"Algebra lineare e geometria affine: qualche applicazione"

① RANKING DI GOOGLE

$I = \{\text{pagine censite da Google}\} = \{P_1, \dots, P_n\}$

$L_k = \{\text{pagine con link } \underline{\text{verso}}\ P_k\}$ $\qquad \left(\begin{array}{c} P_i \searrow \\ \qquad P_k \\ P_J \nearrow \end{array} \right)$

$m_J = \#$ link da P_J a altre pagine

numero di

$x_J =$ punteggio della pagina P_J

EQUAZIONE: $x_k = \sum_{P_J \in L_k} \frac{x_J}{m_J}$

punteggio di P_J

\# link uscenti da P_i

punteggio di P_k

somma di tutte le pagine in L_k

quindi se $a_{i,J} = \begin{cases} 0 & \text{SE } P_J \in L_i \\ \frac{1}{m_k} & \text{SE } P_i \in L_i \end{cases}$

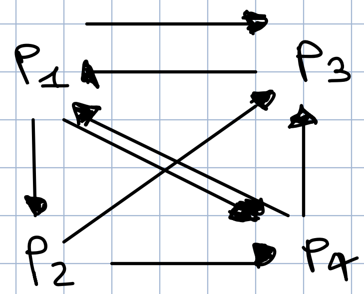
le nostre equazioni definiscono il sistema

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + \dots \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$ N EQUAZIONI

di n equazioni in n variabili

VARIABILI $x_1, \dots, x_n$

e.g.:



prendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{x_4}{2} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_2}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

$L_1 = \{P_3, P_4\}$

P_4 HA 2 LINK USCENTI

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{4} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_4 = 0 \end{cases}$$

soluzioni nella forma

$$\begin{cases} x_1 = 2 x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3} x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$$

VINCOLATA LIBERA

$x_4 = 6t \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (12t, 4t, 9t, 6t)$

quindi $P_1 > P_3 > P_4 > P_2$ è il nostro ranking

A = "MATRICE"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{SE } P_i \notin L_i \\ \frac{1}{n} & \text{SE } P_j \in L_i \end{cases}$$

nell'esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ allora il problema del ranking

è trovare $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ t.c. $Av = v$

TEOREMA: Il problema del ranking ha sempre soluzioni se ogni pagina ha un link uscente. La soluzione è unica a meno di riscalare se e solo se la rete è connessa.

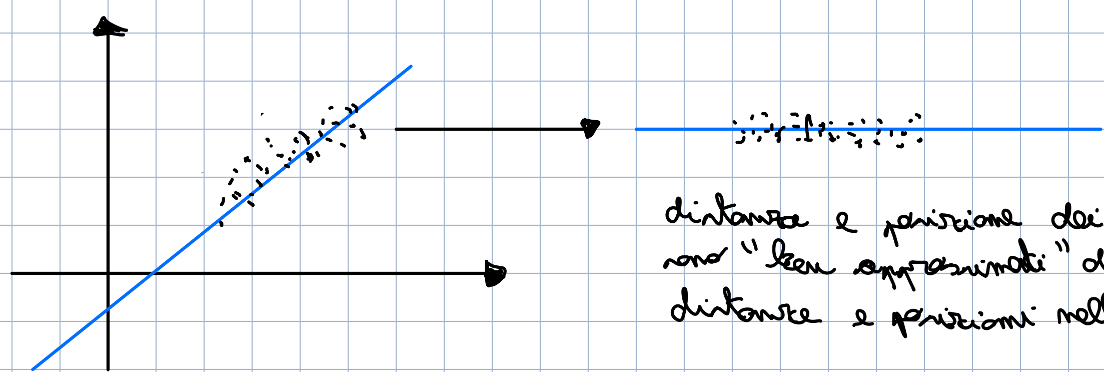
"MACHINE LEARNING: DIMENSIONALITY REDUCTION (PCA: PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS)"

HO UN INSIEME DI DATI VETTORIALI   VETTORI COLONNA!!

$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$

con $n \gg 0$. voglio rendere dati m-dimensionali con $m \ll n$ perdendo "poche" informazioni

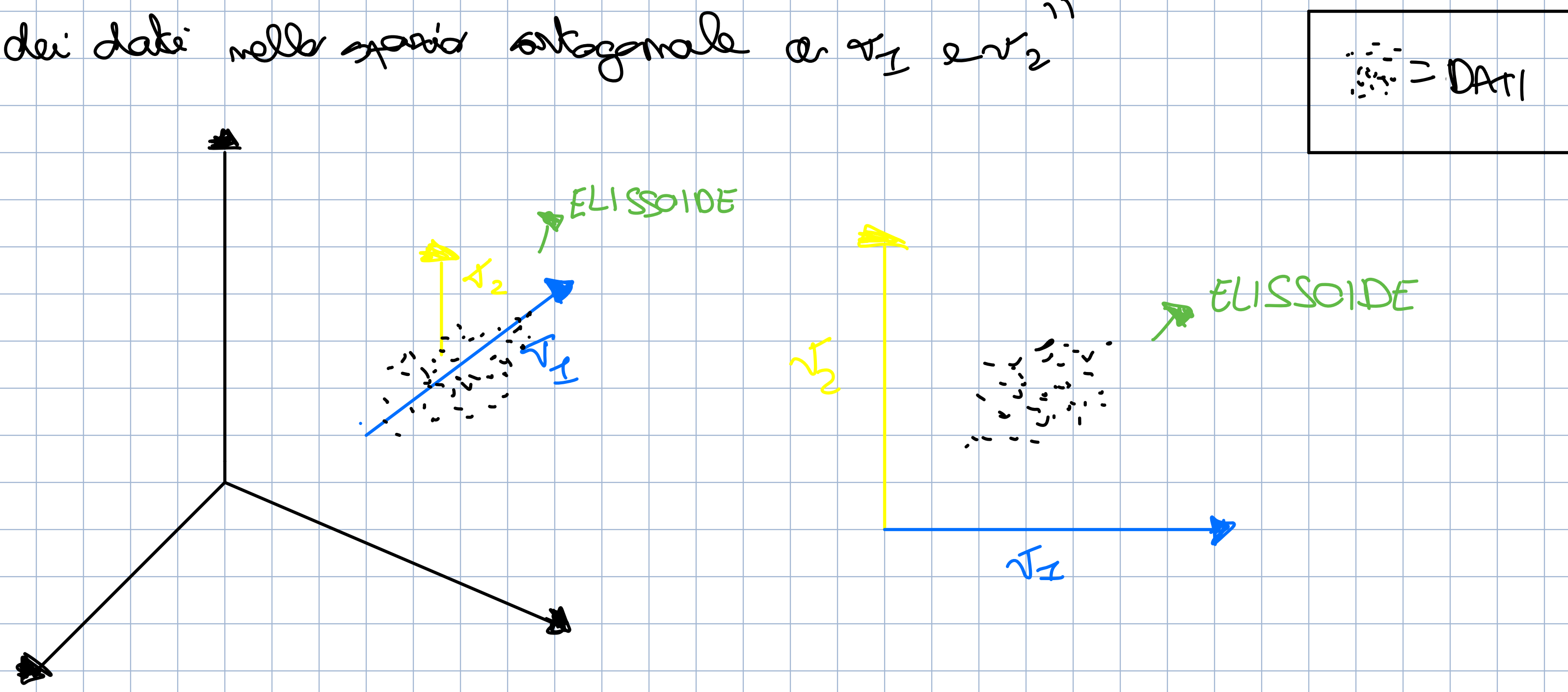
e.g.



distanza e posizione dei punti sono "ben approssimati" dalle loro distanze e posizioni nella retta.

IDEA: Cerco delle "direzioni principali"

- v_1 = direzione della linea che "approssima meglio" i dati;
- v_2 = direzione ortogonale a v, che approssima meglio la posizione dei dati nello spazio ortogonale a v_1.
- v_3 = direzione della linea che "approssima meglio la posizione dei dati nello spazio ortogonale a v_1 e v_2"

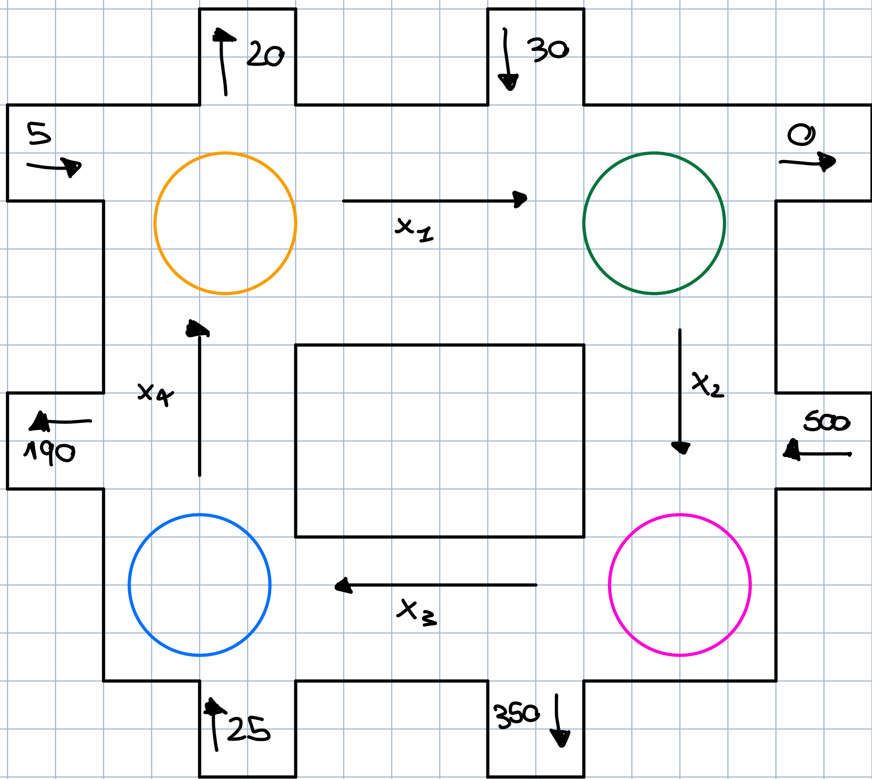


TEOREMA: le componenti principali si ottengono come autovettori della matrice di COVARIANZA (matrice simmetrica, scambio colonna e riga non cambia.) ordinati in base al valore assoluto degli autovalori relativi.

ESEMPIO ESPLICITO: distribuzione del traffico su una rete stradale.

data una rete stradale sappiamo il traffico in alcuni nodi in alcune strade. Cosa possiamo dire sul resto?

e.g.



idea: per ogni incrocio

\# auto entrata

||

\# auto uscita

- $x_4 + 5 = x_1 + 20$
- $x_1 + 30 = x_2$
- $x_2 + 500 = x_3 + 350$
- $x_3 + 25 = x_4 + 190$

$$\begin{cases} x_4 + 5 = x_1 + 20 \\ x_1 + 30 = x_2 \\ x_2 + 500 = x_3 + 350 \\ x_3 + 25 = x_4 + 190 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 \quad\quad + x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 \quad\quad = -30 \\ \quad x_2 - x_3 \quad = -150 \\ \quad\quad x_3 - x_4 = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // = // \quad \text{eq. ridondante} \\ x_1 = -15 + x_4 \\ x_2 = 15 + x_4 \\ x_3 = 16 + x_4 \end{cases}$$

VARIABILE DIPENDENTE

VARIABILE LIBERA

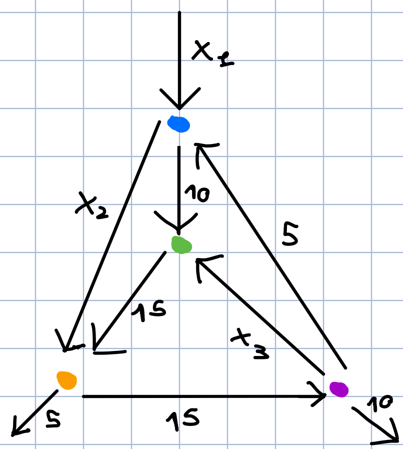
$\Rightarrow$ SOLUZIONI $(-15 + x_4,\ 15 + x_4,\ 165 + x_4,\ x_4)$

CONDIZIONI EXTRA: TUTTI VALORI INTERI ≥ 0 QUESTO SUCCEDE

$\Leftrightarrow$ x_4 intero ≥ 15, soluzioni $\begin{pmatrix} m & 180+m \\ 30+m & 15+m \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ STO AGGIUNGENDO 15 a $x_4 = m$

Perché infinite soluzioni? Non sappiamo il numero totale di auto nel sistema.

e.g.

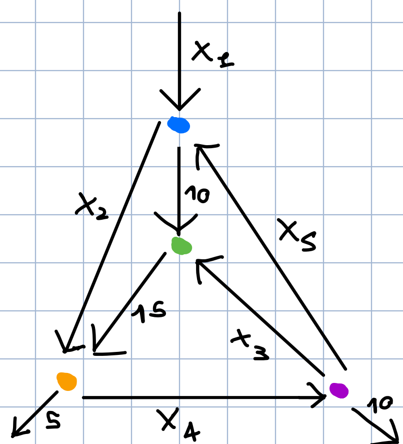


- $x_1 + 5 = x_2 + 10$
- $15 = x_3 + 15$
- $x_2 + 15 = 20$
- $x_3 + 10 = 15$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

QUESTO É UN SISTEMA INCOMPATIBILE = NESSUNA SOLUZIONE

e.g.



- $x_1 + x_3 = x_2 + 10$
- $x_4 = x_3 + x_5 + 10$
- $x_2 + 15 = x_4 + 5$
- $x_3 + 10 = 15$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = x_2 + 10 \\ x_4 = x_3 + x_5 + 10 \\ x_2 + 15 = x_4 + 5 \\ x_3 + 10 = 15 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ -x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_2 - x_4 = -10 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 10 \\ x_4 - x_5 = 15 \\ x_2 - x_4 = 10 \\ x_3 = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_5 = x_4 - 15 \\ x_2 = x_4 - 10 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

SOLUZIONI $(15, x_4 - 10, 5, x_4, x_4 - 15)$

x_4 INTERO $\geq 15 \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 5+n \\ 5 \\ 15+n \\ n \end{pmatrix}$

DOMANDE:

① Come capisco se un sistema ammette soluzioni?

② Cosa vuol dire che un sistema è "risolto"? Come scrivo tutte le soluzioni?

③ C'è un modo algoritmico per farlo?

"SISTEMI LINEARI"

DEF: Consideriamo un sistema S di m equazioni in n variabili

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

FORMA STANDARD

I numeri a_{ij} sono i coefficienti del sistema

i = indice equazione $\quad j$ = indice variabile

ES: $a_{3,4}$ = coefficiente della variabile x_4 nella 3^a equazione

I numeri b_i sono i termini noti del sistema

termine noto dell'i-esima equazione

NOTA: lavoriamo su un campo $\mathbb{K}$ generico a meno che non sia assunto il contrario.
e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$

Il sistema è detto omogeneo se $b_1 = \dots = b_m = 0$

Una soluzione del sistema è una n-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n}$

tale che sostituendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nelle equazioni sono tutte verificate.

Il sistema si dice compatibile se ammette una soluzione, incompatibile altrimenti.

$V(S) = \{\text{Soluzioni di } S\} \subset \mathbb{K}^n$

DEFINIZIONE: due sistemi S, S' di $\overbrace{m, m'}^{\text{possono essere diverse}}$ equazioni in n variabili sono

la stessa

equivalenti $\Longleftrightarrow$ hanno le stesse soluzioni. $(S \sim S')$

e.g. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad - x_3 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

SONO EQUIVALENTI

$V(S) = V(S') = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

e.g.

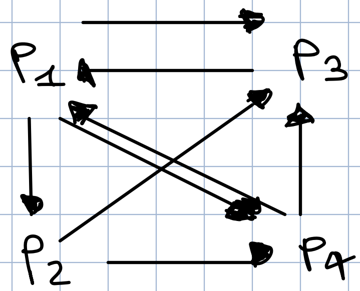
$S = \begin{cases} x_4 + 5 = x_1 + 20 \\ x_1 + 30 = x_2 \\ x_2 + 500 = x_3 + 350 \\ x_3 + 25 = x_4 + 190 \end{cases}$ $S' = \begin{cases} x_1 - x_2 = -30 \\ x_2 - x_3 = -150 \\ x_3 - x_4 = 165 \end{cases}$

SONO EQUIVALENTI

$V(S) = V(S') = \{ (-15 + x_4, 15 + x_4, 165 + x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \}.$

"SISTEMI LINEARI"

e.g. Il problema del ranking sulla rete



è definita dal sistema

$$S = \begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{x_4}{2} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \end{cases} \sim \quad S' = \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3} x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$$

quindi soluzioni $(x_4 = 6\lambda)$

$$(12\lambda, 4\lambda, 9\lambda, 6\lambda)$$

DEF: Una soluzione parametrica di un sistema S è un sistema S' equivalente a S tale che esistano due sottoinsiemi $(S \sim S')$ disgiunti.

$VL, VD \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ $\quad VL \cup VD = \{x_1, \dots, x_n\}$

VL: variabili libere

VD: variabili dipendenti

$$\text{e } S' = \begin{cases} x_{i_1} = b_1 + \sum_{x_j \in VL} c_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_{i_r} = b_r + \sum_{x_j \in VL} c_{rj} x_j \end{cases}$$

dove a sinistra del sistema appaiono tutte e sole le variabili dipendenti.

In altre parole, ogni variabile dipendente è scritta in modo unico come combinazione delle libere.

OSS: Un sistema S avrà diverse soluzioni parametriche a seconda della scelta di variabili libere e dipendenti, ma sono costanti il numero di VD e VL (vedremo più avanti)

DEF: Il numero di variabili dipendenti è detto rango del sistema e si indica con la lettera r o $rk(S)$.

SE S' È SOLUZIONE DI S ALLORA LE SOLUZIONI HANNO QUESTO SISTEMA

$$S' = \begin{cases} x_{i_1} = b_1 + \sum_{x_j \in VL} c_{1j} x_j \\ \\ x_{i_n} = b_j + \sum_{x_j \in VL} c_{jn} x_j \end{cases}$$

$$VD = \underbrace{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}}_{\text{variabili totali}}$$

$$V(S) = \{(\dots, \underbrace{b_i + \sum_{x_j} c_{1j} x_{j}, \dots}_{x_{ij} \in VL}, \underbrace{x_j}_{i_j \in VL} \dots, \underbrace{b_n + \sum_{x_j \in VL} c_{ij} x_j}_{x_{ij} \in VD})\}$$

Quindi soluzioni $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ scelte di valori per le variabili libere

SONO IN CORRISPONDENZA

Soluzione unica $\longleftrightarrow$ non ci sono variabili libere.

e.g.

• $S' = \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3} x_4 \\ \underbrace{x_3}_{VD} = \frac{3}{2} \underbrace{x_4}_{VL} \end{cases}$

VD: x_1, x_2, x_3

VL: x_4

$V(S) = \{ (2x_4, \frac{2}{3} x_4, \frac{3}{2} x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R} \}$

• $$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 4y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 + 3y \\ \boxed{2x = -y} \\ x = -1 - 4y \end{cases} \sim \begin{cases} -\frac{y}{2} = 1 + 3y \\ -\frac{y}{2} = -1 - 4y \\ x = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \frac{7}{2} y = -1 \\ \frac{7}{2} y = -1 \\ x = -\frac{y}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} y = -\frac{2}{7} \\ \underbrace{x}_{VD} = \underbrace{\frac{1}{7}}_{VL = \emptyset} \end{cases}$$

soluzione unica $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$rk(S) = 2$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

OSS: un sistema omogeneo ha sempre la soluzione $(0, \dots, 0)$

$$\sim \begin{cases} y = -3x \\ x = y - z \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ x = -3x - z \end{cases} \sim \begin{cases} y = -3x \\ 4x = -z \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y = -3x \\ \underbrace{z}_{VD} = \underbrace{-4x}_{VL} \end{cases} \qquad r_k(S) = 2,\ 1 \text{ variabili}$$

$$V(S) = \{(x, -3x, -4x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

VERIFICO PER $x=1$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[(x,-3x,-4x)]{\text{SOSTITUISCO}} \begin{cases} 3x - 3x = 0 \ \checkmark \\ x + 3x - 4x = 0 \ \checkmark \end{cases}$$

ABBIAMO 3 EQUAZIONI E 3 VARIABILI

- $$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3y + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y - 1 + 3y = 2 \\ z = 1 - 3y \\ -x + y + 1 - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ z = 1 - 3y \\ -x - 2y = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2 - 4y + 4y = 3 \\ z = 1 - 3y \\ x = 1 - 2y \end{cases} \sim \begin{cases} 2 = 3 \ \times \\ \text{''} \\ \text{''} \end{cases}$$

NON HA SOLUZIONI, IL NOSTRO SISTEMA È INCOMPATIBILE

Per ora le "mosse" che abbiamo per risolvere sistemi sono solo:

- MANIPOLARE SINGOLA EQUAZIONE
- SOSTITUIRE IL RISULTATO DI UN EQUAZIONE NELLE ALTRE.

Quali sistemi risolvo algoritmicamente con queste mosse?

DEF: Il termine di testa di un equazione è il termine relativo alla variabile di indice più basso che appare con coefficiente $\neq 0$ nell'equazione

TERMINI DI TESTA

e.g.:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

DEF: Un sistema S è a scala (row echelon) $\iff$ Per ogni i, se il termine di testa dell'i-esima equazione ha indice S_i, tutti i termini di testa successivi hanno indice strettamente maggiore, cioè $S_{i+1} > S_i$.

$$\begin{cases} a_{i s_i} x_{s_i} + \dots + \; + a_{in} x_n = b_i \\ a_{i+1\, s_{i+1}} x_{s_{i+1}} + \dots + a_{i+1\, n} x_n = b_{i+1} \\ \vdots \end{cases}$$

NIENTE QUA

I TERMINI DI TESTA DI UN SISTEMA A SCALA SONO DETTI PIVOT.

e.g.:
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

PIVOT

SISTEMA A SCALA
(LA GRANDEZZA DELLA SCALA DEVE ESSERE 1)

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA NON A SCALA

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

SISTEMA A SCALA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 \end{cases}$$

SISTEMA NON A SCALA
SALTO TROPPO GRANDE

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

A SCALA, INCOMPATIBILE

PROPOSIZIONE: ① Se un sistema a scala non ha equazioni nella forma $0 = b$ allora è compatibile e si risolve per sostituzione dal basso verso l'alto.

② Se un sistema a scala è compatibile il suo rango è $= \#$ pivot e le VD sono le variabili pivot.

③ Un sistema a scala è incompatibile $\Leftrightarrow$ contiene $0 = b$, $b \neq 0$.

e.g.: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 = 1 \\ \quad -x_2 + 2x_3 \quad = -1 \\ \qquad\qquad x_4 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} \quad '' \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} -x_1 + 2 + 4x_3 + 9 = 1 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -10 - 4x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

$\underbrace{x_1, x_2, x_4}_{VD \to \text{pivot}}$ $VL = \{x_3\}$

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -10 - 4x_3 \\ 1 + 2x_3 \\ x_3 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

• $\begin{cases} x_1 \quad -x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 \quad x_3 - 2x_4 \\ \underbrace{x_2}_{VD} = 1 \underbrace{-2x_3 + x_4}_{VL} \end{cases}$

$rk(S) = 2$, $V(S) = \{(x_3 - 2x_4, 1 - 2x_3 + x_4, x_3, x_4)\}$

• $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad 3x_3 = -6 \end{cases}$ $rk = 3 = \#$ variabili $\Rightarrow 0$ VL $\Rightarrow$ soluzione unica

$\sim \begin{cases} 2x_1 + 1 - 2 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ $V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

VERIFICA: $\begin{cases} 2\cdot 1 - 1(-1) + (-2) = 1 \\ 2(-1) - (-2) = 0 \\ 3(-2) = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} 1 = 1 \ \checkmark \\ 0 = 0 \ \checkmark \\ -6 = -6 \ \checkmark \end{cases}$

QUINDI, SAPPIAMO FARE: $\underset{\text{a scala}}{S'} \sim \underset{\text{soluzione prendibile}}{S''}$

VORREMMO $\underset{\text{qualunque}}{S} \sim \overset{?}{\ldots} \sim \underset{\text{a scala}}{S'}$

Quali "mosse" sono a nostra disposizione?

OVVIE:

- scambiare le righe $\begin{cases} y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

- moltiplicare riga per $\lambda \neq 0$ $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \\ \sim \\ (\frac{1}{2}) \end{matrix} \begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ x + z = 0 \end{cases}$

(non ci aiuta a mettere il sistema a scala)

- sostituire $\begin{matrix} x + 2y = 2 \\ x - z = 1 \end{matrix} \sim \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x = 1 + z \end{cases} \sim \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$

MA VOGLIO SOSTITUIRE SOLO QUANDO E' GIA' A SCALA

MENO OVVIO:

- Aggiungere a una riga un multiplo di un'altra.

$$\overset{-1}{\left\{\begin{aligned} x+2y\quad &= 2 \\ x\qquad -z &= 1 \end{aligned}\right.} \sim \left\{\begin{aligned} x+2y&=2 \\ x-x-2y-z&=1-2 \end{aligned}\right. \sim \left\{\begin{aligned} x+2y\quad &=2 \\ -2y+z &= -1 \end{aligned}\right.$$

PERCHÉ FUNZIONA?

DEF: $R_{i+\lambda j}S=$ sistema S in cui abbiamo sommato λ volte la j-esima riga all'i-esima.

e.g. $S=\left\{\begin{aligned} x+2y &= 2 \\ x\qquad -z &= 1 \end{aligned}\right.$ $\quad R_{2+(-1)1}S=\left\{\begin{aligned} x+2y &=2 \\ -2y-z &=-1 \end{aligned}\right.$

$$R_{1+2}\left(R_{2+(-1)1}S\right)=\left\{\begin{aligned} x\qquad -z&=1 \\ -2y-z&=-1 \end{aligned}\right.$$

OSS: $R_{i-\lambda j}(R_{i+\lambda j}S)=S$

Sto aggiungendo e sottraendo λ volte la j-esima riga all'i-esima.

Quindi se $V(S)\subseteq V(R_{i+\lambda j}S)$ allora applicato di nuovo

$$V(S)\subseteq V(R_{i+\lambda j}S)\subseteq V(R_{i-\lambda j}(R_{i\lambda}S))=V(S)$$

$\Rightarrow$ ho fatto vedere che sono uguali

$(I=J \Leftrightarrow I\supseteq J \text{ e } I\subseteq J)$

prendiamo S sistema di m equazioni su n variabili

$$S=\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ &\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}\right.$$

Sia $(a_1, \dots, a_n) \in V(S)$

voglio vedere che $(a_1, \dots, a_n) \in V(R_{i+\lambda j} S)$

$$R_{i+\lambda j} S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = b_i + \lambda b_j \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

i-esima

$(a_1, \dots, a_n)$ risolve le righe rimaste invariate

$\Rightarrow$ basta vedere la i-esima

"I^a DIMOSTRAZIONE"

$(a_{i1} + \lambda a_{j1})a_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})a_n = b_i + \lambda b_j$

$\sim (a_{i1}a_1 + \dots + a_{in}a_n) + (\lambda a_{j1}a_1 + \dots + \lambda a_{jn}a_n) = b_i + \lambda b_i$

$$\sim \underbrace{(a_{i1}a_1 + \dots + a_{in}a_n)}_{\text{TERMINE A SX DELL' I-ESIMA RIGA}} + \lambda \underbrace{(a_{j1}a_1 + \dots + a_{jn}a_n)}_{\text{TERMINE A SX DELLA J-ESIMA RIGA}} = b_i + \lambda b_j$$

$\sim \quad b_i + \lambda(b_j) = b_i + \lambda b_j$ ✓

e.g.:
$$S = \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \in V(S)$$

$$R_{2-1} S = \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - x - 2y - y - 2z + z = 2 - 1 \end{cases}$$

SOSTITUISCO LA SOLUZIONE

$$\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-2\cdot 0+0=2-1$$

$$-\frac{4}{3} \quad +\frac{1}{3} \quad = -1$$

$$\frac{4}{3} \quad +\frac{2}{3} \quad = 2$$

DEF: $R_{i,j} S \overset{def}{=}$ sistema con righe i, j scambiate

· $R_{\lambda i} S \overset{def}{=}$ sistema con riga i-esima moltiplicata $\lambda \neq 0$

e.g.

$$S = \begin{cases} y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \sim R_{12} S = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\sim R_{3-1}(R_{12} S) = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$R_{3+2(2)}(R_{3-1}(R_{12} S)) = \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ -5z = 4 \end{cases}$$

$$V(S) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

TEOREMA (ELIMINAZIONE DI GAUSS)

Il seguente algoritmo riduce un sistema a scala.

① Trova la variabile con indice minimo, scambia righe per portarla alla prima riga.

② Somma multipli della prima riga alle successive per cancellare ogni altro termine con indice minimo. La 1^a variabile della prima riga ora è il primo pivot.

③ Se il sistema è a scala ho finito. Se non lo è ripeto dal punto (1) ignorando la 1^a riga.

e.g.

$$S = \begin{cases} -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

①

$$R_{12} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ \parallel \\ \parallel \end{cases}$$

②

$$R_{31} \begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

③ + ① + ②

SOMMO LA 2 RIGA ALLA 3

$$R_{3+2}\begin{cases} // \\ // \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \sim R_{4-3}\begin{cases} // \\ // \\ // \\ 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases}$$

$$S' = \begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad -x_5 = 0 \\ -x_2 \quad +x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_4 - x_5 = -3 \end{cases}$$

$R_R = 4$

1 variabile libera.

"ORA RISOLVO PER SOSTITUZIONE"

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_5}{2} \\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_5 \\ x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{x_5}{2} \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{3}{2} - \frac{x_5}{2} \\ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_5 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_5 \\ -\frac{3}{2} + \frac{x_5}{2} \\ x_5 \end{array} \right) \;\middle|\; x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

e.g. (da inizio lezione)

$$S = \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \frac{x_1}{3} + x_3 + \frac{x_4}{2} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + x_4 = 0 \end{cases}$$

$R_{2+\frac{1}{3}(1)}$

$R_3 + \frac{1}{3}(1)$

$R_4 + \frac{1}{3}(1)$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{6} = 0 \\ -\frac{x_2}{2} + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ -\frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{6} = 0 \end{cases}$$

$R_{3+\frac{1}{2}(2)}$

$R_4 + \frac{1}{2}(2)$

$$\begin{cases} x_2 - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{6} = 0 \\ \frac{x_3}{2} - \frac{3}{4}x_4 = 0 \\ -\frac{x_3}{6} - \frac{3}{12}x_4 = 0 \end{cases}$$

$R_{4+\frac{1}{3}(3)}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_4}{2} = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{6} = 0 \\ \frac{x_3}{2} - \frac{3}{4}x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$r_k S = 3$

$$V(S) = \left\{\left(2x_4, \frac{2}{3}x_4, \frac{3}{2}x_4, x_4\right)\right\}$$

"SISTEMI LINEARI"

e.g.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = 1 \\ 3x_1 \quad\quad + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \quad\quad = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = 1 \\ 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ +3x^2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = 1 \\ 3x^2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad - x_4 = 1 \\ 3x^2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 0 = -2 \quad \times \end{cases}$$

SISTEMA INCOMPATIBILE

e.g
$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 2 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$r_K(S) = 2 \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - x_4 ,\ 1 - 3x_3 + x_4 ,\ x_3 ,\ x_4 \right) \right\}$$

DEF: La dimensione di $V(S)$ ($\dim(V(S))$) é il numero di variabili libere in una soluzione di S.

Quindi $\dim(V(S)) = \#$ variabili $- rk(S)$

e.g.

$$S = \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim V(S) = 2 \quad (= 4 - rk(S))$$

LA DIMENSIONE DI UN SISTEMA INCOMPATIBILE SI PUÓ DIRE INDEFINITA O PIÚ CORRETTAMENTE UGUALE A -1.

WARNING: $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

É un sistema nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4

$\Rightarrow V(S) \subset K^4$ ha dimensione $4 - 2 = 2$

e.g: $\mathbb{K} = \mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$

$\mathbb{Z}$ modulo $2\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

OGNI COEFFICIENTE E TERMINE NOTO É 0 OPPURE 1

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

SOTTRARRE E SOMMARE SONO LA MEDESIMA COSA

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 \quad = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$r_K(S) = 3 \sim \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 1 + x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

PERCHÉ IN QUESTO CAMPO COME DETTO SOPRA SOMMA O DIFFERENZA SONO LO STESSO

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + x_3 \\ 1 + x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{F}_2 \right\}$$

2 SOLUZIONI : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

OSS: $|K| = \infty$ allora $|V(S)| \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases}$

$|K| = q$ allora $|V(S)| \begin{cases} 0 \\ 1 \\ q^{\dim(V(S))} \end{cases}$

"SISTEMI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO"

K parametro che assume valori in $\mathbb{K}$

S_K sistema in cui coefficienti e termini noti dipendono da k.

COME LO TRATTIAMO?

Trattiamo le funzioni di k come un numero qualsiasi stando attenti a non dividere per 0.

e.g.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = k \\ x_1 - kx_2 - kx_4 = k \end{cases}$$

VOGLIO RISOLVERE AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = k - 1 \\ (-k+1)x_2 - 2x_3 + (k+1)x_4 = k - 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_3 - 2x_4 = k \\ (k-3)x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = -\frac{k}{2} \\ (-k+3)x_4 = (-k+3)\left(-\frac{k}{2}\right) \end{cases}$$

DEVO CONTROLLARE

$k=3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = -\frac{3}{2} \\ 0=0 \end{cases}$$

$r_k(S) = 3$

$\dim V(S) = 1$

$k \neq 3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = -\frac{k}{2} \\ \frac{(-k+3)}{(-k+3)} x_4 = \frac{(-k+3)}{(-k+3)}\left(-\frac{k}{2}\right) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = -\frac{k}{2} \\ x_4 = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

$r_k = 4$

SOLUZIONE UNICA

$$\sim \begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = -1 + \frac{k}{2} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

PER OGNI $k \neq 3$

SOLUZIONE $\left(-k, -1+\frac{k}{2}, 0, -\frac{k}{2}\right)$

"NOTAZIONE VETTORIALE"

DEF: $\mathbb{K}^n = \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}, +, \cdot \right)$

- $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ e.g. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

- SE $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ e.g. $\left(-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

e.g. $S = \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 + x_4 \end{cases}$

$$V(S) = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - x_4, \; 1 - 3x_3 + x_4, \; x_3, \; x_4 \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x_3 - x_4 \\ 1 - 3x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

DEF: La **notazione vettoriale** per $V(S)$

è $V(S) = \left\{ v_0 + \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ \\ a_{0,m} \end{pmatrix} + x_{J_1} \begin{pmatrix} a_{1,J} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{pmatrix} + x_{J_{n-r}} \begin{pmatrix} a_{n,J} \\ \vdots \\ a_{n-r,m} \end{pmatrix} \right\}$$

$r = r_k(S)$

e.g. : $\mathbb{K} = \mathbb{F}^2$

$$S = \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x_3 \\ 1+x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{F}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

"SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO"

DEF: dato $S = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m = b_m \end{cases}$

Il sistema omogeneo associato S_0 è:

$$S_0 = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m = 0 \end{cases}$$

In che rapporto sono $V(S)$ e $V(S_0)$?

OSS: S omogeneo $\iff 0 \in V(S) \iff V(S) = V(S_0)$

e.g.

$$S = \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$S_0 = \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 \; \frac{-3x_3 - x_4}{2} \\ x_2 = -3x_3 + x_4 \end{cases} \qquad V(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

È $V(S)$ SENZA IL TERMINE COSTANTE!

TEOREMA: S sistema compatibile, $v_0 \in V(S) \subset \mathbb{K}^n$

Allora ogni soluzione di S si scrive come $v_0 + w$ con $w \in V(S_0)$

IN ALTRE PAROLE $V(S) = v_0 + V(S_0)$

Chiamiamo v_0 una soluzione particolare di S.

DIM: VOGLIO MOSTRARE

(A) SE $w \in V(S_0)$ $v_0 + w \in V(S)$, che è come dire che $V(S_0) \subseteq V(S)$

(B) SE $v_0, v_1 \in V(S)$ $v_0 - v_1 \in V(S_0)$, che è come dire che

$V(S) \subseteq v_0 + V(S_0)$, infatti $v_1 = v_0 + \underbrace{(v_1 - v_0)}_{\in V(S_0)} \in v_0 + V(S_0)$

(A) $$v_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

VOGLIO MOSTRARE CHE

$$v_0 + w = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$ soddisfa l'i-esima equazione di S per ogni i.

$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i$ ← i-esima equazione

$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = b_i$

sostituendo $v_0 + w$

S

$$\underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n)}_{=\, b_i \text{ PERCHÉ } v_0 \in V(S)} + \underbrace{(a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n)}_{=\, 0 \text{ PERCHÉ } w \in V(S_0)} = b_i$$

$\rightsquigarrow b_i + 0 = b_i$ ✓

(B)

$$v_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad v_1 - v_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma_n - \alpha_n \end{pmatrix}$$

Voglio mostrare che $v_1 - v_0$ soddisfa l'i-esima equazione di S_0

cioè che

$$a_{i1}(\gamma_1 - \alpha_1) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \alpha_n) = 0$$

$$\underbrace{(a_{i1}\gamma_1 + \dots + a_{in}\gamma_n)}_{\substack{\parallel \\ b_i \text{ PERCHÉ} \\ v_1 \in V(S)}} - \underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n)}_{\substack{\parallel \\ b_i}} = 0$$

$\leadsto b_i - b_i = 0 \quad \square$

COROLLARIO: SE $V(S) = \left\{ v_0 + \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\}$

ALLORA $V(S_0) = \left\{ \sum_{x_j \in VL} x_j v_j \right\}$

"NOTAZIONE MATRICIALE"

DEF: Una **matrice** $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una collezione di mn elementi di $\mathbb{K}$ indicizzati da due indici $1 \le i \le m$ (indice di riga), $1 \le j \le n$ (indice di colonna).

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La i-esima riga A_i di A è il vettore riga $(a_{i1} \dots a_{in})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La j-esima colonna A_j di A è il vettore colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e.g.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = (1 \ \ 0 \ \ 1)$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = (1 \ \ 2)$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

NOTAZIONE: A volte scriveremo

$$A = (A^1 \dots A^n) \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

RIGHE

COLONNE

DEF: Dato un sistema $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

di m equazioni in n variabili.

La matrice dei coefficienti di S è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} = coefficiente di x_j nell'i-esima equazione.

Il vettore dei termini noti di S è:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice completa di S è:

$$(A \mid b) = (A^1 \dots A^n \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

e.g.:

$$S = \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 \quad\quad - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 \quad\quad - 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

DEF: Le mosse di riga $R_{i+\lambda j}$, R_{ij}, $R_{\lambda i}$ sono definite anche sulle matrici e $R_*(A|b)$ è la matrice completa di $R_* S$, in altre parole, fare mosse nel sistema o nella matrice è la stessa cosa.

DEF: Una matrice A è a scala se per ogni i posto $a_{i,j}$ l'elemento $\neq 0$ più a sinistra dell'i-esima riga, allora $a_{i+d,\, j-k} = 0$ per ogni $d > 0$, $k \geq 0$. In tal caso il primo termine $\neq 0$ di ogni riga è detto PIVOT.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ a scala} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ non a scala}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

OSS: S è a scala $\iff$ $(A|b)$ è a scala

Quindi, nuova tattica:

$$\underset{\text{sistema}}{S} \longrightarrow \underset{\text{matrice completa}}{(A \mid b)} \longrightarrow \underset{\text{a scala}}{(A' \mid b')} \longrightarrow \underset{\text{a scala}}{S'}$$

e.g.:

$$S: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad (A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3 - 2(1)}{\overset{R_2 - (1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{R_3 - \frac{1}{2}(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y = 1 \\ 0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

INCOMPATIBILE

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \qquad (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 1 \\ -2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{x_4}{2} - \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_0} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V(S_0)} \right\}$$

OSS: S compatibile $\iff$ quando $(A'|b') \sim (A|b)$ forma a scala di $(A|b)$, nessun pivot di $(A'|b')$ sta nell'ultima colonna.

(la riga di un equazione $0=1$)

e.g.:

$$S = \begin{cases} x_1 + kx_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + (k-2)x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - kx_4 = 0 \end{cases}$$

risolvi per $k \in \mathbb{R}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & (k-2) & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -k & 0 \end{array}\right)$$

PER IL SISTEMA OMOGENEO b NON È NECESSARIO

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1+k & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2k & -k & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 2 & 1+k & -2 \\ 0 & 1 & 2-2k & -k \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & -2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k & -2k+2 & 0 \end{array}\right)$$

ASSUMO $K \neq 1$, poi ci torno dopo.

$$\frac{-1+2k}{k-1} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & -2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-6k & 0 \end{array}\right)$$

$-2k+2+(-2)(-1+2k) = -2k+2+2-4k$

$K \neq 1,\ K \neq \frac{2}{3}$ SOLUZIONE UNICA $\left(rk = 4 = \#\ \text{variabili} \right)$

$K = \frac{2}{3}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk = 3$, compatibile

$\Rightarrow \dim V(S) = 1$

x_4 variabile libera

$K = 1$ SOSTITUISCO NELL'ULTIMO PASSAGGIO IN CUI NON AVEVO ASSUNTO $K \neq 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

COMPATIBILE, $r_k = 3 \Rightarrow \dim V(S) = 1$, x_4 VL

VADO A RISOLVERE

$k \neq 1, \frac{2}{3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & -2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-6k & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + kx_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + (k-2)x_4 = 0 \\ (k-1)x_3 + (-2k+2)x_4 = 0 \\ (4-6k)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(altro modo di vederlo: $r_k = 4$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE UNICA, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione)

$\Rightarrow V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$k = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$V(S) = \left\{ x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$K=\frac{2}{3}\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ -\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 = \frac{2}{15}x_4 \\ x_2 = \frac{17}{15}x_4 \\ x_3 = \frac{x_4}{5} \end{cases} \Longrightarrow V(S) = \left\{ x_4 \begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{17}{15} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e.g.: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$ $\quad \{0,1,2\}$ $\quad -1 = 2$

CLASSE DI RESTO MODULO 3. $\quad 2\cdot 2 = 1$

$$S = \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ y + 2kz = 2 \\ x + 2y + (k+1)\cdot z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 2 \\ 1 & 2 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2k & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{array}\right)$$

DEVO CONTROLLARE $k=1$

$K=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} \ast \\ \ast \\ 0=1 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE}$$

$K \neq 1$

$$\begin{cases} x = 2\left(1 + \dfrac{2k}{k+2} + 1 + \dfrac{2}{k+2}\right) = 1 + \dfrac{k+1}{k+2} \\[2ex] y = \left(-\dfrac{2k}{k+2} + 2 = 2\left(\dfrac{2k}{k+2}\right) + 2 = \dfrac{k}{k+2} + 2 \\[2ex] z = \dfrac{1}{k+2} \end{cases}$$

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{k+1}{k+2} \\[2ex] 2 + \dfrac{k}{k+2} \\[2ex] \dfrac{1}{k+2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$k=0$ $\qquad$ $k=2$

"SPAZI VETTORIALI"

DEF: Un $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale è una quaterna $(V, +, 0_V, \cdot)$, dove

Ⓐ $(V, +, 0_V)$ è un gruppo commutativo con operazione $+$ e elemento neutro 0_V.

$(v+(w+u)) = (v+w)+u$, $v+0 = v$, $v+w = w+v$

$v+(-v) = 0_V)$

Ⓑ abbiamo una moltiplicazione

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

TALE CHE

- $\gamma(\lambda \cdot v) = (\gamma\lambda) \cdot v$
- $(\gamma+\lambda)v = \gamma \cdot v + \lambda \cdot v$
- $\lambda(v+v_1) = \lambda v + \lambda v_1$
- $\lambda \cdot 0_V = 0_V$, $1 \cdot v = v$, $0 \cdot v = 0_V$

e.g.: $(\mathbb{K}^n, +, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdot)$ è uno spazio vettoriale perché le proprietà valgono per il campo $\mathbb{K}$ e quindi su ogni componente.

$$3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

|| distributiva ||

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

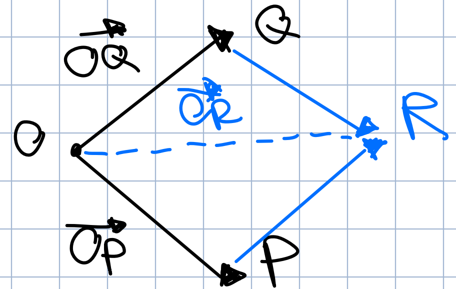
VERIFICO ANCHE PROPRIETÁ DISTRIBUTIVA:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\lambda (v + v_1) \overset{?}{=} \lambda v + \lambda v_1$$

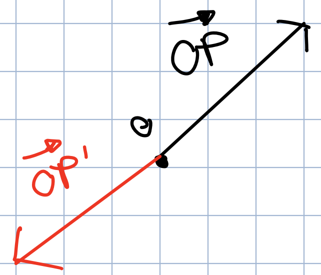
$$\lambda \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = \lambda \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \lambda b_n \end{pmatrix}$$

e.g.: $V_0 = \{$ Segmenti orientati nel piano Euclideo centrati in un punto O $\}$



$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$ R é il vertice del parallelepipedo con lato $\vec{OP}, \vec{OQ}$ opposto a O per costruzione $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} + \vec{OP}$ l'operazione é associativa. $O_V = \vec{OO}$

l'inverso é il segmento con stessa direzione, stessa lunghezza, verso opposto.



parallelogramma degenere

$R = O \Rightarrow \vec{OP} + \vec{OP'} = \vec{OO} = 0_V$

$$\lambda \cdot \vec{OP} = \begin{cases} \lambda \geq 0 & \text{stesso verso e direzione, lunghezza moltiplicata per } \lambda \\ \lambda < 0 & \text{stessa direzione, verso opposto, lunghezza moltiplicata per } |\lambda| \end{cases}$$

e.g.: $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +, O_{m,n}, \cdot)$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- $$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

e.g: $\mathbb{K}[T]$ = polinomio nella variabile T

- $p = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$, $q = b_0 + b_1 T + \dots + b_n T^n$

  $p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) T + \dots + (a_n + b_n) T^n$

- $0_{\mathbb{K}[T]} = 0$
- $\lambda p = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_n T^n$

$-2\left((T^2 - T + 1) + (T^3 - 2)\right) = -2T^3 - 2T^2 + 2T + 2$

e.g: $\mathbb{K}_{\leq d}[T]$ = polinomio di grado $\leq d$ con le stesse operazioni

$\mathbb{R}_{\leq 2}[T] = \{a + bT + cT^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

e.g: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ = funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

- $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
- $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
- $\underline{0}$ funzione costante 0 é continua

$(\lambda(f+g))(x) = \lambda (f+g)(x) = \lambda(f(x) + g(x))$

$= \lambda f(x) + \lambda g(x)$

quindi $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ (distributività)

"SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI"

Quando abbiamo una nuova classe di oggetti vogliamo capire:

① Quali trasformazioni

② Sotto - oggetti

③ "buona descrizione"

Nel nostro caso partiamo da (2)

DEF: Sia $(V, +, 0_V, \cdot)$ con $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. Un sottospazio $W \subset V$ è un sottoinsieme contenente 0_V tale che $(W, +, 0_V, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, dove le operazioni sono le restrizioni delle operazioni di V.

PROPOSIZIONE: Un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$

① $0_V \in W$

② Se $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$

③ Se $w \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \in W$

e.g. • $\{0_V\}$ è un sottospazio di V per ogni V, infatti $0_V \in V$, $0_V + a = a$ e $\lambda 0_V = 0_V$

• $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, infatti

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0+0 \\ -0 \end{pmatrix}$ SI OTTIENE CON $x = y = 0$

② $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0+y_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \in W \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \in W$ due elementi generici

$\quad \| \qquad\qquad \|$

$\quad w_0 \qquad\qquad w_1$

$$w_0+w_1 = \begin{pmatrix} x_0+x_1 \\ x_0+y_0+x_1+y_1 \\ -y_0-y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0+x_1) \\ (x_0+x_1)+(y_0+y_1) \\ -(y_0+y_1) \end{pmatrix}$$

$\in W$ scegliendo $x = x_0+x_1$, $y = y_0+y_1$

③ $\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(x+y) \\ \lambda(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x+\lambda y \\ -\lambda y \end{pmatrix} \in W$

scegliendo $\lambda x, \lambda y$

e.g. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in W \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lo ottengo con $x=2$, $y=1$ $\Rightarrow$ appartiene a W.

- $\left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ NON É UN SOTTO SPAZIO, INFATTI:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\x+y\\-y\end{pmatrix}\sim\begin{cases}x+1=0\\x+y=0\\-y=0\end{cases}\sim\begin{cases}x=-1\\y=1\\y=0\end{cases}\quad \times \quad \text{INCOMPATIBILE}$$

- $\left\{\begin{pmatrix}x^2\\x+y\\-y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2\\1+1\\-1\end{pmatrix}\in W \quad \text{ma} \quad -\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\notin W$$

perché $x^2=-1$ non ha soluzioni reali $\Rightarrow$ NON É UN SOTTOSPAZIO

- $\left\{\begin{pmatrix}x\\x+y\\\sqrt[3]{x^3+y^3}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R}\right\}$

- $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$ $\quad$ - $\lambda\begin{pmatrix}x\\x+y\\\sqrt[3]{x^3+y^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda x+\lambda y\\\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda x+\lambda y\\\sqrt[3]{\lambda x^3+\lambda y^3}\end{pmatrix}\in W$$

- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in W$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in W$ $\quad$ $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\in W$?

$$\begin{cases}x=1\\x+y=2\\\sqrt[3]{x+y}=2\end{cases}\sim\begin{cases}x=1\\y=1\\x^3+y^3=2^3=8\end{cases}\sim\begin{cases}x=1\\y=1\\2=8\end{cases}\quad \times \quad \text{INCOMPATIBILE}$$

- $V = M_{2,2}(\mathbb{K})$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, d \in \mathbb{K} \right\}$$ È UN SOTTOSPAZIO

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a, b, d = 0$

- $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & d_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 + b_0) & (b_0 + b_1) \\ (b_0 + b_1) & (d_0 + d_1) \end{pmatrix} \in W$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \in W$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in W$$

- $V = \mathbb{K}_{\leq 2}[T]$ = polinomi in T di grado ≤ 2

$W = \{ a(T-1) + b(T^2 - T) \mid a, b \in \mathbb{K} \}$ È UN SOTTOSPAZIO [VERIFICA PER ESERCIZIO]

- $W' = \{ a(T-1) + b(T^2 - T) + c(T^2 - 2T + 1) \mid a, b, c \in \mathbb{K} \}$

È UN SOTTOSPAZIO

OSS: $W' \supseteq W$, però $T^2-2T+1 = T^2-T-(T-1)$

quindi $a(T-1)+b(T^2-1)+c(T^2-2T-1) =$

$= a(T-1)+b(T^2-T)-c(T-1)+c(T^2-T) =$

$= (a+c)(T-1)+(b+c)(T^2-T) \in W$

quindi $W = W^1$

Quindi la presentazione di W^1 ha ridondanza.

e.g. $\begin{cases} x \quad\quad + z = 0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$ $\qquad V(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ è un sottospazio

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione

② $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in V(S) \Rightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 \quad\quad + z_0 + z_1 = 0 \\ -x_0 - x_1 + y_0 + y_1 + z_0 + z_1 = 0 \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(x_0+z_0)}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(x_1+z_1)}} = 0 \; ✓ \\ \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(-x_0+y_0+z_0)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(-x_1+y_1+z_1)}} = 0 \; ✓ \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in V(S)$

③ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in V(S) \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_0 \quad + \lambda z_0 = 0 \\ -\lambda x_0 + \lambda y_0 + \lambda z_0 = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} \lambda (x_0 + z_0) \quad = 0 \ \checkmark \\ \lambda(-x_0 + y_0 + z_0) = 0 \ \checkmark \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in V(S), \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \in V$

- $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ $V(S)$ NON È UN SOTTOSPAZIO

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V(S)$ $\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 + 0 = 2 \ \times \end{cases}$ INCOMPATIBILE

- $\begin{cases} x^2 \quad + \quad z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ $V(S)$ NON È UN SOTTOSPAZIO

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(S)$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \notin V(S) \Rightarrow \begin{cases} 2^2 - 2 = 0 \ \times \\ \quad // \end{cases}$ INCOMPATIBILE

PRESENTAZIONI PARAMETRICHE, CARTESIANE.

DEF: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $M \subseteq V$ sottoinsieme. Il sottospazio generato di M è:

$\mathrm{Span}\,\mathcal{U} = \{ \sum_{v_J \in J} a_J v_J \mid J \subseteq \mathcal{U}$ finito, $a_J \in \mathbb{K} \}$

Se $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_s\}$ finito, allora

$\mathrm{Span}\,\mathcal{U} = \{a_1 v_1 + \dots + a_s v_s \mid a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}\}$

NOTAZIONE: Una scrittura $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ è una combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_s$

e.g. $\mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) \subset \mathbb{R}^3$

$$= \left\{a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_1+a_2\\-a_1\end{pmatrix}\right\}$$

· $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{K})$

$$= \left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\right\}$$

· $\mathrm{Span}\left(\left\{1, T^2, T^4, \dots, T^{2n}, \dots\right\}\right) \subset \mathbb{R}[T]$

$= \{$ POLINOMI IN T CON SOLO TERMINI PARI $\}$

$3 + T^6 - T^{12} \in$, $T^2 + T^4 - 3T^8 \in$

PROPOSIZIONE: $\mathrm{Span}\,\mathcal{U}$ è un $\mathbb{K}$-sottospazio vettoriale di V.

DIM: per semplicità $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_s\}$

$\mathrm{Span}\, \mathcal{U} = \{a_1 v_1 + \dots + a_s v_s\}$

① $0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_s$ ✓

② $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$, $v' = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$

$v + v_1 = (a_1 v_1 + \dots a_s v_s) + (b_1 v_1 + \dots + b_s v_s) =$

$= (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_s + b_s) v_s \in \mathrm{Span}\, \mathcal{U}$

③ $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ $\lambda v = \lambda(a_1) v_1 + \dots + \lambda(a_s)$

$\in \mathrm{Span}\, \mathcal{U}$ $\square$

NOTAZIONE: Una presentazione parametrica per $W \subset V$ è una riscrittura $W = \mathrm{Span}\, \mathcal{U}$.

OSS: $\mathrm{Span}\, \mathcal{U}$ è il più piccolo sottospazio contenente $\mathcal{U}$.

e.g. $W = \{p(T) \in \mathbb{K}_{\leq 2}[T] \mid p(1) = 0\}$

allora $W = \mathrm{Span}\{T-1, T^2-T\} = \mathrm{Span}\{T-1, T^2-2T+1\} =$

$= \mathrm{Span}\{T^2-T, T^2-2T+1\} = \mathrm{Span}\{T-1, T^2-T, T^2-2T+1\}$

PROPOSIZIONE: Se S è un sistema omogeneo in n variabili, allora $V(S) \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio vettoriale.

DIM: $V(S) = \{x_{J_1} v_{J_1} + \dots + x_{J_{n-r}} v_{J_{n-r}}\}$

dove $x_{J_1}, \dots, x_{J_{n-r}}$ VARIABILI LIBERE

$\Rightarrow V(S) = \mathrm{Span}\{v_{J_1}, \dots, v_{J_{n-r}}\}$. $\square$

ESEMPIO SOPRA: RIFARE DIMOSTRAZIONE COPIANDO ESEMPIO

e.g. $\{x-y-z=0\} \subset \mathbb{R}^3$

è dato da $\quad x = y+z$

$$V(S) = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ [ESEMPIO DI PRIMA]

e.g. $\begin{cases} x \quad\quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \quad\quad = -z \\ \quad\; y \quad = -2z \end{cases} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

NOTAZIONE: Una scrittura nella forma $W = V(S)$ (o $W : S$)

è una presentazione cartesiana per $W \subseteq \mathbb{K}^n$

e.g. $\cdot\ W : p(1) = 0 \subset \mathbb{K}_{\leq 2}[T]$

$\cdot\ W : a_{1,2} = a_{21} \in M_{2,2}(\mathbb{K})$

SONO PRESENTAZIONI CARTESIANE?

PARAMETRICA $\leftrightarrow$ CARTESIANA?

$$W : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ CARTESIANA

PER OTTENERE PRESENTAZIONE PARAMETRICA RISOLVO IL SISTEMA

E SCRIVO SOLUZIONE PARAMETRICA IN NOTAZIONE VETTORIALE.

"PARAMETRICA $\rightarrow$ CARTESIANA"?

$W = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq \mathbb{K}^n$

Cerco un sistema lineare omogeneo $m \times n$ S tale che $W = V(S)$

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ equazione lineare generica in n variabili

Se $v_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$ allora bisogna imporre che v_i risolva l'equazione
è come chiedere che $a_1 x_{i1} + \dots + a_1 x_{in} = 0$, un equazione nelle variabili $a_1, \dots, a_n$

Quindi se imponiamo che l'equazione sia soddisfatta da $v_1, \dots, v_s$ otteniamo:

$$\begin{cases} x_{11} a_1 + \dots + x_{1n} a_n = 0 \\ \vdots \\ x_{s1} a_1 + \dots + x_{sn} a_n = 0 \end{cases}$$

un sistema nelle variabili $a_1, \dots, a_n$

risolviamo

$$\begin{cases} a_{i_1} = \sum\limits_{a_J \in VL} b_{1J} a_J \\ \vdots \\ a_{i_d} = \sum\limits_{a_J \in VL} b_{dJ} a_J \end{cases}$$

SOLUZIONE GENERALE

$$\left(\dots, \sum_{a_J \in VL} b_{1J} a_J, \dots, a_J, \dots, \sum_{a_J \in VL} b_{dJ} a_J, \dots \right)$$

Per ogni variabile libera a_J abbiamo un'equazione in cui $a_J = 1$ e le altre variabili libere sono uguali a 0. Queste equazioni formano un sistema di equazioni S tale che $V(S) = W$

e.g. $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ voglio S t.c. $V(S) = W$

① Cerco equazioni che si annullano in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

eq generica $\quad ax + by + cz = 0$

SOSTITUISCO

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 & (1,1,0) \text{ SOLUZIONI} \\ a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot (-1) = 0 & (1,2,-1) \text{ SOLUZIONI} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -c \\ b = c \leftarrow \text{LIBERA} \end{cases}$$

② Per ogni VL nei coefficienti ho 1 equazione

in questo caso $W: -x + y + z = 0$

$\uparrow c = 1$

e.g. $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

① $a - 2b + 2c = 0 \qquad (1,-2,2)$ SOLUZIONI

$\sim a = \underbrace{2b - 2c}_{\text{LIBERE}}$

② $W: \begin{matrix} b=1,\ c=0 \\ b=0,\ c=1 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y & =0 \\ -2x & +z=0 \end{cases}$

VERIFICA: $\begin{cases} 2x+y & =0 \\ -2x & +z=0 \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} 2x+y & =0 \\ y+z & =0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y=-z \end{cases}$$

SOLUZIONE: $z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

"DESCRIZIONE PARAMETRICA"

$$W = \text{Span}\, \mathcal{U} = \{a_1 v_1 + \dots + a_s v_s \mid a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}\}$$

$$\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_s\}$$

OTTIMA PER DESCRIVERE GENERICI VETTORI $\in W$

"PRESENTAZIONE CARTESIANA"

$$W: \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

OTTIMO PER DIRE SE UN CERTO v APPARTIENE A W

e.g.

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

voglio presentazione cartesiana $\quad ax+by+cz+dt=0$ eq generale

$$\begin{cases} a+b+2c = 0 \\ -a+3b+2c+2d=0 \\ 2b+2c+d=0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} a+b+2c = 0 \\ 2b+2c+d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -c + \frac{d}{2} \\ b = -c - \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W: \begin{array}{l} c=1,\ d=0 \\ c=0,\ d=2 \end{array} \begin{cases} -x-y+z = 0 \\ x-y+2t = 0 \end{cases}$$

risolvo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{z}{2} - t \\ y = \frac{z}{2} + t \end{cases} \Rightarrow W = \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{UN ELEMENTO IN MEN}} \right\}$$

Chiaramente $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \supseteq$

$$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Contenimento inverso? Proviamo il primo

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \in \text{Span}\,\mathcal{U}\right)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 1 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2 \\ \quad + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 = 1 - \frac{a_3}{2} \\ a_2 = -\frac{a_3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{- \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a_3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0}$$

Posso riscrivere questo vettore in più di un modo perché una combinazione di v_1, v_2, v_3 fa 0.

DOMANDE:

- Cos'è una presentazione parametrica minima?
- Quando è che la scritta $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = v$ è unica?
- Come capire se $\text{Span}\, U = \text{Span}\, U'$?

"INDIPENDENZA LINEARE, BASI"

DEF: Dei vettori $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente dipendenti se esistono $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ non tutti 0 tali che $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = 0_V$

linearmente indipendenti altrimenti.

e.g. • v_1 è linearmente dipendente $\Leftrightarrow a v_1 = 0_V$ con $a \neq 0 \Leftrightarrow v_1 = 0_V$

• SE $v_J = 0_V$ allora $v_1, \dots, v_J, \dots, v_s$ sono sempre dipendenti, infatti:

$$\underbrace{0 \cdot v_1}_{0_V} + \dots + \underbrace{1 \cdot v_J}_{1 \cdot 0_V} + \dots + \underbrace{0 \cdot v_s}_{0_V} = 0_V$$

• v_1, v_2 sono dipendenti se $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V$ con a_1, a_2 non entrambi 0_V.

- $a_1 = 0, a_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = 0_V$
- $a_2 = 0, a_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = 0_V$
- $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$

quindi sono proporzionali.

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ SONO INDIPENDENTI

• $t^2 - 2t + 1, t^2 + t - 1$ SONO INDIPENDENTI

$$\bullet \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ SONO DIPENDENTI

$$\left(A = -2B \sim A + 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

e.g. $\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ DIPENDENTI / INDIPENDENTI?

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

HA PIÚ DI 2 SOLUZIONI

$$\sim \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ x - y + 3z \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 VL $\Rightarrow \infty$ SOLUZIONI

$\Rightarrow$ SONO DIPENDENTI, AD ESEMPIO

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \sim (-2, 1, 1) \text{ SOLUZIONI}$$

$$-2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• $T^2-2T+2,\ T^2-1,\ T^2+T$ INDIPENDENTI?

$$a(T^2-2T+1)+b(T^2-1)+c(T^2+T)=0$$

$$\sim (a+b+c)T^2+(-2a+c)T+(a-b)=0$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -2a+c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a-b & =0 \\ -2b+c & =0 \\ 2b+c & =0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a-b & =0 \\ -2b+c & =0 \\ 2c & =0 \end{cases} \sim \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow T^2-2T+1,\ T^2-1,\ T^2+T$ INDIPENDENTI

• $$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\} \in M_{2,2}(\mathbb{F}_3)$$

INDIPENDENTI?

$$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ c'é VL $\Rightarrow$ SONO DIPENDENTI

per esempio: $2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

OSS: $v_1, \dots, v_s$ dipendenti

$\Leftrightarrow \exists_j$ t.c. $v_j = a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + \dots + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_s v_s$

$\Leftrightarrow v_j \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_s\}$

$\Leftrightarrow \text{Span}\{v_1, \dots, v_s\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_s\}$

DIM: $a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = 0$, $a_j \neq 0$ allora

$a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_s v_s = -a_j v_j$

$$\sim \sum_{i \neq j} -\frac{a_i}{a_j} v_i = v_j \sim \sum_{i \neq j} a_i v_i = v_j$$

Quindi se $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$
$\in \text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$

$$v = \underset{\in}{\sum_{i \neq J}} \underset{\cap}{a_i v_i} + a_J \Big(\underset{\cap}{\sum_{i \neq J}} \partial_i v_i \Big) \quad \square$$

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_{J-1}, v_{J+1}, \dots v_s\}$

PROPOSIZIONE: $v \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$
$v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$. Esiste una scrittura $v = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$
con $(a_1, \dots, a_s) \neq (b_1, \dots, b_s)$ se e soltanto se
$v_1, \dots, v_s$ dipendenti

DIM: $v \underset{=}{=} \begin{matrix} a_1 v_1 + \dots + a_s v_s \\ b_1 v_1 + \dots + b_s v_s \end{matrix}$ ALLORA

$a_1 v_1 + \dots + a_s v_s = b_1 v_1 + \dots + a_s v_s$
$\sim (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_s - b_s) v_s = 0$
quindi $\exists J$ con $a_J \neq b_J$ i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono dipendenti.
Viceversa se $\partial_1 v_1 + \dots + \partial_s v_s = 0$ combinazione non banale
$(\exists\, \partial_J \neq 0)$ allora $v = v + 0_V$
$= a_1 v_1 + \dots + a_J v_J + (\partial_1 v_1 + \dots + \partial_s v_s)$ $\square$
$= \underbrace{(a_1 + \partial_1)}_{b_1} v_1 + \dots + \underbrace{(a_s + \partial_s)}_{b_J} v_s$, e dato che $\partial_J = 0$ $b_J \neq a_J$.

DEF: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se:

INSIEME ORDINATO DI VETTORI

① $\operatorname{Span} B = V$

② $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti

SE $V = \{0_V\}$ per definizione $B_V = \emptyset$

e.g. • $V = \mathbb{K}^n$ ha la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

VERIFICA:

• $\operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^n$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

e.g. $V = \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ha base canonica

$$\mathcal{E}_{m,n} = \{E_{ij}\}_{\substack{i \le m \\ j \le n}}$$

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & | & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \cdots & | & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left(\mathcal{E}_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

e.g. $V = \mathbb{K}_{\le d}[T]$

$B = \{1, T, T^2, \dots, T^d\}$ ($d+1$ elementi) è una base.

VERIFICO

- $P(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_d T^d \in \operatorname{Span} B$
- $x_i 1 + x_1 T + \dots + x_i T^d = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

STESSA COSA PER

$B' = \{T^1, T^{1-i}, \dots, 1\}$

OSS: B base di V. allora $\mathcal{U} = \{v_1, \dots v_s\}$ genera $V \Leftrightarrow B \in \mathrm{Span}\,\mathcal{U}$

DIM: $B \in \mathrm{Span}\,\mathcal{U} \Rightarrow \mathrm{Span}\,B \subseteq \mathrm{Span}\,\mathcal{U} \Rightarrow V \subseteq \mathrm{Span}\,\mathcal{U}$ $\square$

e.g.

$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^2$, infatti $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{Span}\,\mathcal{U}$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Quindi $\mathrm{Span}\,\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

INDIPENDENTI: $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \checkmark$$

e.g. $T^2+2T+1, T^2-1, T-2$ base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

TEOREMA:

1. B base di V
2. B insieme finito minimale di vettori indipendenti
3. B insieme finito minimale di generatori.

DIM: 1 $\Rightarrow$ 2 $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ indipendente

$$B \cup \{v\} = \{v_1, \dots, v_n, \underbrace{a_1 v_1 + \dots a_n v_n}_{\in \operatorname{Span} B}\}$$

$\Rightarrow -a_1 v_1 - \dots - a_n v_n + v = 0$ no indipendenti

2 $\Rightarrow$ 3 $M=\{v_1, \dots, v_s\}$ massimale indipendente $M \cup \{v\}$ dipendente.

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b v = 0$ con $b \neq 0$

$\Rightarrow \frac{-a_1}{b} v_1 - \dots - \frac{a_n}{b} v_n = v \Rightarrow v \in \operatorname{Span} M \Rightarrow$ sono generatori

Ma $v_j \in \operatorname{Span}(M - v_j) \Rightarrow$ minimale

3 $\Rightarrow$ 1 $M' = \{v_1, \dots, v_n\}$ generatori minimali.

se fossero dipendenti $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ $\quad a_j \neq 0$

$$a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n = -a_j v_j$$

$\Rightarrow v_j \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\}$

assurdo $\Rightarrow$ indipendenti. $\square$

BASI:

RICORDIAMO: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, allora una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è equivalentemente:

- un insieme di generatori linearmente indipendenti.
- un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti.
- un insieme minimale di generatori di V.

PROPOSIZIONE: ① $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_n\}$
$= \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots v_n\}$

② $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n$ linearmente indipendenti
$\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots v_n$ lo sono

③ $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_n\}$ base $\Leftrightarrow$
$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots v_n\}$ base

DIM: ① L'operazione è invertibile $\Rightarrow$ basta mostrare
$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_j (v_j + \lambda v_i) + \dots + a_n v_n =$

$a_1 v_1 + \dots + (a_i + \lambda a_j) v_i + \dots + a_j v_j + \dots + a_n v_n$

che appartiene a $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

② Basta mostrare che $v_1, \dots, v_n$ dipendenti $\Rightarrow$

$v_1, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_n$ lo sono.

Diciamo che un vettore v_r sia generato dagli altri elementi $\Rightarrow$

$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n\})$

$r \neq i, j$ OK!!

DIFFERENZA DI INSIEMI

$\mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_n\} - v_r) = \mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots v_n\} - v_r)$

$r = j$

$a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n = v_j$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + (a_i + \lambda) v_i + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n = v_j + \lambda v_i$

$\Rightarrow \mathrm{Span}\{(v_1, \dots, v_n\} - v_j\} = \mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_n\} - v_j + \lambda v_i)$

$r = i$ STESSA COSA

③ SEGUE DA ① E ② $\square$

e.g. $\mathcal{U} = \{2T^2 + T - 1, T^2 - T, T^2 + 2\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$?

non cambia se è base

$\{2T^2 + T - 1, T^2 - T, T^2 + 2\} \overset{-2}{\sim} \{3T - 1, T^2 - T, T^2 + 2\}$ (-1)

$\overset{+3}{\sim} \{3T - 1, -T - 2, T^2 + 2\} \sim \{-7, -T - 2, T^2 + 2\}$ $(-1/7,\ +2,\ -2)$

$\sim \{1, -T, T^2\}$ base $\Rightarrow \mathcal{U}$ base

PROPOSIZIONE: $W \subseteq \mathbb{K}^n$ descritto da un sistema lineare omogeneo S.

SOLUZIONE DI S
$$\begin{cases} x_{i_1} = \sum_J a_{1J} x_J \\ \vdots \\ x_{i_r} = \sum_J a_{rJ} x_J \end{cases}$$

x_J VARIABILI LIBERE, QUINDI

$V(S) = \{x_{J_1} v_1 + \ldots + x_{J_{n-r}} v_{n-r}\}$ allora $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ base di W.

DIM: $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_{n-r}\} = W$ per costruzione.

indipendenti: v_J è l'unico tra $v_1, \ldots, v_{n-r}$ che ha coefficiente $\neq 0$ alla posizione $J_s \Rightarrow$ per avere $a_1 v_1 + \ldots + a_{n-r} v_{n-r} = 0$ dovrei avere $a_1 = \ldots = a_{n-r} = 0$ $\square$

coefficiente J_1 coefficiente J_{n-r}

e.g. $V: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{x_3}{2} + \frac{3}{2} x_4 \end{cases}$$

$$V(S) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

indipendente: $a\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}-2a+b\\-\frac{a}{2}+\frac{3}{2}b\\a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\iff a=b=0$$

SE $W\subseteq V = \operatorname{Span}\mathcal{U}$ come trovo base?

IDEA ①: $\mathcal{U}=\{v_1,\dots,v_s\}$, faccio combinazioni lineari fino a che

$$\mathcal{U}\sim\{\underbrace{v'_1,\dots,v'_r}_{\text{linearmente indipendenti}},0,\dots,0\}$$

$\Rightarrow$ base $B_W=\{v'_1,\dots,v'_r\}$

e.g. $\mathcal{U}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&0\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}\subset M_{2,2}(\mathbb{R})$

$+$ $+3$

VOGLIO CHE SIA
L'UNICO CON QUESTO
COEFFICIENTE $\neq 0$

$$\sim\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$-$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$-\frac{1}{3}$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

indipendenti: $x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & 3y \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0$$

In generale, possiamo sempre estrarre una base da un insieme di generatori.

TEOREMA: Se $M = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ esiste una base di Span M fatta di elementi di M. In particolare se V è generato da un numero finito di elementi allora V ha una base.

DIM: Se $v_{i_1}, \dots, v_{i_d}$ linearmente indipendenti minimali in M $\Rightarrow$ generano Span M $\Rightarrow$ sono una base. $\square$

e.g. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base}$$

e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{F}_3^4$$

voglio base di Span $\mathcal{U}$ · Span $\mathcal{U} = \mathbb{F}_3^4$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{INDIPENDENTI}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y+2z \\ 2x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base}$$

• $\operatorname{Span} \mathcal{U} = \mathbb{F}_3^4$?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span} \mathcal{U}$, infatti $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Span} \mathcal{U}$, infatti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y + 2z \\ 2x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Span} \mathcal{U} \subsetneq \mathbb{F}_3^4$$

Vorremmo un criterio per dire se dei vettori indipendenti sono una base.

TEOREMA: V K-spazio vettoriale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base. Allora

1. Se $s > n$ allora $w_1, \dots, w_s \in V$ sono dipendenti.
2. Se $s = n$ e $w_1, \dots, w_s \in V$ sono indipendenti sono una base.
3. Se $s < n$ allora $w_1, \dots, w_s$ non generano V.

DIM: $V \neq \{0_V\}$ altrimenti tutto banale.

Se $B = \{v_1\}$ OK!!

$w_1, \dots, w_s \in V$ indipendenti. A meno di permutare $v_1, \dots, v_n$

posso assumere: $w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad a_1 \neq 0$

allora $w_1, v_2, \dots, v_n$ è ancora una base perché

$\text{Span}\{w_1, v_i, \dots, v_n\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Diciamo di aver rimpiazzato $v_1, \dots, v_d$ con $w_1, \dots, w_d$,

$1 \leq d < n$, e $\{w_1, \dots, w_d, \dots, v_n\}$ è ancora una base.

Allora $w_{d+1} = a_1 w_1 + \dots + a_d w_d + \dots + a_n v_n$ e qualunque

coefficiente a_{d+1} sarà $\neq 0$ altrimenti $w_{d+1} = a_1 w_1 + \dots + a_d w_d$

contro l'ipotesi di indipendenza. Quindi posso sostituire fino a n elementi.

Quindi:

* VEDERE PAG 80

1. Se $s > n$ $w_1, \dots, w_n$ è base.

   assurdo $\Rightarrow$ non sono indipendenti.

2. Se $s = n$ $w_1, \dots, w_n$ base

③ Se $s < n$ $w_1, \dots, w_s, \dots, v_n$ base

$\Rightarrow v_n \notin \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_s\}$. $\square$

COROLLARIO: ① Ogni base di V ha lo stesso numero di elementi.

② Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora ogni insieme di generatori formato da n elementi è una base.

DEFINIZIONE: uno spazio vettoriale V è di dimensione finita se ammette una base.

La dimensione di V ($\dim V$) è il numero di elementi in una qualsiasi base di V.

OSS: $\dim V(S) = \#$ variabili libere.

e.g.

- $\dim \mathbb{K}^n = n$ $\qquad B = \{e_1, \dots, e_n\}$
- $\dim \mathbb{K}_{\leq d}[T] = d+1$ $\qquad B = \{1, T, \dots, T^d\}$
- $\dim \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$ $\qquad B = \{E_{11}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{mn}\}$
- $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{F}_3^4$$

$\dim \mathrm{Span}\, U = 3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

* QUESTA È UNA "PROTO"-INDUZIONE.

Cos'è l'induzione?

$A(J)$ famiglia di affermazioni. Se

① $A(1)$ vera

② $A(i) \Rightarrow A(i+1)$ per $i \geq 1$

allora $A(J)$ vera per ogni J.

ATTENZIONE: È FACILE USARLO IN MODO SBAGLIATO, e.g.

"COORDINATE RISPETTO AD UNA BASE"

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base

ricordiamo: B insieme di generatori linearmente indipendenti, quindi

- $\operatorname{Span} B = V$ (generatori)
- se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ allora $a_1, \dots, a_n$ unici (indipendenti)

da queste due proprietà:

PROPOSIZIONE / DEFINIZIONE: Ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

$a_1, \dots, a_n$ sono le coordinate di v rispetto a B.

Il vettore $v_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di v rispetto a B.

e.g. $V = \mathbb{K}^n$, $B = \mathcal{E} \overset{\text{base canonica}}{=} \{e_1, \dots, e_n\}$ $\quad \left(e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \right)$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $V = \mathbb{K}_{\leq d}[T]$, $B = \{1, \dots, T^d\}$

$$P(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_d T^d \Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{d+1}$$

$$B' = \{T^d, T^{d-1}, \dots, 1\} \Rightarrow p_{B'} = \begin{pmatrix} a_d \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{d+1}$$

$$p(T) = 3T - T^2 + 2T^3 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$$

$$p_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad p_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $V = M_{3,2}(\mathbb{K})$, $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ← 2 VETTORI INDIPENDENTI IN $\mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_B = ?$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \Rightarrow V_B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_B = ?$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow w_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

SE LI VOGLIAMO FARE ASSIEME?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

1^a eq $\quad 2^a$ eq

$$\sim \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

SE VOGLIO LE COORDINATE DI $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\left(\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + b\left(-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_B$$

- $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ $\quad B = \{T^2+T+1, T^2-2T, T+3\}$

B base perché $\{T^2+T+1, T^2-2T, T+3\} \sim \{3T+1, T^2-2T, T+3\}$
$\sim \{-8, T^2-2T, T+3\} \sim \{1, T^2-2T, T\} \sim \{1, T^2, T\}$ base

$P(T) = 2T^2+T-1 \qquad P_B = ?$

$a(T^2+T+1) + b(T^2-2T) + c(T+3) = 2T^2+T-1$

$(a+b)T^2 + (a-2b+c)T + (a+3c) = 2T^2+T-1$

confronto grado a grado

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ a-2b+c = 1 \\ a \quad +3c = -1 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$2(T^2+T+1)-(T+3)=2T^2+T-1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SE AVESSIMO MESSO TUTTO IN COORDINATE DALL'INIZIO?

$$B=\{v_1, v_2, v_3\}, \quad B'=\{T^2, T, 1\}$$

$$a\, v_{1B'} + b\, v_{2B'} + c\, v_{3B'} = \{2T^2+T-1\}_{B'}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$ STESSO SISTEMA!!

PERCHÉ?

DEFINIZIONE: V $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale, $B\{v_1, \dots, v_n\}$ base

$$\varphi_B : V \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi_B(v) \overset{def}{=} v_B$$

$$\psi_B : \mathbb{K}^n \to V \qquad \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

e.g. $V=\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $B=\{T^2+T+1, T^2-2T, T+3\}$

$v = 2T^2+T-1$

$$\varphi_B(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \psi_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(T^2+T+1)-(T+3) = 2T^2+T-1$$

PROPOSIZIONE: $\varphi_B(v+v') = \varphi_B(v) + \varphi_B(v')$

- $\varphi_B(\lambda v) = \lambda \varphi_B v$
- $\psi_B(x+y) = \psi_B(x) + \psi_B(y)$
- $\psi_B(\lambda x) = \lambda \psi_B(x)$

DIM: $\cdot\ v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \ ,\ v' = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$v + v' = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$

$$\Rightarrow \varphi_B(v+v') = (v+v')_B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \varphi_B(v) + \varphi_B(v_1)$$

- $\lambda v = \lambda a_1 v_1 + \dots + \lambda a_n v_n \Rightarrow \varphi_B(\lambda v) = \lambda \varphi_B(v)$
- $\psi_B(x+y) = \psi_B\begin{pmatrix} x_1 + x_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = (x_1 + y_1) v + \dots + (x_n + y_n) v_n$

$$= \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \psi_B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- $\psi_B\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \psi_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\square$

IDEA: Se rispetto le operazioni di V forse posso fare i conti dopo aver applicato φ_B.

PROPOSIZIONE: $\psi_B(\varphi_B(v)) = v$, $\varphi_B(\psi_B(x)) = x$

in altre parole $\psi_B \circ \varphi_B = Id_V$, $\varphi_B \circ \psi_B = Id_{\mathbb{K}^n}$

DIM: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\psi_B(\varphi_B(v)) = \psi_B(v_B) = \psi_B\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = v$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi_B(\psi_B(x)) = \varphi_B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$$

$$= (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x. \quad \square$$

COROLLARIO: la coppia φ_B, ψ_B da un isomorfismo fra V e $\mathbb{K}^n$ che manda la base in $\mathcal{E}$ e viceversa.

$$\left(\varphi_B(v_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_j \text{ perché } v_j = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + \dots + 0 \cdot v_n\right)$$

COROLLARIO:

1. $w_1, \dots, w_s \in V$ sono indipendenti $\iff$ $(w_1)_B, \dots, (w_s)_B$ lo sono
2. $\mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_s\} = W \iff \mathrm{Span}\{(w_1)_B, \dots (w_j)_B\} = \varphi_B(W)$

Sottospazio di $\mathbb{K}^n$

3. $a_1 w_1 + \dots + a_j w_j = v \iff a_1 (w_1)_B + \dots + a_j (w_s)_B = v_B$.

DIM: ① Se $w_1, \dots, w_s$ dipendenti $a_1 w_1 + \dots + a_s w_s = 0_V$

$\Rightarrow \varphi_B(a_1 w_1 + \dots + a_s w_s) = \varphi_B(a)$

$\Rightarrow \varphi_B(a_1 w_1) + \dots + \varphi_B(a_s w_s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_1 (w_1)_B + \dots + a_s (w_s)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (w_1)_B, \dots, (w_s)_B$ dipendenti

Se $a_1 (w_1)_B + \dots + a_s (w_s)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_B(a_1 (w_1)_B + \dots + a_s (w_s)_B\} = \psi_B(0)$

$\Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_s w_s = 0_V$.

② $w \in \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_s\} \Rightarrow w = a_1 w_1 + \dots + a_s w_s$

$\Rightarrow \varphi_B(w) = \varphi_B(a_1 w_1 + \dots + a_s w_s) \Rightarrow w_B = a_1 (w_1)_B + \dots + a_s (w_s)_B$

$w_B \in \operatorname{Span}\{(w_1)_B, \dots, (w_s)_B) \Rightarrow w_B = x_1 (w_1)_B + \dots + x_s (w_s)_B$

$\Rightarrow \psi_B(w_B) = \psi_B(x_1 (w_1)_B + \dots + x_s (w_s)_B) \Rightarrow w = x_1 w_1 + \dots + x_s w_s$

③ uguale a ② $\square$

e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$?

base $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$A \in \operatorname{Span}\{A_1, A_2, A_3\} \overset{\text{base } \mathcal{E}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ le soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

NO SOLUZIONI

$$A \notin \operatorname{Span}\{A_1, A_2, A_3\}$$

RISPONDERE A DOMANDE SUI VETTORI CON MOSSE DI RIGA.

Abbiamo visto che basta fare i conti in $\mathbb{K}^m$.

PROPOSIZIONE: $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{K}^m$, $A = \{v_1, \dots, v_s\}$

A' ottenuta da A con mosse di riga. Allora $v_1, \dots, v_s$ indipendenti

$\iff$ le colonne di A' lo sono.

DIM: $x_1 v_1 + \dots + x_s v_s = 0$ è equivalente al sistema $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$

che equivalente al sistema $\left(A' \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$. $\square$

COROLLARIO: $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{K}^m$, $A = (v_1 \dots v_s)$ allora se $A' \sim A$ è a scala le colonne di A corrispondenti alle colonne di A' in cui appare un pivot sono una base di $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$.

DIM:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} P_1 & & * \\ & P_2 & \\ 0 & & P_3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} J_1 & & & J_d \end{matrix} \end{array}$$

Colonne pivot agli indici $J_1, \dots, J_d$

Possiamo assumere $p_1 = \dots = p_d = 1$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \qquad (A')^{J_1}, \dots, (A')^{J_d} \text{ indipendenti}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} * \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_d \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$x_1 = \dots = x_d = 0$ chiaramente, inoltre ogni altra colonna

è $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\}\ d$ che è chiaramente dipendente dipendente da $(A')^{J_1}, \dots, (A')^{J_d}$.

Quindi $A^{J_1}, \dots, A^{J_d} = v_{J_1}, \dots, v_{J_d}$ sono indipendenti e generano $\text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$ $\square$.

e.g. $v_1, \dots, v_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

voglio la base di $\text{Span}\{v_1, \dots, v_s\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ base v_1, v_2, v_4 e v_3 dipendente da v_1, v_2 come lo vedo?

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

VISTO PRIMA

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \checkmark$$

e.g. $p_1, \dots, p_4 = \{t^3-1, t^3+t^2+t-3, t^2+2t+1, t^3-2t^2+t\}$

base di $\text{Span}\{p_1, \dots, p_4\}$?

$\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$

$$b_{\mathcal{E}}\{p_1, \dots, p_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ base, come scrivo P_4?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(T^3-1)-(T^3+T^2+T-3)-(T^2-2T+1) = T^3-2T^2+T \quad \checkmark$$

"QUALCHE OSSERVAZIONE"

TEOREMA: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, $s < n$, $v_1, \dots, v_s \in V$ linearmente indipendenti. Allora esiste una base B di V tale che $B = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_s}_{\text{quelli sopra}}, v'_{s+1}, \dots, v'_n \}$

DIM: $B' = \{ v'_1, \dots, v'_n \}$ base di V, allora come nella dimostrazione che ogni base ha lo stesso # di elementi, a meno di riordinare B', possiamo sostituire $v'_1, \dots, v'_s$ con $v_1, \dots, v_s$ e $B = \{ v_1, \dots, v_s, v'_{s+1}, \dots, v'_n \}$ base $\square$

e.g. $V = \mathbb{R}^4$, $v_1, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ indipendenti

allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ Completamento di $\{v_1, v_2\}$

OSS: $W \subseteq V$ sottospazio. Se $\dim W = \dim V$ allora $W = V$.

DIM: $\dim V = n = \dim W$. Allora $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di W

$\Rightarrow$ sono $n = \dim V$ vettori indipendenti in $V \Rightarrow$ sono una base di V

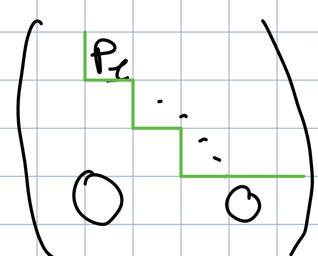
Ma $W \supseteq \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} = V \Rightarrow W = V$. $\square$

DOPPIO CONTENIMENTO

PROPOSIZIONE: A matrice $m \times n$. Allora il numero massimo di colonne indipendenti di A è uguale al numero massimo di righe indipendenti di A.

DIM: $A' \sim A$ a scala. Allora #max di colonne indipendenti

$=$ # pivot di A' $=$ # righe non nulle di A' $=$



righe indipendenti di A'

Però mosse di riga non cambiano questo numero $\Rightarrow$ # righe indipendenti di $A' =$ # righe indipendenti di A. $\square$

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^1, A^2, A^4$ indipendenti

e A_1, A_2, A_3 indipendenti

"SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI"

DEF: $W, W' \subseteq V$ sottospazio. Allora

- $W + W' \overset{def}{=} \{ w + w' \mid w \in W, w' \in W' \} \subseteq V$
- $W \cap W' \overset{def}{=} \{ v \in V \mid v \in W \text{ e } v \in W' \} \subseteq V$

PROPOSIZIONE: ① $W + W'$ è il più piccolo sottospazio contenente W e W'.

② $W \cap W'$ è il più grande sottospazio contenuto in W e W'.

③ Se $W = \operatorname{Span} \mathcal{U}$, $W' = \operatorname{Span} \mathcal{U}' \Rightarrow W + W' = \operatorname{Span}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}')$

④ Se $W = V(S)$, $W' = V(S')$ allora $W \cap W' = V(S \cup S')$ dove

$S \cup S' = \begin{cases} S \\ S' \end{cases}$

DIM: ① Se $W'' \supseteq W$ e W' allora sicuramente ogni $w + w' \in W''$ $\Rightarrow W'' \supseteq W + W'$ quindi devo solo mostrare che è un sottospazio

- $0_V = \underset{W}{0_V} + \underset{W'}{0_V} \in W + W'$

- $\lambda(w + w') = \underset{W}{(\lambda w)} + \underset{W'}{(\lambda w')} \in W + W'$

- $(w_0 + w_0') + (w_1 + w_1') = \underset{W}{(w_0 + w_1)} + \underset{W'}{(w_0' + w_1')} \in W + W'$

② Se $W'' \subseteq W$ e $W' \Rightarrow W'' \subseteq W \cap W'$ quindi basta mostrare che è un sottospazio.

- $0_V \in W \cap W'$ • $v \in W \cap W'$ allora $\lambda v \in W$ e $\lambda v \in W'$ $\Rightarrow \lambda v \in W \cap W'$
- $v_0, v_1 \in W \cap W' \Rightarrow v_0 + v_1 \in W$ e $v_0 + v_1 \in W' \Rightarrow v_0 + v_1 \in W \cap W'$.

③ $W = \text{Span}\, \mathcal{U}$, $W' = \text{Span}\, \mathcal{U}'$. Sicuramente $\text{Span}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}')$ è contenuto in ogni sottospazio contenente $W \cup W' \Rightarrow \text{Span}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}') \subseteq W + W'$ d'altronde W e $W' \subseteq \text{Span}(\mathcal{U} \cup W') \Rightarrow$ sono uguali.

④ $W = V(S)$, $W' = V(S') \Rightarrow v$ soddisfa sia S che $S' \Leftrightarrow$ $v \in V(S) \cap V(S') = W \cap W'$. □

e.g. $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$,

$W' : x + 2y + z = 0$ $W + W'$, $W \cap W'$?

$W + W'$: metto W' in forma parametrica

$$x = -2y - z \Rightarrow W' = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W + W' = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$W \cap W'$: W in forma cartesiana $ax + by + cz = 0$

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \longleftarrow \text{SODDISFATTA DA } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ a - b + c = 0 \longleftarrow \text{SODDISFATTA DA } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -2b - c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -\frac{3}{2} c \\ b = \frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow W : 3x + y - 2z = 0 \quad (c = -2)$$

$$W \cap W' : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow W \cap W' = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e.g. $W, W' \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

$W: \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$ $W': \begin{cases} P'(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$ $W + W'$, $W \cap W'$?

$W \cap W'$ $P(T) = a + bT + cT^2 + dT^3$

$\Rightarrow P'(T) = b + 2cT + 3dT^2$

$W: \begin{cases} a = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$ $W' \begin{cases} b = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases}$

$W \cap W': \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow W \cap W' = \{0\}$

$W+W'$: W e W' in forma parametrica

$$W: \begin{cases} a = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = c \\ b = -c-d \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\{-T+t^2, -T+t^3\}$$

$$W': \begin{cases} b = 0 \\ 2c + 3d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} b = 0 \\ c = -\frac{3}{2}d \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\{1, -3T^2+2T^3\}$$

metto in base $B = \{1, T, T^2, T^3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim W+W' = 4 \Rightarrow W+W' = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

e.g. $W: x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$$W' = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$W+W'$, $W \cap W'$?

$W+W'$: $W: x = x_2 - 2x_3 - x_4 \Rightarrow W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim W+W' = 3 = \dim W \Rightarrow W+W' = W$$

$$W \cap W' : \begin{cases} a+b-c+2d = 0 \\ a \qquad +c-3d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b-c+2d = 0 \\ -b+2c-5d = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a = -c+3d \\ b = 2c-5d \end{cases} \Rightarrow W' : \begin{cases} -x_1+2x_2+x_3 \qquad = 0 \\ 3x_1-5x_2 \qquad +x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W \cap W' : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \dim W \cap W' = 2 = \dim W' \Rightarrow W \cap W' = W'$$

DEF: W e W' sono in **somma diretta** se $W \cap W' = \{0\}$, in tal caso scriviamo $W+W' = W \oplus W'$

TEOREMA (FORMULA DI GRASSMANN):

W, W' sottospazio di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V.

$$\dim(W) + \dim(W') = \dim(W + W') + \dim(W \cap W')$$

DIM: Voglio mostrare:

$$\dim(W + W') = \underbrace{\dim(W)}_{= d} + \underbrace{\dim(W')}_{= d'} - \underbrace{\dim(W \cap W')}_{= S}$$

$B_{W \cap W'} = \{u_1, \dots, u_s\}$ base dell'intersezione per il teorema di estensionalità provato precedentemente.

$B_W = \{u_1, u_s, w_{s+1}, \dots, w_d\}$

$B_{W'} = \{u_1, \dots, u_s, w'_{s+1}, \dots, w'_{d'}\}$ per quanto mostrato prima

$$W + W' = \text{Span}\{B_W \cup B_{W'}\} = \text{Span}\{\underbrace{u_1, \dots, u_s}_{S}, \underbrace{w_{s+1}, \dots, w_d}_{d-S}, \underbrace{w'_{s+1}, \dots, w'_{d'}}_{d'-S}\}$$

$\Rightarrow \dim W + W' \leq S + d - S + d' - S = d + d' - S$.

Vale l'uguaglianza $\Longleftrightarrow B_W \cup B_{W'} = B_{W+W'}$ è una base di $W + W' \Longleftrightarrow$ indipendenti

$$a_1 u_1 + \dots + a_s u_s + b_{s+1} w_{s+1} + \dots + b w_d + c_{s+1} w'_{s+1} + \dots + c_{d'} w'_{d'} = 0$$

$$\sim \underbrace{(\underset{\substack{\cap \\ W \cap W'}}{a_1 u_1 + \dots + a_s u_s}) + (\underset{\substack{\cap \\ W}}{b_{s+1} w_{s+1} + \dots + b_d w_d})}_{\substack{\cap \\ W}} =$$

$$= -(\underset{\substack{\cap \\ W'}}{c_{s+1} w'_{s+1} + \dots + c_{d'} w'_{d'}})$$

$\Rightarrow$ entrambi i termini stanno in $W \cap W'$ però

$c_{s+1} w'_{s+1} + \dots + c_{d'} w'_{d'} \in W \cap W' = \text{Span}\{u_1, \dots, u_s\}$

$\Leftrightarrow c_{s+1} = \dots = c_{d'} = 0$ perché $w'_{s+1}, \dots, w'_{d+1}$ indipendenti da

$u_1, \dots, u_s$. $\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_s u_s + b_{s+1} w_{s+1} + \dots + b_d w_d = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = \dots = b_{s+1} = \dots = b_d = 0$ perché sono indipendenti. Quindi

sono una base di $W + W'$. $\square$

COROLLARIO:

① W, W' sono in somma diretta $\Leftrightarrow \dim W + W' = \dim W + \dim W' \Leftrightarrow$

$B_W \cup B_{W'}$ è una base di $W + W'$.

② $W + W' = V \Leftrightarrow \dim W + \dim W' - \dim W \cap W = n$

③ $W \supseteq W' \Leftrightarrow \dim W + W' = \dim W$

④ $W \subseteq W' \Leftrightarrow \dim W \cap W' = \dim W$

DIM: ① $W \cap W' = \{0\} \Leftrightarrow \dim W \cap W' = 0 \Leftrightarrow \dim W + W' = \dim W + \dim W' - 0$.

② $\dim (W + W') = \dim W + \dim W' - \dim (W \cap W') = n$

$\Rightarrow \dim W + W' = \dim V \Rightarrow W + W' = V$

③ $\dim W + W' = \dim W \xRightarrow{\text{GRASSMANN}} \underbrace{\dim W + W' - \dim W}_{=0} = \dim W' - \dim W \cap W'$

$=0$

$\Rightarrow \dim W' = \dim W \cap W' \Rightarrow W' = W \cap W' \Leftrightarrow W' \subseteq W$

④ $\dim W \cap W' = \dim W \xRightarrow{\text{GRASSMANN}} \underbrace{\dim W \cap W' - \dim W}_{=0} = \underbrace{\dim W' - \dim W + W'}_{=0}$

$\Rightarrow W \subseteq W'$ per punto precedente.

DEF: W, W' si dicono supplementari se sono in somma diretta e $W + W' = V \iff \dim W \cap W' = 0$, $\dim W + W' = n$.

"MOLTIPLICAZIONE MATRICE - VETTORE"

$$A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad v \in \mathbb{K}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

DEF: Abbiamo una moltiplicazione

$$\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

data da

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \ \dots \ a_{1n}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \ \dots \ a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

(righe per colonne)

e.g. • $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + (-1) y \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE: $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $v, w \in \mathbb{K}^n$. Allora

① $A(\lambda v) = \lambda A v$ ② $A(v+w) = Av + Aw$

③ $(\lambda A) v = \lambda (Av)$ ④ $(A+B)(v) = Av + Bv$

DIM: ① e ③ ovvie.

② $$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1+y_1) + \dots + a_{1n}(x_n+y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+y_1) + \dots + a_{mn}(x_n+y_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) + (a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n) \end{pmatrix} = Av + Aw$$

④ $$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\ b_{11} & \dots & a_{1n}\ b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\ b_{m1} & \dots & a_{mn}\ b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}\ b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n} + b_{1n})x_n \\ \vdots \\ (a_{m1}\ b_{m1})x_1 + \dots + (a_{mn} + b_{mn})x_n \end{pmatrix}$$

$$= \dots = Av + Bv.$$

$\square$

OSS:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n$$

DEF: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

IMMAGINE

① $\operatorname{Im} A = \{ w \in \mathbb{K}^m \mid \exists\, v \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } w = Av \}$

② $\operatorname{Ker} A = \{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \}$

"NUCLEO"

PROPOSIZIONE: ① $\operatorname{Im} A$ è sottospazio di $\mathbb{K}^m$ ed è uguale a $\operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

② $\operatorname{Ker} A$ è sottospazio di $\mathbb{K}^n$ ed è uguale a $V(S)$, dove S è definito con $(A|0)$

DIM: ① $\cdot\ A \cdot 0 = 0$, $A \cdot (\lambda v) = \lambda(Av)$, $A(v + v') = Av + Av'$

$\Rightarrow \operatorname{Im} A$ sottospazio.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n \in \operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$$

e se $w = a_1 A^1 + \dots + a_n A^n \in \operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$ allora

$w = A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} A = \operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$

② $A(0)=0$, Se $Av=0$, $A(\lambda v)=\lambda Av=\lambda 0=0$,

Se $Av=Av'=0 \Rightarrow A(v+v')=0+0=0 \Rightarrow$ Ker A

sottospazio $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$$\sim \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in V(S)$$

dove S è definito da $(A|0)$

e.g.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&1&0&1\\1&-1&3&2\end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$ Voglio Im A e Ker A

Im A = Span $A^1, \dots, A^n$ passando per mosse di riga

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&1&0&1\\1&-1&3&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-1&2&-3\\0&-2&4&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-1&2&-3\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

1°, 2°, 4° colonne pivot $\Rightarrow$ Im $A=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Ker A risolvo il sistema $(A|0)$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&-1&2&-3&0\\0&0&0&6&0\end{array}\right) \sim \begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=2x_3\\x_4=0\end{cases} \Rightarrow \text{Ker } A=\text{Span}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

VERIFICO $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2-1+0 \\ -2+2+0+0 \\ -1-2+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

OSS: $\dim \operatorname{Ker} A = \dim(V(S)) = \#$ VL per $(A|0)$

$= n - \#$ pivot per $A' \sim A$ a scala $= n - \dim(\operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\}) =$

$n - \dim \operatorname{Im} A$ ABBIAMO DIMOSTRATO.

PROPOSIZIONE: Se $A \in M_{m,n}$ allora $n = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$.

"TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI"

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema di m equazioni in n incognite

$(A|b)$ matrice completa

OSS: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in V(S) \iff A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

infatti $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}$

Quindi il sistema si scrive equivalentemente come: $\boxed{Ax = b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \dots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + \dots + a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

① Quando ha soluzione?

$\iff$ esiste $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tale che $Av = b$

$\iff$ esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tale che $a_1 A^1 + a_n A^n = b$

$\iff b \in \operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n\} = \operatorname{Im} A$

$\iff \dim \operatorname{Span}\{A^1, A^n\} = \dim \operatorname{Span}\{A^1, \dots, A^n, b\}$

$\iff \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im}(A|b)$

② Se S, compatibile, $\dim(V(S))$?

$\underset{\#VL}{=}$

S_0 sistema omogeneo associato $V(S_0) = \ker A \Rightarrow \dim V(S_0) = n - \dim \operatorname{Im} A$

. Ricordiamo $V(S) = \underset{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE}}{v_0} + V(S_0) \Rightarrow \dim V(S) = \dim V(S_0) = n - \dim \operatorname{Im} A$.

NOTAZIONE: $rk\, A \overset{def}{=} \dim \operatorname{Im} A$

"RANGO" rk È UN'ABBREVIAZIONE DI RANK

ABBIAMO DIMOSTRATO

"TEOREMA DI ROUCHÉ CAPELLI"

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{sistema } m \times n$$

$(A|b)$ matrice completa. Allora

① S compatibile $\iff rk\, A = rk\,(A|b)$

② Se S compatibile $\Rightarrow \dim V(S) = n - rk\, A$.

COROLLARIO: ① Se $rk\, A = m$ allora S è compatibile.

② Se S compatibile allora soluzione unica $\iff rk\, A = n$.

DIM: ① $rk\, A = \#$ pivot $A' = \#$ max righe indipendenti $\leq m$. Però anche $(A|b)$ ha m righe $\Rightarrow rk(A|b) \leq m$.

Quindi se $rk\, A = m \geq rk(A|b) \Rightarrow$ sono uguali.

② Soluzione unica $\Leftrightarrow \dim V(S) = 0 \Leftrightarrow rk\, A = n$. $\square$

NOTAZIONE: "discutere" un sistema S vuol dire trovare se è compatibile e nel caso $\dim V(S)$.

e.g. discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + kx_3 + x_4 = k \\ 3x_1 + (2k-2)x_2 + (3-k)x_3 + (-2k-3)x_4 = -3k-1 \\ 2x_1 + 2kx_2 + (2-2k)x_3 + (-2k-2)x_4 = -2k \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 3 & 2k-2 & 3-k & -2k-3 & -3k-1 \\ 2 & 2k & 2-2k & -2k-2 & -2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 0 & 2k+4 & 3+2k & -2k & -1 \\ 0 & 2k+4 & 2 & -2k & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & k & 1 & k \\ 0 & 2k+4 & 3+2k & -2k & -1 \\ 0 & 0 & -1-2k & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k \neq -2, -\frac{1}{2}$ allora $rk(A) = 3 = rk(A|b)$
$\Rightarrow$ compatibile, $\dim V(S) = 4-3 = 1$

$k = -2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$rk\, A = 3 = rk(A|b) \Rightarrow$ compatibile, $\dim V(S) = 4-3 = 1$

$k = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk\, A = 2 = rk\,(A|b) \Rightarrow$ Compatibile

$\dim V(S) = 4 - 2 = 2$

"PARAMETRICA → CARTESIANA RIVISITATO"

$$W \subseteq \mathbb{K}^n, \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{d1} \\ \vdots \\ x_{dn} \end{pmatrix} \right\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

voglio una presentazione Cartesiana.

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ equazione generica in n incognite, voglio imporre sia soddisfatta da $v_1, \dots, v_d$.

$$\begin{cases} a_1 x_{11} + \dots + a_n x_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_1 x_{d1} + \dots + a_n x_{dn} = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_{11} a_1 + \dots + x_{1n} a_n = 0 \\ \vdots \\ x_{d1} a_1 + \dots + x_{dn} a_n = 0 \end{cases}$$

incognite $a_1, \dots, a_n$

Matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \dots & x_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{d1} & & x_{dn} & 0 \end{array}\right)$$

righe sono $v_1, \dots, v_n$

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{RIGHE DELLA MATRICE}} \text{ indipendenti} \Rightarrow rk \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = d$$

$\Rightarrow$ Per Rouché - Capelli la dimensione delle soluzioni è $n-d$

$\Rightarrow$ prendendo una base ho $n-d$ equazioni indipendenti (righe indipendenti)

$S =$ sistema di $n-d$ equazioni omogenee così ottenuto. $S = (A|0)$

Allora $rk\, A = n-d$ per costruzione $\Rightarrow V(S)$ ha dimensione d.

Per costruzione $\underbrace{v_1, \dots, v_d}_{\text{HO IMPOSTO CHE RISOLVO LE EQUAZIONI DI } S} \in V(S)$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_d$ è una base di $V(S) \Rightarrow V(S) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_d\} = W$.

Quindi il nostro algoritmo per ottenere una presentazione Cartesiana funziona.

e.g. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ consideriamo

$$V_k = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad W_k : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + kx_3 + (2k-2)x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + (k-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

① Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di

$V_k, W_k, V_k + W_k, V_k \cap W_k$.

② Per quali k abbiamo $V_k \oplus W_k = \mathbb{R}^4$?

$\dim V_k = 2 \quad \forall k$

$$\dim W_k : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & k & 2k-2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & k-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & k & 2k-2 & 0 \\ 0 & 2 & -k-3 & -k & 0 \end{array}\right)$$

$rk\, A = 2 \Rightarrow \dim W_k = 4 - 2 = 2 \quad \forall k$

Porto V_k in Cartesiana.

$$B_{V_k} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{equazione generica } a_1x_1 + \dots + a_4x_4 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 - a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 - a_3 - 2a_4 = 0 \\ -a_2 + a_3 + 4a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = a_3 + 2a_4 \\ a_2 = a_3 + 4a_4 \end{cases} \Rightarrow V_k : \begin{matrix} a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_3 = 0, a_4 = 1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$V_k \cap W_k : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & k & 2k-2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & k-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & k-1 & 2k-2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & k-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & -6 & k-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-k+1}{6} & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \frac{k^2-1}{6} & 0 \end{array}\right)$$

3 pivot sicuri + 1 da controllare

$$\boxed{k - 1 + \frac{(-k+5)(-k+1)}{6} = \frac{6k-6}{6} + \frac{k^2-6k+5}{6} = \frac{k^2-1}{6}}$$

$\dim V_k \cap W_k = 4 - 4 = 0 \quad k \neq \pm 1$

$\dim V_k \cap W_k = 4 - 3 = 1 \quad k = \pm 1$

GRASSMAN: $\dim V_k + W_k = \begin{cases} 2+2-0 = 4 & k \neq \pm 1 \\ 2+2-1 = 3 & k = \pm 1 \end{cases}$

In particolare $V_k \oplus W_k = \mathbb{R}^4$ se $k \neq \pm 1$

"APPLICAZIONI LINEARI"

DEF: V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Un **applicazione lineare** da V a W è una funzione $T: V \to W$ tale che:

① $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ OMOGENEITÀ

② $T(v+v') = T(v) + T(v')$ $\forall v, v' \in V$ ADDITIVITÀ

OSS: Se $T: V \to W$ lineare, allora $T(0_V) = 0_W$, infatti:

$T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_W$.

e.g. • Abbiamo già visto che data B base di V le applicazioni

$\varphi_B : V \to \mathbb{K}^n$ $(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\psi_B : \mathbb{K}^n \to V$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ sono lineari.

CON QUESTA FRECCIA INDICO DOVE VA UN OGGETTO

• data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, l'applicazione $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$ è lineare.

• Dato un vettore $v \in \mathbb{K}^n$, l'applicazione $M_{m,n} \to \mathbb{K}^m$ $A \mapsto Av$ è lineare!

① $(\lambda A)v = \lambda(Av)$ ② $(A+B)v = Av + Bv$

• $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y + z \\ 2y - z \\ x - 2z \end{pmatrix}$

è lineare, infatti:

① $T\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda x - 3\lambda z\\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z\\ 2\lambda y-\lambda z\\ \lambda x - 2\lambda z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda(2x-3y)\\ \lambda(-x+y+z)\\ \lambda(2y-z)\\ \lambda(x-2z)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2x-2y\\ -x+y+z\\ 2y-z\\ x-2z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

É OMOGENEA

② $T\begin{pmatrix}x+x'\\ y+y'\\ z+z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(x+x')-3(y+y')\\ -(x+x')+(y+y')+(z+z')\\ 2(y+y')-(z+z')\\ (x+x')-2(z+z')\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}x+x'\\ y+y'\\ z+z'\end{pmatrix} = v+v'$

$= \begin{pmatrix}(2x-3y)+(2x'-3y')\\ (-x+y+z)+(-x'+y'+z')\\ (2y-z)+(2y'+z')\\ (x-2z)+(x'-2z')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y\\ -x+y+z\\ 2y-z\\ x-2z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x'-3y'\\ -x'+y'+z'\\ 2y'-z'\\ x'-2z'\end{pmatrix} =$

$= T(v)+T(v')$ É ADDITIVA

OSS: $T(v) = L_A(v)$ con $A = \begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

• $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z-1\\ y-3z+1\end{pmatrix}$ non è lineare infatti

$T\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+2\cdot 0+0-1\\ 0-3\cdot 0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

• $T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\ x^2-y^2\\ x+y\end{pmatrix}$ non è lineare, infatti

$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ✓ Cerco controesempio a omogeneità

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0\\2^2-0\\2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\neq 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ NON É OMOGENEA

• $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ $\quad (T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$

$T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$, $T\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}=\sqrt[3]{\lambda^3x^3+\lambda^3y^3}=\sqrt[3]{\lambda^3(x^3+y^3)}=$

$=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}$

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\sqrt[3]{1}=1$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\sqrt[3]{1}=1$

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\sqrt[3]{1^3+1^3}=\sqrt[3]{2}\neq 1+1=2$

$\Rightarrow$ T NON É ADDITIVA.

PROPOSIZIONE: $T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$, $T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\dots,x_n)\\\vdots\\f_m(x_1,\dots,x_n)\end{pmatrix}$

é lineare $\Leftrightarrow$ $f_1,\dots,f_m$ sono polinomi omogenei di grado 1, cioé $f_i(x_1,\dots,x_n)=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n$ e in tal caso

$T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=L_A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ con $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$

DIM: $\Leftarrow$ chiaro perché allora $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $f: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ é lineare $\Leftrightarrow$ $f(x_1, \dots, x_m) = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$

(Vedremo che é vero per il teorema di esistenza e unicitá) $\square$

e.g. $F: \mathbb{K}_{\leq d}[T] \to \mathbb{K}_{\leq d}[T]$

$F(P(T)) = P(x_0) \quad x_0 \in \mathbb{K}$ lineare, infatti

① $(\lambda P)(x_0) = \lambda P(x_0)$

② $(P+q)(x_0) = ((a_0+b_0) + \dots + (a_d+b_d)T^d)(x_0)$

$= ((a_0+b_0) + \dots + (a_d+b_d)x_0^d) = (a_0 + \dots + a_d x_0^d)$

$+ (b_0 + \dots + b_d x_0^d) = P(x_0) + q(x_0)$

- e.g. $((T^2-2T+1)-(T^2-T))(1) = (T^3-T^2-2T-T+1)(1) =$

$1-1-2-1+1=-2$

$= (T^3-2T+1)(1) - (T^2-T)(2) = (1-2+1)-(1+1) = 0-2 = -2$

- $F: \mathbb{K}_{\leq d}[T] \to \mathbb{K}_{\leq d}[T]$

$F(P(T)) = P'(T)$ é lineare, infatti

① $(\lambda P(T))' = \lambda P'(T)$

② $(P+q(T))' = P'(T) + q'(T)$

e.g. $((T^3-T^2) + (2T^2-3T+1))' = (T^3+T^2+3T+1)' = 3T^2+2T+3$

$(T^3-T^2)' + (2T^2+3T+1)' = 3T^2-2T+4T+3 = 3T^2-2T+3$

LA DERIVATA É LINEARE

- $F : \mathbb{R}_{\leq d}[T] \to \mathbb{R}$

$F(P(T)) = \int_a^b P(T)\,dt$ é lineare, infatti:

- $\int_a^b \lambda P(T)\,dt = \lambda \int_a^b P(T)$ • $\int_a^b P(T) + q(T)\,dt$

$= \int_a^b P(T)\,dt + \int_a^b q(T)\,dt$

e.g. $\int_0^1 t^2 + t^3\,dt = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 T^3\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

- $q \in \mathbb{K}_{\leq n}[T]$, allora

$F : \mathbb{K}_{\leq d}[T] \to \mathbb{K}_{\leq d+n}[T]$

$F(P) = P \cdot q$ é lineare infatti

- $(\lambda P) \cdot q = \lambda (P \cdot q)$ • $(P_0 + P_1) \cdot q = P_0 q + P_1 q$

e.g. $(T^3 + T^2 - 1)(T+2) = (T^3 + 2T^2)(T+2) + (-T^2 - 1)(T+2)$

- $P \mapsto P + q$ non lineare $0 \mapsto q \neq 0$

$P \mapsto P^2$ non lineare $2P \mapsto 4P^2 + 2P^2$

- $P \mapsto P \cdot P'$ non lineare $2P' \mapsto 2(PP')$

e.g. ① $F(P(T)) = \begin{pmatrix} P(1) + P'(1) \\ 2P'(2) + 3P(1) \end{pmatrix}$

$P_{\leq 2}[T]$ $\mathbb{R}^2$

② $G(P(T)) = \begin{pmatrix} P''(2) - P(3) \\ P'(1) - P(-1) \end{pmatrix}$

SONO O NON SONO LINEARI?

LINEARI $\Leftrightarrow$ LO SONO PER OGNI COEFFICIENTE

(1) $$F(\lambda p(t)) = \begin{pmatrix} (\lambda p)(1) + (\lambda p)'(1) \\ 2(\lambda p)'(2) - 3(\lambda p(1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(p(1)) + \lambda(p'(1)) \\ 2\lambda(p'(2)) - 3\lambda(p(1)) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p(1) + p'(1) \\ 2p'(2) - 3(p(1)) \end{pmatrix}$$

OMOGENEO

$$F(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(1) + (p+q)'(1) \\ 2(p'+q')(2) - 3(p+q)(1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p(1) + q(1) + p'(1) + q'(1) \\ 2p'(2) + 2q'(2) - 3p(1) - 3q(1) \end{pmatrix} = \dots = F(p) + F(q)$$

ADDITIVA $\Rightarrow$ F lineare

(2) $$G(p) = \begin{pmatrix} p''(2) - p(3) \\ p'(1) \cdot p(-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{OK} \\ \rightarrow ?? \end{matrix}$$

$p \mapsto p'(1)\, p(-1)$ non lineare, infatti:

$p = T - 1 \qquad p'(1) \cdot p(-1) = (T-1)'(-1-1) = -2$

$G(2(T-1)) = (2T-2)'(-2-2) = 2(-4) = -8 \neq 2G(T-1) = 2(-2)$

$\Rightarrow$ NON OMOGENEO

"IMMAGINE E NUCLEO DI UN'APPLICAZIONE LINEARE"

DEF: $T: V \to W$ lineare, allora

- $\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } T(v) = w \} \subseteq W$
- $\operatorname{Ker} T = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \} \subseteq V$

PROPOSIZIONE: ① $\operatorname{Im} T$ e $\operatorname{Ker} T$ sono sottospazi

② Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{T(v_1), \dots T(v_n)\}$

③ Se $T = L_A$ allora $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} A$.

DIM: ① + ② $T(v) \in \operatorname{Im} T$

ADDITIVITÀ

$T(v) = T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) =$

OMOGENEITÀ

$= T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) + \dots + T(a_n v_n) =$

$= a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) \in \operatorname{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$

$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) \in \operatorname{Span}\{T$

Ker T sottospazio: $T(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \operatorname{Ker} T$ se

$v \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0_W = 0_W \Rightarrow \lambda v \in \operatorname{Ker} T$

se $v, v' \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v + v') = T(v) + T(v') = 0_W + 0_W$

$\Rightarrow v + v' \in \operatorname{Ker} T$.

③ ovvio da definizione. □

e.g. $\bullet\ F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \to \mathbb{R}_{\le 2}[T],\ F(p) = p'$

$a + bT + cT^2 \mapsto b + 2cT$

$\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Span}\{F(1), F(T), F(T^2)\} = \mathrm{Span}\{0, 1, 2T\} = \mathrm{Span}\{1, T\}$

$\mathrm{Ker}\, F \quad b + 2cT = 0 \iff b = 0,\ c = 0 \Rightarrow \ker F = \mathrm{Span}\{1\}$

$\bullet\ F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \to \mathbb{R}_{\le 4}[T]$

$F(p) = p(T^2 - T)$

$\mathrm{Im}\, F = \mathrm{Span}\{F(1), F(T), F(T^2)\}$

$\mathrm{Span}\{\underbrace{T^2 - T, T^3 - T^2, T^4 - T^3}_{\text{INDIPENDENTI}}\}$

$\mathrm{Ker}\, A: F(a + bT + cT^2) = (a + bT + cT^2)(T^2 - T) =$

$= -aT + (a-b)T^2 + (b-c)T^3 + cT^4 = 0$

$$\iff \begin{cases} -a = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, F = \{0\}$$

$\bullet\ F(p) = \underbrace{(T-2)\, p'(T) + 3p(T) - (T^2 - 1)p(2)}_{\text{LINEARE}}$

$F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \to \mathbb{R}_{\le 2}[T]$

$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{F(1), F(T), F(T^2)\}$

$= \operatorname{Span}\{-t^2+4, -2T^2+4T, T^2-4T+4\}$

in base $\{$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\{-T^2+4, -2T^2+4T)$

$\operatorname{Ker} T: \ (T-2)(b+2cT) + 3(a+bT+cT^2) - (T^2-1)(a+2b+4c) =$

$= (-2b+3a+a+2b+4c) + (-4c+b+3b)T + (2c+c-a-2b-4c) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4c=0 \\ -4c+4b=0 \\ -c-a-2b=0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\{-1+T+T^2\}$

"TEOREMA DELLA DIMENSIONE"

$T: V \to W$ applicazione lineare, allora

$\dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T = \dim V$.

DIM: OBIETTIVO: Costruire una base di V che faccia funzionare l'uguaglianza.

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{= d} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{= r} = \underbrace{\dim V}_{= n}$$

$\{u_1, \dots, u_d\}$ base di Ker T

TEOREMA DI COMPLETAMENTO: $\underbrace{\{\underbrace{u_1, \dots, u_d}_{d}, \underbrace{v_{d+1}, \dots v_n}_{n-d}\}}_{= B}$ base di V.

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span} T(B) = \operatorname{Span}\{\underbrace{T(u_1)}_{= 0}, \dots, \underbrace{T(u_d)}_{= 0}, T(v_{d+1}), \dots, T(v_n)\}$$

$= \operatorname{Span}\{T(v_{d+1}), \dots, T(v_n)\}$ se mostro $T(v_{d+1}), \dots, T(v_n)$ base $\Rightarrow r = n-d$ e ho finito.

Basta che siano indipendenti.

$a_{d+1} T(v_{d+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0_W$

$\sim T(a_{d+1} v_{d+1}) + \dots + T(a_n v_n) = 0_W$

$\sim T(a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_n v_n) = 0_W$

$\Leftrightarrow a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T$

$\Rightarrow a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_n v_n = \underbrace{b_1 u_1 + \dots + b_d u_d}_{\text{BASE DI KER T}}$

$\sim \underbrace{-b_1 u_1 + \ldots + -b_d u_d + a_{d+1} v_{d+1} + \ldots + a_n v_n = 0}_{\text{LINEARMENTE INDIPENDENTI}}$

$\Rightarrow a_{d+1} = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow T(v_{d+1}), \ldots, T(v_n)$

INDIPENDENTI COME VOLUTO $\square$.

"APPLICAZIONI LINEARI E BASI"

NOTAZIONE: $T: V \to W$ lineare, allora $rk\, T = \dim \operatorname{Im} T$

DEF: A matrice $m \times n$. A^T ("A TRASPOSTA") matrice $n \times m$ ottenuta scambiando righe e colonne.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\-1\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

OSS: $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda (A^T)$ quindi la trasposta é applicazione lineare da $M_{m,n}(\mathbb{K})$ in $M_{n,m}(\mathbb{K})$

e.g. $T_K : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}$ data da $T(A) = A - KA^T$ con $K \in \mathbb{R}$

(I) T_K lineare, infatti:

- $T_K(\lambda A) = \lambda A - K(\lambda A)^T = \lambda A - \lambda_K A^T = \lambda(A - KA^T) = \lambda T_K(A)$
- $T_K(A+B) = (A+B) - K(A+B)^T = (A+B) - K(A^T + B^T) =$

$= (A - KA^T) + (B - KB^T) = T_K(A) + T_K(B)$

② dim Ker T_k e rk T_k per $k \in \mathbb{R}$

base $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

in base $\mathcal{E}$, $\operatorname{Im} T_k = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-k \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$ SE $k \neq 2$

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

QUINDI SE $k \neq 1, -1$

rk $T = 4 \Rightarrow$ dim Ker $T = 4 - 4 = 0$

$k = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rk $T = 3 \Rightarrow$ dim Ker $T = 4 - 3 = 1$

$K = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r_k\, T = 1$, $\dim \operatorname{Ker} T = 4 - 1 = 3$

quindi $\begin{cases} K \neq 1, -1 & \dim \operatorname{Im} T = 4, \dim \operatorname{Ker} T = 0 \\ K = -1 & \dim \operatorname{Im} T = 3, \dim \operatorname{Ker} T = 1 \\ K = 1 & \dim \operatorname{Im} T = 2, \dim \operatorname{Ker} T = 3 \end{cases}$

TEOREMA (ESISTENZA E UNICITÀ)

V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $w_1, \dots, w_n \in W$ elementi qualsiasi. Allora esiste un'unica applicazione lineare $T: V \to W$ tale che $T(v_j) = w_j$, $\forall\, 1 \leq j \leq n$.

In altre parole scegliere un'applicazione lineare $T: V \to W$ è come scegliere una funzione $f: B \to W$.

DIM: UNICITÀ: assumiamo F, T lineari da V in W tali che $F(v_j) = T(v_j) = w_j$ $\forall j$. Allora se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$F(v) = F(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = F(a_1 v_1) + \dots + F(a_n v_n)$

$= a_1 F(v_1) + \dots + a_n F(v_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$

$T(v) - T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$

$= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = F(v)$, quindi $T(v) = F(v)$ $\forall v \in V$

ESISTENZA: Dobbiamo definire $T: V \to W$ tale che $T(v_j) = w_j \ \forall j$ e dimostrare che é lineare. Definiamo $T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \stackrel{def}{=} a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$

SCRITTURA UNICA PERCHÉ B BASE

funzione ben definita perché ogni v si scrive unicamente come $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

OMOGENEA: $T(\lambda v) = T(\lambda(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) = T(\lambda a_1 v_1 + \dots + \lambda a_n v_n)$
$= \lambda a_1 w_1 + \dots + \lambda a_n w_n = \lambda(a_1 w_1 + \dots + \lambda a_n w_n) = \lambda T(v)$

ADDITIVITÁ: $v' = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$T(v + v') = T((a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n))$
$= T((a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n) = (a_1 + b_1) w_1 + \dots + (a_n + b_n) w_n$
$= (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n) + (b_1 w_1 + \dots + b_n w_n) = T(v) + T(v')$ □.

e.g. $V = \mathbb{R}_{\le 2}[T]$, $B = \{T^2+1, T^2-T-1, T-1\}$

$F: \mathbb{R}_{\le 2}[T] \to \mathbb{R}_{\le 1}[T]$ definita da $F(T^2+1) = 2T$, $F(T^2-T-1) = 2T-1$, $F(T-1) = 1$

↳ PER IL TEOREMA

① Cos'é $F(2T^2 + 3T - 2)$

② Come possiamo descrivere F?

① Scrivo $2T^2 + 3T - 2$ in termini di B passo in coordinate rispetto $\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$

$$B_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad P_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-2\\0&-1&1&3\\1&1&0&2\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-2\\0&-1&1&3\\0&2&1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-2\\0&-1&1&3\\0&0&3&10\end{array}\right)\sim\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{10}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P=\frac{5}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{10}{3}p_3\Rightarrow F(p)=\frac{5}{3}F(p_1)+\frac{1}{3}F(p_2)+\frac{10}{3}F(p_3)$$

$$=\frac{5}{3}\cdot 2t+\frac{1}{3}(2t-1)+\frac{10}{3}=4t+3$$

② Sappiamo che $F(p_j)=p_j'$, $j=1,2,3$, per ogni j $\Rightarrow F(p)=p'$ $\forall p$

(é uguale alla derivata su una base)

COROLLARIO: Se $T, F: V\to W$ lineari sono uguali su una base B qualsiasi, allora $T=F$.

e.g. Può esistere $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}?$$

IDEA: Estraggo base da $v_1,\dots,v_4$, scrivo i rimanenti in termini della base e controllo che su questi abbia il valore corretto.

ESTRAGGO BASE: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ base di $\text{Span}\{v_1, \dots, v_4\}$

SCRIVO v_4 COME COMBINAZIONE: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$

$\sim \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow v_4 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{3}{2} v_3$

$\Rightarrow$ se $T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, T(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

allora $T(v_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

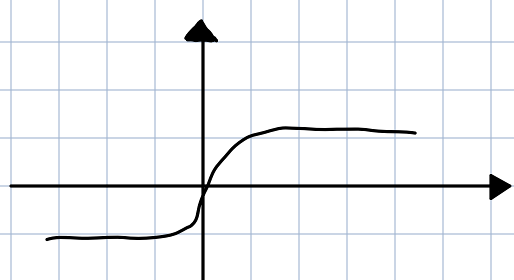
$\Rightarrow$ NON ESISTE T COME RICHIESTO.

"INIETTIVITÀ, SURIETTIVITÀ PER APPLICAZIONI LINEARI"

RICORDIAMO: $f: I \longrightarrow J$ è

INIETTIVA: SE $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ o equivalentemente per $y \in J$ esiste al più un singolo $x \in I$ tale che $f(x) = y$.

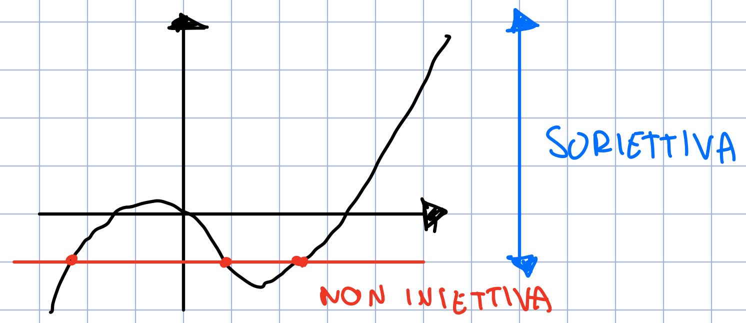
e.g. $f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva.



SURIETTIVA: Se per ogni $y \in J$ esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x)=y$

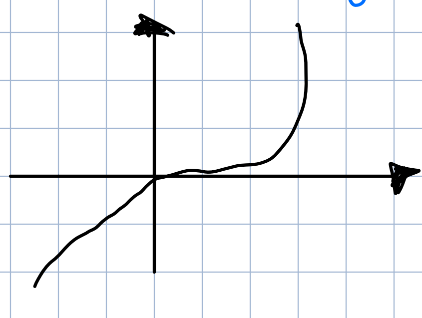
in altre parole $\operatorname{Im} f = J$

e.g. $f(x) = x^3 - x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suriettiva ma non iniettiva.



BIGETTIVA: Se é sia suriettiva che iniettiva, cioé se per ogni $y \in J$ esiste un unico $x \in I$ tale che $f(x) = y$

e.g. $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bigettiva



In generale difficile da verificare, ma non per le applicazioni lineari.

PROPOSIZIONE: ① $T: V \to W$ lineare e iniettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$

② $T: V \to W$ lineare e suriettiva $\Leftrightarrow$ data $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $\operatorname{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = W$.

DIM: ① Iniettiva $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ è equivalente a dimostrare

$\operatorname{Ker} T \neq \{0_V\} \Rightarrow$ NON INIETTIVA.

Se $v \neq 0_V \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v) = T(0_V) = 0_W \Rightarrow$ non iniettiva.

$\operatorname{Ker} T = \{0_V\} \Rightarrow$ iniettiva è equivalente a dimostrare

NON INIETTIVA $\Rightarrow \operatorname{Ker} T \neq \{0_V\}$

Se $T(v_1) = T(v_2)$ $v_1 \neq v_2$ allora $T(v_1) - T(v_2) = 0_V$

$\sim T(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} T$ e per ipotesi $v_1 \neq v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 \neq 0_V$

② Chiaro perché abbiamo visto $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$

OSSERVAZIONE: ① T iniettiva $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$ infatti se

se $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$ per il teorema della dimensione.

$$\dim V = \dim \underset{\underset{W}{\cap}}{\operatorname{Im}} T + 0 \leq \dim W$$

② T suriettiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$ perché $\operatorname{Span}\{\underbrace{T(v_1), \dots, T(v_n)}_{n \text{ VETTORI}}\} = W$

③ T biiettiva $\Rightarrow \dim V = \dim W$

PROPOSIZIONE: ① T iniettiva $\Leftrightarrow$ data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base allora $T(v_1), \dots, T(v_n)$ linearmente indipendenti.

② T biiettiva $\Leftrightarrow$ data $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base allora $T(v_1), \dots, T(v_n)$ base di W.

DIM: ① $T(v_1), \dots, T(v_n)$ indipendenti $\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0_V\}$ ($\Rightarrow$ iniettiva)

$v \in \operatorname{Ker} T$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$\Rightarrow 0_W = T(v) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$

$T(v_1), \dots, T(v_n)$ indipendenti $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

• (iniettiva $\Rightarrow$) $\operatorname{Ker} T = \{0_V\} \Rightarrow T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ linearmente indipendenti.

Se $a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0_W$

$\Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0_W \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} T$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

② Chiaro perché iniettiva $\Leftrightarrow T(v_1), \dots, T(v_n)$ generatori.

DEF: $T: V \to W$ lineare è invertibile se e solo se esiste $F: W \to V$ tale che $T \circ F = Id_W$ e $F \circ T = Id_V$.

F è detta l'inversa di T e la coppia (T, F) è un isomorfismo tra V e W.

e.g. V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base, allora φ_B e ψ_B sono inversa una dell'altra e (φ_B, ψ_B) isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$.

TEOREMA: $T: V \to W$ lineare é invertibile $\Leftrightarrow$ é bigettiva. Inoltre la sua inversa é unica e la scriveremo T^{-1}.

DIM: invertibile $\Rightarrow$ bigettiva vale in generale per funzioni qualsiasi.

bigettiva $\Rightarrow$ invertibile:

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base, allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \overset{def}{=} \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W.

Per esistenza - unicitá esiste unica F tale che $F(w_j) = v_j$ $\forall j = 1, \dots, n$.

$F: W \to V$. allora $T \circ F(w_j) = T(F(w_j)) = T(v_j) = w_j$

$\Rightarrow T \circ F(w_j) = Id_W(w_j)$ $\forall j \Rightarrow T \circ F = Id_W$.

$F \circ T(v_j) = F(T(v_j)) = F(w_j) = v_j$

$\Rightarrow F \circ T(v_j) = Id_V(v_j)$ $\forall j \Rightarrow F \circ T = Id_V$.

Quindi F é l'inversa di T ed é unica per l'unicitá. $\square$

COROLLARIO: Sono equivalenti:

(A) T invertibile

(B) T bigettiva

(C) T manda base di V in base di W.

(D) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ e $r_K T = \dim W$

(E) $\dim V = \dim W$ e $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$

(F) $\dim V = \dim W$ e $r_K T = \dim V$

e.g. $T_K: M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $T_K(A) = A + KA^T$ é invertibile

$r_K T = 4 \Leftrightarrow K \neq 1, -1$

"DUE ESEMPI IMPORTANTI"

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $W, W' < V$ sottospazi tali che $W \oplus W' = V$.

Definiamo:

DEF: La proiezione su W lungo W' è l'unica applicazione lineare

$$\pi_W^{W'} : V \to V$$

tale che se $w \in W$ allora $\pi_W^{W'}(w) = w$ e se $w' \in W'$ allora $\pi_W^{W'}(w') = 0_V$.

In altre parole $\pi_W^{W'}|_W = Id_W$ e $\pi_W^{W'}|_{W'} = 0$.

Perché esiste ed è unica?

Ricordiamo che $V = W \oplus W' \Leftrightarrow$ dove $B_W, B_{W'}$ basi di W e W' allora $B = B_W \cup B_{W'}$ base di V.

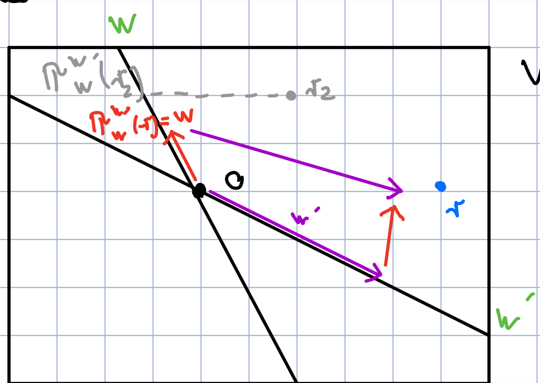
$$B = \{ \underbrace{w_1, \dots, w_d}_{B_W}, \underbrace{w'_{d+1}, \dots, w'_n}_{B_{W'}} \}$$

Allora per esistenza e unicità esiste unica $T : V \to V$ t.c. $T(w_j) = w_j$ $j = 1, \dots, d$

$T(w'_j) = 0_V$ $j = d+1, \dots, n$.

È immediato che $T = \pi_W^{W'}$

(di nuovo esistenza e unicità su $T|_W$ e $T|_{W'}$).



$V = \mathbb{R}^2$

$v = w + w' \Rightarrow \pi_W^{W'}(v) = \pi_W^{W'}(w) + \pi_W^{W'}(w') = w$

e.g. $V=\mathbb{R}^3$, $W: x-y+z=0$, $W'=\text{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 = W \oplus W'$, come calcolo $\pi_W^{W'}(v)$?

$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B_{W'} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

- $v = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ voglio trovare le coordinate rispetto a B: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\pi_W^{W'}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \pi_W^{W'}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\pi_W^{W'}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}^{\in W} + \frac{1}{2}\pi_W^{W'}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}^{\in W} + \frac{3}{2}\pi_W^{W'}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}^{\in W'} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

- $v\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ mi serve sapere $\pi_W^{W'}(e_j)$ $j=1,2,3$

$\sim$ trovare $(e_1)_B, (e_2)_B, (e_3)_B$ $\sim$ tre sistemi $(w_1 \; w_2 \; w'_3 \,|\, e_j)$ $j=1,2,3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TRE SISTEMI

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$e_1 = -\frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w'_3 \qquad e_2 = w_1 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w'_3 \qquad e_3 = \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w'_3$$

$$\Rightarrow \pi^{W'}_{W}(e_1) = -\frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \pi^{W'}_{W}(e_2) = w_1 + \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\pi^{W'}_{W}(e_3) = \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi^{W'}_{W}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

OSS: $\operatorname{Im} \pi^{W'}_{W} = W$, $\operatorname{Ker} \pi^{W'}_{W} = W'$.

SECONDO ESEMPIO: L'APPLICAZIONE INVERSA.

$T: V \to W$ invertibile, T^{-1} inversa, voglio calcolare esplicitamente T^{-1}.

e.g. $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$F(a+bT+cT^2) = (a+c)(1+T+T^2) - (a+bT+cT^2)$

$\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$

$F(1) = T+T^2$, $F(T) = -T$, $F(T^2) = (1+T)$

in base $\mathcal{E}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $rk = 3$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} F = 3 \Rightarrow F$ invertibile

F^{-1}? Basta sapere $F^{-1}(1), F^{-1}(T), F^{-1}(T^2)$

Cosa so? $F(T+T^2)=1$, $F(-T)=T$, $F(1+T)=T^2$

$\Rightarrow$ Per calcolare F^{-1} basta sapere le coordinate dei polinomi di $1, T, T^2$ rispetto a $B=\{T+T^2, -T, 1+T\}$

IN COORDINATE:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right| & & & \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & 1 & T & T^2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 1=(-T)+(1+T),\ T=(-(-T)),\ T^2=(T^2+T)+(-T)$$

$$\Rightarrow F^{-1}(1)=F^{-1}(-T)+F^{-1}(1+T)=T+T^2$$

$$F^{-1}(T)=-F^{-1}(-T)=-T$$

$$F^{-1}(T^2)=F^{-1}(T^2+T)+F^{-1}(-T)=1+T$$

$$\Rightarrow F^{-1}(a+bT+cT^2)=a(T+T^2)-b(T)+c(1+T)$$

QUINDI: Trovare cosa fa T^{-1} su una base B' di W equivale a scrivere la base B' in termini delle immagini di una base B di V.

"SOMMA E COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI"

DEF / PROP: $T, F: V \to W$ lineari, $\lambda \in \mathbb{K}$.

① $T+F: V \to W$ è l'applicazione lineare definita da $T+F(v)=T(v)+F(v)$ per ogni v.

② $\lambda T: V \to W$ è l'applicazione lineare definita da $(\lambda T)(v)=\lambda(T(v))$ per ogni v.

③ Se $G: W \to U$ lineare, $G \circ T : V \to U$ é l'applicazione lineare definita da $G \circ T(v) = G(T(v))$ per ogni v.

DIM: ① $T+F$ lineare:

• $(T+F)(\lambda v) = T(\lambda v) + F(\lambda v) = \lambda T(v) + \lambda F(v)$

$= \lambda(T(v) + F(v)) = \lambda(T+F)(v)$ É OMOGENEA

• $(T+F)(v+v') = T(v+v') + F(v+v') = T(v) + T(v') + F(v) + F(v') =$

$= (T+F)(v) + (T+F)(v')$ É ADDITIVA É LINEARE.

② λT lineare é ovvio.

③ $G \circ T$ lineare:

• $G(T(\lambda v)) = G(\lambda T(v)) = \lambda(G(T(v))) = \lambda G \circ T(v)$ OMOGENEA

• $G(T(v+v')) = G(T(v) + T(v')) = G(T(v)) + G(T(v')) =$

$= G \circ T(v) + G \circ T(v')$ ADDITIVA L'APPLICAZIONE É LINEARE $\square$

e.g. $F: \mathbb{R}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{R}^3$

$$F(p(T)) = \begin{pmatrix} -p'(0) + 2p(1) \\ 5(p \cdot (T+1))''(2) \\ 3p(-1) + p''(-2) \end{pmatrix}$$ é lineare?

• lineare $\Leftrightarrow$ lo é ognuno dei coefficienti

① $p \to -p'(0) + 2p(1)$ é lineare perché é la somma di un'applicazione lineare $p \to 2p(1)$ e la composizione $p \to p' \to -p'(0)$ che sono lineari.

② $5(p(T+1))''(2)$ é lineare perché la composizione di

$$p \underset{\text{MOLTIPLICAZIONE}}{\to} 5p \cdot (T+1) \underset{\text{DERIVATA SECONDA}}{\to} 5(p(T) \cdot (T+1))'' \underset{\text{VALUTAZIONE IN } T=2}{\to} 5(p \cdot (T+1))''(2)$$

③ STESSA COSA.

DEF: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ lineare}\}$

COROLLARIO: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ è un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale con operazioni

$+, \cdot$ e zero l'applicazione 0 che manda tutto in 0_W.

DIM: Bisogna verificare che sia un gruppo per $+$ e che $\lambda(T+F) = \lambda T + \lambda F$, $1 \cdot T = T$, $(\lambda + \gamma)F = \lambda F + \gamma F$. Verifiche tutte immediate calcolando su un vettore v, ad esempio:

PROPRIETÀ DI W

$$\lambda(T+F)(v) = \lambda(T(v) + F(v)) = \lambda T(v) + \lambda F(v) \overset{def}{=} (\lambda T + \lambda F)(v) \quad \square$$

Se prendo $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'applicazione $A \to L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$L_A(v) = A \cdot v$ manda $M_{m,n}(\mathbb{K})$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

è lineare?

PROPOSIZIONE: L'applicazione $A \to L_A$ è lineare, in altre parole

- $L_{(A+B)} = L_A + L_B$ • $L_{(\lambda a)} = \lambda L_A$

DIM: • $L_{A+B}(v) = (A+B)(v) = Av + Bv = L_A(v) + L_B(v)$.

• $L_{\lambda A}(v) = (\lambda A)(v) = \lambda L_A(v)$. $\square$

DOMANDA: $A \to L_A$ è isomorfismo?

In altre parole, è vero che ogni $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si scrive come L_A per qualunque A?

LA MATRICE ASSOCIATA A UN'APPLICAZIONE LINEARE

OSSERVIAMO: Se $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, allora

$$T \mapsto T(v_1), \dots, T(v_n) \in \underbrace{W \times \dots \times W}_{n \text{ COPIE}}$$

è un'applicazione lineare ed è biettiva per esistenza e unicità, quindi $Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \simeq W^n$

Se ora scelgo B' base di W

$$T \mapsto (T(v_1), \dots, T(v_n)) \xmapsto{\varphi_{B'}^n} (T(v_1)_{B'}, \dots, T(v_n)_{B'}) \in (\mathbb{K}^m)^n$$

è di nuovo lineare e biettiva

Però $\mathbb{K}^m \times \dots \times \mathbb{K}^m \simeq M_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow$ ho costruito un'applicazione lineare biettiva: $\Phi_{B'}^{B} : Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$

DEF: Data $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W, definiamo

$T_{B'}^{B} = \Phi_{B'}^{B}(T)$ la matrice associata a T nelle basi B, B'.

In altre parole $T_{B'}^{B} = \left(T(v_1)_{B'} \dots T(v_n)_{B'}\right)$

OSS: Una base di $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ è data dalle controimmagini tramite $\Phi_{B'}^{B}$ della base $\mathcal{E} = \{E_{ij}\}$ di $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$\Phi_{B'}^{B}(T) = E_{ij} \Leftrightarrow T(v_s) = \begin{cases} w_i & s = j \\ 0_W & s \neq j \end{cases} \Rightarrow \text{base di } Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \text{ è data}$$

da $T_{i,j}$ $\quad 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ dove $T_{i,j}(v_s) \overset{def}{=} \begin{cases} w_i & s = j \\ 0_W & s \neq j \end{cases}$

In che senso la matrice $T_{B'}^{B}$ rappresenta l'applicazione T?

PROPOSIZIONE: $T_{B'}^{B}(v_B) = (T(v))_{B'}$

DIM: $T_{B'}^{B} = \left(T(v_1)_{B'} \dots T(v_n)_{B'}\right) \Rightarrow T_{B'}^{B}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 T(v_1)_{B'} + \dots + a_n T(v_n)_{B'}$

quindi se $v_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $(\Leftrightarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$

$T_{B'}^{B} \cdot v_B = a_1 T(v_1)_{B'} + \dots + a_n T(v_n)_{B'} = a_1 \varphi_{B'}(T(v_1)) + \dots + a_n \varphi_{B'}(T(v_n))$

$= \varphi_{B'}(a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)) = \varphi_{B'}(T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) = \varphi_{B'} T(v) = T(v)_{B'}$ $\square$

Conseguentemente ogni informazione su T può essere letta da $T_{B'}^{B}$ a meno di passare in coordinate !!

e.g. ① $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ x - 2y \end{pmatrix}$

$B = \mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B' = \mathcal{E}' = \{e_1, e_2\}$

$T_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (T(e_1)_{\mathcal{E}'}, T(e_2)_{\mathcal{E}'}, T(e_3)_{\mathcal{E}'})$

$= \left(\begin{pmatrix} 1 - 0 + 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'}, \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 0 - 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'}, \begin{pmatrix} 0 - 0 + 2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Se $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

② $F: \mathbb{R}_{\leq 3}[T] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$F(p(T)) = p'(T)$

$\mathcal{E} = \{1, T, T^2, T^3\}$, $\mathcal{E}' = \{1, T, T^2\}$

$F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \left(F(1)_{\mathcal{E}'} \; F(T)_{\mathcal{E}'} \; F(T^2)_{\mathcal{E}'} \; F(T^3)_{\mathcal{E}'} \right) = \left(0_{\mathcal{E}'} \; (1)_{\mathcal{E}'} \; (2T)_{\mathcal{E}'} \; (3T^2)_{\mathcal{E}'} \right) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$ se $p(T) = 2 - 3T + 4T^2 + T^3$ allora

$$F(p(T))_{\mathcal{E}'} = F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} \cdot (p(T))_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F(p(T)) = \psi_{\mathcal{E}'} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 8T + 3T^2$$

③ $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbb{R}$

$$F(p(T)) = \int_0^1 p(t)\,dt$$

$\mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$, $\mathcal{E}' = \{1\}$

$F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \left(F(1)_{\mathcal{E}'} \; F(T)_{\mathcal{E}'} \; F(T^2)_{\mathcal{E}'} \right) = \left(1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{3} \right)$

quindi se $p(T) = 1 - 2T + T^2 \Rightarrow F(p(T)) = \left(1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

La matrice associata a un'applicazione lineare

$Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ spazio delle applicazioni lineari $T : V \to W$

$B\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, B' base di W

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$$\Phi^{B}_{B'} : Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \xrightarrow{1:1} M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$\boxed{T \longmapsto \left(T(v_1)_{B'} \dots T(v_n)_{B'} \right)}$$

biiettiva per esistenza e unicità.

SURIETTIVA — esistenza; INIETTIVA — unicità

Base di $Hom_{K}(V,W) \longrightarrow$ base di $M_{m,n}(K)$

$$T_{i,j}(v_s) = \begin{cases} 0 & j = s \\ w_i & j \neq s \end{cases} \qquad E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \overset{i,j}{1} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Voglio costruire $(\Phi^{B}_{B'})^{-1}$ un'applicazione F tale che $F(E_{ij}) = T_{ij}$

IDEA:

$$v \in V \mapsto v_B \in K^n \mapsto \overset{m \times n}{A}\, v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \mapsto \psi_{B'}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m)$$

è lineare da V a W! Questo procedimento dà applicazione

$$\Psi^{B'}_{B} : M_{m,n}(K) \to Hom_K(V,W)$$

$$A \mapsto \underbrace{\psi_{B'} \circ L_A = \varphi_B}_{\text{COMPOSIZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE}}$$

VERIFICA DIRETTA: • $\Psi^{B}_{B'}(\lambda A) = \lambda \Psi^{B}_{B'}(A)$

• $\Psi^{B}_{B'}(A+B) = \Psi^{B}_{B'}(A) + \Psi^{B}_{B'}(B) \Rightarrow$ È LINEARE

Per vedere che $\Psi^{B}_{B'} = (\Phi^{B}_{B'})^{-1}$ la calcolo in E_{ij}

$$\Psi^{B}_{B'}(E_{ij}) = \psi_{B'} \cdot L_{E_{ij}} \cdot \varphi_B$$

$$\psi_B \cdot L_{E_{ij}} \cdot \varphi_B(v_s) = \psi_{B'} \cdot L_{E_{ij}}(e_s) = \psi_{B'}(E_{ij} \cdot e_s) = \psi_{B'}\left(\begin{cases} 0 & s \neq j \\ e'_i & s = j \end{cases}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & s \neq j \\ w_i & s = j \end{cases} \Rightarrow \Psi^{B}_{B'}(E_{ij}) = T_{ij} \Leftrightarrow \Psi^{B}_{B'} = (\Phi^{B}_{B'})^{-1}$$

RICORDIAMO: FORMULA FONDAMENTALE PER $T_{B'}^{B}$

$$\boxed{T_{B'}^{B} \cdot v_B = T(v)_{B'}}$$

COROLLARIO: $\operatorname{Ker} T = \Psi_B \operatorname{Ker} T_{B'}^{B} \qquad \operatorname{Im} T = \Psi_{B'} \operatorname{Im} T_{B'}^{B}$

DIM: Immediato dalla formula. $\square$

e.g. $\bullet\ T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$T(A) = A - A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = B'$$

$$T_{B'}^{B} = \left(T(E_{11})_B \ \dots \ T(E_{22})_B \right)$$

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{B'}^{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ker e Im: $\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T^{B}_{B'} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} T = \operatorname{Span} \psi_{B'}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} T^{B}_{B'} : x_2 = x_3 \Rightarrow \operatorname{Ker}^{B}_{B'} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \psi_B \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

- $T(A) = A + A^T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$

$B = B' = \mathcal{E}$

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Ker e Im : $\sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T^{B}_{B'} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} T^{B}_{B'} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} T^{B}_{B'} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbb{R}^3 \qquad F(p) = \begin{pmatrix} ((T^2-2)p)'(1) \\ ((T^2-3T)p)''(1) \\ -p'(1) - 2p''(1) \end{pmatrix}$

$B = \{1, T, T^2\}$, $B' = \mathcal{E}$

$$F(1) = \begin{pmatrix} 2T(1) \\ 2(1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(T) = \begin{pmatrix} (3T^2-2)(1) \\ (6T-6)(1) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F(T^2) = \begin{pmatrix} (4T^3-4T)(1) \\ (12T^2-18T)(1) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F^{B}_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Ker e Im

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} F^{B}_{B'} : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -6z \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = 3z \\ y = -6z \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} F = \operatorname{Span}\{3 - 6T + T^2\}$$

$$\operatorname{Im} F^{B}_{B'} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\{2 + 2T, 1 - T^2\}$$

RICORDIAMO: $V = W \oplus W'$, allora

$\pi_W^{W'}$ è l'unica applicazione lineare $V \to V$ tale che

- $\pi_W^{W'}(w) = w \quad \forall\, w \in W$
- $\pi_W^{W'}(w') = 0_V \quad \forall\, w' \in W$

e.g. $V = \mathbb{R}^3 \quad W = x - y + z = 0$

$W' = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se $B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in W}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in W'} \Big\}$ allora

$$\underset{\overset{\shortparallel}{T}}{\left(\pi_W^{W'}\right)_B^B} = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSS: Se $B = B_W \cup B_{W'}$ allora $\left(\pi_W^{W'}\right)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{W} & \underbrace{\qquad}_{W'} \end{array}$$

$$\left(\pi_W^{W'}\right)_{\mathcal{E}}^B = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RICORDIAMO: $T(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; T(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; T(e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\pi_W^{W'}\right)_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ker e Im $\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_m = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = W$

Ker: $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ker}\, T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = W$ Come richiesto

MATRICE DI CAMBIO BASE

Consideriamo $T = Id_V \in Hom_{\mathbb{K}}(V, V)$

per definizione $Id_V(v) = v \quad \forall v \in V$.

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$Id_V{}_B^B = (Id_V(v_1)_B \dots Id_V(v_n)_B) = ((v_1)_B \dots (v_n)_B) = (e_1 \dots e_n)$

INFATTI $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Se prendo $B' \neq B$

Per proprietà fondamentale delle matrici associate

$(Id_V{}_{B'}^B)\, v_B = (Id_V(v))_{B'} = v_{B'}$

ho cambiato coordinate dalla base B alla base B'

Normalmente $v_B \xrightarrow[\text{LINEARE}]{\text{SISTEMA}} v_{B'}$ ma se conosco $(Id_V)_{B'}^B$ è solo una moltiplicazione!

Come la trovo?

$Id_V{}_{B'}^B = (Id_V(v_1)_{B'} \dots Id_V(v_n)_{B'}) = ((v_1)_{B'} \dots (v_n)_{B'})$

$\Rightarrow$ Basta mettere in coordinate i vettori di B.

e.g. $B = \{1, T, T^2, T^3\}$, $B' = \{T^3 - T,\ T^2 + 2T + 1,\ T^2 + T - 1,\ T - 3\}$

$V = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$

voglio $Id_V{}^{B}_{B'} = \left(1_{B'} \dots T^3_{B'} \right)$

$$x_1 (T^3 - T) + x_2 (T^3 + 2T + 1) + x_3 (T^2 + T - 1) + x_4 (T - 3) = T^j$$

$$\sim x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_j$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{10} \\ x_2 = \frac{1}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{3}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{10} \\ x_2 = \frac{3}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{1}{5} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -\frac{4}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{7}{10} \\ x_2 = \frac{3}{10} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_m{}^{\mathcal{E}}_{B} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Id}^{B}_{\mathcal{E}} = \left((T^3-T)_{\mathcal{E}} \quad (T^2+2T+1)_{\mathcal{E}} \quad (T^2+T-1)_{\mathcal{E}} \quad (T-3)_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $P(T) = 2T^2 - T + 2$

$$P(T)_B = ? = \mathrm{Id}^{\mathcal{E}}_{B} \, P_{\mathcal{E}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ +3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI, PRODOTTO TRA MATRICI

$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{F} U$ date basi B_V, B_W, B_U voglio trovare una relazione tra le matrici $T^{B_V}_{B_W}$, $F^{B_W}_{B_V}$, $(F \circ T)^{B_V}_{B_U}$

PRODOTTO TRA MATRICI

$A \quad m \times n \longleftrightarrow T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$B \quad s \times m \longleftrightarrow F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^s)$

la composizione $F \circ T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^s$ corrisponde a C $s \times n$. Come la trovo $C(e_j) = B(A \cdot e_j) = B A^j$ posso vederla come un'operazione

$C|_{\mathbb{K}^n}$

$$M_{s\times m}(\mathbb{K}) \times M_{m \times n}(\mathbb{K}) \to M_{s \times n}(\mathbb{K}) \, ?$$

DEF: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{s1} & \dots & b_{sm} \end{pmatrix}$

allora $BA = (b_{i1}a_{j1} + \dots + b_{im}a_{jm})_{\substack{i \le s \\ j \le n}}$

in altre parole $c_{ij} = B_i A^j$

$C = (BA^1 \dots BA^n)$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

e.g. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = 2\times 2$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ BA^1 & BA^2 \end{array}$$

PRODOTTO TRA MATRICI

RICORDIAMO: $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$ $\quad n = n$

AB matrice $m\times s$

$$AB=(c_{ij})_{\substack{i\le m\\ j\le s}} \qquad c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

equivalentemente $AB=(AB^1\dots AB^m)$

$\boxed{\text{Possiamo moltiplicare una matrice } m\times n \text{ con una } r\times s \iff n=r}$

e.g. $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}$ 3×4 $\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ 4×2

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\-1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{6}&4\\2&1\\1&-3\end{pmatrix}$$

BA non definita

e.g. $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\2&2\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\3&3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&-1&-1\\4&2&6\end{pmatrix}$$

e.g. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AB, BA \ \ 2 \times 2$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IL PRODOTTO TRANNE RARI CASI NON È COMMUTATIVO

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $AB \neq BA$ anche se hanno la stessa taglia, e possiamo avere $AB = 0$ anche se A e $B \neq 0$

e.g. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$\quad\ \ \|$

$(e_1 \dots e_n)$

I_n è l'unica matrice tale che, equivalentemente:

① $I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

② $I_n v = v \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$

perché ① $\Rightarrow$ ② $\Leftrightarrow L_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$

data una base B di V

$(Id_V)_B^B = I_n.$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

① $(A+B)C = AC + BC$

② $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

③ $A(B+C) = AB + AC$

④ $A(BC) = (A \cdot B) \cdot C$

DIM: ①, ②, ③ Sono vere per le corrispettive proprietà $(\lambda A)v = \lambda(Av)$, $(A+B)v = Av + Bv$, $A(v+v') = Av + Av'$ applicate colonna per colonna.

④ (A $d \times m$, B $m \times n$, C $n \times s$)

$$A(B\cdot C) = A(BC^1 \dots BC^s) = (A(BC^1) \dots A(BC^s))$$

$$(A\cdot B)\cdot C = ((A\cdot B)C^1 \dots (A\cdot B)C^s)$$

quindi basta dimostrare che le colonne sono uguali, ovvero

E' UN VETTORE

(prendendo $C^j = v$)

$$A(Bv) = (A\cdot B)v \qquad \forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$A\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A(B(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)) = A(x_1 Be_1 + \dots + x_n Be_n) =$$

$$= A(x_1 B^1 + \dots + x_n B^n) = x_1 AB^1 + \dots + AB^n$$

$$= x_1 (AB)^1 + \dots + x_n (AB)^n = AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \ \square$$

e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A\cdot B)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -1 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

COROLLARIO: $L_A \circ L_B = L_{AB}$

DIM: $L_A \circ L_B(v) = L_A(Bv) = A(Bv) = (AB)\cdot v$. D'altro canto

$L_{AB}(v) = AB \cdot v$. $\square$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

TEOREMA: $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $F \in Hom_{\mathbb{K}}(W, U)$

B_V, B_W, B_U basi dei rispettivi spazi. Allora

$$(F \circ T)^{B_V}_{B_U} = F^{B_W}_{B_U} \cdot T^{B_V}_{B_W}$$

DIM:

$(F \circ T)^{B_V}_{B_U}$ é definita dall'equazione

$$(F \circ T)^{B_V}_{B_U}(v_{B_V}) = (F \circ T(v))_{B_U}$$

(se lo calcolo per $v_1, \dots, v_n \in B_V$ ottengo le colonne della matrice)

calcoliamo $(F^{B_W}_{B_U} \cdot T^{B_V}_{B_W})\, v_{B_V}$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$$= F^{B_W}_{B_U}(T^{B_V}_{B_W} v_{B_V}) = F^{B_W}_{B_U}(T(v)_{B_W}) = F(T(v))_{B_U} = (F \circ T(v))_{B_U}$$

$\Rightarrow$ le due matrici sono uguali. $\square$

PRIMITIVA: $(P(T))' = p(T)$

e.g. $\int p(T)\,dt = P(T) + c \in \mathbb{R}_{\leq d+1}[T]/c$ "polinomi modulo costante"

$$(T^2 + 2T + c) + (T^3 - T + c) = T^3 + T^2 + T + c$$

$$F : \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[T]/c$$

$$p(T) \longmapsto \int p(T)\,dt \quad \text{é lineare}$$

$$F(1) = T + c, \quad F(T) = \frac{T^2}{2} + c, \quad F(T^2) = \frac{T^3}{3} + c$$

$$B = \{1, T, T^2\}, \quad B' = \{T + c, T^2 + c, T^3 + c\}$$

$$F_{B'}^{B} = (F(1)_{B'}\ F(T)_{B'}\ F(T^2)_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiamo

$$G(p) = \int (p\cdot(T+1)) - (p'\cdot T^2)\, dt$$

$$G : \mathbb{R}_{\leq 1}[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[T]/C$$

$$p \longmapsto \underbrace{p\cdot(T+1) - p'\cdot T^2}_{q} \longmapsto \int q\, dt$$

$$G = F \circ S \qquad S(p) = p(T+1) - p'\cdot T^2$$

$$F(q) = \int q\, dt$$

$B = \{1, T\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 1}[T]$

$B' = \{1, T, T^2\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$B'' = \{T+C, T^2+C, T^3+C\}$ base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]/C$

$$G_{B''}^{B} = F_{B''}^{B'} \circ S_{B'}^{B}$$

$$S_{B'}^{B} = (S(1)_{B'}\ S(T)_{B'}) = ((T+1)_{B'}\ (T)_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{B''}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow G_{B''}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi ad esempio

$$G(3-4T)_{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(3-4T) = -\frac{T^2}{2} + 3T + C$$

COROLLARIO (FORMULA DI CAMBIO BASE)

$T \in \mathrm{Hom}(V,W)$, B_V, C_V basi di V, B_W, C_W basi di W. Allora

- $T^{C_V}_{B_W} = T^{B_V}_{B_W} \, {Id_V}^{C_V}_{B_V}$
- $T^{B_V}_{C_W} = {Id_V}^{B_W}_{C_W} \, T^{B_V}_{B_W}$
- $T^{C_V}_{C_W} = (Id_W)^{B_W}_{C_W} \, T^{B_V}_{B_W} \, (Id_V)^{C_V}_{B_V}$

DIM: immediata da formula di composizione. $\square$

Quindi per cambiare base in partenza moltiplico a destra, per cambiare base in arrivo moltiplico a sinistra.

e.g. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $W' = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$V = W \oplus W'$

$T = \pi_W^{W'}$, $B = \left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}\right\}$ voglio T^B_B, $T^B_\mathcal{E}$, $T^\mathcal{E}_B$, $T^\mathcal{E}_\mathcal{E}$

- $T^B_B = \begin{pmatrix} T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $T^B_\mathcal{E} = {Id_V}^B_\mathcal{E} \, T^B_B$

${Id_V}^B_\mathcal{E} = ((v_1)_\mathcal{E} \ (v_2)_\mathcal{E} \ (v_3)_\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T^B_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (T(v_1) \ 0 \ 0)$

- $T^\mathcal{E}_B = T^B_B \, Id^\mathcal{E}_B$

${Id_V}^\mathcal{E}_B = (Id_V(e_1)_B \ \ Id_V(e_2)_B \ \ Id(e_3)_B) = ((e_1)_B \ (e_2)_B \ (e_3)_B)$

Calcolo: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Id_{V\,B}^{\ \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = Id_{V\,\mathcal{E}}^{\ B}\, T_B^B\, Id_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

IL RANGO IN QUESTO CASO È UGUALE A 1

OSS: $Id_{\mathcal{E}}^{B} \cdot Id_B^{\mathcal{E}} = Id_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = I_n$

verifichiamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Allo stesso modo $I_{VB}^{\ \mathcal{E}}\, Id_{V\,\mathcal{E}}^{\ B} = Id_{V\,B}^{\ B} = I_n$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

OSS: Diciamo di avere 3 basi

$B, B', \mathcal{E}$ di V. Se sappiamo esprimere i vettori di B, B' in base $\mathcal{E}$,

Come calcoliamo $Id_V{}^{B}_{B'}$?

$$Id^{B}_{B'} = Id^{\mathcal{E}}_{B'} \cdot Id^{B}_{\mathcal{E}}$$

RISOLVO $x_1 v_1' + \dots + x_n v_n' = e_J$ IMMEDIATA

e.g. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

voglio $(Id_{\mathbb{R}^3})^{B}_{B'} = Id^{\mathcal{E}}_{B'} \cdot Id^{B}_{\mathcal{E}}$

$$Id^{B}_{\mathcal{E}} = ((v_1)_{\mathcal{E}} \; (v_2)_{\mathcal{E}} \; (v_3)_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Id^{\mathcal{E}}_{B'} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(\sim x v_1' + y v_2' + z v_3' = e_1, e_2, e_3)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

EXTRA: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ GIÁ RISOLTO $\Rightarrow Id^{W}_{B'} = ((e_1)_{B'} \; (e_2)_{B'} \; (e_3)_{B'}) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Id^{B}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

e.g. $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $W' = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W \oplus W' = M_{2,2}(\mathbb{R})$ (verifica facile)

voglio $(\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$(\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = Id^{B}_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Id^{\mathcal{E}}_{B}$$

A OCCHIO O RISOLVO IL SISTEMA

$$Id^{\mathcal{E}}_{B} = \left(E_{11\,B} \;\; E_{12\,B} \;\; E_{21\,B} \;\; E_{22\,B} \right) = \left(e_2 \;\; \frac{e_1 + e_3}{2} \;\; \frac{-e_1 - e_3}{2} \;\; e_4 \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\pi^{W'}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e.g. W, W' come prima, voglio $(\pi^{W}_{W'})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$

$$B' = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{W'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{W} \Big\}$$

$$(\Pi_W^{W'})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = Id_{\mathcal{E}}^{B'} (\Pi_W^{W'})_{B'}^{B'} \, Id_{B'}^{\mathcal{E}} = Id_{\mathcal{E}}^{B'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Id_{B'}^{\mathcal{E}}$$

$$Id_{B'}^{\mathcal{E}} = \left((E_{11})_{B'} \; (E_{12})_{B'} \; (E_{21})_{B'} \; (E_{22})_{B'} \right) =$$ A OCCHIO O RISOLVO IL SISTEMA

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\Pi_W^{W'})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICI E APPLICAZIONI INVERSE

Conto che è apparso spesso: $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right)$ ← I_n

in sistemi lineari

Quando appare?

OSS: Se T, F inversa l'una dell'altra allora $F_B^{B'} T_{B'}^{B} = Id_V{}_B^B = I_n$

e $T_{B'}^{B} F_B^{B'} = Id_W{}_{B'}^{B'} = I_n$

in particolare se $T = Id_V$ allora $F = Id_V$ e ottengo

$Id_{B'}^{B} \cdot Id_B^{B'} = Id_B^{B'} \, Id_{B'}^{B} = I_n$

Questi sono casi particolari di matrici inverse

DEF: A, B matrici $n \times n$ sono inverse l'una dell'altra se

$$AB = BA = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: ① A é invertibile $\Leftrightarrow L_A$ invertibile $\Leftrightarrow A$ ha rango massimo $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$.

② Se A é invertibile la sua inversa é unica.

La chiamiamo A^{-1}.

DIM: ① Se B inversa di A $L_A \circ L_B = L_{AB} = L_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$ e

$L_B \circ L_A = \ldots = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow L_A$ invertibile

Se L_A invertibile, $T = (L_A)^{-1}$ allora $T = L_B$ per qualunque B $n \times n$,

allora $Id_{\mathbb{K}^n} = L_A \circ T = L_A \circ L_B = L_{AB} \Rightarrow L_{AB} = Id_{\mathbb{K}^n} = L_{I_n} \Leftrightarrow AB = I_n$

Stessa cosa $BA = I_n$.

② Se A é invertibile la sua inversa é l'unica matrice associata a $(L_A)^{-1}$ nella base canonica.

e.g.

$$\overset{2 \times 3}{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \overset{3 \times 2}{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo esempio è bene dire che posso avere $T: V \to W$ $F: W \to U$ tale che $T \circ F = Id_W$ ma $F \circ T \neq Id_V$ quando $\dim W \neq \dim V$

PROPOSIZIONE: $\dim V = \dim W = n$, $T \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $F \in Hom_{\mathbb{K}}(W, V)$, $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

1. $F \circ T = Id_V \Leftrightarrow T \circ F = Id_W$
2. $AB = I_n \Leftrightarrow BA = Id_n$

DIM: 1. $(F \circ T = Id_V \Rightarrow T \circ F = Id_W)$

T deve essere iniettiva $\Rightarrow$ se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W. Inoltre $F(w_j) = v_j$

Allora $T \circ F(w_j) = T(F(w_j)) = T(v_j) = w_j \Rightarrow T \circ F = Id_W$.

$(T \circ F = Id_W \Rightarrow F \circ T = Id_V)$ stessa cosa scambiando F e T.

2. $AB = I_n \Leftrightarrow L_A \circ L_B = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow L_B \circ L_A = Id_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow BA = I_n$.

$(BA = I_n \Rightarrow AB = I_n)$ stessa cosa. □

PROPOSIZIONE (INVERSA DEL PRODOTTO / COMPOSIZIONE)

$T: V \to W$, $F: W \to V$, A, B $n \times n$. $\dim V = \dim W = n$

1. $T \circ F$ invertibile $\Leftrightarrow$ $F \circ T$ invertibile $\Leftrightarrow$ T e F invertibili
2. $(T \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ T^{-1}$
3. AB invertibili $\Leftrightarrow$ BA invertibili $\Leftrightarrow$ A e B invertibili
4. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

DIM: 1. $T \circ F$ invertibile $\Leftrightarrow$ biiettiva

$\Rightarrow T$ suriettiva $\xRightarrow{\text{TEO DIM}}$ T biiettiva $\Rightarrow$ T invertibile

TEO DIM

Inoltre $T \circ F$ biiettiva F iniettiva $\Rightarrow F$ biiettiva $\Rightarrow F$ invertibile

Quindi se F, T biiettive $\Rightarrow F \circ T$ biiettiva $\Rightarrow$ invertibile.

② $T \circ F$ invertibile T, F invertibili $\Rightarrow$ esiste $F^{-1} \circ T^{-1}$. Allora

$(T \circ F) \circ (F^{-1} T^{-1}) \overset{\text{ASSOCIATIVA}}{=} T \circ (F \circ F^{-1}) \circ T^{-1} = (T \circ Id_V) \circ T^{-1} = T \circ T^{-1} = Id_W \Rightarrow$ é un

inversa destra $\Rightarrow$ é l'inversa

③, ④ vero per punti ①, ② applicati a L_A, L_B. □

"CALCOLO DELL' INVERSA CON GAUSS - JORDAN"

Se A $n \times n$ di rango massimo $\Rightarrow$ invertibile, allora $B = A^{-1}$

$\Leftrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AB^J = e_J \ \forall J$. Quindi per trovare A^{-1} basta

risolvere $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_J \quad J = 1, \dots, n \quad \sim \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 \end{matrix} \right)$

DEF: Una matrice a scala ridotta se:

① é a scala

② tutti i pivot sono uguali a 1.

③ tutti i termini sopra a un pivot sono 0.

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ É A SCALA RIDOTTA

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ É A SCALA MA NON RIDOTTA

OSS: ① Una matrice quadrata di rango massimo a scala ridotta è l'identità $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

② Se A è a scala ridotta il sistema $(A|B)$ è risolto solo spostando termini a destra.

e.g. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 + 2 \\ x_2 = -2x_4 + 1 \\ x_4 = x_3 \end{cases}$

- $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 2x_4 \end{cases}$

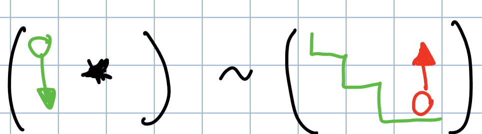
TEOREMA (ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN)

A matrice qualsiasi, allora

① Otteniamo A' a scala con eliminazione di Gauss.

② Partendo dall'ultimo pivot, dividiamo la riga per rendere il pivot uguale a 1 e usiamo il pivot per cancellare ogni termine sopra il pivot.

③ ripetiamo ignorando l'ultima riga.



$\sim$ MATRICE A SCALA RIDOTTA

$$\text{e.g.}\ \left.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\text{GAUSS}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{JORDAN}}$$

CALCOLO DELL'INVERSA: A invertibile

$$\underbrace{(A \mid I_n)}_{A_x = e_1, \dots, e_n} \overset{G-J}{\sim} (I_n \mid A^{-1})$$

SOLUZIONI SONO LE COLONNE DELL'INVERSA

OSS: la prima parte dell'algoritmo ti dice se A è invertibile!

$$\text{e.g.}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{voglio } A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

quindi è invertibile

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

VERIFICO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+1 & -1+2-1 & 2-3+1 \\ 2-1-1 & -2+2-1 & 4-3-1 \\ 1-1 & -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

e.g. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T_k\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y+2kz\\kx+2y+2z\\x-y+kz\end{pmatrix}$$

① Per quali k T invertibile?

② Per $k=-1$ calcolare $(T^{-1}_{-1})^B_B$ dove $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

SOLUZIONI:

$$T_k = L_A \qquad A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2k\\ k & 2 & 2\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2k\\ 0 & 1 & 3k\\ 0 & 2k+2 & 2k^2+2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2k\\ 0 & 1 & 3k\\ 0 & 0 & -2(2k^2+3k-1)\end{pmatrix}$$

$$3k(-2k-2)+2k^2+2 = -4k^2-6k+2 = -2(2k^2+3k-1) = \frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}$$

$$k \neq \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

② $k=-1$

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$(T^{-1}_{-1})^B_B = Id^{\mathcal{E}}_B\,(T^{-1})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\,Id^B_{\mathcal{E}} = Id^{\mathcal{E}}_B\,(T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}})^{-1}\,Id^B_{\mathcal{E}} =$$

$$= (Id^B_{\mathcal{E}})^{-1}\,\underset{\overset{\parallel}{A^{-1}}}{(T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}})^{-1}}\,Id^B_{\mathcal{E}}$$

$$A^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(Id^{B}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(Id^{B}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (T^{-1})^{B}_{B} = Id^{\mathcal{E}}_{B}\,(T^{-1})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\,Id^{B}_{\mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{11}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{15}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

e.g. Consideriamo un sistema lineare di n equazioni in n variabili

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

rappresentabile come $Ax = b$. Allora

Se A è invertibile la soluzione si ottiene per qualsiasi b moltiplicando per A^{-1}:

per esempio se il sistema è

$$\begin{cases} 2x + y - z = b_1 \\ x + 2z = b_2 \\ -x - y - z = b_3 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Troviamo l'inversa di A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

quindi la soluzione è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} \\ -\frac{b_1}{4} - \frac{3}{4} b_2 - \frac{3}{4} b_3 \\ -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO DALLA LEZIONE SCORSA

e.g. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = b_1 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = b_2 \\ x_2 - 2x_3 = b_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_4 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$S \sim$ " $A \underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{x} = \underset{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}{b}$ " $\quad$ se $\operatorname{rk} A = n = 4$

$Ax = b \sim A^{-1}Ax = A^{-1}b \sim x = A^{-1}b \Rightarrow$ unica soluzione è $A^{-1}b$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & 7 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ quindi la soluzione di S è $A^{-1}b$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & 7 & -1 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3b_1 - 3b_2 - 3b_3 + 5b_4 \\ -2b_1 + 2b_2 - 2b_3 - 2b_4 \\ -b_1 + b_2 - b_3 - b_4 \\ -3b_1 + 7b_2 - b_3 - 9b_4 \end{pmatrix}$ ho risolto per ogni b

ENDOMORFISMO, CONIUGIO, SIMILITUDINE

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \overset{\text{DEF}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$

$GL(V) \overset{\text{DEF}}{=} \{T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid T \text{ invertibile}\}$

$GL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{DEF}}{=} \{A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile}\}$

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ è uno spazio vettoriale, ma anche un anello con $T \cdot F = T \cdot F$ e $1 = Id_V$

Stessa cosa per $M_{n,n}(\mathbb{K})$ con moltiplicazione e I_n.

$GL(V)$ e $GL_n(\mathbb{K})$ sono gruppi con operazioni composizione e prodotto e elementi neutri Id_V e I_n.

Dato $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ e B base di V possiamo considerare la matrice T_B^B (senza sapere le basi possiamo estrarre più informazioni da T_B^B che da $T_{B'}^B$). Abbiamo una funzione:

$$\begin{array}{c} End_{\mathbb{K}}(V) \times \{B \text{ base di } V\} \; (= GL(V)) \\ \downarrow \Phi \\ M_{n,n}(\mathbb{K}) \end{array}$$

$\Phi(T, B) = T_B^B$

(Se fisso B è lineare ed è una mappa di anelli. $\Phi(T \circ F, B) = (T \circ F)_B^B = T_B^B \cdot F_B^B$)

DOMANDE NATURALI

① Dato $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$, quali $n \times n$ si possono scrivere come T_B^B per qualche B?

② Data A $n \times n$, quali $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ hanno A come matrice associata per qualche base B?

DEF: ① due matrici $n \times n$ A, B sono simili se esiste $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP = B$

② due endomorfismi T, F sono coniugati se esistono basi B, B' tali che $T_B^B = F_{B'}^{B'}$

PROPOSIZIONE: ① A è la matrice associata a T in una base B $\Leftrightarrow$ è simile a $T_{B'}^{B'}$ per qualche base B'.

② T e F sono coniugate se e solo se T_B^B e F_B^B sono simili per qualche base B.

DIM: ① $A = T_B^B \iff A = \underset{P}{\underbrace{Id_B^{B'}}} T_{B'}^{B'} \underset{P^{-1}}{\underbrace{Id_{B'}^{B}}} \iff A = P T_{B'}^{B'} P^{-1}$

$\iff P^{-1} A P = T_{B'}^{B'}$

② $T_B^B = F_{B'}^{B'} \iff T_B^B = \underset{P}{\underbrace{Id_{B'}^{B}}} F_B^B \underset{P^{-1}}{\underbrace{Id_B^{B'}}} \iff P^{-1} T_B^B P = F_B^B \iff T_B^B, F_B^B$ coniugate. $\square$

PROPOSIZIONE: Similitudine e coniugio sono relazioni di equivalenza, cioè:

① $A \sim A$ (riflessiva)

② $A \sim B \iff B \sim A$ (simmetrica)

③ $A \sim B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (transitiva)

DIM: verifico per $A \sim B \iff A$ simile B.

① $I_m^{-1} A I_m = I_m A I_m = A \Rightarrow A \sim A$

② $P^{-1} A P = B \iff P^{-1} A \overbrace{P P^{-1}}^{I_m} = B P^{-1} \iff \overbrace{P P^{-1}}^{I_m} A = P B P^{-1} \iff A = P B P^{-1}$

$Q = P^{-1} \Rightarrow Q^{-1} B Q = A \Rightarrow B \sim A$.

③ $P^{-1} A P = B$, $Q^{-1} B Q = C \Rightarrow Q^{-1} (P^{-1} A P) Q = C \iff$

$\underset{(PQ)^{-1}}{\underbrace{(Q^{-1} P^{-1})}} A (PQ) = C \iff (PQ)^{-1} A (PQ) = C \Rightarrow A \sim C$. $\square$

Quindi la risposta alle domande di sopra è:

① Le matrici che rappresentano T in una base sono tutte le simili a T_B^B, B qualsiasi.

② Gli endomorfismi coniugati a T sono tutti quelli tali che $T_B^B \sim F_B^B$ per B qualsiasi.

Però determinare se $A \sim B$ sembra difficile. Nuove domande!

① Data A, qual è la matrice simile di A "più semplice", o meglio qual è una "forma standard" per le matrici simili ad A?

② Quali caratteristiche di A e T sono invarianti per cambio base / similitudine?

OSS: $rk\,A$, $\dim \operatorname{Ker} A$, $rk\,T$, $\dim \operatorname{Ker} T$ sono invarianti perché dipendono solo da T (o L_A) e non da base scelta. Però sono invarianti anche per $T_{B'}^{B}$!

OBIETTIVO: Trovare invarianti per cambio / similitudine.

IL DETERMINANTE

Vogliamo una funzione $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che distingua matrici invertibili da non.

Richiediamo le seguenti proprietà: Scriviamo matrici, per colonne,

$A = (v_1, \dots, v_n)$

AZIONI DEL DETERMINANTE

(A) $\det(\dots v_j + v_j' \dots) = \det(\dots v_j \dots) + \det(\dots v_j' \dots)$

e.g. $\det\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}} \\ 1 & \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(B) $\det(\dots \lambda v_j \dots) = \lambda \det(\dots v_j \dots)$

e.g.
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 3 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

queste due proprietà si riassumono dicendo che il determinante è
multilineare nelle colonne.

Ⓒ $\det(\dots v \dots v \dots) = 0$

e.g. $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix} \end{pmatrix} = 0$

il determinante è "alternante"

Ⓓ $\det(I_n) = \det(e_1 \dots e_n) = 1$

il determinante è normalizzato

ALCUNE CONSEGUENZE DEGLI ASSIOMI

① $\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = \det(\dots v_i \dots v_j + \lambda v_i \dots)$

e.g. $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

DIM: $\det(\dots v_i \dots v_j + \lambda v_i \dots) \overset{A}{=} \det(\dots v_i \dots v_j \dots) + \det(\dots v_i \dots \lambda v_i \dots)$

$\overset{B}{=} \det(\dots v_i \dots v_j \dots) + \lambda \underbrace{\det(\dots v_i \dots v_i \dots)}_{=0} = \det(\dots v_i \dots v_j \dots)$

② $\det(\dots 0 \dots) = 0$

DIM: $\det(\dots 0 \dots) \overset{B}{=} 0 \det(\dots e_1 \dots) = 0$

③ Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$

e.g. $\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\overset{=0}{\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}}+\overset{=0}{\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}=0$

DIM: se $v_j=\sum_{i\neq j} a_i v_i$ allora

$$\det(\dots v_j \dots)=\det\Big(\dots\sum_{i\neq j} a_i v_i\dots\Big)\overset{A}{=}\sum_{i\neq j}\det(\dots \underset{\text{posizione } j}{a_i v_i}\dots)\overset{B}{=}\sum_{i\neq j} a_i \det(\dots \underset{\text{posizione } i}{v_i}\dots \underset{\text{posizione } j}{v_i}\dots)$$

$$\overset{C}{=}\sum_{i\neq j} a_i\cdot 0=0$$

④ $\det(\dots v_i \dots v_j \dots)=-\det(\dots v_j \dots v_i \dots)$

e.g. $\det\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$

DIM: $\det(\dots v_i \dots v_j \dots)\overset{(i)}{=}\det(\dots v_i \dots v_j-v_i\dots)=$

$\overset{(i)}{=}\det(\dots v_j\dots v_j-v_i\dots)\overset{(i)}{=}\det(\dots v_j\dots -v_i\dots)=$

$\overset{B}{=}-\det(\dots v_j\dots v_i\dots)$

⑤ $\det(v_1,\dots,v_n)=0$ se e solo se $v_1,\dots,v_n$ linearmente dipendenti

DIM: basta vedere che se $v_1,\dots,v_n$ base $\det(v_1,\dots,v_n)\neq 0$

IDEA: fare mosse di colonna moltiplica il determinante per un numero $\neq 0$.

Quindi $\det(v_1,\dots,v_n)\overset{\text{GAUSS-JORDAN sulle colonne}}{=}\lambda\det\begin{pmatrix}1&\dots&0\\0&\dots&1\end{pmatrix}$

(ogni passo moltiplica per $\lambda_i\neq 0$, $\lambda=\prod\lambda_i$) $\overset{D}{\Rightarrow}\det(v_1,\dots,v_n)=\lambda\neq 0$

e.g. $\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-2\\1&1&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑥ Se A triangolare $A = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ o $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix}$ allora $\det A = d_1 \dots d_n$

DIM: Se $d_j = 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A < n \Rightarrow \det A = 0$ se tutti diversi da 0

$$\det A \underset{\text{DI COLONNA}}{\overset{\text{MOSSE}}{=}} \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \overset{B,D}{=} d_1 \dots d_n$$

QUESTO IMPLICA:

PROPOSIZIONE: Se una funzione det che rispetta gli assiomi A-D esiste, è unica.

DIM: la posso calcolare esplicitamente per ogni matrice M:

- Se M non invertibile $\det M = 0$
- Se M invertibile $\det M \overset{\text{GAUSS}}{=} \det\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} = \pm d_1, \dots, d_n$. □

SE HO SCAMBIATO COLONNE

OSS: Non è ancora detto che esista.

e.g.
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bullet\ \det\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&-1\\0&1&1&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$=-\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&-1\\0&1&1&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&2\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=-\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&-1&3\end{pmatrix}=-3$$

TEOREMA (SVILUPPO DI LAPLACE)

La seguente funzione rispetta le proprietà A-D e quindi è il determinante

- $\det(a)=a$ • $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=ad-bc$

Se M $n\times n$, definiamo M_i^J come la matrice $n-1\times n-1$ ottenuta rimuovendo l'i-esima riga e la J-esima colonna. Allora, fissata una colonna M^J abbiamo:

SEGNO A SCACCHIERA

$$\det M=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+J}\det M_i^J$$

NOTA: Possiamo scegliere noi la colonna.

DIM: Omessa. $\square$

NOTAZIONE: $\det\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$

e.g. $\det\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=3-(-1)\cdot2=5$

• $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= 1(2-2) - 0 + 1(2-4) = -2$

• $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 3\left(\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{0, ma sviluppiamo per esercizio}}\right) =$

$= 3\left(\left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) - \left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)\right)$

$= 3\big((4-4) - (4-4)\big) = 3(0-0) = 0$

NOTA: Perché anche il determinante era 0?

Vedremo che è perché $\mathrm{rk}\, A = 2$.

SVILUPPO DI LAPLACE

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_i^j .$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(- \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}^{0} \right) - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(-3 \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}^{0} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -1 + 3 + 1 = 3$$

CON MOSSE DI COLONNA

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)) = 3$$

SVILUPPO DI LAPLACE PER RIGHE

i fissato!

TEOREMA: la funzione definita ricorsivamente da $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det A_i^j$ rispetta gli assiomi A-D e quindi è uguale al determinante.

e.g.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

RICORDIAMO: $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji})$

OSS: Calcolare per colonne il determinante di A è come calcolare per righe il determinante di A^T. Questo implica

PROPOSIZIONE: ① $\det A = \det A^T$

② le proprietà A-D, ①-⑥ valgono anche per le righe.

③ In particolare possiamo fare mosse di riga e

· $\det R_{i+\lambda j} A = \det A$ · $\det R_{\lambda i} A = \lambda \det A$ · $\det R_{ij} A = -\det A$

DIM: ① Si ottiene per induzione confrontando lo sviluppo per colonne di A e per righe di A^T. ②-③ sono conseguenze immediate. □

e.g.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \boxed{0} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Vogliamo capire come si comporta il determinante rispetto al prodotto

TEOREMA (BINET) $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ allora $\det(AB) = \det A \det B = \det BA$

DIM: per prima cosa ricordiamo AB invertibile $\Leftrightarrow$ A e B invertibili quindi se $\det A$ o $\det B = 0$ abbiamo AB non invertibile $\Rightarrow \det AB = 0$ quindi la formula vale se $\det A$ o $\det B = 0$.

Ora assumo $\det A \neq 0$. Definiamo

$f(B) = \frac{\det(AB)}{\det A}$

Teorema tale $\Leftrightarrow$ $f(B) = \det B$ $\Leftrightarrow$ f rispetta A-D. Verifichiamo.

(A) $\dfrac{\det(A(\ldots v_j + v_j' \ldots))}{\det A} = \dfrac{\det(Av_1 \ldots Av_j + v_j' \ldots Av_n))}{\det A} =$ A nel numeratore

$= \dfrac{\det(\ldots Av_j \ldots) + \det(\ldots Av_j' \ldots)}{\det A} = \dfrac{\det(\ldots Av_j \ldots)}{\det A} + \dfrac{\det(\ldots Av_j' \ldots)}{\det A}$

$= f(\ldots v_j \ldots) + f(\ldots v_j' \ldots)$

(B) $f(\ldots \lambda v_j \ldots) = \dfrac{\det(A(\ldots \lambda v_j \ldots))}{\det A} = \dfrac{\det(\ldots \lambda Av_j \ldots)}{\det A} \overset{B}{=} \dfrac{\lambda \overset{\det AB}{\overset{\shortparallel}{\det(\ldots Av_j \ldots)}}}{\det A}$

$= \lambda f(B)$

(C) $f(\ldots v \ldots v \ldots) = \dfrac{\det(A(\ldots v \ldots v \ldots))}{\det A} = \dfrac{\det(\ldots Av \ldots Av \ldots)}{\det A}$

$\overset{C}{=} \dfrac{0}{\det A} = 0$

(D) $f(I_n) = \dfrac{\det(AI_n)}{\det A} = \dfrac{\det A}{\det A} = 1.$ $\square$

COROLLARIO: Se $\det A \neq 0$ allora $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

DIM: $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

$\shortparallel$

$\det(A) \det(A^{-1}) \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. $\square$

COROLLARIO (FORMULA DI CRAMER)

S sistema $n \times n$, $(A \mid b)$ matrice completa. Se $\det A \neq 0$ l'unica soluzione di S è data da:

$$V(S) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_J = \frac{\det(A^1 \dots \overset{\overset{J}{\shortparallel}}{b} \dots A^n)}{\det A}$$

DIM: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ soluzione $M_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \dots \overset{J}{b} \dots e_n)$. Allora

$$AM_J = \left(Ae_1 \dots A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dots Ae_n\right) = (A^1 \dots \overset{J}{b} \dots A^n).$$ Quindi

$\det(A^1 \dots b \dots A^n) = \det A \det M_J$

$$\det M_J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & x_n & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & x_J & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = x_J \rightsquigarrow \det(A^1 \dots b \dots A^n)(\det A)^{-1}. \quad \square$$

COROLLARIO: $\det P^{-1} A P = \det A$. Quindi matrici simili hanno lo stesso determinante.

DIM: $\det P^{-1} AP = (\det P^{-1}) \det(AP) = \frac{1}{\det P} \det A \cdot \det P = \det A. \quad \square$.

COROLLARIO/DEF: Data $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ definiamo $\det(T) = \det T^{B}_{B}$ per una qualsiasi base B. Questa funzione è ben definita.

DIM: data B' $T^{B'}_{B'} = Id^{B}_{B'} T^{B}_{B} Id^{B'}_{B} = (Id^{B'}_{B})^{-1} T^{B}_{B} Id^{B'}_{B} \Rightarrow \det(T^{B'}_{B'})$

$= \cancel{\det(Id^{B'}_{B})^{-1}} \det(T^{B}_{B}) \cancel{\det(Id^{B'}_{B})} = \det T^{B}_{B}. \quad \square$

e.g. $T_k = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+y+z\\2x+z\\2x+ky-2z\end{pmatrix}$, $F_k\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\x+y\\kx+y+z\end{pmatrix}$

① Mostrare per quali k $T_k \circ F_k$ e $F_k \circ T_k$ sono invertibili

② Per $k=1$ risolvere $T_1 \circ F_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ con Cramer.

Sol: ① $T_k \circ F_k$ e $F_k \circ T_k$ invertibili $\Leftrightarrow \det T_k \cdot \det F_k \neq 0$

$\Leftrightarrow \det T_k$ e $\det F_k \neq 0$

$$\det T_k = \det T_{k\,\mathcal{E}}^{\ \mathcal{E}} = \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & k & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ \boxed{0 & 0 & 1}\\ 6 & k & -2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 6 & k\end{vmatrix} = 3(k+2) \quad k \neq -2$$

$$\det F_k = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ k & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ k-1 & 1\end{vmatrix} = -k+2 \quad k \neq 2$$

$\Rightarrow$ invertibili se $k \neq \pm 2$

② $$(T_1 \circ F_1)_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$S : \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$v(S) = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\\ \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3(-3) = 9 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

COROLLARIO (INVERSA CON CRAMER)

MATRICE DI COFATTORI

$\det A \neq 0$. Allora vale la formula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} (A^C)^T$ dove

$$A^C = \left((-1)^{i+j} \det A_i^j \right)_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}}$$

DIM: Formula di Cramer applicata a $(A|I_n)$. $\square$

e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = 9$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

VERIFICO: $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IL TEOREMA DEGLI ORLATI

Vogliamo usare il determinante per calcolare il rango di $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ (non necessariamente quadrata)

DEF: Un minore di A é una matrice $m-s \times n-s'$ ottenuta rimuovendo s righe e s' colonne.

e.g.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ é il minore di A ottenuto rimuovendo 1^a riga, 3^a e 5^a colonna.

OSS: $\operatorname{rk} A \geq \operatorname{rk} A'$ per qualsiasi minore A'.

DIM: Se r righe/colonne di A' sono indipendenti allora le corrispondenti righe/colonne di A lo sono. $\square$

DEF: A' minore di A. Un orlato di A' é un minore di A ottenuto aggiungendo una riga e una colonna ad A'.

e.g.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AGGIUNGO

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ orlato di A'

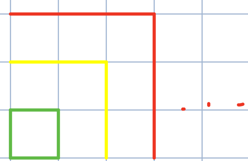
TEOREMA (CRITERIO DEGLI ORLATI)

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora

① Il rango di A è r, dove r è la taglia del più grande minore A' quadrato con $\det A' \neq 0$.

② Se A' minore quadrato con $\det A' \neq 0$ e tutti gli orlati di A' hanno $\det = 0$ allora $rk\, A = rk\, A'$.

Come lo uso? Parto da A' con $\det \neq 0$. Se i suoi orlati hanno $\det = 0$ fine. Se A'' orlato di A' ha $\det \neq 0$ riparto da A''.



e.g.

$$\begin{array}{c c} & \\ & \\ 3 & \\ 4 & \\ & \end{array} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow rk \geq 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ genero gli orlati.

AGGIUNGO (RIGA, COLONNA)

$(3,1)$ $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$(3,2)$ $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4,1)\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4,2)\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tutti gli orlati hanno $\det = 0 \Rightarrow rk\, A = rk\, A' = 2$

e.g. voglio rk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 2 & 1 & k+1 & -k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}}^{\,rk \geq 2} & \begin{matrix} k & 0 \\ k+1 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & k-2 \\ k+2 & -k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 & -2k+2 \\ 0 & 0 & k+1 & -2k+2 \end{pmatrix}$$

PROSEGUO CON ORLATI

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = k-1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & -2k+2 \end{vmatrix} = -2(k-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = k+1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & -2k+2 \end{vmatrix} = -2(k-1)$$

NON SI ANNULLANO ASSIEME! $rk \geq 3$ vedo determinante

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} k & 0 \\ 1 & k-1 \\ k-1 & -2k+2 \\ k+1 & -2k+2 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & -2k+2 \\ k+1 & -2k+2 \end{vmatrix} = (-2k+2)\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ k-1 & 1 \end{vmatrix} = (-2k+2)(k-1-k-1)$$

$$= 4(k+1) \Rightarrow rk = \begin{cases} 3 & k=-1 \\ 4 & k \neq -1 \end{cases}$$

MODO PIÙ PRATICO: Prima controllo il determinante di A, poi per $k=-1$ cerco minore 3×3 con det $\neq 0$. Cioè:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 2 & 1 & k+2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 2 & k+1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 1 & k+2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-1 & -2k+2 \\ 0 & 0 & k+1 & -2k+2 \end{vmatrix} = 4(k+1)$$

$\Rightarrow rk\, A_k = 4$ per $k \neq -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow rk\, A_{-1} = 3$$

"AUTOVALORI E AUTOVETTORI"

DEF: $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$, $v \in V$ è un autovettore se e solo se $Tv = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $v \neq 0_V$ allora λ è un autovalore per T.

(Stessa cosa se A matrice $n \times n$)

DEF: Lo spettro di T (stessa cosa A $n\times n$) è l'insieme $sp(T) \subset \mathbb{K}$ data da $sp(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ autovalore di } T\}$

e.g. • $T = Id_V \Leftrightarrow$ ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$ autovettore con autovalore $\lambda = 1$.

• 0_V è autovettore per ogni T, infatti $T0 = \lambda 0$ per ogni λ.

• $T = L_A$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ allora

e_1 autovettore con autovalore 1

e_2 autovettore con autovalore 2

e_3 autovettore con autovalore 3

• $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ $\quad F(p) = p'$

$F(1) = 0 = 0 \cdot 1 \Rightarrow 1$ autovettore con $\lambda = 0$. Ogni autovettore é un multiplo di 1.

$F(1) = 0 \Rightarrow 1$ autovalore $\lambda = 0$

$F(T) = T \cdot 1 = T \Rightarrow T$ autovalore $\lambda = 1$

$F(T^2) = T \cdot 2T = 2T^2 \Rightarrow T^2$ autovalore $\lambda = 2$

$\Rightarrow B = \{1, T, T^2\}$

$F_B^B = (F(1)_B \;\; F(T)_B \;\; F(T^2)_B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

DEF: ① Una matrice $n \times n$ é diagonale se e solo se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$

② Un endomorfismo $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste base di V tale che T_B^B é una matrice diagonale.

③ Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ é diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP = D$ con D diagonale.

e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizzabile, infatti se

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ allora $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ non é diagonalizzabile

OSS: T é diagonalizzabile $\Leftrightarrow T_B^B$ lo é per qualche base B.

A é diagonalizzabile $\Leftrightarrow L_A$ lo é.

DIM: T diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists B'$ con $T_{B'}^{B'}$ diagonale

$\Leftrightarrow Id_{B'}^{B} T_B^B Id_B^{B'}$ diagonale. Se chiamo $Id_B^{B'} = P$ allora $Id_{B'}^{B} = P^{-1}$

e $P^{-1} T_B^B P$ diagonale. Viceversa se $P^{-1} T_B^B P$ diagonale e

$B' = \{\psi_B(P^1), \dots, \psi_B(P^n)\}$ allora $P = Id_B^{B'}$ e $P^{-1} T_B^B P = Id_{B'}^{B} T_B^B Id_B^{B'} = T_{B'}^{B'}$

A diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists P$ con $P^{-1}AP$ diagonale. $B = \{P^1, \dots, P^n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ perché P invertibile, quindi $P^{-1}AP = Id_B^{\mathcal{E}} L_{A\,\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} Id_{\mathcal{E}}^{B} \cdot L_{A\,B}^{B}$ diagonale $\square$

PROPOSIZIONE: Sono equivalenti:

① T/A diagonalizzabile

② Esiste B base di V formata da autovettori per T/A.

Inoltre T diagonalizzabile $\Leftrightarrow T_B^B$ diagonalizzabile per qualche B e A diagonalizzabile $\Leftrightarrow L_A$ diagonalizzabile.

DIM: Le affermazioni per T e A sono equivalenti per quanto visto prima, quindi dimostro per $T \in End_{\mathbb{K}}$.

① $\Rightarrow$ ② $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $T_B^B = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (d_1 e_1 \dots d_n e_n) = T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_n)_B)$

$\Rightarrow T(v_j)_B = d_j \overset{(v_j)_B = e_j}{e_j} \rightsquigarrow T(v_j)_B = d_j (v_j)_B \Leftrightarrow T(v_j) = {}_j v_j$.

(altro modo $T(v_j)_B = T_B^B e_j = d_j e_j$)

② $\Rightarrow$ ① $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $T(v_j) = \lambda_j v_j$

$T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_n)_B) = ((\lambda_1 v_1)_B \dots (\lambda_n v_n)_B)$

$= (\lambda_1 e_1 \dots \lambda_n e_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\square$

COROLLARIO: T^B_B diagonale $\Leftrightarrow$ B base di autovettori

DIM: Immediato dalla dimostrazione sopra

VOGLIO:

① Sviluppare strumenti per trovare autovettori / autovalori

② Sviluppare strumenti per capire se sono "abbastanza"

(cioé se formano una base).

e.g. $\bullet\ A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ per quali θ é diagonalizzabile?

Cerco autovettori

$$A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \cos\theta x + \operatorname{sen}\theta y = \lambda x \\ \operatorname{sen}\theta x - \cos\theta y = \lambda y \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - \lambda & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda \neq \cos\theta$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - \lambda & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{\operatorname{sen}\theta \cdot (-\operatorname{sen}\theta) - (\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda)}{\cos\theta - \lambda} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - \lambda & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \lambda^2}{\cos\theta - \lambda} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - \lambda & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda^2 - 1}{\cos\theta - \lambda} & 0 \end{array}\right)$$

ha soluzioni $\neq$ da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ $\quad (\cos\theta - 1) x + \operatorname{sen}\theta\, y = 0 \overset{\theta \neq 0}{\sim} x = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}$

$\lambda=-1 \quad (\cos a+1)x+\operatorname{sen} a\, y=0 \overset{a\neq\pi}{\sim} x=\dfrac{-\operatorname{sen} a}{\cos a+1}\,y$

quindi $a\neq 0,\pi$ allora

$$B=\left\{\begin{pmatrix}\frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a-1}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a+1}\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$ base di autovettori e $L_{A_a}{}^{B}_{B}=$

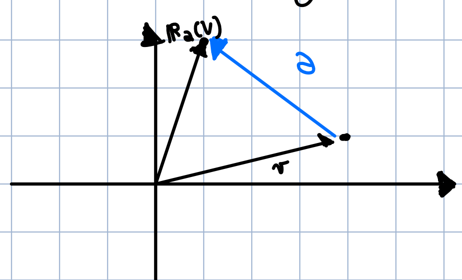
$$=\begin{pmatrix}\frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a-1} & \frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a+1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} A_a\begin{pmatrix}\frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a-1} & \frac{-\operatorname{sen}a}{\cos a+1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$a=0 \qquad A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad\qquad a=\pi \qquad A_a=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_a\sim\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ per ogni a!

- $\mathbb{R}_a\in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \qquad \mathbb{R}_a\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos a\, x-\operatorname{sen}a\, y\\ \operatorname{sen}a\, x+\cos a\, y\end{pmatrix}$

rotazione antioraria di angolo a



MI ASPETTO AUTOVETTORI $\neq 0$
$\Leftrightarrow a=0^\circ, 180^\circ=0,\pi$

$$\mathbb{R}_a\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\sim\begin{cases}\cos a\, x-\operatorname{sen}a\, y=\lambda x\\ \operatorname{sen}a\, x+\cos a\, y=\lambda y\end{cases}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}\cos a-\lambda & -\operatorname{sen}a & 0\\ \operatorname{sen}a & \cos a-\lambda & 0\end{array}\right)\overset{\cos a\neq\lambda}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}\cos a & -\operatorname{sen}a & 0\\ 0 & \frac{\operatorname{sen}^2 a+(\cos a-\lambda)^2}{\cos a-\lambda} & 0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha-\lambda & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1}{\cos\alpha-\lambda} & 0 \end{array}\right)$$

soluzioni non banali $\iff \lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1$ ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$\iff 4\cos^2\alpha-4\geq 0 \iff \cos\alpha=\pm 1 \iff \alpha=0,\pi$

$\alpha=0 \quad \mathbb{R}_{\alpha}{}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha=\pi \quad \mathbb{R}_{\alpha}{}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\alpha\neq 0,\pi$ non diagonalizzabile

OSS: Se lavoriamo su $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ allora $\mathbb{R}_\alpha$ sarebbe diagonalizzabile per ogni α. La diagonalizzabilità può dipendere dal campo $\mathbb{K}$.

IL POLINOMIO CARATTERISTICO

OBIETTIVO: Trovare $sp(T)$

DEF: Il polinomio caratteristico di $T\in End_{\mathbb{K}}(V)$ (o $A\in M_{n,n}(\mathbb{K})$) è

$P_T(\lambda)=\det(T-\lambda Id_V)$

$(P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n))$

OSS: $P_T(\lambda)\,/\,P_A(\lambda)$ dipende solo dalla classe di coniugio / similitudine di T/A.

DIM: Se $T^B_B=F^{B'}_{B'}$ allora $\det(T-\lambda Id_V)=\det((T-\lambda Id_V)^B_B)=$

$=\det(T^B_B-\lambda \underbrace{Id_V{}^B_B}_{I_n})=\det(T^B_B-\lambda I_n)=\det(F^{B'}_{B'}-\lambda I_n)=\det(F-\lambda Id_V).$

Se $B=P^{-1}AP$ allora $\det(B-\lambda I_n)=\det(P^{-1}AP-\lambda I_n)=$

$\det(P^{-1}AP-\lambda\underbrace{P^{-1}I_nP}_{=I_n})=\det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)=$

$=\det(P)^{-1}\det(P)\det(A-\lambda I_n)=\det(A-\lambda I_n).\ \square$

PROPOSIZIONE: $a \in Sp(T) \iff P_T(a) = 0$

DIM: ($\Rightarrow$) $a \in Sp(T) \Rightarrow \exists\, v \neq 0,\ T(v) = a v \sim T(v) = a\, Id_V(v)$

$\sim (T - a\, Id_V)(v) = 0 \Rightarrow Ker(T - a\, Id_V)$ non banale

$\Rightarrow \det(T - a\, Id_V) = 0 \sim P_T(a) = 0.$

($\Leftarrow$) $\det(T - a\, Id_V) = 0 \Rightarrow Ker(T - a\, Id_V)$ non banale

$\Rightarrow \exists\, v \neq 0,\ (T - a\, Id_V)v = 0_V \sim T(v) = a\, Id_V(v) \sim T(v) = a v.$ $\square$

OSS: ① $P_\lambda(T)$ è un polinomio in λ di grado $n = \dim V$, con termine di testa $(-1)^n$ e termine costante $\det(T)$.

COROLLARIO: $Sp(T)$ contiene al più n elementi distinti.

e.g. • $A_a = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a \end{pmatrix}$

$$P_{A_a}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos a - \lambda & \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & -\cos a - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \cos^2 a) - \operatorname{sen}^2 a = \lambda^2 - 1 \Rightarrow Sp(A_a) = \{\pm 1\}$$

• R_a come sopra

$$P_{R_a}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos a - \lambda & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a - \lambda \end{vmatrix} = (\cos a - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2 a = \lambda^2 - 2\lambda \cos a + 1$$

$$\Rightarrow Sp(R_a) = \begin{cases} \emptyset & a \neq 0, 1 \\ \{1\} & a = 0 \\ \{-1\} & a = -1 \end{cases}$$

• $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\0&-\lambda&\lambda\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$

$= -\lambda \begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-2\lambda+1-1+1-\lambda-1) = -\lambda(\lambda^2-3\lambda)$

$= -\lambda^2(\lambda-3) \Rightarrow Sp(A)=\{0,3\}$

• $F(p)=p' \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{\le 2}[t])$

$F^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow P_F(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&2\\0&0&-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 \Rightarrow Sp(F)=\{0\}$

• $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1&-1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-2=\lambda^2-3$

$\Rightarrow Sp(A)=\pm\sqrt{3}$

Dopo aver trovato $sp(T)$ che faccio?

Cerco gli autovettori

DEF: $a \in Sp(T)$ $\quad V_a = \{v \in V \mid T(v) = av\}$

OSS: ① V_a é un sottospazio

② $V_0 = Ker\, T$.

DIM: ① $T(v)=av,\ T(v')=av' \Rightarrow T(\lambda v) = (\lambda a)v = a(\lambda v),\ T(v+v')$

$= av+av' = a(v+v')$

② $T(v)=0\cdot v \Leftrightarrow T(v)=0_V$. □

V_a si dice autospazio per l'autovalore a.

OSS: $V_\lambda = \ker(T - \lambda Id_V)$

Quindi per calcolare V_λ risolvo $(T-\lambda Id)^B_B v = 0$ per qualche base B

$\sim (T^B_B - \lambda I_n \mid 0)$

e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Sp(A) = \{0, 3\}$

V_0: $Av = 0 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim x = -y-z$

$\Rightarrow V_0 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

V_3: $(A - 3I_3)v = 0 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow V_3 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ indipendenti, infatti:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ base di autovettori $\Rightarrow L_A{}^{B}_{B} = Id^{\mathcal{E}}_{B}\, L_A{}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\, Id^{B}_{\mathcal{E}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

VERIFICA ESPLICITA:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Sp(A) = \{\pm\sqrt{3}\}$

OSS: $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = -2$

$$\lambda = \sqrt{3} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim x = \frac{-2}{1-\sqrt{3}}\, y \Rightarrow V_{\sqrt{3}} = Span \begin{pmatrix} \frac{-2}{1-\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{3}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \quad \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{-2}$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim x = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}\, y \Rightarrow V_{-\sqrt{3}} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} \frac{-2}{1+\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2}{1-\sqrt{3}} & \frac{-2}{1+\sqrt{3}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{1-\sqrt{3}} & \frac{-2}{1+\sqrt{3}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO, AUTOVALORI, MOLTEPLICITÀ

PROPOSIZIONE: $P_T(\lambda)$ (rispetto $P_A(\lambda)$) dipende solo dalla classe di coniugio di T (rispetto similitudine di A).

DIM: mostriamo per A. $B = P^{-1}AP$, allora $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

$P_B(\lambda) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) =$

$= \det(P^{-1}(AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) =$

$= \cancel{\det P^{-1}} \det(A - \lambda I_n) \cancel{\det P} = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda)$. □

"$B - \lambda I_n$ è simile a $A - \lambda I_n$"

quindi se $T \sim F$ (rispetto $A \sim B$) allora $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$ (rispetto $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$).

Alcuni lemmi sui polinomi

L'anello $\mathbb{K}[T]$ è a fattorizzazione unica, cioè $P \in \mathbb{K}[T]$ si

POSSONO RIPETERSI: $x^3 = x \cdot x \cdot x$

NON SI POSSONO SCRIVERE COME PRODOTTI: $P_i = q \cdot s \Rightarrow q$ o s COSTANTE

scrive come $P = P_1 \dots P_r$ dove $P_1, \dots, P_r$ sono polinomi irriducibili

e i fattori sono unici a meno di moltiplicare per costanti e permutare.

$x^3 - x = x \cdot x \cdot (x-1) = \frac{x}{2} \cdot 6(x-1) \cdot \frac{x}{3}$

e.g. $T^3 - 1 = (T-1)(T^2+T+1)$ in $\mathbb{R}[T]$ IRRIDUCIBILI

Il grado di $P(T) = a_0 + \dots + a_d T^d$ è $\deg P = d$ $(a_d \neq 0)$, il grado di $p \cdot q$ è la somma dei gradi $\deg P + \deg q$.

In particolare se $P = P_1 \dots P_r$ allora $\deg P = \deg P_1 + \dots + \deg P_r$

OSS: in $\mathbb{R}[T]$ i polinomi irriducibili hanno grado 1 $(a(T-\alpha))$ o 2 $(a(T^2+bT+c))$. Un polinomio di grado 2 è irriducibile $\iff \Delta(p) < 0 \iff$ radici complesse.

TEOREMA (FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA): Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[T]$ si fattorizza in fattori lineari. $P(T) = a(T-\alpha_1)\dots(T-\alpha_n)$ $n = \deg P$

TEOREMA (RUFFINI): $P(\alpha) = 0 \iff (T-\alpha) \mid P \sim P = (T-\alpha)q$.

QUINDI:

- $P_T(\lambda)$ ha al più n radici contate con molteplicità
- Queste radici con molteplicità sono uniche.

(cioè comunque fattorizziamo p avremo sempre gli stessi fattori di grado 1 a meno di moltiplicare per costanti $\neq 0$)

OBIETTIVO: dato $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ trovare tutte le radici reali di $P_T(\lambda)$.

- Grado 2: facile
- Grado 3: se riesco a scrivere $P_T(\lambda) = \pm(\lambda-\alpha)\,Q(\lambda)$ ho finito. $\deg = 2$

altrimenti?

e.g. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ \boxed{0 \quad -1-\lambda \quad -2-2\lambda} \\ -1 & 2 & -2-2\lambda \end{vmatrix}$

$\left(= (1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \right.$ ma faremo finta di non notarlo $\left. \right)$

$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (2+2\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) + (2+2\lambda)(-2\lambda-2) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 - 4\lambda^2 - 8\lambda - 4 =$

$-(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 5)$

COME TROVO RADICI?

LEMMA DI GAUSS: $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$

$p(T) = a_0 + \dots \pm T^d$ (termini di testa ± 1). Allora

① Se $p(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ allora $\alpha \in \mathbb{Z}$

② Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ radice allora $\alpha \mid a_0$.

Quindi nel caso di $\lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 5$ radici razionali possibili sono $\pm 1, \pm 5$

VERIFICO: $\lambda = 1 \quad 1 + 7 + 11 + 5$ ✗

$\lambda = -1 \quad -1 + 7 - 11 + 5 = -12 + 12 = 0$ ✓

DIVISIONE CON RESTO: dati $p(T)$, $q(T)$ $\deg q < \deg p$

$\exists!\ s(T), r(T)$ tale che $p(T) = q(T) \cdot s(T) + r(T)$ e

$\deg r < \deg q$

NEL NOSTRO CASO:

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5 & \lambda+1 \\ \hline
\lambda^3+\lambda^2 & \lambda^2+6\lambda+5 \\
\quad 6\lambda^2+11\lambda+5 & \\
\quad 6\lambda^2+6\lambda & \\
\qquad\quad 5\lambda+5 & \\
\qquad\quad 5\lambda+5 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \lambda^3+7\lambda^2+11\lambda+5=(\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+5)$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda)=-(\lambda+1)(\underbrace{\lambda^2+6\lambda+5}_{\text{RISOLVO}})$$

$$\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=-3\pm2=-1,\ -5 \Rightarrow Sp(A)=\{-1,-5\}$$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA

DEF: $T\in End_{\mathbb{K}}(V)$. $\alpha\in Sp(T)$.

① La molteplicità algebrica di α, scritto $m_a(\alpha)$, è il massimo d per cui $(\lambda-\alpha)^d \mid P_T(\lambda)$. (rispetto $P_A(T)$).

In altre parole è quante volte appare $(\lambda-\alpha)$ nella fattorizzazione.

Lo scriviamo $m_a(\alpha)$.

② La molteplicità geometrica di α è $m_g(\alpha)=\dim V_\alpha$

dove $V_\alpha=\{v\in V \mid T(v)=\alpha v)$

OSS: ① $m_a(\alpha)$ e $m_g(\alpha)$ dipendono solo dalla classe di coniugio/similitudine

② $\sum_{\alpha\in Sp(T)} m_a(\alpha)\le n$. È uguale $\Leftrightarrow P_A(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.

③ $m_g(\alpha)\ge 1$ per ogni α.

NOTAZIONE ESTESA PER EVITARE AMBIGUITÀ

DIM: ① $T_B^B = F_{B'}^{B'}$. $m_a(\lambda, T) = m_g(\lambda, F)$ perché $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$.

AMBIGUITÀ

$m_g(\lambda, T) = \dim V_{\lambda, T} = \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda Id_V) = \dim \operatorname{Ker}(T_B^B - \lambda {Id_V}_B^B)$

$= \operatorname{Ker}(T_B^B - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(F_{B'}^{B'} - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}(F_{B'}^{B'} - \lambda {Id_V}_{B'}^{B'})$

$= \operatorname{Ker}(F - \lambda Id_V) = \dim V_{\lambda, F} = m_g(\lambda, F)$.

② $\sum_{\lambda \in Sp(T)} m_a(\lambda) = \#$ fattori di grado 1 nella decomposizione $\leq \deg P_T(\lambda) = n$.

È uguale $\Leftrightarrow$ tutte le radici in $\mathbb{K}$.

③ $\lambda \in Sp(T) \Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0_V\} \Rightarrow M_g(\lambda) \geq 1$.

e.g. $F(p) = p' \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{\leq 2}[T])$

$P_F(\lambda) = -\lambda^3 \Rightarrow Sp(F) = \{0\}$ $\quad m_a(0) = 3$

$m_g(0) = \dim V_0 = \operatorname{Ker}(F - 0 \cdot Id_V) = \operatorname{Ker} F$

$F_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} F = \operatorname{Span}\{1\} \Rightarrow m_g(0) = 1 < m_a(0) = 3$

PROPOSIZIONE: $\lambda \in Sp(T)$ (rispetto $\lambda \in Sp(A)$).

Allora $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$.

DIM: $m_g(\lambda = d)$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ base di V_λ

$B = \{v_1, \dots, v_d, v'_{d+1}, \dots, v'_n\}$ (teorema di completamento)

$T_B^B = (T(v_1)_B \dots T(v_d)_B \; T(v'_{d+1})_B \dots T(v'_n)_B)$

$= ((\lambda v_1)_B \dots (\lambda v_d)_B \; *) = (\lambda e_1 \dots \lambda e_d \; *)$

$$= \left(\underbrace{\begin{matrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{d} \middle| \underbrace{\; * \;}_{n-d} \right)$$

$$P_T(\lambda) = \det(T^B_B - \lambda I_n) = \left| \begin{array}{ccc|c} \alpha-\lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \alpha-\lambda & * \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right|$$ sviluppo per colonne d volte

$$= (\alpha-\lambda)^d \det(\underset{n-d \times n-d}{*}) = (-1)^d (\lambda-\alpha)^d Q(\lambda)$$

$$\Rightarrow (\lambda-\alpha)^d \mid P_T(\lambda) \Rightarrow m_a(\alpha) \geq d = m_g(\alpha). \ \square$$

IL CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE

Voglio dimostrare

TEOREMA (CRITERIO DI DIAGONALIZZAZIONE) $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\dim V = n$ (rispetto A $n \times n$)

① T (rispetto A) è diagonalizzabile.

② $\sum_{\alpha \in Sp(T)} m_a(\alpha) = n$ e $m_g(\alpha) = m_a(\alpha)$ per ogni $\alpha \in Sp(T)$ (rispetto $Sp(A)$)

③ $\sum_{\alpha \in Sp(T)} m_g(\alpha) = n$ (rispetto $Sp(A)$)

Inoltre in tal caso una base di autovettori è data da $\bigcup_{\alpha \in Sp(T)} B_{V_\alpha}$.

Ci sono alcuni passi preliminari:

PROPOSIZIONE: $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in Sp(T)$, $v_1, \dots, v_r \neq 0$ rispettivamente $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_r}$. Allora $v_1, \dots, v_r$ sono indipendenti.

DIM: per induzione. $r = 1$ ovvio.

Assumiamo vero per $r-1$.

OBIETTIVO $a_1 = \dots = a_r = 0$

$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$. Allora

$T(a_1 v_1 + \dots + a_r v_r) = T(0) = 0 \rightsquigarrow a_1 \alpha_1 v_1 + \dots + a_r \alpha_r v_r = 0$

Posso assumere $a_1 \neq 0$. Due casi

$\lambda_1 = 0$ ho relazione fra $\underbrace{v_2, \dots, v_n}_{n-1}$ che sono indipendenti

$\Rightarrow a_2 = \dots = a_n = 0$ e ho finito.

$\lambda_1 \neq 0$ metto a sistema

$$\begin{cases} a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \\ \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_n a_n v_n = 0 \end{cases} \xrightarrow{-\lambda_1} \sim \begin{cases} a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \\ a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + a_n(\lambda_n - \lambda_1) v_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + a_n(\lambda_n - \lambda_1) v_n = 0$

$v_2, \dots, v_n$ indipendenti $\Rightarrow$ coefficienti sono 0

ma $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0 \ \forall j \neq 1 \Rightarrow a_2 = \dots = a_n = 0$. $\square$

COROLLARIO: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(T)$ allora

$\dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}) = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_n} = m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_n)$.

DIM (IDEA): $B_{V_{\lambda_1}} \cup \dots \cup B_{V_{\lambda_n}}$ è base di $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$, indipendenti

per proposizione. $\square$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA:

Ricordiamo l'enunciato:

1. T (rispetto A) è diagonalizzabile.
2. $\sum_{\lambda \in Sp(T)} m_a(\lambda) = n$ e $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni $\lambda \in Sp(T)$ (rispetto $Sp(A)$)
3. $\sum_{\lambda \in Sp(T)} m_g(\lambda) = n$ (rispetto $Sp(A)$)

① ⇒ ③ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di autovalori allora ogni v_j appartiene a un certo V_{λ_j} $\Rightarrow \sum_{\lambda \in Sp(T)} \dim V_\lambda \geq n$, so che è anche $\leq n$ per il corollario sopra.

③ ⇒ ① $\sum_{\lambda \in Sp(T)} \dim V_\lambda = \dim (V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}) \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r} = V$

$\Rightarrow B_{V_{\lambda_1}} \cup \dots \cup B_{V_{\lambda_r}} = B$ è una base formata da autovettori.

③ ⇒ ② $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, ma se $\sum_\lambda m_g(\lambda) = \sum_\lambda m_a(\lambda)$

$\Rightarrow$ sono uguali e $\sum_\lambda m_a(\lambda) = n$

② ⇒ ③ Ovvio $\sum_\lambda m_a(\lambda) = \sum_\lambda m_g(\lambda) = n$. □

COROLLARIO: Siano $T, F \in End_{\mathbb{K}}(V)$ (rispettivamente A, B $n \times n$) tali che $P_T(\lambda) = P_F(\lambda)$. Allora se T è diagonalizzabile $T \sim F \Leftrightarrow$ anche F è diagonalizzabile.

DIM: $(\Leftarrow)$ $F^{B'}_{B'} = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{m_a(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_r \ddots \lambda_r}_{m_a(\lambda_r)} \end{pmatrix} = T^B_B$

dove B, B' sono basi di autovettori per T e F ordinate appropriatamente.

$(\Rightarrow)$ se F non è diagonalizzabile allora esiste $\lambda \in Sp(F) = Sp(T)$ tale che $m_g(\lambda, F) \neq m_a(\lambda, F) = m_a(\lambda, T) = m_g(\lambda, T)$

$\Rightarrow$ non possono essere coniugate. □

COROLLARIO: Se $P_T(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e tutte distinte è diagonalizzabile.

DIM: $\sum_\lambda m_a(\lambda) = n$ e $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$. □

e.g. $\bullet\ T(p)=p'$ $\quad Sp(T)=\{0\},\ m_a(0)=3,\ m_g(0)=1$

$\Rightarrow$ non diagonalizzabile.

$\bullet\ A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad Sp(A)=\{-1,-5\}$ $\quad m_a(-1)=2$

$m_a(-5)=1$

$m_a(-5)=1 \Rightarrow m_g(-5)=1$

$m_g(-1):\ (A+I_3|0) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $rk\ A+I_3=1$

$\Rightarrow \dim V_{-1}=2 \Rightarrow m_a(-1)=m_g(-1) \Rightarrow$ é diagonalizzabile.

$A\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. CERCO BASE DI AUTOVALORI:

$V_{-1}:\ x-2y+z=0 \sim x=2y-z \Rightarrow V_1=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$V_{-5}:\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x=-z \\ y=-2z \end{cases}$

$\Rightarrow V_{-5}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow B=B_{V_{-1}}\cup B_{V_{-5}}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

VERIFICO: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Quindi, due ostruzioni alla diagonalizzabilità:

(1) $P_T(\lambda)$ non ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.

e.g. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0, \pi$

(2) $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$ per qualche λ

e.g. $F(p) = p' \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{\leq d}[T])$

$m_a(0) = d$, $m_g(0) = 1$

DUE ESEMPI RILEVANTI

$T, T' \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ o $A, A' \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

per capire se sono simili, confronto in ordine:

- determinante
- polinomio caratteristico
- molteplicità geometrica (per λ con $m_a(\lambda) > 1$)

• Se a un qualche passaggio sono $\neq$ non coniugate / simili. FINE

• Se tutte uguali e sono diagonalizzabili $\Rightarrow$ simili. FINE

• Se tutti uguali ma non diagonalizzabili (qualche $m_a > m_g$), non sappiamo.

ESEMPIO DELL'ULTIMO CASO:

$$\bullet\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $\det A = \det A' = 0$ • $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda) = \lambda^4$

$\Rightarrow Sp(A) = Sp\, A' = \{0\}$ $m_a(0) = 4$ per entrambe

ma A non simile ad A', infatti se avessi $A = B^{-1} A' B$

$\Rightarrow A \cdot A = B^{-1} A' \cancel{B B^{-1}} A' B \sim A^2 = B^{-1} (A')^2 B$

$\Rightarrow (A)^2$ simile a $(A')^2$

ma
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (A)^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (A')^2$$

$\Rightarrow (A)^2 \not\sim (A')^2 \Rightarrow A \not\sim A^2$

ARCHITIPO DI ESERCIZIO:

dati: A_K, A' (T_K, T'), per quali K sono simili / coniugati

e.g. $A_K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -k-1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

① deve avere $\det A_K = \det A'$

$$\det A_K = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -k-1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -k+3 \\ 0 & -k+3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -k+3 \\ -k+3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(K^2 - 6K + 9 - 4) = -2K^2 + 12K - 10$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(4-4) = 0$$

$\Rightarrow$ deve avere $K^2 - 6K + 5 = 0$

$(K-1)(K-5) = 0$ $\quad K \in \{1, 5\}$

due possibili valori di K

CALCOLO $P_{A'}(\lambda)$: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-\lambda) - \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$$

(DIAGONIZZABILE PERCHÉ 3 AUTOVALORI DIVERSI)

CALCOLO $P_{A_1}(\lambda)$: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda\left(\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}\right) = (-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2-2\lambda+4) = (-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$

$P_{A_1}(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$ e entrambe diagonalizzabili $\Rightarrow$ sono simili

CALCOLO $P_{A_5}(\lambda)$: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -5 \\ 2 & -6-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -5 \\ 0 & -2-\lambda & 2-\lambda \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -3 \\ 0 & -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-8) - 4(-4\lambda+4) =$

$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda \cancel{+16} + 16\lambda \cancel{-16} = -\lambda(\lambda^2-\lambda-10) \neq P_{A'}(\lambda)$

$\Rightarrow$ non simili

QUINDI SIMILI SOLO PER $K=1$.

ARCHITIPO DI ESERCIZIO: Per quali K T_K/A_K diagonalizzabile?

e.g. $T_K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-k)x + 2y \\ -x + (1+k)\lambda \end{pmatrix}$

$P_{T_K}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-k-\lambda & 2 \\ -1 & 1+k-\lambda \end{vmatrix} = ((1-\lambda)-k)((1-k)+k)+2$

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE: 2 radici reali $\Rightarrow$ diagonalizzabile, quindi

$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{diagonalizzabile} \\ \Delta < 0 & Sp(T_K) = \emptyset \Rightarrow \text{non diagonalizzabile} \\ \Delta = 0 & \text{devo controllare} \end{cases}$

$\Delta = 4 - 4(-k^2+3) = 4 - 12k + 4k^2 = -8 + 4k^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} |k| > \sqrt{2} & \Delta > 0 \text{ diagonalizzabile} \\ |k| < \sqrt{2} & \Delta < 0 \text{ non diagonalizzabile} \\ k = \pm\sqrt{2} & \text{devo controllare} \end{cases}$$

$k = \sqrt{2}$: $P_T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \quad m_a(1) = 2$

$$m_g(1): \left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2}\ \ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1+\sqrt{2}-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk = 1 \Rightarrow m_g(1) = 1$ non diagonalizzabile

$k = -\sqrt{2} \quad P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

$$m_g(1) \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ non diagonalizzabile

quindi T_k diagonalizzabile $\Leftrightarrow k < -\sqrt{2}$ o $k > \sqrt{2}$

e.g. $A_k = \begin{pmatrix} -k+3 & 0 & k-3 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ per quali k è diagonalizzabile?

$$P_{A_k}(\lambda) = \begin{vmatrix} -k-\lambda+3 & 0 & k-3 \\ 0 & k-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-k)\big((-k-\lambda+3)(-1-\lambda) - k + 3\big) =$$

$$= -(\lambda-k)(\lambda^2 - 2\lambda + k\lambda \cancel{-3+k} \cancel{-k+3}) = -(\lambda-k)(\lambda^2 - 2\lambda + k\lambda) = -\lambda(\lambda-k)(\lambda-2+k)$$

$Sp(T_k) = \{0, k, -k+2\}$

Se tutti diversi è diagonalizzabile. Devo controllare gli altri casi:

$K=0 \quad \{0,0,2\} \qquad K=2 \quad \{0,2,0\}$

$K=-K+2 \sim K=1 \quad \{0,1,1\}$

$K=0 \qquad m_a(0)=2$

$$m_g(0): \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$m_g(0)=1 \Rightarrow$ Non diagonalizzabile

$K=2 \qquad m_a(1)=2$

$$m_g(1): \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$m_g(1)=1 \Rightarrow$ Non diagonalizzabile

quindi A_K diagonalizzabile $\Leftrightarrow K \neq 0, 2, 1.$

"PRODOTTI SCALARI"

Vogliamo "algebrizzare" i concetti di lunghezza e angolo. Come?

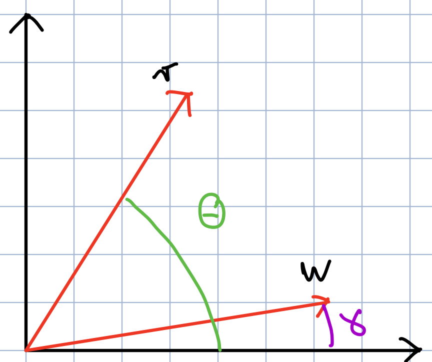
e.g. in $\mathbb{R}^2$, partendo dalla geometria analitica:

$v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$ lunghezza di $v \overset{def}{=} \|v\|$

PITAGORA

$= \sqrt{x^2+y^2}$ già "vicino" all'algebra

angolo:



angolo tra v e w è $\theta - \gamma$, molto lontano dall'algebra.

Proviamo a fare qualche conto

$\|v\| = \lambda$, $\|w\| = \lambda'$, allora

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \cos\theta \\ \lambda \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} \lambda' \cos\theta \\ \lambda' \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

Cos è $\cos(\alpha - \gamma) = \cos\alpha \underbrace{\cos(-\gamma)}_{\cos(\gamma)} - \operatorname{sen}\alpha \, \underbrace{(\operatorname{sen} -\gamma)}_{-\operatorname{sen}\gamma} =$

$\cos\theta \cos\gamma + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\gamma$ quindi se $\alpha = \theta - \gamma =$ angolo tra v e w

$\cos\alpha = \cos\theta \cos\gamma + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\gamma =$

$\dfrac{\lambda\lambda' \cos\theta \cos\gamma + \lambda\lambda' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\gamma}{\lambda\lambda'}$. Se

$$v = \begin{pmatrix} \lambda \cos\theta \\ \lambda \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} \lambda' \cos\gamma \\ \lambda' \operatorname{sen}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ già più trattabile! Osserviamo che

$x_0 x_1 + y_0 y_1$, $x_0^2 + y_0^2$, $x_1^2 + y_1^2$ sono la stessa operazione

applicata a (v, w), (v, v), (w, w)

$$\underset{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{v} \cdot \underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{w} \overset{\text{def}}{=} x_0 y_0 + x_1 y_1 \quad \text{"DOT PRODUCT"}$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{v \cdot w}{\sqrt{v \cdot v} \cdot \sqrt{w \cdot w}}$ Che proprietà ha questa operazione?

① $(\lambda v) \cdot w = \lambda (v \cdot w) = v \cdot (\lambda w)$

② $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$

$v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$

③ $v \cdot w = w \cdot v$

① + ② bilineare

③ simmetrico

Vogliamo generalizzare queste idee.

Per il resto del corso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

DEF: V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Una forma bilineare su V è un'applicazione

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

tale che:

① $g(\lambda v, w) = g(v + w) = \lambda g(v, w)$

② $g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w)$

$g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w')$

LINEARE SU OGNUNA DELLE DUE VARIABILI

in altre parole g è bilineare *

Se inoltre g è simmetrico, cioè

③ $g(v, w) = g(w, v)$

allora diciamo che g è un prodotto scalare e scriviamo

$$g(v, w) \overset{def}{=} \langle v, w \rangle_g$$

NOTAZIONE: (V, g) indica uno spazio con prodotto scalare g assegnato e.g. • $V = \mathbb{R}^n$, $g(v,w) = v^T w$ o equivalentemente

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

è il prodotto scalare canonico (o standard) su $\mathbb{R}^2$ o prodotto "dot".

Lo scriviamo $v \bullet w \overset{\text{def}}{=} v^T w$

verifichiamo le proprietà ① - ③

USO LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DI MATRICI

① $(\lambda v) \bullet w = (\lambda v)^T w = \lambda (v^T w) = v^T (\lambda w)$

② $(v + v') \bullet w = (v + v')^T w = (v^T + (v')^T) w = v^T w + (v')^T w = v \cdot w + v' \bullet w$

$v \bullet (w + w') = v^T (w + w') = v^T w + v^T w' = v \bullet w + v \bullet w'$

③ $v \bullet w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = w \bullet v$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2) + (1\,(-1)) + ((-1) \cdot 1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

• $V = \mathbb{R}^4$ $\quad g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$

è un prodotto scalare, verifica per esercizio

e.g. $g\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_1') y' + \dots - (x_4 + x_4') =$

$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4) + (x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3 - x_4' y_4) =$

$$= g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

se prendo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora $\langle v, v \rangle_g = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0$

- $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $g(p,q) = \int_0^1 p \cdot q \, dt$

è un prodotto scalare, infatti:

(1) $\int_0^1 (\lambda p) q \, dt = \int_0^1 p (\lambda q) \, dt = \lambda \int_0^1 p \cdot q \, dt$

(2) $\int_0^1 (p + p_1) q \, dt = \int_0^1 pq + p_1 q \, dt = \int_0^1 p \cdot q \, dt + \int_0^1 p_1 \cdot q \, dt$

$\int_0^1 p(q + q_1) \, dt = \int_0^1 pq + pq_1 \, dt = \int_0^1 pq \, dt + \int_0^1 pq_1 \, dt$

(3) $\int_0^1 pq \, dt = \int_0^1 qp \, dt$ perché $p \cdot q = q \cdot p$

$\langle T^2 - T + 1, T - 1 \rangle_g = \int_0^1 (T^2 - T + 1)(T - 1) \, dt = \int_0^1 T^3 - 2T^2 + 2T - 1 \, dt =$

$= \left[\frac{T^4}{4} - \frac{2}{3} T^3 + T^2 - T \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$

OSS: Se dimostriamo prima che g è simmetrica basta mostrare (1) e (2) da uno solo dei due lati, infatti se $g(w,v) = g(v,w)$ allora

$g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w)$

$\Rightarrow g(w + w', v) = g(w, v) + g(w', v)$

$$\begin{array}{ccc} g(w+w', v) & = & g(w,v) + g(w',v) \\ \| & & \| \\ g(v, w+w') & = & g(v,w) + g(v,w') \end{array}$$

e.g. $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$g(p,q) = P(0)\,q'(1) + q(0)\,P'(1) - P(1)\,q(2) - q(1)\,p(2)$

$g(p,q) = g(q,p)$ per verifica diretta $\Rightarrow$ vale ③

$g(\lambda p,q) = \lambda p(0)\,q'(1) + \lambda q(0)\,p'(1)$

$- \lambda p(1)\,q(2) - \lambda q(1)\,p(2) = \lambda g(p,q) \Rightarrow$ vale ①

$g(p+p_1, q) = (P(0)+P_1(0))(q'(1)) + q(0)[p'(1)+p_1'(1)]$

$-(P(1)+P_1(1))\,q_2 - q(1)(p(2)+p_1(2)) =$

$(p(0)\,q'(1) + q(0)\,p'(1) - p(1)\,q(2) - q(1)\,p(2))$

$+ (P_1(0)\,q'(1) + q(0)\,P_1'(1) - P_1(1)\,q(2) - q(1)\,p_1(2))$

$= g(P,q) + g(P_1,q_1) \Rightarrow$ vale ②

quindi g é un prodotto scalare.

PRODOTTI SCALARI

RICORDIAMO: un prodotto scalare é (V $\mathbb{R}$-spazio)

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

① multilineare ② simmetrica

DUE MODI DI "PRODURRE" PRODOTTI SCALARI SU $\mathbb{R}^n$

① $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

quali polinomi $g(x,y) = g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sono prodotti scalari?

- no termini costanti $(g(0,0) = 0)$
- no termini di grado 1 $(g(x,0) = g(0,y) = 0)$

e ogni termine deve contenere sia un x_j che un y_i.

• dato che $(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 g(x,y)$ è omogenea di grado 2

• dato che $g(x,y) = g(y,x)$ per ogni $\alpha x_i y_j$ deve apparire $\alpha x_j y_i$.

L'abbiamo descritto completamente

PROPOSIZIONE: $g(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ è un prodotto scalare $\iff a_{ij} = a_{ji}$.

Inoltre se un polinomio $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ è in questa forma.

e.g. • $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_1 + 2x_1 y_3$

È UN PRODOTTO SCALARE

• $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2x_2 y_3 + x_3 y_3 - x_3 y_1 - x_1 y_3$

NON È UN PRODOTTO SCALARE

Possiamo scrivere un prodotto scalare a partire da una matrice?

LEMMA: $A_{m \times n}$, $B_{n \times s}$, allora $(A \cdot B)^T = \underbrace{B^T}_{s \times n} \underbrace{A^T}_{n \times m} \in M_{s \times m}(\mathbb{K})$

e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

DEF: $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ é simmetrica se $A^T = A$

e.g. • $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ é simmetrica

• $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad & a_{1,2} & \quad \end{array} \\ a_{2,1} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ non é simmetrica

OSS: $A = (a_{ij})$ é simmetrica $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$.

Prendiamo $A_{n \times n}$ simmetrica

CLAIM: $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dato da $g(X,Y) = X^T A Y = (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

é un prodotto scalare.

Per iniziare osserviamo che

$$\underbrace{\underbrace{X^T}_{1\times n} \underbrace{A}_{n\times n} \underbrace{Y}_{n\times 1}}_{\underbrace{1\times n \quad n\times 1}_{1\times 1}}$$

é una matrice 1×1 cioé un numero reale

verifichiamo le proprietá:

SIMMETRICA: $(X^T A Y)^T = X^T A Y$

perché é una matrice 1×1 quindi é simmetrica. Ma:

TRASPOSTA 2 VOLTE
É MATRICE ORIGINALE

$$(X^T(AY))^T = (AY)^T (X^T)^T = (AY)^T X = Y^T A^T X = Y^T A X = g(Y,X)$$

A simmetrica

BILINEARE: basta mostrare che é lineare a destra dato che é simmetrica

- $g(x, \lambda y) = x^T A (\lambda Y) = x^T (\lambda A Y) = \lambda (x^T A Y) = \lambda g(x,y)$
- $g(x, y+y') = x^T A (y+y') = x^T (Ay + Ay') = x^T A y + x^T A y' =$

$= g(x,y) + g(x,y')$ ABBIAMO DIMOSTRATO

PROPOSIZIONE: $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dato da $g(x,y) = x^T A y$ dove A $n \times n$ simmetrica è un prodotto scalare.

e.g. • $A = I_n$ $\quad x^T I_n y =$

$$(x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = A$

$$g(x,y) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

OSS: il prodotto dato da $A = (a_{ij})$ $n \times n$ simmetrica è dato da

$$g(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

quindi le due descrizioni date sono equivalenti.

LA MATRICE ASSOCIATA A UN PRODOTTO SCALARE

DOMANDA:

① Possiamo scrivere ogni prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ in questo modo?

② Dato un prodotto scalare su V, possiamo scegliere delle coordinate e scriverlo "in coordinate" in questo modo.

PROPOSIZIONE: g, g' prodotti scalari su V.
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Allora se per ogni i, j
$g(v_i, v_j) = g'(v_i, v_j)$ i due prodotti sono uguali, cioè
$g(v, w) = g'(v, w) \quad \forall v, w \in V$.

DIM: $g(v, w) = g(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$
$= g(a_1 v_1, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) + \dots + g(a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) =$
$= a_1 g(v_1, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) + \dots + a_n g(v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) =$
$= \overbrace{a_1 b_1 g(v_1, v_1) + \dots + a_1 b_n g(v_1, v_n) + \dots + a_n b_n g(v_n, v_n)}^{n^2 \text{ TERMINI}} =$
$= \sum_{i,j} a_i b_j g(v_i, v_j) \overset{g(v_i, v_j) = g'(v_i, v_j)}{=} \sum_{i,j} a_i b_j g'(v_i, v_j)$
$= \sum_i a_i g'(v_i, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) = g'(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) =$
$= g'(v, w)$ □.

TEOREMA: (V, g) spazio con prodotto scalare, B base di V.
Esiste un' unica matrice simmetrica $A_{g,B}$ tale che
$g(v, w) = v_B^T A_{g,B} w_B$ per ogni $v, w \in V$. Abbiamo
$A_{g,B} = (\langle v_i, v_j \rangle)_{\substack{i \le n \\ j \le n}}$

DIM: $A_{g,B}$ è simmetrica perché $\langle v_i, v_j \rangle_g = \langle v_j, v_i \rangle_g$.
Quindi basta far vedere che il prodotto scalare g' definito da
$g'(v, w) = v_B^T A_{g,B} w_B$ è uguale al prodotto g, per la proposizione
basta vederlo sulla base.

ma $g'(v_i, v_j) = (v_i)_B^T \, A_{g,B} \, (v_j)_B = e_i^T A_{g,B}\, e_j = e_i^T A^j_{g,B}$

$$= \begin{array}{c} \qquad\quad i \\ (0 \dots 1 \dots 0) \end{array} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_j \rangle_g \\ \vdots \\ \langle v_i, v_j \rangle_g \\ \vdots \\ \langle v_n, v_j \rangle_g \end{pmatrix} = \langle v_i, v_j \rangle_g \quad \text{quindi } g' = g. \ \square$$

e.g. • $g = \bullet$ su $\mathbb{R}^n$, $B = \mathcal{E}$

$$A_{\bullet,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \quad \text{ma } \langle e_i, e_j \rangle = e_i \bullet e_j = e_i^T e_j$$

$$= \begin{array}{c} \quad i \\ (0 \dots 1 \dots 0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow A_{\bullet,\mathcal{E}} = I_n$$

• $(\mathbb{R}^3, \bullet)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A_{\bullet,B} = \begin{pmatrix} (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ * & (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underbrace{* \qquad\qquad *}_{\text{LI SAPREMO PER SIMMETRIA}} & & (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• $(\mathbb{R}_{\leq 2}[T], \int_0^1 \bullet \, dt)$ $\qquad B = \{1, T, T^2\}$

$$A_{g,B} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1 \, dt & \int_0^1 T \, dt & \int_0^1 T^2 \, dt \\ * & \int_0^1 T^2 \, dt & \int_0^1 T^2 \, dt \\ * & * & \int_0^1 T^4 \, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

quindi se $p = T^2 - 2$ $\quad q = (T^2+T+1)$

$$g(p,q) = (T^2-2)^T_B \, A_{g,B} \, (T^2+T+1)_B$$

$$= (-2 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{13}{12} \\ \frac{47}{60} \end{pmatrix} = -\frac{22}{6} + \frac{47}{60} = -\frac{173}{60}$$

Cosa succede se cambio le coordinate?

PROPOSIZIONE: (V, g) spazio con prodotto scalare, B, B' basi di V.

Allora $A_{g,B'} = (Id^{B'}_{B})^T A_{g,B} \, Id^{B'}_{B}$.

DIM: $A_{g,B'}$ é l'unica matrice tale che

$g(v,w) = v^T_B A_{g,B'} w_{B'}$ osserviamo che, dato che

$v_B = Id^{B'}_B v_{B'}$ e $w_B = Id^{B'}_B v_B$ otteniamo

$$g(v,w) = v^T_B A_{g,B} w_B = (Id^{B'}_B v_{B'})^T A_{g,B} (Id^{B'}_B w_{B'}) =$$

$$= (v_{B'})^T \underbrace{(Id^{B'}_B)^T A_{g,B} \, Id^{B'}_B}_{} w_{B'}$$

Questa matrice soddisfa le proprietà di $A_{g,B'} \Rightarrow$ é $A_{g,B'}$ $\square$

e.g. $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A_{\cdot,B'} = (Id^{B'}_{\mathcal{E}})^T \overset{I_3}{\overset{\shortparallel}{A_{\cdot,\mathcal{E}}}} \, Id^{B'}_{\mathcal{E}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

OSS: $A_{\cdot,B} = (v_1, \dots, v_n)^T (v_1, \dots, v_n)$

VETTORI E SOTTOSPAZI ORTOGONALI

DEF: (V,g) spazio con prodotto scalare, $v, w \in V$ sono g-ortogonali se $\langle v, w\rangle_g = 0$.

e.g. • $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sono ortogonali, infatti $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2-1-1=0$

• $(\mathbb{R}^4, g)$ $\quad A_{g,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ é ortogonale a se stesso, infatti

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1-1=0$$

• $(\mathbb{R}_{\leq 2}[T], S_0^1 \bullet)$ allora T e $T^2 - \frac{3}{4}T$ sono ortogonali,

infatti $\quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

NOTAZIONE: Scriviamo $v \perp_g w$ per "v é g-ortogonale a w".

DEF: (V,g) spazio con prodotto scalare. $W, W' \subset V$.

$W \perp_g W'$ se $\forall w \in W, w' \in W'$ $\; w \perp_g w'$.

Il sottospazio ortogonale a W é

$$W^{\perp_g} \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid \langle w, v\rangle = 0 \;\; \forall w \in W\}.$$

e.g. $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$

Cos'è $W^\perp$?

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sim (x\ y\ z)\begin{pmatrix}a-b\\2a-b\\a+3b\end{pmatrix} = 0 \sim (x\ y\ z)\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix} + (x\ y\ z)\begin{pmatrix}-b\\-b\\3b\end{pmatrix} = 0$$

$$\sim a\,(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\,(x\ y\ z)\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

scegliendo $a = 1, b = 0$, $b = 1, a = 0$ ottengo che richiede

$$\Leftrightarrow (x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \text{ e } (x\ y\ z)\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = 0$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 7z \\ y = -4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow W^\perp = \text{Span}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

Possiamo sempre ricondurci a una base di W?

PROPOSIZIONE: $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Allora

$v \in W^{\perp_g} \Leftrightarrow \langle w_1, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0$

DIM: Ovviamente se $v \in W^{\perp_g} \Rightarrow \langle w_1, \dots, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0$.

Supponiamo $\langle w_1, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0$

allora $\langle w, v\rangle_g = \langle a_1 w_1 + \dots + a_d w_d, v\rangle_g =$

$= \langle a_1 w_1, v\rangle + \dots + \langle a_d w_d, v\rangle_g = a_1 \overbrace{\langle w_1, v\rangle_g}^{0} + \dots + a_d \overbrace{\langle w_d, v\rangle_g}^{0} = 0$

$\square$

e.g. $(\mathbb{R}_{\leq 2}[T], \int \cdot)$ cos'é $\text{Span}\{T^2 - \frac{3}{4}T\}^{\perp g}$?

$a + bT + cT^2 \in \text{Span}\{T^2 - \frac{3}{4}T\}^{\perp g} \iff$

$$(a\ b\ c)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \sim (a\ b\ c)\begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ 0 \\ \frac{1}{80} \end{pmatrix} = 0 \sim \frac{-a}{24} + \frac{c}{80} = 0$$

$\sim a = \frac{3}{10}c \Rightarrow \text{Span}\{T^2 - \frac{3}{4}T\}^{\perp g} = \text{Span}\{T, \frac{3}{10} + T^2\}$

- e.g. $(\mathbb{R}^3, g)$ definito da $A_g = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad W^{\perp g}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^{\perp g} \iff \begin{cases} (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \sim 8x - 2y + 2z = 0$$

$\sim x = \frac{y}{4} - \frac{5}{8}z \Rightarrow W^{\perp g} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}$

DEF: (V, g) spazio con prodotto scalare.

$V^{\perp_g} = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle_g = 0 \ \forall w \in V \}$ é il nucleo di g.

PROPOSIZIONE: data B base di V abbiamo $(V^{\perp_g})_B = \mathrm{Ker}\, A_{g,B}$.

DIM: se $v_B \in \mathrm{Ker}\, A_{g,B}$ allora $\langle v, w \rangle_g = \langle w, v \rangle_g =$

$= w_B^T (A_{g,B} v_B) = w_B^T \cdot 0 = 0.$

Se $v \in V^{\perp_g}$, scriviamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x = A_{g,B} v_B$.

Allora $\underset{\parallel}{x^T} A_{g,B} v_B = \langle \varphi_B x, v \rangle_g = 0$

$(x_1, \dots, x_n)(A_{g,B} v_B) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= x_1^2 + \dots + x_n^2 \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

$\Rightarrow v_B \in \mathrm{Ker}\, A_{g,B}$. $\square$

e.g. $(\mathbb{R}^3, g)$ definito da $A_g = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

allora $(\mathbb{R}^3)^\perp = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

PRODOTTI SCALARI, ORTOGONALITÁ

RICORDIAMO: (V, g) spazio con prodotto scalare.

Dato $W \subset V$ $W^{\perp_g} = \{ v \in V \mid \langle w, v \rangle_g = 0 \ \forall w \in W \}$ il nucleo di g é $V^{\perp_g} = \{ v \in V \mid \langle v', v \rangle_g = 0 \ \forall v' \in V \}$

Diciamo che g é degenere (rispettivamente non degenere) se $V^{\perp_g} \neq \{0_V\}$ (rispettivamente $= \{0_V\}$)

Abbiamo visto: $\varphi_B (V^{\perp_g}) = \mathrm{Ker}\, A_{g,B}$

e.g. $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$

$$g(p,q) = (p(1) - p'(1) + p''(1))(q(1) - q'(1) + q''(1))$$

(esercizio: verificare che é prodotto scalare)

voglio $V^{\perp g}$. Scrivo $A_{g,B}$ $B = \{1, T, T^2\}$

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle_g & \langle 1,T\rangle_g & \langle 1,T^2\rangle_g \\ \langle T,1\rangle_g & \langle T,T\rangle_g & \langle T,T^2\rangle_g \\ \langle T^2,1\rangle_g & \langle T^2,T\rangle_g & \langle T^2,T^2\rangle_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V^{\perp g} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim a = -c$$

$\Rightarrow V^{\perp g} = \operatorname{Span}\{T, 1 - T^2\}$ quindi g é degenere

e.g. $(\mathbb{R}^3, g)$ $\qquad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) =$

$$xy' + x'y + yy' + xz' + x'z + zz'$$

- Trovare $V^{\perp g}$ • Trovare $\operatorname{Span}\{e_1\}^{\perp}$

$$A_{g,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle_g & \langle e_1,e_2\rangle_g & \langle e_1,e_3\rangle_g \\ \langle e_2,e_1\rangle_g & \langle e_2,e_2\rangle_g & \langle e_2,e_3\rangle_g \\ \langle e_3,e_1\rangle_g & \langle e_3,e_2\rangle_g & \langle e_3,e_3\rangle_g \end{pmatrix}$$

a_{ij} é il coefficiente di $x_i x'_j$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

invertibile $\Rightarrow V^{\perp g} = \{0\}$

- $\operatorname{Span}\{e_1\}^{\perp g} : (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0 \rightsquigarrow y+z=0 \Rightarrow \mathrm{Span}\{e_1\}^{\perp g}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

OSS: quindi $e_1 \perp_g e_1$! g non degenere ma non "geometrico"

Senza richieste ulteriori su g, cosa posso dire su $W^{\perp g}$?

PROPOSIZIONE: Se $\dim W = d$ e $\dim V = n$ allora $\dim W^{\perp g} \geq n-d$

DIM: Consideriamo $T: V \to \mathbb{R}^d$ definita da $T(v)=\begin{pmatrix}\langle w_1, v\rangle_g\\ \vdots \\ \langle w_d, v\rangle_g\end{pmatrix}$

dove $w_1, \dots, w_d$ base di W.

T è lineare perché g è lineare a destra.

$v \in W^{\perp g} \Leftrightarrow$ ortogonale a una base

Allora $v \in W^{\perp g} \Leftrightarrow \langle w_1, v\rangle_g = \dots = \langle w_d, v\rangle_g = 0 \Leftrightarrow v \in \ker T$

$\dim \mathrm{Im}\, T \leq d$, quindi $n = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\, T \rightsquigarrow$

$\dim \ker T = n - \underbrace{\dim \mathrm{Im}\, T}_{\leq d} \Rightarrow \dim \ker T \geq n-d.$ $\square$

OSS: Se g non degenere $\dim W^{\perp g} = n-d$. (SENZA DIMOSTRAZIONE)

PRODOTTI DEFINITI POSITIVI

DEF: (V, g) spazio con prodotto scalare.

g è detto:

- definito positivo (rispettivamente negativo) se $\langle v, v\rangle_g > 0$ $\forall v \neq 0_V$ (rispettivamente <0).
- semidefinito positivo (rispettivamente negativo) se $\langle v, v\rangle_g \geq 0$ $\forall v$ (rispettivamente ≤ 0)
- indefinito altrimenti (cioè se esiste $v_+ \in V$ con $\langle v_+, v_+\rangle > 0$ e $v_- \in V$ con $\langle v_-, v_-\rangle < 0$)

e.g. • Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è definito positivo, infatti

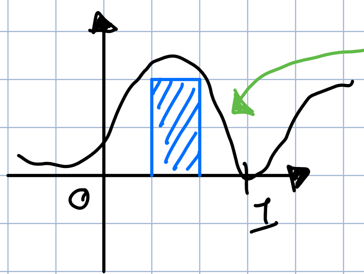
$$X \cdot X = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{somma di quadrati}$$

$\Rightarrow$ è ≥ 0 ed è $0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

• Il prodotto $\int_0^1 \cdot \, dt$ su $\mathbb{R}_{\leq d}[T]$ è definito positivo, infatti

$\langle p, p \rangle_g = \int_0^1 p^2 \, dt$ integrale di funzione continua è ≥ 0

$\Rightarrow$ è ≥ 0, $= 0 \Leftrightarrow p = 0$.



Se in un punto è > 0 allora per teorema di permanenza del segno posso infilare un rettangolo sotto $\Rightarrow$ integrale positivo.

• Il prodotto scalare su $M_{2,2}(\mathbb{R})$ dato da $\langle A, B \rangle_g = \mathrm{Tr}(A^T B)$

è definito positivo ($A_{g,B} = I_n$ + criterio sotto)

• $g(p,q) = (p(1) - p'(1) + p''(1))(q(1) - q'(1) + q''(1))$

è semidefinito positivo, infatti $g(p,q) = (p(1) - p'(1) + p''(1)]^2 \geq 0$

ma $g(T,T) = 0$

• $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xy' + x'y + yy' + xz' + x'z + zz'$

è indefinito, infatti $\langle e_2, e_2 \rangle_g = 1 > 0$ ma

$\langle -2e_1 + e_2, -2e_1 + e_2 \rangle = -4 + 1 = -3 < 0$.

PROPOSIZIONE: ① Se g é semidefinito ma non definito allora é degenere. In particolare se g é non degenere e $\langle v, v\rangle_g = 0$ con $v \neq 0$ allora g é indefinito.

② Se g é indefinito allora esiste $v \neq 0 \in V$ tale che $\langle v, v \rangle_g = 0$

DIM (SOLO ②): g indefinito $\Rightarrow$ esistono v_+, v_- con

$\langle v_+, v_+\rangle_g > 0$ e $\langle v_-, v_-\rangle < 0$

Consideriamo $v_T = T v_+ + (1-T) v_-$ e

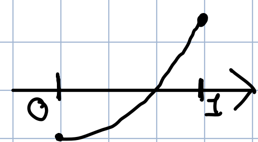
$P(T) = \langle v_T, v_T\rangle_g = \langle T v_+ + (1-T) v_-, T v_+ (1-T) v_- \rangle_g =$

$= T^2 \langle v_+, v_+\rangle g + 2(T-T^2)\langle v_+, v_-\rangle_g + (1-T)^2 \langle v_-, v_-\rangle_g$

é un polinomio di grado 2 $\Rightarrow$ é una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

$P(0) = \langle v_0, v_0\rangle_g = \langle v_-, v_-\rangle_g < 0$

$P(1) = \langle v_1, v_1\rangle_g = \langle v_+, v_+\rangle g > 0$

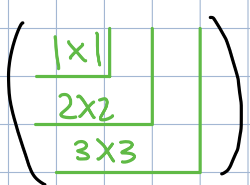


$\Rightarrow$ per il teorema degli zeri $\exists\, T_0 \in (0,1)$ tale che $P(T_0) = 0$

$\Rightarrow \langle v_{T_0}, v_{T_0}\rangle_g = 0$

UN CRITERIO DI POSITIVITÁ

DEF: A matrice $n \times n$. L'i-esimo minore principale di A é la sottomatrice $i \times i$ formata dalle prime i righe e i colonne



PROPOSIZIONE: (V, g) spazio con prodotto scalare, B base.

g definito positivo $\Leftrightarrow$ i determinanti dei minori principali sono tutti > 0.

g definito negativo se il segno dell'i-esimo minore principale é $(-1)^i$.

e.g. $\bullet g = \bullet \Rightarrow A_{g,\mathcal{E}} = I_n$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ tutti i minori principali hanno $\det = 1$.

- g definito da $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

allora $|2| = 2 > 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ non definito positivo (indefinito)

- g dato in base canonica da $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|2| = 2 > 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ definito positivo.

- $g = \int_0^1 \cdot \, dt$ $A_{g,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$|1| = 1 > 0$ $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} > 0$ $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{vmatrix} = \frac{1}{135} - \frac{1}{144} > 0$

$\Rightarrow$ definito positivo

SPAZI METRICI

NOTAZIONE: (V, g) con g definito positivo è detto uno spazio metrico.

Se (V, g) spazio metrico definiamo $\|v\|_g = \sqrt{\langle v, v\rangle_g}$ ← NORMA DI v

OSS: $\|v\|_g = 0 \iff v = 0_V$

ORTOGONALE E PROIEZIONE

LEMMA: (V, g) spazio metrico, $W \subseteq V$.

Allora $W \cap (W^{\perp g}) = \{0_V\}$.

DIM: $v \in W \cap W^{\perp g}$, allora $\langle \underset{W}{\underset{\cap}{v}}, \underset{W^{\perp g}}{\underset{\cap}{v}} \rangle_g = 0 \Rightarrow v = 0_V$. $\square$ ← É ORTOGONALE A SE STESSO

PROPOSIZIONE: (V, g) spazio metrico, $W \subseteq V$ allora $V = W \oplus W^{\perp g}$

DIM: sappiamo ① $W \cap W^{\perp g} = \{0_V\}$ ② $\dim W^{\perp g} \geq n - \dim W$

GRASSMAN: $\dim (W + W^{\perp g}) = \underset{d}{\dim W} + \underset{\geq n-d}{\dim W^{\perp g}} - \underset{0}{\dim W \cap W^{\perp g}}$

(SONO SOTTOSPAZI DI V)

$\Rightarrow \dim (W + W^{\perp g}) \geq n \Longrightarrow \dim (W + W^{\perp g}) = n \Rightarrow W \oplus W^{\perp g} = V$. $\square$

DEF: (V, g) spazio metrico, allora $\pi_W^{\perp g} \overset{def}{=} Pr_W^{W^{\perp g}}$

è la proiezione ortogonale su W.

BASI ORTOGONALI / ORTONORMALI.

DEF: - B ortogonale $\iff A_{g,B}$ diagonale

- B ortonormale $\iff A_{g,B} = I_n$

OSS: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base ortonormale allora g è definito positivo.

DIM: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow \langle v, v\rangle_g = \langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, a_1 v_1 + \dots + a_n v_n\rangle_g$

$= \langle a_1 v_1, a_1 v_1\rangle_g + \dots + \langle a_n v_n, a_n v_n\rangle_g + \sum_{i \neq j} \langle a_i v_i, a_j v_j\rangle_g$

$= a_1^2 \underset{=1}{\langle v_1, v_1\rangle_g} + \dots + a_i^2 \underset{=1}{\langle v_n, v_n\rangle_g} + \sum_{i \neq j} a_i v_j \underset{=0}{\langle v_i, v_j\rangle_g} = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$

$a = 0 \iff a_1 = \ldots = a_n = 0 \iff v = 0$. $\square$

DOMANDA: Se g definito positivo esiste una base ortogonale?

IDEA: Posso fare combinazioni dei vettori di una base per renderli ortogonali.

v_1, v_2 linearmente indipendenti.

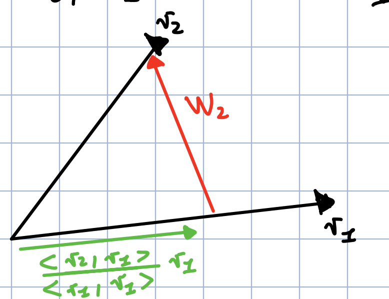
Se $w_2 = v_2 - \frac{<v_2, v_1>_g}{\boxed{<v_1, v_1>_g}} v_1$

"COMPONENTE PARALLELA A v_1"

allora $<w_2, v_1>_g = <v_2 - \boxed{\frac{<v_2, v_1>_g}{<v_1, v_1>_g}} v_1, v_1> \quad \in \mathbb{R}$

$= <v_2, v_1> - <\frac{<v_2, v_1>}{<v_1, v_1>} v_1, v_1> = <v_2, v_1> - \frac{<v_2, v_1>}{\cancel{<v_1, v_1>} \neq 0} \cancel{<v_1, v_1>}$

$= <v_2, v_1> - <v_2, v_1> = 0 \Rightarrow v_1 \perp_g w_2$!



e.g. $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{9} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}$$

VERIFICO: $v_1 \cdot w_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}(-20 + 20) = 0$

"TEOREMA (ALGORITMO DI GRAM - SCHMIDT)"

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V spazio metrico.

Il seguente algoritmo produce una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormale e tale che $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \operatorname{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$ $\forall\, r \leq n$.

① Costruisco una base ortogonale

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|_g^2} w_1$$

$$\vdots$$

$$w_d = v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle}{\|w_i\|_g^2} w_i$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n - \sum_{i<n} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|_g^2} w_i$$

② La normalizzo

$$u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|_g} = \frac{1}{\sqrt{\langle w_i, w_i \rangle_g}} w_i$$

DIM: Supponiamo di avere prodotto $w_1, \dots, w_{d-1}$ ortogonali tra loro.

$$w_d = v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2} w_i$$

Per $s<d$ $\langle w_d, w_s \rangle_g = \left\langle v_d - \sum_{i<d} \frac{\langle v_1, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2}, w_s \right\rangle$

$$= \langle v_d, w_s \rangle_g - \sum_{i<d} \frac{\langle v_d, w_i \rangle_g}{\|w_i\|_g^2} \overbrace{\langle w_i, w_s \rangle}^{=0 \text{ SE } i \neq s}$$

$$= \langle v_d, w_s \rangle_g - \frac{\langle v_d, w_s \rangle_g}{\cancel{\langle w_s, w_s \rangle_g}} \cancel{\langle w_s, w_s \rangle_g}$$

$$= \langle v_d, w_s \rangle_g - \langle v_d, w_s \rangle_g = 0. \quad \square$$

COROLLARIO: Sono equivalenti:

① (V, g) spazio metrico.

② Esiste $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormale per g.

DIM: Abbiamo visto: esiste base ortonormale $\Rightarrow$ metrico e metrico

$\Rightarrow$ esiste base ortonormale. □

e.g. $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ $\qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Voglio estrarre da B base ortonormale $\mathcal{U}$.

① Ottengo base ortogonale W.

(SEMPLIFICO: $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

② $$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

e.g. $(\mathbb{R}_{\leq 2}[T], \int_0^1 \cdot \, dt)$, voglio estrarre base ortonormale da $B=\{1, T, T^2\}$

$$A_{g,B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$ lavoro in base B

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_g^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_g^2} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_g^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{12}}{\left(-\frac{1}{2}\ 1\ 0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|_g} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|_g} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix}}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

"BASI ORTOGONALI, COEFFICIENTI, PROIEZIONI"

RICORDIAMO: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di (V, g) spazio metrico è

- ortogonale $\iff \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$
- ortonormale $\iff \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

PROPOSIZIONE: (V, g) spazio metrico. $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonale.

Allora dato $v \in V$, $v_W = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, w_1 \rangle_g}{\langle w_1, w_1 \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, w_n \rangle_g}{\langle w_n, w_n \rangle} \end{pmatrix}$

In altre parole se $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ allora $a_j = \frac{\langle v, w_j \rangle_g}{\langle w_j, w_j \rangle}$.

In particolare se $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormale allora

$$v_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

DIM: $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortogonale, $v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$

$$<v, w_j>_g = <a_1 w_1 + \ldots + a_j w_j + \ldots + a_n w_n, w_j>_g =$$

$$= <a_1 \overset{0}{\overset{"}{w_1}}, w_j>_g + \ldots + <a_j w_j, w_j>_g + \ldots + <a_n \overset{0}{\overset{"}{w_n}}, w_j>_g =$$

$$= <a_j w_j, w_j>_g = a_j <w_j, w_j>_g$$

$\Rightarrow a_j = \dfrac{<v, w_j>_g}{<w_j, w_j>_g}$ come voluto. $\square$

e.g. g su $\mathbb{R}^3$ data nella base canonica da $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Costruire W ortogonale da $\mathcal{E}$

$$w_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{<e_2, w_2>_g}{<w_1, w_1>_g} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = e_3 - \frac{<e_3, w_1>}{\|w_1\|^2_g} w_1 - \frac{<e_3, w_2>_g}{\|w_2\|^2_g} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{(-1\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{(-1\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

voglio v_W dato $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$a_1 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{6} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{6} = -\frac{11}{6}$$

$$a_3 = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{(-2\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{(2\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(-2\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow v_W = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

VERIFICA: $\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{11}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9+11-8}{6}\\\frac{-22+4}{6}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

SE VOLESSIMO $Id^{\mathcal{E}}_{W}$?

$$Id^{\mathcal{E}}_{W}=\left((e_1)_W \quad (e_2)_W \quad (e_3)_W\right)=\left(\frac{\langle w_i, e_j\rangle_g}{\langle w_i, w_i\rangle_g}\right)_{i,j}$$

- $e_1 = w_1$
- $e_2=\frac{\langle e_2, w_1\rangle_g}{\langle w_1, w_1\rangle_g}w_1+\frac{\langle e_1, w_2\rangle_g}{\langle w_2, w_2\rangle_g}w_2+\frac{\langle e_2, w_3\rangle_g}{\langle w_3, w_3\rangle_g}w_3$

$$=\frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{2}w_1+\frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}}{6}w_2+\frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{3}w_3$$

$$=\frac{1}{2}w_1+\frac{1}{2}w_2$$

- $e_3=\frac{\langle e_3, w_1\rangle_g}{\langle w_1, w_1\rangle_g}w_1+\frac{\langle e_3, w_2\rangle_g}{\langle w_2, w_2\rangle_g}w_2+\frac{\langle e_3, w_3\rangle_g}{\langle w_3, w_3\rangle_g}w_3=$

$$=\frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{2}w_1+\frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}}{6}w_2+\frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{3}w_3=$$

$$=\frac{1}{2}w_1-\frac{1}{6}w_2+\frac{1}{3}w_3$$

$$\Rightarrow Id^{\mathcal{E}}_{W}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

"BASI ORTOGONALI E PROIEZIONI"

$W \subseteq V$, voglio calcolare $\pi^{\perp g}_{W}(v)$, se $w_1, \dots, w_d$ base ortogonale di W, $v_{d+1}, \dots, v_n$ base di $W^{\perp g}$.

Se $v = a_1w_1+\dots+a_dw_d+a_{d+1}w_{d+1}+\dots+a_nv_n$

$$\pi^{\perp g}_W(v) = \pi^{\perp g}_W(\overbrace{a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d}^{\in W}) + \pi^{\perp g}_W(\overbrace{a_{d+1} v_{d+1} + \ldots + a_n v_n}^{\in W^{\perp g}}) =$$

$$= \pi^{\perp g}_W(a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d) = a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d = \frac{\langle v, w_1 \rangle_g}{\|w_1\|_g^2} w_1 + \ldots + \frac{\langle v, w_d \rangle}{\|w_d\|_g^2} w_d$$

ABBIAMO DIMOSTRATO:

PROPOSIZIONE: Se $W = \{w_1, \ldots, w_d\}$ base ortogonale di W allora

$$\pi^{\perp g}_W(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle_g}{\|w_1\|_g^2} w_1 + \ldots + \frac{\langle v, w_d \rangle}{\|w_d\|_g^2} w_d$$

e.g. $W = \text{Span}\{1 - T\} \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$, $g = \int_0^1 \cdot \, dt$

Voglio $(\pi^{\perp g}_W)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ $\quad \mathcal{E} = \{1, T, T^2\}$

$$(\pi^{\perp g}_W)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = (\pi^{\perp g}_W(1)_{\mathcal{E}} \;\; \pi^{\perp g}_W(T)_{\mathcal{E}} \;\; \pi^{\perp g}_W(T^2)_{\mathcal{E}})$$

- $$\pi^{\perp g}_W(1) = \frac{\langle 1, 1-T \rangle}{\|1-T\|_g^2}(1-T) = \frac{\int_0^1 1 - T \, dt}{\int_0^1 1 - 2T + T^2 \, dt}(1-T) = \frac{\frac{1}{2}}{\left[T - T^2 + \frac{T^3}{3}\right]_0^1}(1-T)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}(1-T) = \frac{3}{2}(1-T)$$

- $$(\pi^{\perp g}_W(T))_{\mathcal{E}} = \frac{(0 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(0 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}}{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \left(\pi_W^{\perp g}(T^2)\right)_\mathcal{E} = \frac{(1\ 0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{12}\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\pi_W^{\perp g}\right)_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e.g. $W: 2x-2y+z=0 \subset \mathbb{R}^3,\ g=\bullet$

voglio $\left(\pi_W^{\perp g}\right)_\mathcal{E}^\mathcal{E}$

① Trovo base ortogonale

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \frac{(-1\ 0\ 2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{(1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

② Calcolo le immagini di e_1, e_2, e_3

$$\pi_W^{\perp g}(e_1) = \frac{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{18}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{1}{18}\\ \frac{1}{18}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\ \frac{4}{9}\\ -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$\pi_W^{\perp g}(e_2) = \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}{18}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\pi^{\perp g}_{W} = \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}{18} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow (\pi^{\perp g}_{W})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

"DISTANZE E ANGOLI"

DEF: (V, g) spazio metrico, allora la distanza $d(v, v')$ é data da

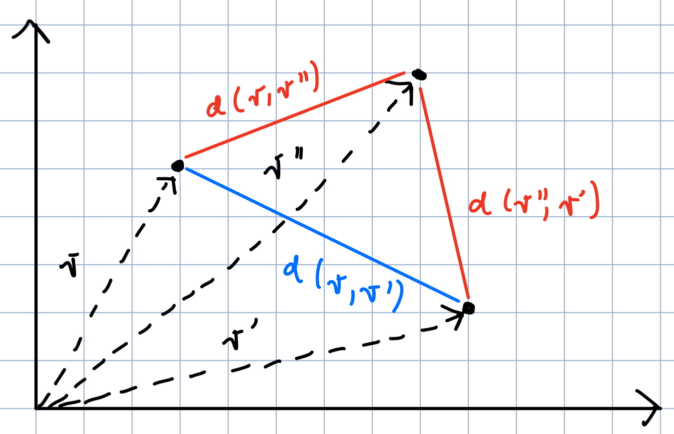
$$d(v, v') = \|v - v'\|_g = \|v' - v\|_g$$

OSS: $d(v, v') = 0 \Leftrightarrow v - v' = 0_V \Leftrightarrow v = v'$.

Perché possiamo veramente parlare di distanza deve valere la disuguaglianza triangolare: $\|v_1 + v_2\|_g \leq \|v_1\|_g + \|v_2\|_g$

che implica, dati v, v', v''

$$d(v, v') \leq d(v, v'') + d(v'', v')$$



perché lo implica? $v_1 = v - v''$, $v_2 = v'' - v'$

$$d(v, v') \leq d(v, v'') + d(v'', v') \sim \|v_1 + v_2\|_g \leq \|v_1\|_g + \|v_2\|_g$$

LEMMA (TEOREMA DI PITAGORA)

Se $v \perp_g w$ allora $\|v+w\|_g^2 = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2$

DIM: $\|v+w\|_g^2 = \langle v+w, v+w\rangle_g = \langle v,v\rangle_g + \langle w,w\rangle_g + 2\underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} =$

$= \langle v,v\rangle_g + \langle w,w\rangle_g = \|v\|_g^2 + \|w\|_g^2$

e.g. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ $\quad \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 3 \qquad \left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2 = 6$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2-1-1=0 \qquad \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = 9$

$= \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 + \left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2$

"TEOREMA (COOCHY-SCHWARTZ)"

$|\langle v,w\rangle_g| \leq \|v\|_g \|w\|_g$ e l'eguaglianza vale

$\Leftrightarrow$ v e w dipendenti.

DIM: $v = \underbrace{\frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w}_{\text{PARALLELA A W}} \overset{\perp_g}{+} \underbrace{\left(v - \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right)}_{\text{ORTOGONALE A W}}$

$\Rightarrow \|v\|^2 = \left\|\frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right\|_g^2 + \cancel{\left\|\left(v - \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right)\right\|_g^2} \geq \left\|\frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w\right\|_g^2$

$\sim \|v\|^2 \geq \left\langle \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w, \frac{\langle v,w\rangle_g}{\langle w,w\rangle_g} w \right\rangle \sim \|v\|_g^2 \geq \frac{\langle v,w\rangle_g^2}{\langle w,w\rangle_g^{\cancel{2}}} \cancel{\langle w,w\rangle_g}$

$\sim \|v\|_g^2 \geq \frac{\langle v,w\rangle_g^2}{\|w\|_g^2} \sim \|v\|_g^2 \|w\|_g^2 \geq \langle v,w\rangle^2$ estraggo le radici

$\|v\|_g \|w\|_g \geq |\langle v, w \rangle_g|$.

Vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ componente $\perp_g$ a $w = 0 \Leftrightarrow$ linearmente dipendente. $\square$

DIM ALTERNATIVA: $P(T) = \|v - Tw\|_g^2$

$= T^2 \langle w, w \rangle - 2T \langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle$ polinomio di 2° grado.

è sempre $\geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$ (non può dare radici distinte, $\cup$ o $\cap$) ma

$\Delta = 4 \langle v, w \rangle_g^2 - 4 \langle v, v \rangle_g \langle w, w \rangle_g = 4 \left(\langle v, w \rangle^2 - \|v\|_g^2 \|w\|_g^2 \right)$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 - \|v\|_g^2 \|w\|_g^2 \leq 0 \sim \|v\|_g^2 \|w\|_g^2 \geq \langle v, w \rangle^2$ che è la nostra tesi.

$P(T)$ può essere 0 per qualche $T \Leftrightarrow v - Tw = 0_V$ per qualche T

$\Leftrightarrow$ sono linearmente dipendenti. $\square$

COROLLARIO: $-1 \leq \dfrac{\langle v, w \rangle_g}{\|v\|_g \|w\|_g} \leq 1$

DEF: L'angolo tra v e w è l'unico angolo $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_g \|w\|_g}$$

e.g. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora l'angolo tra v e w è data da

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

"DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE"

$\| v_1 + v_2 \|_g \leq \| v_1 \|_g + \| v_2 \|_g \rightsquigarrow$ eleva al quadrato

$\| v_1 + v_2 \|_g^2 \leq \| v_1 \|_g^2 + \| v_2 \|_g^2 + 2 \| v_1 \|_g \| v_2 \|_g \rightsquigarrow$

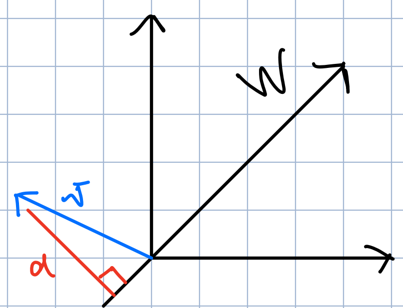
$< v_1 + v_2 , v_1 + v_2 >_g \leq \| v_1 \|_g^2 + \| v_2 \|_g^2 + 2 \| v_1 \|_g \| v_2 \|_g$

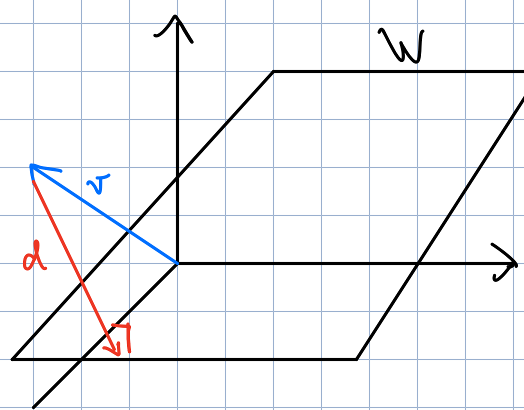
$\cancel{< v_1 , v_1 >_g} + \cancel{< v_2 , v_2 >_g} + 2 < v_1 , v_2 >_g \leq \cancel{\| v_1 \|_g^2} + \cancel{\| v_2 \|_g^2} + 2 \| v_1 \|_g \| v_2 \|_g$

$\rightsquigarrow 2 < v_1 , v_2 >_g \leq 2 \| v_1 \|_g \| v_2 \|_g$

- Se $< v_1 , v_2 >_g < 0$ OVVIO
- Se $< v_1 , v_2 >_g \geq 0$ VERO PER CAUCHY-SCHWARTZ. $\square$

"DISTANZA VETTORE - SOTTOSPAZIO"





DEF: Dato W sottospazio di (V, g) e $v \in V$ definiamo la distanza tra v e W

$$d(v, W) = \min_{w \in W} d(v, w)$$

Come la calcolo?

IDEA ①: Se trovo w_0 in W tale che $v - w_0 \perp_g w$ allora

$d(v, W) = \| v - w_0 \|_g$

DIM: $d(v, W) \leq \| v - w_0 \|_g$. Prendiamo $w_1 \neq w_0 \in W$.

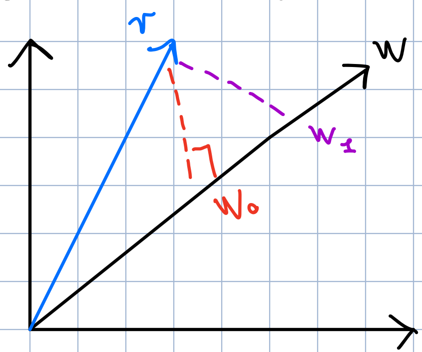
Allora $d(v, w_1) = \| v - w_1 \|_g = \| (v - w_0) + (w_0 - w_1) \|_g$ e

$v - w_0 \perp_g \overbrace{w_0 - w_1}^{\in W}$

PITAGORA: $\| v - w_1 \|_g^2 = \| v - w_0 \|_g^2 + \| w_0 - w_1 \|_g^2$

$\Rightarrow \| v - w_1 \|_g \geq \| v - w_0 \|_g$

quindi w_0 realizza la distanza minima. □



IDEA: Possiamo prendere $w_0 = \pi_W^{\perp_g}(v)$

DIM: $v - \pi_W^{\perp_g}(v) = v - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} w_i$ dove $W = \{w_1, \dots, w_d\}$

base ortogonale di $W \Rightarrow$ dato $w \in W$

$\langle v - \pi_W^{\perp_g}(v), w \rangle = \langle v, w \rangle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} \langle w_i, w \rangle =$

$= \langle v, w \rangle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\langle w_i, w_i \rangle_g} \langle w_i, a_1 w_1 + \dots + a_m w_m \rangle_g =$

RACCOLGO

$= \langle v, w \rangle - \sum_{i=1}^{d} \frac{\langle v, w_i \rangle_g}{\cancel{\langle w_i, w_i \rangle_g}} a_i \cancel{\langle w_i, w_i \rangle_g} =$

$= \langle v, w \rangle_g - \langle v, a_1 w_1 + \dots + a_d w_d \rangle = \langle v, w \rangle_g - \langle v, w \rangle_g = 0$

Quindi $v - \pi_W^{\perp_g}(v) \in W^{\perp_g}$. □

DIM ALTERNATIVA: $B = \{w_1, \dots, w_d, v_{d+1}, \dots, v_m\}$

$w_1, \dots, w_d$ base di W, $v_{d+1}, \dots, v_m$ base di $W^{\perp_g}$

Allora se $v = a_1 w_1 + \dots + a_d w_d + a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_m v_m$

$\pi_W^{\perp_g}(v) = \pi_W^{\perp_g}(\underbrace{a_1 w_1 + \dots + a_d w_d}_{\in W}) + \overbrace{\pi_W^{\perp_g}(\underbrace{a_{d+1} v_{d+1} + \dots + a_m v_m}_{\in W^{\perp_g}})}^{=0}$

$= \pi_W^{\perp g}(a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d) = a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d$ quindi

$v - \pi_W^{\perp g} = (a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d + a_{d+1} v_{d+1} + \ldots + a_n v_n)$

$- (a_1 w_1 + \ldots + a_d w_d) = a_{d+1} v_{d+1} + \ldots + a_n v_n \in W^{\perp g}$. $\square$

ABBIAMO DIMOSTRATO:

PROPOSIZIONE: $d(v, W) = \| v - \pi_W^{\perp g}(v) \|_g$

e.g. voglio $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, W\right)$ in $(\mathbb{R}^3, \bullet)$

con $W: 2x - 2y + z = 0$ abbiamo visto prima che

$$\left(\pi_W^{\perp g}\right)_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

quindi $v - \pi_W^{\perp g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$

quindi $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, W\right) = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| =$

$= \frac{1}{9}\sqrt{4+4+1} = \frac{1}{3}$