METODO DEI MOMENTI

Sia X una v.a. di cui conosciamo la legge a meno di una parte della sua configurazione parametrica: $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ è incognita.

Esempio

$$X \sim N(0{,}2;\sigma^2),$$

$$\theta_1 = \sigma^2 > 0. \qquad \square$$

Tra i parametri incogniti e i momenti teorici esiste una relazione teorica; si supponga che esistano finiti i primi q di essi con $q \geq r$:

$$\begin{cases} \mu_1' = \mathbb{E}(X) = f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \\ \mu_2' = \mathbb{E}(X^2) = f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \mu_q' = \mathbb{E}(X^q) = f_q(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = g_1(\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_q') \\ \theta_2 = g_2(\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_q') \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \theta_r = g_r(\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_q') \end{cases}$$

Allora il metodo dei momenti richiede la sostituzione dei momenti teorici con quelli campionari:

$$
\begin{cases}
\theta_1 \simeq g_1\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right) \\
\theta_2 \simeq g_2\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\theta_r \simeq g_r\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right)
\end{cases}
$$

Ciò è giustificato dal fatto che

$$
J = (1, 2, \dots, q), \qquad \bar{X}^{(J)} \xrightarrow[n \to \infty]{?} \mu'_J = \mathbb{E}\left(X^J\right)
$$

$\bar{X}^{(J)}$: è una variabile aleatoria

μ'_J: è un numero reale

Dopo di ciò, si pone

$$\hat{\Theta}_{1,MM} := g_1\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right)$$

$$\hat{\Theta}_{2,MM} := g_2\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\hat{\Theta}_{r,MM} := g_r\left(\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)}, \dots, \bar{X}^{(q)}\right)$$

e la r-pla

$$\left(\hat{\Theta}_{1,MM}, \hat{\Theta}_{2,MM}, \dots, \hat{\Theta}_{r,MM}\right)$$

è lo stimatore per la r-pla dei parametri incognite

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r).$$

ESEMPIO

$X \sim U(0, b)$ con $b > 0$ incognito.

Dal momento che $r = 1$ basterà scegliere $q = 1$ in quanto risulta:

$$\mu_1' = \mathbb{E}(X) = \frac{b}{2} = f(b)$$

$$b = 2\mu_1' = g(\mu_1')$$

Dopo di ciò, si può scrivere che

$$b = 2\bar{X}$$

$$\hat{b} \simeq 2\bar{x}$$

e quindi

$$\hat{B}_{MM} := 2\bar{X}.$$

$\square$

<u>ESEMPIO</u>

Sia $X \sim U(-b, b)$ con $b > 0$.

Dal momento che $r = 1$ basterà scegliere $q = 2$ in quanto risulta:

$$\cancel{\mu'_1 = \mathbb{E}(X) = 0}$$

$$\mu'_2 = \mathbb{E}(X^2) = \frac{b^2}{3} = f(b)^{*}$$

$$b^2 = 3\,\mu_2' \iff b = \sqrt{3\,\mu_2'} = g(\mu_2')$$

$$b \approx \sqrt{3\,\overline{X}^{(2)}}$$

$$\hat{B}_{MM} := \sqrt{3\,\overline{X}^{(2)}}.$$

$\square$

*

Calcolo del momento di ordine 2 di $X \sim U(a,b)$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}^2(X) + \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$= \frac{3a^2 + 3b^2 + 6ab + b^2 + a^2 - 2ab}{12}$$

$$12$$

$$= \frac{4a^2+4b^2+4ab}{12} = \frac{a^2+b^2+ab}{3} .$$

Quando $a=-b$ si ottiene

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{b^2+b^2-b^2}{3} = \frac{b^2}{3}$$

$\square$

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

ESEMPIO INTRODUTTIVO

$X \sim B(1,p)$, p è incognito però è noto allo sperimentatore che:

$$p = \left\{ \frac{1}{1000}, \frac{999}{1000} \right\} = \Theta .$$

Inoltre,

$$p = \mathbb{P}(C).$$

Lo sperimentare decide di effettuare 100 lanci ottenenendo 100 C.

Ma

$$\mathbb{P}(X_1 = \overset{x_1}{1}, X_2 = \overset{x_2}{1}, \dots, X_{100} = \overset{x_n}{1} ; p) = \prod_{i=1}^{100} \mathbb{P}(X_i = 1 ; p)$$

$$= \prod_{i=1}^{100} p = p^{100}$$

e quindi

$$- \mathbb{P}\left(\tfrac{1}{1000} ; X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{100} = 1\right) = \left(\frac{1}{1000}\right)^{100} = 10^{-300}.$$

verosimiglianza di $(1, 1, \dots, 1)$ quando $p = 1/1000$

$$-\ \mathbb{P}\left(\frac{999}{1000};\ X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ \dots,\ X_{100} = 1\right) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{100}.$$

verosimiglianza di $(1, 1, \dots, 1)$ quando $p = 999/1000$

L'osservazione che

$$\mathbb{P}\left[\frac{999}{1000};\ (1,1,\dots,1)\right] \gg \mathbb{P}\left[\frac{1}{1000};\ (1,1,\dots,1)\right]$$

induce a ritenere che il valore

$$p = 999/1000$$

rende maggiormente "verosimile" il fatto di avere osservato 100 volte l'uscita della faccia croce, rispetto all'altro elemento della regione parametrica Θ.

$\square$

FORMALIZZIAMO IL TUTTO NEL CASO DI UNA GENITRICE DISCRETA

- X ha legge nota a meno di una parte dei suoi parametri $\underline{\theta}$.

- $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ con $X_1 \sim X$.
c.c.s.

- $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_X^n$.

- $$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n ; \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i ; \underline{\theta})$$

variabile indipendente

$$L(\underline{\theta};\underline{x}) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i; \underline{\theta})$$

$$\underline{\hat{\theta}}_{MV} := \underset{\underline{\theta} \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\underline{\theta};\underline{x})$$

stima di massima verosimiglianza

$$\rightarrow \quad \underset{\sim}{\hat{\Theta}}_{MV} := \underset{\underline{\theta} \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\underline{\theta};\underline{X}) \quad \leftarrow$$

stimatore di massima verosimiglianza

ESEMPIO

$X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0 \Rightarrow \Theta = (0, +\infty)$

incognito

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Determiniamo in primo luogo la funzione di verosimiglianza

$$L(\lambda; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$A = x_1!\, x_2! \cdots x_n!$

$$= \frac{e^{-n\lambda}}{A} \left(\lambda^{x_1} \lambda^{x_2} \cdots \lambda^{x_n} \right)$$

$t = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$= e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{t}}{A}.$$

In definitiva:

$$\lambda > 0, \qquad L(\lambda ; \underline{x}) = \frac{1}{A} \cdot e \cdot \lambda .$$

PUNTI STAZIONARI

$$L'(\lambda ; \underline{x}) = 0 \iff \frac{1}{A} \cdot \left(-n\, e^{-n\lambda} \lambda^{t} + e^{-n\lambda}\, t\, \lambda^{t-1} \right) = 0$$

$$\iff e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{t-1} \cdot \left(-n\lambda + t \right) = 0$$

$$\iff -n\lambda + t = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{t}{n} = \frac{1}{n}\left(x_1 + \dots + x_n \right) = \overline{x} .$$

FRONTIERA

$$\lim_{\lambda \to 0^+} L(\lambda ; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{A}\, e^{-n\lambda}\, \lambda^{t}$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \lim_{\lambda \to 0^+} e^{-n\lambda} \cdot \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^t = 0.$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} L(\lambda ; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{A} e^{-n\lambda} \lambda^t$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-n\lambda} \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^t = 0.$$

PUNTI DI MINIMO E MASSIMO RELATIVO

$$L''(\lambda ; \underline{x}) = D_\lambda \left[\frac{1}{A} \cdot e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{t-1} \cdot (-n\lambda + t) \right]$$

$$= \frac{1}{A} \Big[e^{-n\lambda} (-n) \, \lambda^{t-1} (-n\lambda + t) +$$

$$e^{-n\lambda} (t-1) \, \lambda^{t-2} (-n\lambda + t) +$$

$$e^{-n\lambda}\lambda^{t-1}(-n)\Big] \quad \Rightarrow$$

$$n\bar{x} = n\frac{t}{n} = n \Rightarrow -n\bar{x} + t = 0$$

$$L''(\bar{x}, \underline{x}) = \frac{1}{A}\left[0 + 0 + e^{-t}(\bar{x})^{t-1}(-n)\right]$$

$$= -\frac{n}{A}(\bar{x})^{t-1}e^{-t} < 0 .$$

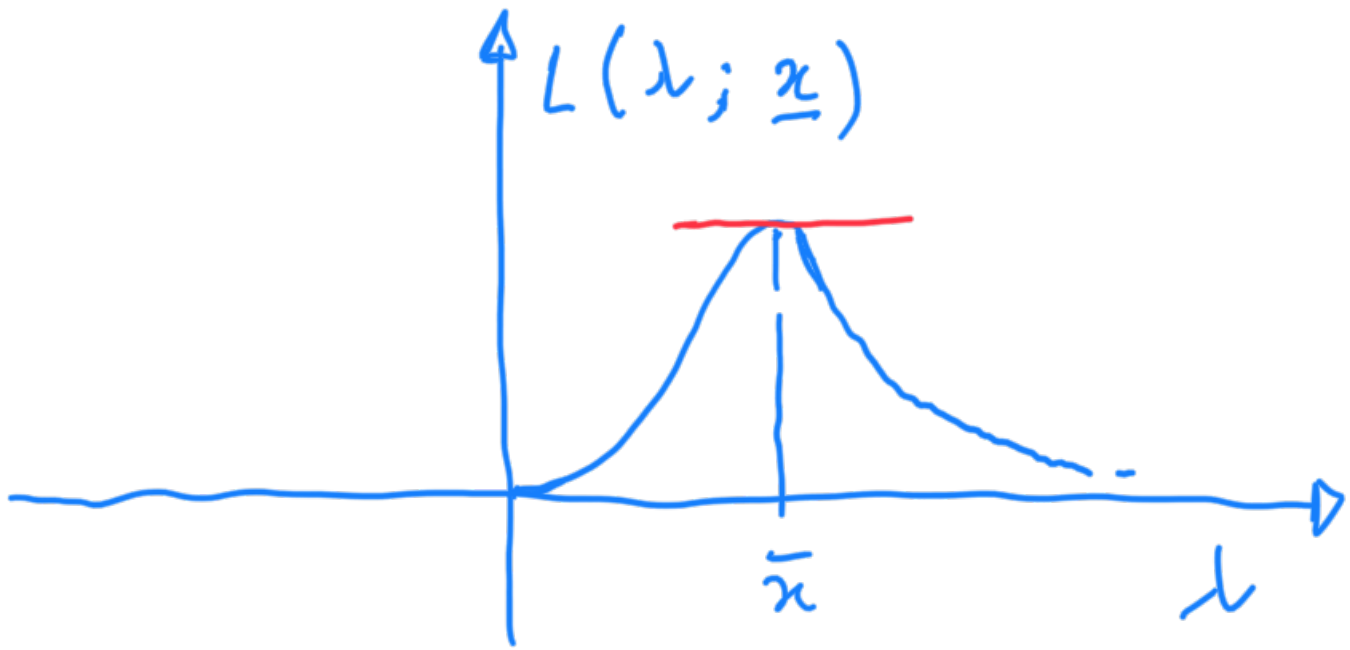
Quindi $\bar{x}$ è un punto di massimo relativo per λ.

<u>Conclusione</u>: la funzione di verosimiglianza è positiva in $\Theta = (0, +\infty)$, si annulla nella frontiera, è dotata di derivata

prima in (+), ha un unico punto di massimo relativo in $\lambda = \bar{x}$ e quindi:

$$\underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}} L(\lambda; \underline{x}) = \bar{x}.$$

GRAFICO QUALITATIVO



Di conseguenza

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{x} \qquad \text{stima}$$

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{X} \quad \text{stimatore}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

$\square$