

## Lezione 22

venerdì 28 maggio 2021 11:15

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ .

$T: V \rightarrow V$  endomorfismo

Se  $\dim V = m$ , possiamo fissare una base di  $V$  finita e ordinata

$B = (e_1, \dots, e_m)$  in cui rappresentiamo  $T$  mediante una matrice:

$$A = M_{BB}(T)$$

$$\text{Se } \bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) \neq B, \quad \bar{A} = M_{\bar{B}\bar{B}}(T)$$

$$\exists P \in M_m(K) \text{ invertibile: } A = P^{-1} \bar{A} P$$

$$PAP^{-1} = \bar{A} \quad Q = P^{-1}$$

$$Q^{-1} \bar{A} Q$$

Def. Uno scalare  $\lambda \in K$  è detto autovалore di  $T$  se l'insieme:

$$U_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \text{ non è nullo (e si dice autospazio)}$$

$$\text{ossia se: } \exists v \in V \setminus \{0\} : T(v) = \lambda v$$

$$\text{Oss. } \forall \lambda \in K, \bullet U_\lambda \ni 0 \quad T(0) = 0 = \lambda 0$$

•  $U_\lambda$  è un sottosp.vett.

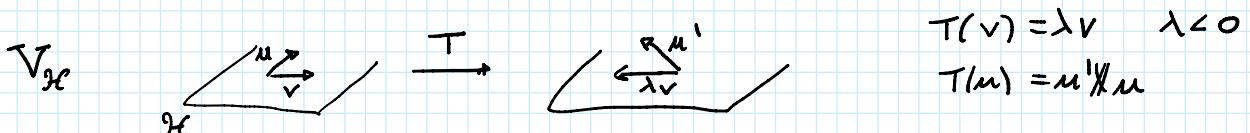
$$\forall v, v' \in U_\lambda, \quad T(v) = \lambda v \text{ e } T(v') = \lambda v'$$

$$T(v+v') = T(v)+T(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v+v') \Rightarrow v+v' \in U_\lambda$$

$$\forall v \in U_\lambda, \forall \alpha \in K, \quad T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = (\alpha \lambda) v = (\lambda \alpha) v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha v \in U_\lambda.$$

Se  $\lambda$  è autovалore,  $U_\lambda$  è detto autospazio di  $T$  relativo a  $\lambda$ .



Esempio:  $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$   $B = (1, x, x^2)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightsquigarrow & 1+x \\ x & \rightsquigarrow & 1-x \\ x^2 & \rightsquigarrow & -3x^2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$||$$

$$M_{BB}(T)$$

Esempio:  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $(a, b) \rightsquigarrow (a-b, a+b)$   $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$   $B = ((1,0), (0,1))$

$$\text{Esempio: } T: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, b) \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (\alpha-b, \alpha+b) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$$

Essere  $(\alpha, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ :  $T((\alpha, b)) = \lambda(\alpha, b)$ , per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ ?

$$(\alpha-b, \alpha+b) = \lambda(\alpha, b) \quad \begin{cases} \alpha-b = \lambda\alpha \\ \alpha+b = \lambda b \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\lambda)\alpha = b \\ (1+\lambda)b = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha = b \\ (1+\lambda)(1-\lambda)\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$\underbrace{((1-\lambda)^2 + 1)}_{(\alpha, b) \neq 0} \alpha = 0 \Rightarrow \underbrace{(1-\lambda)^2 + 1 = 0}_{\text{determinante}} \Leftrightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Come si calcolano gli autovettori e gli autovalori di un endomorfismo?

$$T: V \rightarrow V \quad \dim V = n, \quad K$$

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m) \quad A = M_{\mathcal{B}}(T)$$

$$\lambda \in K \text{ è autovalore di } T \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : T(v) = \lambda v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : \phi_{\mathcal{B}}(T(v)) = \phi_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda \phi_{\mathcal{B}}(v)$$

$$\text{Se } (x_1, \dots, x_m) = \phi_{\mathcal{B}}(v) :$$

$$\Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_m) \in K^m \setminus \{0\} : A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \lambda I_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - \lambda I_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - \lambda I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_m) = 0. \quad \text{equazione caratteristica}$$

Proposizione

- $\det(A - \lambda I_m)$  è un polinomio in  $\lambda$  di grado  $m$  detto polinomio caratteristico
- Le soluzioni di  $(A - \lambda I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$  sono le componenti degli autovettori  
 $\xi_0 = \phi_{\mathcal{B}}(U_{\lambda})$

$$\text{Esempio: } T: \mathbb{R}[x] \leq 2 \rightarrow \mathbb{R}[x] \leq 2 \quad \mathcal{B} = (1, x, x^2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio:  $T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$        $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$   
 $A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$        $|A| = 0$

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 + 2x^2 \\ T(x) &= x - x^2 \\ T(x^2) &= -1 - x - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) [\lambda^2 - 1 - 1] + 2(1-\lambda) = (1-\lambda) [\lambda^2 - 2 + 2] = \\ &= \underline{(1-\lambda)\lambda^2} = 0 \iff \lambda = 1 \text{ opp } \lambda = 0 \end{aligned}$$

$$U_0 = \ker T : (A - 0I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{0^3}} \rightarrow \underline{\underline{0^3 - 2 \cdot 0^2}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{0^3 \rightarrow 0^3 - 0^2}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}}(U_0) = \{(x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(1, 1, 1) \quad \text{autospazio della matrice}$$

$$U_0 = \mathcal{L}(1 + x + x^2) \quad \Phi_{\mathcal{B}}(1 + x + x^2) = (1, 1, 1)$$

$$U_1 : (A - 1I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A - 1I_3) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

$$U_1 = \mathcal{L}(1 + 2x)$$

$$T: V \longrightarrow V \quad \mathcal{B} \quad \overline{\mathcal{B}}$$

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) \quad \bar{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T) \quad A = P^{-1} \bar{A} P$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_m| &= |P^{-1} \bar{A} P - \lambda I_m| = |P^{-1} \bar{A} P - \underbrace{\lambda P^{-1} P}_{=1}| = \\ &= |P^{-1} (\bar{A} P - \lambda I P)| = |P^{-1} (\bar{A} - \lambda I) P| = |P^{-1}| |\bar{A} - \lambda I| |P| = |\bar{A} - \lambda I| \end{aligned}$$

Binet

Quindi: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$p(x) \in K[x]$$

$b \in K$  è una soluzione o radice di  $p(x)$  se e solo se  $p(b) = 0$

Teorema di Ruffini:  $p(x) \in K[x]$ ,  $b \in K$

$$b \text{ è radice di } p(x) \iff \exists q(x) \in K[x] : p(x) = q(x)(x-b)$$

("x-b divide  $p(x)$ ")

Def.  $p(x) \in K[x]$ ,  $b$  radice di  $p(x)$

$$m_a(b) = \max \{ k \in \mathbb{N} : (x-b)^k \text{ divide } p(x) \}$$

moltiplicità algebrica di  $b$   
(come radice di  $p(x)$ )

Esempio:  $p(x) = (x-3)(x-4)^5 (x-3) = (x-3)^2 (x-4)^5$

Def.  $T: V \rightarrow V$   $\dim V = m$  in  $K$

$\lambda$  autovалore  $\dim U_\lambda = m_g(\lambda)$  moltiplicità geometrica di  $\lambda$

Oss  $1 \leq m_g(\lambda)$

Proposizione.  $\lambda$  autovалore di  $T: V \rightarrow V$  (senza dim.)

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$$

(come soluzione  
del pol. caratteristico)

---

Proposizione  $T: V \rightarrow V$   $\dim V = m$  in  $K$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$  autovалори di  $T$ , o due a due distinti

$v_1, \dots, v_t$  autovettori (non nulli)

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1$$

Allora:  $\{v_1, \dots, v_t\}$  lin. indip.

$$\vdots$$

$$T(v_t) = \lambda_t v_t$$

DIM proediamo per induzione su  $t$

$$t=1 \quad v_1 \neq 0 \quad \{v_1\} \text{ è lin. indip.}$$

$$t > 1 \quad \text{Th: } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{t-1} = \alpha_t = 0$$

•  $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = T(0) = 0$

"

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_{t-1} T(v_{t-1}) + \alpha_t T(v_t)$$

"

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t$$

Quindi:  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} \lambda_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t \lambda_t v_t = 0 \quad (*)$

•  $\lambda_t (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t) = \lambda_t 0 = 0$

$$\lambda_t \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_t \alpha_{t-1} v_{t-1} + \lambda_t \alpha_t v_t = 0 \quad (**)$$

(\*) - (\*\*):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \cancel{\lambda_t})v_1 + \dots + \alpha_{t-1}(\lambda_{t-1} - \cancel{\lambda_t})v_{t-1} + \underline{0} = \underline{0}$$

Per hp di induzione  $\{v_1, \dots, v_{t-1}\}$  e lin. indip., allora:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \cancel{\lambda_t}) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1}(\lambda_{t-1} - \cancel{\lambda_t}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} = 0 \end{cases}$$

Quindi:  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{t-1} v_{t-1} + \alpha_t v_t = \underline{0}$

$$\text{diventa } \alpha_t v_t = \underline{0} \Rightarrow \alpha_t = 0 \quad v_t \neq \underline{0}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$  Osservazione:  $T: V \rightarrow V \quad \dim V = n \quad K$

$\lambda_1, \lambda_2$  autovalori. Allora  
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \underline{0}$ . Infatti:

$$\begin{aligned} u \in U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} &\Rightarrow u \in U_{\lambda_1} \text{ e } u \in U_{\lambda_2} \Rightarrow T(u) = \lambda_1 u = \lambda_2 u \\ &\Rightarrow \lambda_1 u - \lambda_2 u = \underline{0} \Rightarrow (\cancel{\lambda_1 - \lambda_2}) u = \underline{0} \Rightarrow u = \underline{0} \end{aligned}$$

Quindi:  $U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2}$ .

Teorema  $T: V \rightarrow V \quad \dim V = n \quad K$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$  autovalori e due a due distinti.

Allora:  $U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_t} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_t}$

DIM Th:  $\forall i \in \{1, \dots, t\}, \quad U_{\lambda_i} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{i-1}} + U_{\lambda_{i+1}} + \dots + U_{\lambda_t}) = \{\underline{0}\}$

per esempio  $i=t$

$u \in U_{\lambda_t} \cap (U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_{t-1}}) \Rightarrow \exists u_1 \in U_{\lambda_1}, \dots, u_{t-1} \in U_{\lambda_{t-1}}$ :

$$u = u_1 + \dots + u_{t-1}$$

$$\underbrace{u - u_1 - \dots - u_{t-1}}_{\lambda_t} = \underline{0}$$

Per la prop. precedente se  $u, u_1, \dots, u_{t-1}$  non sono nulli sono lin. indip.

Questo è ovvio, perché  $u = u_1 = \dots = u_{t-1} = \underline{0}$ .

In particolare,  $u = \underline{0}$ .