CONFRONTO ATTRAVERSO LIMITI

Anziché verificare le proprietà di limite asintotico attraverso la ricerca delle costanti c, possiamo studiare i limiti per $n \to \infty$:

① $f(n) = \Theta(g(n)) \iff \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$

② $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \implies f(n) = O(g(n))$

③ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \implies f(n) = \Omega(g(n))$

DIMOSTRAZIONE ①

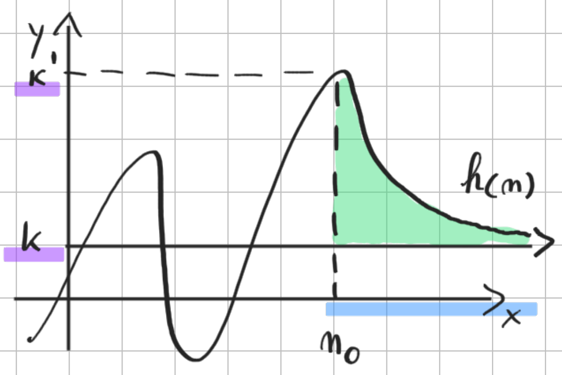
- Dimostriamo l'implicazione:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0 \implies \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Sia $h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$, sappiamo per ipotesi che $\lim\limits_{n \to \infty} h(n) = k > 0$

La nostra funzione presenta un asintoto orizzontale in K, ciò potrebbe accadere dall'alto o dal basso, studiamo i due casi.

▶ DALL' ALTO

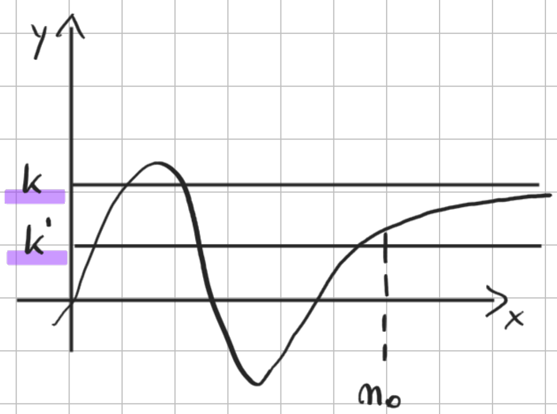


Ciò che succede prima di n_0 (punto di discesa) non ci interessa.

$$\forall n \geq n_0 \quad k \leq h(n) \leq k' \implies k \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k' \implies k\,g(n) \leq f(n) \leq k'\,g(n)$$

Ma noi volevamo dimostrare $\forall n \geq n_0 \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ quindi se $k = c_1$ e $k' = c_2$ la dimostrazione è conclusa.

▶ DAL BASSO



prendiamo n_0 tale che $h(n_0) > 0$

$$\forall n \geq n_0 \quad k' \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k \implies \exists\, k, k', n_0 > 0 \mid \forall n \geq n_0 \quad k'\,g(n) \leq f(n) \leq k\,g(n)$$

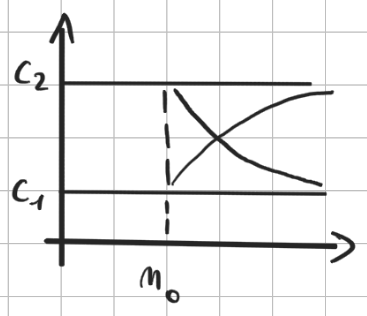
- Dimostriamo la contraimplicazione:

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K > 0$$

$$\downarrow$$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

Graficamente questo significa:

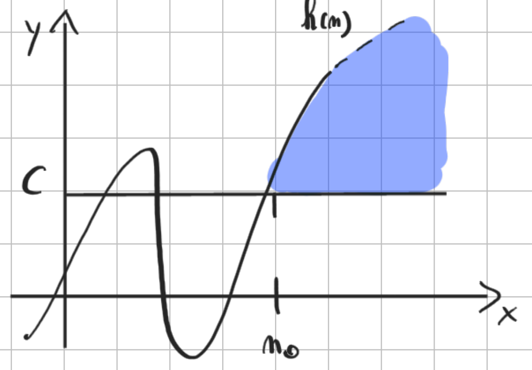


Che e' proprio analogo al caso precedente e quindi dimostrato

DIMOSTRAZIONE ③

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

Graficamente siamo in questo caso:



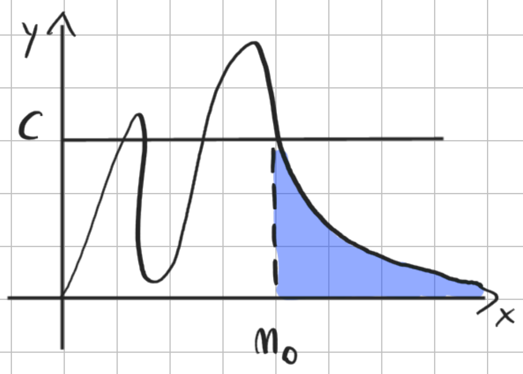
Se $h(n)$ tende a infinito ed e' ci sara' un punto n_0 tale che $h(n)$ sara' crescente

$$\forall n \geq n_0 \quad h(n) \geq c \Rightarrow \frac{h(n)}{g(n)} \geq c \Rightarrow f(n) \geq c\, g(n)$$

che è proprio la definizione di $f(n)=\Omega(g(n))$

DIMOSTRAZIONE ②

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n)=O(g(n))$$



$$\exists c, n_0>0 \mid \forall n\geq n_0 \quad h(n)\leq c \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq c \Rightarrow f(n)\leq c\, g(n)$$

e quindi $f(n)=O\, g(n)$

Es.

1) $f(n) = \frac{11}{2} n^2 + \frac{9}{2} n + 4$

$g(n) = n^2$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\frac{11}{2} n^2 + \frac{9}{2} n + 4}{n^2} = \frac{11}{2} + \frac{9}{2n} + \frac{4}{n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{11}{2} + \frac{9}{2n} + \frac{4}{n^2} = \frac{11}{2} \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

2) $f(n) = n^2$

$g(n) = \frac{11}{2} n^2 + \frac{9}{2} n + 4$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Funzioni dello stesso ordine sono tra loro asintoticamente equivalenti

3) $f(n) = n^2 \ln n$

$g(n) = e^n$

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{n^2 \ln n}{e^n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{de l'Hopital}} \frac{2n \ln n + n}{e^n} = \dots = 0$$

PROPRIETA' DELLE EQUIVALENZE ASINTOTICHE

L' equivalenza asintotica in quanto equivalenza è:

- RIFLESSIVA
- SIMMETRICA
- TRANSITIVA

Dimostrare le prime due è banale, dimostriamo la TRANSITIVITA'

DIMOSTRAZIONE

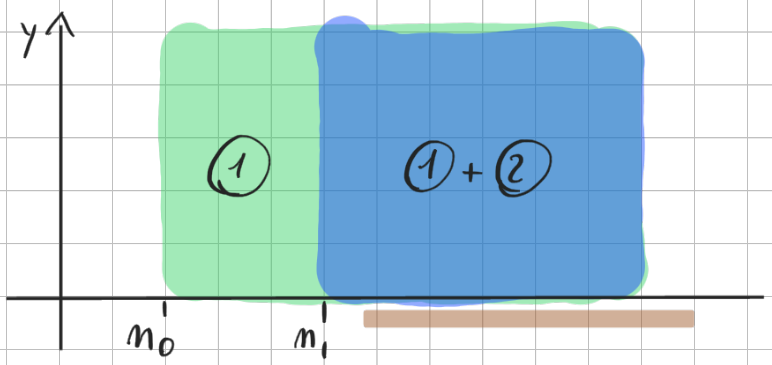
Dimostriamo che

$$f(n)=\Theta(g(n)) \wedge g(n)=\Theta(s(n)) \Rightarrow f(n)=\Theta(s(n))$$

$$\left.\begin{array}{l} ①\ \exists c_1,c_2,n_0>0\ \forall n\geq n_0 \mid c_1 g(n)\leq f(n)\leq c_2 g(n) \\ ②\ \exists c_3,c_4,n_1>0\ \forall n\geq n_1 \mid c_3 s(n)\leq g(n)\leq c_4 s(n) \end{array}\right\}\ \text{IPOTESI}$$

$$③\ \exists c_5,c_6,n_2>0\ \forall n\geq n_2 \mid c_5 s(n)\leq f(n)\leq c_6 s(n) \qquad \text{TESI}$$

Visualizziamo l'ipotesi



Da n_0 in poi vale ① e da n_1 in poi vale ② (e ovviamente anche ①). Possiamo semplificare in questo modo:

Sia $n_2=\max\{n_0,n_1\}$

$$\exists c_1,c_2,c_3,c_4,n_2>0 \mid \forall n\geq n_2 \quad c_1 g(n)\leq f(n)\leq c_2 g(n) \wedge c_3 s(n)\leq g(n)\leq c_4 s(n)$$

Applichiamo la transitività del $\leq$:

- Sappiamo che $c_3 S(n) \leq g(n) \wedge c_1 g(n) \leq f(n)$

Se moltiplichiamo la prima disuguaglianza per c_1 avremo:

$\underbrace{c_3 c_1}_{c_5} S(n) \leq c_1 g(n) \wedge c_1 g(n) \leq f(n) \implies c_5 S(n) \leq f(n)$

- Analogamente varrà considerando $f(n) \leq c_2 g(n) \wedge g(n) \leq c_4 S(n)$

per dimostrare $f(n) \leq c_6 S(n)$ quindi la disuguaglianza è dimostrata