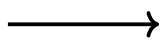
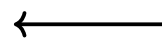


CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 LUGLIO 2022

Svolgere i seguenti esercizi,



giustificando pienamente tutte le risposte.



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

Non è necessario consegnare la traccia né chiedere se la traccia vada consegnata.

Esercizio 1.

- (i) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione. Completare la frase: f non è iniettiva se e solo se $\dots a, b \in \dots$
- (ii) Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 1000\}$ e $B = \{34, 72, 108\}$. Sia S l'insieme delle applicazioni $f: A \rightarrow B$ tali che, per ogni $a, b \in A$, $a \equiv_4 b \Rightarrow f(a) = f(b)$ (Dunque, ad esempio, se $f \in S$ si ha $f(0) = f(4) = \dots$ ed anche $f(1) = f(5) = \dots$)
 - 1.) È vero o falso che tutte le applicazioni costanti $A \rightarrow B$ appartengono a S ?Indicare (senza effettuare calcoli!):
 - 2.) il numero delle applicazioni costanti $A \rightarrow B$;
 - 3.) il numero delle applicazioni iniettive appartenenti a S ;
 - 4.) $|S|$.

Esercizio 2. Posto $n = 78636645532$, stabilire se $[n]_{n+1}$ è o non è invertibile in $(\mathbb{Z}_{n+1}, \cdot)$.

Esercizio 3. Determinare gli insiemi delle soluzioni (in \mathbb{Z}) delle equazioni congruenziali $92x - 2 \equiv_{116} 10$ e $920x - 20 \equiv_{1160} 100$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $f = x^4 + \bar{3}x^3 - x^2 + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$. Dando per noto che $-\bar{1}$ è l'unica radice di f in \mathbb{Z}_7 ,

- (i) scrivere f come prodotto di polinomi monici irriducibili;
- (ii) elencare i polinomi monici di grado due o tre che dividono f in $\mathbb{Z}_7[x]$.

Esercizio 5. Siano \mathbb{P} l'insieme dei numeri interi primi positivi e $T = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } n\}$. Sia poi f l'applicazione $n \in T \mapsto (\max \pi(n), \min \pi(n)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

- (i) Determinare $\overleftarrow{f}(\{(2, 2)\})$, $\overleftarrow{f}(\{(2, 7)\})$, $\overleftarrow{f}(\{(7, 2)\})$, $\overleftarrow{f}(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$;
- (ii) f è iniettiva? f è suriettiva?
- (iii) Detto \mathfrak{R} il nucleo di equivalenza di f , determinare $[120]_{\mathfrak{R}}$.

Sia ora ρ la relazione binaria in T definita da: per ogni $a, b \in T$,

$$a \rho b \iff a = b \vee \max \pi(a) + \min \pi(a) < \max \pi(b) + \min \pi(b).$$

- (iv) Determinare in (T, ρ) eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
- (v) ρ è una relazione d'ordine totale?
- (vi) (T, ρ) è un reticolo?
- (vii) Disegnare il diagramma di Hasse di (L, ρ) , dove $L = \{81, 10, 14, 21, 33, 50, 100\}$. Questo insieme ordinato è un reticolo?
- (viii) Se (L, ρ) è un reticolo, è distributivo? È complementato?
- (ix) Quali tra $L_3 := L \cup \{3\}$ e $L_4 = L \cup \{4\}$, con l'ordinamento indotto da ρ , formano un reticolo?

Esercizio 6. Sia $*$ l'operazione binaria definita in \mathbb{Z}_{14} da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{14}$

$$a * b = a + \bar{7}b.$$

- (i) $*$ è associativa? È commutativa?
- (ii) $(\mathbb{Z}_{14}, *)$ ha elementi neutri a destra o a sinistra? Nel caso, determinarli.
- (iii) Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_{14}, *)$?
- (iv) Determinare, se esistono, gli $a \in \mathbb{Z}_{14}$ tali che $a * \bar{3} = \bar{11}$, quelli tali che $a * \bar{5} = \bar{11}$ e quelli tali che $a * \bar{11} = \bar{11}$.