S insieme non vuoto

operazione interna su S

$\perp : S \times S \to S$

(gruppi, anelli, campi, ...)

operazione esterna $\bullet$

$S, A \neq \emptyset$

$\perp : S \times A \to S$

operazione esterna a S con dominio di operatori A

Prodotto Cartesiano di due insiemi non vuoti S e T

$S \times T = \{ (s,t) : s \in S \ \ \& \ \ t \in T \}$

$S \times S = \{ (s,s) : s \in S \}$ ✗

$S \times S = \{ (s,s') : s \in S \ \ \& \ \ s' \in S \}$

Coppia ordinata

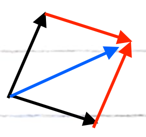
$(x,y) = \{ \{x,y\}, \{y\} \}$

Esempi

1) Tutte le operazioni interne sono anche esterne

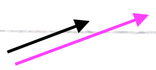
$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, ...

2) $\mathbb{R}^2$ $\quad + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ op. interna



$((a,b),(c,d)) \mapsto (a+c, b+d)$ $=(a,b)+(c,d)$

$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ op. esterna non interna



$((a,b), c) \mapsto (a \cdot c, b \cdot c)$ $=c(a,b)$

3) $\mathbb{R}^n$ (n è intero positivo) $\quad \underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

suoi elementi sono anche detti **vettori numerici di ordine n**

4) Posso sostituire R con un qualsiasi campo

Prodotto scalare standard

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \longmapsto a_1 b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Es.

$n = 2 \qquad (3,4) \bullet (2,6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 6 + 24 = 30$

Proprietà **Forma Bilineare simmetrica definita positiva**

1) (simmetria) $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$

h[(a1,a2) ° (c1,c2)]+k[(b1,b2)°(c1,c2)]=h[a1*c1+a2*c2]+k[b1*c1+b2*c2]

2) $(h \cdot \underline{a} + k \cdot \underline{b}) \bullet \underline{c} = h(\underline{a} \bullet \underline{c}) + k(\underline{b} \bullet \underline{c})$

\# $\big(h(a_1, a_2) + k(b_1, b_2)\big) \bullet (c_1, c_2) = \big[h(a_1, a_2)\big] \bullet (c_1, c_2) + \big[k(b_1, b_2)\big] \bullet (c_1, c_2)$

$\shortparallel$

$\big((ha_1 + kb_1) c_1 + (ha_2 + kb_2) \cdot c_2$

$\underline{a} \bullet (h \cdot \underline{b} + k \underline{c}) = h(\underline{a} \bullet \underline{b}) + k(\underline{a} \bullet \underline{c})$

(bilinearità)

(simmetria $\Rightarrow$ me ne serve una sola)

3) (definito positivo) $\underline{a} \bullet \underline{a} \geq 0$

e $\underline{a} \bullet \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = (0, 0, \dots, 0)$

DIM $\Leftarrow$ OVVIA

$\Rightarrow \underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$

sse = se e solo se
iff = if and only if

$(a_1)^2+...+(a_n)^2=0$ sse $a_1=...=a_n=0$

Dimostrazione

(condizione sufficiente) Ovvia

(condizione necessaria) Per assurdo esista $a_i \neq 0$. Allora $(a_i)^2>0$.
Dunque $(a_1)^2+...+(a_n)^2>0$
Assurdo

■

Matrici (su $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

valori sono numeri reali
n righe
m colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,m}$

$A : \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,m\} \to \mathbb{R}$
(definizione formale)

$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{n1}, \dots a_{nm})$
(def. formale)

$M_{n,m}(\mathbb{B})$ è l'insieme delle matrici su $\mathbb{B}$ con n righe e m colonne

$$\left(M_{n,m} \text{ o } \mathbb{B}_{n,m} \text{ o } \mathbb{B}_n \text{ se } n=m \right)$$

$$+ : \mathbb{B}_{n,m} \times \mathbb{B}_{n,m} \to \mathbb{B}_{n,m} \quad (\text{op. interna})$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\cdot : \mathbb{B}_{n,m} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}_{n,m} \quad (\text{op. esterna})$$

$$((a_{ij}), h) \mapsto (h \cdot a_{ij})$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, 2 \right) \mapsto \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

#) <u>Prodotto righe per colonne</u>

$$\cdot : \mathbb{B}_{n,m} \times \mathbb{B}_{m,k} \to \mathbb{B}_{n,k}$$

$$((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (c_{ij})$$

$c_{is} = ?$ (elemento di posto (i,s))

i-esima riga di $(a_{is}) = A$

$\underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$

s-colonna di $(b_{is}) = B$

$\underline{b}^s = (b_{1s}, b_{2s}, \dots, b_{ms})$

$\Rightarrow \underline{a}_i \bullet \underline{b}^s = c_{is}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad 2 \times 1$

$(1,2,0) \bullet (0,1,2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2$
$= 0 + 2 + 0$
$= 2$

$(3,4,1) \bullet (0,1,2) = 4 + 2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$AB = (\underline{a}_i \circ \underline{b}^s)$

Proprietà

1) $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $\forall B, C \in \mathbb{R}_{n,q}$, $A(B+C) = AB + AC$

DIM $A = (a_{is})$ $B = (b_{kl})$ $C = (c_{op})$

$A(B+C) = (a_{is}) \cdot (\underbrace{b_{kl} + c_{kl}}_{d_{kl}}) = (\underline{a}_i \circ \underline{d}^s) = (\underline{a}_i \circ (\underline{b}^s + \underline{c}^s))$

$= (\underline{a}_i \circ \underline{b}^s) + (\underline{a}_i \circ \underline{c}^s) = AB + AC$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

S matrice scalare di ordine n
AS=SA, qualunque sia la matrice A di ordine n

Matrici scalari (commutano)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Matrici diagonale (non commutano in generale)

4) $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $\forall B \in \mathbb{R}_{n,q}$ e $\forall h \in \mathbb{R}$ **D=BC**

$A(hB) = h(AB) = (hA)B$

$(a_{is})[h \cdot (b_{is})] = (a_{is})(\underbrace{hb_{is}}_{c_{is}}) = (\underline{a}_i \cdot \underline{c}^s)$

$= (\underline{a}_i \cdot h\underline{b}^s)$

$= h(\underline{a}_i \cdot \underline{b}^s)$

5) $A(BC) = (AB)C \quad \forall A \in \mathbb{R}_{m,n} \quad \forall C \in \mathbb{R}_{q,s}$
(associativa) $\quad \forall B \in \mathbb{R}_{n,q}$

D=BC

$$\underline{a}_i \cdot \underline{d}^s = \sum_{k=1,\dots,n} (a_{ik} d_{ks}) = \sum_k \left(a_{ik} \cdot \left(\sum_{l=1,\dots,q} b_{kl} c_{ls} \right) \right) = \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{ls}$$

Matrice trasposta

$t : \mathbb{R}_{n,m} \to \mathbb{R}_{m,n}$ (unario!)

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A^t$$

$\underline{a}_i \longrightarrow (\underline{a}^t)^i$

i-riga $\qquad$ i-colonna

Proprietà

$A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $B \in \mathbb{R}_{n,o}$

1) $(AB)^t = B^t A^t$: DIM $\quad D = (AB)^t$

$E = B^t A^t \qquad A, B \to \underset{C}{AB} \to \underset{C^t = D}{(AB)^t}$

$$d_{ij} = c_{ji} = \underline{a}_j \cdot \underline{b}^i = \sum_l a_{jl} b_{li} = \sum_l a'_{lj} b'_{il} = \sum_l b'_{il} a'_{lj}$$

$A^t =: A'$

$B^t =: B'$

$\sum_l b'_{il} a'_{lj} = \underline{b}'_i \cdot (\underline{a}')^j = e_{ij}$ ∎

2) $B^t A^t \neq A^t B^t$ 2 bis) $(ABC)^t = C^t B^t A^t$

3) $(hA + kB)^t = h(A^t) + k(B^t)$

$$(h_1 A_1 + h_2 A_2 + \dots + h_n A_n)^t = h_1 (A_1^t) + \dots + h_n (A_n^t)$$

4) $(A^t)^t = A$

Matrice a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (1\,0\,0\,0) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivot: 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0\,0\,0\,0)$

Il # degli zeri che precedono il primo elemento diverso da zero in ogni riga aumenta di riga in riga fino ad eventuali righe costituite da soli zeri.

pivot di una riga: primo elemento non nullo che si incontra da sinistra

A prima di righe nulle $\Rightarrow$ # righe $\leq$ # colonne

OPERAZIONI ELEMENTARI DI RIGA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n} \qquad A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix} \qquad A = (\underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^n)$$

i<j $\quad E_1^{ij} : \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$

$$A \longmapsto E_1^{ij}(A) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$$

è la matrice in cui sono scambiate le righe $\underline{a}_i$ e $\underline{a}_j$ di A

$E_2^{h,i} : \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$

$$A \longmapsto E_2^{h,i}(A) = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ h\underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_m \end{pmatrix}$$

$h \in \mathbb{R}$

$\underline{h \neq 0}$!

$\underline{a}_i \longrightarrow h\underline{a}_i$

$E_3^{i,j} : \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$ $\qquad i \neq j$

ad $\underline{a}_j$ sostituisce $\underline{a}_i + \underline{a}_j$

altrimenti troviamo E_2^{2i}

$$E_1^{12}\left[\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&2\\1&0&0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3&4&2\\1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_2^{31}\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3\cdot1&3\cdot2&3\cdot3\\4&5&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&6&9\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$E_3^{12}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\2+1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Combinando E_2 ed E_3 troviamo:

E_4^{his} $\quad \underline{a}_s \longrightarrow h \cdot \underline{a}_i + \underline{a}_s$ $\quad (h+1)a\_j$

$i \neq s$ $\quad E_4 \not\Rightarrow E_2 \;/\; E_4 \Rightarrow E_3$

$i = s$ anche $\quad E_4 \Rightarrow E_2, E_3$

$\Leftarrow$

Se A' è una matrice che si può ottenere da A mediante un numero finito di operazioni elementari allora diciamo che

A e A' sono __equivalenti__

(per righe)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2^{-2,1}} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3^{-1,2}} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2^{-1,1}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Proposizione</u>

Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente

Proposizione

Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente

Dimostrazione

Induzione sul numero di righe

$A \in \mathbb{R}_{n,m}$ $\qquad$ $\underline{n=1}$ $\qquad$ $A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1m})$

È già a gradini!

$\underline{n>1}$ $\qquad$ Se $A = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$ matrice nulla $\quad \underline{\text{ok}}$

$A \neq O$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1s} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2s} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ns} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

prima colonna non nulla

Supponiamo (usando E_1)
$a_{1s} \neq 0$

Ora devo annullare tutti quelli sotto: $a_{2s}, \dots, a_{ns}$

Se $a_{2s} \neq 0$

E_4 : $\underline{a}_2 \longrightarrow k\underline{a}_1 + \underline{a}_2 \qquad (k = -a_{2s} a_{1s}^{-1})$

$$\underline{a}_1 = (0, \dots, 0, \underbrace{a_{1s}}_{\to -a_{2s} a_{1s}^{-1} a_{1s} = -a_{2s}}, a_{1s+1}, \dots, a_{1m})$$

t

$$\begin{pmatrix} \cdots & 0 & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1m} \\ & 0 & 0 & a_{2s+1} & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & a_{ns} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

induzione

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(Forma non unica!)

<u>Esercizi:</u> <u>RIDURRE A GRADINI</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & e & \pi \\ 0 & e & \pi \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

DICIAMO **EQUAZIONE LINEARE SUL CAMPO $\mathbb{R}$** NELLE INCOGNITE $x_1, x_2, \dots, x_n$ UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$$

a_i è l'i-esimo coefficiente dell'incognita x_i

b è il termine noto

Esempio $\quad 2x_1 + 3x_2 = e$

se $b=0$ equazione lineare omogenea

Sistema lineare m equazioni n incognite

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Soluzione del sistema è una $(y_1, \dots, y_n)$ ~~tale~~ tale che ciascuna delle equazioni risulta verificata sostituendo col x_i y_i $\left(\Sigma = \{(y_1, \dots, y_n) \mid \text{soluzioni di } S\}\right)$

sistema si dice compatibile se ammette soluzioni

incompatibile altrimenti

compatibile
- determinato : 1 sola soluzione
- indeterminato : ∞ soluzioni (c'è una via di mezzo?)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ è detta <u>matrice dei coefficienti</u> <u>(incompleta)</u>

$\in$

$\mathbb{R}_{m,n}$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ <u>matrice completa</u>

Se la matrice ha una particolare forma anche il sistema è detto avere quella forma.

<u>Esempi</u>

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2x+3y=0) + (2x-3y=0) = 4x = 0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$\boxed{y=0}$$

$$S \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$ è <u>equivalente</u> a $$S' \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

ammettono le stesse soluzioni $\overline{S} = \overline{S'}$

Proposizione

Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente

Dimostrazione

Induzione sul numero di righe

$A \in \mathbb{R}_{n,m}$ $\qquad$ $\underline{n=1}$ $\qquad$ $A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1m})$

È già a gradini!

$\underline{n>1}$ $\qquad$ Se $A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$ matrice nulla $\underline{\text{ok}}$

$A \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1s} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2s} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ns} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

prima colonna non nulla

Supponiamo (usando E_1)

$a_{1s} \neq 0$

Ora devo annullare tutti quelli sotto: $a_{2s}, \dots, a_{ns}$

Se $a_{2s} \neq 0$

$E_4 : \underline{a}_2 \longrightarrow k\underline{a}_1 + \underline{a}_2 \qquad (k = -a_{2s}a_{1s}^{-1})$

$$\underline{a}_1 = (0, \dots, 0, \underbrace{a_{1s}}_{\hookrightarrow -a_{2s}a_{1s}^{-1}a_{1s} = -a_{2s}}, a_{1s+1}, \dots, a_{1m})$$

$$A \text{ equivalente } A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2s+1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ns+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

induzione

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(Forma non unica!)

Esercizi: RIDURRE A GRADINI

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & e & \pi \\ 0 & e & \pi \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

DICIAMO <u>EQUAZIONE LINEARE SUL CAMPO $\mathbb{R}$</u> NELLE INCOGNITE $x_1, x_2, \dots, x_n$ UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$$

a_i è l'i-esimo <u>coefficiente</u> dell'incognita x_i

b è il <u>termine noto</u>

<u>Esempio</u> $\quad 2x_1 + 3x_2 = e$

se <u>$b = 0$</u> equazione <u>lineare omogenea</u>

<u>Sistema lineare</u> m equazioni n incognite

$$S \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Soluzione</u> del sistema è una $(y_1, \dots, y_n)$ ~~tale~~ tale che ciascuna delle equazioni risulta verificata sostituendo col x_i y_i $(\Sigma = \{(y_1, \dots, y_n) \mid \text{soluzioni di } S\})$

sistema si dice <u>compatibile</u> se ammette soluzioni <u>incompatibile</u> altrimenti

<u>compatibile</u> –
- <u>determinato</u> : 1 sola soluzione
- <u>indeterminato</u> : ∞ soluzioni (c'è una via di mezzo?)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ è detta <u>matrice dei coefficienti</u> (<u>incompleta</u>)

$\in$

$\mathbb{R}_{m,n}$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ <u>matrice completa</u>

Se la matrice ha una particolare forma anche il sistema è detto avere quella forma.

<u>Esempi</u>

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$(2x+3y=0) + (2x-3y=0) = 4x = 0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$\boxed{y=0}$$

$S \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ è <u>equivalente</u> a $S' \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x=0 \end{cases}$

ammettono le stesse soluzioni $\overline{S} = \overline{S'}$

$$\begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}$$ incompatibile

$$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ 8x+6y=0 \end{cases} \iff 4x+3y=0$$

x=-3/4y

infinite soluzioni

indeterminato

Prop

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=2 \\ z=3 \\ 0=0 \end{cases}$$ sistema a gradini

Proposizione

Ogni sistema di equazioni lineari è equivalente col un sistema a gradini

Dimostrazione

E_1, E_2, E_3 (o E_4) non influiscono nell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

E_1 ovvio! $\boxed{E_2}$ $\underline{a}_i \to h\underline{a}_i$ $h \neq 0$

$\underline{y}=(y_1,\dots,y_n) \in \overline{S}$ $y_1 a_{i1} + y_2 a_{i2} + \dots + y_n a_{in} = b_i$

$\Downarrow$

$y_1(ha_{i1}) + \dots + y_n(ha_{in}) = \boxed{h(y_1 a_{i1} + \dots + y_n a_{in}) = hb_i}$

Ssegnato è contenuto in S'segnato S->S' usando E_2^{h,i}

S'->S usando E_2^{h^-1,i} S'segnato è contenuto in Ssegnato

$\underline{E_3}$ $\quad \underline{a}_i \longrightarrow \underline{a}_i + \underline{a}_s \quad i \neq s$

$$S \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i)$$

$$+$$

$$(a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s)$$

$$\shortparallel$$

$$\overbrace{(a_{i1}+a_{s1})}^{a'_{s1}}x_1 + \overbrace{(a_{i2}+a_{s2})}^{a'_{s2}}x_2 + \dots + \overbrace{(a_{in}+a_{sn})}^{a'_{sn}}x_n = \overbrace{b_i + b_s}^{b'_s}$$

Nuova riga s-esima!

$$S': \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a'_{s1}x_1 + a'_{s2}x_2 + \dots + a'_{sn}x_n = b'_s \\ \dots \end{array} \right.$$

$$S' \xrightarrow{E_2^{-1,i}} S'' \xrightarrow{E_3^{i,s}} S''' \xrightarrow{E_2^{-1,i}} S^{IV} = S$$

$$\bar{S} \subseteq \bar{S'}$$

$$\bar{S'} = \bar{S''} \subseteq \bar{S'''} = \bar{S}$$

$$S: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

è equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 = 0 \\ \cancel{2x_1 + 2x_2 = 2} \end{cases} \iff \{ x_1 + x_2 = 1$$

Soluzioni sistema lineare

$m = \#$ eq. $\quad n = \#$ incognite

$\underline{m = 1}$ $\quad \underline{n = 1}$: $a_{11}x_1 = b_1$

- $a_{11} = b_1 = 0$: $0 = 0$ eq. identica
- $a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = a_{11}^{-1} b_1$
- $a_{11} = 0$ e $b_1 \neq 0$ $\nexists$ sol

$\underline{n > 1}$ $\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

Un esemplare adulto di ornitorinco mentre nuota

Il veleno dell'ornitorinco

Il maschio dell'ornitorinco sulle zampe posteriori ha un sperone cavo direttamente collegato ad una **ghiandola velenifera**. Questa caratteristica particolarissima dell'ornitorinco può considerarsi quasi unica poiché l'unico altro animale conosciuto che presenta la stessa particolarità è soltanto il **toporagno**.
Questo sperone viene usato per difesa, per iniettare il veleno in eventuali predatori (volpi, cani, serpenti, grosse anguille, uccelli rapaci, gatti selvatici).
Il veleno viene prodotto dalla **ghiandola crurale o femorale** che produce una secrezione che contiene almeno 19 peptidi con diversi effetti: riduzione della pressione sanguigna , un aumento dell'afflusso di sangue nella zona della ferita, dolore.
Nell'uomo gli effetti del veleno **non sono mortali**, l'effetto più significativo è un dolore intenso ed immediato, dopo la puntura si sviluppa un edema attorno alla ferita che si sviluppa : il dolore può durare giorni o anche mesi e ad oggi non esiste l'antidoto.
Per quanto riguarda gli animali, il veleno ha un effetto paralizzante e può essere letale per gli animali più piccoli.

Se $\underline{a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = b_1 = 0}$ eq. identica

Se $\underline{a_{11} = \dots = a_{1n} = 0}$ e $\underline{b_1 \neq 0}$ incompatibile

$\underline{\exists\, a_{1i} \neq 0}$ (supponiamo a_{11})

$$a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + \dots - a_{1n}x_n$$

Per ogni scelta di valori $y_2, y_3, \dots, y_n$ per $x_2, x_3, \dots, x_n$

$\exists!\, y_1 : (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sia soluzione

$\exists$ infinite sol.

$\underline{m \geq 2}$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{Equivalente}} S' \text{ a gradini,}$$

Elimino da S' le $\underline{\text{eq. identiche}}$ $0 = 0$

p eq. non identiche (p è il # pivot della matrice completa di S')

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a & & & & & & \\ 0 & 0 & b & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & c & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \text{pivot non definito!}$$

Otteniamo S'' (che pensiamo ancora avere m eq. e n incognite

Se S'' contiene eq. del tipo $0 = b_i \; (\neq 0) \Rightarrow$ <u>S'' è incompatibile</u>
(Matrice incompleta ha l'ultima riga tutta nulla)

$$\# \text{pivot di } A' = \# \text{pivot di } A + 1$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ 0 & 0 & & 0 \; b_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots \dots & 0 \; b_m \end{pmatrix}$$ non può essere perché il sistema è a gradini!

Supponiamo che la matrice incompleta non abbia righe nulle

$\Rightarrow$ ($\underbrace{\# \text{pivot di } A}_{= \# \text{righe}} = \# \text{equazioni}$) $\leq \#$ incognite ($= \#$ colonne)

$(m \leq n)$

$\underline{m = n}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,n}$$

$x_n = b_n / a_{nn} = b_n \cdot a_{nn}^{-1}$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + \underbrace{a_{n-1,n}x_n}_{} = b_{n-1}$$

e dividiamo!

S è determinato! ($\exists !$ soluzione)

$S = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_n = b_n a_{nn}^{-1}, \dots, \}$

$m < n$

$$\begin{cases} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{a_{11}}x_1 + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{a_{12}}x_2 \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \dots \end{cases}$$

Primo $\neq 0$ posizione i

Prendo per ogni riga il primo (da sinistra) coefficiente diverso da 0 e prendo il suo indice di colonna ($\# = p$)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 4 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad\quad x_4$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 = b_1$

$x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_4 = b_1 - 3x_3$

Per tutte le equazioni

Ovviamente posso ~~rino~~ rinominare le incognite (e i coefficienti)

$x_1\ x_2\ x_4 \quad = x_3 \quad \longrightarrow \quad x_1\ x_2\ x_3 \quad\quad x_4$

$x_3\ x_5 \quad\quad\quad\quad x_4\ x_5$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_p - a_{1p+1}x_{p+1} + \dots - a_{1n}x_n \\ \quad\quad + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} + \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ \quad\quad\quad\quad a_{pp}x_p = \underbrace{b_p - a_{pp+1}x_{p+1} + \dots - a_{pn}x_n} \end{cases}$$

Per ogni scelta di $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ ho una sola soluzione

$\bar{S}''' = \{ (\quad , x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n) \mid x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}$

funzioni delle altre

es. $x_1 = f_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$

[**Nota** in questo caso per ottenere $\bar{S}$ bisogna riordinare!]

Sistema indeterminato!

Esempio

$$S \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determinato!

$$S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

incompatibile

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = \overbrace{1 + x_2}^{c_1} \\ x_3 + x_4 = 1 \} c_2 \\ x_4 = 3 \} c_3 \end{cases}$$

$x_4 = c_3 \qquad x_3 = c_2 - x_4 = c_2 - c_3$

$$x_1 = \frac{c_1 - x_3 + x_4}{2} = \frac{c_1 - (c_2 - c_3) + c_3}{2} = \frac{c_1 - c_2 + 2c_3}{2}$$

$x_4 = 3 \qquad x_3 = -2$

$\underline{x_2 = h}$

$$x_1 = \frac{\cancel{1} + x_2 - \cancel{1} + 2 \cdot 3}{2} = \frac{x_2 + 6}{2} = \frac{x_2}{2} + 3 = \frac{h}{2} + 3$$

$$\bar{S} = \left\{ \left(\frac{h}{2} + 3, h, -2, 3 \right) / h \in \mathbb{R} \right\}$$

\# incognite che portiamo a destra $= i$ $\qquad \infty^i$ soluzioni

$$S: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 - x_2 + x_4 \\ -x_3 = -3 - x_4 - x_5 \end{cases} \qquad x_4 = h \quad x_2 = i \quad x_5 = k$$

$$x_3 = 3 + h + k$$

$$x_1 = 2 - i + h - x_3 = 2 - i + \cancel{h} - 3 - \cancel{h} - k = -1 - i - k$$

$$\bar{S} = \{ (-1-i-k,\ i,\ 3+h+k,\ h,\ k) \ / \ (i,h,k) \in \mathbb{R}^3 \}$$

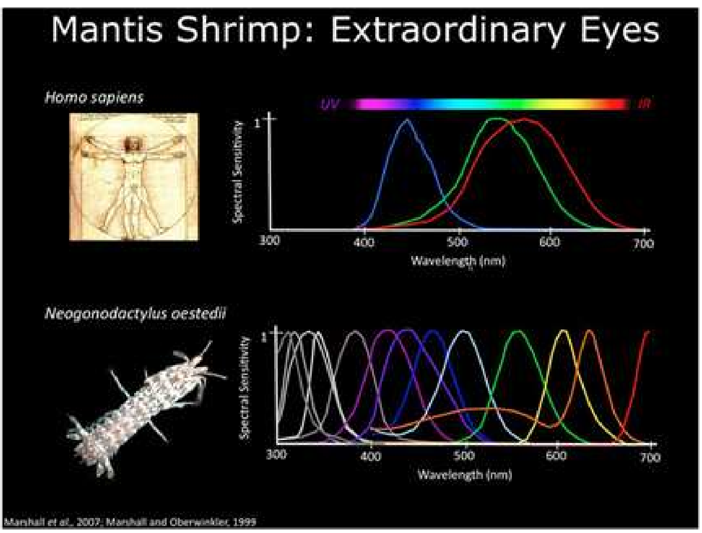
∞^3 soluzioni!

Gambero Matide

Cacciatore attivo, preferisce gasteropodi, crostacei e bivalvi, che uccide dopo averne ripetutamente colpito la corazza ad avere ottenuto l'accesso alle loro parti molli. Si ritiene che i colpi inferti dalla canocchia pavone vadano oltre gli **80 km/h**, il che fa di lei l'animale dal colpo più veloce del mondo. *L'accelerazione è simile a quella di un'arma da fuoco.*

Alcuni esemplari particolarmente grandi arrivano addirittura a rompere il vetro dell'acquario colpendolo con le loro resistentissime e velocissime appendici e possono anche danneggiare la roccia viva.

Oltre ai due occhi peduncolati di una complessita' tanto inspiegata quanto impressionante c'e' un terzo occhio. Due peni, polmoni tra i piedi, un cuore che percorre tutta la lunghezza del corpo dell'animale.



Sistema ~~gogo~~ omogeneo : $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

è sempre compatibile

$(0, 0, \ldots, 0)$

soluzione banale

$\exists !$ sol. = banale o ∞

Notazione per i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= X} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad AX = B$$

Y soluzione $\qquad \underline{AY = B}$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

<u>Sistema omogeneo se $B = 0$</u>

Spazi vettoriali

DEFINIZIONE

V insieme non vuoto, $+$ operazione interna

$\cdot$ operazione esterna

$+ : V \times V \to V$ (+ e · sono solo convenzioni!)

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(V, +, \cdot)$ è detto spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

se 1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano

(associativa, elemento neutro, opposto abelianità)

2) $\forall h, k \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$ risulta:

$$(hk) \cdot \underline{v} = h \cdot (k \underline{v})$$

3) $\forall \underline{v} \in V$ risulta $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

4) Distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$ in $\mathbb{R}$

$\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$ risulta

$(h+k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$

5) Distributività di $\cdot$ rispetto a $+$ in V

$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ risulta

$h \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = h \cdot \underline{v} + h \cdot \underline{w}$

- Gli elementi di V si dicono vettori
- Gli elementi di $\mathbb{R}$ si dicono scalari
- $+$ è detta addizione tra vettori
- $\cdot$ è detta moltiplicazione di uno scalare per un vettore

x) $h \in \mathbb{R}, \underline{v} \in V$ $\quad h \cdot \underline{v}$ prodotto

scriviamo $h\underline{v}$ semplicemente

x) $\underline{v}, \underline{w} \in V$ $\quad \underline{v} + \underline{w}$ somma

Proposizione

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ allora:

1) $\exists!$ elemento neutro rispetto a $+$ (lo indicheremo con il simbolo $\underline{0}$)

Dim $\underline{v}_0$ e $\underline{w}_0$ elementi neutri

$$\underline{v}_0 = \underline{v}_0 + \underline{w}_0 = \underline{w}_0 \quad \blacksquare$$

2) $\forall \underline{v} \in V$ $\exists!$ opposto per $\underline{v}$

Dim Siano $\underline{v}'$ e $\underline{v}''$ due opposti per $\underline{v}$

$$\underline{v}' = \underline{v}' + \underline{0} = \underline{v}' + (\underline{v} + \underline{v}'') = (\underline{v}' + \underline{v}) + \underline{v}'' =$$
$$= \underline{0} + \underline{v}'' = \underline{v}'' \quad \blacksquare$$

(l'opposto di $\underline{v}$ lo indicheremo con $-\underline{v}$)

NB
(Più formalmente dovremmo scrivere $\underline{0}_V$ e $-\underline{v}_V$ per indicare lo spazio vettoriale di riferimento)

- La scrittura $\underline{v} - \underline{w}$ è una abbreviazione di $\underline{v} + (-\underline{w})$
- vettore nullo: $\underline{0}$
- l'opposto del vettore nullo $-\underline{0}$ non è altro che $\underline{0}$

[cut-off text at top]

Esempi di spazi vettoriali

1) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (spazio vettoriale numerico di ordine n)

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(h, \underline{v} = (v_1, \dots, v_n)) \mapsto (hv_1, \dots, hv_n)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$((v_i), (w_i)) \mapsto (v_i + w_i)$

$\mathbb{R}^3$ $\quad -(2,0,3) = (-2,0,-3)$

elemento neutro è $(0,0,0)$

$$\left[\begin{aligned} 1 \cdot (v_1, \dots, v_n) &= (v_1, \dots, v_n) \\ (h+k) \cdot (v_1, \dots, v_n) &= ((h+k)v_1, \dots, (h+k)v_n) \\ &= (hv_1, \dots, hv_n) + (kv_1, \dots, kv_n) \\ &= h(v_1, \dots, v_n) + k(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}\right]$$

Caso particolare $n=1$: $\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}_{m,n}, +, \cdot)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_{m,n}$

$(h, (a_{is})) \longmapsto (h\, a_{is})$

$+ : \mathbb{R}_{m,n} \times \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$

$((a_{is}), (b_{is})) \longmapsto (a_{is} + b_{is})$

$\mathbb{R}_{2,3}$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

elemento neutro $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Spazio vettoriale dei polinomi nel una indeterminata x e sul campo reale

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

$\mathbb{R}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \,/\, a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$(h, a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \longmapsto h a_0 + \dots + (a_n h) x^n$

$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,\ b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$

$$\Downarrow$$

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\dots+b_mx^m$$

(stiamo assumendo $n \leq m$)

$$(3x+2)+(4x^2+1)=4x^2+3x+2$$

$$5(3x^3+2x)=15x^3+10x$$

opposto di $3x+2$ è $(-3)x+(-2)=-3x-2$

elemento neutro: polinomio nullo

Principio di identità dei polinomi

$$\left(\begin{array}{c} a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m \\ \Longleftrightarrow \\ n=m \text{ e } a_0=b_0,\dots,a_n=b_n \end{array}\right)$$

Osservazione

$p(x)$, $q(x)$ polinomi di gradi $\leq n$

$\Rightarrow$ $p(x)+q(x)$ ha grado al più n

ES. $\underbrace{(3x+1)}_{\leq 2}+\underbrace{(4x^2+1)}_{\leq 2}$ $\quad \leq 2$

$h\in\mathbb{R}$, $hp(x)$ ha grado $\leq n$

ES. $h(3x+1)=(3h)x+1$

$\mathbb{R}_n[x] = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \, / \, gr(p(x)) \le n \}$

$+$ e $\cdot$ sono ben definite operazioni una volta ristretto dominio e codominio

$+ : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$

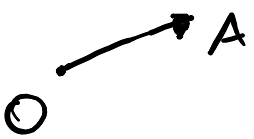
3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ spazio vettoriale

Esempi in cui potrebbe esserci confusione

$+_{\mathbb{R}_n[x]}$ $\qquad$ $+_{\mathbb{R}[x]}$

4) Spazio della geometria euclidea S $\quad (S_\pi)$ (piano)

Sia O un punto di tale spazio



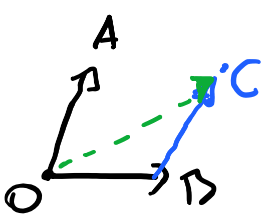
$\overrightarrow{OA}$ segmento orientato di primo estremo O e secondo A

$S_O = \{ \overrightarrow{OA} \, / \, A \in S \}$

NB per parlare del modulo dei vettori devo fissare una unità di misura

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in S_O$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$



(Regola del parallelogrammo)

$\vec{BC}$: vettore equipollente col $\vec{OA}$ di primo estremo B.

↳ } stessa direzione
modulo
verso

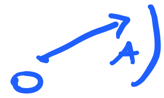
non equipollenti

$+ : S_0 \times S_0 \to S_0$ è op. interna

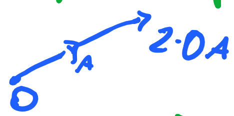
$\cdot : \mathbb{R} \times S_0 \to S_0$

$(h, \vec{OA}) \mapsto h \cdot \vec{OA}$

se $h>0$ ⇒ stessa direzione
verso
modulo moltiplicato per h

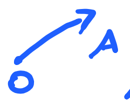


$(2,$ O→A $) \mapsto$

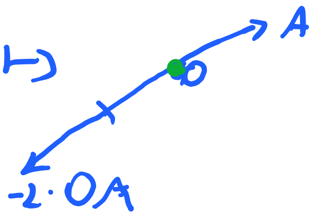


se $h=0$ ⇒ segmento nullo $\vec{OO}$

se $h<0$ ⇒ stessa direzione
verso opposto
modulo $\cdot |h|$

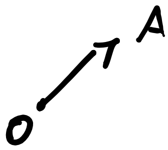


$(-2,$ O→A $) \mapsto$

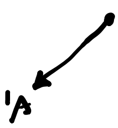


$(S_0, +, \cdot)$ spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in un punto

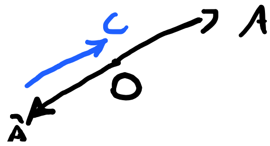
elemento neutro $\vec{OO}$



opposto $\vec{OA}$ è



(stessa direzione, modulo ma verso opposto)



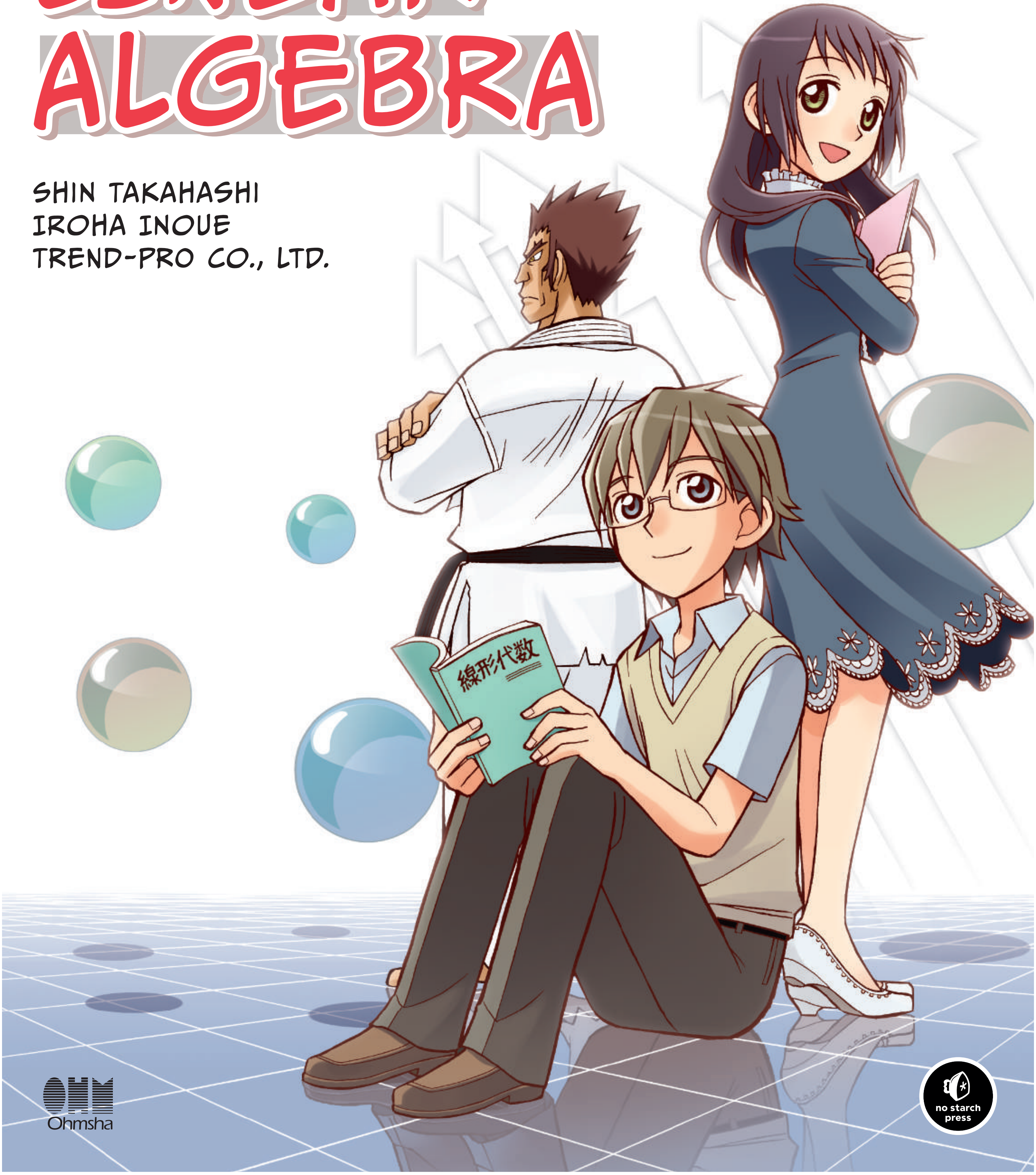
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OO}$$

THE MANGA GUIDE™ TO

COMICS INSIDE!

LINEAR ALGEBRA

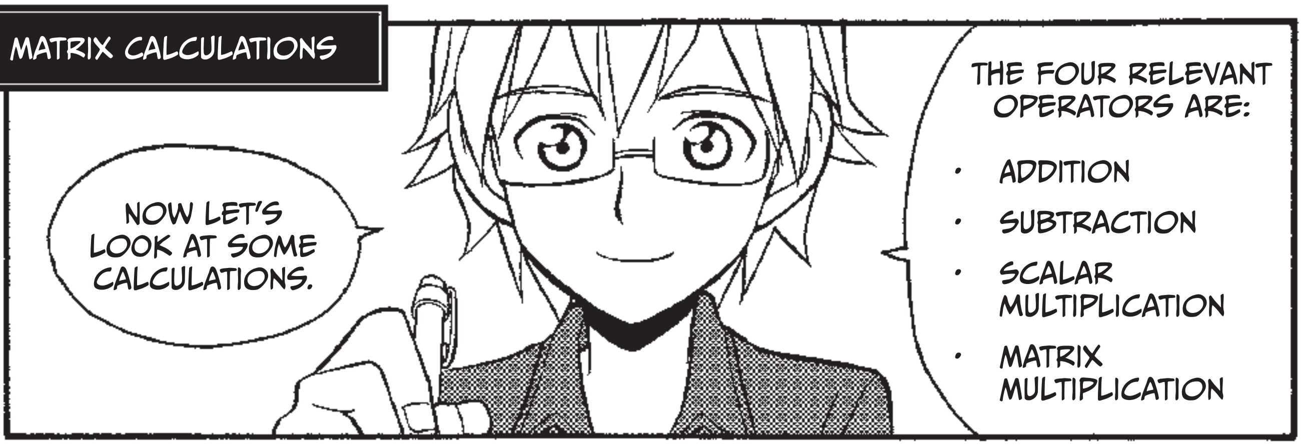
SHIN TAKAHASHI
IROHA INOUE
TREND-PRO CO., LTD.



Ohmsha

no starch press

MATRIX CALCULATIONS



ADDITION

LET'S ADD THE 3×2 MATRIX $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

TO THIS 3×2 MATRIX $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

THAT IS: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

THE ELEMENTS WOULD BE ADDED ELEMENTWISE, LIKE THIS: $\begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix}$

EXAMPLES

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

- $(10,\ 10) + (-3,\ -6) = (10 + (-3),\ 10 + (-6)) = (7,\ 4)$

- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + (-3) \\ 10 + (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Spazi vettoriali

DEFINIZIONE

V insieme non vuoto, $+$ operazione interna

$\cdot$ operazione esterna

$+ : V \times V \to V$ (+ e $\cdot$ sono solo convenzioni!)

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(V, +, \cdot)$ è detta spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

se 1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano

(associativa, elemento neutro, opposto abelianità)

2) $\forall h, k \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$ risulta:

$$(hk) \cdot \underline{v} = h \cdot (k \underline{v})$$

3) $\forall \underline{v} \in V$ risulta $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

4) Distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$ in $\mathbb{R}$

$\forall h, k \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v} \in V$ risulta

$$(h+k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$$

5) Distributività di $\cdot$ rispetto a $+$ in V

$\forall h \in \mathbb{R},\ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ risulta

$h\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = h\cdot\underline{v} + h\cdot\underline{w}$

Esempi di spazi vettoriali

5) Spazio vettoriale vettori geometrici liberi (ordinari)

vettore geometrico libero

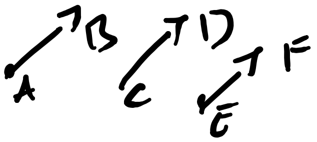
La relazione di equipollenza è una relazione d'equivalenza
- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

Posso considerare le classi d'equivalenza

$\vec{AB}$ segmento orientato

$[\vec{AB}] = \{\vec{CD} \,/\, \vec{CD}$ equipollenti ad $\vec{AB}\}$ → vettore geometrico libero

Rappresentanti $\vec{AB}\ \vec{CD}\ \vec{EF}$



ecc...

$\vec{AB} \equiv \vec{CD}$ equipollenti $\qquad [\vec{AB}] = [\vec{CD}]$

$\mathcal{V} = \{[\vec{AB}] \,/\, A, B \in S\}$ → insieme quoziente

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ $\qquad$ ($\mathcal{V}_\pi$ del piano)

$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

$\overline{AB} = [\vec{AB}]$ e $\overline{CD} = [\vec{CD}]$

$$\overline{AB} + \overline{CD} := \overline{OE} = [\overrightarrow{OE}]$$

$\overrightarrow{OB'} \equiv \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OD'} \equiv \overrightarrow{CD}$

+ è ben definita!

$$\left(\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{C'D'} \end{array} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{A'B'} + \overline{C'D'} \right)$$

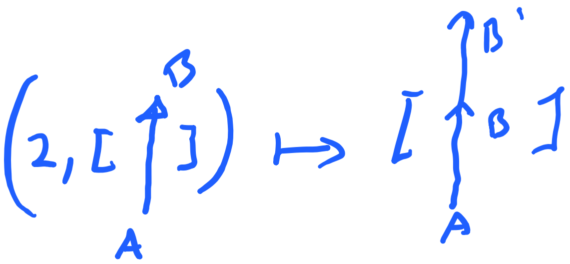
Osservazione

+ di S_0 è una congruenza rispetto all'equipollenza!

$$(\mathcal{V}, +, \cdot)$$

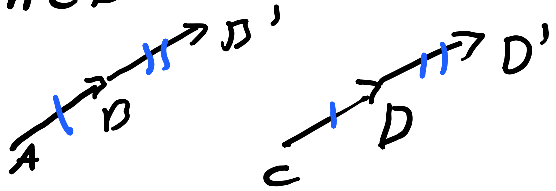
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$(h, [\overrightarrow{AB}]) \longmapsto [h\overrightarrow{AB}]$$



$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow h\overrightarrow{AB} \equiv h\overrightarrow{CD}$$

$h \in \mathbb{R}$



L'operazione esterna è ben definita

$\forall h, k \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V},$

$$(h+k)\cdot \underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$$

$\underline{v} = \overline{AB} = [\overrightarrow{AB}]$

$$(h+k)[\overrightarrow{AB}] = [(h+k)\overrightarrow{AB}] = [h\overrightarrow{AB}] + [k\overrightarrow{AB}]$$
$$= h[\overrightarrow{AB}] + k[\overrightarrow{AB}]$$

$(\mathcal{V}, +, \cdot)$ spazio vettoriale

$[\overrightarrow{OO}] = \underline{0}$ vettore nullo

$\overline{AB} = [\overrightarrow{AB}] \Rightarrow -\overline{AB} = \overline{-AB} = [-\overrightarrow{AB}]$

Proprietà degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

1) $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

Dim

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{z}$$

$$\Rightarrow (\underline{v} + \underline{w}) + (-\underline{w}) = \underline{z} + (-\underline{w})$$

$$\underline{v} + (\underline{w} + (-\underline{w})) = \underline{z} - \underline{w}$$

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{z} - \underline{w}$$

$$\underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$$

2) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}$

3) $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h\,\underline{0} \qquad \forall h \in \mathbb{R}$

$$0\,\underline{v} = (0+0)\,\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{v}$$

$$\overset{2)}{\Rightarrow} \quad 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$h \cdot \underline{0} = h \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = h \cdot \underline{0} + h \cdot \underline{0} \overset{2)}{\Rightarrow} h \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

4) $h\underline{v} = \underline{0} \iff h = 0$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$

Dim

$\Leftarrow$ 3)

$\Rightarrow$ supponiamo $h \neq 0$

$$h\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow h^{-1}(h\underline{v}) = h^{-1}\underline{0}$$

$$\Rightarrow (h^{-1}h)\,\underline{v} = \underline{0} \quad 3)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

5) $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V: \quad h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\,\underline{v}$

$h(-\underline{v})$ è l'opposto di $h\underline{v}$

$$h\underline{v} + h(-\underline{v}) \overset{?}{=} \underline{0}$$

$$h(\underline{v} + (-\underline{v})) = h(\underline{v} - \underline{v}) = h \cdot \underline{0} \overset{3)}{=} \underline{0}$$

$(-h)\underline{v}$ è l'opposto di $h\underline{v}$

$$(-h)\underline{v} + h\underline{v} \overset{?}{=} \underline{0}$$

$$(-h+h)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad \underline{\text{ok!}}$$

6) $(-1)\underline{v} = -(1 \cdot \underline{v}) = -\underline{v}$

$$(-h)(-\underline{v}) = -[h(-\underline{v})] = \underbrace{-[-h\underline{v}]} = h\underline{v}$$

l'opposto dell'opposto è il vettore di partenza

$-(-\underline{v}) = \underline{v}$

$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

$-(-3) = 3$

7) Proprietà associativa generalizzata

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$$

$$\underline{v}_1 + \Big(\big(\underbrace{(\underline{v}_2 + \underline{v}_3) + \underline{v}_4}\big) + \underline{v}_5\Big)$$

$$\| $$

$$\underbrace{\underline{v}_1 + \Big(\big(\underline{v}_2 + (\underline{v}_3 + \underline{v}_4)\big) + \underline{v}_5\Big)}$$

$$\| $$

$$\underline{v}_1 + \Big(\underline{v}_2 + \big((\underline{v}_3 + \underline{v}_4) + \underline{v}_5\big)\Big)$$

. .

Il posizionamento delle parentesi non conta!

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n$$

8) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \dots + \underline{v}_n = \underline{v}_2 + \underline{v}_1 + \underline{v}_3 + \dots + \underline{v}_n$$
$$= \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n$$

L'ordine non conta

9) Proprietà distributive generalizzate

$$(h_1 + h_2 + \dots + h_n)\,\underline{v} = h_1\underline{v} + h_2\underline{v} + \dots + h_n\underline{v}$$

$n = 2$ vero

supponiamo vera per $n \geq 2 \Rightarrow n+1$

$$\Big(\underbrace{h_1 + h_2 + \dots + h_n}_{(h_1 + h_2 + \dots + h_n)} + h_{n+1}\Big)\underline{v} = \underbrace{(h_1 + \dots + h_n)\cdot\underline{v}}_{h_1\underline{v} + \dots + h_n\underline{v}} + h_{n+1}\underline{v}$$

Stesso cosa per

$$h(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n) = h\underline{v}_1 + h\underline{v}_2 + \dots + h\underline{v}_n$$

Definizione

$h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v} \in V$

$\underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \ldots + h_m\underline{v}_m$ sarà detto combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ mediante gli scalari h_i

$\mathbb{R}^3$ $\quad (3,0,1) = 3(1,0,0) + 1\cdot(0,0,1)$

comb. lin. di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ mediante 3 e 1

Definizione

$\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono proporzionale se $\exists h \neq 0$ reale tale che $\underline{v} = h\underline{w}$

Esempio $\mathbb{R}[x]$ $\quad \underbrace{3x+3 = 3(x+1)}_{\text{proporzionali}}$

$3 \in \mathbb{R}[x]$ $\quad \underline{0} = 0\cdot 3$ ✗

polinomio costante

$\underline{0} = 1\cdot\underline{0}$ ✓

Proporzionalità è una rel. d'equivalenza

1) riflessiva: $\underline{v} = 1\cdot\underline{v}$

2) simmetrica $\underline{v} = h\underline{w}$ $\quad h \neq 0 \Rightarrow \underline{w} = h^{-1}\underline{v}$

3) transitiva $\begin{array}{l}\underline{v} = h\underline{w} \\ \underline{w} = k\underline{u}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} hk \neq 0 \\ \underline{v} = (hk)\,\underline{u}\end{array}$

$h, k \neq 0$

Sottospazi vettoriali

$(V, +, \cdot)$ $\quad H \subseteq V$ $\quad H \neq \emptyset$

H è detto stabile (o chiuso) rispetto all'addizione se

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$

H è detto stabile (o chiuso) rispetto alla molt. per uno scalare se $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \Rightarrow h\underline{v} \in H$

$$\left.\begin{array}{l} +: V \times V \longrightarrow V \\ (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{v} + \underline{w} \in H \\ \in H \times H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} +|_H : H \times H \longrightarrow H \\ (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{v} + \underline{w} \end{array}$$

Esempio $\quad \mathbb{R}_2[x] \quad \mathbb{R}[x]$

Def. Se H è chiuso risp. a $+$ e $\cdot$, allora è detto sottospazio vettoriale

$$H \leq V$$

$\leq$ sottospazio $\qquad \subseteq$ sottoinsieme

$\Rightarrow$

$\cancel{\Leftarrow} \qquad \emptyset \subseteq V$ non è sottospazio

Esercizio

$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, gr(p(x)) = 3\} \overset{?}{\leq} \mathbb{R}[x]$$

Geometria - VII

V sp. vett. $H \subseteq V$ e $H \neq \emptyset$

Def. Se H è stabile risp. a $+$ e $\cdot$, allora è detto sottospazio vettoriale

$$H \leq V \qquad \underset{\text{sottospazio}}{\leq} \qquad \underset{\text{sottoinsieme}}{\subseteq}$$

$$\Rightarrow$$

$$\not\Leftarrow \qquad \emptyset \subseteq V$$

non è sottospazio

Esercizio

$$\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, gr(p(x)) = 3 \} \overset{?}{\leq} \mathbb{R}[x]$$

NO! $(x^3 + x) + (-x^3 + 1) = x + 1$ non stabile risp. a $+$

gradi $\quad 3 \qquad 3 \qquad 1$

Se aggiungiamo $\underline{0}$ $\Rightarrow$ stabilità rispetto a $\cdot$

Esercizio

$\mathbb{R}^2$ $\qquad H = \{ (h,0) \,/\, h \in \mathbb{R} \} \cup \{ (0,k) \,/\, k \in \mathbb{R} \}$

$$H \overset{?}{\leq} \mathbb{R}^2$$

NO! stabile risp. a $\cdot$ ma non rispetto a $+$!

Th V sp. vett.

$H \leq V \Rightarrow (H, +_{|H}, \cdot_{|H})$ è spazio vett.

Dim 1) $(H, +_H)$ associativa ✓ commutativa ✓

$\underline{v} \in H \neq \emptyset \Rightarrow (-1)\underline{v} = -\underline{v}_{|V}$ $\quad (0 \cdot \underline{v} = \underline{0})$

$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}_{|V}$ $\Rightarrow$ $\forall \underline{w} \in H, \quad \underline{w} +_{|H} \underline{0}_{|V} = \underline{w} + \underline{0} = \underline{w}$

$\underline{0}_{|V} = \underline{0}_{|H} = \underline{0}$

$(-\underline{v})_{|V} = (-\underline{v})_{|H}$

2) $1 \cdot_{|H} \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ e così via le altre

$\underline{v} \in H$

Esempi

V spazio vettoriale

1) Sottospazi banali

$\underbrace{\{\underline{0}\}}$ e V $\rightarrow$ $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$h \cdot \underline{0} = \underline{0}$

2) $\mathbb{R}^3$

$\{(0,0,0)\}$ e $\mathbb{R}^3$

3) $\mathbb{R}^2 \quad H = \{(x,y) \mid x = y\}$

(i) $H \neq \emptyset \quad (1,1) \in H$ $\quad$ (ii) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$

$(x,y), (z,t) \in H$ $\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y)+(z,t) = (x+z,\ y+t) \in H$

$\underline{x+z} = y+z = \underline{y+t}$

(iii) $\forall h \in \mathbb{R},\ \forall \underline{v} \in H \Rightarrow h\underline{v} \in H$

$\underline{v} = (x,y) \in H \Rightarrow \quad h(x,y) = (hx, hy) \in H$

$x = y$

$hx = hy$

4) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = t \text{ e } y = 1\}$

$= \{(x,1,x) / x \in \mathbb{R}\}$

(i) $H \neq \emptyset$ $\quad (0,1,0) \in H$ $\quad$ (ii) $(0,1,0) + (3,1,3) = (3,2,3) \notin H$

(iii) $2(0,1,0) \notin H$ $\quad$ (non c'è l'elemento neutro)

5) $H = \{3x+1,\ 0\} \overset{?}{\leq} \mathbb{R}[x]$

$(3x+1) + (3x+1) = 6x+2 \notin H$

6) $H = \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 / x = y^2\} \overset{?}{\leq} \mathbb{R}^4$

<u>No!</u> $\quad \underset{\in H}{(1,1,0,0)} + \underset{\in H}{(1,1,0,0)} = \underset{\notin}{(2,2,0,0)} \quad 2 \neq 2^2 = 4$

7) $H = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\} \overset{?}{\leq} \mathbb{R}^2$

8) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & \underline{c+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & \underline{d} \end{pmatrix}$$

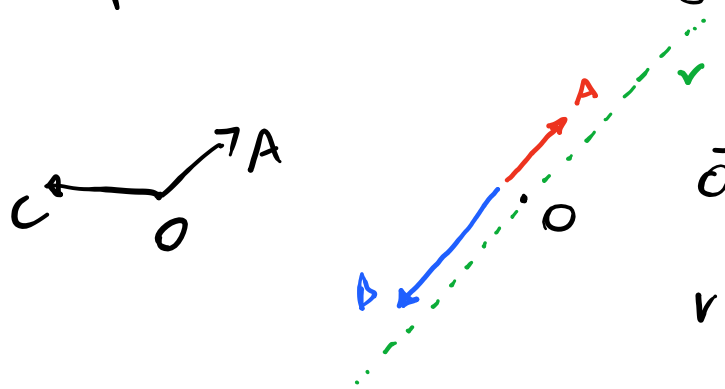
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} c+d = d \Rightarrow c = 0 \\ a+b = b+d \Rightarrow a = d \end{cases}$$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & a_1+a_2 \end{pmatrix} \in H$$

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha & hb \\ 0 & ha \end{pmatrix}$$

9) Spazio vett. dei vett. geometrici applicati in O



$\vec{OA} + \vec{OB} \in r$

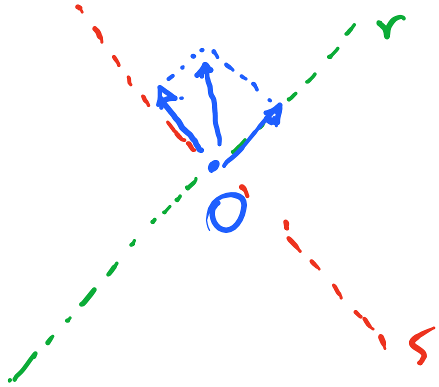
r è sottospazio vettoriale

(stesso cosa per un piano π)

Osservazione

L'unione di sottospazi vett. non è in genere un sottospazio!

Esempio 1



Esempio 2

$\mathbb{R}^2$ $\quad H_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$

$H_1, H_2 \leq \mathbb{R}^2$ ma

$H_1 \cup H_2 \not\leq \mathbb{R}^2$

Proprietà

1) $W \leq V$ $\qquad \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \in W$

$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \Rightarrow (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + \underline{w}_3 \in W$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_m \in W$

$h_1, \dots, h_m \Rightarrow h_1 \underline{w}_1 \in W, \dots, h_m \underline{w}_m \in W$

$\Rightarrow h_1 \underline{w} + \dots + h_m \underline{w} \in W$

[W contiene ogni combinazione lineare dei suoi elementi]

2) $\mathcal{L}$ una famiglia di sottospazi di V

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \leq V$$

[Esempio $\{(0,y) / y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$
$\quad\quad ||$
$\{(0,0)\} \leq \mathbb{R}^2$]

Dim $\quad$ (i) $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \neq \emptyset$: $\quad \underline{0} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$

(ii) $\underline{w}, \underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v} + \underline{w} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$$

(iii) $\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \Rightarrow \underline{v} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$

$h \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow h\underline{v} \in L \quad \forall L \in \mathcal{L}$

$$\Rightarrow h\underline{v} \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$$

Problema

V sp. vett. $\quad H, K \leq V$

Qual è il più piccolo sottospazio che contiene sia H che K? (i.e., $H \cup K$)

1) $V \supseteq H \cup K$

2) L'intersezione di tutti i sottospazi L di V che contengono $H \cup K$ è la risposta

$\langle H, K \rangle = \langle H \cup K \rangle = H + K = \{ \underline{h} + \underline{k} \,/\, \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \}$

(i) $\quad \underline{0} = \underset{\in H}{\underline{0}} + \underset{\in K}{\underline{0}}$

(ii) $\underline{w} \in \langle H, K \rangle \Rightarrow \exists \underline{h} \in H, \underline{k} \in K: \underline{w} = \underline{h} + \underline{k}$

$\underline{w}_1 \qquad \underline{h}_1 \qquad \underline{k}_1 \qquad \underline{w}_1 = \underline{h}_1 + \underline{k}_1$

$$\underline{w} + \underline{w}_1 = (\underline{h} + \underline{k}) + (\underline{h}_1 + \underline{k}_1) = \underbrace{(\underline{h} + \underline{h}_1)}_{\in H} + \underbrace{(\underline{k} + \underline{k}_1)}_{\in K} \in H + K$$

(iii) Simile a prima

•) $\underline{h} \in H \Rightarrow \underline{h} = \underset{\in H}{\underline{h}} + \underset{\in K}{\underline{0}} \in H + K \Rightarrow H \subseteq H + K$

•) $\underline{k} \in H \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow K \subseteq H + K$

•) $L \leq V: \; H \cup K \leq L$

$\forall \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \Rightarrow \underline{h}, \underline{k} \in L \Rightarrow \underline{h} + \underline{k} \in L \Rightarrow H + K \subseteq L$

<u>Esempio</u>

$H_1 = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \qquad H_2 = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$

$H_1 + H_2 = \{(x, 0) + (0, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$H_1 + H_2 \leq \mathbb{R}^2$ e $\quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) = \underset{\in H_1}{(x, 0)} + \underset{\in H_2}{(0, y)} \in H_1 + H_2$$

$H_1 + H_2 = \mathbb{R}^2$

Generalizzazione

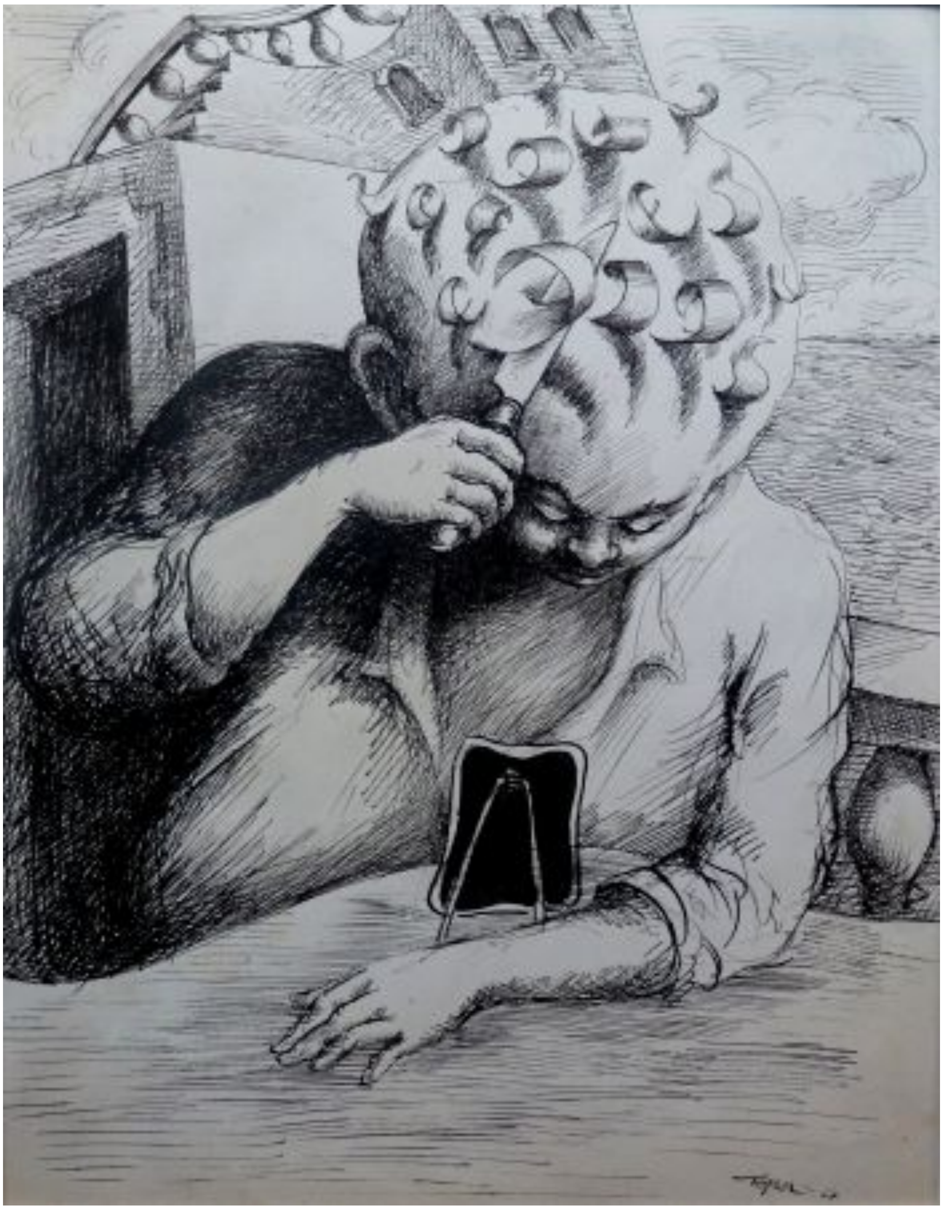
$H_1, \dots, H_n$ $\quad \langle H_1, \dots, H_n \rangle = H_1 + \dots + H_n$

$= \{ \underline{h}_1 + \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_n \,/\, \underline{h}_i \in H_i \}$

$[\, H \leq V \Rightarrow \langle H \rangle = H \,]$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ $\quad \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{ h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v} \,/\, h_i \in \mathbb{R} \}$

(l'insieme di tutte le poss. comb. lineari)



Geometria VIII

V spazio vettoriale.

$H_1, H_2 \leq V$ $\qquad H_1 + H_2$ è detta somma di H_1 e H_2

$(H_1 + H_2 + \dots + H_n)$

somma diretta se $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ $\qquad H_1 \oplus H_2$

Es. $H_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ $\quad H_2 = \{(0,x) / x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2 = H_1 + H_2$ $\qquad H_1 \cap H_2 = \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 = H_1 \oplus H_2$ $\qquad \mathbb{R}^2$ è somma diretta di H_1 e H_2

(H_1 e H_2 sono detti supplementari se $V = H_1 \oplus H_2$
complementari)

Se $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$

somma diretta se $H_i \cap \langle H_j / j \neq i \rangle = \{0\}$

$H_1 \cap \langle H_2, H_3, \dots, H_n \rangle = \{0\}$

$H_2 \cap \langle H_1, H_3, \dots, H_n \rangle = \{0\}$ $\quad \dots$

Es. $H_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ $\quad H_2 = \{(0,x) / x \in \mathbb{R}\}$

$H_3 = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\}$

NON SONO IN SOMMA DIRETTA

$$H_3 \cap \langle H_1, H_2 \rangle = H_3 \cap \mathbb{R}^2 = H_3 \neq \{(0,0)\}$$

$H_1 \cap H_2 = \{(0,0)\}$ $\qquad$ $H_2 \cap H_3 = \{(0,0)\}$

$H_3 \cap H_1 = \{(0,0)\}$

Esempio II $\qquad H_1 = \{(x,0,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{(0,x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $H_3 = \{(0,0,x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

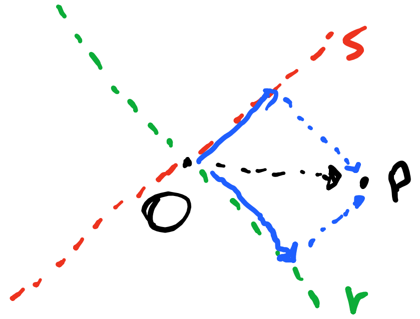
$H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ ok : $\qquad H_1 \cap \langle H_2, H_3 \rangle = \{\underline{0}\}$

$$\langle H_2, H_3 \rangle = H_2 + H_3$$
$$= \{(0,x,y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$H_1 \cap \langle H_2, H_3 \rangle = \{(0,0,0)\}$$

Analogamente gli altri

Es. III



$\langle r, s \rangle$ è tutto lo spazio
$\quad \parallel$
$\ r+s$

$r \cap s = \vec{0}$

$r \oplus s$

Dipendenza ed indipendenza lineare

V sp. vettoriale

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono detti (linearmente) dipendenti (o legati)

se e solo se $\exists\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$: $h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$

$(h_1, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

se tali scalari non esistono allora sono detti (linearmente) indipendenti (o liberi)

$$\left(h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow h_1 = h_2 = \dots = h_n = 0 \quad \forall h_i \in \mathbb{R} \right)$$

$0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$ è l'unico

Esempi

$(1,0)\,,\ (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$h_1(1,0) + h_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{matrix} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{matrix}$

$(1,0)$ e $(0,1)$ lin. indip.

$\underbrace{(0,0)\,,\ (1,0)}_{\text{sono lin. dip.}}$: $\underset{\neq 0}{3} \cdot (0,0) + 0 \cdot (1,0) = (0,0)$

Se c'è l'elemento neutro $\Rightarrow$ dip.

$(1,0), (2,0) \qquad -2\cdot(1,0)+(2,0)=(0,0)$

se ci sono due elementi proporzionali $\Rightarrow$ dip.

DEF $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\underline{v}$ è comb. lineare dei $\underline{v}_i$

$\exists h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \ \underline{v} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n$

Osservazioni

•) $\underline{0}$ dipende sempre da qualunque sistema $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$

•) $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\underline{v}_i = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_{i-1} + 1 \cdot \underline{v}_i + 0 \cdot \underline{v}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$

•) $\left.\begin{array}{l} \underline{v} \text{ dipende da } \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \\ \underline{v}_i \text{ dipende da } \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \end{array}\right] \Rightarrow \underline{v}$ dip. da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$

$\exists h_i \in \mathbb{R} : \ \underline{v} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n$

$\exists k_{is} \in \mathbb{R} : \ \underline{v}_i = k_{i1} \underline{w}_1 + \dots + k_{im} \underline{w}_m$

$\underline{v} = h_1 \cdot (k_{11} \underline{w}_1 + \dots + k_{1m} \underline{w}_m) + \dots + h_n (k_{n1} \underline{w}_1 + \dots + k_{nm} \underline{w}_m)$

$= c_1 \underline{w}_1 + \dots + c_m \underline{w}_m$

•) $\underline{v}, \underline{w}$ dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \Rightarrow \underline{v} + \underline{w}$ dip da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$

$\underline{v} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m$

$\underline{w} = k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_m \underline{v}_m \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} = (h_1 + k_1) \underline{v}_1 + \dots + (h_m + k_m) \underline{v}_m$

$< \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m > = \{ h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m \ / \ h_i \in \mathbb{R} \}$

$\underline{v}$ dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \iff \underline{v} \in < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m >$

$H = \{ h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_m \underline{v}_m \ / \ h_i \in \mathbb{R} \} \stackrel{?}{=} < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m >$

H è sottospazio

1) $\underline{0}$ dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \Rightarrow \underline{0} \in H$

2) $\underline{v}, \underline{w}$ dip da $\underline{v}_i \Rightarrow \underline{v} + \underline{w}$ dip da H

3) $\underline{v}_i$ dip da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$

4) $W \leq V$ e $\underline{v}_i \in W \Rightarrow < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m > \in W$

NB $L(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) = < \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m >$

copertura lineare

Oss.

$$W_1 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle, \quad W_2 = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle \Rightarrow W_1 + W_2 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$

Dim

$$W_1 + W_2 = \{ \underline{a} + \underline{b} \mid \underline{a} \in W_1 \text{ e } \underline{b} \in W_2 \}$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$W_1 \cup W_2 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \cup \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$

$$\Rightarrow W_1 + W_2 \supseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$

$$\underline{u} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \underline{u} = \underline{a} + \underline{b} \qquad \underline{a} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n$$
$$\underline{b} = k_1 \underline{w}_1 + \dots k_m \underline{w}_m$$

$$\underline{u} = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v} + k_1 \underline{w}_1 + \dots + k_m \underline{w}_m \in \langle \underline{v}_i, \underline{w}_s \rangle$$

$$W_1 + W_2 \subseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$$
$$=$$

•) $W = \langle \langle \underline{v}_i \rangle, \langle \underline{w}_s \rangle \rangle = \langle \underline{v}_i, \underline{w}_s \rangle$

$$\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

$\underline{v} \neq \underline{w}$
$\neq \underline{0}$

$\underline{v}$ dip da $\underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w}$

$\underline{w}$ dip da $\underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w}$

$\underline{v} \in \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \Rightarrow \underline{v}$ dip da $\underline{v}, \underline{w} \Rightarrow \underline{v}$ dip da $\underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w}$

$\Rightarrow \underline{v} \in \langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \underset{\supseteq}{\subseteq} \langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle$$

DEF sistemi di vettori che dip. gli uni dagli altri sono detti equivalenti

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ $\qquad$ $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$

$\underline{v}_i$ dip. da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$

$\underline{w}_j$ dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\mathbb{R}^2 \quad \langle (0,1), \underset{\parallel}{(0,2)}, (0,0) \rangle$

$$\langle (0,1) \rangle = \{ (0,x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\langle (0,1), (1,0) \rangle \qquad \langle (1,1), (1,0) \rangle$

$(0,1) \leftrightarrow (0,1)+(1,0) = (1,1)$

$(1,1)$ dup. da $(0,1)$ e $(1,0)$

$(1,0)$

$S \subseteq V$ il più piccolo sottospazio a contenere S è $\underline{\langle S \rangle} = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \quad \mathcal{L} = \{ L \leq V \,/\, S \subseteq L \}$

$\langle \{ r \in \mathbb{R} \,/\, r \text{ intero pari} \} \rangle = H$

$1 \in$

$r = r \cdot 1 \Rightarrow \mathbb{R} \subseteq H \Rightarrow \mathbb{R} = H$

Lezione IX

V spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V \quad (n \geq 2)$

(i) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ dipendenti $\Leftrightarrow \exists i : \underline{v}_i$ dipende dai rimanenti

Dim $\Rightarrow$ | $\exists h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} \quad : h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$

$h_1 \neq 0 : h_1 \underline{v}_1 = -h_2 \underline{v}_2 + \dots - h_n \underline{v}_n$

$\underline{v}_1 = (-h_1^{-1} h_2) \underline{v}_2 + \dots + (-h_1^{-1} h_n) \underline{v}_n$

$\underline{v}_1 \in \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$

$\Leftarrow$ | $\exists i : \underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$

supp. $\underline{v}_1$. Allora $\exists h_2, \dots, h_n \in \mathbb{R}$:

$\underline{v}_1 = h_2 \underline{v}_2 + \dots + h_n \underline{v}_n$

$1 \cdot \underline{v}_1 - h_2 \underline{v}_2 + \dots - h_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$(1, -h_2, \dots, -h_n) \neq (0, \dots, 0)$

$1 \neq 0$

■

(ii) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è indip. $\Leftrightarrow$ nessun $\underline{v}_i$ dip. dai rimanenti

$A \Leftrightarrow B$ $\qquad\qquad$ $\neg A \Leftrightarrow \neg B$

(iii) $\underline{n=1}$: $\quad \underline{v}_1$ è dip. $\Leftrightarrow$ $\underline{v}_1 = \underline{0}$

$\underline{v}_1$ è indip. $\Leftrightarrow$ $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$

$$\left[\begin{array}{c} (\underline{v}_1 \neq \underline{0}) \\ h\underline{v}_1 = \underline{0} \\ \Leftrightarrow \\ h = 0 \end{array}\right]$$

$\underline{n=2}$ $\quad \underline{v}_1, \underline{v}_2 \neq \underline{0}$ è dip. $\Leftrightarrow$ $\underline{v}_1$ dip. da $\underline{v}_2$

o $\underline{v}_2$ dip. da $\underline{v}_1$

$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$ $\underline{v}_1 = h\underline{v}_2$

o $\underline{v}_2 = h\underline{v}_1$

Esempi

(i) $\quad (1,0,0), (1,2,3), (0,0,1)$

$$h_1(1,0,0) + h_2(1,2,3) + h_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(h_1+h_2, 2h_2, 3h_2+h_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} h_1+h_2 = 0 \\ 2h_2 = 0 \\ 3h_2+h_3 = 0 \end{cases} \quad 2h_2=0 \longrightarrow h_2 = 0 \longmapsto h_1 = 0 \longmapsto h_3 = 0$$

È linearmente indip.!

(ii) $\quad (4,1,4), (4,1,3)$ $\quad$ non sono proporzionali

$\Rightarrow$ indip.

(iii) $\quad (1,0,0), (1,3,0), (3,4,4)$

$(1,0,0)$ dip. da $(1,3,0)$ e $(3,4,4)$?

$$(1,0,0) = h(1,3,0) + k(3,4,4)$$

$k=0$

$h=0$

È lin. indip.

(iv) $(1,-\frac{1}{2},0), (4,3,1), (1,2,\frac{1}{2})$

$$(4,3,1) = 2\cdot\left(1,-\frac{1}{2},0\right) + 2\cdot\left(1,2,\frac{1}{2}\right) = (2,-1,0)+(2,4,1)$$

dip. $\quad 1\cdot(4,3,1) + (-2)\left(1,-\frac{1}{2},0\right) + (-2)\left(1,2,\frac{1}{2}\right) = (0,0,0)$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(4,3,1) + \left(1,-\frac{1}{2},0\right) + \left(1,2,\frac{1}{2}\right) = (0,0,0)$$

FORMA NON UNICA!

(v) $(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)$

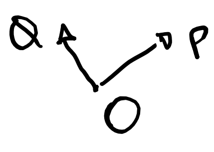
$$x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ gradini}$$

$z=0, y=0, x=0$

È lin. indip.

(vi) Spazio vettori geometrici applicati in O



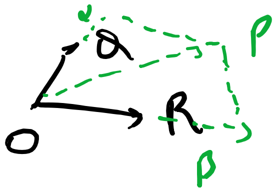
$\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ sono dip.

$\Leftrightarrow$ sono proporzionali

$\Leftrightarrow$ giacciono sulla stessa retta

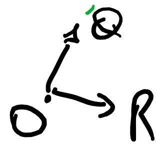
$\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ sono dip. $\Leftrightarrow$ giacciono su di uno stesso piano

$\underline{\Rightarrow}$ $\vec{OP} = \alpha \vec{OQ} + \beta \vec{OR}$



$\underline{\Leftarrow}$ tutti prop. ok

$\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ non prop.



$\Rightarrow \pi = \langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle$

(vii) $\underline{v}, \underline{v}, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ dip.

$$1 \cdot \underline{v} + (-1) \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{w}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{w}_m = \underline{0}$$

$$(1, -1, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

(viii) $$\underbrace{\underbrace{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n}_{\text{dip.}} \Downarrow , \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m}_{\text{dip}}$$

indip $\Uparrow$ indip.

$\exists h_1, \dots, h_n$: $h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n + 0 \cdot \underline{w}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{w}_m = \underline{0}$$

Prop. V sp. vett.

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori lin indip.

Ogni vettore $\underline{v}$ che dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vi dip in modo unico.

$$\left.\begin{aligned} \underline{v} &= h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n \\ &= k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} h_1 &= k_1 \\ &\dots \\ h_n &= k_n \end{aligned}$$

Dim

$$h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n$$

$$(h_1 - k_1)\underline{v}_1 + \dots + (h_n - k_n)\underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow h_1 - k_1 = 0 \Rightarrow h_1 = k_1$$

$$\dots$$

$$h_n - k_n = 0 \Rightarrow h_n = k_n$$

■

Prop. V sp. vettoriale

$$\left.\begin{aligned} & H, K \leq V \qquad H \cap K = \{\underline{0}\} \\ & \underline{0} \neq \underline{h} \in H \ \text{e} \ \underline{k} \in K, \ \underline{k} \neq \underline{0} \end{aligned}\right] \Rightarrow \underline{h}, \underline{k} \text{ indip.}$$

Dim

$$\alpha \underline{h} + \beta \underline{k} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{h} = (-\alpha^{-1}\beta)\underline{k} \in H \cap K$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\alpha \neq 0)$ $\quad \underline{h} \neq \underline{0}$ $\quad$ ↯

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$H_1, \dots, H_n \leq V \qquad \underline{0} \neq \underline{v}_1 \in H_1, \dots, \underline{0} \neq \underline{v}_n \in H_n$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è indip.

$$\left.\begin{aligned} & h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0} \\ & (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0) \end{aligned}\right] \overset{(h_1 \neq 0)}{\Rightarrow} \quad \underline{v}_1 = (-h_1^{-1} h_2)\underline{v}_2 + \dots + (-h_1^{-1} h_n)\underline{v}_n$$

$$\in H_1 \cap (H_2 + \dots + H_n) = \{\underline{0}\} \quad ↯$$

Es.

$H_1 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $H_2 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $H_3 = \langle(1,1)\rangle$

$1 \cdot (0,1)$ $1 \cdot (1,0)$ $-1 \cdot (1,1)$ sono dip.

Prop. $\underline{v} \in H_1 \oplus H_2$ $\exists! \, \underline{v}_1 \in H_1, \underline{v}_2 \in H_2 :$

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

Dim $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_1' + \underline{v}_2'$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(\underline{v}_1 - \underline{v}_1')}_{H_1} + \underbrace{(\underline{v}_2 - \underline{v}_2')}_{H_2} = \underline{0}$

Se $\left.\begin{array}{l}\underline{v}_1 - \underline{v}_1' \neq \underline{0} \\ \underline{v}_2 - \underline{v}_2' \neq \underline{0}\end{array}\right] \Rightarrow$ Assurdo. Allora $\underline{v}_1 = \underline{v}_1'$

$$\cancel{\underline{v}_1} + \underline{v}_2 = \cancel{\underline{v}_1} + \underline{v}_2'$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_2'$$

Scrittura unica!

Viceversa $\left[\forall g \in H_1 + H_2 \text{ e } \exists! \, \underline{v}_1 \in H_1 \text{ e } \underline{v}_2 \in H_2 : g = \underline{v}_1 + \underline{v}_2\right]$

$\Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$

Dim. $\underline{v} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \underline{v} = \underbrace{\underline{v}}_{\in H_1} + \underbrace{\underline{0}}_{\in H_2} = \underbrace{\underline{0}}_{H_1} + \underbrace{\underline{v}}_{H_2}$

unicità scrittura $\Rightarrow$ $\underline{v} = \underline{0}$ e $\underline{0} = \underline{v}$

i.e. $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$

V spazio vettoriale

$H_1, H_2 \leq V$ $\qquad H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\} \iff \forall \underline{g} \in H_1 + H_2$

$\exists!\, \underline{h}_1 \in H_1, \underline{h}_2 \in H_2 :$

$\underline{g} = \underline{h}_1 + \underline{h}_2$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ sono in somma diretta.

$\iff$

$\forall \underline{g} \in H_1 + H_2 + \dots + H_n, \ \exists! \underline{h}_i \in H_i : \ \underline{g} = \underline{h}_1 + \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_n$

Dim. $\Rightarrow$ dimostrato già!

$\Leftarrow$ $\quad \underline{v} \in H_1 \cap (H_2 + H_3 + \dots + H_n)$

$\exists \underline{h}_2 \in H_2, \underline{h}_3 \in H_3, \dots, \underline{h}_n \in H_n :$

$\underline{v} = \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_n$

$$\underset{H_1}{\underline{v}} = \underline{v} + \underset{H_2}{\underline{0}} + \dots + \underset{H_n}{\underline{0}} = \underline{0} + \underline{v} = \underset{H_1}{\underline{0}} + \underset{H_2}{\underline{h}_2} + \dots + \underset{H_n}{\underline{h}_n}$$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ ∎

Prop. Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t$ indip. e $\underline{v} \in V$ che non dip da $V \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t, \underline{v}$ indip.

Dim.

$h_1 \underline{v}_1 + h_2 \underline{v}_2 + \dots + h_t \underline{v}_t + h \underline{v} = \underline{0}$

$h \neq 0 \Rightarrow \underline{v} = (-h^{-1}h_1)\underline{v}_1 + \dots + (-h^{-1}h_t)\underline{v}_t$ ↯

$h = 0 \Rightarrow h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \dots + h_t\underline{v}_t = \underline{0}$

$\Rightarrow h_1 = h_2 = \dots = h_t = 0$ ■

Corollario

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \text{ indip.} \\ \underline{v} \in V \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t, \underline{v} \text{ dip.} \end{array}\right] \Rightarrow \underline{v} \text{ dip da } \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t$$

Es. $\underbrace{\underbrace{(1,2,0), (3,2,0)}_{\text{indip. (non prop.)}} \qquad \underbrace{(0,0,1)}_{\text{non dip.}}}_{\text{indip.}}$

$(1,2,0)$ indip $\rightarrow (1,2,0), (3,2,0)$ indip.

$\rightarrow (1,2,0), (3,2,0), (0,0,1)$ indip.

DEF V sp. vettoriale è detto finitamente generabile se esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$: $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ (generano)

(sistema di) generatori

Ogni elemento di V si scrive come comb. lineare di elementi di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

DEF Un sistema di generatori indipendente è detta **base**

DEF Un riferimento è una base ordinata

$e_1, \dots, e_n$ base $\Rightarrow$ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ rif.

$(e_2, e_1, \dots, e_n)$ ...

Esempi

(i) $\mathbb{R}^2$ $\quad (1,0) \quad (0,1)$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$((1,0),(0,1)) \text{ rif.}$$

$(1,0), (2,0)$ è sistema di generatori?

$$(x,y) = h_1(1,0) + h_2(2,0) = (h_1 + 2h_2, 0)$$

$$(0,1) \notin \langle (1,0), (2,0) \rangle$$

$(1,0), (1,1)$ è sistema di generatori?

$$(x,y) = h(1,0) + k(1,1) \qquad \begin{cases} h + k = x \\ k = y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right) \text{ gradini } 2 \times 2 \Rightarrow \exists! \text{ soluzione } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(sono anche indip.)

$\langle (1,0),(0,1),(2,-1)\rangle = \mathbb{R}^2$?

$\cup\!|$

$\langle (1,0),(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$ (sono dipendenti!)

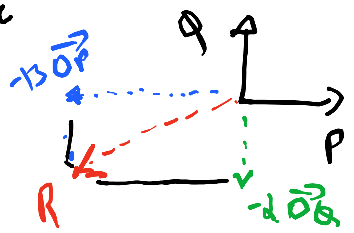
(ii) $\mathbb{R}^3$ $(1,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,-1),\ (0,0,0)$

$(x,y,z) = h_1(1,0,0) + h_2(0,2,0) + h_3(0,0,-1) + h_4(0,0,0)$

$$\begin{cases} h_1 = x \\ 2h_2 = y \\ -h_3 = z \end{cases}$$ sol. unica!

(iii) $\mathbb{R}^n$ $(1,0,\dots,0)$ $(0,1,\dots,0)$ $\dots$ $(0,0,\dots,1)$

(iv) Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in O è f.g. poiché



(v) $\mathbb{R}_n[x]$ $1, x, x^2, \dots, x^n$

(vi) $\mathbb{R}_{2,3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_{n,m} \dots$

$$\langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \rangle = V \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \rangle \ni \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \\ \quad \text{IV} \\ \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle = V \end{cases}$$

$\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$: indip.? ok

dip.? $\exists i$: $\underline{v}_i$ dip. da i rimanenti ..

<u>Osservazione</u> Da ogni sistema di generat. si può estrarre una base

$$(1,0), (2,0), (3,4), (5,6), (1,1)$$

sistema di gen: $(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0) + 0 \cdot (\dots)$

$$\cancel{(2,0)}, (1,0), (3,4), (5,6), (1,1)$$

dip

$$(1,0), \cancel{(3,4)}, \cancel{(5,6)}, (1,1)$$

$$(1,0), (1,1) \quad \text{base}$$

<u>Lemma di Steinitz</u> (NO DIM.)

V sp. vett.

$\left.\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \text{ indip } \in \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle \right] \Rightarrow \quad m \leq n$

Corollario $V \neq \{0\}$ sp. vett.

Tutte le basi hanno lo stesso ordine detto

dimensione di V

Dim $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indip e contenuto in $V = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$

steinitz $\Rightarrow$ $n \leq m$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ " " " $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\Rightarrow$ $m \leq n$

$n = m$

Geometria - XI

DEF $V \neq \{0\}$ f.g.

$\dim(V)$ è la cardinalità di una base

se $V = \{0\} \Rightarrow \dim(V) = 0$

se V non f.g. $\Rightarrow \dim(V) = \infty$ [Es. $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$
$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$]

NB Spesso scriveremo V_n per indicare che V è sp. vett. di dimensione n e non nullo!

Proposizione

$V \neq \{0\}$ $\dim V = n$

(i) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indip. $\Rightarrow m \leq n$

Dim Sia $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ base di V_n

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indip. $\in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = V_n \Rightarrow$ (steinitz) $m \leq n$

(ii) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indip. $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base

Dim $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sistema di generatori?

per assurdo non lo fossero $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \subsetneq V$

$\exists \underline{v} \in V \setminus \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \Rightarrow \underline{v}$ non dip. da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$ indip. di card $n+1$ ↯

(iii) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sist di gen. $\Rightarrow$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base

<u>Dim</u> se non fossero indip. potremmo estrarre una base di card. minore di n ↯

(iv) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indip. $\Rightarrow \exists\, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n$:

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n$ base

(completamento di un sistema indip. ad una base)

<u>Dim</u>. se $m = n$ ok per (iii)

$m < n \Rightarrow \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle < V$

$\exists\, \underline{w}_{m+1} \in V \setminus \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle$

non dip

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}$ indip. — base? ok / No? cont...

$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1} \rangle < V$ ...

Ci fermiamo perché il # massimo di vettori indip è n.

Es. $\mathbb{R}^3$ $\quad (1,0,0)$

$\langle(1,0,0)\rangle < \mathbb{R}^3$

$(2,3,4) \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle(1,0,0)\rangle \Rightarrow (1,0,0), (2,3,4)$ indip.

$\langle(1,0,0),(2,3,4)\rangle < \mathbb{R}^3$

$(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle(1,0,0),(2,3,4)\rangle$

$(1,0,0),(2,3,4),(0,0,1)$ indip.

Prop. V sono equivalenti per $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

(i) base

(ii) massimale rispetto all'indipendenza

(iii) minimale rispetto all'essere un sist. di gen.

(iv) sistema indip. di card. massima

(v) sistema di gen. di card. minima

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\left.\underbrace{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n}_{\text{base}}, \underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m \right] \Rightarrow \text{dip.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ massimale indip.

(usando il completamento ad una base ...)

$(i) \Rightarrow (iv)$

(segue da prop. prec.)

$(iv) \Rightarrow (i)$

$(iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$

$(i) \Rightarrow (iii)$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base : se non fosse minimale risp. alla generazione ci un sottosistema (proprio) dei $\underline{v}_i$

che è ancora un sist. di generatori

$\Rightarrow$ possiamo allora estrarre una base e trovare dimensioni $\neq$

$(iii) \Rightarrow (i)$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ minimale risp. alla generazione

$\Rightarrow$ estraiamo base che deve coincidere con $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$(i) \Rightarrow (v)$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base per assurdo esiste sistema di gen.

$\underbrace{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m}$ con $m < n$

estraiamo una base da questi che avrà perciò cardinalità $< n$ $\lightning$

$(v) \Rightarrow (i)$

$(v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

Prop. $W \leq V_n$

(i) W è f.g. e $\dim W \leq n$

Dim per assurdo W non f.g.

$\underline{w}_1 \in W \qquad W \neq \langle \underline{w}_1 \rangle$

$\exists\, \underline{w}_2 \in W \setminus \langle \underline{w}_1 \rangle \Rightarrow \underline{w}_1, \underline{w}_2$ indip

$W \neq \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle \Rightarrow \exists\, \underline{w}_3 \in W \setminus \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ indip

$\ldots \ \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n, \underline{w}_{n+1}$ indip $\lightning$

Prendo base di W (se $W \neq \{0\}$) $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$ base per W

$\Rightarrow$ indipendenti anche in $V \Rightarrow t \leq n$

(ii) $\dim W = n \Leftrightarrow W = V_n$

Dim $\underline{\Leftarrow}$ ovvio

$\underline{\Rightarrow}$ base di W $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ è anche sistema indip. di card n in V e quindi base per V.

Corollario $W, Z \leq V_n$

(i) $W \leq Z \Rightarrow \dim W \leq \dim Z$

(ii) $W \leq Z$ e $\dim W = \dim Z \Rightarrow W = Z$

Es. $\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ $\quad$ $\langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

(i) stessa dimensione ma non contenuti uno nell'altro

(ii) $\mathbb{R}^2$ $\langle (1,0) \rangle$ $\langle (1,1) \rangle$ $\langle (1,2) \rangle$ ... ∞ sottospazi stesso dim.

(iii) $\mathbb{R}^4$ $\quad (2,3,0,1)$ $\quad (1,0,0,0)$ $\quad (0,1,0,0)$

completare a base $\quad (0,0,0,1)$

$\langle * \rangle = \mathbb{R}^4$ $\quad$ 4 indip.

(iii) $H_1, \dots, H_n \leq V$ in somma diretta

$\Rightarrow \dim(H_1 + \dots + H_n) = \dim H_1 + \dots + \dim H_n$

Dim $\quad \underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1,m_1}$ base di H_1

$\underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2,m_2}$ " " H_2

...

$\underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{n,m_n}$ base di H_n

$\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1,m_1}, \underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2,m_2}, \dots, \underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{n,m_n}$ base di $H_1 + \dots + H_n$

$$h_{11} \underline{e}_{11} + \dots + h_{1,n_1} \underline{e}_{1,n_1} + \underbrace{\dots + h_{n1} \underline{e}_{n1} + \dots + h_{n n_n} \underline{e}_{n n_n}}_{\in H_2 + \dots + H_n} = \underline{0}$$

porto a destra

$$h_{11} \underline{e}_{11} + \dots + h_{1,n_1} \underline{e}_{1,n_1} = \dots - h_{n1} \underline{e}_{n1} + \dots - h_{n n_n} \underline{e}_{n n_n}$$

$$\in H_1 \cap (H_2 + \dots + H_n) = \{\underline{0}\}$$

$$\Rightarrow h_{11} \underline{e}_{11} + \dots + h_{1n_1} \underline{e}_{1,n_1} = \underline{0} \Rightarrow h_{11} = \dots = h_{1 n_1} = 0. \quad \blacksquare$$

Geometria XII

$(1,0,0)$, $(2,3,1)$, $(1,0,1)$ indip. di $\mathbb{R}^3$

per l'unicità di scrittura

$$\langle(1,0,0)\rangle \oplus \langle(2,3,1)\rangle \oplus \langle(1,0,1)\rangle$$

$$\langle(1,0,0),(2,3,1)\rangle \oplus \langle(1,0,1)\rangle$$

Relazione di Grassmann

$H, K \leq V_n$ $\quad \dim H + \dim K = \dim(H \cap K) + \dim(H+K)$

Dim

se $H \cap K = \{0\} \Rightarrow H \oplus K$ ✓

supponiamo $H \cap K \neq \{0\} \Rightarrow \dim H \cap K = t$

$\exists\, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t$ base di $H \cap K$

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$ base di H

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$ base di K

$$\underbrace{\underbrace{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t}_{t}, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r}_{r}, \underbrace{\underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s}_{s}$$

sono $r+s-t$

$$r+s-t = \dim H + \dim K - \dim H \cap K \overset{?}{=} \dim H+K$$

1) sistema di generatori

$\underline{v} \in H+K \Rightarrow \exists\, \underline{h} \in H, \underline{k} \in K : \underline{v} = \underline{h} + \underline{k}$

$\underline{h}$ è comb. lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$

$\underline{k}$ è comb. lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$

$\Downarrow$

$\underline{v}$ è comb. lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$

2) Sistema indipendente

$$a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_t \underline{e}_t + a_{t+1} \underline{h}_{t+1} + \dots + a_r \underline{h}_r + b_{t+1} \underline{k}_{t+1} + \dots + b_s \underline{k}_s = \underline{0}$$

$$\overset{x}{\overset{\parallel}{\underbrace{a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_t \underline{e}_t + a_{t+1} \underline{h}_{t+1} + \dots + a_r \underline{h}_r}_{H}}} = \underbrace{-b_{t+1} \underline{k}_{t+1} + \dots - b_s \underline{k}_s}_{K}$$

$x \in H \cap K = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} x = c_1 \underline{e}_1 + \dots + c \underline{e}_t \\ \parallel \\ -b_{t+1} \underline{k}_{t+1} + \dots - b_s \underline{k}_s \end{array}\right] \Rightarrow c_1 \underline{e}_1 + \dots + c_t \underline{e}_t + b_{t+1} \underline{k}_{t+1} + \dots + b_s \underline{k}_s$$

$$\parallel$$

$$\underline{0}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = \dots = c_t = b_{t+1} = \dots = b_s = 0$$

$$a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_t \underline{e}_t + a_{t+1} \underline{h}_{t+1} + \dots + a_r \underline{h}_r = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_t = a_{t+1} = \dots = a_r = 0 \quad \blacksquare$$

Es. $\mathbb{R}_2[x]$

$$\underset{\text{dim } 2}{\overset{H}{\langle 1, x \rangle}} + \underset{\text{dim } 2}{\overset{K}{\langle 1, x^2 \rangle}}$$

$$\langle 1, x \rangle \cap \langle 1, x^2 \rangle = \underset{\text{dim } 1}{\langle 1 \rangle}$$

$$\left[\begin{array}{l} a + bx = c + dx^2 \\ \iff \\ b = d = 0 \end{array} \right]$$

$$\text{dim } H+K = 2 + 2 - 1 = 3 = \text{dim } \mathbb{R}_2[x]$$

$$\Downarrow$$

$$H + K = \mathbb{R}_2[x]$$

V_n $\quad \mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ riferimento

$\forall \underline{v} \in V_n \quad \exists!\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \quad \underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n$

$(h_1, \dots, h_n)$ n-pla di componenti nel riferimento $\mathcal{B}$

Es. $\mathbb{R}_{2,1}$ $\quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

componenti in $\mathcal{B}$: $(3,5)$

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ componenti in $\mathcal{B}'$: $(5,3)$

Come passare da componenti in $\mathcal{B}$ a comp. in $\mathcal{B}'$?

$\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \to \mathcal{B}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ r.f. di V_n

$$\underline{e}_1 = a_{11} \underline{e}'_1 + \dots + a_{n,1} \underline{e}'_n$$
$$\underline{e}_2 = a_{1,2} \underline{e}'_1 + \dots + a_{n,2} \underline{e}'_n$$
$$\dots$$
$$\underline{e}_n = a_{1,n} \underline{e}'_1 + \dots + a_{nn} \underline{e}'_n$$

$\underline{v} \in V$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in $\mathcal{B}$

$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ in $\mathcal{B}'$

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) \underline{e}'_1 + \dots + (x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{nn}) \underline{e}'_n$$
$$= x'_1 \underline{e}'_1 + \dots + x'_n \underline{e}'_n$$

$$x'_1 = x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}, \dots, x'_n = x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{nn}$$ formule di passaggio

$$A = (a_{ij}) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad X' = AX$$

A è matrice di passaggio

Es. $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = ((1,4,1), (1,5,0), (2,5,-1))$

$\mathcal{B}' = ((1,0,-1), (0,2,1), (2,3,-2))$

$$(1,4,1) = 1 \cdot (1,0,-1) + 2 \cdot (0,2,1) + 0 \cdot (2,3,-2)$$

$$(1,5,0) = -1\cdot(1,0,-1) + 1\cdot(0,2,1) + 1\cdot(2,3,-2)$$

$$(2,5,-1) = 0\cdot(1,0,-1) + 1\cdot(0,2,1) + 1\cdot(2,3,-2)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$(-3,2,4) = 3(1,4,1) + 2(1,5,0) - 4(2,5,-1)$$

$x_1' = 3-2 = 1 \qquad x_2' = 6+2=4$

$x_3' = 2-4 = -2$

$$(-3,2,4) = 1(1,0,-1) + 4(0,2,1) - 2(2,3,-2)$$

Es.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 3a \end{pmatrix}, \text{ con } a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\in W} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = W \qquad \dim W = 2$$

Geometria - XIII

$$H = \langle (1,0,1,2), (-1,2,3,0), (3,-2,-1,4), (-2,4,6,0) \rangle \leq \mathbb{R}^4$$

$\times 2$

$$= \langle (1,0,1,2), (-1,2,3,0), (3,-2,-1,4) \rangle$$

$2(\quad) - 1(\quad) =$

$$= \langle (1,0,1,2), (-1,2,3,0) \rangle$$

Tutti i sist di ordine 2 sono una base.

Altro metodo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim H = \#$ pivot di un sistema a gradini equivalente

Corollario Due matrici a gradini equivalenti hanno lo stesso # di pivot

---

Def. Determinante di una matrice quadrata

ricorsione sull'ordine $\quad n=1 \quad A=(a) \quad \det A = a$

$\forall a_{ij}$ di A matrice complementare di a_{ij} : $A(i,j)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & a_{ij} & \\ & & & \ddots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Complemento algebrico di a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A(2,2) = (1) \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \det(1) = 1$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \qquad\qquad a_{11}A_{11} + \dots + a_{n1}A_{n1}$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} \qquad\qquad a_{12}A_{12} + \dots + a_{n2}A_{n2}$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} = \underline{\det A} = a_{1n}A_{1n} + \dots + a_{nn}A_{nn}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aA_{11} + bA_{12} = ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot A_{33} = 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 6) = -6$$

Matrici $\underline{3 \times 3}$: regola di Sarrus

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$\det = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} \right)$$

Es.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \underset{0}{1\cdot 2\cdot 0} + \underset{0}{0\cdot 3\cdot 0} + \underset{0}{1\cdot 0\cdot 0} - \left[\underset{0}{1\cdot 2\cdot 0} + \underset{0}{1\cdot 3\cdot 0} + \underset{0}{0}\right]$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Osservazione Se una matrice ha una riga (o colonna) tutta nulla allora il suo det. è 0.

Proprietà det

(i) $\det A = \det A^t$

Es. $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$

$\left|\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc$

<u>idea dimostrativa</u> : induzione sull'ordine

$\det A = \sum_i a_{1i} A_{1i}$ $\det A^t = \sum_i a'_{i1} A^t_{i1}$

(ii) Se una riga dipende dalle rimanenti $\Rightarrow$ det. è 0.

<u>Es.</u> $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 0$

<u>Corollario</u> $\det \neq 0 \Rightarrow$ righe indip.

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 9 + 60 - (28+40) = 1 \cancel{0}$

(iii) $A \in \mathbb{R}_n$ $B \in \mathbb{R}_n$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Cauchy - Binet

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}\right| = \underbrace{\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right|}_{0} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}\right| = 0$$

(iv) $h \in \mathbb{R}$ $A \in \mathbb{R}_n$ $h \cdot \det A$

(v) se scambiamo 2 righe o due colonne il det cambia segno

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 - 2 = -1$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2 - 1 = 1$$

(vi) Se aggiungiamo ad una riga (o colonne) un multiplo di un'altra il det non cambia

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(v) A matrice e D matrice a gradini equivalente ad A (per righe)

$\Rightarrow |A| \neq 0 \iff |D| \neq 0$

Def. $A \in \mathbb{R}_n$ è detta invertibile se e solo se

$\exists B \in \mathbb{R}_n : AB = I_n = BA$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione (no dim.)

A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrice trasposta dei complementi algebrici.

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 4 - 6 = -2 \Rightarrow A$ è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Corollario

$A, B \in \mathbb{R}_n \qquad AB = I_n \Rightarrow A, B$ invertibili e $B = A^{-1}$

Dim

$$\det(AB) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \neq \det B$$
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$AB = I_n \Rightarrow (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$$
$$(B = A^{-1})$$

$\blacksquare$

Def. $A \in \mathbb{R}_{n,m}$

rango di riga: dim del sottospazio generato dalle righe rango di colonne : " " " " " colonne

$$A=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \rightarrow r_r(A)=0=r_c(A)$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m}\\ a_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nm}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,m}$$

$0 < h \leq \min\{n,m\}$ righe $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_h}$

$\underline{a}^{j_1}, \dots, \underline{a}^{j_h}$

e cancelliamo tutte le altre righe e colonne.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\downarrow & & & \downarrow\end{array}\\ \begin{array}{c}\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}\\ & \begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \end{array}\end{array}$$

$0 < \underset{h}{\overset{\|}{2}} \leq 3 = \min\{3,4\}$

righe : 1 e 2

colonne : 1 e 4

• cancellare

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$ minore di ordine $\underline{h}$ (in questo caso 2)

Geometria - XIV

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & \downarrow & & \end{array} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) minore di ordine 1

$A(1;2)$

se $A \in \mathbb{R}_{n,m}$ $\left.\begin{array}{ll} \underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_h} & \text{righe} \\ \underline{a}^{j_1}, \dots, \underline{a}^{j_h} & \text{colonne} \end{array}\right] \Rightarrow A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$

il determinante del minore lo indico con

$|A|(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$

Un minore si dice di ordine massimo se il suo ordine coincide con $\min\{n, m\}$

Es $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = A$ $A(1,2;1,2)$ ordine massimo

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ A stessa è un minore di ordine massimo

Supponiamo $A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$ non sia di ordine massimo

$\exists\ i \neq i_1, \dots, i_h$ indice di riga

$j \neq j_1, \dots, j_h$ indice di colonna

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$A(2,3;2,3)$ $\quad 1 \neq 2,3$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 1 \neq 2,3$

Orlato del minore : $A(i, i_1, \dots, i_h ; j, j_1, \dots, j_h)$

Orlando con 1 e 1 : $A(1,2,3;1,2,3) = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$A(2,3;1,4)$ $\quad 1 \neq 2,3$ indice di r.

$\quad\quad\quad\quad\quad\; 2 \neq 1,4$ indice di c.

$$A(1,2,3;1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF

Un minore si dice fondamentale se

1) il suo det $\neq 0$

2) il det di ogni orlato è $= 0$

Ci sono sempre minori fondamentali? Se $A=0$ NO!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A|(3,5) = 1 \neq 0$

controlliamo tutti i possibili orlati

righe : 1, 2

colonne: 1, 2, 3, 4

Es. $|A|(2,3;4,5) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$

$|A|(2,3;1,5) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0$

Prendiamo questo come nuovo candidato e controlliamo i minori.

righe: 1

colonne: 2,3,4

$|A|(1,2,3;1,3,5) = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1-7 = -6 \neq 0$

Ordine massimo $\Rightarrow$ minore fondamentale e det $\neq 0$

Alternativamente: $|A|(1,2,3;1,4,5) = \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 3-7 = -4$

Teorema degli orlati (no dim.)

$A \in \mathbb{B}_{m,n}$ e $A(i_1,\dots,i_h;j_1,\dots,j_h)$ è un minore fondamentale

$\Rightarrow$ Le righe $i_1,\dots,i_h$ sono una base del sottospazio generato dalle righe (colonne $j_1,\dots,j_h$) (colonne)

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A(1,2,3;1,3,5) \text{ min. fond.}$$

$\langle (2,0,1,3,7), (1,0,0,0,0), (3,1,1,1,1) \rangle$ dim 3

$\langle \underline{(2,1,3)}, (0,0,1), \underline{(1,0,1)}, (3,0,1), \underline{(7,0,1)} \rangle$ dim 3

Corollario

rango di riga = rango di colonna = rango di A $r(A)$

= # di pivot di una matrice a gradini equivalente per righe.

Corollario

Tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine

Corollario

$A \in \mathbb{R}_n \qquad |A| \neq 0 \iff$ righe (o colonne) sono indip.

Dim $\quad |A| \neq 0 \Rightarrow$ righe indip. (lo sappiamo)

Supponiamo che le righe siano indip. $\Rightarrow r_r(A) = n$

Prendiamo un minore fondamentale di A: che ordine ha?

ordine $= r_r(A) = n \Rightarrow$ questo minore è A.

Per definizione allora $|A| \neq 0$.

Corollario

$A \in \mathbb{R}_n \quad \det A = 0 \iff$ righe dipendenti
(colonne dip.)

Es. calcolare una base di:

$$\langle (1,2,0,0), (5,2,3,4), (1,0,0,0), (6,4,3,4), (0,0,0,0), (\pi,0,0,0) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemi di equazioni lineari (criteri di compatibilità)

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$$

$$AX = C$$

$$C = \underline{A}_1 x_1 + \underline{A}_2 x_2 + \dots + \underline{A}_n x_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

Primo criterio di compatibilità

S è compatibile $\Leftrightarrow$ la colonna dei termini noti è comb. lineare delle colonne della matrice incompleta.

Teorema di Rouché - Capelli

S è compatibile $\Leftrightarrow$ matrice completa ed incompleta hanno lo stesso rango.

Dim

$\Leftarrow)$ $h = r(A) = r(A')$

Prendiamo h colonne indip. di A

$\Rightarrow$ sono indip. anche come colonne di A'

$\Rightarrow$ base per le colonne di A'

C si scrive come comb. lineare delle colonne di A $\Rightarrow$ Primo criterio di comp. ok

$\Rightarrow)$ Supponiamo S compatibile e mostriamo che $h = r(A) \overset{?}{=} r(A')$

Prendiamo h colonne indip. di A

$\Rightarrow$ $V = \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \rangle = \langle \underline{a}^{i_1}, \dots, \underline{a}^{i_h} \rangle$ generano anche il sottospazio

$C \in V$

colonna di A'

$\Rightarrow$ base!

Es.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-4-1$

$= -5 \neq 0$

$$|\,| = -\cancel{4} + 6 + \cancel{1} - (-6 + \cancel{1} + \cancel{4})$$

$= 12$

Geometria XV

$$S = \begin{cases} 2x + y + hz = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to A : \quad |A| = -4 + 6 + h - (-6h + 1 + 4)$$

$$= 7h - 3 = 0$$

$$|A| = 0 \iff h = \frac{3}{7}$$

$$h = \frac{3}{7} : \quad r(A) = 2 \qquad r(A') \overset{?}{=} 3$$

incompatibile

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

$$h \neq \frac{3}{7} : \quad r(A) = 3 = r(A')$$

compatibile

$$S : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = c_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2m} x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_m = c_n \end{cases}$$

Compatibile

Calcoliamo un minore fond. di A che sarà anche un minore fond. di A' ed eliminiamo le righe al di fuori.

Quelle che restano sono indip.: $\#eq \leq \#$incognite

Caso 1: n eq, n incognite

$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

$$AX = C \iff X = A^{-1} C$$

Sistema determinato!

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_n A_{n1}}{|A|}$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \dots + c_n A_{nn}}{|A|}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad |B_1| = c_1 A_{11} + c_2 A_{12} + \dots + c_n A_{1n}$$

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

Regola di Cramer

Esempio

$$S: \begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y+z=2 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0, \quad \det A = 8$$

$$x_1 = \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{8}{8} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{8} = 1$$

$$\bar{S} = \{(2,1,1)\}$$

<u>Caso 2</u> $\#\, eq = n < m = \#$ incognite

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = c \end{cases} \qquad S = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

- Prendiamo un minore fondamentale e portiamo a destra le incognite fuori dalle colonne del m.f.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases}$$

- Consideriamo fissate le incognite fuori

$$\begin{cases} 2x + y = c_1 \\ x + y = c_2 \end{cases}$$

- Usiamo Cramer: $x = c_1 - c_2$ e $y = 2c_2 - c_1$
- Sostituiamo: $x = c_1 - c_2 = -\cancel{z} - 2t + \cancel{z} + t = -t$

$$y = 2c_2 - c_1 = 2(-z-t) + z + 2t = -z$$

$$\bar{S} = \{(-t, -z, z, t) \,/\, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$\bar{S}$ indeterminato e ha ∞^2 sol.

Sistemi omogenei

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad S: AX = 0$$

Prop. $\bar{S} \leq \mathbb{R}^n$

Dim. $\bar{S} \neq \emptyset \quad (0,\dots,0) \in \bar{S}, \quad Y_1, Y_2 \in \bar{S} \quad \begin{matrix} AY_1 = 0 \\ AY_2 = 0 \end{matrix}$

$$A(Y_1 + Y_2) = AY_1 + AY_2 = 0 + 0 = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}: \quad A(\lambda Y_1) = \lambda(AY_1) = \lambda \cdot 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

Come trovare una base?

$$\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases} \qquad \bar{S} = \{ (\alpha(z,t), \beta(z,t), z, t) \,/\, z,t \in \mathbb{R} \}$$

$$\left.\begin{matrix} z = 1, \ t = 0 \to (\alpha(1,0), \beta(0,1), \underline{1,0}) \\ z = 0, \ t = 1 \to (\alpha(0,1), \beta(1,0), \underline{0,1}) \end{matrix}\right] \text{ indip.}$$

Prendiamo una generica soluzione $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \in \bar{S}$

$$(\alpha(\bar{z},\bar{t}), \beta(\bar{z},\bar{t}), \underline{\bar{z},\bar{t}}) \qquad (\bar{x}, \bar{y}, \underline{\bar{z}, \bar{t}}) \quad \text{due sol.}$$

Per Cramer $\exists !$ soluzione di $\begin{cases} 2x+y = -\bar{z}-2\bar{t} \\ x+y = -\bar{z}-\bar{t} \end{cases}$

$$\alpha(\bar{z},\bar{t}) = \bar{x} \quad e \quad \beta(\bar{z},\bar{t}) = \bar{y}$$

$$\bar{z}\,(\alpha(1,0), \beta(0,1), 1, 0) + \bar{t}\,(\alpha(0,1), \beta(0,1), 0, 1)$$
$$=$$
$$(*, *, \bar{z}, \bar{t}) \in \bar{S}$$
$$\parallel$$
$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$$

Relazione tra sistema generale ed omogeneo associato

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = c_3 \end{cases} \qquad \bar{S} \underset{\text{rel?}}{\sim} \bar{S}_0$$

$$S_0: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} S: AX = C \\ S_0: AX = 0 \end{matrix}$$

Teorema

Fisso $Y \in \bar{S}$.

1) $\forall Z \in \bar{S} \ \exists Z_0 \in \bar{S}_0 : Z = Y + Z_0$

2) $\forall Z_0 \in \bar{S}_0 : Y + Z_0 \in \bar{S}$

Dim

2) $A(Y+Z_0) = AY + AZ_0 = C + 0 = C$

$\Rightarrow Y + Z_0 \in \bar{S}$

1) Prendiamo $Z \in \bar{S}$

$A(Z-Y) = AZ - AY = C - C = 0$

$\Rightarrow Z - Y \in \bar{S}_0$

$Z = Y + (Z - Y)$

Esempio

$$S: \begin{cases} 2x+y+z+2t=1 \\ x+y+z+t=1 \end{cases} \qquad S_0: \begin{cases} 2x+y+z+2t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$

$$\bar{S}_0 = \langle (0,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$$

$$Y \in \bar{S}: \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=0$$

$$Y = (1,0,0,0) \in \bar{S} \qquad \bar{S} = (1,0,0,0) + \bar{S}_0$$

Geometria XVI

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$n-1$ eq. indip.
n incognite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \qquad r(A) = n-1$$

$\dim \bar{S} = 1$, ci basta trovare una sol. non nulla!

$A_1, A_2, \dots, A_n$ i minori di ordine $n-1$ di A

$\lambda_1 = \det A_1, \dots, \lambda_n = \det A_n$ (sicuramente $\exists i : \lambda_i \neq 0$)

$(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n) \in \bar{S}$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{n-1,1} & & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \text{] duplicata} \quad \Rightarrow \det C_1 = 0$$

Sviluppiamo risp. alla prima riga:

$$\underbrace{\lambda_1}_{x_1} a_{11} - \underbrace{\lambda_2}_{x_2} a_{12} + \dots + \underbrace{(-1)^{n-1}\lambda_n}_{x_n} a_{1n} = 0$$

Esempio

$$S: \begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ 2x+y+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$\left\langle \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \right\rangle = \bar{S}$$

APPLICAZIONI LINEARI

V, V' sp. vett. $\quad f: V \to V'$ **lineare** se

1) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \quad f(\underline{v}+\underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \underline{v} \in V, \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

<u>Altra nomenclatura</u>: omomorfismo (lineare)

Se $V=V'$: **endomorfismo**

Se f è iniettiva: **monomorfismo**

se f è suriettiva: **epimorfismo**

se f è biiettiva: **automorfismo**

Esempi

1) $f: V \to V$ $\quad$ endomorfismo <u>nullo</u>

$\quad \underline{v} \to \underline{0}$ $\quad$ (applicazione nulla)

2) $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x+y, y) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y) \qquad (x',y')$

$$f\big((x,y)+(x',y')\big) =$$
$$= f\big((x+x', y+y')\big)$$
$$= (x+x', y+y'+x+x', y+y')$$
$$\shortparallel$$
$$f\big((x,y)\big) + f\big((x',y')\big) = (x, x+y, y) + (x', x'+y', y')$$

$$f\big(\lambda(x,y)\big) = \lambda f\big((x,y)\big)$$

È iniettiva?

$$(x,y) \neq (x',y') \Rightarrow f(x,y) \neq f(x',y')$$
$$\shortparallel$$
$$(x, x+y, y) \neq (x', x'+y', y')$$

monomorfismo! (non epi)

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare
$\quad (x,y) \mapsto x$

epimorfismo (non mono)

$(1,0) \rightarrow 1$
$(1,1) \rightarrow 1$

4) $id_V: V \to V$ oppl. identica
$\quad \underline{v} \mapsto \underline{v}$

automorfismo

5) $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$
$ax^2+bx+c \mapsto (0,b,c)$

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

non è lineare!

$$\underset{\substack{\| \\ 4}}{f(1+1)} \neq \underset{\substack{\| \\ 1}}{f(1)} + \underset{\substack{\| \\ 1}}{f(1)}$$

7) $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad f: X \in \mathbb{R}^n \longrightarrow AX \in \mathbb{R}^m$

$$f(X_1+X_2) = A(X_1+X_2) = AX_1 + AX_2 = f(X_1)+f(X_2)$$

$$f: (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3x+y+2z \\ 2x+z \end{pmatrix}$$

8) $f: ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] \to 2ax+b \in \mathbb{R}_2[x]$

9) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$ non lin.!

automorfismo

5) $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$
$ax^2+bx+c \mapsto (a,b,c)$

6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Proposizione $f: V \xrightarrow[\text{lin.}]{} V'$

(i) $\forall h,k \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

(ii) $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_{V'}$

(iii) $f(h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \ldots + h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + h_n f(\underline{v}_n)$

(iv) $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$

Dim. (i) $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = f(h\underline{v}) + f(k\underline{w}) = h f(\underline{v}) + k f(\underline{w})$

(ii) $f(\underline{0}) = f(\underline{0} + \underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0})$

$\Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0}$

(iii) $f(\underbrace{h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \ldots +}_{=} h_n\underline{v}_n) = h_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + h_n f(\underline{v}_n)$

$f(h_1\underline{v}_1 + \ldots + h_{n-1}\underline{v}_{n-1}) + h_n f(\underline{v}_n)$

(iv) $f(-\underline{v}) = f(-1 \cdot \underline{v}) = -1 \cdot f(\underline{v}) = -f(\underline{v})$

Proposition

$f : V \to V'$ lineare.

1) $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_t \in V$ dip. $\Rightarrow$ $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_t)$ dip. in V'

(f conserva la dip.)

Dim. $\exists h_i \in \mathbb{R}$ non tutti nulli: $h_1\underline{v}_1 + \ldots + h_t\underline{v}_t = \underline{0}$

$$f(\quad \underset{\shortparallel}{\dots} \quad) = f(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_t f(\underline{v}_t)$$

■

2) $\underline{v} \in \langle S \rangle \Rightarrow f(\underline{v}) \in \langle f(S) \rangle$

Dim. $\underline{v} = h_1 \underline{s}_1 + \dots + h_m \underline{s}_m$ con $S = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_m\}$

$$f(\underline{v}) = h_1 f(\underline{s}_1) + \dots + h_m f(\underline{s}_m)$$

$$f(\underline{v}) \in \langle f(\underline{s}_1), \dots, f(\underline{s}_m) \rangle = \langle f(S) \rangle$$

Es. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x \in \mathbb{R}$

$(1,0) \longmapsto 1$

$(1,1) \longmapsto 1$ non conserva l'indip.

3) $W \leq V \Rightarrow f(W) \leq V'$

Dim. $W \neq \emptyset \Rightarrow f(W) \neq \emptyset$

$\underline{v}', \underline{w}' \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{v}, \underline{w} \in V : f(\underline{v}) = \underline{v}'$

$f(\underline{w}) = \underline{w}'$

$$\underline{v}' + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}) \in f(W)$$

4) $W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle \Rightarrow f(W) = \langle f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_m) \rangle$

Dim

$\underline{w}_i \in W \Rightarrow f(\underline{w}_i) \in f(W)$

$\langle f(\underline{w}_i) \rangle \leq f(W)$

$\underline{w}' \in f(W) \Rightarrow \exists\, \underline{w} \in W : \underline{w}' = f(\underline{w})$

$\exists\, h_i \in \mathbb{R} : \underline{w} = h_1 \underline{w}_1 + \dots + h_m \underline{w}_m$

$\underline{w}' = f(h_1 \underline{w}_1 + \dots + h_m \underline{w}_m) = h_1 f(\underline{w}_1) + \dots + h_m f(\underline{w}_m)$

DEF

$f : V \to V'$ lineare

$\operatorname{Ker} f = \{ \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0} \}$ e $\operatorname{Im} f = f(V)$

$= \{ f(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V \}$

$\ker f \leq V \qquad \operatorname{Im} f \leq V'$

Dim. $\ker f \neq \emptyset \quad \underline{0} \in \ker f$

$\underline{v}, \underline{w} \in \ker f \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \ker f$

$f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
$= \underline{0} + \underline{0}$
$= \underline{0}$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
$\Rightarrow \lambda \underline{v} \in \ker f$

$\operatorname{Im} f \neq \emptyset \quad \underline{0} \in \operatorname{Im} f$

$\underline{v}', \underline{w}' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \underline{v}, \underline{w} \in V :$
$\underline{v}' = f(\underline{v})$
$\underline{w}' = f(\underline{w})$

$\underline{v}' + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
$= f(\underline{v} + \underline{w}) \in \operatorname{Im} f$

$\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \underline{v}' = \lambda f(\underline{v}) = f(\lambda \underline{v})$
$\in \operatorname{Im} f$

Proposizione $f : V \to V'$ lineare
V sp. vett. f.g. e $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \rangle$

Dim. $V = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle \qquad \underline{v}' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V : \underline{v}' = f(\underline{v})$

$$h_1 f(\underline{e}_1) + \dots + h_n f(\underline{e}_n) = f(h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n) \qquad \blacksquare$$

Esempio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \mapsto (x, y)$

$(1,0,0) \mapsto (1,0)$
$(0,1,0) \mapsto (0,1)$
$(0,0,1) \mapsto (0,0)$

Esempio $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ è lineare? No!
$(x, y) \mapsto xy$

Esempio $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\operatorname{Ker} f$?

$$(x,y) \longmapsto (x, x+y, y)$$

$$\{(x,y) \in V : (x, x+y, y) = (0,0,0)\} = \{(0,0)\}$$

$$\operatorname{Im} f = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (u,v,z)\}$$
$$= \{(x, x+y, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Esempio $0_V : V \longrightarrow V$ $\quad$ $\operatorname{Ker} 0_V = V$

$$\underline{v} \longmapsto \underline{0} \qquad \operatorname{Im}(f) = \{\underline{0}\}$$

$id_V : V \longrightarrow V$ $\quad$ $\operatorname{Ker} V = \{\underline{0}\}$

$$\underline{v} \longmapsto \underline{v} \qquad \operatorname{Im}(f) = V$$

Esempio $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad$ $F_A : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto AX \in \mathbb{R}^m$

$AX = 0$ sist. di eq. lineari

$$\operatorname{Im} F_A = \left\langle A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, A\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Proposition $f : V \to V'$

i) f suriettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = V'$

ii) f iniettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

Dim. i) Ovvia

ii) $\Rightarrow$ $\underline{0} \in \ker f \Rightarrow \{\underline{0}\} \subseteq \ker f$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v} \in \ker f \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0} \\ f(\underline{0}) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$$

$$\ker f \subseteq \{\underline{0}\}$$

$\Leftarrow$) $f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = \underline{0}$

$$f(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$$ ∎

Proposizione $f : V \to V'$ monomorfismo

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ indip. $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ indip.

[In particolare base di V $\to$ base di $f(V)$]

Dim

$$h_1 f(\underline{v}_1) + \dots + h_n f(\underline{v}_n) = \underline{0} \Rightarrow h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\| \qquad \Downarrow$$

$$f(h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_n \underline{v}_n) \qquad h_1 = \dots = h_n = 0$$ ∎

Teorema $f : V_n \to V$ lineare

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

Dim.

- $\ker f = V_n \Rightarrow n + 0 = n$

• $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ iniettiva

base $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ di $V \to$ base $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$ di $\operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = n$ ∎

• $\{\underline{0}\} \subsetneq \ker f \subsetneq V_n$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ base di $\ker f$

" $\underline{v}_{t+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V_n

Proviamo che $f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n)$ è base di $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t), f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$$
$$= \langle f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$$

$$\underbrace{h_{t+1} f(\underline{v}_{t+1}) + \dots + h_n f(\underline{v}_n)}_{= f(h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n)} = \underline{0} \Rightarrow h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n \in \ker f$$

$$\exists\, h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R} : \quad h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n = h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_m$$

$$h_1 \underline{v}_1 + \dots + h_t \underline{v}_t + h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow h_1 = \dots = h_t = h_{t+1} = \dots = h_n = 0$$

∎

Isomorfismo coordinato

$V_n \qquad \mathcal{B} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$c_{\mathcal{B}} : \underline{v} = h_1 \underline{e}_1 + \dots + h_n \underline{e}_n \in V_n \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

lineare $\quad \ker c_{\mathcal{B}} = \{ \underline{v} \in V_n : c_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = (0, \dots, 0) \} = \{ \underline{0} \}$

$\operatorname{Im} c_{\mathcal{B}} = \langle c_{\mathcal{B}}(\underline{e}_1), \dots, c_{\mathcal{B}}(\underline{e}_n) \rangle$

$= \langle (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^n$

Teorema Ogni sp. vett. f.g. dim n è isomorfo col $\mathbb{R}^n$

$f: V \to V'$ isomorfismo lineare $\Rightarrow f^{-1}: V' \to V$ isomorfismo

Dim $\underline{v}', \underline{w}' \in V' \Rightarrow f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') \overset{?}{=} f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$

$\exists \underline{v}, \underline{w} \in V: \underline{v}' = f(\underline{v})$ e $\underline{w}' = f(\underline{w})$

$$f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}(f(\underline{v}) + f(\underline{w})) = f^{-1}(f(\underline{v} + \underline{w})) = \underline{v} + \underline{w} = f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\lambda \underline{v}') = f^{-1}(\lambda f(\underline{v})) = f^{-1}(f(\lambda \underline{v})) = \lambda \underline{v}$

$= \lambda f^{-1}(\underline{v}')$

Corollario

$f: V \to V'$ isomorfismo

(i) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indip. $\Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ indip.

(ii) " dip. $\Leftrightarrow$ " dip

(iii) $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ base di W $\Leftrightarrow f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n)$ base di W

Esempio $\mathbb{R}_2[x] \leftrightarrow \mathbb{R}^3$

$W = \langle x^2+2x,\ x-1,\ 2x^3+3x,\ x^2+3x-2 \rangle$

$f(W) = \langle (1,2,0), (0,1,-1), (2,3,0), (1,3,-2) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema $f : V_n \to V'_m$ lineare è "nota" quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base

Dim $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base di V_n e siano noti

$f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \Rightarrow \underline{v} \in V_n \quad f(\underline{v}) = f(h_1\underline{e}_1 + \dots + h_n\underline{e}_n)$

$= h_1 f(\underline{e}_1) + \dots + h_n f(\underline{e}_n)$

nota! ∎

$f : V_n \to V'_m \qquad \mathcal{B} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n

$\mathcal{B}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m)$ di V'_m

$$f(\underline{e}_1) = a_{11}\,\underline{e}'_1 + a_{21}\,\underline{e}'_2 + \dots + a_{m1}\,\underline{e}'_m$$

$$\dots$$

$$f(\underline{e}_n) = a_{1n}\,\underline{e}'_1 + a_{2n}\,\underline{e}'_2 + \dots + a_{mn}\,\underline{e}'_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n}$$

matrice associata ad f nei riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$

$M_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}(f)$

Se endomorfismo e $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$: $M_{\mathcal{R}}(f)$ quadrata

$\underline{v} \in V_n$ e X componenti di $\underline{v}$ in $\mathcal{R}$

X' componenti di $f(\underline{v})$ in $\mathcal{R}'$

$X' = AX$

Dim $X' = (x'_1, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n \Rightarrow f(\underline{v}) = x_1 f(\underline{e}_1) + \dots + x_n f(\underline{e}_n)$$

$$a_{11}\,\underline{e}'_1 + a_{21}\,\underline{e}'_2 + \dots + a_{m1}\,\underline{e}'_m$$

$$a_{1n}\,\underline{e}'_1 + \dots + a_{mn}\,\underline{e}'_m$$

$$= \underbrace{(x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n})}_{x'_1} \underline{e}'_1 + \dots + \underbrace{(x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn})}_{x'_m} \underline{e}'_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots \\ x_1 a_{m1} + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{m} \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che se ho una matrice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$:

$X' = AX \qquad X = C_{B}(\underline{v})$ e $X' = C_{B'}(f(\underline{v})) \quad \forall\, \underline{v}$

$\Rightarrow A = M_{BB'}(f)$.

<u>Esempi</u>

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (2x-3y, -x+y, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$B = ((1,1),(2,-1)) \qquad B' = ((0,1,1),(1,0,1),(0,0,1))$

$f(1,1) = (-1,0,0) = 0 \cdot (0,1,1) - 1(1,0,1) + 1(0,0,1)$

$f(2,-1) = (7,-3,0) = -3(0,1,1) + 7(1,0,1) - 4(0,0,1)$

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(3,0) = (1,1) + (2,-1) \Rightarrow C_{\mathcal{R}}((3,0)) = (1,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad f(3,0) = -3(0,1,1) + 6(1,0,1) - 3(0,0,1)$$

• $\ker f$?

$$\underline{v} \in \ker f \iff C_{\mathcal{R}}(f(\underline{v})) = (0,\dots,0) \iff AX = 0$$

risolviamo

$$\ker f = \{ \underline{v} \in V \mid C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) \text{ è sol. di } AX = 0 \}$$

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lin. rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nei rif. $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (1,1,0) \\ (0,1,1) \end{pmatrix}$

e $\mathcal{R}' = ((0,5),(-1,1))$

$$(x,y,z) = x_1(1,0,1) + x_2(1,1,0) + x_3(0,1,1)$$

$$C_{B'}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3)(0,5) + (2x_1 + 3x_2 + x_3)(-1,1)$$

Ker f: $AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

$$\{(10a, -7a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (10, -7, 1) \rangle$$

$$\operatorname{Ker} f = \{10a(1,0,1) - 7a(1,1,0) + a(0,1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(3a, -6a, 11a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (3, -6, 11) \rangle$$

Esempio $F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m \quad A \in \mathbb{R}_{m,n}$

B_{nat} di $\mathbb{R}^n$ e B'_{nat} di $\mathbb{R}^m$

$$M_{B_{nat} B'_{nat}}(F_A) = A \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \ldots$$

Prop. $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice di passaggio è invertibile.

Dim $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ le colonne erano le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ C_{\mathcal{B}'}(\underline{e}_1) & \cdots & C_{\mathcal{B}'}(\underline{e}_n) \end{pmatrix}$$

indipendenti $\Leftarrow$ $C_{\mathcal{B}'}(\underline{e}_1) \quad \dots \quad C_{\mathcal{B}'}(\underline{e}_n)$

isomorfismo

$\Downarrow$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile

Geometria XIX

Teorema La matrice di passaggio da $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ è invertibile

Corollario Se P è di passaggio da $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, allora P^{-1} è di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$

Dimostrazione $X' = PX \qquad X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) \qquad X' = C_{\mathcal{R}'}(\underline{v}) \qquad \underline{v} \in V_n$

$$\Downarrow$$

$$P^{-1}X' = X \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[? P^{-1} di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$]

$$\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \qquad \mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$$

$$\underline{e}'_1 = x_{11}\underline{e}_1 + \dots + x_{n1}\underline{e}_n$$
$$\dots$$
$$\underline{e}'_n = x_{1n}\underline{e}_1 + \dots + x_{nn}\underline{e}_n$$

matrice di passaggio: $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$

$$B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Definizione $A, A' \in \mathbb{R}_n \qquad A$ è simile ad A' $(A \sim A')$

$\iff \exists P : |P| \neq 0$ e $P^{-1}AP = A'$

Relazione d'equivalenza

- riflessiva: $A \sim A$: $I_n A I_n = A \qquad |I_n| = 1$ e $I_n^{-1} = I_n$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

• simmetrica: $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$: $\quad P^{-1}AP = A'$

$$P(P^{-1}AP)P^{-1} = PA'P^{-1}$$

$$A = PA'P^{-1} = (P^{-1})^{-1} A' P^{-1}$$

• transitiva $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

dim. $\exists P$ invertibile: $\quad P^{-1}AP = B$

P_1 " : $\quad P_1^{-1} B P_1 = C$

$$C = P_1^{-1} B P_1 = P_1^{-1}(P^{-1}AP)P_1 = (P_1^{-1}P^{-1})A(PP_1) = (PP_1)^{-1}A(PP_1)$$

$P_1^{-1}P^{-1} = (PP_1)^{-1}$: $\quad PP_1 \cdot P_1^{-1}P^{-1} = I_n$

Teorema $f: V_n \to V_n$ $\quad R$ e R' rif. di V_n

$$A = M_R(f) \sim M_{R'}(f) = A'$$

Dim Sia P di passaggio da R a R'

$\underline{v} \in V_n \qquad X = C_R(\underline{v}) \qquad X' = C_{R'}(\underline{v})$

$Y = C_R(f(\underline{v})) \qquad Y' = C_{R'}(f(\underline{v}))$

$X' = PX \qquad Y' = PY \qquad Y = AX \qquad Y' = A'X'$

$$PY = A'PX \Rightarrow Y = \underbrace{P^{-1}A'P}_{\text{proprietà della}} X$$

matrice associata

$\Rightarrow P^{-1}A'P = A \Rightarrow A' \sim A$

$\blacksquare$

Diagonalizzazione

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\det(A - tI_n)$ è detto **polinomio caratteristico**

$\det(A - tI_n) = 0$

eq. caratteristica

$$A - tI_n = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

Lemma Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

Dimostrazione $A \sim A' \Rightarrow \exists P$ inv. : $A' = P^{-1}AP$

$$\det(A' - tI_n) = \det(P^{-1}AP - tI_n)$$

$I_n = P^{-1}P$

$$= \det(P^{-1}AP - tP^{-1}P) = \det[P^{-1}(AP - tP)]$$

$$= \det[P^{-1}(A - tI_n)P] = \det(P^{-1})\det(A - tI_n)\det P$$

$$= \underbrace{\det(P^{-1})\det(P)}_{\det(P^{-1}P) = \det(I_n) = 1}\det(A - tI_n) = \det(A - tI_n)$$

$\blacksquare$

Def. $f: V_n \to V_n$ endomorfismo $\quad \mathcal{R}$ rif.

$A = M_{\mathcal{R}}(f)$ $\quad$ polinomio caratteristico di f è

il polinomio caratteristico di A

OSS. Def. è ben posta

eq. caratteristica di f è l'eq. caratt. di A

Esempio $f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x+3y, -x-2y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathcal{R}_{\text{nat.}} = ((1,0),(0,1))$ $\quad f(1,0) = (1,-1) = 1\cdot(1,0) - 1(0,1)$

$f(0,1) = (3,-2) = 3(1,0) - 2(0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left|\begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ -1 & -2-t \end{pmatrix}\right| = (1-t)(-2-t) + 3 = -2-t+2t+t^2+3$$
$$= t^2 + t + 1$$

$\mathcal{R}' = ((1,0),(1,1))$ fate la prova!

Definizione $f: V_n \to V_n$ endomorfismo è detto **diagonalizzabile** se esiste un rif. $\mathcal{R}$: $M_{\mathcal{R}}(f)$ è diagonale

Definizione $A \in \mathcal{M}_n$ è detta **diagonalizzabile** se è simile ad una diag.

Proposizione $f: V_n \to V_n$ endomorfismo diagonalizzabile
$\Rightarrow$ ogni matrice associata ad f è diagonalizzabile

Dim $\exists \mathcal{R}$ rif. di V_n : $M_{\mathcal{R}}(f)$ è diagonale

$\forall \mathcal{R}'$ rif. di V_n : $\quad M_{\mathcal{R}'}(f) \sim M_{\mathcal{R}}(f) \Rightarrow M_{\mathcal{R}'}(f)$ è diagonalizzabile $\#$

Proposizione $\left.\begin{array}{l} f: V_n \to V_n \text{ endo.} \quad \mathcal{R} \text{ rif. di } V_n \\ M_{\mathcal{R}}(f) \text{ diagonalizzabile} \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ diagonalizzabile}$

Dimostrazione $A = M_{\mathcal{R}}(f) \qquad \exists P \text{ inv.}: \ P^{-1}AP = D \text{ e } D \text{ diagonale}$

$\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \qquad X_1 = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1), \dots, X_n = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_n)$

$F_P: X \in \mathbb{R}^n \mapsto PX \in \mathbb{R}^n$ isomorfismo $\left(F_{P^{-1}}: X \mapsto P^{-1}X \right)$

$PX_1, \dots, PX_n$ sono indip. $\qquad C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_1) = \underline{e}'_1, \dots, C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_n) = \underline{e}'_n$

$\mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n) \qquad X_1 = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1) = (1, 0, \dots, 0)$

$\dots$

$X_n = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_n) = (0, \dots, 0, 1)$

$\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ matrice di passaggio: prima colonna

$C_{\mathcal{R}}(\underline{e}'_1) = PX_1 = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ prima col di P

$$\underset{\displaystyle A'}{\overset{\|}{M_{\mathcal{R}'}(f)}} \sim M_{\mathcal{R}}(f) = A$$

$P^{-1}AP = A'$ diagonale! ■

Corollario $f: V_n \to V_n$ endomorfismo è diagonaliz. $\Leftrightarrow M_{\mathcal{R}}(f)$ lo è $\mathcal{R}$ rif.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad F_A : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto AX \in \mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile

$M_{\mathcal{R}_{nat}}(F_A) = A$ diagonale.

Esempio id_V è diagonalizzabile $\forall \mathcal{R}$ $\quad M_{\mathcal{R}}(id_V) = I_n$

Esempio 0_V è diagonalizzabile $\quad \mathcal{R}$ rif. $\quad M_{\mathcal{R}}(0_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

Definizione $f : V_n \to V_n$ endomorfismo

$\underline{v} \in V_n$ è **autovettore** di **autovalore** λ

$\iff$

1) $\underline{v} \neq \underline{0}$

2) $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

Prop. Se $\underline{v}$ è autovettore di autovalori λ_1 e $\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Dim $f(\underline{v}) = \lambda_1 \underline{v} = \lambda_2 \underline{v} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\blacksquare$

Geometria XX

Teorema $f: V_n \to V_n$ è diagonalizzabile $\iff \exists$ base formata da autovettori

Dimostrazione $\Rightarrow$ $\exists \mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n : $M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$

$f(\underline{e}_1) = a_1 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{e}_n = a_1 \underline{e}_1$

$\dots$

$f(\underline{e}_n) = 0 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 + \dots + a_n \cdot \underline{e}_n = a_n \underline{e}_n$

$\Leftarrow$ | $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ autovettori : $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}: f(\underline{e}_1) = \lambda \underline{e}_1$

$\dots$

$\exists \lambda_n \in \mathbb{R}: f(\underline{e}_n) = \lambda \underline{e}_n$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

■

$f: V_n \to V_n$ endomorfismo $\quad \mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) \quad A = M_{\mathcal{R}}(f) = (a_{ij})$

h è autovalore $\iff \det(A - hI_n) = 0$

$\underline{v}$ è autovettore di f di autovalore h $\iff X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v})$ è sol. non banale di $(A - hI_n)X = 0$

Dim. h autovalore $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq \underline{0} \,/\, f(\underline{v}) = h\underline{v}$

$Z = C_B(\underline{v}) \neq 0$ $\qquad AZ = hZ \Rightarrow AZ - hI_n Z = 0$

$(A - hI_n)Z = 0$

$\Rightarrow (A - hI_n)X = 0$ ha ∞ sol

$\Rightarrow \det(A - hI_n) = 0$ ∎

Esempio $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (-y, x, z) \in \mathbb{R}^3$

B_{nat} $\qquad M_{B_{nat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad p(f) = \det\begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t)\left[t^2+1\right]$

$\Rightarrow \underline{t = 1}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\qquad x=y=0$

{(0,0,z): z\in R}=<(0,0,1)>

Def. h autovalore di $f : V_n \to V_n$ $\qquad V(h) = \{\underline{v} \in V_n \,/\, f(\underline{v}) = h\underline{v}\}$

autospazio relativo ad h

Proposizione (i) $V(h) \leq V_n$ e $\dim V(h) \geq 1$

h è autovalore $\Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq \underline{0} : \underline{v} \in V(h)$ $\quad [\dim \geq 1]$

$\underline{v}, \underline{w} \in V(h) \Rightarrow f(\underline{v}) = h\underline{v}$ e $f(\underline{w}) = h\underline{w}$

$$f(\underline{v}+\underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = h\underline{v} + h\underline{w}$$
$$= h(\underline{v}+\underline{w})$$

$f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) =$ lambda*h*v=h*(lambda*v)

(ii) $V(h) \simeq \{X \mid (A - hI_m)X = 0\} = S$

Dim. $\underline{v} \in V(h) \longmapsto c_B(\underline{v}) \in S$

(iii) $V(h) \cap V(k) = \{\underline{0}\}$ se $h \neq k$

Dim $\underline{v} \in V(h) \cap V(k) \Rightarrow f(\underline{v}) = h\underline{v}$ e $f(v) = k\underline{v}$
$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

(iv) $V(h_1), V(h_2), \dots, V(h_t)$ con $h_i \neq h_j$ sono in somma diretta

Dim. $\underline{v} \in V(h_1) \cap \underbrace{\langle V(h_2), \dots, V(h_t) \rangle}$ ind. su t

$V(h_2) \oplus \dots \oplus V(h_t)$

$f(\underline{v}) = h_1 \underline{v}$

$\underline{v} = \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_t$

$$f(\underline{v}) = f(\underline{v}_2) + \dots + f(\underline{v}_t)$$
$$\left.\begin{aligned} &= h_2\underline{v}_2 + \dots + h_t\underline{v}_t \\ &= h_1\underline{v}_2 + \dots + h_1\underline{v}_t \end{aligned}\right] \Rightarrow h_1 = h_2, \dots, h_1 = h_t \text{ ↯}$$

(v) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ autovettori di autovalori distinti sono indip.

Dim. $\underline{v}_i$ autovalore λ_i

$$\underline{v}_1 \in \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \rangle \Rightarrow V(\lambda_1) \cap \langle V(\lambda_i)\ i \neq 1 \rangle \neq \{0\}$$

Corollario Se l'eq. caratteristica di f ha n radici reali e distinte $\Rightarrow$ f è diag.

Dimostrazione n radici reali $\Rightarrow \exists n$ autovalori $\neq$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

bso ∎

Esempio Il viceversa non vale.

$id_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diag. $\quad (1-t)(1-t)=0$

$\Rightarrow t=1$

Def. $\underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}_{p(x)} = 0$ in $\mathbb{C}$ ha sempre al più n soluzioni

$$p(x) = (x-d_1)^{m_{d_1}} \cdot \dots \cdot (x-d_t)^{m_{d_t}}$$

m_{d_t} → molteplicità algebrica della radice d_t

$t \leq n$ e

$m_{d_1} + \dots + m_{d_t} = n$

Esempio $x^2+1 = (x-i)(x+i)$ $\begin{cases} x = i \\ x = -i \end{cases}$

$$(x+1)(x-1)(x-1) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$= (x+1)(x-1)^2$$

radice 1 : $m_a(1) = 2$

radice -1 : $m_a(-1) = 1$

Def. $\dim V(h)$ è detta *molteplicità geometrica* di h: $m_g(h)$

h autovalore: $m_a(h) = m_a(h)$ in $\det(A - t I_n) = 0$

Prop. $m_g(h) \leq m_a(h)$

Dim. Prendiamo una base per $V(h) = e_1, \dots, e_t$ con $t = m_g(h)$

completiamo ad una di V_n: $e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_n$

$R = (\qquad\qquad)$

$$A = M_a(f) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h \end{matrix}} & \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ & \vdots & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I_n| = (h - \lambda)^t \det[\qquad]$$

$$t \leq m_a(h)$$

Cor. Se $m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$

Dim. $1 \leq m_g(h) \leq m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$ $\blacksquare$

Geometria XXI

martedì 26 maggio 2020 10:49

Teorema $f: V_n \to V_n$ diagonalizz. $\Leftrightarrow$ polinomio caratt. ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ e $\forall$ radice h $m_a(h) = m_g(h)$

Dim $\Rightarrow$ $\exists R = (e_1, \dots, e_n)$ autovettori

$$\langle e_1, \dots, e_{i_1} \rangle \leq V(\lambda_1)$$

$$\dots$$

$$\langle e_{i_{n-1}+1}, \dots, e_{i_n} \rangle \leq V(\lambda_n)$$

c'è uguaglianza

$V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_n) = V \Rightarrow$

$m_g(\lambda_1) = i_1, \dots, m_g(\lambda_n) = i_n - i_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \ddots \quad \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda_1 - x)^{i_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_n - x)^{i_n - i_{n-1}}$$

$$m_a(\lambda_1) = i_1, \dots, m_a(\lambda_n) = i_n - i_{n-1}$$

$\Leftarrow$ $p(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_t)^{n_t}$ $\qquad n_1 + \dots + n_t = n$

$$n_1 = m_g(\lambda_1), \dots, n_t = m_g(\lambda_t)$$

$$\dim\big(V(\lambda_1)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_t)\big) = \dim V(\lambda_1) + \ldots + \dim V(\lambda_t)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{V(\lambda_1)}_{\text{Base } B_1}\oplus\ldots\oplus\underbrace{V(\lambda_t)}_{\text{Base } B_t} = V$$

$\cup B_i = \mathcal{B}$ base di V di autovettori. ∎

Esempio $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (3x, 3z, 3y) \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_{nat} = \mathcal{B}$ $\quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 3 & -t \end{vmatrix} = (3-t)[t^2-9]$$

$$= (3-t)(t-3)(t+3)$$

$\hookrightarrow t = 3$

$t = -3$

$m_a(3) = 2 \quad \underbrace{m_a(-3) = 1}_{\Rightarrow m_g(-3) = 1}$

$V(3)$: $(A - 3I_3)X = 0$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$y = z$

$$S = \{(x,y,y) / x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,1,1) \rangle$$

$\dim(V(3)) = 2 = m_g(3) = m_a(3)$ ok f è diag.

$V(-3)$: $\begin{cases} 6x = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

$$S = \{(0,y,-y) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

Base di autovettori: $\langle (0,1,-1), (1,0,0), (0,1,1) \rangle$

Diagonalizzazione di una matrice

$A \in \mathbb{R}_n$ $\quad A$ è diagonalizzabile $\iff F_A$ è diagonalizzabile

$F_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^n$

Autovettore per A: $Y \in \mathbb{R}^n \neq 0$: $AY = \underbrace{h}_{\text{autovalore}} Y$

$$V(h) = \{X \in \mathbb{R}^n / AX = hX\}$$

Supponiamo A diagonalizzabile. $\Rightarrow F_A$ diagonalizz.

$\Rightarrow \exists$ rif. di autovettori per $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ $\qquad M_{\mathcal{B}}(F_A) = D \sim A = M_{\mathcal{B}_{nat}}(F_A)$

$P^{-1} A P = D$ allora P passaggio da $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_{nat}$

$P = \begin{pmatrix} \downarrow & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ prima colonna $\quad e_1 = a_{11}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{n1}(0,0,\dots,1)$

$\qquad\quad e_1 \quad e_n \qquad\qquad\qquad\qquad \dots$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad e_n = a_{12}(1,0,\dots,0) + \dots + a_{n2}(0,\dots,0,1)$

D è fatta dagli autovalori presi nell'ordine

Esempio $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 3 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = (4-t)\underbrace{(t^2-3t-4)}_{(t-4)(t+1)}$$

$t = 4, -1$

$m_a(4) = 2 \quad m_a(-1) = 1$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = \frac{3}{2} y$$

$$V(4) = \{(y, \tfrac{3}{2}y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, \tfrac{3}{2}, 0), (0,0,1) \rangle$$

$$V(-1) : \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \qquad S = \{(x, -x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prodotti diretti esterni

V sp. vett. $\quad V = H \oplus K \quad H \cap K = \{1\}$ e $V = \langle H, K \rangle$

V, W sp. vettoriali. $\quad V \times W = \{(\underline{v}, \underline{w}) \,/\, \underline{v} \in V, \underline{w} \in W\}$

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \longrightarrow V \times W$$

$$((\underline{v}, \underline{w}), (\underline{v}', \underline{w}')) \mapsto (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times (V \times W) \longrightarrow V \times W$$

$$(\lambda, (\underline{v}, \underline{w})) \mapsto (\lambda \underline{v}, \lambda \underline{w})$$

$(V \times W, +, \cdot)$ è spazio vettoriale.

elemento neutro di $V \times W$ è $(\underline{0}, \underline{0})$

opposto di $(\underline{v}, \underline{w})$ è $(-\underline{v}, -\underline{w})$

$H = \{(\underline{0}, \underline{w}) \,/\, \underline{w} \in W\} \quad K = \{(\underline{v}, \underline{0}) \,/\, \underline{v} \in V\}$

$H \cap K = \{(\underline{0}, \underline{0})\} \quad \underline{u} \in V \times W \quad \underline{u} = (\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{0}) + (\underline{0}, \underline{w}) \in \langle V, W \rangle$

$V \times W = H \oplus K \qquad K \simeq V$ e $H \simeq W$

$\underline{v} \in V \mapsto (\underline{v}, \underline{0}) \qquad \underline{w} \in W \mapsto (\underline{0}, \underline{w})$

$$\dim(V\times W) = \dim V + \dim W$$

Esempio $\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_{3,1}$

$$\left(x^2+x, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) + \left(1, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(x^2+x+1, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$\left(0, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ elemento neutro $\quad -\left(1, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(-1, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

Geometrie

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$$

Esempio $\quad \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_{3,1}$

$$\left(x^2+x, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) + \left(1, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(x^2+x+1, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$\left(0, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ elemento neutro $\quad -\left(1, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(-1, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

Geometria

Spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi dello spazio (piano)

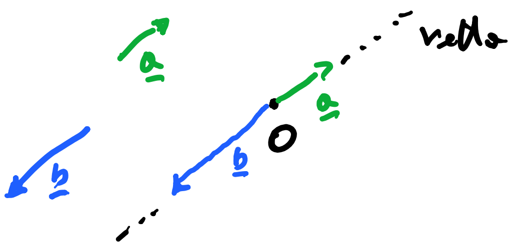
$\underline{a} = \overline{AB}$ e $\underline{b} = \overline{CD}$ vettori geometrici liberi non nulli!

$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff AB$ e CD sono segmenti paralleli

(def. ben posta) *Al posto di OA->OA' e OB->OB'*

Fissiamo O

$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff OA$ e OB sono paralleli $\iff OA$ e OB giaciono sulla stessa retta



$\iff OA$ e OB sono proporzionali

$\iff \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono proporzionali

$\iff \underline{a}, \underline{b}$ sono dipendenti

Per definizione il vettore nullo è $\parallel$ a ogni vettore:

$\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{a}$ e $\underline{b}$ sono dipendenti

V spazio $\quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V \quad O$ punto

$\underline{a} = \overline{OA} \quad \underline{b} = \overline{OB} \quad \underline{c} = \overline{OC}$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ dipendenti $\iff \underline{a} = h\underline{b} + k\underline{c} \iff OA = hOB + kOC$

$h, k \in \mathbb{R}$

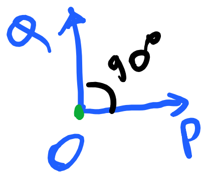
- O, B, C allineati: $\exists$ retta per cui passa A
- O, B, C non allineati: $\exists!$ piano per O, B, C

$\iff OA, OB, OC$ sono contenuti in uno stesso piano

Definizione $\underline{a}, \underline{b} \in V$ non nulli $\quad O$ punto

$\underline{a} = \overline{OP}$ e $\underline{b} = \overline{OQ}$

angolo $\underline{a}\hat{\ }\underline{w}$ è la misura in radianti dell'angolo convesso $(\leq 180°)$ formato da OP e OQ

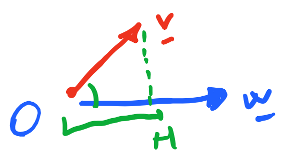


(si verifica che la definizione è ben posta)

Definizione $\underline{v} \cdot \underline{w}$ prodotto scalare standard

$= 0$ se $\underline{v}$ o $\underline{w} = \underline{0}$

$= |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}\hat{\ }\underline{w}) = |\underline{w}| \cdot |OH|$



Proprietà

1) simmetria — dipende dal fatto che $\underline{v}\wedge\underline{w} = \underline{w}\wedge\underline{v}$

2) bilinearità — $(h\underline{u}+k\underline{v})\cdot\underline{w} = h(\underline{u}\cdot\underline{w}) + k(\underline{v}\cdot\underline{w})$

(dimostrazione geometrica)

3) definito positivo — $\forall\, \underline{v}\in\mathcal{V} \quad \underline{v}\cdot\underline{v}\ge 0$

$|v|^2 \cos \underline{v}\wedge\underline{v} = |\underline{v}|^2$

$\underline{v}\cdot\underline{v}=0 \iff \underline{v}=\underline{0}$

$\Leftarrow$ ovvia

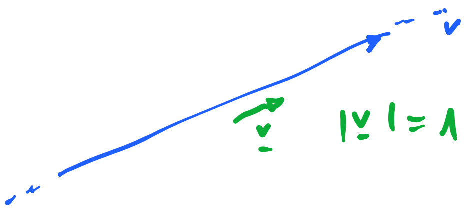
$\Rightarrow$

$|\underline{v}|^2=0 \iff \underline{v}=\underline{0}$

$\underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|^2 \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$

Definizione Vettore di lunghezza unitaria: versore

versore di una retta orientata: versore // e concorde alla retta



Def. $\underline{a} = \overline{AB}$ $\quad \underline{b}=\overline{CD} \ne \underline{0}$ in $\mathcal{V}$.

$\underline{a}\perp\underline{b} \overset{def}{\iff} CD\perp AB$ (def. ben posta)

$\underline{a}\perp\underline{b} \iff OA\perp OB \iff \theta = \underline{a}\wedge\underline{b} = \pi/2 \iff \cos\theta = 0 \iff \underline{a}\cdot\underline{b}=0$

$\underline{0}$ si pone ortogonale per definizione ad ogni vettore

$\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \iff \underline{a}\perp\underline{b} \quad \forall\, \underline{a},\underline{b}\in\mathcal{V}$

Definizione V_π $\dim V_\pi = 2$ e $\dim V = 3$

Rif. ortonormale: $\mathcal{R}_\pi = (\underline{v}, \underline{w})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$\mathcal{R} = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ e $|\underline{v}| = |\underline{w}| = |\underline{u}| = 1$

Proposizione Se $\underline{a}, \underline{b} \in V_\pi$ e $\underline{a} = a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}$

$\underline{b} = b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w}$

$$\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

Dim.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{v} + a_2 \underline{w}) \cdot (b_1 \underline{v} + b_2 \underline{w}) =$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{v})}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{w})}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{v})}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{(\underline{w} \cdot \underline{w})}_{1}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Corollario $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ / $|\underline{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$C_\mathcal{R}(\underline{v}) = (a, b)$ / $C_\mathcal{R}(\underline{v}) = (a, b, c)$

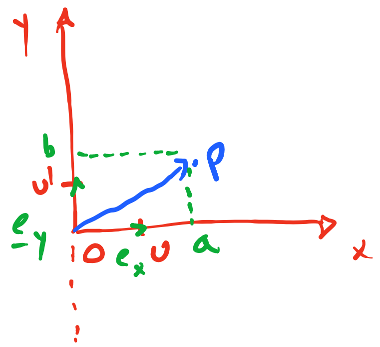
Def. $\mathcal{R} = (\underbrace{O}_{\text{origine}}, \underbrace{(\underline{e}_x, \underline{e}_y)}_{\text{rif. ortonormale del piano}})$ rif. cartesiano ortogonale monometrico

$\overline{OU} = \underline{e}_x$ e $\overline{OU'} = \underline{e}_y$ U, U' punti unitari

le rette per OU e OU' sono dette assi coordinati

asse x asse y

(orientato concordemente ai versori)



$$\overline{OP} = a\,\overline{OU} + b\,\overline{OU'}$$

ordinata ascissa

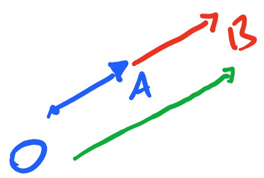
$P(a,b)$

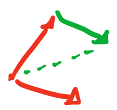
$O(0,0)$ $U(1,0)$ $U'(0,1)$

$$\overline{OO} = 0\cdot\overline{OU} + 0\cdot\overline{OU'}$$

Proposizione $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ Componenti di $\overline{AB}$: x_2-x_1, y_2-y_1

Dimostrazione $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$





$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$\Downarrow$ isomorfismo coordinate

$$(x,y) = (x_2,y_2) - (x_1,y_1) = (x_2-x_1,\ y_2-y_1) \quad \blacksquare$$

$\overline{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1)$ non è ambiguo $\overline{OP}(a,b) \equiv P(a,b)$

$\underline{v}(v_x,v_y)$ e $\underline{w}(w_x,w_y) \neq \underline{0}$

$$\cos \underline{v}\wedge\underline{w} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}\cdot\sqrt{w_x^2+w_y^2}}$$

$$\cos \underline{v}\wedge\underline{e}_x = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \qquad \cos \underline{v}\wedge\underline{e}_y = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

Cambiamenti di Riferimento

$\mathcal{R} = (O, (\underline{e}_x, \underline{e}_y))$ $\qquad$ $\mathcal{R}' = (O', (\underline{e}'_x, \underline{e}'_y))$

P: coordinate in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
P	(x, y)	(x', y')
O	$(0, 0)$	(c_1, c_2)
$\overline{OP}$	(x, y)	$(x' - c_1, y' - c_2)$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ matrice di pass.

da $(\underline{e}_x, \underline{e}_y) \to (\underline{e}'_x, \underline{e}'_y)$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - c_1 \\ y' - c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - c_1 = b_{11} x + b_{12} y \\ y' - c_2 = b_{21} x + b_{22} y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = b_{11} x + b_{12} y + c_1 \\ y' = b_{21} x + b_{22} y + c_2 \end{cases}$$

formule di passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$

Definizione $\mathcal{V}$ $\quad \mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_V = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z))$ r.c.o.m.

$\underline{v}(v_x, v_y, v_z) = v_x \underline{e}_x + v_y \underline{e}_y + v_z \underline{e}_z \qquad \underline{w}(w_x, w_y, w_z)$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - w_y v_z)\cdot \underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\,\underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y)\cdot \underline{e}_z$$

Esempio $\quad \underline{v}(1,0,1) \quad \underline{w}(2,2,0)$

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{v} \times \underline{w} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$(-2, 2, 2)$$

Proprietà

(i) $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0$:

$$\left[(v_y w_z - w_y v_z)\cdot \underline{e}_x - (v_x w_z - v_z w_x)\,\underline{e}_y + (v_x w_y - w_x v_y)\cdot \underline{e}_z \right] \cdot \underline{v} =$$

$$= v_y \cancel{w_z} v_x - w_y \cancel{v_z} v_x - v_x \cancel{w_z} v_y + v_z \cancel{w_x} v_y + v_x \cancel{w_y} v_z - \cancel{w_x} v_y v_z$$

(ii) $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0$: analoga

Dunque $(\underline{v} \times \underline{w}) \perp \underline{v}$ e $(\underline{v} \times \underline{w}) \perp \underline{w}$

(iii) $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0} \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti $\iff \underline{v} \parallel \underline{w}$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \underline{\text{rango } 1} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} \text{ e } \underline{w} \text{ dip.}$$

$\Leftarrow$ ...

(iv) $\underline{v} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{v}$

<u>Dim.</u>

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$ det cambia segno

(v) $\underline{\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z}$ $\quad \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x \quad \underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y$

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

$$\not\parallel$$

$$(0,1,0) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1)$$

<u>Definizione</u> X insieme di punti del piano è rappresentabile $\Leftrightarrow \exists$ sistema di eq. S_T in 2 incognite (e col eventuali parametri T) tale che

$$P \in X \Leftrightarrow \exists \overline{T} : \quad \in S_{\overline{T}}$$

(nello spazio: 3 incognite) Coordinate di P nel rif. appartengo a

Rappresentazione di un piano (parametrica)

Sia π un piano dello spazio. Allora π è rappresentato da un sistema parametrico a coefficienti reali del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + l s + l' t \\ y = y_0 + m s + m' t \\ z = z_0 + n s + n' t \end{cases}$$ con (l,m,n) ed (l',m',n') indipendenti ed s, t parametri reali

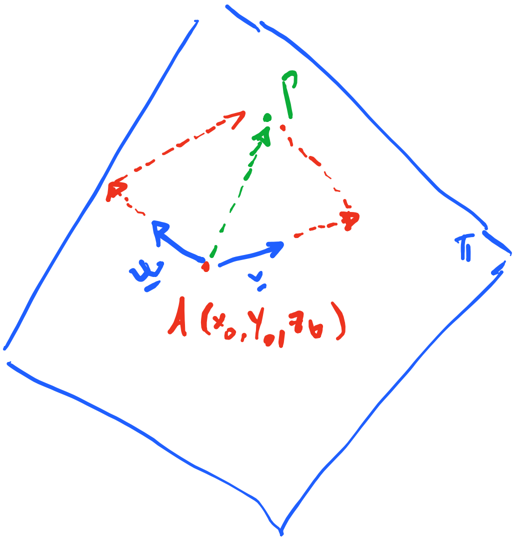
Dim. $A(x_0,y_0,z_0) \in \pi$ $\quad \underline{v}(l,m,n) \quad \underline{v}'(l',m',n')$
due vettori liberi indip. $// \pi$

$P \in \pi \iff \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}'$ applicati in A sono complanari $\iff \overline{AP}, \underbrace{\underline{v}, \underline{v}'}_{\text{indip.}}$ dip

$\iff \overline{AP} \in \langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle$

C_R $\quad (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \in \langle (l,m,n), (l',m',n') \rangle$

$\iff \exists t, s \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x-x_0 = sl + tl' \\ y-y_0 = sm + tm' \\ z-z_0 = sn + tn' \end{cases}$



Ogni sistema del tipo $\begin{cases} x = x_0 + sl + tl' \\ y = y_0 + sm + tm' \\ z = z_0 + sn + tn' \end{cases}$

rappresenta un piano.

Proposizione Il piano π è rappresentato da un'equazione del tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

(rappr. cartesiana o ordinaria) $\quad \underline{w}(a,b,c) \perp \pi$

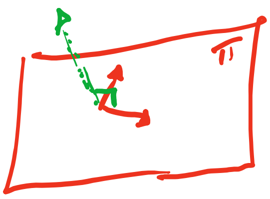
Dim. $P \in \pi \iff \underline{v}, \underline{v}', \overline{AP}$ dip. $\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$

$$\underbrace{(mn'-m'n)}_{a}(x-x_0)+\underbrace{(l'n-ln')}_{b}(y-y_0)+\underbrace{(lm'-l'm)}_{c}(z-z_0)=0$$

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ $\Rightarrow$ $ax+by+cz+d=0$

$(l,m,n)\times(l',m',n')=(a,b,c)\neq \underline{0}$ (non paralleli)

$\underline{w}(a,b,c)\perp(l,m,n)$ $\quad \underline{w}\perp(l',m',n') \Rightarrow \underline{w}\perp\pi$



Proposizione Ogni equazione $ax+by+cz+d=0$ con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ rappresenta un piano π ortogonale a (a,b,c)

Dimostrazione mi trovo due vettori ortogonali a (a,b,c) indip.

$\underline{v}\cdot(a,b,c)=0$ $\quad S: \underset{a\neq 0}{a}v_x+bv_y+cv_z=0$

$v_x = \frac{1}{a}(bv_y+cv_z)$ $\quad \bar{S}=\{(\frac{1}{a}(bv_y+cv_z), v_y, v_z) / v_y, v_z \in \mathbb{R}\}$

$\dim \bar{S} = 2$

Prendo π' passante per questi due vettori e me lo rappresento come sopra $\Rightarrow \pi' \perp (a,b,c)$

$A(x_0,y_0,z_0) \in \pi$

$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$(a',b',c') \perp \pi'$

$\Rightarrow (a',b',c') // (a,b,c) \Leftrightarrow kax + kby + kcz + d' = 0 \quad k \neq 0$

$ax + by + cz + d = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + \frac{d'}{k} = 0$

Poiché entrambi passano per $A(x_0,y_0,z_0) \Rightarrow d = d'/k \Rightarrow d' = dk$

Abbiamo dimostrato anche che due eq. del tipo $ax+by+cz+d=0$ che rappresentano lo stesso piano sono proporzionali $(k \neq 0)$ (e viceversa)

<u>Esempio</u> 1) Come si rappresenta tutto lo spazio?

$0 = 0$

2) Come si rappresenta il $\emptyset$?

$0 \neq 0$

3) π per $A(4,3,-2)$ e $// \underline{v}(1,-1,0)$, $\underline{v}'(2,1,3)$

$$\pi: \begin{cases} x = 4 + s + 2t \\ y = 3 - s + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= x + y - z - y = 0$

4) $x = 0$ piano yz passa per $(0,0,0)$

$y = 0$ piano xz $\Rightarrow d = 0$

$z = 0$ piano xy

$ax + by + cz + d = 0$ e $(a,b,c) // (1,0,0)$

$x = 0$

Rappresentazione della retta nel piano (parametrica)

r retta si rappresenta mediante un sistema parametrico del tipo $\begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \end{cases}$ $(l,m) \neq (0,0)$ e t parametro

vettore direzione

Dimostrazione $A(x_0,y_0) \in r$ e $\underline{v}(l,m) // r$ $(l,m) \neq (0,0)$

$P \in r \iff \overline{AP} // \underline{v} \iff \overline{AP}$ e $\underline{v}$ sono dip. $\iff (x-x_0, y-y_0), (l,m)$ dip

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = t l \\ y - y_0 = t m \end{cases}$$

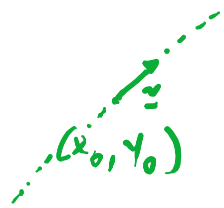
Rappresentazione ordinaria $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$

$(m,-l) = (a,b)$ $\iff m(x-x_0) - l(y-y_0) = 0$ $(a,b) \neq (0,0)$

$(-b,a) // \underline{v}$ $ax + by + c = 0$

Viceversa: ogni sistema $\begin{cases} x = x_0 + s l \\ y = y_0 + s m \end{cases}$ rappresenta la retta

che passa per (x_0,y_0), $// \underline{v}(l,m)$



Viceversa $ax + by + c = 0$ $(a,b) \neq (0,0)$ rappresenta una retta

r retta $// (-b,a)$: $a'x + b'y + c' = 0$

$A(x_0,y_0)$ sol. di $ax + by + c$

$$\left.\begin{array}{l} (a',-b') // (a,-b) \\ (x_0,y_0) \text{ sol} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc \end{array}$$

Oss. Due eq. ordinarie rappresentano la stessa retta sse sono proporzionali ($k \neq 0$)

Def. $\underline{v}(l, m) // r$ (l, m): numeri direttori (parametri)

(sono definiti a meno di un fattore di prop. non nullo)

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2) \in \pi$

$\overline{AB} // r$ per A e B $r: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - y_1)$$

Se $y_2 - y_1 \neq 0 \neq x_2 - x_1 \Rightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (rapporti uguali)

- $ax + by + c = 0$ retta r.

Passa per $(0, 0) \iff c = 0$

Se $b \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

$y = \underline{m}x + p$ forma esplicita

coefficiente angolare di r

Coseni direttori

Retta r orientata $\quad \cos(\widehat{\underline{e}_x \underline{v}})$ e $\cos(\widehat{\underline{e}_y \underline{v}})$

$\underline{v} // r$

$v: ax+by+c=0 \qquad = \pm \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(-b, a)$

$\pm$: a seconda che $(-b,a)$ sia concorde o discorde

Definizione

Due rette r, r' sono parallele $\iff$ $r \cap r' = \emptyset$ (propriamente) o $r = r'$ (impropriamente)

$\underline{v}(l,m) // r$

$\underline{v}(l',m') // r'$

$r // r' \iff (l,m), (l',m')$ sono proporzionali

$r: ax+by+c=0 \qquad (-b,a) // r$

$r': a'x+b'y+c'=0 \qquad (-b',a') // r'$

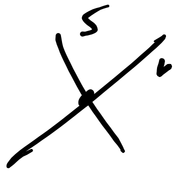
$r // r' \iff (-b,a)$ prop. a $(-b',a') \iff (a,b)$ prop. a (a',b')

- Se (a,b,c) prop. a $(a',b',c') \Rightarrow$ $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ def. la stessa retta
- Se (a,b,c) non prop a $(a',b',c') \Rightarrow$ propr. parallele

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

se $(a,b) \sim (a',b')$, $(a,b,c) \not\sim (a',b',c') \Rightarrow \cap (\Rightarrow$ non compatibile

se $(a,b) \sim (a',b')$, $(a,b,c) \sim (a',b',c') \Rightarrow$ sist. comp. ∞ soluzioni se $(a,b) \not\parallel (a',b')$ $\Rightarrow$ sistema rango massimo $\Rightarrow$ $\exists!$ soluzione

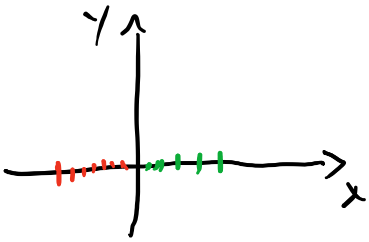


Distanza tra insiemi

$A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2) \in \pi$ $\quad d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$= |\overline{AB}|$

$S,T \subseteq \pi$: $\quad \text{dist}(S,T) = \inf\{ d(P,Q),\ P\in S,\ Q\in T \} \geq 0$

Es.



$X = \{ (-\frac{1}{n},0) \ / \ n\in\mathbb{N} \}$
$Y = \{ (\frac{1}{n},0) \ / \ n\in\mathbb{N} \}$

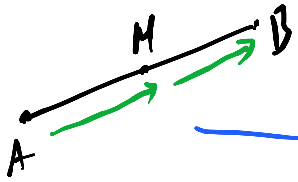
$\text{dist}(X,Y) = 0$

Es. $X\cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \text{dist}(X,Y) = 0$

$\exists P\in X\cap Y \quad d(P,P) = 0$

Punto medio di un segmento

$A(x_1,y_1) \neq B(x_2,y_2) \in \pi$ $\qquad M(x_M,y_M)$ punto medio
(stessa distanza)



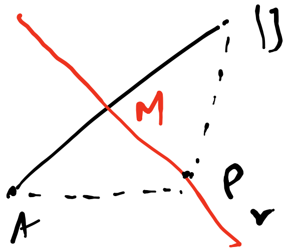
$\longrightarrow$ $\overline{AM} = \overline{MB}$ ca $\Rightarrow (x_M - x_1,\ y_M - y_1)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$(x_2-x_M,\ y_2-y_M)$

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

Asse del segmento

$P(x,y)$



$$P \in r \iff d(A,P) = d(B,P)$$

$$\iff (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

$$\iff 2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$$

$(y_1-y_2,\ x_2-x_1) \parallel r$ $\qquad$ $\vec{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$

$-b \quad a$ $\qquad\qquad$ $a \quad b$

$-ab+ab=0 \implies r \perp \vec{AB}$

Rappr. ordinaria retta nello spazio

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d=0 \end{cases}$$

$(a,b,c) \nsim (a',b',c')$ ✓

→ matrice incompleta rango 2

∞^1 soluzioni omogeneo associato

$$(x_0, y_0, t_0) + \langle (l, m, n) \rangle$$

$(x_0, y_0, t_0) \longrightarrow \underline{v}\,(l, m, n)$