Lezione 23

martedì 1 giugno 2021 08:38

(1) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b) \rightsquigarrow (2a+b, 2b)$

$\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$

$\overline{\mathcal{B}} = ((1,1),(-1,1))$

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T) = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$T((1,1)) = (3,2) \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (5/2, -1/2)$

$T((-1,1)) = (-1,2) \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (1/2, 3/2)$

$5/2\,(1,1) - 1/2\,(-1,1) = (3,2)$

$1/2\,(1,1) + 3/2\,(-1,1) = (-1,2)$

$$Q = M_{\overline{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id_{\mathbb{R}^2}) = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1}\overline{A}P$

$\overline{A} = Q^{-1}AQ$

Calcoliamo autovalori e autospazi di T

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I_2| = (2-\lambda)^2$$

$\lambda = 2$ autovalore, $ma(2) = 2$

$1 \le \dim U_2 \le ma(2) = 2$

U_2: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ha rango } 1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \{ y = 0 \qquad S_0 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,0))$

$\Rightarrow \dim U_2 = 2 - 1 = 1 \qquad U_2 = \underset{\substack{\| \\ id_{\mathbb{R}^2}}}{\phi_{\mathcal{B}}^{-1}}(S_0) = \mathcal{L}((1,0))$

perché $\mathcal{B}$ è la base canonica

---

(2) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 2\right] + 1 =$$

$$= (1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2) + 1 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + 1 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1} - \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + \cancel{1} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ opp. } \lambda_{2,3} = \frac{3 \mp \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

Abbiamo 3 autovalori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$U_0 = \mathcal{L}(\overbrace{(1,-1,1)}^{= v_1})$

Abbiamo 3 autovalori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{\dots}{2}$, $\lambda_3 = \frac{\dots}{2}$

$$U_0 = \mathcal{L}(\overbrace{(1,-1,1)}^{=v_1})$$

$$U_{\frac{3-\sqrt5}{2}} = \mathcal{L}(\overbrace{(1, \tfrac12 + \tfrac{\sqrt5}{2}, (\tfrac12 + \tfrac{\sqrt5}{2})^2)}^{=v_2})$$

$$U_{\frac{3+\sqrt5}{2}} = \mathcal{L}(\overbrace{(1, \tfrac12 - \tfrac{\sqrt5}{2}, (\tfrac12 - \tfrac{\sqrt5}{2})^2)}^{=v_3})$$

$\dim U_{\lambda_i} = 1, \quad \forall i = 1,2,3$

$\dim(U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus U_{\lambda_3}) = 3 \implies U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus U_{\lambda_3} = \mathbb{R}^3$

$\overline{\mathcal{B}} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori

Def. $T: V \to V$

Una base di V costituita solo da autovettori di T si dice base spettrale di V relativa a T.

Torniamo all'esempio (2).

$$M_{\overline{\mathcal{B}}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \overline{A}$$

$T(v_1) = 0 \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (\lambda_1, 0, 0)$

$T(v_2) = \lambda_2 v_2 \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (0, \lambda_2, 0)$

$T(v_3) = \lambda_3 v_3 \equiv_{\overline{\mathcal{B}}} (0, 0, \lambda_3)$

è diagonale

$\overline{A} = Q^{-1} A Q$

$$Q = M_{\overline{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac12 + \frac{\sqrt5}{2} & \frac12 - \frac{\sqrt5}{2} \\ 1 & (\frac12 + \frac{\sqrt5}{2})^2 & (\frac12 - \frac{\sqrt5}{2})^2 \end{pmatrix}$$

siccome $\mathcal{B}$ è la base canonica

Si dice che $\underline{Q}$ è la matrice che diagonalizza A

Def. $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\iff \exists\ \overline{\mathcal{B}}$ base di V: $M_{\overline{\mathcal{B}}}(T)$ è diagonale

Def. $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile $\iff$ A è simile a una matrice diagonale

Osservazione:

$T: V \to V$ è diag. $\iff$ T ha una matrice associata diagonale $\iff$ ogni matrice associata a T è diagonalizzabile

Teorema $T: V \to V$ endomorfismo $\dim V = n$ K

$\lambda_1, \dots, \lambda_h$ autovalori di T, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V

$U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_h}$ $A = M_{\mathcal{B}}(T)$

Sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) A è diagonalizzabile

(b) esiste una base spettrale di V rispetto a T

(c) $\sum_{i=1}^{h} \dim U_{\lambda_i} = \dim V = n \quad \left[\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = n\right]$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1} \dim U_{\lambda_i} = \dim V = n \qquad \left[\sum_{i=1} mg(\lambda_i) = n\right]$

$\Downarrow$

(d) $U_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus U_{\lambda_h} = V$

OSSERVAZIONE

Prima di dimostrare questo teorema, osserviamo il seguente fatto:

ricordiamo che: $\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$

Inoltre: $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) \leq$ grado del polinomio caratteristico $= n$

$$\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) \leq n$$

Se $\displaystyle n = \sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) \leq n \implies$

$$\implies \sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) = n \implies mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i), \ \forall i \in \{1, \dots, h\}$$

Quindi, per il Teorema, se A è diagonalizzabile, allora:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} ma(\lambda_i) = n$

(ii) $\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$

Vale anche il viceversa, ossia se valgono (i) e (ii) allora A è diagonalizzabile:

Infatti, $\displaystyle\sum_{i=1}^{h} mg(\lambda_i) \underset{\text{per la (ii)}}{=} \sum ma(\lambda_i) \underset{\text{per la (i)}}{=} n \xRightarrow{\text{teorema (c)}} A$ è diagonalizzabile.

Abbiamo allora anche:

A è diagonalizzabile $\iff$ valgono (i) e (ii)

DIM (vedi sotto)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(T) \qquad T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$\mathcal{B} = (1, 1+x, x+x^2)$$

$$|A - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 2(-1-\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)\underbrace{[1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2]}_{= \lambda^2 - 2\lambda + 3} = 0 \iff$$

$\iff \lambda = -1$ opp. $\lambda = 1 \mp \sqrt{1-3} \in \mathbb{C}$

$\lambda_1 = -1 \qquad ma(-1) = 1 = mg(-1)$, ma $\dim U_{\lambda_1} \neq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$$U_{\lambda_1}: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_0 = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,0))$$

$U_{\lambda_2}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_0 = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0,1,0))$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{(-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U_{\lambda_2} = \mathcal{L}(1+x) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(S_0)$$

A non è diagonalizzabile (NON basta la condizione (ii) dell'osservazione precedente!!!)

DIM Cominciamo a dimostrare che

(a) A diagon. $\Leftrightarrow$ (b) esiste base spettrale di V relativa a T

"$\Rightarrow$" $A = M_{\mathcal{B}}(T)$

Per ipotesi esiste una base $\bar{\mathcal{B}}$ di V tale che $M_{\bar{\mathcal{B}}}(T) = \bar{A}$ è diagonale

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \qquad \bar{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$$

Per def. di matrice associata:

$$\left.\begin{array}{ll} T(\bar{e}_1) = a_1^1 \bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \dots + 0\bar{e}_n = a_1^1 \bar{e}_1 & \Rightarrow \bar{e}_1 \text{ è autovettore di autovalore } a_1^1 \\ T(\bar{e}_2) = 0\cdot\bar{e}_1 + a_2^2 \bar{e}_2 + \dots + 0\bar{e}_n = a_2^2 \bar{e}_2 & \Rightarrow \bar{e}_2 \text{ è autovettore '' '' } a_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ T(\bar{e}_n) = 0\cdot\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \dots + a_n^n \bar{e}_n = a_n^n \bar{e}_n & \Rightarrow \bar{e}_n \text{ è autovettore '' '' } a_n^n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \bar{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ è una base spettrale.

"$\Leftarrow$" Sia $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ una base spettrale di V rispetto a T

Calcoliamo $\bar{A} = M_{\bar{\mathcal{B}}}(T)$:

$T(\bar{e}_1) = \lambda_{i_1} \bar{e}_1$ (perché $\bar{e}_1$ è autovettore) $\qquad T(\bar{e}_1) \equiv_{\bar{\mathcal{B}}} (\lambda_{i_1}, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$T(\bar{e}_n) = \lambda_{i_n} \bar{e}_n$ (perché $\bar{e}_n$ è autovettore) $\qquad T(\bar{e}_n) \equiv_{\mathcal{B}} (0, \dots, 0, \lambda_{i_n})$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

Siccome $A = P^{-1} \bar{A} P$, con $P = M_{\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}}(id_V)$, allora A è diagonalizzabile.

Adesso, dimostriamo: (b) $\Rightarrow$ (c), ossia

(b) esiste base spettrale $\Rightarrow$ (c) $\sum_{i=1}^{h} \dim U_{\lambda_i} = n$

$$\bar{\mathcal{B}} = (\underbrace{\bar{e}_1^1, \dots, \bar{e}_{s_1}^1}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_1}, \underbrace{\bar{e}_1^2, \dots, \bar{e}_{s_2}^2}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_2}, \dots, \underbrace{\bar{e}_1^h, \dots, \bar{e}_{s_h}^h}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_h})$$

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{\bar{e}^1_1, \ldots, \bar{e}^1_{s_1}}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_1}, \underbrace{\bar{e}^2_1, \ldots, \bar{e}^2_{s_2}}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_2}, \ldots, \underbrace{\bar{e}^h_1, \ldots, \bar{e}^h_{s_h}}_{\text{autovettori di autovalore } \lambda_h} \}$$

$\{\bar{e}^1_1, \ldots, \bar{e}^1_{s_1}\}$ lin. indip. $\subseteq U_{\lambda_1} \Rightarrow s_1 \leq \dim U_{\lambda_1}$

$\{\bar{e}^2_1, \ldots, \bar{e}^2_{s_2}\}$ " " $\subseteq U_{\lambda_2} \Rightarrow s_2 \leq \dim U_{\lambda_2}$

$\vdots$

$\{\bar{e}^h_1, \ldots, \bar{e}^h_{s_h}\}$ " " $\subseteq U_{\lambda_h} \Rightarrow s_h \leq \dim U_{\lambda_h}$

$$n = \sum_{i=1}^{h} s_i \leq \sum_{i=1}^{h} \dim U_{\lambda_i} = \dim (U_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h}) \leq n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{h} \dim U_{\lambda_i} = n.$$

Troviamo anche che vale (c) $\Rightarrow$ (d). Infatti:

$$\underset{\substack{\| \\ \dim V}}{n} \overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^{h} \dim U_{\lambda_i} = \dim (U_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h} = V \quad (d)$$

Adesso basta dimostrare: (d) $\Rightarrow$ (b), ossia

(d) $U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h} = V \Rightarrow \exists$ base spettrale (b)

Ricordiamo che se uniamo basi di sottospazi di una somma diretta otteniamo una base della somma diretta:

$\mathcal{B}_1$ base di U_{λ_1}

$\mathcal{B}_2$ base di U_{λ_2} $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$ è base di $U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h}$

$\vdots$

$\mathcal{B}_h$ base di U_{λ_h}

ed è spettrale per costruzione. $\square$

Esercizio:

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$

$(a,b) \rightsquigarrow (a+b, a+b)$

$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ rango$(A) = 1 = \dim \operatorname{Im} T$

$\dim \operatorname{Ker}(T) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow T$ non è iniettiva

$$\left|A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2 - 1 = \cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1} = \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 2$, [$m_a(0) = 1$ $\quad m_a(2) = 1$ e $m_a(0) = m_g(0)$, $m_a(2) = m_g(2)$]

$U_0 = \operatorname{Ker} T$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ $\qquad \{ x_1 + x_2 = 0$ $\qquad S_0 = \{(-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathcal{L}((-1,1)) \underset{id}{=} \phi_{\mathcal{B}}(U_{\lambda_0}) = U_{\lambda_0}$

$U_2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \{ x_1 = x_2 \qquad S_0 = \{ (x_1, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,1)) =$

$\underset{id}{=} \phi_{\mathcal{B}}(U\lambda_2) = U\lambda_2$

$B_0 = \{(-1,1)\}$

$B_2 = \{(1,1)\}$

$\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_2 = (\underset{0}{(-1,1)}, \underset{2}{(1,1)})$ base spettrale

$U_0 \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$

$\overline{A} = M_{\overline{\mathcal{B}}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\overline{A} = Q^{-1} A Q \qquad Q = M_{\overline{\mathcal{B}}\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonalizza A

$T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \qquad \mathcal{B} = (1+x, 1-x, x^2)$

$A = M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Determinare autovalori e autospazi e vedere se T è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva, esibire una matrice che diagonalizza A

$\left| A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad o \quad \lambda_2 = 1$

$ma(0) = 2 \qquad ma(1) = 1$

$U_0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \{ x_2 + x_3 = 0 \qquad S_0 = \{ (x_1, x_2, -x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$

rango 1 $\Rightarrow \dim U_0 = 2$

autospazio di A rispetto a $\lambda_1 = 0$

$= \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,-1)) = \phi_{\mathcal{B}}(U_0)$

$\Rightarrow U_0 = \mathcal{L}(1+x, 1-x-x^2)$ autospazio di T rispetto a $\lambda_1 = 0$

Sappiamo già che T è diagon, perché $\dim U_0 + \dim U_1 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

$U_1: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad S_0 = \{ (x_2, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1,1,0)) =$

ha rango 2

$= \phi_{\mathcal{B}}(U_1) \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}(2)$

$\mathcal{B}_{\lambda_1} = B_0 = \{ 1+x, 1-x-x^2 \}$

$\mathcal{B}_{\lambda_2} = \mathcal{B}_1 = \{ 2 \}$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{B}} = (\underset{0}{1+x}, \underset{0}{1-x-x^2}, \underset{1}{2})$ è base spettrale

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = Q^{-1} A Q$

Se $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = (\underset{0}{1+x}, \underset{1}{2}, \underset{0}{1-x-x^2})$

$\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{Q}}^{-1} A \overline{\overline{Q}}.$

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{Q}}^{-1} A \bar{\bar{Q}}.$$

$$p = ax^2 + \underline{\underline{bxy}} + cy^2 = ax^2 + \tfrac{b}{2}xy + \tfrac{b}{2}yx + cx^2 = 0 \qquad \mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \text{ è simmetrica} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

se A è diagon., allora $\exists$ Q invertibile tale che $Q^{-1}AQ$ è diag. $= \bar{A}$

Q è la matrice di passaggio da una base spettrale $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$

Se considero $\bar{\mathcal{B}}$, le componenti dei vettori che in $\mathcal{B}$ sono soluz. di p si trasformano in componenti in $\bar{\mathcal{B}}$ che sono soluz. di

$$\lambda_1 \underline{x}^2 + \lambda_2 \underline{y}^2 = 0$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (x, y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \left(\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (x,y) \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix} = x\left(ax + \tfrac{b}{2}y\right) + y\left(\tfrac{b}{2}y + cy\right)$$

$$Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t\!\left(Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}\right) A\, Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} =$$

$$= (\bar{x}, \bar{y})\, {}^tQ\, A\, Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

Siccome A è simmetrica, si può trovare una base spettrale ortonormale, per cui Q è ortog. se $\mathcal{B}$ è ortonormale : ${}^tQ = Q^{-1}$

In tal caso $\quad {}^tQ\, A\, Q = Q^{-1} A Q = \bar{A}$.

Le matrici simmetriche sono sempre diagonalizzabili.