

Lezione 6

venerdì 26 marzo 2021 — 10:48

$(V, +, \cdot)$ spazio vettoriale su un campo K

Sia $S \subseteq V$ e $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S)$.

Ci siamo chiesti se è possibile ricavare da S un sistema di generatori di \mathcal{W} che sia anche linearmente indipendente, ovvero una base di \mathcal{W} .

Questa domanda ha risposte affirmative se S è finito.

Teorema di ESTRAZIONE di una BASE (di un sistema di generatori).

$$S \subseteq V, \quad \mathcal{W} = \mathcal{L}(S), \quad |S| = m$$

Esiste una base di \mathcal{W} contenuta in S .

DIM. La dimostrazione è costruttiva e da quindi logo esiste un algoritmo

$$S = \{u_1, \dots, u_m\}$$

Se S è linearmente indipendente, allora S è la base cercata.

Altrimenti può accadere $0 \in S$ e poniamo $S' = S \setminus \{0\}$

Oppure $0 \notin S$ ma per il teorema della lezione precedente esiste un vettore u di S tale che $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{u\})$ e quindi poniamo $S' = S \setminus \{u\}$. Per esempio $u = u_m$.

Se S' è linearmente indipendente, allora S' è la base di \mathcal{W} cercata

Altrimenti applichiamo ad S' lo stesso ragionamento fatto su S :

per il teorema precedente, esiste $v \in S'$: $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S' \setminus \{v\})$

e procediamo così fino a quando troviamo un sottospazio di S che è sistema di generatori di \mathcal{W} lin. indip.

Esempio: \mathbb{R}^3 Verificare che il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 è un sottospazio

vettoriale di \mathbb{R}^3 e determinarne una base:

$$X = \{\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,0) + \delta(1,-1,1) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{L}((1,0,1), (1,1,1), (0,1,0), (1,-1,1))$$

$$\begin{aligned} u, v \in X \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}: u &= \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,0) + \delta(1,-1,1) \\ &\quad \exists \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}: v = \alpha'(1,0,1) + \beta'(1,1,1) + \gamma'(0,1,0) + \delta'(1,-1,1) \end{aligned}$$

$$X \neq \emptyset$$

$$(1, -1, 1) \in X$$

$$u + v = (\alpha + \alpha')(1,0,1) + (\beta + \beta')(1,1,1) + (\gamma + \gamma')(0,1,0) + (\delta + \delta')(1,-1,1) =$$

$$= (\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2, \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 2, \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2) \in X ?$$

$\in X \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2, \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 2, \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2) &= a(1,0,1) + b(1,1,1) + c(0,1,0) + 1(1,-1,1) = \\ &= (a + a' + b + b' + 2, b + b' + c - 2, a + a' + b + b' + 2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a' + b + b' + 2 = a + b + 1 \\ b + b' + c - 2 = b + c - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = a + a' + b + b' + 2 - b - 1 \\ c = b + b' + c - 2 - b + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2 = \alpha + \beta + 1 \\ \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 2 = \beta + \gamma - 1 \\ \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + 2 = \alpha + \beta + 1 \end{cases}$$

Proviamo a porre $b = 1$:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' \\ \beta = \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 2 \end{cases}$$

Quindi X è sotto spazio vettoriale di \mathbb{R}^3

Si può vedere che X è chiuso anche rispetto alla moltiplicazione.

Vediamo se $(1, -1, 1)$ si può esprimere come comb. lineare degli altri vettori:

$$(1, -1, 1) = \underline{\alpha_1}(1, 0, 1) + \underline{\alpha_2}(1, 1, 1) + \underline{\alpha_3}(0, 1, 0) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 = -1 - \alpha_2 \end{cases} \quad \text{quindi:}$$

$$\forall \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad (1, -1, 1) = (1 - \alpha_2)(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 1) + (-1 - \alpha_2)(0, 1, 0)$$

Del ragionamento su $u+v$, vediamo che $\underline{0} \in X$ e quindi i vettori

$(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)$ sono lin. dip. e quindi c'è un vettore che si può esprimere come comb. lineare degli alti. Non abbiamo trovato che $(1, -1, 1)$ è uno d'questi vettori. Possiamo scrivere:

$$\alpha_2 = 1: \quad (1, -1, 1) = 0(1, 0, 1) + 1(1, 1, 1) + (-2)(0, 1, 0)$$

$$X = \left\{ \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 0) \mid \begin{array}{l} \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1) + \gamma(0, 1, 0) \\ \alpha = h \\ \beta = k \\ \gamma = j \end{array} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ h(1, 0, 1) + k(1, 1, 1) + j(0, 1, 0) \mid h, k, j \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0))$$

X è sotto spazio vettoriale e $X = \mathcal{L}(S)$ con $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$

? S è lin. indip.? No, perché $(1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)$

e per il teorema della lezione precedente:

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S - \{(1, 1, 1)\})$$

Allora poniamo $S' = S - \{(1, 1, 1)\} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ che è lin. indip.

Quindi S' è la base di X cercata.

Esempio: \mathbb{R}^2 $S = \{0, (1, 1), (2, 3), (0, 1)\}$ $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S)$.

$0 \in S$. Allora $S' = S - \{0\} = \{(1, 1), (2, 3), (0, 1)\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S')$

S' è lin. indip.? No $(2, 3) = 2(1, 1) + (0, 1)$

Allora $S'' = S' - \{(2, 3)\} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ è lin. indip.

Quindi S'' è la base di \mathcal{W} cercata.

Esempio \mathbb{R}^2 $T = \{(1, 0)\}$ è linearmente indip.

Esempio \mathbb{R}^2 $T = \{(1,0)\}$ è lin. indip.

$(0,1) \notin \mathcal{L}(T)$ $T \cup \{(0,1)\}$ è lin. indip.

$\{(1,0), (0,1)\}$ è base di \mathbb{R}^2

Lemme (importante): $(V, +, \cdot)$, $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$

Supponiamo che S è lin. indip.

Se $u \in V$ tale che $u \notin \mathcal{L}(S)$, allora $S \cup \{u\}$ è lin. indip.

DIM p.e. $S \cup \{u\} = \{u_1, \dots, u_n, u\}$ lin. dipendente.

Allora, per definizione, esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in K$ NON TUTTI NULLI

tali che: $\underline{\Omega} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u$

non puo' accadere che nè $\alpha=0$, altrimenti: $\underline{\Omega} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ con SCACCI
NON TUTTI NULLI

e questo è impossibile perché $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ è lin. indip.

Allora: $\alpha \neq 0$. Quindi, $\exists \alpha^{-1} \in K$:

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} &= \alpha^{-1} \underline{\Omega} = \alpha^{-1} (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u) = \\ &= \alpha^{-1} (\alpha_1 u_1) + \dots + \alpha^{-1} (\alpha_n u_n) + \alpha^{-1} (\alpha u) = \\ &= (\alpha^{-1} \alpha_1) u_1 + \dots + (\alpha^{-1} \alpha_n) u_n + \underbrace{(\alpha^{-1} \alpha)}_{=1} u \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(\alpha^{-1} \alpha_1) u_1 - \dots - (\alpha^{-1} \alpha_n) u_n = u \quad \rightsquigarrow \text{ASSURDO} \\ &\in \mathcal{L}(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{L}(S) \end{aligned}$$

Esempio: \mathbb{R}^3 $S = \{(1,1,0)\}$ è lin. indip.

$u \notin \mathcal{L}(S) = \{2(1,1,0) \mid 2 \in \mathbb{R}\}$. Per esempio, $u = (0,0,1)$

Per il Lemma precedente: $T = S \cup \{(0,0,1)\} = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ è lin. indip.

$w \notin \mathcal{L}(T) = \{2(1,1,0) + \beta(0,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \not\ni (1,0,1)$

Per esempio $w = (1,0,1)$ e per il Lemma precedente

$U = T \cup \{(1,0,1)\}$ è lin. indip.

Possiamo concludere o è impossibile? Oppure U è una base di \mathbb{R}^3 ?

Lemma di Steinmetz: $(V, +, \cdot)$ in K

sia W un sotto sp. vett. di V f.g. con insieme di generatori $S = \{u_1, \dots, u_m\}$.

Se $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$ con $m > n$, allora X è lin. dipendente.

DIM. lazione prossima.

Tornando all'esempio precedente, seppiamo che $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$ è un ins. di gen. di \mathbb{R}^3 per cui:

$$\forall z \in \mathbb{R}^3 \setminus U, |U \cup \{z\}| = h > |B|, \text{ e quindi } U \cup \{z\} \text{ è lin. dip.}$$

Carollano: $(V, +, \cdot)$ f.g. e sia $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ s.t. di gen. di V :
 $(**)$ $V = L(S)$.

Se $T = \{w_1, \dots, w_h\} \subseteq V$ è lin. indip., allora $h \leq m$.

DIM. Se $h > m$, allora T sarebbe lin. dip. per il Lemma di Steinitz e questo è ovviamente.

Esempio $\mathbb{R}[x] \leq 3$ $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ è un ins. di gen. di $\mathbb{R}[x] \leq 3$
 $|S| = 4$

Allora ogni sottoinsieme lin. indip. di $\mathbb{R}[x] \leq 3$ ha al più 4 vettori.

Teorema di equipotenza delle basi:

Sia $(V, +, \cdot)$ uno sp. vett. f.g. in un campo K .

Allora tutte le basi di V sono finite e hanno la stessa cardinalità.

DIM. V è f.g. per cui ha almeno un sistema di generatori finiti S : $V = L(S)$.

Per il Teorema di estensione di una base, esiste una base B di V contenuta in S . Quindi B è una base finita: $m = |B|$.

Sia B' un'altra base di V . Siccome B' è lin. indip., ogn. suo sottoinsieme finito è lin. indip. e per il Corollario $(**)$ ha al più m vettori: $|B'| \leq m = |B|$. Scambiamo il ruolo di B e B' , per cui: $|B| \leq |B'|$.

Da cui: $|B| = |B'|$. \square

Def. Sia $(V, +, \cdot)$ uno sp. vett. f.g.. La cardinalità di una qualsiasi base di V è detta dimensione di V .

Esempio:

K^m una base è $\{(1,0,\dots), (0,1,\dots), \dots, (0,\dots,1)\}$ detta base canonica
 $\dim(K^m) = m$

$K[x] \leq h$ $\dim(K[x] \leq h) = h+1$ $\{1, x, \dots, x^h\}$ base canonica

$M_{m \times n}(K)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \right\}$ base canonica
 $\dim(M_{m \times n}(K)) = mn$.

Proposizione. $(V, +, \cdot)$ su K $\dim V = m$

$S = \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq V$ $|S| = m$

- S è lin. indip. $\Rightarrow S$ è base di V
- S è sott. di gen. $\Rightarrow S$ è base di V

DIM: • S è lin. indip. per ipotesi.

p.e. S non è base, e quindi non è un sott. di gen. di V :

$$L(S) \subsetneq V. \text{ Allora } \exists u \in V : u \notin L(S);$$

quindi per il Lemma importante:

$S \cup \{u\}$ è lin. indip.

$$\text{con } |S \cup \{u\}| = m+1 > \dim V$$

Ma questo è assurdo per il Corollario (**)

- S è un sott. di gen. per ipotesi.

p.e. S non è base, e quindi non è lin. indip. e per il Teorema d'interazione di una base contiene propriamente una base:

$$\exists B \subsetneq S : B \text{ è base di } V$$

↓

$$|B|=k < m = |S| = \dim V \quad \rightarrow \text{assurdo.} \quad \square$$

Durante le prossime lezioni dimostreremo il lemma di Steinitz e ponremo altre importanti conseguenze:

Teorema di completamento in una base:

$$(V, +, \cdot) \text{ su } \mathbb{K}, \dim V = m.$$

Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ lin. indip.

Se $t = |S| < m$, allora esiste $X = \{u_{t+1}, \dots, u_m\}$, $|X| = m-t$,
 $\subseteq V$

tale che $S \cup X$ è base di V .