ESEMPIO 5.4b

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$.

Bisogna determinare

(a) $\mathbb{P}(2 < X < 5)$; (b) $\mathbb{P}(X > 0)$;

(c) $\mathbb{P}(|X-3| > 6)$.

Svolgimento

- in Excel per ottenere $F_X(5)$ basta scrivere in una cella

  =distrib.norm(5;3,√9;vero)

- in Excel per ottenere $f_X(5)$ basta scrivere in una cella

  =distrib.norm(5;3,√9;falso)

$= \text{distrib.norm}(5, 3, \sqrt{9}; \text{falso})$

Quindi "distrib.norm" calcola il valore della funzione di distribuzione normale se il quarto argomento è "vero" oppure calcola il valore della funzione di densità di probabilità normale se il suo quarto argomento è "falso". Inoltre, per entrambi i casi il suo primo argomento è la variabile indipendente, il suo secondo argomento è la media della variabile aleatoria e il suo terzo argomento è la deviazione standard della variabile aleatoria.

(a) $\mathbb{P}(2 < X < 5) = F_X(5) - F_X(2)$

5 $\quad$ 5 $\quad$ $-\frac{(x-3)^2}{\dots}$

$$= \int_2 f_X(x)\,dx = \int_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}\, e \qquad dx \,.$$

Si procede in questo modo

$$\{2 < X < 5\} = \{2-3 < X-3 < 5-3\}$$

$$= \left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right\}$$

punto standardizzato di 2

$$= \left\{-\frac{1}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{2}{3}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\}$$

punto standardizzato di 5

Dopo di ciò,

$$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{2}{3}\right) - \phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$\frac{2}{3} = 0{,}666$ $\qquad \simeq 0{,}74857 - \ldots$

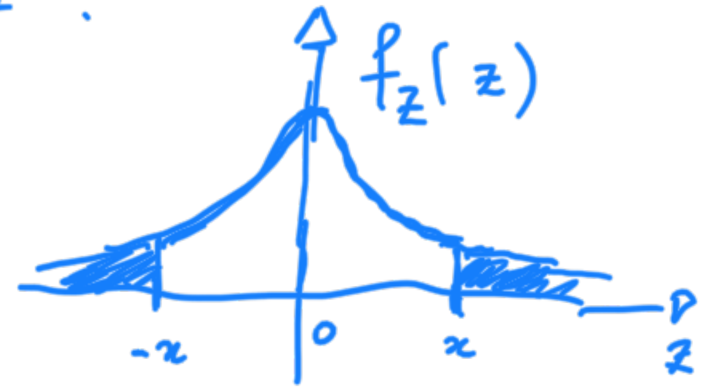
Per completare il calcolo abbiamo bisogno di determinare dalla tabella il valore di ϕ in un argomento negativo che non rientra nei punti standardizzati della tabella.

$\square$

<u>PROPOSIZIONE</u>

$x \in \mathbb{R} \qquad \phi(-x) + \phi(x) = 1$

$x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) + \Phi(x) = 1.$



DIM

Sia $Z \sim N(0,1)$

$$x \geq 0, \qquad \Phi(-x) = \mathbb{P}(Z \leq -x) = \mathbb{P}(Z \geq x)$$

per la simmetria di f_Z

$$= \mathbb{P}(Z > x) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq x) \Rightarrow$$

$$= 1 - \Phi(x)$$

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1. \qquad \square$$

ESEMPIO 5.4b (continuazione)

$$\Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1 - .6293.$$

$$\approx 0,3707$$

$$\mathbb{P}(2 < X < 5) \approx 0{,}74857 - 0{,}3707 \approx 0{,}3779.$$

(b) $$\{X > 0\} = \left\{\frac{X-3}{3} > \frac{-3}{3}\right\} = \left\{\frac{X-3}{3} > -1\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \{Z > -1\}$$ -1 è il punto standardizzato di 0

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(Z > -1) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq -1)$$

$$= 1 - \Phi(-1)$$

$$= 1 - [1 - \Phi(1)]$$

$$= \Phi(1) \approx 0{,}8413.$$

(c) $$\{|X-3| > 6\} = \{X > 9\} \cup \{X < -3\}$$

$$\mathbb{P}(|X-3|>6) = \mathbb{P}(X>9) + \mathbb{P}(X \leq -3)$$

$\frac{9-3}{3} = 2$

2 è il punto standardizzato di 9

$$= \underbrace{\mathbb{P}(Z>2)} + \mathbb{P}(Z<-2)$$

$$= \underbrace{1-\mathbb{P}(Z\leq 2)} + \underbrace{1-\phi(2)}$$

$\frac{-3-3}{3} = -2$

$$= 2 - \phi(2) - \phi(2)$$

$$= 2\left[1-\phi(2)\right]$$

-2 è il punto standardizzato di -3

$$\approx 2\,(1-0{,}9772) \approx 0{,}0456.$$

ESEMPIO 5.4e

X : voto ad una prova scritta

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

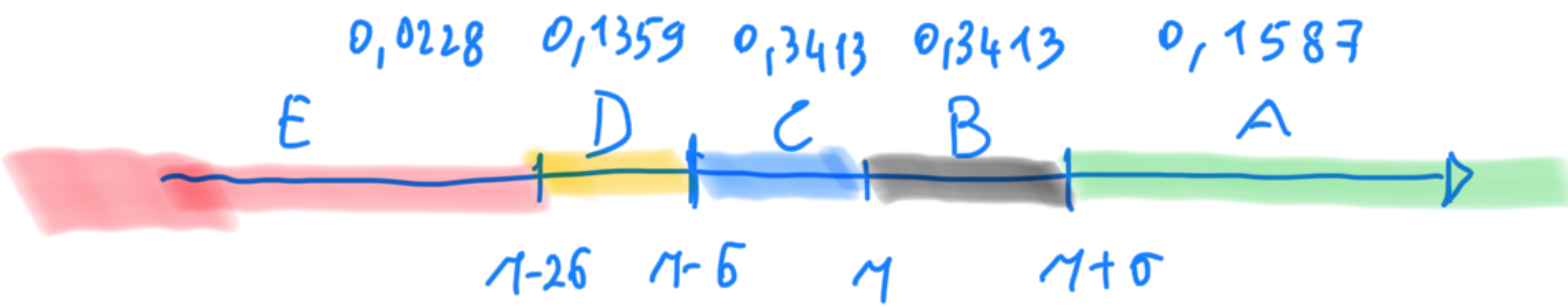
$A : \quad X > \mu + \sigma$

$B : \quad \mu < X < \mu + \sigma$

$C : \quad \mu - \sigma < X < \mu$

$D : \quad \mu - 2\sigma < X < \mu - \sigma$

$E : \quad X < \mu - 2\sigma$



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > \mu + \sigma) = \mathbb{P}(X - \mu > \sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > 1\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1)$$

$$\approx 0{,}1587.$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\mu < X < \mu+\sigma) = \mathbb{P}(0 < X-\mu < \sigma)$$
$$= \mathbb{P}\left(0 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) = \mathbb{P}(0 < Z < 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}8413 - 0{,}5000 = 0{,}3413.$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\mu-\sigma < X < \mu) = \mathbb{P}(\mu < X < \mu+\sigma)$$
$$\approx 0{,}3413$$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\mu-2\sigma < X < \mu-\sigma) = \mathbb{P}(-2\sigma < X-\mu < -\sigma)$$
$$= \mathbb{P}\left(-2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < -1\right) = \mathbb{P}(-2 < Z < -1)$$
$$= \mathbb{P}(1 < Z < 2)$$
$$= \Phi(-1) - \Phi(-2)$$

$$= [1-\phi(1)] - [1-\phi(2)]$$

$$= \phi(2) - \phi(1)$$

$$\approx 0{,}1359.$$

$$\mathbb{P}(E) = 1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)] \approx 0{,}0228.$$

ESEMPIO 5.4d

X : tempo intercorso tra il concepimento di un bambino e la sua nascita

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \mu = 270, \quad \sigma^2 = 100$$

Un partner L della partoriente è stato all'estero in questo periodo

L'evento in questione è

A: "L è il padre del nascituro".

$$A = \{X > 290\} \,\dot{\cup}\, \{X < 240\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{X>290\} \,\dot{\cup}\, \{X<240\}\right)$$

$$= \mathbb{P}(X>290) + \mathbb{P}(X<240)$$

$\frac{290-270}{10} = 2$

$$= \mathbb{P}(Z>2) + \mathbb{P}(Z \leq -3)$$

$\frac{240-270}{}$

$$= 1 - \Phi(2) + \Phi(-3)$$

$$\frac{240-2?0}{10}=-3 \qquad = 1-\phi(2)+\phi(-3)$$

$$= 1-\phi(2)+1-\phi(3)$$

$$= 2-\left[\phi(2)+\phi(3)\right] \approx 0{,}0241. \qquad \square$$

ESEMPIO 5.4e

$$A \rightsquigarrow B$$

0	1
-2	$+2$

$$R = x + Z \quad \text{con } Z \sim N(0,1)$$

Regole per B

se $R \geq 0{,}5$ allora si decodifica 1;

se $R < 0{,}5$ " " " 0.

$$\mathbb{P}(\text{errore} \mid \text{il messaggio } 1) = \mathbb{P}(R < 0{,}5 \mid \text{il messaggio } 1)$$
$$= \mathbb{P}(2 + Z < 0{,}5)$$
$$= \mathbb{P}(Z < -1{,}5)$$
$$= \phi(-1{,}5)$$
$$= 1 - \phi(1{,}5) = 0{,}0688.$$

$$\mathbb{P}(\text{errore} \mid \text{il messaggio } 0) = \mathbb{P}(R \geq 0{,}5 \mid \text{il messaggio } 0)$$
$$= \mathbb{P}(-2 + Z > 0{,}5)$$
$$= \mathbb{P}(Z > 2{,}5)$$
$$= 1 - \phi(2{,}5)$$
$$\simeq 0{,}0062.$$

$\square$

NOTAZIONI PER LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Se $B \in \mathcal{F}$ e $\mathbb{P}(B) > 0$

$$A \in \mathcal{F}, \quad \underbrace{\mathbb{P}_B(A)}_{} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\parallel$$

$$A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

TEOREMA DI DE MOIVRE - LAPLACE

$n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n \sim B(n, p)$; $\quad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$p \in (0,1)$

Risulta:

$$\mathbb{E}(S_n) = np \; ; \quad \mathbb{D}^2(S_n) = np(1-p).$$

Dopo di ciò, si ha

$$a<b, \quad \mathbb{P}\left[a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(b) - \phi(a).$$

$\square$

Il teorema si applica al seguente modo:

1) si calcola

$$\mathbb{P}(a < Z < b) = \phi(b) - \phi(a),$$

2) e poi, se n è "grande", si pone

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right] \simeq \mathbb{P}(a<Z<b).$$

ESEMPIO 5.4g

$$X \sim B\left(40, 1/2\right) \; ; \; S_X = \{0, 1, 2, \ldots, 39, 40\}$$

$$\mathbb{P}(X=20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$= \frac{40!}{20!\,20!}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \simeq 0{,}1254$$

In alternativa, si può applicare il teorema di De Moivre-Laplace:

$$\mathbb{P}(X=20) = \mathbb{P}(19{,}5 < X < 20{,}5)$$ correzione di continuità

$$= \mathbb{P}\left(\frac{19{,}5-20}{\sqrt{10}} < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{20{,}5-20}{\sqrt{10}}\right)$$

dovuta alle radice e al rapporto $\approx \mathbb{P}\left(-0{,}16 < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < 0{,}16\right)$

dovuta al T. De Moivre $\approx \phi(0{,}16) - \phi(-0{,}16)$

$= \phi(0{,}16) - 1 + \phi(0{,}16)$

$= 2 \cdot \phi(0{,}16) - 1 \approx 0{,}1272.$

REGOLA EMPIRICA

L'approssimazione è "accettabile" per

$$n p (1-p) \geq 10.$$

Nell'Esempio 5.4g risulta:

$$n = 40, \ p = \frac{1}{2}, \ 1-p = \frac{1}{2} \implies \frac{40}{2 \cdot 2} = 10.$$

$\square$