

\vec{E} sp. vett.-euclideo, $E \neq \emptyset$
(opp. sp. vett.)

$$\pi: E \times E \longrightarrow \vec{E} \\ (P, Q) \rightsquigarrow \overrightarrow{PQ} \quad Q = P + \overrightarrow{PQ}$$

(\vec{E}, E, π) si dice spazio euclideo (opp. affine) se:

- (1) $\forall P \in E, \forall \alpha \in \vec{E}, \exists! X \in E: \overrightarrow{PX} = \alpha \quad (X = P + \alpha)$ [caso f.g.]
 (2) $\forall P, Q, R \in E, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ $\dim E := \dim \vec{E} = n$

Una coppia $R = (O, \mathcal{B})$ costituisce da un punto $O \in E$ e da una base orthonormale \mathcal{B} di \vec{E} (\mathcal{B} qualunque è \vec{E} non è dotato di struttura euclidea) si dice riferimento cartesiano.

Le coordinate di un punto $P \in E$ in R sono le componenti di \overrightarrow{OP} in \mathcal{B} :

$$P \equiv_R (x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})$$

Invece di scrivere \overrightarrow{OP} a volte si scrive $P-O$.

Proposizione $(\vec{E}, E, \pi) \quad \dim E = n, \quad R = (O, \mathcal{B}), \quad P, Q \in E$

$P \equiv_R (x_1, \dots, x_n), \quad Q \equiv_R (y_1, \dots, y_n)$. Allora:

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n). \quad \begin{matrix} -n \\ " \\ (-1)^n \end{matrix}$$

$$\text{DIM} \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = \phi_{\mathcal{B}}(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = -\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) + \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ}). \quad \square$$

Esempio $\vec{E} = \mathbb{R}^2 \quad E = \mathbb{R}^2 \quad \pi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \rightsquigarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

$R = (O = (3, 2), \mathcal{B} = ((1, 1), (0, 1)))$ in quanto caso ho preso \mathcal{B} non orthonormale

Quale sono le coordinate di $P = (3, -1)$ in R ?

$$\overrightarrow{OP} = \pi((3, 2), (3, -1)) = (3, -1) - (1, 2) = (2, -3)$$

$$\phi_{\mathcal{B}}((2, -3)) = (2, -5) \quad P \equiv_R (2, -5)$$

$$(2, -3) = 2(1, 1) + (-5)(0, 1)$$

CAMBIAIMENTO DI RIFERIMENTO:

$(\vec{E}, E, \pi) \quad \dim E = n \quad R = (O, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)) \quad R' = (O', \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n))$

$P \in E, \quad P \equiv_R (x_1, \dots, x_n), \quad P \equiv_{R'} (x'_1, \dots, x'_n)$

E la relazione che ha (x_1, \dots, x_n) e (x'_1, \dots, x'_n) ?

$$(x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) \quad (x'_1, \dots, x'_n) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{O'P})$$

Sia $E = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathbb{R}^{\vec{E}})$

$$\overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{e}_n \cdot \overrightarrow{e}_1 \quad h \cdot (e_1) = L \cdot \overrightarrow{e}_1 \quad h \cdot (\overrightarrow{e}_1)$$

Sia $E = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\text{id}_{\vec{\varepsilon}})$

$$\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op} \quad \phi_{\mathcal{B}'}(o'p) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{o'o}) + \underline{\phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{op})}$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_m) = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{op}) = \underline{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{o'o}) + \underline{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

rappresentazione d'
un cambiamento
di riferimento.

coordinate di O in \mathbb{R}^1

Esempio Sia $(\vec{\varepsilon}, \varepsilon, \pi)$ con $\dim \varepsilon = 2$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

$$\mathcal{R} = (0, \mathcal{B} = (e_1, e_2)) \quad \mathcal{R}' = (0', \mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)) \text{ con } 0' =_{\mathbb{R}} (0, 1)$$

$$E^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\text{id}_{\vec{\varepsilon}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |E^{-1}| = -2$$

$$E = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P =_{\mathbb{R}} (x_1, x_2) \quad P =_{\mathbb{R}^1} (x_1) x^1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{o'o}) + E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{oo'}) = (0, 1) - (0, 0) = (0, 1) \Rightarrow \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{o'o}) = (0, -1)$$

$$O =_{\mathbb{R}} \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{oo}) = (0, 0)$$

$$O =_{\mathbb{R}^1} \phi_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{o'o}) = E \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

SOTTOSPAZI EUCLIDI (opp. AFFINI)

$(\vec{\varepsilon}, \varepsilon, \pi)$ $\mathcal{H} \subseteq \varepsilon$

Si dice sottospazio euclideo (opp. affine) di E se:

- $\pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{ \overrightarrow{pq} \mid p, q \in \mathcal{H} \} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{H}$ è sottosp.vett. di $\vec{\varepsilon}$
- $\pi: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
- $\forall A \in \mathcal{H}, \forall a \in \mathcal{H}$, è l'unico punto $x \in \varepsilon$ tale che $\overrightarrow{Ax} = a$ che appartiene a \mathcal{H} .

Oss. Se $\mathcal{H} \subseteq \varepsilon$ è un sottosp. euclideo (opp. affine) di E allora

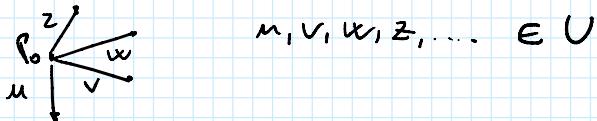
$(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

$(\vec{E}, \mathcal{E}, \pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

\vec{E} si dice giacitura di \mathcal{E} , $\dim \mathcal{E} = \dim \vec{E}$.

$\overrightarrow{(\vec{E}, E, \pi)}$ $P_0 \in E$, U sottosp. vett. d. \vec{E}

$(P_0, U) = \{Q \in E \mid \overrightarrow{P_0 Q} \in U\}$ varieta' lineare passante per P_0 e parallela a U



Proposizione: $\mathcal{H} = (P_0, U)$ è un sottosp. euclideo (opp. affine) con $U = \vec{E}$ $\left. \begin{array}{l} \text{DIM} \\ \text{FACOLTATIVA} \end{array} \right)$

Proposizione Se $(\vec{E}, \mathcal{E}, \pi_1)$ è un sottosp. euclideo di E , allora

$$\forall P_0 \in \mathcal{E}, \quad (P_0, \vec{E}) = \mathcal{E}.$$



$$\vec{E} = \mathcal{L}(v)$$



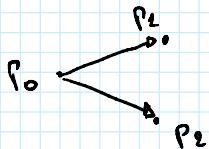
$$\vec{E} = \mathcal{L}(u, v)$$

Osservazione: l'intersezione di due sottosp. euclidi è ancora un sottosp. euclideo

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E} & (\vec{E}, \mathcal{E}, \pi_1) \\ \mathcal{E}' & (\vec{E}', \mathcal{E}', \pi_1) \end{array} \quad \mathcal{E} \cap \mathcal{E}' \quad \overrightarrow{\mathcal{E} \cap \mathcal{E}'} = \overrightarrow{\mathcal{E}} \cap \overrightarrow{\mathcal{E}'}$$

Def. $P_0, P_1, \dots, P_h \in E$ si dicono affinamente indipendenti se

$\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_h}$ sono lin. indip. (riprova dimostrare che l'ordine dei punti non ha importanza)



Proposizione. Sia \mathcal{E} un sottosp. euclideo con $\dim \mathcal{E} = h$.

h+1 è il minimo numero di punti affinamente indipendenti che tacciono in \mathcal{E} .

DIM $P_0 \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = (P_0, \vec{E}) = \{Q : \overrightarrow{P_0 Q} \in \vec{E}\}$

Sia $B_{\mathcal{E}} = \{u_1, \dots, u_h\}$ basi d. \vec{E}

$P_0, P_0 + u_1, \dots, P_0 + u_h$ sono affinamente indip.

Proposizione. Dati $P_0, \dots, P_h \in E$ affinamente indip., esiste un unico sottosp. affin \mathcal{E} di $\dim \mathcal{E} = h$ che li contiene.

DIM: $S = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}\}$ è un insieme.

Sia $\overrightarrow{g\epsilon} = \mathcal{L}(S)$, allora $g\epsilon = (P_0, \overrightarrow{g\epsilon}) = (P_1, \overrightarrow{g\epsilon}) = \dots = (P_h, \overrightarrow{g\epsilon})$.

$(\overrightarrow{E}, \epsilon, \pi)$ $\dim E = m$

$R = (0, B = (e_1, \dots, e_m))$ n.f.
contenente

$(\overrightarrow{g\epsilon}, \epsilon, \pi)$ $g\epsilon \subseteq \epsilon$, $\dim g\epsilon = h$

Vogliamo trovare una rappresentazione di $g\epsilon$ in R , ovvero una relazione numerica che mi soddisfatta dalle coordinate in R di tutti i soluzioni punti di $g\epsilon$.
 $g\epsilon = (P_0, \overrightarrow{g\epsilon}) = \{Q \in \epsilon \mid \overrightarrow{P_0Q} \in \overrightarrow{g\epsilon}\}$

$\Phi_B(\overrightarrow{g\epsilon}) \subseteq K^m$ Sappiamo che $\Phi_B(\overrightarrow{g\epsilon})$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo
 $\Sigma_0: AX = 0$ in m incognite.

$P_0 \in R (x_1, \dots, x_m)$ $P_0(x_1, \dots, x_m)$

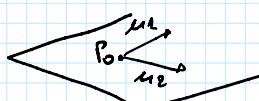
$Q \in R (x_1, \dots, x_m) \quad Q \in \epsilon$

$Q \in g\epsilon \iff \overrightarrow{P_0Q} \in \overrightarrow{g\epsilon} \iff \underset{||}{\phi_B(\overrightarrow{P_0Q})} \in \Phi_B(\overrightarrow{g\epsilon}) = \text{Sol: } AX = 0 \iff (x_1 - x_1, \dots, x_m - x_m)$

$$\begin{aligned} &\iff A \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ \vdots \\ x_m - x_m \end{pmatrix} = 0 \quad \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \iff \\ &\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \underbrace{A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{= b} \quad AX = b \end{aligned}$$

Esempio. $\dim \epsilon = 3 \quad K = R \quad R = (0, B)$

$P_0 \in g\epsilon \quad P_0(3, -2, 1) \quad \overrightarrow{g\epsilon} = \mathcal{L}(u_1(1, 2, 0), u_2(2, -1, 1))$



$Q(x_1, x_2, x_3) \in g\epsilon \iff \overrightarrow{P_0Q} \in \overrightarrow{g\epsilon} \iff (x_1 - 3, x_2 + 2, x_3 - 1) \in \Phi_B(\overrightarrow{g\epsilon}) = \mathcal{L}((1, 2, 0), (2, -1, 1))$

$$\iff \text{rank } \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 2 & -1 & x_2 + 2 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 0 & -3 & x_2 + 2 - 2x_1 + 6 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x}_3 \rightarrow \underline{x}_3 + \frac{1}{3} \underline{x}_2 \equiv 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 3 \\ 0 & -3 & x_2 - 2x_1 + 8 \\ 0 & 0 & x_3 - 1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}: -\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + x_3 + \frac{3}{5} = 0$$

Esempio: $\dim E = 3$, $R = (0, \infty)$

$$\mathcal{H} \Rightarrow P_0(0, \infty) \quad \vec{\mathcal{H}} = \mathbb{L}(u(-3, 5, 2))$$

$$Q \in_R (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H} \iff (x_1, x_2, -1, x_3) \in \mathbb{L}((-3, 5, 2)) \iff$$

$$\iff \text{range} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{L} \quad \text{utilizzando il Teor. degli ordet.}$$

$$\iff \left| \begin{array}{cc} -3 & 5 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right| = 0 \quad e \quad \left| \begin{array}{cc} -3 & 2 \\ x_1 & x_3 \end{array} \right| = 0 \iff$$

$$\iff \mathcal{H}: \begin{cases} -3x_2 + 5 - 5x_1 = 0 \\ -3x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases} \quad \vec{\mathcal{H}}: \begin{cases} -3x_1 - 5x_2 = 0 \\ -3x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Con il ragionamento precedente ottieniamo dimostrato il seguente risultato:

- Dato un r.t.s.p. chiuso (o affine) \mathcal{H} , $\dim \mathcal{H} = h$, su uno spazio chiuso E , $\dim E = m$, e fissato un rif. cartesiano R di E , l'insieme delle coordinate in R dei punti di \mathcal{H} coincide con l'insieme delle soluzioni di un sist. lin. $\Sigma: AX = b$ con $\text{range}(A) = m - h$.

Inoltre: $\vec{\mathcal{H}}: AX = 0$.

Vale anche il viceversa.

$$\Sigma: AX = 0 \quad \text{in } n \text{ variabili}, \quad \text{range } A = m - h. \quad R = (0, \infty)$$

$$\text{Considero } \mathcal{S}_0: AX = 0, \quad \vec{\mathcal{H}} = \phi_{R^3}^{-1}(\mathcal{S}_0)$$

$$P_0(x_1, \dots, x_n): A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b.$$

$$\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}}): AX = b.$$