# FILE SE1=SE01

- LA FISICA CI AIUTA A COMPRENDERE IN MODO RAZIONALE IL MONDO e LA SUA COMPLESSITA'
- IL MONDO PUO' ESSERE STUDIATO A VARIE SCALE

SCALA MACROSCOPICA:

- MOTO DEI PIANETI NEL SISTEMA SOLARE
- MOTO DELLE COMETE
- IL SISTEMA TERRA-LUNA
- LE MAREE
- GLI URAGANI
- MOTO DI UN OGGETTO LANCIATO DA UNA FINESTRA
- CADUTA DAI PIANI ALTI DI UN EDIFICIO
- AUTO IN VIAGGIO
- CORDE VIBRANTI

]SE01-00[

SCALA MICROSCOPICA :
(e SUB-MICRO)

- FISICA MOLECOLARE
- FISICA ATOMICA e SPETTRI ATOMICI
- FISICA NUCLEARE
- FISICA SUBNUCLEARE
- FISICA SUB-SUBNUCLEARE

---

- STUDIANDO LA FISICA, IMPARIAMO A COSTRUIRE MODELLI MATEMATICI DEL MONDO, OVVERO DELL'UNIVERSO FISICO, ALLE VARIE SCALE.
- IL CONFRONTO CON GLI ESPERIMENTI CI GUIDA NELLA SCELTA DELLE IPOTESI e NELLA INTERPRETAZIONE DELLE FORMULE.
- TALE STUDIO NON VA RIGUARDATO COME UNA ACQUISIZIONE DI CREDITI PER LA LAUREA
- ESSO MERITA LE NOSTRE MIGLIORI ENERGIE, E CI FORMA COME SCIENZIATI e COME PERSONE
- LA FISICA STIMOLA ANCHE UNA CREATIVITA' CHE CI RENDE DEI BRAVI INFORMATICI

- NOI STUDIEREMO I PRIMI ELEMENTI DI:
  - MECCANICA (CINEMATICA; LE FORZE; ATTRITO; GRAVITAZIONE)
  - TERMODINAMICA (PRINCIPIO ZERESIMO; PRIMO PRINCIPIO)
  - FLUIDI (ARCHIMEDE; BERNOULLI)
  - FORZE e CAMPI ELETTRICI
  - CIRCUITI

---

# FILE SE1

LUNGHEZZA, MASSA, TEMPO

L: METRO = DECIMILIONESIMA PARTE DELLA DISTANZA DALL'EQUATORE AL POLO NORD

≡ 1 650 763,73 LUNGHEZZE D'ONDA DELLA LUCE ROSSA-ARANCIONE EMESSA DA UNA LAMPADA AL CRIPTON-86

≡ DISTANZA PERCORSA DALLA LUCE NEL VUOTO DURANTE IL TEMPO DI $\frac{1}{299\,792\,458}$ S

---

M: CHILOGRAMMO ≡ MASSA DI UN PARTICOLARE CILINDRO DI LEGA PLATINO-IRIDIO CONSERVATO ALL'UFFICIO INTERNAZIONALE DI PESI E MISURE DI SÈVRES

---

T: SECONDO ≡ 9 192 631 770 VOLTE IL PERIODO DI OSCILLAZIONE DELLA RADIAZIONE DELL'ATOMO DI CESIO

## MASSE DI ALCUNI CORPI:

| | |
|---|---|
| UNIVERSO VISIBILE: | $10^{52}$ Kg |
| VIA LATTEA: | $10^{42}$ Kg |
| SOLE: | $2 \cdot 10^{30}$ kg |
| TERRA: | $6 \cdot 10^{24}$ Kg |
| LUNA: | $7 \cdot 10^{22}$ Kg |
| UOMO: | $7 \cdot 10^{1}$ Kg |
| ATOMO DI IDROGENO: | $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg |
| ELETTRONE: | $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg |

## ALCUNI INTERVALLI DI TEMPO:

| | |
|---|---|
| ETA' DELL'UNIVERSO: | $5 \cdot 10^{17}$ s |
| ETA' DELLA TERRA: | $1.3 \cdot 10^{17}$ s |
| UN ANNO: | $3.2 \cdot 10^{7}$ s |
| LEZIONE IN CLASSE: | $7.2 \cdot 10^{3}$ s |
| PERIODO DI UN'ONDA LUMINOSA NEL VISIBILE: | $2 \cdot 10^{-15}$ s |
| TEMPO CHE LA LUCE IMPIEGA AD ATTRAVERSARE UN PROTONE: | $3.3 \cdot 10^{-24}$ s |

SIMBOLO PER LE DIMENSIONI FISICHE: [ ]

- AD ESEMPIO:

POSIZIONE: $[x] = L$

VELOCITÀ: $[v] = \frac{L}{T} = L/T$

ACCELERAZIONE: $[a] = \frac{L}{T^2} = L/T^2$

- PER LE OPERAZIONI TRA GRANDEZZE AVENTI LA STESSA DIMENSIONE, SONO DEFINITE LE STESSE OPERAZIONI CHE VALGONO TRA NUMERI REALI: SOMMA, SOTTRAZIONE, MULTIPLICAZIONE, DIVISIONE.
- NON HA INVECE SENSO IL COMBINARE O EGUAGLIARE GRANDEZZE CHE NON HANNO LA STESSA DIMENSIONE FISICA.

ESEMPI: $x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow [x] = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$

$v_f = v_i + at$

$[v_f] = \frac{L}{T} = [v_i]$

$[at] = \frac{L}{T^2} \cdot T = \frac{L}{T}$

# CONVERSIONE DI UNITÀ

1 MIGLIO = 1609 metri (ROGER BANNISTER FU IL PRIMO A CORRERE IL MIGLIO IN 4 MINUTI)

1 POLLICE = 2,54 cm

ESEMPIO:

$$V = 38 \ m \ s^{-1}$$

$$38 \ m = \frac{38}{1609} \ mi = 2{,}36 \cdot 10^{-2} \ mi$$

$$1 \ h = 60 \ min = 60 \cdot 60 \ s = 3.6 \cdot 10^{3} \ s$$

$$\Rightarrow V = 85 \ mi/h$$

---

$$[AREA] = L^2$$

$$[VOLUME] = L^3$$

$$[VELOCITÀ] = L/T$$

$$[ACCELERAZIONE] = L/T^2$$

# Il Sole fonte di energia

## 19.1 Ricerca: misura del diametro del Sole

Come si può misurare dalla Terra il diametro del Sole lontano milioni di chilometri? Servendosi di una parte dell'energia solare che raggiunge la Terra, cioè la luce, e della sua proprietà di viaggiare nello spazio in linea retta.

Per questa ricerca è necessario far cadere su un foglio di carta i raggi solari uscenti da un minuscolo forellino; il foglio dovrà essere perpendicolare al raggio centrale, in modo che l'immagine sia circolare e non ellittica. Si dovrà poi misurare il diametro dell'immagine e la distanza tra il foglio e il forellino. L'ideale sarebbe lavorare in una camera buia, con un raggio di sole che filtra da un forellino negli scuri. Poiché questo non sarà sempre possibile, si suggerisce un dispositivo molto semplice: il procedimento è identico, l'osservazione è meno agevole. In ogni caso, ricordarsi di NON GUARDARE MAI DIRETTAMENTE IL SOLE PERCHÉ QUESTO POTREBBE DANNEGGIARE GLI OCCHI IN MODO PERMANENTE.

*Procedimento*

Preparare una riga graduata in millimetri (lunga almeno un metro) e due cartoncini, uno di 15 cm × 20 cm e l'altro di 8 cm × 15 cm circa. Sul cartoncino più grande, verso il centro, fare un forellino, piccolo e netto, con uno spillo. Sul cartoncino piccolo disegnare un punto alla stessa altezza del forellino rispetto alla base, (uno dei lati minori). Per questo punto far passare due segmenti perpendicolari e graduarli in millimetri.

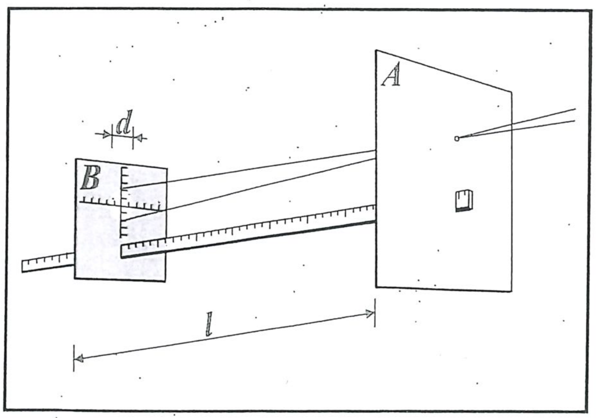



*Fig. 19.1. Dispositivo per misurare il diametro del Sole.*

La riga millimetrata e i cartoncini devono essere sistemati come si vede nella figura 19.1. Praticare una fenditura su ciascuno dei due cartoncini, alla stessa altezza rispetto alla base, in modo da poterli infilare sulla riga; badare di fare la fenditura un po' più stretta della sezione della riga, in modo che i cartoncini vi aderiscano bene e non abbiano gioco. Mettere il cartoncino più grande ($A$) sullo zero e l'altro ($B$) su un punto qualsiasi della riga, in modo che possa scorrere.

Il forellino e il punto d'incontro dei due segmenti graduati dovrebbero trovarsi pressappoco alla stessa altezza sopra la riga. Puntare l'estremità della riga con lo zero in direzione del Sole (è necessario che il Sole non sia offuscato da nubi o foschia) e orientare la riga in modo che l'ombra del cartoncino $A$ copra il cartoncino $B$.

Avvicinare $B$ ad $A$ finché si riesce a vedere la macchia luminosa proiettata attraverso il forellino di $A$ su $B$. Ora allontanare cautamente il cartoncino $B$ fino a far sì che l'immagine luminosa sia grande e chiara quanto più possibile. A questo punto misurare la distanza $l$ fra i due cartoncini e il diametro $d$ dell'immagine del Sole. Dai risultati di queste due misure (da eseguire con cura, in centimetri e millimetri), conoscendo la distanza $L$ fra la Terra e il Sole (usare il valore medio di questa distanza: $L = 1{,}5 \times 10^8$ chilometri; e si veda al paragrafo seguente), si ricava il diametro $D$ del Sole, con una semplice proporzione (considerare i triangoli simili aventi per vertice comune il forellino, per lati i raggi di luce estremi, per basi rispettivamente il diametro dell'immagine e il diametro del Sole).

*Discussione*

1. Confrontare il valore ottenuto per il diametro del Sole con il valore misurato dagli astronomi (è dato implicitamente in Appendice, nella tabella G 3). Calcolare l'errore commesso come differenza in più o in meno, in percentuale del valore considerato esatto.

2. Confrontare tra loro i valori ottenuti da diversi gruppi di lavoro (o dallo stesso gruppo in misure ripetute in momenti diversi). Calcolare le differenze, in percentuale di uno dei valori. Confrontare queste differenze percentuali con quella calcolata al punto precedente: che cosa si può concludere circa la precisione delle misure?

3. Discutere quali siano state le difficoltà incontrate in queste osservazioni, e quindi dove siano le più probabili fonti di errore. Pensare come si possa rendere più preciso il procedimento.

4. Si potrebbe usare questo stesso metodo per misurare il diametro della Luna?

5. E per misurare il diametro di una stella?



] SE1-5 [

6. Si può ricavare dalle misure fatte il valore del diametro angolare del Sole? (Cfr. paragrafo 18.3).

*Altre considerazioni*

Può essere interessante vedere un'analogia fra questa ricerca e la 2.4 (la misura della circonferenza della Terra). In entrambi i casi si utilizza l'energia luminosa del Sole, con l'ipotesi della sua propagazione rettilinea, e si adoperano alcuni teoremi della geometria, per arrivare in modo indiretto alla misura di una lunghezza inaccessibile a una misura diretta. Si possono discutere nei particolari tutte le analogie e le differenze fra i due procedimenti.

Il risultato ottenuto — la misura del diametro del Sole — richiede in realtà due osservazioni indipendenti: una è quella che abbiamo fatta, l'altra è la misura della distanza Terra-Sole, distanza fondamentale per l'astronomia, che abbiamo supposto di conoscere (se avessimo supposto invece di conoscere il diametro del Sole, avremmo potuto ricavare dalle nostre osservazioni la distanza Terra-Sole).

Ci sono molti modi indipendenti di misurare la distanza Terra-Sole. Attraverso triangolazioni, cioè misurando gli angoli di certi triangoli ideali: il più antico di questi, pensato dall'astronomo greco Aristarco, ha un vertice sulla Terra, uno sulla Luna (e qui se la Luna è al primo quarto ha un angolo retto) e uno sul Sole; conoscendo la distanza Terra-Luna e misurando l'angolo fra le direzioni Terra-Luna e Terra-Sole, si ricava la distanza del Sole dalla Terra.

Nello stesso modo si procede con altri triangoli, aventi un vertice, invece che sulla Luna, su un altro pianeta o su un asteroide. L'asteroide Eros, che si avvicina particolarmente sia al Sole sia alla Terra, è tradizionalmente l'oggetto preferito per le misure di parallasse. La conoscenza precisa di una distanza, entro il sistema solare, permette poi di ricavare tutte le altre, misurando soltanto i tempi di rivoluzione dei pianeti, che è più facile conoscere con precisione, e adoperando la terza legge di Keplero (come si vedrà nella ricerca 19.8; e cfr. paragrafo 19.5).

La distanza media del Sole dalla Terra si chiama **Unità Astronomica**, perché è l'unità di misura delle lunghezze usata nel descrivere il sistema solare: vale circa 150 milioni di chilometri. Per le distanze stellari è necessaria un'unità ancora più grande.

Ci si potrebbe domandare che senso ha parlare del « diametro del Sole », dato che il Sole non è un corpo solido come la Terra, ma è interamente gassoso, dal centro alla periferia; per di più, non termina verso l'esterno con un confine netto e definito, ma sfuma nello spazio, rarefacendosi sempre più, e arrivando fino alla Terra e oltre. Eppure, noi parliamo del « disco solare », che si vede, con un contorno perfettamente nitido, attraverso certe nubi o con un vetro affumicato: appare come un cerchio, con diametro angolare quasi identico a quello della Luna, per cui può essere occultato quasi esattamente dalla Luna nelle eclissi totali. Il contorno del disco è un particolare strato nella massa del Sole, pressappoco sferico, dove finisce la trasparenza degli strati più esterni e dal quale sembra provenire tutta la luce irradiata dal Sole: si chiama **fotosfera.** Tutto quel che sta all'esterno della fotosfera può essere osservato dall'occhio o da strumenti ottici particolari; quel che sta dietro la fotosfera è invisibile: in questo senso si può dire che la fotosfera è la superficie del Sole e perciò quando si dice « diametro del Sole » si intende il diametro della fotosfera.

## 19.2 L'energia solare

Fotografie eseguite al telescopio, in condizioni di particolare limpidezza dell'atmosfera, o meglio ancora da palloni o satelliti fuori dell'atmosfera, rivelano che la superficie della fotosfera ha un aspetto maculato e granuloso (fig. 19.2). Fotografie eseguite in successione, come i fotogrammi di una pellicola cinematografica, mostrano che i granuli si formano continuamente, e scompaiono in pochi minuti, facendo pensare a un ribollire di materiale sulla superficie del Sole. Nelle fotografie più nitide la **granulazione** della fotosfera appare come una rete di maglie luminose pressappoco poligonali: si pensa che siano la sommità di cellule di convezione (cfr. paragrafo 4.9), ossia colonne di gas caldi e luminosi che salgono dal basso, si raffreddano e, divenuti più scuri, ridiscendono negli interstizi fra i granuli. Sulla

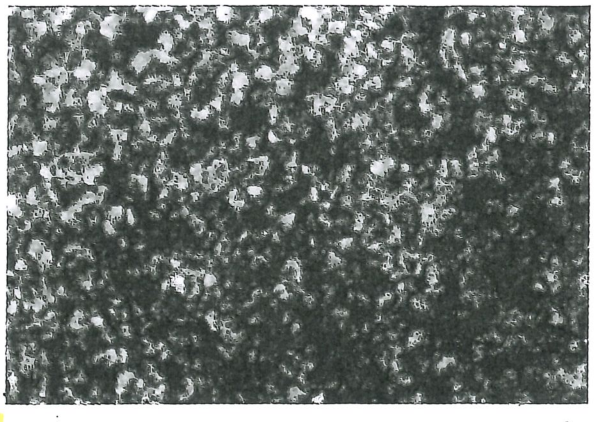
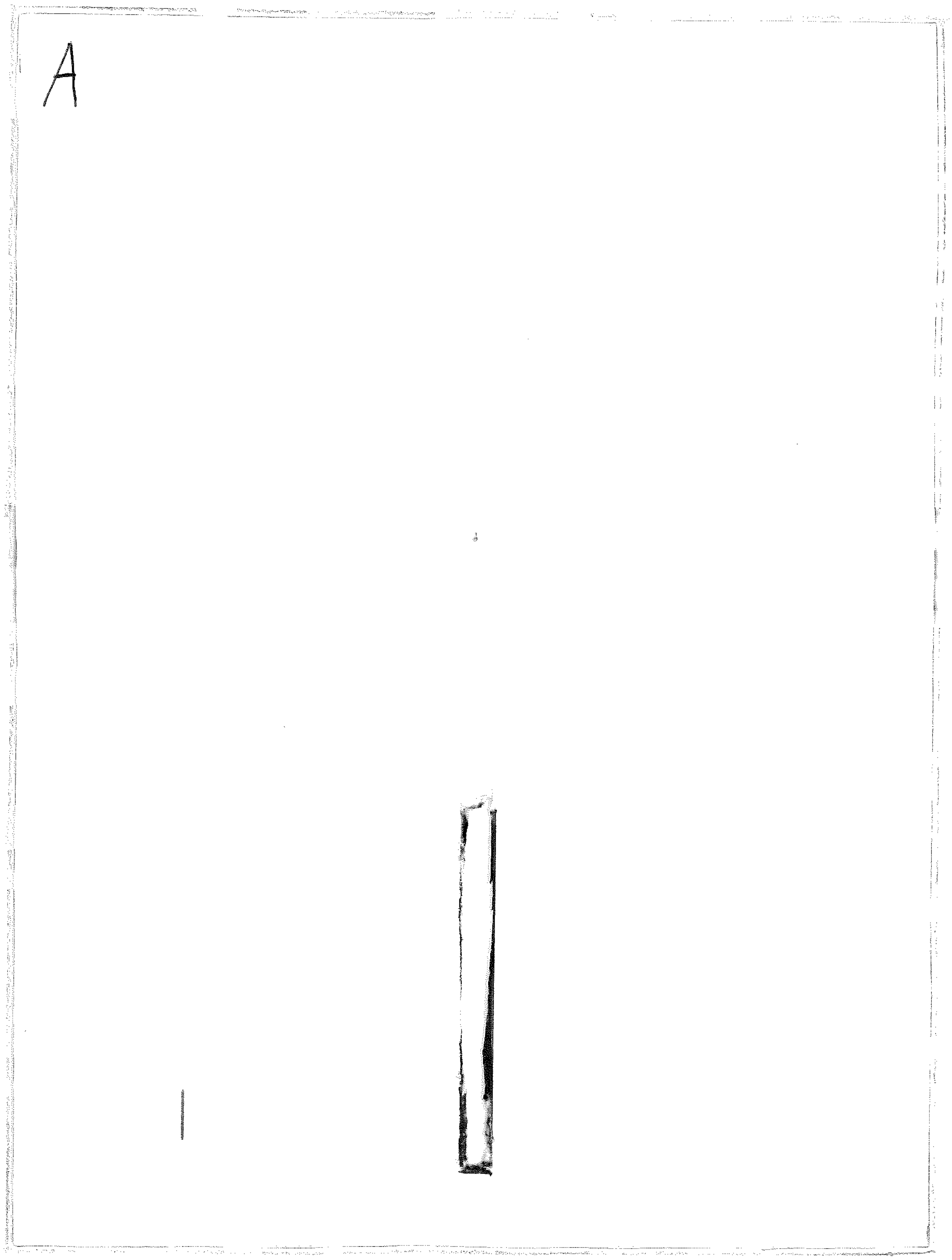


*Fig. 19.2. La granulazione della superficie solare.*



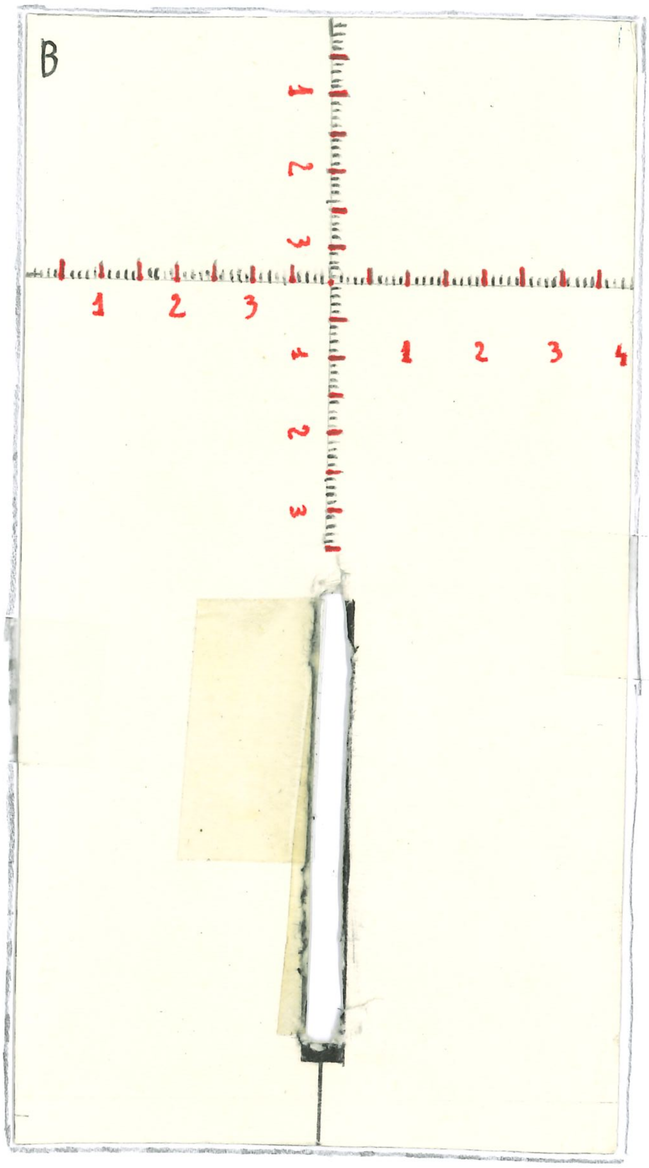
]SE1-6[

CARTONCINO DI DIMENSIONI 15cm X 20cm




]SE1-7[

CARTONCINO DI DIMENSIONI 8cm X 15 cm




]SE1-8[

ESEMPIO DI RISULTATO DI UNA MISURA:

$$(150 \cdot 10^9 \, m) : D = 53{,}9 \, cm : \frac{1}{2} \, cm$$

$$\Rightarrow D = \frac{150 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{2} \, \frac{1}{10^2}}{\frac{53{,}9}{10^2}} \, m = \frac{75}{53{,}9} \, 10^9 \, m$$

$$= 1{,}39 \cdot 10^9 \, m$$

- MISURA ESEGUITA VENERDI' 19 OTTOBRE 1979, FRA LE 12,30 e LE 13 CON CONDIZIONI DI LUCE OTTIMALI, OVVERO IL SOLE NON ERA OSCURATO DA NUBI

# FILE SE2

- OGNI NUMERO REALE $\neq 0$ PUO' ESSERE POSTO NELLA FORMA:

$$\alpha = a \cdot 10^b \quad , \quad a \in ]0,10[$$

$b$ = INTERO RELATIVO

AD ESEMPIO:

$$6.37 \cdot 10^3$$

$$8 \cdot 10^{-5}$$

$\gamma$ = GRANDEZZA FISICA

$u$ = UNITA' DI MASSA, LUNGHEZZA, TEMPO

$$\gamma = \alpha \, u \qquad [\gamma] = [u]$$

ORDINE DI GRANDEZZA DI $\alpha$ $\equiv$ POTENZA DI DIECI NELLA FORMULA

$$\alpha = a \cdot 10^b$$

ESEMPI:

$-2$ = ORDINE DI GRANDEZZA DI 0,0086

$-3$ = " " 0,0021

$3$ = " " 700 (APPROX)

$(1000-700) < (700-100)$

] SE2-1 [

ALTRO ESEMPIO: PIASTRA RETTANGOLARE DI LATI

$$\left.\begin{matrix}(16.3 \pm 0.1)\ cm \\ (4.5 \pm 0.1)\ cm\end{matrix}\right\} (*)$$

REGOLA EMPIRICA: QUANDO SI MOLTIPLICANO DIVERSE GRANDEZZE, IL NUMERO DI CIFRE SIGNIFICATIVE DELLA RISPOSTA FINALE E' QUELLO DELLA GRANDEZZA COL PIU' BASSO NUMERO DI CIFRE SIGNIFICATIVE.

$\Rightarrow$ NEL CASO (*), L'AREA DEVE AVERE DUE CIFRE SIGNIFICATIVE, COME E' VERO PER 4.5

ORA

$$16.2 \cdot 4.4 \simeq 71$$

$$16.4 \cdot 4.6 \simeq 75$$

$\Rightarrow$ STIMIAMO UN'AREA DI $73\ cm^2$

---

ALTRO ESEMPIO: UN OGGETTO ABBIA MASSA MISURATA DI 1500 gr

$\Rightarrow m = 1.5 \cdot 10^3$ DUE CIFRE SIGNIFICATIVE

$1.50 \cdot 10^3$ TRE " "

$1.500 \cdot 10^3$ QUATTRO " "

] SE2-2 [

DEF.: UNA CIFRA SIGNIFICATIVA IN UNA MISURA E' UNA CIFRA NOTA AFFIDABILMENTE, OPPURE LA PRIMA CIFRA STIMATA.

---

QUANDO I NUMERI VENGONO SOMMATI O SOTTRATTI, IL NUMERO DI POSTI DECIMALI NEL RISULTATO = IL NUMERO <u>PIU' PICCOLO</u> DI POSTI DECIMALI DI CIASCUN TERMINE DELLA SOMMA.

ESEMPI: $123 + 5.35 \hat{=}_F 128$ (e NON 128.35)

$1.0001 + 0,0003 = 1,0004$

$1.002 - 0,998 = 0.004$

---

REGOLA DI ARROTONDAMENTO: L'ULTIMA CIFRA MANTENUTA DEVE ESSERE AUMENTATA DI 1 SE L'ULTIMA CIFRA TRASCURATA E' MAGGIORE DI 5. <u>e.g.</u> $7.66 \rightarrow 7.7$

SE INVECE L'ULTIMA CIFRA TRASCURATA E' MINORE DI 5, L'ULTIMA CIFRA MANTENUTA RIMANE INVARIATA. ESEMPIO: $7.64 \rightarrow 7.6$

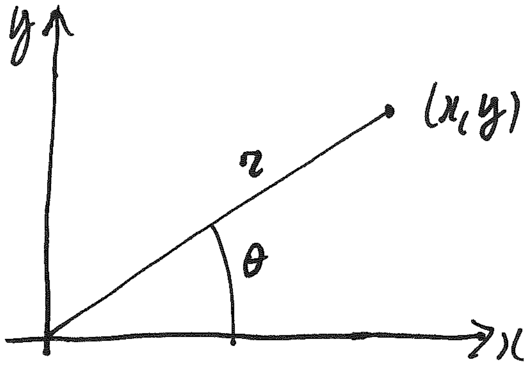
---

AREA DI UN PIATTO RETTANGOLARE DI LATI 12.71 cm, 7.46 cm

$\Rightarrow 12.71 \times 7.46\ cm^2 = 94.816\ cm^2 \hat{=}_F 94.8\ cm^2$

POICHE' IL NUMERO DI CIFRE SIGNIFICATIVE DEVE EGUAGLIARE IL PIU' PICCOLO NUMERO DI CIFRE SIGNIFICATIVE DEI FATTORI.

COORDINATE POLARI NEL PIANO:





$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

UN VALORE DI $\theta$ POSITIVO E' UN ANGOLO MISURATO IN VERSO ANTIORARIO A PARTIRE DAL SEMIASSE $x>0$

---

SCALARI: SONO GRANDEZZE COMPLETAMENTE SPECIFICATE DA UN NUMERO POSITIVO O NEGATIVO ESPRESSO IN UNITA' APPROPRIATE

VETTORI: GRANDEZZE FISICHE CHE VANNO SPECIFICATE IN MODULO, DIREZIONE E VERSO

ESEMPI: IL NUMERO DI ACINI IN UN GRAPPOLO D'UVA E' UNA GRANDEZZA SCALARE, E SONO PURE SCALARI:

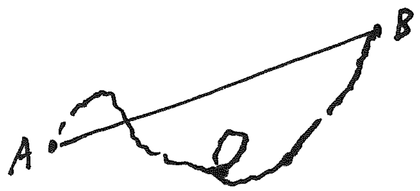
- TEMPERATURA
- VOLUME
- MASSA
- INTERVALLI DI TEMPO

ESEMPI DI VETTORI :
- FORZA
- SPOSTAMENTO

DEF.: SPOSTAMENTO ≡ CAMBIAMENTO DELLA POSIZIONE DI UNA PARTICELLA

LO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO MATERIALE E' COMPLETAMENTE NOTO SE SONO NOTE LE SUE COORDINATE INIZIALI E FINALI.
LO SPOSTAMENTO E' INDIPENDENTE DAL PERCORSO, SE GLI ESTREMI DEL PERCORSO SONO FISSATI.

ESEMPIO:




- LA <u>DISTANZA PERCORSA</u> E' INVECE UNA GRANDEZZA SCALARE, E RAPPRESENTA LA LUNGHEZZA DEL PERCORSO, CHE IN GENERE E' MAGGIORE DEL MODULO DEL VETTORE SPOSTAMENTO.

- ESEMPIO: PARTICELLA SULLA RETTA

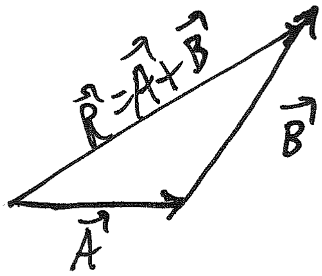
$x_i = -5\ m \qquad x_f = 3\ m$

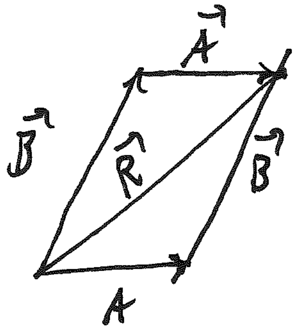
$\Rightarrow$ SPOSTAMENTO $\Delta x = x_f - x_i = 8\ m$

DEF.: DUE VETTORI SONO UGUALI SE HANNO LE STESSE UNITA' DI MISURA, LO STESSO MODULO E PUNTANO NELLA STESSA DIREZIONE E VERSO.

---

## SOMMA DI VETTORI (RAPPRESENTAZIONE GRAFICA)




— UNA VOLTA DISEGNATO IL VETTORE $\vec{A}$, SI DISEGNA, NELLA STESSA SCALA, IL VETTORE $\vec{B}$ CON IL SUO INIZIO A PARTIRE DALLA PUNTA DI $\vec{A}$

$\Rightarrow$ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ E' IL VETTORE DISEGNATO DALLA CODA DI $\vec{A}$ ALLA PUNTA DI $\vec{B}$.

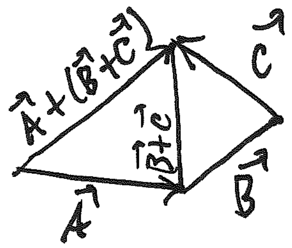
PROPRIETA' <u>COMMUTATIVA</u> DELLA SOMMA:

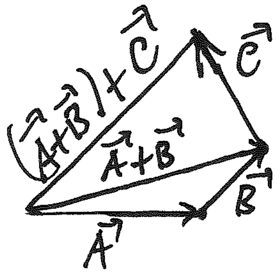
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

PROPRIETA' ASSOCIATIVA DELLA SOMMA:

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

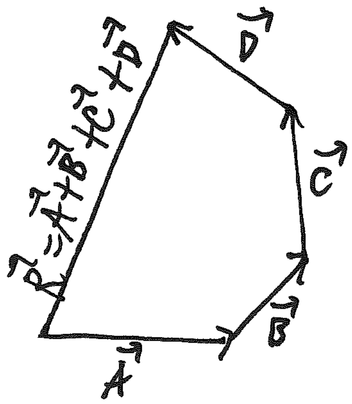
INFATTI:




---

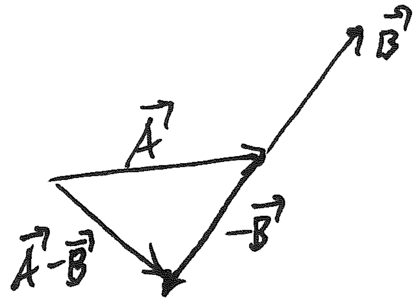
SOMMA DI QUATTRO VETTORI:




$\vec{R}$ E' DISEGNATO DALLA CODA DEL PRIMO ALLA PUNTA DELL'ULTIMO VETTORE

SOTTRAZIONE DI VETTORI:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$




---

MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UNO SCALARE:

DATO $\vec{A}$ : $|\vec{A}| = A$

DATO $s \in \mathbb{R}$ : $|s\vec{A}| = |s||\vec{A}| = |s|A$

VERSO DI $s\vec{A}$ = VERSO DI $\vec{A}$ se $s > 0$

= $-$VERSO DI $\vec{A}$ se $s < 0$

---

PRODOTTO SCALARE DI VETTORI:

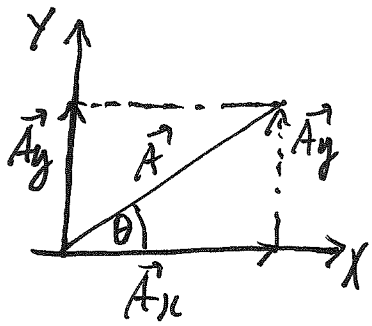
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta_{AB} = AB\cos\theta_{AB}$$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta_{AB}$ = MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE DI $\vec{A}$ e $\vec{B}$

NEL PIANO: $\vec{A} \rightarrow (A_x, A_y)$

$A_x \equiv$ PROIEZIONE DI $\vec{A}$ LUNGO L'ASSE $x$

$A_y \equiv$ " " " $y$




$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$$

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\sin\theta = A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{A_x}{A} = \arcsin\frac{A_y}{A} = \arctan\frac{A_y}{A_x}$$

---

VERSORI = VETTORI DI LUNGHEZZA UNITARIA CHE SPECIFICANO UNA DATA DIREZIONE ORIENTATA

in $R^2$: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$ $\qquad |\vec{i}| = 1$

$|\vec{j}| = 1$

in $R^3$: $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

$|\vec{k}| = 1$

] SE2-9 [

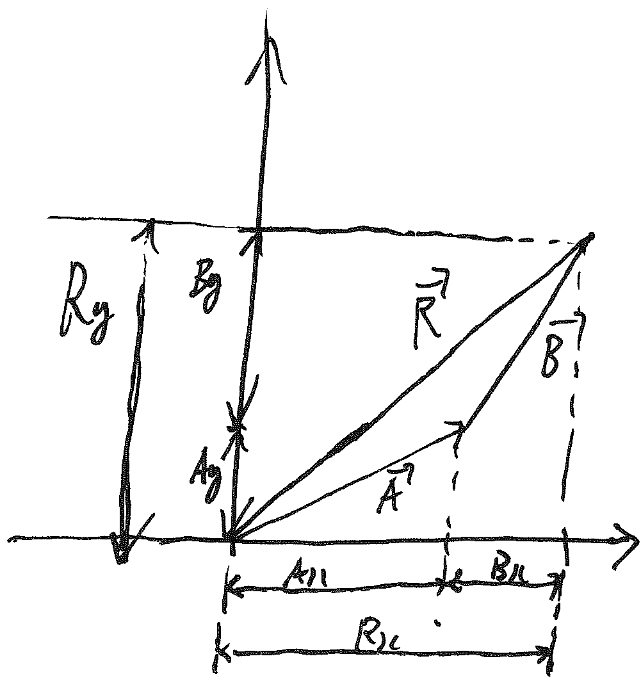
VETTORE SOMMA IN $R^2$:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\vec{i} + (A_y + B_y)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow R_x = A_x + B_x \quad , \quad R_y = A_y + B_y$$

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$



VETTORI E LORO SOMMA IN $R^3$:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2}$$

$R_x = A_x + B_x$, $R_y = A_y + B_y$, $R_z = A_z + B_z$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\theta_x = \widehat{RX}, \quad \theta_y = \widehat{RY}, \quad \theta_z = \widehat{RZ}$$

se $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow A_x = -B_x$, $A_y = -B_y$, $A_z = -B_z$

---

ESEMPIO: $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{B} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2+5)\vec{i} + (3-4)\vec{j} = 7\vec{i} - \vec{j}$

$\Rightarrow R_x = 7$, $R_y = -1 \Rightarrow R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

ESEMPIO: UNA PARTICELLA COMPIE 3 SPOSTAMENTI CONSECUTIVI: (IN UNITA' DI cm, NON INDICATI)

$$\Delta\vec{r}_1 = (1.5\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 1.2\,\vec{k})$$

$$\Delta\vec{r}_2 = (2.3\,\vec{i} - 1.4\,\vec{j} - 3.6\,\vec{k})$$

$$\Delta\vec{r}_3 = (-1.3\,\vec{i} + 1.5\,\vec{j})$$

CALCOLARE SPOSTAMENTO RISULTANTE E IL SUO MODULO

$$\vec{R} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = (1.5 + 2.3 - 1.3)\,\vec{i} + (3 - 1.4 + 1.5)\,\vec{j} + (-1.2 - 3.6 + 0)\,\vec{k}$$

$$= 2.5\,\vec{i} + 3.1\,\vec{j} - 4.8\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow R_x = 2.5, \quad R_y = 3.1, \quad R_z = -4.8$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} \simeq 6.24$$

# FILE SE3

PER UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE DI UN TRATTO $d$ IN UN INTERVALLO TEMPORALE $\Delta t$, LA VELOCITA' SCALARE MEDIA E'

$$v_{med} = \frac{d}{\Delta t}$$

ESSA NON E' UN VETTORE, E DUNQUE NON HA UNA DIREZIONE

VELOCITA' MEDIA: $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i}$ E' UN VETTORE

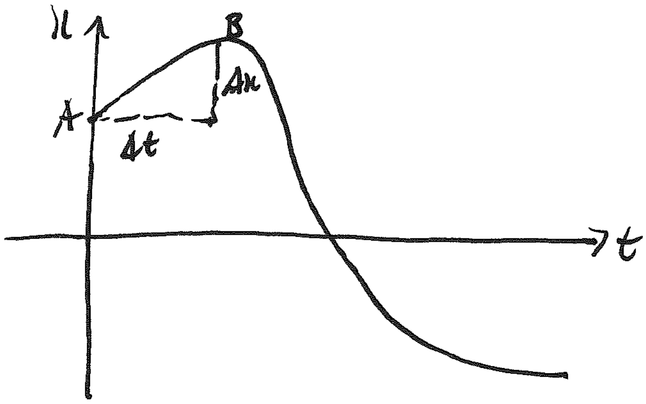
PER MOTI UNIDIMENSIONALI, ESSA SI RIDUCE A

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \Rightarrow [v_m] = L\,T^{-1}$$

LA VELOCITA' MEDIA, PER DEFINIZIONE, NON DIPENDE DAL PERCORSO SEGUITO FRA I PUNTI INIZIALE E FINALE. QUESTA E' LA MAGGIORE DIFFERENZA RISPETTO ALLA VELOCITA' SCALARE MEDIA. INFATTI LO SPOSTAMENTO $\Delta x$ DIPENDE SOLO DALLE COORDINATE INIZIALI E FINALI DELLA PARTICELLA.

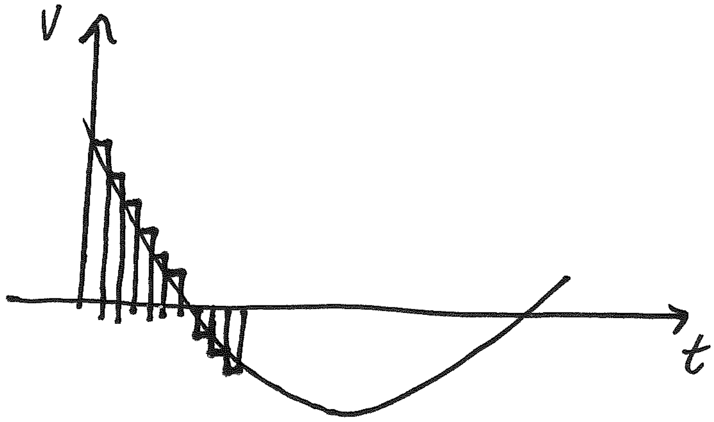
LA VELOCITA' MEDIA NON FORNISCE ALCUN DETTAGLIO DEL MOTO. IN UNA DIMENSIONE, PUO' ESSERE POSITIVA O NEGATIVA

GRAFICO POSIZIONE TEMPO:




VELOCITA' MEDIA IN UNA DIMENSIONE
= PENDENZA DEL TRATTO DI RETTA CHE CONGIUNGE I PUNTI INIZIALE E FINALE DEL GRAFICO POSIZIONE-TEMPO

GRAFICO VELOCITA' TEMPO:




SPOSTAMENTO: AREA SOTTESA DALLA CURVA FRA I PUNTI INIZIALE E FINALE

SCRIVIAMO ALLORA:

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\,dt$$

SI APRE QUI UNA PARENTESI SUGLI (PAG. 10) INTEGRALI DEFINITI

---

ESEMPIO: UN PUNTO MATERIALE COMPIE UN MOTO RETTILINEO

PRIMO TRATTO: VELOCITA' MEDIA DI $5\,m\,s^{-1}$ PER 4 MINUTI

SECONDO TRATTO: VELOCITA' MEDIA DI $4\,m\,s^{-1}$ PER 3 MINUTI

$\Rightarrow \Delta x_1 = 5\,m\,s^{-1} \cdot 4 \cdot 60\,s = 1.2 \cdot 10^3\,m$

$\Delta x_2 = 4\,m\,s^{-1} \cdot 3 \cdot 60\,s = 7.2 \cdot 10^2\,m$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{med}| = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = \frac{1.92 \cdot 10^3\,m}{7\,min} \simeq 4.57\,m\,s^{-1}$$

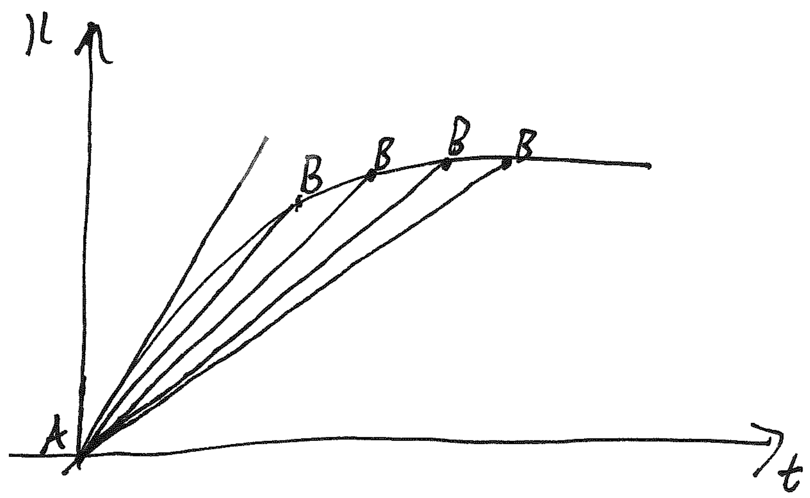
N.B. $\vec{v}_{med} \neq$ MEDIA ARITMETICA DELLE DUE VELOCITA'

## VELOCITÀ ISTANTANEA:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\tau \to t} \frac{x(\tau) - x(t)}{\tau - t} = x'(t)$$

$$= \frac{dx}{dt} = v(t)$$

= PENDENZA DELLA RETTA TANGENTE ALLA CURVA POSIZIONE-TEMPO NEL PUNTO DI ASCISSA "$t$"




LA LINEA TRA LE POSIZIONI A e B SI AVVICINA ALLA LINEA TANGENTE QUANDO IL PUNTO B SI MUOVE AVVICINANDOSI AL PUNTO A.

ESEMPIO: $x(t) = A\,t^n \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = n A t^{n-1}$

] SE3-4 [

LA PROCEDURA DI LIMITE (ESEMPIO).

SE $x(t)=3t^2$, TROVARE VELOCITA' MEDIA E VELOCITA' ISTANTANEA.

$$x_f = 3(t+\Delta t)^2 = 3(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)$$
$$= 3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_f - x_i = 3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-3t^2$$
$$= 6t\Delta t+3(\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6t+3\Delta t$$

VELOCITA' ISTANTANEA $= v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6t$

---

ESEMPIO: UNA PARTICELLA SI MUOVE LUNGO L'ASSE $x$ CON LEGGE ORARIA: $x(t) = -4t + 2t^2$

CALCOLARE SPOSTAMENTO E VELOCITA' MEDIA NEGLI INTERVALLI $t \in [0, 1]$ in secondi

$t \in [1, 3]$

PRIMO INTERVALLO: $\Delta x = x_f - x_i = -4 + 2 - 0 = -2$ metri

SECONDO " : $\Delta x = -4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 - [-4 + 2]$

$= 6 + 2 = 8$ metri

$\Rightarrow$ PRIMO INT.: $v_{media} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -2 \, m \, s^{-1}$

SECONDO INT.: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{8 \, m}{2 s} = 4 \, m s^{-1}$

VELOCITA' ISTANTANEA: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -4 + 4t$

$v(2.5 \, s) = (-4 + 10) \, m s^{-1} = 6 \, m s^{-1}$

VELOCITA' COSTANTE $\Rightarrow$ VELOCITA' ISTANTANEA = VELOCITA' MEDIA

MA ALLORA:

$$v_x = v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} \Rightarrow x_f = x_i + v_x \Delta t = x_i + v_x t$$

se $t_i = 0$ $t_f = t$

ESEMPIO: CORRIDORE A VELOCITA' COSTANTE

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20m - 0}{4.4s} = 4,5 \ ms^{-1}$$

DUNQUE, DOPO 10 S, SI HA:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + 4.5 ms^{-1} \cdot 10 s = 45 m$$

---

ACCELERAZIONE MEDIA:

$$a_{med} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d^2 x}{dt^2}$$ = PENDENZA DEL GRAFICO VELOCITA' - TEMPO

]SE3-7[

DUNQUE, L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA SI ANNULLA NEI PUNTI NEI QUALI LA VELOCITA' ISTANTANEA HA UN MASSIMO

<u>ESEMPIO</u>: LA VELOCITA' DI UN'AUTO PASSA DAL VALORE INIZIALE DI $30\, ms^{-1}$ AL VALORE FINALE DI $15\, ms^{-1}$ IN $2s$

$$\Rightarrow a_{med} = \frac{15\, ms^{-1} - 30\, ms^{-1}}{2s} = -7.5\, ms^{-2}$$

---

- PER MOTI RETTILINEI, QUANDO VELOCITA' E ACCELERAZIONE HANNO LO STESSO VERSO, L'OGGETTO AUMENTA IL MODULO DELLA VELOCITA'. SE INVECE VELOCITA' E ACCELERAZIONE HANNO VERSI OPPOSTI, LA VELOCITA' SCALARE DIMINUISCE NEL TEMPO.

ESEMPIO: PER UN MOTO LUNGO L'ASSE $x$, SIA

$$v_x = 40 - 5t^2$$

CALCOLARE L'ACCELERAZIONE MEDIA PER $t \in [0, 2]$ s

$$v_x(0) = 40 + 0 = 40 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_x(2) = (40 - 5 \cdot 4) \text{ ms}^{-1} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\Rightarrow a_{med} = \frac{20 \text{ ms}^{-1} - 40 \text{ ms}^{-1}}{2 \text{ s}} = -10 \text{ ms}^{-2}$$

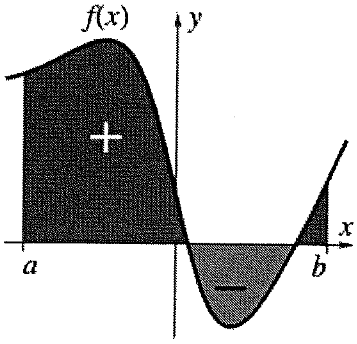
- L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA A $t = 2$ s È INVECE

$$a_x = -10 t \Big|_{t=2s} = -20 \text{ ms}^{-2}$$

---

# Integrale

In analisi matematica, l'**integrale** è un operatore che, nel caso di una funzione di una sola variabile a valori reali non negativi, associa alla funzione l'area sottesa dal suo grafico entro un dato intervallo $[a, b]$ nel dominio. Se la funzione assume anche valori negativi, allora l'integrale può essere interpretato geometricamente come l'area *orientata* sottesa dal grafico della funzione.




Integrale di $f(x)$.
Area sottesa dal grafico dalla funzione $f(x)$ nel dominio $[a, b]$.
Si assume che l'area abbia valore negativo quando $f(x)$ è negativa.

Sono stati ideati diversi modi per definire in modo rigoroso l'integrale; a seconda della procedura adottata cambia anche l'insieme delle funzioni che è possibile misurare con un integrale. Un metodo è quello di "approssimare" il grafico della funzione con una linea costituita da uno o più segmenti, in modo che la figura si può scomporre in uno o più trapezi di cui è facile calcolare l'area: la somma algebrica delle aree di tutti i trapezi è allora l'integrale cercato. Un tale approccio è utilizzato per definire l'integrale di Riemann, in cui il calcolo dell'area viene eseguito suddividendo la figura in sottili strisce verticali ottenendo così dei rettangoli. Nello specifico, dividendo un intervallo di integrazione $[a, b]$ in $n$ intervalli del tipo $[x_{k-1}, x_k]$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, e con $x_0 = a$ e $x_n = b$, per ciascun intervallo si può considerare un punto $t_k$ la cui immagine è $f(t_k)$. Si costruisce allora il rettangolo che ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e per altezza $f(t_k)$. La figura costituita da tutti i rettangoli così costruiti è detta *plurirettangolo* e l'area del plurirettangolo è detta *somma integrale di Cauchy* o *somma integrale di Riemann-Darboux*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Se al diminuire dell'ampiezza degli intervalli $\Delta x_k$ i valori così ottenuti si concentrano in un intorno sempre più piccolo di un numero $S$, la funzione $f$ è integrabile sull'intervallo $[a, b]$ e $S$ è il valore del suo integrale.

Se la funzione integrabile $f(x)$ è positiva allora l'integrale assume il significato di area della regione:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y \le f(x), x \in [a, b]\}.$$

Se la funzione $f$ cambia segno su $[a, b]$ allora l'integrale rappresenta una somma di aree con segno diverso.

]SE3-10[

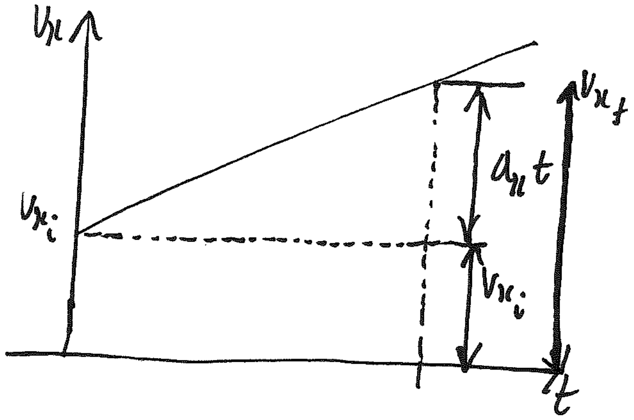
# FILE SE4

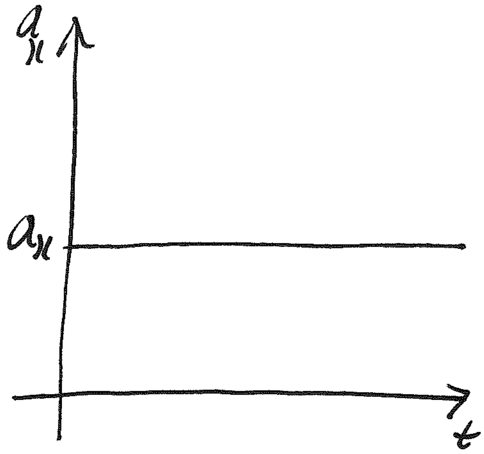
## PARTICELLA CON ACCELERAZIONE COSTANTE

CASO UNIDIMENSIONALE

$$a_x = \frac{v_{x_f} - v_{x_i}}{t_f - t_i} \qquad t_i = 0 \qquad t_f = t$$

$$\Rightarrow v_{x_f} = v_{x_i} + a_x t$$




$$\Delta x = v_{x_i} \Delta t + \frac{1}{2}(v_{x_f} - v_{x_i})\Delta t = \left(v_{x_i} + \frac{1}{2} v_{x_f} - \frac{1}{2} v_{x_i}\right)\Delta t$$

$$= \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f})\Delta t = v_{x_{med}} \Delta t$$

$$\Rightarrow v_{x_{med}} = \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f}) \qquad a_x \text{ COSTANTE}$$

$$\Rightarrow \Delta x = v_{x_{med}} \Delta t = \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f})(t - 0) = \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f})t$$

$$\Rightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f})t$$

$$\Rightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}\left[v_{x_i} + (v_{x_i} + a_x t)\right] t$$

$$= x_i + v_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

D'ALTRONDE, SI HA ANCHE

$$t = \frac{(v_{x_f} - v_{x_i})}{a_x}$$

$$\Rightarrow x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{x_i} + v_{x_f}) \frac{(v_{x_f} - v_{x_i})}{a_x}$$

$$= x_i + \frac{(v_{x_f}^2 - v_{x_i}^2)}{2 a_x}$$

$$\Rightarrow v_{x_f}^2 = v_{x_i}^2 + 2 a_x (x_f - x_i)$$

— IN PARTICOLARE,

$$a_x = 0 \Rightarrow v_{x_f} = v_{x_i}$$

$$x_f = x_i + v_{x_i} t$$

RICAPITOLANDO:

| | | |
|---|---|---|
| $v_{x_f} = v_{x_i} + a_x t$ | $v_x = v_x(t)$ | (1) |
| $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{x_f} + v_{x_i})t$ | $x = x(t, v_{x_i}, v_{x_f})$ | (2) |
| $x_f = x_i + v_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ | $x = x(t)$ | (3) |
| $v_{x_f}^2 = v_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$ | $v = v(x)$ | (4) |

ESEMPIO: UN ELETTRONE ACCELERATO

- IN UN TUBO TV A RAGGI CATODICI, UN ELETTRONE ACCELERA UNIFORMEMENTE IN LINEA RETTA DA UNA VELOCITA' DI $3 \cdot 10^4\ m\,s^{-1}$ A UNA VELOCITA' DI $5 \cdot 10^6\ m\,s^{-1}$ LUNGO UN PERCORSO DI 2 cm. PER QUANTO TEMPO E' STATO ACCELERATO L'ELETTRONE?

SOLUZIONE: DALLA (2), TROVIAMO:

$$t = \frac{2(x_f - x_i)}{(v_{x_i} + v_{x_f})} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ m}{(3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^6)\ m\,s^{-1}}$$

$$\simeq \frac{4 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^6}\ s = 0.8 \cdot 10^{-8}\ s = 8 \cdot 10^{-9}\ s$$

(CIRCA $7.95 \cdot 10^{-9}\ s$ CON MAGGIOR ACCURATEZZA)

ESEMPIO: AUTO INSEGUITA DA MOTO

AUTO A VELOCITA' COSTANTE DI $45\,ms^{-1}$
MOTO POLIZIA INIZIA INSEGUIMENTO CON ACCELERAZIONE DI $3\,ms^{-2}$. DOPO QUANTO TEMPO LA POLIZIA RAGGIUNGE L'AUTO?

SOLUZIONE: DOPO 1s INIZIA INSEGUIMENTO. DUNQUE

$$x_{AUTO} = 45\,m + 45\,ms^{-1}\,t$$

MOTO POLIZIA: $x_i = 0$, $v_{xi} = 0$, $a_x = 3\,ms^{-2}$

$$\Rightarrow x_{POLIZIA} = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2}(3\,ms^{-2})\,t^2$$

CONDIZIONE DI RAGGIUNGIMENTO:

$$x_{POLIZIA} = x_{AUTO}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(3\,ms^{-2})\,t^2 = 45\,m + (45\,ms^{-1})\,t$$

$$\Rightarrow 1.5\,t^2 - 45\,t - 45 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{45 + \sqrt{(45)^2 + 6 \times 45}}{3} = 31\,s$$

# CORPI IN CADUTA LIBERA

- GALILEO GALILEI SCOPRÌ CHE LO SPOSTAMENTO DI UN OGGETTO CHE PARTE DALLA QUIETE E' PROPORZIONALE AL QUADRATO DEL TEMPO DURANTE IL QUALE L'OGGETTO E' IN MOVIMENTO.
- IN CONDIZIONI DI VUOTO, SE SI PUO' TRASCURARE LA RESISTENZA DELL'ARIA, UN FOGLIO DI CARTA E UNA MONETA CADONO CON LA STESSA ACCELERAZIONE, INDIPENDENTEMENTE DALLA FORMA E DAL PESO DELLA CARTA.
- IL 2 AGOSTO 1971, L'ASTRONAUTA DAVID SCOTT LASCIO' CADERE SULLA LUNA, SIMULTANEAMENTE, UN MARTELLO DA GEOLOGO E UNA PIUMA DI FALCO, CHE RAGGIUNSERO LA SUPERFICIE LUNARE CONTEMPORANEAMENTE.
- UN CORPO IN CADUTA LIBERA E' UN OGGETTO CHE SI MUOVE LIBERAMENTE SOLO SOTTO L'AZIONE DELLA GRAVITÀ, INDIPENDENTEMENTE DAL SUO MOTO INIZIALE.

=> OGGETTI LANCIATI VERSO L'ALTO O VERSO IL BASSO, COME PURE QUELLI ABBANDONATI DA FERMO, SONO TUTTI OGGETTI IN CADUTA LIBERA, UNA VOLTA RILASCIATI.

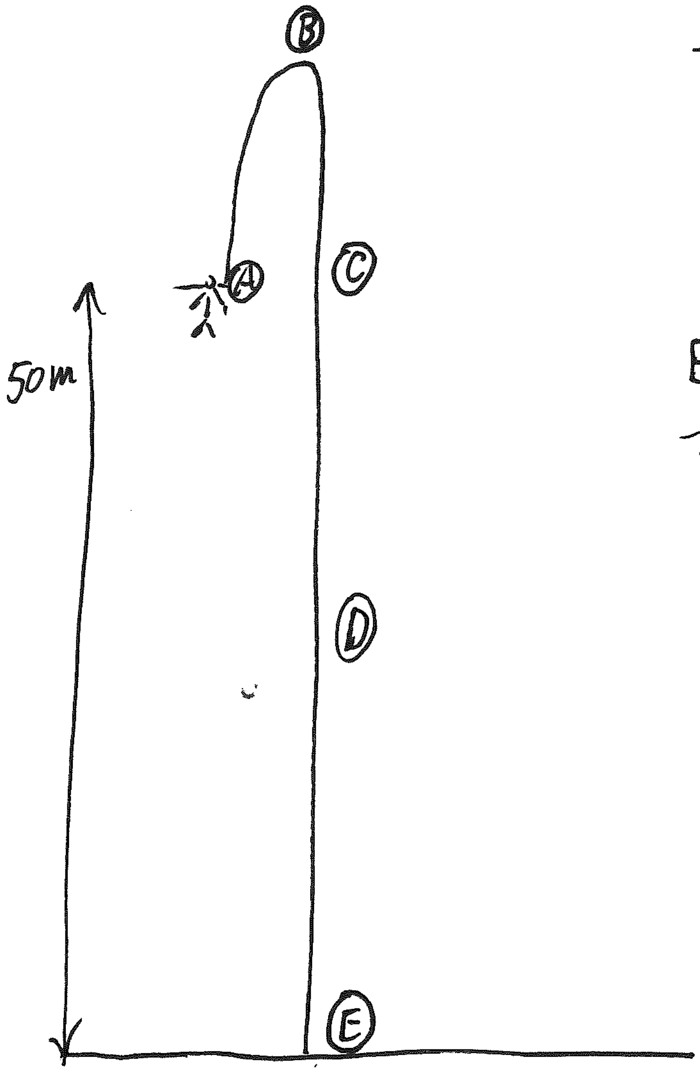
- IPOTESI: (1) SI PUO' TRASCURARE LA RESISTENZA DELL'ARIA
  (2) L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' NON DIPENDE DALL'ALTITUDINE

QUESTE SONO PUR SEMPRE APPROSSIMAZIONI

] SE 4-5 [

PER I CORPI IN CADUTA LIBERA, IL MOTO E' IN DIREZIONE VERTICALE, CON ACCELERAZIONE $a_y = -g$ VERSO IL BASSO (DA CUI IL SEGNO (-)).

- ESEMPIO: UN BUON LANCIO PER UN PRINCIPIANTE




- PIETRA LANCIATA DAL PUNTO A CON VELOCITA' INIZIALE DI $20\ ms^{-1}$ VERSO L'ALTO.

EDIFICIO ALTO 50 m

- LA PIETRA SFIORA IL BORDO NEL TORNARE GIU'.

(1) DOPO QUANTO TEMPO LA PIETRA RAGGIUNGE LA MASSIMA ALTEZZA?

in (A): $t_A = 0$, $y_A = 0$, $v_{yA} = 20\ ms^{-1}$, $a_y = -9.8\ ms^{-2} = -g$

in (B): $v_{yB} = 0$, $a_y = -9.8\ ms^{-2}$

$$\Rightarrow v_{y_f} = v_{yB} = 0 = v_{yi} + a_y t = v_{yA} + a_y t$$

$$\Rightarrow t = -\frac{v_{yA}}{a_y} = \frac{20}{9.8}\ s = 2.04\ s = t_B = \frac{v_{yA}}{g}$$

---

(2) QUAL E' L'ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA?

$$y_{max} = y_B = y_A + v_{yA} t_B + \frac{1}{2} a_y (t_B)^2$$

$$= t_B \left( v_{yA} + \frac{1}{2} a_y t_B \right)$$

$$= \frac{-v_{yA}^2}{a_y} + \frac{1}{2} a_y \frac{v_{yA}^2}{a_y^2} = -\frac{1}{2} \frac{v_{yA}^2}{a_y} = \frac{v_{yA}^2}{2g} = 20.4\ m$$

---

(3) QUANTO TEMPO IMPIEGA LA PIETRA PER TORNARE AL LIVELLO DEL LANCIATORE?

in (C): $y_C = y_A = 0 \Rightarrow 0 = v_{yA} t_C + \frac{1}{2} a_y t_C^2$

$$= t_C \left( v_{yA} + \frac{1}{2} a_y t_C \right)$$

$$\Rightarrow t_C = 0, \quad t_C = \frac{-2 v_{yA}}{a_y} = \frac{2 v_{yA}}{g} = 2 t_B = 4.08\ s$$

(4) QUAL E' LA VELOCITA' DELLA PIETRA IN $t = t_C$ ?

$$V_{y_C} = V_{y_A} + a_y t_C = V_{y_A} - g \frac{2 V_{y_A}}{g} = -V_{y_A} = -20\, m s^{-1}$$

$\Rightarrow$ QUANDO LA PIETRA TORNA ALLA QUOTA DI PARTENZA, LA SUA VELOCITA' HA LO STESSO MODULO MA VERSO OPPOSTO RISPETTO ALLA VELOCITA' INIZIALE.

$\Rightarrow$ IL MOTO E' SIMMETRICO

---

(5) CALCOLARE VELOCITA' E POSIZIONE DELLA PIETRA PER $t = 5\,s$

$$V_{y_D} = V_{y_A} + a_y t_D = V_{y_A} - g\, t_D = 20\, m s^{-1} - 9.8\, m s^{-2}\, 5 s$$

$$= (20 - 49)\, m s^{-1} = -29\, m s^{-1}$$

$$\Rightarrow y_D = y_A + V_{y_A} t_D + \frac{1}{2} a_y t_D^2$$

$$= 0 + 20\, m s^{-1}\, 5 s - 4.9\, m s^{-2}\, 25\, s = -22.5\, m$$

---

N.B. IN E SI HA: $y_E = -50\, m$

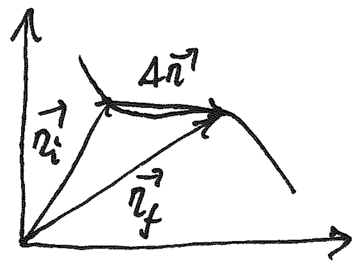
$\Rightarrow$ IL VALORE DI $y_D$ E' ACCETTABILE, MA VALORI DI $y < y_E$ NON SONO FISICAMENTE ACCETTABILI

- GIA' PER $t = 6\,s$ SI TROVEREBBE TALE ASSURDO

# FILE SE 5

- MOTO IN DUE DIMENSIONI
- LA POSIZIONE DI UNA PARTICELLA E' DESCRITTA CON UN VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$, E LO SPOSTAMENTO E' LA DIFFERENZA TRA LE POSIZIONI FINALE E INIZIALE:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$




VELOCITA' MEDIA: $\vec{v}_{med} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ = VETTORE DIRETTO LUNGO $\Delta\vec{r}$

N.B. LA VELOCITA' MEDIA FRA I PUNTI A e B E' INDIPENDENTE DAL PERCORSO FRA I DUE PUNTI, POICHE' $\Delta\vec{r}$ DIPENDE SOLO DA $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$

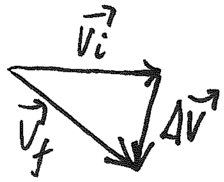
IN PARTICOLARE: $\vec{r}_i = \vec{r}_f \Rightarrow \vec{v}_{med} = 0$

VELOCITA' ISTANTANEA:

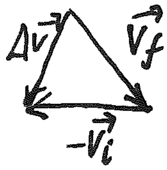
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ = DERIVATA DEL VETTORE POSIZIONE RISPETTO AL TEMPO

## ACCELERAZIONE MEDIA:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$ È UN VETTORE DIRETTO LUNGO $\Delta\vec{v}$




$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$$




$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \Delta\vec{v}$$

## ACCELERAZIONE ISTANTANEA:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

= DERIVATA DEL VETTORE VELOCITÀ RISPETTO AL TEMPO

L'ACCELERAZIONE È $\neq 0$ SE VARIA NEL TEMPO IL MODULO DEL VETTORE VELOCITÀ, OPPURE SE VARIA NEL TEMPO LA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÀ, OPPURE SE VARIANO SIA IL MODULO CHE LA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÀ

MOTO IN DUE DIMENSIONI CON ACCELERAZIONE COSTANTE
(MODULO E DIREZIONE COSTANTI NEL TEMPO)

VETTORE POSIZIONE NEL PIANO:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$\vec{a}$ COSTANTE $\Rightarrow$ $a_x, a_y$ COSTANTI NEL TEMPO

$$v_x = v_{x_f} = v_{x_i} + a_x t$$

$$v_y = v_{y_f} = v_{y_i} + a_y t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_f = (v_{x_i} + a_x t)\hat{i} + (v_{y_i} + a_y t)\hat{j}$$

$$= (v_{x_i}\hat{i} + v_{y_i}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

INOLTRE:

$$x_f = x_i + v_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

DA CUI

$$\vec{r}_f = \left(x_i + v_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2\right)\hat{i} + \left(y_i + v_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2\right)\hat{j}$$

$$= \left(x_i \hat{i} + y_i \hat{j}\right) + \left(v_{x_i} \hat{i} + v_{y_i} \hat{j}\right) t + \frac{1}{2}\left(a_x \hat{i} + a_y \hat{j}\right) t^2$$

$$= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

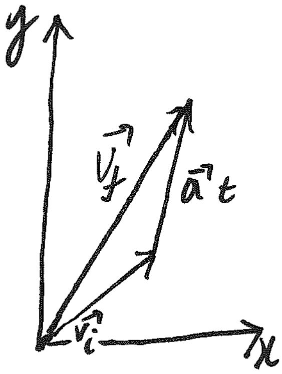
$\vec{v}_i t$ = SPOSTAMENTO DOVUTO ALLA VELOCITA' INIZIALE DELLA PARTICELLA

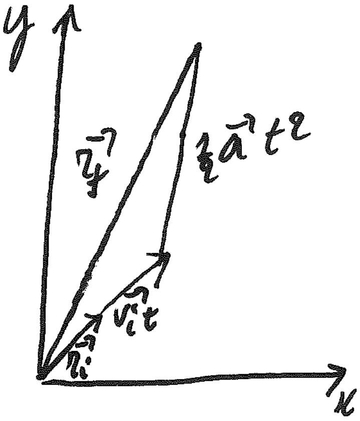
$\frac{1}{2} \vec{a} t^2$ = SPOSTAMENTO RISULTANTE DALL'ACCELERAZIONE UNIFORME DELLA PARTICELLA

N.B. IN GENERALE, $\vec{v}_f$ NON E' ORIENTATO LUNGO LA DIREZIONE DI $\vec{v}_i$ OPPURE $\vec{a}$; $\vec{v}_f$ E $\vec{r}_f$ NON HANNO LA STESSA DIREZIONE

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} t \Rightarrow \begin{cases} v_{x_f} = v_{x_i} + a_x t \\ v_{y_f} = v_{y_i} + a_y t \end{cases}$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \Rightarrow \begin{cases} x_f = x_i + v_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_f = y_i + v_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$






IL MOTO IN DUE DIMENSIONI CON ACCELERAZIONE COSTANTE E' DUNQUE EQUIVALENTE A DUE MOTI INDIPENDENTI NELLE DIREZIONI $x$ E $y$, AVENTI ACCELERAZIONI COSTANTI $a_x$ E $a_y$. IL MOTO NELLA DIREZIONE $x$ NON INFLUENZA IL MOTO NELLA DIREZIONE $y$, E VICEVERSA.

$\Rightarrow$ IL MODELLO APPROPRIATO E' QUELLO DELLA PARTICELLA IN MOTO UNIDIMENSIONALE CON ACCELERAZIONE COSTANTE, APPLICATO NELLE DIREZIONI $x$ E $y$ SEPARATAMENTE.

---

ESEMPIO: MOTO IN UN PIANO

UNA PARTICELLA SI TROVA ALL'ORIGINE DEL SISTEMA $xy$ AL TEMPO $t=0$, CON VELOCITA' INIZIALE $\vec{v}_i = (20\,\hat{i} - 15\,\hat{j})\ m s^{-1}$, E SI MUOVE NEL PIANO CON ACCELERAZIONE

$$\vec{a} = 4\ m s^{-2}\ \hat{i}$$

(1) CALCOLARE LE COMPONENTI DELLA VELOCITA'

$$v_{x_f} = v_{x_i} + a_x t = (20 + 4t)$$

$$v_{y_f} = v_{y_i} + a_y t = -15 \ m s^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_f = v_{x_f} \hat{i} + v_{y_f} \hat{j} = [(20+4t)\hat{i} - 15\hat{j}] \ m s^{-1}$$

(2) DOPO 5 s:

$$\vec{v}_f = [(20 + 4 \cdot 5)\hat{i} - 15\hat{j}] m s^{-1} = [40\hat{i} - 15\hat{j}] m s^{-1}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{y_f}}{v_{x_f}}\right) = \arctan\left(\frac{-15}{40}\right) = -21^\circ$$

$$|\vec{v}_f(5s)| = \sqrt{v_{x_f}^2(5) + v_{y_f}^2(5)} = \sqrt{1825} \ m s^{-1}$$

$$= 42{,}72 \ m s^{-1} \simeq 43 \ m s^{-1}$$

MOTO DI UN PROIETTILE:

- FACCIAMO DUE IPOTESI SEMPLIFICATRICI:

(1) L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' SI MANTIENE COSTANTE

(2) LA RESISTENZA DELL'ARIA E' TRASCURABILE

DIREZIONE $y$ POSITIVA VERSO L'ALTO $\Rightarrow a_y = -g$

$a_x = 0$ POICHE' LA RESISTENZA DELL'ARIA VIENE TRASCURATA

$V_{x_i} = V_i \cos\theta_i \qquad V_{y_i} = V_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = V_i \sin\theta_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{x_f} = V_{x_i} + a_x t = V_{x_i} = V_i \cos\theta_i = \text{COSTANTE} \\ V_{y_f} = V_{y_i} - g t = V_i \sin\theta_i - g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_f = x_i + V_{x_i} t = (V_i \cos\theta_i) t \\ y_f = y_i + V_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 = (V_i \sin\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \frac{x_f}{V_i \cos\theta_i}$$

$$\Rightarrow y_f = (\tan\theta_i)\, x_f - \frac{g}{2V_i^2 \cos^2\theta_i}(x_f)^2 \qquad \forall \theta_i \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\vec{g} = -g\vec{j} = \vec{a}$$

$$\vec{r_f} = \vec{r_i} + \vec{V_i}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$\vec{V_i}t$ = SPOSTAMENTO IN ASSENZA DI ACCELERAZIONE

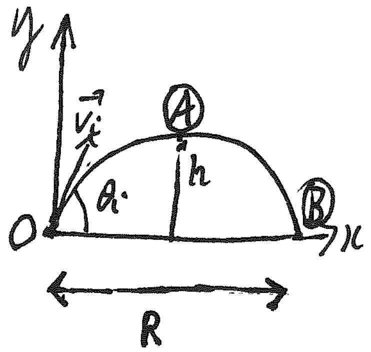
$\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ = SPOSTAMENTO DOVUTO ALL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' $\vec{g}$

$\Rightarrow$ SE NON CI FOSSE $\vec{g}$, LA PARTICELLA CONTINUEREBBE IL MOTO RETTILINEO NELLA DIREZIONE DI $\vec{V_i}$

## GITTATA E ALTEZZA MASSIMA:

$A = \left(\frac{R}{2}, h\right)$

$B = (R, 0)$




$v_{y_A} = 0 \Rightarrow t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$

$$\Rightarrow h = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{(v_i \sin\theta_i)^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{(v_i \sin\theta_i)^2}{g^2}$$

$$= \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$$

$\Rightarrow$ PER AUMENTARE $h$, SI PUO' LANCIARE IL PROIETTILE CON VELOCITA' INIZIALE MAGGIORE, O AUMENTARE $\theta_i$, O SCEGLIERE UN POSTO DOVE $g$ E' MINORE (LA $g$ VARIA CON LA QUOTA)

– GITTATA:

$$R = (v_i \cos\theta_i) 2 t_A = v_i \cos\theta_i \frac{2 v_i \sin\theta_i}{g} = \frac{(v_i)^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

$\Rightarrow$ R E' MASSIMA SE $\theta_i = 45°$

ESEMPIO: UN LANCIO DI PIETRA

- PIETRA SCAGLIATA VERSO L'ALTO DALLA SOMMITA' DI UN EDIFICIO, CON UN ANGOLO DI 30° RISPETTO ALL'ORIZZONTALE, E CON VELOCITA' DI 20 m s$^{-1}$

(1) SE L'EDIFICIO E' ALTO 45 m, PER QUANTO TEMPO LA PIETRA RIMANE IN VOLO?

$$v_{x_i} = v_i \cos\theta_i = 20\, m s^{-1} \cos(30) = 17.3\ m s^{-1}$$

$$v_{y_i} = v_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = v_i \sin\theta_i = 10\ m s^{-1}$$

$$y_f = y_i + v_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow -45\, m = 0 + 10\, m s^{-1} t - 4.9\, m s^{-2} t^2 \Rightarrow 4.9 t^2 - 10 t - 45 = 0$$

$\Rightarrow$ EQ. DI 2° GRADO PER $t \Rightarrow t = 4.22\ s$

(2) QUAL E' LA VELOCITA' DELLA PIETRA APPENA PRIMA DI COLPIRE IL SUOLO?

$$v_{y_f} = v_{y_i} + a_y t = v_{y_i} - g t$$

$$= 10\, m s^{-1} - 9.8\, m s^{-2}\, 4.22 s = -32.4\ m s^{-1}$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{(v_{x_f})^2 + (v_{y_f})^2} = \sqrt{(v_{x_i})^2 + (v_{y_f})^2} = 35.9\, m s^{-1}$$

]SE5-10[

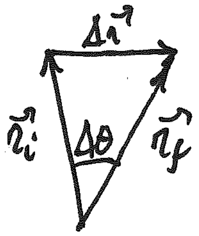
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- IL MOTO SU UN PERCORSO CIRCOLARE CON UNA VELOCITA' DI MODULO V = COSTANTE E' DETTO MOTO CIRCOLARE UNIFORME.
- ANCHE SE LA VELOCITA' HA MODULO COSTANTE, SI HA UNA ACCELERAZIONE CHE DIPENDE DALLA VARIAZIONE DEL VETTORE VELOCITA', OVVERO DALLA VARIAZIONE NELLA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ
- IL VETTORE VELOCITA' E' SEMPRE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA E PERPENDICOLARE AL RAGGIO DEL PERCORSO CIRCOLARE.
- IL VETTORE ACCELERAZIONE E' SEMPRE PERPENDICOLARE ALLA TRAIETTORIA E PUNTA SEMPRE VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA.

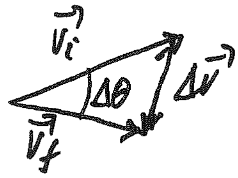
$\Rightarrow$ ACCELERAZIONE CENTRIPETA:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

SE, PER ASSURDO, L'ACCELERAZIONE AVESSE UNA COMPONENTE PARALLELA AL PERCORSO, E QUINDI PARALLELA ALLA VELOCITA', TALE COMPONENTE $\Rightarrow$ IL MODULO DELLA VELOCITA' VARIA, MA CIÒ VIOLA L'IPOTESI SECONDO CUI IL MODULO DELLA VELOCITA' E' COSTANTE.









L'ANGOLO $\Delta\theta$ TRA I VETTORI $\vec{r}_i, \vec{r}_f$ e $\vec{v}_i, \vec{v}_f$ È LO STESSO, POICHE' IL VETTORE VELOCITA' E' SEMPRE PERPENDICOLARE AL VETTORE POSIZIONE. $\Rightarrow$ I TRIANGOLI SONO SIMILI

$$\Rightarrow \frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad |\vec{a}_{med}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = v \Rightarrow |\vec{a}_{med}| \to a_c = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}$$

- PERIODO T = TEMPO NECESSARIO PER UNA RIVOLUZIONE COMPLETA

PERCORSO = $2\pi r$ $\qquad$ $T = \dfrac{2\pi r}{v}$

- ESEMPIO: ACCELERAZIONE CENTRIPETA DELLA TERRA NEL SUO MOTO ORBITALE ATTORNO AL SOLE

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

] SE5-12 [

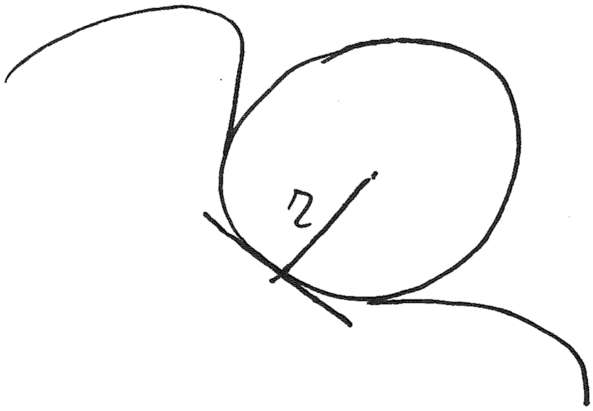
$$\Rightarrow a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$= \frac{4\pi^2\, 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m}{(3.16 \cdot 10^7 s)^2} = 5{,}9 \cdot 10^{-3}\, m\, s^{-2} = 6 \cdot 10^{-4}\, g$$

---

]SE5-13[

# FILE SE6




IL CERCHIO OSCULATORE

DETERMINA LA CIRCONFERENZA TANGENTE IN OGNI ISTANTE ALLA TRAIETTORIA

$$\vec{a} = a_t \vec{u_t} + a_n \vec{u_n}$$

$$\vec{v} = v \vec{u_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}(v\vec{u_t}) = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{r}\vec{u_n}$$

DAL CONFRONTO:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{v} = v(t)\vec{u_t} = \dot{s}(t)\,\vec{u_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}(t)\,\vec{u_t}\right) = \left(\frac{d}{dt}\dot{s}(t)\right)\vec{u_t} + \dot{s}(t)\frac{d}{dt}\vec{u_t}$$

$$= \ddot{s}(t)\,\vec{u_t} + \underbrace{\dot{s}(t)\,\frac{d\vec{u_t}}{ds}\,\frac{ds}{dt}} = \ddot{s}(t)\,\vec{u_t} + \left(\dot{s}(t)\right)^2\frac{d\vec{u_t}}{ds}$$

$$= \frac{dv}{dt}\,\vec{u_t} + v^2(t)\,\frac{1}{r}\,\vec{u_n}$$

OVE $\vec{u_n}$ E' IL VERSORE DI $\frac{d\vec{u_t}}{ds}$, E SI E' SFRUTTATA LA PROPRIETA' DELLE CURVE PIANE:

$$\frac{d\vec{u_t}}{ds} = \frac{1}{r}\,\vec{u_n}$$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}(t) =$ ACCELERAZIONE TANGENZIALE

$a_n = \frac{v^2(t)}{r} =$ ACCELERAZIONE NORMALE O CENTRIPETA

$a_n > 0 \Rightarrow a_n$ E' SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO DI CURVATURA

- I MOTI UNIFORMI SONO CARATTERIZZATI DALL'ANNULLARSI IDENTICO DELL'ACCELERAZIONE TANGENZIALE

- L'ACCELERAZIONE NORMALE, POICHE' NON PUO' ESSERE $v(t)=0$ IN OGNI ISTANTE ($v(t)$ SI ANNULLA, INFATTI, SOLO NEGLI ISTANTI DI ARRESTO), SI ANNULLA IDENTICAMENTE SEMPRE E SOLO QUANDO $\frac{1}{r}=0 \Rightarrow r=\infty \Rightarrow$ MOTO RETTILINEO

- INOLTRE SI DEFINISCE

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2(t)}{r}$$

TALE ACCELERAZIONE RADIALE HA SEGNO NEGATIVO PERCHE' L'ASSOCIATO VERSORE HA VERSO OPPOSTO AD $\vec{u}_n$

L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA E' DIRETTA VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO MODELLO, OPPOSTA AL VERSO DEL VERSORE RADIALE $\hat{r}$, CHE PUNTA SEMPRE VERSO L'ESTERNO DAL CENTRO DEL CERCHIO.

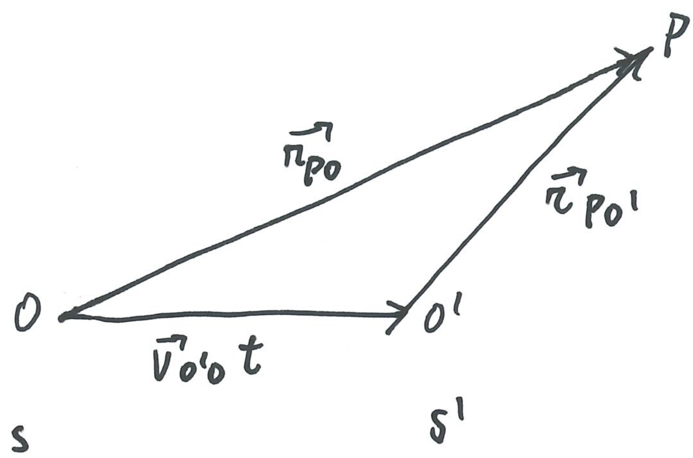
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(a_r)^2 + (a_t)^2}$$

---

## VELOCITA' RELATIVA

- SE DUE AUTO PERCORRONO UNA AUTOSTRADA A 100 Km/h, UN OSSERVATORE SUL LATO DELLA STRADA ASSEGNA AD UNA DI ESSE LA VELOCITA' DI 100 Km/h, MENTRE UN OSSERVATORE CHE VIAGGIA NELL'ALTRA AUTO VEDE CHE LA PRIMA AUTO E' SEMPRE NELLA STESSA POSIZIONE RELATIVA, E LE ASSEGNA UNA VELOCITA' NULLA.

- SVILUPPIAMO ORA UNA DESCRIZIONE VETTORIALE DI SITUAZIONI SIFFATTE.




L'OSSERVATORE O SI TROVA IN UN RIFERIMENTO S,
L'OSSERVATORE O' " " S'

S' SI MUOVE CON VELOCITA' $\vec{V}_{O'O}$ RISPETTO A S

N.B. IL PRIMO PEDICE INDICA COSA SI STA OSSERVANDO, IL SECONDO INDICA CHI SIA L'OSSERVATORE CHE STA OSSERVANDO

$\vec{V}_{O'O}$ = VELOCITA' DELL'OSSERVATORE MISURATA DALL'OSSERVATORE O

PER $t=0$, LE ORIGINI DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO COINCIDONO

AL TEMPO $t$, LE ORIGINI DEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO SONO SEPARATE DA UNO SPOSTAMENTO $\vec{V}_{O'O}\, t$

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}\, t \qquad = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_{PO}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}\, t\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO'} + \vec{v}_{O'O}$$

- NEL MOTO UNIDIMENSIONALE, QUESTA SI RIDUCE ALL'EQUAZIONE SCALARE $v_{PO} = v_{PO'} + v_{O'O}$

$$\Rightarrow v_{PO'} = v_{PO} - v_{O'O} = \text{VELOCITA' RELATIVA}$$

= VELOCITA' DI UNA PARTICELLA MISURATA DA UN OSSERVATORE IN MOTO

- ESEMPIO: NEL CASO DELLE AUTO ROSSA E BLU IN AUTOSTRADA, L'OSSERVATORE O E' FERMO SUL BORDO DELLA STRADA, L'OSSERVATORE O' SI TROVA NELLA MACCHINA BLU. LA MACCHINA ROSSA E' IN P.

$v_{PO} = 200$ Km/h

$v_{O'O} = 200$ Km/h

$$\Rightarrow v_{PO'} = v_{PO} - v_{O'O} = (200 - 200)\,\text{Km/h} = 0$$

# IL CONCETTO DI FORZA

- QUANDO SPINGIAMO O TRASCINIAMO UN OGGETTO, SI DICE CHE ESERCITIAMO UNA FORZA SU DI ESSO.
  ANCHE QUANDO LANCIAMO UNA PALLA O LE DIAMO UN CALCIO ESERCITIAMO UNA FORZA.
- QUINDI, LA FORZA PUO' ESSERE ASSOCIATA AD UNA ATTIVITA' MUSCOLARE, E AD UN CAMBIAMENTO DELLO STATO DI MOTO DI UN OGGETTO.
- TUTTAVIA, NON SEMPRE LE FORZE CAUSANO UN MOVIMENTO. AD ESEMPIO, MENTRE LEGGIAMO, SEDUTI AD UN TAVOLO, LA FORZA DI GRAVITA' AGISCE SUL NOSTRO CORPO, MA NOI RESTIAMO IN QUIETE; POSSIAMO SPINGERE UN BLOCCO DI PIETRA SENZA PER QUESTO RIUSCIRE A METTERLO IN MOTO.
- ESEMPI DI FORZE DI CONTATTO:
  - ALLUNGAMENTO DI UNA MOLLA
  - UN CALCIO A UN PALLONE
  - UN BAMBINO TIRA UN CARRELLO
- CI SONO POI I CAMPI DI FORZE, CHE NON COMPORTANO IL CONTATTO FISICO TRA DUE OGGETTI.

I CAMPI DI FORZA POSSONO AGIRE ATTRAVERSO LO SPAZIO VUOTO. UN ESEMPIO E' LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE FRA DUE OGGETTI, CHE CAUSA L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA'.

- LA FORZA GRAVITAZIONALE TIENE GLI OGGETTI LEGATI ALLA TERRA, ED E' RESPONSABILE DEL <u>PESO</u> DI UN OGGETTO. I PIANETI DEL SISTEMA SOLARE SONO TENUTI ASSIEME E ORBITANO INTORNO AL SOLE GRAZIE ALLE FORZE GRAVITAZIONALI.

- ALTRO ESEMPIO: LA FORZA ELETTRICA CHE UNA CARICA ELETTRICA ESERCITA SU UN'ALTRA CARICA. TALI CARICHE POSSONO ESSERE L'ELETTRONE E IL PROTONE DI UN ATOMO DI IDROGENO.

- ALTRO ESEMPIO: LA FORZA CHE UNA BARRA MAGNETICA ESERCITA SU UN PEZZO DI FERRO.

N.B.: A LIVELLO ATOMICO, LE FORZE DI CONTATTO SONO IN REALTA' DOVUTE ALLE FORZE ELETTRICHE, e.g. LE FORZE ELETTRICHE ATTRATTIVE TRA CARICHE DI SEGNO OPPOSTO.

LE MISURE DI FORZA SI EFFETTUANO MEDIANTE LA DEFORMAZIONE LINEARE DI UNA MOLLA.

POICHE', SU BASE SPERIMENTALE, POSSIAMO DIRE CHE LE FORZE SI COMPORTANO COME VETTORI, BISOGNA SEMPRE ADOPERARE LE REGOLE DELLA SOMMA VETTORIALE PER CALCOLARE LA FORZA RISULTANTE SU UN CORPO.

N.B. NON ABBIAMO ANCORA DEFINITO IL CONCETTO DI FORZA. ABBIAMO SOLO "PREPARATO IL TERRENO" PER UNA SUA DEFINIZIONE.

---

# LA PRIMA LEGGE DI NEWTON FILE SE7

- PER LO STUDIO DEL MOTO, LA PRIMA LEGGE DI NEWTON, O PRINCIPIO DI INERZIA, DEFINISCE UN INSIEME SPECIALE DI SISTEMI DI RIFERIMENTO, I SISTEMI INERZIALI:

"SE UN CORPO NON INTERAGISCE CON ALTRI CORPI, E' POSSIBILE IDENTIFICARE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NEL QUALE IL CORPO HA ACCELERAZIONE NULLA".

- DEFINIZIONE: UN SIFFATTO SISTEMA E' CHIAMATO SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

- ESEMPI: - UN DISCO CHE SI TROVA SU UN TAVOLO DI HOCKEY AD ARIA SULLA TERRA. NON CI SONO INTERAZIONI ORIZZONTALI DEL DISCO CON ALTRI OGGETTI.

- SE SIAMO SU UN TRENO IN MOTO CON VELOCITA' COSTANTE, STIAMO OSSERVANDO IL DISCO DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

N.B. UN QUALSIASI SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SI MUOVE CON VELOCITA' COSTANTE RELATIVA AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, E' ESSO STESSO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

- SE INVECE IL TRENO ACCELERA, STIAMO OSSERVANDO IL DISCO DA HOCKEY DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE, POICHE' IL TRENO STA ACCELERANDO RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE DELLA SUPERFICIE TERRESTRE. TUTTAVIA UN OSSERVATORE ESTERNO AL TRENO, A TERRA, VEDE MUOVERSI IL DISCO CON LA STESSA VELOCITA' CHE IL TRENO AVEVA PRIMA CHE COMINCIASSE AD ACCELERARE.
- UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SI MUOVA CON VELOCITA' COSTANTE RISPETTO ALLE STELLE LONTANE E' LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.
- LA TERRA: ORBITA ATTORNO AL SOLE E RUOTA ATTORNO AL PROPRIO ASSE. QUESTI DUE MOTI SONO FONTI DI ACCELERAZIONI CENTRIPETE (SI RICORDI $a_c \simeq 6 \cdot 10^{-4}\, g$ DALLE LEZIONI PRECEDENTI), CHE SONO PERO' PICCOLE RISPETTO A $g = 9{,}8\, m s^{-2}$ $\Rightarrow$ IN PRIMA APPROSSIMAZIONE, LA TERRA E' UN SISTEMA DI RIF. INERZIALE.

SARA' DUNQUE INERZIALE ANCHE UN QUALUNQUE SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE CON LA TERRA (PUR SE IN FORMA APPROSSIMATA).

- PER CIRCA 15 MILLENNI, L'UMANITA' HA RITENUTO CHE LO STATO NATURALE DELLA MATERIA FOSSE LO STATO DI QUIETE, E DEL RESTO LE OSSERVAZIONI DIMOSTRAVANO CHE OGGETTI IN MOTO, PRIMA O POI, SI FERMANO.
- GALILEO FU IL PRIMO AD ASSUMERE UN ATTEGGIAMENTO DIVERSO. EGLI CONSIDERÒ DEGLI "ESPERIMENTI CONCETTUALI", e.g. UN OGGETTO IN MOTO SU UNA SUPERFICIE PRIVA DI ATTRITO, E COMPRESE CHE "NON E' NELLA NATURA DI UN OGGETTO FERMARSI UNA VOLTA CHE SIA POSTO IN MOTO. PIUTTOSTO E' NELLA SUA NATURA <u>OPPORSI ALLE VARIAZIONI DI MOTO</u>, OVVERO: UNA VOLTA COMUNICATA AD UN CORPO UNA QUALSIASI VELOCITÀ, QUESTA SARA' INVARIABILMENTE MANTENUTA SINO A QUANDO NON CI SARANNO CAUSE ESTERNE RITARDANTI" ".

<u>PRIMA LEGGE DI NEWTON</u>: "IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE, QUANDO VISTO DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, UN OGGETTO IN QUIETE RIMARRA' IN QUIETE, E UN OGGETTO IN MOTO PERSEVERERA' NELLO STATO DI MOTO CON VELOCITA' COSTANTE"

⇒ QUANDO SU UN CORPO NON AGISCE ALCUNA FORZA, LA SUA ACCELERAZIONE E' ZERO.

⇒ IN ASSENZA DI CAUSE CHE MUTINO IL MOTO DI UN CORPO, LA SUA VELOCITA' NON CAMBIA.

⇒ UN QUALSIASI CORPO ISOLATO SI TROVA O A RIPOSO OPPURE IN MOTO CON VELOCITA' COSTANTE.

- LA TENDENZA DI UN CORPO A RESISTERE AI CAMBIAMENTI DELLA SUA VELOCITA' E' DETTA <u>INERZIA</u>.

$\vec{F} \propto \vec{a}$ GRANDE CONQUISTA CONCETTUALE

⇒ LA VELOCITA' DI UN CORPO NON PUO' VARIARE, SE SU DI ESSO NON AGISCONO FORZE

---

<u>MASSA:</u> E' LA PROPRIETA' DI UN OGGETTO CHE SPECIFICA LA RESISTENZA A CAMBIARE LA PROPRIA VELOCITA'.

MAGGIORE E' LA MASSA, MINORE E' L'ACCELERAZIONE, A PARITA' DI FORZA APPLICATA.

$$\vec{F} = m_1 \vec{a_1} = m_2 \vec{a_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a_2}|}{|\vec{a_1}|} = \frac{a_2}{a_1}$$

- LA MASSA E' UNA PROPRIETA' INTRINSECA, OVVERO NON DIPENDE DA CIO' CHE CIRCONDA IL CORPO, NE' DAL METODO IMPIEGATO PER MISURARLA.

IN MECCANICA NEWTONIANA, LA MASSA E' UNA GRANDEZZA SCALARE, E I NUMERI CHE ESPRIMONO IL SUO VALORE IN UNITA' DI GRAMMI O CHILOGRAMMI SONO NUMERI REALI.

- IL PESO E' UNA FORZA, E IL SUO MODULO EGUAGLIA IN MODULO LA FORZA GRAVITAZIONALE ESERCITATA DAL PIANETA SUL QUALE IL CORPO RISIEDE. UNA PERSONA CHE PESASSE 90 Kg PESO SULLA TERRA, PESEREBBE SOLTANTO 25 Kg PESO SULLA LUNA. LA MASSA DI UN CORPO E' INVECE LA STESSA OVUNQUE NELL'UNIVERSO.

$$P_T = m g_T = \frac{G m M_T}{(R_T)^2}$$

$$P_L = m g_L = \frac{G m M_L}{(R_L)^2}$$

$$g_\alpha = \frac{G M_\alpha}{(R_\alpha)^2}$$ SULLA SUPERFICIE DEL PIANETA $\alpha$

- FINORA ABBIAMO DEFINITO I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI, E ABBIAMO IDENTIFICATO LA FORZA COME L'AGENTE CHE FA VARIARE IL MOTO.

SECONDA LEGGE DI NEWTON: L'ACCELERAZIONE DI UN OGGETTO E' DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA FORZA RISULTANTE AGENTE SU DI ESSO, E INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALLA SUA MASSA

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m} \rightarrow \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

$\vec{F}$ = FORZA RISULTANTE = SOMMA VETTORIALE DI TUTTE LE FORZE AGENTI SULL'OGGETTO DI MASSA $m$.
= SOMMA VETTORIALE DI TUTTE LE FORZE ESTERNE AL SISTEMA.

- LE FORZE INTERNE (i.e. FRA ELEMENTI DEL SISTEMA) NON SONO INVECE INCLUSE POICHE' NON INFLUISCONO SUL MOTO DELL'INTERO SISTEMA.
- FORZA RISULTANTE = SOMMA DELLE FORZE = FORZA TOTALE = FORZA NON BILANCIATA

$$\sum_{i=1}^{n} F_x^{(i)} = m a_x, \quad \sum_{i=1}^{n} F_y^{(i)} = m a_y, \quad \sum_{i=1}^{n} F_z^{(i)} = m a_z$$

$\Rightarrow$ SI STUDIA IL MOTO DI UNA PARTICELLA SOTTOPOSTA A UNA FORZA RISULTANTE

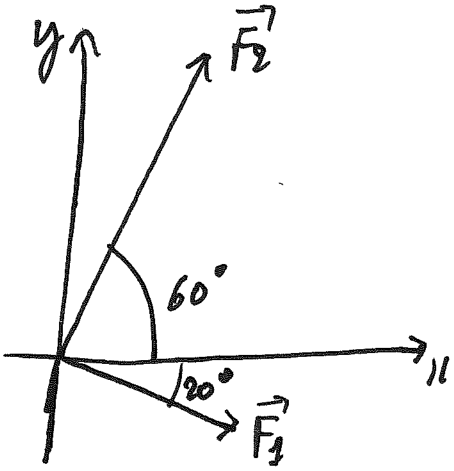
IN PARTICOLARE: $\vec{F}$ COSTANTE $\Rightarrow \vec{a}$ COSTANTE

- UNITA' DI FORZA = NEWTON = FORZA CHE, AGENDO SU UNA MASSA DI 1 kg, PRODUCE UN'ACCELERAZIONE DI $1\,m\,s^{-2}$:   $1\,N = 1\,kg \cdot m\,s^{-2}$

- ESEMPIO: DISCO DA HOCKEY ACCELERATO

$m = 0.3\ kg$

SUPERFICIE ORIZZONTALE PRIVA DI ATTRITO




$F_1 = 5\,N$
$F_2 = 8\,N$

IL DISCO E' COLPITO SIMULTANEAMENTE DA DUE DIVERSE MAZZE DA HOCKEY

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos 20° + F_2 \cos 60°$$

$$= 5N \cdot 0.94 + 8N \cdot 0.5 = 8.7\,N$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = -F_1 \sin 20° + F_2 \sin 60°$$

$$= -5N \cdot 0.342 + 8N \cdot 0.866 = 5.2\,N$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7\,N}{0.3\,kg} = 29\,m\,s^{-2}, \quad a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2\,N}{0.3\,kg}$$

$$= 17\,m\,s^{-2}$$

]SE7-7[

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 34 \, ms^{-2}$$

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{17}{29} \simeq 30°$$

RISPETTO AL SEMIASSE DELLE $x > 0$.

---

FORZA GRAVITAZIONALE E PESO

$\vec{F_g}$ = FORZA GRAVITAZIONALE = FORZA ESERCITATA DALLA TERRA SU DI UN OGGETTO

PER UN OGGETTO IN CADUTA LIBERA SI HA:

$$\sum \vec{F} = \vec{F_g} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\Rightarrow F_g = mg = \text{FORZA PESO}$$

$\Rightarrow$ IL PESO VARIA CON LA POSIZIONE GEOGRAFICA

$$g = \frac{G M_T}{d^2} = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} = g(h)$$

$$g(0) = \frac{G M_T}{(R_T)^2}$$

$$\frac{g(h)}{g(0)} = \frac{(R_T)^2}{(R_T+h)^2} = \left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \simeq 1 - \frac{2h}{R_T}$$

]SE7-8[

# FILE SE8

## LEGGI DI NEWTON (CONTINUAZIONE)

$$|\vec{P}| = m g = m \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ IL PESO, DIVERSAMENTE DALLA MASSA, NON E' UNA PROPRIETA' INTRINSECA DI UN CORPO.

- ESEMPIO: CORPO CON MASSA $m = 70\,kg$

$$h = 0$$
$$g = g(0) = 9.8\,m\,s^{-2}$$
$$mg = 686\,N = m\,g(0)$$

MA IN CIMA AD UNA MONTAGNA, DOVE

$$g(h) = 9.76\,m\,s^{-2}$$
$$m\,g(h) = 683\,N$$

Per DUE CORPI ALLA STESSA QUOTA:

$$\frac{|\vec{P_1}|}{|\vec{P_2}|} = \frac{m_1\,g(h)}{m_2\,g(h)} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\vec{P} = m_g\,\vec{g}$$

$\Rightarrow$ $m_g$ E' LA MASSA GRAVITAZIONALE, CHE DETERMINA L'INTENSITA' DELL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE FRA IL CORPO E LA TERRA.

CONCETTUALMENTE, MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE SONO DISTINTE, MA SPERIMENTALMENTE SI SA CHE COINCIDONO CON L'ACCURATEZZA DI UNA PARTE SU $10^{11}$.

---

## LA TERZA LEGGE DI NEWTON:

LE FORZE SONO SEMPRE INTERAZIONI FRA DUE OGGETTI.

N3: "SE DUE CORPI INTERAGISCONO, LA FORZA $\vec{F}_{12}$ ESERCITATA DAL CORPO 1 SUL CORPO 2 E' UGUALE IN MODULO MA DI VERSO OPPOSTO ALLA FORZA $\vec{F}_{21}$ ESERCITATA DAL CORPO 2 SUL CORPO 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$\Rightarrow$ LE FORZE SI PRESENTANO SEMPRE IN COPPIA

$\Rightarrow$ NON ESISTE UNA SINGOLA FORZA ISOLATA

$\vec{F}_{12}$ = FORZA DI AZIONE

$\vec{F}_{21}$ = FORZA DI REAZIONE

- ESEMPIO: LA FORZA AGENTE SU UN PROIETTILE IN CADUTA LIBERA E' $\vec{F}_g = \vec{F}_{TP}$, LA FORZA DI REAZIONE E' $\vec{F}_{PT} = -\vec{F}_{TP}$

]SE8-2[

POICHÉ $\frac{M_T}{M_P} \gg 1$, L'ACCELERAZIONE DELLA TERRA DOVUTA A $\vec{F}_{PT}$ E' TRASCURABILE.

---

ALTRO ESEMPIO: LA FORZA $\vec{F}_{mc}$ ESERCITATA DA UN MARTELLO SU UN CHIODO E' UGUALE E OPPOSTA ALLA FORZA $\vec{F}_{cm}$ DAL CHIODO SUL MARTELLO. QUEST'ULTIMA FORZA FERMA IL MOTO IN AVANTI DEL MARTELLO.

---

ALTRO ESEMPIO: MONITOR DI COMPUTER FERMO SU UN TAVOLO.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{Tm}$$

L'ASSOCIATA FORZA DI REAZIONE E' LA FORZA CHE IL MONITOR ESERCITA SULLA TERRA:

$$\vec{F}_{mT} = -\vec{F}_{Tm}$$

IL MONITOR NON ACCELERA, PERCHE' E' SOSTENUTO DAL TAVOLO. IL TAVOLO ESERCITA SUL MONITOR UNA FORZA VERSO L'ALTO: $\vec{n} = \vec{F}_{tm}$,

DETTA <u>FORZA NORMALE</u>

LA FORZA NORMALE IMPEDISCE AL MONITOR DI CADERE ATTRAVERSO IL TAVOLO.

MONITOR HA ACCELERAZIONE NULLA

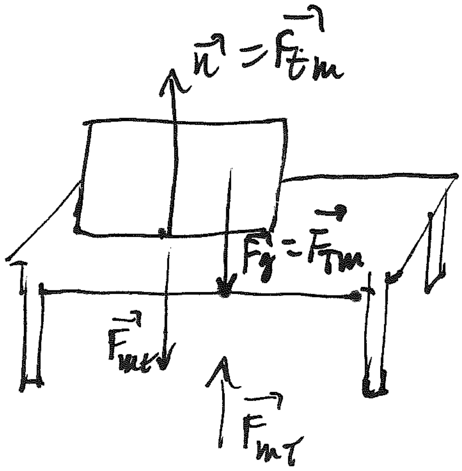
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2} \vec{F}^{(i)} = \vec{n} - m\vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{n} = m\vec{g}$$

$\Rightarrow$ LA FORZA NORMALE BILANCIA ESATTAMENTE LA FORZA GRAVITAZIONALE SUL MONITOR

$\Rightarrow$ LA FORZA RISULTANTE SUL MONITOR E' ZERO

FORZA DI REAZIONE A $\vec{n}$ = FORZA VERSO IL BASSO ESERCITATA DAL MONITOR SUL TAVOLO:

$$\vec{F}_{mt} = -\vec{F}_{tm}$$




---

N.B. NELLA 3ª LEGGE DI NEWTON, LE FORZE COINVOLTE AGISCONO SU OGGETTI DIVERSI.

AD ESEMPIO, NEL CASO DI UNA SLITTA TRAINATA DA UN CAVALLO, LA FORZA ESERCITATA DAL CAVALLO AGISCE SULLA SLITTA, E LA FORZA ESERCITATA DALLA SLITTA AGISCE SUL CAVALLO. QUESTE FORZE AGISCONO SU CORPI DIVERSI E DUNQUE NON POSSONO ELIDERSI

- FORZE ORIZZONTALI ESERCITATE SOLO SULLA SLITTA:

  FORZA IN AVANTI $\vec{F}_{CS}$ ESERCITATA DAL CAVALLO

  + FORZA D'ATTRITO (VEDASI OLTRE) ALL'INDIETRO $\vec{f}_{SLITTA}$ FRA LA SLITTA E LA SUPERFICIE

  $|\vec{F}_{CS}| > |\vec{f}_{SLITTA}| \Rightarrow$ LA SLITTA ACCELERA VERSO DESTRA

- FORZE ORIZZONTALI AGENTI SOLO SUL CAVALLO:

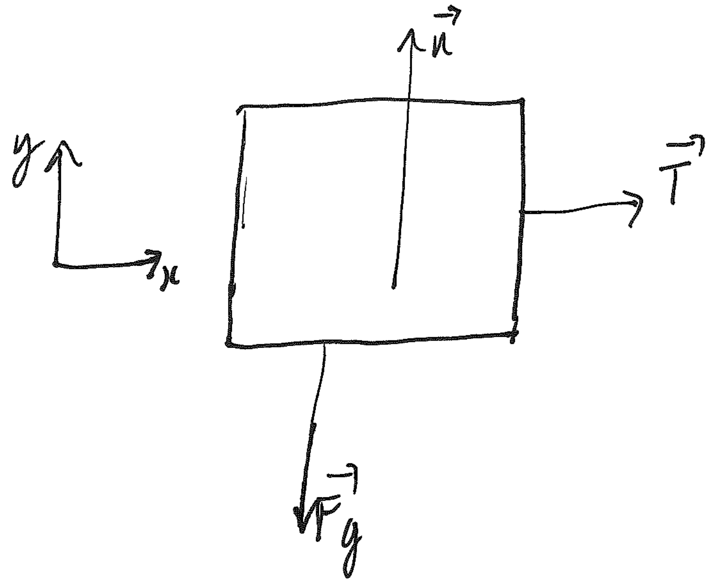
  FORZA D'ATTRITO IN AVANTI $\vec{f}_{CAVALLO}$ COL SUOLO

  + FORZA NEL VERSO OPPOSTO $\vec{F}_{SC}$ ESERCITATA DALLA SLITTA

  $\dfrac{|\vec{f}_{CAVALLO}|}{|\vec{F}_{SC}|} > 1 \Rightarrow$ IL CAVALLO ACCELERA VERSO DESTRA

SE UN BLOCCO E' TIRATO DA UNA FUNE, LA FUNE ESERCITA UNA FORZA $\vec{T}$ SUL BLOCCO.

$$|\vec{T}| = \text{TENSIONE DELLA FUNE}$$



# FORZE DI ATTRITO

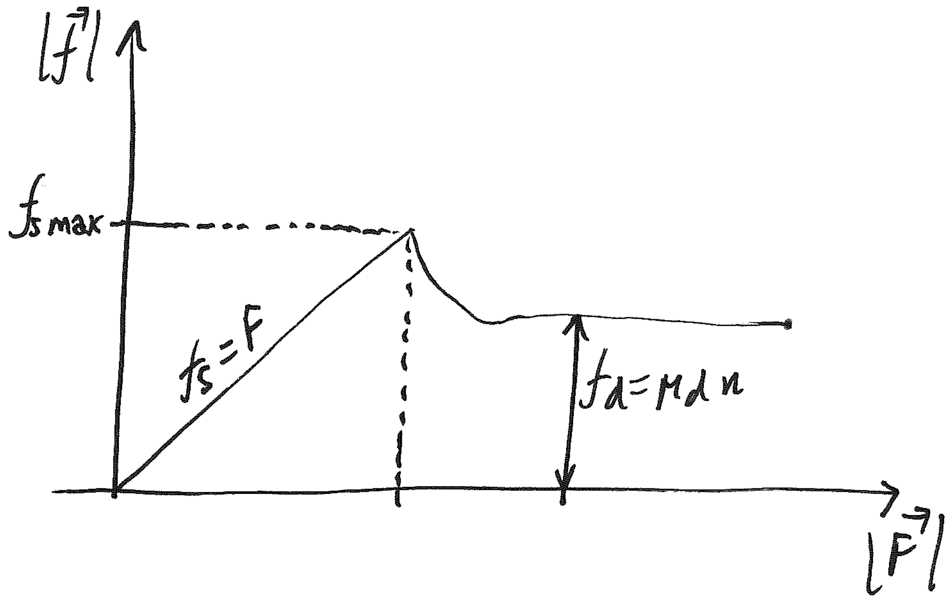
QUANDO UN CORPO SI MUOVE SU UNA SUPERFICIE SCABRA, O ATTRAVERSO UN MEZZO VISCOSO QUALE ARIA O ACQUA, L'INTERAZIONE DEL CORPO CON CIO' CHE LO CIRCONDA GENERA UNA RESISTENZA AL MOTO.
TALE RESISTENZA E' DETTA <u>FORZA DI ATTRITO</u>

E' GRAZIE ALLE FORZE DI ATTRITO CHE NOI POSSIAMO CAMMINARE E CORRERE, E I VEICOLI A RUOTE POSSONO MUOVERSI

- ESEMPIO: SI TRASCINA UN BIDONE IN GIARDINO, E LA SUPERFICIE DEL VIALETTO NON E' LISCIA. SI APPLICA UNA FORZA ESTERNA ORIZZONTALE $\vec{F}$ VERSO DESTRA, E LA FORZA CHE CONTRASTA $\vec{F}$ E IMPEDISCE AL BIDONE DI MUOVERSI AGENDO VERSO SINISTRA E' LA FORZA DI ATTRITO STATICO $\vec{f_s}$. BIDONE ALL'EQUILIBRIO:

  $|\vec{f_s}| = |\vec{F}| \Rightarrow$ SE $|\vec{F}|$ AUMENTA (DIMINUISCE) ANCHE $|\vec{f_s}|$ AUMENTA (DIMINUISCE)

- LA FORZA D'ATTRITO PER UN OGGETTO IN MOTO E' INVECE LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO.




SE $|\vec{F}| > |\vec{f}_{s,max}|$ $\Rightarrow$ IL BIDONE SI MUOVE E ACCELERA VERSO DESTRA

- SE SI RIDUCE $|\vec{F}|$ FINO A RENDERE $|\vec{F}| = |\vec{f}_d|$, L'ACCELERAZIONE E' ZERO E IL BIDONE SI MUOVE VERSO DESTRA CON VELOCITA' COSTANTE
- SE POI LA FORZA APPLICATA VIENE RIMOSSA, LA FORZA DI ATTRITO AGENTE VERSO SINISTRA PRODUCE UNA ACCELERAZIONE NELLA DIREZIONE DELLE $x < 0$, FINO A RIPORTARE IL BIDONE IN QUIETE
- SPERIMENTALMENTE, SI TROVA CHE

$$|\vec{f}_{s,max}| \propto |\vec{n}|, \qquad |\vec{f}_d| \propto |\vec{n}|$$

(1) $f_s \leq \mu_s\, n$ (**)

$\mu_s$ = COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO

NELLA (**) VALE = QUANDO IL BLOCCO E' SUL PUNTO DI INIZIARE A SCIVOLARE

(2) $f_d = \mu_d\, n$

$\mu_d$ = COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO

IN PRIMA APPROSSIMAZIONE, $\mu_d$ E' INDIPENDENTE DALLA VELOCITA' RELATIVA DELLE SUPERFICI.

(3) I VALORI DI $\mu_d$ E $\mu_s$ DIPENDONO DALLA NATURA DELLE SUPERFICI, E $\mu_d < \mu_s$

(4) LA DIREZIONE DELLA FORZA D'ATTRITO AGENTE SU UN OGGETTO E' OPPOSTA AL MOTO REALE (ATTRITO CINETICO) O AL MOTO IMMINENTE (ATTRITO STATICO) DELL'OGGETTO.

COEFFICIENTI DI ATTRITO:

| | $\mu_s$ | $\mu_d$ |
|---|---|---|
| ACCIAIO SU ACCIAIO | 0.74 | 0.57 |
| ALLUMINIO " | 0.61 | 0.47 |
| RAME " | 0.53 | 0.36 |
| GOMMA SU CEMENTO | 1 | 0.8 |
| LEGNO SU LEGNO | 0.25-0.5 | 0.2 |
| VETRO SU VETRO | 0.94 | 0.4 |
| LEGNO CERATO SU NEVE BAGNATA | 0.14 | 0.1 |
| METALLO SU METALLO | 0.15 | 0.06 |
| GHIACCIO SU GHIACCIO | 0.1 | 0.03 |
| TEFLON SU TEFLON | 0.04 | 0.04 |
| GIUNTI SINOVIALI | 0.1 | 0.003 |

]SE8-10[

-ESEMPIO: UNA PIATTAFORMA PER TRIVELLAZIONE VIENE TRASCINATA DAL CORDONE OMBELICALE SUL FONDO DELL'OCEANO, MA QUANDO ESSA SI AVVICINA AL MARGINE DELL'ABISSO, SI FERMA A POCA DISTANZA DAL MARGINE.

TEORIA: LA PIATTAFORMA E' SOGGETTA A DUE FORZE ORIZZONTALI: LA TENSIONE DEL CORDONE OMBELICALE CHE LA TIRA IN AVANTI (→), E LA FORZA D'ATTRITO CON IL FONDO DELL'OCEANO CHE LA TIRA INDIETRO (←).

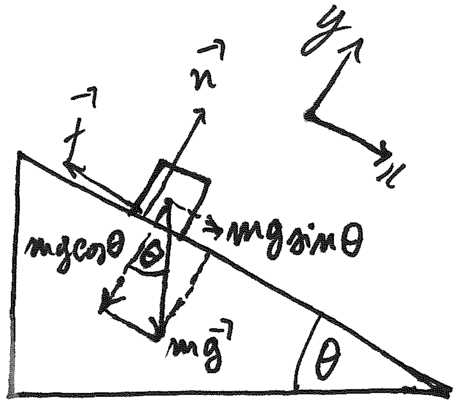
SE LE 2 FORZE SI EGUAGLIANO, L'ACCELERAZIONE DELLA PIATTAFORMA E' =0 ⇒ ESSA SI MUOVE CON VELOCITA' COSTANTE.

QUANDO LA PIATTAFORMA SI AVVICINA ALL'ORLO DELL'ABISSO, L'ANGOLO FORMATO DAL CORDONE OMBELICALE CON L'ORIZZONTALE AUMENTA ⇒ LA COMPONENTE DI FORZA PARALLELA AL FONDO DELL'OCEANO DIMINUISCE
⇒ LA COMPONENTE VERTICALE VERSO IL BASSO AUMENTA
⇒ AUMENTA LA FORZA NORMALE SU DI ESSA
⇒ AUMENTA LA FORZA D'ATTRITO FRA PIATTAFORMA E FONDO DELL'OCEANO

— SUL BORDO DELL'ABISSO, LA FORZA ESERCITATA DAL CORDONE E' QUASI VERTICALE ⇒ FORZA IN AVANTI QUASI =0 SPINTA VERSO IL FONDO ⇒ IL GRANDE ATTRITO FERMA LA PIATTAFORMA.

]SE8-11[

ESEMPIO: METODO SPERIMENTALE PER MISURARE $\mu_s$ E $\mu_d$




BLOCCO SU SUPERFICIE SCABRA INCLINATA RISPETTO ALL' ORIZZONTALE.

(1) QUAL E' IL COEFFICIENTE D'ATTRITO STATICO, CORRELATO ALL' ANGOLO CRITICO $\theta_c$ PER IL QUALE IL BLOCCO INIZIA A MUOVERSI?

- CI SONO 3 FORZE SUL BLOCCO: FORZA DI GRAVITA' $m\vec{g}$, FORZA NORMALE $\vec{n}$, FORZA DI ATTRITO STATICO $\vec{f_s}$. FINO A QUANDO IL BLOCCO NON SI MUOVE, QUESTE FORZE SI BILANCIANO E IL BLOCCO E' IN EQUILIBRIO.

SIA L'ASSE $x$ PARALLELO AL PIANO INCLINATO

" $y$ PERPENDICOLARE " "

2ª LEGGE DI NEWTON

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} F_x^{(i)} = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - f_s = mg\sin\theta - f_s = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_y^{(i)} = n - mg\cos\theta = 0$$

QUESTE EQUAZIONI VALGONO $\forall \theta$.

$\theta_c$ = VALORE DI $\theta$ PER IL QUALE IL BLOCCO E' SUL PUNTO DI SCIVOLARE $\Rightarrow f_s = \mu_s n$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} mg \sin\theta_c &= \mu_s n \\ mg \cos\theta_c &= n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta_c = \mu_s$$

(2) COME SI PUO' MISURARE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO?

- UNA VOLTA CHE IL MOTO DEL BLOCCO INIZIA, LA FORZA DI ATTRITO HA MODULO $\mu_d n < f_s$.

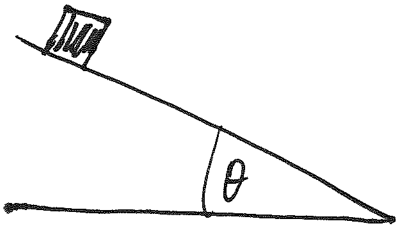
$\Rightarrow$ SE $\theta = \theta_c$, IL BLOCCO ACCELERA VERSO IL BASSO LUNGO IL PIANO INCLINATO.

$\Rightarrow$ PER RISTABILIRE LA CONDIZIONE D'EQUILIBRIO NELL'EQUAZIONE $\sum_i F_x^{(i)} = 0$ SI DEVE SOSTITUIRE $f_s$ CON $f_d$

$\Rightarrow$ SI DEVE RIDURRE $\theta$ AD UN VALORE $\hat{\theta}$ TALE CHE IL BLOCCO SCIVOLI GIU' PER IL PIANO CON VELOCITA' COSTANTE

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} mg \sin\hat{\theta} &= \mu_d n \\ mg \cos\hat{\theta} &= n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\hat{\theta} = \mu_d$$

ESEMPIO: UNA CASSA SU UNO SCIVOLO




$\theta = 30°$ $\qquad a = \frac{g}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} F_x^{(i)} = ma \Rightarrow mg\sin\theta - f_d = ma \\ \sum_{i=1}^{3} F_y^{(i)} = 0 \Rightarrow n - mg\cos\theta = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f_d = \mu_d n = \mu_d mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = ma$$

$$\Rightarrow g\sin\theta - a = \mu_d g\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_d = \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$= 0.192$$

]SE8-14[

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME — FILE SE9

- SAPPIAMO DALLE LEZIONI PRECEDENTI CHE, SE UNA PARTICELLA SI MUOVE CON VELOCITA' COSTANTE IN MODULO SUL BORDO DI UN CERCHIO DI RAGGIO $r$, ESSA HA UNA ACCELERAZIONE CENTRIPETA DI MODULO

$$a_c = \frac{V^2}{r}$$

IL VETTORE $\vec{a_c}$ E' DIRETTO VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO ED E' SEMPRE PERPENDICOLARE a $\vec{V}$.

$\Rightarrow$ LA FORZA PREVISTA DALLA 2ª LEGGE DI NEWTON DEVE ESSERE ANCH'ESSA DIRETTA VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO.

- ESEMPIO: UN OGGETTO DI MASSA $m$ SIA LEGATO AD UN FILO DI LUNGHEZZA $r$ CHE E' FATTO GIRARE RAPIDAMENTE LUNGO UNA CIRCONFERENZA SU UN TAVOLO PRIVO DI ATTRITO.

INERZIA DELL'OGGETTO $\Rightarrow$ L'OGGETTO TENDEREBBE A MUOVERSI IN LINEA RETTA

FILO $\Rightarrow$ ESSO IMPEDISCE IL MOTO RETTILINEO, PERCHE' ESERCITA UNA FORZA RADIALE $\vec{F_r}$ SULL'OGGETTO TALE DA MANTENERLO SULLA SUA TRAIETTORIA CIRCOLARE

$|\vec{F_r}|$ = TENSIONE DEL FILO. $\vec{F_r}$ DIRETTA VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO

PER UNA PARTICELLA IN MOTO CIRCOLARE, LA
$2^a$ LEGGE DI NEWTON FORNISCE

$$\sum_i F^{(i)} = m a_c = m \frac{v^2}{R}$$

CI SONO VARI TIPI DI FORZE CHE POSSONO
PRODURRE UN MOTO CIRCOLARE.

- CASO PARTICOLARE: FORZA AGENTE $\to 0$
  $\Rightarrow$ L'OGGETTO SI MUOVE ALLORA LUNGO UNA LINEA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA. AD ESEMPIO, NEL CASO DI UNA PALLA CHE RUOTA SU UNA CIRCONFERENZA ALL'ESTREMITA' DI UN FILO, SE IL FILO SI ROMPESSE, LA PALLA SI MUOVEREBBE LUNGO UNA LINEA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO DOVE IL FILO SI E' SPEZZATO.

- ESEMPIO: UN OGGETTO DI MASSA 0.5 Kg E' ATTACCATO ALL'ESTREMITA' DI UNA FUNE DI LUNGHEZZA 1.5 m, E RUOTA SU UNA CIRCONFERENZA NEL PIANO. SE LA FUNE PUO' SOPPORTARE UNA TENSIONE MASSIMA DI 50 N, QUAL E' LA MASSIMA VELOCITA' DELL'OGGETTO PRIMA CHE LA FUNE SI SPEZZI?

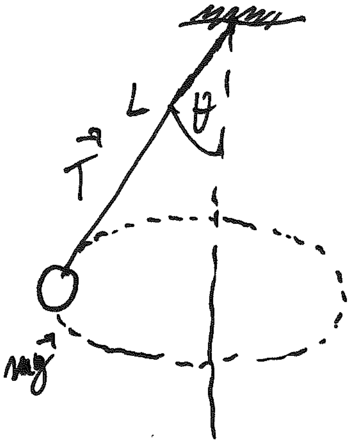
$$\sum F_r = m a_c \Rightarrow T = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{rT}{m}}$$

$$= 12.2 \, m s^{-1}$$

- ESEMPIO: PENDOLO CONICO

- UN CORPO DI MASSA $m$ E' SOSPESO AD UN FILO DI LUNGHEZZA $L$. IL CORPO RUOTA SU UNA CIRCONFERENZA NEL PIANO DI RAGGIO $r$ CON VELOCITA' COSTANTE IN MODULO, $v$. IL FILO DESCRIVE LA SUPERFICIE DI UN CONO, E SI PARLA QUINDI DI PENDOLO CONICO. QUAL E' LA VELOCITA' DEL CORPO?

$\vec{T}$ = FORZA ESERCITATA DALLA FUNE




$T\cos\theta$ = COMPONENTE VERTICALE DELLA FORZA ESERCITATA DALLA FUNE

$T\sin\theta$ = COMPONENTE ORIZZONTALE DI TALE FORZA

L'OGGETTO NON ACCELERA NELLA DIREZIONE VERTICALE

$\Rightarrow$ PARTICELLA IN EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE VERTICALE

$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$$

- NELLA DIREZIONE ORIZZONTALE, IL CORPO HA INVECE UN'ACCELERAZIONE CENTRIPETA $\Rightarrow \sum F_r = m a_r \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ T\cos\theta = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

$$(\sin\theta)L = r \Rightarrow \quad v = \sqrt{Lg(\sin\theta)\tan\theta}$$

- QUAL E' IL TEMPO NECESSARIO A COMPLETARE UNA RIVOLUZIONE ?

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{rg\tan\theta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\tan\theta}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{\sqrt{L\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta/\cos\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

---

ESEMPIO: STRADA SOPRAELEVATA.

- SU UNA STRADA NON SOPRAELEVATA, LA FORZA CHE DA' LUOGO ALL'ACCELERAZIONE CENTRIPETA E' LA FORZA DI ATTRITO STATICO FRA LA STRADA E L'AUTO


STRADA SOPRAELEVATA DI UN ANGOLO $\theta$

$\Rightarrow$ LA FORZA NORMALE $\vec{n}$ HA SEMPRE UNA COMPONENTE ORIZZONTALE $n_x = n\sin\theta$

DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CURVA.

IPOTESI: CURVA TALE CHE LA FORZA DI ATTRITO STATICO SIA NULLA $\Rightarrow$ L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA E' DOVUTA SOLAMENTE A $n \sin\theta$

2ª LEGGE DI NEWTON

$$\Rightarrow \sum F_r = \frac{mv^2}{r} = n \sin\theta$$

EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE VERTICALE

$$\Rightarrow \quad n\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow n\cos\theta = mg$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

---

ESEMPIO: PILOTA DI UN JET

- UN PILOTA DI MASSA $m$ ESEGUE SU UN JET IL "GIRO DELLA MORTE", PERCORRENDO IL BORDO DI UN CERCHIO DI RAGGIO 2,7 Km, ALLA VELOCITA' DI MODULO COSTANTE = 225 $m\,s^{-1}$

- QUAL E' LA FORZA DEL SEDILE SUL PILOTA NEL PUNTO PIU' BASSO DELLA CIRCONFERENZA?

]SE 9-5[

SUL PILOTA AGISCONO DUE FORZE: LA GRAVITA' $m\vec{g}$, VERSO IL BASSO, E LA FORZA $\vec{n}_{basso}$ ESERCITATA DAL SEDILE SUL PILOTA, DIRETTA VERSO L'ALTO.

2ª LEGGE DI NEWTON PER LA DIREZIONE RADIALE:

$$\sum_{i=1}^{2} F_y^{(i)} = ma \Rightarrow n_{basso} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow n_{basso} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left[1 + \frac{v^2}{rg}\right]$$

$$= 2.91\, mg$$

OVVERO E' QUASI TRE VOLTE LA FORZA PESO

(2) COSA SUCCEDE NEL PUNTO PIU' ALTO DELLA CIRCONFERENZA?

- IN QUEL PUNTO, SIA LA FORZA ESERCITATA DAL SEDILE, SIA LA GRAVITA', SONO DIRETTE VERSO IL BASSO

$$\Rightarrow n_{alto} + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow n_{alto} = mg\left[\frac{v^2}{rg} - 1\right] = 0.911\, mg$$

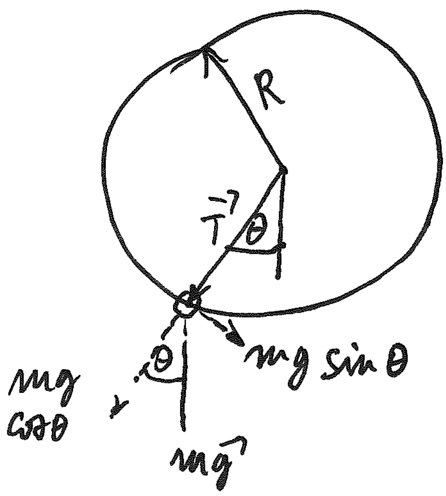
# MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

SE UNA PARTICELLA SI MUOVE CON VELOCITA' VARIABILE LUNGO UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_r + \sum \vec{F}_t$

- IL VETTORE $\sum \vec{F}_r$ E' DIRETTO VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO E CAUSA L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA
- IL VETTORE $\sum \vec{F}_t$ E' TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA ED E' RESPONSABILE DELL'ACCELERAZIONE TANGENZIALE.
- ESEMPIO: SFERA RUOTANTE

UNA SFERA DI MASSA $m$ E' LEGATA ALL'ESTREMITA' DI UN FILO DI LUNGHEZZA $R$ CHE RUOTA SUL BORDO DI UN CERCHIO DI CENTRO O.




$\sum F_t = m a_t$

$\Rightarrow mg \sin\theta = m a_t$

$\Rightarrow a_t = g \sin\theta$

$\sum F_r = m a_r$

$\Rightarrow -mg \cos\theta + T = + m \frac{v^2}{R}$

$\Rightarrow T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$

]SEG-7[

NEL PUNTO PIU' BASSO DELLA TRAIETTORIA: $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow T_{basso} = m\left(\frac{v^2_{basso}}{R} + g\right) = \text{VALORE MASSIMO DI } T$$

PER I TRAPEZISTI, LE LORO FUNI DI SOSTEGNO SONO SOTTOPOSTE A QUESTA MAGGIOR TENSIONE NEL PUNTO PIU' BASSO DELL'OSCILLAZIONE

---

FORZE D'ATTRITO DIPENDENTI DALLA VELOCITA'

- QUI SI CONSIDERA L'EFFETTO DI UN MEZZO, COME UN LIQUIDO O UN GAS. AD ESEMPIO, VIAGGIANDO IN AUTO AD ALTA VELOCITA', LA FORZA CHE SPINGE INDIETRO LA NOSTRA MANO E' LA FORZA DOVUTA ALL'ARIA CHE FLUISCE AL DI LA' DELLA MACCHINA.

IL MODULO DI TALE FORZA $\vec{R}$ DIPENDE DALLA VELOCITA' RELATIVA OGGETTO – MEZZO, E IL VERSO DI $\vec{R}$ E' SEMPRE OPPOSTO A QUELLO DEL MOTO DELL'OGGETTO.

- ESEMPI:
  - RESISTENZA DELL'ARIA ASSOCIATA AL MOTO DEI VEICOLI
  - FORZA DEL VENTO SULLE VELE DI IMBARCAZIONE
  - FORZE VISCOSE SUGLI OGGETTI CHE AFFONDANO IN UN LIQUIDO

]SE9-8[

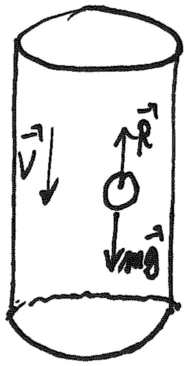
PRIMO MODELLO: FORZA D'ATTRITO PROPORZIONALE ALLA VELOCITA' DELL'OGGETTO (QUESTO AVVIENE PER OGGETTI CHE CADONO IN UN FLUIDO A BASSA VELOCITA' E PER OGGETTI PICCOLISSIMI (e.g. PARTICELLE DI POLVERE IN ARIA)).

FORZA DI VISCOSITA':

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

ESSA SI OPPONE ALLA VELOCITA'

$b = b$ (PROPRIETA' DEL MEZZO, FORMA E DIMENSIONI DELL'OGGETTO)




$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow mg - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \frac{b}{m}\right) v = g$$

$v$ = SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA + SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQ. COMPLETA

]SE9-9[

EQ. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int dt \Rightarrow \log \frac{v}{v_0} = \frac{-b}{m}(t-0) + \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow v = A \exp\left(-\frac{b}{m}(t-0)\right) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \tau = \frac{m}{b}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQ. COMPLETA:

$$v = \text{CONSTANT} = \frac{mg}{b} = -A$$

$$\Rightarrow v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad v_L = \tau g$$

FORZA VISCOSA = PESO $\Rightarrow mg - bv = 0$

$$\Rightarrow v = v_L = \frac{mg}{b} = \tau g = \text{VELOCITA' LIMITE}$$

$\tau = \frac{m}{b}$ = TEMPO NECESSARIO ALL'OGGETTO PER RAGGIUNGERE IL 63.2 % DELLA VELOCITA' LIMITE

SECONDO MODELLO: PER OGGETTI DI GRANDI DIMENSIONI CHE SI MUOVONO NELL'ARIA CON VELOCITÀ ELEVATE, COME AEREI, PARACADUTISTI, PALLE DA BASEBALL, SI HA

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

$\rho$ = DENSITÀ DELL'ARIA

$A$ = AREA DELLA SEZIONE

$D$ = COEFFICIENTE DI RESISTENZA $(D \in \mathbb{R})$

FORMA SFERICA $\Rightarrow D \hat{=} 0.5$

FORMA IRREGOLARE $\Rightarrow D \hat{=} 2$

$\left.\begin{array}{l} R \text{ DIMINUISCE SE } \rho \text{ DIMINUISCE} \\ \rho \text{ DIMINUISCE SE } h \text{ AUMENTA} \end{array}\right\}$ $h$ = ALTITUDINE

$\Rightarrow$ $R$ DIMINUISCE SE $h$ AUMENTA

$\Rightarrow$ CONVIENE FAR VOLARE GLI AEREI A GRANDI ALTEZZE

MA/POI: VOLO PIÙ RAPIDO $\Rightarrow$ VELOCITÀ MAGGIORE

$\Rightarrow$ ATTRITO MAGGIORE

$\Rightarrow$ SI RAGGIUNGE ALFINE UN COMPROMESSO FRA VOLO AD ALTA QUOTA E ALTA VELOCITÀ

]SEG-11[

ESEMPIO: OGGETTO DI MASSA $m$ SIA LASCIATO CADERE DALLA QUIETE DA UNA QUOTA $y=0$

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - \frac{1}{2} D \rho A v^2 = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{D \rho A}{2m} v^2$$

SE GRAVITA' = FORZA D'ATTRITO $\Rightarrow a = 0$

$$\Rightarrow g = \frac{D \rho A}{2m} v_L^2$$

$$\Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{2mg}{D \rho A}} = \text{VELOCITA' LIMITE}$$

PARACADUTISTA: $v_L = 60\ ms^{-1}$

PALLA BASEBALL: $v_L = 33\ ms^{-1}$

PALLA GOLF: $v_L = 32\ ms^{-1}$

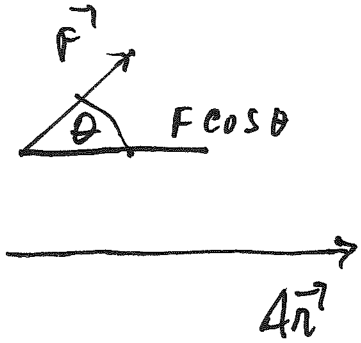
CHICCO GRANDINE: $v_L = 14\ ms^{-1}$

GOCCIA DI PIOGGIA: $v_L = 9\ ms^{-1}$

# FILE SE10

## LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA COSTANTE:

- UNA PARTICELLA COMPIE UNO SPOSTAMENTO $\Delta\vec{r}$ LUNGO UNA LINEA RETTA, QUANDO E' SOGGETTA AD UNA FORZA COSTANTE $\vec{F}$ CHE FORMA UN ANGOLO $\theta$ CON $\Delta\vec{r}$.




DEFINIZIONE: IL LAVORO SVOLTO DA TALE FORZA COSTANTE E'

$$W = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta = F(\Delta r)\cos\theta$$

IN PARTICOLARE, IL LAVORO E' NULLO SE $\theta = \frac{\pi}{2}$

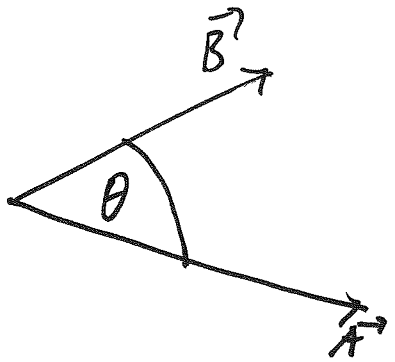
$$[W] = \text{NEWTON} \cdot \text{METRO} = [M][L^2][T^{-2}]$$
$$= \text{JOULE}$$

PER SPOSTAMENTI ORIZZONTALI, LA FORZA NORMALE E LA FORZA DI GRAVITA' NON COMPIONO LAVORO

- SE UN OGGETTO E' SOLLEVATO, IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA APPLICATA E' POSITIVO, POICHE' LA FORZA CHE SOLLEVA E' DIRETTA VERSO L'ALTO, DUNQUE NELLO STESSO VERSO DELLO SPOSTAMENTO
- SE INVECE IL VETTORE ASSOCIATO ALLA COMPONENTE $F \cos\theta$ E' NEL VERSO OPPOSTO ALLO SPOSTAMENTO, $W$ E' NEGATIVO.
- ESEMPIO: PER OGGETTI SOLLEVATI, IL LAVORO SVOLTO DALLA GRAVITA' E' $<0$.
- IN PARTICOLARE, SE $\theta = 0 \Rightarrow W = F \Delta r$
- SE UNA PERSONA SOLLEVA UNA SCATOLA DI MASSA $m$ ALLA ALTEZZA $h$, E POI CAMMINA ORIZZONTALMENTE, IL LAVORO COMPIUTO DURANTE LO SPOSTAMENTO VERTICALE E' $W = F \Delta r = mgh$, MENTRE IL LAVORO COMPIUTO MENTRE LA SCATOLA E' SPOSTATA ORIZZONTALMENTE E' ZERO, ASSUMENDO CHE LA SCATOLA NON ACCELERI.

]SE 10-9[

LA DEFINIZIONE DI LAVORO PUO' ESSERE RIESPRESSA IN MANIERA PIU' APPROPRIATA INTRODUCENDO IL CONCETTO DI PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI.




$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta_{AB}$$

$$= A\,B\cos\theta$$

$$\Rightarrow W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta = F(\Delta r)\cos\theta$$

N.B.:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

VETTORI PARALLELI E CONCORDI $\Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

" " DISCORDI $\Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$

POICHE' $\cos(\pi) = -1$

SIANO ORA $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ I VERSORI LUNGO GLI ASSI $x, y, z$ RISPETTIVAMENTE

ESSI HANNO MODULO 1 E SONO MUTUAMENTE ORTOGONALI, DA CUI

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{A} = (A_x)^2\,\vec{i}\cdot\vec{i} + (A_y)^2\,\vec{j}\cdot\vec{j} + (A_z)^2\,\vec{k}\cdot\vec{k} + 0$$

$$= (A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2 = A^2$$

---

— ESEMPIO: $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = (2\vec{i}+3\vec{j})\cdot(-\vec{i}+2\vec{j}) = -2+0+0+6 = 4$$

$$A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

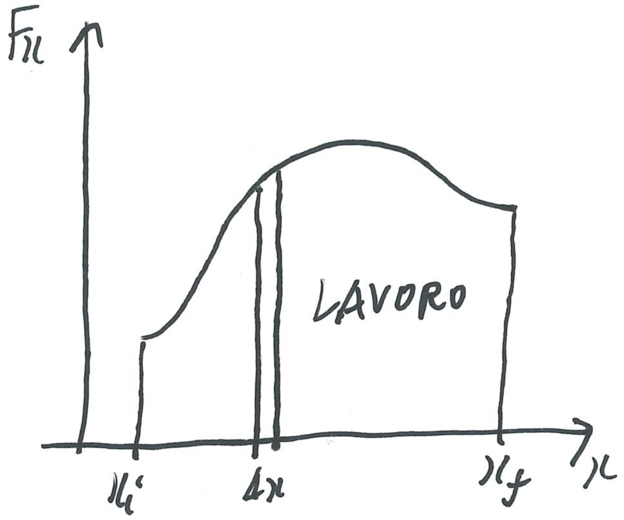
$$B = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13\cdot 5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \simeq 0.49$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\frac{4}{\sqrt{65}} = 60.3^\circ$$

] SE10-4 [

# LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA VARIABILE:




$$\text{LAVORO} = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = W$$

SE POI LA PARTICELLA SEGUE UN PERCORSO ARBITRARIO SOTTO L'AZIONE DI PIU' FORZE, SCRIVIAMO

$$W_{TOT} = \sum_i W^{(i)} = \int \sum_i (\vec{F})^i \cdot d\vec{r}$$

---

ESEMPIO: LAVORO SVOLTO DA UNA MOLLA

- UN BLOCCO SU UNA SUPERFICIE ORIZZONTALE SIA COLLEGATO AD UNA MOLLA.

FORZA ESERCITATA DALLA MOLLA SUL BLOCCO:

$$F_m = -Kx$$

$\uparrow$

LEGGE DI HOOKE

K = COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA

MOLLE RIGIDE $\Rightarrow$ ALTI VALORI DI K

MOLLE MORBIDE $\Rightarrow$ VALORI DI K PIU' BASSI

- LA FORZA ESERCITATA DALLA MOLLA E' SEMPRE DIRETTA IN VERSO OPPOSTO A QUELLO DELLO SPOSTAMENTO DALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO ($x=0$).

e.g. SE $x>0$, $F_m<0$

$x<0 \Rightarrow$ MOLLA COMPRESSA $\Rightarrow F_m>0$

$F_m$ = FORZA DI RICHIAMO

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} (-Kx)\, dx = \frac{1}{2}K(x_i)^2 - \frac{1}{2}K(x_f)^2$$

$\pm x_i = x_f \Rightarrow W_m = 0$

- C'E' POI IL LAVORO COMPIUTO DA UN AGENTE ESTERNO SUL BLOCCO QUANDO SI TIRI MOLTO LENTAMENTE UNA MOLLA DA $x_i = -x_{max}$ a $x_f = 0$

$$W_{F_{app}} = \int_{-x_{max}}^{0} F_{app}\, dx = \int_{-x_{max}}^{0} Kx\, dx = -\frac{1}{2}K(x_{max})^2$$

]SE 10-6[

LAVORO NECESSARIO PER ALLUNGARE UNA MOLLA:

UNA MOLLA CON COSTANTE ELASTICA $K = 80 \frac{N}{m}$

E' TENUTA FISSA AD UNA ESTREMITA', MENTRE

UNA FORZA ESTERNA E' APPLICATA ALL'ESTREMITA'

LIBERA $\Rightarrow$ $x_A = 0$, $x_B = 4\ cm$

QUAL E' IL LAVORO SVOLTO DALLA FORZA ESTERNA SULLA MOLLA?

ASSUNTA VALIDA LA LEGGE DI HOOKE, SI HA

$F_{app} = Kx$

$$W = \frac{1}{2} K (x_B)^2 = \frac{1}{2} 80 \frac{N}{m} (4 \cdot 10^{-2} m)^2$$

$$= 0.064\ \text{JOULE}$$

---

ENERGIA CINETICA E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

- SIA $\sum_i \vec{F}$ LA FORZA TOTALE SU UNA PARTICELLA

IN MOTO $\Rightarrow$ $W_{TOT} = \int_{x_i}^{x_f} \sum_i F^{(i)}\, dx$

$\sum_i F^{(i)} = ma$

$$\Rightarrow W_{TOT} = \int_{x_i}^{x_f} m\, a\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = m \int_{x_i}^{x_f} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx \qquad (*)$$

$$= m \int_{v_i}^{v_f} v\, dv = \frac{m}{2}\left[(v_f)^2 - (v_i)^2\right]$$

$\Rightarrow$ QUESTO SUGGERISCE DI DEFINIRE
L'ENERGIA CINETICA

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

NEL CALCOLO DELL'INTEGRALE (*), ABBIAMO ASSUNTO CHE LO SPOSTAMENTO DELLA PARTICELLA SIA LO STESSO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA. QUESTO E' VERO SOLO PER PARTICELLE, O PER OGGETTI ESTESI PERFETTAMENTE RIGIDI, COSI' CHE TUTTE LE LORO PARTI SUBISCONO LO STESSO SPOSTAMENTO

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:

$$(*) \Rightarrow W_{TOT} = (E_K)_f - (E_K)_i = \Delta E_K$$

" QUANDO VIENE SVOLTO LAVORO SU UN SISTEMA, E LA SOLA VARIAZIONE NEL SISTEMA E' IL MODULO DELLA SUA VELOCITA', IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA

RISULTANTE E' UGUALE ALLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA."

- TORNIAMO IN TALE AMBITO A CONSIDERARE IL CASO DI UNA PERSONA CHE SOLLEVA UN BLOCCO E SI MUOVE ORIZZONTALMENTE.

SISTEMA = BLOCCO

=> FORZA AGENTE SUL SISTEMA E' = 0, POICHE' LA FORZA DI SOLLEVAMENTO VERSO L'ALTO E' = FORZA DI GRAVITA'

=> FORZA RISULTANTE = 0 => LAVORO TOTALE = 0, IN ACCORDO COL FATTO CHE L'ENERGIA CINETICA DEL BLOCCO NON VARIA.

- N.B. SE INVECE AVESSIMO SCELTO COME SISTEMA L'INSIEME COSTITUITO DAL BLOCCO E DALLA TERRA, IL LAVORO COMPIUTO SU QUESTO SISTEMA SAREBBE $\neq 0$

- NEL CASO DI INTEGRALE $\int_{-x_{max}}^{+x_{max}}$, IL LAVORO ERA NULLO PERCHE' IL LAVORO POSITIVO ERA EGUALE AL MODULO DEL LAVORO NEGATIVO

- ESEMPIO: BLOCCO TIRATO SU UNA SUPERFICIE LISCIA

UN BLOCCO DI 6 Kg, INIZIALMENTE FERMO, E' TIRATO VERSO DESTRA SU UNA SUPERFICIE ORIZZONTALE LISCIA DA UNA FORZA ORIZZONTALE COSTANTE $\vec{F} = 12N$.

QUAL E' LA VELOCITA' DEL BLOCCO DOPO CHE SI E' SPOSTATO DI 3 METRI?

LAVORO $W = F \Delta x = 12N \cdot 3m = 36$ JOULE

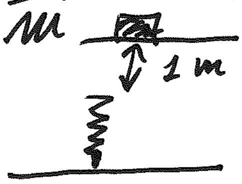
$$= (E_K)_f - (E_K)_i = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{72J}{6 \, kg}} = 2\sqrt{3} \; m\,s^{-1}$$

---

ESEMPIO: BLOCCO CHE CADE SU UNA MOLLA

UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA $10^3 \frac{N}{m}$ E' IN POSIZIONE VERTICALE SU UN TAVOLO:




UN BLOCCO DI MASSA 1.6 Kg VIENE TENUTO A 1 m SOPRA L'ESTREMITA' LIBERA DELLA MOLLA.
SE IL BLOCCO CADE VERTICALMENTE SULLA MOLLA, QUAL E' LA MASSIMA COMPRESSIONE DELLA MOLLA?

]SE10-10[

$y_i = h = 1\,m$ $\qquad$ $y_f = -d$

LAVORO TOTALE = [LAVORO TOTALE SVOLTO SUL BLOCCO DALLA FORZA DI GRAVITA'] + [LAVORO SVOLTO DALLA FORZA ELASTICA]

$$= \vec{F_g} \cdot \Delta \vec{r} - \frac{1}{2} k d^2 = (-mg\vec{j}) \cdot (-d-h)\vec{j} - \frac{1}{2} k d^2$$

$$= mg(h+d) - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2 + mgd + mgh = 0 \quad (*)$$

POICHE' IL BLOCCO E' FERMO SIA ALL'INIZIO CHE ALLA FINE

$$(*) \Rightarrow d = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k}} \simeq 0.19\,m$$

---

# FILE SE11

## CALCOLI DI LAVORO IN PRESENZA DI ATTRITO DINAMICO

- LE VARIE FORZE, INCLUSA QUELLA DI ATTRITO, SIANO APPLICATE AD UN BLOCCO CHE SEGUE UNA TRAIETTORIA NELLO SPAZIO

$$\sum W_{\text{altre forze}} = \int \left( \sum \vec{F}_{\text{altre forze}} \right) \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ = SPOSTAMENTO INFINITESIMO DELL'OGGETTO PROVOCATO DA TUTTE LE FORZE DIVERSE DALL'ATTRITO

$$\Rightarrow \sum W_{\text{altre forze}} + \int \vec{f}_d \cdot d\vec{r} = \int \left( \sum \vec{F}_{\text{altre forze}} + \vec{f}_d \right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2ª LEGGE DI NEWTON $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \sum W_{\text{altre forze}} + \int \vec{f}_d \cdot d\vec{r} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

LA FORMA DELL'INTEGRANDO CI SPINGE A OSSERVARE CHE

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$$

$$\Rightarrow \sum W_{\text{altre forze}} + \int \vec{f_d}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}\,dt = \frac{m}{2}\int_{v_i}^{v_f} dv^2$$

$$= \frac{m}{2}(v_f)^2 - \frac{m}{2}(v_i)^2 = \Delta E_K$$

- NEL CASO PARTICOLARE IN CUI LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO $\vec{f_d}$ E' COSTANTE, SI HA

$$\sum W_{\text{altre forze}} - f_d d = \Delta E_K$$

VARIANTE DEL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

QUANDO IL BLOCCO RALLENTA SOTTO L'INFLUENZA DELLA SOLA FORZA D'ATTRITO, PER IL SISTEMA (BLOCCO + SUPERFICIE) SI HA

$$-f_d d = \Delta E_K = -\Delta E_{int}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{int} = f_d d = -\Delta E_K$$

]SE11-2[

⇒ L'AUMENTO DELL'ENERGIA INTERNA DEL SISTEMA = FORZA D'ATTRITO X SPOSTAMENTO DEL BLOCCO

⇒ IN UN SISTEMA, UNA FORZA D'ATTRITO TRASFORMA L'ENERGIA CINETICA IN ENERGIA INTERNA;

PER UN SISTEMA SUL QUALE AGISCE LA SOLA FORZA DI ATTRITO, L'AUMENTO DI ENERGIA INTERNA EGUAGLIA LA DIMINUZIONE DI ENERGIA CINETICA:

$$-\Delta E_K = +\Delta E_{int}$$

---

ESEMPIO: BLOCCO TIRATO SU UNA SUPERFICIE SCABRA

UN BLOCCO DI 6 Kg, INIZIALMENTE FERMO, E' TIRATO VERSO DESTRA DA UNA FORZA ORIZZONTALE COSTANTE DI 12 N. SIA $\mu_d = 0.15$ TRA BLOCCO E SUPERFICIE

QUAL E' LA VELOCITA' DEL BLOCCO DOPO CHE SI E' SPOSTATO DI 3 METRI?

— ESSENDO LO SPOSTAMENTO DEL BLOCCO IN LINEA RETTA, $\Delta x = d$

L'EQUAZIONE DELLA TEORIA GENERALE:

$$\sum W_{\text{altre forze}} - f_d d = \Delta E_K$$

ORA DIVENTA

$$\Delta E_K = -\mu_d n d + F d$$

INOLTRE, IL BLOCCO E' IN EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE VERTICALE $\Rightarrow n = mg$

$$\Rightarrow \Delta E_K = -\mu_d m g d + F d = (F - \mu_d m g) d \simeq 9.54 \text{ J}$$

$$\Delta E_K = \frac{m}{2}(v_f)^2 - \frac{m}{2}(v_i)^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\Delta E_K + \frac{m}{2}(v_i)^2\right)} \simeq 1.78 \text{ m s}^{-1}$$

---

ESEMPIO: SISTEMA BLOCCO-MOLLA

- UN BLOCCO DI MASSA 1.6 Kg E' LEGATO AD UNA MOLLA ORIZZONTALE CHE HA UNA COSTANTE ELASTICA $= 10^3 \frac{N}{m}$. LA MOLLA VIENE COMPRESSA DI 2 cm E POI RILASCIATA

- QUAL E' LA VELOCITÀ DEL BLOCCO QUANDO PASSA ATTRAVERSO LA POSIZIONE D'EQUILIBRIO $x=0$ SE LA SUPERFICIE E' PRIVA DI ATTRITO?

] SE 11-4 [

$v_i = 0$ $x_i = -2\,cm$ $x_f = 0$

LAVORO FATTO DALLA MOLLA $= \frac{1}{2} K (x_{max})^2 = 0.2\,J$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$\Rightarrow$ VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA DEL BLOCCO
= EFFETTO DEL LAVORO CHE LA MOLLA HA COMPIUTO SU DI ESSO:

$$W_m = \frac{m}{2}(v_f)^2 - \frac{m}{2}(v_i)^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{(v_i)^2 + \frac{2}{m} W_m} \approx 0.5\ m\,s^{-1}$$

---

## IL CONCETTO DI POTENZA

POTENZA: RAPIDITA' CON LA QUALE L'ENERGIA VIENE TRASFERITA ATTRAVERSO IL CONTORNO DI UN SISTEMA

POTENZA MEDIA IN UN INTERVALLO $\Delta t$:

$$\mathcal{P}_{med} = \frac{W}{\Delta t}$$

$W$ = LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA ESTERNA APPLICATA A UN CORPO

]SE11-5[

## POTENZA ISTANTANEA:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

PER OGNI TRASFERIMENTO DI ENERGIA, SCRIVIAMO

$$P = \frac{dE}{dt} =$$ RAPIDITA' CON LA QUALE L'ENERGIA ATTRAVERSA IL CONTORNO

DEL SISTEMA PER UN DATO MECCANISMO DI TRASFERIMENTO.

$$1\,W = \frac{1\,J}{s} = kg\ \frac{m^2}{s^3}$$

$$[P] = [M\,L\,T^{-2}]\,[L\,T^{-1}] = [M\,L^2\,T^{-3}]$$

CHILOWATTORA = ENERGIA TRASFERITA IN UN'ORA AL TASSO COSTANTE DI 1 KW

$$1\,kWh = 3.6 \cdot 10^6\ J = (10^3\,W)\,(3.6 \cdot 10^3\,s)$$

ESEMPIO; POTENZA EROGATA DA UN MOTORE DI ASCENSORE

- UN ASCENSORE DI MASSA $10^3$ Kg HA UNA PORTATA MASSIMA DI 800 Kg, E UNA FORZA D'ATTRITO COSTANTE DI $4 \cdot 10^3$ N RITARDA IL SUO MOTO VERSO L'ALTO.
- QUALE DEVE ESSERE LA MINIMA POTENZA EROGATA DAL MOTORE PER FAR SALIRE L'ASCENSORE CON VELOCITA' $3\,ms^{-1}$ ?

---

L'ASCENSORE PUO' ESSERE RIGUARDATO COME PARTICELLA IN EQUILIBRIO PERCHE' SI MUOVE A VELOCITA' COSTANTE.

$\vec{T}$ = TENSIONE DEL CAVO CHE TIRA L'ASCENSORE VERSO L'ALTO

$V = \text{COSTANTE} \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow T - f - Mg = ma = 0$

M = MASSA TOTALE DI ASCENSORE PIU' CARICO

$\Rightarrow T = f + Mg = 4 \cdot 10^3 N + (1.8 \cdot 10^3 Kg)\, 9.8\, ms^{-2}$

$= 2.16 \cdot 10^4 N$

] SE 11-7 [

LA TENSIONE DEL CAVO COMPIE LAVORO SULL'ASCENSORE

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = |\vec{T}||\vec{v}| \cos 0 = TV$$

$$= 2.16 \cdot 10^4 N \; 3 m s^{-1} = 6.48 \cdot 10^4 W$$

$$= 64.8 \; KW$$

= TASSO COL QUALE L'ENERGIA VIENE TRASFERITA FUORI DAL MOTORE PER COMPIERE LAVORO SUL CAVO

$\vec{T}$ = FORZA CHE IL MOTORE APPLICA AL CAVO

---

## IL CONCETTO DI ENERGIA POTENZIALE

- CONSIDERIAMO SISTEMI DI DUE O PIU' OGGETTI INTERAGENTI ATTRAVERSO UNA FORZA INTERNA AL SISTEMA. AD ESEMPIO, UN SISTEMA FORMATO DA UN LIBRO E DALLA TERRA, COL LIBRO PORTATO AD UNA QUOTA $y_a$ PRIMA DI FARLO CADERE

IDEA: IL MECCANISMO DI IMMAGAZZINAMENTO DELL'ENERGIA PRIMA DI LIBERARE IL LIBRO E' PER NOI L'ENERGIA POTENZIALE.

IPOTESI: IL SOLLEVAMENTO AVVENGA LENTAMENTE, COSÌ CHE LA FORZA AGENTE SULL'OGGETTO SIA SOLO IL SUO PESO ⇒ L'OGGETTO È IN EQUILIBRIO E SI MUOVE A VELOCITÀ COSTANTE.

$\vec{F} = -m\vec{g}$ FORZA DIRETTA VERSO L'ALTO

$\Delta\vec{r} = \Delta y \,\vec{j}$ SPOSTAMENTO

$$W = (-m\vec{g}) \cdot \Delta\vec{r} = [-m(-g\vec{j})] \cdot (y_b - y_a)\,\vec{j}$$

$$= mg(y_b - y_a) \qquad (*)$$

⇒ VARIAZIONE DELL'ENERGIA DEL SISTEMA, POICHÉ IL LAVORO È UN MEZZO DI TRASFERIMENTO DELL'ENERGIA

LA (*) SUGGERISCE DI DEFINIRE L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE $U_g$ DEL SISTEMA CORPO-TERRA:

$$U_g = mgy$$

$$\Rightarrow W = U_g(y_b) - U_g(y_a) = \Delta U_g$$

QUESTO VALE SOLO SE $g$ È APPROSSIMATIVAMENTE COSTANTE, OVVERO PER OGGETTI VICINI ALLA

]SE11-9[

SUPERFICIE TERRESTRE

$\Rightarrow$ LAVORO SVOLTO = VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE DEL SISTEMA

- LA FORMA DI $W$ RESTA LA STESSA, SIA NEL CASO DI SOLLEVAMENTO VERTICALE, SIA CHE L'OGGETTO VENGA SPINTO LUNGO UN PIANO INCLINATO PRIVO DI ATTRITO, FERMANDOSI ALLA STESSA ALTEZZA. INFATTI:

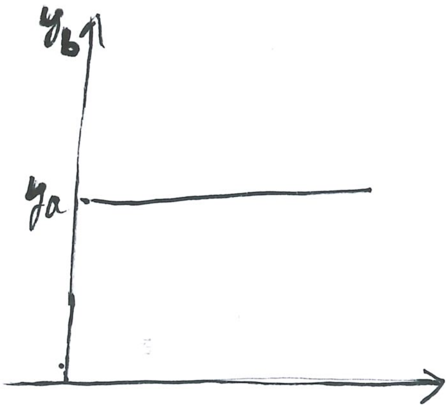
$$W = (-m\vec{g}) \cdot \Delta\vec{r} = [-m(-g)\vec{j}] \cdot [(x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j}]$$

$$= mg(y_b - y_a) + 0 = mg(y_b - y_a)$$

---

SISTEMA ISOLATO

- SE IL LIBRO CADE DA $y_b$ A $y_a$, IL LAVORO SVOLTO DALLA FORZA DI GRAVITA' SUL LIBRO E'




$$W = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$= (-mg\vec{j}) \cdot (y_a - y_b)\vec{j}$$

$$= mg(y_b - y_a)$$

$$= \Delta E_K$$

]SE11-10[

$\Rightarrow \Delta E_K = mgy_b - mgy_a = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$

(SOLO IL LIBRO SI MUOVE NEL SISTEMA)

$\Rightarrow \Delta E_K + \Delta U_g = 0$ = SOMMA DEI TRASFERIMENTI ATTRAVERSO IL CONTORNO DEL SISTEMA, CHE SI ANNULLA

POICHE' IL SISTEMA LIBRO-TERRA E' ISOLATO DALL'AMBIENTE

$(E_K)_f - (E_K)_i + (U_g)_f - (U_g)_i = 0$

$\Rightarrow (E_K)_f + (U_g)_f = (E_K)_i + (U_g)_i$ ◊

$E_K + U_g$ = ENERGIA MECCANICA TOTALE DEL SISTEMA

LA ◊ VALE SOLO IN ASSENZA DI ATTRITO FRA LE PARTI DEL SISTEMA

$\Rightarrow \frac{m}{2}(v_f)^2 + mgy_f = \frac{m}{2}(v_i)^2 + mgy_i$

CADUTA DEL LIBRO $\Rightarrow$ IL SISTEMA LIBRO-TERRA PERDE ENERGIA POTENZIALE E GUADAGNA ENERGIA CINETICA.

]SE11-11[

# FILE SE12

## ESEMPIO: PALLA IN CADUTA LIBERA

UNA PALLA DI MASSA $m$ CADE DA UN'ALTEZZA $h$ RISPETTO AL SUOLO. TRASCURANDO LA RESISTENZA DELL'ARIA, DETERMINARE LA VELOCITA' DELLA PALLA QUANDO E' AD UNA QUOTA $y$ RISPETTO AL SUOLO.

$y_i = h \quad (U_g)_i = mgh \qquad K_i = 0$

$y_f = y \quad (U_g)_f = mgy \qquad K_f = \frac{m}{2}(v_f)^2$

SUOLO: $y=0$, $U_g = 0$

$$(E_K)_f + (U_g)_f = (E_K)_i + (U_g)_i$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}(v_f)^2 + mgy = 0 + mgh$$

$$\Rightarrow (v_f)^2 = 2g(h-y)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2g(h-y)}$$

QUAL E' INVECE LA VELOCITA' DELLA PALLA IN $y$
SE $v_i \neq 0$ IN $y_i = h$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}(v_f)^2 + mgy = \frac{m}{2}(v_i)^2 + mgh$$

$$\Rightarrow (v_f)^2 = (v_i)^2 + 2g(h-y)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{(v_i)^2 + 2g(h-y)}$$

---

## FORZE CONSERVATIVE E NON/CONSERVATIVE

- UNA FORZA CONSERVATIVA IN MECCANICA E' UNA FORZA TRA I MEMBRI DI UN SISTEMA CHE NON CAUSA TRASFORMAZIONI DI ENERGIA MECCANICA IN ENERGIA INTERNA DENTRO IL SISTEMA

$\Rightarrow$ L'ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA SI CONSERVA.

IL LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA CONSERVATIVA NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA SEGUITA DAI COMPONENTI; ESSO DIPENDE SOLO DALLE CONFIGURAZIONI INIZIALE E FINALE DEL SISTEMA.

$\Rightarrow$ IL LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA CONSERVATIVA

QUANDO UN COMPONENTE SI MUOVE LUNGO UN PERCORSO CHIUSO E' =0

- ESEMPIO: FORZA DI UNA MOLLA CHE AGISCE SU UN OGGETTO

$$W_m = \frac{K}{2}(x_i)^2 - \frac{K}{2}(x_f)^2$$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA ASSOCIATA CON LA FORZA DI UNA MOLLA

$$\Rightarrow U_m = \frac{K}{2}x^2$$

= ENERGIA IMMAGAZZINATA NELLA MOLLA DEFORMATA (COMPRESSA O ALLUNGATA)

- SE UNA MOLLA E' INIZIALMENTE NON DEFORMATA, QUANDO UN BLOCCO LA COMPRIME DI UNA LUNGHEZZA $x$, L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA IMMAGAZZINATA NELLA MOLLA E' $\frac{K}{2}x^2$. QUANDO POI IL BLOCCO VIENE RILASCIATO, LA MOLLA TORNA ALLA LUNGHEZZA ORIGINALE, E APPLICA UNA FORZA AL BLOCCO.

- LE FORZE NON CONSERVATIVE CAUSANO INVECE TRASFORMAZIONI DI ENERGIA MECCANICA IN ENERGIA INTERNA. ESEMPIO: LA FORZA D'ATTRITO.
- SE IL SISTEMA = BLOCCO + SUPERFICIE, E SE IL BLOCCO INIZIALMENTE SCIVOLA E POI SI FERMA A CAUSA DELL'ATTRITO, POSSIAMO DIRE CHE LA FORZA D'ATTRITO FRA BLOCCO E SUPERFICIE HA TRASFORMATO L'ENERGIA MECCANICA IN ENERGIA INTERNA, COSÌ CHE BLOCCO E SUPERFICIE SI SONO RISCALDATI.

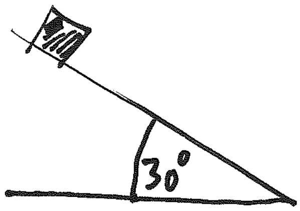
$$-f_a d = \Delta E_K + \Delta U = \Delta E_{mecc} = -\Delta E_{int}$$

$$\Rightarrow \Delta E_K + \Delta U + \Delta E_{int} = \Delta E_{sistema} = 0$$

$$\Rightarrow E_K + U + E_{int} = \text{COSTANTE}$$ PER UN SISTEMA ISOLATO

QUALE CHE SIA LA NATURA DELLE FORZE AGENTI SUL SISTEMA

ESEMPIO: CASSA CHE SCIVOLA LUNGO UNA RAMPA




UNA CASSA DI 3 Kg SCIVOLA GIU' LUNGO UNA RAMPA LUNGA 1m, E INCLINATA DI 30°
LA CASSA PARTE DA FERMA E SUBISCE UNA FORZA DI ATTRITO COSTANTE DI 5N.
QUAL E' LA VELOCITA' DELLA CASSA MENTRE RAGGIUNGE LA BASE DELLA RAMPA?

- SISTEMA = CASSA + TERRA + RAMPA
= SISTEMA ISOLATO

$$V_i = 0 \Rightarrow (E_K)_i = 0 \Rightarrow E_i = U_i = mg\,y_i$$

$$E_f = (E_K)_f = \frac{m}{2}(V_f)^2$$

$$-f_d d = \Delta E_K + \Delta U \Rightarrow -f_d d = \frac{m}{2}(V_f)^2 - mg\,y_i$$

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{2g\,y_i - \frac{2}{m} f_d d} \simeq 2.54\ m s^{-1}$$

POICHE' $y_i = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 30^\circ\right) m = \sin(30)^\circ\ m = \frac{m}{2}$

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{9.8 - \frac{10}{3}} \simeq 2.54\ m s^{-1}$$

]SE12-5[

ESEMPIO: MOTO SU UNA PISTA CURVA

UN BAMBINO DI MASSA M SCENDE LUNGO UNO SCIVOLO DI ALTEZZA $2m = h$. SE IL BAMBINO PARTE DA FERMO, QUAL E' LA SUA VELOCITA' NEL PUNTO PIU' BASSO, NELL'IPOTESI CHE L'ATTRITO SIA $= 0$?

SISTEMA = BAMBINO + TERRA

LA FORZA NORMALE COMPIE LAVORO $= 0$, POICHE' E' SEMPRE PERPENDICOLARE A CIASCUNO SPOSTAMENTO.

$\Rightarrow$ SISTEMA ISOLATO SENZA FORZE D'ATTRITO

$\Rightarrow E_K + U =$ COSTANTE

$y_i = h, \quad y_f = 0$

$$(E_K)_f + U_f = (E_K)_i + U_i$$

$$\Rightarrow \frac{M}{2}(v_f)^2 + 0 = 0 + M g h$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \simeq 6.26 \ ms^{-1}$$

# URTO MASSA-MOLLA

UN BLOCCO DI MASSA 0.8 Kg HA VELOCITA' INIZIALE $v_A = 1.2\, m s^{-1}$ VERSO DESTRA E URTA CONTRO UNA MOLLA LEGGERA DI COSTANTE ELASTICA $K = 50 \frac{N}{m}$.

SE LA SUPERFICIE E' SENZA ATTRITO, QUAL E' LA MASSIMA COMPRESSIONE DELLA MOLLA DOPO L'URTO?

- SISTEMA = BLOCCO + MOLLA = SISTEMA ISOLATO

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$\frac{m}{2}(v_A)^2 + 0 = 0 + \frac{K}{2}(x_{max})^2$$

$$\Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m}{K}}\, v_A \approx 0.152\, m$$

---

## FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE

- TORNIAMO ALL'ESEMPIO DEL LIBRO CHE CADE IN CAMPO GRAVITAZIONALE

$$W_{SUL\ LIBRO} = mg y_b - mg y_a = -\Delta U$$

$$= -(U(y_a) - U(y_b))$$

]SE12-7[

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -U_f + U_i$$

$$\Rightarrow U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx + U_i$$ PER FORZE CONSERVATIVE

IL VALORE ASSEGNATO A $U_i$ E' ININFLUENTE PER IL CALCOLO DI $\Delta U = -W$

- ESEMPIO: ENERGIA POTENZIALE PER FORZA ELASTICA

$$\Rightarrow F_x = -Kx$$

$$\Rightarrow U_f = -\int_{x_i}^{x_f} (-Kx) \, dx + U_i$$

$$= \frac{K}{2}\left[(x_f)^2 - (x_i)^2\right] + U_i$$

SE $U_i = 0$ PER $x_i = 0$, SI HA

$$U_f = U_{el} = \frac{K}{2} x^2$$

- VICEVERSA, SE FOSSE NOTA LA FUNZIONE ENERGIA POTENZIALE, SI AVREBBE

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot dx \, \vec{i} = F_x \, dx = -dU$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

IN GENERALE "LA FORZA CONSERVATIVA AGENTE FRA LE PARTI DI UN SISTEMA = DERIVATA CAMBIATA DI SEGNO DELL'ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA AL SISTEMA"

$$F_y = -\frac{d}{dy} U_g = -\frac{d}{dy}(mgy) = -mg$$

IN TRE DIMENSIONI, SI HA

$$\vec{F} = -\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z} = -\operatorname{grad} U(x,y,z)$$

# FILE SE13

1) IN UN SISTEMA NON ISOLATO, L'ENERGIA IMMAGAZZINATA VARIA A CAUSA DEL TRASFERIMENTO ATTRAVERSO IL CONTORNO DEL SISTEMA.

2) IN UN SISTEMA ISOLATO, NON SI HA INVECE NESSUN TRASFERIMENTO DI ENERGIA ATTRAVERSO IL CONTORNO

3) <u>SISTEMI NON ISOLATI NELLO STATO STAZIONARIO</u>:

IL TASSO AL QUALE L'ENERGIA ENTRA NEL SISTEMA = TASSO COL QUALE ESCE DAL SISTEMA

$\Rightarrow$ SISTEMA NELLO STATO STAZIONARIO SOTTO L'EFFETTO DI DUE O PIU' TRASFERIMENTI IN COMPETIZIONE $\Rightarrow$ SI HA UN SISTEMA NON ISOLATO IN STATO STAZIONARIO

$\Rightarrow$ IL SISTEMA INTERAGISCE CON L'AMBIENTE CIRCOSTANTE, MA LA SUA ENERGIA RESTA COSTANTE

# ENERGIA POTENZIALE PER FORZA GRAVITAZIONALE ED ELETTRICA

- LE FORMULE FINORA USATE PER $U_g$ VALGONO SOLO IN PROSSIMITA' DELLA SUPERFICIE TERRESTRE.

RICORDIAMO ORA CHE LA FORMULA PER LA FORZA DI GRAVITA', SECONDO NEWTON, AGENTE SU UNA PARTICELLA DI MASSA $m$ AD OPERA DELLA TERRA E'

$$\vec{F}_g = -\frac{G M_T m}{r^2}\vec{u}_r = \frac{-G M_T m \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{u}_r$ = VERSORE DIRETTO DALLA TERRA VERSO LA PARTICELLA

LA FORZA $\vec{F}_g$ HA IL SEGNO (−) PERCHE' E' DIRETTA VERSO LA TERRA.

$$U_f = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr + U_i$$

$$= G M_T m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} + U_i = G M_T m \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_i}^{r_f} + U_i$$

$$\Rightarrow U_f = -G M_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) + U_i$$

RICHIEDENDO CHE $U_i \to 0$ QUANDO $r_i \to \infty$, TROVIAMO

$$U_g = -\frac{G M_T m}{r}$$

$\forall\, r > R_T$ = RAGGIO TERRA
$= 6.37 \cdot 10^3$ Km
$\simeq 6.4 \cdot 10^8$ cm

TALE ENERGIA POTENZIALE E' NEGATIVA PERCHE' LA FORZA GRAVITAZIONALE E' ATTRATTIVA, E NOI ABBIAMO SCELTO LO ZERO DELL'ENERGIA POTENZIALE QUANDO LA SEPARAZIONE E' INFINITA

- FORZA TRA PARTICELLE ATTRATTIVA

$\Rightarrow$ UN AGENTE ESTERNO DEVE COMPIERE UN LAVORO POSITIVO PER AUMENTARE LA SEPARAZIONE FRA LE DUE PARTICELLE.

$\Rightarrow$ AUMENTA L'ENERGIA POTENZIALE MENTRE LE DUE PARTICELLE VENGONO SEPARATE

$\Rightarrow$ $U_g$ DIVENTA MENO NEGATIVA, AL CRESCERE DI $r$

SISTEMA DI 3 PARTICELLE:

$$U_{TOT} = U_{12} + U_{23} + U_{31}$$

$$= -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{13}}\right)$$

---

ESEMPIO: LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE

- UNA PARTICELLA DI MASSA $m$ VIENE SPOSTATA DI $\Delta y$ IN PROSSIMITA' DELLA SUPERFICIE TERRESTRE. DIMOSTRARE CHE $\Delta U_g = mg\Delta y$

— — -

$$\Delta U_g = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_T m\left(\frac{r_f - r_i}{r_f r_i}\right)$$

OVE $r_f - r_i \simeq \Delta y$ $\quad r_f r_i \simeq (R_T)^2$

$$\Rightarrow \Delta U_g = \frac{GM_T m}{(R_T)^2}\Delta y = F_g \Delta y = mg\Delta y$$

— VEDASI ORA FILE SEKL

FORZA ELETTROSTATICA FRA 2 PARTICELLE PUNTIFORMI:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$\Rightarrow$ ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

$$U_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r}$$

LO ZERO DELL'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA E' DEFINITO QUANDO LE CARICHE SONO INFINITAMENTE LONTANE.

N.B. LA $U$ GRAVITAZIONALE HA UN SEGNO NEGATIVO, MENTRE IL SEGNO DI $U_e$ DIPENDE DA $q_1, q_2$ E DUNQUE NON E' SEMPRE $<0$ NE' SEMPRE $>0$.

- TUTTE LE ENERGIE POTENZIALI PER SISTEMI DI OGGETTI CHE SI ATTRAGGONO DEVONO ESSERE $<0$
- LA FORZA ELETTRICA E' ATTRATTIVA (REPULSIVA) PER CARICHE DI SEGNO OPPOSTO (UGUALE).

N.B. SE $q_1 = -|q_1|$, $q_2 = -|q_2|$

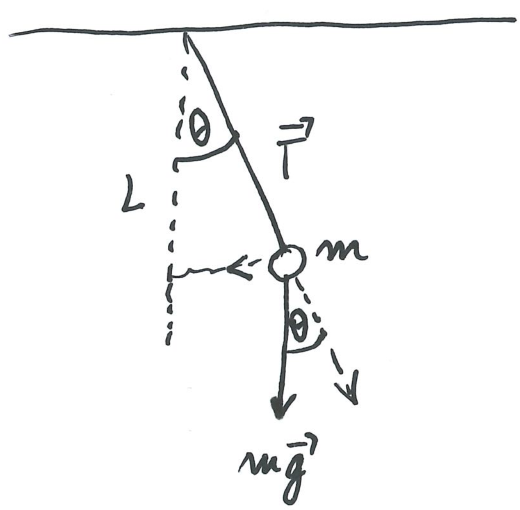
$$\Rightarrow U_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{K_e |q_1| |q_2|}{r} > 0$$

] SE 13-5 [

QUESTO SEGNO E' COMPRENSIBILE, POICHE' L'AGGREGAZIONE DI CARICHE CHE SI RESPINGONO PROVENIENTI DA UNA DISTANZA INFINITA $\Rightarrow$ LAVORO SVOLTO SUL SISTEMA
$\Rightarrow$ L'ENERGIA POTENZIALE AUMENTA

---

## PENDOLO SEMPLICE




UN PUNTO MATERIALE DI MASSA $m$ E' SOSPESO A UN FILO LEGGERO DI LUNGHEZZA L, LA CUI ESTREMITA' SUPERIORE E' FISSATA COME SI PUÒ VEDERE

IPOTESI: LA DIMENSIONE $d$ DELL'OGGETTO SIA PICCOLA RISPETTO ALLA LUNGHEZZA DEL FILO: $\frac{d}{L} \ll 1$

— SE TIRIAMO LATERALMENTE L'OGGETTO E POI LO RILASCIAMO, ESSO OSCILLA INTORNO ALLA POSIZIONE D'EQUILIBRIO, OVVERO IL PUNTO PIU' IN BASSO.

IL MOTO AVVIENE IN UN PIANO VERTICALE, ED E' CAUSATO DALLA FORZA DI GRAVITA'!

$mg \sin\theta$ = COMPONENTE TANGENZIALE DELLA FORZA DI GRAVITA'

E' SEMPRE OPPOSTA ALLO SPOSTAMENTO, E DUNQUE AGISCE VERSO $\theta = 0$.

2ª LEGGE DI NEWTON

$$\Rightarrow F_t = m a_t \Rightarrow -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

s = SPOSTAMENTO LUNGO L'ARCO

SEGNO (−) ⇒ $F_t$ AGISCE VERSO LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO

$$s = L\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad (*)$$

— SE $\theta$ E' $< 0.2$ rad ($\simeq 20°$)

POSSIAMO SCRIVERE CHE $\sin\theta \simeq \theta$, E L'EQUAZIONE (*) SI RIDUCE A

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

]SE 13-7[

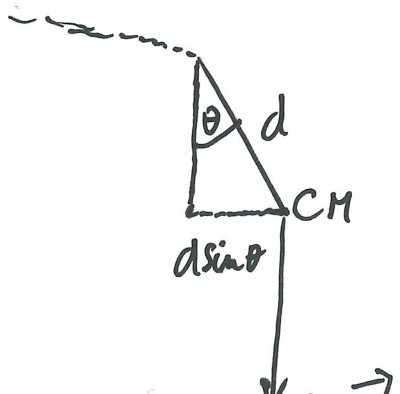
⇒ SI HA MOTO ARMONICO SEMPLICE PER PICCOLE AMPIEZZE, CON PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

⇒ T ED ω DIPENDONO SOLO DA L E DA g, PER PICCOLI ANGOLI DI OSCILLAZIONE

N.B. TUTTI I PENDOLI SEMPLICI CON LO STESSO VALORE DI L OSCILLANO CON LO STESSO PERIODO, INDIPENDENTEMENTE DALLA MASSA.

---

## PENDOLO FISICO




UN OGGETTO SOSPESO OSCILLA ATTORNO A UN ASSE FISSO NON PASSANTE PER IL SUO CENTRO DI MASSA. $\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$

QUESTO E' IL PENDOLO FISICO.

– VEDASI ORA FILE SEMI

$|$MOMENTO DELLA FORZA DI GRAVITA'$| = mgd\sin\theta$

$I$ = MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A O

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

]SE13-8[

SEGNO (−) ⇒ IL MOMENTO DELLA FORZA TENDE A FAR DIMINUIRE $\theta$ ⇒ LA FORZA DI GRAVITÀ PRODUCE UN MOMENTO MECCANICO DI RICHIAMO

$\theta < 0.2\ rad \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\right)\theta = 0$$

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{mgd}{I} \\ \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}} \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

⇒ SI PUÒ MISURARE IL MOMENTO D'INERZIA DI UN CORPO RIGIDO PLANARE ATTRAVERSO UNA MISURA DEL PERIODO:

$$I = mgd\,\frac{T^2}{4\pi^2}$$

---

# FLUIDI

- UN FLUIDO È UN MATERIALE CHE NON È DOTATO DI FORMA PROPRIA, E NON PUÒ SOSTENERE UNO SFORZO DI TAGLIO PER UN TEMPO APPREZZABILE.
- CON IL TERMINE "FLUIDO" CI SI RIFERISCE A LIQUIDI, AERIFORMI, AL PLASMA, E TALVOLTA AI SOLIDI PLASTICI.
- DAL PUNTO DI VISTA MACROSCOPICO, I FLUIDI SONO SISTEMI CONTINUI, OVVERO COMPOSTI DA INFINITI ELEMENTI
- CARATTERISTICHE DEI FLUIDI:

VISCOSITÀ = FACILITÀ CON CUI SI CEDE ALLO SFORZO DI TAGLIO

---

OMOGENEITÀ = QUANTO LE PROPRIETÀ FISICHE SI MANTENGONO COSTANTI ALL'INTERNO DEL VOLUME DEL FLUIDO

---

COMPRESSIBILITÀ = RESISTENZA ALLE COMPRESSIONI

---

DIFFUSIONE = CAPACITÀ DI OCCUPARE TUTTO IL VOLUME A DISPOSIZIONE

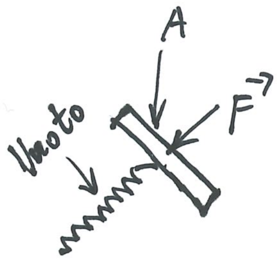
# IL CONCETTO DI PRESSIONE

- PER STUDIARE IL COMPORTAMENTO DEI FLUIDI RISULTA UTILE DEFINIRE UNA NUOVA GRANDEZZA.

- IPOTESI SEMPLIFICATRICE: I FLUIDI DI INTERESSE NON SONO VISCOSI => NON C'E' ATTRITO FRA GLI STRATI ADIACENTI DEL FLUIDO => TALI FLUIDI NON SOSTENGONO LE FORZE DI TAGLIO (SE SI PONE LA MANO SU UNA SUPERFICIE D'ACQUA, LA MANO INVERO SCIVOLA SULL'ACQUA). LA RAGIONE E' CHE LE FORZE FRA ATOMI IN UN FLUIDO NON SONO ABBASTANZA INTENSE DA MANTENERE GLI ATOMI FISSATI GLI UNI AGLI ALTRI.

=> L'UNICO TIPO DI FORZA CHE PUO' ESISTERE IN UN FLUIDO E' QUELLO PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE. TALE FORZA ORIGINA NELL'URTO DELLE MOLECOLE DEL FLUIDO CON LA SUPERFICIE. DALLA TERZA LEGGE DI NEWTON, CIASCUNA COLLISIONE PRODUCE UNA FORZA SULLA SUPERFICIE. OGNI SECONDO SI HA UN ENORME NUMERO DI QUESTE FORZE IMPULSIVE => FORZA MACROSCOPICA COSTANTE SULLA SUPERFICIE.

]SE23 - 20'[




ABBIAMO UN CILINDRO IN CUI E' STATO FATTO IL VUOTO, CHE CONTIENE UN PISTONE LEGGERO COLLEGATO A UNA MOLLA. STRUMENTO IMMERSO NEL FLUIDO => IL FLUIDO PREME IL PISTONE VERSO L'INTERNO => LA MOLLA VIENE COMPRESSA FINCHE'

FORZA VERSO L'INTERNO APPLICATA DAL FLUIDO
= FORZA VERSO L'ESTERNO ESERCITATA DALLA MOLLA.

- SE LA MOLLA E' STATA IN PRECEDENZA CALIBRATA, SI PUO' MISURARE LA FORZA ESERCITATA SUL PISTONE DAL FLUIDO.

F = FORZA ESERCITATA SUL PISTONE DAL FLUIDO
A = AREA DEL PISTONE

$$P = \frac{F}{A}$$

]SE13-11[

P E' LA PRESSIONE DEL FLUIDO AL LIVELLO A CUI LO STRUMENTO E' STATO IMMERSO

$[P] = NEWTON \cdot m^{-2} = [N][L^{-2}]$

DUNQUE SI PUO':

- OTTENERE P GRANDE DIMINUENDO LA SUPERFICIE SULLA QUALE LA FORZA E' APPLICATA
- OTTENERE P PICCOLA AUMENTANDO LA SUPERFICIE " " " "

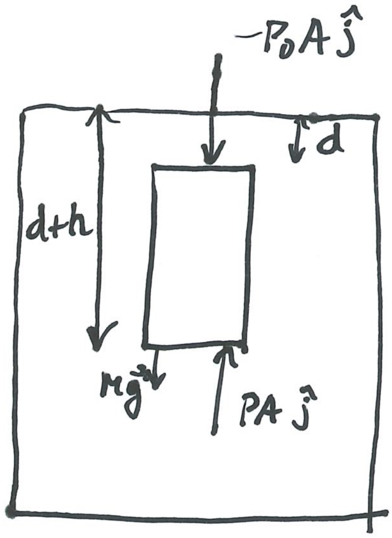
QUESTO SECONDO CASO SI PRESENTA CON LE RACCHETTE DA NEVE $\Rightarrow$ LA PRESSIONE VIENE RIDOTTA QUANTO BASTA PER NON ROMPERE LA SUPERFICIE DELLA NEVE $\Rightarrow$ LA PERSONA NON AFFONDA

$$1\ Pa = \frac{N}{m^2}$$

$$P_0 = 1\ atm = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$$

] SE13-12 [

N.B. LA PRESSIONE ATMOSFERICA DECRESCE CON L'ALTITUDINE $\Rightarrow$ GLI AEREI CHE VOLANO A GRANDI ALTEZZE DEVONO PRESSURIZZARE LE CABINE PER FORNIRE ABBASTANZA OSSIGENO AI PASSEGGERI.




LIQUIDO DI DENSITA' $\rho$, CONTENUTO IN UN CILINDRO DI AREA DI BASE A CHE SI ESTENDE DALLA SUPERFICIE DEL LIQUIDO FINO A PROFONDITA' $d+h$.

LIQUIDO FERMO $\Rightarrow$ FORZA RISULTANTE SUL CAMPIONE $=0$

SUI LATI DEL CAMPIONE, LE FORZE DOVUTE ALLA PRESSIONE AGISCONO ORIZZONTALMENTE E SI CANCELLANO IN COPPIE

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} F_y^{(i)} = 0 \Rightarrow PA - P_0 A - Mg = 0 \\ Mg = \rho A h g \end{aligned}\right\}$$

]SE13-13[

$\Rightarrow PA = P_0 A + \rho g A h \Rightarrow P = P_0 + \rho g h$

$\Rightarrow$ LA PRESSIONE IN UN LIQUIDO DIPENDE SOLO DALLA PROFONDITA' $h$ DENTRO IL LIQUIDO

$\Rightarrow$ LA FORMA DEL CONTENITORE NON CONTA

$\Rightarrow$ LEGGE DI PASCAL: UNA VARIAZIONE DI PRESSIONE APPLICATA A UN FLUIDO CHIUSO E' TRASMESSA INTEGRALMENTE IN OGNI PUNTO DEL FLUIDO E ALLE PARETI DEL CONTENITORE.

- APPLICAZIONE: L'AUMENTO DI PRESSIONE SUI LATI DI UN TUBETTO DI DENTIFRICIO DETERMINA UN AUMENTO DI PRESSIONE OVUNQUE

$\Rightarrow$ IL DENTIFRICIO ESCE DALL'APERTURA.

# FILE SE14

- IN UN ELEVATORE PER AUTO, DELL'ARIA COMPRESSA ESERCITA UNA FORZA SU UN PISTONE DI RAGGIO 5 cm. TALE PRESSIONE VIENE POI TRASMESSA A UN SECONDO PISTONE DI RAGGIO 15 cm.

(1) QUALE FORZA DEVE ESERCITARE L'ARIA COMPRESSA PER SOLLEVARE UN'AUTO CHE PESA $1.33 \cdot 10^4$ N?

---

OSSERVIAMO DAPPRIMA COME DALLA LEGGE DI PASCAL SI SCOPRE LA PRESSA IDRAULICA:

SI APPLICA UNA FORZA $\vec{F_1}$ AD UN PICCOLO PISTONE DI AREA $A_1$, POI SI USA UN LIQUIDO PER TRASMETTERE LA PRESSIONE A UN GRANDE PISTONE DI AREA $A_2$, E UNA FORZA $\vec{F_2}$ E' ESERCITATA DAL LIQUIDO SUL PISTONE

UGUAL PRESSIONE $\Rightarrow P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 > F_1$$

AVVIENE QUESTO IN FRENI IDRAULICI, SOLLEVATORI AUTO, MARTINETTO IDRAULICO.

ORA, PER IL QUESITO (1), SI HA:

PRESSIONE ESERCITATA DALL'ARIA TRASMESSA INVARIATA ATTRAVERSO IL FLUIDO

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{\pi (5 \cdot 10^{-2} m)^2}{\pi (15 \cdot 10^{-2} m)^2} \times 1.33 \cdot 10^4 N$$

$$= \frac{25}{225} \times 1.33 \cdot 10^4 N = 1.48 \cdot 10^3 N$$

(2) QUALE PRESSIONE SARA' PRODOTTA DA TALE FORZA?

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \cdot 10^3 N}{\pi (5 \cdot 10^{-2} m)^2} = 1.88 \cdot 10^5 Pa$$

CHE E' CIRCA IL DOPPIO DELLA PRESSIONE ATMOSFERICA.

## ESEMPIO: FORZA DI UNA DIGA

- DELL'ACQUA ARRIVA A UN'ALTEZZA $H$ DI UNA DIGA LUNGA $W$. QUAL E' LA FORZA RISULTANTE SULLA DIGA?

— — —

STAVOLTA LA PRESSIONE VARIA CON LA PROFONDITA', E LA PRESSIONE ATMOSFERICA AGISCE DA AMBO I LATI DANDO CONTRIBUTO NETTO $= 0$

- AD UNA PROFONDITA' $h$ AL DI SOTTO DELLA SUPERFICIE, SI HA

$$P = \rho h g = \rho g (H - y)$$

LA FORZA INFINITESIMA SU UNA STRISCIA DI AREA $dA$ E'

$$dF = P\, dA$$

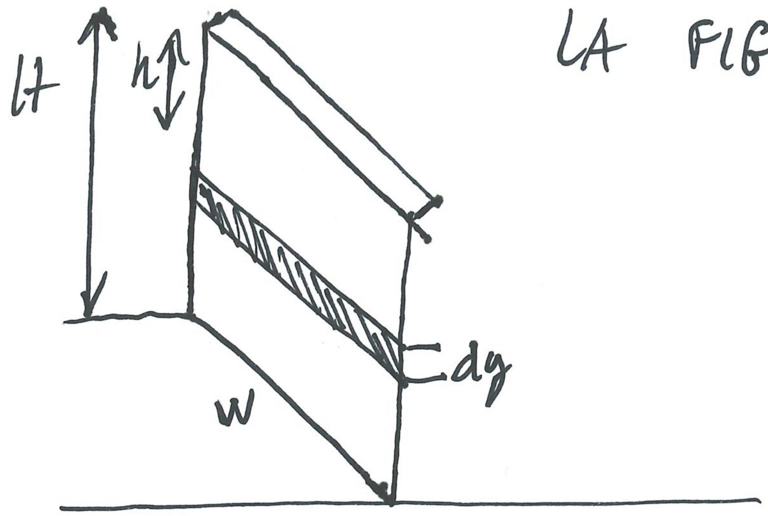
OVE $dA = w\, dy$

$$\Rightarrow dF = \rho g (H-y)\, w\, dy$$

$$\Rightarrow F = \int_0^H \rho g (H-y) w\, dy = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

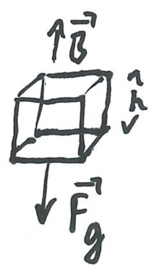
]SE14-3[

PER LA FORMULA PRECEDENTE, LA FIGURA E' LA SEGUENTE.




## PRINCIPIO DI ARCHIMEDE:

"OGNI OGGETTO IMMERSO PARZIALMENTE O TOTALMENTE IN UN FLUIDO SUBISCE UNA SPINTA VERSO L'ALTO LA CUI INTENSITA' E' UGUALE AL PESO DEL FLUIDO SPOSTATO DALL'OGGETTO"!




VOLUME CUBICO DI FLUIDO IN UN CONTENITORE.

CUBO IN EQUILIBRIO $\Rightarrow$ FORZA RISULTANTE SU DI ESSO NELLA DIREZIONE VERTICALE $= 0$

$$\sum_{i=1}^{2} F_y^{(i)} = 0 \Rightarrow B - F_g = 0 \Rightarrow B = F_g = Mg$$

M = MASSA DEL FLUIDO NEL CUBO

SE POI IL CUBO DI FLUIDO VIENE SOSTITUITO DA UN CUBO D'ACCIAIO DELLE STESSE DIMENSIONI, "LA SPINTA VERSO L'ALTO CHE AGISCE SU UN CUBO DI ACCIAIO È LA STESSA CHE AGISCE SU DI UN CUBO DI FLUIDO DELLE STESSE DIMENSIONI".

- DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE PER I LIQUIDI

IN UN LIQUIDO, LA PRESSIONE SULLA FACCIA INFERIORE DEL CUBO È MAGGIORE DELLA PRESSIONE SULLA FACCIA SUPERIORE DI UNA QUANTITÀ $\rho_f g h$

$\rho_f$ = DENSITÀ DEL FLUIDO

$h$ = ALTEZZA DEL CUBO

LA FORZA VERTICALE RISULTANTE ESERCITATA DAL LIQUIDO È $\sum F_{liquido} = B = F_{basso} - F_{alto}$

$$\Rightarrow B = P_{basso} A - P_{alto} A = (\rho_f g h) A = \rho_f g V$$

$$= \rho_f V g = M g = \text{PESO DEL LIQUIDO SPOSTATO}$$

(OVE $hA = V$ = VOLUME DEL CUBO)

---

CASO 2: OGGETTO COMPLETAMENTE IMMERSO

SPINTA DI ARCHIMEDE $B = \rho_f g V_0$

VOLUME OGGETTO = VOLUME DEL LIQUIDO SPOSTATO

$\Rightarrow V = V_0$

$\rho_0$ = DENSITA' DELL'OGGETTO

$Mg = \rho_0 V_0 g$

$$\Sigma F = B - Mg = (\rho_f - \rho_0) V g$$

$\rho_f > \rho_0 \Rightarrow$ FORZA RISULTANTE E' $> 0$

$\Rightarrow$ L'OGGETTO ACCELERA VERSO L'ALTO

$\rho_0 > \rho_f \Rightarrow$ FORZA RISULTANTE E' $< 0$

$\Rightarrow$ L'OGGETTO AFFONDA

]SE14-6[

LO STESSO VALE PER UN OGGETTO IMMERSO IN UN GAS.

$\rho_{oggetto} < \rho_{aria} \Rightarrow$ L'OGGETTO GALLEGGIA IN ALTO

$\rho_{oggetto} > \rho_{aria} \Rightarrow$ L'OGGETTO CADE VERSO IL BASSO (e.g. UNA PIETRA)

---

CASO 2: CORPO GALLEGGIANTE

SE UN OGGETTO E' SOLO PARZIALMENTE IMMERSO, IL VOLUME $V$ DEL FLUIDO SPOSTATO DALL'OGGETTO E' SOLO UNA FRAZIONE DEL VOLUME TOTALE $V_0$ DELL'OGGETTO.

- OGGETTO IN EQUILIBRIO $\Rightarrow$

SPINTA DI ARCHIMEDE = FORZA DI GRAVITA'

$$B = \rho_f \, g \, V \qquad Mg = \rho_0 V_0 g$$

$\sum_i F_y^{(i)} = 0$ NELLA DIREZIONE VERTICALE

$$\Rightarrow \rho_f \, g \, V = \rho_0 \, g \, V_0$$

$\Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{V}{V_0}$ = FRAZIONE DI VOLUME DELL'OGGETTO AL DI SOTTO DELLA SUPERFICIE DEL FLUIDO.

] SE 14-7 [

ESEMPIO DEL CASO 2: NAVE DA CARICO

NAVE FERMA => FORZA DI ARCHIMEDE = PESO DELLA NAVE

=> NAVE E' IN EQUILIBRIO, E SOLO PARTE DEL SUO VOLUME E' SOTTO ACQUA

NAVE CON GRANDE CARICO => ESSA SI IMMERGE DI PIU' NELL'ACQUA

AUMENTO DI PESO DELLA NAVE DOVUTO AL CARICO

=> BILANCIATO DALL'AUMENTO DI FORZA D'ARCHIMEDE DOVUTA AL VOLUME DELLA NAVE CHE E' ORA SOTTO LA SUPERFICIE DELL'ACQUA

---

ESEMPIO DEL CASO 1: PESCE IN ACQUA

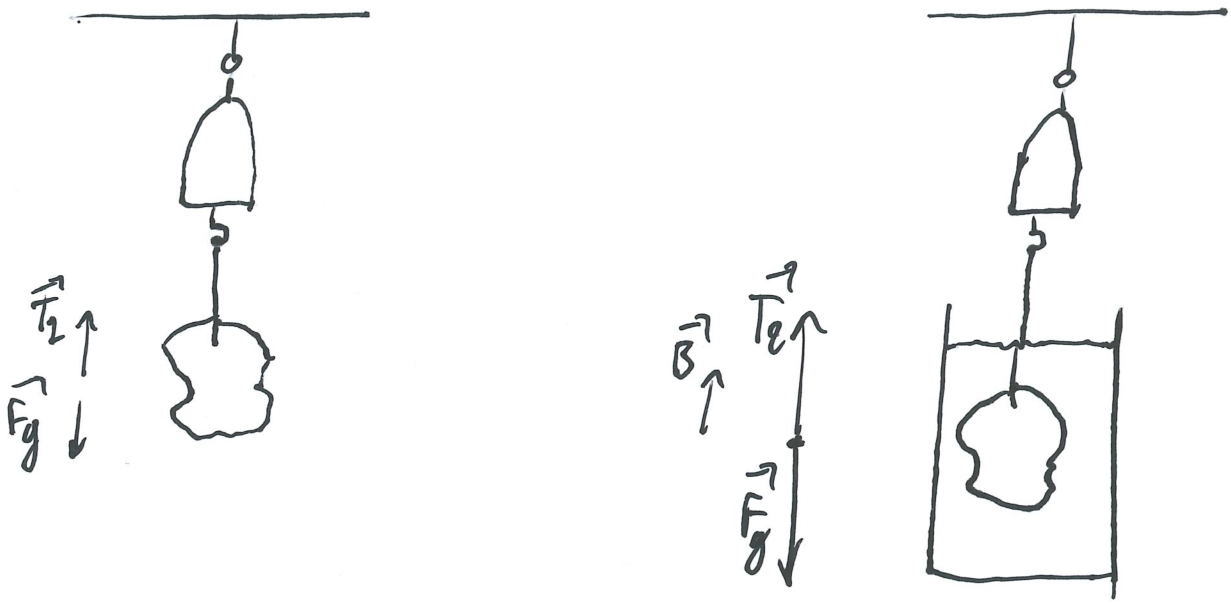
$\rho_{PESCE} > \rho_{ACQUA}$ => IL PESCE TENDEREBBE AD AFFONDARE,

MA, REGOLANDO INTERNAMENTE LA GRANDEZZA DELLA SUA VESCICA NATATORIA, AUMENTA LA QUANTITA' DI ACQUA SPOSTATA

=> AUMENTA LA FORZA DI ARCHIMEDE

=> IL PESCE NUOTA A VARIE PROFONDITA'

ESEMPIO: CORONA IN ARIA vs. CORONA IN ACQUA




- CORONA IN ARIA $\Rightarrow$ LA SCALA DELLA BILANCIA FORNISCE IL PESO VERO: $T_1 = F_g$ (TRASCURANDO LA SPINTA DI ARCHIMEDE DELL'ARIA)

- CORONA IMMERSA IN ACQUA $\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} F^{(i)} = B + T_2 - F_g = 0$

$$\Rightarrow B = F_g - T_2 \Rightarrow T_2 = F_g - B$$

$\Rightarrow$ LA SPINTA DI ARCHIMEDE RIDUCE IL VALORE FORNITO DALLA SCALA DELLA BILANCIA

$B = F_g - T_2 = 7.84 N - 6.84 N = 1\ N$

= PESO DEL VOLUME DI ACQUA SPOSTATA

$= \rho_w\, g\, V_w$

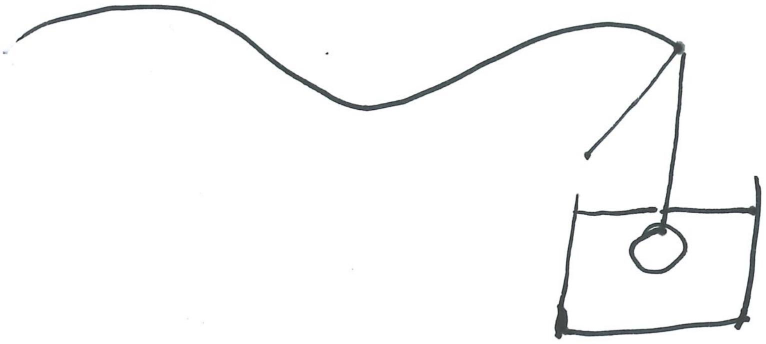
VOLUME CORONA $= V_c = V_w =$ VOLUME DELL'ACQUA SPOSTATA $= \dfrac{B}{\rho_w g} = \dfrac{1\ N}{10^3 \frac{kg}{m^3}\ 9.8\, m s^{-2}} = 1.02 \cdot 10^{-4}\ m^3$

DENSITA' CORONA $= \rho_c = \dfrac{m_c}{V_c} = \dfrac{m_c g}{V_c g} = \dfrac{7.84\ N}{1.02 \cdot 10^{-4} m^3\ 9.8 m s^{-2}}$

$\simeq 7.84\ 10^3 \dfrac{kg}{m^3}$

VS. DENSITA' ORO $= 19.3 \cdot 10^3 \dfrac{kg}{m^3}$

]SE14-10[



- UN ESTREMO DI UNA CORDA ORIZZONTALE E' ATTACCATO AD UNA LAMA VIBRANTE, E UNA SFERA DI MASSA 2 Kg E' APPESA ALL'ESTREMITA' DELLA CORDA.

$T_i$ = TENSIONE INIZIALE DELLA CORDA

$T_i - mg = 0 \Rightarrow T_i = mg$

SFERA IMMERSA IN ACQUA

$\Rightarrow T_f + B - mg = 0 \Rightarrow B = mg - T_f$

$\frac{T_f}{T_i} = \alpha \Rightarrow B = mg - \alpha T_i = mg - \alpha mg$

$= mg(1-\alpha)$

$= \rho_{ACQUA}\, g\, \frac{4}{3} \pi r^3$

$\Rightarrow r = \left(\frac{3B}{4\pi \rho_a g}\right)^{\frac{1}{3}}$

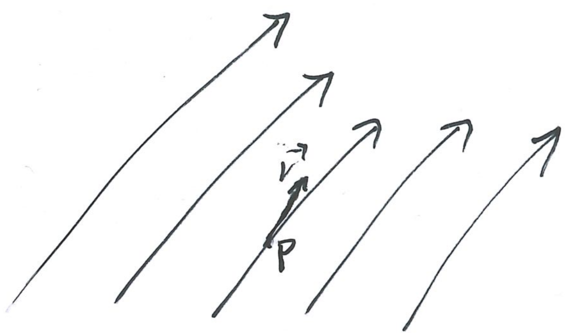
]SE 14-11[

# FILE SE15

## LINEE DI CORRENTE ED EQUAZIONE DI CONTINUITA' DEI FLUIDI

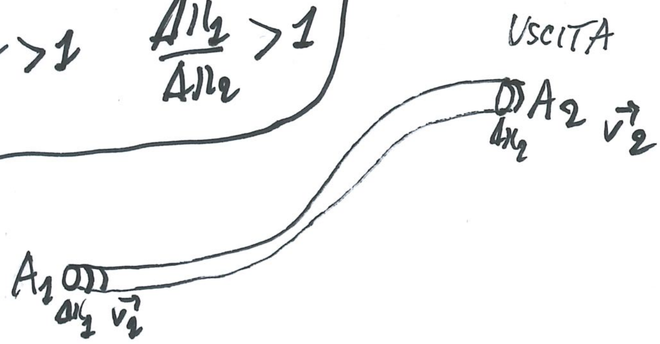
DEFINIZIONE: IL CAMMINO SEGUITO DA UNA PARTICELLA DI UN FLUIDO IN UN FLUSSO STAZIONARIO E' DETTO LINEA DI CORRENTE

CORRENTE = MOTO ORDINATO DI UN LIQUIDO O UN GAS




QUI VEDIAMO UN INSIEME DI LINEE DI FLUSSO. UNA PARTICELLA PASSANTE PER P DESCRIVE UNA DI QUESTE LINEE, E LA SUA VELOCITA' $\vec{v}$ E' TANGENTE IN OGNI PUNTO ALLA LINEA DI CORRENTE LUNGO LA QUALE SI MUOVE.

$\frac{A_2}{A_1} > 1 \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} > 1$




FLUIDO IN MOTO STAZIONARIO ATTRAVERSO UN TUBO DI SEZIONE VARIABILE.

VOLUME DI FLUIDO ENTRANTE $= A_1 \Delta x_1$

" " USCENTE $= A_2 \Delta x_2$

- IL VOLUME DI UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE SI CONSERVA

$$\Rightarrow A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \Rightarrow \frac{A_1 \Delta x_1}{\Delta t} = \frac{A_2 \Delta x_2}{\Delta t}$$

$\Delta t =$ INTERVALLO DI TEMPO DURANTE IL QUALE IL FLUIDO SI MUOVE

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v = |\vec{v}| \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (*)$$

= EQUAZIONE DI CONTINUITA' DEI FLUIDI

$Av =$ PORTATA

(*) $\Rightarrow$ "IL PRODOTTO DELL'AREA E DELLA VELOCITA' DEL FLUIDO IN TUTTI I PUNTI DI UN TUBO E' COSTANTE"

$\Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 > v_2 \Rightarrow$ LA VELOCITA' E' MAGGIORE DOVE IL TUBO E' PIU' STRETTO

$\Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Rightarrow$ LA VELOCITA' E' MINORE DOVE IL TUBO E' PIU' AMPIO

ACQUA CHE ESCE DA UNA IMBOCCATURA:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = A_2 V_{x_i}$$

$$\Rightarrow V_{x_i} = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{4.91\,cm^2}{0.5\,cm^2} 2.02\,ms^{-1} = 20\,ms^{-1}$$

OVE $A_1 = \pi R^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(2.5\,cm)^2}{4} \simeq 4.91\,cm^2$

$$A_1 V_1 = 30 \frac{L}{min} = \frac{30 \times 10^3\,cm^3}{60\,s} = 500\,cm^3 s^{-1}$$

$$V_1 = \frac{500\,cm^3 s^{-1}}{4.91\,cm^2} = 2.02\,ms^{-1}$$

← UNA VOLTA USCITA DALL'IMBOCCATURA, L'ACQUA E' IN CADUTA LIBERA. UNA PARTICELLA D'ACQUA CADE LUNGO LA VERTICALE DI 1m PARTENDO DA FERMA

$$\Rightarrow y_f = y_i + V_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow -1\,m = 0 + 0 - \frac{1}{2} 9.8\,ms^{-2} t^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m}{9.8\,ms^{-2}}} = 0.452\,s$$

]SE15-3[

$x_f = x_i + v_{x_i} t = 0 + 10\ m\ s^{-1}\ 0.452\,s = 4.52\ m$

## TEOREMA DI BERNOULLI

ANDIAMO ORA A SCOPRIRE LA RELAZIONE ESISTENTE TRA VELOCITA', PRESSIONE E ALTEZZA DI UN FLUIDO, ASSUMENDO CHE IL PUNTO $P_1$ SIA AD UNA QUOTA $y_1$ E IL PUNTO $P_2$ AD UNA QUOTA $y_2 > y_1$.

→ FORZA ESERCITATA DAL FLUIDO SUL MARGINE SINISTRO $= P_1 A_1$

⇒ TALE FORZA COMPIE IL LAVORO

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$$

$V =$ VOLUME DELLA PORZIONE 1

LAVORO COMPIUTO DAL FLUIDO ALLA DESTRA DEL SEGMENTO:

$$W_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 V$$

$W_2 < 0$ POICHE' LA FORZA SUL SEGMENTO DI FLUIDO IN $P_2$ E' DIRETTA VERSO SINISTRA

⇒ LAVORO TOTALE FATTO SUL SEGMENTO DI FLUIDO NELL'INTERVALLO $\Delta t$ E'

$$W = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2) V$$

- D'ALTRONDE, LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA DEL SEGMENTO DI FLUIDO E'

$$\Delta E_K = \frac{m}{2}(V_2)^2 - \frac{m}{2}(V_1)^2$$

VOLUMI EGUALI $\Rightarrow m_1 = m_2 = m$

- LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE DEL SISTEMA SEGMENTO-TERRA E'

$$\Delta U_g = mgy_2 - mgy_1$$

- LAVORO TOTALE FATTO SUL SISTEMA SEGMENTO-TERRA DAL FLUIDO ESTERNO AL SEGMENTO:

$$W = \Delta E_K + \Delta U_g$$

$$\Rightarrow (P_1 - P_2)V = \frac{m}{2}(V_2)^2 - \frac{m}{2}(V_1)^2 + mgy_2 - mgy_1$$

$$\Rightarrow P_1 V + \frac{m}{2}(V_1)^2 + mgy_1 = P_2 V + \frac{m}{2}(V_2)^2 + mgy_2$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{\rho}{2}(V_1)^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{\rho}{2}(V_2)^2 + \rho g y_2$$

POICHE' $\rho = \dfrac{m}{V}$

DUNQUE, L'EQUAZIONE DI BERNOULLI PER FLUIDI IDEALI E'

$$P + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g y = \text{COSTANTE}$$

$\Rightarrow$ LA SOMMA DELLA PRESSIONE $P$, DELL'ENERGIA CINETICA PER UNITA' DI VOLUME $\frac{\rho}{2} v^2$, E DELL'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE PER UNITA' DI VOLUME, E' COSTANTE IN TUTTI I PUNTI DI UNA LINEA DI CORRENTE.

- IN PARTICOLARE: FLUIDO FERMO $\Rightarrow v_1 = v_2 = 0$

  $\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$

- LA EQ. CI DICE UNA COSA VERA ANCHE PER I GAS: QUANDO LA VELOCITA' AUMENTA, LA PRESSIONE DIMINUISCE (EFFETTO BERNOULLI). ECCO PERCHE', SE LA NOSTRA AUTO E' SURPASSATA DA UN CAMION AD ALTA VELOCITA', CI SEMBRA CHE L'AUTO VENGA RISUCCHIATA DAL CAMION.

INFATTI: $\rightarrow$

L'ARIA TRA AUTO E CAMION E' IN UN CANALE RELATIVAMENTE STRETTO $\Rightarrow$ LA VELOCITA' DELL'ARIA AUMENTA $\Rightarrow$ DIMINUISCE LA PRESSIONE SU UN LATO DELLA NOSTRA AUTO, RISPETTO ALL' ALTRO LATO $\Rightarrow$ C'E' UNA FORZA COMPLESSIVA CHE SPINGE L'AUTO VERSO IL CAMION.

---

ESEMPIO: <u>AFFONDAMENTO</u> DI UNA NAVE

PER ERRORE, UN PESCATORE COLPISCE CON LA FIOCINA UNA IMBARCAZIONE

SIA $y_1 = 0$ $\qquad$ $y_2 = -10\,m$

$P_1 = P_2 = P_0 =$ PRESSIONE ATMOSFERICA

DALLA $\diamond$ SI HA:

$$P_0 + \frac{\rho}{2} 0^2 + \rho g\, 0 = P_0 + \frac{\rho}{2} (v_2)^2 + \rho g (-h)$$

$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$ = VELOCITA' CON LA QUALE L'ACQUA ENTRA NELL'IMBARCAZIONE

$$\Rightarrow v_2 = 14\ m\,s^{-1}$$

]SE15-7[

ESEMPIO: LEGGE DI TORRICELLI

"SE UN SERBATOIO E' APERTO IN ATMOSFERA, LA VELOCITA' DEL LIQUIDO IN USCITA DA UN FORO A DISTANZA h SOTTO LA SUPERFICIE = VELOCITA' ACQUISTATA DA UN OGGETTO IN CADUTA LIBERA LUNGO UNA DISTANZA VERTICALE h".

DIM SE $A_2 \gg A_1 \Rightarrow$ LIQUIDO $\simeq$ A RIPOSO IN CORRISPONDENZA DELLA SUPERFICIE SUPERIORE DEL SERBATOIO

$$\Rightarrow P_0 + \frac{\rho}{2}(v_1)^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$$y_2 - y_1 = h$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(P-P_0)}{\rho} + 2gh}$$

$\Rightarrow$ SE $P = P_0$, SI HA $v_1 = \sqrt{2gh}$

Q.E.D.

$$y_f = y_i + v_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow 0 = y_1 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

]SE15-8[

$\Rightarrow$ LA POSIZIONE ORIZZONTALE DELLA PARTICELLA ALL'ISTANTE IN CUI COLPISCE IL TAVOLO E'

$$x_f = x_i + v_{x_i} t = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}\sqrt{\frac{2y_1}{g}} = 2\sqrt{y_2 y_1 - (y_1)^2}$$

PER MASSIMIZZARE LA POSIZIONE ORIZZONTALE, SI DEVE IMPORRE CHE $\frac{dx_f}{dy_1} = 0$

$$\Rightarrow y_2 - 2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} y_2 \quad (*)$$

$\Rightarrow$ IL FORO DEVE TROVARSI A META' STRADA TRA IL FONDO E LA SUPERFICIE SUPERIORE DEL SERBATOIO.

$$\frac{d^2x_f}{dy_1^2} = \frac{d}{dy_1}\frac{dx_f}{dy_1} = \frac{d}{dy_1}\left(y_2 y_1 - (y_1)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y_2 - 2y_1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(y_2 y_1 - (y_1)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(y_2 - 2y_1\right)^2$$
$$-2\left(y_2 y_1 - (y_1)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2x_f}{dy_1^2}\right|_{y_1 = \frac{1}{2}y_2} = -2\frac{1}{\sqrt{(y_2)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)}} = -\frac{4}{y_2} < 0 \Rightarrow (*) \text{ E' UN PUNTO DI MASSIMO}$$

# TEMPERATURA E PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

- DALLA VITA QUOTIDIANA ABBIAMO UN'IDEA INTUITIVA, IMPRECISA, DI TEMPERATURA. MA QUAL È LA SUA DEFINIZIONE SPERIMENTALE?

- IMMAGINIAMO DI AVERE OGGETTI POSTI IN UN CONTENITORE IN MODO DA FORMARE UN SISTEMA ISOLATO.
  DELL'ENERGIA PUÒ ESSERE SCAMBIATA FRA DI ESSI PER MEZZO DI CALORE O DI RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA.

  ⇒ SI DICE ALLORA CHE TALI OGGETTI SONO IN CONTATTO TERMICO

DEFINIZIONE: L'EQUILIBRIO TERMICO È LA SITUAZIONE NELLA QUALE DUE OGGETTI IN CONTATTO TERMICO TRA LORO CESSANO DI AVERE QUALUNQUE SCAMBIO DI ENERGIA MEDIANTE CALORE O RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA.

- SIANO ORA A, B DUE OGGETTI NON IN CONTATTO TERMICO, E SIA C UN DISPOSITIVO TARATO OPPORTUNAMENTE.

NOSTRO SCOPO: DESIDERIAMO CAPIRE SE A, B RAGGIUNGONO L'EQUILIBRIO TERMICO UNA VOLTA POSTI IN CONTATTO.

C IN CONTATTO CON A, E REGISTRIAMO QUANTO INDICA

" " B, E SI REGISTRA LA NUOVA LETTURA

- SE LE DUE LETTURE SONO LE STESSE (ENTRO GLI ERRORI SPERIMENTALI), CONCLUDIAMO CHE A E B SONO IN EQUILIBRIO TERMICO FRA LORO
  - ⇒ PONENDOLI IN CONTATTO TERMICO, NON SI MISURA NESSUN TRASFERIMENTO DI ENERGIA

PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA: SE GLI OGGETTI A, B SONO SEPARATAMENTE IN EQUILIBRIO TERMICO CON UN TERZO OGGETTO C, ALLORA A, B SONO IN EQUILIBRIO TERMICO FRA LORO

⇒ SI DICE ALLORA CHE DUE OGGETTI IN EQUILIBRIO TERMICO FRA LORO SONO ALLA STESSA TEMPERATURA

I TERMOMETRI POSSONO USARE:

- VOLUME DI UN LIQUIDO
- LUNGHEZZA DI UN SOLIDO
- PRESSIONE DI UN GAS A VOLUME COSTANTE
- VOLUME DI UN GAS A PRESSIONE COSTANTE
- RESISTENZA ELETTRICA DI UN CONDUTTORE
- COLORE DI UN OGGETTO CALDO

SCALA CELSIUS: TEMPERATURA DELLA MISCELA ACQUA-GHIACCIO $= 0°C$

= PUNTO DI CONGELAMENTO DELL'ACQUA

- MISCELA ACQUA-VAPORE IN EQUILIBRIO TERMICO FRA LORO A PRESSIONE ATMOSFERICA

$\Rightarrow T = 100°C$ = PUNTO DI EBOLLIZIONE DELL'ACQUA

LA COLONNA LIQUIDA HA LUNGHEZZA DIVISA IN 100 SEGMENTI UGUALI, OGNUNO DEI QUALI INDICA UNA $\Delta T = 1°C$

# FILE SE16

C'E' SOLO UN TIPO DI TERMOMETRO CHE PERMETTE DI DEFINIRE CORRETTAMENTE LA TEMPERATURA E METTERLA IN RELAZIONE CON L'ENERGIA INTERNA. SI TRATTA DEL TERMOMETRO A GAS. IN ESSO, LE MISURE DI TEMPERATURA SONO INDIPENDENTI DALLA SOSTANZA USATA.
IL TERMOMETRO A GAS A VOLUME COSTANTE SFRUTTA LA VARIAZIONE DI PRESSIONE CON LA TEMPERATURA DI UN VOLUME FISSATO DI GAS.

## FUNZIONAMENTO

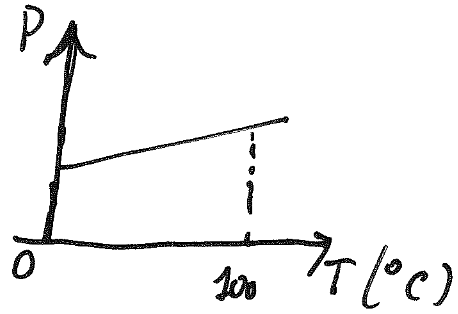
IL CONTENITORE DEL GAS VIENE IMMERSO IN UN BAGNO DI ACQUA E GHIACCIO IN EQUILIBRIO TERMICO, E IL SERBATOIO DI MERCURIO B VIENE ORA ALZATO ORA ABBASSATO IN MODO DA MANTENERE IL VOLUME DEL GAS COSTANTE

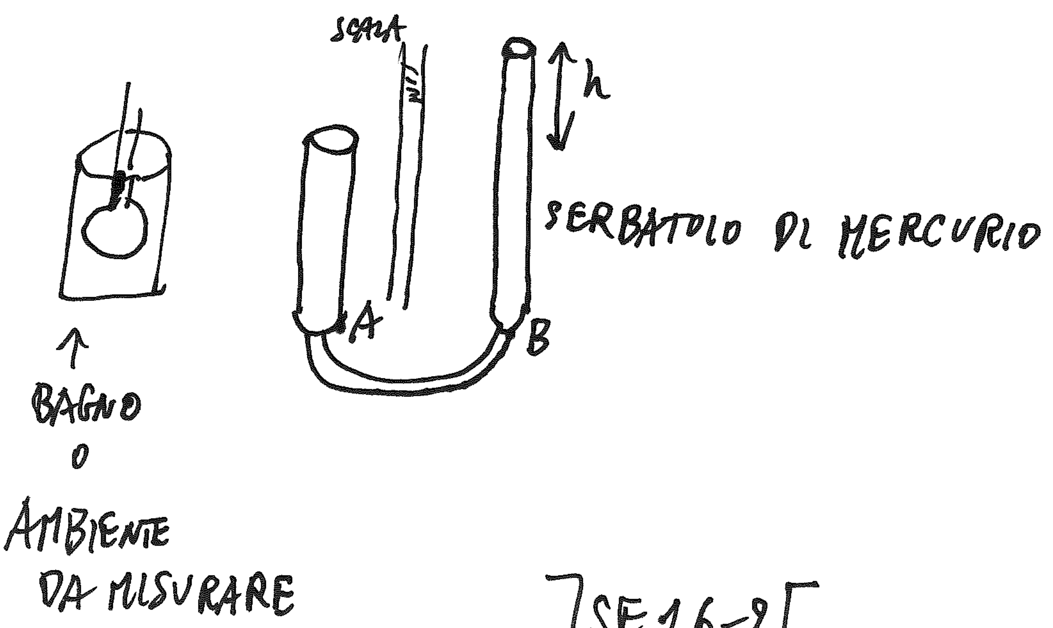
ALTEZZA h = DIFFERENZA TRA I LIVELLI DEL SERBATOIO B E DELLA COLONNA A (FIG. SEGUENTE, SE16-2)

h INDICA LA PRESSIONE NEL CONTENITORE A 0°C, SECONDO L'EQ. $P = P_0 + \rho g h$

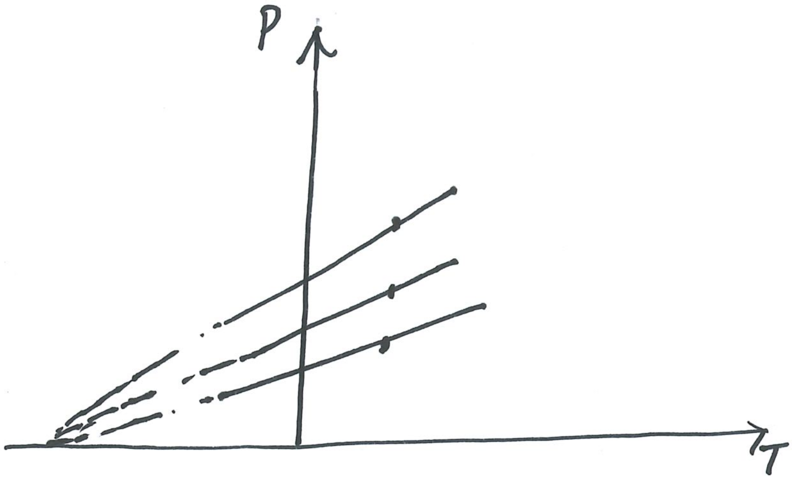
IL CONTENITORE VIENE POI IMMERSO IN ACQUA AL PUNTO DI EBOLLIZIONE; IL SERBATOIO B E' RIAGGIUSTATO FINO A CHE L'ALTEZZA DELLA COLONNA A VIENE RIPORTATA ALLO ZERO DELLA SCALA => IL VOLUME DEL GAS E' RIMASTO LO STESSO DI QUELLO CHE AVEVA NEL BAGNO DI ACQUA E GHIACCIO.

MISURA DEL NUOVO VALORE DI $h$ => VALORE DELLA PRESSIONE A 100°C.




]SE 16-2[




↑ PRESSIONE IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA PER ESPERIMENTI IN CUI DIFFERENTI GAS HANNO DIFFERENTI PRESSIONI IN UN TERMOMETRO A GAS A VOLUME COSTANTE.

N.B. PER TUTTI I GAS, L'ESTRAPOLAZIONE DELLA PRESSIONE E' ZERO ALLA TEMPERATURA UNICA DI $-273.15\ °C$

$\Rightarrow$ TALE TEMPERATURA E' UNIVERSALE, POICHE' NON DIPENDE DALLA SOSTANZA USATA PER IL TERMOMETRO $\Rightarrow$ TEMPERATURA DI ZERO ASSOLUTO

SCALA KELVIN: $0\,K \rightarrow -273.15\ °C$

$$T_C = T_K - 273.15 = T - 273.15$$

$T_K = T =$ TEMPERATURA ASSOLUTA

]SE16-3[

PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA = UNICA TEMPERATURA E PRESSIONE ALLA QUALE ACQUA, VAPOR D'ACQUA E GHIACCIO COESISTONO IN EQUILIBRIO

DEFINIZIONE:

1 KELVIN = $\frac{1}{273.16}$ DELLA TEMPERATURA DEL PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA

---

SCALA FAHRENHEIT:

$$\frac{C}{(F-32)} = \frac{5}{9} \Rightarrow T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$$

$$\Rightarrow \Delta T_F = \frac{9}{5} \Delta T_C$$

ESEMPIO: $T_F = 50 \Rightarrow T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{5}{9} \cdot 18 = 10\,°C$

---

IL PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA HA

$T_3 = 0.01\ °C$

$P_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ atm

$(T_K)_3 = 273.16\ °K$ = TEMPERATURA IN KELVIN DEL PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA

$°K = (0.01 - 273.16)°C = -273.15\ °C$

$\Rightarrow T_K = 0.01 + 273.15$ PER IL PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA

- LA DILATAZIONE TERMICA DI UN OGGETTO E' LA CONSEGUENZA DELLA VARIAZIONE DELLA DISTANZA MEDIA DI SEPARAZIONE TRA GLI ATOMI O LE MOLECOLE CHE LO COSTITUISCONO.

- SE LA DILATAZIONE TERMICA DI UN OGGETTO E' SUFFICIENTEMENTE PICCOLA RISPETTO ALLE SUE DIMENSIONI INIZIALI

$$\Rightarrow \Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

$$\Rightarrow L_f - L_i = \alpha L_i (T_f - T_i)$$

VOLUME $V_f$: $\quad V_f = (L_f)^3$

$$\Rightarrow (L_f)^3 = (L_i + \alpha L_i \Delta T)^3$$

RICORDIAMO CHE $\quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$$\Rightarrow (L_f)^3 = (L_i)^3 + 3\alpha (L_i)^3 \Delta T + O((\Delta T)^2)$$

$$= V_i + 3\alpha V_i \Delta T + O((\Delta T)^2)$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_f - V_i \simeq \beta V_i \Delta T \qquad \beta = 3\alpha$$

$\beta$ = COEFFICIENTE MEDIO DI DILATAZIONE CUBICA

] SE 16-5 [

AUMENTO DI SUPERFICIE DI UN OGGETTO:

$$\Delta A = \gamma A_i \Delta T$$

$\gamma$ = COEFFICIENTE MEDIO DI DILATAZIONE SUPERFICIALE

$\gamma = 2\alpha$

<u>ESEMPIO:</u> DURANTE LAVORI IN CASA, UNA GOCCIA DI PITTURA CADE SUL BULBO CALDO DI UNA LAMPADINA ACCESA.

- IL BULBO CONTIENE GAS, E IL VETRO DELL'INVOLUCRO RICEVE ENERGIA (MOTO DEL GAS CALDO VICINO AL FILAMENTO VERSO IL VETRO FREDDO) E PUO' DIVENTARE MOLTO CALDO.

GOCCIA FREDDA SUL VETRO $\Rightarrow$ PORZIONE DI VETRO SI RAFFREDDA MOLTO RAPIDAMENTE $\Rightarrow$ CONTRAZIONE DELLA REGIONE CAUSA TENSIONE TERMICA CHE PUO' ROMPERE IL VETRO.

] SE 16-6 [

UN GAS PERFETTO È UN GAS MANTENUTO A BASSA DENSITÀ; ESSO È UN INSIEME DI ATOMI O MOLECOLE CHE SI MUOVONO CASUALMENTE, TRA ESSI NON SI ESERCITANO FORZE A LUNGA DISTANZA E SONO COSÌ PICCOLI DA OCCUPARE UNA FRAZIONE TRASCURABILE DEL VOLUME DEL LORO CONTENITORE

- MOLE DI UNA SOSTANZA = MASSA DI QUELLA SOSTANZA CHE CONTIENE $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ MOLECOLE

$N_A$ = NUMERO DI AVOGADRO

$n$ = NUMERO DI MOLI = $\frac{m}{M}$

$m$ = MASSA DEL CAMPIONE

$M$ = MASSA MOLARE, ESPRESSA IN GRAMMI/MOLE.

EQUAZIONE DI STATO = EQUAZIONE FUNZIONALE CHE LEGA TRA LORO $P, V, T$:

$$f(P, V, T) = 0$$

CI SONO VARIE FORME DI $f$.

]SE 26-7[

GAS PERFETTI: ALLORA $f = PV - nRT$

$$R = 8{,}314 \frac{\text{JOULE}}{\text{mol} \cdot K}$$

ESEMPIO: GAS IN UNA BOMBOLA:

ELIO COME GAS PERFETTO

NON ESCE GAS DALLA BOMBOLA

$\Rightarrow$ IL NUMERO DI MOLI RIMANE COSTANTE

$$\Rightarrow nR = \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} T_i$$

---

ESEMPIO: BOMBOLETTA SPRAY A VOLUME COSTANTE

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \qquad V_i = V_f$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{T_f}{T_i} P_i$$

] SE16-8 [

# FILE SE17

## CALORE ED ENERGIA INTERNA

DEFINIZIONE: L'ENERGIA INTERNA $E_{int}$ E' L'ENERGIA ASSOCIATA CON I COMPONENTI MICROSCOPICI DI UN SISTEMA, OVVERO ATOMI E MOLECOLE, QUANDO QUESTI SONO VISTI DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO A RIPOSO RISPETTO AL SISTEMA. ESSA INCLUDE:

- ENERGIA CINETICA E POTENZIALE ASSOCIATA COL MOTO CASUALE DI TIPO TRASLAZIONALE, ROTAZIONALE e VIBRAZIONALE DEGLI ATOMI O MOLECOLE CHE COSTITUISCONO IL SISTEMA, COSÌ COME L'ENERGIA POTENZIALE INTERMOLECOLARE.

ESEMPIO: PER UN GAS PERFETTO MONOATOMICO, L'ENERGIA INTERNA E' SEMPLICEMENTE L'ENERGIA CINETICA TRASLAZIONALE TOTALE DEGLI ATOMI.

T CRESCE $\Rightarrow$ $E_K$ ATOMI AUMENTA $\Rightarrow$ $E_{int}$ DEL GAS AUMENTA

- PER GAS DI TIPO POLIATOMICO, $E_{int}$ INCLUDE $E_K$ ROTAZIONALE, $E_K$ e $U$ ASSOCIATE ALLE VIBRAZIONI MOLECOLARI.

DEFINIZIONE DI CALORE: E' UN MECCANISMO MEDIANTE IL QUALE L'ENERGIA E' TRASFERITA FRA UN SISTEMA E IL SUO AMBIENTE CIRCOSTANTE A CAUSA DI UNA DIFFERENZA DI TEMPERATURA. ESSO E' ANCHE LA QUANTITA' DI ENERGIA Q TRASFERITA MEDIANTE TALE MECCANISMO.

- DUNQUE, NON HA SENSO PARLARE DI CALORE A MENO CHE DELL'ENERGIA SIA STATA TRASFERITA COME CONSEGUENZA DI UNA DIFFERENZA DI TEMPERATURA.
- QUANDO SCALDIAMO L'ACQUA SUL FORNELLO, L'ENERGIA ENTRA NELL'ACQUA COL CALORE DEI GAS CALDI DELLA FIAMMA

=> L'ENERGIA INTERNA DELL'ACQUA AUMENTA

DEF.: CALORIA = CALORE NECESSARIO PER AUMENTARE LA TEMPERATURA DI 1g D'ACQUA DA 14.5 °C A 15.5 °C

- TUTTAVIA, POICHE' IL CALORE MISURA UN TRASFERIMENTO DI ENERGIA, SI DEFINISCE

$$\text{CALORIA} = 1\ \text{cal} = 4.186\ \text{J} = \text{EQUIVALENTE MECCANICO DEL CALORE}$$

CHE NON FA ALCUN RIFERIMENTO AL RISCALDAMENTO DELL'ACQUA!

ESEMPIO: PERDITA DI PESO.

UNO STUDENTE MANGIA SMODERATAMENTE E ASSUME 2000 K-CALORIE. POI DECIDE DI SOLLEVARE UN OGGETTO DI 50 Kg PER UNA ALTEZZA DI 2 METRI PER SMALTIRE TALE ECCESSO. QUANTE VOLTE DOVREBBE SOLLEVARE IL PESO?

LO STUDENTE VUOLE COMPIERE LAVORO SUL SISTEMA OGGETTO-TERRA

$$1\ Cal = 10^3\ cal = 1\ K\text{-}cal$$

$$W = 2 \cdot 10^3\ Cal = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3\ cal = 2 \cdot 10^6\ 4.186\ J$$
$$= 8.37 \cdot 10^6\ J$$

$$W = n\ mgh = 8.37 \cdot 10^6\ J$$

$$\Rightarrow n = \frac{8.37 \cdot 10^6\ J}{50\ Kg\ 9.8\ ms^{-2} \cdot 2m} \simeq 8.54 \cdot 10^3$$ SOLLEVAMENTI

AL RITMO INNATURALE DI UN SOLLEVAMENTO OGNI 5 s, OCCORRONO ALMENO 12 ORE (MA POI VA CONSIDERATO IL SONNO, LA FATICA E LE PAUSE FISIOLOGICHE).

DUNQUE IL SOLLEVAMENTO PESI NON CONTROBILANCIA GLI ECCESSI ALIMENTARI. MEGLIO UNA LUNGA PASSEGGIATA IN UNA GIORNATA MOLTO CALDA.

- SE UNA QUANTITA' Q DI ENERGIA VIENE TRASFERITA A UNA MASSA m DI UNA SOSTANZA, CON AUMENTO $\Delta T$ DI TEMPERATURA, IL CALORE SPECIFICO DELLA SOSTANZA E' DEFINITO COME

$$c = \frac{Q}{m \Delta T}$$

SI MISURA IN $\frac{J}{Kg\ °C}$

$$\Rightarrow Q = mc\,\Delta T$$

T AUMENTA $\Rightarrow \Delta T > 0$, $Q > 0$, $\Rightarrow$ ENERGIA ENTRA NEL SISTEMA

T DIMINUISCE $\Rightarrow \Delta T < 0$, $Q < 0$ $\Rightarrow$ ENERGIA ESCE DAL SISTEMA

| SOSTANZA | CALORE SPECIFICO (J/(Kg · °C)) |
| --- | --- |
| ALLUMINIO | 900 |
| BERILLIO | 1830 |
| RAME | 387 |
| ORO | 229 |
| FERRO | 448 |
| PIOMBO | 128 |
| ARGENTO | 234 |

]SE17-4[

| | |
|---|---|
| VETRO | 837 |
| GHIACCIO (5°C) | 2090 |
| LEGNO | 1700 |
| ALCOOL | 2400 |
| MERCURIO | 140 |
| ACQUA (15°C) | 4186 |
| VAPORE (100°C) | 2010 |

FRA LE SOSTANZE DI USO CORRENTE, L'ACQUA HA IL CALORE SPECIFICO PIU' ALTO. IDROGENO ED ELIO HANNO POI VALORI PIU' ALTI DEL CALORE SPECIFICO

- ALTO CALORE SPECIFICO DELL'ACQUA => TEMPERATURE MODERATE NELLE REGIONI VICINE A GRANDI ESTENSIONI D'ACQUA. QUANDO LA TEMPERATURA DI UNA GRANDE ESTENSIONE D'ACQUA DIMINUISCE => L'ACQUA TRASFERISCE ENERGIA ALL'ARIA => L'ARIA TRASPORTA L'ENERGIA VERSO TERRA QUANDO I VENTI SONO FAVOREVOLI

]SE27-5[

ESEMPIO: I VENTI PREVALENTI DELLA COSTA OVEST DEGLI USA SONO DIRETTI VERSO TERRA

=> L'ENERGIA LIBERATA DALL'OCEANO PACIFICO QUANDO ESSO SI RAFFREDDA RENDE LE ZONE COSTIERE PIU' CALDE (DI QUANTO SAREBBERO ALTRIMENTI)

=> L'INVERNO DELLA COSTA OVEST E' PIU' FAVOREVOLE RISPETTO ALLA COSTA EST

---

ESEMPIO: COME CIRCOLA L'ARIA IN UNA SPIAGGIA

DI GIORNO, IL SOLE CEDE QUANTITA' EGUALI DI ENERGIA ALLA SPIAGGIA E ALL'ACQUA

BASSO CALORE SPECIFICO SABBIA =>
=> $\Delta T$ SPIAGGIA > $\Delta T$ ACQUA

=> L'ARIA AL DI SOPRA DEL SUOLO RAGGIUNGE T PIU' ALTA DELL'ARIA AL DI SOPRA DELL'ACQUA

ARIA FREDDA, PIU' DENSA, SPINGE VERSO L'ALTO L'ARIA CALDA MENO DENSA (PRINCIPIO DI ARCHIMEDE)

=> DURANTE IL GIORNO C'E' UNA BREZZA DAL MARE VERSO TERRA.

- DI NOTTE, INVECE, LA SABBIA SI RAFFREDDA PIU' RAPIDAMENTE DELL'ACQUA => LA CIRCOLAZIONE SI

INVERTE POICHE' L'ARIA PIU' CALDA E' ORA SOPRA L'ACQUA

---

- COME MISURARE IL CALORE SPECIFICO DI UN SOLIDO O LIQUIDO? SI RISCALDA LA SOSTANZA A UNA CERTA TEMPERATURA, LA SI METTE IN UN RECIPIENTE CHE CONTIENE ACQUA, CON VALORI NOTI DI $(m, T)$, E SI MISURA LA TEMPERATURA DELL'INSIEME DOPO CHE SI E' RAGGIUNTO L'EQUILIBRIO

SISTEMA = SOSTANZA $\cup$ ACQUA

RECIPIENTE ISOLANTE $\Rightarrow$ L'ENERGIA NON ESCE DAL SISTEMA TRAMITE IL CALORE

$\Rightarrow$ IL SISTEMA E' ISOLATO

UN TALE RECIPIENTE E' DETTO <u>CALORIMETRO</u>

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$\Rightarrow$ ENERGIA RILASCIATA, TRAMITE IL CALORE, DALLA SOSTANZA PIU' CALDA

= ENERGIA CEDUTA ALL'ACQUA

$$\Rightarrow Q_{freddo} = -Q_{caldo}$$

$m_x$ = MASSA DELLA SOSTANZA DI CUI VOGLIAMO DETERMINARE IL CALORE SPECIFICO $c_x$ INCOGNITO

$T_x$ = TEMPERATURA INIZIALE DI TALE SOSTANZA

$(m_a, c_a, T_a)$ = VALORI CORRISPONDENTI PER L'ACQUA

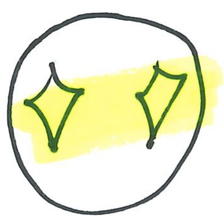
$T$ = TEMPERATURA FINALE DI EQUILIBRIO, DOPO IL MESCOLAMENTO DI SOSTANZA E ACQUA

$Q = mc\Delta T \Rightarrow$ ENERGIA ACQUISTATA DALL'ACQUA È $m_a c_a (T - T_a)$

$\Rightarrow$ ENERGIA PERDUTA DALLA SOSTANZA DI CALORE SPECIFICO INCOGNITO È $m_x c_x (T - T_x)$

$$m_a c_a (T - T_a) = -m_x c_x (T - T_x) = m_x c_x (T_x - T)$$

$$\Rightarrow c_x = \frac{m_a c_a (T - T_a)}{m_x (T_x - T)}$$



## ESEMPIO: RAFFREDDAMENTO DI UN LINGOTTO

- UN LINGOTTO DI METALLO DI 0.05 Kg E' RISCALDATO A 200 °C E POI LASCIATO CADERE IN UN SECCHIO TERMICAMENTE ISOLATO CONTENENTE 0.4 Kg D'ACQUA INIZIALMENTE A 20 °C. SE LA TEMPERATURA FINALE DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA E' 22.4 °C, CALCOLARE IL CALORE SPECIFICO DEL METALLO.

— — —

- NELLA FORMULA ◇◇ DOBBIAMO PORRE

$m_a = 0.4$ Kg $\qquad T = 22.4$ °C

$m_x = 0.05$ Kg $\qquad T_a = 20$ °C

$\qquad T_x = 200$ °C

$$\Rightarrow c_x = \frac{0.4\,\text{Kg} \times 4.186\,\frac{\text{J}}{\text{Kg}\,°\text{C}} \times (22.4 - 20)\,°\text{C}}{0.05\,\text{Kg}\,(200 - 22.4)\,°\text{C}}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{-1} \times 4.186 \times 2.4 \cdot 10^{3}}{5 \cdot 10^{-2} \times 177.6}\,\frac{\text{J}}{\text{Kg}\,°\text{C}}$$

$$= 4.525 \cdot 10^{2}\,\frac{\text{J}}{\text{Kg}\,°\text{C}}$$

]SE 17-9[

# CALORE LATENTE E CAMBIAMENTI DI FASE

- LE CARATTERISTICHE FISICHE DI UNA SOSTANZA CAMBIANO NEL PASSARE DA UNA FORMA ALL'ALTRA. TALE TRANSIZIONE E' DETTA CAMBIAMENTO DI FASE.

L'ENERGIA CHE VIENE ASSORBITA DA UNA SOSTANZA DURANTE LA FUSIONE E L'EBOLLIZIONE $\Rightarrow$ AUMENTO DELL'ENERGIA POTENZIALE INTERMOLECOLARE, MEDIANTE LA ROTTURA DEI LEGAMI

PER SOSTANZE PURE

$$Q = \pm m L$$

Q = ENERGIA TRASFERITA NECESSARIA PER IL CAMBIAMENTO DI FASE

L = CALORE LATENTE DELLA SOSTANZA
(DIPENDE DALLA NATURA DEL CAMBIAMENTO DI FASE E DALLE PROPRIETA' DELLA SOSTANZA)

CALORE LATENTE DI FUSIONE $L_f$ (CAMBIAMENTO DI FASE DURANTE LA FUSIONE)

" " VAPORIZZAZIONE $L_v$ (CAMBIAMENTO DI FASE DURANTE LA VAPORIZZAZIONE)

| | CAL. LAT. FUSIONE | CAL. LAT. VAPORIZZAZIONE |
|---|---|---|
| OSSIGENO | $1.38 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}$ | $2.13 \cdot 10^5 \frac{J}{Kg}$ |
| ACQUA | $3.33 \cdot 10^5 \frac{J}{Kg}$ | $2.26 \cdot 10^6 \frac{J}{Kg}$ |
| ORO | $6.44 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}$ | $1.58 \cdot 10^6 \frac{J}{Kg}$ |

ESEMPIO: EBOLLIZIONE

$$Q = m L_v \Rightarrow P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{m L_v}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{m L_v}{P}$$

- DUNQUE, PER FAR EVAPORARE 1 Kg DI ELIO LIQUIDO OCCORRE UN TEMPO

$$\Delta t = \frac{1\,Kg\ 2.09 \cdot 10^4\ J/Kg}{10\,W} = 2.09 \times 10^3\ s$$

]SE17-11[

# FILE SE 18

## LAVORO NELLE TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

- IN UNA DESCRIZIONE MACROSCOPICA, LO STATO DI UN SISTEMA TERMODINAMICO E' DESCRITTO MEDIANTE PRESSIONE, VOLUME, TEMPERATURA ED ENERGIA INTERNA.

QUESTE GRANDEZZE SONO VARIABILI DI STATO.

N.B. UNO STATO MACROSCOPICO DI UN SISTEMA SI PUO' IDENTIFICARE SOLO SE IL SISTEMA E' IN EQUILIBRIO TERMICO INTERNO.

ESEMPIO: PER UN GAS IN UN CONTENITORE, L'EQUILIBRIO TERMICO INTERNO => OGNI PARTE DEL GAS DEVE ESSERE ALLA STESSA PRESSIONE E ALLA STESSA TEMPERATURA.

- CI SONO POI LE VARIABILI DI TRASFERIMENTO, CHE SONO ASSOCIATE A UNA VARIAZIONE DELLO STATO DEL SISTEMA. UN ESEMPIO E' IL CALORE. SI PUO' ASSEGNARE UN VALORE AL CALORE SOLO SE ENERGIA, SOTTO FORMA DI CALORE, ATTRAVERSA LE SUPERFICI CHE DELIMITANO IL SISTEMA.

- VARIABILI DI STATO: CARATTERIZZANO UN SISTEMA IN EQUILIBRIO TERMICO

- VARIABILI DI TRASFERIMENTO: CARATTERIZZANO UN PROCESSO IN CUI ENERGIA VIENE TRASFERITA TRA UN SISTEMA E L'AMBIENTE CIRCOSTANTE.

ALTRA VARIABILE DI TRASFERIMENTO: IL LAVORO

- CONSIDERIAMO UN GAS IN UN CILINDRO CHIUSO DA UN PISTONE, E SIA IL GAS COMPRESSO QUASI STATICAMENTE, OSSIA IN MODO SUFFICIENTEMENTE LENTO DA PERMETTERE AL SISTEMA DI RIMANERE IN EQUILIBRIO TERMICO A OGNI ISTANTE.
- PISTONE SPINTO ALL'INGIU' DA UNA FORZA ESTERNA $\vec{F}_{ext}$ PER UN TRATTO $d\vec{r} = dy\,\vec{j}$

$\Rightarrow$ LAVORO FATTO SUL GAS E'

$$dW = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{j}\, dy$$

OVE $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{gas} = -PA\,\vec{j}$

POICHE' IL PISTONE E' IN EQUILIBRIO A OGNI ISTANTE, PER IPOTESI.

DUNQUE: $$dW = -PA\,\vec{j}\cdot\vec{j}\,dy = -PA\,dy = -P\,dV$$

GAS COMPRESSO $\Rightarrow dV < 0 \Rightarrow dW > 0$

GAS IN ESPANSIONE $\Rightarrow dV > 0 \Rightarrow dW < 0$

VOLUME COSTANTE $\Rightarrow$ LAVORO SUL GAS $= 0$

]SE18-2[

LAVORO TOTALE $= W = -\int_{V_i}^{V_f} P\, dV \qquad P = P(V, T)$

IL DIAGRAMMA PV PERMETTE DI VISUALIZZARE UNA TRASFORMAZIONE A CUI E' SOTTOPOSTO IL GAS

ESEMPI:

$W_1 = -P_i(V_f - V_i)$

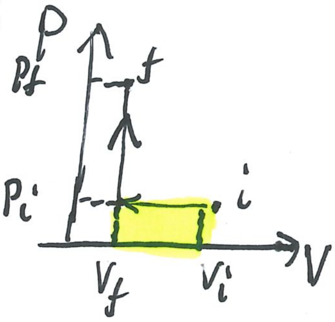



FIG. 1

$W_2 = -P_f(V_f - V_i)$

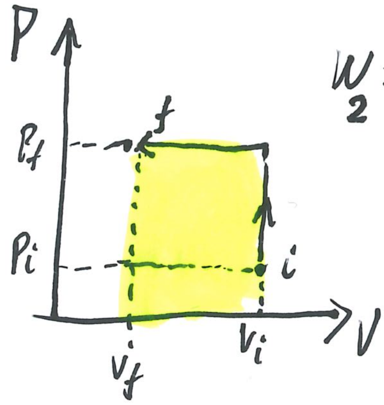
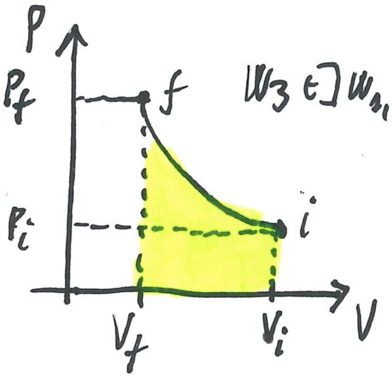



FIG. 2




$W_3 \in \,]W_1, W_2[$

FIG. 3

IL LAVORO SVOLTO SU UN GAS NEL PORTARLO DA UNO STATO INIZIALE "i" AD UNO STATO FINALE "f" DIPENDE DAL CAMMINO FRA QUESTI STATI.

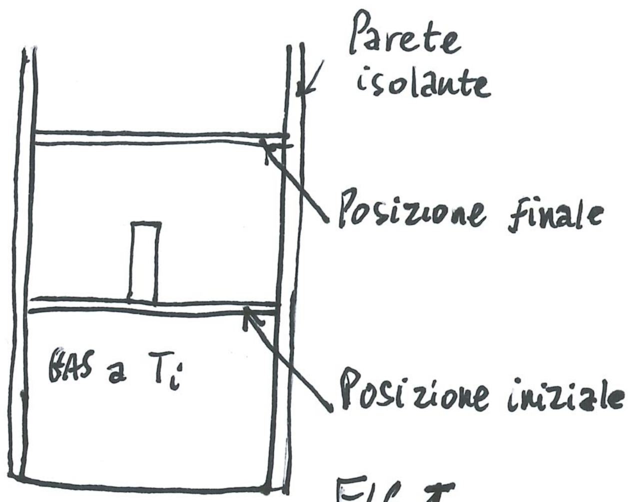



FIG. I

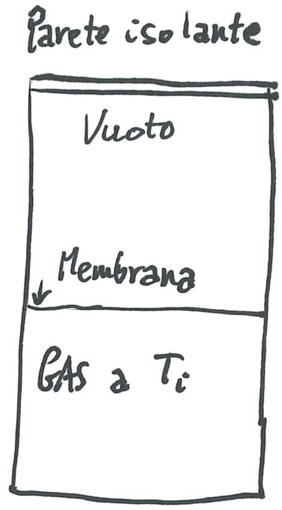



FIG. II

L'ENERGIA TRASFERITA SOTTO FORMA DI CALORE VERSO O DAL GAS DIPENDE DALLA TRASFORMAZIONE

- IN AMBO I CASI, IL GAS HA GLI STESSI VALORI INIZIALI DI $(P, V, T)$, E PER IPOTESI E' PERFETTO.

FIG. I: GAS TERMICAMENTE ISOLATO TRANNE CHE PER IL FONDO, OVE E' IN CONTATTO TERMICO CON UN SERBATOIO DI ENERGIA. TALE SERBATOIO E' COSI' GRANDE CHE IL TRASFERIMENTO DI UNA QUANTITA' DI ENERGIA FINITA NON CAMBIA LA SUA TEMPERATURA. SI RIDUCE LENTAMENTE LA FORZA CHE TIENE IL PISTONE $\Rightarrow$ IL PISTONE SI SOLLEVA MOLTO LENTAMENTE FINO ALLA POSIZIONE FINALE.

PISTONE VERSO L'ALTO $\Rightarrow$ LAVORO NEGATIVO SUL GAS

$\Rightarrow$ GAS COMPIE LAVORO SUL PISTONE

$\Rightarrow$ VIENE TRASFERITA, TRAMITE CALORE, UNA QUANTITA'

DI ENERGIA DAL SERBATOIO AL GAS CHE BASTA APPENA A MANTENERE T = COSTANTE

FIG. II: ROTTURA MEMBRANA ⇒ GAS SI ESPANDE RAPIDAMENTE NEL VUOTO FINO A $(P_f, V_f)$

⇒ NON SI COMPIE LAVORO SUL GAS, PERCHE' NESSUNA FORZA AGISCE SUL GAS.

INOLTRE, NON VIENE SCAMBIATA ENERGIA ATTRAVERSO LA PARETE TERMICAMENTE ISOLATA.

---

CONFRONTO: GLI STATI INIZIALE E FINALE NELLE FIG. I e II SONO IDENTICI, MA I CAMMINI SONO DIVERSI.

FIG. I: IL GAS COMPIE LAVORO SUL PISTONE
⇒ ENERGIA TRASFERITA LENTAMENTE AL GAS

FIG. II: NESSUN TRASFERIMENTO DI ENERGIA, e $W = 0$

⇒ L'ENERGIA TRASFERITA TRAMITE CALORE, COME PER IL LAVORO COMPIUTO, DIPENDE DALLA TRASFORMAZIONE FRA STATO INIZIALE e FINALE.

# PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

- SUPPONIAMO CHE LA SOLA VARIAZIONE NELL'ENERGIA DI UN SISTEMA SIA LA SUA ENERGIA INTERNA, E CHE I SOLI MECCANISMI DI TRASFERIMENTO SIANO IL CALORE Q e IL LAVORO W. IN TAL CASO, IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA ASSERISCE CHE

$$\Delta E_{int} = Q + W \quad , \text{ OVVERO:} \qquad (*)$$

"LA VARIAZIONE DELL'ENERGIA INTERNA DI UN SISTEMA E' UGUALE ALLA SOMMA DELL'ENERGIA TRASFERITA ATTRAVERSO IL CONTORNO DEL SISTEMA TRAMITE CALORE, E DELL'ENERGIA TRASFERITA TRAMITE IL LAVORO"

- QUI IL LAVORO E' INTESO ESSERE LAVORO "SUL" SISTEMA.

- CONTROESEMPIO: L'ENERGIA INTERNA DI UN AVVOLGIMENTO DEL TOSTAPANE AUMENTA A CAUSA DELLA TRASMISSIONE ELETTRICA.

- PER TRASFORMAZIONI INFINITESIME, LA (*) DIVENTA

$$dE_{int} = dQ + dW$$

N.B. SU SCALA MICROSCOPICA, NON ESISTE DISTINZIONE TRA CALORE E LAVORO.

] SE 18-6 [

UNA VOLTA DEFINITI UNA TRASFORMAZIONE O UN CAMMINO, Q e W POSSONO ESSERE ENTRAMBI CALCOLATI O MISURATI $\Rightarrow$ LA VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA E' ALLORA FORNITA DAL PRIMO PRINCIPIO.

- PER DISCUTERE LE APPLICAZIONI DEL 1° PRINCIPIO, IDENTIFICHEREMO 4 CLASSI DI TRASFORMAZIONI:

1) TRASFORMAZIONE ADIABATICA $\Rightarrow$ L'ENERGIA NON ENTRA NE' ESCE DAL SISTEMA SOTTO FORMA DI CALORE $\Rightarrow Q=0$

ESEMPIO: TUTTE LE SUPERFICI DI UN PISTONE SIANO PERFETTAMENTE ISOLANTI $\Rightarrow Q=0 \Rightarrow \Delta E_{int} = W$

$\Rightarrow$ COMPRESSIONE ADIABATICA DI UN GAS

$\Rightarrow W > 0$, $\Delta E_{int} > 0$ (LAVORO COMPIUTO SUL GAS)

GAS IN ESPANSIONE ADIABATICA $\Rightarrow \Delta E_{int} < 0$ POICHE' $W < 0$

ESEMPI:
- ESPANSIONE DI GAS CALDI IN MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA
- LIQUEFAZIONE DEI GAS IN UN SISTEMA DI RAFFREDDAMENTO
- FASE DI COMPRESSIONE IN UN MOTORE DIESEL

2) ESPANSIONE LIBERA: $Q=0$, $W=0$ $\Rightarrow \Delta E_{int}=0$

$\Rightarrow$ IN TALI ESPANSIONI, L'ENERGIA INTERNA INIZIALE E FINALE DI UN GAS SONO EGUALI

$$\left.\begin{array}{l} E_{int} = E_{int}(T) \\ \Delta E_{int} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta T = 0 \quad \text{PER GAS PERFETTI}$$

- INVECE, PER GAS REALI, AD ALTA PRESSIONE, GLI ESPERIMENTI MOSTRANO $\Delta T > 0$ OPPURE $\Delta T < 0$ A CAUSA DELLE INTERAZIONI FRA LE MOLECOLE.

---

3) TRASFORMAZIONE ISOBARA $\Rightarrow$ AVVIENE A PRESSIONE COSTANTE

$\Rightarrow$ LAVORO SUL GAS $= W = -P(V_f - V_i)$

IN UN DIAGRAMMA PV, UNA TRASFORMAZIONE ISOBARA E' ESPRESSA DA UNA LINEA ORIZZONTALE (e.g. PRIMA PORZIONE IN FIG. 1, SECONDA PORZIONE IN FIG. 2).

---

4) TRASFORMAZIONE ISOCORA $\Rightarrow W=0 \Rightarrow \Delta E_{int} = Q$

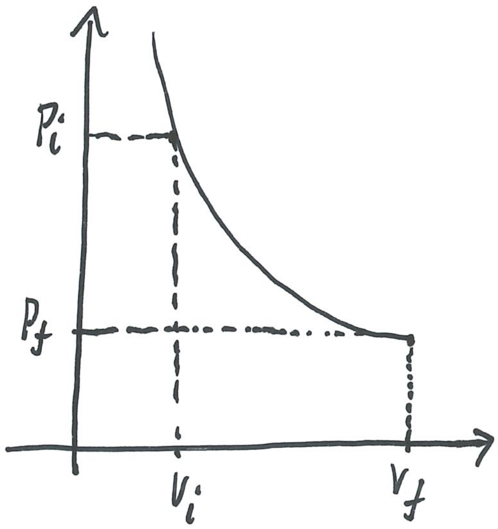
$\Rightarrow$ SE SI AGGIUNGE ENERGIA SOTTO FORMA DI CALORE A UN SISTEMA TENUTO A V=COSTANTE, TUTTA L'ENERGIA VA AD AUMENTARE L'ENERGIA INTERNA; NULLA ENTRA O ESCE SOTTO FORMA DI LAVORO.

ESEMPIO: LATTINA DI AEROSOL SUL FUOCO $\Rightarrow$ ENERGIA ENTRA NEL SISTEMA SOTTO FORMA DI CALORE, ATTRAVERSO LE PARETI DELLA LATTINA.
$\Rightarrow$ T e P DEL GAS AUMENTANO, FINO A QUANDO LA LATTINA ESPLODE.
- IN UN DIAGRAMMA PV, L'ISOCORA E' UNA LINEA VERTICALE, COME LA SECONDA PORZIONE DI FIG. 1 O LA PRIMA PORZIONE DI FIG. 2

---

5) TRASFORMAZIONE ISOTERMA $\Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = 0$
PER GAS PERFETTI $\Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W$

ESPANSIONE ISOTERMA DI UN GAS PERFETTO:




LAVORO COMPIUTO SUL GAS PERFETTO IN UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA:

$$W = -nRT \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

SI HA A CHE FARE CON UN SISTEMA NON ISOLATO IN STATO STAZIONARIO. VIENE TRASFERITA ENERGIA ATTRAVERSO IL CONTORNO DEL SISTEMA, MA NON SI REALIZZA ALCUNA VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA.

]SE 18-9[

6) TRASFORMAZIONE CICLICA DI UN SISTEMA NON ISOLATO => LA TRASFORMAZIONE INIZIA E FINISCE NELLO STESSO STATO. => $\Delta E_{int} = 0$, ESSENDO $E_{int}$ UNA VARIABILE DI STATO. => $Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W$

TALI TRASFORMAZIONI AVVENGONO NEI MOTORI TERMICI, IN CUI UNA FRAZIONE DELL'ENERGIA IMMESSA TRAMITE CALORE VIENE ESTRATTA COME LAVORO MECCANICO.

---

ESEMPIO: IMMERSIONE DI UN BICCHIERE

UN BICCHIERE VIENE MANTENUTO CAPOVOLTO SU UNA SUPERFICIE D'ACQUA, E POI VIENE PORTATO ALLA PROFONDITA' $h$ SOTTO LA SUPERFICIE, INTRAPPOLANDO L'ARIA NEL BICCHIERE, MENTRE $\Delta T_{acqua} = 0$ DURANTE LA DISCESA.

ALLA PROFONDITA' $h$, QUAL E' LA FRAZIONE DEL VOLUME DEL BICCHIERE OCCUPATO DALL'ARIA?

- - -

QUANDO IL BICCHIERE E' FERMO SULLA SUPERFICIE, LA PRESSIONE D'ARIA NEL BICCHIERE E' LA PRESSIONE ATMOSFERICA.

BICCHIERE PORTATO VERSO IL BASSO => PRESSIONE IN FUNZIONE DELLA PROFONDITA' IN UN LIQUIDO

PRESSIONE NELL'ACQUA: $P = P_{atm} + \rho g h$

$\Delta T = 0 \Rightarrow$ PROCESSO ISOTERMO $\Rightarrow PV = nRT =$ COSTANTE

$$\Rightarrow P_i V_i = P_f V_f \Rightarrow \frac{V_f}{V_i} = \frac{P_i}{P_f} = \frac{P_{atm}}{P_{atm} + \rho g h} = \frac{1}{1 + \frac{\rho g h}{P_{atm}}}$$

$$\Delta T = 0 \Downarrow$$

$$\Delta E_{int} = 0 \Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W = nRT \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$= nRT \log\left(\frac{P_i}{P_f}\right)$$

$Q < 0 \Rightarrow$ L'ENERGIA ESCE DALL'ARIA SOTTO FORMA DI CALORE

ARIA COMPRESSA $\Rightarrow$ TEMPERATURA TENDEREBBE AD AUMENTARE POICHE' DEL LAVORO VIENE FATTO SU DI ESSA DALL'ACQUA. MA, POICHE' DEVE RESTARE COSTANTE T, CIÒ $\Rightarrow$ L'ENERGIA DEVE LASCIARE L'ARIA NEL BICCHIERE SOTTO FORMA DI CALORE.

N.B. L'ENERGIA NECESSARIA PER AUMENTARE LA TEMPERATURA DI $n$ MOLI DI GAS DA $T_i$ A $T_f$ DIPENDE DAL CAMMINO FRA GLI STATI INIZIALE E FINALE. SIA INFATTI $\Delta T = T_f - T_i$ LA STESSA PER TUTTE LE TRASFORMAZIONI DI UN GAS PERFETTO. $\Rightarrow$ $\Delta E_{int}$ E' LA STESSA

MA $Q = \Delta E_{int} - W$ VARIA PER OGNI CAMMINO POICHE' $W$ E' DIVERSO PER OGNI CAMMINO

$\Rightarrow$ L'ENERGIA NECESSARIA PER PRODURRE UNA DATA VARIAZIONE DI TEMPERATURA NON HA SEMPRE LO STESSO VALORE.

TRASFORMAZIONI A CONFRONTO:

- UN GAS PERFETTO COMPIE 2 TRASFORMAZIONI AVENTI $P_f = 1 \cdot 10^5$ Pa, $V_f = 2\,m^3$, $P_i = 0.2 \cdot 10^5$ Pa, $V_i = 10\,m^3$

TRASF. 1: T = COSTANTE

TRASF. 2: P e poi V COSTANTI

CALCOLARE IL RAPPORTO $\dfrac{(W)_{TR\,1}}{(W)_{TR\,2}}$

W ESSENDO IL LAVORO COMPIUTO SUL GAS

Tr 1: $P = \dfrac{nRT}{V}$ PER GAS PERFETTI

Tr 2: NON SI COMPIE LAVORO NEL TRATTO V = COSTANTE

$$\frac{(W)_{TR\,1}}{(W)_{TR\,2}} = \frac{-\int_{V_i}^{V_f} P\,dV}{-\int_{V_i}^{V_f} P_i\,dV + 0} = \frac{nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}}{P_i \int_{V_i}^{V_f} dV}$$

$$= \frac{nRT \log(V_f/V_i)}{P_i\,(V_f - V_i)} = \frac{P_i V_i \log(V_f/V_i)}{P_i\,(V_f - V_i)}$$

$$= \frac{V_i \log(V_f/V_i)}{(V_f - V_i)} = \frac{10 \log(2/10)}{(2-10)} = -\frac{5}{4} \log \frac{1}{5}$$

$$= +\frac{5}{4} \log 5 = 2.01$$

]SE18-13[

# FORZE ELETTRICHE E CAMPI ELETTRICI

- I FENOMENI ELETTRICI e MAGNETICI ERANO STATI STUDIATI SIN DALL'ANTICHITÀ, MA NELL'ERA MODERNA BISOGNA ASPETTARE IL TRATTATO SULL'ELETTRICITÀ E IL MAGNETISMO DI J.C. MAXWELL (1831-1879) PER UNA VISIONE E COMPRENSIONE COMPLETA.
- LE FORZE INTERATOMICHE E INTERMOLECOLARI, RESPONSABILI DELLA FORMAZIONE DI SOLIDI e LIQUIDI, SONO DI ORIGINE ELETTRICA. ELETTRICITÀ e MAGNETISMO SONO FONDAMENTALI PER IL FUNZIONAMENTO DI RADIO, TELEVISORI, MOTORI ELETTRICI, CALCOLATORI, ACCELERATORI DI PARTICELLE. LA PRODUZIONE DI ONDE ELETTROMAGNETICHE IN LABORATORIO COMINCIÒ CON GLI ESPERIMENTI DI HEINRICH HERTZ (1888).

STROFINAMENTO VETRO-SETA:

DEGLI ELETTRONI, AVENTI CARICA NEGATIVA, SI TRASFERISCONO DAL VETRO ALLA SETA:

$$\text{VETRO} \xrightarrow{e^-} \text{SETA}$$

CARICA NEGATIVA ACQUISTATA DALLA SETA
= − (CARICA POSITIVA SULLA BACCHETTA DI VETRO)

---

STROFINAMENTO PELLICCIA-BACHELITE:

$$\text{PELLICCIA} \xrightarrow{e^-} \text{BACHELITE}$$

- POSSIAMO TRASMETTERE CARICA ELETTRICA AL NOSTRO CORPO CAMMINANDO SU UN TAPPETO DI LANA, O SCIVOLANDO SU UN SEDILE.
- SU BASE SPERIMENTALE, SAPPIAMO CHE ESISTONO CARICHE ELETTRICHE DI DUE SPECIE, DETTE POSITIVE O NEGATIVE.

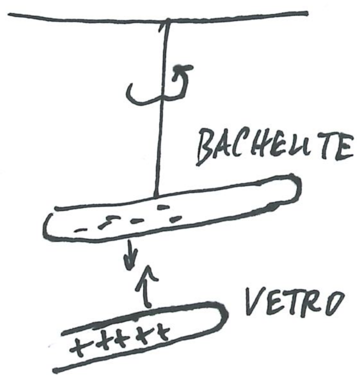



FIG. 1

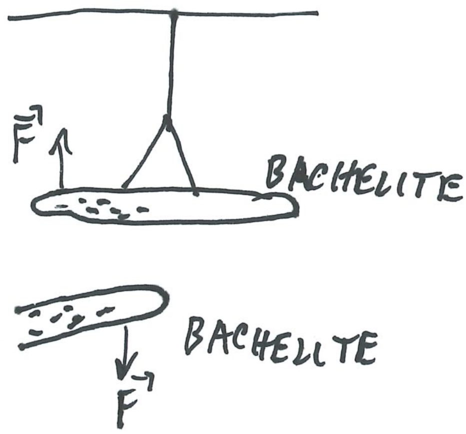



FIG. 2

- IN FIG. 1, UNA BACCHETTA DI BACHELITE STROFINATA CON PELLICCIA (O MATERIALE ACRILICO) VIENE SOSPESA A UN FILO, E LE SI AVVICINA UNA BACCHETTA DI VETRO STROFINATA CON SETA. LA BACCHETTA DI BACHELITE E' ATTIRATA DALLA BACCHETTA DI VETRO.
- IN FIG. 2, UNA BACCHETTA DI BACHELITE E' RESPINTA DA UN'ALTRA BACCHETTA DI BACHELITE.
- CONVENZIONE DI FRANKLIN: LA CARICA ELETTRICA SULLA BACCHETTA DI VETRO E' DETTA POSITIVA, MENTRE LA CARICA ELETTRICA SULLA BACHELITE E' NEGATIVA

]SE 19-2[

- LA PLASTICA NELLE LENTI A CONTATTO CONSISTE DI MOLECOLE ATTRATTE ELETTRICAMENTE DALLE MOLECOLE PRESENTI NELLE LACRIME.

- PROPRIETA': IN UN SISTEMA ISOLATO, LA CARICA NETTA SI CONSERVA SEMPRE. => SE DUE OGGETTI INIZIALMENTE NEUTRI VENGONO CARICATI STROFINANDOLI, NEL PROCESSO NON VENGONO CREATE CARICHE.

- LA CARICA ACQUISITA DA OGGETTI E' DOVUTA AL TRASFERIMENTO DI ELETTRONI DA UN CORPO A UN ALTRO.

- QUANDO LA BACHELITE E' STROFINATA CON UNA PELLICCIA, ELETTRONI SI TRASFERISCONO DALLA PELLICCIA ALLA BACHELITE. UN OGGETTO NEUTRO CONTIENE CIRCA $10^{23}$ ELETTRONI. PER OGNI ELETTRONE NEGATIVO, E' PRESENTE UN PROTONE CARICO POSITIVAMENTE => UN OGGETTO NEUTRO HA CARICA NETTA = 0.

- LE CARICHE ELETTRICHE IN NATURA SONO TUTTE MULTIPLI INTERI DELLA CARICA DELL'ELETTRONE:

$$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ COULOMB}$$

---

ISOLANTI e CONDUTTORI

- LE CARICHE ELETTRICHE POSSONO ANCHE MUOVERSI DA UN POSTO AD UN ALTRO ALL'INTERNO DI UN OGGETTO. TALE MOTO E' LA CONDUZIONE ELETTRICA.

DEF: CONDUTTORI = MATERIALI IN CUI LE CARICHE SI MUOVONO RELATIVAMENTE LIBERE

ISOLANTI = MATERIALI IN CUI IL MOTO DELLE CARICHE ELETTRICHE NON E' LIBERO

ESEMPI: VETRO, BACHELITE e LEUCITE SONO ISOLANTI.
QUANDO LI SI CARICA PER STROFINIO, SOLO L'AREA STROFINATA SI CARICA

RAME, ALLUMINIO, ARGENTO SONO BUONI CONDUTTORI
=> SE LI SI CARICA IN UNA ZONA, PER QUANTO PICCOLA, LA CARICA SI DISTRIBUISCE RAPIDAMENTE SULL'INTERA SUPERFICIE.

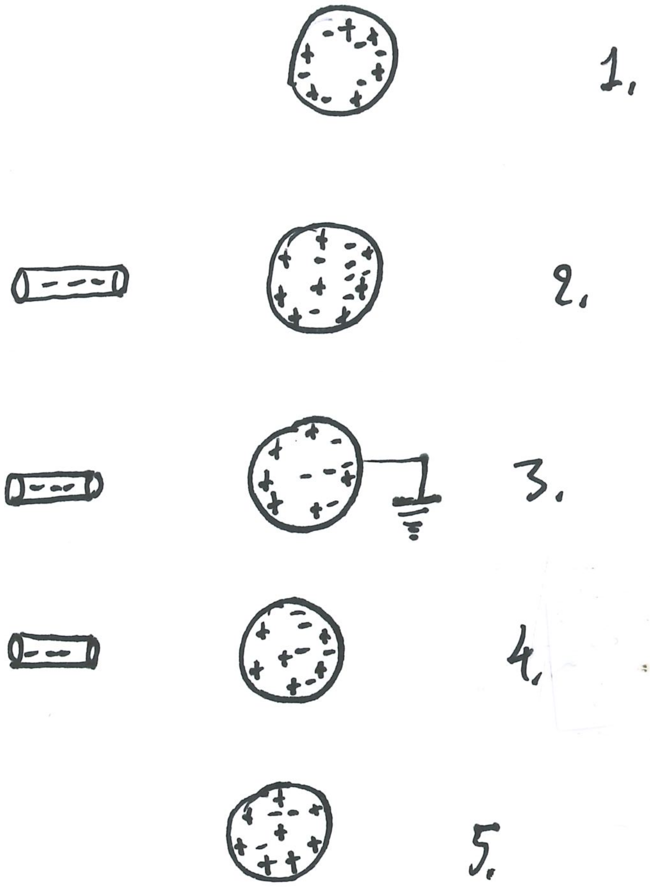
SEMICONDUTTORI: IN ESSI LE CARICHE POSSONO MUOVERSI PIUTTOSTO LIBERAMENTE, MA CI SONO MOLTE MENO CARICHE IN UN SEMICONDUTTORE CHE IN UN CONDUTTORE.
ESEMPI: SILICIO e GERMANIO

---

## CARICA PER INDUZIONE

SE COLLEGHIAMO UN CONDUTTORE ALLA TERRA MEDIANTE UN FILO CONDUTTORE, DICIAMO CHE LO ABBIAMO MESSO A TERRA. LA TERRA PUO' RICEVERE O FORNIRE UN NUMERO ILLIMITATO DI ELETTRONI.

# CARICA PER INDUZIONE DI UN CONDUTTORE




FASE 1: ABBIAMO UNA SFERA NEUTRA, CON UN EGUAL NUMERO DI CARICHE POSITIVE E NEGATIVE

FASE 2: UNA BACCHETTA DI BACHELITE CARICA NEGATIVAMENTE VIENE AVVICINATA ALLA SFERA ⇒ FORZA REPULSIVA TRA GLI ELETTRONI DELLA BACCHETTA E QUELLI DELLA SFERA ⇒ RIDISTRIBUZIONE DELLA CARICA SULLA SFERA ⇒ ALCUNI ELETTRONI VANNO VERSO LA PARTE DELLA SFERA PIU' LONTANA DALLA BACCHETTA ⇒ LA PARTE DI SFERA PIU' VICINA ALLA BACCHETTA HA UN ECCESSO DI CARICA POSITIVA (SI AVVICINA LA BACCHETTA MA NON C'E' CONTATTO)

]SE19-5[

FASE 3: UN FILO CONDUTTORE MESSO A TERRA VIENE COLLEGATO ALLA SFERA VICINO ALLA REGIONE DI ACCUMULO DI ELETTRONI ⇒ ALCUNI ELETTRONI LASCIANO LA SFERA E MIGRANO VERSO TERRA

FASE 4: IL FILO COLLEGATO A TERRA VIENE RIMOSSO

⇒ LA SFERA CONDUTTRICE RESTA CON UN ECCESSO DI CARICA POSITIVA INDOTTA

FASE 5: LA BACCHETTA DI BACHELITE VIENE ALLONTANATA

⇒ LA CARICA POSITIVA INDOTTA RIMANE SULLA SFERA NON COLLEGATA A TERRA.

N.B. LA BACCHETTA DI BACHELITE NON PERDE CARICHE NEGATIVE, POICHE' NON VIENE MAI IN CONTATTO CON LA SFERA.

---

## POLARIZZAZIONE

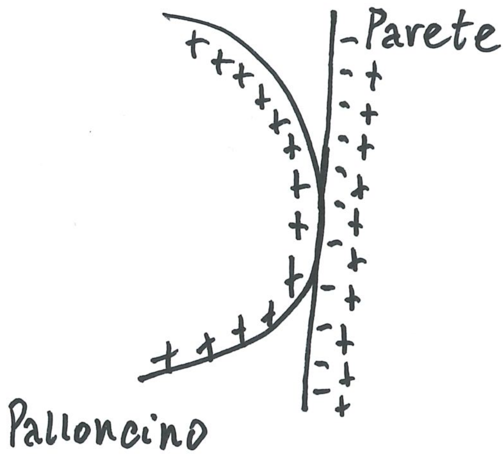
IN ATOMI E MOLECOLE NEUTRE, NELLA MAGGIORANZA DEI CASI, LA POSIZIONE MEDIA DELLE CARICHE $q>0$ = POSIZIONE MEDIA DELLE $q<0$

MA, IN PRESENZA DI UN OGGETTO CARICO, QUESTE POSIZIONI POSSONO SPOSTARSI LEGGERMENTE

⇒ C'E' PIU' CARICA POSITIVA DA UN LATO DELLA

MOLECOLA CHE DALL'ALTRO. QUESTO E' IL FENOMENO DELLA POLARIZZAZIONE. (L'OGGETTO CARICO E' FONTE DI FORZE ATTRATTIVE E REPULSIVE)

POLARIZZAZIONE DI MOLECOLE => STRATO DI CARICA SULLA SUPERFICIE DELL'ISOLANTE




LA CARICA <0 SULLA PARETE E' PIU' VICINA AL PALLONCINO DELLE CARICHE >0

=> FORZA ATTRATTIVA TRA CARICHE >0 e <0

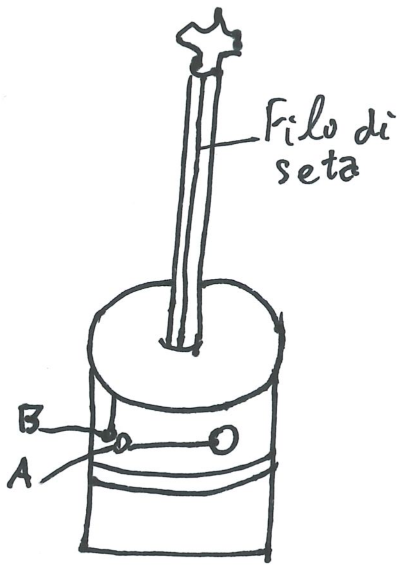
E' > FORZA REPULSIVA TRA CARICHE >0

=> FORZA RISULTANTE ATTRATTIVA FRA PALLONCINO CARICO E ISOLANTE NEUTRO => EFFETTO DI POLARIZZAZIONE

ESEMPI: IL PETTINE STROFINATO SUI CAPELLI ATTRAE DEI PEZZETTINI DI CARTA; IL PALLONCINO STROFINATO SUI CAPELLI PUO' ADERIRE ALLE PARETI NEUTRE.

# LEGGE DI COULOMB

FU COULOMB A CONFERMARE SPERIMENTALMENTE CHE LA FORZA ELETTRICA TRA DUE SFERE CARICHE E' PROPORZIONALE ALL'INVERSO DEL QUADRATO DELLA LORO DISTANZA




A e B = SFERE CARICHE

$F_{AB}$ => ATTRAZIONE o REPULSIONE

=> MOTO CHE PROVOCA LA TORSIONE DEL FILO DI SOSPENSIONE

MOMENTO DI RICHIAMO DELLA FIBRA RUOTATA $\propto$ ANGOLO DI ROTAZIONE

- MISURANDO TALE ANGOLO, SI MISURA DUNQUE LA FORZA $F_{AB}$

$$F_e = |\vec{F_e}| = K_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$K_e = 8.99 \cdot 10^9 \ \frac{N m^2}{C^2}$ = COSTANTE DI COULOMB

$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$\varepsilon_0$ = COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO $= 8.8542 \cdot 10^{-12} \ \frac{C^2}{N m^2}$

]SE19-8[

VALORI DI CARICA e MASSA:

| | CARICA (C) | MASSA (Kg) |
|---|---|---|
| ELETTRONE | $-1.6 \cdot 10^{-19}$ | $9.1 \cdot 10^{-31}$ |
| PROTONE | $+1.6 \cdot 10^{-19}$ | $1.6 \cdot 10^{-27}$ |
| NEUTRONE | 0 | $1.6 \cdot 10^{-27}$ |

=> UN COULOMB DI CARICA = CARICA DI $6.25 \cdot 10^{18}$ ELETTRONI

- NEGLI ESPERIMENTI DI ELETTROSTATICA, SI OTTIENE UNA CARICA DI $10^{-6}$ C
- LA LEGGE DI COULOMB E' ESATTA SOLO PER CARICHE PUNTIFORMI O PARTICELLE.

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

*

$\left.\begin{matrix} q_1 < 0 \\ q_2 > 0 \end{matrix}\right.$ => FORZA <u>ATTRATTIVA</u> (LO STESSO PER $\begin{matrix} q_1 > 0 \\ q_2 < 0 \end{matrix}$)

$\left.\begin{matrix} q_1 < 0 \\ q_2 < 0 \end{matrix}\right\}$ opp. $\left.\begin{matrix} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \end{matrix}\right\}$ => FORZA <u>REPULSIVA</u>

]SE19-9[

SE CI SONO PIU' DI 2 CARICHE, LA FORZA RISULTANTE SU CIASCUNA PARTICELLA E' UGUALE ALLA SOMMA VETTORIALE DELLE FORZE DOVUTE A TUTTE LE ALTRE PARTICELLE.

⇒ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

AD ESEMPIO, SCRIVIAMO

$$\vec{F_1} = \vec{F_{21}} + \vec{F_{31}} + \vec{F_{41}}$$

= FORZA SULLA PARTICELLA 1, DOVUTA ALLE PARTICELLE 2, 3, 4.

---

# FILE SE20

ESEMPIO: ATOMO DI IDROGENO

- ELETTRONE e PROTONE IN UN ATOMO DI IDROGENO SONO SEPARATI DA UNA DISTANZA MEDIA DI $5.3 \cdot 10^{-11}$ m. QUAL E' L'INTENSITA' DELLA FORZA ELETTROSTATICA E DELLA FORZA GRAVITAZIONALE TRA DI LORO?

FORZA ELETTRICA ATTRATTIVA:

$$|\vec{F_e}| = F_e = K_e \frac{q_e^2}{r^2}$$

$$= 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} C)^2}{(5.3 \cdot 10^{-11} m)^2}$$

$$= 8.99 \cdot \frac{(1.6)^2}{(5.3)^2} \frac{10^9 \; 10^{-38}}{10^{-22}} N$$

$$= 8.19 \cdot 10^{-1} \, 10^{-7} N = 8.2 \cdot 10^{-8} N$$

$$|\vec{F_g}| = F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \frac{(9.11 \cdot 10^{-31} Kg)(1.67 \cdot 10^{-27} Kg)}{(5.3 \cdot 10^{-11} m)^2}$$

$$= \frac{6.67 \cdot (9.11) \cdot (1.67)}{(53)^2} \; 10^{-69} \; 10^{22} \; N$$

$$= 3.6 \cdot 10^{-47} \; N$$

$$\Rightarrow \frac{F_g}{F_e} = \frac{3.6}{8.2} \; 10^{-39} = 4.4 \cdot 10^{-40}$$

$\Rightarrow$ LA FORZA GRAVITAZIONALE FRA ELETTRONE e PROTONE e' TRASCURABILE RISPETTO ALLA FORZA ELETTRICA.

NEL CASO DELLA GRAVITAZIONE, SCRIVIAMO

$$\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m_0} \qquad m_0 = \text{MASSA DI PROVA}$$

## CAMPI ELETTRICI

CONVENZIONE: UNA PARTICELLA DI PROVA TRASPORTA SEMPRE UNA CARICA ELETTRICA POSITIVA

CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO DELLO SPAZIO EUCLIDEO $R^3$:

$$(*) \quad \vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q_0}$$

$\vec{F_e}$ = FORZA ELETTRICA AGENTE SU UNA CARICA DI PROVA IN QUEL PUNTO.

N.B. $\vec{E}$ E' IL CAMPO PRODOTTO DA UNA CARICA DIVERSA DALLA PARTICELLA DI PROVA.

SORGENTE = LA o LE PARTICELLE CHE CREANO IL CAMPO

N.B. LA PARTICELLA DI PROVA SI USA SOLO PER MISURARE LA FORZA ELETTRICA, MA IL CAMPO ELETTRICO ESISTE INDIPENDENTEMENTE DALL'INTRODUZIONE DI UNA PARTICELLA DI PROVA.

EQ. (*) => LA CARICA DI PROVA $q_0$ E' ABBASTANZA PICCOLA DA NON PERTURBARE LA DISTRIBUZIONE DI CARICA CHE DA' ORIGINE AL CAMPO ELETTRICO.

ESEMPIO: SE UNA CARICA ESTREMAMENTE PICCOLA $q_0$ VIENE POSTA VICINO A UNA SFERA METALLICA UNIFORMEMENTE CARICA, LA CARICA SU TALE SFERA RESTA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA:

SE INVECE LA CARICA DI PROVA E' $q_0' \gg q_0$, LA CARICA SULLA SFERA METALLICA SI REDISTRIBUISCE:

E SI HA $\frac{F_e'}{q_0'} \neq \frac{F_e}{q_0}$

]SE20-3[

⇒ IL CAMPO ELETTRICO CREATO DALLE CARICHE E' STAVOLTA DIVERSO DAL CAMPO ELETTRICO DA ESSE CREATO IN PRESENZA DI $q_0 \ll q$!

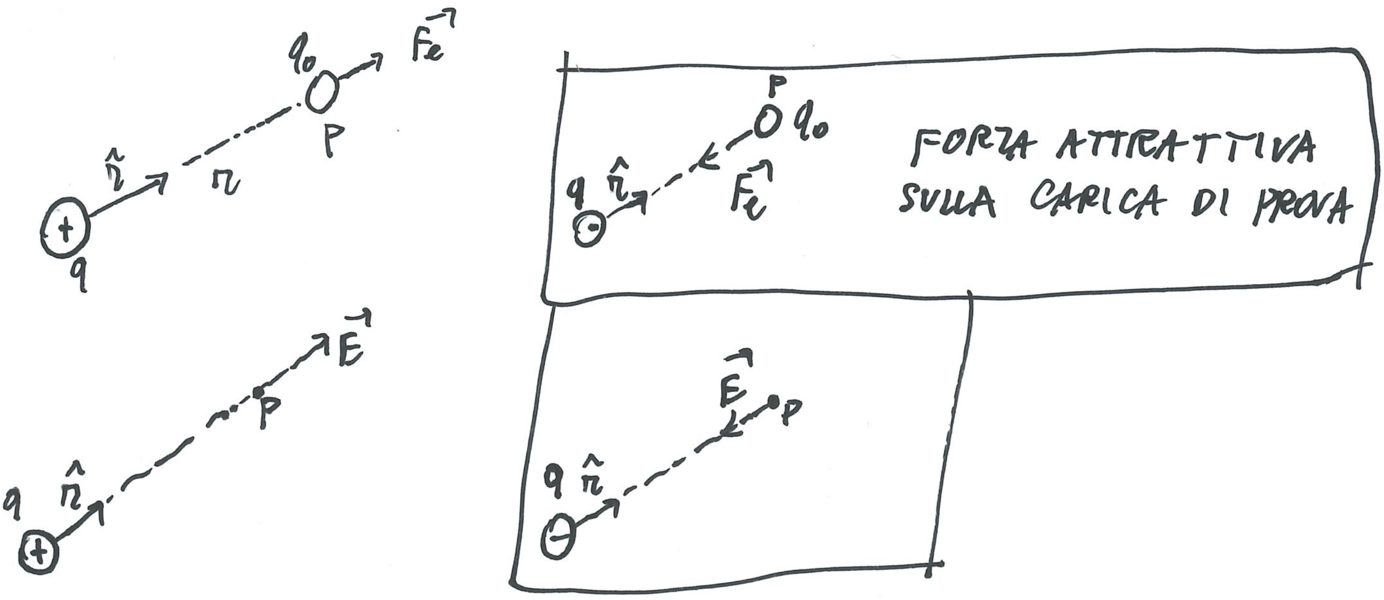
- LA FORZA SU UNA QUALSIASI PARTICELLA CON CARICA $q$ E'

$$\vec{F_e} = q\vec{E}$$

- DATA UNA CARICA PUNTIFORME $q$ E UNA CARICA DI PROVA $q_0$, SI HA

$$\vec{F_e} = K_e \frac{q q_0}{r^2} \vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q_0} = K_e \frac{q}{r^2}\vec{e_r} = K_e q \frac{\vec{r}}{r^3}$$




$q_0$: CARICA DI PROVA, POSTA IN P
$q$ = CARICA PUNTIFORME
$r = d_{qq_0}$ = DISTANZA DI $q_0$ DA $q$

IL CAMPO ELETTRICO TOTALE IN UN DATO PUNTO DELLO SPAZIO, GENERATO DA UN INSIEME DI PARTICELLE CARICHE, E' LA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI ELETTRICI IN QUEL PUNTO GENERATI DA TUTTE LE PARTICELLE.

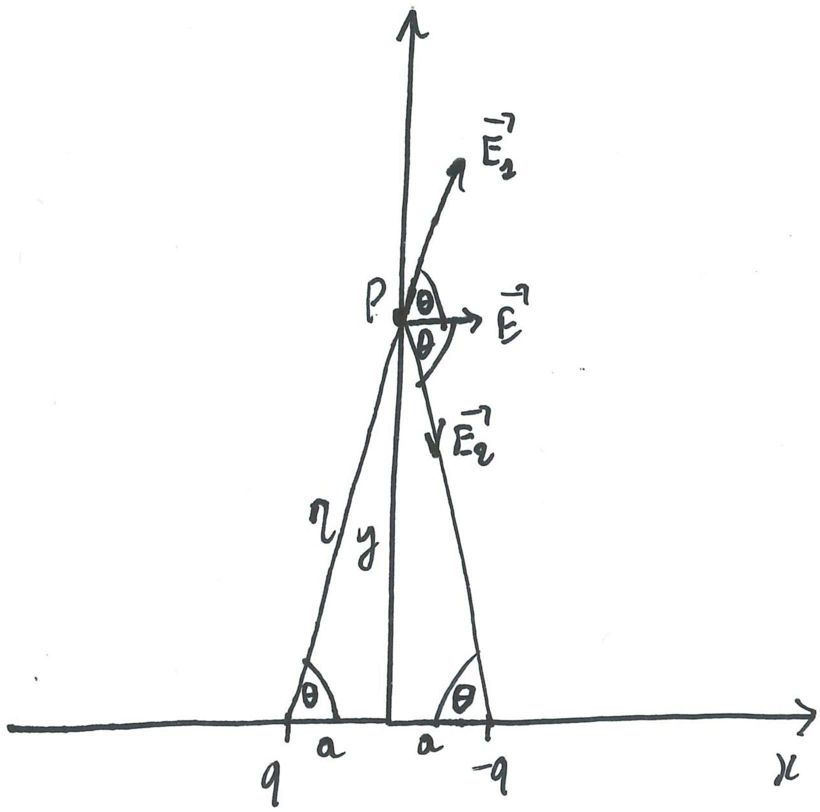
$$\Rightarrow \vec{E} = K_e \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{(r_i)^2} \vec{e}_{r_i}$$

$r_i$ = DISTANZA DELLA i-ma CARICA $q_i$ DAL PUNTO P

$\vec{e}_{r_i}$ = VERSORE DIRETTO DA $q_i$ a P

---

ESEMPIO: CAMPO ELETTRICO DI UN DIPOLO:




P EQUIDISTANTE DA q e -q

$\Rightarrow |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ in P

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$|\vec{E}_1| = E_1 = K_e \frac{q}{r^2}$

$= K_e \frac{q}{(y^2+a^2)}$

$= |\vec{E}_2| = E_2$

]SE 20-5[

$$(E_1)_y = -(E_2)_y \qquad (E_1)_x = (E_2)_x$$

$$a = r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

$$|\vec{E}| = E = 2E_1\cos\theta = 2K_e\frac{q}{(y^2+a^2)}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

$$= K_e\frac{2qa}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- NEI PUNTI LONTANO DAL DIPOLO, DOVE SI HA DUNQUE $y \gg a$, TROVIAMO

$$E = K_e\frac{2qa}{\left(y^2\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = K_e\frac{2qa}{y^3}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\simeq K_e\frac{2qa}{y^3}\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{2y^2}\right)^3} \simeq K_e\frac{2qa}{y^3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{a^2}{y^2}\right)^{-1}$$

$$= K_e\frac{2qa}{y^3}\left(1+O\left(\frac{a}{y}\right)^2\right)$$

]SE20-6[

# CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

- NEL CASO DI UN OGGETTO CARICATO PER STROFINIO, E IN MOLTI CASI PRATICI ANCORA,

SEPARAZIONE MEDIA FRA LE CARICHE

$\ll$ DISTANZA DAL PUNTO IN CUI SI VUOLE CALCOLARE IL CAMPO.

$\Rightarrow$ SI PUO' TRATTARE IL SISTEMA DI CARICHE COME FOSSE UN CONTINUO

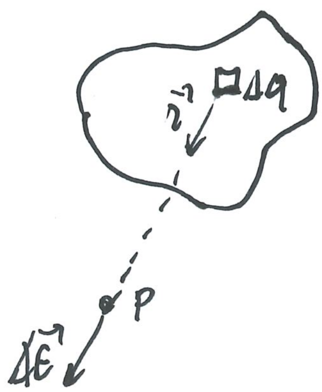
$\Rightarrow$ CARICHE MOLTO VICINE $\hat{=}$ CARICA TOTALE DISTRIBUITA CON CONTINUITA' IN UN DATO VOLUME O SU UNA DATA SUPERFICIE.

- DATO UN ELEMENTO DI CARICA $\Delta q_i$, QUESTO PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO NEL PUNTO P:

$$\Delta \vec{E_i} = K_e \frac{\Delta q_i}{(r_i)^2} \vec{e}_{r_i}$$

$i = 1, \dots, n$

CI SONO n ELEMENTI DELLA DISTRIBUZIONE




$r_i$ = DISTANZA DELL'i-mo ELEMENTO DAL PUNTO P

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{E_i} = K_e \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta q_i}{(r_i)^2} \vec{e}_{r_i}$$

$$\{\vec{E}\} = K_e \sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta q_i \to 0} \frac{\Delta q_i}{(r_i)^2} \vec{e}_{r_i} = K_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$$

L'INTEGRALE ESSENDO ESTESO A TUTTA LA CARICA CHE CREA IL CAMPO.

NOTAZIONI PER LA DENSITA' DI CARICA:

1) SE UNA CARICA $Q$ E' UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA IN UN VOLUME $V$, LA CARICA PER UNITA' DI VOLUME $\rho$ e'

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

, MISURATA IN COULOMB PER METRO CUBO

2) SE $Q$ E' UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE DI AREA $A$, LA DENSITA' SUPERFICIALE DI CARICA e'

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

3) SE $Q$ E' UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA LUNGO UNA LINEA DI LUNGHEZZA $\ell$, LA DENSITA' LINEARE DI CARICA $\lambda$ e'

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

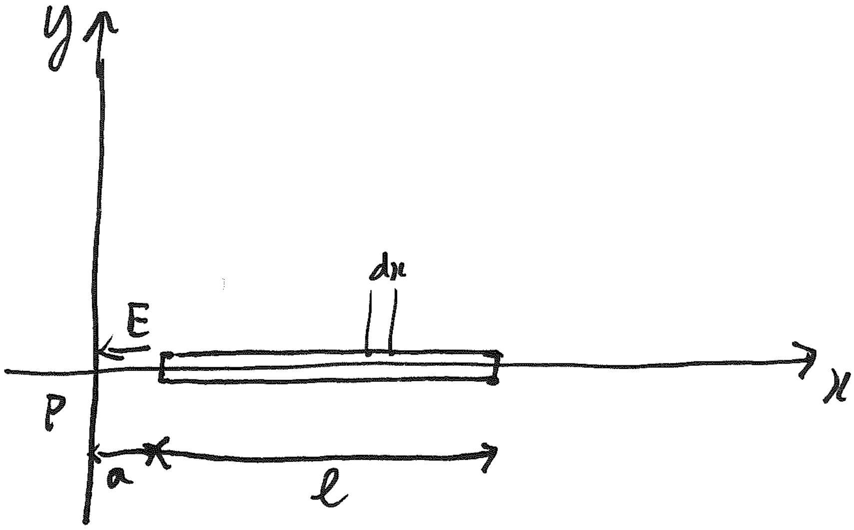
ESEMPIO: CAMPO ELETTRICO DI UNA SBARRETTA CARICA

$\ell$ = LUNGHEZZA

$\lambda$ = DENSITA' LINEARE UNIFORME DI CARICA

$Q$ = CARICA TOTALE $>0$

QUAL È IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO P LUNGO L'ASSE DELLA SBARRETTA?




$$dE = K_e \frac{dq}{x^2} = K_e \frac{\lambda\, dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow E = \int_a^{\ell+a} K_e \lambda \frac{dx}{x^2} = K_e \lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = K_e \lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a}$$

$$= K_e \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell+a}\right) = K_e \frac{Q}{\ell} \frac{\ell}{a(\ell+a)} = \frac{K_e Q}{a(\ell+a)}$$

$\Rightarrow$ SE $a \gg \ell \Rightarrow E \simeq K_e \frac{Q}{a^2}$ = CAMPO DI UNA CARICA PUNTIFORME

]SE20-9[

⇒ A GRANDE DISTANZA DALLA SBARRETTA, LA DISTRIBUZIONE DI CARICA APPARE COME UNA CARICA PUNTIFORME Q

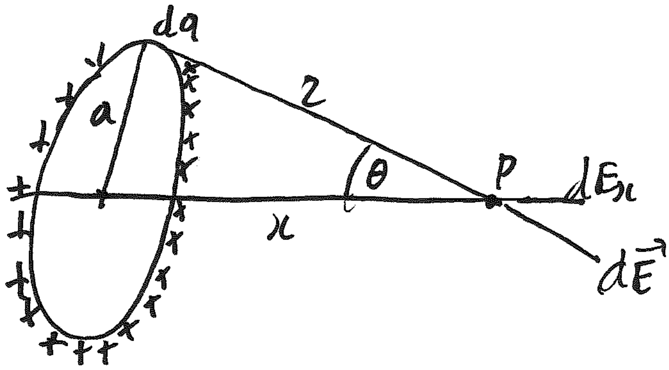
---

ESEMPIO: CAMPO ELETTRICO DI UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO

$a$ = RAGGIO DELL'ANELLO

$Q$ = CARICA TOTALE

QUAL E' IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO P A DISTANZA $x$ DAL CENTRO DELL'ANELLO?




$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$dE_x = dE\cos\theta = k_e \frac{dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\, dq$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^Q dq = \frac{k_e x Q}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

# LINEE DI CAMPO ELETTRICO

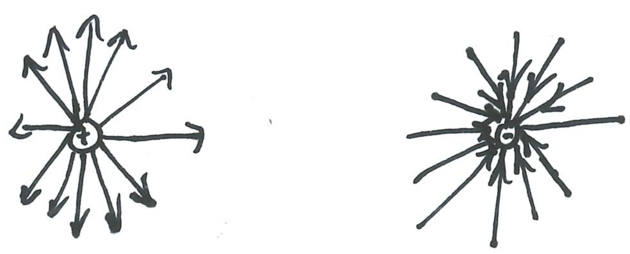
**DEF.** LE LINEE CHE HANNO IN OGNI PUNTO LA DIREZIONE ORIENTATA DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO SONO LE LINEE DI CAMPO ELETTRICO

PROPRIETA'

i) IL VETTORE $\vec{E}$ E' TANGENTE ALLE LINEE DI FORZA IN OGNI PUNTO

ii) IL NUMERO DI LINEE DI FORZA PER UNITA' D'AREA CHE ATTRAVERSANO UNA SUPERFICIE PERPENDICOLARE ALLE LINEE STESSE E' PROPORZIONALE ALL'INTENSITA' DEL CAMPO ELETTRICO IN QUELLA REGIONE

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ E' INTENSO DOVE LE LINEE DI FORZA SONO FITTE; E' DEBOLE DOVE QUESTE SI DIRADANO



NEL CASO DI UNA SUPERFICIE SFERICA, IL NUMERO DI LINEE PER UNITA' D'AREA SULLA SUPERFICIE E' $\frac{N}{4\pi r^2}$

E $\propto$ NUMERO DI LINEE PER UNITÀ D'AREA

$\Rightarrow E \propto \frac{1}{r^2}$, IN ACCORDO CON $E = K_e \frac{q}{r^2}$

REGOLE PER DISEGNARE LE LINEE DI FORZA:

I) LE LINEE DI FORZA PER CARICHE PUNTIFORMI DEVONO ORIGINARE DALLE CARICHE POSITIVE, E TERMINARE SULLE CARICHE NEGATIVE. SE C'È ECCESSO DI CARICA DI UN TIPO, ALCUNE LINEE INIZIANO e TERMINANO ALL'INFINITO

II) # LINEE DI FORZA USCENTI DA CARICA POSITIVA $\propto q$

\# " " ENTRANTI IN CARICA NEGATIVA $\propto q$

III) DUE LINEE DI FORZA NON SI POSSONO INTERSECARE

---

MOTO DI PARTICELLE CARICHE IN CAMPO ELETTRICO UNIFORME

PARTICELLA IN CAMPO ELETTRICO:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

ESEMPIO: CARICA $q>0$ PUNTIFORME IN CAMPO $\vec{E}$ LUNGO $x$. SI DESCRIVA IL MOTO

---

MOTO RETTILINEO LUNGO L'ASSE $x$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_i + at \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{array}\right\}$$

IPOTESI: $x_i = 0$

$v_i = 0$

$\Downarrow$

$$x_f = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{qE}{2m} t^2$$

$$v_f = at = \frac{qE}{m} t$$

$$v_f^2 = 2a x_f = 2 \frac{qE}{m} x_f$$

$$E_K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \frac{2qE}{m} x = qEx$$

= ENERGIA CINETICA DELLA CARICA DOPO AVER PERCORSO UNA DISTANZA $x = x_f - x_i$

PARTICELLA = SISTEMA NON ISOLATO

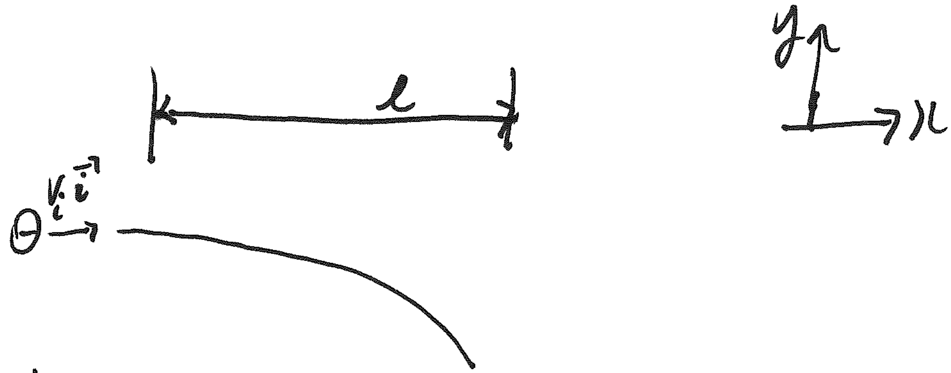
L'ENERGIA E' TRASFERITA DAL CAMPO ELETTRICO TRAMITE IL LAVORO

$\vec{E}$ UNIFORME $\Rightarrow$ $\vec{E}$ e' COSTANTE IN MODULO, DIREZIONE e VERSO $\Rightarrow$ $\vec{a}$ e' COSTANTE

$q > 0 \Rightarrow$ LA ACCELERAZIONE DELLA PARTICELLA e' NEL VERSO DEL CAMPO ELETTRICO

$q < 0 \Rightarrow$ " " VERSO OPPOSTO

ESEMPIO: CAMPO ELETTRICO TRA DUE PIASTRE METALLICHE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO



L'ELETTRONE DI CARICA $q_e < 0$ VIENE SPARATO ORIZZONTALMENTE CON VELOCITÀ INIZIALE
$\vec{v_i} = v_i \, \vec{i}$

$\vec{E}$ è NEL VERSO POSITIVO DI $y$

$\Rightarrow$ L'ACCELERAZIONE DELL'ELETTRONE È NEL VERSO NEGATIVO DI $y$:

$$\vec{a} = \frac{q_e E}{m_e} \vec{j} = -\frac{|q_e| E}{m_e} \vec{j}$$ è COSTANTE,

INOLTRE $v_{xi} = v_i$, $v_{yi} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} v_x(t) = v_i = \text{COSTANTE} \\ v_y(t) = a_y t = -\dfrac{|q_e| E}{m_e} t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_f &= v_i t \\ y_f &= \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2} \frac{|q_e| E}{m_e} t^2 \end{aligned}\right\}$$

$$t = \frac{x_f}{v_i} \Rightarrow y_f = -\frac{1}{2} \frac{|q_e| E}{m_e} \frac{(x_f)^2}{(v_i)^2}$$ ⇒ LA TRAIETTORIA E' UNA PARABOLA

⇒ ANALOGIA FORMALE CON LA TRAIETTORIA IN CAMPO GRAVITAZIONALE UNIFORME

- LONTANO DAL CAMPO ELETTRICO, L'ELETTRONE CONTINUA A MUOVERSI DI MOTO RETTILINEO

N.B. PER UN CAMPO ELETTRICO DI $10^4 \frac{N}{C}$, SI HA

$$\frac{|\vec{F}_e|}{F_g} = \frac{|q_e| E}{mg} \simeq 10^{14}$$

PER UN PROTONE, TALE RAPPORTO E' DELL'ORDINE DI $10^{11}$

⇒ SI PUO' TRASCURARE L'EFFETTO DELLA FORZA DI GRAVITA' SULLE EQUAZIONI DEL MOTO

# ESEMPIO: ELETTRONE ACCELERATO

SIA $V_i = 3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$ $E = 200 \frac{N}{C}$, $l = 0.1\, m$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{|e|E}{m} \vec{j}$$

$$= -\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^2}{9.11 \times 10^{-31}} \vec{j}\ ms^{-2}$$

$$= -\frac{3.2}{9.11} 10^{14} \vec{j}\ ms^{-2} = -3.51 \cdot 10^{13} \vec{j}\ ms^{-2}$$

TEMPO SPESO ALL'INTERNO DI $\vec{E}$:

$$\Delta t = \frac{l}{V_i} = \frac{0.1\, m}{3 \cdot 10^6 ms^{-1}} = \frac{1}{3} 10^{-7} s = 3.33 \cdot 10^{-8} s$$

SPOSTAMENTO VERTICALE DELL'ELETTRONE DOPO AVER ATTRAVERSATO IL CAMPO ELETTRICO:

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2} 3.51 \times 10^{13} \times (3.3 \cdot 10^{-8})^2 m$$

$$= \frac{-3.51\ (3.3)^2}{2} 10^{-3} m = -1.9 \times 10^{-2} m$$

]SE20-16[

NEI TUBI A RAGGI CATODICI, PONENDO UNA CARICA POSITIVA SU UNA DELLE PLACCHE DI DEFLESSIONE ORIZZONTALE, E NEGATIVA SULL'ALTRA PLACCA, SI CREA UN CAMPO ELETTRICO CHE PERMETTE AL FASCIO DI ESSERE DEFLESSO DA UN LATO ALL'ALTRO. LO STESSO DI DEFLESSIONE VERTICALE, AGISCONO ALLO STESSO MODO.

---

]SE20-17[

# FILE SE 21

## DIFFERENZA DI POTENZIALE E POTENZIALE ELETTRICO

CARICA PUNTIFORME $q_0$ IMMERSA IN CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$

$\Rightarrow$ FORZA ELETTRICA SULLA CARICA è $q_0 \vec{E}$

= SOMMA VETTORIALE DELLE SINGOLE FORZE ESERCITATE SU $q_0$ DALLE VARIE CARICHE CHE GENERANO $\vec{E}$

$\Rightarrow$ LA FORZA $q_0 \vec{E}$ E' CONSERVATIVA POICHE' LE SINGOLE FORZE SONO CONSERVATIVE, ESSENDO GOVERNATE DALLA LEGGE DI COULOMB (L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA, DUNQUE NON SI TRASFORMA IN ENERGIA INTERNA)

- IN UN SISTEMA CHE CONSISTE DELLA CARICA PUNTIFORME E DELLE CARICHE SORGENTI, POICHÉ $\vec{E}$ RAPPRESENTA L'EFFETTO DELLE CARICHE SORGENTI, POSSIAMO EQUIVALENTEMENTE RAGIONARE IN TERMINI DI $q_0$ E DI $\vec{E}$.

- SE $q_0$ SI MUOVE PER EFFETTO DI $\vec{E}$, IL CAMPO ELETTRICO COMPIE SU $q_0$ IL LAVORO

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

NEL CASO GRAVITAZIONALE, ABBIAMO TROVATO

$$\Delta U_g = -\Delta W$$

QUI, IN ANALOGIA, TROVIAMO CHE

$$dU = -dW = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

NEL CASO DI UNO SPOSTAMENTO FINITO TRA I PUNTI A e B, LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA CARICA-CAMPO è

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (*)$$

$q_0 \vec{E}$ CONSERVATIVA $\Rightarrow$ L'INTEGRALE DI LINEA IN (*) NON DIPENDE DAL CAMMINO PER ANDARE DA A a B.

- SI PUÒ RIMUOVERE L'EFFETTO DELLA CARICA DI PROVA DIVIDENDO L'ENERGIA POTENZIALE PER $q_0$:

POTENZIALE ELETTRICO $V = \dfrac{U}{q_0}$

PER COSTRUZIONE, IL POTENZIALE V È UNA PROPRIETÀ DEL SOLO CAMPO ELETTRICO. ANCHE SE TOGLIESSIMO LA CARICA DI PROVA DAL CAMPO, IL POTENZIALE ELETTRICO ESISTEREBBE ANCORA NEL PUNTO OCCUPATO DALLA CARICA DI PROVA, E SAREBBE DOVUTO ALLE CARICHE SORGENTI.

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \text{DIFFERENZA DI POTENZIALE}$$

]SE 22-2[

PER CONVENZIONE, FISSIAMO = 0 IL POTENZIALE IN UN PUNTO INFINITAMENTE LONTANO DALLE CARICHE SORGENTI

⇒ "IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN PUNTO ARBITRARIO E' = LAVORO PER UNITA' DI CARICA PER PORTARE UNA PARTICELLA DI PROVA DALL'INFINITO AL PUNTO, DIVISO PER $q_0$"

$$V_A = 0 \Rightarrow V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

= DIFFERENZA DI POTENZIALE FRA UN PUNTO P E UN PUNTO ALL'INFINITO

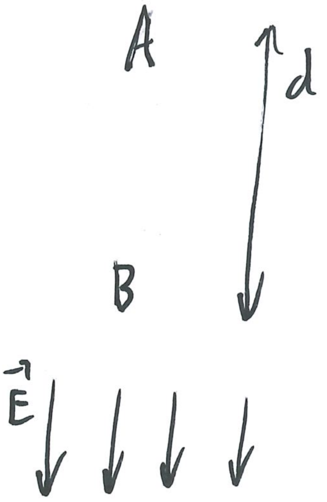
$$1 \text{ VOLT} = \frac{1\,J}{C}$$

$$\frac{1 \text{ VOLT}}{m} = \frac{1\,N}{C}$$

⇒ IL CAMPO ELETTRICO SI OTTIENE DAL GRADIENTE SPAZIALE DEL POTENZIALE ELETTRICO

$$1\,eV = |(1e)|(1V) = 1.6 \cdot 10^{-19} C \; \frac{1J}{C} = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

# DIFFERENZA DI POTENZIALE IN CAMPO ELETTRICO UNIFORME




CAMPO ELETTRICO UNIFORME LUNGO L'ASSE $y < 0$

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_A^B E \cos 0° \, ds = -\int_A^B E \, ds$$

$$= -E \int_A^B ds = -Ed$$

$$(V_B < V_A)$$

LE LINEE DI CAMPO ELETTRICHE SONO SEMPRE NELLA DIREZIONE DI UN POTENZIALE DECRESCENTE.

→ SE ORA UNA PARTICELLA DI PROVA DI CARICA $q_0$ SI MUOVE DA A a B, SI HA

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

DUNQUE $q_0 > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow$ "QUANDO UNA CARICA POSITIVA SI MUOVE NEL VERSO DEL CAMPO ELETTRICO, L'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DEL SISTEMA CARICA-CAMPO DIMINUISCE"

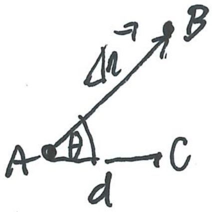
$\Rightarrow$ COMPLETA ANALOGIA COL CASO GRAVITAZIONALE

]SE 22-4[

PARTICELLA DI CARICA $q_0 > 0$, IN QUIETE, POSTA IN CAMPO ELETTRICO UNIFORME $\Rightarrow$ ESSA SUBISCE UNA FORZA $q_0 \vec{E}$ NEL VERSO DI $\vec{E}$ $\Rightarrow$ ESSA ACCELERA VERSO IL BASSO GUADAGNANDO ENERGIA CINETICA $\Rightarrow$ IL SISTEMA CARICA-CAMPO PERDE UNA EGUALE QUANTITA' DI ENERGIA POTENZIALE

- INVECE: $q_0 < 0 \Rightarrow$ LA PARTICELLA VIENE ACCELERATA IN VERSO OPPOSTO AL CAMPO ELETTRICO

$\Rightarrow$ IL SISTEMA CARICA-CAMPO GUADAGNA ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA QUANDO UNA CARICA $< 0$ SI MUOVE NEL VERSO OPPOSTO AL CAMPO ELETTRICO.




$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$\Rightarrow \Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$V_B - V_A = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -E\Delta r\cos\theta = -Ed = V_C - V_A$$

$\Rightarrow V_B = V_C$ $\Rightarrow$ TUTTI I PUNTI CHE GIACCIONO IN UN PIANO PERPENDICOLARE A UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME SONO ALLO STESSO POTENZIALE

<u>DEF.</u> <u>SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE</u> = QUALSIVOGLIA SUPERFICIE I CUI PUNTI HANNO LO STESSO POTENZIALE ELETTRICO

$\Delta U = q_0 \Delta V \Rightarrow$ NON SI COMPIE LAVORO SE UNA PARTICELLA DI PROVA SI MUOVE TRA 2 PUNTI QUALSIASI DI UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE

CAMPO ELETTRICO UNIFORME $\Rightarrow$ LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO PIANI TUTTI PERPENDICOLARI AL CAMPO.

ESEMPIO MOTO DI UN PROTONE IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME:

UN PROTONE IN QUIETE E' POSTO IN CAMPO ELETTRICO UNIFORME DI $8 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$, DIRETTO LUNGO L'ASSE $x>0$

IL PROTONE SI SPOSTA DUNQUE DI MEZZO METRO NELLA DIREZIONE DI $\vec{E}$

(1) LA DIFFERENZA DI POTENZIALE FRA I PUNTI A e B e'

$$\Delta V = -Ed = -8 \cdot 10^4 \frac{V}{m} \frac{1}{2} m = -4 \cdot 10^4 V$$

(2) NE RISULTA UNA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA CARICA-CAMPO

$$\Delta U = q \Delta V = e \Delta V = -eEd$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \times (-4 \cdot 10^4 V) = -6{,}4 \times 10^{-15} J$$

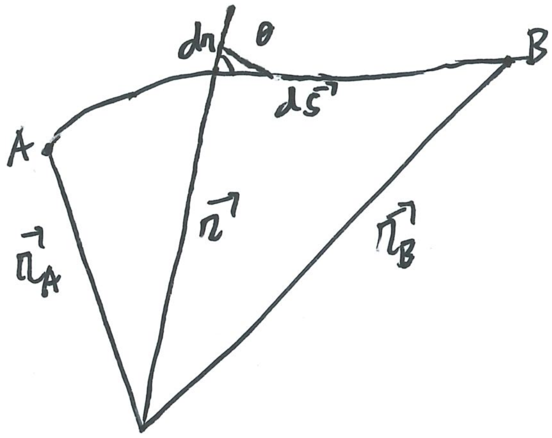
$\Delta U < 0 \Rightarrow$ L'ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA DIMINUISCE QUANDO IL PROTONE SI MUOVE NEL VERSO DI $\vec{E}$.

]SE21-6[

INFATTI, PIU' IL PROTONE E' ACCELERATO NEL VERSO DEL CAMPO, PIU' AUMENTA LA SUA ENERGIA CINETICA $\Rightarrow$ PIU' IL SISTEMA PERDE ENERGIA POTENZIALE.

---

## POTENZIALE ELETTRICO ED ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DI CARICHE PUNTIFORMI




$ds \cos\theta = dr$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

PER CARICA PUNTIFORME: $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e_r}$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e_r} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = k_e q \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= f(r_A, r_B)$$

PER CONVENZIONE, POTENZIALE NULLO PER $r_A = \infty$

$\Rightarrow V = k_e \frac{q}{r}$ $r$ = DISTANZA FRA IL PUNTO E LA CARICA

]SE21-7[

$\Rightarrow$ V E' COSTANTE SU UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO $r$.

$\Rightarrow$ LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI PER UNA CARICA PUNTIFORME ISOLATA SONO UNA FAMIGLIA DI SFERE CONCENTRICHE ALLA CARICA.

- NEL CASO DI DUE O PIU' CARICHE PUNTIFORMI, VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, SECONDO IL QUALE:

$$V = k_e \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \qquad \diamond$$

$r_i$ = DISTANZA DELLA CARICA i-ma $q_i$ DAL PUNTO P

E' SENZ'ALTRO PIU' FACILE CALCOLARE LA SOMMA $\diamond$ CHE LA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI ELETTRICI

---

SIA ORA $V_2$ = POTENZIALE ELETTRICO DOVUTO ALLA CARICA $q_2$ IN UN PUNTO P.

$q_1 V_2$ = LAVORO NECESSARIO PER PORTARE UNA SECONDA CARICA $q_1$ DALL'INFINITO IN P SENZA ACCELERAZIONE.

= ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL SISTEMA COME ENERGIA POTENZIALE $U$ DEL SISTEMA $(q_1, q_2)$

$\Rightarrow$ $U = q_1 V_2 = k_e \dfrac{q_1 q_2}{r_{12}}$ = ENERGIA POTENZIALE DI UNA COPPIA DI PARTICELLE CARICHE

N.B. SE SEGNO $q_1$ = SEGNO $q_2$

$\Rightarrow U > 0$, IN ACCORDO COL FATTO CHE CARICHE DELLO STESSO SEGNO SI RESPINGONO $\Rightarrow$ BISOGNA COMPIERE LAVORO $> 0$ SUL SISTEMA PER AVVICINARE LE CARICHE

INVECE: SEGNO $q_1$ = $-$SEGNO $q_2$

$\Rightarrow$ FORZA ATTRATTIVA, e $U < 0$

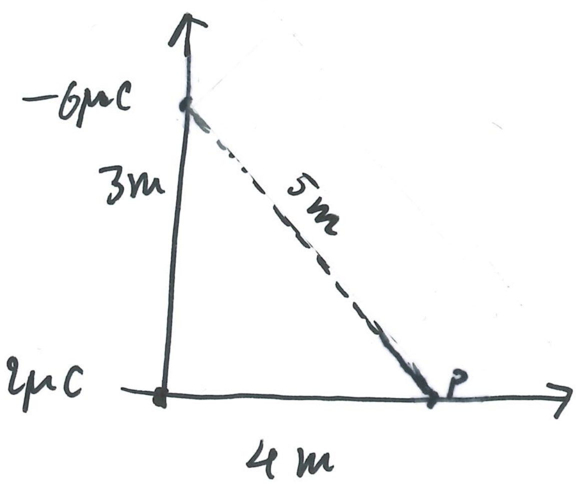
$\Rightarrow$ SI DEVE COMPIERE UN LAVORO $< 0$ PER AVVICINARE DUE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO

$\Rightarrow$ UN LAVORO $< 0$ VIENE COMPIUTO DA UN AGENTE ESTERNO CONTRO LA FORZA ATTRATTIVA TRA LE 2 CARICHE.

ESEMPIO: POTENZIALE DI 2 CARICHE PUNTIFORMI

UNA CARICA DI $2\,\mu C$ E' POSTA NELL'ORIGINE, E UNA CARICA DI $-6\,\mu C$ E' SULL'ASSE $y$ NELLA POSIZIONE $(0,3)$ m

QUAL E' IL POTENZIALE ELETTRICO DOVUTO A QUESTE CARICHE NEL PUNTO $P = (4,0)$ m?




$r_1 = 4$ m

$r_2 = \sqrt{9+16}$ m $= 5$ m

$\Rightarrow$

]SE22-9[

$$\Rightarrow V_P = K_e \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$= 8.99 \cdot 10^9 \frac{N m^2}{C^2} \left( \frac{2 \cdot 10^{-6} C}{4 m} + \frac{-6 \cdot 10^{-6} C}{5 m} \right)$$

$$= 8.99 \cdot \left( \frac{1}{2} - 1.2 \right) 10^3 V = -6.29 \cdot 10^3 V$$

---

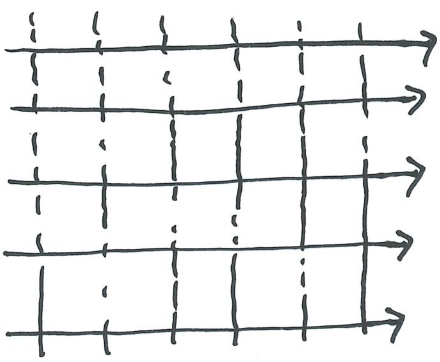
CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO SE E' NOTO IL POTENZIALE

DEFINIZIONE DI $V \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

SE $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, ALLORA $dV = -E_x \, dx = \frac{dV}{dx} dx$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$$

A CAUSA DEL PRODOTTO SCALARE $\vec{E} \cdot d\vec{s}$, LA VARIAZIONE DI POTENZIALE E' NULLA $\forall$ SPOSTAMENTO PERPENDICOLARE AL CAMPO ELETTRICO. INFATTI SAPPIAMO CHE LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI DEVONO ESSERE PERPENDICOLARI AL CAMPO.



QUI LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO RAPPRESENTATE DALLE LINEE TRATTEGGIATE, MENTRE LE LINEE DI FORZA SONO QUELLE CONTINUE

CAMPO ELETTRICO UNIFORME PRODOTTO DA CARICA SUPERFICIALE PIANA INFINITA ] SE21-20 [

NEL CASO DI DISTRIBUZIONE DI CARICA A SIMMETRIA SFERICA

$(\Rightarrow \rho(r) = \rho(r)) \Rightarrow$ CAMPO ELETTRICO RADIALE

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r \, dr \quad , \Rightarrow dV = -E_r \, dr = \frac{dV}{dr} dr$$

$$\Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr}$$

SE $V = K_e \frac{q}{r} \Rightarrow E_r = \frac{K_e \, q}{r^2}$

LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO UNA FAMIGLIA DI SFERE CONCENTRICHE

---

IN GENERALE, IN $\mathbb{R}^3$, $\quad V = V(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

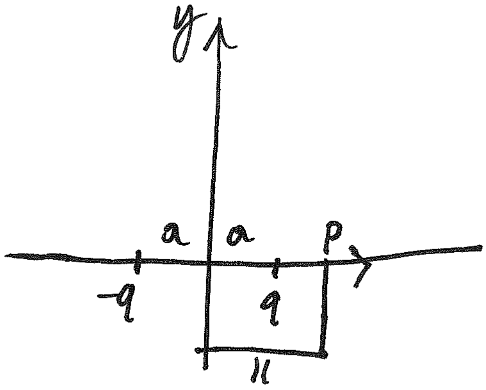
ESEMPIO: $\quad V = 3x^2 y + y^2 + yz$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -6xy$$

$$E_y = -3x^2 - 2y - z$$

$$E_z = -y$$

ESEMPIO: POTENZIALE ELETTRICO DI UN DIPOLO




POTENZIALE:

$$V_P = K_e \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i}{r_i} = K_e \left( \frac{q}{x-a} + \frac{-q}{x+a} \right) = K_e q \left( \frac{x+a-x+a}{(x-a)(x+a)} \right)$$

$$= \frac{2K_e q a}{(x^2-a^2)}$$

CAMPO ELETTRICO:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(2K_e qa \;(x^2-a^2)^{-1}\right)$$

$$= \frac{4K_e q a x}{(x^2-a^2)^2}$$

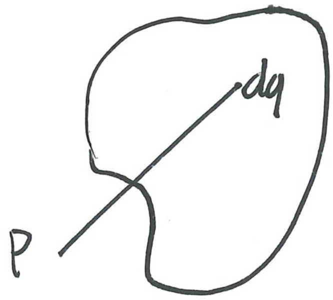
IN PARTICOLARE:

P LONTANO DAL DIPOLO $\Rightarrow x \gg a$

$$\Rightarrow E_x \simeq \frac{4K_e q a \cancel{x}}{x^4} = \frac{4K_e q a}{x^3}$$

]SE21-22[

# CAMPO ELETTRICO DI DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

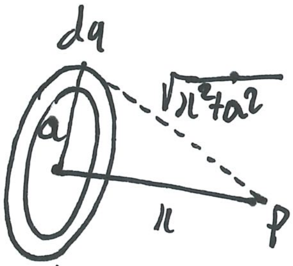



$$dV = K_e \frac{dq}{r} \Rightarrow V = K_e \int_{\text{OGGETTO}} \frac{dq}{r}$$

OVVERO IL POTENZIALE TOTALE SI OTTIENE INTEGRANDO $\frac{dq}{r}$

LA SOMMA DELLE DISTRIBUZIONI DISCRETE E' STATA SOSTITUITA DALL'INTEGRALE DELLE DISTRIBUZIONI CONTINUE

ESEMPIO: POTENZIALE DI UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO




IL POTENZIALE E' QUELLO CHE COMPETE AD UN PUNTO P POSTO SULL'ASSE DI UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO

$$V = K_e \int_0^Q \frac{dq}{r} = K_e \int_0^Q \frac{dq}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

OGNI ELEMENTO DI CARICA $dq$ SI TROVA ALLA STESSA DISTANZA DA P

$$\Rightarrow V = \frac{K_e}{\sqrt{r^2+a^2}} \int_0^Q dq = \frac{K_e Q}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

]SE21-13[

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k_e Q \frac{d}{dx}\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -k_e Q\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x = \frac{k_e Q x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

TEOREMA DI GAUSS: ATTRAVERSO UNA QUALUNQUE SUPERFICIE CHIUSA $\Sigma$ SI HA

$$\int_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \cdot d\vec{A} \equiv \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA$

$\vec{n}$ = VERSORE NORMALE ALLA SUPERFICIE $\Sigma$

OVE $q_{in}$ = CARICA TOTALE INTERNA ALLA SUPERFICIE $\Sigma$

$\vec{E}$ = CAMPO ELETTRICO IN OGNI PUNTO DELLA SUPERFICIE

- LA $\Sigma$ VA SCELTA IN MODO CHE IL VALORE COSTANTE DEL CAMPO ELETTRICO SU $\Sigma$ SIA DEDOTTO PER SIMMETRIA, E INOLTRE $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\, dA$, ESSENDO $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ PARALLELI

CARICA PUNTIFORME $q$: $\Sigma$ = SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO $r$, CENTRATA SULLA CARICA PUNTIFORME.

PER SIMMETRIA, $\vec{E}$ E' COSTANTE SU $\Sigma$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_\Sigma dA = E \; 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

---

CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DI UNA SFERA DI RAGGIO R. SCEGLIAMO $\Sigma$ = SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO $r < R$, CONCENTRICA CON LA SFERA ISOLANTE DI RAGGIO R.

$$q_{in} = C \frac{4}{3} \pi r^3$$

]SE22-0[

PER SIMMETRIA, $\vec{E}$ HA MODULO COSTANTE IN OGNI PUNTO DI $\Sigma$, e $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\, dA$

$$\Rightarrow E \int_{\Sigma} dA = E\, 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q_{in}}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r$$

INOLTRE $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$

$$\Rightarrow E = \frac{Q\, r}{4\pi \varepsilon_0 R^3} = \frac{k_e Q}{R^3}\, r$$

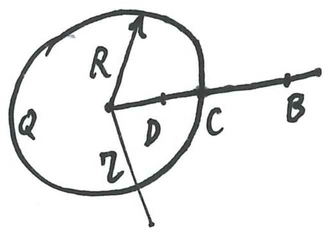
]SE22-0'[

# ES POTENZIALE DI UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

UNA SFERA ISOLANTE DI RAGGIO R HA UNA DENSITÀ DI CARICA PER UNITÀ DI VOLUME POSITIVA e UNIFORME, e UNA $q_{TOT} = Q$

(1) CALCOLARE IL POTENZIALE ELETTRICO IN UN PUNTO AL DI FUORI DELLA SFERA, OVVERO PER $r \gg R$ O COMUNQUE $r > R$. SI ASSUMA $V(r=\infty)=0$

---




INVERO, SAPPIAMO CHE

$$E_r = K_e \frac{Q}{r^2} \qquad \forall r > R$$

(VEDASI ]SE22-0[)

$$\Rightarrow V_B = -\int_{\infty}^{r} E_\tau \, d\tau = -K_e Q \int_{\infty}^{r} \frac{d\tau}{\tau^2} = K_e \frac{Q}{r} \qquad \forall r > R$$

CONTINUITÀ IN $r=R \Rightarrow V_C = K_e \dfrac{Q}{R}$ in $r=R$

(2) CALCOLARE IL POTENZIALE IN UN PUNTO D INTERNO ALLA SFERA $\Rightarrow r < R$

INVERO, IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DI UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA è, COME SAPPIAMO DA ]SE22-0'[

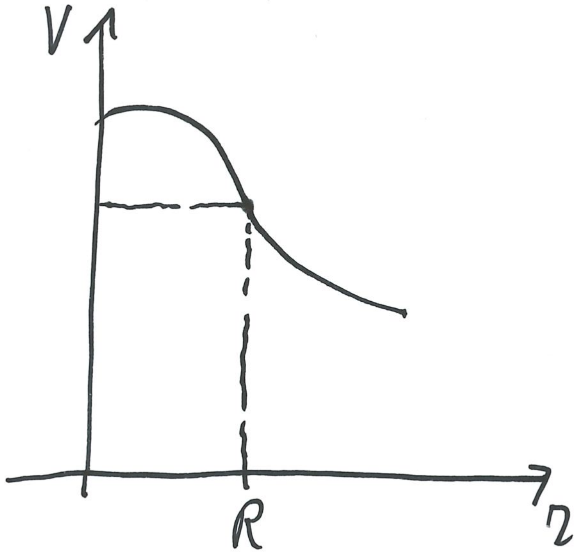
$$E_r = K_e \frac{Q}{R^3} r \qquad \forall r < R$$

$$\Rightarrow V_D - V_C = -\int_R^r E_r\, dr = -\frac{K_e Q}{R^3}\int_R^r r\, dr = \frac{K_e Q}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow V_D = V_C + \frac{K_e Q}{2R^3}(R^2 - r^2) = \frac{K_e Q}{R} + \frac{K_e Q}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

$$= \frac{K_e Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \forall\, r < R$$

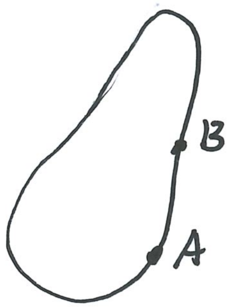
$\Rightarrow$




---

POTENZIALE ELETTRICO DI UN CONDUTTORE CARICO

<u>TEOREMA</u> "OGNI PUNTO SULLA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE CARICO IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO SI TROVA ALLO STESSO POTENZIALE"



**DIM** SCELTI DUE PUNTI QUALSIVOGLIA SULLA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE CARICO, COME A, B IN FIGURA, IL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ E' SEMPRE PERPENDICOLARE a $d\vec{s}$ LUNGO UN PERCORSO SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE

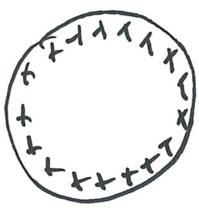
$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

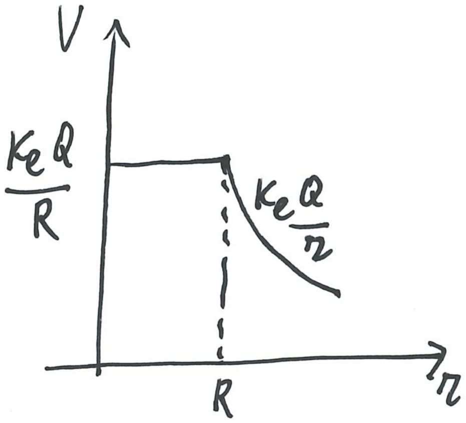
$$\Rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_B = V_A$$

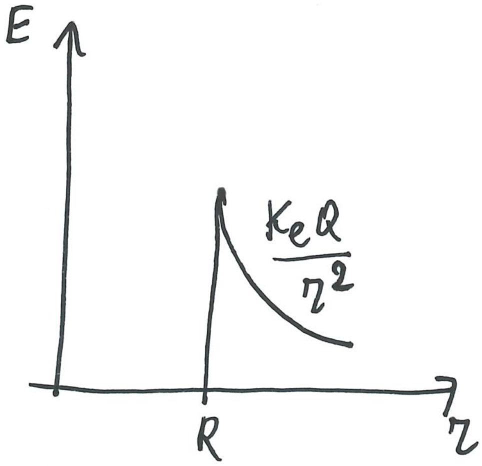
$\Rightarrow$ LA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE CARICO IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO È UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE.

---

ESEMPIO: SFERA CONDUTTRICE METALLICA DI RAGGIO R

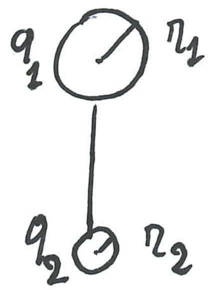




## ESEMPIO: CONDUTTORE NON SFERICO

$r_1 > r_2$




DUE SFERE CONDUTTRICI CARICHE DI RAGGI $r_1, r_2$ SONO COLLEGATE DA UN SOTTILE FILO CONDUTTORE.

LE SFERE SIANO ABBASTANZA DISTANTI, COSÌ CHE IL CAMPO ELETTRICO DELL'UNA NON INFLUENZI QUELLO DELL'ALTRA.

$\Rightarrow$ IL CAMPO $\vec{E}$ DI CIASCUNA SFERA È QUELLO DOVUTO AD UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA A SIMMETRIA SFERICA

- PRESENZA DEL FILO $\Rightarrow$ L'INTERO SISTEMA È UN SOLO CONDUTTORE, E TUTTI I SUOI PUNTI DEVONO ESSERE ALLO STESSO POTENZIALE.

$\Rightarrow$ POTENZIALE SU SUPERFICIE PRIMA SFERA
= " " SECONDA "

$$\Rightarrow K_e \frac{q_1}{r_1} = K_e \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow q_1 = \frac{r_1}{r_2} q_2 > q_2$$

MA:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\dfrac{q_2}{4\pi (r_2)^2}}{\dfrac{q_1}{4\pi (r_1)^2}} = \frac{q_2}{q_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} > 1$$

$\Rightarrow$ LA SFERA PIÙ PICCOLA HA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA MAGGIORE (SEBBENE ABBIA CARICA MINORE)

⇒ IL CAMPO ELETTRICO VICINO ALLA SFERA PIU' PICCOLA E' MAGGIORE DEL CAMPO ELETTRICO VICINO ALLA SFERA PIU' GRANDE, IN VIRTU' DELLA RELAZIONE

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

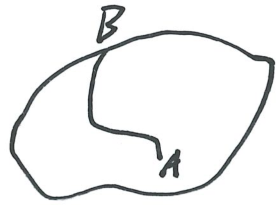
⇒ "IL CAMPO ELETTRICO DOVUTO A UN CONDUTTORE CARICO E' MAGGIORE IN PROSSIMITA' DELLE SUPERFICI CONVESSE DEL CONDUTTORE CHE HANNO UN PICCOLO RAGGIO DI CURVATURA, ED E' MINORE IN PROSSIMITA' DELLE SUPERFICI CONVESSE DI UN CONDUTTORE CHE HANNO UN GRANDE RAGGIO DI CURVATURA"

---

## CAVITA' ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO

<u>TEOR.</u> DATO UN CONDUTTORE DI FORMA ARBITRARIA, CONTENENTE UNA CAVITA', IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DELLA CAVITA' E' = 0

<u>DIM</u> RICORDIAMO CHE OGNI PUNTO SUL CONDUTTORE SI TROVA ALLO STESSO POTENZIALE ⇒ $V_B - V_A = 0 \quad \forall A, B$




D'ALTRONDE, E' ANCHE $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

]SE22-5[

$\Rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall A, B \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ IL CAMPO ELETTRICO SI ANNULLA IN TUTTI I PUNTI DENTRO LA CAVITA'

$\Rightarrow$ UNA CAVITA' CIRCONDATA DA PARETI CONDUTTRICI E' LIBERA DA CAMPI, FINO A CHE NON CI SONO CARICHE AL SUO INTERNO

$\Rightarrow$ SI PUO' SCHERMARE UN CIRCUITO ELETTRONICO O UN INTERO LABORATORIO, CIRCONDANDOLO DI PARETI CONDUTTRICI

$\Rightarrow$ DURANTE UN TEMPORALE, IL LUOGO PIU' SICURO E' L'INTERNO DI UNA AUTOMOBILE (POICHE' IL METALLO DELLA CARROZZERIA GARANTISCE CHE $\vec{E} = 0$ ALL'INTERNO).

---

## IL CONCETTO DI CAPACITA'

- PER CIRCUITO SI INTENDE UN CERTO NUMERO DI COMPONENTI ELETTRICI COLLEGATI FRA LORO DA FILI CONDUTTORI, CHE FORMANO UNO O PIU' CIRCUITI CHIUSI.

PRIMO ELEMENTO DI CIRCUITO: IL CONDENSATORE

= DUE CONDUTTORI DI FORMA QUALSIASI, TRA I QUALI ESISTE UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE $\Delta V$.

- COLLEGANDO I DUE CONDUTTORI SCARICHI AI POLI DI UNA BATTERIA, POSSIAMO FAR SI' CHE ABBIANO CARICHE OPPOSTE IN SEGNO MA DI UGUAL MODULO.

]SE 22-6[

POI SI SCOLLEGA LA BATTERIA $\Rightarrow$ LE CARICHE RIMANGONO SUI CONDUTTORI $\Rightarrow$ IL CONDENSATORE IMMAGAZZINA CARICHE

$\Delta V = |V_1 - V_2|$ = DIFFERENZA DI POTENZIALE

DEF CAPACITA' DI UN CONDENSATORE $= C = \frac{Q}{\Delta V}$

PER DEFINIZIONE, $Q > 0$ SEMPRE

$\Rightarrow$ C MISURA LA QUANTITA' DI CARICA CHE PUO' ESSERE IMMAGAZZINATA NEL CONDENSATORE PER UNA DATA $\Delta V$

ESEMPIO: CONDUTTORE SFERICO ISOLATO DI RAGGIO R e CARICA Q

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{K_e \frac{Q}{R}} = \frac{R}{K_e} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$\Rightarrow$ LA CAPACITA' DI UNA SFERA CARICA ISOLATA NON DIPENDE NE' DALLA CARICA NE' DALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE

CONDENSATORE PIANO : DUE PIASTRE PARALLELE
DELLA STESSA AREA A SEPARATE DA UNA DISTANZA $d$.

IPOTESI: IL CAMPO ELETTRICO SIA UNIFORME FRA LE PIASTRE E ZERO ALTROVE

FRA LE ARMATURE: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

$$\Rightarrow \Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$ ESSENDO $\vec{E}$ UNIFORME

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$\Rightarrow$ "LA CAPACITA' DI UN CONDENSATORE PIANO E' PROPORZIONALE ALL'AREA DELLE ARMATURE, e INVERSAMENTE PROPORZIONALE ALLA LORO DISTANZA"

$\Rightarrow$ UN CONDENSATORE CON ARMATURE DI GRANDE AREA PUO' ACCUMULARE UNA GRANDE QUANTITA' DI CARICA

ESEMPIO: UN CONDENSATORE PIANO ABBIA UN'AREA $A = 2 \cdot 10^{-4}\, m^2$, e $d = 1mm$ = DISTANZA FRA LE ARMATURE

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \, \frac{2 \cdot 10^{-4}\, m^2}{10^{-3}\, m} = 1.77 \cdot 10^{-12} F$$

]SE22-8[

CONDENSATORE CILINDRICO: UN CONDUTTORE CILINDRICO DI RAGGIO a e CARICA Q e' CONTENUTO IN UN ALTRO CONDUTTORE CILINDRICO COASSIALE DI RAGGIO b e CARICA $-Q$

LUNGHEZZA $\frac{\ell}{a} \gg 1$, $\frac{\ell}{b} \gg 1$. TRASCURANDO GLI EFFETTI AI BORDI, IL CAMPO ELETTRICO e' PERPENDICOLARE ALL'ASSE DEI CILINDRI, CONFINATO FRA ESSI

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$\vec{E}$ = CAMPO ELETTRICO $\forall r \in ]a,b[$

PER UN CILINDRO AVENTE CARICA PER UNITA' DI LUNGHEZZA $\lambda$, IL CAMPO $\vec{E}$ HA MODULO $E = 2K_e \frac{\lambda}{r}$

LO STESSO SI PUO' USARE QUI, PERCHE' IL CILINDRO ESTERNO NON CONTRIBUISCE AL CAMPO AL SUO INTERNO

$\vec{E}$ e' DIRETTO RADIALMENTE VERSO IL CILINDRO ESTERNO

$$V_b - V_a = -2K_e \lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2K_e \lambda \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{2K_e \frac{Q}{\ell} \log\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ell}{2K_e \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

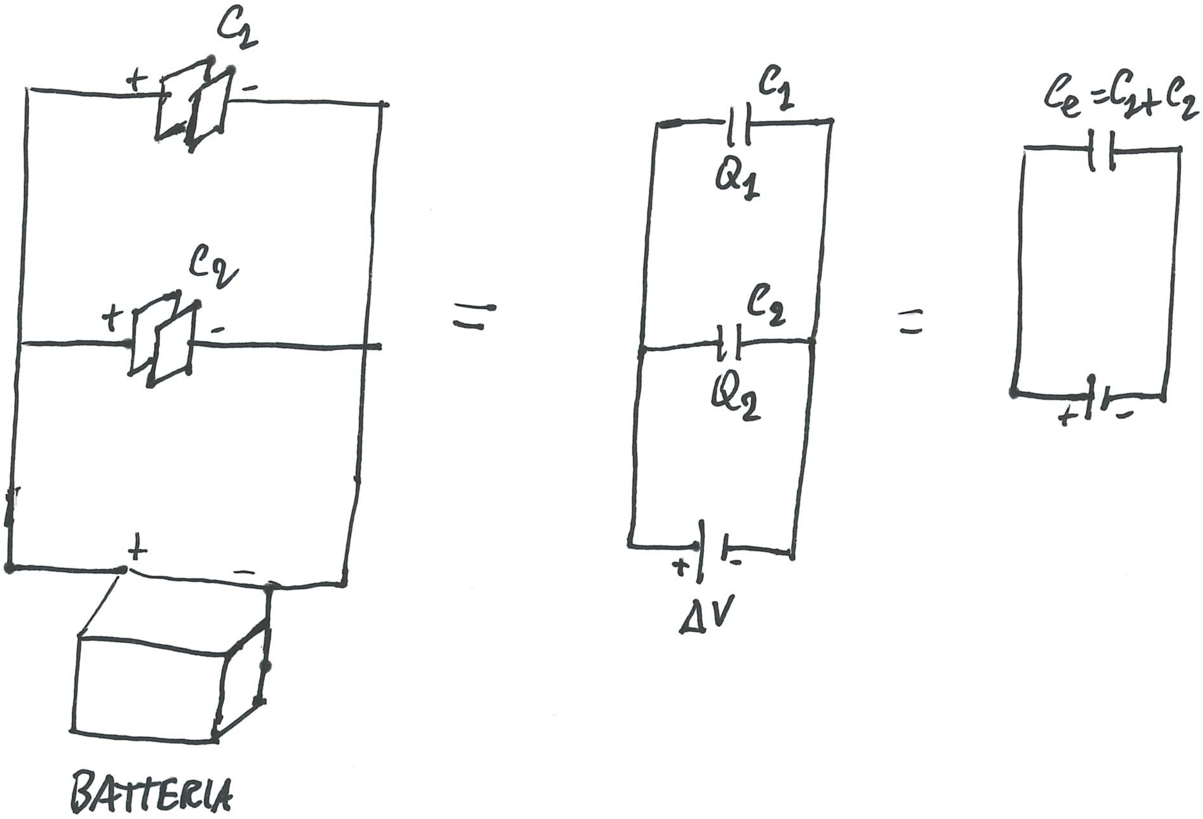
$$\Rightarrow \frac{C}{\ell} = \frac{1}{2K_e \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

]SE 22-9[

AD ESEMPIO, CIÒ SI REALIZZA CON UN CAVO COASSIALE CHE CONSISTE DI DUE CONDUTTORI CILINDRICI DI raggi a e b, SEPARATI DA UN ISOLANTE. CI SONO CORRENTI DI VERSO OPPOSTO NEI DUE CONDUTTORI.

---

## CONDENSATORI IN PARALLELO




TENSIONE APPLICATA = TENSIONE DEI MORSETTI DELLA BATTERIA

COLLEGAMENTO ⇒ ELETTRONI SI TRASFERISCONO TRA I FILI E LE ARMATURE ⇒ ARMATURE DI SINISTRA CARICHE $> 0$

" DESTRE " $< 0$

TENSIONE AI CAPI DEI CONDENSATORI = TENSIONE AI TERMINALI DELLA BATTERIA ⇒ IL FLUSSO CESSA ⇒ $Q = Q_1 + Q_2$ = SOMMA DELLE CARICHE MASSIME

]SE 22-10[

$Q_1 + Q_2 =$ CARICA MASSIMA IMMAGAZZINATA

SIA $C_e$ : $Q = C_e \Delta V$

OVE $Q_1 = C_1 \Delta V$ $Q_2 = C_2 \Delta V$

$\Rightarrow C_e \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V \Rightarrow C_e = C_1 + C_2$

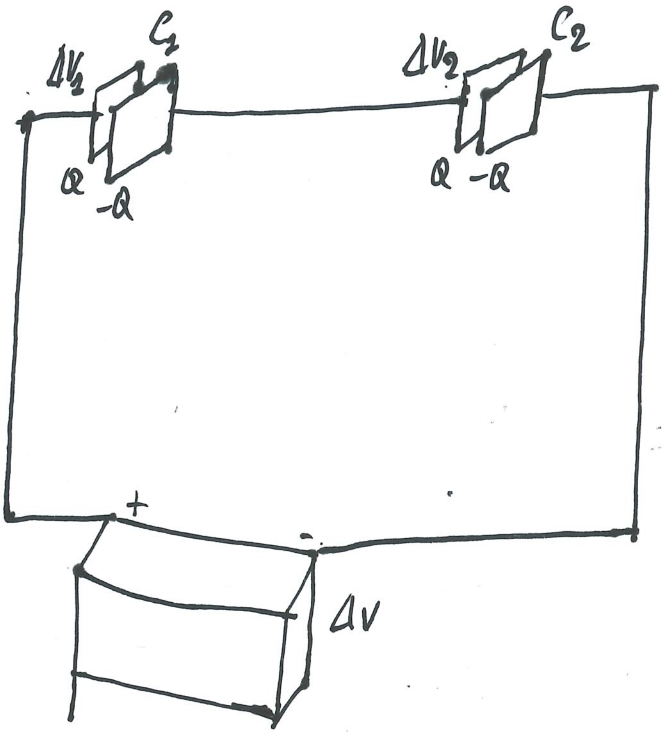
$\Rightarrow$ "LA CAPACITA' EQUIVALENTE DI UN INSIEME DI DUE O PIU' CONDENSATORI COLLEGATI IN PARALLELO E' LA SOMMA DELLE SINGOLE CAPACITA' "

$$C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad C_e > C_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

---

# FILE SE 23

CONDENSATORI IN SERIE: IN TAL CASO, IL VALORE ASSOLUTO DELLA CARICA E' LO STESSO SU TUTTE LE ARMATURE.




INIZIALMENTE I CONDENSATORI SONO SCARICHI, POI VIENE INSERITA LA BATTERIA NEL CIRCUITO

$\Rightarrow$ {ARMATURA DESTRA DI $C_1$ ∪ ARMATURA SINISTRA DI $C_2$}

= CONDUTTORE ISOLATO

$\Rightarrow$ QUALUNQUE CARICA NEGATIVA ENTRI IN UN'ARMATURA DAL FILO DI COLLEGAMENTO = CARICA POSITIVA DELL'ALTRA ARMATURA, PER MANTENERE NEUTRO IL CONDUTTORE ISOLATO $\Rightarrow$ ENTRAMBI I CONDENSATORI DEVONO AVERE LA STESSA CARICA Q.

QUAL È LA CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE EQUIVALENTE CHE SVOLGA LA STESSA FUNZIONE DEL COLLEGAMENTO IN SERIE? QUESTO CONDENSATORE DEVE ALFINE AVERE CARICA $-Q$ SULL'ARMATURA DESTRA e $+Q$ SULL'ARMATURA SINISTRA.

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_e} = \text{DIFFERENZA DI POTENZIALE AI CAPI DELLA BATTERIA}$$

$V_i$ = POTENZIALE DI CONDUTTORE ISOLATO

$= V$ (ARMATURA DESTRA DI $C_1$) $= V$ (ARMATURA SINISTRA DI $C_2$)

- POICHÉ L'ARMATURA SINISTRA DI $C_1$ e QUELLA DESTRA DI $C_2$ SONO COLLEGATE DIRETTAMENTE ALLA BATTERIA, SI HA

$$\Delta V = V_{LEFT} - V_{RIGHT}$$

$$= (V_{LEFT} - V_i) + (V_i - V_{RIGHT})$$

$$= \Delta V_1 + \Delta V_2$$

LA FORMULA $Q = C\Delta V$ PUÒ ESSERE APPLICATA A CIASCUN CONDENSATORE

$$\Rightarrow Q = C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

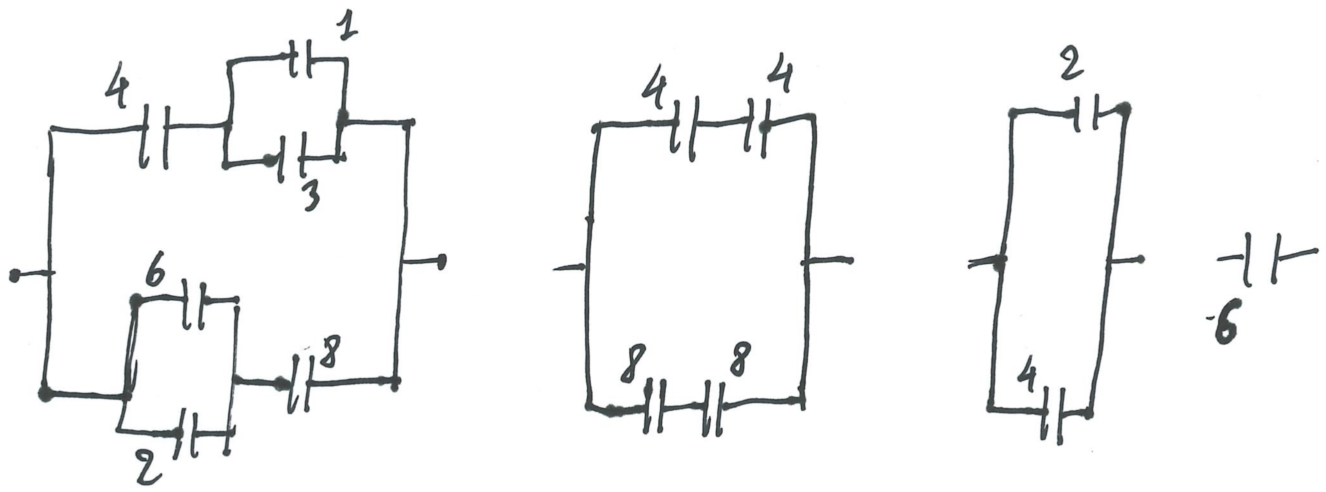
- PER 3 O PIÙ CONDENSATORI IN SERIE, SI HA

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

]SE23-2[

⇒ "IL RECIPROCO DELLA CAPACITA' EQUIVALENTE e' LA SOMMA ALGEBRICA DEI RECIPROCI DELLE SINGOLE CAPACITA', $C_e < C_i \quad \forall i = 1, \dots, n$"

ESEMPIO: CAPACITA' EQUIVALENTE PER UN CIRCUITO A 6 CONDENSATORI




---

ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE CARICO

- SE SI TOCCANO LE ARMATURE OPPOSTE DI UN CONDENSATORE CARICO, QUESTO PUO' SCARICARSI ATTRAVERSO LE DITA CHE FANNO DA CONDUTTORE, CAUSANDO UNA SCOSSA ELETTRICA. SE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE APPLICATA AL CONDENSATORE e' SUFFICIENTEMENTE ELEVATA, LA SCOSSA PUO' ESSERE MORTALE (e.g. ALIMENTATORE DI UN TELEVISORE).

- SUPPONIAMO CHE, AD UN CERTO ISTANTE, SIA $q$ LA CARICA SU UN CONDENSATORE, e $\Delta V$ LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AI SUOI CAPI: $\Delta V = \frac{q}{C}$. SE POI UN AGENTE ESTERNO TRASFERISCE UN ULTERIORE INCREMENTO DI CARICA $dq$, IL LAVORO NECESSARIO PER TRASFERIRE L'INCREMENTO DI CARICA DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA È

$$dW = (\Delta V)\, dq = \frac{q}{C}\, dq$$

$$\Rightarrow \text{LAVORO TOTALE} = W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$\Rightarrow$ IL CONDENSATORE SI COMPORTA COME UN SISTEMA NON ISOLATO

- LAVORO SVOLTO DALL'AGENTE ESTERNO SUL SISTEMA = ENERGIA POTENZIALE $U$ IMMAGAZZINATA SUL SISTEMA. QUESTA ENERGIA È DOVUTA ALLA TRASFORMAZIONE DI ENERGIA CHIMICA NELLA BATTERIA.

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q}{2}\frac{Q}{C} = \frac{Q}{2}\Delta V = \frac{C(\Delta V)^2}{2}$$

QUALE CHE SIA LA FORMA DEL CONDENSATORE

L'ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CAMPO ELETTRICO FRA LE ARMATURE DEL CONDENSATORE.

CONDENSATORE PIANO $\Rightarrow \Delta V = Ed$ , $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 A d) E^2$$

VOLUME DELLA REGIONE OCCUPATA DAL CAMPO ELETTRICO $= Ad$

$\Rightarrow$ ENERGIA PER UNITÀ DI VOLUME

$$= u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

SI PUÒ INOLTRE DIMOSTRARE CHE "LA DENSITÀ DI ENERGIA DI QUALSIASI CAMPO ELETTRICO È PROPORZIONALE AL QUADRATO DEL MODULO DEL CAMPO IN UN DATO PUNTO".

---

## CORRENTE ELETTRICA

OGNI QUAL VOLTA FLUISCE UNA CARICA, SI DICE CHE C'È UNA CORRENTE.

DEF.: CORRENTE MEDIA = "RAPIDITÀ CON LA QUALE LA CARICA ELETTRICA FLUISCE ATTRAVERSO UNA DATA SUPERFICIE"

$$I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

]SE23-5[

$\Delta Q$ = CARICA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE NELL'INTERVALLO DI TEMPO $\Delta t$.

DEF.: CORRENTE ISTANTANEA $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = I$

LA CORRENTE SI MISURA IN AMPÈRE.

$$1 \text{ AMPÈRE} = \frac{1C}{s}$$

"CONVENZIONE: SI SCEGLIE COME VERSO POSITIVO DELLA CORRENTE QUELLO IN CUI FLUISCE LA CARICA POSITIVA."

N.B. NEL RAME, LA CORRENTE E' DOVUTA AL MOTO DEGLI ELETTRONI, CHE HANNO CARICA $< 0$.

$\Rightarrow$ QUANDO SI PARLA DI CORRENTE NEL RAME, IL VERSO DELLA CORRENTE E' OPPOSTO AL VERSO DEL FLUSSO DEGLI ELETTRONI

- VICEVERSA, PER UN FASCIO DI PROTONI, LA CORRENTE HA LO STESSO VERSO DEL MOTO DEI PROTONI.

- IN ALCUNE SOSTANZE (GAS e ELETTROLITI) LA CORRENTE ORIGINA DAL FLUSSO DI PARTICELLE CARICHE SIA $> 0$ CHE $< 0$. TALI PARTICELLE SONO DETTE PORTATORI DI CARICA. NEI METALLI, I PORTATORI DI CARICA SONO GLI ELETTRONI.

## RELAZIONE TRA LA CORRENTE MACROSCOPICA E IL MOTO DELLE PARTICELLE CARICHE.

$A$ = SEZIONE TRASVERSALE DI UN CONDUTTORE CILINDRICO

$\Delta x$ = LUNGHEZZA DI UN ELEMENTO DI CONDUTTORE

$A\Delta x$ = VOLUME DELL'ELEMENTO DI CONDUTTORE

$\Delta Q$ = NUMERO DI PORTATORI X CARICA PER PARTICELLA

$= (n A \Delta x)\, q$, OVE

$n$ = # PORTATORI DI CARICA MOBILI PER UNITA' DI VOLUME

$q$ = CARICA DI CIASCUN PORTATORE

$v_d$ = VELOCITA' MEDIA COSTANTE DEI PORTATORI

$\Delta x = v_d \Delta t$ = DISTANZA PERCORSA DAI PORTATORI IN UN TEMPO $\Delta t$

$$\Rightarrow \Delta Q = (n A v_d \Delta t)\, q$$

$$\Rightarrow I_{med} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v_d A$$

LA CORRENTE MISURATA DIPENDE DUNQUE DALLA DENSITA' DEI PORTATORI DI CARICA $n$, DALLA CARICA PER PORTATORE, e DALLA VELOCITA' DI DERIVA $v_d$.

]SE23-7[

IN UN CONDUTTORE, e.g. UN METALLO, GLI ELETTRONI SONO SOTTOPOSTI A FREQUENTI COLLISIONI CON GLI ATOMI DEL METALLO $\Rightarrow$ MOTO COMPLICATO a ZIG-ZAG. QUANDO POI VIENE APPLICATA UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE, ALL' INTERNO DEL CONDUTTORE SI STABILISCE UN CAMPO ELETTRICO. $\Rightarrow$ FORZA ELETTRICA CHE ACCELERA GLI ELETTRONI $\Rightarrow$ SI PRODUCE UNA CORRENTE.

"IL MOTO DEGLI ELETTRONI DOVUTO ALLA FORZA ELETTRICA SI SOVRAPPONE AL MOTO CASUALE

$\Rightarrow$ SI CREA UNA VELOCITA' MEDIA $\vec{v}_{med}$

$|\vec{v}_{med}|$ = VELOCITA' DI DERIVA

- SISTEMA = {ELETTRONI} $\cup$ {ATOMI DEL METALLO} $\cup$ {CAMPO ELETTRICO}

$\Rightarrow$ ENERGIA = ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA ASSOCIATA AL CAMPO e AGLI ELETTRONI

- QUESTA SI TRASFORMA [TRAMITE IL LAVORO DEL CAMPO SUGLI ELETTRONI]

IN: $\rightarrow$ ENERGIA CINETICA DEGLI ELETTRONI [TRAMITE IL LAVORO SVOLTO DAL CAMPO $\vec{E}$ SUGLI ELETTRONI]

URTI FRA ELETTRONI E ATOMI DEL METALLO

$\Rightarrow$ UNA PARTE DELL'ENERGIA CINETICA SI TRASFERISCE

AGLI ATOMI ⇒ L'ENERGIA INTERNA DEL SISTEMA AUMENTA.

## RESISTENZA e LEGGE DI OHM

RESISTENZA DI UN CONDUTTORE = RAPPORTO FRA LA TENSIONE AI CAPI DEL CONDUTTORE e LA CORRENTE TRASPORTATA DAL CONDUTTORE:

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$ DEFINIZIONE DI RESISTENZA

$$1\ \text{OHM} = \frac{1\ \text{VOLT}}{1\ \text{AMPÈRE}}$$

⇒ LA RESISTENZA E' LA GRANDEZZA CHE DETERMINA LA CORRENTE DOVUTA a UNA DATA DIFFERENZA DI POTENZIALE

R AUMENTA ⇒ I DIMINUISCE
R DIMINUISCE ⇒ I AUMENTA

- LA RESISTENZA DEL CONDUTTORE E' CAUSATA DAGLI URTI DEGLI ELETTRONI CON GLI ATOMI
- "LEGGE DI OHM": PER MOLTI MATERIALI, LA RESISTENZA e' COSTANTE SU UN GRANDE INTERVALLO DI TENSIONI APPLICATE."
- QUESTA NON E' UNA LEGGE FONDAMENTALE, e' SOLO UNA RELAZIONE EMPIRICA
- DISPOSITIVI OHMICI: PER ESSI LA RESISTENZA e' COSTANTE IN UN GRANDE INTERVALLO DI TENSIONI.

]SE23-9[

- ESEMPIO DI DISPOSITIVO NON OHMICO: IL <u>DIODO</u>. LA SUA RESISTENZA E' PICCOLA SE $\Delta V > 0$, E' GRANDE SE $\Delta V < 0$

- <u>DEF</u>: <u>RESISTORE</u> = ELEMENTO CIRCUITALE CHE FORNISCE UNA SPECIFICA RESISTENZA

- RESISTENZA DI UN FILO CONDUTTORE OHMICO:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$l$ = LUNGHEZZA, $A$ = SEZIONE, $\rho$ = RESISTIVITA'

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ = CONDUCIBILITA'

$$\Rightarrow R = \frac{l}{\sigma A}$$

ANALOGIA CON QUANTO AVVIENE PER IL FLUSSO DI UN LIQUIDO ATTRAVERSO UN CONDOTTO.

$$\frac{R}{l} = \frac{\rho}{A}$$

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{\Delta V}{I} \Rightarrow I = \sigma A \frac{\Delta V}{l} = \frac{q}{\Delta t}$$

- NEL CASO DI CONDUZIONE D'ENERGIA ATTRAVERSO UNA LASTRA DI MATERIALE DI AREA A:

$$P = KA \frac{\Delta T}{L} \rightarrow \frac{Q}{\Delta t} = KA \frac{\Delta T}{L}$$

Q = QUANTITA' DI ENERGIA TRASFERITA TRAMITE IL CALORE

]SE 23-10[

C.F. LEGGE DI FICK PER LA VELOCITA' DI TRASFERIMENTO DI UN SOLUTO CHIMICO ATTRAVERSO UN SOLVENTE MEDIANTE LA DIFFUSIONE:

$$\frac{n}{\Delta t} = DA \frac{\Delta C}{L} \qquad (*)$$

$\frac{n}{\Delta t}$ = VELOCITA' DEL FLUSSO DEL SOLUTO IN MOLI PER SECONDO

$\Delta C$ = DIFFERENZA DI CONCENTRAZIONE

LA (*) HA IMPORTANTI APPLICAZIONI AL TRASPORTO DI MOLECOLE ATTRAVERSO LE MEMBRANE BIOLOGICHE.

---

## VARIAZIONE DELLA RESISTIVITA' CON LA TEMPERATURA

PER LA MAGGIOR PARTE DEI METALLI, IN UN INTERVALLO LIMITATO DI TEMPERATURE, SI HA

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

$\rho_0$ = RESISTIVITA' ALLA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO $T_0$

$\alpha$ = COEFFICIENTE TERMICO DELLA RESISTIVITA'

$$\Rightarrow) \quad \alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \qquad \Delta \rho = \rho - \rho_0 \qquad \Delta T = T - T_0$$

]SE23-11[

LA RESISTIVITÀ HA VALORI PICCOLISSIMI PER BUONI CONDUTTORI (RAME e ARGENTO), E VALORI ALTISSIMI PER BUONI ISOLANTI (VETRO e GOMMA)

CONDUTTORE PERFETTO: $\rho = 0$

ISOLANTE IDEALE: $\rho = \infty$

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

---

ARGENTO: $\rho = 1{,}59 \cdot 10^{-8}\ \Omega\, m$

RAME: $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$

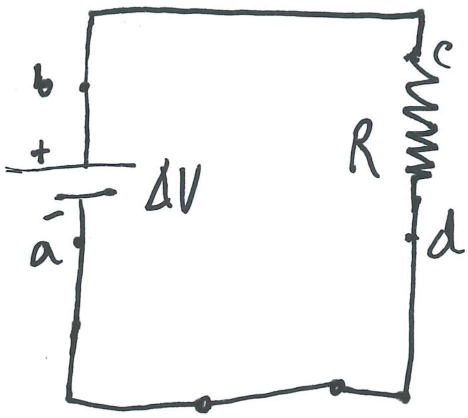
VETRO: $10^{10} \div 10^{14}\ \Omega m$

GOMMA DURA: $10^{13}\ \Omega m$

]SE23-12[

# FILE SE 24

## ENERGIA e POTENZA ELETTRICA




QUANDO UNA CARICA Q SI MUOVE DA a A b ATTRAVERSO LA BATTERIA CHE HA DIFFERENZA DI POTENZIALE $\Delta V$, L'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DEL SISTEMA AUMENTA DI $Q\Delta V$, e L'ENERGIA CHIMICA DELLA BATTERIA DIMINUISCE DI $Q\Delta V$.

MOTO DELLA CARICA $c \to d$ $\Rightarrow$ IL SISTEMA PERDE QUESTA ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DURANTE LE COLLISIONI CON GLI ATOMI DEL RESISTORE

$\to$ L'ENERGIA SI TRASFORMA IN ENERGIA INTERNA CORRISPONDENTE A UN AUMENTO DEL MOTO VIBRAZIONALE DEGLI ATOMI DEL RESISTORE

- TRASCURANDO LA RESISTENZA DEI FILI DI COLLEGAMENTO, NON C'E' INVECE TRASFORMAZIONE DI ENERGIA PER I PERCORSI $b \to c$, $d \to a$

- RITORNO DELLA CARICA IN a: RISULTATO NETTO = UNA PARTE DELL'ENERGIA CHIMICA DELLA BATTERIA E' STATA FORNITA

AL RESISTORE, E SI TROVA LVI COME ENERGIA INTERNA ASSOCIATA CON LA VIBRAZIONE MOLECOLARE.

- RAPIDITA' CON CUI IL SISTEMA PERDE ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA QUANDO LA CARICA Q ATTRAVERSA IL RESISTORE:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\,\Delta V$$

= RAPIDITA' CON LA QUALE IL SISTEMA GUADAGNA ENERGIA INTERNA NEL RESISTORE

$\Rightarrow$ $P$ = POTENZA $= I\Delta V$ MISURATA IN WATT

$$\Delta V = IR \Rightarrow P = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

= PERDITA $I^2R$

---

ESEMPIO: CARATTERISTICHE DI UNA LAMPADINA

LAMPADINA 120V/75W $\Rightarrow$ LA SUA TENSIONE DI FUNZIONAMENTO è 120 V, e LA POTENZA è 75 W

(1) QUAL E' LA CORRENTE NELLA LAMPADINA, E LA SUA RESISTENZA?

$$P = I\Delta V \Rightarrow I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{75}{120}\,A = 0.625 \text{ AMPÈRE}$$

$$\Delta V = I\,R \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{120\,V}{0.625\,A} = 192\,\Omega$$

(B) QUANTO COSTA TENERE ACCESA QUESTA LAMPADINA PER 24h, SE L'ELETTRICITA' COSTA CIRCA $\frac{0.12\,\$}{KWh}$?

$$E = P\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \text{ENERGIA} = 0.075\,kWh \times 24\,h = 1.8\,kWh$$

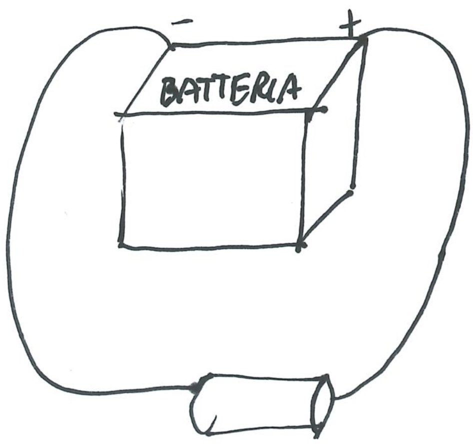
$$\Rightarrow \text{COSTO} = 1.8\,kWh\ \frac{0.12\,\$}{kWh} = 0.22\,\$$$

---

SORGENTI DI FORZA ELETTROMOTRICE

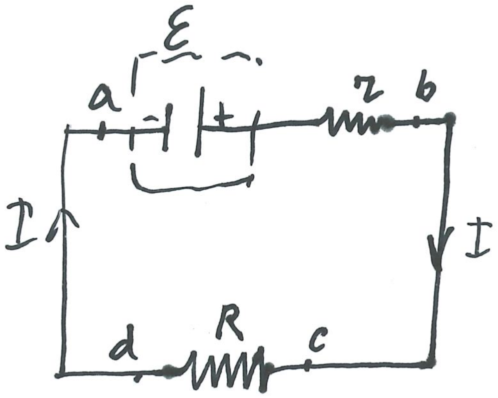
- OLTRE ALLE DIFFERENZE DI POTENZIALE, SI DEFINISCE ANCHE UNA SECONDA GRANDEZZA MISURATA IN VOLTI, OVVERO LA FORZA ELETTROMOTRICE f.e.m.

f.e.m = TENSIONE AI CAPI DI UNA BATTERIA QUANDO LA CORRENTE e' = 0,




]SE 24-3[

IL CIRCUITO CHE DESCRIVE TALE FIGURA E' IL SEGUENTE:




$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = V_b - V_a$

= TENSIONE AI CAPI DELLA BATTERIA

$r$ = RESISTENZA INTERNA

$R$ = RESISTENZA ESTERNA
= RESISTENZA DI CARICO

$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = IR$

$\Rightarrow \mathcal{E} = IR + Ir = I(R+r)$

$\Rightarrow I = \dfrac{\mathcal{E}}{(R+r)}$

IN MOLTI CASI, SI HA $R \gg r$

$I\mathcal{E} = I^2 R + I^2 r$

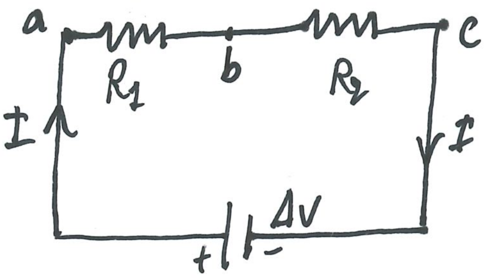
$\Rightarrow$ LA POTENZA TOTALE EROGATA DALLA SORGENTE DI f.e.m.
= POTENZA ($I^2 R$) FORNITA ALLA RESISTENZA DI CARICO
+ POTENZA FORNITA ALLA RESISTENZA INTERNA

- TALVOLTA, PUO' ANCHE AVERSI $r \gg R$. AD ESEMPIO, SE UN FILO ELETTRICO E' DIRETTAMENTE COLLEGATO AI CAPI DI UNA BATTERIA DI UN LAMPEGGIATORE, LA BATTERIA DIVENTA CALDA. SI HA ALLORA IL TRASFERIMENTO DI ENERGIA DALLA SORGENTE DI f.e.m. ALLA RESISTENZA INTERNA, DOVE L'ENERGIA APPARE COME ENERGIA INTERNA ASSOCIATA ALLA TEMPERATURA.

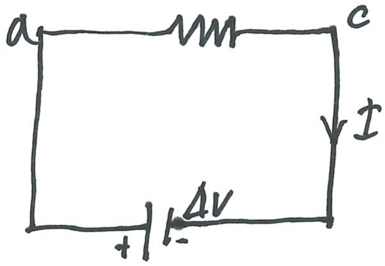
# RESISTORI IN SERIE E IN PARALLELO

SE DUE (o più) RESISTORI SONO COLLEGATI IN MODO CHE ABBIANO UN SOLO ESTREMO IN COMUNE PER OGNI COPPIA, SI DICE CHE SONO COLLEGATI IN SERIE

$I_1 = I_2 = I$




$R_e = R_1 + R_2$




N.B. LA CARICA Q CHE PASSA NEI 2 RESISTORI è LA STESSA PERCHE'

CARICA ATTRAVERSO $R_1$ = CARICA ATTRAVERSO $R_2$

ALTRIMENTI SI AVREBBE UN ACCUMULO DI CARICA NEI FILI CHE COLLEGANO I RESISTORI

$V_b - V_a = I R_1 \quad , \quad V_c - V_b = I R_2$

$$\Rightarrow \Delta V = V_c - V_a = V_b - V_b + V_c - V_a = V_c - V_b + V_b - V_a$$

$$= I R_2 + I R_1 = I(R_1 + R_2) = I R_{eq} = I R_e$$

$$\Rightarrow R_e = R_1 + R_2 = \text{RESISTENZA EQUIVALENTE}$$

N.B. LA RESISTENZA EQUIVALENTE HA LO STESSO EFFETTO SUL CIRCUITO, POICHE' SI HA LA STESSA CORRENTE NELLA BATTERIA DI QUELLA DEL COLLEGAMENTO DEI RESISTORI.

NEL CASO DI PIU' RESISTORI IN SERIE, SI HA

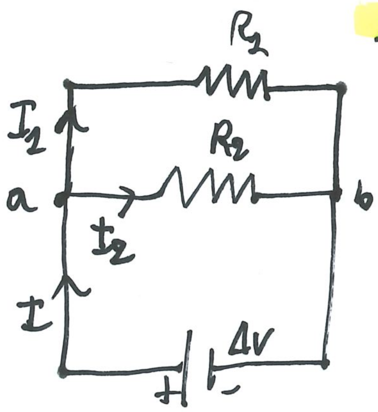
$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad R_e > R_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

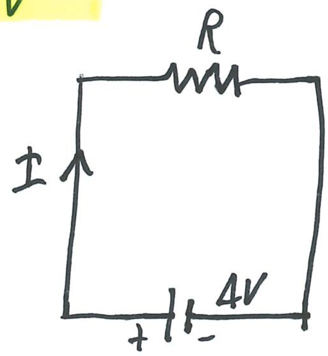
$\Rightarrow$ "LA RESISTENZA EQUIVALENTE DI UN INSIEME DI RESISTORI COLLEGATI IN SERIE E' LA SOMMA ALGEBRICA DELLE SINGOLE RESISTENZE"

---

COLLEGAMENTO IN PARALLELO: IN QUESTO CASO E' LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AI CAPI DEI RESISTORI AD ESSERE LA STESSA, POICHE' CIASCUN RESISTORE E' COLLEGATO DIRETTAMENTE AI CAPI DELLA BATTERIA. LA CORRENTE IN CIASCUN RESISTORE E' INVECE DIVERSA

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$




CONSERVAZIONE DELLA CARICA $\Rightarrow$ CORRENTE $I$ CHE ENTRA IN a = CORRENTE TOTALE CHE ESCE DA a:

$$\Rightarrow \quad I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2}$$

$$= \Delta V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\Delta V}{R_e} \Rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

]SE24-6[

NEL CASO DI PIU' RESISTORI IN PARALLELO, SI HA

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

=> "IL RECIPROCO DELLA RESISTENZA EQUIVALENTE DI DUE O PIU' RESISTORI IN PARALLELO E' LA SOMMA ALGEBRICA DEI RECIPROCI DELLE SINGOLE RESISTENZE

$$R_e < R_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

N.B. LA CORRENTE SEGUE TUTTI I PERCORSI

PERCORSI CON RESISTENZA MINORE => HANNO MAGGIORI CORRENTI,

MA ANCHE I PERCORSI CON RESISTENZA ELEVATA TRASPORTANO UNA CERTA QUANTITA' DI CORRENTE.

- GLI IMPIANTI ELETTRICI NELLE CASE SONO REALIZZATI IN MODO TALE CHE GLI ELETTRODOMESTICI SIANO COLLEGATI IN PARALLELO => OGNI DISPOSITIVO E' INDIPENDENTE DAGLI ALTRI => SE UNO VIENE SPENTO, GLI ALTRI RESTANO IN FUNZIONE.

# LEGGI DI KIRCHOFF

LO STUDIO DI CIRCUITI COMPLESSI E' MOLTO SEMPLIFICATO DA DUE REGOLE, NOTE COME LEGGI DI KIRCHHOFF:

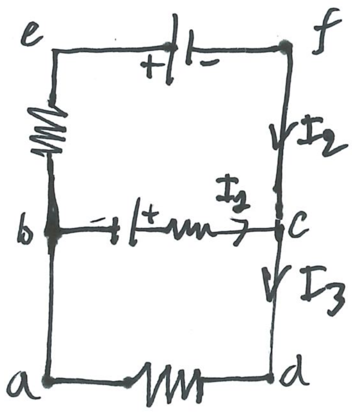
1. LA SOMMA DELLE CORRENTI ENTRANTI IN UN NODO = LA SOMMA DELLE CORRENTI USCENTI DAL NODO:

$$\sum_{nodi} I = 0 \qquad \text{LEGGE DEI NODI}$$

2. LA SOMMA DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE AI CAPI DI OGNI ELEMENTO ALL'INTERNO DI UNA MAGLIA DEVE ANNULLARSI:

$$\sum_{maglie} \Delta V = 0 \qquad \text{LEGGE DELLE MAGLIE}$$

NEL SEGUENTE CIRCUITO:




RICONOSCIAMO TRE MAGLIE:

abcda

aefda

befcb

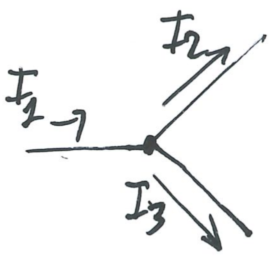
CONSERVAZIONE DELLA CARICA $\Rightarrow$ LEGGE DEI NODI

— QUALSIVOGLIA CORRENTE ENTRI IN UN DATO PUNTO DI UN CIRCUITO DEVE POI LASCIARE QUEL PUNTO, POICHE' LA CARICA NON PUO' NASCERE O SCOMPARIRE IN UN PUNTO.

---

CONVENZIONE: LE CORRENTI ENTRANTI IN UN NODO SONO CONSIDERATE POSITIVE $(+I)$, MENTRE LE CORRENTI USCENTI DAI NODI SONO CONSIDERATE NEGATIVE $(-I)$

PER IL SEGUENTE NODO:




SI HA DUNQUE $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

---

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA $\Rightarrow$ LEGGE DELLE MAGLIE

— SE UNA CARICA PARTE E ARRIVA NELLO STESSO PUNTO IN UN CIRCUITO (CASO IDEALIZZATO), IL CIRCUITO DEVE GUADAGNARE E PERDERE LA STESSA QUANTITA' DI ENERGIA

$\Rightarrow$ MODELLO DI SISTEMA ISOLATO DEL CIRCUITO: NESSUNA ENERGIA VIENE TRASFERITA ALL'ESTERNO DEL SISTEMA.

$\Rightarrow$ LE TRASFORMAZIONI DI ENERGIA AVVENGONO ALL'INTERNO DEL SISTEMA (SI TRASCURA IL TRASFERIMENTO DI ENERGIA ASSOCIATO AGLI ELEMENTI CIRCUITALI CALDI).

ENERGIA ELETTRICA VIENE CONVERTITA IN ENERGIA CHIMICA QUANDO SI CARICA UNA BATTERIA. L'ENERGIA AUMENTA QUANDO UNA CARICA SI MUOVE ATTRAVERSO UNA BATTERIA NELLO STESSO VERSO DELLA f.e.m.

- UN ALTRO MODO DI COMPRENDERE LA LEGGE DELLE MAGLIE È QUELLO CHE FA USO DELLA SEGUENTE PROPRIETÀ CHE ABBIAMO GIÀ STUDIATO:

"IL LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA CONSERVATIVA QUANDO UN ELEMENTO DEL SISTEMA SI MUOVE LUNGO UN PERCORSO CHIUSO È $=0$".

MAGLIA IN UN CIRCUITO = PERCORSO CHIUSO

- SE UNA CARICA PERCORRE UNA MAGLIA, IL LAVORO TOTALE SVOLTO DALLA FORZA ELETTRICA CONSERVATIVA È DUNQUE $=0$.

D'ALTRONDE, LAVORO TOTALE = SOMMA DEI LAVORI POSITIVI E NEGATIVI QUANDO LA CARICA PASSA ATTRAVERSO I VARI ELEMENTI DEL CIRCUITO

LAVORO $\longleftrightarrow$ VARIAZIONI DI ENERGIA POTENZIALE

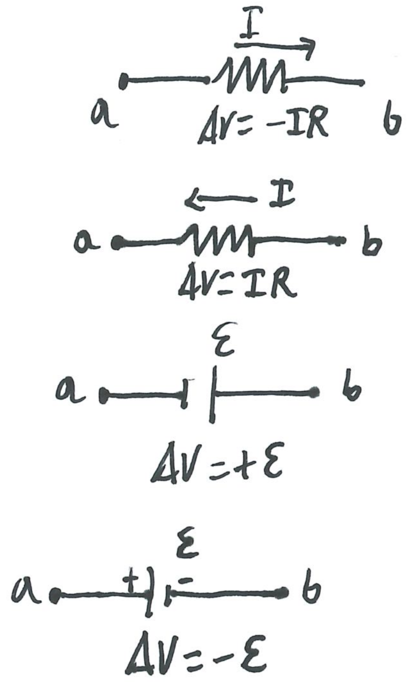
$\longleftrightarrow$ DIFFERENZE DI POTENZIALE

- DUNQUE, L'ANNULLARSI DELLA SOMMA DI TUTTI I LAVORI È EQUIVALENTE ALL'ANNULLARSI DELLA SOMMA DI TUTTE LE DIFFERENZE DI POTENZIALE,

OVVERO LA LEGGE DELLE MAGLIE DI KIRCHHOFF. (q.e.d.)

---

REGOLE PER DETERMINARE LA CADUTA DI POTENZIALE AI CAPI DI UN RESISTORE e DI UNA BATTERIA (SI SUPPONE TRASCURABILE LA RESISTENZA INTERNA DI UNA BATTERIA)




OVVERO:

① RESISTORE PERCORSO NEL VERSO DELLA CORRENTE $\Rightarrow$ $\Delta V$ AI CAPI DEL RESISTORE e' $-IR$

② RESISTORE PERCORSO NEL VERSO OPPOSTO A QUELLO DELLA CORRENTE $\Rightarrow$ $\Delta V = IR$

③ SE UNA SORGENTE DI f.e.m. VIENE ATTRAVERSATA NELLO STESSO VERSO DELLA f.e.m. (OVVERO DAL TERMINALE NEGATIVO A QUELLO POSITIVO), LA $\Delta V$ e' $+\varepsilon$

(4) SE UNA SORGENTE DI f.e.m. e' ATTRAVERSATA IN VERSO OPPOSTO RISPETTO ALLA f.e.m. (OVVERO DAL TERMINALE + A QUELLO −), LA $\Delta V = -\mathcal{E}$.

---

N.B. LA LEGGE DEI NODI SI PUO' USARE QUANTO SI VUOLE "PURCHE' OGNI VOLTA CHE SI SCRIVE UN'EQUAZIONE SI INCLUDA IN ESSA UNA CORRENTE CHE NON e' STATA USATA IN PRECEDENZA IN UN'ALTRA EQUAZIONE CHE RIGUARDA UN NODO.

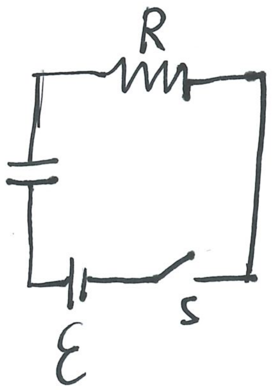
"IL NUMERO DI EQUAZIONI INDIPENDENTI DEVE EGUAGLIARE IL NUMERO DI CORRENTI INCOGNITE

---

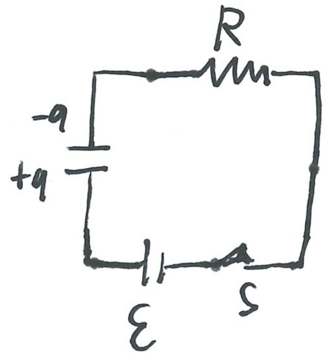
## CIRCUITI RC

CONSIDERIAMO ORA CIRCUITI IN CUI LA CORRENTE PUO' VARIARE NEL TEMPO.

### CARICA DI UN CONDENSATORE




SISTEMA PRIMA DELLA CHIUSURA DELL' INTERRUTTORE S




SISTEMA DOPO LA CHIUSURA DELL'INTERRUTTORE S

]SE24-12[

IL TRASPORTO DI UNA CARICA POSITIVA FRA I CAPI DI UN CONDENSATORE, DAL − AL +, RAPPRESENTA UN AUMENTO DELL'ENERGIA POTENZIALE DEL CIRCUITO

$\Rightarrow$ UNA $\Delta V > 0$

INVECE, L'ATTRAVERSAMENTO DEL CONDENSATORE IN VERSO OPPOSTO $\Rightarrow$ DIMINUZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE

$\Rightarrow$ UNA $\Delta V < 0$

SIA $-\frac{q}{C}$ LA $\Delta V$ AI CAPI DEL CONDENSATORE

$-IR$ LA $\Delta V$ " " RESISTORE

SI HA ALLORA, APPLICANDO LA 2ª LEGGE DI KIRCHHOFF:

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0$$

LE $q$ e $I$ SONO VALORI ISTANTANEI DI CARICA e CORRENTE (RISPETTIVAMENTE) DURANTE IL PROCESSO DI CARICA DEL CONDENSATORE

$t=0 \Rightarrow$ INTERRUTTORE CHIUSO $\Rightarrow$ CARICA NEL CONDENSATORE $= 0$

$$\Rightarrow I = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

A $t=0$ LA $\Delta V$ e' INTERAMENTE AI CAPI DEL RESISTORE

ALLA FINE, CONDENSATORE CARICATO FINO A $q = Q$

e LA CARICA SMETTE DI FLUIRE $\Rightarrow I=0$

$\Rightarrow$ LA $\Delta V$ e' INTERAMENTE AI CAPI DEL CONDENSATORE

$$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-IR=0,\quad I=0,\ \Rightarrow q=Q=C\mathcal{E}$$

= CARICA MASSIMA

IN GENERALE:

$$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-IR=0 \Rightarrow I=\frac{dq}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{q}{RC}=\frac{C\mathcal{E}-q}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{(q-C\mathcal{E})}=-\frac{1}{RC}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dx}{(x-C\mathcal{E})}=-\frac{1}{RC}\int_0^t ds \Rightarrow \log\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)=-\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \exp\log\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)=\left(\frac{q-C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right)=\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$\Rightarrow q-C\mathcal{E}=-C\mathcal{E}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)=-Q\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$\Rightarrow q=C\mathcal{E}-Q\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)=Q\left[1-e^{-t/RC}\right]$$

$$\Rightarrow I(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}=\frac{C\mathcal{E}}{RC}e^{-t/RC}$$

$$=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

] SE 24-14 [

CONDENSATORE TOTALMENTE CARICO

$\Rightarrow$ HA IMMAGAZZINATO L'ENERGIA

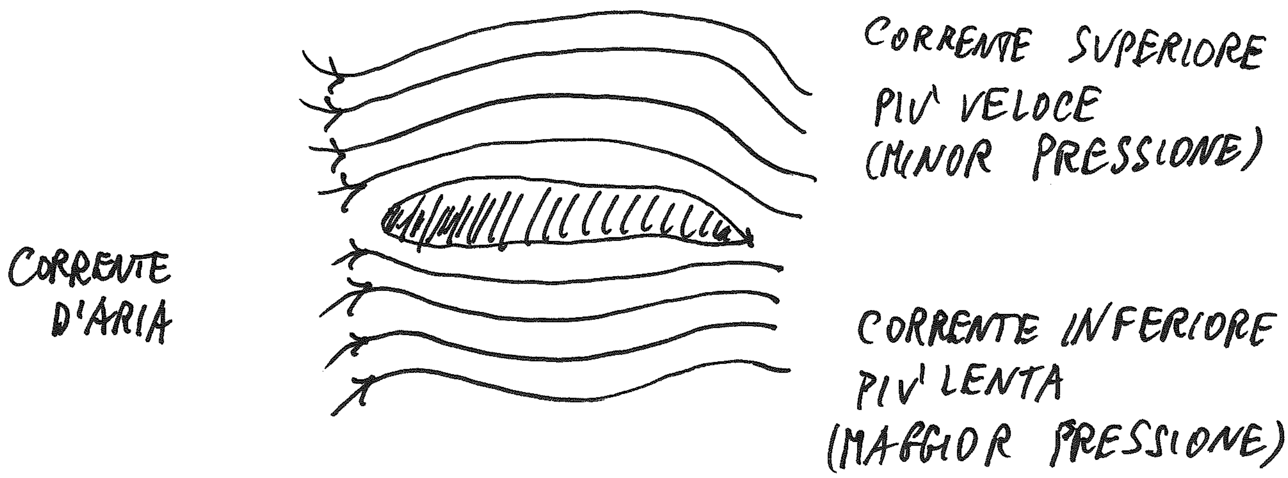
$$\frac{1}{2} Q \mathcal{E} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

PRINCIPI FISICI DEL VOLO DEGLI AEREI:

- PER POTER COMPRENDERE COME L'ARIA POSSA SOSTENERE UN AEROPLANO, RITAGLIAMO UNA STRISCIA DI CARTA LARGA POCO PIU' DI UN CENTIMETRO E LUNGA CIRCA 10 CM. PONIAMO POI UNA ESTREMITA' PRESSO IL MENTO E SOFFIAMO SULLA CARTA.

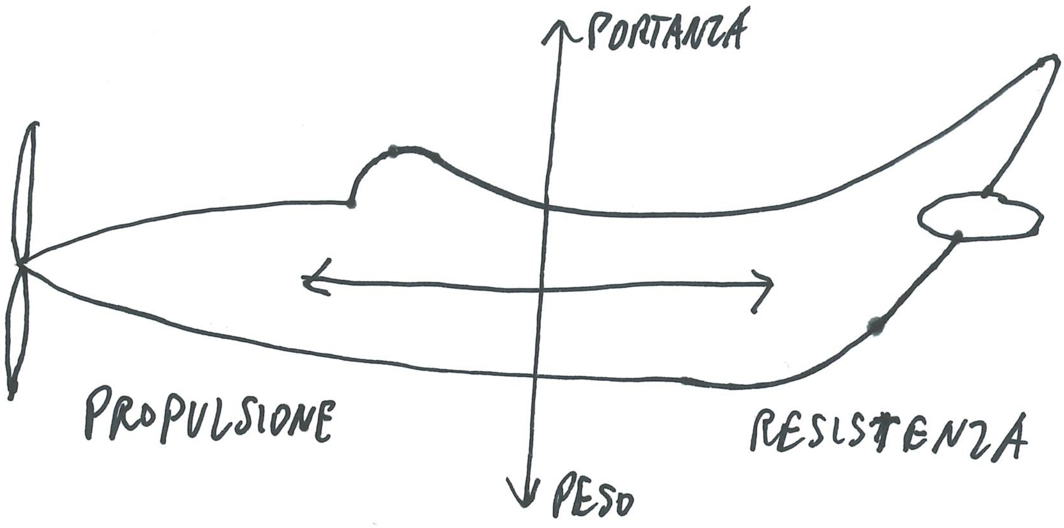
  LA PRESSIONE DELL'ARIA SULLA PARTE SUPERIORE DIMINUISCE ⇒ LA PRESSIONE CHE AGISCE SULLA PARTE INFERIORE DELLA STRISCIA RIESCE A SPINGERE LA STRISCIA VERSO L'ALTO

- SINTESI: LA CORRENTE SUPERIORE, PIU' VELOCE, HA MINOR PRESSIONE, MENTRE LA CORRENTE INFERIORE, PIU' LENTA, HA MAGGIOR PRESSIONE E SOSTIENE LA STRISCIA DI CARTA. (BERNOULLI)




PRESSIONE = FORZA PER UNITA' DI SUPERFICIE $= p = \frac{F}{A}$

]SEFL-1[



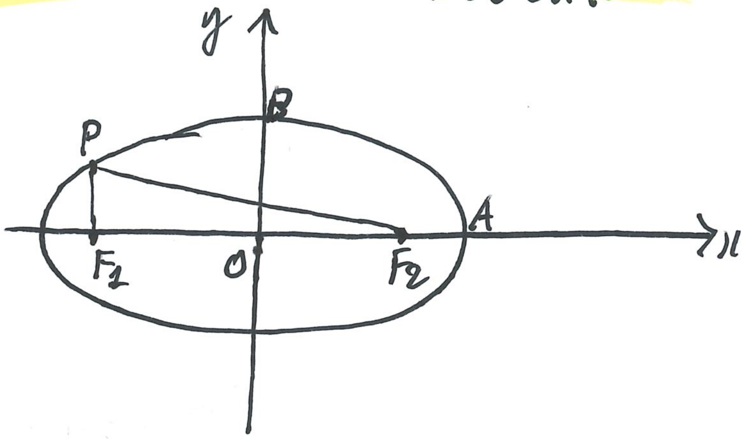

– QUANDO L'AEREO SI MUOVE, IL BORDO ANTERIORE DI CIASCUNA ALA DIVIDE L'ARIA IN DUE CORRENTI: UNA CHE PASSA SOPRA L'ALA, L'ALTRA CHE PASSA SOTTO L'ALA. LE DUE CORRENTI SI INCONTRANO DI NUOVO POSTERIORMENTE. DATA LA FORMA DELL'ALA, CHE E' RICURVA SOPRA E PIATTA SOTTO, LA CORRENTE SUPERIORE E' PIU' VELOCE ED HA QUINDI MINOR PRESSIONE. INVECE LA CORRENTE INFERIORE, DOVENDO PERCORRERE UN TRATTO PIU' BREVE, E' PIU' LENTA ⇒ HA MAGGIOR PRESSIONE E RIESCE A SOSTENERE L'APPARECCHIO

– N.B. NON E' L'ARIA CHE SI MUOVE, MA E' L'ALA CHE AVANZA NELL'ARIA. PERO' TUTTO AVVIENE "COME SE L'ALA FOSSE FERMA", IMMERSA IN UNA CORRENTE D'ARIA.

# FILE SEKL

LO STUDIO DEI MOTI PLANETARI NEL SISTEMA SOLARE FU UNA DELLE GRANDI CONFERME DELLA TEORIA DI NEWTON DELLA GRAVITAZIONE. LE LEGGI DEL MOTO DEI PLANETI FURONO SCOPERTE DA JOHANNES KEPLER (1571-1630), E SONO DETTE "LEGGI DI KEPLERO".

**PRIMA LEGGE DI KEPLERO**: "CIASCUN PIANETA NEL SISTEMA SOLARE SI MUOVE SU UN'ORBITA ELLITTICA, CON IL SOLE IN UNO DEI FUOCHI."




$A\ (a, 0)$

$B\ (0, b)$

$F_1\ (-c, 0)$

$F_2\ (c, 0)$

$r_1 = d(P, F_1)$ $\qquad$ $r_2 = d(P, F_2)$

$c = d(F_1, O) = d(F_2, O)$

ELLISSE $= \{ P(x,y) : d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{COSTANTE} \}$

ELLITTICITA' $= e = \dfrac{c}{a}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a$ = SEMIASSE MAGGIORE

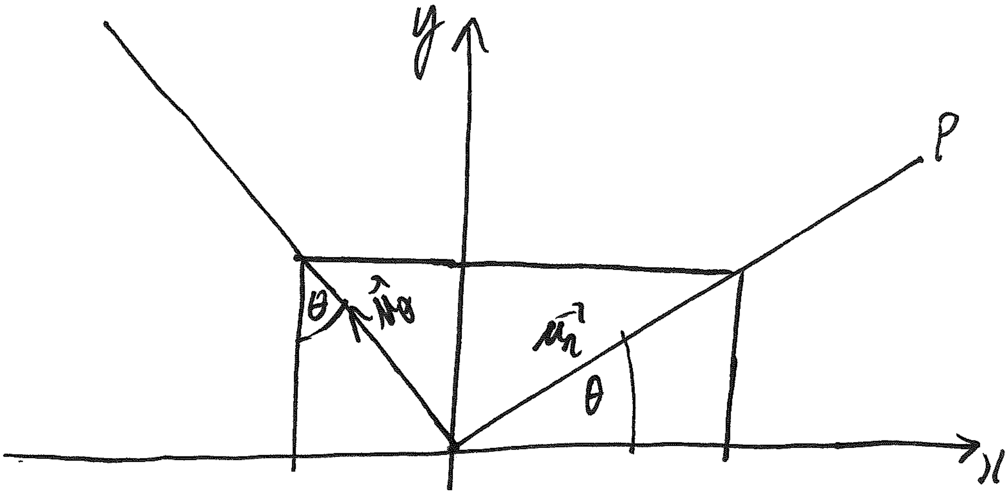
$b$ = SEMIASSE MINORE

CIRCONFERENZA: $a = b \Rightarrow c = 0$

]SEKL-1[

DIMOSTRIAMO ORA LA PRIMA LEGGE DI KEPLERO

A TAL FINE, STUDIAMO LA RELAZIONE TRA I VERSORI $(\vec{i}, \vec{j})$ NEL PIANO $(X, Y)$ e i VERSORI $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, e SFRUTTIAMO LA NATURA VETTORIALE DI VELOCITA' e ACCELERAZIONE, E ALFINE LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE.




$$\vec{R} = R\,\vec{u}_r \qquad (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_r = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta = \vec{u}_r(\theta(t))$$

$$\vec{u}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta = \vec{u}_\theta(\theta(t))$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta & \qquad & \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_r) = R\frac{d}{dt}\vec{u}_r + \frac{dR}{dt}\vec{u}_r$$

$$= R\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dR}{dt}\vec{u}_r = R\vec{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dR}{dt}\vec{u}_r$$

]SEKEZ[

$$\vec{u_r} = (\vec{u_r})_x + (\vec{u_r})_y = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$$

---

$$\vec{u_\theta} = (\vec{u_\theta})_x + (\vec{u_\theta})_y = \vec{i}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) + \vec{j}\cos\theta$$
$$= -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$$

---

$$\vec{u_r}\cdot\vec{u_r} = (\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta)\cdot(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta)$$
$$= \vec{i}\cdot\vec{i}\cos^2\theta + 0 + 0 + \vec{j}\cdot\vec{j}\sin^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

---

$$\vec{u_\theta}\cdot\vec{u_\theta} = (-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)\cdot(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)$$
$$= \vec{i}\cdot\vec{i}\sin^2\theta + 0 + 0 + \vec{j}\cdot\vec{j}\cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

---

$$(\vec{u_r}\cdot\vec{u_\theta}) = (\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta)\cdot(-\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta)$$
$$= -\vec{i}\cdot\vec{i}\cos\theta\sin\theta + 0 + 0 + \vec{j}\cdot\vec{j}\sin\theta\cos\theta$$
$$= -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

---

] SEKL-2 bis [

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left( R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dR}{dt} \vec{u}_r \right)$$

$$= \frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + R\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2R}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dR}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$= \frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + R\frac{d\theta}{dt}(-\vec{u}_r)\frac{d\theta}{dt}$$

$$+ \frac{d^2R}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$= \left(R\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta + \left[\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r = \vec{a}_\theta + \vec{a}_r$$

ESSENDO LA GRAVITAZIONE UNA FORZA CENTRALE, SI HA

$$\vec{a}_\theta = 0 \Rightarrow R\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow R^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2R\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow R^2\frac{d\theta}{dt} = \text{COSTANTE} = K$$

$dA$ = ELEMENTO DI AREA SPAZZATA

$$dA = \frac{1}{2}R^2 d\theta = \frac{1}{2}R^2\frac{d\theta}{dt}dt = \frac{1}{2}K\,dt$$

$$\Rightarrow \int dA = A(t_2) - A(t_1) = \frac{K}{2}(t_2 - t_1).$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0 + m\vec{a_r} = m\left[\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r} = -\frac{GmM}{R^2}\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{R^2} \qquad (*)$$

PONIAMO ORA: $\frac{1}{R} = f(\theta(t)) = Z \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{R^2} = KZ^2$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = KZ^2\frac{d}{d\theta}Z^{-1} = -KZ^2Z^{-2}\frac{dZ}{d\theta} = -K\frac{dZ}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-K\frac{dZ}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = KZ^2(-K)\frac{d^2Z}{d\theta^2} = -K^2Z^2\frac{d^2Z}{d\theta^2}$$

$\Rightarrow$ LA $(*)$ DIVENTA

$$-K^2Z^2\frac{d^2Z}{d\theta^2} - \frac{1}{Z}K^2Z^4 = -GMZ^2$$

$$\Rightarrow K^2\frac{d^2Z}{d\theta^2} + K^2Z = GM \Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right)Z = \frac{GM}{K^2}$$

$\Rightarrow Z =$ INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA + INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQ. COMPLETA

$$= A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{GM}{K^2} = B\cos\theta + \frac{GM}{K^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{Z(\theta)} = \frac{1}{\frac{GM}{K^2} + B\cos\theta} = \frac{K^2/GM}{1 + \frac{K^2}{GM} B\cos\theta} = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \qquad (\diamond)$$

$$P = \frac{K^2}{GM} \quad ; \quad e = \frac{K^2}{GM} B = PB$$

- LA $(\diamond)$ E' PROPRIO L'EQUAZIONE DI UN ELLISSE IN COORDINATE POLARI.

---

SECONDA LEGGE DI KEPLERO: "IL RAGGIO VETTORE TRACCIATO DAL SOLE VERSO UN QUALUNQUE PIANETA SPAZZA AREE UGUALI IN INTERVALLI DI TEMPO UGUALI"

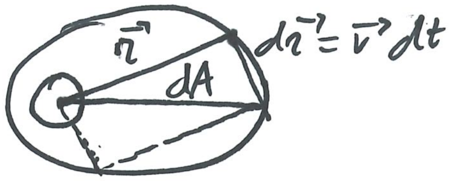
- QUESTA LEGGE DISCENDE UNICAMENTE DALLA NATURA CENTRALE DELLA FORZA GRAVITAZIONALE, E L'ABBIAMO DI FATTO GIA' DIMOSTRATA NELLA SECONDA META' DI PAGINA SEK-3. QUI POSSIAMO UTILMENTE AGGIUNGERE ALTRE CONSIDERAZIONI.

- MOMENTO DELLA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SUL PIANETA:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\,\vec{u}_r = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\Rightarrow$ IL MOMENTO ANGOLARE E' UNA COSTANTE DEL MOTO

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p\, \vec{r} \times \vec{v} = \text{COSTANTE}$$




IN UN INTERVALLO DI TEMPO $dt$, IL RAGGIO VETTORE $\vec{r}$ SPAZZA L'AREA $dA$, CHE E' UGUALE A META' DELL'AREA $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ DEL PARALLELOGRAMMA FORMATO DAI VETTORI $\vec{r}$ e $d\vec{r}$.

D'ALTRONDE, NELL'INTERVALLO $dt$, IL PIANETA SI SPOSTA

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,dt| = \frac{L}{2m_p}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m_p} = \text{COSTANTE} \qquad (q.e.d.)$$

---

TERZA LEGGE DI KEPLERO: "IL QUADRATO DEL PERIODO ORBITALE DI OGNI PIANETA E' PROPORZIONALE AL CUBO DEL SEMIASSE MAGGIORE DELL'ORBITA ELLITTICA"

DIMOSTRAZIONE SEMPLIFICATA: POICHE' LE ECCENTRICITA' SONO PICCOLE, SI CONSIDERANO ORBITE CIRCOLARI

$$\Rightarrow -\frac{GM_s M_p}{r^2} + \frac{M_p v^2}{r} = 0 \Rightarrow \frac{GM_s M_p}{r^2} = M_p \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{GM_s}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}\, r$$

]SEKL-6[

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3 = K_S r^3 \qquad K_S \equiv \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

- NEL CASO DELLE ORBITE ELLITTICHE, SI HA

$r \to a$

$$\Rightarrow T^2 = K_S a^3$$

---

## VELOCITA' DI FUGA:

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 - \frac{G M_T m}{R_T} = 0 - \frac{G M_T m}{r_{max}}$$

POICHE' $V_f = 0$ SE $r = r_{max}$

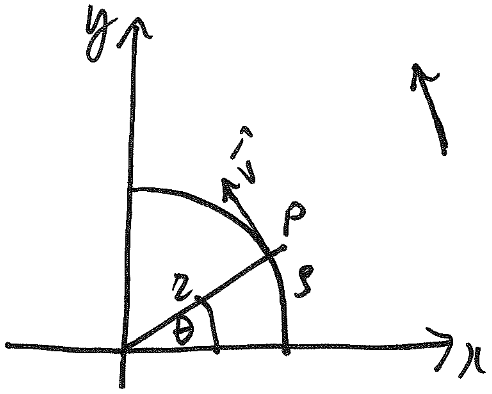
$$\Rightarrow (v_i)^2 = 2GM_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{max}} \right)$$

$h$ = QUOTA MASSIMA $= r_{max} - R_T$

FUGA $\Rightarrow r_{max} \to \infty \Rightarrow v_{FUGA} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

# FILE SEMI

SE UNA PARTICELLA DI UN CORPO RIGIDO RUOTA SUL BORDO DI UN CERCHIO DI RAGGIO $r$ ATTORNO ALL'ASSE $z$:




L'ASSE $z$ NON E' MOSTRATO IN FIGURA

IL VETTORE VELOCITA' TRASLAZIONALE e' SEMPRE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA $\Rightarrow$ LO DIREMO <u>VELOCITA' TANGENZIALE</u>

- IL MODULO DI TALE VELOCITA' e' $v = \frac{ds}{dt}$

$s$ = SPAZIO PERCORSO DALLA PARTICELLA LUNGO LA CIRCONFERENZA $= r\theta$ ($r$ = COSTANTE)

$$\Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

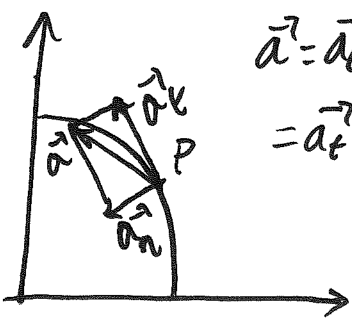
$\alpha$ = ACCELERAZIONE ANGOLARE

- SUPPONIAMO ORA CHE UN CORPO RIGIDO CONSISTA DI UN INSIEME DI PARTICELLE, e CHE ESSO RUOTI ATTORNO AD UN ASSE FISSO $z$ CON VELOCITA' ANGOLARE $\omega$.

- CORPO RIGIDO
$\Rightarrow \theta_i = \theta \ \forall i$
$\omega_i = \omega \ \forall i$
$\alpha_i = \alpha \ \forall i$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_c)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$




$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$
$= \vec{a}_t + \vec{a}_c$

] SEMI - 1 [

DENOTANDO CON $m_i$ LA MASSA INERZIALE DELLA i-ma PARTICELLA, e CON $v_i$ IL MODULO DELLA SUA VELOCITA' TANGENZIALE, LA SUA ENERGIA CINETICA e'

$$(E_K)_i = \frac{1}{2} m_i (v_i)^2$$

L'ENERGIA CINETICA TOTALE $(E_K)_R$ DEL CORPO RIGIDO IN ROTAZIONE VALE ALLORA

$$(E_K)_R = \sum_{i=1}^{n} (E_K)_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2 \right) \omega^2$$

OVE

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i)^2$$ e' IL <u>MOMENTO D'INERZIA</u>

$$\Rightarrow (E_K)_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

INTERPRETAZIONE FISICA: I FORNISCE UNA MISURA DELL'OPPOSIZIONE DEL SISTEMA ALLA VARIAZIONE DELLA SUA VELOCITA' ANGOLARE. ESSO DIPENDE DALLE MASSE E DALLA LORO DISTRIBUZIONE ATTORNO ALL'ASSE DI ROTAZIONE.

]SEMI-2[

SE ABBIAMO A CHE FARE CON UN CORPO ESTESO e CONTINUO, POSSIAMO CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DIVIDENDO L'OGGETTO IN MOLTI PICCOLI ELEMENTI DI MASSA $\Delta m_i$: ALL'INFITTIRSI DELLA SUDDIVISIONE IN ELEMENTI DI MASSA, SI HA DUNQUE

$$I = \int_{CORPO} r^2 \, dm$$

STUDIAMO ORA COME CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA IN DUE CASI DI INTERESSE NELLE APPLICAZIONI.

## MOMENTO D'INERZIA DI UN CILINDRO

CONSIDERIAMO UN CILINDRO DI MASSA M, RAGGIO R, ALTEZZA H, PER CUI $M = \rho V = \rho(\pi R^2)H = \rho \pi R^2 H$

$$\Rightarrow dm = d(\rho \pi r^2 H) = \rho \, \pi(2r \, dr) H = \rho H r \, 2\pi \, dr$$

$$\Rightarrow I_z = \int_0^R \rho r^2 H r \, 2\pi \, dr = 2\pi \rho H \int_0^R r^3 dr$$

$$= 2\pi \rho H \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} \rho H R^4 = \frac{MR^2}{2}$$

# MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA

IL MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA SI OTTIENE SOMMANDO I MOMENTI D'INERZIA DEI DISCHI DI SPESSORE INFINITESIMO $dx$, FISSANDO L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO AL CENTRO DELLA SFERA, ORIENTATO VERSO L'ALTO. IL RAGGIO DI UN SINGOLO DISCO VARIA DA UN MINIMO DI 0, SE $x=R$, A UN MASSIMO DI R.

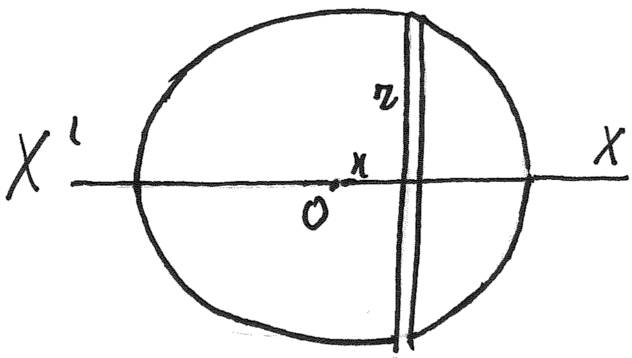
- ELEMENTO DI MASSA INFINITESIMO = $\rho$ X VOLUME DEL CILINDRO DI ALTEZZA $dx$
- INTEGRANDO IL MOMENTO D'INERZIA DEL DISCO DA $-R$ a $+R$, SI TROVA:

$$dI = \frac{r^2}{2} dm \qquad dm = \rho \pi r^2 dx$$

$$r = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

MOMENTO D'INERZIA ATTORNO AD UN DIAMETRO X'OX

- DISCO DI RAGGIO $r$ E SPESSORE $dx$, PERPENDICOLARE AD OX, E DISTANTE $x$ DAL CENTRO
- SFERA DI MASSA M, RAGGIO R.



$$\Rightarrow I = \int_{-R}^{R} \frac{\rho\pi}{2}(R^2-x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\int_{-R}^{R}(R^4+x^4-2R^2x^2)\,dx$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left\{\left[R^4x\right]_{x=-R}^{x=R} - 2R^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-R}^{x=R} + \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-R}^{x=R}\right\}$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\,\frac{\pi}{2}\left[2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5\right]$$

$$= \frac{3M}{8R^3}\left[\frac{30-20+6}{15}\right]R^5 = \frac{3M}{8R^3}\,\frac{16}{15}R^5$$

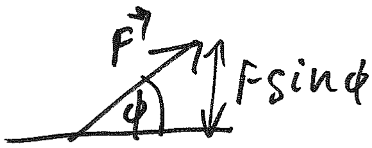
$$= \frac{2}{5}MR^2$$

IL MOMENTO DI UNA FORZA $\vec{F}$ E' IL VETTORE $\vec{\tau}$ DEFINITO DALL'EQUAZIONE

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

OVE

$\vec{r}$ = VETTORE POSIZIONE CHE LOCALIZZA IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA




$$\tau = |\vec{\tau}| = rF\sin\phi$$

$F\sin\phi = d =$ BRACCIO DEL MOMENTO

$=$ BRACCIO DELLA FORZA

– PER OGNI PARTICELLA DI UN CORPO RIGIDO IN ROTAZIONE, SI HA ($i$ ESSENDO L'INDICE CHE ENUMERA LE PARTICELLE)

$$(F_t)_i = m_i (a_t)_i \Rightarrow r_i (F_t)_i = \tau_i = r_i m_i (a_t)_i$$

$$= r_i m_i r_i \alpha_i = m_i (r_i)^2 \alpha_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \tau_i = \sum_i m_i (r_i)^2 \alpha_i$$

CORPO RIGIDO $\Rightarrow \alpha_i = \alpha \quad \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \tau_i = \sum_i m_i (r_i)^2 \alpha = I\alpha$

MOMENTO ANGOLARE ISTANTANEO

$= \vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{p} = m\vec{v} =$ QUANTITA' DI MOTO

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

] SEMI-7 [