)	⋱	⋱	⋱	⋱	(5,6)
(6,1)	⋱	⋱	⋱	⋱	(6,6)

trasformazione somma

$\overset{Z}{\Longrightarrow}$

1+1=2

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

6+6=12

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$ lo chiamiamo "**SPAZIO CAMPIONE**"

$S_Z = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ lo chiameremo "**SPETTRO**"

$|\Omega| = 36 \Rightarrow \frac{x}{36}$

$|\{Z=4\}| = 3$

$Z = 4$ è un evento, e si scrive $\{Z=4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

la probabilità di questo evento

- $\mathbb{P}(Z=4) = \frac{3}{36} = \mathbb{P}(Z=10)$
- $\mathbb{P}(Z=3) = \frac{2}{36} = \mathbb{P}(Z=11)$
- $\mathbb{P}(Z=5) = \frac{4}{36} = \mathbb{P}(Z=9)$
- $\mathbb{P}(Z=2) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(Z=12)$
- $\mathbb{P}(Z=6) = \frac{5}{36} = \mathbb{P}(Z=8)$
- $\mathbb{P}(Z=7) = \frac{6}{36}$

quindi:

$$(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P}) \xrightarrow{Z} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_Z)$$

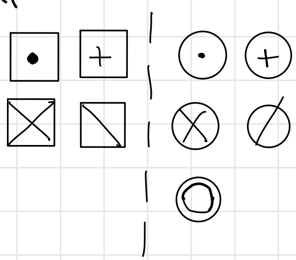
N.B. $\mathcal{B}$ è una famiglia di sottinsieme di $\mathbb{R}$

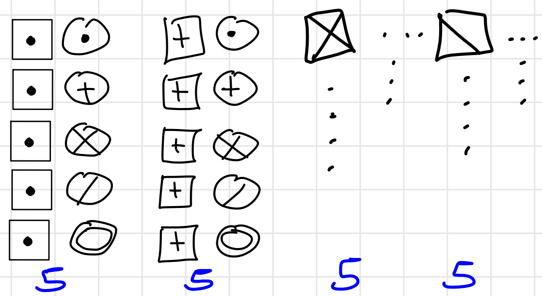
Abbiamo visto come si formalizza un esperimento (casuale) aleatorio $\mathcal{E}$

PROBLEMA DEL CONTARE

REGOLA MOLTIPLICATIVA (IL PRINCIPIO DEL CALCOLO COMBINATORIO)

Supponiamo di avere due insiemi





$4 \cdot 5 = 20$ modi

$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $|S| = n$

alfabeto

$K \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \}$ K-selezione da S

- DISPOSIZIONI SONO LE K-SELEZIONI

RICORDA: è importante l'ordine di presentazione degli elementi di S

- COMBINAZIONI, non è importante l'ordine in cui si presentano gli elementi

Entrambi si suddividono in due casi: semplici e composizioni

LEZIONE 02 - 08/03/2022

SPAZI DI ESITI EQUIPROBABILI

PRINCIPIO DI ENUMERAZIONE

$\Updownarrow$

COEFFICIENTE BINOMIALE

Applicazione del principio di enumerazione nel problema del contare.

Il problema è sempre di contare quante sono le K-selezioni

Supponiamo che abbiamo scelto l'alfabeto

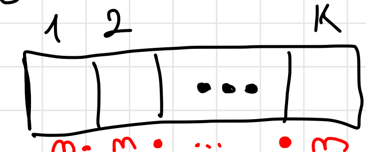
$S = \{e_1, \dots, e_m\}$, dove $m \in \mathbb{N}$ e $|S| = m$ e abbiamo un $K \in \mathbb{N}$

1) $\underbrace{D^{(r)}_{m,K}}$ ← se è presente, significa che sono ammesse le ripetizioni

numero delle disposizioni che ammettono ripetizioni lunghe K

$\Rightarrow D^{(r)}_{m,K} = m^K$

- dobbiamo inserire K elementi dal S insieme



- per la prima lettera posso scegliere m lettere
- anche per la seconda, poiché le ripetizioni sono ammesse

2) $K \leq m$, $D_{m,K} =$ numero delle disposizioni lunghe K

fattoriale decrescente di ordine K

- in questo caso le ripetizioni non sono ammesse

2.a) CASO NOTEVOLE: disposizioni semplici lunghe n | PERMUTAZIONE SEMPLICE

$$P_n = D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \cancelto{1}{\left(\frac{n-k}{n-k}\right)} \cdot \cancelto{1}{\left(\frac{n-k-1}{n-k-1}\right)} \cdot \ldots \cdot \cancelto{1}{\frac{2}{2}} \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

RICORDA

$0! = 1$ ecco perché $\frac{n!}{(n-n)!}$

$$\Rightarrow \frac{n!}{0!} = n!$$

ESEMPIO:

- Totocalcio, con $S = \{1, x, 2\}$, è possibile utilizzare gli stessi simboli nelle schedine del totocalcio.
  In una schedina Totocalcio ci sono 14 colonne

$$D^{(r)}_{3,14} = 3^{14} = 4782969$$

- Corsa Tris, con $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, il quale il giocatore deve indovinare il podio giocandosi 3 pettorine dei 9 cavalli.
  Le ripetizioni non sono ammesse (es: 1-7-1, non va bene, invece 1-7-9 invece sì)

$$D_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

- Un gioco sul trovare gli anagramma di una parola.
Ad esempio:
CASE si può scrivere in $4!$ anagrammi differenti

2.b) Seguendo l'esempio dell'anagramma, possiamo notare il caso in cui ci sono ripetizioni di parole ad esempio:

STATISTICA, ha lettere che si ripetono come la "S" e la "T"

se sommando ci restituisce numero delle lettere

$$P^{(r)}_{\substack{1,2,2,2,3 \\ 10}} = \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

numero di ripetizioni di C; S; A; I; T

anche in CASE si utilizza la stessa formula ma essendo che non ci son ripetizioni, si divide per 1 $\Rightarrow \frac{24}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{1} = 24$

In generale:

$$_{n_1, n_2, \dots, n_s}P^{(r)}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_s!}$$

tale che $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$

il numero delle K-combinazioni semplici con gli elementi scelti da un insieme di cardinalità n

3) $K \leq n$, $C_{n,K} = \frac{D_{n,K}}{P_K} = \frac{n!}{K! \cdot (n-K)!} = \binom{n}{K}$

COEFF. BINOMIALE

$$_{n_1, n_2, \dots, n_s}P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_s!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_s}$$

COEFF. MULTINOMIALI

tale che: $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$

4) $C^{(r)}_{n,k}$

supponiamo che $S = \{a, b, c, d, e, f\}$

e prendo una combinazione semplice lunga 4

ASSENTE PRESENTE

$\{A, P\}$

si riducono i simboli, ma aumenta la rappresentazione

RAPPRESENTAZIONE UNIVOCA

senza ripetizioni

	a	b	c	d	e	f
abdf	P	P	A	P	A	P
abcd	P	P	P	P	A	A
ace	P	A	P	A	P	A
bcd	A	P	P	P	A	A

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{4,2} = {}_{4,2}P^{2}_{6}$$

con ripetizioni

è fissa

aaaa	P	A	A	A	A	A	P	P	P	A
aaee	P	A	A	A	P	A	P	A	P	A
abcd	P	P	P	P	A	A	A	A	A	A
beef	A	P	A	A	P	P	A	P	A	A

$$\Rightarrow C^{(r)}_{n,k} = {}_{n-1,k}P^{(r)}_{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

ESERCIZIO

- Ho 11 biglie, 6 bianche e 5 nere. Valuta la probabilità che prendendone 2, una è bianca, l'altra è nera.

possibilità di prendere una bianca e una nera

coppie possibili di palline

$$\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} \quad \frac{\frac{6!}{1\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{1\cdot 4!}}{\frac{11!}{2!\cdot 9!}} = \frac{\frac{6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}}\cdot\frac{5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}}}{\frac{11\cdot 10\cdot\cancel{9!}}{2\cdot\cancel{9!}}} = \frac{6\cdot 5}{\frac{110}{2}} = \frac{\cancel{30}^{\,6}}{\cancel{55}_{\,11}} = \frac{6}{11}$$

LEZIONE 03 - 18/03/2022

RIEPILOGO

$n, k \in \mathbb{N}$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$

- $D^{(r)}_{n,k} = n^k$
- $k \leq n$, $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- $P_n = n!$
- $P^{(r)}_{n_1, \dots, n_s \; n} = \begin{pmatrix} n \\ n_1 \dots n_s \end{pmatrix}$
  tale che: $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$
- $C^{(r)}_{n,k} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$
- $k \leq n$, $C_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

VARIABILI ALEATORIE

Aleatorio, in generale, è un tipo di esperimento per il quale non sappiamo qual è l'esito.
Casuale è un caso particolare di aleatorio, più facile da interpretare, ma più difficile da trattare (dal punto di vista della statistica): significa che nessuno degli esiti elementari è preferito rispetto agli altri, cioè hanno tutti la stessa importanza (probabilità).
È un'aleatorietà che non favorisce nessuno dei possibili esiti, quindi, quando è casuale stiamo dicendo questa eccezione: "è il caso che più caso non c'è"

SPAZIO CAMPIONE $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\dots,6\}$

$\mathbb{P}(\Omega)$ è la famiglia degli eventi

$$\forall A \in \mathbb{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36}$$

Quindi, per la descrizione dell'esperimento, ho la terna:

$$(\Omega, \mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega), \mathbb{P}) \qquad (\mathbb{R}, \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{Boreliani}}, \mathbb{P}_{Z_2})$$

trasformazioni di un elemento generale in $\mathbb{R}$

$$Z_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i,j) \rightsquigarrow Z_2(i,j) = i + j$$

In generale, con le trasformazioni passiamo da un qualcosa NON quantificabile a un numero reale che è quantificabile

La famiglia dei boreliani è generata dagli intervalli con le operazioni di $\cup, \cap, ^c$. Operando in tutti i modi possibili con queste tre operazioni fino al numerabile, otteniamo questa famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che viene chiamata "famiglia di Borel"

spettro $S_{Z_2} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} = 36$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \mathbb{P}_{Z_2}(\{2\}) = \frac{1}{36}$$
$$\mathbb{P}(Z_2 = 3) = \mathbb{P}_{Z_2}(\{3\}) = \frac{2}{36}$$
$$\mathbb{P}(Z_2 = 5) = \mathbb{P}_{Z_2}(\{5\}) = \frac{4}{36}$$
$$\mathbb{P}(Z_2 = 7) = \mathbb{P}_{Z_2}(\{7\}) = \frac{6}{36}$$

Adesso, supponiamo che lo spazio campione sia:

$$\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k = 1,2,\dots,6\}$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6^3}$$

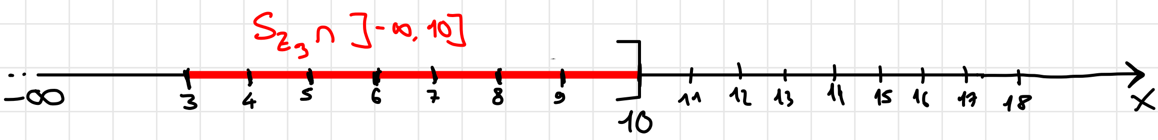
$$(\Omega, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$$

$$Z_3 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i,j,k) \rightsquigarrow i+j+k$$

spettro $S_{Z_3} = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$

1 3 6 25 27 6 3 1

$$\mathbb{P}_{Z_3}\left(S_{Z_3} \cap \left]-\infty, 10\right]\right) = \mathbb{P}_{Z_3}\left(\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\right)$$



$$\mathbb{P}_{Z_3}\left(\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\right) = \mathbb{P}_{Z_3}\left(\bigcup_{s=3}^{10} \{s\}\right) = \sum_{s=3}^{10} \mathbb{P}_{Z_3}(\{s\})$$

$$f : (S_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{T}_2)$$

SPAZIO TOPOLOGICO

$$A \cap B \bigcup A \cap B^c \bigcup A^c \cap B = A \cup B$$

$$A \cap B \cup A \cap B^c \cup A^c \cap B \cup A^c \cap B^c = \Omega$$

PROPRIETÀ UNIONE, INTERSEZIONE, COMPLEMENTO

$S = \{a, b, \dots, z\}$

$S_{21} = \{1, \dots, 21\}$

$g: P \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad$ $k \in \mathbb{N}$ $\quad g(2k) = k$

$0 \longrightarrow 0$

$2 \longrightarrow 1$

$4 \longrightarrow 2$

$|\mathbb{N}_0| = \aleph_0, \ |\mathbb{R}| = e$

$\mathbb{N}_0$ è numerabile

LEZIONE 04 - 15/03/2022

$\mathcal{E}$ esperimento aleatorio

Ω : spazio campione; rappresenta l'insieme dei possibili esiti di $\mathcal{E}$

N.B. quando Ω è $\mathbb{R}$, avremo che il secondo elemento sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e questo compromette il terzo elemento nella descrizione di $\mathcal{E}$, quindi prendiamo $\mathcal{B}$ al posto di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, il quale è un suo sottinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}$: famiglia di Borel

Quindi ci mancano altri due elementi per descrivere $\mathcal{E}$

$$(\Omega, ?, ?)$$

Utilizziamo un esempio: $\mathcal{E}$ è il lancio di un dado onesto

A: esce un punteggio pari: 2, 4, 6

B: esce un punteggio alto: 5, 6

Avremo che $A \cap B = \{6\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{6}$

A^c è un evento | complemento di A: numeri dispari

B^c è un evento | complemento di B: numeri bassi e medi

$B^c = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

Quindi, come troviamo tutti gli eventi? Fraziono gli eventi, trovando gli atomi:

$A \cap B = \{6\}$

$A \cap B^c = \{2, 4\}$

$A^c \cap B = \{5\}$

$A^c \cap B^c = \{1, 3\}$

Possiamo osservare che $\{1\}$ non è un evento, ma $\{6\}$ o $\{5\}$ sì.

eventi generatori

$\mathcal{G} := \{A, B\}$

Q: Come trovo il resto?

$\sigma(\mathcal{G}) = \{\{5\}, \{6\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}, \{1,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,3,6\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \Omega, \emptyset\}$

A: Facendo l'unione tra gli atomi, questo si chiama operazione sigma σ

Invece, se $\mathcal{G}$ fosse $:= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$, allora $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\Omega)$

Quindi, il secondo elemento descrittivo dell'esperimento, è proprio l'insieme che si ottiene dai generatori di eventi

$$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), ?)$$

DEF.

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Si dice che $\mathcal{A}$ è un'algebra

$$\iff$$

$\mathcal{A}1)$ $\Omega \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}2)$ $\forall A \in \mathcal{A}, \ A^c \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}3)$ $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \ A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

DEF.

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Si dice che $\mathcal{F}$ è una sigma algebra

$$\iff$$

$\Sigma 1)$ $\Omega \in \mathcal{F}$

$\Sigma 2)$ $\forall A \in \mathcal{F}, \ A^c \in \mathcal{F}$

$\Sigma 3)$ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

L'intersezione si mantiene attraverso i teoremi di De Morgan.

DE MORGAN

$\mathcal{A}$ è un'algebra e siano $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$

$$A_1 \cap A_2 = \underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{A_1^c}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{A_2^c}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}}\Big)^c}_{\in\mathcal{A}}$$

$\mathcal{A}$ è un'algebra e siano $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ con $m \in \mathbb{N} : m \geq 2$

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{A_i^c}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}}\Big)^c}_{\in\mathcal{A}}$$

Sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{A_n^c}_{\in\mathcal{F}}}_{\in\mathcal{F}}\Big)^c}_{\in\mathcal{F}}$$

ESEMPIO: $\mathcal{E}$ si lancia una moneta un numero indefinito di volte.

$$\Omega = \{T, C\}^{\infty}$$ prodotto cartesiano di un numero infinito

$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$ l'elemento generico è una successione di teste o croci

$$= (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

A: "due T consecutive prima di due C consecutive"

$A_1: T_1 T_2$

$A_2: C_1 T_2 T_3$

$A_3: T_1 C_2 T_3 T_4$

$A_4: C_1 T_2 C_3 T_4 T_5$

quindi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots$

In questo contesto, $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), ?)$ dove

$$\mathcal{G} = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

RIEPILOGO

$\mathcal{E} : (\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}),$

$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$

evento certo

MODI DI DEFINIRE LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO

$A \in \mathcal{F}$

1) Laplace

$$A \in \mathcal{F} \quad , \quad \mathbb{P}_c(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \geq 0$$

solo nel caso che si riscontra perfetta simmetria per i punti campioni che sono un numero finito

2) Frequentista (o Statistica)

si ripete l'esperimento sottostante un numero $n \in \mathbb{N}$ di volte e si considera il rapporto

$$\mathbb{P}_f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} \geq 0$$

con n_A che rappresenta il numero delle volte in cui A si è verificato

3) Soggettivo

la probabilità di un evento A è il prezzo che un individuo equo e coerente paga per ricevere 1 nel caso che A si verifica

$$\mathbb{P}_c(\Omega) = \mathbb{P}_f(\Omega) = \mathbb{P}_s(\Omega) = 1$$

$$A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}_c(A) \geq 0, \quad \mathbb{P}_f(A) \geq 0, \quad \mathbb{P}_s(A) \geq 0$$

$$A, B \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset, \quad \mathbb{P}_c(A \cup B) = \mathbb{P}_c(A) + \mathbb{P}_c(B)$$

$$\mathbb{P}_f(A \cup B) = \mathbb{P}_f(A) + \mathbb{P}_f(B)$$

$$\mathbb{P}_s(A \cup B) = \mathbb{P}_s(A) + \mathbb{P}_s(B)$$

$$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$$

$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_3$

tale che

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

e $\mathbb{P} \geq 0$

e $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ | innumerabile additività $\quad n = 1, 2, \dots, \infty$

Quindi, abbiamo descritto l'esperimento $\mathcal{E}$:

$$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$$

quindi $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$A \rightsquigarrow \mathbb{P}(A)$

$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
$\mathcal{E}_3$

≥ 0

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

LEZIONE 05 - 18/03/2022

RIEPILOGO

Sia $\mathcal{E}$ un esperimento, con $\mathcal{G}$, una famiglia sottoinsieme Ω

la terna

$$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$$

nasce da $\mathcal{G}$

$\mathcal{F}$ è una σ-algebra

(Σ_1): $\Omega \in \mathcal{F}$

(Σ_2): $\forall A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$

(Σ_3): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n) \in \mathcal{F}$

$\mathbb{P}$ è una misura di probabilità

(M_1): $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$

(M_2): $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(M_3): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

TEOREMA 1:

$\emptyset \in \mathcal{F}$ | il vuoto è un evento

DIM:

vale (Σ_1), ovvero che $\Omega \in \mathcal{F}$

$$\xRightarrow{\Sigma_2} \underbrace{\Omega^c}_{=\emptyset} \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$$

$\blacksquare$

TEOREMA 2:

prendo $m \in \mathbb{N}$, tale che $m > 1$, Prendo un'ennupla di elementi:

$$A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$$

Allora, $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{F}$

DIM:

sia $i = 1, 2, \dots, m$; $B_i = A_i \in \mathcal{F}$

$i > m$, $B_i = \emptyset$

Applicando Σ_3 a $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$, si ha:

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{F}$$

$\blacksquare$

TEOREMA 3

prendo $m \in \mathbb{N}$, tale che $m > 1$, Prendo un'ennupla di elementi:

$$A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$$

Allora, $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{F}$

DIM

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i^c \right)^c \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \left(\begin{matrix} \text{unione} \\ \text{finita di eventi} \\ \text{è un evento} \end{matrix} \right)^c$$

$\blacksquare$

TEOREMA 4

$$A \in \mathcal{F}, \quad (A^c)^c = A$$ BANALE

TEOREMA 5

Siano $A, B \in \mathcal{F}$

(i) $A \cup B = A \,\dot\cup\, (B \cap A^c)$

(ii) $A = A \cap B \,\dot\cup\, A \cap B^c$ — decomposizione di un insieme mediante l'evento certo

DIM:

(ii)
$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (B \,\dot\cup\, B^c) \\ &= A \cap B \,\dot\cup\, A \cap B^c \end{aligned}$$

$\blacksquare$

(i)
$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\overbrace{B \cap A}^{\text{non contribuisce all'unione, quindi lo escludo}} \,\dot\cup\, B \cap A^c) \\ &= A \cup B \cap A^c \end{aligned}$$

$\blacksquare$

TEOREMA 6

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

DIM:

dove $A \in \mathcal{F}$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \,\dot\cup\, A^c)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$\boxed{\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)}$, ma è una regola che deriva da un corollario,

quindi, lo dimostriamo nel seguente modo:

Sia $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

un unione di insiemi vuoti restituiscono un vuoto

quindi: $$\mathbb{P}\Big(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \overset{(M_3)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\emptyset)$$

non dipende da n, lo si porta fuori

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \Longleftarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} 1$$

diverge, ma ci serve un numero finito, quindi $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\blacksquare$

TEOREMA 7 (finita additività $\Rightarrow$ conseguenza degli assiomi)

Sia $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$. Prendendo una ennupla di eventi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ con $\underset{i \neq j}{A_i \cap A_j} = \emptyset$

Allora,

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

DIM:

Prendendo una successione ausiliaria $i = 1, 2, \dots, n$ tale che $B_i = A_i$ e con $i > n$ $B_i = \emptyset$

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$$

poiché per $i > n$ ci porta a $\mathbb{P}(B_i) = 0$ poiché $B_i = \emptyset$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\text{quindi}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

$\blacksquare$

COROLLARIO

$A_1, A_2 \in \mathcal{F} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\mathbb{P}(A_1 \dot{\cup} A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

Dal teorema 7 con $n = 2$.

COROLLARIO

$$A \in \mathcal{F} \qquad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

DIM:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \dot\cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c) \quad \blacksquare$$

COROLLARIO

$$A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) \leq 1$$

DIM:

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{1 - \overbrace{\mathbb{P}(A^c)}^{\geq 0 \text{ per } M_1}}_{\leq 1} \quad \blacksquare$$

TEOREMA 8 (proprietà di monotonia)

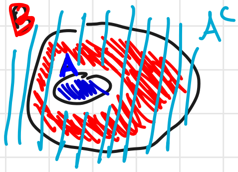
Prendiamo due eventi $A, B \in \mathcal{F}$ tale che $A \subseteq B$,

Allora: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

$\Downarrow$ ogni qual volta che si verifica A, si verifica pure B, non vale il viceversa.

DIM:

$$B = A \cup (B \cap A^c)$$



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)$$

TEOREMA 9

$A, B \in \mathcal{F}$, allora

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

DIM:

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$

$$A = A \cap B \cup A \cap B^c$$

$$B = B \cap A \cup B \cap A^c$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$

d'altra parte $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

quindi: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

TEOREMA 10

Siano $A, B, C \in \mathcal{F}$, allora

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)] + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

DIM:

$$A \cup B \cup C = \overbrace{(A \cup B) \cup C}^{\text{TEOREMA 9}} =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\text{TEOREMA 9}} + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{\text{proprietà distributiva}}) =$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\underbrace{(A \cap C) \cup (B \cap C)}_{\text{TEOREMA 9, ma con - avanti}})$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \quad \blacksquare$$

TEOREMA 11

$m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$, Allora:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{m} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{m-1} \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m)$$

SENZA DIM:

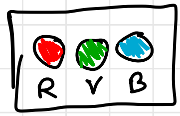
Ma si dimostra con il principio d'induzione

LEZIONE 06 - 21/03/2022

ESERCIZIO

LIBRO - PARAGRAFO 3

1 Abbiamo una scatola con tre biglie: una rossa, una verde e una blu.



Descrivi l'insieme degli esiti prendendo due biglie

con rimpiazzo

$$\Omega_R = \{(R,R),(R,V),(R,B),(V,R),(V,V),(V,B),(B,R),(B,V),(B,B)\}$$

$$|\Omega_R| = 3^2 = 9$$

senza rimpiazzo

$$\Omega_S = \{(R,V),(R,B),(V,R),(V,B),(B,R),(B,V)\}$$

$$|\Omega_S| = 6$$

2 Lancio di una moneta 3 volte. Descrivi l'insieme degli eventi

$$\Omega_R = \{(T,T,T),(T,T,C),(T,C,T),(C,T,T),(C,C,C),(C,C,T),(C,T,C),(T,C,C)\}$$

$$|\Omega_R| = 2^3 = 8$$

Descrivi l'evento che si ottiene più teste che croci

$E = \{(T,T,T), (T,T,C), (T,C,T), (C,T,T)\}$

$|E| = 4$

3 Si considera $\Omega = S_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Si prendono i seguenti eventi:

- $E = \{1,3,5,7\}$; • $F = \{7,4,6\}$; • $G = \{1,4\}$

- $E \cap F = \{7\}$ - $E \cap G^C = \{3,5,7\}$
- $E^C \cap (F \cup G) = E^C \cap F \cup E^C \cap G = \{4,6\} \cup \{4\} = \{4,6\}$
- $E \cup (F \cap G) = E \cup \{4\} = \{1,3,4,5,7\}$
- $(E \cap F^C) \cup G = \{1,3,5\} \cup G = \{1,3,4,5\}$
- $(E \cap G) \cup (F \cap G) = \{1\} \cup \{4\} = \{1,4\} = G$

4 Si lancia una coppia di dadi: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$

l'insieme degli eventi è $E = \{Z_2 = 2K : K = 1,2,3,4,5,6\}$

invece, $F = \{(1,x) \mid x = 1,2,3,\dots,6\}$

$G = \{Z_2 = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

- $E \cap F = \{(1,1),(1,3),(1,5)\}$

$E \cup F = E \cup \{(1,2),(1,4),(1,6)\}$

5 Siano $E, F, G \in \mathfrak{F}$. Eseguiamo l'esperimento e osserviamo che: si è verificato solo l'evento E, E e G, almeno uno dei tre, almeno due dei tre, tutti e tre, non più di un evento

- $E \cap F^c \cap G^c$
- $E \cap G \cap F^c$
- $E \cup F \cup G$
- $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$
- $E \cap F \cap G$
- $(E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$

11 Vale la proprietà della sottoadditività (subadditività):

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ $\quad E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathfrak{F}$, $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$

Si dimostra con l'induzione

base d'induzione

- $n = 2$, $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \underbrace{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) \geq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$$

- $\forall n > 2$: //TO DO

RICORDA

$n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$k = 0, 1, \dots, n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1 +	4 +	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

DIM:

$\binom{n}{k}$ è il numero dei sottoinsiemi di cardinalità k da un insieme di cardinalità n

Quando si costituisce un sottoinsieme di cardinalità k resta associato un sottoinsieme di cardinalità $n-k$ ∎

$n \in \mathbb{N}$, $k > 0$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

DIM:

$S = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\}$

- Ci sono tutti i sottoinsiemi di cardinalità k fatti con gli elementi di S tranne l'ultimo.
- Ma ci sono anche i sottoinsiemi di cardinalità k che contengono anche l'ultimo

∎

Ci sono 5 bambini e 10 bambine disposti in riga in ordine casuale

- La probabilità che in quarta posizione si trova un M E_1

$$\left(\overset{1}{M/F}, \overset{2}{M/F}, \overset{3}{M/F}, \boxed{\overset{4}{M}}, \overset{5}{M/F}, \dots, \overset{14}{M/F}, \overset{15}{M/F}\right)$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{14!}{15!} = \frac{\cancel{14!}}{15 \cdot \cancel{14!}} = \frac{1}{15}$$

dove M è il bambino più grande

quindi:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$$

poiché i bambini sono 5, ognuno con la stessa probabilità

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(E) = 5 \cdot \mathbb{P}(E_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA DELLE CONCORDANZE

Sia $n \in \mathbb{N}$, n cartoncini numerati da 1 a n sul fronte

Si mischiano accuratamente i cartoncini e si collocano su un piano il "mazzetto" mostrando il retro del cartoncino più in alto

Si dice concordanza l'evento C_i che si verifica quando si alza la carta i-esima e si legge i, dove $i = 1, 2, \dots, n$.

1) Determinare la prob. di avere almeno 1 concordanza

2) Determinare la prob. di avere 0 concordanze

3) Determinare la prob. di avere esattamente 1 concordanza

$$1)\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) = \sum_{i=m}^{m} \mathbb{P}(C_i) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}} \mathbb{P}(C_i \cap C_j) + \sum_{\substack{i,j,k\\ i<j<k}} \mathbb{P}(C_i \cap C_j \cap C_k)$$

$$+ \dots + (-1)^{m-1} \cdot \mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_m) =$$

$$= \frac{(m-1)!}{m!} \cdot \sum_{i=1}^{m} 1 - \frac{(m-2)!}{m!} \cdot \sum_{\substack{i,j=1\\ i,j}}^{m} 1 + \frac{(m-3)!}{m!} \cdot \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{m} 1 +$$

$$+ \dots + (-1)^{m-1} \frac{(m-m)!}{m!} =$$ * CONTINUA

$\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{m} = \frac{(m-1)!}{m!}$, $\mathbb{P}(C_2) = \frac{(m-1)!}{m!}$, ...

quindi

$\forall i = 1, \dots, m$, $\mathbb{P}(C_i) = \frac{(m-1)!}{m!}$

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \frac{(m-2)!}{m!}$, ...

quindi

$\forall i, j = 1, \dots, m$ e $i < j$

$\mathbb{P}(C_i \cap C_j) = \frac{(m-2)!}{m!}$

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{(m-3)!}{m!}$, ...

quindi

$\forall i, j, k = 1, 2, \dots, m$ e $i < j < k$

$\mathbb{P}(C_i \cap C_j \cap C_k) = \frac{(m-3)!}{m!}$

*CONTINUA $= \frac{n \cdot (n-1)!}{n!} - \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \binom{n}{2} + \frac{(n-3)!}{n!} \cdot \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$

$$= 1 - \frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2!} + \frac{\cancel{(n-3)!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-3)!} \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \frac{1}{i!} \right)$$

LEZIONE 07 - 22/03/2022

RIEPILOGO

$i = 1, 2, \dots, n$

C_i = "concordanza alla i-esima chiamata"

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}(C_i \cap C_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \mathbb{P}(C_i \cap C_j \cap C_k) + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_n) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}$$

$a \cdot a^{i-1} = a^i$

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c\right] = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \cdot \frac{1}{i!} =$$

aggiungiamo 1 fuori alla sommatoria, così parte da 0

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \cdot \frac{1}{i!} = \mathbb{P}(E_{0,n})$$

lo chiameremo in questo modo.

$$\mathbb{P}(E_{0,n}) = \frac{\text{n° delle permutazioni con 0 concordanze su n chiamate}}{n!}$$

$\Rightarrow$ che n° delle permutazioni con 0 concordanze equivale a:

$$n! \cdot \mathbb{P}(E_{0,n}).$$

eventi con una sola concordanza | $E_{1,n}$

$F_{1,n}$ | eventi con 1 sola concordanza che si verifica alla prima chiamata

$$\mathbb{P}(E_{1,n}) = \frac{\text{n° delle permutazioni con 1 concordanza}}{n!}$$

nel caso di $F_{1,n}$, avremo che:

Visto che si deve verificare una situazione del tipo:

D: discordanza

1	2	3	...	n-1	n
1	D	D	...	D	D

e quindi:

1	2	3	...	n-1	n
1	≠2	≠3	...	≠n-1	≠n

n-1 spazi rimasti che devono avere 0 concordanze

$$\mathbb{P}(F_{1,n}) = \frac{(n-1)! \cdot \mathbb{P}(E_{0,n-1})}{n!}$$

Possiamo notare come la formula non dipende dalla posizione in cui deve avvenire la concordanza.

quindi, possiamo affermare che:

$$\mathbb{P}(E_{1,n}) = n \cdot \mathbb{P}(F_{1,n}) = \frac{\cancel{n \cdot (n-1)!}^{\,n!}}{\cancel{n!}} \cdot \mathbb{P}(E_{0,n-1}) = \mathbb{P}(E_{0,n-1})$$

DEFINIZIONE DI LAPLACE

Siano $A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{m(A \cap B)}{m(\Omega)} = \frac{m(B)}{m(\Omega)} \cdot \frac{m(A \cap B)}{m(B)} =$$

$$= \mathbb{P}(B) \cdot \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) := \frac{n_{A \cap B}}{n_B}}$$

cioè $\underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{\text{la probabilità di un evento condizionato da un altro evento.}} := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

ESEMPIO

$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1, \dots, 6\}$

sostituisco $\{\dots\} \cap \{\dots\}$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 8 | Z_1 = 3) = \frac{\mathbb{P}(Z_2 = 8; Z_1 = 3)}{\mathbb{P}(Z_1 = 3)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

$\{Z_2 = 8\} \cap \{Z_1 = 3\}$

$\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$\cap$ $\quad = \{(3,5)\}$

$\{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

$E, F \in \mathcal{F}$, $E = E\cap F \cup E \cap F^c$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\cdot \mathbb{P}(A|B)$$

legge delle probabilità composte

ESEMPIO 3.6.2

Il signor John lavora per un'organizzazione e ha organizzato una cena tra uomini dipendenti e i loro figli, sono invitati i dipendenti padri di figli maschi.

- John ha due figli ed è invitato alla cena

A: "almeno uno dei due è maschio"

B: "entrambi sono maschi"

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(m,m)\})}{\mathbb{P}(\{(m,m),(m,f),(f,m)\})} =$$

facciamo un'ipotesi che esse sono equiprobabili

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO 3.6.3

Perez è convinto al 30% che l'azienda per cui lavora aprirà presto un'altra sede a Phoenix. (U)

Nel caso che ciò avvenga egli valuta al 60% la probabilità che sarà lui il capo della nuova sede. (M)

$$\mathbb{P}(U\cap M) = \mathbb{P}(U)\cdot \mathbb{P}(M|U) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$$

Un'assicurazione ritiene che gli automobilisti si dividono in due categorie: quelle "inclini" a provocare incidenti e quelli non inclini. Le statistiche riportano che le persone della prima categoria hanno in un anno un incidente con probabilità "0,4", le altre con probabilità "0,2". Assumendo che il 30% degli automobilisti è incline a provocare incidenti, bisogna calcolare la probabilità che un nuovo assicurato ha un incidente entro un anno **(A_1)**

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap H) + \mathbb{P}(A_1 \cap H^c) = *$$

se si applica la legge delle probabilità composte si ottiene un caso particolare di una formula:

FORMULA DELLE ALTERNATIVE.

In questo caso, le alternative sono due: H e H^c (incline al rischio, NON incline al rischio)

$$* = \mathbb{P}(H) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H) + \mathbb{P}(H^c) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H^c) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$$

$$\mathbb{P}(H | A_1) = \frac{\mathbb{P}(H \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H)}{\mathbb{P}(A_1)} =$$

formula di Thomas Bayes

$$= \frac{\mathbb{P}(H) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H)}{\mathbb{P}(H) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H) + \mathbb{P}(H^c) \cdot \mathbb{P}(A_1 | H^c)} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}26} = \frac{0{,}12}{0{,}26} = 0{,}4615 = 46{,}15\%$$

LEZIONE 08 - 25/03/2022

ESERCIZIO

LIBRO -

13 a) $\mathbb{P}(E\cap F^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E\cap F)$

DIM:

$$E = (E\cap F)\cup(E\cap F^c) \Rightarrow \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E\cap F) + \mathbb{P}(E\cap F^c)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(E\cap F^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E\cap F) \quad \blacksquare$$

b) $\mathbb{P}(E^c\cap F^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E\cap F)$

DIM:

$$E^c\cap F^c = (E\cup F)^c \Rightarrow \mathbb{P}(E^c\cap F^c) = 1 - \mathbb{P}(E\cup F) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E\cup F) \quad \blacksquare$$

14 b) la probabilità che si verifica uno solo degli eventi E, F vale:

$$\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(E\cap F)$$

$$E\cup F = E\cup F^c \cup E^c \cup F \cup E\cap F$$

$$\mathbb{P}(E\cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E\cap F)$$

DIM:

$$\mathbb{P}(E\cap F^c \cup E^c\cap F) = \mathbb{P}(E\cap F^c) + \mathbb{P}(E^c\cap F) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E\cap F) +$$

$$+ \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E\cap F) =$$

$$= \mathbb{P}(E) - 2\mathbb{P}(E\cap F) + \mathbb{P}(F) \quad \blacksquare$$

7

a) $E \cup E^c = \Omega$

b) $E \cap E^c = \emptyset$

c) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c) = \big((E \cup F) \cap E\big) \cup \big((E \cup F) \cap F^c\big) =$

$$= \underbrace{(E \cap E)}_{\text{identità}} \cup (F \cap E) \cup (E \cap F^c) =$$

$$= E \cup (E \cap F) \cup (E \cap F^c) = E \cup E = E$$

RIEPILOGO

Siano gli eventi $H, H^c, A \in \mathcal{F}$,

con $\mathbb{P}(H) > 0$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap H) + \mathbb{P}(A \cap H^c) = \mathbb{P}(H) \cdot \mathbb{P}(A|H) + \mathbb{P}(H^c) \cdot \mathbb{P}(A|H^c)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(H|A)}_{\text{"a posteriori"}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A|H) \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(A|H)}^{\text{"verosimiglianza"}} \cdot \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(A|H) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(H)}_{\text{"a priori"}} + \mathbb{P}(A|H) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(H^c)}_{\text{"a priori"}}}$$

ESEMPIO

3.7.3 In una prova a risposta multipla, uno studente o risponde giustamente o si butta a caso.

Sia p l'evento che sa la risposta. Quando si butta a caso, si applica la casualità conforme

C: "sceglie risposta corretta"

K: "conosce la risposta esatta"

$$\mathbb{P}(K) = p \,,\ \mathbb{P}(K^c) = 1-p \quad \text{con } p \in [0 \dots 1]$$

$\mathbb{P}(C|K) = 1, \quad \mathbb{P}(C|K^c) = 1/m \quad$ con $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(C) = 1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)$$

$$\mathbb{P}(K|C) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{p}{p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)} = \frac{mp}{pm + (1-p)} =$$

$$= \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

caso particolare: $p = 1/2$ e $m = 5 \Rightarrow \dfrac{5 \cdot \frac{1}{2}}{1 + (5-1) \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{3} = \dfrac{5}{6}$

3.7.4 - Una particolare analisi del sangue è efficace il 99% di individuare la presenza di un'assegnata malattia.

- può verificarsi il caso di "falsi positivi" con probabilità del 1%
- l'incidenza della malattia nella popolazione è 0,5%

M: "il soggetto in questione è ammalato"

E: "il risultato è positivo"

voglio valutare:

$$\mathbb{P}(M|E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap M)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|M) \cdot \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(E|M) \cdot \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(E|M^c) \cdot \mathbb{P}(M^c)} =$$

$$= \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,99 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} = 0,3322$$

3.1.5

- 60% di colpevolezza
- il colpevole possiede un tratto distintivo che riguarda il 20% della popolazione
- il sospettato possiede il tratto distintivo

G: "il sospettato è colpevole"

C: "il sospettato possiede il tratto distintivo"

$$\mathbb{P}(G|C) = \frac{\mathbb{P}(G \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(C|G) \cdot \mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(C|G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C|G^c) \cdot \mathbb{P}(G^c)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0,6}{1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4} = \frac{0,6}{0,68} = 0,88 = 88\%$$

FORMULA DI ALTERNATIVE DI UNA SUCC.

$$(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$$

1) $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(H_n)>0$

2) $i\neq j\in\mathbb{N}$, $H_i\cap H_j=\emptyset$

3) $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} H_n=\Omega$

costituisca un sistema completo di alternative

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap\Omega)\overset{3)}{=}(A\cap\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} H_n)$$

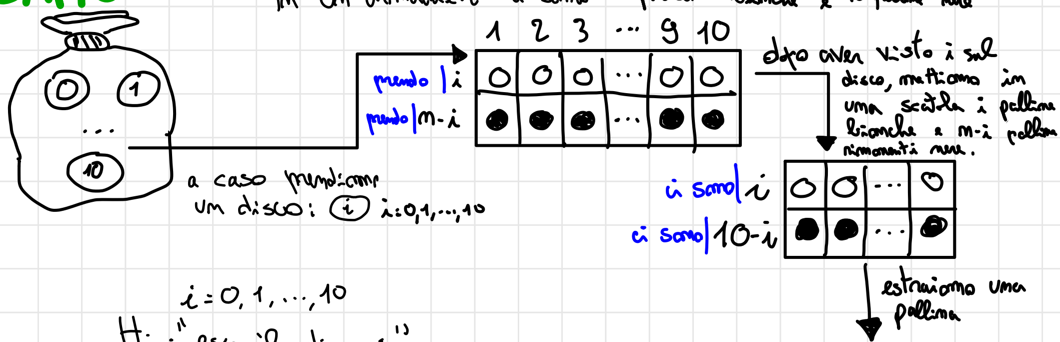
$$=\mathbb{P}\left[\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}(A\cap H_n)\right]\overset{2)\ M_3)}{=\!=}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A\cap H_n)$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\mathbb{P}(H_n)\cdot\mathbb{P}(A|H_n)\right]$$

ESEMPIO

In un armadietto ci sono 10 palline bianche e 10 palline nere

Abbiamo un sacco con 11 dischi numerati da 0 a 11 :



$i=0,1,\dots,10$

H_i: "esce il disco i"

B: "biglia bianca"

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i=0}^{10}\mathbb{P}(B|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)=$$

$$= \sum_{i=0}^{10} \frac{i}{10} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{110} \cdot \sum_{i=1}^{100} i = \frac{110/2}{110} = 1/2$$

LEZIONE 09 - 28/03/2022

RIEPILOGO

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E) \cdot \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c)$$

$$\mathbb{P}(E|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(A|E) \cdot \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A|E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c)}$$

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

se H_n è un sistema completo di alternative, abbiamo che:

$\mathbb{P}(E) > 0$, e sia $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|H_n) \cdot \mathbb{P}(H_n)$

prendo $i \in \mathbb{N}$, e voglio aggiornare la probabilità dell'alternativa i-esima dato che si è verificato A:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|H_n) \cdot \mathbb{P}(H_n)}$$

ESEMPIO 3.7.7 : con 3 alternative

Un aereo è scomparso e si suppone che sia caduto in uno dei 3 stati con equa probabilità.
Parte un team di ricerca.

Per $i = 1,2,3$, sia $1-\alpha_i$ la probabilità di rintracciare l'aereo che è caduto nella regione i

Qual è la probabilità che l'aereo si trovi nella regione 1 se una ricerca nella medesima regione ha dato esito negativo?

$i = 1,2,3$ $\quad R_i$: "l'aereo si trova nella regione i"

E : la ricerca nella regione 1 non ha dato esito positivo

$$\mathbb{P}(R_1|E) = \frac{\mathbb{P}(E|R_1)\cdot\mathbb{P}(R_1)}{\sum_{i=1}\mathbb{P}(E|R_i)\cdot\mathbb{P}(R_i)} =$$

$\mathbb{P}(E|R_2) = 1$

$\mathbb{P}(E|R_3) = 1$

$$= \frac{\alpha_1\cdot 1/3}{\alpha_1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+2}$$

$$\mathbb{P}(R_2|E) = \frac{\mathbb{P}(E|R_2)\cdot\mathbb{P}(R_2)}{\sum_{i=1}\mathbb{P}(E|R_i)\cdot\mathbb{P}(R_i)} =$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\alpha_1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3 + 1\cdot 1/3} = \frac{1}{\alpha_1+2}$$

E_1: Giovanni , E_2: Enrico

O: " E_2 è onesto" , $\mathbb{P}(O) = 0{,}9$

$B = O^c$ $\qquad\qquad \mathbb{P}(B) = 0{,}1 = \mathbb{P}(O^c)$

V_1: "Enrico vince l'aperitivo"

prob che vince dato che bara

$$\mathbb{P}(V_1 | B) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}(V_1 | O) = 1/2$$

prob che vince essendo onesto

$$\underbrace{\mathbb{P}(B | V_1)}_{\text{probabilità che è baro dato che ha vinto}} = \frac{\mathbb{P}(V_1 | B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(V_1 | B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V_1 | O) + \mathbb{P}(O)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{10}}}{\frac{1}{\cancel{10}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\cancel{10}}} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11} \simeq 0{,}18$$

V_2: E_2 vince il primo e il secondo aperitivo

prob che vince dato che bara

$$\mathbb{P}(V_2 | B) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_2 | O) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

PERCHÉ ? (PIÙ AVANTI) *

$$\mathbb{P}(B | V_2) = \frac{\frac{1}{\cancel{10}}}{\frac{1}{\cancel{10}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{\cancel{10}}} = \frac{1}{\frac{4+9}{4}} = \frac{4}{13} \simeq 0{,}3$$

V_6: "E_2 ne vince 6"

$$\mathbb{P}(B | V_6) = \frac{\frac{1}{\cancel{10}}}{\frac{1}{\cancel{10}} + \frac{1}{2^6} + \frac{9}{\cancel{10}}} = \frac{2^6}{2^6 + 9} = \frac{64}{73} \simeq 0{,}9$$

Si può notare che la probabilità che è un baro dato che vince aumenta. (INFERENZA DIRETTA)

Ma si poteva procedere diversamente:

Cancellando le probabilità a priori, trasformando quelle a posteriori in quelle a priori dopo il primo evento (INFERENZA ITERATIVA)

$$\mathbb{P}(B|V_1) = \frac{2}{11}, \quad \mathbb{P}(O|V_1) = \frac{9}{11}$$

$$\mathbb{P}(V|B) = 1, \quad \mathbb{P}(V|O) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(B|V) = \frac{1 \cdot \frac{2}{\cancel{11}}}{1 \cdot \frac{2}{\cancel{11}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{\cancel{11}}} = \frac{2}{\frac{4+9}{2}} = \frac{2}{\frac{13}{2}} = \frac{4}{13} \simeq 0,3$$

N.B: Il risultato resta invariato.

PERCHÉ * Sia $\mathbb{P}(B) > 0$, $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A|B) \begin{cases} \to > \mathbb{P}(A) \\ \to = \mathbb{P}(A) \\ \to < \mathbb{P}(A) \end{cases}$$

1) se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ allora A è indipendente da B

2) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

3) $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

DEF:

A e B sono indipendenti $\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

"incompatibilità a due a due" $\uparrow$ ($\mathcal{F}$) — ($\mathbb{P}$) $\longrightarrow$ indipendenze

PROPOSIZIONE 3.8.1

A e B sono indipendenti, allora tali sono A e B^c

DIM:

perchè sono indipendenti

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) =$$

$$= \mathbb{P}(A) \cdot [1 - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^c) \quad \blacksquare$$

metto in evidenza $\mathbb{P}(A)$

ESEMPIO

$$\{Z_2 = 7\}, \{Z_1^{(1)} = 4\}, \{Z_1^{(2)} = 3\}$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 7 \mid \{Z_1^{(1)} = 4\} \cap \{Z_1^{(2)} = 3\}) = 1$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 7 \mid Z_1^{(1)} = 4) = \frac{1}{6};$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 7 \mid Z_1^{(3)} = 3) = \frac{1}{6};$$

$$\mathbb{P}(Z_2 = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

DEFINIZIONE 3.8.2

Siano $A, B, C \in \mathcal{F}$

A, B, C sono indipendenti tra loro $\iff$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Siano A, B, C indipendenti tra loro

$$\mathbb{P}\left(\left[A\cap(B\cup C)\right]\right)=\mathbb{P}\left(\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]\right)=$$
$$=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=$$
$$=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\cap C)=$$
$$=\mathbb{P}(A)\cdot\left[P(B)+P(C)-\mathbb{P}(B\cap C)\right]=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\cup C)$$

LEZIONE 10 - 29/03/2022

RIEPILOGO

Abbiamo visto che:

$\{Z_2=7\}$ è indipendente dall'evento $\{Z_1^{(1)}=4\}$

$\{Z_2=7\}$ è indipendente dall'evento $\{Z_1^{(2)}=3\}$

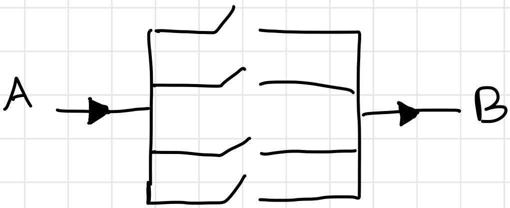
$\{Z_2=7\}$ NON è indipendente dall'evento $\{Z_1^{(1)}=4\}\cap\{Z_1^{(2)}=3\}$

Siano A, B, C eventi indipendenti

A è una qualsiasi composizione degli eventi B e C

N.B. $n\geq 2$ eventi sono indipendenti tra loro se comunque si sceglie un sottoinsieme di essi, per tali eventi vale la formula di fattorizzazione

ESERCIZIO



E_1, E_2, E_3, E_4 indipendenti

$i = 1, 2, 3, 4$ $\qquad$ E_i: "il componente i funziona"

$$p_i = \mathbb{P}(E_i)$$

$$\mathbb{P}(\text{il sistema funziona}) = \overbrace{1 - \mathbb{P}(\text{il sistema non funziona})}^{1 \text{ meno il suo complemento}}$$

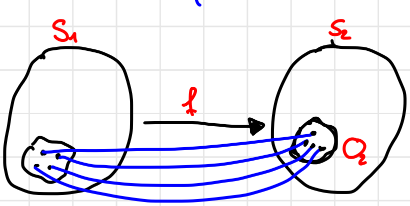
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = \mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i^c\right)^c\right] \Rightarrow 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i^c\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{4} (1 - p_i)$$

La continuità riguarda la topologia.
La misurabilità riguarda la famiglia dei misurabili

$$(S_1, \underset{\text{aperti}}{\overset{\text{topologia}}{\mathcal{T}_1}}), (S_2, \underset{\text{aperte}}{\mathcal{T}_2})$$

$$f : S_1 \xrightarrow{\text{applicazione}} S_2$$



f è continua se e solo se

$$\forall O_2 \in \mathcal{T}_2, \{f \in O_2\}_{S_1} \in \mathcal{T}_1$$

elementi di S_1 la cui immagine sta in O_2

σ-algebra

$(S_1, \mathcal{F}_1)$, $(S_2, \mathcal{F}_2)$

misurabili   misurabili

$$f: S_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2\text{-mis}} S_2$$
$$s_1 \rightsquigarrow s_2 = f(s_1)$$

f è misurabile se e solo se

$$\forall B_2 \in \mathcal{F}_2, \ \{f_{s_1} \in B_2\} \in \mathcal{F}_1$$

elementi di S_1 la cui immagine sta in B_2

Ad esempio:

σ-algebra

$(\Omega, \mathcal{F})$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$X: \underset{S_1}{\Omega} \xrightarrow{\mathcal{F}|\mathcal{B}\text{-mis}} \underset{S_2}{\mathbb{R}}$$

e visto che $\mathcal{F}_2$ è sempre $\mathcal{B}$, allora si può abbreviare in (se non dobbiamo calcolare qualcosa di specifico):

$$X: \Omega \xrightarrow{\mathcal{F}\text{-mis}} \mathbb{R}$$

quindi: partendo dalla terna dell'esperimento $\mathcal{E}$ $(\underset{\mathcal{E}}{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con la misurabilità si ottiene $\mathbb{P}_X \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$

$$B \in \mathcal{B}, \ \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B)$$

$$B \in \mathcal{B}, \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) \geq 0$$

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}, \ \underset{i \neq j}{B_i \cap B_j = \emptyset}, \ \mathbb{P}_X\left(\bigcup B_n\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_X(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X \in B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in B_n\}\right)$$

$\mathcal{E}$: "lancio di una moneta truccata un numero indefinito di volte"

$\Omega = \{T, C\}^{\infty}$, $\omega \in \Omega$ è del tipo $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) : \omega_n = \begin{cases} T \\ C \end{cases}$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad T_1 = \{(T, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots)\}$

$T_2 = \{(\omega_1, T, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots)\}$

$T_3 = \dots$

$\vdots$

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \rightsquigarrow X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_1 = T \\ 0, & \omega_1 = C \end{cases}$$

se B non contiene 0 e non contiene 1 $\quad \{X_1 \in B\} = \emptyset \in \mathcal{F}$

se B contiene 1 e non contiene 0 $\quad \{X_1 \in B\} = T \in \mathcal{F}$

se B contiene 0 e non contiene 1 $\quad \{X_1 \in B\} = T^c \in \mathcal{F}$

se B contiene 0 e contiene 1 $\quad \{X_1 \in B\} = \Omega \in \mathcal{F}$

$S_{X_1} = \{0, 1\}$, supponendo che p è la probabilità che è uscito testa $p \in (0,1)$

$\mathbb{P}_{X_1}(\{1\}) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$

$\mathbb{P}_{X_1}(\{0\}) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p =: q$

$B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}_{X_1}(B) = \begin{cases} 0, & \text{se } B \cap \{0,1\} = \emptyset \\ p, & \text{se } B \cap \{0,1\} = \{1\} \\ q, & \text{se } B \cap \{0,1\} = \{0\} \\ 1, & \text{se } B \cap \{0,1\} = \{0,1\} \end{cases}$

$\mathbb{P}_{X_1}(\mathbb{R}) = 1$

In questo modo abbiamo descritto completamente il numero aleatorio di X_1.

Bernoulli

$$n \in \mathbb{N}, \quad X_n \sim B(1, p)$$

$X_1 + X_2$ è misurabile?

BINOMIALE

$$X_1 + X_2 \sim B(2, p)$$

LEZIONE 11 - 01/04/2022

$$\left(\{T, C\}^{\infty}, \mathcal{F} = \sigma\left[(T_n)_{n \in \mathbb{N}}\right], \mathbb{P}\right)$$

$$p := \mathbb{P}(\text{"}T\text{"}) \in (0, 1)$$

$$n \in \mathbb{N}, \; X_n := \begin{cases} 1, & T_n = T \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad X_n : \{T, C\}^{\infty} \xrightarrow{\mathcal{F}\text{-mis}} \mathbb{R}$$

$$\underline{w} \longmapsto X_n(\underline{w})$$

$$\underline{w}_1 = (C, T, T, T, C, T, \dots)$$

$$\underline{w}_2 = (C, C, T, C, C, C, \dots)$$

$$\underline{w}_3 = (C, T, T, T, C, T, \dots)$$

$$\underline{w}_4 = (T, C, C, C, C, T, \dots)$$

$$X_3(\underline{w}_1) = 1 \qquad X_3(\underline{w}_3) = 1$$

$$X_3(\underline{w}_2) = 1 \qquad X_3(\underline{w}_4) = 0$$

Somma delle prime due prove | $S_2 := X_1 + X_2$

$S_{S_2} = \{0,1,2\}$ "spettro"

$$
B \in \mathcal{B}, \quad \{S_2 \in B\} = \begin{cases}
\emptyset, & S_{S_2} \cap B = \emptyset \\
C_1 \cap C_2, & S_{S_2} \cap B = \{0\} \\
T_1 \cap C_2 \uplus C_1 \cap T_2, & S_{S_2} \cap B = \{1\} \\
T_1 \cap T_2, & S_{S_2} \cap B = \{2\} \\
C_1 \cap C_2 \uplus T_1 \cap C_2 \uplus C_1 \cap T_2, & S_{S_2} \cap B = \{0,1\} \\
C_1 \cap C_2 \uplus T_1 \cap T_2, & S_{S_2} \cap B = \{0,2\} \\
T_1 \cap C_2 \uplus C_1 \cap T_2 \uplus T_1 \cap T_2, & S_{S_2} \cap B = \{1,2\} \\
T_1 \cap C_2 \uplus C_1 \cap T_2 \uplus T_1 \cap T_2 \uplus C_1 \cap C_2, & S_{S_2} \cap B = \{0,1,2\}
\end{cases}
$$

ESEMPIO:

INTERVALLO -0,2 a 0,2

- se $B =]-0,2; 0,2[$, ci troviamo nel caso in cui intersezione $= \{0\}$
- se $B =]0,2; 0,8[$, ci troviamo, invece, nel caso $= \emptyset$

$$S_{10} = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$$

IN GENERALE:

$$\boxed{\text{La somma di due funzioni misurabili è una funzione misurabile}}$$

prob. che $S_2=0$

$$p_0 := \overbrace{\mathbb{P}(S_2=0)}^{\text{prob. che } S_2=0} = \mathbb{P}(C_1\cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\cdot\mathbb{P}(C_2) = \boxed{(1-p)^2}$$

$$p_1 := \mathbb{P}(S_2=1) = \mathbb{P}(C_1\cap T_2 \cup T_1\cap C_2) = \mathbb{P}(C_1\cap T_2) + \mathbb{P}(T_1\cap C_2) =$$

$$= \mathbb{P}(C_1)\cdot\mathbb{P}(T_2) + \mathbb{P}(T_1)\cdot\mathbb{P}(C_2) = (1-p)p + p(1-p)$$

$$= \boxed{2p(1-p)}$$

$$p_2 = \mathbb{P}(S_2=2) = \mathbb{P}(T_1\cap T_2) = \mathbb{P}(T_1)\cdot\mathbb{P}(T_2) = p\cdot p = \boxed{p^2}$$

$$S_{S_2} = \{0,1,2\} \longrightarrow ((1-p)^2, 2p(1-p), p^2)$$

Queste due informazioni ci danno la distribuzione di probabilità di S_2.

La coppia che ci dice quali valori un numero può assumere e le corrispettive probabilità.

Invece, per X_1:

$$S_{X_1} = \{0,1\}, \quad (1-p, p)$$ distribuzione di probabilità di X_1

esponente della potenza massima di p

$$X_1 \sim B(1,p) \equiv B(p)$$

numero aleatorio con distribuzione di Bernoulli

ESEMPIO:

$$S_2 \sim B(2,p)$$

numero aleatorio con distribuzione binomiale

MEDIA

$$\mathbb{E}(X_1) = \cancel{0\cdot(1-p)} + 1\cdot p = p$$

$$\mathbb{E}(S_2) = \cancel{0\cdot(1-p)^2} + 1\cdot\left(2p(1-p)\right) + 2\cdot p^2 =$$

$$= 2p\left((1-\cancel{p}) + \cancel{p}\right) = 2p$$

Sia $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$, con lo spettro $= S_{S_3} = \{0, 1, 2, 3\}$ $q = 1-p$

distribuzione binomiale $B(3,p)$: $\left(q^3,\ \underbrace{3\cdot q^2 p,\ 3\cdot q p^2}_{},\ p^3\right)$

3 perchè sia TTC o CCT, abbiamo 3 combinazioni possibili

$$\mathbb{E}(S_3) = \cancel{0\cdot(p^0\cdot q^3)} + 1\cdot(3\cdot q^2 p) + 2\cdot(3\cdot q p^2) + 3\cdot p^3$$

$$= 3pq^2 + 6qp^2 + 3p^3 = 3p\left(q^2 + 2qp + p^2\right) = 3p\,(\cancelto{1}{q+p})^2$$

$$= 3p$$

FORMULA

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$S_{S_n} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

nessuna T, 1T, 2T, tutte T

$K \in S_{S_n}$, $p_K := \mathbb{P}(S_n = K) = \binom{n}{K}\cdot p^K \cdot q^{n-K}$

${}_{K,n-K}P_n^r$ | numero delle combinazioni con K "T" e n-K "C"

distribuzione di probabilità binomiale con parametri n e p

1	2		K	K+1	K+2		n
T	T	. . .	T	C	C	. . .	C

$$p\cdot p\cdot \dots\dots\cdot p\cdot q\cdot q\cdot\dots\dots\cdot q$$

$$= p^K\cdot q^{n-K}$$

$$\mathbb{P}(S_n \in \mathbb{R}) = 1 \qquad\qquad S_n \sim B(n, p)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) = \overbrace{(p+q)}^{\cancel{p} + (1-\cancel{p}) = 1}{}^{n} = 1^n = 1$$

il pedice è diventato l'indice. Prima facevamo $0 \cdot \ldots + 1 \cdot \ldots$

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \right) =$$

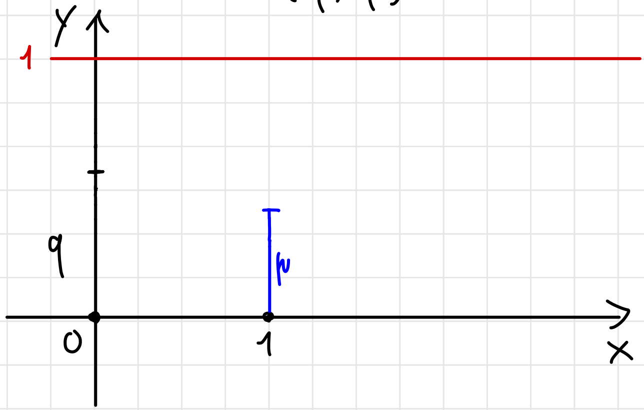
$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \right)$$

// INCOMPLETO, continua con i conti. Ma risultato è:

$$\mathbb{E}(S_n) = n \cdot p$$

$X_1 \,, \quad S_{X_1} = \{0, 1\}$

(q, p)



$$(y_1, y_2, \dots, y_N)$$

frequenze $\mid (n_0, n_1, \dots, n_m)$ $\qquad \sum_{k=0}^{m} (n_k) = N$

$\downarrow$

frequenze relativa $\mid (f_0, f_1, \dots, f_m)$ $\qquad \sum_{k=0}^{m} f_k = 1$

$$f_k := \frac{n_k}{N}$$

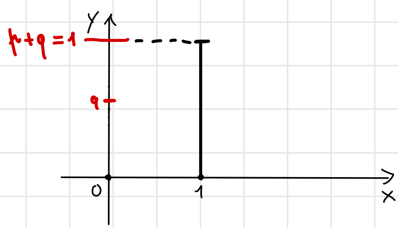
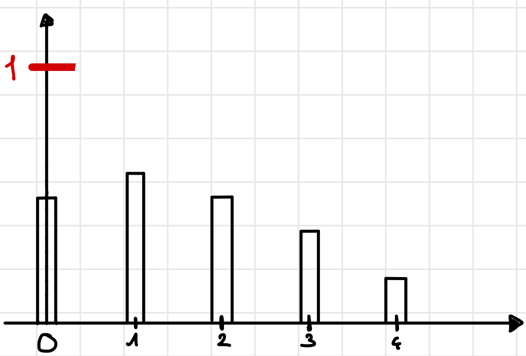


GRAFICO DELLE FREQUENZE



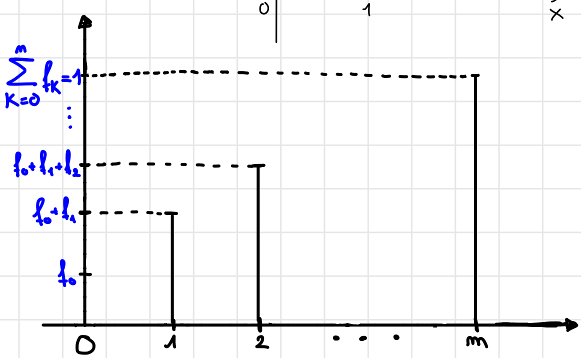


GRAFICO BASTONCINI ACCUMULATO

LEZIONE 12 - 04/04/2022

RIEPILOGO

$$\Omega = \left(\{T, C\}^{\infty}, \mathcal{F} = \sigma\left[(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \right], \mathbb{P} \right)$$

$p \in (0,1)$, $q = 1-p$

$n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim B(1,p) \Rightarrow \mathbb{E}(X_n) = p$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \sim B(n,p)$$

$$K = 0, \dots, n, \quad \mathbb{P}(S_n = K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

$$\mathbb{E}(S_n) = np$$

Un altro modo per arrivare a $\mathbb{E}(S_n) = n \cdot p$ è il seguente:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{K=1}^{n} X_K \right) = \sum_{K=1}^{n} \left(\mathbb{E}(X_K) \right)$$

$$= \sum_{K=1}^{n} p = p \cdot \sum_{K=1}^{n} 1 = p \cdot n$$

ESERCIZIO:

Determinare la probabilità che nel prossimo concorso "esca il numero 5 sulla ruota di Venezia"

Sia E l'evento in questione

$i = 1, \dots, 5$, E_i: "E si verifica alla i-esima estrazione"

$$E = \dot{\bigcup_{i=1}^{5}} E_i \Rightarrow \mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(E_i) = \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{90}_{\,18}} = \frac{1}{18}$$

$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{90}$;

$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\{5\}_1^c \cap \{5\}_2) = \mathbb{P}(\{5\}_1^c) \cdot \mathbb{P}(\{5\}_2 | \{5\}_1^c)$

$= \frac{\cancel{89}}{90} \cdot \frac{1}{\cancel{89}} = \frac{1}{90}$

$\mathbb{P}(E_3) = \frac{\cancel{89}}{90} \cdot \frac{\cancel{88}}{\cancel{89}} \cdot \frac{1}{\cancel{88}} = \frac{1}{90}$

$\vdots$

quindi, sono equiprobabili tutte e 5 con valore $\frac{1}{90}$

Invece, cambiando prospettiva:

$\Omega = (\{T,C\}^\infty, \mathcal{F} = \sigma[(T_n)_{n\in\mathbb{N}}], \mathbb{P})$ $\quad p\in(0,1)$, $q = 1-p$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad$ prob. di Testa $\quad p = \mathbb{P}(T)$ $\quad X_n \sim B(1,p)$

Un altro valore importante è il tempo T, il quale:

$T \geq 1 : X_T = 1$ "per la prima volta"

$S_T = \{1,2,3,\dots,n\} = \mathbb{N}$

$n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n-1} \cap T_n) =$

$= \overbrace{\mathbb{P}(C_1)}^{q} \cdot \mathbb{P}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(C_{n-1}) \cdot \overbrace{\mathbb{P}(T_n)}^{p} =$

$= p \cdot q^{n-1}$

T ha distribuzione geometrica $\quad T \sim G(p)$

Verificato che $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T=n) > 0$

Adesso, dobbiamo verificare che: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p\cdot q^{n-1} = p\cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p\cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^{n} = p\cdot \frac{1}{1-q} = p\cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p\cdot \frac{1}{\cancel{1}-\cancel{1}+p} =$$

$$= \cancel{p}\cdot \frac{1}{\cancel{p}} = 1$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p\cdot q^{n-1} = p + 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + \dots$$

$$= p\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots\right) =$$

N.B $h \in \mathbb{R}$, $1 + h + h^2 + \dots + h^n = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$ progressione geometrica di ragione h

$|h|<1$

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1-h^{n+1}}{1-h} = \frac{1}{1-h}$$

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots =$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{p}$$

visto che $q = 1-p \Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{1-1+p} = \frac{1}{p}$

$$+ q + q^2 + q^3 + \dots = q(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{q}{p}$$

$$+ q^2 + q^3 + \dots = q^2(1 + q + \dots) = \frac{q^2}{p}$$

$$+ q^3 + \dots = q^3(1 + \dots) = \frac{q^3}{p}$$

$$= \cancel{p}\left(\frac{1}{\cancel{p}} + \frac{q}{\cancel{p}} + \frac{q^2}{\cancel{p}} + \frac{q^3}{\cancel{p}} + \dots\right) = \frac{1}{p}$$

$$W_1 = T \sim G(p)$$

$K \in \mathbb{N}$, fissato $\qquad W_K \sim (p, K)$

$W_K \sim$ * $\qquad \mathbb{P}(W_K = K-1) = 0$

$$S_{W_K} = \{K, K+1, K+2, \dots\}$$

$$n \geq K,\ \mathbb{P}(W_K = n) = \mathbb{P}(S_{n-1} = K-1, X_n = 1) = \mathbb{P}(S_{n-1} = K-1)\cdot \mathbb{P}(X_n = 1) =$$

INTERSEZIONE

$$= \binom{n-1}{K-1}\cdot p^{K-1}\cdot q^{n-K}\cdot p = \binom{n-1}{K-1}\cdot p^{K}\cdot q^{n-K}$$

* $W_K \sim \text{Pascal}(p, K)$ | distribuzione di Pascal

il numero che conta il numero delle prove che deve avere la prima testa

$$\underset{\text{azzera contatore}}{T^{(1)} \sim T^{(2)}} \sim \underset{\text{azzera}}{T^{(3)}} \sim \dots \sim \underset{\text{azzera}}{T^{(K)}} \sim G(p)$$

$$W_K = \sum_{i=1}^{K} T^{(i)}$$

perché hanno la stessa legge $G(p)$

$$\mathbb{E}(W_K) = \sum_{i=1}^{K} \left(\mathbb{E}(T^{(K)})\right) = \sum_{i=1}^{K} \left(\mathbb{E}(T)\right) =$$

$$= \mathbb{E}(T) \cdot \sum_{i=1}^{K} 1 = \frac{K}{p}$$

EPILOGO

COSA ABBIAMO OTTENUTO IN QUESTA LEZIONE

T: numero delle prove per osservare la prima "T"

$$T \sim G(p), \quad p \in (0,1)$$

$$n \geq 1, \quad \mathbb{P}(T=n) = p \cdot q^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$$

$K \in \mathbb{N}$

W_K: numero delle prove per osservare la K-esima "T"

$$W_K \sim \text{Pascal}(p, K)$$

$$n \geq K, \quad \mathbb{P}(W_K = n) = \binom{n-1}{K-1} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

$$\mathbb{E}(W_K) = \frac{1}{p}$$

Lancio di un dado onesto

Z_1: punteggio $\quad S_{Z_1} = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

$i = 1, \dots, 6 \quad \mathbb{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{6}$ | quindi è casuale, cioè hanno tutti la stessa probabilità

$$Z_1 \sim U_d(1,2,3,4,5,6)$$ | variabile Uniforme discreta

LEZIONE 13 - 05/04/2022

METTIAMO IN PRATICA I SIMBOLI

$$\left(\Omega = \{T,C\}^{\infty}, \mathcal{F} = \sigma\left[(T_m)_{m\in\mathbb{N}}\right], \mathbb{P}\right) \qquad \mathbb{P}(T) = p \in (0,1)$$

$$q = 1-p$$

ha la legge di

$m \in \mathbb{N}$, $X_m \sim \text{Bernoulli}(p)$ | oppure $\sim B(1,p)$

m-esima prova

$$\underline{\omega}_1 = (C_1\ T_2\ C_3\ C_4\ C_5\ C_6\ T_7)$$
$$\underline{\omega}_2 = (C_1\ C_2\ T_3\ C_4\ T_5\ T_6\ C_7)$$

$$X_1(\underline{\omega}_1) = 0 = X_3(\underline{\omega}_1) = X_4(\underline{\omega}_1) = X_5(\underline{\omega}_1) = X_6(\underline{\omega}_1)$$
$$X_2(\underline{\omega}_1) = 1 = X_7(\underline{\omega}_1)$$

$S_m \sim B(m,p)$

somma delle prime m prove

$$S_2(\underline{\omega}_1) = 1 = S_3(\underline{\omega}_1) = \dots = S_6(\underline{\omega}_1)$$
$$S_7(\underline{\omega}_1) = 2$$
$$S_7(\underline{\omega}_2) = 3$$

| quante teste ci sono da 1 a 7

$T = W_1 \sim G(p)$

tempo

$$T(\underline{\omega}_1) = 2$$
$$T(\underline{\omega}_2) = 3$$

| a che tempo è uscita la prima T

$k \in \mathbb{N}$ $\quad W_k \sim \text{Pascal}(k,p)$

$$W_2(\underline{\omega}_2) = 5$$
$$W_2(\underline{\omega}_1) = 7$$
$$W_3(\underline{\omega}_2) = 6$$

| a che tempo è uscita la k-esima "T"

spettro | $S_{S_m} = \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_m = k) = \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot q^{m-k}$

$\boxed{\lambda > 0}$

- se $\lambda = 3$
- scarto $n=1$, $n=2$ e $n=3$, finché il risultato < 1

$\frac{3}{1}=3$ ✗	$\frac{3}{2}=1,5$ ✗	$\frac{3}{3}=1$ ✗	$\frac{3}{4}=0,75$ ✓	$\frac{3}{5}=0,6$ ✓	
$\cancel{p_1=\frac{\lambda}{1}}$	$\cancel{p_2=\frac{\lambda}{2}}$	$\cancel{p_3=\frac{\lambda}{3}}$	$p_4=\frac{\lambda}{4}$	$p_5=\frac{\lambda}{5}$	...
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	

da questo momento in poi, n aumenta e p decrementa, ma il prodotto tra n e p è costantemente λ

$$n \cdot p_n = \lambda$$

In questo modo mandando $n \to \infty$, $p_n \to 0$ $\quad \Big| \; \forall a \in \mathbb{R} \; \lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$\frac{\lambda}{n} = p_n \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ volte}}\cdot\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

k cifre nell'intervallo

$M - m + 1$

M: massimo n nell'intervallo

m: minimo n nell'intervallo

$n-(n-k+1)+1 = \cancel{n}-\cancel{n}+k-\cancel{1}+\cancel{1} = k$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{\cancel{n}\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \to 1} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n-k+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

(ciascun limite $\to 1$)

discorso analogo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}^{\,0} = 1$$

limite notevole

Nepero $\quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

fai calcoli con limite notevole

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

quindi $k \in \mathbb{N}_0$

Ora, posso dire:

Un numero Y che ha spettro $\mathbb{N}_0$ e successione delle probabilità dei valori dello spettro: $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

di Poisson con parametro λ e si scrive:

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda) \sim \Pi(\lambda)$$

ESEMPI:

$Y \sim \Pi(\lambda)$ con $\lambda > 0$

$S_Y = \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(Y=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$\mathbb{P}(Y=1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda$ $\qquad$ $\mathbb{P}(Y=0) = e^{-\lambda}$

$\mathbb{P}(Y=5) = e^{-Y} \cdot \frac{\lambda^5}{5!}$

$k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\underbrace{\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{P_k}$

$$P_{k+1} = \binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1} = \frac{p}{q} \cdot \binom{n}{k+1} p^k q^{n-k} = \frac{p}{q} p^k q^{n-k} \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} = \frac{p}{q} \cdot \underbrace{\underbrace{p^k \cdot q^{n-k}}_{} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot (n-k) \cdot \underbrace{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}_{}}_{P_k}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{(n-k)}{k+1} \cdot P_k$$

quindi:

$k = 1, \dots, n-1$, $\quad P_{k+1} = P_k \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

$$P_0 = \binom{n}{0} p^0 q^n = q^n$$

$k = 1$, $\quad P_1 = P_0 \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n-1}{1+1} = P_0 \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n-1}{2}$

$Y \sim \pi(\lambda)$; $k \in \mathbb{N}_0$, $\underbrace{\mathbb{P}(Y=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}_{Q_k} > 0$

$$k \in \mathbb{N}, \quad Q_{k+1} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{k+1} \cdot Q_k$$

$$Q_0 = e^{-\lambda}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \frac{1}{\cancel{e^{\lambda}}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot Q_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \boxed{\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}} \to e^{\lambda} \qquad k' = k-1$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \frac{1}{\cancel{e^{\lambda}}} \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$$

ESEMPIO:

dal LIBRO

5.2.1 Supponendo che il numero medio di incidenti stradali settimanali in un particolare tratto di autostrada sia pari a 3.
Si vuole la probabilità che nella prossima settimana ci sia almeno un incidente.

numero aleatorio | Y: il numero degli incidenti settimanali in quel tratto

$$Y \sim \Pi(\lambda = 3)$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = \sum_{K=1}^{\infty} Q_K = 1 - \mathbb{P}(Y=0) = 1 - Q_0 = 1 - e^{-3} \simeq 0{,}9502$$

5.2.2 Un macchinario produce oggetti che hanno probabilità di essere difettoso con probabilità 0,1.
Supponendo che la lavorazione dei pezzi comporti l'indipendenza delle loro qualità, con quale probabilità un campione di 10 oggetti ne conterrà al più 1 difettoso

S_{10}: il numero degli oggetti difettosi nel campione di 10 pezzi

$$S_{10} \sim B(n = 10, p = 0{,}1)$$

$$\{S_{10} = 0\} \,\dot\cup\, \{S_{10} = 1\}$$

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{al più}\\ \text{1 pezzo difettoso}\end{matrix}\right) = \mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1 = \binom{10}{0} \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^9 = 0{,}7361$$

OPPURE

$$Y \sim \Pi(\lambda = 10 \cdot 0{,}1 = 1)$$

$$\mathbb{P}(\{Y=0\} \,\dot\cup\, \{Y=1\}) = Q_0 + Q_1 = e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1^1}{1!}\right) = \frac{2}{e} = 0{,}7358$$

FUNZIONE GENERATRICE

La funzione generatrice dei momenti

$m \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{E}(X^m) = \sum_k k^m \cdot \mathbb{P}(X=k)$ se esistono

momenti

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$ se esiste in un intervallo $(-t_0, t_0)$

- $\phi(0) = 1$
- $\left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0} = \mathbb{E}(X)$, $\left.\frac{d^2\phi(t)}{dt^2}\right|_0 = \mathbb{E}(X^2)$

LEZIONE 14 - 08/04/2022

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$x \in \mathbb{N}_0$ $\quad \mathbb{P}(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$

abbiamo un altra variabile aleatoria, con distribuzione binomiale $\quad X_n \sim B(n,p) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sotto l'ipotesi che da un certo n in poi: $np = \lambda$

possiamo dire che:
- n abbastanza grande
- p abbastanza piccolo

$$\mathbb{P}(X_n = x) \simeq \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

PROBLEMI

CAPITOLO 5 - LIBRO

10 Confronta le probabilità esatte con l'approssimazione di Poisson nei seguenti casi

1. $n = 10,\ p = 0{,}1$

$$P(X=0) = \binom{10}{0}(0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^{10} = (0{,}9)^{10} \simeq 0{,}348678$$

$$P(X=0) \simeq \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \quad \boxed{,\ \text{ma } \lambda = np = 10 \cdot 0{,}1 = 1}$$

$$e^{-\lambda} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0{,}367879$$

2. $n = 10,\ p = 0{,}1$

$$P(X=2) = \binom{10}{2}(0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^8 = 0{,}19371$$

$$P(X=2) \simeq \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e} \simeq 0{,}18394$$

$$\boxed{\lambda = np = 1}$$

3. $n = 9,\ p = 0{,}2$

$$P(X=4) = \binom{9}{4}(0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^5 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^5$$

$$= 126 \cdot 0{,}0016 \cdot 0{,}32768 = 0{,}0660$$

$$P(X=4) = \frac{\lambda^4}{4!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1{,}8^4}{24} \cdot e^{-1{,}8} = 0{,}4374 \cdot \frac{1}{e^{1{,}8}}$$

$$\lambda = np = 9 \cdot 0{,}2 = 9 \cdot \frac{2}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8$$

$$\Downarrow$$

$$0{,}4374 \cdot 0{,}165299 = 0{,}0723$$

5.2.3 Considerare un esperimento che consiste nel contare il numero di particelle alfa emesse in un secondo da un grammo di un certo materiale radioattivo.
Sappiamo dall'esperienza passata che il valore medio di questa variabile aleatoria è 3,2.
Qual è una buona approssimazione della probabilità che nell'esperimento in esame non venga emesso più di 2 particelle?

- Possiamo ipotizzare che alla sorgente ci sia un n grande di atomi radioattivi

prob. che ciascun atomo emette : $\frac{3,2}{n}$

abbiamo che $\underbrace{\frac{3,2}{n}}_{\text{prob. di successo}} \cdot \underbrace{n}_{\text{numero di ripetizioni / di atomi}} = 3,2 = \lambda$

quindi:

perché non più di 2 come richiesto dal problema

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{3,2}{n}\right)^{x} \cdot \left(1 - \frac{3,2}{n}\right)^{n-x} \simeq$$

$$\simeq \sum_{x=0}^{2} \frac{\lambda^{x}}{x!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{3,2^{0}}{0!} \cdot e^{-3,2} + \frac{3,2^{1}}{1!} \cdot e^{-3,2} +$$

$$+ \frac{3,2^{2}}{2!} \cdot e^{-3,2} = *$$

$$* = e^{-3,2}\left[1 + 3,2 + \frac{3,2^{2}}{2}\right] \simeq 0,3795$$

5.2.4 Una compagnia di assicurazioni riceve in media 5 richieste di risarcimento al giorno.

a) Che frazione della giornata vedrà arrivare meno di 3 richieste?

$$X \sim \text{Poisson}(5)$$

approssim.

$$\mathbb{P}(X<3) \simeq e^{-5} \cdot \left(1+5+\frac{5^2}{2}\right) \simeq 0,1247$$

b) Con che probabilità in una settimana lavorativa di 5 giorni, in esattamente 3 giorni arrivano 4 richieste? [Possiamo assumere che l'indipendenza del numero di richieste che arrivano il giorno successivo]

prob. di successo | $p = \mathbb{P}(X=4) \simeq \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} \simeq 0,1751$

var. aleatoria | Y: il numero di giorni lavorativi (5) in cui si verifica $X=4$

Allora:

$$Y \sim B(5,p) \qquad \mathbb{P}(Y=3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 \simeq 0,0367$$

$$X \sim G(p) \qquad S_X = \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$x = 1, 2, \ldots$

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}\, \mathbb{P}(X=x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot (1-p)^{x-1} p = pe^t \cdot \sum_{x=1}^{\infty} [e^t(1-p)]^{x-1} =$$

$$\text{"} \sum_{x=0}^{\infty} q^x \text{"}$$

$$e^{tx} = e^t \cdot e^{t(x-1)}$$

$$= pe^t \frac{1}{1 - e^t(1-p)}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\phi_X(t)\right|_{t=0} = \mathbb{E}[X]$$

proprietà della funzione generatrice di momenti

DIM:

$$\left.\frac{d}{dt}\phi_X(t)\right|_{t=0} = \frac{pe^t[1 - e^t(1-p)] - pe^t[-(1-p)e^t]}{[1 - e^t(1-p)]^2}$$

$$= \frac{\cancel{p^2} + \cancel{p} - \cancel{p^2}}{p^{\cancel{2}}} = \frac{1}{p} = \mathbb{E}[X] \qquad \blacksquare$$

$$X \sim Poisson(\lambda) \qquad \mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^t \cdot \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

DIM: $$\frac{d}{dt} \phi_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda(e^t-1)}\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda(e^t) \Big|_{t=0} = e^0 \cdot \lambda \cdot e^0 = \lambda = \mathbb{E}[X]$$

$$X \sim B(n,p) \qquad \mathbb{E}(X) = np$$

$$\phi_X(t)$$

ESERCIZIO

Un dado onesto viene lanciato fino all'uscita della faccia "1". Sapendo che son stati effettuati 3 lanci senza aver visto la faccia "1". Calcolare la probabilità di fare al massimo altri 3 lanci

X: variabile che conta il numero di lanci per vedere la prima volta 1

$X \sim G(1/6)$ | perché dado onesto, la faccia 1 ha probabilità 1/6 che esca (come tutte le altre)

Sapendo che $\{X > 3\}$

$$P(\{X \leq 6\} \mid \{X > 3\}) = P(X \leq 6 \mid X > 3) \overset{\text{analoga sintassi}}{=}$$

$$\frac{P(\{X\le 6\}\cap\{X>3\})}{P(X>3)} = \frac{P(X\le 6,\ X>3)}{P(X>3)} = \frac{P(3<X\le 6)}{P(X>3)} =$$

$$= \frac{P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)}{1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)}$$

Un ragazzo lancia ripetutamente un dado e si arresta quando deve uscire almeno una volta la faccia "1" e la faccia "2". detto X, il numero di lanci effettuati, deve determinare il valore atteso.

$$X = Y + T$$

prob. dopo che è già uscita la faccia 1 o 2 e deve uscire rispettivamente il 2 o 1 mancante.

$$\underbrace{E_1 \dot\cup E_2}$$

evento che faccia 1

evento che faccia 2

$$Y \sim G(p_Y)$$

$$p_Y = P(E_1 \dot\cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1+1}{6} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}_3} = \frac{1}{3}$$

quindi: $Y \sim G(1/3)$

$$T \sim G(1/6)$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y+T] = \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[T] = 3+6 = 9$$

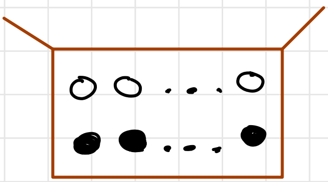
LEZIONE 15 - 11/04/2022

numeri aleatori ottenuti:

unico esperimento
- $B(n,p)$, con $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$
- $G(p)$, con $p \in (0,1)$
- $Pascal(K,p)$, con $K \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

successione di esperimenti
- $Poisson(\lambda)$, con $\lambda > 0$

Adesso, introduciamo una variabile che assomiglia al binomiale, ma dobbiamo spostarci di contesto.
L'ambiente è quello di una scatola che contiene palline bianche e nere



tale che:

$$p = \frac{\#B}{\#T}$$

$\#B$: numero delle palline bianche

$\#T$: numero delle palline complessive

Estraiamo una pallina dalla scatola:

$$X_1 := \begin{cases} 1, & \text{se esce bianca} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X_1 \sim B(1,p) \sim Bernoulli(p)$$

Per mutare la situazione per ottenere una nuova variabile aleatoria chiamata IPER-GEOMETRICA, la pallina estratta deve essere conservata in tasca, senza reinserirle nella scatola

Sia:

a : numero delle bianche e b: numero delle nere

scelgo un $m \in \mathbb{N}$, il numero delle estrazioni possibili (numero delle biglie)

X: numero delle biglie bianche estratte

$K \in \mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{P}(X=K) = \dfrac{\binom{a}{K} \cdot \binom{b}{m-K}}{\binom{a+b}{m}}$

se K bianche

allora sono uscite $m-K$ nere

RICORDA

legge con estrazioni e reinserimento $X \sim B(1,p)$

$K \in \{0, 1, \dots, m\}$

$\mathbb{P}(X=K) = \binom{m}{K} p^K (1-p)^{m-K}$

Per convenzione:

$$\binom{m}{K} = \begin{cases} \partial, & K \leq m \quad \text{def} \\ 0, & K > m \end{cases}$$

Possiamo dire che:

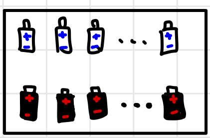
$$\max(0, m-b), \quad \min(m, a),$$

K deve essere un valore tra essi!, quindi lo spettro è:

$$S_X = \{\max(0, m-b), \dots, \min(m, a)\}$$

ESEMPIO:

- Abbiamo una scatola di batterie già usate



N: numero batterie accettabili

M: numero batterie difettose

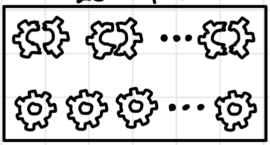
estraiamo un blocco di m batterie

X: conta il numero delle batterie accettabili

$$K \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=K) = \frac{\binom{N}{K} \cdot \binom{M}{m-K}}{\binom{N+M}{m}}$$

Abbiamo una cassa di componenti per assemblare un sistema

20 componenti:



5 guaste

15 efficienti

$n=6$: blocchi di componenti. Il sistema deve essere composto con 6 componenti.
Il sistema funziona se abbiamo almeno 4 componenti efficienti

X: numero dei componenti efficienti

$\boxed{\text{ricorda, } k \in \{\max(0, n-b), \dots, \min(n,a)\} \quad \text{quindi: } \{1, \dots, 6\}}$

quindi:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) =$$

$$= \frac{\binom{15}{4} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{20}{6}} + \frac{\binom{15}{6} + \binom{5}{0}}{\binom{20}{6}} =$$

$$= \frac{\binom{15}{4} \cdot \binom{5}{2} + \binom{15}{5} \cdot \binom{5}{1} + \binom{15}{6} + \binom{5}{0}}{\binom{20}{6}}$$

Questa viene chiamata variabile IPERGEOMETRICA

$$X \sim IG(a, b, n)$$

$$X_K = \begin{cases} 1, & \text{se esce bianco con prob } \frac{a}{a+b} \\ 0, & \text{se esce nero con prob } \frac{b}{a+b} \end{cases} \qquad \mathbb{E}(X_K) = 1 \cdot \frac{a}{a+b} + \cancel{0 \cdot \frac{b}{a+b}}$$

$K = 1, 2, \dots, n$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1), \ \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \overbrace{[\{X_1 = 0\} \mathbin{\dot\cup} \{X_1 = 1\}]}^{\Omega}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 0\} \mathbin{\dot\cup} \{X_2 = 1\} \cap \{X_1 = 1\}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X_2=1\}\cap\{X_1=0\}) + \mathbb{P}(\{X_2=1\}\cap\{X_1=1\}) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=0) + \mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)$$

$$= \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{\underbrace{a+b-1}_{\text{perché una biglia già estratta, ed è nera}}} + \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1} =$$

perché la prima biglia estratta era bianca.

$$= \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} =$$

$$= \frac{ab+a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a\cancel{(b+a-1)}}{(a+b)\cancel{(a+b-1)}}$$

quindi, anche $\mathbb{P}(X_3=1)=\frac{a}{a+b}$ e così continuando, abbiamo che:

$$\mathbb{E}(X) = n\cdot\frac{a}{a+b}$$

Abbiamo quindi, che hanno una stessa media

$$X \sim B(n,p),\quad \mathbb{E}(X)=n\cdot p$$

$$X \sim I_p(n,a,b)\quad \mathbb{E}(X)=n\cdot\frac{a}{a+b}$$

X è un numero aleatorio discreto con spettro S_X e valore di probabilità $(p_k)_{k\in S_X}$

$$p_k = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}_X(\{k\}) \qquad (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$$

Se prendo un boreliano qualsiasi

$$B \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{k:\, x_k \in B} p_k$$

ESEMPIO:

$$X \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$k \in S_X, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}_X(]0, +\infty[) = 1 - \mathbb{P}_X(\{0\})$$

$$(]-\infty, x])_{x \in \mathbb{R}}$$ famiglia delle semirette sinistre

$B =]-\infty, x]$

funzione che ha un argomento sottoinsieme

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \le x)$$

DISTRIBUTION FUNCTION

(funzione di distribuzione)

elemento come argomento

variabile aleatoria

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

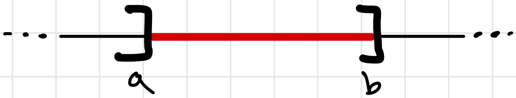
$$x \rightsquigarrow F_X(x) := \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \le x)$$

Adesso,

$$\mathbb{P}(X>a) = 1 - F_X(a)$$

$a<b$

$$\mathbb{P}(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



N.B: da F_X si ricostruisce $\mathbb{P}_X$

LEZIONE 16 - 12/04/2022

$\mathcal{E}: (\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$ $\qquad\qquad\qquad (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$

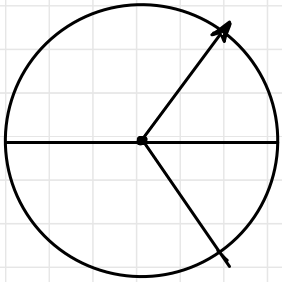
$$X: \Omega \xrightarrow{\mathcal{F}\text{-misurabile}} \mathbb{R}$$
$$\omega \rightsquigarrow X(\omega)$$

$E \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(E)$ $\qquad\qquad\qquad B \in \mathcal{B},\ \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$

funz. distribuzione

$$x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

ESEMPIO:

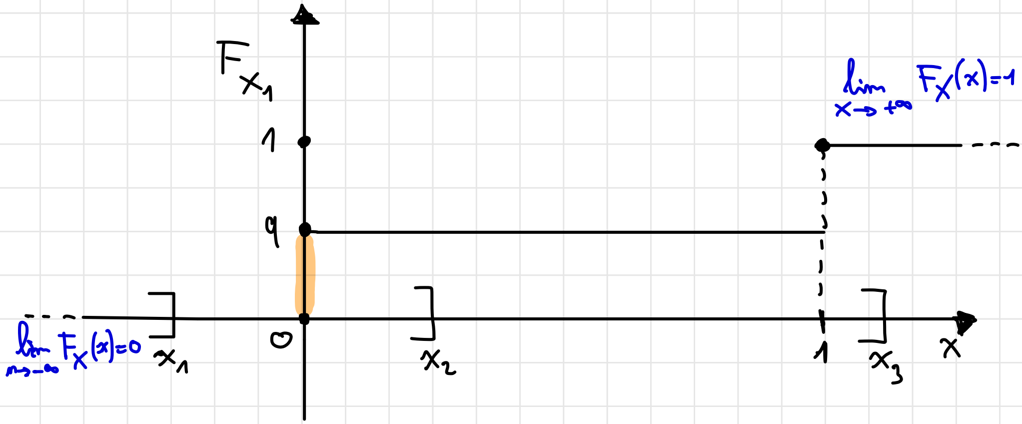


$$(C, \mathcal{B}_C, A_C) \quad X: C \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \rightsquigarrow X(\omega) = x_c$$

$$X_1 = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1-p \end{cases} \qquad (p \in (0,1))$$

$S_{X_1} = \{0, 1\}$

$x_1 < 0,\quad 0 < x_2 < 1,\quad x_3 \geq 1$



$$F_X(0^+) - F_X(0^-) = F_X(0) - F_X(0^-) = q - 0 > 0$$

$$F_{X_1}(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) = 0$$

$$F_{X_1}(x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_2) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = q$$

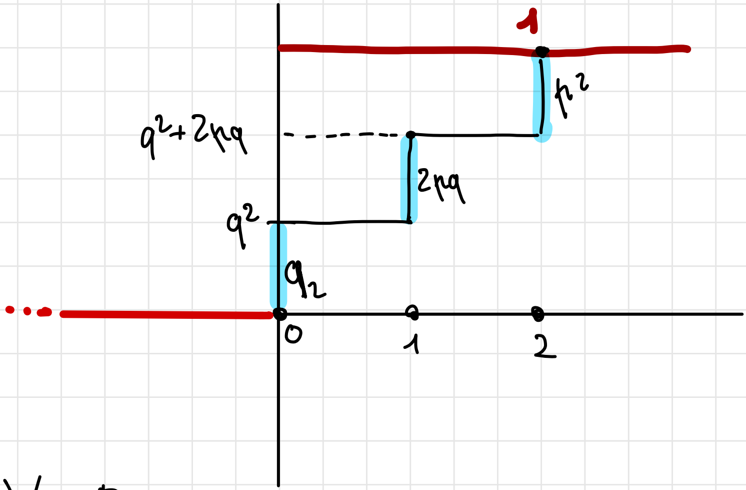
$$F_{X_1}(x_3) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_3) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) =$$
$$= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1$$

quindi:

$$F_X(x) - F_X(x^-) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ non è un valore dello spettro } (x \notin S_X) \\ p_K, & \text{se } x = x_K \in S_X \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$S_2 = X_1 + X_2 \begin{cases} 0 & \text{con prob. } q^2 \\ 1 & \text{con prob. } 2pq \\ 2 & \text{con prob. } p^2 \end{cases}$$



$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$ SI PUÒ DIRE

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$ NON SI PUÒ DIRE

N.B:

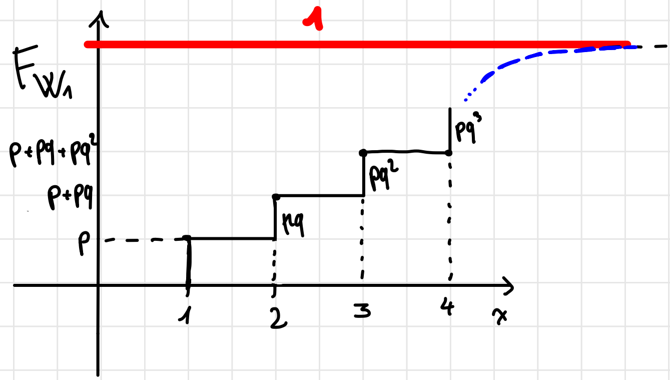
Quindi una delle proprietà della funzione di distribuzione:

- NON DECRESCENTE.

$W_1 = T \sim G(p)$

$\{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$

$m \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = m) = p\, q^{m-1}$



$$\lim_{x \to +\infty} F_{W_1}(x) = 1$$

PROPRIETÀ

consideriamo una successione di eventi:

$$(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

- si dice CRESCENTE se: (si scrive $E_m \uparrow$) $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$

$\forall m \in \mathbb{N}, \quad E_m \subseteq E_{m+1}$

- si dice DECRESCENTE se: (si scrive $E_m \downarrow$) $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_m$

$\forall m \in \mathbb{N} \quad E_m \supseteq E_{m+1}$

Sia $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monotona

TEOREMA

$$\lim_{m \to \infty} (\mathbb{P}(E_m)) = \mathbb{P}\left(\lim_{m \to \infty} (E_m)\right)$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$

F_X funz. distrib. $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

1) F_X è non decrescente

DIM:

$$x_1 < x_2 \implies]-\infty, x_2] =]-\infty, x_1] \cup]x_1, x_2]$$

$$F_X(x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) =$$

$$= F_X(x_1) + \underbrace{\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2)}_{\geq 0}$$

$$F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$

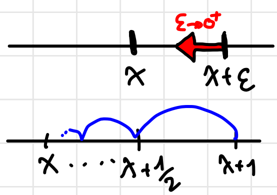
$\blacksquare$

2) F_X è continua destra in $\mathbb{R}$

DIM:

$$x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$

ci aiuta il teorema ponte



quindi

$$\lim_{n\to\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x < X \leq x + 1/n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_X(x) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x < X \leq x + 1/n\right) =$$

$$= F_X(x) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x < X \leq x + 1/n\right) = F_X(x) + \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \{x < X \leq x + 1/n\}\right) =$$

$$= F_X(x) + \underbrace{\mathbb{P}(\emptyset)}_{=0} = F_X(x)$$

cioè $\lim_{n\to\infty} F_X(x+1/n) = F_X(x) \Longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

F_X è non decrescente

applichiamo il teorema ponte

3) $\lim_{n\to+\infty} F_X(x) = 1$

segue dalla 1) e dal Teorema Ponte

$$\lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\leq n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\{X\leq n\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

4) $\lim_{n\to-\infty} F_X(x) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X\leq -n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\{X\leq -n\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

1) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

2) $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

3) $\mathbb{P}(a < X < b) =$

4) $\mathbb{P}(a \leq X < b) =$

5) $\mathbb{P}(X > a) =$

6) $\mathbb{P}(X \geq a) =$

FUNZIONE DENSIFICATA DI PROBABILITÀ

$f_X \geq 0$ | svolge il ruolo di ricostruire $\mathbb{P}_X$

$$B \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{R} \in \mathcal{B}, \quad 1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx$$

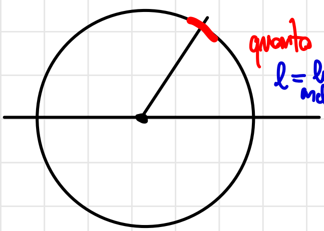
ESEMPIO:

riprendendo l'esempio della Ruota della Fortuna

$$f_{RF}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \overbrace{0 < x < 2\pi}^{\text{supporto}} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{RF}(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2\pi} \overbrace{\int_0^{2\pi} dx}^{\text{lunghezza della circonferenza}} =$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} = 1$$



quanto vale la prob. di questo archetto?

l = lung. archetto

$$\frac{l}{2\pi} = l \cdot \frac{1}{2\pi}$$

LEZIONE 17 - 22/04/2022

variabili DISCRETE

La legge P_X è ricostruita mediante:

$$S_X,\quad x\in S_X,\ P(X=x)>0$$

$$B\in\mathcal{B},\quad B\cap S_X$$

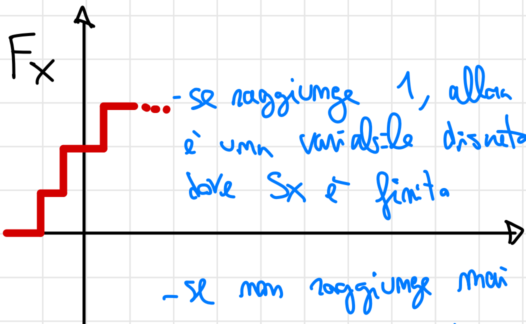
$$P_X(B)=\sum_{x\in B\cap S_X}\left(P(X=x)\right)$$

variabili CONTINUE

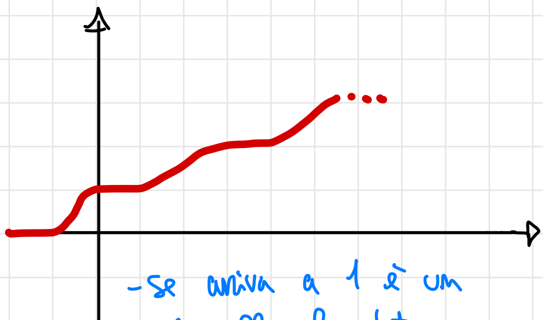
la legge P_X è ricostruita per il tramite di una funzione

$$f_X(\ )$$

$$P_X(B)=\int_B f_X(x)\,dx$$

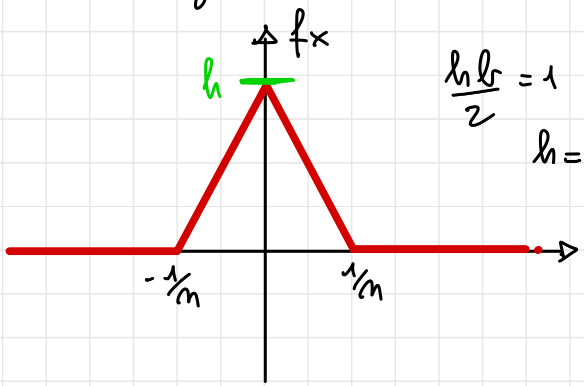


- se raggiunge 1, allora è una variabile discreta dove S_X è finita
- se non raggiunge mai 1, è sempre discreta ma il supporto ha la cardinalità del numerabile (come Poisson, la geometrica)



- se arriva a 1 è un intervallo limitato
- altrimenti, è una semiretta o tutta l'asse reale

Immaginiamo di avere la seguente situazione:



$$\frac{hb}{2} = 1$$

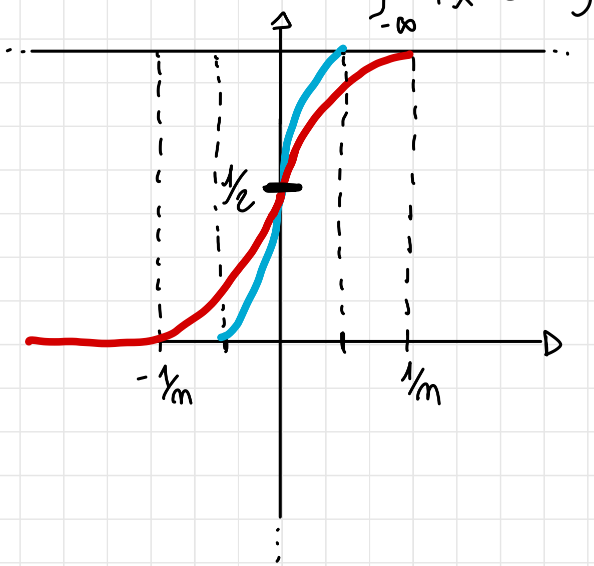
$$h = \frac{2}{b} = \frac{\cancel{2}}{\frac{\cancel{2}}{n}} = n = h$$

CONTINUE:

$B \in \mathcal{B}$, $P_X(B) = \int_B f_X$

$B =]-\infty, x]$, $P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x) = F_X(x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$



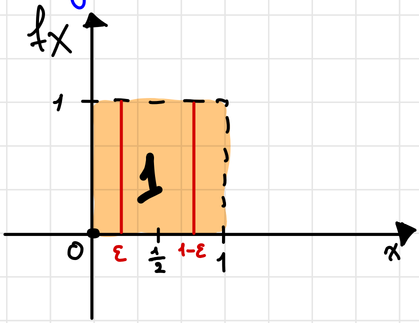
VARIABILI CONTINUE

Ci sono 3 variabili continue fondamentali:

- LEGGE UNIFORME
- LEGGE ESPONENZIALE
-

LEGGE UNIFORME

$X \sim U(0,1)$ | X ha legge uniforme nell'intervallo (0,1)



$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_X(]0,\varepsilon[) = \int_0^{\varepsilon} 1 \cdot dx = \varepsilon$$

$$x \leq 0, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dy = 0$$

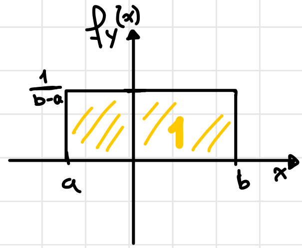
$$0 < x < 1, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy = \int_{-\infty}^{0} f_X(y)\, dy + \int_0^x f_X(y)\, dy = \int_0^x dy = x$$

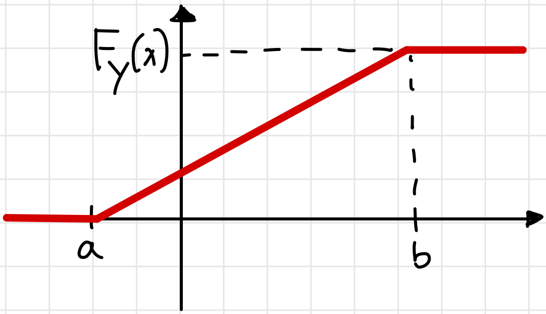
$$x \geq 1, \quad F_X(x) = 1$$

LEGGE UNIFORME GENERICA

$Y \sim U(a,b)$ con $a<b$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$





RELAZIONE TRA UNIFORME GENERICA E (0,1)

$X \sim U(0,1)$ $\qquad S_X \overset{\text{supporto}}{=} (0,1)$

$Y = a + (b-a)X$, dove $a<b$

MEDIA

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

Abbiamo visto che:

$a<b$, $\mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

se $a=b$
$\mathbb{P}(a \le X \le a) = 0$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[a+(b-a)X] = \mathbb{E}(a) + \mathbb{E}[(b-a)X] =$$

$$= a + \mathbb{E}[(b-a)X] = a + (b-a)\cdot\mathbb{E}(X) =$$

$$= a + (b-a)\cdot \tfrac{1}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{\cancel{2}a+b-\cancel{a}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

e^{tX}

$t \in \mathbb{R}$, $\quad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tX}\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 e^{tX}\cdot 1\cdot dx =$

$$\overset{t\neq 0}{=} \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 = \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right)$$ Ma manca 0, quindi:

IN GENERALE, $\phi_X(0) = \mathbb{E}(e^{0X}) = \mathbb{E}(1) = 1$

SI APPLICA DE HOPITAL

quindi: $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1} = 1$, quindi è prolungabile e forziamo in 1.

$$\phi'(t) = \frac{e^t\cdot t - (e^t-1)}{t^2} = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

$$\phi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{te^t+1-e^t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{e^t} + \cancel{t}e^t - \cancel{e^t}}{2\cancel{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\{[a+(b-a)X]^2\} = \mathbb{E}\left[a^2+(b-a)^2X^2+2a(b-a)X\right] =$$

$$= a^2 + (b-a)\overbrace{\mathbb{E}(X^2)}^{1/3} + 2a(b-a)\overbrace{\mathbb{E}(X)}^{1/2}$$

$$= a^2 + \frac{(b-a)^2}{3} + \frac{\cancel{2}a(b-a)}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{3a^2}+b^2+a^2\cancel{-2ab}+\cancel{3}ab-\cancel{3a^2}}{3} =$$

$$= \frac{b^2+a^2+ab}{3}$$

varianza di X | $$\mathbb{D}^2(X) := \mathbb{E}\,\overbrace{[X-\mathbb{E}(X)]}^{\text{scarto dalla media}}{}^2 =$$

$$[X^2 - 2\overbrace{\mathbb{E}(X)}^{\text{costante}}X + \overbrace{\mathbb{E}^2(X)}^{\text{costante}}]$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}^2(X)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

LEZIONE 18 - 26/04/2022

RIEPILOGO

Abbiamo visto che:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\mathcal{F}\text{-mis}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$$

X: numero aleatorio

- $\mathbb{P}$ misura gli elementi di $\mathcal{F}$
- $\mathbb{P}_X$ misura gli elementi di $\mathcal{B}$

$\mathbb{P}_X$ è complesso da maneggiare perché ha come argomento un insieme:

$$B \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

quindi abbiamo costruito la funzione di distribuzione:

$$x \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, x], \quad \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) =: F_X(x)$$

La differenza tra DISCRETI e CONTINUI è che nei numeri discreti ci sono dei punti dell'asse x che son maggiori di 0, invece, nei continui, tutti i numeri dell'asse $\mathbb{R}$ lo sono

DISCRETO	CONTINUI
$\exists\, S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ (spettro)	$\exists\, f_X \geq 0$ in $\mathbb{R}$ tale che
$r_1 = \mathbb{P}(X = x_1) > 0$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy;$
$r_2 = \mathbb{P}(X = x_2) > 0$	$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
$\vdots \quad \vdots$	$B \in \mathcal{B}, \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$
$= 1$	

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in S_X} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k)$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_{S_X} x \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{ora è sicuramente } >0} dx$$

vale per entrambi

$$\begin{cases} \mu_X = \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(aX+b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \\ \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] < +\infty \end{cases}$$

si chiama varianza di X

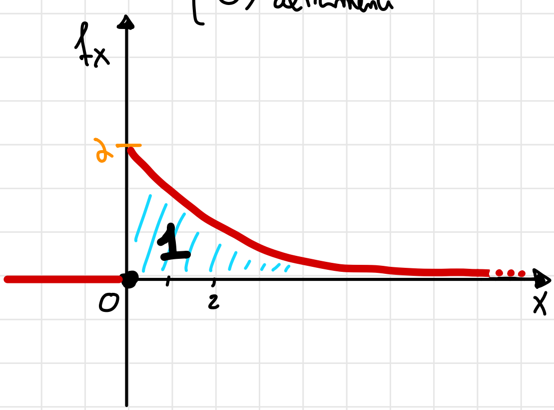
$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$ deviazione standard

VARIABILE ESPONENZIALE

$X \sim Esp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$P(X>2) = P(X\geq 2) = \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_2^{+\infty} = e^{-\lambda x}\Big|_{+\infty}^{2} = e^{-2\lambda} - \lim_{x\to\infty} \cancel{e^{-\lambda x}}^{\,0} =$$
$$= e^{-2\lambda}$$

$$F_X(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \overset{x<0}{=} 0$$
$$\overset{x>0}{=} \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\,dy = e^{-\lambda y}\Big|_x^0$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

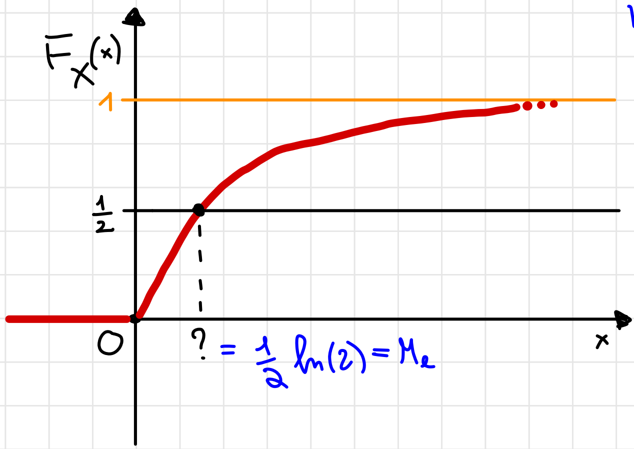
quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$= \overbrace{-e^{-\lambda x}\cdot x\Big|_0^{+\infty}}^{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx \overset{\text{moltiplico e divido per } \lambda}{=} \frac{1}{\lambda}\cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{=1} = \frac{1}{\lambda}$$



$$F_X(?) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot ?} = \frac{1}{2} \iff -e^{-\lambda ?} = \frac{1}{2} - 1 \iff$$

$$\iff -e^{-\lambda ?} = -\frac{1}{2} \iff e^{-\lambda ?} = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \ln(e^{-\lambda ?}) = -\ln(2) \iff -\lambda \cdot ? = -\ln(2) \iff$$

$$\iff \lambda \cdot ? = \ln(2) \iff ? = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(2)$$

quindi $M_e = \frac{1}{\lambda} \ln(2)$ | mediana

$$M_o = \underset{x \in \mathbb{R}}{\arg\max} \cdot f_X(x)$$

$$t \in \mathbb{R},\ \Phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$$

$t < \lambda \Leftarrow$ solo se $\lambda - t > 0$

moltiplico e divido $\lambda - t$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-x(\lambda - t)}\,dx = \frac{\lambda}{(\lambda - t)} \overbrace{\int_0^{+\infty} (\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x}\,dx}^{=1}$$

$$t < \lambda,\ \Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\mathbb{E}(X^0) = 1$$

$$\Phi_X(0) = \frac{\lambda}{\lambda - 0} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_X(t) = \lambda \cdot \frac{d(\lambda - t)^{-1}}{dt} = \lambda(\lambda - t)^{-2}$$

$$\Phi'_X(0) = \frac{\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}(X)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi_X(t) = \lambda \cdot 2(\lambda - t)^{-3} = 2\lambda(\lambda - t)^{-3}$$

$$\Phi''_X(0) = \frac{2\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{3}\,2}} = \frac{2}{\lambda^2} = E(X^2)$$

$$D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sqrt{D^2(X)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{D^2(X)}}{E(X)} = 1}$$

PROPRIETÀ ESPONENZIALE

$$P(X > 1+t \mid X > t) = P(X > 1)$$

$$= \frac{P(X > 1+t \cap X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+1)}{P(X > t)} = \frac{1 - F_X(1+t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+1)}}{e^{-\lambda t}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda 1} \cdot \cancel{e^{-\lambda t}}}{\cancel{e^{-\lambda t}}} = e^{-\lambda 1} = 1 - F_X(1) = P(X > 1)$$

FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

LEZIONE 19 - 29/04/2022

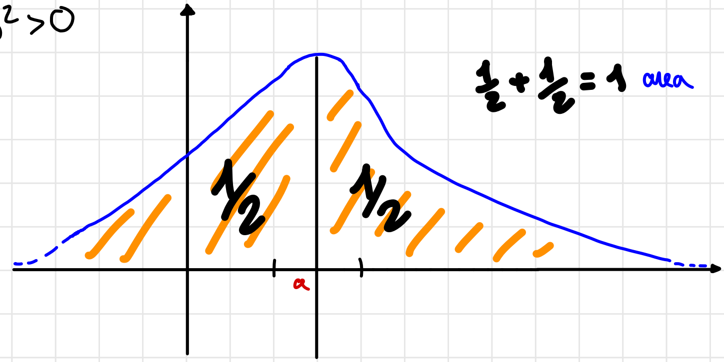
Legge o distribuzione di un numero aleatorio

DISCRETO			CONTINUO		
di Bernoulli	$B(p)$	$p \in (0,1)$	Uniforme discreta	$U_d(x_1, \dots, x_n)$	$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
Binomiale	$B(n,p)$	$n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$	Uniforme	$U(a,b)$	$a<b \in \mathbb{R}$, supporto (a,b)
Geometrica	$G(p)$	$p \in (0,1)$	Esponenziale	$Esp(\lambda)$	$\lambda > 0$, supporto $(0, +\infty)$
di Poisson	$\Pi(\lambda)$	$\lambda > 0$			
di Pascal	$W(K,p)$	$K \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$			

FUNZIONE DI GAUSS

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x,a,b^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} > 0$$

$a \in \mathbb{R}, \; b^2 > 0$



$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ area

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x,a,b) \, dx$$

prendiamo la coppia $a=0, b^2=1$

normale standard | $Z \sim N(0,1)$

prendiamo $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_Z(x) \, dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2 - t^2)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[(x^2 - 2tx + t^2) - t]} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \, dx =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} \, dx}^{f.d.p.\ N(t,1) \implies 1} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\Phi_Z(0) = \mathbb{E}(e^{0Z}) = \mathbb{E}(1) = 1 = \mathbb{E}(Z^0)$$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{d\,\Phi_Z(t)}{dx}\bigg|_{t=0} = \Phi_Z(t) \cdot t\bigg|_{t=0} = t\bigg|_{t=0} = 0$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{d^2\Phi_Z(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \Phi_Z'(t) \cdot t + \Phi_Z(t) \cdot 1\bigg|_{t=0} =$$

$$= \Phi_Z(0) = 1$$

$$\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}^2(Z) = 1 - 0 = 1$$

quindi

$$Z \sim N(\overbrace{0}^{\mathbb{E}(Z)}, \underbrace{1}_{\mathbb{D}^2(Z)})$$

OPERAZIONE DI STANDARDIZZAZIONE

$$X \sim N(a, b^2) \qquad \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}$$

PROPRIETÀ:

a) $$\mathbb{E}\left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}} \cdot [\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)] = 0$$

b) $$\mathbb{D}^2\left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}\right]$$

VARIANZA

X ammette finita la varianza

traslazione $\quad Y = X + c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}\{[Y - \mathbb{E}(Y)]^2\} = \mathbb{E}[X + \cancel{c} - \mathbb{E}(X) - \cancel{c})^2] =$$

$$= \mathbb{E}\{[X - \mathbb{E}(X)]^2\} = \mathbb{D}^2(X)$$

Sia $d \in \mathbb{R}$, $\quad T = \dfrac{X}{d}$

$$\mathbb{D}^2(T) = \mathbb{E}\{[T - \mathbb{E}(T)]^2\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left[\frac{X}{d} - \frac{\mathbb{E}(X)}{d}\right]^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left[\frac{X - \mathbb{E}(X)}{d}\right]^2\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\frac{[X + \mathbb{E}(X)]^2}{d^2}\right\} = \frac{1}{d^2} \cdot \mathbb{E}\{[X - \mathbb{E}(X)]^2\} =$$

$$= \frac{\mathbb{D}^2(X)}{d^2}$$

ESEMPI:

- $$\mathbb{D}^2\left(\frac{X-2}{3}\right) = \frac{1}{9}\mathbb{D}^2(X-2) = \frac{1}{9}\mathbb{D}^2(X)$$

- $$\mathbb{D}^2(4X) = 16\,\mathbb{D}^2(X)$$

In generale:

$$\mathbb{D}^2(cX+d) = \mathbb{D}^2(cX) = c^2 \cdot \mathbb{D}^2(X)$$

Ritornando a b):

$$\mathbb{D}^2\left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}\right] = \frac{1}{\mathbb{D}^2(X)} \cdot \mathbb{D}^2\left[X-\mathbb{E}(X)\right] = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{\mathbb{D}^2(X)} = 1$$

Ritornando al caso Gaussiano:

$Z \sim N(0,1)$

$$Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\mathbb{D}^2(X)} \sim N(0,1)$$

stessa legge di Z, quindi non cambia la legge

facciamo

con $b>0$, $\quad a+bZ$, $\quad \mathbb{E}(a+bZ) = a + b\,\overbrace{\mathbb{E}(Z)}^{0} = a$

$$\mathbb{D}^2(a+bZ) = \mathbb{D}^2(bZ) = b^2 \cdot \overbrace{\mathbb{D}^2(Z)}^{1} = b^2$$

$$\frac{d}{dx} f_X(x,a,b) = -f_X(x,a,b) \cdot \frac{x-a}{b}$$

$$f'_X(x,a,b) = 0 \iff x-a=0 \iff x=a$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f_X(x,a,b) = -\frac{1}{b}\left[f'(x,a,b)\cdot(x-a) + f_X(x,a,b)\right]$$

$$f''_X(a,a,b) = -\frac{1}{b} \cdot f_X(a,a,b)$$

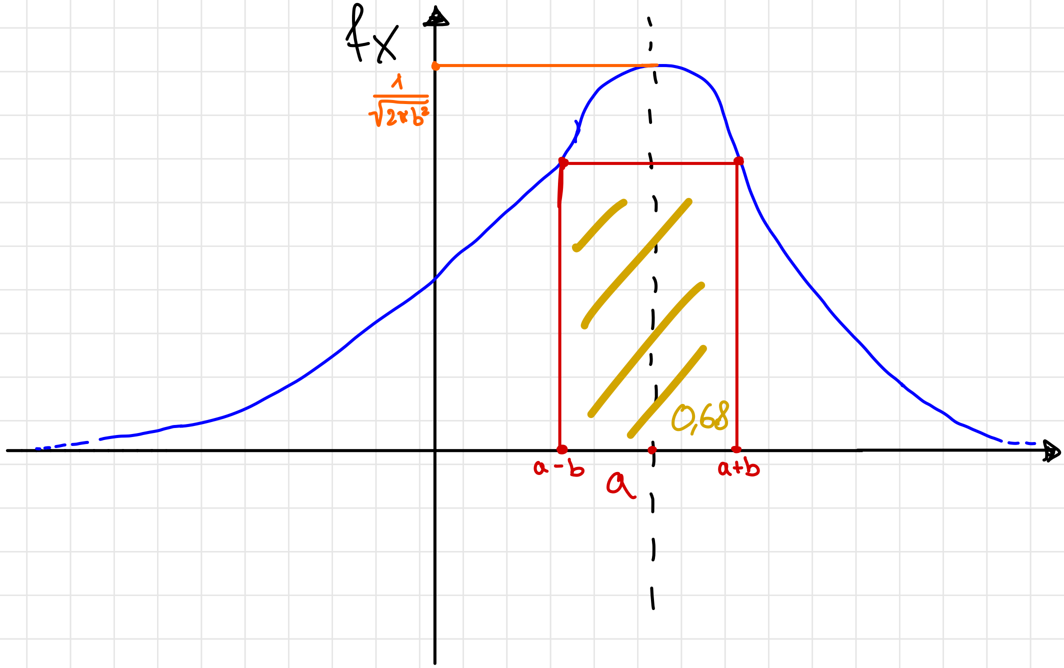
$\boxed{x=a \text{ è punto di massimo}}$

$$f''_X(x,a,b) = 0 \iff f'_X(x,a,b)(x-a) + f_X(x,a,b) = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{1}{b} f_X(x,a,b)(x-a)^2 + f_X(x,a,b) = 0$$

$$\iff f_X(x,a,b) \cdot \left[1 - \frac{1}{b}(x-a)^2\right] = 0$$

$$1 = \frac{(x-a)^2}{b} \iff (x-a)^2 = b \iff x = a \pm b$$



LEZIONE 20 - 02/05/2022

ESERCIZI

5.5.1

$X \sim N(3, 16)$

a) $\mathbb{P}(X < 11)$

b) $\mathbb{P}(X > -1)$

c) $\mathbb{P}(2 < X \leq 7)$

Dobbiamo ricondurre a $Z \sim N(0,1)$

Infatti

$-x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 16}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 16}}$

$-x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy =: \mathbb{P}(X \leq x)$

OPERAZIONE DI STANDARDIZZAZIONE

$Y = \frac{x-3}{4} \sim Z$

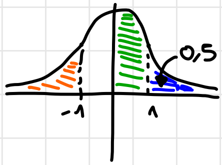
è la $\sqrt{16}$

a) $\mathbb{P}(X<11) = \mathbb{P}(X-3 < 11-3) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{4} < \frac{11-3}{4}\right) = \mathbb{P}(Y<2) =$

$= 0,9772$

$\frac{-1-3}{4} = \frac{-\cancel{4}}{\cancel{4}} = -1$

b) $\mathbb{P}(X>-1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -1) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq -1) =$



$= 1 - [0,5 - \mathbb{P}(0<Y<1)] = 0,5 + \mathbb{P}(0<Y<1) \simeq 0,84$

c) $\mathbb{P}(2<X<7) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{4} < Y < 1\right) = F_Z(1) - F_Z\left(-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{7-3}{4} = 1$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{4} < Y \leq 0\right) + \mathbb{P}(0<Y<1) =$

$\simeq 0,0987 + 0,34$

5.5.3

La potenza W dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale ai suoi capi, ovvero:

$$W = rV^2$$

costante $r=3$ — differenza di potenziale

Si supponga $V \sim N(6,1)$

b) $\mathbb{P}(W>120) = \mathbb{P}(3V^2 > 120) = \mathbb{P}(V^2 > 40) = \mathbb{P}(V > \sqrt{40}) =$

$Y = V-6$ $\qquad = \mathbb{P}(Y > \sqrt{40}-6) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq \sqrt{40}-6) =$

$= \mathbb{P}(Y \leq 0,3246) \simeq 0,3727$

a) $\mathbb{E}(W) = \overbrace{3 \cdot \mathbb{E}(V^2)}^{\text{watt}} = 3 \cdot 37 = 111$ watt

sappiamo che $\mathbb{E}(V) = 6$, $\mathbb{D}^2(V) = 1$

$$\mathbb{D}^2(V) = \mathbb{E}(V^2) - E^2(V)$$

$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{D}^2(V) + E^2(V) = 1 + 6^2 = 1+6 = 37$$

$$Z \sim N(0,1) \qquad F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$Y = Z^2$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_Z(\sqrt{y}) - \frac{1}{2}, & y > 0 \end{cases}$$

$y > 0$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Z^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) = 2\mathbb{P}(0 \leq Z \leq \sqrt{y}) =$$
$$= F_Z(\sqrt{y}) - \frac{1}{2}$$

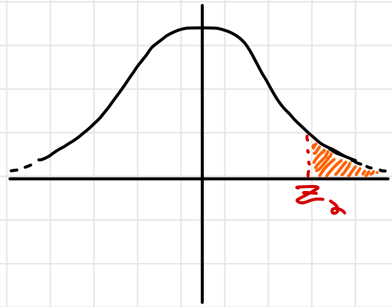
$$F_Y(y) = F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = f_Z(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_Z(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} f_Z(\sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

$Z \sim N(0,1)$

$x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$



$\alpha \in (0,1)$

z_α è il quantile superiore di Z con ordine α

significa che la prob. di Z sia $\geq$ di z_α è α

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

Si sceglie l'α ed è interessante sapere qual è il numero oltre il quale non devo andare perché altrimenti vado a finire in una zona a bassa probabilità

LEZIONE INTERROTTA

LEZIONE 21 - 03/05/2022

QUANTILE SUPERIORE

$\alpha \in (0,1)$ $\quad Z_\alpha$ è il quantile superiore della normale standard se accade che:

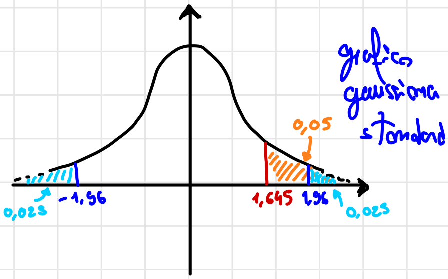
$$\mathbb{P}(Z \geq Z_\alpha) = \alpha$$

In particolare abbiamo visto che:

- $\alpha = 0{,}05$ e dalle tavole della distribuzione Gaussiana $Z_\alpha \simeq 1{,}645$

$\alpha = 0{,}025$ con $Z_\alpha \simeq 1{,}96$

$\alpha = 0{,}01$



Tratteremo il seguente problema

$X \sim N(a, b^2)$, di solito non sappiamo a e b^2, allora raccogliamo i dati e attraverso i dati proviamo una certa ipotesi.

ESEMPIO 4.3.1

Abbiamo 12 batterie

Nuove	Usate	Difettose	
3	4	5	: 12

si estraggono in blocco 3 batterie

X : numero di batterie nuove

Y : numero di batterie usate

$$p_{0,0} = P(X=0, Y=0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$\binom{5}{3}$: 5 → il numero di batterie difettose; 3 → n# batterie prese

$\binom{12}{3}$: 12 → n# batterie in totale; 3 → n# batterie prese

$$p_{1,0} = P(X=1, Y=0) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}$$

→ 1 + 2 = 3

$$p_{2,0} = P(X=2, Y=0) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$$

Si può costruire una tabella:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	$p_{0,0}$	$p_{0,1}$	$p_{0,2}$	$p_{0,3}$	$p_{0,\cdot}$
1	$p_{1,0}$	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	0	$p_{1,\cdot}$
2	$p_{2,0}$	$p_{2,1}$	0	0	$p_{2,\cdot}$
3	$p_{3,0}$	0	0	0	$p_{3,\cdot}$
	$p_{\cdot,0}$	$p_{\cdot,1}$	$p_{\cdot,2}$	$p_{\cdot,3}$	$\boxed{1}$

$$S_{X,Y} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

X \ Y	0	1	2	3	
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$10+40+30+4=\frac{84}{220}+$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$30+60+18=\frac{108}{220}+$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}+$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}=$
	$10+30+15+1 = \frac{56}{220}+$	$\frac{112}{220}+$	$\frac{48}{220}+$	$\frac{4}{220}=$	$\boxed{\frac{220}{220}}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cap \Omega) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X=0\} \cap \{Y=0\} \cup \{Y=1\} \cup \{Y=2\} \cup \{Y=3\}) =$$

$$= \mathbb{P}(\{X=0\} \cap \{Y=0\} \cup \{X=0\} \cap \{Y=1\} \cup \{X=0\} \cap \{Y=2\} \cup$$
$$\cup \{X=0\} \cap \{Y=3\}) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) +$$
$$+ \mathbb{P}(X=0, Y=2) + \mathbb{P}(X=0, Y=3)$$

ESEMPIO

All'interno di una certa popolazione, l'15% delle coppie non ha figli,
20% ne ha 1, 35% ne ha 2 e 30% ne ha 3.

Si estrae una famiglia a caso

Y: numero dei figli maschi

X: numero delle figlie femmina

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0,15$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(1 \text{ figlio}, F) = \mathbb{P}(1 \text{ figlio}) \cdot \mathbb{P}(F \mid 1 \text{ figlio})$$
$$= 0,20 \cdot 0,5 = 0,10$$

$$\mathbb{P}(X=2, Y=0) = \mathbb{P}(2 \text{ figli}, F\cap F) = \mathbb{P}(2 \text{ figli}) \cdot \mathbb{P}(F\cap F | 2 \text{ figli}) =$$
$$= 0,35 \cdot \mathbb{P}(F\cap F | 2 \text{ figli})$$

X \ Y	0	1	2	3	
0	0,15	0,10	0,0875	0,0375	0,3750
1	0,10	0,1750	0,1125	0	0,3875
2	0,0875	0,1125	0	0	0,2000
3	0,0375	0	0	0	0,0375
	0,3750	0,3875	0,2000	0,0375	$\boxed{1}$

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROB. CONGIUNTA

Def: Due numeri aleatori X e Y sono congiuntamente continui se esiste una funzione non negativa $f_{X,Y}(x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ tale che:
se prendo $B \in \mathcal{B}^2$, $\mathbb{P}[(X,Y) \in B] = \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

questa coppia $X,Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\omega \rightsquigarrow (X(\omega), Y(\omega))$$

$$(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\mathcal{F}\text{-misurabile}} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \mathbb{P}_{X,Y})$$

$B \in \mathcal{B}$ $\quad \mathbb{P}_{X,Y}(B) = \mathbb{P}[(X,Y) \in B]$

$B =]-\infty, x] \times]-\infty, y]$ $\quad F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) =$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\, dy}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x)\, \cancel{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, \cancel{dx}\, dy$$

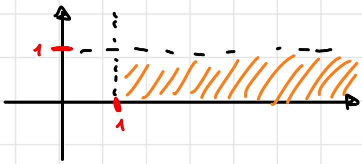
$$y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

ESEMPIO 4.3.3

X, Y sono congiuntamente distribuite continue

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} \cdot e^{-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X>1, Y<1)$$



$$= \int_0^1 dy \int_1^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y}\, dx =$$

$$= 2 \int_0^1 e^{-2y}\, dy \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2\int_0^1 e^{-2y}\, dy \cdot \left[e^{-x} \Big|_{+\infty}^{1} \right] =$$

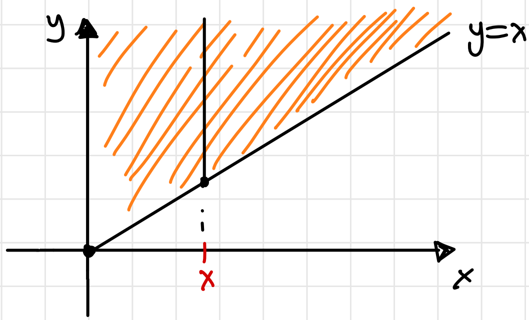
$$= 2e^{-1} \cdot \int_0^1 e^{-2y}\, dy = \cancel{2} e^{-1} \cdot \left[\frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-2y} \Big|_1^0 \right] = e^{-1} \cdot (1 - e^{-2})$$

$\mathbb{P}(X<a)$

$$= \int_0^a \int_0^{+\infty} 2e^{-x} e^{-2y}\, dx\, dy = 2 \int_0^a e^{-x}\, dx \int_0^{+\infty} e^{-2y}\, dy = 1 - e^{-a}$$

$$\| \qquad F_X(a)$$

$\mathbb{P}(X<Y)$



$$\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} 2 \cdot e^{-x} \cdot e^{-2y}\, dx\, dy$$

Ritornando al caso discreto

1/4	1/4	1/2
1/4	1/4	1/2
1/2	1/2	$\boxed{1}$

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1/4$

$\mathbb{P}(X=0) = 1/2$

$\mathbb{P}(Y=0) = 1/2$

questi eventi sono indipendenti

$$
\begin{array}{ccccc|c}
p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \cdots & p_{1,m} & p_{1,\bullet} \\
p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \cdots & p_{2,m} & p_{2,\bullet} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
p_{m,1} & p_{m,2} & p_{m,3} & \cdots & p_{m,m} & p_{m,\bullet} \\
\hline
p_{\bullet,1} & p_{\bullet,2} & p_{\bullet,3} & \cdots & p_{\bullet,m} &
\end{array}
$$

Per essere indipendenti deve valere:

$i = 1 \dots m$

$j = 1 \dots m \quad p_{i,j} = p_{i,\bullet} \cdot p_{\bullet,j}$

quindi il congiunto si ottiene dal marginale.

Quindi:

Il marginale si ottiene sempre dal congiunto, non vale sempre il viceversa

LEZIONE 22 - 06/05/2022

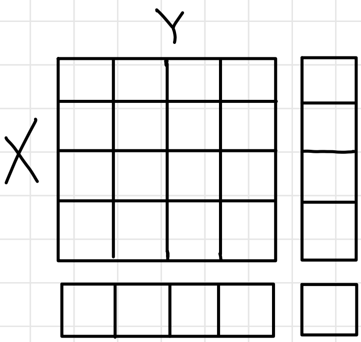
RIEPILOGO

Distribuzione (o legge) CONGIUNTA

Discreto:

$(x,y) \in S_{(X,Y)} \qquad p_{(X,Y)}(x,y) > 0$

$$\sum_{(x,y) \in S_{(X,Y)}} p_{(X,Y)}(x,y) = 1$$



$(x,y) \in S_{(X,Y)}$

$$p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

X e Y sono indipendenti

Continuo

$(x,y) \in \mathbb{R}, \quad f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$

$$B \in \mathcal{B}, \quad \int_B f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix}, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(s,t)\, ds\, dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_X(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

ESEMPIO 4.3.3

$\boxed{e^{-x} \quad 2e^{-2y}}$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} \cdot e^{-2y}, & \text{se } x>0 \text{ e } y>0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X \sim Esp(1) \ , Y \sim Esp(2)$$

X è il numero di Femmine

Y è il numero di Maschi

X \ Y	0	1	2	3	
0	0,1500	0,1000	0,0875	0,0375	0,3750
1	0,1000	0,1750	0,1125	0	0,3875
2	0,0875	0,1125	0	0	0,2000
3	0,0375	0	0	0	0,0375
	0,3750	0,3875	0,2000	0,0375	

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1) = \frac{\mathbb{P}(Y=0, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{0,1000}{0,3875} = 0,2581$$

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1) = \frac{0,1750}{0,3875} = 0,4516$$

$$\mathbb{P}(Y=2 \mid X=1) = \frac{0,1125}{0,3875} = 0,2903$$

$$\mathbb{P}(Y=3 \mid X=1) = \frac{0}{0{,}3875} = 0$$

$p_{(X,Y)}(0,0) = 0{,}4$ $\qquad$ $p_{(X,Y)}(0,1) = 0{,}2$

$p_{(X,Y)}(1,0) = 0{,}1$ $\qquad$ $p_{(X,Y)}(1,1) = 0{,}3$

$$\begin{array}{cc|cc|c} & & \multicolumn{2}{c|}{Y} & \\ & & 0 & 1 & \\ \hline X & 0 & \boxed{0{,}4} & \boxed{0{,}2} & 0{,}6 \\ & 1 & \boxed{0{,}1} & \boxed{0{,}3} & 0{,}4 \\ \hline & & 0{,}5 & 0{,}5 & \end{array}$$

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=0, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

$$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA

$$f_{X,Y}(x,y)$$

$B \in \mathcal{B} \in \mathcal{B}^2$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X,Y \in B) = \int_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$x \in \mathbb{R},\ (x, y_0)$

$y \in \mathbb{R},\ (x_0, y)$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y) > 0} \; ; \qquad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x) > 0}$$

ESEMPIO

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5} x(2-x-y), & 0<x<1 \text{ e } 0<y<1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$y_0 \in (0,1)$

$$f_{X|Y}(x,y_0) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{\frac{12}{\cancel{5}} \cdot x \cdot (2-x-y_0)}{\frac{8}{\cancel{5}} - \frac{6}{\cancel{5}} y_0} = \frac{6x(2-x-y_0)}{4-3y_0}$$

$X | \{Y = y_0\}$

poichè diversamente è 0

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^1 2{,}4 \cdot x(2-x-y)\, dx = 2{,}4 \cdot \left[\int_0^1 2x\, dx - \int_0^1 x^2 dx - y \cdot \int_0^1 x\, dx\right] =$$

$$= 2{,}4 \cdot \left[x^2 \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - y \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] = 2{,}4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{y}{2}\right) =$$

$$= \frac{12}{5} - \frac{2}{3} - \frac{12}{10} y = \frac{8}{5} - \frac{6}{5} y$$

VALORE ATTESO

Discreto

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i \cdot p_X(x_i) = \sum_{x_i \in S_X} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

sempre che esiste finita $\mathbb{E}(|X|)$

$$= \sum_{x_i \in S_X} |x_i| \cdot \mathbb{P}(X = x_i) < +\infty$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

Continuo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) \, dx$$

sempre se $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{\mathbb{R}} |x| \cdot f_X(x) \, dx$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, f_X(x) \, dx$$

ESEMPIO

$$X \sim U(0, 1.5)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1,5}, & 0 < x < 1,5 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{1,5} x \cdot \frac{1}{1,5} \, dx = \frac{1}{1,5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1,5} = \frac{2.25}{3} = 0,75$$

Discreto

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

DIM: CASO CONTINUO

$g(x) = ax + b$

X ammette la media $\Longrightarrow g(X)$ ammette la media

$$\mathbb{E}(aX+b) = \int_{\mathbb{R}} (ax+b)\, f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left[ax \cdot f_X(x) + b \cdot f_X(x)\right] dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} ax \cdot f_X(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} b\, f_X(x)\, dx =$$

$$= a \cdot \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\, dx + b \cdot \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx =$$

$$= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(1) = a\mathbb{E}(X) + b$$

(X, Y) congiunta $\quad f_{(X,Y)}(x,y)$ funzione di densità di probabilità congiunta

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

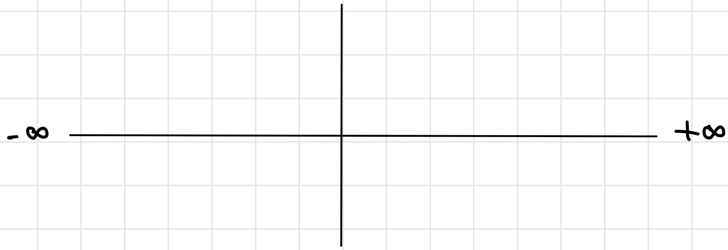
$$(x,y) \rightsquigarrow g(x,y)$$

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy$$

Invece, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \rightsquigarrow x+y$$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \int_{\mathbb{R}} (x+y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \right] dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

ESEMPIO

	X_1	X_2	X_3
	10000	20000	40000
con prob:	0,2	0,8	0,3
	0	0	0
	0,8	0,2	0,7

numeri aleatori

$$\mathbb{E}(X_1+X_2+X_3) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)$$

$$= (10000 \cdot 0,2) + (20000 \cdot 0,8) + (40000 \cdot 0,3)$$

$$= 2000 + 16000 + 12000 = 30000$$

LEZIONE 23 - 09/05/2022

Media di una somma di numeri aleatori

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{N}(\mathbb{E}(X_i))$$

ESEMPIO 4.5.6

X: numero delle lettere nella busta corretta

$\mathbb{E}(X) = ?$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$B(1,p_i) \sim X_i = \begin{cases} 1, & \text{se nella busta "i" c'è la lettera corrispondente} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$;

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i = 1) = *$$

$$p_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{N}$$

$$* = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} 1 = \frac{\cancel{N}}{\cancel{N}} = 1$$

ESEMPI

A: almeno un 6 in quattro lanci di un dado onesto

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 > 1/2$$

B: almeno un doppio 6 in 24 lanci del doppio dado onesto

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} < 1/2 \simeq 0{,}49$$

ESEMPIO 4.5.7

In un prodotto commerciale di un'azienda sono stati messi a disposizione dei lemoni sconto. Ci sono 20 tipi diversi di lemoni sconto di cui 1 viene inserito ad ogni confezione di biscotti

Se si aprono 10 confezioni, quant'è il valore atteso $\underbrace{\text{del numero dei lemoni differenti che si trovano}}_{X}$

$i = 1, 2, \ldots, 20$

$$X_i : \begin{cases} 1, & \text{se il lemone di tipo "}i\text{" è presente tra le 10 confezioni aperte} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{20} X_i \Rightarrow \mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right)=\sum_{i=1}^{20}\left(\mathbb{P}(X_i=1)\right)=*$$

$$\mathbb{P}(X_i=1)=1-\mathbb{P}(X_i=0)=1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$$

$$*=20\cdot\left[1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right]$$

OSSERVAZIONE 4.5.1

La media è il MIGLIOR predittore di X rispetto all'errore quadratico medio

$$\mathbb{E}\left\{\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2\right\}=\min_{c\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right]\right)$$

$$\mathbb{E}(X)=\operatorname{argmin}_{c\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right]\right)$$

DIM

$$(X-c)^2=\left[X-\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)-c\right]^2=$$

$$=\left\{\left[X-\mathbb{E}(X)\right]+\left[\mathbb{E}(X)-c\right]\right\}^2=$$

$$=\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2+\left[\mathbb{E}(X)-c\right]+2\left[X-\mathbb{E}(X)\right]\left[\mathbb{E}(X)-c\right]$$

$$\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right]=\mathbb{E}\left\{\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2\right\}+\left[\mathbb{E}(X)-c\right]^2\cancel{-2\mathbb{E}\left[X-\mathbb{E}(X)\right]\left[\mathbb{E}(X)-c\right]}^{0}=$$

$$=\mathbb{D}^2(X)+\left[\mathbb{E}(X)-c\right]^2\geq\mathbb{D}^2(X)$$

$$c=\mathbb{E}(X)\quad \mathbb{D}^2(X)$$

$\blacksquare$

$$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$$

SCARTO ASSOLUTO MEDIO

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{\arg\min}\left(\mathbb{E}\left(|X-c|^2\right)\right) = \mathbb{E}(X)$$

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{\arg\min}\left(\mathbb{E}\left(\underbrace{|X-c|}_{\text{val. assoluto}}\right)\right) = M_e \quad \Big| \text{ mediana}$$

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{\arg\min}\left(\mathbb{E}\left(|X-c|^0\right)\right) = M_o \quad \Big| \text{ moda}$$

In questo contesto, si dice che:

- La media è il centro di ordine 2
- La mediana è il centro di ordine 1
- La moda è il centro di ordine 0

$W = 0$ con probabilità $1 \implies \mathbb{E}(W) = 0,\ \mathbb{D}^2(W) = 0$

$$Y = \begin{cases} -1, & \text{con prob. } 1/2 \\ 1, & \text{con prob } 1/2 \end{cases} \implies \mathbb{E}(Y) = 0,\ \mathbb{D}^2(Y) = 1$$

$$Z = \begin{cases} -100, & \text{con prob } 1/2 \\ 100, & \text{con prob. } 1/2 \end{cases} \implies \mathbb{E}(Z) = 0,\ \mathbb{D}^2(Z) = 10000$$

RICORDA: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left\{[X - \mathbb{E}(X)]^2\right\}$

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

ESEMPIO 4.6.1

$$X = Z_1 \sim U_d(1,2,3,4,5,6)$$

uniforme discreto significa che la prob è uguale a $\frac{1}{n}$ dove n è il numero degli oggetti

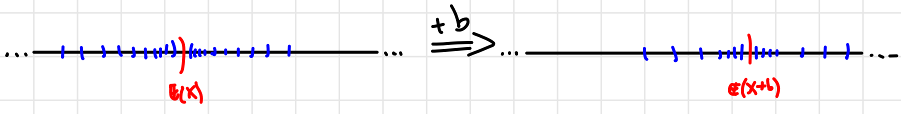
$$\mathbb{E}(Z_1) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{91}{6}$$

$$\mathbb{D}^2(Z_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \simeq 3$$

$$\left[\underbrace{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{35}{12}}}_{\simeq 1,8}, \underbrace{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{35}{12}}}_{\simeq 5,2}\right] \simeq [2,5]$$

$$\mathbb{D}^2(aX+b) = \mathbb{D}^2(aX) = a^2 \cdot \mathbb{D}^2(X)$$



$\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$ è la deviazione standard

PARAGRAFO 4.7

La varianza //TO DO ON THE BOOK

X, Y definiti congiuntamente

S_m, W_1 $\qquad \mu_X = \mathbb{E}(X)$, $\mu_Y = \mathbb{E}(Y)$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)\cdot(Y - \mu_Y)] = *$$

$$(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y$$

$$* = \mathbb{E}(XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y) =$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mu_Y \mu_X - \cancel{\mu_X \mu_Y} + \cancel{\mu_X \mu_Y} =$$

$$= \mathbb{E}(X,Y) - \mu_X \mu_Y$$

$$Cov(X,X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu_X^2 = D^2(X)$$

FORMULA

Supponiamo che:

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i \quad , \quad Y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j$$

$$Cov(X,Y) = Cov\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i , \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i \beta_j \cdot Cov(X_i, Y_j)$$

Caso particolare:

$Y = X$, $\quad i = 1, 2, \dots, m \quad a_i = 1$

$$Y = X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathbb{D}^2(X) = Cov(X,X) = Cov\left(\sum_{j=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) =$$

$$\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

perché $Cov(V,W) = \mathbb{E}(V \cdot W) - \mathbb{E}(V)\mathbb{E}(W) =$
$= \mathbb{E}(W \cdot V) - \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(V) = Cov(W,V)$

quindi, ad es: $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2) = \mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$

LEZIONE 24 - 10/05/2022

RIEPILOGO

X, Y congiuntamente distribuite

$\exists f_{X,Y}(x,y)$, $\exists P_{(X,Y)}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$$Cov(X,Y) := \mathbb{E}[(X - \mu_X)\cdot(Y - \mu_Y)]$$

ha la proprietà di Bilinearità:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad , \quad Y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j$$

$$Cov(X,Y) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \beta_j Cov(X_i, Y_j)$$

Caso particolare: $X = Y$ e $\alpha_i = 1$, $\beta_j = 1$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = D^2(X) = Cov(X, X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, X_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, X_j)}_{\text{se non sono correlati } = 0}$$

Due numeri aleatori U e V sono **NON CORRELATI** se e solo se:

$$Cov(U, V) = 0 \iff E(U \cdot V) = E(U) E(V)$$

TEOREMA 4.7.3

Due numeri U e V indipendenti sono non correlati

DIM: (discreto)

$$E(U \cdot V) = \sum_i \sum_j u_i v_j P(U = u_i, V = v_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j \underbrace{u_i \, P(U = u_i)}_{\text{dipende da } i} \; \underbrace{v_j \, P(V = v_j)}_{\text{dipende da } j} =$$

$$= \sum_i u_i P(U = u_i) \cdot \sum_j v_j P(V = v_j) =$$

$$= E(U) \cdot E(V)$$

$\blacksquare$

DIM: (continua)

$$\mathbb{E}(U\cdot V)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv\, f_{(U,V)}(u,v)\,du\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv\, f_U(u)\cdot f_V(v)\,du\,dv=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} u\, f_U(u)\,du\cdot\int_{-\infty}^{\infty} v\, f_V(v)\,dv=\mathbb{E}(U)\cdot\mathbb{E}(V)$$

ESEMPIO 4.7.1

Si calcola la varianza della somma del punteggio nel lancio di 10 dadi onesti

$i=1,\dots,10$

$Z_{1,i}\sim Z_1$

$$S=Z_{1,1}+Z_{1,2}+\dots+Z_{1,10}$$

$$D^2(S)=D^2\left(\sum_{i=1}^{10}Z_{1,i}\right)=\sum_{i=1}^{10}D^2(Z_{1,i})\overset{Z_1\sim Z_{1,i}}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{10}D^2(Z_1)=D^2(Z_1)\cdot\sum_{i=1}^{10}1=10\cdot D^2(Z_1)=$$

$$=\cancel{10}^{\,5}\cdot\frac{35}{\cancel{12}_{\,6}}=\frac{175}{6}$$

ESEMPIO 4.7.2

Si determini la varianza del numero di "teste" nel lancio di 10 monete

$$S_{10} = X_{1,1} + X_{1,2} + \dots + X_{1,10}$$

$X_1 \sim X_{1,i}$

$$\mathbb{D}^2(S_{10}) = \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{10} X_{1,i}\right) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{D}^2(X_{1,i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \mathbb{D}^2(X_1) = 10 \cdot p \cdot (1-p)$$

nel caso di monete oneste è uguale $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$A, B \in \mathcal{F}$

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad 1_B = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$1_A \cdot 1_B = \begin{cases} 1, & \omega \in A \cap B \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$1_A : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{P}(A) & 1-\mathbb{P}(A) \end{pmatrix} \qquad 1_B : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{P}(B) & 1-\mathbb{P}(B) \end{pmatrix}$$

$$1_A 1_B : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{P}(A \cap B) & 1-\mathbb{P}(A \cap B) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(1_A, 1_B) = \mathbb{E}(1_A \cdot 1_B) - \mathbb{E}(1_A) \cdot \mathbb{E}(1_B) =$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) =$$
$$= \mathbb{P}(1_A \cdot 1_B = 1) - \mathbb{P}(1_A = 1)\mathbb{P}(1_B = 1) =$$
$$= \mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1) - \mathbb{P}(1_A = 1)\mathbb{P}(1_B = 1)$$

$$\mathrm{Cov}(1_A, 1_B) > 0 \iff \mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1) > \mathbb{P}(1_A = 1)\mathbb{P}(1_B = 1)$$
$$\iff \frac{\mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1)}{\mathbb{P}(1_B = 1)} > \mathbb{P}(1_A = 1)$$
$$\iff \mathbb{P}(1_A = 1 \mid 1_B = 1) > \mathbb{P}(1_A = 1)$$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

X, $t_0 > 0$

$|t| < t_0 \quad \Phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$

In generale:

$m \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{E}(X^m) = \left.\dfrac{d^m \Phi_X(t)}{dt^m}\right|_{t=0}$

cosa succede quando $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t)$

PROPOSIZIONE 4.8.1

IPOTESI: X, Y indipendenti

TESI: $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$

DIM:

X, Y indipendenti $\Rightarrow e^{tX}$ e e^{tY} indipendenti

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[e^{t(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left(e^{tX} e^{tY}\right) = \mathbb{E}(e^{tX}) \cdot \mathbb{E}(e^{tY}) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t) \quad \blacksquare$$

---

distribuzione Markov
→ distribuzione Cebicev
→ LDGN

MARKOV

IPOTESI: $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, $\exists\, \mathbb{E}(X)$ finita

TESI: $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

DIM: (continua)

$$0 < \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \underbrace{\int_0^a x\, f_X(x)\, dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx}_{\geq 0}$$

quindi

$$\mathbb{E}(X) \geq \int_a^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \geq \int_a^{+\infty} a\, f_X(x)\, dx = a \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx =$$

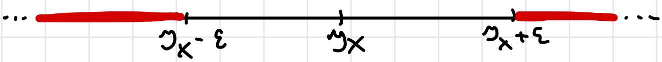
$$= a\,\mathbb{P}(X \geq a)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq a\,\mathbb{P}(X \geq a) \Rightarrow \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \geq \mathbb{P}(X \geq a) \quad \blacksquare$$

CEBICEV

IPOTESI: $\mathbb{E}(X^2) < +\infty \Rightarrow \exists\, y_X ,\ \sigma_X^2 = \mathbb{D}^2(X)$

TESI: $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - y_X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{D}^2(X)}{\varepsilon^2}$



DIM:

$$\mathbb{P}(|X - y_X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}[(X - y_X)^2 \geq \varepsilon^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - y_X)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Sia $X \sim Esp(\lambda)$

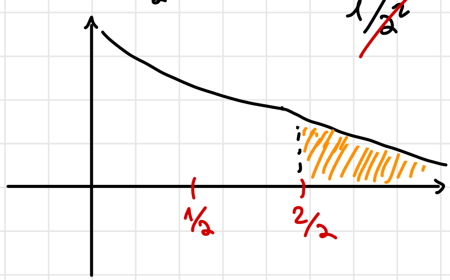
e $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, $\mathbb{D}^2(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Cebicev dice che:

$$\varepsilon = 1/\lambda = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = \sigma$$

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1/\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1/\cancel{\lambda^2}}{1/\cancel{\lambda^2}} = 1$$



$$\int_{2/\lambda}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|>\frac{2}{2}\right)\leq \frac{1/2^2}{4/2^2}=1/4$$

quindi:

$$\mathbb{P}(|X-y_X|>k\sigma)\leq \frac{\cancel{\sigma^2}}{k^2\cancel{\sigma^2}}=\frac{1}{k^2}$$

LEZIONE 25 - 13/05/2022

Markov

Hp: $\mathbb{P}(X>0)=1$

X è q.c. positivo

ESEMPIO:

$$\left(\{C,T\}^{\infty},\ \mathcal{F}=\sigma\left((T_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \mathbb{P} \text{ estende } \mathbb{P}(T_n)=p \quad n\in\mathbb{N}\right)\right)$$

$p\in(0,1)$

$$\mathbb{P}(T_1,T_2,\dots,T_n,\Omega)=\mathbb{P}(T_1)\cdot\mathbb{P}(T_2)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(T_n)\cdot\mathbb{P}(\Omega)=$$

$$=p^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_1\cap T_2\cap\ldots\cap T_n\cap\Omega)=\lim_{n\to\infty}p^n=0$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}T_1\cap T_2\cap\dots\cap T_n\cap\Omega)$$

Th: $a>0$, $\mathbb{P}(X>a)\leq\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

ESEMPIO 4.9.1

X: numero dei pezzi prodotti dalla fabbrica

$$\mathbb{E}(X) = 50$$

Cosa si può dire sulla probabilità //TODO 45 min

$$\mathbb{P}\{X > 75\}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

CEBICEV

Hp: $\mathbb{E}(X^2) < +\infty \implies \exists\, \mathbb{E}(X)$ finita e $\mathbb{D}^2(X) < +\infty$

Th: $$\mathbb{P}(|X - \mu_X| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left[(X - \mu_X)^2 \geq \varepsilon^2\right] \leq \underbrace{\frac{\mathbb{E}\left[(X - \mu_X)^2\right]}{\varepsilon^2}}_{= \frac{\mathbb{D}^2(X)}{\varepsilon^2}}$$

Applichiamo Cebicev all'ESEMPIO 4.9.1

$$\mathbb{D}^2(X) = 25$$

$$\mathbb{P}(40 \leq X \leq 60) = \mathbb{P}(|X - 50| \leq 10) =$$

$$= \underbrace{1 - \mathbb{P}(|X-50| \geq 10)}_{} = 1 - \frac{25}{100} = 0.75$$

1-P perché Cebicev vale ≥, ma era ≤ in precedenza, il complemento

---

LDGN

La "legge debole dei grandi numeri" è un risultato di convergenza

$$X_n \xrightarrow{prob} X$$

$$x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Essa dice:

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri aleatori indipendenti e identica distribuzione

$$\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty \; (\Longrightarrow \mathbb{D}^2(X_1) < +\infty), \; \exists \text{ finita } \mathbb{E}(X_1) = \mu$$

mu

$$= \mathbb{E}(X_2)$$
$$= \mathbb{E}(X_3)$$

poiché hanno identica distribuzione

$$= \mathbb{D}^2(X_2)$$
$$= \mathbb{D}^3(X_3) = \sigma^2$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \frac{S_n}{n}$$

Th: $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{converge in prob.}} \mu$

DIM:

$n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mu$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}(S_n) = \frac{\cancel{n}\mu}{\cancel{n}} = \mu$$

visto che son indipendenti

$$\mathbb{D}^2(S_n) = \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{D}^2(X_i)\right] =$$

$$= n\sigma^2$$

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \mathbb{D}^2(S_n) = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\varepsilon > 0$, $\quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2/\varepsilon^2}{n} = 0$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{pb.}} \mu$$

$\blacksquare$

TEOREMA DI BERNOULLI

$n \in \mathbb{N}, \quad X_n \sim B(1, p), \; X_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$

$E(X_n) = p, \; D^2(X_n) = pq \qquad p + 0 = p$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

indipendenti identica distribuzione

frequenza relativa dello T nei primi n lanci

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{prob.}} p$$

Caratteristiche di pochi numeri

LEZIONE 26 - 16/05/2022

STATISTICA

STATISTICA DESCRITTIVA

Si intende un insieme di tecniche //TO DO

Esse descrivono, rappresentano e sintetizzano un insieme di dati relativi ad una o più caratteristiche di una popolazione di interesse.

Per popolazione (o collettivo statistico) si intende la totalità dei casi, ovvero dei membri (unità statistiche) sui quali è possibile rilevare uno o più caratteri che rivestono particolare importanza per il fenomeno sotto studio.

Ogni carattere indica un numero aleatorio

Si può pensare ad una popolazione come ad un insieme. La cardinalità della popolazione è detta taglia, una m designata con N.

Un "carattere" viene designato con una lettera latina maiuscola, ad esempio X

I valori rilevati vengono designati con la stessa lettera ma in minuscolo.

La sequenza

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

rappresenta le rilevanze date

MEDIA ANALITICA

1) $\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)$

vogliamo sostituire a y_i, $i = 1, \dots, N$ lo stesso numero reale y

2) Bisogna assegnare un criterio (circostanza) C ossia una funzione di N variabili

$$\underline{y}^* = (y, y, \dots, y)$$

in maniera tale da avere: $C(\underline{y}) = C(\underline{y}^*)$

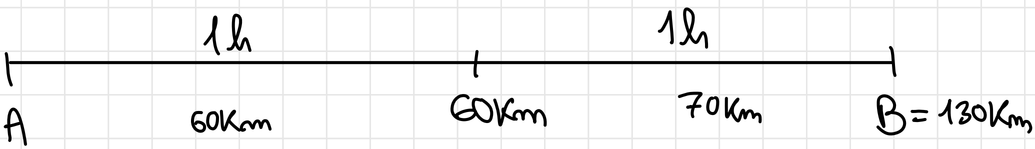
a) MEDIA ARITMETICA

$$C(\underline{y}) = C(y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} y \iff \sum_{i=1}^{N} y_i = Ny$$

$$\iff y = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i$$

ESEMPIO:



$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = s \cdot \frac{1}{v}$$

b) MEDIA ARMONICA (carattere non nullo)

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}$$

$$\underline{y} = (y, y, \dots, y)$$

$$y \neq 0$$

$$C(\underline{y}) = C(y^*) = C(y, y, \dots, y)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y} \iff \frac{N}{y} = \sum_{i=1}^{N} y_i^{-1} \iff$$

$$\iff y = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i^{-1} \right)$$

c) MEDIA GEOMETRICA (carattere positivo)

$$C(\underline{y}) = C(y_1, \dots, y_N) = \prod_{i=1}^{N} y_i$$

$$\underline{y} = (y, y, \dots, y)$$

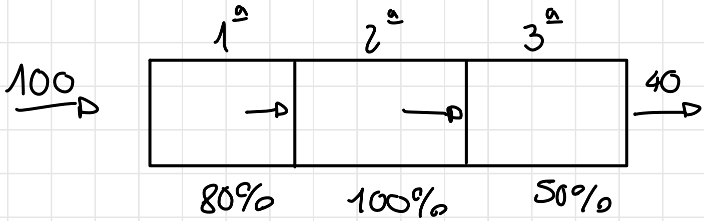
$$y > 0$$

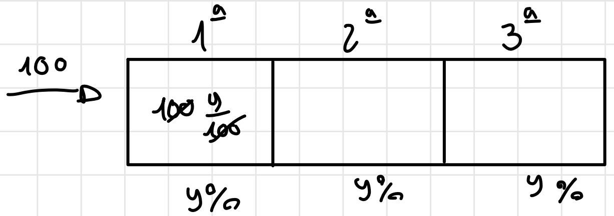
$$C(\underline{y}) = C(y^*) = C(y, y, \dots, y)$$

$$\prod_{i=1}^{N} y_i = y^N$$

$$y = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} y_i}$$

ESEMPIO





$$80 \cdot 100 \cdot 50 = y \cdot y \cdot y$$

$$y = \sqrt[3]{80 \cdot 100 \cdot 50}$$

$$= \sqrt[3]{8 \cdot 10^{3} \cdot 50} = 10\sqrt[3]{400} \simeq 73\%$$

d) MEDIA QUADRATICA

$$C(y) = \sum_{i=1}^{N} y_i^{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^{2} = \sum_{i=1}^{N} y$$

$$y^{2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i^{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i^{2}}$$

1) $\underline{y}$

2) $C(\underline{y})$

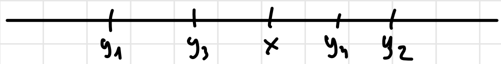
3) $C(\underline{y}) = C(y^*)$

y "sintetizza" $\underline{y}$

CENTRI

1) $\underline{y}$

2) $x \in \mathbb{R}$ $\quad f^{(r)}(x) = d_r(x, \underline{y})$ distanza $\quad$ con $r > 0$



$$f^{(r)}(x) = d_r(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N} |x - y_i|^0, & \text{con } r = 0 \\ \left(\sum_{i=0}^{N} |x - y_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, & \text{con } r > 0 \end{cases}$$

XSI

3) $\xi_r := \underset{x \in \mathbb{R}}{\arg\min}\, f_r(x)$

Centro di ordine r

$r = 2$

$$\xi_2 = \bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i$$

DIM:

$$f_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x - y_i)^2}$$

La radice quadrata è una funzione crescente

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, f_2(x) = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum (x - y_i)^2$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{N} (x - y_i)^2$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{N} 2(x - y_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (x - y_i)$$

$$f''(x) = 2 \sum_{i=1}^{N} 1 = 2N > 0$$

$$f'(x) = 0 \iff \cancel{\frac{2}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x - y_i) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{N} x - \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} x = \sum_{i=1}^{N} y_i \iff$$

$$\iff Nx = \sum_{i=1}^{N} y_i \iff x = \bar{y}$$

$f''(\bar{y}) = 2N > 0 \Rightarrow \bar{y}$ è punto di minimo relativo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

quindi l'unica possibilità è $\Longrightarrow$

$\bar{y}$ è punto di massimo assoluto

La media aritmetica è il centro di ordine 2 ξ_2

La moda è il centro di ordine 0 ξ_0

DIM:

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = d_0(x, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{|x - y_i|^0}_{=1} = N - c$$

$\underline{y} = (y_1, \dots, y_N)$

$$c = \max\{\overset{x_1}{m_1}, \overset{x_2}{m_2}, \dots, \overset{x_k}{m_k}\}$$

LEZIONE 27 - 17/05/2022

CENTRI

$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$

ξ è quel reale che si trova alla "minima distanza" da tutti i dati

$x \in \mathbb{R}$, $\quad f_r(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} |x - y_i|^0 \\ \left(\sum_{i=1}^{N} |x - y_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad r > 0 \end{cases}$ | distanza di ordine r

$\xi_r := \underset{x \in \mathbb{R}}{\arg\min}\, f_r(x)$ | è il centro di ordine r

$\xi_1 : \underset{x \in \mathbb{R}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{N} |x - y_i|$ | è la mediana

$\xi_2 : \underset{x \in \mathbb{R}}{\arg\min} \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} (x - y_i)^2}$ | è la media aritmetica

$x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = \sum_{i=1}^{N} |x - y_i|^0 = \begin{cases} N, & x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_K\} \\ N - m_1, & x = x_1 \\ \vdots \\ N - m_K, & x = x_K \end{cases}$

- Sia x_1 uno dei dati e sia m_1 il numero delle volte che esso si trova in $\underline{y}$
- Sia x_2 uno dei dati e sia m_2 il numero delle volte che esso si trova in $\underline{y}$

⋮

- Sia x_K uno dei dati e sia m_K il numero delle volte che esso si trova in $\underline{y}$

con $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_K$

è la moda | $$\xi_0 : \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} |x - y_i|^0 = \min\{N - m_1, \dots, N - m_K\} = N - c$$

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(K)}$$

$$\xi_\infty = \frac{x_{(1)} + x_{(K)}}{2}$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

* numero delle volte che si presenta x_i

modalità	frequenza assoluta*	frequenza relativa	frequenza accumulata relativa
x_1	m_1	$f_1 = m_1/N$	$F_1 = f_1$
x_2	m_2	$f_2 = m_2/N$	$F_2 = F_1 + f_2 = f_1 + f_2$
			$F_3 = F_2 + f_3 = f_1 + f_2 + f_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
x_K	m_K	$f_K = m_K/N$	$F_K = F_{K-1} + f_K = 1$
Σ	N	1	

intensità

$x_1 f_1$

$x_2 f_2$

⋮

$x_K f_K$

$\overline{y}$

$$\overline{y} = \sum_{i=0}^{N} y_i / N = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_K m_K}{N} =$$

$$= x_1 \cdot \frac{m_1}{N} + x_2 \cdot \frac{m_2}{N} + \dots + x_K \cdot \frac{m_K}{N}$$

$$= x_1 f_1 + \dots + x_K f_K$$

ESEMPIO:

$N = 16$

2, 1, 2, 5, 3, 2, 4, 4, 1, 2, 5, 3, 3, 5, 1, 2

x_i	n_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
1	3	$3/16$	$3/16$	$3/16$
2	5	$5/16$	$8/16$	$10/16$
3	3	$3/16$	$11/16$	$9/16$
4	2	$2/16$	$13/16$	$8/16$
5	3	$3/16$	$16/16 = 1$	$15/16$
	16	1		

M_o M_e

moda | $M_o = 2$ poiché 2 ha la frequenza assoluta più alta

mediana | $M_e = 2$ poiché, vedendo nella colonna di F_i, il primo valore che supera 0,5 o è uguale

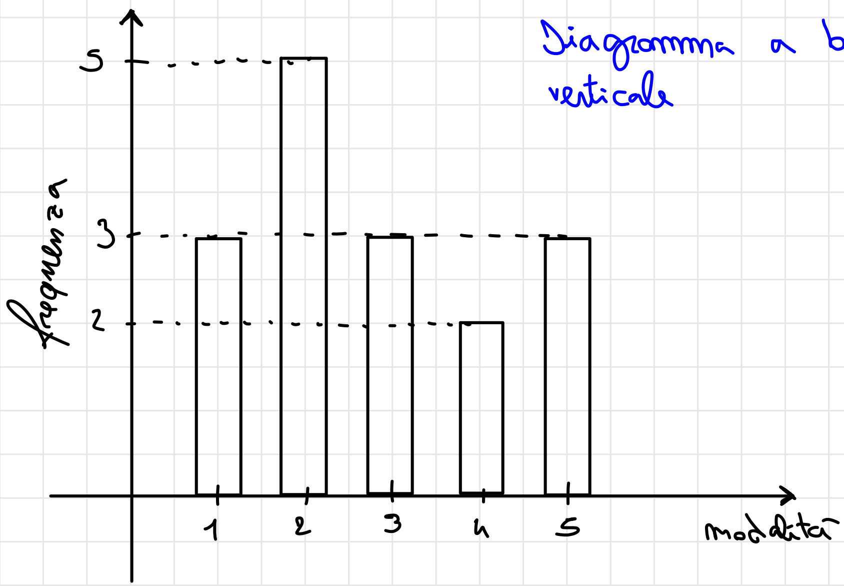
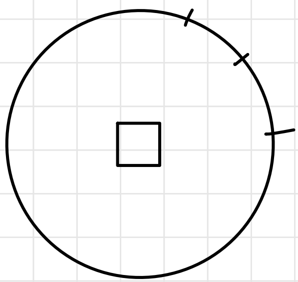


Diagramma a barra verticale

CLASSIFICAZIONE DEI CARATTERI

CARATTERI
- QUALIFICATIVO
  - NOMINALI
  - ORDINALI
    c'è un ordine
    $<$
- QUANTITATIVO
  - DISCRETO
    $<, +, -$
  - CONTINUO
    $<, +, -, :$

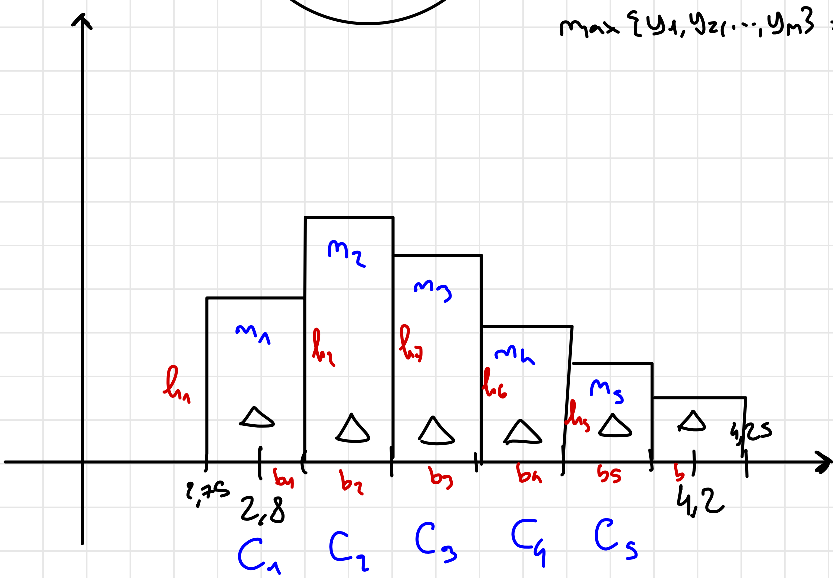
ISTOGRAMMA



$3,2 = (3,15 \, , \, 3,25$

$\min\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = m$

$\max\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = M$



$$\Delta = \frac{M + 0{,}05 - (m - 0{,}05)}{5} = \frac{M - m + 0{,}1}{5}$$

diagramma a barre verticali $\quad (x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_m, n_m)$

istogramma $\quad (C_1, h_1), (C_2, h_2), \ldots, (C_m, h_m)$

$$n_1 = b_1 \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{n_1}{b_1}$$

$$n_2 = b_2 \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{n_2}{b_2}$$

$$\vdots$$

$$n_s = b_s \cdot h_s \Rightarrow h_s = \frac{n_s}{b_s}$$

MEDIE ANALITICHE

INDICI DI SINTESI

ξ_∞ valore centrale

ξ_1 mediana Q_2

INDICI DI DISPERSIONE

QUALITATIVI

indice di ricchezza (ovvero il minimo K delle modalità)

QUANTITATIVI

campo di variazione

DATO PIÙ GRANDE

$$\Gamma = y_{(N)} - y_{(1)} = Q_4 - Q_0$$

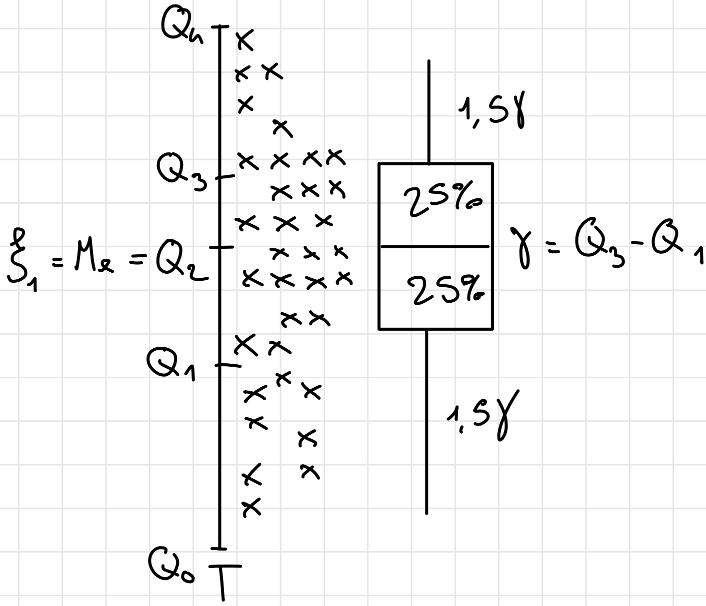
DATO PIÙ PICCOLO

$$\xi_\infty = \frac{y_{(1)} + y_{(N)}}{2}$$

differenza interquartile

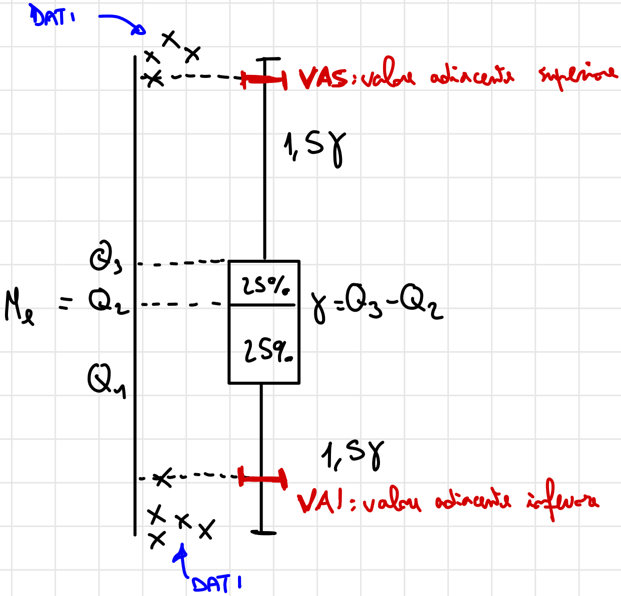
$$\gamma = Q_3 - Q_1$$

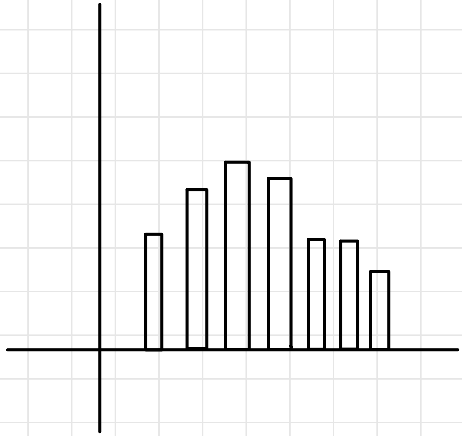
SCATOLA CON BAFFI



LEZIONE 28 – 20/05/2022

Riprendendo l'argomento della lezione precedente:





INDICE DI DISPERSIONE

$$Q_4 - Q_0 = y_{(N)} - y_{(1)}$$ | intervallo di variazione

$$\xi_\infty = \lim_{r \to \infty} \xi_r = \frac{y_{(1)} + y_{(N)}}{2}$$ | valore centrale

$$\gamma := Q_3 - Q_1$$ | differenza interquantile

Scarto quadratico medio $\quad \xi_2 = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{N} (x-y_i)^2} = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sqrt[2]{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} (x-y_i)^2}$

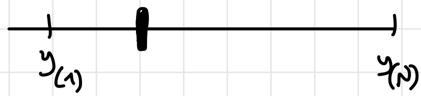
$$\sigma := \sqrt[2]{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}$$ | deviazione standard

---

$$\frac{1}{n}\cdot\sum |y_i - M_e|$$ | scarto assoluto semplice medio

$$M_e = \xi_1 = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} |x-y_i| = \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}|x-y_i|$$

$$\xi_\infty = \frac{y_{(1)}+y_{(N)}}{2}$$



valore centrale

$$\Gamma = Q_4 - Q_0 = y_{(N)} - y_{(1)}$$

intervallo di variazione

$m\in\mathbb{N}$

$$\xi_m = \underset{x\in\mathbb{N}}{\operatorname{argmin}} \left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}|x-y_i|^m\right)^{1/m} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}|\xi_m - y_i|^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

LA DISTRIBUZIONE DELLE STATISTICHE CAMPIONARIE

Def. di CAMPIONE CASUALE SEMPLICE DI TAGLIA n

$$\underline{X} := (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

i.i.d.

OSSERVAZIONE: le componenti di un campione

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

$$= F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_1}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_1}(x_n)$$

Def.

Si dice genitrice del campione casuale semplice un numero aleatorio che ha la distribuzione uguale a quella comune a $X_1, X_2, \dots, X_n$

quindi $$F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i)$$

$$T = g(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Pi_i = g_i(\underline{X}) = X_i$$

Def.

Si dice statistica ogni funzione misurabile calcolabile di un campione casuale semplice

$$X \sim G(p) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i - p$$

$X \sim N(3,9)$ $\qquad \dfrac{X_1 - 3}{3} = \dfrac{\Pi_1(\underline{X}) - 3}{3}$

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ è estratto da X

Allora

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$ | media campionaria

dalla $F_{\underline{X}}(x)$ otteniamo

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i)$$

↳ $\mu := \mathbb{E}(X)$ esiste finita

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \mu \cancel{n} = \mu =$$

$$= \mathbb{E}(X)$$

$\mu_2' := \mathbb{E}(X^2)$ | momento teorico di ordine 2

$\mu_3' := \mathbb{E}(X^3)$ | momento teorico di ordine 3

$$\mu_2' := \mathbb{E}(X^2) < \infty$$

$$\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X) = \frac{\cancel{n}\, \mathbb{D}^2(X)}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{n}$$

CENTRAL LIMIT THEOREM

Teorema del limite centrale

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

$\mathbb{E}(T) = 0$

$\mathbb{D}^2(T) = 1$

converge in distribuzione

$$T_n \xrightarrow{D} T \sim N(0,1) \qquad \mathbb{P}(T_n > \xi)$$

$$\Phi_Z(x) \qquad \simeq \mathbb{P}(Z > \xi)$$

ESEMPIO

$n = 25.000$ polizze d'auto attive

X è la richiesta annuale complessiva di indennizzi

Y è la richiesta annuale per singolo assicurato

$E(Y) = 320, \quad \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = 540$

$P(X > 8{,}3 \cdot 10^6) \qquad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{25000})$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25000} Y_i - 8 \cdot 10^6}{8{,}54 \cdot 10^4} > \frac{8{,}3 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^6}{8{,}54 \cdot 10^4} \right) \simeq P\left(Z > \frac{0{,}3 \cdot 10^2}{8{,}54}\right)$$

$$= P(Z > 3{,}51)$$

LEZIONE 29 - 23/05/2022

CLT teorema centrale di convergenza

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $E(X_1^2) < +\infty$

i.i.d.

$$\mu = E(X), \quad \sigma^2 = D^2(X)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} Y \sim Z \sim N(0,1)$$

<u>USO</u>

$n \gg 1$, $x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) \approx \Phi(x) = F_Z(x)$

MEDIA CAMPIONARIA con $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n}}{\frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\cancel{n}\mu}{\cancel{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 \cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}}} = *$$

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ con genitrice $E(X^2)$
c.c.s.

$$* = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

$n \gg 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\quad F_{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}(x) \simeq \Phi(x)$

ESEMPIO

X: peso di un operaio appartenente a Ω

$\mu = \mathbb{E}(X) = 167$ in libbre $\qquad \sigma = \sqrt{D^2(X)} = 27$ in libbre

a) $n = 36$ e $\underline{X} = (X_1, \dots, X_{36})$ da X
c.c.s.

$$\mathbb{P}(163 < \overline{X} < 171)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{163-167}{27/6} < \frac{\overline{X}-167}{\sqrt{27^2/36}} < \frac{171-167}{27/6}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-0,8889 < \frac{\overline{X}-167}{27/6} < 0,8889\right) =$$

$$= 2\,\mathbb{P}\left(0 < \frac{\overline{X} - 167}{27/6} < 0{,}8889\right) \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0{,}3133 \approx 0{,}63$$

b) $n = 144$

$$\mathbb{P}(163 \leq \overline{X} < 171) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{-4}{27/12} < \frac{\overline{X} - 167}{27/12} < - \frac{4}{27/12}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(-1{,}7778 < \frac{\overline{X} - 167}{27/12} < 1{,}7778\right) =$$

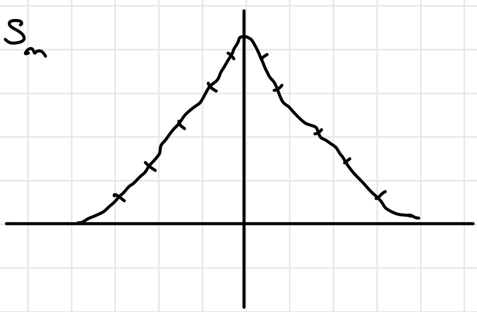
$$= 2\,\mathbb{P}\left(0 < \frac{\overline{X} - 167}{27/12} < 1{,}7778\right) \simeq 2 \cdot 0{,}4621 \simeq 0{,}93$$

$X \sim U(-1, 1)$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_{12}) \quad \text{i.i.d.}$$

$$S_n = X_1 + \cdots + X_{12} \qquad S_{S_n} = (-12, 12)$$

$F_{S_n}(x)$, f_{S_n}



FUNZIONE GENERATRICE DEL MOMENTO: L'INDIPENDENZA DI NUMERI ALEATORI

$$|t| < t_0, \quad \Phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$

X_1, X_2 indipendenti; $X_1 + X_2$

dotati di funzione generatrice dei momenti

$$|t| < \min(t_{0,1}, t_{0,2}), \quad \Phi_{X_1+X_2}(t) = \left[\mathbb{E}\ e^{t(X_1+X_2)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}\right] =$$

$$= \mathbb{E}(e^{tX_1}) \cdot \mathbb{E}(e^{tX_2}) =$$

$$= \Phi_{X_1}(t_1) \cdot \Phi_{X_2}(t_2)$$

In generale se $X_1, X_2, \dots, X_n$ indip. e esiste la loro f.g.m. nell'intorno dell'origine

$$|t| < \min\{t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,n}\}, \quad \Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t)$$

- Se $X_1 \sim X_2 \sim \dots \sim X_n$

$$\Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_1}(t) = \Phi_{X_1}^{n}(t)$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$|t| < \frac{t_0}{|a|}, \quad \Phi_{aX}(t) = \mathbb{E}\left(e^{taX}\right) = \Phi_X(at)$$

è come se fosse a

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ di } X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

c.c.s

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\overline{X}}(t) = \Phi_{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}(t) =$$

$$= \Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \Phi_X^n\left(\frac{t}{n}\right) =$$

f.g.m. della media campionaria $\overline{X}$

$$= \left[e^{\mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2}\right]^n = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{n}\frac{t^2}{2}}$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\overline{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{n}\frac{t^2}{2}} \rightarrow f_{\overline{X}}(x)$$

Come ottenere questo passaggio

$$t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim Z \iff X - \mu \sim \sigma Z$$

$$\iff X \sim \mu + \sigma Z$$

$t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = \Phi_{\mu+\sigma Z}(t) = \Phi_\mu(t) \cdot \Phi_{\sigma Z}(t) = \Phi_\mu(t) \cdot \Phi_Z(\sigma t) =$

$= \Phi_\mu(t) \cdot e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}} = *$

$t \in \mathbb{R} \quad \Phi_\mu(t) = \mathbb{E}(e^{t\mu}) = e^{t\mu}$

$* = e^{\mu t} \cdot e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}} = e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Phi_X(t)$ | f.g.m

e:

f.d.p | $f_X(x) = \dfrac{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\sigma^2}}$ poiché c'è una relazione biunivoca tra la f.g.m. e la f.d.p.

* è anche il passaggio mancante.

$t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\overline{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{t^2}{2}} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$X, \quad \underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ c.c.s.

$T = g(\underline{X})$ è una statistica

è una funzione misurabile

non ci sono quantità incognite

ESEMPI

$X \sim esp(\lambda)$

$\lambda > 0$, incognita

- $\dfrac{X_1 + X_2}{-\lambda}$ non è una statistica

- $\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ è una statistica

- $\overline{X}^{(2)} := \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ è una statistica

- $\dfrac{X_1 + X_2}{\overline{X}}$ è una statistica

$\overline{X}^{(1)} \equiv \overline{X}$

- $n > 1$, $S^2 := \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ è una statistica

varianza campionaria

$$\sigma^2 := \mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum \overline{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - 2n(\overline{X})^2 + n(\overline{X})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n(\overline{X})^2\right) = \frac{n}{n-1}\left[\overline{X}^{(2)} - (\overline{X})^2\right]$$

LEZIONE 30 - 24/05/2022

RIEPILOGO

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

X è una variabile aleatoria

$$|t| < t_0, \quad \Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

a) $y \in \mathbb{R}$, $\Phi_y(t) = \mathbb{E}(e^{ty}) = e^{ty}$

b) $a \in \mathbb{R}$, $\Phi_{aX}(t) = \mathbb{E}(e^{taX}) = \Phi_X(at)$

c) X_1, X_2 due variabili aleatorie, dotate di f.g.m

$$\Phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}\right) \overset{X_1 \text{ e } X_2 \text{ indipendenti}}{=} \mathbb{E}(e^{tX_1}) \cdot \mathbb{E}(e^{tX_2}) = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t) \overset{\text{identicamente distribuiti}}{=} \Phi_{X_1}^2(t)$$

d) $n \in \mathbb{N}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ numeri aleatori dotati di f.g.m.

$$\Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) \overset{\text{indipendenza}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t) \overset{\text{identicamente distribuite}}{=} \Phi_{X_1}^n(t)$$

e) $Z \sim N(0,1)$, $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

f) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \Phi_{\mu + \sigma Z}(t) =$

$$= \Phi_\mu(t) \cdot \Phi_{\sigma Z}(t) = e^{t\mu} \cdot \Phi_Z(\sigma t) =$$

$$= e^{\mu t} \cdot e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}} = e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$$

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ dalla genitrice X

c.c.s.

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Phi_{\overline{X}}(t) = \Phi_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \Phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \Phi_X^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \Rightarrow \left[e^{\frac{t}{n}\mu + \frac{\sigma^2}{n}\frac{t^2}{n^2}}\right]^n = e^{t\mu} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{t^2}{2}} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ da X genitrice di cui non conosciamo il valore di un suo parametro

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{X}^{(2)} - \overline{X}^2\right)$$

argomenti non trovabili sul libro:

Si dice stimatore per una funzione del parametro della genitrice, $\psi(\theta)$, una statistica che è utilizzata per la stima di $\psi(\theta)$

$\theta \in \Theta$ | regione parametrica

$\overline{X}$ è uno stimatore per la media μ di una generica X

$\mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$

si dice che $\overline{X}$ è uno stimatore corretto per μ

X ha varianza σ^2 non nota

$$\overline{X}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$\sigma^2 > 0,$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\mathbb{E}(\overline{X}^{(2)}) = \mathbb{D}^2(\overline{X}) + \mathbb{E}^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right] = \mathbb{E}\left[n\left(\overline{X}^{(2)} - \overline{X}^2\right)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\sum_{i=1}^{n}(X^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) - \left(n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) =$$

$$= n\sigma^2 + \cancel{n\mu^2} - \sigma^2 - \cancel{n\mu^2} = \sigma^2(n-1)$$

$$\mathbb{E}(S^2) = \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{\sigma^2 \cancel{(n-1)}}{\cancel{(n-1)}} = \sigma^2$$

$$S_d^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})$$

$$\sigma^2 > 0, \quad \mathbb{E}(S_d^2) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n}$$ asintoticamente corretto

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_d^2) = \lim_{n\to\infty} \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \iff \mathbb{E}(S_d^2) = \sigma^2$$

Uno stimatore $T = g(\underline{X})$ si dice corretto per la stima di $\psi(\theta)$ se e solo se $\theta \in \Theta$, $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}_T(\theta) = \psi(\theta)$

$$X \sim Esp(\lambda) \qquad \lambda > 0$$

$$\mathbb{E}_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ da X genitrice di media μ incognita e di varianza $\sigma^2 < +\infty$

$$T = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}_T(\mu) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_n)\right] = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$$

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}_{\overline{X}}(\mu) = \mu$$

$$\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}; \qquad \mathbb{D}^2(T) = \frac{1}{4}\left[\mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{4} 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$$

$\theta \in \Theta, \quad R_T(\theta) = \mathbb{E}\left\{[T-\psi(\theta)]^2\right\}$ | rischio quadratico medio

$[T-\psi(\theta)]^2$ | errore quadratico medio

$E(T) = \eta_T$

$$[T-\psi(\theta)]^2 = [(T-\eta_T)+(\eta_T-\psi(\theta))]^2 =$$

$$= (T-\eta_T)^2 + [\eta_T-\psi(\theta)]^2 + 2(\eta_T-\psi(\theta))\cdot(T-\eta_T) =$$

0 poiché $\eta_T - \eta_T = 0$

$$= \mathbb{E}[(T-\eta_T)^2] + [\eta_T-\psi(\theta)]^2 + \cancel{2(\eta_T-\psi(\theta))\cdot\mathbb{E}[(T-\eta_T)]} =$$

$$= D^2(T) + [\eta_T-\psi(\theta)]^2 = D^2(T) + d^2(\theta)$$

$\eta_T - \psi(\theta) = d(\theta)$ | distorsione

Def.

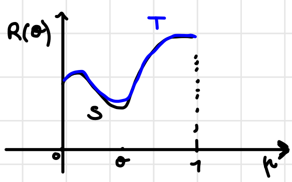
T e S sono stimatori per $\psi(\theta)$ dotati di varianza finita

a) $S \underset{\text{è preferibile}}{\succeq} T \iff \forall \theta\in\Theta,\ R_S(\theta) \le R_T(\theta)$

b) $S \underset{\text{è strettamente preferibile}}{\succ} T \iff$ deve valere la a) e $\exists\, \theta_0 \in \Theta : R_S(\theta_0) < R_T(\theta_0)$

ES: $X \sim B(1,p)$, $p\in(0,1)$

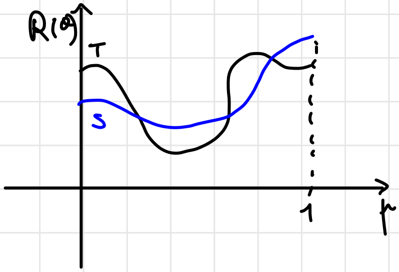
p incognito



Sigma(Feltri)

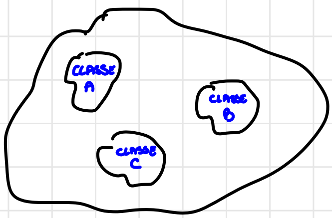
c) uno stimatore si dice ammissibile per la stima di $\psi(\theta)$ quando non esiste un altro stimatore a lui strettamente preferibile.

RICORDA: due stimatori non si possono confrontare sempre



T e S non sono confrontabili, poiché a volte è preferibile T e a volte S. Quindi classi differenti.

Non è possibile confrontare stimatori di classi differenti



LEZIONE 31 - 27/05/2022

$$\mathbb{E}_T(\theta)$$

REGIONE PARAMETRICA

$$E_T : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\theta \rightsquigarrow \mathbb{E}_T(\theta)$$

$$R_T(\theta) = \mathbb{D}^2_T(\theta) - [\mathbb{E}_T(\theta) - \psi(\theta)]^2$$

$\theta \in \Theta$
$$:= \mathbb{E}\left\{[T - \psi(\theta)]^2\right\}$$

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, genitrice X, dove:

c.c.s.

$$F_X(x;\theta)$$

$$X \sim Esp(\lambda)$$
$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (likelihood)

plausibilità

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$
$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \dots \times (0, +\infty)$$

$\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ fissata

$$f_{\underline{X}}(\underline{x};\theta)=f_{X_1}(x_1;\theta)\cdot f_{X_2}(x_2;\theta)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n;\theta)=$$

$$=f_X(x_1;\theta)\cdot f_X(x_2;\theta)\cdot\ldots\cdot f_X(x_n;\theta)$$

funzione di verosimiglianza

$$L(\theta;\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta)=f_{\underline{X}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n;\theta)$$

$\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ fissato

θ varia in Θ

$(x_1,\dots,x_n)$ varia in $(0,+\infty)^n$

θ, nota

$$\hat{\theta}_{MV}:=\underset{\theta\in\Theta}{\arg\max}\, L(\theta;\underline{x})$$

$$\hat{\Theta}:=\underset{\theta\in\Theta}{\arg\max}\, L(\theta;\underline{X})$$

$X\sim Esp(\lambda)$ $\lambda>0$ $\frac{1}{\lambda}$

$$f_X(x;\lambda)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}\quad,\quad x>0$$

$s=\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$L(\lambda;\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n\cdot e^{-\lambda s}$$

$$\frac{dL(\lambda;\underline{x})}{d\lambda}=n\lambda^{n-1}\cdot e^{-\lambda s}-s\lambda^n\cdot e^{-\lambda s}=$$

$$= e^{-\lambda s} \cdot \lambda^{n-1}(n-\lambda s)$$

$$\frac{dL(\lambda;\underline{x})}{d\lambda} = 0 \iff n - \lambda s = 0 \iff \lambda = \frac{n}{s}$$

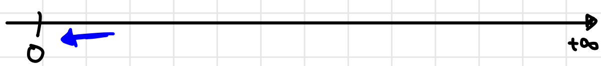
$$\frac{d^2L(\lambda;\underline{x})}{d^2\lambda^2} = -s e^{-\lambda s} \cdot \lambda^{n-1} \cdot (n - \lambda s) + e^{-\lambda s} \cdot (n-1) \cdot \lambda^{n-2} \cdot (n-\lambda s) + -s e^{-\lambda s} \cdot \lambda^{n-1} =$$

$$= e^{-\lambda s} \cdot \lambda^{n-2}\left[-s\lambda(n-\lambda s) + (n-1)(n-\lambda s) - s\lambda\right]$$

se $\lambda = \frac{n}{s} \Rightarrow e^{-\lambda s} \cdot \lambda^{n-2}\left[-s\lambda\cancel{(n-\lambda s)} + (n-1)\cancel{(n-\lambda s)} - s\lambda\right]$

$$\frac{d^2L(\frac{n}{s};\underline{x})}{ds^2} = -n\left(\frac{n}{s}\right)^{n-2} \cdot e^{-n} < 0$$

Quindi questo valore non è solo il massimo assoluto ma anche minimo relativo



$$\lim_{\lambda \to 0^+} L(\lambda;\underline{x}) = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} L(\lambda;\underline{x}) = 0$$

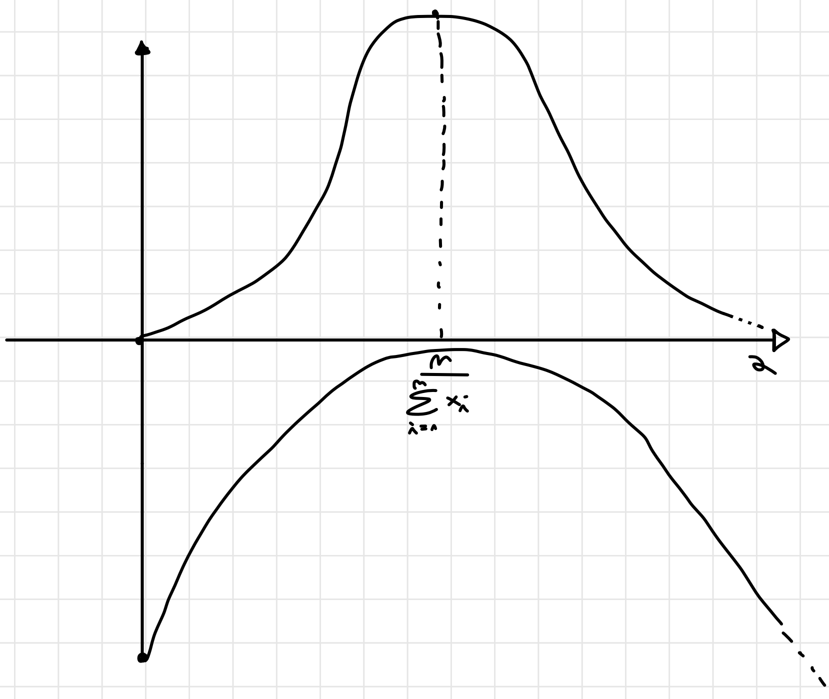
spiega che è il massimo assoluto

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\hat{\lambda}_{MV} := \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = (\overline{X})^{-1}$$

$$\hat{\Theta}_{MV} := \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\; L(\theta; \underline{x})$$

$$\ell(\theta; \underline{x}) = \ln L(\theta; \underline{x})$$



$$\hat{\theta}_{MV} = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\ \ell(\theta; \underline{x})$$

$\lambda > 0,$ $$L(\lambda; \underline{x}) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda s}$$

$$\ell(\lambda; x) = \ln(\lambda^n) + \ln e^{-\lambda s}$$

$$= n \cdot \ln(\lambda) - \lambda s$$

$$\frac{d\,\ell(\lambda; \underline{x})}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - s$$

$$\frac{d\,\ell(\lambda; \underline{x})}{d\lambda} = 0 \iff \frac{n}{\lambda} = s \iff \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{s} \iff \lambda = \frac{n}{s}$$

$\lambda > 0,$ $$\frac{d^2\,\ell(\lambda; \underline{x})}{d\lambda^2} = -n\,\frac{1}{\lambda^2} < 0$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = (\overline{X})^{-1}$$

$\lambda > 0,$ $\qquad L(\lambda; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}$

$$\ell(\lambda; \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda e^{-\lambda x_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda x_i)$$

$s = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$= n \cdot \ln(\lambda) - \lambda s$$

$X \sim B(1, p), \quad p \in (0,1)$

$x_i = 0, 1$

$$L(p; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot q^{1-x_i}$$

$i = 1 \dots n$

$q = 1 - p$

$X = 0, 1$ $\qquad P(\cancel{X} = 0) = q$ $\qquad P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x}$

$P(X = 1) = p$

$$\ell(p; \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(p^{x_i} \cdot q^{1-x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(p^{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} \ln(q^{1-x_i}) =$$

$$= s \cdot \ln(p) + (n-s) \ln(q) = s \cdot \ln(p) + (n-s) \cdot \ln(1-p)$$

$$\frac{d\,\ell(p;\underline{x})}{dp} = \frac{s}{p} + \frac{m-s}{1-p}$$

$$\frac{d\,\ell(p;\underline{x})}{dp} = 0 \iff \frac{s}{p} = \frac{m-s}{1-p} \iff s(1-p) = (m-s)p \iff$$

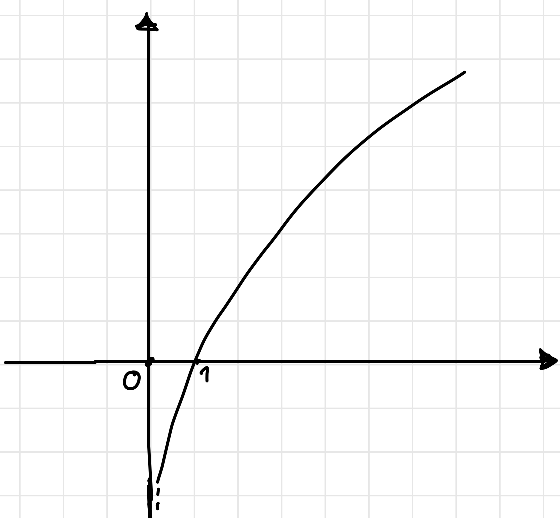
$$\iff s - \cancel{sp} = mp - \cancel{sp} \iff s = mp \iff$$

$$\iff p = \frac{s}{m}$$

$$\frac{d^2\ell(p;\underline{x})}{dp^2} = -\frac{s}{p^2} - \frac{(m-s)}{(1-p)^2} < 0$$

$$\ell(p;\underline{x}) = m\ln(p) + (m-s)\ln(1-p)$$

$$\lim_{p\to 0^+} \ell(p;\underline{x}) = -\infty \quad , \lim_{p\to 1^-} \ell(p;\underline{x}) = -\infty$$



$$\hat{p}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{P}_{MV} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta; \underline{X})$$

$$= \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, \ell(\theta; \underline{X})$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1) μ è noto e σ^2 è incognita

2) μ è incognita e σ^2 è nota

3) μ e σ^2 sono entrambe incognite

LEZIONE 32 - 30/05/2022

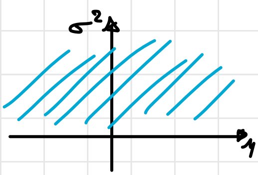
$$\underline{x} \in S_{\underline{X}}, \quad \hat{\Theta}_{MV} := \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta; \underline{x})$$

$$= \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, \ell(\theta; \underline{x})$$

$$\underline{x} \in S_{\underline{X}}, \theta \in \Theta, \quad L(\theta; \underline{x}) := \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta)$$

$$\hat{\Theta}_{MV} := \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta; \underline{X})$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



$$\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \mu; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)} := L(\mu; \sigma^2; \underline{x})$$

$$\ell(\mu; \sigma^2; \underline{x}) = n \cdot \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

- μ incognita, σ^2 nota

$$\ell(\mu;\underline{x}) = n\cdot \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d\,\ell(\mu;\underline{x})}{d\mu} = +\frac{2}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

equazione punto stazionario: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=0}^{n}\mu \iff$

$$\iff n\mu = \sum_{i=1}^{n}x_i \iff \mu = \overline{x}$$

è l'unico punto massimo relativo e assoluto

$$\frac{d^2\ell(\mu;\underline{x})}{d^2\mu} = \frac{-n}{\sigma^2} < 0$$ sempre negativa

stimatore della massima verosimiglianza della genetica

MV: massima verosimiglianza

$$\hat{\mu}_{MV} = \overline{x}, \quad \hat{M}_{MV} = \overline{X}$$

$$\underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \qquad \underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- μ noto, σ^2 incognita

$\sigma^2 = \beta$

$$\ell(\beta;\underline{x}) = n \cdot \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n}{2}\ln(\beta) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{d\,\ell(\beta;\underline{x})}{d\beta} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

eq. p. staz. : $\frac{n}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\beta}} = \frac{1}{\cancel{2}}\sum(x_i-\mu)^2\,\frac{1}{\beta^{\cancel{2}}} \iff$

$$\iff n = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\frac{1}{\beta} \iff \beta = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}_{= s_d^2}$$

$$\frac{d^2\ell(\beta;\underline{x})}{d^2\beta} = \frac{n}{2}\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\frac{2}{\beta^3}$$

$$\frac{d^2\ell(s_d^2;\overline{x})}{d^2\beta} = \frac{(s_d^2)^2}{2}\cdot\left[n - 2\cancel{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\cdot\frac{n}{\cancel{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}\right] =$$

$$= -\frac{(s_d^2)^2}{2}\cdot n < 0$$

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = s_d^2 \Rightarrow \hat{S}^2_{MV} = S_d^2$$

$-\mu$ incognita, σ^2 incognita

$\sigma^2 = \beta$

$$\ell(\mu; \sigma^2; \underline{x}) = n \cdot \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n}{2}\ln(\beta) - \frac{1}{2\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\frac{d\,\ell(\mu; \sigma^2; \underline{x})}{d\mu} = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)$$

$$\frac{d\,\ell(\mu; \sigma^2; \underline{x})}{d\beta} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \frac{1}{2\beta}\cdot\left[-n + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\beta}\right] = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ -n + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\beta} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \frac{1}{\beta} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \mu = \overline{x} \\ \beta = s_d^2 \end{cases}$$

punto stazionario: $(\overline{x}, s_d^2)$

dove $s_d^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{MV} = \overline{x} \\ \sigma^2 = s_d^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\mu}_{MV} = \overline{X} \\ \hat{S}^2_{MV} = S_d^2 \end{cases}$$

$X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} =: L(\lambda; \underline{x})$$

$$= e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = s}}{\underbrace{x_1!\, x_2! \cdot \ldots \cdot x_n!}_{= A}}$$

$$= \frac{1}{A} e^{-n\lambda} \lambda^{s}$$

$$\ell(\lambda; \underline{x}) = -\ln(A) - n\lambda + s\ln(\lambda)$$

l'obiettivo è di trovare: $\underset{\lambda > 0}{\operatorname{argmax}} \left[-\ln(A) - n\lambda + s\ln(\lambda) \right]$

$$\frac{d\,\ell(\lambda;\underline{x})}{d\lambda} = -n + \frac{s}{\lambda}$$

$$\frac{d\,\ell(\lambda;\underline{x})}{d\lambda} = 0 \iff n = \frac{s}{\lambda} \iff \lambda = \frac{s}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{d^2\,\ell(\lambda,\bar{x})}{d\lambda^2} = -\frac{s}{\lambda^2} < 0$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x} \quad , \quad \hat{\lambda}_{MV} = \bar{X}$$

METODO DEI MOMENTI

teorici	campionari
$r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^2)$	$\bar{X}^{(2)} \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

θ ha dimensione $K = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$

Si sceglie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq K$

$$J_1, J_2, \dots, J_p \in \mathbb{N}$$

$$\mu'_{J_1} = \mathbb{E}(X^{J_1}) = f_{J_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$$

$$\mu'_{J_2} = \mathbb{E}(X^{J_2}) = f_{J_2}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mu'_{j_p} = \mathbb{E}(X^{j_p}) = f_{j_p}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

$$\theta_1 = g_1(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \dots, \mu'_{j_p})$$

$$\theta_2 = g_2(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \dots, \mu'_{j_p})$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\theta_k = g_k(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \dots, \mu'_{j_p})$$

MM: media dei momenti

$$\hat{\theta}_{1,MM} = g_1(\overline{X}^{(j_1)}, \overline{X}^{(j_2)}, \dots, \overline{X}^{(j_p)})$$

$$\hat{\theta}_{2,MM} = g_2(\overline{X}^{(j_1)}, \overline{X}^{(j_2)}, \dots, \overline{X}^{(j_p)})$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\hat{\theta}_{K,MM} = g_K(\overline{X}^{(j_1)}, \overline{X}^{(j_2)}, \dots, \overline{X}^{(j_p)})$$

$X \sim U(0,b)$ $\qquad$ (H) $b > 0$

b incognita

$$\mu'_1 = \mathbb{E}(X) = \frac{b}{2}$$

$$b = 2\mu'_1$$

$$\hat{B}_{MM} = 2\overline{X} \qquad \hat{B}_{MV} = X_{(n)}$$

$$\hat{b}_{MM} = 2\overline{X}$$

$$X \sim U(-b, b)$$

(H) $b > 0$

b incognita

$$\mu_1' = 0$$

$$\mu_2' = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-b}^{b} \frac{x^2}{2b}\, dx = \frac{1}{2b} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-b}^{b} = \frac{1}{6b} \cdot \left[(b^3 - (-b^3)) \right] =$$

$$= \frac{\cancel{2} b^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{6b}} = \frac{b^2}{3}$$

$$b^2 = 3\mu_2', \quad b = \sqrt{3\mu_2'}$$

$$\hat{B}_{MM} = \sqrt{3\overline{X}^{(2)}}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

entrambe incognite

$$J_1 = 1, \quad J_2 = 2$$

$$\begin{cases} \mu_1' = \mathbb{E}(X) = \mu = f_1(\mu, \sigma^2) \\ \mu_2' = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = f_2(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \mu_1' \\ \sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \mu_1' = g_1 \\ \sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = g_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{M}_{MM} = \overline{X} \\ \hat{S}^2_{MM} = \overline{X} - (\overline{X})^2 \end{cases}$$

$$\hat{M}_{MV} = \overline{X}$$

$$\hat{S}^2_{MV} = S^2_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1}\left[\overline{X}^{(2)} - (\overline{X})^2\right]$$

LEZIONE 33 - 31/05/2022

METODI PER LA COSTRUZIONE DI STIMATORI

Metodo della Massima Verosimiglianza

Metodo dei Momenti

$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$
c.c.s
da X
F_X, $\theta \in \Theta$

$\underline{x} \in S_{\underline{X}}$, $\theta \in \Theta$,
$L(\theta; \underline{x})$

$$\hat{\theta}_{MV} := \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta; \underline{x}) = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, \ell(\theta; \underline{x})$$

stima

$$\begin{cases} \mu_{j_1}' = f_{j_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \mu_{j_r}' = f_{j_r}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \end{cases}$$

$$\hat{\Theta}_{MV} := \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \underline{X})$$

stimatore

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \theta_1 = g_1(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \ldots, \mu'_{j_r}) \\ \vdots \\ \theta_k = g_k(\mu'_{j_1}, \mu'_{j_2}, \ldots, \mu'_{j_r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_{1,MM} = g_1(\overline{X}^{(j_1)}, \overline{X}^{(j_2)}, \ldots, \overline{X}^{(j_r)}) \\ \\ \end{cases}$$

Uno stimatore è una statistica

$n \in \mathbb{N}$, $T_n = g(\underline{X}_n)$ $\qquad \underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ c.c.s

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

successione di stimatori $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uno stimatore consistente (e coerente) per la stima di θ

$$\Updownarrow$$

$$T_n \xrightarrow{\text{converge in prob.}} \theta$$

TEOREMA

Condizione sufficiente per avere $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consistente è che

(1) $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è asintoticamente corretto

(2) $n\in\mathbb{N}$, $\exists D^2(T_n)<+\infty$ che è infinitesimo al crescere di n

Sotto ipotesi non troppo restrittiva

$\overline{X}^{(r)}$ è consistente

$$\hat{\Theta}_{1,MM} := g_1\left(\overline{X}^{(j_1)}, \overline{X}^{(j_2)}, \dots, \overline{X}^{(j_r)}\right)$$

TEOREMA

Se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è consistente per Θ e g è una funzione continua allora $[g(T_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ è consistente per $g(\Theta)$

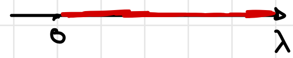
$X \sim G(p)$, $p\in(0,1)$

$J_1 = 1$ $\quad |t|<t_0$, $\Phi_X(t)$

$\mu'_1 = \frac{1}{p}$ $\quad f_{J_1}(p)$

$p = \frac{1}{\mu'_1}$ $\quad \hat{P}_{MM} = \frac{1}{\overline{X}}$ <u>è consistente</u> per p

$X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$



$J_1 = 1$ $\quad |t| < t_0$, $\Phi_X(t) \Longrightarrow$ tutti i momenti campionari sono consistenti

$\mu'_1 = \lambda$

$\lambda = \mu'_1$, $\quad \hat{\Lambda}_{MM} = \bar{X}$ è consistente

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{D}^2(X) = \lambda$ $\quad \mathbb{D}^2(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$, $\mu'_2 = \mathbb{D}^2(X) + (\mu'_1)^2$

$\mu'_1 = \lambda$

$\mu'_2 = \underbrace{\lambda + \lambda^2}_{f_{J_1}(\lambda)}$

$\lambda^2 + \lambda - \mu'_2 = 0$

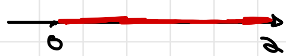
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\mu'_2}}{2}$$

$g_1(\mu'_2)$

$${}_2\hat{\Lambda}_{MM} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{X}^{(2)}}}{2}$$

è consistente per λ

$X \sim Esp(\alpha)$, $\alpha > 0$



$\mu'_r = \mathbb{E}(X^r) = \frac{r!}{\alpha^r}$

$J_1 = 1$

$\mu'_1 = \frac{1}{\alpha}$

$\alpha = \frac{1}{\mu'_1}$ $\quad \hat{A}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}$

$J_1 = 2$

$\mu'_2 = \frac{2}{\alpha^2}$

$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\mu'_2}}$ $\quad {}_2\hat{A}_{MM} = \sqrt{\frac{2}{\bar{X}^{(2)}}}$

$J_3 = 3$

$$\mu'_3 = \frac{6}{\lambda^3}$$

$\vdots$

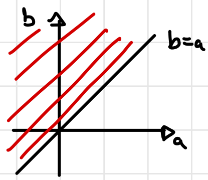
$J_1 \in \mathbb{N}$

$$\mu'_{J_1} = \frac{J_1!}{\lambda^{J_1}}$$

$$\lambda^{J_1} = \frac{J_1}{\mu'_{J_1}} \Rightarrow \lambda = \sqrt[J_1]{\frac{J_1}{\mu'_{J_1}}}$$

$$_{J_1}\hat{\lambda}_{MM} = \sqrt[J_1]{\frac{J_1}{\overline{X}^{(J_1)}}}$$

$$X \sim U(a,b)$$



$J_1 = 1,\ J_2 = 2$

$$\mu'_1 = \mathbb{E}(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$

$$\mu'_2 = \mathbb{E}(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}}$$

$$\begin{cases} \mu'_1 = \dfrac{a+b}{2} \\ \mu'_2 = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 2\mu'_1 \\ a^2+ab+b^2 = 3\mu'_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 2\mu'_1 \\ (a^2+2ab+b^2)-ab = 3\mu'_2 \end{cases} \iff$$

aggiungo e sottraggo ab

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2\mu'_1 \\ 4(\mu'_1)^2 - ab = 3\mu'_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b = 2\mu'_2 \\ ab = 4(\mu'_1)^2 - 3\mu'_2 \end{cases}$$

$$a+b = s \qquad ab = p$$

$$z^2 - sz + p = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{s}{1}, \quad z_1 z_2 = p \qquad a = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \quad b = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

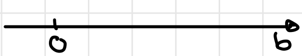
$$a = \frac{2\mu'_1 - \sqrt{4(\mu'_1)^2 - 16(\mu'_1)^2 + 12\mu'_2}}{2} = \frac{2\mu'_1 - \sqrt{12[\mu'_2 - (\mu'_1)^2]}}{2} =$$

$$\begin{cases} a = \mu'_1 - \sqrt{3[\mu'_2 - (\mu'_1)^2]} \\ b = \mu'_1 + \sqrt{3[\mu'_2 - (\mu'_1)^2]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_{MM} = \overline{X} - \sqrt{3[\underset{>0}{\overline{X^{(2)}} - (\overline{X})^2}]} \\ \hat{B}_{MM} = \overline{X} + \sqrt{3[\underset{>0}{\overline{X^{(2)}} - (\overline{X})^2}]} \end{cases}$$

la coppia degli stimatori è consistenti

$X \sim U(0,b)$, $b>0$



metodo della massima verosimiglianza

$\underline{x} \in S_{\underline{X}}$, $\quad \underset{b>0}{\arg\max}\, L(b;\underline{x})$

$$f_X(x;b) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & x \in (0,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\underline{x} \in S_{\underline{X}}, \quad \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;b) = \frac{1}{b^n}$$

$$\| \quad L(b;\underline{x})$$

$$\hat{B}_{MV} = X_{(n)} \qquad \hat{B}_{MM} = 2\overline{X}$$

LEZIONE 34 - 06/01/2022

ESERCITAZIONE