ESEMPIO

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 parametro noto,
e $\mu \in \mathbb{R}$.

Risulta:

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x;\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

Considerato

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \quad X_1 \sim X$$
c.c.s.

la funzione di verosimiglianza si scrive

$$\mu \in \mathbb{R},\ \underline{x} \in S_{\underline{X}}, \quad L(\mu;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

dalla quale si ricava

$$\ell(\mu; \underline{x}) = \ln L(\mu; \underline{x}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i - \mu)^2.$$

PUNTI STAZIONARI

$$\ell'(\mu; \underline{x}) = \frac{d\,\ell(\mu; \underline{x})}{d\mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - \mu)(-1)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$\ell'(\mu; \underline{x}) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu$$

$$\iff \hat{\mu} = \bar{x}$$

PUNTI di MASSIMO e MINIMO RELATIVO

$$\ell''(\mu;\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(-1) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ell''(\hat{\mu};\underline{x}) = \ell''(\bar{x};\underline{x}) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 .$$

Quindi $\hat{\mu} = \bar{x}$ è di massimo relativo

<u>COMPORTAMENTO SULLA FRONTIERA</u>

$$\lim_{\mu\to+\infty} \ell(\mu;\underline{x}) = \lim_{\mu\to+\infty}\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$= -\infty ,$$

$$\lim_{\mu\to-\infty} \ell(\mu;\underline{x}) = \lim_{\mu\to-\infty}\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$= -\infty .$$

Di conseguenza

$$\underset{\mu \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmax}} \, L(\mu; \underline{x}) = \bar{x}$$

e

$$\hat{M}_{MV} = \bar{X}, \quad \hat{\mu}_{MV} = \bar{x} .$$

$\square$

ESEMPIO

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ parametro noto,
e $\sigma^2 \in (0, +\infty)$.

Risulta:

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x; \mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} .$$

Consideriamo

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad : \quad X_1 \sim X$$
c.c.s.

la funzione di verosimiglianza, posto $\sigma^2 = \gamma$, si scrive

$\gamma \in (0, +\infty)$, $\underline{x} \in S_{\underline{X}} = \mathbb{R}^n$,

$$L(\gamma; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \gamma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \gamma^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

dalla quale si ricava

$$\ell(\gamma; \underline{x}) = \ln L(\gamma; \underline{x}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \gamma - \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 .$$

PUNTI STAZIONARI

$$\ell'(\gamma;\underline{x}) = \frac{d\,\ell(\gamma;\underline{x})}{d\gamma} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{\gamma^2}$$

$$\ell'(\gamma;\underline{x}) = 0 \iff \frac{n}{2}\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\gamma}$$

$$\iff n = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\iff \hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

PUNTI di MINIMO e MASSIMO RELATIVO

$$\ell''(\gamma;\underline{x}) = \frac{n}{2}\frac{1}{\gamma^2} - 2\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{\gamma^3}$$

$$= \frac{1}{\gamma^2}\left[\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{\gamma}\right]$$

per cui

$$\ell'(\hat{\gamma};\underline{x}) = \frac{1}{\hat{\gamma}^2}\left[\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\frac{1}{\hat{\gamma}}\right]$$

$$n\hat{\gamma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{\hat{\gamma}^2}\left(\frac{n}{2} - n\right) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\hat{\gamma}^2} < 0 .$$

Ne risulta che $\hat{\gamma}$ è un punto di massimo relativo.

COMPORTAMENTO SULLA FRONTIERA

$$\lim_{\gamma\to 0^+}\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\gamma - \frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] = -\infty,$$

$$\infty \quad - \quad \infty$$

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left[-\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \gamma - \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right] = -\infty .$$

$$- \infty \qquad - 0$$

Di conseguenze

$$\underset{\sigma^2 \in (0,+\infty)}{\operatorname{argmax}} \; L(\sigma^2; \underline{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

e

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 ,$$

$\underline{x}$ è la realizzazione di $\underline{X}$

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 .$$

Infine, si osservi che :

$$S^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1} (X_i^2 + \mu^2 - 2\mu X_i)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} + \frac{n\mu^2}{n} - 2\mu \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$= \overline{X}^{(2)} - 2\mu\overline{X} + \mu^2 .$$

$\square$

PROPRIETÀ DEGLI STIMATORI

$$\hat{B}_{MM} = 2\overline{X}$$

$X \sim (0,b)$, quale scegliere?

$$\hat{B}_{MV} = X_{(n)}$$

Per poter dare una risposta a questa domanda bisogna "valutare" i due stimatori sulle base di alcune proprietà che sono state individuate come "desiderabili".

PROPRIETÀ DI CORRETTEZZA

Sia $T = g(\underline{X})$ uno stimatore per una funzione ψ del parametro θ. Si dice che T è corretto per $\psi(\theta)$ se e solo se:

$$\theta \in \Theta, \quad \mathbb{E}(T) = \psi(\theta).$$

$\square$

In altri termini, $g(\underline{X})$ è una v.a. che assume, in generale, un valore diverso da $\psi(\theta)$ ogni qual volta si ottiene una realizzazione $\underline{x}$ del campione $\underline{X}$ ma, comunque, in media coincide con $\psi(\theta)$ per ogni valore di θ nella regione parametrica Θ. Si osservi, inoltre, che ci sono stimatori che godono di questa proprietà solo in una parte propria Θ_1 di Θ: tali stimatori <u>non</u> sono corretti.

DEFINIZIONE

La differenza tra la media di uno stimatore e $\psi(\theta)$ è detta distorsione:

$$\theta \in \Theta, \quad d(\theta) = \mathbb{E}(T) - \psi(\theta).$$

$\square$

OSSERVAZIONE

Ne discende che uno stimatore è corretto se e solo se la distorsione è nulla per ogni $\theta \in \Theta$.

$\square$

Una volta ottenuto uno stimatore, in generale, si può considerare una successione di stimatori. Ad esempio,

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$n = 1 \qquad \bar{X}_1 = X_1$$

$$n = 2 \qquad \bar{X}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$n=3 \qquad \overline{X}_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$

DEFINIZIONE

Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $T_n = g(\underline{X}_n)$ uno stimatore per una funzione ψ del parametro θ. Si dice che $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è "asintoticamente corretto" per $\psi(\theta)$ se e solo se

$$\theta \in \Theta, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) = \psi(\theta).$$

$\square$

In altri termini, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è asintoticamente corretto se la distorsione è una successione infinitesima per ogni θ appartenente a Θ:

approssimazione di θ:

$\theta \in \Theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{E}(T_n) - \psi(\theta) \right] = \lim_{n\to\infty} d_n(\theta) = 0.$$

PROPOSIZIONE

Sia X una genitrice dotata di media finita: $\mathbb{E}(X) = \mu \in \mathbb{R}$. Risulta

$$\mu \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(\overline{X}) = \mu.$$

DIM

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X) = \frac{n\, \mathbb{E}(X)}{n} = \mu = \mathbb{E}(X).$$

$\square$

ESEMPIO

Sia $X \sim U(0,b) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = b/2 \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(\hat{B}_{MM}) = \mathbb{E}(2\bar{X}) = 2\,\mathbb{E}(\bar{X}) = 2\frac{b}{2} = b.$$

Di conseguenza

$$b>0, \quad \mathbb{E}(\hat{B}_{MM}) = b$$

ovvero $\hat{B}_{MM}$ è uno stimatore corretto.

D'altra parte, si dimostra che

$$b>0, \quad \mathbb{E}(\hat{B}_{MV}) = \mathbb{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1} \cdot b$$

e $\hat{B}_{MV}$ è uno stimatore "distorto" per b.

Comunque,

$b>0$, $\quad d(b) = \frac{n}{n+1} b - b = b\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)$

$$= \frac{n-n-1}{n+1} b = -\frac{1}{n+1} \cdot b$$

e

$b>0$, $\quad \lim_{n \to \infty} d_n(b) = 0.$

Quindi, $X_{(n)}$ non è corretto però è asintoticamente corretto. Ma non solo,

$$\mathbb{E}\left(X_{(n)}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot b \Rightarrow$$

$b > 0$, $\quad \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{n} \mathbb{E}\left(X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{n} \frac{n}{n+1} b = b$,

ovvero

$$T = \frac{n+1}{n} \cdot X_{(n)}$$

è uno stimatore corretto per b. $\square$