Esercizi 1

1. Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni:
$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$

2. Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_1y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_2y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad xh_3y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di x (ossia, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y = nx$).

3. Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:
$f : x \in \mathbb{Z} \to 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$
$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N}^* \to 2x - 1 \in \mathbb{N}^*$
$p : x \in \mathbb{N}^* \to x - 1 \in \mathbb{N}$

4. Determinare le classi di equivalenza della relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su $\mathbb{N}$ tale che

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ è pari.}$$

5. Di quale delle seguenti equazioni lineari la quaterna $(1, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione?
(a) $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1$; (b) $-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; (c) $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$.

Quale delle seguenti n-uple di numeri reali è soluzione dell'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$?
(a) $(0, 3, 0, -1)$; (b) $(1, -2, 0)$; (c) $(1, 0, 1, 0)$; (d) $(1, 2, 4, 1, 1)$.

6. Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che -2 è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. Infatti, questa operazione non è associativa.

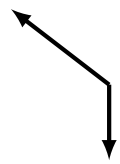
7. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà sono soddisfatte da queste operazioni?

8. Cosa è un gruppo abeliano? Quali esempi di gruppo abeliano e di gruppo non abeliano conosci? Cosa è un campo? Quali esempi di campo conosci?

Esercizi 2

1. Cosa è uno spazio vettoriale su un campo? Quali esempi di spazio vettoriale conosci?

2. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:



Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -2 quello già disegnato: 

3. Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

4. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

$X = \{\alpha(2, 1, -1) + (1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

5. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}[x]$ dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x a coefficienti in $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}[x]$?

$Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{a + (a + b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{R}$ di tipo 2×2 è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$?

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a - b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & b \\ a - b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa è un sottospazio vettoriale di V?

8. Dati t vettori $v_1, \dots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa vuol dire che un vettore v è combinazione lineare dei vettori assegnati?

9. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa è un sistema di generatori di V? Cosa vuol dire che V è finitamente generato?

10. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$Y = \{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$;
$T = \{(0, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}); \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$;
$Z = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizi 3

1. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K e un insieme $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di vettori di V, cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che S è linearmente dipendente?

2. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2.
(ii) Dire se S è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?
(iii) È vero che il vettore $w = (0, 0, 1)$ è combinazione lineare dei vettori di S? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, w?
(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da S? Il sistema S è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

3. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.
(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.
(iii) I vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli?

4. Enunciare il Lemma di Steinitz e il teorema di equipotenza delle basi. Spiegare cosa è la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K.

5. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:
$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;
$L((0, 1, 0, 0, 0,), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

6. Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):
$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

7. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si determini:

(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente *indipendente*;
(ii) un insieme di tre vettori che sia linearmente *dipendente.*;
(iii) un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2;
(iv) una base di V che contenga i vettori $u = e_1 + 2e_3$ e $v = e_2 - e_3$.

Vedere se l'insieme $S = \{2e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_2, e_2 + e_1\} \subseteq V$ è una base di V.

Esercizi 4

1. Fissato una base ordinata $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

2. Sia $\mathcal{R} = (u, v, w)$ una base ordinata dello spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori liberi della geometria elementare.

(i) Dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di a in $\mathcal{R}$? E di b in $\mathcal{R}$? E di c in $\mathcal{R}$?

(ii) Spiegare perché è vero che tre vettori liberi sono complanari se e solo se sono linearmente dipendenti.

3. Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nelle basi ordinate fissate:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), 0, 1, 0))$.

(iii) $3 - 2x + x^2 - x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ in $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - 2x, 1 + x^2, x + x^3, x^3 - x^4)$.

4. Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2,2}$

(v) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

ESERCIZI 5

1. Dati p sottospazi vettoriali $W_1, \ldots, W_p$ di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma. Cosa vuol dire che un sottospazio somma è una somma diretta?

2. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:
$W_1 = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,-1,1),(1,-1,0,1))$,
$W_2 = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,0,1,1))$.
Determinare i sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

3. Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 5 su un campo $\mathbb{K}$ e siano H e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 4$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.

4. Dati due spazi vettoriali V e V' su uno stesso campo K, dire cosa è un'applicazione lineare f di V in V'. Quali proprietà delle applicazioni lineari hai studiato?

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché f non è un'applicazione lineare.

6. Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a+2b, a-b+1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

7. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore (x_1,x_2,x_3) di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore u di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

ESERCIZI 6

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$. Determinare Imf. Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a Imf? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore (x_1, x_2, x_3) tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (1, 0, 1)$.

2. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1, 1), f((0, 1, -1)) = (2, -1, 0, 0), f((1, 1, -1)) = (0, 0, 0, 0)$.

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3, -4, 1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore (x, y, z).
(iii) Determinare una base di Imf.
(iv) Dire se f è iniettiva e suriettiva.

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x, y, z, t)) = (x + y - z - t, -x + z, 2y - 2t)$. Determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1, 2, -2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Siano $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ e $u_3 = (0, 1, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1, 1, 1)) = (1, 0, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1)$ e $f((0, 1, 2)) = (0, 0, 1)$.

5. Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $u = (2, -5)$ appartenga al nucleo di T e $v = (-2, 3)$ appartenga all'immagine di T.

6. Cosa vuol dire che una matrice A su un campo K è ridotta a gradini? Descrivi il metodo di Gauss per ridurre una matrice a gradini con l'uso delle trasformazioni elementari.

7. Cosa è il rango di una matrice A su un campo K? Qual è il rango di una matrice ridotta a gradini? Ripeti la dimostrazione che le operazioni elementari (sulle righe) non cambiano lo spazio generato dalle righe della matrice e, quindi, non cambiano il rango.

8. Determinare l'isomorfismo associato alla base ordinata $\mathcal{B} = (1+2x, 1-x, 1-x^2)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$. Usare questo isomorfismo per studiare la lineare indipendenza dell'insieme $S = \{1 - x + x^2, 2 + x + 2x^2, 3x\}$ mediante i vettori delle componenti in $\mathcal{B}$.

9. Ridurre a gradini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Come si definisce il prodotto righe per colonne tra matrici? Quali proprietà di questa operazione conosci?

11. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti AB, BA, AC, BD, BE, CB, CC, DE, ED, $(AB)D$, $A(BD)$.

12. Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2, 1, 2, -1), (1, 1, 1, 1), (0, -1, 0, 3))$ di $\mathbb{R}^4$, determinare un sottospazio vettoriale U tale che $W + U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

13. Osservare che gli spazi vettoriali $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3[x]$ sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ hanno entrambi dimensione 4 ed esibire un isomorfismo tra essi.

ESERCIZI 7

1. Sia Σ un sistema di m equazioni lineari su un campo K in n incognite.

(i) Cosa è una soluzione di Σ?
(ii) Cosa vuol dire che Σ è compatibile?
(iii) Conosce un criterio che caratterizza la compatibilità di Σ?
(iv) Se Σ' è un altro sistema di equazioni lineari su K nello stesso numero n di incognite, cosa vuol dire che Σ e Σ' sono equivalenti?
(v) Dimostrare che, se Σ è omogeneo, l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n.

2. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & y & +2z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 1 \\ & y+ & 3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \end{array}\right.$$

3. Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

4. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZI 8

1. Studiare le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad (c)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\qquad (e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Data un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a T in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

3. Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2),\qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x],\quad \mathcal{R} = (1, x, x^2),\quad \mathcal{R}' = \mathcal{R};$

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)),\qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)).$

4. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1, 0, 1)) = -1 + 2x - x^2 + x^3$, $f((1, 1, 2)) = 4x + x^3$ e $f((0, 0, 1)) = 2x - x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1, a_2, a_3))$, per ogni vettore (a_1, a_2, a_3) di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine Imf e il nucleo Ker$f$ di f;
(b) dire se l'applicazione f è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a f nelle basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, -x^2, x + x^3)$.

5. Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$ di $\mathbb{R}^3$,

(a) determinare la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice Q di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto PQ? E QP?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2 - x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B}$ e quella associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}}$. Che relazione sussiste tra queste due matrici?

6. Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella Q da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (x + 2y, y + z, x + y + z)$, determinare la matrice A associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $\bar{A}$ associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $Q = P^{-1}$ e ovviamente $P = Q^{-1}$. Inoltre si ha che $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}\bar{A}P$.

7. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + \lambda z = 0 \\ \lambda x + y + 2z = -1 \end{cases}\qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

8. Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio è l'insieme delle soluzioni:

$H = \mathcal{L}((2, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 2))) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U = \mathcal{L}((1, 1, -1, 1, 0), (-1, -1, 1, -1, 0), (0, 2, 1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^5$
$X = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (2, 1, -1, 1), (-1, 4, 2, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Y = \mathcal{L}((2, -3, 1, 0), (-1, 2, 1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4.$

9. Determinare il sottospazio intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \mathcal{L}((2, 1, 1, 2), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 0, -1)),\qquad W_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ESERCIZI 9

1. Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?

2. Spiegare quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ sono un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

(i) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

(ii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3a_2 b_2$

(iii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

3. Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(i) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;

(ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore $(1, -1, 2)$.

4. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare numerico. Determinare il complemento ortogonale di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:

$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0), (1, 0, 2, -1)$

$U = \mathcal{L}((3, 4, 2, -1))$

$Z = \mathcal{L}((2, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 2))$

5. Spiegare cosa è uno spazio vettoriale euclideo orientato. In uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3, spiegare cosa è il prodotto vettoriale tra due vettori dati.

6. Dire cosa è uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) e quali proprietà conosci. Quali esempi conosci?

7. Dato uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) di dimensione finita su un campo K, cosa è un suo riferimento cartesiano? Cosa sono le coordinate di un punto di uno spazio affine in un riferimento cartesiano fissato?

ESERCIZI 10

1. Dato uno spazio euclideo di dimensione finita e un suo riferimento cartesiano, spiegare come si rappresenta un suo sottospazio euclideo nel riferimento cartesiano fissato.

2. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,-1,2)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,1,2)$. Tenendo conto del fatto che due vettori sono paralleli se formano un insieme linearmente dipendente,

(i) determinare *un* punto D tale che il vettore $\overrightarrow{CD}$ sia parallelo al vettore $\overrightarrow{AB}$.

(ii) Determinare *il* punto E tale che il vettore $\overrightarrow{CE}$ sia *uguale* al vettore $\overrightarrow{AB}$.

3. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri la retta r passante per il punto $P(2,1,0)$ e con giacitura $\overrightarrow{r} = \mathcal{L}(u)$, dove u è il vettore di componenti $(3,-2,1)$.

(i) Determinare la giacitura di un piano che sia parallelo a r.

(ii) Determinare la giacitura di un piano che *non* sia parallelo a r.

4. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,-1)$, $B(-1,-3)$ e $C(1,1)$. Determinare le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{BC}$. Dire se A, B e C sono allineati (tre punti si dicono allineati se appartengono a una stessa retta).

5. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 2, si considerino i punti $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(0,0)$, $D(3,-2)$.

(1) Dire se tra i punti dati ce ne sono tre allineati (ossia, che sono contenuti in una stessa retta) e, in tal caso, scrivere la retta che contiene i tre punti.

(2) Rappresentare la retta r per B e D.

(3) Rappresentare la retta s per C di vettore direzionale $\mathbf{v}(0,1)$ (ossia, la sua giacitura è generata da $\mathbf{v}$).

(4) Rappresentare la retta per D con stessa giacitura della retta s.

6. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 3:

(1) rappresentare la retta passante per $P(1,3,-2)$ e con giacitura $\mathcal{L}(v(2,0,1)$;

(2) rappresentare il piano (sottospazio di dimensione 2) per il punto $Q(2,1,1)$ e giacitura $\mathcal{L}(u(3,1,2),u'(1,1,1))$; dimostrare che la giacitura della retta considerata nel punto (1) è contenuta nella giacitura di questo piano;

(3) rappresentare la retta s per $C(2,1,0)$ e con giacitura $\mathcal{L}(v(2,3,1)$; determinare l'intersezione di questa retta con il piano considerato al punto (2).

7. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta $s : \begin{cases} x+z+2 &= 0 \\ -x+2y+1 &= 0 \end{cases}$ e il punto $B(1,0,1)$.

(a) Calcolare un vettore direzionale di s.

(b) Dire se la retta $s' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2t \\ z &= 1+2t \end{cases}$ è incidente, parallela o sghemba con s (due rette sono sghembe se non sono incidenti e non sono parallele).

(c) Determinare il piano per B contenente s. Questo piano è parallelo a s'?

(d) Determinare una retta r passante per B e incidente s. Rappresentare il piano che contiene r ed s.

ESERCIZI 11

1. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,1,3)$ e $B(1,1,2)$. Determinare un punto C tale che il triangolo di vertici A, B e C sia rettangolo in B.

2. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a s passante per il punto $A(1,2)$ e la retta parallela a s passante per $A(1,2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

3. Dato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette
$$s : \begin{cases} x + z + 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0 \end{cases} \quad \text{e } s' : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e il punto } B(1,0,1).$$

(a) Calcolare un vettore direzionale di s.
(b) Dire se s e s' sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra s e s'
(c) Determinare il piano per B contenente s. Questo piano è parallelo a s'?
(d) Determinare una retta r passante per B e incidente s. Rappresentare il piano che contiene r ed s.

4. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1,0,1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,1,-1)$. Dire se i vettori AB e AC sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto D tale che AD sia ortogonale a AB.

5. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1,-1,0)$.

(1) Determinare il piano per A parallelo a π.
(2) Determinare la retta ortogonale a π e passante per $P(-1,0,0)$.
(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a π.
(4) Determinare un piano ortogonale a π e passante per A.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : x - y + 4 = 0$ e il punto $A(0,2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a r e passante per A.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da r.

7. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino
$$\text{la retta } s : \begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= -1 \end{cases} \quad \text{e il punto } P(1,-1,0).$$

(a) Determinare il piano α ortogonale a s e passante per P.
(b) Determinare la distanza tra s e P.
(c) Determinare una retta r incidente s e una retta ortogonale sia a r sia a s.
(d) La retta $r' : (x,y,z) = (1,0,1) + (1,2,2)t$ è sghemba con s? Determinare la distanza tra r' e s. Determinare un piano parallelo sia a r' sia a s.

8. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, determinare due rette sghembe e calcolarne la distanza.

9. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $P(2,-3,2)$ e $Q(0,1,1)$ e sia r la retta passante per P e Q.

(i) Rappresentare la retta r.
(ii) Rappresentare l'asse del segmento di estremi P e Q.
(iii) Rappresentare un piano parallelo alla retta r.
(iv) Rappresentare una retta ortogonale a r e passante per Q.
(v) Rappresentare il piano passante per P, Q e l'origine del riferimento.

ESERCIZI 12-1

1. Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo T? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a T in un riferimento fissato? Come si calcolano?

2. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1 + x, x + x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

3. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x, y, z)) = (2y + z, x - y + z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ e $\mathcal{R}' = ((1, 2), (-1, 0))$.

4. Se $\mathcal{B} = (u, v, w)$ è una base di V di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di V tale che $f(u) = u + w$, $f(v) = -u + v + w$ e $f(w) = v + 2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u + v - w$ è autovettore di f;
(ii) spiegare perché f non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice A associata a f nella base ordinata $\mathcal{B}$.

5. Determinare la matrice A associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Calcolare autovalori e autospazi dell'endomorfismo f.

ESERCIZI 12-II

1. Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile? Cosa è una base spettrale per un endomorfismo?

2. Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \text{per ogni } k \in \mathbb{R}.$$

In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.

3. Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se A è diagonalizzabile.

In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.

4. Sia F_A l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se F_A è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di F_A.
(iii) La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa determinare una base spettrale e una matrice che diagonalizza.