

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$   $\mathbb{K}$  campo

Def. Una sottomatrice quadrata di  $A$  di ordine  $\kappa$  ( $\kappa \leq \min\{m, n\}$ ) si dice minore di  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & \pi \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 8 & 3 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

indice righe	indice colonne
$i_1 = 1$	$j_1 = 2$
$i_2 = 3$	$j_2 = 3$

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ di ordine } 2$$
  

$i_1 = 1$	$j_1 = 1$
$i_2 = 2$	$j_2 = 3$
$i_3 = 3$	$j_3 = 4$

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & 5 & -3 \\ 8 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ di ordine } 3$$

$M, M'$  sono minori di  $A$

$M$  non è minore di  $M'$  (non è sottomatrice di  $M'$ )

Def. Sia  $M$  un minore di  $A$  di ordine  $\kappa < \min\{m, n\}$ .

Un orbito di  $M$  (in  $A$ ) è un minore di ordine  $\kappa+1$  d' $A$  di cui  $M$  è sottomatrice.

Tornando all'esempio precedente

$$\begin{array}{ll} i_1 = 1 & j_1 = 1 \\ i_2 = 2 & j_2 = 2 \\ i_3 = 3 & j_3 = 3 \end{array} \quad M'' = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & \pi \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 8 & 3 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e' un orbito di  $M$

Teorema degli orbiti (o di Kronecker) (senza dimostrazione)

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Il rango di  $A$  è uguale a  $\kappa$  ( $\leq \min\{m, n\}$ ) se e solo se esiste un minore  $M$  di  $A$  di ordine  $\kappa$  con determinante non nulla e

(i)  $\kappa = \min\{m, n\}$

oppure

(ii) tutti gli orbiti di  $M$  hanno determinante nulla.

Esempio  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -13 & 1 \end{pmatrix}$

$i_1 = 1$	$j_1 = 1$	$M = (3)$	$ M  = 3 \neq 0$
$i_2 = 2$	$j_2 = 2$	$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$ M'  = 1 - 6 = -5 \neq 0$
$i_3 = 3$	$j_3 = 1$		

$$i_4 = 1, \quad j_4 = 2 \quad j_2 = 3 \quad j_3 = 2 \quad j_4 = 3$$

orbiti di  $M'$ :

$$\begin{array}{ll} i_1 = 1 & j_1 = 1 \\ i_2 = 2 & j_2 = 3 \\ i_3 = 3 & j_3 = 1 \end{array} \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 8 - 3 + 8 - 2 = 5 \neq 0 \quad \text{range}(A) \geq 3$$

orbiti di  $M''$ :

$$i_1 = 1, \quad j_1 = 4 \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -13 \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -10 \\ -3 & 1 & -13 \end{pmatrix} \right| - \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -2 & 2 & -10 \\ -3 & 1 & -13 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 2(-52 - 3 + 30 + 18 + 20 - 13) - (-26 + 7 + 30 - 42 + 10 - 39) =$$

$$= 2(-68 + 68) - (-107 + 107) = 0$$

$$x_1=4, x_2=5$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| - \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 2(4 - 3 - 2 + 1) - (2 - 3 - 1 + 6 - 1 + 3) = 2(0) - (4 - 1) = 0$$

$$\text{rang}(A) = 3$$

Torniamo a parlare di applicazioni lineari, in particolare tra spazi vettoriali finitamente generati.

- le matrici determinano apppl. linear.

$$A \in M_{m \times n}(K)$$

$$\tilde{T}_A : K^m \longrightarrow K^m$$

$$(x_1, \dots, x_m) \rightsquigarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \left[ \epsilon(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}) \right]$$

$\tilde{T}_A$  è un'applicazione lineare. Vediamo:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m), x' = (x'_1, \dots, x'_m) \in K^m, \quad \tilde{T}_A(x+x') = \tilde{T}_A(x) + \tilde{T}_A(x')$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m, \forall \lambda \in K, \quad \tilde{T}_A(\lambda x) = \lambda \tilde{T}_A(x)$$

$$- \tilde{T}_A((x_1, \dots, x_m) + (x'_1, \dots, x'_m)) = A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \tilde{T}_A(x) + \tilde{T}_A(x')$$

$$- \tilde{T}_A(\lambda(x_1, \dots, x_m)) = A\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \tilde{T}_A(x)$$

- $T: V \rightarrow W$  app. lineare,  $K$ ,  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$

Possiamo "assumere" a  $T$  una matrice di tipo  $m \times n$ . Vediamo:

Dobbiamo trovare: una base ordinata  $B = (v_1, \dots, v_n)$  di  $V$

$$\quad \quad \quad B' = (v'_1, \dots, v'_m) \text{ di } W$$

Consideriamo:

$$T(v_i) \equiv_{B'} (a_{i1}^1, a_{i1}^2, \dots, a_{im}^i)$$

$$T(v_m) \equiv_{B'} (a_m^1, a_m^2, \dots, a_m^m)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \cdots & a_{1m}^1 \\ a_{11}^2 & \cdots & a_{1m}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^1 & \cdots & a_{mm}^m \end{pmatrix} =: M_{BB'}(T)$$

rispetto alle  
MATRICE ASSOCIAТА a  $T$  nelle basi  $B$  e  $B'$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(R)$$

$$\tilde{T}_A : R^2 \longrightarrow R^3$$

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_A((x_1, x_2)) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_2)$$

Osserviamo che  $A \in M_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}(\tilde{T}_A)$  con  $\mathbb{B} < \mathbb{B}'$  basi canoniche

Infatti:

$$\tilde{T}_A((1,0)) = (3,2,1) \equiv_{\mathbb{B}'} (3,2,1) \rightarrow \text{colonne di } A$$

$$\tilde{T}_A((0,1)) = (1,-2,-3) \equiv_{\mathbb{B}'} (1,-2,-3) \rightarrow \dim \tilde{T}_A = \dim (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$$

$$\Rightarrow \dim \tilde{T}_A = \text{range}(A)$$

questo è vero per ogni  $\tilde{T}_A$

Quindi, per il Teorema dell'equazione dimensionale:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker \tilde{T}_A + \dim \text{Im } \tilde{T}_A \Rightarrow m = \dim \ker \tilde{T}_A + \text{range}(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim \ker \tilde{T}_A = m - \text{range}(A) \quad \text{Anche questo è vero in generale:}$$

Allora:

- $A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}) \quad \tilde{T}_A: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$

$$X \rightsquigarrow AX$$

$$\dim \text{Im } \tilde{T}_A = \text{range}(A)$$

$$\dim \ker \tilde{T}_A = m - \text{range}(A)$$

$$\ker \tilde{T}_A = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0\} = S_0 \quad \text{insieme delle soluzioni del sistema lineare}$$

$$\sum_0: A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

Allora

$$\boxed{\dim S_0 = m - \text{range}(A)}$$

Esempio:  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$(a, b) \rightsquigarrow a + b + (a-b)x + (2a+b)x^2$$

$$\mathbb{B} = ((1,1), (1,-1)) \quad \text{base ordinata di } \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{B}' = (1, x, x^2) \quad \text{base canonica di } \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Scriviamo  $M_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}(T)$ :

$$T((1,1)) = 2 + 3x^2 \equiv_{\mathbb{B}'} (2, 0, 3)$$

$$T((1,-1)) = 2x + x^2 \equiv_{\mathbb{B}'} (0, 2, 1)$$

$$M_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta  $T$  in  $\mathbb{B} < \mathbb{B}'$

Esercizio  $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightsquigarrow (2a_0 + 3a_1, a_1 + a_2, a_1 - a_2)$$

$$\mathbb{B} = (1, x, x^2)$$

$$\mathbb{B}' = ((1,1,0), (0,1,1), (0,0,1))$$

Ho calcolato:  $\phi_{\mathbb{B}'}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightsquigarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2 + x_1)$$

$$T(1) = (2, 0, 0) \equiv_{\beta} (2, -2, 2)$$

$$T(x) = (3, 1, 1) \equiv_{\beta} (3, -2, 3)$$

$$T(x^2) = (0, 1, -2) \equiv_{\beta} (0, 1, -3)$$

$$A = M_{\beta \beta^{-1}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \text{Im } T = \text{range}(A)$$

$$\dim \text{Ker } T = m - \text{range}(A) = 3 - \text{range}(A)$$

Teorema  $T: V \rightarrow W$  opp. lin.  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$

(caratterizzazione)  
di  $M_{\beta \beta^{-1}}(T)$   $\beta = (x_1, \dots, x_m)$  basi ordinate di  $V$   
 $\beta' = (x'_1, \dots, x'_m)$  " " " "  $W$

La matrice associata a  $T$  in  $\beta$  e  $\beta'$  è l'unica matrice  $\in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  tale che:

$$\forall u \in V, \text{ prendiamo } u \equiv_{\beta} (x_1, \dots, x_m) \text{ e } T(u) \equiv_{\beta'} (y_1, \dots, y_n)$$

RAPPRESENTAZIONE  
di  $T$  in  $\beta$  e  $\beta'$

$$\left[ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] \quad (*)$$

DIM Sappiamo:

$$A = (a_{ij}^t)$$

$$\underline{x}_1 = \phi_{\beta'}(T(u_1))$$

$$\underline{x}_m = \phi_{\beta'}(T(u_m))$$

$$\begin{aligned} T(u) &= T(x_1 u_1 + \dots + x_m u_m) = x_1 T(u_1) + \dots + x_m T(u_m) = \\ &= x_1(a_{11}^1 u_1^1 + \dots + a_{1n}^1 u_1^n) + \dots + x_m(a_{m1}^1 u_1^1 + \dots + a_{mn}^1 u_1^n) = \\ &= (x_1 a_{11}^1 + \dots + x_m a_{m1}^1) u_1^1 + \dots + (x_1 a_{1n}^1 + \dots + x_m a_{mn}^1) u_1^n \\ \Rightarrow \quad y_1 &= a_{11}^1 x_1 + \dots + a_{1n}^1 x_m \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}^1 x_1 + \dots + a_{mn}^1 x_m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

UNICITÀ: Sia  $B = (b_{ij}^t) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ :  $B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \forall u \in V$

$$\text{Th: } B = A$$

$$u = u_1 \equiv_{\beta} (1, 0, \dots, 0), \quad T(u) \equiv_{\beta'} \underline{x}_1 = (a_{11}^1, a_{21}^1, \dots, a_{m1}^1)$$

$$\text{per ipotesi: } b_1 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{x}_1$$

$$u = u_m \equiv_{\beta} (0, \dots, 0, 1), \quad T(u) \equiv_{\beta'} \underline{x}_m = (a_{m1}^m, a_{m2}^m, \dots, a_{mm}^m)$$

$$\text{per ipotesi: } b_m = B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{x}_m$$

Quindi, tutte le colonne di  $B$  sono uguali a quelle di  $A$  di equal indice,  
per cui  $B = A$ .  $\square$

per cui  $B = A$ .  $\square$

Oss:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_{B'} \\ K^m & \xrightarrow{\tilde{T}_A} & K^{m'} \end{array} \quad A = M_{B B'}(T)$$

Abbiamo:  $\left[ \tilde{T}_A = \phi_{B'}^{-1} \circ T \circ \phi_B \right]$

Controlliamo!  $(x_1, \dots, x_m) \in K^m$ , ma  $x_i \in_{B'} (x_1, \dots, x_m)$   
cioè:  $\phi_{B'}(x_i) = (x_1, \dots, x_m)$

$$\begin{aligned} & \phi_{B'}^{-1} \circ T \circ \phi_B^{-1} ((x_1, \dots, x_m)) = \\ & = \phi_{B'}^{-1} (T (\phi_B^{-1} ((x_1, \dots, x_m)))) = \phi_{B'}^{-1} (T(m)) = (y_1, \dots, y_{m'}) = \\ & = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \tilde{T}_A (x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Oss:

$$\begin{array}{ccc} T: K^m & \longrightarrow & K^{m'} \\ id_{K^m} = \phi_B & \downarrow & \downarrow \phi_{B'} = id_{K^{m'}} \\ K^m & \xrightarrow{\tilde{T}_A} & K^{m'} \end{array} \quad \text{B}, B' \text{ ben canoniche} \Rightarrow T = \tilde{T}_A$$

Ogni applicazione lineare  $T: K^m \rightarrow K^{m'}$  è del tipo  $\tilde{T}_A$   
dove  $A$  è la matrice associata a  $T$  nelle basi canoniche.

Def. Sia  $(V, +, \cdot)$  sp. vett. su  $K$ ,  $\dim V = n$

$B, \bar{B}$  basi ordinate di  $V$ .

$id_V: V \rightarrow V$  la matrice associata a  $id_V$   
nelle basi  $B$  e  $\bar{B}$  si dice  
matrice di passaggio da  $B$  a  $\bar{B}$   
opp. di cambiamento di base da  $B$  a  $\bar{B}$

Esempio  $id_V: M_2(R) \rightarrow M_2(R)$

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{B} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_{\bar{B}}: M_2(R) & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (b, a, c-a, d-b-c+a) \end{aligned}$$

$$id_V \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (0, 1, -1, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (1, 0, 0, -1)$$

$$\text{range } A = \mathcal{L} = \dim \text{Im}(\text{id}_V)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (0, 0, 0, 1)$$

P isomorfismo

Per il Teorema:  $\mu \in V$      $\mu \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$   
 $\mu \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$

$$M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(\text{id}_V) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix}$$

Oss: le matrici di cambiamento di basi hanno range massimo, perciò sono invertibili.

Proprietà (senza dim.)

- $T: \begin{matrix} V \\ \mathcal{B} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} W \\ \mathcal{B}' \end{matrix}$  isom.  $\Rightarrow A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$  è invertibile  
 $A^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(T^{-1})$

- $T: \begin{matrix} V \\ \mathcal{B} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} W \\ \mathcal{B} \end{matrix}$ , apl. lin.  
 $T': \begin{matrix} W \\ \mathcal{B}' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ \mathcal{B}'' \end{matrix}$ , apl. lin.  
 $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$   
 $B = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}(T')$

$$T' \circ T: \begin{matrix} V \\ \mathcal{B} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} W \\ \mathcal{B}' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ \mathcal{B}'' \end{matrix} \quad BA = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}(T' \circ T)$$

Consideriamo  $T: \begin{matrix} V \\ \mathcal{B} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \mathcal{B}' \end{matrix}$  endomorfismo

$$\underline{\mathcal{B} = \mathcal{B}'}$$

$$A = M_{\mathcal{B}}(T)$$

$$\underline{\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}'}}$$

$$\overline{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T)$$

Vediamo che relazione c'è tra  $A$  e  $\overline{A}$

$$\text{Sia } P = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(\text{id}_V)$$

$$\mu \in V, \quad \mu \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$$

$$\mu \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$$

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix} \quad (\star\star) \quad \left[ P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix} \right]$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T(\mu) \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_m)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T(u) \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_m)$$

$$T(u) \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$$

$$\bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

In (2) sostituiamo  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  e  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$  secondo la (\*\*)

$$\bar{A} P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \exists P^{-1}$$

$$\underbrace{P^{-1} \bar{A} P}_{\text{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$\text{R}$  si comporta con  $A$ , ch per il Teorema c'è l'unica sol  
avendo queste proprietà!

$$\Rightarrow A = P^{-1} \bar{A} P \quad \text{R dice ch } A \text{ e } \bar{A} \text{ sono simili}$$

Def.  $A, \bar{A} \in M_n(\mathbb{K})$

$A$  è simile ad  $\bar{A} \Leftrightarrow \exists E \in M_n(\mathbb{K})$  invertibile tali ch  
 $A = E^{-1} \bar{A} E$

Questa è una relazione di equivalenza: relazione di similitudine.

Quindi se  $A$  è simile ad  $\bar{A}$  anche  $\bar{A}$  è simile ad  $A$  e  
possiamo dire che  $A$  e  $\bar{A}$  sono simili

Quindi abbiamo provato il seguente risultato:

Proposizione:  $T: V \rightarrow V$  endomorfismo  
 $\begin{array}{ll} \mathcal{B} & A = M_{\mathcal{B}}(T) \\ \overline{\mathcal{B}} & \bar{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T) \end{array} \Rightarrow A \text{ e } \bar{A} \text{ sono simili.}$

Si può dimostrare che due metri simili sono metriche associate  
a uno stesso endomorfismo in opportune basi: (Teorema 5.38)  
(senza dim.)