LEGGI NORMALI (oppure, GAUSSIANE)

DEFINIZIONE

Si dice che una v.a X ha la legge normale di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ se essa è caratterizzata dalla seguente funzione di densità di probabilità (f.d.p.):

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

dove $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$. In simboli, si scrive

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$\square$

OSSERVAZIONE

$$x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy$$

non si può scrivere come composizione di funzioni elementari.

Allora, si pone:

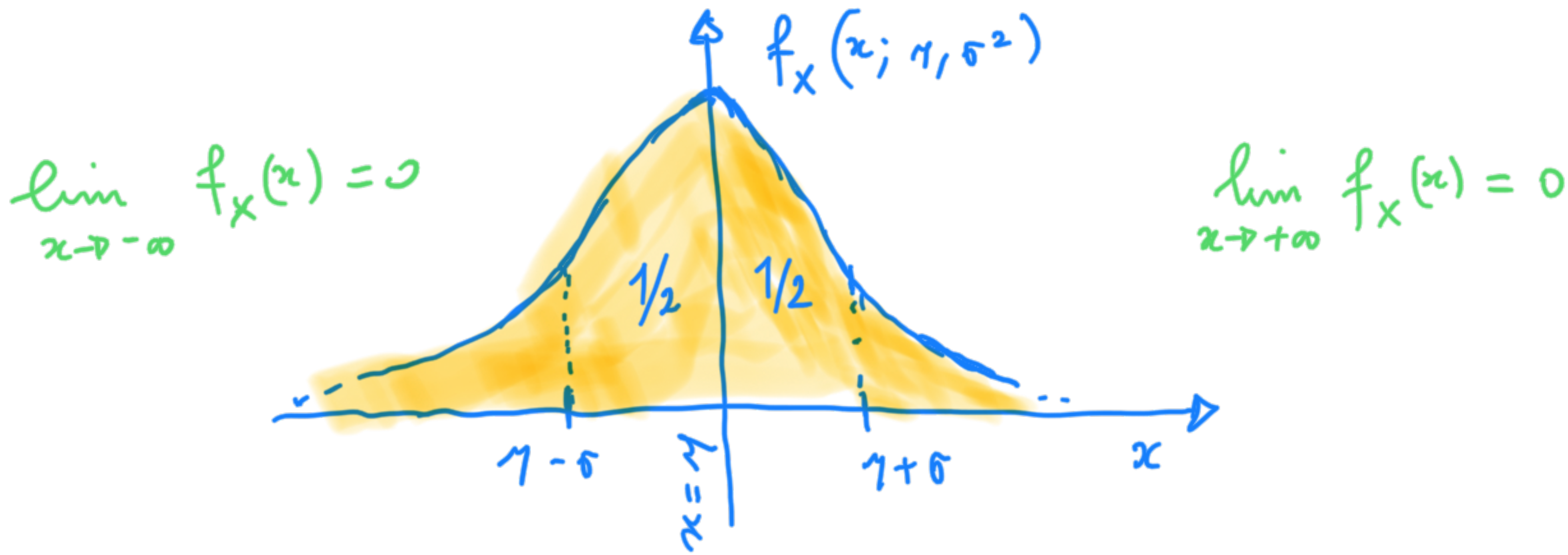
$$z \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}\, dt$$

$$= F_Z(z),$$

e si cercherà di determinare il valore $F_X(x)$ in corrispondenza di un opportuno valore assunto dalla funzione Φ

come valore assunto dalla funzione φ. $\square$

Il grafico della f.d.p. f_X è simmetrico rispetto alla retta verticale $x = \mu$; presenta due punti di flesso che sono $\mu \pm \sigma$; assume il massimo assoluto per $x = \mu$; decresce a 0 nell'intorno di $-\infty$ e nell'intorno di $+\infty$:



PROPOSIZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x;\mu,\sigma^2)\,dx = 1.$$

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{\sigma}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \equiv I > 0.$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \iff x = \mu + \sigma y$$

$$x \to -\infty \implies y \to -\infty$$

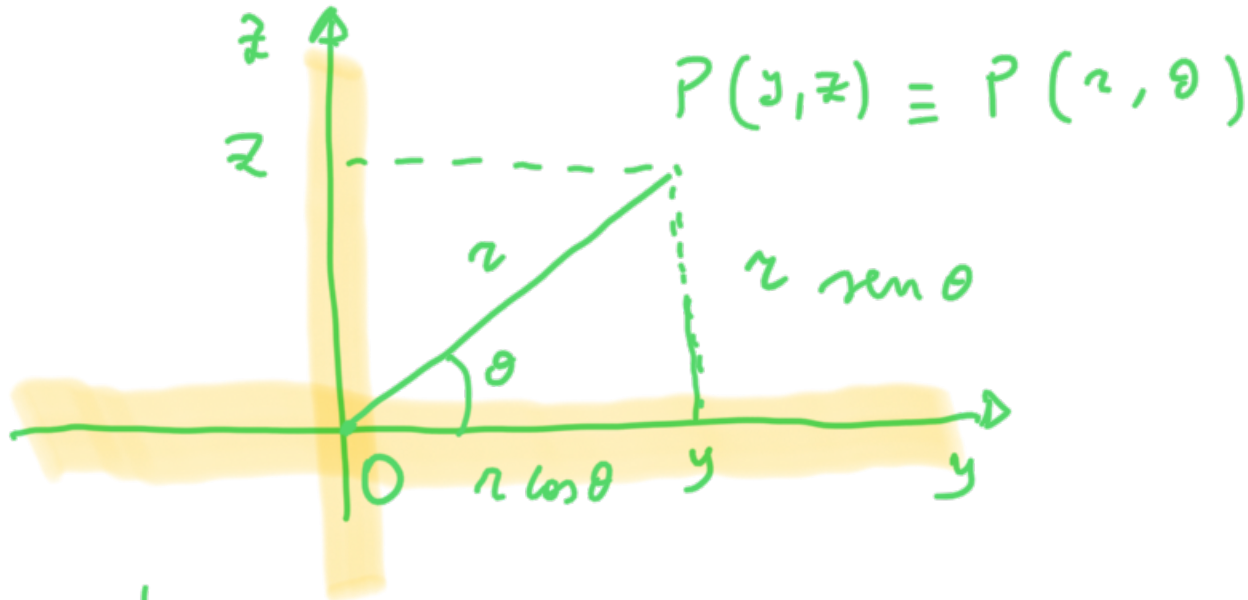
$$x \to +\infty \implies y \to +\infty$$

$$\frac{dx}{dy} = \sigma$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \cdot \int^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(y^2+z^2\right)} \, dy\, dz$$

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - \left(-r\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= r\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= r$$

$$\Rightarrow$$

$$dy\,dz = r\,dr\,dr$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} r^2} \, r \, dr \right] d\theta$$

$$= \int_0^{+\infty} r \, e^{-\frac{1}{2} r^2} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, d\theta \right]}_{=1} dr$$

$$= \int_0^{+\infty} r \, e^{-\frac{1}{2} r^2} \, dr$$

$$= - \int_0^{-\infty} \cancel{r} \, e^{t} \, \frac{dt}{\cancel{r}}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} \, dt = e^{t} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$t = -\frac{1}{2} r^2$$

$$r \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$r \to +\infty \Rightarrow t \to -\infty$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} r$$

$$dt = -r \, dr$$

$$dr = -\frac{dt}{r}$$

$$= 1 - 0 = 1.$$

allora

$$I^2 = 1 \Rightarrow I = \pm 1 \Rightarrow I = 1.$$

Il valore $I = -1$ è da scartare in quanto $I > 0$.

$\square$

PROPOSIZIONE

Per ogni coppia di numeri reali (α, β) tali che $\alpha \neq 0$, si ha:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2 \sigma^2).$$

DIM

Sia $\alpha > 0$.

$$y \in \mathbb{R}, \qquad F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X + \beta \leq y)$$

$$= \mathbb{P}(\alpha X \leq y - \beta)$$

$$= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$= F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right),$$

$$y \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,\alpha} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-\beta-\alpha\mu)^2}{2\alpha^2\sigma^2}},$$

ovvero

$$y \in \mathbb{R} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{} \cdot e^{-\frac{[y-(\beta+\alpha\mu)]^2}{2(\alpha\sigma)^2}}$$

$y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \dfrac{\quad}{\sqrt{2\pi}\cdot\alpha\sigma}$

il che comporta che

$$Y \sim N(\beta + \alpha\mu,\ \alpha\sigma).$$

La dimostrazione per $\alpha < 0$ è analoga e si lascia allo studente.

$\square$

TEOREMA

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \mathbb{E}(X) = \mu \ \text{ e } \ \mathbb{D}^2(X) = \sigma^2.$$

DIM

$Z \sim N(0, 1)$ (Z è la v.a. con legge normale standard) normale standard)

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f_Z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, z\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, d\, z^2/2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, d\, z^2/2$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 .$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{2}{\ } \int^{+\infty} z^2\, e^{-z^2/2}\, dz$$

$$\sqrt{2\pi} \quad \int_0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot \; z e^{-z^2/2} \, dz$$

$\int z e^{-z^2/2} = - e^{-z^2/2} + c$; $D(z) = 1$

e si può applicare la formula di integrazione per parti

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{- z e^{-z^2/2} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-z^2/2} \, dz \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2/2} \, dz = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz}_{1/2}$$

$$= 1 .$$

Quindi

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}^2(Z)$$
$$= 1.$$

A questo punto, si consideri la v.a.

$$Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

da cui si evince che

$$Y \sim X.$$

Allora

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma \cdot \mathbb{E}(Z)$$
$$= \mu.$$

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2(\mu + \sigma Z) = \mathbb{D}^2(\sigma Z)$$

$$= \sigma^2 \, \mathbb{D}^2(Z) = \sigma^2.$$

$\square$

La trasformazione che consente di passare da una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ad una v.a. $Z \sim N(0,1)$ è la seguente:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim Z \sim N(0,1)$$

Essa è nota come la "standardizzazione" di Y.

OSSERVAZIONE

Ora è chiaro come utilizzare la funzione Φ per ottenere i valori assunti dalla funzione di distribuzione F_X nel caso di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x; \mu, \sigma^2) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

In altri termini l'area sotto la f.d.p. di X prima di x è uguale all'area sotto la f.d.p. di Z prima di $\frac{x-\mu}{\sigma}$.

$\square$

OSSERVAZIONE

Sono state redatte varie tabelle dei valori assunti da Φ. Quella più utilizzata la potete trovare nel testo consigliato. Essi riporta i valori di Φ per $x=0$ fino a $x = 3{,}49$ con incremento pari a $\Delta x = 0{,}01$. Ad esempio,

$$\Phi(1{,}65) = 0{,}9505$$

si legge nell'incrocio della riga etichettata da 1,5 e della colonna etichettata da 0,05.

$\square$

DEFINIZIONE

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ il valore $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ si dice "il punto standardizzato del punto x, con $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

ESEMPIO 5.4b

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$.

Bisogna determinare

(a) $\mathbb{P}(2 < X < 5)$; (b) $\mathbb{P}(X > 0)$;

(c) $\mathbb{P}(|X-3| > 6)$.

Svolgimento

(a) $\mathbb{P}(2 < X < 5) = F_X(5) - F_X(2)$

$$= \int_2^5 f_X(x)\,dx = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3}}\,dx$$

Si procede in questo modo

$$\{2 < X < 5\} = \{2-3 < X-3 < 5-3\}$$

$$= \left\{ \frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3} \right\}$$

punto standardizzato di 2

$$= \left\{ -\frac{1}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{2}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ -\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3} \right\}$$

punto standardizzato di 5

Dopo di ciò,

$$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{2}{3}\right) - \phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$\frac{2}{3} = 0,666$ $\qquad \simeq 0,74857$ -

Per completare il calcolo abbiamo bisogno di determinare dalla tabella il valore di ϕ in un argomento negativo che non rientra nei punti standardizzati della tabella.

$\square$