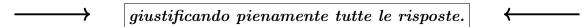
## CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I E II) 4 SETTEMBRE 2018

Svolgere i seguenti esercizi,



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola** e **gruppo** di **appartenenza**. **Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Dare le definizioni di *anello*, di *divisore dello zero* in un anello e di *dominio di integrità*. Si consideri l'anello unitario R di sostegno  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ed operazioni  $+ e \cdot$  definite da: per ogni  $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$  (a, x) + (b, y) = (a + b, x + y) e  $(a, x) \cdot (b, y) = (ab + ay + bx, xy)$ .

- (i) Stabilire se R è commutativo, determinare lo zero  $0_R$  e l'unità  $1_R$  di R.
- (ii) Tra gli elementi (2,1) e (2,-1) di R, stabilire quali sono e quali non sono invertibili e quali divisori dello zero.

**Esercizio 2.** Consideriamo in  $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  la relazione d'ordine  $\rho$  definita da:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$   $(a, b) \rho(c, d) \iff ((a, b) = (c, d) \vee (a \leq c \wedge b \leq d \wedge a \leq d)).$ 

- (i) Determinare gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo in  $(S, \rho)$ .
- (ii) Determinare l'insieme dei minoranti in  $(S, \rho)$  di  $T = \{(3, 1), (4, 2)\}$  e, se esiste, inf T.
- (iii)  $(S, \rho)$  è un reticolo?

Sia  $V = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}.$ 

- (iv) Disegnare il diagramma di Hasse di  $(V, \rho)$ .  $(V, \rho)$  è un reticolo? Nel caso, è distributivo, complementato, booleano?
- (v) Esiste in V un elemento a tale che, posto  $W = V \setminus \{a\}$ ,  $(W, \rho)$  sia un reticolo? Nel caso, indicarne uno e stabilire se  $(W, \rho)$  è distributivo, se è complementato, se è booleano.

**Esercizio 3.** Siano  $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$  e  $X = \{2^i \in \mathbb{N} \mid i \leq 10\}$ , siano  $f : n \in \mathbb{N} \mapsto ([n]_2, [n]_5) \in T$  e  $g : n \in X \mapsto f(n) \in T$ , e sia  $\sim$  il nucleo di equivalenza di g.

- (i) f è iniettiva? f è suriettiva?
- (ii) g è iniettiva? g è suriettiva?
- (iii) Determinare  $|X/\sim|$  ed elencare gli elementi di  $[4]_{\sim}$  e di  $[1]_{\sim}$ .
- (iv) Supponiamo che Y sia una parte di  $\mathbb N$  tale che  $h\colon n\in Y\mapsto f(n)\in T$  sia iniettiva e  $2\in Y$ . Allora:
  - (a) se |Y| = 10, h è suriettiva?
  - (b) se |Y| = 3, h è suriettiva?
  - (c) si può stabilire quanti elementi ha  $[2]_{\sim} \cap Y$ ? Nel caso, farlo.

Esercizio 4. Posto  $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 20\}$ , esprimere il numero  $s_1$  delle parti di C di cardinalità 6 costituite interamente da numeri pari e quello,  $s_2$ , di tutte le parti di C di cardinalità 12 contenenti  $\{3, 17\}$ .

**Esercizio 5.** Nell'anello di polinomi  $\mathbb{Z}_2[x]$  dire quali e quanti sono i polinomi di grado 4 che ammettono sia  $\bar{0}$  che  $\bar{1}$  come radici. Tra questi polinomi:

- (i) quanti sono irriducibili?
- (ii) quanti hanno un divisore irriducibile di grado 3?
- (iii) quanti hanno un divisore irriducibile di grado 2?
- (iv) quanti sono prodotto di polinomi di grado 1?

**Esercizio 6.** Facendo uso dell'algoritmo risolutivo per le equazioni congruenziali si trovino, se esistono, in  $\mathbb{Z}_{10}$  una classe A tale che  $A[4]_{10} = [3]_{10}$  e una classe B tale che  $B[4]_{10} = [6]_{10}$ .