TEOREMA DI DE MOIVRE - LAPLACE

$n \in \mathbb{N}$,
$p \in (0,1)$ $S_n \sim B(n, p)$; $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Risulta:

$$\mathbb{E}(S_n) = np \;;\; \mathbb{D}^2(S_n) = np(1-p).$$

Dopo di ciò, si ha:

$$a < b, \quad \mathbb{P}\left[a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} \phi(b) - \phi(a).$$

$\square$

ESEMPIO 5.4d

X è il numero degli studenti (tra i 450 ammessi alla prova) che supera la prova.

La probabilità che uno studente superi la prova vale 0,3. Si supponga che la prova venga effettuata in condizioni da non permettere l'interazione tra gli studenti.

$$\mathbb{P}(X > 150) = \sum_{i=151}^{450} \binom{450}{i} (0,3)^{i} \cdot (0,7)^{450-i}$$

D'altra parte

$$450 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = \frac{450}{10 \cdot 10}\, 3 \cdot 7 = 4,5 \cdot 3 \cdot 7 \geq 10.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(X \geq 150,5) \approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{150,5 - \frac{450}{10} \cdot 3}{\sqrt{\frac{450 \cdot 3 \cdot 7}{100}}} \right)$$

$$\approx \mathbb{P}(Z \geq 1{,}59)$$

$$\approx 1 - \mathbb{P}(Z < 1{,}59)$$

$$\approx 1 - \phi(1{,}59)$$

$$\approx 0{,}0559.$$

$\square$

ESEMPIO 5.42

Sia X il numero di pazienti sui 100 che hanno ottenuto una riduzione del tasso di colesterolo in seguito a una dieta consigliata dal team dei dottori.

$$X \sim B\left(n = 100,\ p = 1/2\right).$$

Risulta

$$n p (1-p) = \frac{100}{2 \cdot 2} = 25 \geq 10 .$$

$$\mathbb{P}(X \geq 65) = \sum_{i=65}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$= \mathbb{P}(X \geq 64{,}5)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{64{,}5 - 50}{\sqrt{100/4}} = \frac{14{,}5}{5}\right)$$

$$\approx 1 - \phi(2{,}9)$$

$$\approx 0{,}0019 .$$

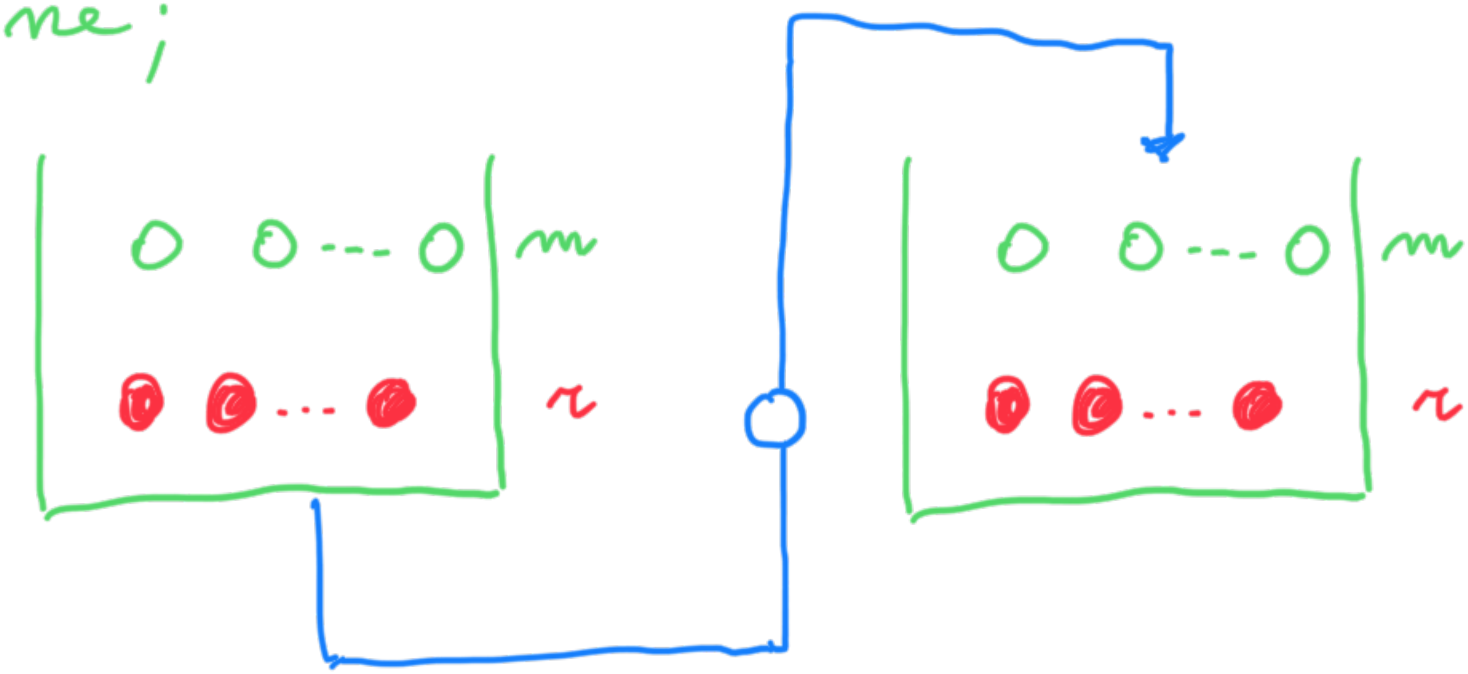
$\square$

ESEMPIO 5.4 J

Il lancio di una moneta un numero n volte con probabilità di successo pari a pari a $p \in (0,1)$ ottenibile come rapporto di due numeri interi, $p = \frac{b}{r+b}$, può essere sostituito dall'estrazione di una biglia da un'urna con le seguente caratteristiche:

- nell'urna ci sono b biglie bianche e r biglie rosse;
- la faccia T della moneta corrisponde al colore bianco;
- la biglia estratta è reintrodot-

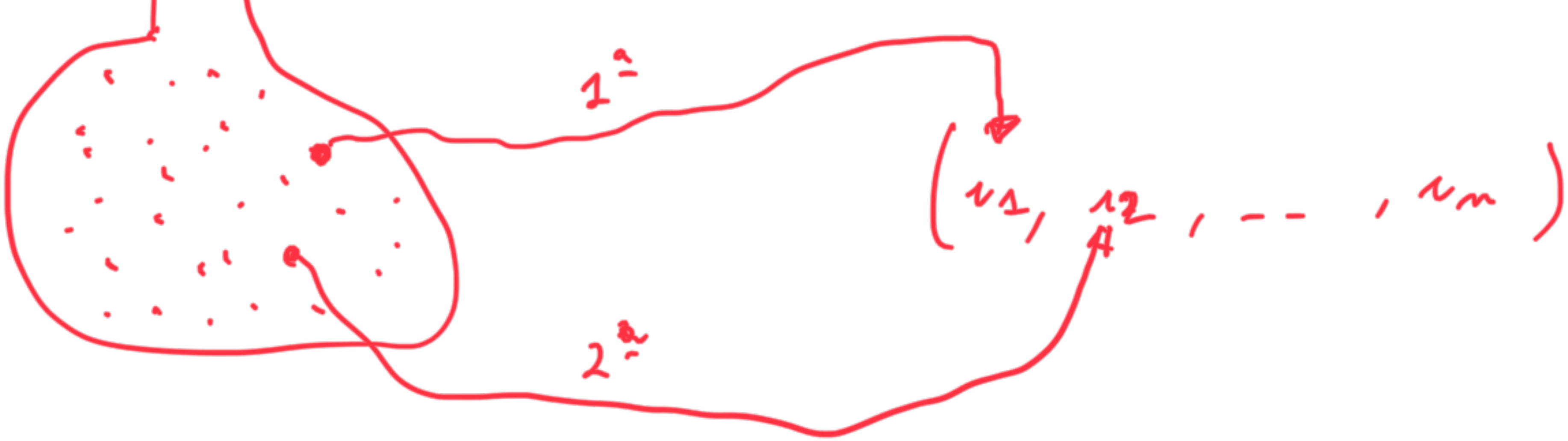
ta nell'urna dopo ogni estrazione;



- prima dell'estrazione l'urna è chiusa e agitata a lungo.

La scelta a caso di un numero n di individui da una popolazione che ne ha N è diversa dall'estrazione di n biglie con rimpiazzamento da un'urna:

l'individuo scelto non può essere scelto una seconda volta



- estrazione sequenziale senza rimpiazzamento oppure estrazione in blocco

Ma se il numero N degli individui della popolazione N e il numero n degli individui n da scegliere sono tali che

$$N \gg n \quad \text{(N molto maggiore di n)}$$

i due schemi sono approssimativamente uguali.

Quindi se X è il numero degli individui che sono favorevoli al divieto di fumo, sapendo che $N > 8000000$ e $n = 101$, possiamo scrivere:

$$X \text{ (approssimativamente)} \sim B(101,\ 0{,}52).$$

Inoltre,

$$101 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48 \simeq 25{,}21 > 10$$

e quindi si può applicare il Teorema di De Moivre - Laplace:

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{101}{2}\right) \approx \mathbb{P}\left(Z > \frac{\frac{101}{2} - 101 \cdot 0{,}52}{\sqrt{101\,(0{,}52)(0{,}48)}}\right)$$

$$\approx \mathbb{P}\left(Z > -0{,}04\sqrt{101}\right)$$

$$\approx 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq -0{,}04\sqrt{101}\right)$$

$$\approx 1 - \left[1 - \phi\left(0{,}04\sqrt{101}\right)\right]$$

$$\approx \phi\left(0{,}04\sqrt{101}\right)$$

$$\approx 0{,}6552.$$

L'esempio si conclude con la richiesta: determinare la taglia n del campione per la quale risulta:

$$\mathbb{P}\left(X > 0{,}5m\right) \geq 0{,}95.$$

Si lascia allo studente.

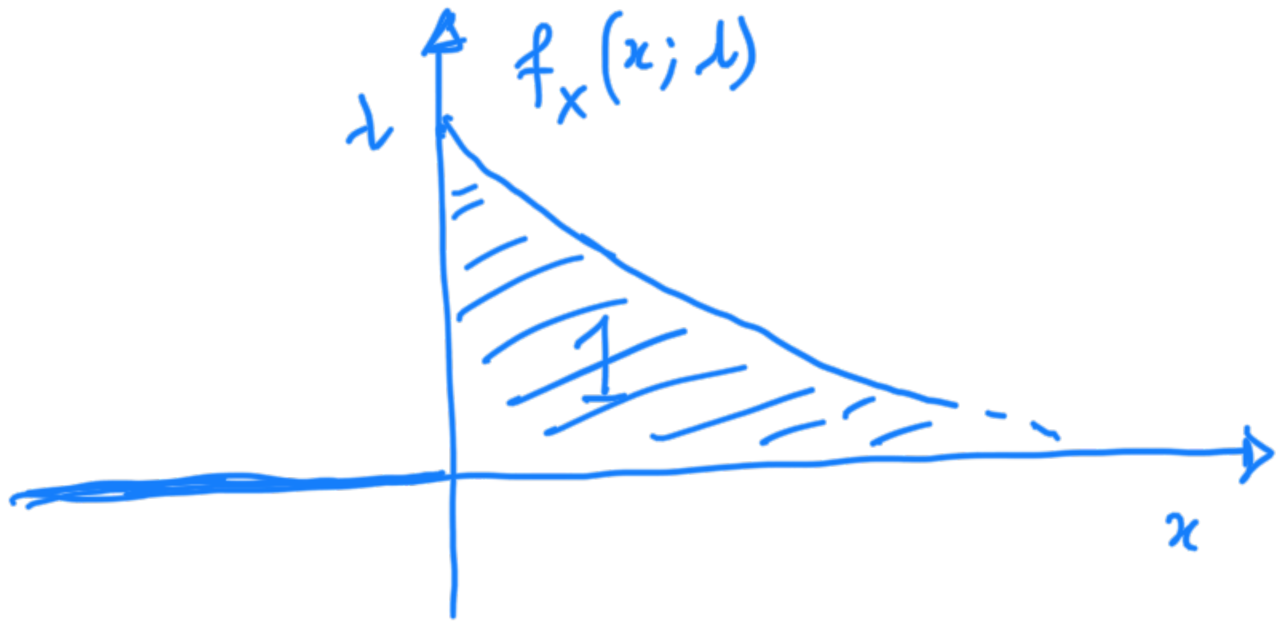
$\square$

Sia $\lambda > 0$. Una v.a. X si dice avere legge esponenziale di parametro λ e si scrive $X \sim \mathrm{Esp}(\lambda)$ se la sua F.D. si ottiene integrazione dalla seguente f.d.p.:

$$f_X(x) \equiv f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Il grafico della f.d.p. è il seguente

$$\lim_{x \to 0^+} f(x;\lambda) = \lim_{x \to 0^+} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda$$



VERIFICA DELLE PROPRIETÀ

(1) $x \leq 0 \Rightarrow f_X(x;\lambda) = 0$;

$x > 0 \Rightarrow f_X(x;\lambda)$ è il prodotto di due fattori positivi.

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x;\lambda)\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$t = \lambda x \qquad x \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

$$x = \frac{t}{\lambda} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\lambda}$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda \, e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = - e^{-t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= e^{-t} \Big|_{+\infty}^{0} = 1 - 0 = 1 .$$

CALCOLO DELLA FUNZIONE di DISTRIBUZIONE

$$x \leq 0, \qquad F_X(x;\lambda) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y;\lambda)\, dy = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dy = 0 .$$

$$x > 0, \qquad F_X(x;\lambda) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y;\lambda)\, dy = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dy +$$

$$\int^{x} \lambda e^{-\lambda y} \, d$$

$$+\int_0 \lambda e^{-}\, dy$$

$$= -e^{-\lambda y}\Big|_0^x = e^{-\lambda y}\Big|_x^0 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

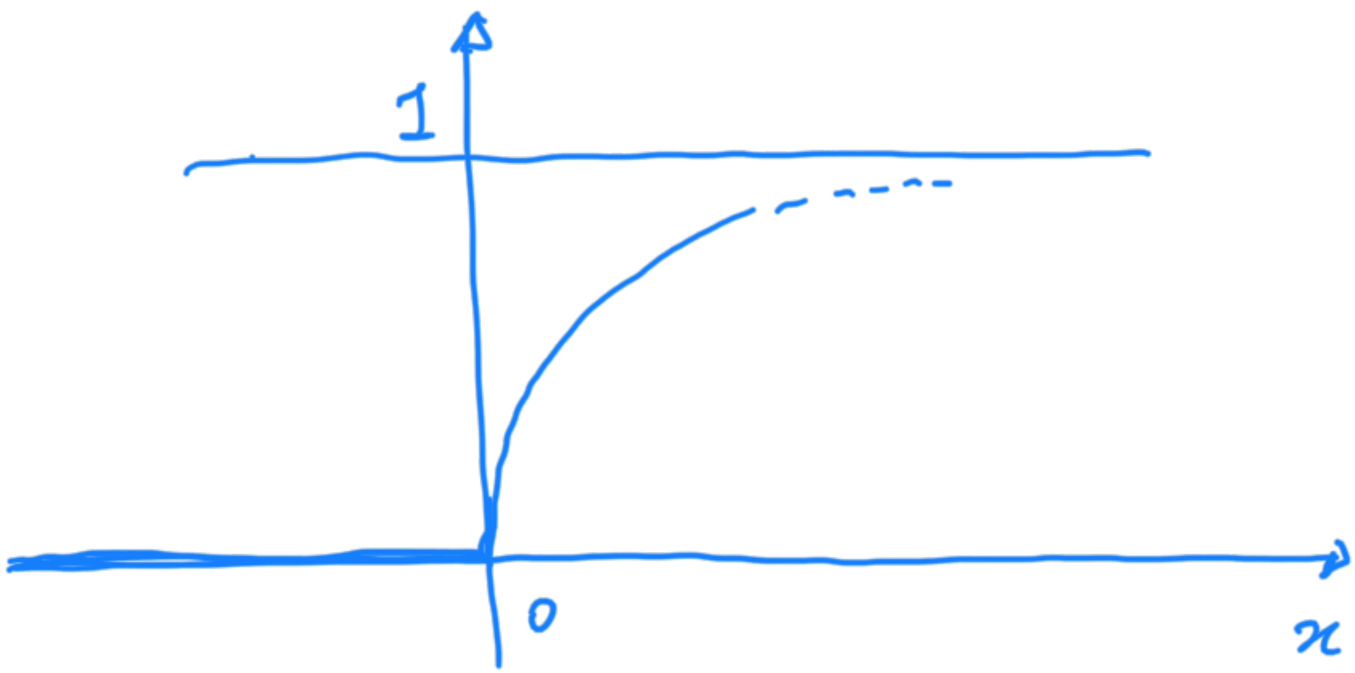
In definitiva:

$$F_X(x;\lambda) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x;\lambda)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-\lambda x}\right)$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 1$$



MOMENTI

PROPOSIZIONE

Sia $X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$ e sia $m \in \mathbb{N}$.

Risulta:

$$\mu'_m = \mathbb{E}(X^m) = \int_0^{+\infty} x^m \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{m!}{\lambda^m}.$$

DIM

- $m = 1$

$$\mu'_1 \equiv \mu_X = \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{}\ \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{}\, dx$$

$$D_x(x) = 1 \quad ; \quad \int \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x} + c$$

$$= -x e^{-\lambda x}\Big|_0 + \int_0 1 \cdot e \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1!}{\lambda^2} .$$

- Sia vera la tesi per $n > 1$. Bisogna far vedere che essa è vera per $n+1$.

$$\mathbb{E}(X^{n+1}) = \int_0^{+\infty} x^{n+1} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}} dx$$

$$= -x^{n+1} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} dx$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n+1} \cdot e^{-\lambda x} = 0$$

$$= (n+1)\frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx}_{= n!/\lambda^n}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{\lambda \cdot \lambda^n} = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}.$$

$\square$

COROLLARIO

Sia $X \sim Esp(\lambda)$. Si ha:

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

DIM

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$= \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$\square$

COROLLARIO

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}{|\mathbb{E}(X)|} = 1.$$

DIM

$$\frac{\sqrt{\mathbb{D}^2(X)}}{|\mathbb{E}(X)|} = \frac{\sqrt{1/\lambda^2}}{1/\lambda} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1.$$

$\square$