LEZIONE 16

MATRICI DI PASSAGGIO

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n consideriamo l'applicazione identica $id_V: V \to V$ è un'applicazione lineare. Se fissiamo 2 basi $B = (u_1, \dots, u_n)$ $\bar{B}: (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ con B base del dominio e $\bar{B}$ base del codominio. La matrice $M_{B\bar{B}}$ si dice matrice di passaggio da B a $\bar{B}$ oppure matrice di cambiamento di base.

ESEMPIO:

$id_V: M_2\mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\phi_B: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow (b, a, c-a, a-b-c+a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{B}(0,1,-1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{B}(1,0,0,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{B}(0,0,1,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{B}(0,0,0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rango}(A) = 4 = \dim(id_V)$$

OSS: La matrice di passaggio hanno rango massimo poichè sono invertibili

OSS: Consideriamo l'applicazione identica $id: V \to V$ con B base di V (dominio) e $\bar{B}$ base di V (codominio). Consideriamo la matrice $A = M_{B\bar{B}}(id_V)$

Per il teorema di caratterizzazione:

consideriamo $u \in V$ abbiamo che $u \equiv_B (x_1, \dots, x_n)$ e naturalmente $u \equiv_{\bar{B}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

abbiamo che $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$.

Dunque per il teorema di caratterizzazione le matrici di passaggio trasformano le componenti di un vettore in una base ordinata, nelle componenti dello stesso vettore in un'altra base ordinata.

MATRICI SIMILI

Siano $E, \bar{E}$ 2 matrici quadrate dunque $E, \bar{E} \in M_n(K)$, E si dice simile a $\bar{E}$ se:

$\exists P \in GL_n(K)$, P invertibile : $E = P^{-1} \cdot \bar{E} \cdot P$

gruppo lineare generato su campo K

(IN PIÙ)

La similitudine tra matrici quadrate dello stesso ordine è una relazione d'equivalenza infatti:

- è riflessiva poiché $E = I_n^{-1} \cdot E \cdot I_n$
- è simmetrica se $E = P^{-1} \cdot \bar{E} \cdot P$. Poniamo $Q = P^{-1}$ moltiplichiamo a dx e sx per P dunque $PE = P(P^{-1}\bar{E}P) = (P \cdot P^{-1})\bar{E}P = I_n \cdot \bar{E} \cdot P = \bar{E}P$ moltiplico poi entrambi i membri per P^{-1}: $PEP^{-1} = (\bar{E}P) \cdot P^{-1} = \bar{E} \cdot I_n = \bar{E}$. considerando $Q = P^{-1}$, $Q^{-1} \cdot E \cdot Q = \bar{E}$ quindi ho dimostrato che E è simile a $\bar{E}$
- è transitiva

AUTOVALORI, AUTOVETTORI e AUTOSPAZI

Consideriamo V spazio vettoriale su campo K con $\dim V = n$ e definiamo un endomorfismo $T: V \to V$

$\forall \lambda \in K$ possiamo definire il sottoinsieme di V $U_\lambda : \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}$

λ sarà detto autovalore di T se $U_\lambda \neq \{0\}$ ossia se $\exists u \in V \setminus \{0\} : T(u) = \lambda u$.

Tutti i vettori non nulli di U_λ si dicono autovettori.

U_λ è un sottospazio vettoriale di V, e questa cosa è da verificare:

- sicuramente $U_\lambda \neq \emptyset$ poiché $\underline{0} \in U_\lambda$.
- si considerano $u, u' \in U_\lambda$ con $T(u) = \lambda u$ e $T(u') = \lambda u'$. Andando a considerare $T(u+u')$ sapendo che T è un'applicazione lineare abbiamo che $T(u+u') = T(u) + T(u') = \lambda u + \lambda u' = \lambda(u+u') \Rightarrow$ $u + u' \in U_\lambda$ il che vuol dire che è chiuso rispetto alla somma. lo stesso vale per il prodotto, infatti preso uno scalare $\alpha \in K$ e il vettore $u \in U_\lambda$ si ha che:

$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \lambda(\alpha u)$ il che vuol dire che è chiuso anche rispetto al prodotto.

Quindi U_λ è sottospazio vettoriale di V ed è detto autospazio relativo a λ se λ è autovalore

CARATTERIZZAZIONE DEGLI AUTOVALORI

Consideriamo l'endomorfismo $T: V \to V$ con $\dim V = n$.

Consideriamo poi una base $B = (e_1, \dots, e_n)$ ordinata di V.

i) uno scalare $\lambda \in K$ è autovalore di $T \iff \underbrace{|A - \lambda I_n|}_{\text{determinante}} = 0$

ii) se λ è autovalore di T, allora $\phi_B(U_\lambda)$ è lo spazio delle soluzioni di $(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Dim

(i) Per quanto osservato prima, abbiamo visto che $\lambda \in K$ è autovalore di $T \iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \setminus \{0\} : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ma esso può esser visto come $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ per il teorema di Kramer abbiamo $|A - \lambda I_n| = 0$

ii) No Dim.

MOLTEPLICITÀ e RADICI

Consideriamo un polinomio con variabile x a coefficienti in K, dunque $P(x) \in K[x]$. Un elemento $c \in K$ si dice radice o soluzione di $P(x)$ se $P(c) = 0$

Consideriamo uno scalare $c \in K$ e un polinomio $P(x) \in K[x]$. La molteplicità algebrica di c, come radice di $P(x)$ è il numero seguente:

$m_a(c) = \text{MAX}\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid (x-c)^k \text{ divide } P(x)\}$

Allora se consideriamo il polinomio caratteristico $P_T(\lambda) = |A - \lambda I|$ possiamo parlare di molteplicità algebrica degli autovalori in quanto soluzioni del polinomio caratteristico. Supponiamo di avere un autovalore $\bar{\lambda} \in K$ questo implica che $U_{\bar{\lambda}} \neq \{0\}$ di conseguenza $\dim U_{\bar{\lambda}} \geq 1$, possiamo allora definire la molteplicità geometrica $m_g(\bar{\lambda})$ come dimensione dell'autospazio.

PROP $\forall \bar{\lambda}$ autovalore di un endomorfismo T
si ha che $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$

Ricapitolando

Consideriamo una matrice $A \in M_n(K)$. Se $\exists$ un endomorfismo $T: V \to V$ e una base B di V tale che $A = M_B(T)$. Allora gli autovalori di T si dicono autovalori di A e le componenti in B degli autovettori di T si dicono autovettori di A se U_λ è autospazio di T allora $\phi_B(U_\lambda)$ si dice autospazio di A

LEZIONE 17

ANCORA AUTOVALORI, APP. DIAGONALIZZABILI

PROP Consideriamo l'endomorfismo $T: V \to V$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori a due a due distinti di T.
Se prendiamo $v_1 \in U_{\lambda_1} \setminus \{0\}, v_2 \in U_{\lambda_2} \setminus \{0\}, \dots, v_t \in U_{\lambda_t} \setminus \{0\}$
Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_t\}$ è LIN. IND.

DIM Base d'induzione
con $t=1$ abbiamo un unico autovettore v_1 che per ipotesi è diverso da zero che ovviamente forma un unsieme linearmente indipendente
Passo d'induzione
consideriamo $t>1$ e supponiamo che l'enunciato sia vero per $t-1$. La tesi è che presi gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}, \alpha_t \in K$ se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = \underline{0}$ allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{t-1} = \alpha_t = 0$
La 1ª cosa da fare è moltiplicare tutto per λ_t ottenendo $[\lambda_t \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_t \alpha_{t-1} v_{t-1} + \lambda_t \alpha_t v_t = 0]$ 1ª identità
La 2ª cosa da fare è calcolare l'immagine $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = 0$ essa diventa però
$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(v_{t-1}) + \alpha_t T(v_t) = 0$ che a sua volta diventa $[\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_{t-1} \alpha_{t-1} v_{t-1} + \lambda_t \alpha_t v_t]$ 2ª identità
Possiamo dunque sottrarre la 2ª identità alla 1ª ottenendo $(\lambda_t \alpha_1 - \alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda_t \alpha_{t-1} - \alpha_{t-1} \lambda_{t-1}) v_{t-1} = \underline{0}$
Sfruttando l'ipotesi d'induzione sappiamo che $v_1, \dots, v_{t-1}$ sono LIN. IND. dunque gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ sono NULLI

TEO Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori di T a due a due distinti allora la somma di $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_t}$ è una somma diretta.

DIM
Sappiamo che somma diretta significa che $\forall h \in \{1, \dots, t\}$ $U_{\lambda_h} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{h-1}} + U_{\lambda_{h+1}} + \dots + U_{\lambda_t}) = 0$
Dimostriamo per $h=1$, poiché il ragionamento è analogo in tutti i casi. Si ha dunque:
$U_{\lambda_1} \cap (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t}) = \underline{0}$. Consideriamo dunque $u \in U_{\lambda_1} \cap (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t}) = \underline{0}$
Il che vuol dire che $u \in U_{\lambda_1}$ e $u \in (U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t})$ ma quindi si ha che: $\exists u_1 \in U_{\lambda_1}, \dots, \exists u_t \in U_{\lambda_t}$ tali che $u = u_1 = u_2 = \dots = u_t$ si ha dunque $u_1 - u_2 + \dots - u_t = \underline{0}$ se in questa scrittura ci fossero dei vettori NON nulli avremmo degli autovettori relativi ad autovalori a 2 a 2 distinti e LIN. DIP e ciò è ASSUR.

DIAGONALIZZABILE

Consideriamo l'endomorfismo $T: V \to V$ su campo K con $\dim V = n$. T si dice diagonalizzabile se esiste una base ordinata $\bar{B}$ di V in cui la matrice associata $M_{\bar{B}}(T)$ è diagonale. Una matrice quadrata su campo K, $A \in M_n(K)$ si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale.

OSS Le matrici associate a un endomorfismo diagonalizzabile sono diagonalizzabili se consideriamo $A = M_B(T)$ sappiamo che esiste una matrice P invertibile, $P \in GL_n(K): A = P^{-1} \bar{A} P$. Ponendo

$Q = P^{-1}$ si ottiene che $Q^{-1}AQ = \bar{A}$ dunque Q è la matrice che diagonalizza A.

Quindi T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ T ha una matrice associata diagonale $\Leftrightarrow$ ogni sua matrice associata è diagonalizzabile.

TEOREMA SPETTRALE

Consideriamo l'endomorfismo $T: V \to V$ con $\dim V = n$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli autovalori di T, sono equivalenti i seguenti fatti:

a) T è diagonalizzabile

b) $\exists$ una base di V costituita da autovettori. Tale base è detta spettrale

c) $\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = n$

d) $U\lambda_1 \oplus \dots \oplus U\lambda_n = V$

DIM $a \Rightarrow b$

Per ipotesi $\exists \bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) : \bar{A} = M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ matrice diag. Si ha che:

$\phi_B(T(\bar{e}_1)) = (\alpha_1, 0, \dots, 0) = T(\bar{e}_1) = \alpha_1 \bar{e}_1$

$\phi_B(T(\bar{e}_2)) = (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) = T(\bar{e}_2) = \alpha_2 \bar{e}_2$

$\vdots$

$\phi_B(T(\bar{e}_n)) = (0, \dots, 0, \alpha_n) = T(\bar{e}_n) = \alpha_n \bar{e}_n$ dunque $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ sono autovettori.

$b \Rightarrow a$

Per ipotesi esiste una base spettrale $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ sappiamo quindi che:

$T(\bar{e}_1) = \lambda_{i_1} \bar{e}_1 \to \phi_B(T(\bar{e}_1)) = (\lambda_{i_1}, 0, \dots, 0)$

$T(\bar{e}_2) = \lambda_{i_2} \bar{e}_2 \to \phi_B(T(\bar{e}_2)) = (0, \lambda_{i_2}, \dots, 0)$

$\vdots$

$T(\bar{e}_n) = \lambda_{i_n} \bar{e}_n \to \phi_B(T(\bar{e}_n)) = (0, \dots, \lambda_{i_n})$

Mettendo le componenti in colonna otteniamo la matrice $M_{\bar{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ dunque T è diagonalizzabile e la matrice diagonale associata ha tutti autovalori sulla diagonabile principale.

$b \Rightarrow c$

Per ipotesi $\exists$ una base spettrale $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ e dobbiamo dimostrare che $\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = n$.

Supponiamo di ordinare la base spettrale in modo da avere vicini gli autovettori con lo stesso autovalore avendo praticamente r_1 autovettori con autovalore λ_1; r_2 autovett. con autovalore λ_2 e così via fino a r_n λ_n.

Naturalmente si ha che $r_1 \leq mg(\lambda_1), r_2 \leq mg(\lambda_2), \dots, r_n \leq mg(\lambda_n)$ si ha dunque che $n = r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq \sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i)$; poiché $\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = \dim U\lambda_1 \oplus U\lambda_2 \oplus \dots \oplus U\lambda_h$ e non può essere superiore a n, il che vuol dire avere per forza $\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = n$

$c \Rightarrow d$

Per ipotesi abbiamo $n = \sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) \overset{\text{per la prop. della somma diretta}}{=} \dim(U\lambda_1 \oplus \dots \oplus U\lambda_h) = \dim V$.

Ma un sottospazio ha la stessa dimensione dello spazio ambiente se è uguale allo spazio ambiente quindi $U\lambda_1 \oplus \dots \oplus U\lambda_h = V$.

$d \Rightarrow b$

Per ipotesi sappiamo che $U\lambda_1 \oplus \dots \oplus U\lambda_h = V$. Prendendo una base B_1 in $U\lambda_1$, B_2 in $U\lambda_2, \dots, B_h$ in $U\lambda_h$ si ha che l'unione di $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \dots \cup B_h$ è base di V. E poiché tutte le varie basi sono costituite da autovettori, la loro unione forma una base spettrale.

OSS: Ai 4 punti del teorema spettrale se ne aggiunge un altro caratterizzato da 2 condizioni:

e) i $\sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) = n$

ii $\forall i \in \{1, \dots, h\}$ si ha $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$

e si può notare che tale punto equivale al punto 3

Teorema Spettrale : tipici esercizi

Esempio :

- $T: V \to V$, campo $\mathbb{R}$, $\dim V = 3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$

  $A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A è diagonalizzabile ?

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2(-\lambda) = 0 \iff \underset{ma(1)=2}{\lambda = 1} \vee \underset{ma(0)=1}{\lambda = 0}$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ $S = \{(-x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((-1,-1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(\underbrace{-e_1 - e_2 + e_3}_{B_0})$

  Quindi $\dim U_0 = 1$. N.B. In realtà, è esattamente il risultato che ci aspettavamo, in quanto vale SEMPRE: $ma(\lambda) \geq mg(\lambda) \geq 1$.

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \{x_3 = 0$ $S = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(\underbrace{e_1, e_2}_{B_1})$.

  Come ci aspettiamo: $U_0 + U_1 = U_0 \oplus U_1 = \mathcal{L}(e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ $B_0 \cup B_1$ è base di $U_0 \oplus U_1$.

  $\dim(U_0 \oplus U_1) = 3 \Rightarrow U_0 \oplus U_1 = V$.

  Allora $\bar{B} = (e_1, e_2, -e_1 - e_2 + e_3)$ è una base spettrale e

  $Q = M_{\bar{B}B}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice che diagonalizza $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A}$, oppure

  $\bar{\bar{B}} = (-e_1 - e_2 + e_3, e_1, e_2)$ e $\bar{\bar{Q}} = M_{\bar{\bar{B}}B}(id_V) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\bar{\bar{Q}}^{-1}A\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{A}$, T è diagonalizzabile

- $T: V \to V$ $\dim V = 3$ $\mathbb{R}$ $B = (e_1, e_2, e_3)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0 \iff \underset{ma(0)=2 \Rightarrow 2 \geq \dim U_0 \geq 1}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1 \Rightarrow \dim U_1 = 1}{\lambda = 1}$

  U_0: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

  $S = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,0)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(e_2) \Rightarrow \dim U_0 = 1 \neq 2$, allora T non diagonalizzabile.

  Infatti, anche senza calcolare U_1, so che $\dim U_0 \oplus \dim U_1 = 2 \neq 3 = \dim V \Rightarrow U_0 \oplus U_1 \subsetneq V$.

- $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $B = (1, x, x^2)$ $A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)(-1)^2\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right| + (-1)(-1)^4\left|\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 1] + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 \cancel{-1} \cancel{-1+2}] = (1-\lambda)\lambda^2$.

  $\Rightarrow |A - \lambda I_3| = 0 \iff \underset{ma(0)=2}{\lambda = 0} \vee \underset{ma(1)=1}{\lambda = 1}$.

  $U_0 = \ker T$: $AX = 0$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_0) \Rightarrow U_0 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + x + x^2)$.

  $\dim U_0 = 1 \Rightarrow T$ non è diagonalizzabile (inoltre, dato che $U_0 = \ker T$, T non è neanche iniettiva).

  U_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$ $S = \{(x_1, 2x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,2,0)) = \Phi_B(U_1) \Rightarrow U_1 = \Phi_B^{-1}(S) = \mathcal{L}(1 + 2x)$.

  $\dim U_0 \oplus U_1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \Rightarrow$ Non esiste una base spettrale

Ruffini

Considerando uno scalare $c \in K$ e un polinomio $P(x) \in K[x]$. c è radice di $P(x) \iff$ $\exists\, q(x) \in K[x] : P(x) = q(x)(x-c)$

Esempio:

- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \qquad A = M_B(T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

  $|A - \lambda I_3| = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0 \iff ?$

  Applico Ruffini e noto che se $\lambda = 2$, allora $-2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 32 = 0$, cioè 2 è radice del mio polinomio.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 12 & -36 & 32 \\ 2 & & -2 & 20 & -32 \\ \hline & -1 & 10 & -16 & // \end{array}$$

$\Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = (-\lambda^2 + 10\lambda - 16)(\lambda - 2) = (\lambda - 8)(\lambda-2)^2 = 0 \iff \underset{ma(8)=1}{\lambda = 8} \vee \underset{ma(2)=2}{\lambda = 2}$.

$\dim U_8 = 1$

rango = 1 $\Rightarrow \dim S = 3-1 = 2$

$U_2: \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_3 = -x_1 - x_2$

B base canonica $\Rightarrow \Phi_B$ è l'identità

$S = \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1)) = \Phi_B(U_2) \Rightarrow U_2 = \Phi_B^{-1}(S) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}((1,0,-1),(0,1,-1))$.

Sappiamo già che $\dim U_2 + \dim U_8 = \dim U_2 \oplus \dim U_8 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, quindi T è diagonalizzabile, ma per scrupolo calcoliamo U_8.

$U_8: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{a^1 \leftrightarrow a^2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[a^3 \to a^3 - a^1]{a^2 \to a^2 + 2a^1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[a^1 \to \frac{1}{2} a^1]{a^3 \to a^3 + a^2,\ a^2 \to -\frac{1}{6} a^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \{ x_1 = x_3 = x_2$

$\Rightarrow S = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) = \Phi_B(U_8) = U_8$ perché Φ_B biettiva.

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ provare per credere!

LEZIONE 18

SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $K=\mathbb{R}$. Un prodotto scalare su V è un'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ tale che soddisfi:

i) simmetria: $\forall u,v \in V \quad \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ → prodotto scalare tra u e v è uguale al prodotto scalare tra v e u

ii) linearità secondo argomento rispetto all'addizione: $\forall u,v,w \in V \quad \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

iii) linearità del 2º argomento rispetto alla moltiplicazione: $\forall u,v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\langle u,\alpha v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

formano la bilinearità

iv) definito positivo: $\forall u \in V \quad \langle u,v\rangle \geq 0$ oppure $=0 \iff u=\underline{0}$

OSS $\forall u \in V$ il prodotto scalare tra u e $\underline{0}$ è $\underline{0}$.

se il vettore $v\in V$ è tale che: $\forall u \in V$ $\langle u,v\rangle = 0$ allora $v=\underline{0}$. Possiamo definire la coppia $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo.

DEF Sia $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. $\forall u \in V$ definiamo $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ lunghezza o norma di u

ESEMPIO

- $\mathbb{R}^2 \quad u=(3,-5) \quad \|u\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$
- $\mathbb{R}^2 \quad u=(3,-5) \quad \|u\| = \sqrt{\langle(3,-5),(3,-5)\rangle} = \sqrt{9+16} = 5$

OSS: $\forall u \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ valore assoluto di α per lunghezza di u.

Basta considerare $\|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u,\alpha u\rangle}$ che per linearità e simmetria è $= \sqrt{\alpha^2\langle u,u\rangle} = |\alpha|\,\|u\|$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. $\forall u,v\in V$ si ha che $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$

DIM Naturalmente se $u=\underline{0}$ oppure $v=\underline{0}$ il risultato è banale dunque assumiamo $u,v\neq\underline{0}$. Prendiamo un parametro reale β e consideriamo $\langle u+\beta v, u+\beta v\rangle$ che sappiamo essere ≥ 0 per l'ultima proprietà del prodotto scalare.

Sfruttando la bilinearità si ha che $\langle u+\beta v, u+\beta v\rangle = \langle u+\beta v, u\rangle + \langle u+\beta v,\beta v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\text{sappiamo essere } \|u\|^2} + \langle\beta v,u\rangle + \langle u+\beta v\rangle + \langle \beta v,\beta v\rangle =$

$= \|u\|^2 + \underbrace{\beta\langle v,u\rangle + \beta\langle u,v\rangle}_{\text{questi sono uguali dunque si possono sommare}} + \underbrace{\beta^2\langle v,v\rangle}_{\text{è } \|v\|^2} = \|u\|^2 + 2\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\|v\|^2$

otteniamo dunque $\|u\|^2 + 2\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\|v\|^2$ che è un polinomio in β di grado 2 dunque possiamo considerare $\frac{\Delta}{4} = \langle u,v\rangle^2 - \|u\|^2\,\|v\|^2 \leq 0$ abbiamo quindi $\langle u+\beta v, u+\beta v\rangle \geq 0 \iff \langle u,v\rangle^2 - \|u\|^2\,\|v\|^2 \leq 0$

$\iff |\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$

PROP Consideriamo 2 vettori $u,v \in V\setminus\{\underline{0}\}$. Sappiamo che $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$ dalla quale otteniamo $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \le 1$

Da qui possiamo dire che $\exists! f \in [0,\pi]: \cos f = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ ed f è detto angolo tra u e v.

DEF
Sia $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. $\forall u,v \in V$ i vettori u,v si dicono ortogonali $\iff \langle u,v\rangle = 0$

TEOREMA DI PITAGORA

$\forall u,v \in V \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \langle u,v\rangle = 0$ u e v sono ortogonali

infatti noi sappiamo che $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$ e solamente con $\langle u,v\rangle = 0$ possiamo trovare che $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

BASI ORTONORMALI

PROP Siano $u_1,u_2,\dots,u_t$ t vettori non nulli di V a due a due ortogonali: allora l'insieme di vettori $\{u_1,u_2,\dots,u_t\}$ è LIN. DIP.

DIM Consideriamo t scalari $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_t \in \mathbb{R}: \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_tu_t = \underline{0}$. Partiamo con il considerare $\langle u_1,\underline{0}\rangle = 0$ ma noi sappiamo quanto "vale" $\underline{0}$, dunque riscrivo $\langle u_1,\underline{0}\rangle$ come

x la linearità addizione

x la linearità del prodotto

poiché i vettori sono a 2 a 2 ortogonali allora tutto questo si annulla

$\langle u_1, \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_tu_t\rangle = \langle u_1,\alpha_1u_1\rangle + \langle \dots\rangle \dots + \langle u_1,\alpha_tu_t\rangle = \alpha_1\langle u_1,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_1,u_2\rangle \dots + \alpha_t\langle u_1,u_t\rangle = \alpha_1\langle u_1,u_1\rangle$

dunque ci resta $\alpha_1\langle u_1,u_1\rangle = 0$ e poiché $\langle u_1,u_1\rangle \neq 0$ allora α_1 deve essere per forza 0 facendo la stessa cosa con $\langle u_2,\underline{0}\rangle$ troveremo $\alpha_2 = 0$ e così via per tutti gli altri vet.

DEF Sia $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo e sia $B = (u_1,\dots,u_n)$ una base di V con $\dim V = n$.

B si dice ortogonale se i suoi vettori sono a 2 a 2 ortogonali

B si dice ortonormale se è ortogonale e tutti i suoi vettori hanno lunghezza 1.

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prodotto scalare numerico

$B = ((1,1),(-1,1)) \qquad (1,1)\cdot(-1,1) = -1+1 = 0$ ← base ortogonale

$\|(1,1)\| = \sqrt{2} = \|(-1,1)\| \qquad B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ ← base ortonormale → $\bar{B} = ((1,0),(0,1))$

PROP Sia $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $B = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V ortonormale con $\dim V = n$ allora:

1) $\forall u \in V$ sia $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u)$ allora $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad x_i = \langle u, e_i \rangle$ — iesima componente

2) $\forall u, v \in V$ siano $(x_1, \dots, x_n) = \Phi_B(u)$ e $(y_1, \dots, y_n) = \Phi_B(v)$ allora $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

vettore delle componenti di u in B

DIM

1. Per ipotesi possiamo scrivere u tramite le sue componenti cioè $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ e andiamo a calcolare $\langle u, e_1 \rangle$ che è $= \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_1 \rangle = \langle x_1 e_1, e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, e_1 \rangle + \dots + \langle x_n e_n, e_1 \rangle =$

$$x_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1} + \underbrace{x_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \dots + x_n \langle e_n, e_1 \rangle}_{\text{essendo la base ortonormale tutto questo si annulla}} = x_1$$

facendo questo x $\langle u, e_2 \rangle$ troveremo x_2 e così via.

2. Consideriamo il caso $n=2$. Possiamo scrivere u, v con le loro componenti e in questo caso abbiamo $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ e $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$ dunque

$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle =$$

$$\langle x_1 e_1, y_1 e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, y_2 e_2 \rangle + \langle x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle = x_1 y_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1 \text{ x la base ortonormale}} + \underbrace{x_2 y_1 \langle e_2, e_1 \rangle + x_1 y_2 \langle e_1, e_2 \rangle}_{\text{poiché la base è ortonormale si annullano}} + x_2 y_2 \underbrace{\langle e_2, e_2 \rangle}_{=1} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ESEMPIO (da quello precedente)

$B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$ siano $u \equiv_{B'} (3, -5)$ cioè $u = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 5 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ e $v \equiv_{B'} (1, 2)$ cioè $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

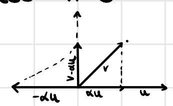
Allora $\langle u, v \rangle = 3 - 10 = -7$

GRAM-SCHMIDT

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ $\dim V = n$ $\quad B = (u_1, \dots, u_n)$ base di V

Il metodo di Gram-Schmidt è un algoritmo che trasforma B in una base ortogonale.

Vediamo il caso $n = 2$



$v + (-\alpha u)$ è ortogonale a u.

Impongo $\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$

αu proiezione ortogonale di v su u

$0 = \langle v - \alpha u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle \Rightarrow \langle v, u \rangle = \alpha \langle u, u \rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}$

Allora il vettore che sto cercando è: $v - \alpha u = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

ESEMPIO

$\langle\cdot,\cdot\rangle : ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \in \mathbb{R}$

$B = ((1,0),(0,1))$ $\quad \langle (1,0),(0,1)\rangle = 2\cdot 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$

$v' = v - \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2} u = (0,1) - \frac{1}{2}(1,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ $\quad$ Allora, $B' = (\overset{u}{(1,0)}, \overset{v'}{(-\frac{1}{2},1)})$ è base ortogonale

$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = 2+0+0+0 = 2$ $\quad \|v\| = \sqrt{\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad$ Quindi $B'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2},1\right)\right)$ è ortonormale

L'algoritmo è il seguente: $B = (u_1, \dots, u_n)$ base di $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

- $v_1 = u_1$
- $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$
- $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

$\vdots$

- $v_n = u_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$

$B' = (v_1, \dots, v_n)$ ortogonale

$B'' = \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \dots, \frac{1}{\|v_n\|} v_n\right)$ ortonormale.

LEZIONE 19

PRODOTTO VETTORIALE

DEF Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo con dimensione finita n e supponiamo B e $\bar{B}$ basi ortonormali del nostro spazio euclideo si può dimostrare che la matrice di passaggio da B a $\bar{B}$ gode delle seguenti proprietà:
$A = M_{B\bar{B}}$ allora $A^{-1} = {}^tA$ e tale proprietà si esprime dicendo che A è ortogonale inoltre tali matrici ortogonali hanno determinante uguale a ± 1 ma NON vale il viceversa

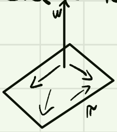
DEF $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\dim V = 3$ B base di V
(V, B) spazio euclideo orientato
B' base di V si dice concorde con B se $|M_{BB'}(id_V)| > 0$
Siano poi
Il prodotto vettoriale $u \times v$ uguale a $\underline{0}$ se $\{u, v\}$ è LIN. DIP, altrimenti è l'unico vettore tale che: $(u, v, u \times v)$ è concordo con B.
$|u \times v| = \|u\| \, \|v\| \sin \widehat{uv}$ $u \times v$ è ortogonale a u e a v $\sin \widehat{uv} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$

PROP $u, v \in V$, spazio euclideo di dimensione 3.
$\{u, v\}$ LIN. IND., $\bar{B}$ ortonormale e $u \equiv_B (x_1, x_2, x_3)$, $v \equiv_B (y_1, y_2, y_3)$
Allora $u \times v \equiv_{\bar{B}} \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$.
Il prodotto vettoriale è anti-commutativo: $u \times v = -v \times u$

DEF Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathcal{E}$ (spazio vett. euclideo) e sia $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$ si definisca complemento ortogonale di W in $\vec{\mathcal{E}}$:
${}^\perp W = \{ u \in \vec{\mathcal{E}} : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in W \}$ si può dimostrare che è un sottospazio vettoriale detto complemento ortogonale di W.

ESEMPIO:

Sia U la chiusura lineare di 2 vettori LIN. IND.



Allora sono ortogonali ad U tutti i vettori proporzionali a w, cioè: ${}^\perp U_\pi = L(w)$

COMPLEMENTO ORTOGONALE

PROP $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\dim V = n$ $\quad U = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_t) \subseteq V$

1. ${}^\perp U = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in \{u_1, \dots, u_t\}\}$;
2. ${}^\perp U$ è un sottospazio vettoriale;
3. a) $U, W \subseteq V$ sottos. vett.: $U \subseteq W \Rightarrow {}^\perp U \supseteq {}^\perp W$
   b) ${}^\perp({}^\perp U) = U$;
4. $U + {}^\perp U = U \oplus {}^\perp U = V$ quindi $\dim {}^\perp U = n - \dim U$

DIM

1) "$\subseteq$" banale

"$\supseteq$" $w \in \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in \{u_1, \dots, u_t\}\}$ $\qquad$ Th: $\langle w, u\rangle = 0 \ \forall u \in U$

$u \in U \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R} : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \Rightarrow \langle w, u\rangle = \langle w, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle w, u_1\rangle}_{=0} + \dots + \alpha_t \underbrace{\langle w, u_t\rangle}_{=0} = 0$ ✓

2) $w, w' \in {}^\perp U$. Proviamo che è stabile rispetto $+$ e $\cdot$.

$\langle w + w', u_i\rangle = \langle w, u_i\rangle + \langle w', u_i\rangle = 0 + 0$ ✓ $\qquad i \in \{1, \dots, t\}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \langle \lambda w, u_i\rangle = \lambda \langle w, u_i\rangle = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

3) a. $w' \in {}^\perp W \Rightarrow \forall w \in W \ \langle w', w\rangle = 0 \Rightarrow \forall u \in U, \langle w', u\rangle = 0$ cioè $U \subseteq W \Rightarrow \forall w' \in {}^\perp W, w' \in {}^\perp U$

quindi ${}^\perp W \subseteq {}^\perp U$. ✓

b. Sappiamo che, per definizione $\forall u \in U \Rightarrow \forall w \in {}^\perp U \ \langle u, w\rangle = 0$, $\forall u \in {}^\perp({}^\perp U) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall w \in {}^\perp U \ \langle u, w\rangle = 0$. Inoltre da 2) sappiamo che ${}^\perp({}^\perp U)$ è sottosp. vett. di V, mentre U lo è per ipotesi. Ma allora ${}^\perp({}^\perp U) = U$ NECESSARIAMENTE ✓

4) Th: $U \cap {}^\perp U = \{\underline{0}\}$ $\qquad$ basta osservare che $\forall u \in V$, $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = \underline{0}$ ✓

Sia B_U una base ortonormale di U. Completiamo B_U ad una base B di V.

$B_U = \{v_1, \dots, v_t\}$ $\qquad B = \{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$

Rendiamo B una base ortogonale mediante il metodo di Gram-Schmidt:

$\bar{B} = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_n\}$ $\qquad w_{t+1}, \dots, w_n \in {}^\perp U \ \wedge \ \{w_{t+1}, \dots, w_n\}$ è LIN. IND.

$\Rightarrow \mathcal{L}(w_{t+1}, \dots, w_n) = {}^\perp U$

SPAZIO AFFINE EUCLIDEO

Uno spazio euclideo è uno spazio affine in cui lo spazio vettoriale è uno spazio vettoriale euclideo ed è indicato con $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ con $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$

$(P, Q) \rightsquigarrow \vec{PQ}$ — vettore

alla coppia di punti

associa

Un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo è pensato essere dotato di una base ortonormale $R = (O, B)$

PROP Uno spazio affine euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ gode delle seguenti proprietà:

- $\vec{PQ} = \underline{0} \Leftrightarrow P = Q$
- $-\vec{PQ} = \vec{QP}$

DIM

$\vec{PQ} = \vec{PP} = \vec{QP}$ per hp.

$\Leftarrow$ $\vec{PQ} + \vec{QP} \overset{(2)}{=} \vec{PP} \Rightarrow \vec{PP} + \cancel{\vec{PP}} = \cancel{\vec{PP}} \Rightarrow \vec{PP} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ Per hp. $\vec{PQ} = \underline{0}$ e per quanto appena dimostrato $\vec{PP} = \underline{0}$.

Dalla proprietà 1 ottengo che $Q = X = P \Rightarrow P = Q$.

- Th: $-\vec{PQ} = \vec{QP}$

$\underline{0} = \vec{PP} \overset{(2)}{=} \vec{PQ} + \vec{QP} \Rightarrow \underline{0} = \vec{PQ} + \vec{QP} \Rightarrow -\vec{PQ} = \vec{QP}$

ESEMPIO

$\vec{\mathcal{E}}$ sottos. vett. $\quad \mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}} \quad \pi_{\vec{\mathcal{E}}} : (v, w) \in \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \to w - v \in \vec{\mathcal{E}}$ ← è ciò che avviene tipicamente quando disegnamo su $\mathbb{R}^2$

$(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{E}}, \pi_{\vec{\mathcal{E}}})$ spazio affine euclideo.

RIFERIMENTO CARTESIANO

Sia $\dim A = \dim V = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ allora possiamo prendere: una coppia (O, B) dove O è un punto di A e $B = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata di V. La coppia è detta riferimento cartesiano.

Considerando lo spazio affine (V, A, π) e fissiamo un riferimento cartesiano $R = (O, B)$, definiamo $\forall P \in A$ le cordinate di P in R. Sono le componenti del vettore $\vec{OP}$ in B

↳ $P \equiv_R \phi_B(\vec{OP})$

PROP Consideriamo lo spazio affine A $\dim = n$ e fissiamo un riferimento cartesiano $R = (O, B)$ si ha che $\forall P, Q \in A$ e poniamo $P \equiv_R (x_1, \dots, x_n)$ e $Q \equiv_R (y_1, \dots, y_n)$.

Allora le componenti del vettore $\vec{PQ}$, dunque $\phi_B(\vec{PQ}) = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)$

LEZIONE 20

SOTTOSPAZIO AFFINE EUCLIDEO

Considero lo spazio affine (V, A, π) la dimsione n. Considero un sottoinsieme $\mathcal{H} \subseteq A$ esso si dica **sottospazio affine** di A se:
considero $\pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\vec{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{H}\} = \vec{H}$ esso è sottospazio vettoriale di V. Per quanto riguarda la proprietà 1 abbiamo che $\forall P \in \mathcal{H}$ e $\forall u \in \vec{H}$ l'unico punto $x \in A$, tale che $\vec{Px} = u$, deve $\in \mathcal{H}$

OSS: Se considero $(\vec{H}, \mathcal{H}, \pi_{|\mathcal{H}\times\mathcal{H}})$ è uno spazio affine. $\mathcal{H}$ si dica **giacitura** di $\mathcal{H}$ oppure **spazio direttore** di $\mathcal{H}$.
Se un sottospazio $\mathcal{H}$ ha dimensione $n-1$, $\mathcal{H}$ si dica **iperpiano**.

VARIETÀ LINEARE

DEF $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $P_0 \in \mathcal{E}$, U sott. di $\vec{\mathcal{E}}$

La **varietà lineare** per P_0 e parallela a U è l'insieme dei punti:
$P_0 + U = (P_0, U) = \{Q \in \mathcal{E} \mid \vec{P_0Q} \in U\}$

PROP Considero lo spazio affine (V, A, π) e $\mathcal{H}$ sottospazio affine.
$\forall P \in \mathcal{H}$ si ha che $\mathcal{H} = \{Q \in A : \vec{PQ} \in \vec{\mathcal{H}}\}$ e tale insieme si dica **varietà lineare passante per P e parallela a $\mathcal{H}$**

DIM
$\subseteq$ considero un punto $T \in \mathcal{H}$ e per ipotesi $P \in \mathcal{H}$ ma dunque la coppia $(P,T) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, si ha che l'immagine di (P,T) dunque $\pi((P,T)) \in \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ ma $\pi(P,T) = \vec{PT}$ e $\pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \vec{H}$ quindi $T \in (P, \vec{H})$
$\supseteq$ consideriamo $Q \in (P, \vec{H})$ per definizione $\vec{PQ} \in \vec{H}$ per la proprietà 1 degli spazi affini applicata ad $\mathcal{H}$, $\exists!\, x \in \mathcal{H} : \vec{PQ} = \vec{Px}$ per cui $Q = X$ e visto che $x \in \mathcal{H}$ allora $Q \in \mathcal{H}$

TEO considero lo spazio affine (V, A, π) con dimensione n e consideriamo il riferimento cartesiano $R = (O, B)$. Sia $\mathcal{H}$ un sottospazio affine con $\dim \mathcal{H} = \dim \vec{H} = h$. Allora esiste un sistema lineare $\Sigma: Ax = b$ in n incognite con rango$(A) = n-h$ tale che S è costituito dalle coordinate in R di tutti e solo i punti di $\mathcal{H}$.

DIM Consideriamo $\mathcal{H} = \{Q \in A \mid \vec{P_0Q} \in \vec{H}\}$ ed un punto $Q \in A$ di coordinate in $R\,(x_1, \dots, x_n)$ e un punto $P_0 \in \mathcal{H}$ di coordinate $(a_1, \dots, a_n)$. Noi sappiamo che $Q \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \vec{P_0Q} \in \vec{H}$ ← $\boxed{\text{questo è vero}}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \phi_B(\vec{P_0Q}) \in \phi_B(\vec{H}) \subseteq K^n$ ma poiché $\phi_B(\vec{H})$ è un sottospazio di K^n allora

sistema omogeneo, insieme delle soluzioni.

$\exists\, \Sigma_0 : Ax = 0 : S_0 = \Phi_B(\vec{H})$.

Ma noi sappiamo che $\Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ dunque $\Phi_B(\overrightarrow{P_0Q}) \in \Phi_B(\vec{H}) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{pmatrix} = 0$

cioè se $(x_1-a_1, \dots, x_n-a_n)$ è soluzione di Σ_0, esso può essere scritto come $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

ponendo dunque $\underline{b} = A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ allora troviamo il sistema $\Sigma : Ax = \underline{b}$

TEO: Considero il sistema $\Sigma: Ax = \underline{b}$ compatibile in n variabili e $\text{rango}(A) = n - h$, allora esiste un sottospazio affine $\mathcal{H}$ di A rappresentato da Σ.

SPAZI PARALLELI, RETTE SGHEMBE

DEF Un sott. spaz. euclideo di dim $n-1$ si dice *iperpiano*

Siano $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ due sottospazi affini, si dice che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono *paralleli* $\Leftrightarrow \vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{H}'}$ opp. $\vec{\mathcal{H}'} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ si dicono *sghembi* $\Leftrightarrow \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ NON sono paralleli e $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$

Si dicono *totalmente sghembi* $\Leftrightarrow \vec{\mathcal{H}} \cap \vec{\mathcal{H}'} = \{\underline{0}\}$ e $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$

Esempio:

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R(O,B)$ $\quad P_0 \equiv_R (1,0,3)$ $\quad U = \mathcal{L}(u(1,2,3))$ $\quad r = (P_0, U)$ $\quad U = \vec{r}$

  $Q \equiv_R (x_1,x_2,x_3) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \mathcal{L}(u(1,2,3)) \Leftrightarrow (x_1-1, x_2, x_3-3) \in \mathcal{L}(\Phi_B(u)) = \mathcal{L}((1,2,3)) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{1} & x_1-1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3-3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{vmatrix} 1 & x_1-1 \\ 3 & x_3-3 \end{vmatrix} = 0$ ← lavoro degli orlati

  $\begin{cases} x_2 - 2x_1 + 2 = 0 \\ x_3 - 3 - 3x_1 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}: \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

  In alternativa: $\exists\, t \in K : (x_1-1, x_2, x_3-3) = t(1,2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3+3t \end{cases}$ rapp parametrica di r

  ~ Come funziona la rapp parametrica? ~

  Sia $r: \begin{cases} x_1 = -2 + 7t \\ x_2 = 2 - 5t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$.

  coordinate di P_0 — componenti del vettore direzione

  Quindi $P_0 \equiv_R (-2,2,1)$, $\vec{r} = \mathcal{L}(u(7,-5,1))$. Se avessi $\mathcal{L}(-u)$, allora $r: \begin{cases} x_1 = -2 - 7t \\ x_2 = 2 + 5t \\ x_3 = 1 - t \end{cases}$

- $\dim \mathcal{E} = 2$ $\quad R = (O,B)$ $\quad P_0 \equiv_R (-7,3)$ $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(-1,4))$ $\quad r = (P_0, \vec{r})$

  $Q \equiv_R (x_1,x_2) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in \vec{r} \Leftrightarrow (x_1+7, x_2-3) \in \mathcal{L}((-1,4)) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & x_1+7 \\ \boxed{4} & x_2-3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & x_1+7 \\ 4 & x_2-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x_2 + 3 - 4x_1 - 28 = 0 \Leftrightarrow 4x_1 + x_2 + 25 = 0$

  $\begin{cases} x_1 = -7-t \\ x_2 = 3+4t \end{cases}$ $\quad r: 4x_1 + x_2 + 25 = 0$ $\quad \vec{r}: 4x_1 + x_2 = 0$

  retta s: $s /\!/ r$, $R(2,4) \in s$ $\quad s: 4x_1 + x_2 + k = 0 \Rightarrow k = -12$ $\quad s: 4x_1 + x_2 - 12 = 0$

- $\dim \mathcal{E} = 3$ $\quad R = (O,B)$ $\quad r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Trovare un piano H: $r /\!/ H \overset{\vec{r} \in \vec{H}}{\Leftrightarrow}$, $R(1,0,-1) \in H$

  $\vec{r}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ $\quad \vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,1))$

  Sia allora $\vec{H} = \mathcal{L}(u(1,2,1), v(1,0,0))$

  $Q(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{E}$ $\quad Q \in H \Leftrightarrow \overrightarrow{RQ} \in \vec{H} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x_1-1, x_2, x_3+1) = \alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0)$.

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \alpha + \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = -1 + \alpha \end{cases}$ $\quad \text{rango}\begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

  Questa è la rappresentazione parametrica di H

LEZIONE 21

· RETTE SU UN PIANO

Consideriamo 2 iperpiani $H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ e $H': a'_1x_1+\dots+a'_nx_n=b'$ si ha che

$H \cap H' = \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n=b \\ a'_1x_1+\dots+a'_nx_n=b' \end{cases}$ la cui matrice completa è $C=\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n & b \\ \vdots & & & \vdots \\ a'_1 & \dots & a'_n & b' \end{pmatrix}$

se si considera solo la matrice A dei coefficienti.

Si ha che $1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 2$ si avranno vari casi:

1) rango(A) = rango(C) = 2

In tal caso, $\emptyset \neq r \cap r' = P(x,y)$, $r \not\parallel r'$ $(r \neq r')$. Le rette sono incidenti in un punto

2) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2$

$\vec{r} = \vec{r'}$ quindi $r \parallel r'$ e $r \cap r' = \emptyset$. Le rette sono parallele

3) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C)$

Allora $r = r'$. Si tratta dunque della stessa retta.

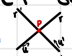
PROP $\dim \mathcal{E} = n$ ← non è necessario che si parli di un piano, rimane valido anche per spazi di 3,4,5... dim.

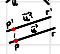
r e r' sghembe $\Leftrightarrow$ r e r' NON sono complanari.

DIM $\Rightarrow$ Già noto per quanto appena verificato nei 3 possibili casi.

$\Leftarrow$ Per assurdo siano r e r' non sghembe

r e r' sghembe $\Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \wedge r \not\parallel r'$ da cui r e r' non sghembe $\Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset^{(1)} \vee r \parallel r'^{(2)}$

(1)  $H = (P, L(u,u'))$

(2)  $\{u,u'\}$ LIN. DIP. $H = (P, L(u, \vec{PP'}))$

In entrambi i soli possibili casi, r e r' giacciono sullo stesso piano quindi sono complanari

• RETTE IN UNO SPAZIO

in dimensione n, posso rappresentare una retta r come:

$r: \begin{cases} a'_1x_1+\dots+a'_nx_n=b_1 \\ \vdots \\ a^{n-1}_1x_1+\dots+a^{n-1}_nx_n=b_{n-1} \end{cases}$ e poi si ha l'iperpiano $H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$, di conseguenza $r \cap H$ sarà l'unione di tutte le equazioni di r con quella di

$H \to r \cap H: \begin{cases} a'_1x_1+\dots+a'_nx_n=b_1 \\ \vdots \\ a^{n-1}_1x_1+\dots+a^{n-1}_nx_n=b_{n-1} \\ a_1x_1+\dots+a_nx_n=b \end{cases}$ ← si prende la matrice completa $C = \begin{pmatrix} a'_1 & \dots & a'_n & b_1 \\ a^{n-1}_1 & \dots & a^{n-1}_n & b_{n-1} \\ \underbrace{a_1 \quad \dots \quad a_n}_{A} & & & b \end{pmatrix}$ e

se consideriamo la matrice dei coefficienti si ha $n-1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq n$ ci sono vari casi:

1) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow r = r'$
2) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3 \Rightarrow r \cap r' = \emptyset,\ r \parallel r'$
3) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow \emptyset \neq r \cap r' = P$
4) $3 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 4 \Rightarrow$ r e r' sghembe

• PIANI e RETTE IN UNO SPAZIO

$\dim \mathcal{E} = 3 \quad R = (O, B)$

$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

$H: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \quad r \cap H: \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \quad C = \left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right)$ $\quad [\,2 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 3\,]$

Sono nuovamente 3 i possibili casi:
1) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow r \subseteq H$, r giace sul piano
2) $2 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 3 \Rightarrow r \cap H = \emptyset,\ \vec{r} \subseteq \vec{H}$ (quindi $r \parallel H$)
3) $3 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow \emptyset \neq r \cap H = P$

• PIANI IN UNO SPAZIO

$\dim \mathcal{E} = 3 \quad R = (O, B)$

$H: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$H': \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \quad H \cap H': \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \quad C = \left(\begin{array}{ccc:c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array}\right)$ $\quad [\,1 \leq \text{rango}(A) \leq \text{rango}(C) \leq 2\,]$

Ancora una volta, 3 possibili casi:
1) $1 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow H = H'$
2) $1 = \text{rango}(A) < \text{rango}(C) = 2 \Rightarrow H \cap H' = \emptyset,\ H \parallel H'$
3) $2 = \text{rango}(A) = \text{rango}(C) \Rightarrow H \cap H' =$ retta

ORTOGONALITÀ TRA RETTE e PIANI

Sia $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ uno spazio euclideo avente dimensione n e sia $R = (O, B)$ una base ortonormale.
Siano r e r' 2 rette di $\mathcal{E}$ con $\vec{r} = \mathcal{L}(u)$ e $\vec{r}' = \mathcal{L}(u')$ allora si dice che r e r' sono ortogonali se $\vec{r} \subseteq {}^{\perp}\vec{r}'$ e si indica con $r \perp r'$.

PROP

Sia $\mathcal{H}$ un iperpiano di $\mathcal{E}$. Sapendo $\dim \mathcal{H} = n-1$ allora $\mathcal{H}: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ e $\vec{\mathcal{H}}: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ si ha dunque $\dim \vec{\mathcal{H}} = n-1$ e $\dim {}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = n-(n-1)$

Si può dimostrare che ${}^{\perp}\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(u(a_1, \dots, a_n))$ — è generato da un vettore che ha come componenti i coefficienti dell'equazione

DIM

Basta dimostrare che $\forall v \in \vec{H}$ si ha $U(a_1,\dots,a_n) \perp V$. Partiamo col dire che $V(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n) \in \vec{H} \iff a_1\bar{x}_1+\dots+\bar{a}_n x_n = 0$ — ma ciò è il prodotto scalare $(a_1,\dots,a_n)(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$, noi sappiamo che in una base ortonormale il prodotto scalare delle componenti di due vettori è il prodotto scalare dei vettori stessi e poiché $U(a_1,\dots,a_n)$ e $V(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ allora abbiamo $\langle u,v\rangle = 0$ dunque è stato dimostrato che $U(a_1,\dots,a_n) \perp V$.

ESEMPIO

$\dim \mathcal{E} = 2$	$r: -3x+7y=c$	$w(-3,7) \perp r$	
	$\vec{r}: -3x+7y=0$	$w(7,3) \in \vec{r}$	NON si confondono u e w

DEF siano H e H' due iperpiani con

$H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$

$H': a_1'x_1+\dots+a_n'x_n=b'$

diciamo che H e H' sono ortogonali se $w(a_1,\dots,a_n) \perp w'(a_1',\dots,a_n')$

DEF Sia $(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ uno spazio euclideo avente dimensione n e consideriamo il riferimento cartesiano $R=(O,B)$ con B ortonormale. Presa una retta r e un iperpiano H allora $r \perp H \iff \vec{r} = {}^{\perp}\vec{H}$ ossia se $H: a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$ allora si avrà $\vec{r} = L(w(a_1,\dots,a_n))$

ORTOGONALITÀ e FASCI DI PIANI

DEF in $\dim \mathcal{E} = 3$ considerata una retta r, si definisce fascio di piani di asse r l'insieme di piani che contengono r. Si può dimostrare che un piano appartiene al fascio di asse $r \iff$ è rappresentato da un'equazione del tipo:

$$\lambda(ax+by+cz-d)+w(a'x+b'y+c'z-d')=0 \quad \text{con } (\lambda,w) \in K^n \setminus \{0\}$$

Si definisce fascio improprio di piani paralleli ad H l'insieme di tutti e solo i piani paralleli ad H. Ogni piano passante per questo fascio si rappresenta con una equazione del tipo: $ax+by+cz=k$ con $k \in K$.

LEZIONE 22

DISTANZA

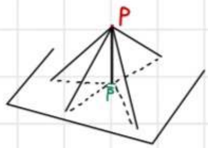
DEF La distanza tra i punti $P, Q \in \mathcal{E}$ è $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.
Se considero invece 2 sottoinsiemi di punti $X, Y \subseteq \mathcal{E}$.
La distanza $d(X,Y) = \inf \{ d(P,Q) \mid P \in X, Q \in Y \}$

Sia H un iperpiano. $H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$. Sia $P \in \mathcal{E}$. Allora:

- $P \in H \Rightarrow d(P,H) = 0$.
- $P \notin H \Rightarrow d(P,H) = d(P,\bar{P})$, dove — per il teorema di Pitagora

$\bar{P} = H \cap r \quad \wedge \quad r$ ortogonale ad H e $P \in r$.

proiezione ortogonale di P in H



Notiamo che $\overrightarrow{P\bar{P}}$ risulta essere un "cateto", mentre gli altri vettori sono "ipotenuse".

Esempio:

$\dim \mathcal{E} = 3 \quad H: x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \qquad P(1,0,1) \notin H \qquad d(P,H) = ?$

r retta: $r \perp H \wedge P \in r \qquad r: \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 1 - t \end{cases} \qquad P_r(1+t, -3t, 1-t) \in r \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$P_r \in H \iff (1+t) - 3(-3t) - (1-t) = 1 \iff \cancel{11}t = \frac{1}{11}$

$\bar{P}(1 + 1/11, -3/11, 1 - 1/11)$, cioè $\bar{P}(12/11, -3/11, 10/11)$ da cui: $\overrightarrow{P\bar{P}}(1/11, -3/11, 1/11)$

$d(P,H) = d(P,\bar{P}) = \|\overrightarrow{P\bar{P}}\| = \sqrt{\frac{1}{121} + \frac{9}{121} + \frac{1}{121}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

$d(P,H) = \frac{|\cancel{1 \cdot 1} - \cancel{3 \cdot 0} - \cancel{1 \cdot 1} - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ ✓

Generalizziamo l'esempio:

$H: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \qquad P(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \qquad r: \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + a_1t \\ \vdots \\ x_n = \bar{x}_n + a_nt \end{cases} \qquad \vec{r} = \mathcal{L}(w(a_1, \ldots, a_n)) = {}^{\perp}\vec{H}$

$r \cap H: a_1(\bar{x}_1 + a_1t) + \ldots + a_n(\bar{x}_n + a_nt) = b \iff (a_1^2 + \ldots + a_n^2)t = b - a_1\bar{x}_1 - \ldots - a_n\bar{x}_n \iff t = \frac{b - a_1\bar{x}_1 - \ldots - a_n\bar{x}_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$

$\bar{P}(\bar{x}_1 + a_1t, \ldots, \bar{x}_n + a_nt) \qquad \overrightarrow{P\bar{P}}(a_1t, \ldots, a_nt)$

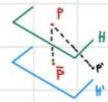
$$d(P,H) = d(P,\bar{P}) = \|\overrightarrow{P\bar{P}}\| = \sqrt{a_1^2t^2 + \ldots + a_n^2t^2} = |t|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \frac{|b - a_1\bar{x}_1 - \ldots - a_n\bar{x}_n|}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \frac{|a_1\bar{x}_1 + \ldots + a_n\bar{x}_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

DISTANZA pt.2

$H: a_1x_1+\dots+a_nx_n-b=0$, $H': a'_1x_1+\dots+a'_nx_n-b'=0$, $H\cap H': \begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n-b=0 \\ a_1x_1+\dots+a_nx_n-b=0 \end{cases}$

$H\cap H' \neq \emptyset \Rightarrow d(H,H')=0$ c'è almeno un punto in cui si toccano

$H\cap H' = \emptyset \Rightarrow d(H,H') = \inf\{d(P,P') \mid P\in H,\ P'\in H'\} = \inf\{d(P,\bar{P}) \mid P\in H,\ \bar{P}$ proiezione ortog. di P in $H\}$



PROP $\forall P\in H,\ d(P,\bar{P}) = d(P,H')$ è costante.

DIM $H /\!/ H' \Rightarrow \vec{H} = \vec{H'}: a_1x_1+\dots+a_nx_n=0.$

Allora: $H': a_1x_1+\dots+a_nx_n-\bar{b}=0.$

$\forall P\in H,\ P(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n),\ a_1\bar{x}_1+\dots+a_n\bar{x}_n-b=0 \Rightarrow b = a_1\bar{x}_1+\dots+a_n\bar{x}_n.$

$d(P,H') = \dfrac{|a_1\bar{x}_1+\dots+a_n\bar{x}_n-\bar{b}|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}} = \dfrac{|b-\bar{b}|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}$ $\forall P\in H$ ▨

non dipende da P

Esempio:

$\dim\mathcal{E}=3$ $\mathcal{R}=(O,B)$

$H: 2x_1+x_2-x_3+1=0$ $w(2,1,-1)$ $b=-1$

$H': 4x_1+2x_2-2x_3-7=0$ $w'(4,2,-2)$ $b'=7$

$w /\!/ w' \Rightarrow \vec{H}=\vec{H'}$ $H': 2x_1+x_2-x_3-\frac{7}{2}=0$ $\bar{b}=\frac{7}{2}$

$d(H,H') = \dfrac{|-1-\frac{7}{2}|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{\frac{9}{2}}{\sqrt{6}}$

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ $\dim\mathcal{E}=2$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette ed $\mathcal{E}$ stesso.

Qui, dunque, sappiamo calcolare la distanza tra i possibili sottospazi.

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ $\dim\mathcal{E}=3$

I sottosp. euclidei sono i punti, le rette, i piani ed $\mathcal{E}$ stesso.

- distanza di una retta da un iperpiano (= piano in questo caso)

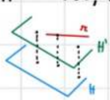
  r retta: $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b \\ a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3=b' \end{cases}$

  H piano: $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$

  $r\cap H = \begin{cases} P \Rightarrow d(r,H)=0 \\ \emptyset \Rightarrow d(r,H)=? \end{cases}$

  Sia H' iperpiano: $H /\!/ H' \wedge r\subseteq H'$. Questo iperpiano esiste, infatti: $r /\!/ H \Rightarrow \vec{r}\subseteq\vec{H}=\vec{H'}$ $P\in r$, $H'=(P,\vec{H})$

  $\forall P\in H',\ d(P,H)$ è costante. Allora, $\forall P\in r\subseteq H',\ d(P,H)$ è costante: $d(P,H')=d(r,H')$

  In conclusione: $d(r,H) = d(P,H)$ $\forall P\in r$.

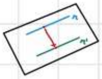
DISTANZA PT.3

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\quad \dim \mathcal{E} = 3$

- distanza tra rette r e r':

(1) $r \cap r' \neq \emptyset \implies d(r, r') = 0$

(2) $r \,//\, r' \wedge r \neq r' \implies r$ e r' complanari



$\forall P \in r$, $d(P, r')$ è costante. $d(r, r') = d(P, r')$ $\forall P \in r$. Fisso P.

Allora considero H iperpiano: $H \perp r'$ e $P \in H$.

$r' \cap H = \bar{P}$ proiezione ortog. di P su r'. $\quad d(r, r') = d(P, r') = d(P, \bar{P})$

Esempio: $\dim \mathcal{E} = 3$

$r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = -1+2t \\ x_3 = 3-t \end{cases}$ $\quad r': \begin{cases} x_1 = 2t' \\ x_2 = 4t' \\ x_3 = 1-2t' \end{cases}$ $\quad r \,//\, r'$, infatti: $\vec{r} = \mathcal{L}(u(1,2,-1))$ e $\vec{r'} = \mathcal{L}(v(2,4,-2))$ $\quad v = 2u$

$P'(0,0,1) \in r'$ $\quad d(r, r') = d(r, P')$ $\quad H$: $H \perp r$, $P' \in H$

$H \perp r \implies H: x_1 + 2x_1 - x_3 - k = 0$ $\quad P' \in H \implies -1-k=0 \implies k=-1$ $\quad$ Allora $H: x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$

$\bar{P'} = r \cap H$: $P_r \in r$, $P_r(1+t, -1+2t, 3-t) \in H \iff (1+t) + 2(-1+2t) - 1(3+t) + 1 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = 1/2$.

$\bar{P'}(1+1/2, -1+2\cdot 1/2, 3-1/2)$ $\quad \bar{P'}(3/2, 0, 5/2)$ $\quad d(r, r') = d(\bar{P'}, P') = \|\bar{P}P'\| = \sqrt{9/4 + 9/4} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(3) r e r' sghembe

TEOREMA DELLA COMUNE PERPENDICOLARE \ DIST. TRA RETTE SGHEMBE.

Siano r e r' due rette sghembe allora esiste un'unica retta s tale che $s \perp r$ e $s \perp r'$ e i punti $P = s \cap r$ e $P' = s \cap r'$ per il teo. di pitagora allora la distanza $d(r, r') = d(P, P')$

DIM

consideriamo $r: \begin{pmatrix} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{pmatrix}$ e $r': \begin{pmatrix} x = x'_0 + \ell' t' \\ y = y'_0 + m't' \\ z = z'_0 + n't' \end{pmatrix}$ e si ha che $\vec{r} = L(u(l, m, n))$ e $\vec{r'} = L(u'(l', m', n'))$

si hanno poi i punti $P(x_0 + \ell t, y_0 + mt, z_0 + nt)$ e $P'(x'_0 + \ell' t', y'_0 + m't', z'_0 + n't')$ poiché la retta cercata passa per P e per P' il suo vettore direzionale sarà:

$\vec{PP'}(x'_0 + \ell' t' - x_0 - \ell t, y'_0 + m't' - y_0 - mt, z'_0 + n't' - z_0 - nt)$ e tale vettore deve essere ortogonale a u e u' e si ha

$\iff \langle \vec{PP'}, u \rangle = 0$ e $\langle \vec{PP'}, u' \rangle = 0 \iff \begin{cases} (x'_0 + \ell' t' - x_0 - \ell t)\ell + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n = 0 \\ (x'_0 + \ell' t' - x_0 - \ell t)\ell' + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m' + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n' = 0 \end{cases}$

$\implies \begin{cases} (\ell'\ell + m'm + n'n)t' + (-\ell^2 - m^2 - n^2)t + \dots + \; = 0 \\ (\ell'^2 + m'^2 + n'^2)t' + (-\ell\ell' - mm' - nn')t + \dots + \dots = 0 \end{cases}$ $\quad$ la matrice di tali coeff. è: $A = \begin{pmatrix} \langle u, u' \rangle & -\|u\|^2 \\ \|u'\|^2 & -\langle u, u' \rangle \end{pmatrix}$

il determinante di A, cioè $|A|$, è $= 0 \iff -\langle u, u' \rangle^2 + \|u\|^2 \|u'\|^2 = 0$

ma dalla disuguaglianza di Schwartz sappiamo che questo vale solo se $\{u, u'\}$ sono LIN. DIP. , ma r e r' sono sghembe quindi $\{u, u'\}$ sono LIN. IND. dunque possiamo dire che $|A| \neq 0$ e dunque possiamo applicare il teorema di cramer che ci garantisce che $\exists! \, (t, t')$ soluzione del sistema