CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)
13 LUGLIO 2022

Svolgere i seguenti esercizi,

$\longrightarrow$ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ $\longleftarrow$

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia né chiedere se la traccia vada consegnata.

Esercizio 1.

(*i*) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Completare la frase: f *non* è iniettiva se e solo se $\dots a, b \in \dots$.

(*ii*) Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 1000\}$ e $B = \{34, 72, 108\}$. Sia S l'insieme delle applicazioni $f\colon A \to B$ tali che, per ogni $a, b \in A$, $a \equiv_4 b \Rightarrow f(a) = f(b)$ (Dunque, ad esempio, se $f \in S$ si ha $f(0) = f(4) = \cdots$ ed anche $f(1) = f(5) = \cdots$)

1.) È vero o falso che tutte le applicazioni costanti $A \to B$ appartengono a S?

Indicare (senza effettuare calcoli!):

2.) il numero delle applicazioni costanti $A \to B$;

3.) il numero delle applicazioni iniettive appartenenti a S;

4.) $|S|$.

Esercizio 2. Posto $n = 78636645532$, stabilire se $[n]_{n+1}$ è o non è invertibile in $(\mathbb{Z}_{n+1}, \cdot)$.

Esercizio 3. Determinare gli insiemi delle soluzioni (in $\mathbb{Z}$) delle equazioni congruenziali $92x - 2 \equiv_{116} 10$ e $920x - 20 \equiv_{1160} 100$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $f = x^4 + \bar{3}x^3 - x^2 + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$. Dando per noto che $-\bar{1}$ è l'unica radice di f in $\mathbb{Z}_7$,

(*i*) scrivere f come prodotto di polinomi monici irriducibili;

(*ii*) elencare i polinomi monici di grado due o tre che dividono f in $\mathbb{Z}_7[x]$.

Esercizio 5. Siano $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi primi positivi e $T = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ divide } n\}$. Sia poi f l'applicazione $n \in T \mapsto (\max \pi(n), \min \pi(n)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

(*i*) Determinare $\overleftarrow{f}(\{(2,2)\})$, $\overleftarrow{f}(\{(2,7)\})$, $\overleftarrow{f}(\{(7,2)\})$, $\overleftarrow{f}(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$;

(*ii*) f è iniettiva? f è suriettiva?

(*iii*) Detto $\Re$ il nucleo di equivalenza di f, determinare $[120]_{\Re}$.

Sia ora ρ la relazione binaria in T definita da: per ogni $a, b \in T$,

$$a \mathrel{\rho} b \iff a = b \vee \max \pi(a) + \min \pi(a) < \max \pi(b) + \min \pi(b).$$

(*iv*) Determinare in (T, ρ) eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.

(*v*) ρ è una relazione d'ordine totale?

(*vi*) (T, ρ) è un reticolo?

(*vii*) Disegnare il diagramma di Hasse di (L, ρ), dove $L = \{81, 10, 14, 21, 33, 50, 100\}$. Questo insieme ordinato è un reticolo?

(*viii*) Se (L, ρ) è un reticolo, è distributivo? È complementato?

(*ix*) Quali tra $L_3 := L \cup \{3\}$ e $L_4 = L \cup \{4\}$, con l'ordinamento indotto da ρ, formano un reticolo?

Esercizio 6. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_{14}$ da: per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{14}$

$$a * b = a + \bar{7}b.$$

(*i*) $*$ è associativa? È commutativa?

(*ii*) $(\mathbb{Z}_{14}, *)$ ha elementi neutri a destra o a sinistra? Nel caso, determinarli.

(*iii*) Che tipo di struttura algebrica è $(\mathbb{Z}_{14}, *)$?

(*iv*) Determinare, se esistono, gli $a \in \mathbb{Z}_{14}$ tali che $a * \bar{3} = \overline{11}$, quelli tali che $a * \bar{5} = \overline{11}$ e quelli tali che $a * \overline{11} = \overline{11}$.