## PROPOSIZIONE

Sia $X$ una genitrice per la quale $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$: essa ammette media $\mu$ e varianza $\sigma^2$ finita. Se $\underline{X}$ è un campione casuale semplice da $X$ con taglia $n$, allora:

$$\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

## DIM

Si ha:

$$\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \mathbb{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$\underline{X}$ è c.c.s.

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}^2(X)$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{n} \mathbb{D}^2(X) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$\square$

## OSSERVAZIONE

Il fatto che una v.a. sia dotata di una varianza "piccola" la rende un buon predittore della sua media. Nel caso limite di una v.a. $X$ dotata di varianza nulla, posto $\mu = \mathbb{E}(X)$, risulta:

$$\mathbb{P}(X = \mu) = 1.$$

Se $X$ è dotata di f.d.p. il risultato

precedente segue dal seguente ragionamento:

$$0 = \mathbb{D}^2(X) = \int_{S_X} \underbrace{(x-\gamma)^2}_{\geq 0} \underbrace{f_X(x)}_{\geq 0} dx \implies$$

$$x - \gamma = 0 \iff x = \gamma$$

per $x \in S_X$ tranne, al più, per $x \in B$ essendo $B$ un insieme di Borel di $\mathbb{R}$ per il quale risulta $\mathbb{P}_X(B) = 0$.

Per le v.a. discrete si procede in maniera analoga.

$\square$

<u>OSSERVAZIONE</u>

la varianza della media campionaria
può essere resa arbitrariamente piccola
a patto di incrementare la taglia $n$
del campione casuale.

$\square$

<u>ESEMPIO</u>

Consideriamo un c.c.s. di taglia 50 da
una genitrice $X$: $E(X^2) < +\infty$. Posto,

$$T_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i, \quad T_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=41}^{50} X_i, \quad T_3 = \frac{X_1 + X_{50}}{n},$$

si ha che:

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{50} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot E(X) = \mathbb{E}(X);$$

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=41}^{50} \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot E(X) = \mathbb{E}(X);$$

$$\mathbb{E}(T_3) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_{50})\right] = \frac{2}{2}\,\mathbb{E}(X) = E(X).$$

Quindi, sia $T_1$ che $T_2$ che $T_3$ sono stimatori corretti per la media di $X$. D'altra parte, risulta

$$\mathbb{D}^2(T_1) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{50} \mathbb{D}^2(X_i) = \frac{10}{100} \cdot \mathbb{D}^2(X) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{10},$$

$$\mathbb{D}^2(T_2) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=41}^{50} \mathbb{D}^2(X_i) = \frac{10}{100} \cdot \mathbb{D}^2(X) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{10},$$

$$\mathbb{D}^2(T_3) = \frac{1}{\;}\left[\mathbb{D}^2(X_1) + \mathbb{D}^2(X_1)\right] = \frac{2}{\;}\,\mathbb{D}^2(X) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{\;},$$

mentre

$$\mathbb{D}^2(\bar{X}) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{50}.$$

In definitiva

$$\mathbb{D}^2(T_3) > \mathbb{D}^2(T_2) = \mathbb{D}^2(T_1) > \mathbb{D}^2(\bar{X}).$$

Gli stimatori $T_1$, $T_2$ e $T_3$ non sono "coerenti" con il fatto che $n = 50$: intuitivamente, ci si aspetta che la precisione della stima debba aumentare al crescere della taglia.

$\square$

## DEFINIZIONE

Uno stimatore $T_n$ ottenuto da un c.c.s. di taglia $n$ estratto da una genitrice $X$ si dice consistente (coerente) se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left( |T_n - \psi(\theta)| \leq \varepsilon \right) = 1.$$

In maniera alternativa, si può scrivere

$$T_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \psi(\theta)$$

che si legge "$T_n$ converge in probabilità a $\psi(\theta)$".

$\square$

## PROPOSIZIONE

Se la genitrice del campione è dotata della media del secondo ordine finita e $T_n$ è uno stimatore per $\psi(\theta)$ allora esso è consistente se

1) $T_n$ è asintoticamente corretto;

2) la varianza di $T_n$ è infinitesima.

## ESEMPIO (di stimatori consistenti)

Se $\gamma'_k = \mathbb{E}(X^k)$ esiste finita, allora

$$\bar{X}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum^{n} X^{k} \xrightarrow{P} \gamma'_k$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \ldots \mathbb{R}$$

$\square$

<u>ESEMPIO</u> (di stimatori corretti:)

Sappiamo che

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu = \mathbb{E}(X).$$

Se esiste finita $\sigma^2 = \mathbb{D}^2(X)$ e se $\mu = \mathbb{E}(X)$ è nota, allora

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

è uno stimatore corretto per $\sigma^2$. Infatti

$\sigma^2 > 0$, $$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{1}{n} \sum \mathbb{D}^2(X)$$

$$= \frac{n}{n} \mathbb{D}^2(X) = \sigma^2.$$

Se invece non si conosce $\mu$, si può considerare:

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$ (varianza campionaria corretta)

Si può dimostrare che

$$\sigma^2 > 0, \qquad \mathbb{E}(S_c^2) = \sigma^2.$$

Ne scaturisce che

$$S_d^2 = \frac{1}{\ldots} \sum^{n} (X_i - \bar{X})^2$$ (varianza campionaria ...

non è corretta. Comunque, risulta

$$S_e^2 = \frac{n}{n-1} S_d^2 .$$

$\square$

# CONFRONTO DI DUE STIMATORI IN BASE AL RISCHIO QUADRATICO MEDIO

## PROPOSIZIONE

Sia X una v.a. dotata del momento del momento del secondo ordine finito, e la sua media. Allora, si ha:

$$\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] = \mathbb{D}^2(X) + \left[c - \mathbb{E}(X)\right]^2.$$

<u>DIM</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] &= \mathbb{E}\left\{\left[(X-\mu)+(\mu-c)\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[(X-\mu)^2+(\mu-c)^2+2(\mu-c)(X-\mu)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]+(\mu-c)^2+2(\mu-c)\,\mathbb{E}(X-\mu) \\
&= \mathbb{D}^2(X)+(\mu-c)^2+2(\mu-c)\,(\mu-\mu) \\
&= \mathbb{D}^2(X)+(\mu-c)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

## OSSERVAZIONE

Dalla Proposizione precedente, scaturisce immediatamente che

$$\underset{c \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \; \mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] = \mu$$

e che

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2 .$$

$\square$

## DEFINIZIONE

Si definisce rischio quadratico medio di uno stimatore $T$ estratto da una genitrice dotata del momento del secondo ordine finito, la funzione secondo ordine finito, la funzione

$$\theta \in \Theta, \qquad R_T(\theta) := \mathbb{E}\left\{\left[T - \psi(\theta)\right]^2\right\}.$$

$\square$

OSSERVAZIONE

Per l'osservazione precedente, il rischio quadratico medio $R_T(\theta)$ è minimo quando lo stimatore $T$ è corretto nel qual caso, risulta:

$$\theta \in \Theta, \qquad R_T(\theta) = \mathbb{D}^2(T).$$

$\square$

Siano $S$ e $T$ due stimatori per $\psi(\theta)$.

1) $S$ è "preferibile" a $T$, e si può scrivere,

$$S \precsim T$$

se e solo se

$$\theta \in \Theta, \qquad R_S(\theta) \leq R_T(\theta).$$

2) $S$ è "strettamente preferibile" a $T$ e si scrive

$$S \prec T$$

se $S \precsim T$ e se esiste $\theta_0 \in \Theta$ per il quale:

$$R_S(\theta_0) < R_T(\theta_0).$$

3) Uno stimatore si dice "ammissibile"

se non esiste un altro stimatore a lui strettamente preferibile.

$\square$