Geometria

A.A. 2020-2021

Docente: M. Trombetti

Dispense tratte dal corso di Informatica a cura dello studente **S. Cerrone**

0. Operazioni su di un Insieme

Operazione interna a $\boldsymbol{S}$

Sia S un insieme non vuoto, un'operazione $\perp: S \times S \to S$ si dice interna a S. Tutte le operazioni interne possono essere impropriamente considerate esterne; un esempio di operazione interna è $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Operazione esterna a $\boldsymbol{S}$

Siano $S, A \neq \emptyset$, un'operazione $\perp: S \times A \to S$ si dice esterna a S con dominio di operatori in A perché gli oggetti di A agiscono su S portandoli in altri oggetti di S. Esempio è la moltiplicazione $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Prodotto scalare standard

$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il quale prende in input due ennuple di numeri reali e restituisce un numero reale; non è né un'operazione interna ne esterna, infatti $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$. Un prodotto scalare standard ha la proprietà di essere una forma bilineare simmetrica definita positiva. Ovvero:

1) Simmetria: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ con $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$
2) Bilineare: $\left(h \cdot \underline{a} + k \cdot \underline{b}\right) \cdot \underline{c} = h\left(\underline{a} \cdot \underline{c}\right) + k\left(\underline{b} \cdot \underline{c}\right)$ con h, k scalari
   Dimostrazione: Sia $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$ e $\underline{c} = (c_1, c_2)$ allora:
   $$\left(h \cdot \underline{a} + k \cdot \underline{b}\right) \cdot \underline{c} = \left(h(a_1, a_2) + k(b_1, b_2)\right)(c_1, c_2) = (ha_1c_1 + ha_2c_2) + (kb_1c_1 + kb_2c_2)$$
   $$= h(a_1c_1 + a_2c_2) + k(b_1, c_1 + b_2c_2) = h\left(\underline{a} \cdot \underline{c}\right) + k\left(\underline{b} \cdot \underline{c}\right)$$
3) Positiva: $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$ e $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = (0, \dots, 0)$

1. Operazioni su Matrici (su $\mathbb{R}$)

Somma di matrici e prodotto per uno scalare (reale)

Una matrice A ad n righe ed m colonne si scrive nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

A volte posso denotare la matrice in modo generico come $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,n\,;\,j=1,\dots,m}$, o usare la definizione formale $A = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \mathbb{R}$. L'insieme delle matrici su $\mathbb{R}$ con n righe ed m colonne viene rappresentato da $M_{n,m}(\mathbb{R})$ o semplicemente $\mathbb{R}_{n,m}$.

Per le matrici possiamo definire un'operazione interna $+: \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R}_{n,m} \to \mathbb{R}_{n,m}$ del tipo:

$$\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}$$

Possiamo definire anche un'operazione esterna $\cdot : \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{n,m}$ del tipo $\left(\left(a_{ij}\right), h\right) \to \left(h \cdot a_{ij}\right)$

Prodotto righe per colonne e proprietà

Il prodotto righe per colonne è un'operazione del tipo $\cdot : \mathbb{R}_{n,m} \times \mathbb{R}_{m,l} \to \mathbb{R}_{n,l}$; infatti affinché quest'operazione sia possibile devo avere le colonne della matrice di sinistra uguale alle righe della matrice di destra, e come risultato avrò una matrice che ha il numero di righe della matrice a sinistra e il numero di colonne della matrice di destra.

Si definisce prodotto righe per colonne di $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}_{n,q}$ la matrice, che si denota con $A \times B$ o semplicemente con AB, definita dalla posizione $AB = \left(A_i \cdot B^j\right) \in \mathbb{R}_{m,q}$

Esercizio: Fare, ove possibile, il prodotto righe per colonne delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto righe per colonne fornisce le seguenti proprietà:

1) Distributività a destra: $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}$ e $\forall B, C \in \mathbb{R}_{n,q},\ A(B+C) = AB + AC$

   Dim.: $A(B+C) = (a_{ij})\left(\underbrace{b_{kl} + c_{kl}}_{d_{kl}}\right) = (\underline{a}_i \cdot \underline{d}^j) = \left(\underline{a}_i \cdot (\underline{b}^j + \underline{c}^j)\right) = (\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j) + (\underline{a}_i \cdot \underline{c}^j) = AB + AC$

2) Distributività a sinistra: $(A+B)C = AC + BC,\ \forall A, B \in \mathbb{R}_{m,n}\ e\ \forall C \in \mathbb{R}_{n,q}$

   La dimostrazione è analoga alla precedente

3) $AB \neq BA$, ad esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ invece $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Ha elemento neutro formato dalla matrice identica I_n formata da tutti zeri eccetto per la diagonale principale con 1. La matrice identica deve essere quadrata: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. La diagonale secondaria sarà quella da destra a sinistra. La matrice identica ha la proprietà che $I_n A = A I_n = A$.

   ESERCIZIO: verifica che $I_n A = A I_n = A$. E che I_n sia l'unico elemento neutro.

5) Gode di proprietà commutativa nel caso di matrici scalari S di ordine n (che occupano solo la diagonale principale con una stessa costante, mentre il resto è 0), infatti qualunque sia la matrice A di ordine n avremo $AS = SA$. Possiamo definire $S_n = h \cdot I_n$.

   Nota bene che in generale non commutano matrici diagonali (tutti 0 eccetto per la diagonale) che non hanno la stessa costante.

6) $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,q}$ e $\forall h \in \mathbb{R} \quad A(hB) = h(AB) = (hA)B$

   Dim.: $(\boldsymbol{a_{ij}})[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{b_{ij}})] = (a_{ij})(hb_{ij}) = (\underline{a}_i \cdot \underline{hb}^j) = \boldsymbol{h}(\underline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{j}}) = (\underline{ha}_i \cdot \underline{b}^j) = (ha_{ij})(b_{ij}) = [\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a_{ij}})](\boldsymbol{b_{ij}})$

7) Associatività: $\forall A \in \mathbb{R}_{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}_{n,q}, \forall C \in \mathbb{R}_{q,j} \qquad A(BC) = (AB)C$

$$A(BC) = AD = \underline{a}_i \cdot \underline{d}^j = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}d_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q}(b_{kl}c_{lj})\right)\right) = \sum_{k,l}(a_{ik}b_{kl}c_{lj}) = ABC = (AB)C$$

Matrice trasposta

L'operazione di trasposta è un'operazione unaria $t: \mathbb{R}_{n,m} \to \mathbb{R}_{m,n}$ dove semplicemente scambio le righe con le colonne: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A^t$. Formalmente una i-riga diverrà una i-colonna: $\underline{a}_i \to (\underline{a}^t)^i$

Sia $A \in \mathbb{R}_{m,n},\ B \in \mathbb{R}_{n,q}$. Allora la trasposta ha le seguenti proprietà:

1) $(AB)^t = B^t A^t$

   Dimostrazione: consideriamo $C = AB,\ D = (AB)^t = C^t$ e $E = B^t A^t$ con $A^t = A', B^t = B'$ allora:

$$D = d_{ij} = c_{ji} = \underline{a}_j \cdot \underline{b}^i = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k a'_{kj}b'_{ik} = \sum_k b'_{ik}a'_{kj} = \underline{b}_i \cdot \underline{a}^j = e_{ij} = E$$

2) $B^t A^t \neq A^t B^t$ il che significa in particolare che $(AB)^t = B^t A^t \neq A^t B^t$
3) $(ABC)^t = C^t B^t A^t$
4) $(hA + kB)^t = h(A^t) + k(B^t)$ che si generalizza in $(h_1 A_1 + \dots + h_n A_n)^t = h_1(A_1^t) + \dots + h_n(A_n^t)$
5) $(A^t)^t = A$; ovviamente la trasposta della trasposta è la matrice originale.

Matrice a gradini

Il concetto della matrice a gradine è che il numero degli zeri che precedono il primo elemento diverso da zero in ogni riga aumenta di riga in riga fino ad eventuali righe costituite da soli zeri. Il primo elemento non nullo che si incontra da sinistra si chiama **pivot**. Una delle proprietà della matrice a gradini è che se una matrice a gradini è priva di righe nulle allora il numero di righe deve essere minore o uguale al numero di colonne.

Di seguito esempi di matrici a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operazioni elementari di Riga

$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n}$ che possiamo rappresentare con le notazioni $A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = (\underline{a}^1 \quad \dots \quad \underline{a}^n)$.

Le **operazioni** elementari **di riga** sono:

1) Definiamo la funzione $E_1^{i,j}: \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$ che prende la riga i-esima della matrice e la scambia con la riga j-esima della stessa matrice.
2) $E_2^{h,i}: \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$ che non fa altro che moltiplicare la i-esima riga per una costante $h \neq 0$ e $h \in \mathbb{R}$
3) $E_3^{i,j}: \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$ che agisce sostituendo alla j-esima riga la somma tra la i-esima riga e la j-esima riga.

$$A \mapsto E_1^{i,j} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \qquad A \mapsto E_2^{h,i} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ h\underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \qquad A \mapsto E_3^{i,j} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_i \\ \vdots \\ \underline{a}_i + \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

Queste 3 operazioni possono essere combinate tra di loro dando luce ad altre operazioni, utile è la seguente:

4) $E_4^{h,i,j}$ che combina E_2 ed E_3, quindi $\underline{a}_j \to h\underline{a}_i + \underline{a}_j$ (utile per annullare una riga)

Se A' è una matrice che si può ottenere da A mediante un numero finito di operazioni elementari allora diciamo che A e A' sono **equivalenti** (per righe).

<u>Proposizione</u>: Per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente.
<u>Dimostrazione</u> <u>per induzione sul numero di righe:</u> Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$, per $n = 1$ avremo una matrice già a gradini, $A = (a_{11} \quad \dots \quad a_{1m})$, supposta vera per n dimostriamo che sia vera per $n+1$: se A è una matrice nulla allora è anche a gradini, ora se $A \neq 0$ possiamo supporre che ci sia almeno un elemento non nullo, per cui posso prendere la prima riga non nulla e scambiarla con un'eventuale riga nulla usando E_1. Ora non ci resta che annullare l'elemento al di sotto, a tal scopo possiamo usare le operazioni E_2, E_3 o E_4. Iterando questo processo potrò annullare, se necessario, tutte le righe successive.

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_4^{-1,1,2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_1^{2,3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_4^{-3,2,3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO riduci a gradini, ove necessario, le seguenti matrici: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & e & \pi \\ 0 & e & \pi \end{pmatrix}$

2. Sistemi Lineari

Equazioni lineari su $\mathbb{R}$

Diciamo **equazione lineare sul campo** $\mathbb{R}$ nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ una equazione del tipo $\boldsymbol{a_1 x_1} + \dots + \boldsymbol{a_n x_n} = \boldsymbol{b}$ con $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, gli a_i sono chiamati **coefficienti** delle rispettive incognite x_i mentre b è il ***termine noto***. Nel caso $b = 0$ allora l'equazione si dice lineare **omogenea**.

Si definisce un **sistema lineare** m equazioni ed n incognite $S\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + \dots + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m\,1}x_1 + \dots + a_{m\,n}x_n = b_m \end{cases}$, mentre con **soluzione del sistema** si intende la n-upla $(y_1, \dots, y_n)$ tale che ciascuna delle equazioni risulta verificata sostituendo ad x_i y_i. L'insieme delle soluzioni lo indico con $\overline{S} = \{(y_1, \dots, y_n) |\ siano\ soluzioni\ di\ S\}$

Un sistema si dice **compatibile** se ammette almeno una soluzione, **incompatibile** altrimenti. Nel caso il sistema sia compatibile allora esso può essere **determinato** nel caso abbia <u>una sola soluzione</u> e **indeterminato** se ammette <u>infinite soluzioni</u> (fondamentalmente in $\mathbb{R}$ si hanno solo questi due casi per un sistema compatibile, quindi o una oppure infinite).

Definisco la matrice dei coefficienti (o matrice incompleta) $A \in \mathbb{R}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ con n numero delle incognite ed m delle equazioni, se a questa matrice aggiungo la colonna dei termini noti avrò la matrice completa$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ (la linea divisoria delinea quale sia la matrice dei coefficienti).

<u>Se la matrice ha una particolare forma anche il sistema è detto avere quella forma.</u>

Sistemi equivalenti

Un sistema S è **equivalente** a S' se ammettono le stesse soluzione ovvero $\overline{S} = \overline{S'}$ (con la segnatura specifico che sto parlando delle soluzioni di quel sistema), per dimostrare che due sistemi sono equivalenti si può usare la doppia inclusione (ovvero verificare che S è contenuto in S' e che S' è contenuto in S).

<u>Proposizione:</u> Ogni sistema di equazioni lineari è equivalente ad un sistema a gradini.
<u>Dimostrazione:</u> bisogna verificare che le operazioni E_1, E_2, E_3, E_4 non influiscono nell'insieme delle soluzioni del sistema lineare. Per E_1 che scambia due righe è evidente che non influisce nel sistema poiché il sistema non dipende dall'ordine dell'equazioni. E_2 moltiplica una riga per uno scalare $h \neq 0$, diciamo che se $\underline{y} \in \overline{S}$ avrò $y_1 a_{i1} + \cdots + y_n a_{in} = b_i$ che è equivalente a $y_1(ha_{i1}) + \cdots + y_n(ha_{in}) = h(y_1 a_{i1} + \cdots + y_n a_{in}) = hb_i$ Ora resta da provare la E_3 (essendo E_4 combinazione di E_2 e E_3), questa operazione significa sostituire ad una riga $\underline{a_j} = \underline{a_i} + \underline{a_j}$, quindi avrò una equazione di questo tipo: $(a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + a_{jn}) = b_i + b_j$ quindi cambierà solo l'equazione j-esima che comunque è scritta come somma di due equazioni, praticamente sommo un equazione membro a membro, il che non mi cambia le soluzioni del sistema. Così abbiamo dimostrato che $\overline{S} \subseteq \overline{S'}$, il viceversa $\overline{S'} \subseteq \overline{S}$ è evidente poiché se partiamo dal nostro sistema possiamo invertire le operazioni E_i tramite operazioni inverse per ritrovarci sempre il sistema $\overline{S}$. Quindi verificato che le operazioni sulle righe non influiscono sulle equazioni abbiamo anche dimostrato che un sistema è equivalente ad un sistema a gradini poiché per ogni matrice esiste una matrice a gradini ad essa equivalente.

La precedente preposizione ci aiuta a risolvere sistemi complessi poiché in un sistema a gradini le soluzioni sono dirette; quindi, dovrò solo trovarmi la matrice a gradini della nostra matrice completa.

Soluzioni di un sistema lineare

Sia m il numero di equazioni ed n il numero di incognite di un sistema S, si possono definire i seguenti casi:

- $m = n = 1$: $a_{11}x_1 = b_1 \begin{cases} a_{11} = b_1 = 0: equazione\ identica \Rightarrow\ infinite\ soluzioni \\ a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = a_{11}^{-1} b_1 \\ a_{11} = 0\ e\ b_1 \neq 0\ non\ esistono\ soluzioni \end{cases}$
- $m = 1\ e\ n > 1$: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \begin{cases} a_{11} = \cdots = a_{1n} = b_1 = 0\ equazioni\ identica \\ a_{11} = \cdots = a_{1n} = 0\ e\ b_1 \neq 0\ non\ esistono\ soluzioni \end{cases}$ in questo caso, se esiste un elemento diverso da zero, supponiamo a_{11} posso scrivere il mio sistema come $a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n$ dove poi mi è permesso scegliere un valore y_i per ogni $x_2, \dots, x_n$ con cui avrò che $\exists!\, y_1: (y_1, y_2, \dots, y_n)\ sia\ soluzione\ di\ S$, in questo frangente si dice che il sistema lineare ammetta $\infty - 1$ soluzioni (perché faccio $n - 1$ scelte arbitrarie, l'altra dipende da queste).

- $m, n > 1: avrò\ un\ sistema\ S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \xLeftrightarrow{equivalente} S'a\ gradini$

  Elimino da S' le equazioni identiche $0 = 0$, quindi ottengo p equazioni non identiche dove p coincide con il numero di pivot della matrice completa di S'. Così facendo otteniamo un sistema S'' che supponiamo ancora avere m equazioni ed n incognite, così facendo potrò avere i seguenti casi (chiamiamo S'' semplicemente S poiché hanno le stesse soluzioni):
  - S contiene equazioni del tipo $0 = b_I (\neq 0)$ allora il nostro sistema è incompatibile (non ammette soluzioni); in questo caso la matrice incompleta ha l'ultima riga tutta nulla
  - La matrice incompleta non ha l'ultima riga nulla dove, sia $\# = numero\ di$, allora avrò $\#pivot = \#equazioni \leq \#incognite (= \#colonne)$, questo quindi è il caso $m \leq n$ che si può ulteriormente suddividere in:
    - $m = n$: qui la matrice ha un numero di righe uquale a quello della colonne, quindi l'unica possibilità di trovare delle soluzioni sia quello in cui non abbia zeri sulla diagonale principale, altrimenti per assurdo mi troverò con una riga di elementi tutti nulli. Avrò come soluzione: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = b_n a_{nn}^{-1}$ che sostituisco nell'equazione precedente, così potrò esplicitare il valore di a_{n-1} ed avrò l'equazione $a_{n-1\,,n-1}\, x_{n-1} + a_{n-1}x_n = b_{n-1}$, iterando questo procedimento avrò tutte le soluzioni e quindi S è determinato.
    - $m < n$: significa che ci sono più incognite che equazioni, in questo caso si prende la prima riga e di questa andiamo a prendere il primo elemento da sinistra diverso da zero, che si trova nella posizione i-esima, dunque avrò: $a_{1i}x_i + \cdots a_{1n}x_n = b_1$, questo procedimento lo iteriamo per tutte le righe restanti prendendo oltre al primo elemento non nullo anche il suo indice di colonna. Questi indici di colonna sono associati anche alle incognite corrispondenti. Le incognite che non sono state prese andranno a destra dell'equazione, con i termini noti (ad esempio: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1(p+1)}x_{p+1} + \cdots - a_{1n}x_n$). In questo modo, per ogni scelta di $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ avrò una sola soluzione e quindi mi troverò in un sistema dove il numero di equazioni è pari al numero di incognite e di conseguenza posso procedere con il metodo precedente dove $m = n$. Quindi avrò un insieme di soluzioni dove alcune incognite sono funzioni delle altre (S è indeterminato).

ESEMPI:

- $S: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4^{-2.2.3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4^{-1.1.2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

  $S': \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 7/4 \\ x_2 = 9/4 \\ x_3 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \overline{S} = \left\{ \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}; S\ è\ un\ sistema\ determinato$

- $S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow S\ è\ un\ sistema\ incompatibile\ (0 = 2)$

- $S: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

  $\begin{cases} 2\boldsymbol{x_1} - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \boldsymbol{x_3} + x_4 = 1 \\ \boldsymbol{x_4} = -2 \end{cases} \begin{cases} 2\boldsymbol{x_1} + x_3 - x_4 = 1 + x_2 \\ \boldsymbol{x_3} + x_4 = 1 \\ \boldsymbol{x_4} = -2 \end{cases} \rightarrow \overline{S} = \left\{ \left(\frac{y}{2} - 2, y, -2{,}3 \right) \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$

  $S\ è\ un\ sistema\ indeterminato\ con\ \infty^{\boldsymbol{i}}\ \boldsymbol{soluzioni\ con\ i\ numero\ di\ incognite}, quindi\ \infty^1\ soluzioni$

Sistema omogeneo
Per sistema omogeneo si intende un sistema che ha come termini noti tutti zeri, questa tipologia di sistemi è sempre compatibile poiché ammette o la soluzione banale $(0, \dots, 0)$, oppure infinite soluzioni (tra cui anche quella banale), quindi se ho una soluzione diversa da quella banale allora ne avrò infinite.

Notazioni per i sistemi lineari
Posso denotare un sistema lineare con la seguente rappresentazione compatta: $AX = B$, infatti $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; di conseguenza $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema se verifica l'uguaglianza $AY = B$. Ovviamente un sistema è omogeneo se $AX = B = 0$.

3. Spazi Vettoriali
Definizione
Sia V un insieme non vuoto, $+: V \times V \to V$ un operazione interna (se indico un operazione interna con $+$ è perché ho la commutatività) e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ un operazione esterna; la terna $(\boldsymbol{V}, +, \cdot)$ è detta **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$ se:

1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano, ovvero gode di
   i. Proprietà associativa $\big((a + b) + c = a + (b + c)\big)$
   ii. Proprietà commutativa $(a + b = b + a)$
   iii. Elemento neutro$\big(\exists \varepsilon \in V(\forall a \in V,\ \varepsilon + a = a = a + \varepsilon)\big)$
   iv. Opposto $\big(\forall a \in V, \exists!\, b(a + b = \varepsilon)\big)$
2) $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$ risulta $(hk) \cdot \underline{v} = h \cdot \big(k\underline{v}\big)$ (da non confondere con la proprietà associativa, poiché anche se simile $\cdot$ è un operazione esterna).
3) $\forall \underline{v} \in V$ risulta $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$
4) Distributività di $\cdot$ rispetto a $+$ in $\mathbb{R}$: $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$ risulta $(h + k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$
5) Distributività di $\cdot$ rispetto a $+$ in V: $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ risulta $h\big(\underline{v} + \underline{w}\big) = h\underline{v} + h\underline{w}$

Nello spazio vettoriale così definito si hanno le seguenti notazioni:
- Gli elementi di V si dicono **vettori**
- Gli elementi di $\mathbb{R}$ si dicono **scalari**
- $+$ è detta **addizione tra vettori**
- $\cdot$ è detta **moltiplicazione di uno scalare per un vettore**

Proposizione: Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ allora:
1) $\exists!$ Elemento neutro rispetto a $+$ (lo indicheremo con il simbolo $\underline{0}$)
   Dim.: siano $\underline{v}_0$ e $\underline{w}_0$ elementi neutri allora avrei $\underline{v}_0 = \underline{v}_0 + \underline{w}_0 = \underline{w}_0$
2) $\forall \underline{v} \in V, \exists!$ opposto per $\underline{v}$ (che indicheremo con $-\underline{v}$)
   Dim.: Siano $\underline{v}'$ e $\underline{v}''$ opposti di $\underline{v}$ ho: $\underline{v}' = \underline{v}' + \underline{0} = \underline{v}' + \big(\underline{v} + \underline{v}''\big) = \big(\underline{v}' + \underline{v}\big) + \underline{v}'' = \underline{0} + \underline{v}'' = \underline{v}''$

Possiamo definire ora le seguenti notazioni:
- La scrittura $\underline{v} - \underline{w}$ è un'abbreviazione di $\underline{v} + \big(-\underline{w}\big)$
- Vettore nullo: $\underline{0}$
- L'opposto del vettore nullo $-\underline{0}$ non è altro che $\underline{0}$

Esempi di spazi vettoriali
1) Spazio vettoriale numerico di ordine n: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$
   - $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \big(h, \underline{v} = (v_1, \dots, v_n)\big) \mapsto (hv_1, \dots, hv_n)$
   - $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \big((v_i), (w_i)\big) \mapsto (v_i + w_i)$

2) Spazio vettoriale di una matrice di ordine m, n: $(\mathbb{R}_{m,n}, +,\cdot)$

- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad \left(h, (a_{ij})\right) \mapsto (ha_{ij})$
- $+ : \mathbb{R}_{m,n} \times \mathbb{R}_{m,n} \to \mathbb{R}_{m,n}$ $\quad \left((a_{ij}), (b_{ij})\right) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$

3) Spazio vettoriale dei polinomi ad una indeterminante x sul campo reale: $(\mathbb{R}[\boldsymbol{x}], +,\cdot)$ dove:

- $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $\quad (h, a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \mapsto ha_0 + \cdots + (ha_n)x^n$
- $+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $\quad (a_0 + \cdots + a_nx^n, b_0 + \cdots + b_mx^m) \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m$ assumendo che $n \leq m$

Principio di identità dei polinomi:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \Leftrightarrow n = m \text{ e } a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$$

Osservazione:

- $p(x), q(x)$ polinomi di gradi $\leq n$ allora $p(x) + q(x)$ ha grado al più n
  (Esempio: $(3x + 1) + (4x^2 + 1) \leq 2$)
- $h \in \mathbb{R}, hp(x)$ ha grado $\leq n$ più precisamente ha lo stesso grado di $p(x)$ eccetto se moltiplicato per il polinomio nullo. (Esempio: $h(3x + 1) = (3h)x + h$)

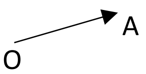
Queste descritte sopra sono sottostrutture di $\mathbb{R}[x]$, quindi possiamo definire ora un insieme $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | grado(p(x)) \leq n\}$ dove $+$ e $\cdot$ sono operazioni ben definite una volta ristretto dominio e codominio (in questo caso tutte le proprietà descritte per $\mathbb{R}[x]$ si mantengono anche per le sue sottostrutture).

Avremo dunque un nuovo spazio vettoriale: $(\mathbb{R}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{x}], +,\cdot)$:

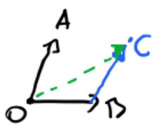
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
- $+ : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$

ESERCIZI: verificare per tutti gli esempi sopracitati che valgano le proprietà di definizione di spazio vettoriale

<u>Spazio della geometria euclidea S</u> (nel caso si parli di un piano si usa S_π): Sia O un punto di tale spazio definiamo i seguenti oggetti:



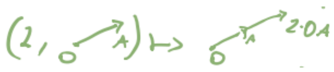
- $\overrightarrow{OA}$ segmento orientato di primo estremo O e secondo A
- L'insieme di tutti i segmenti orientati che partono da O e si dirigono in punti arbitrari dello spazio S è $S_O = \{OA | A \in S\}$
- Sia $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in S_O$ definisco $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ con la regola del parallelogrammo:



- Definisco $\overrightarrow{BC}$ vettore **equipollente** di $\overrightarrow{OA}$ se e solo se hanno direzione, modulo e verso equivalenti

4) Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in un punto: $(S_O, +,\cdot)$:

- $+ : S_O \times S_O \to S_O$ $\quad$ (regola del parallelogrammo)
- $\cdot : \mathbb{R} \times S_O \to S_O$ $\quad (h, \overrightarrow{OA}) \mapsto h\overrightarrow{OA}$ $\quad$ Esempio:



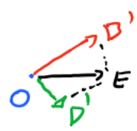
- Elemento neutro $\overrightarrow{OO}$
- Elemento opposto fornito dal vettore con stessa direzione e modulo ma verso opposto

<u>Spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi (ordinari) S</u>: diamo le seguenti definizioni:

- definisco vettore geometrico libero l'insieme $[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} | \overrightarrow{CD} \text{ equipollente ad } \overrightarrow{AB}\}$
- prenderà il nome di **insieme quoziente** $\mathcal{V} = \{[\overrightarrow{AB}] | A, B \in S\}$ (al variare di A, B in S)
- $[\overrightarrow{AB}] = \overline{AB}$, quindi l'elemento neutro sarà il vettore nullo $\underline{O}$ mentre l'opposto $-\overline{AB} = [-\overrightarrow{AB}]$

5) Spazio vettoriale dell'insieme $(\mathcal{V}, +,\cdot)$

- $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ $\quad \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{OE}$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ $\quad h \cdot \overline{AB} = h\overline{AB}$



$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{CD}$

Proprietà degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: allora $\forall \boldsymbol{\underline{v}}, \boldsymbol{\underline{w}}, \boldsymbol{\underline{z}} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ avremo

1) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{z} \Rightarrow \underline{v} = \underline{z} - \underline{w}$
   Si dimostra semplicemente sommando ambo i membri per l'opposto di $\underline{w}$
2) $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}$
3) $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} = h\underline{0}$
   $0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} + 0 \cdot \underline{v} \Rightarrow 0\underline{v} = \underline{0}$ in simil modo $h \cdot \underline{0} = h \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = h\underline{0} + h\underline{0} \Rightarrow h\underline{0} = \underline{0}$
4) $h\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow h = 0 \ o \ \underline{v} = \underline{0}$
   Dim.$\Leftarrow$ valida per la proprietà 3; $\Rightarrow$: supponiamo $h \neq 0$ quindi $h\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow h^{-1}(h\underline{v}) = h^{-1}\underline{0} \Rightarrow (h^{-1}h)\underline{v} = \underline{0}$ sempre per la proprietà 3, se $h = 0$ la dimostrazione è banale.
5) $h(-\underline{v}) = -(h\underline{v}) = (-h)\underline{v}$
   Dimostriamo che $h(-\underline{v})$ è l'opposto di $h\underline{v}$ quindi bisogna dimostrare che $h\underline{v} + h(-\underline{v}) = \underline{0}$, dunque mettendo h in evidenzia $h\left(\underline{v} + (-\underline{v})\right) = h(\underline{v} - \underline{v}) = h \cdot \underline{0} = \underline{0}$; quindi abbiamo dimostrato la prima uguaglianza, similmente per la seconda dobbiamo dimostrare che $(-h)\underline{v}$ sia l'opposto di $h\underline{v}$, per uno degli assiomi dello spazio vettoriale posso scrivere $(-h)\underline{v} + h\underline{v} = (-h+h)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$
6) $(-1)\underline{v} = -(1\underline{v}) = -\underline{v}$
   Applicando più volte la proprietà 5: $(-h)(-\underline{v}) = -[h(-\underline{v})] = -[-h\underline{v}] = h\underline{v}$
   L'opposto dell'opposto è il vettore di partenza $-(-\underline{v}) = \underline{v}$ $\quad \underline{v} + (-\underline{v}) = 0$
7) Proprietà associativa generalizzata $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$: essendo le somme sempre suddivise in agglomerati di tre oggetti posso estendere la proprietà associativa $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$ per n elementi poiché il posizionamento delle parentesi non conta: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n$ (quindi posso ometterle)
8) Proprietà commutativa generalizzata: come in precedenza essendo $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$ possiamo generalizzarla per n elementi poiché l'ordine degli addendi non conta.
9) Proprietà distributiva generalizzata: $(h_1 + h_2 + \dots + h_n)\underline{v} = h_1\underline{v} + h_2\underline{v} + \dots + h_n\underline{v}$
   Essendo vera per $n = 2$ (è assioma), supponiamola vera per $n(\geq 2)$ e dimostriamola vera per $n+1$: $(h_1 + h_2 + \dots + h_n + h_{n+1})\underline{v} = (h_1 + \dots + h_n)\underline{v} + h_{n+1}\underline{v} = h_1\underline{v} + \dots + h_n\underline{v} + h_{n+1}\underline{v}$ stessa cosa (dimostrare come esercizio) per: $\quad h(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n) = h\underline{v}_1 + h\underline{v}_2 + \dots + h\underline{v}_n$

Definizioni

Combinazione lineare: Presi $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v} \in V$ e se è possibile scrivere $\underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n$ allora $\underline{v}$ sarà detto **combinazione lineare** dei vettori $\underline{v}_i$ mediante gli scalari h_i.

Esempio in $\mathbb{R}^3$: $(3,0,1) = 3(1,0,0) + 1(0,0,1)$, combinazione lineare di $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ mediante 3 e 1

Proporzionalità: Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono **proporzionali** se $\exists h \neq 0 \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{v} = h\underline{w}$

La proporzionalità è una relazione d'equivalenza essendo:

1) riflessiva: $\underline{v} = 1 \cdot \underline{v}$
2) simmetrica: $\underline{v} = h\underline{w}$ con $h \neq 0 \Rightarrow \underline{w} = h^{-1}\underline{v}$
3) transitiva: sia $h, k \neq 0$ se $\underline{v} = h\underline{w}$ e $\underline{w} = k\underline{u}$ allora $\underline{v} = (hk)\underline{u}$

Sottospazi vettoriali

Sia $(V, +, \cdot)$ spazio vettoriale e sia $H \subseteq V$ diverso dal vuoto, H è detto stabile (o chiuso) rispetto all'addizione se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in H \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H$ (la loro somma è ancora in H) mentre H è detto stabile (o chiuso) rispetto alla moltiplicazione per uno scalare se $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \Rightarrow h\underline{v} \in H$. Se H è **stabile** rispetto alla moltiplicazione e all'addizione significa che le operazioni $+ : H \times H \to H$ e $\cdot : \mathbb{R} \times H \to H$ sono ben definite.

Definizione: Se H è **chiuso** (o **stabile**)rispetto a somma e prodotto allora è detto **sottospazio vettoriale**

Se H è sottospazio di V allora valgono per H tutte le proprietà dello spazio vettoriale V. Si indica con $H \leq V$. Tutti i sottospazi sono anche sottoinsieme, ma il viceversa non è vero (ad esempio $\emptyset \nleq V$).

Teorema: Se ho un sottospazio vettoriale con le operazioni ristrette allora esso è anche uno spazio vettoriale. Sia $H \leq V \Longrightarrow (H, +_{I_H}, \cdot_{I_H})$ è spazio vettoriale.

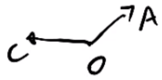
Dimostrazione: $(H; +_{I_H})$ è sia associativa che commutativa (praticamente tutte le proprietà che non sono esistenziali sono automaticamente soddisfatte per la stabilità dell'operazione); ha lo stesso elemento neutro di V e contiene anche gli opposti ($\underline{v} \in H \neq \emptyset \Rightarrow (-1)\underline{v} = -\underline{v}_{I_V}$) che appartengono ad H poiché ho lo stesso elemento neutro $\underline{0}$. $1 \cdot_{I_H} \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ e così via sono automaticamente verificate anche le altre proprietà.

Esempi di sottospazi vettoriali

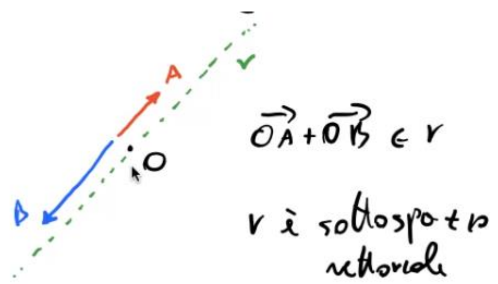
1) Sia V spazio vettoriale ha sempre i sottospazi banali: $\{\underline{0}\}$ e V
2) Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$: sono sottospazi $\{(0,0,0)\}$ e $\mathbb{R}^3$
3) Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$: sottospazio $H = \{(x,y) | x = y\}$, infatti non è vuoto, è stabile rispetto alla somma poiché $\forall \underline{v}, \underline{w} \in H$ posto $\underline{v} = (x,y) \in H, \underline{w} = (z,t) \in H \Rightarrow (x,y) + (z,t) = (x+z, y+t) \in H$ essendo infatti $\underline{x+z} = y + z = \underline{y+t}$; inoltre H è stabile anche rispetto al prodotto essendo $\forall h \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in H \Rightarrow \underline{v} = (x,y) \in H \Rightarrow h(x,y) = (hx, hy) \in H$ essendo $hx = hy$ poiché $x = y$.
4) $H = \{3x+1, 0\} \nleq \mathbb{R}[x]$ infatti: $(3x+1) + (3x+1) = 6x + 2 \notin H$
5) $H = \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 | x = y^2\} \nleq \mathbb{R}^4$ poiché $(1,1,0,0) \in H + (1,1,0,0) \in H = (2,2,0,0) \notin H$ per $2 \neq 2^2$

Esercizio: determinare se $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ è sottospazio vettoriale.

Soluzione: sviluppiamo il prodotto righe per colonne in ambo i due membri: $\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ da cui possiamo ricavare le seguenti informazioni: $\begin{cases} c + d = d \Rightarrow c = 0 \\ a + b = b + d \Rightarrow a = d \end{cases}$ e quindi riscrivere l'insieme H come $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a.b \in \mathbb{R} \right\}$; ora resta da verificare che non sia vuoto (quindi si controlla che esista l'elemento neutro rispetto la somma), ed in questo caso è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$, e che H sia stabile rispetto alla somma ed al prodotto, risulta infatti: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in H$, ed anche $h \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha & hb \\ 0 & ha \end{pmatrix} \in H$. Di conseguenza abbiamo dimostrato che H è sottospazio vettoriale.

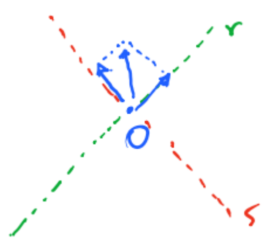
Esempio: Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in O→ 

Supponendo di trovarci nel sottospazio vettoriale formato dai vettori di $\overrightarrow{OA}$, possiamo affermare che esso contiene tutti i vettori situati nella retta passante per i punti O ed A (vedi figura a destra).



Lo stesso ragionamento si può fare per un piano π: supponendo di trovarci nel sottospazio formato dai vettori $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OA}$ allora ad esso appartengono tutti quei vettori contenuti nello stesso piano (figura in basso).

Esempio 1



Esempio 2

$\mathbb{R}^2$ $H_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$

$H_1, H_2 \leq \mathbb{R}^2$ ma

$H_1 \cup H_2 \nleq \mathbb{R}^2$

Osservazione: l'unione di sottospazi vettoriali non è in genere un sottospazio.

L'esempio uno ci mostra, geometricamente parlando, che l'unione delle due rette non è sottospazio vettoriale, l'esempio due è un esempio più concreto.

Alcune proprietà e definizioni di sottospazi vettoriali (sottospazio generato)

1) $W \leq V$ è stabile rispetto alla somma di n oggetti:
Siano $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$ si ha $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \Rightarrow (\underline{w}_1 + \underline{w}_2) + \underline{w}_3 \in W$ iterando questo ragionamento avremo che $\underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_n \in W$. Da questa proprietà possiamo osservare che presi n scalari, $h_1, \dots, h_n$, qualunque combinazione lineare W contiene ogni combinazione lineare dei suoi elementi: $h_1\underline{w}_1, \dots, h_n\underline{w}_n \in W \Rightarrow h_1\underline{w}_1 + \dots + h_n\underline{w}_n \in W$

2) sia $\mathcal{L}$ una famiglia di sottospazi di V, l'intersezione dei sottospazi della famiglia "elle tondo": $\bigcap_{L\in\mathcal{L}} L$ è un sottospazio, più precisamente l'intersezione di una qualunque famiglia di sottospazi è un sottospazio (a differenza dell'unione). Esempio: $\{(0,y) | y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\} \leq \mathbb{R}^2$
Dimostrazione: l'elemento neutro (l'insieme nullo) è sempre contenuto in ogni intersezione, la somma è stabile; infatti, siano $\underline{v}, \underline{w} \in \bigcap_{L\in\mathcal{L}} L \Rightarrow \underline{v}, \underline{w} \in L\ \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in L\ \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \bigcap_{L\in\mathcal{L}} L$, sia invece, per il prodotto, $\underline{v} \in \bigcap_{L\in\mathcal{L}} L, h \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{v} \in L\ \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow h\underline{v} \in L\ \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow h\underline{v} \in \bigcap_{L\in\mathcal{L}} L$

Problema: Siano $H, K \leq V$. Qual è il più piccolo sottospazio che contiene sia H che K? (i.c., $H \cup K$). Cerco quindi un sottoinsieme contenete sia H che K, ovvero $V \supseteq H \cup K$, prendo poi l'intersezione di tutti i sottospazi L di V che contengono $H \cup K$, è questo insieme, chiamato **sottospazio generato** da H e K, oltre ad essere la risposta del problema è anche il più piccolo sottospazio che contiene sia H che K.

In simboli: $\langle H, K\rangle = \langle H \cup K\rangle = H + K = \{\underline{h} + \underline{k} | \underline{h} \in H, \underline{k} \in K\}$; ed è il più piccolo sottoinsieme, infatti:

1) $\underline{0} = \underline{0} \in H + \underline{0} \in K$; quini ha elemento neutro.
2) La somma è chiusa poiché presi $\underline{w}, \underline{w}_1 \in H + K$ posso scrivere che $\exists \underline{h}, \underline{h}_1 \in H, \exists \underline{k}, \underline{k}_1 \in K$ tale che $\underline{w} = \underline{h} + \underline{k}$ e $\underline{w}_1 = \underline{h}_1 + \underline{k}_1$ allora $\underline{w} + \underline{w}_1 = (\underline{h} + \underline{k}) + (\underline{h}_1 + \underline{k}_1) = \underbrace{(\underline{h} + \underline{h}_1)}_{\in H} + \underbrace{(\underline{k} + \underline{k}_1)}_{\in K} \in H + K$
3) Il prodotto è anch'esso chiuso, e si dimostra allo stesso modo: $\forall x \in \mathbb{R}$
   - $x\underline{h} \in H \Rightarrow \underbrace{x\underline{h}}_{\in H} + \underbrace{\underline{0}}_{\in K} \in H + K \Rightarrow H \subseteq H + K$
   - $\underline{k} \in H \Rightarrow \underbrace{\underline{0}}_{\in H} + \underbrace{x\underline{k}}_{\in K} \in H + K \Rightarrow K \subseteq H + K$
4) resta da dimostrare che sia il più piccolo (affinché sia sottospazio generato)
   - $L \leq V : H \cup K \subseteq L$
     $\forall \underline{h} \in H, \underline{k} \in K \Rightarrow \underline{h}, \underline{k} \in L \Rightarrow \underline{h} + \underline{k} \in L \Rightarrow H + K \subseteq L$ ed è quindi contenuto in tutti i sottospazi che contengono l'unione di H e K; verificando così l'uguaglianza $\langle H, K\rangle = \langle H \cup K\rangle$

Esempio

$H_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ $\quad H_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$

$H_1 + H_2 = \{(x,0) + (0,y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$H_1 + H_2 \leq \mathbb{R}^2$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in H_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in H_2} \in H_1 + H_2$

Generalizzazione: Siano $H_1, \dots, H_n$ sottospiazi, il sottospazio generato degli n sottospazi non è altro che la somma dei sottospazi, in simboli: $\langle H_1, \dots, H_n\rangle = H_1 + \dots + H_n = \{\underline{h}_1 + \underline{h}_2 + \dots + \underline{h}_n | \underline{h}_i \in H_i\}$

Osservazione: $H \leq V \Rightarrow \langle H\rangle = H$, il più piccolo sottospazio generato da H è H stesso, allo stesso modo se ho $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ il sottospazio generato $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\rangle = \{h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n | h_i \in \mathbb{R}\}$ non è altro che l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con gli scalari che variano in maniera arbitraria.

Somma diretta di sottospazi vettoriali

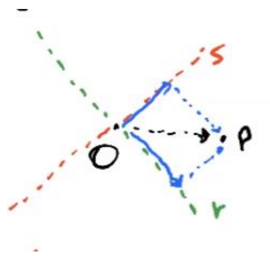
Sia V spazio vettoriale e $H_1, H_2 \leq V$ due sottospazi, $H_1 + H_2$ è detta **somma** di H_1 e H_2 (generalizzabile per n elementi $H_1 + \cdots H_n$), la somma di due sottospazi si dice **somma diretta** se la loro intersezione (non vuota) è la più piccola possibile, ovvero il singleton dell'elemento neutro, quindi è somma diretta e si denota con $H_1 \oplus H_2$ se $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$. Ad esempio sia $H_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ e $H_2 = \{(0,x)|x \in \mathbb{R}\}$, l'insieme $\mathbb{R}^2 = H_1 + H_2$ è somma diretta, infatti $H_1 \cap H_2 = \{(0,0)\}$, quindi si scriverà $\mathbb{R}^2 = H_1 \oplus H_2$.
H_1 e H_2 sono detti **supplementari** se $V = H_1 + H_2$, mentre saranno **complementari** se $V = H_1 \oplus H_2$

<u>Somma diretta di più sottospazi</u>: supponiamo di avere n spazi vettoriali, allora $H_1, \ldots, H_n$ sono in somma diretta se l'intersezione di un qualunque H_i con il sottospazio generato da tutti gli altri sia singleton dell'elemento neutro, dunque se $H_i \cap \langle H_j | j \neq i \rangle = \{\underline{0}\}$, più precisamente se $H_1 \cap \langle H_2, H_3, \ldots, H_n \rangle = \{\underline{0}\}$; $H_2 \cap \langle H_1, H_3, \ldots, H_n \rangle = \{\underline{0}\}$ e così via per tutti gli H_i.

<u>Esempio 1</u>: $H_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$, $H_2 = \{(0,x)|x \in \mathbb{R}\}$ e $H_3 = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\}$ <u>non</u> sono in somma diretta anche se presi a due a due generano l'elemento neutro, infatti $H_3 \cap \langle H_1, H_2 \rangle = H_3 \cap \mathbb{R}^2 = H_3 \neq \{(0,0)\}$

<u>Esempio 2</u>: $H_1 = \{(x,0,0)|x \in \mathbb{R}\}$, $H_2 = \{(0,x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ e $H_3 = \{(0,0,x)|x \in \mathbb{R}\}$ avremo che l'insieme $H_1 \cap \langle H_2, H_3 \rangle = \{(0,0,0)\}$ dato che $\langle H_2, H_3 \rangle = H_2 + H_3 = \{(0,x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$ in modo analogo si procede con gli altri insiemi e dunque possiamo scrivere $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

<u>Esempio 3</u>: $\langle r, s \rangle = r + s$ è tutto il piano, inoltre sapendo che ogni vettore geometrico si può scrivere come somma di un elemento che sta in s ed uno che sta in r, (i sottospazi s e r sono supplementari; la loro somma fa tutto lo spazio) e che la loro intersezione è intuitivamente il vettore degenere $\overrightarrow{OO}$, risulterà $R \cap S = \{\overrightarrow{OO}\}$. Di conseguenza è anche complementare (l'intersezione è insieme banale): $r \oplus s$.



Dipendenza ed indipendenza lineare

Sia V spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$, essi sono detti linearmente **dipendenti** (o legati) se e solo se esistono n scalari non tutti nulli tali che la loro combinazione lineare sia il vettore nullo: $h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$.

Se tali scalari non esistono allora tali vettori sono detti linearmente **indipendenti** (o liberi), quest'ultimo caso implica come unica soluzione $0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n = \underline{0}$, quindi che $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0 \ \ \forall h_i \in \mathbb{R}$

Esempi: $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti infatti $h_1(1,0) + h_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow h_1 = h_2 = 0$; $(0,0), (1,0)$ sono linearmente dipendenti : $3(0,0) + 0(1,0) = (0,0)$, l'elemento neutro implica la dipendenza $(1,0), (2,0): -2(1,0) + 1(2,0) = (0,0)$, se ci sono due elementi proporzionali implica la dipendenza.

<u>Osservazione</u>: se un sistema di vettori contiene in sé un sistema di vettori linearmente dipendenti allora anche il sistema totale più grande sarà linearmente dipendente (metto lo scalare a 0 per i vettori non contenuti nel sistema dipendente).

Diremo che un vettore $\underline{v}$ **dipende** da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ per definizione, se $\underline{v}$ è combinazione lineare dei $\underline{v}_i$ ovvero se $\exists \boldsymbol{h_1}, \ldots, \boldsymbol{h_n} \in \mathbb{R} : \ \boldsymbol{\underline{v} = h_1\underline{v}_1 + h_n\underline{v}_n}$. Di seguito alcune proprietà:

- $\underline{0}$ dipende sempre da qualunque sistema $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ $\qquad \underline{0} = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_n$
- $\underline{v}_i$ dipende sempre da $\underline{v}_1, \ldots, v_n$ $\qquad \underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_{i-1} + 1\underline{v}_i + 0\underline{v}_{i+1} + \cdots + 0\underline{v}_n$
- Sia $\underline{v}$ dipendente da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e ciascun $\underline{v}_i$ dipendente da $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$, allora (una sorta di proprietà transitiva) $\underline{v}$ dipende da $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$
  <u>Dimostrazione</u>: per ipotesi $\exists h_i \in \mathbb{R} : \ \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n$ e, sempre per definizione, $\exists k_{ij} \in \mathbb{R} :$ $\underline{v}_i = k_{i1}\underline{w}_1 + \cdots + k_{im}\underline{w}_m$ dove $\underline{v}_i = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, di conseguenza posso scrivere il mio vettore $\underline{v}$ come segue $\underline{v} = h_1(k_{11}\underline{w}_1 + \cdots + k_{1m}\underline{w}_m) + \cdots + h_n(k_{n1}\underline{w}_1 + \cdots + k_{nm}\underline{w}_m)$; utilizzando poi la proprietà distributiva generalizzata (mettendo in evidenza i $\underline{w}_i$) avrò $\underline{v} = c_1\underline{w}_1 + \cdots + c_m\underline{w}_m$

- Se $\underline{v}, \underline{w}$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ allora $\underline{v} + \underline{w}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
  Dimostrazione: $\begin{matrix} \underline{v} = h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n \\ \underline{w} = k_1\underline{v}_1 + \cdots + k_n\underline{v}_n \end{matrix} \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} = (h_1 + k_1)\underline{v}_1 + \cdots + (h_n + k_n)\underline{v}_n$
- $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \Leftrightarrow \underline{v} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$
  Per dimostrare la precedente equivalenza bisogna verificare che (come precedentemente osservato) $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{h_1\, \underline{v}_1 + \cdots + h_n\, \underline{v}_n | h_i \in \mathbb{R}\}$, a tal scopo dimostriamo che l'insieme delle combinazioni lineari $H = \{h_1\, \underline{v}_1 + \cdots + h_n\, \underline{v}_n | h_i \in \mathbb{R}\}$ sia effettivamente un sottospazio: è evidente che contenga l'elemento neutro poiché esso è sempre dipendente da qualunque sistema, anche la stabilità della somma è evidente per la proprietà precedente, in maniera simile si dimostra la stabilità rispetto al prodotto, infatti se $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ allora anche $h\underline{v} = (hh_1)\underline{v}_1 + \cdots + (hh_n)\underline{v}_n$ dipenderà da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Inoltre, H contiene i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ infatti $\underline{v}_i$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$; dunque abbiamo dimostrato che H oltre ad essere un sottospazio, contiene $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Prendiamo ora un sottospazio W che contiene $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$, se W contiene i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ allora esso deve contenere anche tutte le sue combinazioni lineari e quindi $H \subseteq W$; abbiamo così dimostrato che H è il più piccolo sottospazio che rispetto all'inclusione le contiene, ovvero che $H = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$.

Osservazioni:

- $\begin{matrix} W_1 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \\ W_2 = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle \end{matrix} \Rightarrow W_1 + W_2 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$
  Dimostrazione: $W_1 + W_2 = \{\underline{a} + \underline{b} \mid \underline{a} \in W_1\ e\ \underline{b} \in W_2\}$ e sappiamo che $W_1 + W_2 \supseteq W_1 \cup W_2 = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \cup \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$; l'unione dei due sottospazi generati sono contenuti dunque in $W_1 + W_2$ e quindi l'insieme $W_1 + W_2$ contiene tutte le sue combinazioni lineari, ciò vuol dire che contiene tutte le combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ ovvero il sottospazio generato $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$, abbiamo così dimostrato che $W_1 + W_2 \supseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$, rimane da verificare l'altra inclusione (al fine di dimostrare la tesi per doppia inclusione): prendiamo un oggetto $\underline{v} \in W_1 + W_2$ quindi $\underline{v} = \underline{a} + \underline{b} = (h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n) + (k_1\underline{w}_1 + \cdots k_m\underline{w}_m) \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$, allora se ogni elemento $\underline{v} = \underline{a} + \underline{b} \in W_1 + W_2$ allora $W_1 + W_2 \subseteq \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$.
- Il sottospazio generato da sottospazi generati non è altro che il sottospazio generato dai singoli elementi, ovvero $W = \langle \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle, \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$.
  La dimostrazione è banale ricordando che $W_1 + W_2 = \langle W_1, W_2 \rangle$.
- $\langle \underline{v}, \underline{v}, \underline{0}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ (praticamente posso eliminare gli elementi nulli o ripetuti)
  La dimostrazione è evidente per la definizione successiva

Sistemi di vettori equivalenti

Sistemi di vettori che dipendono gli uni dagli altri (e viceversa) sono detti **equivalenti**. Più formalmente posso dire che il sistema $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è equivalente a $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ se ogni $\underline{v}_i$ dipendono da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ e ogni $\underline{w}_j$ dipendono da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Esempi: $\mathbb{R}^2 \langle (0,1), (0,2), (0,0) \rangle$; posso ridurlo, essendo uno nullo e l'altro proporzionale, alla coppia $(0,1)$, quindi $\langle (0,1), (0,2), (0,0) \rangle = \langle (0,1) \rangle = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$. I seguenti sottospazi sono equivalenti: $\langle (0,1), (1,0) \rangle$ e $\langle (1,1), (1,0) \rangle$, essendo $(0,1) \leftrightarrow (0,1) + (1,0) = (1,1)$, quindi anche $(1,1)$ dipende da $(0,1)$ e $(1,0)$.

Sia $S \subseteq V$ il più piccolo sottospazio a contenere S, posso definire il sottospazio generato $\langle S \rangle = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ ricordando che $\mathcal{L} = \{L \leq V | S \subseteq L\}$.

Esercizio: Sia $\langle \{v \in \mathbb{R} | v\ intero\ pari\} \rangle = H$, come si caratterizza questo sottospazio?

Soluzione: Essendo 1 contenuto nel sottospazio generato (posso scrivere ad esempio $\frac{1}{2} \cdot 2$) allora H è tutto $\mathbb{R}$ potendo scrivere qualunque r come $1r$. Quindi il sottospazio generato da oggetti pari (in realtà qualsiasi oggetto diverso da 0), formano tutto $\mathbb{R}$.

Relazione tra dipendenza e linearmente dipendenza

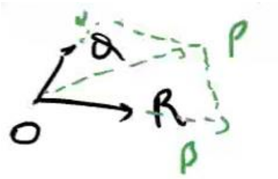
Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ (con $n \geq 2$, poiché se $n = 1$ allora per essere linearmente dipendente deve essere l'elemento nullo) allora:

I. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists i : \underline{v}_i$ dipende dai rimanenti.
Dimostriamo prima l'implicazione $\Rightarrow$: per ipotesi, essendo i vettori linearmente dipendenti, esiste $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, tale che $h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$, supponiamo che $h_1 \neq 0$ allora posso scrivere $h_1\underline{v}_1 = -h_2\underline{v}_2 + \cdots - h_n\underline{v}_n$, moltiplicando ambo i membri per il reciproco h_1^{-1} risulterà $\underline{v}_1 = (-h_1^{-1}h_2)\underline{v}_2 + \cdots + (-h_1^{-1}h_n)\underline{v}_n$, ovvero che $\underline{v}_1$ è combinazione lineare di $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$, ovvero che $\underline{v}_1$ dipende dai rimanenti. Resta ora da provare l'implicazione $\Leftarrow$: Supponiamo che esista almeno un vettore dipendente dai rimanenti, quindi che $\Leftrightarrow \exists i : \underline{v}_i$ dipendente da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$, supponiamo che sia $i = 1$, allora: $\exists h_2, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \ \underline{v}_1 = h_2\underline{v}_2 + \cdots + h_n\underline{v}_n$, portando tutti i membri a sinistra avremo: $1\underline{v}_1 - h_2\underline{v}_2 + \cdots - h_n\underline{v}_n = \underline{0}$ ovvero che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

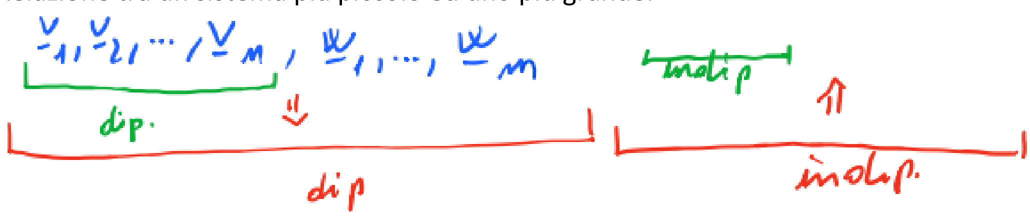
II. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è indipendente $\Leftrightarrow$ nessun $\underline{v}_i$ dipende dai rimanenti.
Si dimostra sostanzialmente negando la precedente.

Esempi (tipologie di svolgimento degli esercizi):

1) $(1,0,0), (1,2,3), (0,0,1)$ sono linearmente indipendenti; infatti scrivendo una generica combinazione lineare $h_1(1,0,0) + h_2(1,2,3) + h_3(0,0,1) = (0,0,0)$ avrò $(h_1 + h_2, 2h_2, 3h_2 + h_3) = (0,0,0)$ da cui troverò il seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} h_1 + h_2 = 0 \\ 2h_2 = 0 \\ 3h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \mapsto h_1 = h_2 = h_3 = 0.$
2) $(4,1,4), (4,1,3)$ sono indipendenti poiché non sono proporzionali e tutti diversi da zero.
3) $(1,0,0), (1,3,0), (3,4,4)$ sono linearmente indipendenti; infatti $(1,0,0) = h(1,3,0) + k(3,4,4)$ è valida solo se $h = k = 0$ e quindi ho un assurdo, di conseguenza $(1,0,0)$ non dipende dagli altri tue, il ragionamento è valido anche per gli altri due elementi, quindi è un sistema indipendente.
4) $(1, -\frac{1}{2}, 0), (4,3,1), (1,2,\frac{1}{2})$ + linearmente dipendente potendo scrivere il terzo come combinazione lineare degli altri due; infatti: $(4,3,1) = 2\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) + 2(1,2,\frac{1}{2})$
5) Spazio vettori geometrici applicati in O: due vettori sono dipendenti se e solamente se sono proporzionali (giacciono sulla stessa retta) quindi tre vettori $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ sono dipendenti se e solo se giacciono su di uno stesso piano: $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OQ} + \beta\overrightarrow{OR}$ (vedi figura).



Relazione tra un sistema più piccolo ed uno più grande:



Se il vettore più piccolo è linearmente dipendente (quindi posso scriverlo come combinazione lineare di vettori non tutti nulli) allora posso scrivere il sistema più grande: $h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n + 0\underline{w}_1 + \cdots + 0\underline{w}_n = \underline{0}$; mentre, se il sistema più grande è indipendente allora anche il sistema più piccolo è indipendente.

<u>Proposizione</u>: siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori linearmente indipendenti allora ogni vettore $\underline{v}$ che dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vi dipende in maniera univoca. Ovvero posso ottenere ogni combinazione lineare in un singolo modo.
Dimostrazione: Bisogna verificare che $h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_n\underline{v}_n = k_1\underline{v}_1 + \cdots + k_n\underline{v}_n$, e che $h_i = k_i$, posso scrivere: $(h_1 - k_1)\underline{v}_1 + \cdots + (h_n - k_n)\underline{v}_n = \underline{0}$, essendo linearmente indipendenti, l'unica combinazione lineare è quella di scalari tutti nulli, ne segue $h_i - k_i = 0$ e dunque $h_i = k_i$.

Proposizione: Siano $H, K \leq V$ non triviali ($\underline{0} \neq \underline{h} \in H$ e $\underline{0} \neq \underline{k} \in K$), $H \cap K = \{\underline{0}\}$, allora i vettori $\underline{h}$ e $\underline{k}$ sono indipendenti.
Dimostrazione: supponiamo per assurdo che $\underline{h}$ e $\underline{k}$ siano dipendenti, quindi $\alpha\underline{h} + \beta\underline{k} = \underline{0}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli, supponiamo α diverso da zero (uno dei due deve esserlo al fine della dipendenza) quindi posso scrivere $\underline{h} = (-\alpha^{-1}\beta)\underline{k} \in H \cap K$, ora, poiché $\underline{h}$ deve essere diverso dal vettore nullo per ipotesi, ed essendo che $H \cap K$ contiene solo il vettore nullo (sempre per ipotesi) abbiamo trovato un assurdo.

Proposizione: Siano $H_1, \dots, H_n$ sottospazi non banali di V, $\underline{0} \neq \underline{v_1} \in H_1, \dots, \underline{0} \neq \underline{v_n} \in H_n$, il sistema costituito da $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ è indipendente. (i sottospazi sono in somma diretta)
Dimostriamo per assurdo che i vettori siano linearmente dipendenti: $\left.\begin{matrix} h_1\underline{v_1} + \cdots + h_n\underline{v_n} = \underline{0} \\ (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0) \end{matrix}\right] \overset{h_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \underline{v_1} = (-h_1^{-1}h_2)\underline{v_2} + \cdots + (-h_1^{-1}h_n)\underline{v_n} \in H_1 \cap (H_2 + \cdots + H_n) = \{\underline{0}\}$ e questo significa che i sottospazi sono in somma diretta che per definizione è il singleton dell'elemento neutro, ciò denota un assurdo che contraddice il fatto che qeusti oggetti siano linearmente dipendenti.

Prendiamo ad esempio i seguenti insiemi: $H_1 = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}, H_2 = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}, H_3 = \langle(1,1)\rangle$; sappiamo che H_1 e H_2sono in somma diretta quindi formano un sistema indipendente, supponiamo $(0,1)$ e $(1,0)$ allora $(0,1)$ $(1,0)$ $(1,1)$ sono dipendenti per gli scalari $1, 1, -1$ rispettivamente.

Proposizione: Siano H_1 e H_2 sottospazi di V in somma diretta, sia $\underline{v} \in H_1 \oplus H_2$ allora $\exists! \, \underline{v_1} \in H_1, \underline{v_2} \in H_2 :$ $\underline{v} = \underline{v_1} + \underline{v_2}$
Dimostrazione: supponiamo di poter scrivere $\underline{v}$ in due modi: $\underline{v} = \underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_1'} + \underline{v_2'} \Rightarrow (\underline{v_1} - \underline{v_1'}) + (\underline{v_2} - \underline{v_2'}) = \underline{0}$; essendo il primo oggetto una differenza di due oggetti in H_1 quell'oggetto appartiene ad H_1, allo stesso modo $\underline{v_2} - \underline{v_2'} \in H_2$. Supponendo i due oggetti entrambi diversi da zero avremo un assurdo poiché per ipotesi i vettori sono in somma diretta (la loro somma è pari al singleton del vettore nullo); di conseguenza l'unica soluzione è che $\underline{v_1} = \underline{v_1'}$ e $\underline{v_2} = \underline{v_2'}$, come volevasi dimostrare.
Osservazione: la precedente proposizione ci fa capire che la somma diretta implica l'unicità di scrittura (posso scrivere ogni vettore appartenente alla somma diretta in un unico modo). Viceversa: $\forall g \in H_1 + H_2$ e $\exists! \, \underline{v_1} \in H_1, \underline{v_2} \in H_2 : g = \underline{v_1} + \underline{v_2} \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\}$ (quindi la mia somma è somma diretta)
Dim.: $\underline{v} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \underline{v} = \underbrace{\underline{v}}_{\in H_1} + \underbrace{\underline{0}}_{\in H_2} = \underbrace{\underline{0}}_{\in H_1} + \underbrace{\underline{v}}_{\in H_2}$; ovvero l'unicità di scrittura $\underline{v} = \underline{0}$ e $\underline{0} = \underline{v}$
Mettendo insieme le precedenti proposizioni posso scrivere la seguente proposizione: siano $H_1, H_2 \leq V$, se $H_1 \cap H_2 = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \forall \underline{v} \in H_1 + H_2, \exists! \, \underline{h_1} \in H_1, \underline{h_2} \in H_2 : \underline{v} = \underline{h_1} + \underline{h_2}$. La quale posso generalizzarla in: $\boldsymbol{H_1, \dots, H_n \; sono \; in \; somma \; diretta \; \Leftrightarrow \forall \underline{v} \in H_1 + \cdots + H_n, \exists! \, \underline{h_i} \in H_i : \underline{v} = \underline{h_1} + \cdots + \underline{h_n}}$
Dimostrazione: l'implicazione $\Rightarrow$ è già stata dimostrata, rimane da dimostrare quindi l'implicazione $\Leftarrow$. Prendiamo un elemento $\underline{v} \in H_1 \cap (H_2 + \cdots + H_n)$ e dimostriamo che sia uguale all'elemento neutro (non consideriamo gli altri sottospazi generati poiché si procede in modo analogo). Ricordando che $\exists \underline{h_2} \in H_2$, $\dots, \underline{h_n} \in H_n : \underline{v} = \underline{h_2} + \cdots + \underline{h_n}$ posso scrivere $\underline{v} = \underbrace{\underline{v}}_{\in H_1} + \underbrace{\underline{0}}_{\in H_2} + \cdots + \underbrace{\underline{0}}_{\in H_n} = \underline{0} + \underline{v} = \underbrace{\underline{0}}_{\in H_1} + \underbrace{\underline{h_2}}_{\in H_2} + \cdots + \underbrace{\underline{h_n}}_{\in H_n}$
e quindi per l'unicità di scrittura comporta che $\underline{v} = \underline{0}$

Proposizione: Supponiamo di avere $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_t}$ indipendente e $\underline{v} \in V$ che non dipende dai $\underline{v_i}$ allora se aggiungo il vettore $\underline{v}$ al precedente sistema ottengo un sistema indipendente, quindi $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_t}, \underline{v}$ indipendete
Dimostrazione: prendiamo una combinazione lineare e poniamola uguale al vettore nullo: $h_1\underline{v_1} + h_2\underline{v_2} + \cdots + h_t\underline{v_t} + h\underline{v} = \underline{0}$, in questo modo avremo due possibili casi. Caso $h \neq 0$: $\underline{v} = (-h^{-1}h_1)\underline{v_1} + \cdots + (-h^{-1}h_t)\underline{v_t}$ il che è assurdo essendo che $\underline{v}$ non dipende dagli altri vettori. Mentre per il caso $h = 0$: $h_1\underline{v_1} + h_2\underline{v_2} + \cdots + h_t\underline{v_t} + h\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow h_1 = h_2 = \cdots = h_t = 0$ (per definizione).

Corollario: Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ indipendente, $\underline{v} \in V$, se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t, \underline{v}$ è dipendente allora $\underline{v}$ dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$.
La dimostrazione è una sorta di negazione della proposizione precedente $\big((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\big)$.

Esempio: Partiamo da $(1,2,0)$ che è indipendente $\Rightarrow$ $(1,2,0), (3,2,0)$ ancora indipendente poiché $(3,2,0)$ non dipende da $(1,2,0)$. Allora, per lo stesso motivo, si ha che $(1,2,0), (3,2,0), (0,0,1)$ è indipendente.

$\underbrace{\underbrace{(1,2,0),\ (3,2,0)}_{\text{indip. (non prop.)}} \qquad \underbrace{(0,0,1)}_{\text{non dip.}}}_{\text{indip.}}$

Vettori finitamente generabili

Uno spazio vettoriale V è detto **finitamente generabile** se esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n : V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$, dove $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ è detto sistema di generatori. Quindi uno spazio vettoriale è finitamente generabile se ogni elemento di V può essere scritto come combinazione lineare di elementi di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.
Altre definizioni associate:

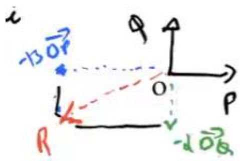
- Un sistema di generatori indipendente è detto **base**.
- Un **riferimento** è una base ordinata $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\ base \Rightarrow (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)\ riferimento$

Esempi:

1) $\mathbb{R}^2 \quad (1,0) \quad (0,1)$
   I. $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ formano un sistema di generatori indipendenti e dunque $(1,0)$ e $(0,1)$ sono una base per $\mathbb{R}^2$.
   II. $(1,0), (2,0)$ non è un sistema di generatori poiché $(x,y) = h_1(1,0) + h_2(2,0) = (h_1 + 2h_2, 0)$ dunque $(0,1) \notin \langle (1,0), (2,0) \rangle$
   III. $(1,0), (1,1)$ è un sistema di generatori perché $(x,y) = h(1,0) + k(1,1) \Rightarrow \begin{cases} h + k = x \\ k = y \end{cases}$ dunque $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right) \Rightarrow \exists!\, soluzione\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (sono anche indipendenti)

2) I vettori $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1), (0,0,0)$ sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$? Prendiamo un generico sistema $(x,y,z) = h_1(1,0,0) + h_2(0,2,0) + h_3(0,0,-1) + h_4(0,0,0)$ dunque avrò un sistema $\begin{cases} h_1 = x \\ 2h_2 = y \\ -h_3 = z \end{cases}$ con soluzione unica e questo vorrebbe dire che il sistema (avendo unicità) è un sistema indipendente di generatori. È dunque una possibile base di $\mathbb{R}^3$ è $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1)$

3) Spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in O è finitamente generabile poiché supponendo di prendere un vettore $\overrightarrow{OR}$ in qualunque parte del piano (vedi figura), essa può essere ottenuta come combinazione lineare di $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$.



4) Lo spazio di polinomi $\mathbb{R}_n[x]$ è finitamente generabile? Supponiamo di avere gli $n+1$ polinomi $1, x, x^2, \dots, x^n$, dunque ogni polinomio di grado al più n posso scriverlo come combinazione lineare $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \underline{x}^n + \dots + a_0 \underline{1}$; di conseguenza è finitamente generabile.

5) Lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generabile poiché se lo fosse esisterebbero $p_1(x), \dots, p_n(x) : \mathbb{R}[x] = \langle p_i(x) \rangle$ ciò vuol dire che $R[x] = \{\alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_n p_n(x) | \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ ma ciò significherebbe che se prendo il grado massimo dei polinomi, la combinazione lineare associata non supererebbe mai il suo grado, ciò significa che un grado superiore al suddetto non apparterrebbe a : $\mathbb{R}[x]$

6) $(1,0)$ è indipendente ma non è una base poiché non posso generare altro elemento oltre allo zero nel secondo elemento.

Teorema di esistenza delle basi: Sia V uno spazio vettoriale non nullo, se è finitamente generabile allora V ammette basi.

Dimostrazione: sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ un sistema di generatori, se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è indipendete allora è base. Se invece il sistema è dipendente allora $\exists i :\ \underline{v}_i$ dipenda dai rimanenti, supponiamo che sia $\underline{v}_1$, allora esso può essere rimosso dal sistema, dunque avrò $\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ che sarà ancora un sistema di generatori poiché $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle \leq \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle \ni \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \Rightarrow \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$. Iterando questo procedimento troverò sempre almeno un sistema indipendente e quindi una base.

Osservazione: Da ogni sistema di generatori si può estrarre una base

Ad esempio: $(1,0), (2,0), (3,4), (5,6), (1,1)$ è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$, essendo $(x, y) = y(1,1) + (x - y)(1,0) + 0(2,0) + 0(3,4) + 0(5,6)$; da questo sistema di generatori si può estrarre una base, $(2,0)$ è proporzionale a $(1,0)$ e si può rimuovere, allo stesso modo $(3,4), (5,6)$ essendo entrambi scrivibili come $h(1,1) - 1(1,0)$, di conseguenza rimarrò con i vettori $(1,0)(1,1)$, che formano una base.

Dimensione di uno spazio vettoriale

Lemma di Steinitz: Se ho m vettori linearmente indipendenti contenuti in un sottospazio generato da n vettori allora il numero di generatori è maggiore o uguale del numero di vettori indipendenti.

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle \Rightarrow m \leq n$$

Corollario (diretta conseguenza del lemma di Steinitz): Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ spazio vettoriale, tutte le basi hanno lo stesso ordine detto **dimensione** di V**.** (la dimensione è un concetto ben definito per il lemma di Steinitz)

Dimostrazione: Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ due basi, essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ una base allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un sistema di vettori linearmente indipendente ed è contenuto in $V = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$ essendo $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ base e quindi anche un sistema di generatori. Per il lemma di Steinitz avrò che $n \leq m$, ovviamente posso scrivere anche il contrario, ovvero $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \in V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$, di conseguenza avrò anche $m \leq n$, ovvero $m = n$.

$\dim(V)$ è la **cardinalità** di una base, se $V = \{\underline{0}\} \Longrightarrow \dim(V) = 0$ (poiché l'insieme vuoto si può vedere come un sistema indipendente di vettori costituito dal solo elemento neutro) mentre se V non è finitamente generabile $\Rightarrow \dim(V) = \infty$.

Proposizioni della dimensione $\left(\boldsymbol{V \neq \{\underline{0}\}\ finitamente\ generabile, \dim V = n}\right)$:

- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indipendente $\Rightarrow m \leq n$ (il numero di oggetti non può superare la dimensione di V)
  Dim.: Sia $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ una base di V_n allora essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ un sistema di vettori linearmente indipendente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \rangle = V_n \Rightarrow m \leq n$ per il lemma di Steinitz
- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendente $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ formano una base (quindi anche un sistema di generatori)
  Basta dimostrare che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sia anche un sistema di generatori, per farlo supponiamo per assurdo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ non siano un sistema di generatori quindi $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle < V$ ma allora $\exists \underline{v} \in V \setminus \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$ e quindi $\underline{v}$ non dipende da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ e quindi $\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è un sistema indipendente di cardinalità $n + 1$ che è assurdo poiché contraddice la proposizione precedente.
- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sistema di generatori $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ formano una base (quindi è anche indipendente)
  Si dimostra per assurdo poiché se non fossero indipendenti potremmo estrarre una base di cardinalità minore di n (in modo analogo alla dimostrazione precedente)
- $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ indipendenti $\Rightarrow \exists \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n : \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n$ formano una base (Ogni sistema di vettori linearmente indipendenti si può completare in una base)
  Dim.: se $m = n$ allora è base per la seconda preposizione. Se $m < n \Rightarrow \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle < V$, ma allora $\exists \underline{w}_{m+1} \in V \setminus \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle \Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}$ è indipendente; se è base ho concluso, altrimenti continuo sino a trovare la base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n$ (finirò poiché per la prima proposizione ho un numero finito di vettori linearmente indipendenti, ovvero n).

Proposizione: Sia V spazio vettoriale, i seguenti enunciati sono tra loro equivalenti per $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$:

1) Base
2) Massimale rispetto all'indipendenza (se preso un sistema più grande allora perde la proprietà di indipendenza)
3) Minimale rispetto all'essere un sistema di generatori (se preso un sistema più piccolo allora perde la proprietà di essere un sistema di generatori)
4) Sistema indipendente di cardinalità massima (tutti gli altri sistemi indipendenti hanno cardinalità minore o uguale di n)
5) Sistema di generatori di cardinalità minima (tutti gli altri sistemi di generatori hanno cardinalità maggiore o uguale di n)

Dimostrazione: $1 \Rightarrow 2$: supponiamo ci sia un sistema di vettore contenente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, che essendo base implica $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ dipendente. $2 \Rightarrow 1$: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ massimale indipendente, usando il completamento ad una base perderei il concettò di massimale se esistesse una base con cardinalità $> n$. Segue da quest'ultima preposizione anche che $4 \Rightarrow 1$, mentre la $1 \Rightarrow 4$ è analoga alla $1 \Rightarrow 2$. $1 \Rightarrow 3$: essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base, se non sarà minimale rispetto alla generazione ci sarà un sottosistema proprio di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ che è ancora un sistema di generatori, da cui possiamo allora estrarre una base e trarne dimensioni diverse. $3 \Rightarrow 1$: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ minimale rispetto alla generazione allora estraiamo una base che deve coincidere con $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. $1 \Rightarrow 5$: essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base se per assurdo esistesse un sistema di generatori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ con $m < n$ allora è possibile estrarre da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ una base che avrà perciò cardinalità $< n$ (assurdo). La $5 \Rightarrow 1$ si dimostra banalmente dalla $3 \Rightarrow 1$. Per doppia implicazione abbiamo dimostrato che: $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$

Proposizione: Sia $W \leq V_n$ allora:

1) W è finitamente generabile e $\dim W \leq n$

   Dim.: Se per assurdo W non fosse finitamente generabile allora se $\underline{w}_1 \in W$, $W \neq \langle \underline{w}_1 \rangle$ e quindi esisterebbe un $\underline{w}_2 \in W \setminus \langle \underline{w}_1 \rangle \Rightarrow \underline{w}_1, \underline{w}_2$ indipendenti. Segue sempre che $W \neq \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$, di conseguenza possiamo iterare questo processo fino all'assurdo di trovare $n+1$ vettori indipendenti. Presa una base di $W\left(\neq \{\underline{0}\}\right)$ $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ sono indipendenti anche in V, quindi $t \leq n$

2) $\dim W = n \Leftrightarrow W = V_n$

   La $\Leftarrow$ è ovvia poiché se $V_n = W$ allora $\dim W = \dim V = n$. L'implicazione $\Rightarrow$ si dimostra prendendo una base di W, sia $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ che essendo base è anche un sistema indipendente di cardinalità n in V e quindi base per V

Corollario: Siano $W, Z \leq V_n$ allora se

1) $W \leq Z \Rightarrow \dim W \leq \dim Z$
2) $W \leq Z$ e $\dim W = \dim Z \Rightarrow W = Z$

   Le dimostrazioni sono analoghe a quelle precedenti. Basti considerare Z come V

Esempio: <(1,0,0),(0,1,0)> e <(0,1,0),(0,0,1)> sono due sottospazi che hanno la stessa dimensione ma non sono contenuti uno nell'altro; eccetto per la dimensione R^1 sono infiniti gli esempi di questo tipo. Si prenda ad esempio $\mathbb{R}^2$ avremo $\langle(1,0)\rangle \quad \langle(1,1)\rangle \quad \langle(1,2)\rangle$ ... ∞ sottospazi della stessa dimensione.

Si prendano $H_1, \dots, H_n \leq V$ sottospazi in somma diretta allora $\dim(H_1 \oplus \dots \oplus H_n) = \dim H_1 + \dots + \dim H_n$.
Dimostrazione: Siano $\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1m_1}$ base di H_1, $\underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2m_2}$ base di H_2, ... , $\underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{nm_n}$ base di H_n (il primo pedice identifica lo spazio vettoriale, il secondo il numero dell'elemento). Dimostriamo che l'unione delle basi $\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1m_1}, \underline{e}_{21}, \dots, \underline{e}_{2m_2}, \dots, \underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{nm_n}$ sia essa stessa una base: che sia un sistema di generatori è scontato perché comunque si prendano un vettore del sottospazio somma esso si può ottenere mediante il sistema $\underline{e}_{11}, \dots, \underline{e}_{1m_1}, \dots, \underline{e}_{n1}, \dots, \underline{e}_{nm_n}$. Ora ci resta da dimostrare che formi anche un sistema indipendente per $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, ovvero che $h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1m_1}\underline{e}_{1m_1} + \dots + h_{n1}\underline{e}_{n1} + \dots + h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n} = \underline{0}$, isolando i vettori nel seguente modo $h_{11}\underline{e}_{11} + \dots + h_{1m_1}\underline{e}_{1m_1} + \underbrace{\left(\dots + h_{n1}\underline{e}_{n1} + \dots + h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n}\right)}_{\in H_2 + \dots + H_n}$ posso scrivere

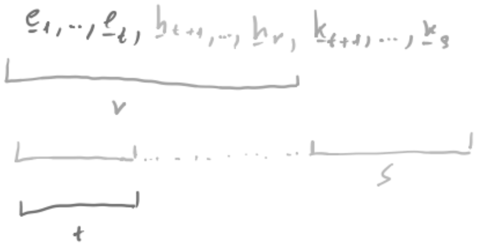
$h_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + h_{1m_1}\underline{e}_{1m_1} = \cdots - h_{n1}\underline{e}_{n1} + \cdots - h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n}$ ed in questa forma è evidente che quest'oggetto scrivibile in due modi (come se stesso e come la combinazione lineare soprascritta) appartiene all' insieme $H_1 \cap (H_2 + \cdots + H_n) = \{\underline{0}\}$ (per definizione fa il singleton dell'elemento neutro). Ciò significa che l'oggetto a sinistra è l'elemento neutro e dunque $h_{11}\underline{e}_{11} + \cdots + h_{nm_n}\underline{e}_{nm_n} = \underline{0} \Rightarrow h_{11} = \cdots = h_{1n_1} = 0$. Isolando ora gli altri insiemi seguendo lo stesso ragionamento avrò come da tesi $h_{11} = \cdots = h_{1n_1} = \cdots = h_{nm_n} = 0$.

Relazione di Grassmann

Essa ci dice praticamente la dimensione del sottospazio somma quando i due sottospazi non sono necessariamente in somma diretta (vale anche per n sottospazi).

$$\boldsymbol{H, K \leq V_n} \qquad \mathbf{dim}\, \boldsymbol{H} + \mathbf{dim}\, \boldsymbol{K} = \mathbf{dim}(\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K}) + \mathbf{dim}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{K})$$

Dimostrazione: se $H \cap K = \{\underline{0}\} \Rightarrow H \oplus K$ ed è dimostrata banalmente per la proposizione precedente. Supponiamo dunque $H \cap K \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim H \cap K = t$, prendiamo una base di $H \cap K$ ed andiamo a completarla sia come base di H che di K, avremo dunque che esistono $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t$ base di $H \cap K$, $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$ base di H e $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$ base di K (ovviamente può anche succedere che i t vettori siano una base anche di H e/o di K). Mettendo insieme i precedenti oggetti e considerandolo un singolo insieme avrò $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$ sono $r + s - t$ elementi (vedi figura) ora dobbiamo dimostrare che $r + s - t = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$ sia effettivamente $\dim(H + K)$. Dobbiamo dimostrare dunque che sia una base, quindi che sia un sistema di generatori e linearmente indipendente. 1) sistema di generatori: per definizione esiste $\underline{v} \in H + K \Rightarrow \exists \underline{h} \in H, \underline{k} \in K : \underline{v} = \underline{h} + \underline{k}$ dove $\underline{h}$ è combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r$ e $\underline{k}$ combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$ e dunque avrò che $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{h}_{t+1}, \dots, \underline{h}_r, \underline{k}_{t+1}, \dots, \underline{k}_s$. 2) sistema linearmente indipendente: prendiamo una combinazione lineare generica $a_1\underline{e}_1 + \cdots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \cdots + a_r\underline{h}_r + b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \cdots + b_s\underline{k}_s = \underline{0}$ e scriviamo (come con la dimostrazione precedente), $\underline{x} = \underbrace{a_1\underline{e}_1 + \cdots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \cdots + a_r\underline{h}_r}_{H} = \underbrace{-b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \cdots - b_s\underline{k}_s}_{K}$



dunque $\underline{x} \in H \cap K = \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t \rangle$ e in particolare $\underline{x} \begin{array}{l} = c_1\underline{e}_1 + \cdots + c_t\underline{e}_t \\ = -b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \cdots - b_s\underline{k}_s \end{array}$ ottenendo così che $c_1\underline{e}_1 + \cdots + c_t\underline{e}_t + b_{t+1}\underline{k}_{t+1} + \cdots + b_s\underline{k}_s = \underline{0}$ da cui (essendo una base) posso dedurre $c_1 = \cdots = c_t = b_{t+1} = \cdots = b_s = 0$ ma allora $a_1\underline{e}_1 + \cdots + a_t\underline{e}_t + a_{t+1}\underline{h}_{t+1} + \cdots + a_r\underline{h}_r = \underline{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_t = a_{t+1} = \cdots = a_r = 0$.

Osservazione: Grassmann si usa usualmente per calcolare la dimensione dell'intersezione poiché nella maggior parte dei casi la dimensione della somma è "visivamente" calcolabile.

<u>Proposizione</u>: Sia V_n uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ un riferimento (base ordinata, quindi ho l'unicità di scrittura), avrò: $\forall \underline{v} \in V_n \ \exists!\, h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R} : \underline{v} = h_1\underline{e}_1 + \cdots + h_n\underline{e}_n$ (considero un riferimento così posso definire una n-upla nell'ordine assegnato), e questa n-upla $(h_1, \dots, h_n)$ si chiamerà n-upla dei componenti nel riferimento $\mathcal{R}$.

Per passare da componenti in un riferimento $\mathcal{R}$ a componenti di un altro riferimento $\mathcal{R}'$ si eseguono (meccanicamente) i seguenti passi:

$\mathcal{R}=(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n) \to \mathcal{R}'=(\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n)$ rif. di V_n

$\underline{e}_1 = a_{11}\underline{e}'_1 + \dots + a_{n,1}\underline{e}'_n$ $\qquad \underline{v} \in V$

$\underline{e}_2 = a_{1,2}\underline{e}'_1 + \dots + a_{n,2}\underline{e}'_n$ $\qquad (x_1,x_2,\dots,x_n)$ in $\mathcal{R}$

$\dots$ $\qquad (x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$ in $\mathcal{R}'$

$\underline{e}_n = a_{1,n}\underline{e}'_1 + \dots + a_{nn}\underline{e}'_n$

$$\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n})\underline{e}'_1 + \dots + (x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{nn})\underline{e}'_n$$
$$= x'_1\underline{e}'_1 + \dots + x'_n\underline{e}'_n$$

$x'_1 = x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}, \dots, x'_n = x_1 a_{n,1} \dots + x_n a_{nn}$ $\quad$ formule di passaggio

$$A=(a_{ij}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad X' = AX$$

A è matrice di passaggio

Forma canonica

Sia $\mathbb{R}^n$, si definisce base canonica o riferimento canonico di uno spazio vettoriale l'insieme delle seguenti basi: $\underline{e_1} = (1,0,\dots,0), \underline{e_2} = (0,1,\dots,0), \dots, \underline{e_n} = (0,0,\dots,1)$; (per la base canonica non è rilevante l'ordine) di conseguenza ogni vettore appartenente allo spazio vettoriale si può scrivere come combinazione lineare della base canonica. Altri esempi:

- Base canonica di $\mathbb{R}_n[x]$: $1, x, x^2, \dots, x^n$
- Base dello spazio delle matrici $\mathbb{R}_{2,3}$: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (concetto analogo per quanto riguarda matrici $\mathbb{R}_{n,m}$

Metodi per estrarre una base da un sottospazio generato

Sia, ad esempio, il seguente sottospazio $H = \langle(1,0,1,2), (-1,2,3,0), (3,-2,-1,4), (-2,4,6,0)\rangle \leq \mathbb{R}^4$, tra i generatori di questo sottospazio generato è evidente la proporzionalità tra il secondo e il quarto vettore, dunque $H = \langle(1,0,1,2), (-1,2,3,0), (3,-2,-1,4)\rangle$, mentre il terzo è dipendente dai primi due essendo $(3,-2,-1,4) = 2(1,0,1,2) - 1(-1,2,3,0)$, quindi rimarrà $H = \langle(1,0,1,2), (-1,2,3,0)\rangle$, di conseguenza essendo $\dim H = 2$ qualunque coppia non proporzionale dei quattro vettore definiti all'inizio sono una base per H. Più precisamente: tutti i sistemi indipendenti di ordine 2 sono una base per H.

Un altro metodo è quello di posizionare i vettori in una matrice e trasformarla in una matrice equivalente a gradini: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in tal modo non ho alterato il sottospazio generato dalle righe e ciò significa che il sottospazio generato dalle righe della matrice a gradini è lo stesso di quello generato dalla matrice iniziale, ed è evidente che la dimensione di H sia 2 (le righe nulle sono ininfluenti ed è evidente la non proporzionalità tra la prima e la seconda riga), più precisamente $\dim H =$ numero di pivot di un sistema a gradini equivalente.

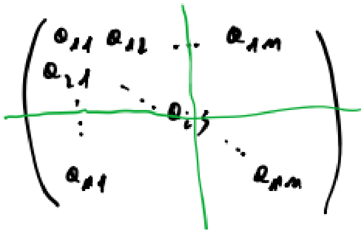
Corollario: Due matrici a gradini equivalenti hanno lo stesso numero di pivot.

4. Matrici e Sistemi lineari

Determinante di una matrice quadrata

Il determinante esiste solo e solamente per matrici quadrate; il determinante si definisce per ricorsione sull'ordine della matrice in questione: per $n = 1$ la matrice $A = (a)$ ha determinante $\det A = a$; supposto di averlo definito per matrici di ordine $n - 1$ definiamolo per matrici di ordine n, al fine di poterlo fare si definiscono i seguenti concetti:

- $\forall a_{ij}$ di A la **matrice complementare** di a_{ij} è $A(i,j)$ e si definisce nel seguente modo:



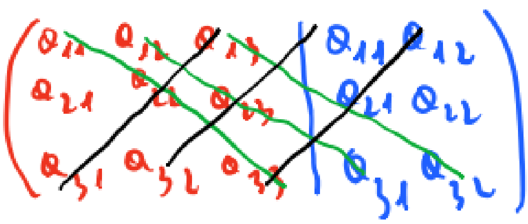
(praticamente si cancella la riga i e la colonna j dalla matrice A)

- **Complemento algebrico** di a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$;
  È possibile usare il determinante nella definizione di complemento algebrico poiché essendo $A(i,j)$ una matrice complementare ha ordine minore di A (abbiamo supposto di aver dato la definizione di determinante per matrici di ordine $n - 1$)

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n} = \cdots = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = \mathbf{\det A} = a_{1n}A_{1n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = \cdots = a_{12}A_{12} + \cdots + a_{n2}A_{n2} = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$

Esempio: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aA_{11} + bA_{12} = ad - bc$ infatti se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2$

Matrici 3x3: regola di Sorrus: Prendiamo il determinante di una generica matrice 3x3 $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right|$, ad essa si duplica prima e seconda colonna e li posizioniamo dopo la seconda colonna: $\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$ dopodiché il determinante della mia matrice di partenza sarà uguale al prodotto tra le diagonali (quelle in verde) meno il prodotto tra le antidiagonali (quelle in nero), ovvero:



$$\det = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

Osservazione: Se una matrice ha una riga o colonna tutta nulla allora il suo determinante è zero

Proprietà del determinante:

1) $\det A = \det A^t$
2) Se una riga dipende dalle rimanenti allora il determinante è zero
   (Corollario: se il determinante è diverso da zero allora le righe sono indipendenti)
3) Teorema di Cauchy-Binet: $A, B \in \mathbb{R}_n \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
4) Se moltiplico una singola riga (o colonna) per uno scalare h allora il determinante della matrice risultante è $h \cdot \det A$ (con $h \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}_n$)
5) Se scambiamo due righe o due colonne il determinante cambia segno
6) Se aggiungo ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna) il determinante non cambia
7) Sia A una matrice quadrata e sia D una matrice a gradini equivalente ad A allora $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |D| \neq 0$

Definizione: $A \in \mathbb{R}_n$ è detta invertibile se e solo se $\exists B \in \mathbb{R}_n : AB = I_n = BA$

Proposizione: Una matrice A è invertibile se e solamente se ha determinante diverso da zero e la sua inversa è $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ (matrice trasposta dei complementi algebrici)

Corollario: Siano $A, B \in \mathbb{R}_n$ se $AB = I_n$ allora sia A che B sono invertibili e $B = A^{-1}$ (inversa di A)
Dimostrazione: Applicando Cauchy-Binet: $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I_n) = 1$ ne segue $\det A \neq 0$ e anche $\det B \neq 0$ e dunque A e B sono invertibili, ma allora $AB = I_n \Rightarrow (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$, ovviamente anche $B = A^{-1}$ essendo l'inversa dell'inversa la matrice stessa.

Definizione: Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$ (si noti la generalità della matrice, non è valido solo per una matrice quadrata) definisco **rango di riga** la dimensione del sottospazio generato dalle righe, e **rango di colonna** la dimensione del sottospazio generato dalle colonne.

$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to r_r(A) = 0 = r_c(A)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,m}$

Minore di una matrice

Sia $0 < h \leq \min\{m, n\}$, fissato h allora prenderò le h-righe e le h-colonne e cancello tutte le altre, la sottomatrice quadrata rimanente è definita come la matrice minore di ordine h. Ad esempio:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

• cancellare

$0 < \underset{h}{2} \leq 3 = \min\{3,4\}$

righe: 1 e 2
colonne: 1 e 4

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ minore di ordine $\underline{h}$ (in questo caso 2)

Sia $A \in \mathbb{R}_{n,m}$ una matrice rettangolare: $\left.\begin{matrix} \underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_h}\ righe \\ \underline{a}^{j_1}, \dots, \underline{a}^{j_h}\ colonne \end{matrix}\right] \Rightarrow A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$, così facendo (poiché il determinante è possibile solo per matrici quadrate) posso definire il determinante del minore, e lo indico con $|A|(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$.

Un minore si dice di **ordine massimo** se il suo ordine coincide con il minimo del numero di righe e colonne di quella matrice rettangolare ($\min\{n, m\}$); una matrice non quadrata ha sempre più di un minore di ordine massimo, mentre una matrice quadrata ha un solo minore di ordine massimo ed è la matrice stessa.

Supponiamo che $A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$ non sia di ordine massimo, allora esisterà un indice di riga $i \neq i_1, \dots, i_h$ ed un indice di colonna $j \neq j_1, \dots, j_h$ così da poter comporre un minore $A(i, i_1, \dots, i_h; j, j_1, \dots, j_h)$; un minore così composto si definisce **orlato** del minore. È ovviamente possibile orlare un orlato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>**Definizione**</u>: Un minore si dice **fondamentale** se il suo determinante è diverso da 0 e se il determinante di ogni suo orlato è uguale a 0.

Non ci sono sempre minori fondamentali, ad esempio la matrice nulla non ha minori fondamentali, ma, se la matrice non è nulla allora esiste <u>sempre</u> almeno un minore fondamentale. Il minore fondamentale non è necessariamente unico.

Se un minore di ordine massimo ha determinante diverso da zero allora esso è un minore fondamentale (banalmente: l'implicazione è vera se non posso fare un orlato, e dunque sarà un minore fondamentale).

<u>**Teorema degli orlati**</u>: Sia $A \in \mathbb{R}_{nm}$ una matrice rettangolare e $A(i_1, \dots, i_h; j_1, \dots, j_h)$ è un minore fondamentale allora le righe $i_1, \dots, i_h, j_1, \dots, j_h$ sono un base del sottospazio generato da <u>tutte</u> le righe (formano un sistema di vettori indipendenti).

<u>Osservazioni</u>: il teorema degli orlati ci dice che trovato un minore fondamentale (ed esiste sempre) non solo le righe (o colonne) formano un sistema di vettori indipendenti ma essi sono anche una base di tutte le righe (o colonne) della matrice. Un'altra conseguenza che tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine.

Corollari derivanti dal teorema degli orlati:

- $r(A)$ si chiama semplicemente rango della matrice poiché il rango di riga è sempre uguale al rango di colonna, inoltre il rango di A è uguale al numero di pivot di una matrice a gradini equivalente per righe.
- Tutti i minori fondamentali hanno lo stesso ordine
- Il determinante di una matrice quadrata è diversa da zero se e solo se le righe (o colonne) sono indipendenti. $A \in \mathbb{R}_n \qquad |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ righe (o colonne) sono indipendenti
  Non è necessario dimostrare che $|A| \neq 0 \Rightarrow$ righe indipendenti. Per l'implicazione $\Leftarrow$ supponiamo che le righe siano indipendenti, allora $r_r(A) = n$, e prendiamo un minore fondamentale di A, quest'ultima essendo una matrice quadrata ha un unico minore fondamentale di ordine n, questo minore fondamentale è A stesso e dunque per definizione $|A| \neq 0$
- $A \in \mathbb{R}_n \qquad \det A = 0 \Leftrightarrow$ righe (o colonne) dipendenti

Criteri di compatibilità di sistemi di equazioni lineari

$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$ $AX = C$, osserviamo che la colonna dei termini noti C può essere scritta come $C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m$; quindi se c'è una soluzione la colonna dei termini noti è combinazione dei sistemi lineari delle colonne della matrice incompleta.

Primo criterio di compatibilità (utile per dimostrare il teorema di Rouché-Capelli): S è compatibile se e soltanto se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice incompleta.

Teorema di Rouché-Capelli: S è compatibile $\Leftrightarrow$ matrice completa ed incompleta hanno lo stesso rango. (il sistema ammette soluzione se e solamente se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta).

Dimostrazione: $\Leftarrow:$ $r(A) = r(A') = h$; avendo lo stesso rango dimostriamo che il sistema sia compatibile. Prendiamo h colonne indipendenti di A, che sono indipendenti anche come colonne di A' e quindi queste h colonne di A sono una base anche per la matrice completa. Di conseguenza la colonna dei termini noti C si scrive come combinazione lineare delle colonne di A ed ho dimostrato l'implicazione per il primo criterio di compatibilità. Dimostriamo ora la $\Rightarrow$: Supponiamo che S sia compatibile quindi bisogna mostrare che i ranghi siano uguali, Prendiamo h colonne indipendenti di A e prendiamo il sottospazio generato da tutte le colonne della matrice incompleta: $V = \langle \underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \rangle = \langle \underline{a}^{i_1}, \dots, \underline{a}^{i_h} \rangle, C \in V$, il sottospazio generato da tutte le colonne della matrice completa è uguale al sottospazio di tutte le colonne della matrice incompleta poiché l'unica colonna che potrebbe aggiungere un elemento al sottospazio generato da tutte le colonne sono le incognite x, che possiamo rimuovere poiché dipendente dalle altre colonne essendo S compatibile. Ma allora $h = r(A) = r(A')$ come volevasi dimostrare.

Esercizio: Sistema a tre equazioni e tre incognite: $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + 2x = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$, scriviamo questo sistema nella forma matriciale $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ e determiniamo un minore fondamentale per la matrice incompleta: 2 $\xrightarrow[orlare]{si\ va\ ad}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\det(-4-1)=-5} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{-4+6+1-(-6+1+4)=4}$ di conseguenza il minore fondamentale della matrice incompleta è essa stessa ed ha rango 3, il rango della matrice completa è anche 3 $(\min\{3,4\})$ di conseguenza per il teorema di Rouché-Capelli questo sistema è compatibile.

N.B.: Il teorema di Rouché-Capelli si comporta molto bene anche per la determinazione dei valori di un parametro h per cui il sistema S sia compatibile o meno, prendiamo ad esempio il seguente sistema: $S = \begin{cases} 2x + y + hz = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$ e prendiamo la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice completa $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & h & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; determiniamone ora i determinanti in funzione del parametro h: $2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow A$: $|A| = -4 + 6 + h - (-6h + 1 + 4) = 7h - 3$, quindi $|A| = 0 \Leftrightarrow h = \frac{3}{7}$(nel caso ci fossero più orlati si deve prendere il valore comune di h per cui tutti gli orlati abbiano determinante nullo) . Per $h = \frac{3}{7}$ si ha $r(A) = 2$

ma $r(A') = 3$ poiché $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right| \neq 0$ e quindi il sistema è incompatibile per $h = \frac{3}{7}$, mentre per $h \neq \frac{3}{7}$ il sistema sarà compatibile essendo $r(A) = r(A') = 3$.

Risoluzione di sistemi lineari in situazioni particolari

Metodo migliore ed alternativo rispetto a quello visto per quanto riguarda la riduzione a gradini di un sistema. Prendiamo un sistema di n equazioni ed m incognite $S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$ e supponiamo che questo sistema sia compatibile (che si può capire con Rouché-Capelli) e calcoliamone le soluzioni. Prima di tutto calcoliamo un minore fondamentale della matrice incompleta A che sarà anche un minore fondamentale della matrice completa A' (essendo il sistema compatibile) ed eliminiamone le righe al di fuori del minore fondamentale (che possiamo trascurare perché tutte le righe al difuori del minore fondamentale sono dipendenti dalle altre). Quelle che restano sono equazioni indipendenti e di conseguenza avremo il numero di equazioni minore o uguale al numero di incognite. Vediamo i vari casi vari casi:

1) **n equazioni ed n incognite**: sappiamo già che esiste un'unica soluzione per la riduzione a gradini, però calcoliamola in maniera più veloce; se ci sono n equazioni ed n incognite sappiamo che la matrice incompleta è una matrice quadrata, e poiché le righe della matrice quadrata sono indipendenti poiché fanno sempre parte del minore fondamentale di partenze, la matrice A ha determinante diverso da zero, per cui $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$ (possiamo prendere l'inverso di A perché sappiamo che è diverso da 0), date queste caratteristiche il sistema di incognite X è un sistema ben determinato; vado a sviluppare l'uguaglianza precedente: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, più precisamente avremo che $x_1 = \frac{c_1A_{11}+\cdots+c_nA_{n1}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{c_1A_{1n}+\cdots+c_nA_{nn}}{|A|}$, per capire cosa rappresentino questi x_i prendiamo la matrice ausiliaria $B_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ che differisce da A per la prima colonna (dove al posto della prima colonna di A ha i termini noti), sviluppando il determinante rispetto la prima colonna avremo $|B_1| = c_1A_{11} + c_2A_{21} + \cdots + c_nA_{n1}$ (che per definizione di complemento algebrico sono uguali sia per la matrice B_1 che per A), analogamente si trovano i casi $x_2, \dots, x_n$ con le matrici $B_2, \dots, B_n$, di conseguenza posso applicare direttamente il procedimento $x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$ per trovarmi le soluzioni del sistema, le precedenti formule sono note come **Regola di Cramer**.

2) **n equazioni $< m$ incognite**: Sia il sistema $S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = c_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = c_n \end{cases}$, usiamo come sistema di riferimento da esempio $S = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ e prendiamo (come nel caso precedente) un minore fondamentale e portiamo a destra le incognite <u>fuori dalle colonne del minore fondamentale</u>, dunque avremo $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ ovvero $\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases}$. Consideriamo fissate le incognite esterne, quindi avremo un sistema di due equazioni e due incognite $\begin{cases} 2x + y = c_1 \\ x + y = c_2 \end{cases}$ in cui le due equazioni in questione sono indipendenti poiché appartenenti alle righe di un minore fondamentale, di conseguenza ci troviamo nel caso precedente di n equazioni ed n incognite; applichiamo Cramer: $x = c_1 - c_2$ e $y = 2c_2 - c_1$; ora sostituendo avremo $x = c_1 - c_2 = -z - 2t + z + t = -t$ e $y = 2c_2 - c_1 = 2(-z - t) + z + 2t = -z$ dunque l'insieme delle soluzioni sarà $\overline{S} = \{(-t, -z, z, t) | z, t \in \mathbb{R}\}$ e sostanzialmente $\overline{S}$ è indeterminato e ha ∞^2 soluzioni.

Sistemi omogenei

Come già visto in precedenza un sistema omogeno è un sistema che ha per incognite tutti zeri, ovvero un sistema del tipo $S : AX = 0$. Più precisamente $S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$

<u>Proposizione:</u> l'insieme delle soluzioni rappresenta un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$, ovvero $\overline{S} \leq \mathbb{R}^m$

<u>Dimostrazione</u>: Per determinare che sia un sottospazio vettoriale bisogna dimostrare che $\overline{S} \neq \emptyset$, che è stabile rispetto alla somma e che è stabile rispetto al prodotto. Ogni sistema omogeneo ammette almeno la soluzione banale $(0, \dots, 0) \in \overline{S}$ e quindi $\overline{S}$ non è vuoto. Per verificare che sia stabile rispetto alla somma prendiamo due soluzioni $Y_1, Y_2 \in \overline{S}$ (sono n-uple) che essendo soluzioni del sistema omogeneo possiamo scrivere $AY_1 = 0$ ed $AY_2 = 0 \Rightarrow A(Y_1 + Y_2) = AY_1 + AY_2 = 0 + 0 = 0$ (stabile rispetto alla somma). La stabilità rispetto il prodotto si dimostra prendendo un $\lambda \in \mathbb{R}$; allora si ha che $A(\lambda Y_1) = \lambda(AY_1) = \lambda 0 = 0$.

<u>Trovare una base per il sottospazio delle soluzioni di un sistema omogeneo</u>: sia $S = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ il nostro sistema omogeneo, allora (come fatto precedentemente) posso scrivere il mio sistema nel seguente modo: $\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases}$, avrò quindi il sistema di soluzioni generico $\overline{S} = \{(\alpha(z,t), \beta(z,t), z, t) | z, t \in \mathbb{R}\}$, allora potendo scegliere z e t in maniera arbitraria scegliamo i valori che rendano i vettori indipendenti, dunque $\begin{matrix} z = 1, t = 0 \to (\alpha(1{,}0), \beta(1{,}0), 1{,}0) \\ z = 0, t = 1 \to (\alpha(0{,}1), \beta(0{,}1), 0{,}1) \end{matrix}$ (usualmente si pone a 1 una variabile e 0 sulle altre prendendo tutte le possibilità, in questo caso ho solo due scelte). In questo modo i precedenti vettori sono anche un sistema di generatori, prendiamo infatti una generica soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \underbrace{\overline{z}, \overline{t}}) \in \overline{S}$, avrò $(\alpha(\overline{z}, \overline{t}), \beta(\overline{z}, \overline{t}), \underbrace{\overline{z}, \overline{t}})$ che sono dunque due soluzioni del sistema, ma (come visto precedentemente) per Cramer esiste un'unica soluzione per il sistema $\begin{cases} 2x + y = -z - 2t \\ x + y = -z - t \end{cases}$, questo vuol dire che le quadruple coincidono in tutto per tutto (ogni volta che le quadruple di soluzioni coincidono sui valori al di fuori del minore fondamentale devono coincidere su tutte le incognite) quindi esiste un'unica soluzione e allora $\alpha(\overline{z}, \overline{t}) = \overline{x}$ e $\beta(\overline{z}, \overline{t}) = \overline{y}$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{S}$ è un sottospazio vettoriale, per dimostrare che sia un sistema di generatori prendiamo $\overline{z}(\alpha(1{,}0), \beta(1{,}0), 1{,}0) + \overline{t}(\alpha(0{,}1), \beta(0{,}1), 0{,}1) = (*,*, \overline{z}, \overline{t}) \in \overline{S}$ ed ha gli stessi identici valori della soluzione $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$ allora per Cramer $(*,*, \overline{z}, \overline{t}) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$ e quindi questa quadrupla è combinazione lineare dei due vettori $(\alpha(1{,}0), \beta(1{,}0), 1{,}0)$ e $(\alpha(0{,}1), \beta(0{,}1), 0{,}1)$.

<u>Relazione tra sistema generale ed omogeneo associato</u>: in termini matriciali $S : AX = C$ e $S_0 : AX = 0$ esiste una relazione tra il sistema generale S ed il sistema omogeneo S_0 per il teorema seguente:

<u>Teorema</u>: Fissato $Y \in \overline{S}$ come soluzione del mio sistema completo S allora:

1) $\forall Z \in \overline{S} \;\; \exists Z_0 \in \overline{S}_0 : Z = Y + Z_0$ (posso ottenere la soluzione Z a partire da Y e da una soluzione Z_0 del mio sistema omogeneo)
2) $\forall Z_0 \in \overline{S}_0 : Y + Z_0 \in \overline{S}$ (soluzione particolare del sistema S, il punto 1 e 2 sono uno il viceversa dell'altro)

<u>Dimostrazione</u>: Punto 2: $A(Y + Z_0) = AY + AZ_0 = C + 0 = C$ quindi soddisfa il sistema generale S ed allora $Y + Z_0$ appartiene ad $\overline{S}$. Per dimostrare il punto 1 prendiamo una qualunque soluzione Z di $\overline{S}$ e sapendo che anche $Y \in \overline{S}$ scriviamo $A(Z - Y) = AZ - AY = C - C = 0 \Rightarrow Z - Y \in \overline{S}_0$ e dunque $Z = Y + (\underbrace{Z - Y}_{Z_0})$.

Questo teorema ci dice che se voglio descrivere l'insieme delle soluzioni del mio sistema generale S quello che io devo andare a fare è trovarmi una singola soluzione per S dopodiché vado a considerare il sistema omogeneo associato, di quest'ultimo vado a trovare l'insieme delle soluzioni; e tutte le altre soluzioni si possono descrivere come somma dell'unica soluzione che mi sono trovato più una qualunque combinazione lineare degli elementi della base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo.

Esempio: Sia $S = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$ il sistema generico e $S_0 = \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$ il sistema omogeneo associato, che abbiamo già precedentemente calcolato e quindi sappiamo che l'insieme di soluzioni di S_0 è $\overline{S}_0 = \langle (0,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$, cerchiamo ora una soluzione per S (poniamo $z = t = 0$): $Y \in \overline{S} : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$ e allora abbiamo trovato che la quadrupla $Y = (0,1,0,0) \in \overline{S}$ è soluzione del sistema generale S; dunque possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni $\overline{S} = Y + \overline{S}_0$ ovvero come somma di Y ed una soluzione di $\overline{S}_0$ (così abbiamo descritto tutte le soluzioni di S).

Risoluzione sistema omogeneo con $\boldsymbol{n-1}$ equazioni indipendenti ed $\boldsymbol{n}$ incognite

Sia il seguente sistema omogeneo generico: $S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{(n-1),1}x_1 + a_{(n-1),2}x_2 + \cdots + a_{(n-1),n}x_n = 0 \end{cases}$, il fatto che si abbia $n-1$ equazioni indipendenti vuol dire sostanzialmente che la matrice incompleta (anche quella completa poiché l'aggiunta della colonna di zeri è ininfluente) ha tutte le righe che sono indipendenti, di conseguenza avremo per la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1),1} & \cdots & a_{(n-1),n} \end{pmatrix}$ il rango massimo: $r(A) = n - 1$. Inoltre, grazie alla teoria sino ad ora studiata quello che si trova è che la dimensione delle soluzioni del sistema $\dim \overline{S} = 1$ (essendo un sistema omogeneo la dimensione del sottospazio generato è sostanzialmente il numero di incognite meno il rango di un minore fondamentale della matrice incompleta), di conseguenza per poter descrivere $\overline{S}$ ci basta trovare una soluzione non nulla e tutti i vettori ad esso proporzionali saranno tutti e soli vettori soluzioni di questo sistema.

In questo caso particolare, per trovare una soluzione del sistema si usa una formula che si ricava nel modo seguente: prendiamo tutti i minori di ordine $n-1$ di A (le sottomatrici quadrate di ordine $n-1$): $A_1, A_2, \dots, A_n$ e lasciamo fuori una singola colonna per avere $n-1$ righe (dunque ho n possibilità), di queste colonne abbiamo la certezza che ce ne sia almeno una con determinante non nullo (poiché il minore fondamentale è A stesso, essendo le righe indipendenti) quindi avrò per $\lambda_1 = \det A_1, \dots, \lambda_n = \det A_n$ almeno un $\lambda_i \neq 0$; allora la n-upla dei determinanti dei minori presi a segni alterni è effettivamente una soluzione del mio sistema, quindi $(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n) \in \overline{S}$. Inoltre, poiché quest'ultima è una n-upla non tutta nulla, l'oggetto $(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n)$ costituirà una base per le soluzioni di S e questo significa che tutte le altre soluzioni le posso ottenere moltiplicando uno scalare per quella n-upla. Ora ci resta da dimostrare che $(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n)$ sia effettivamente soluzione per S, a tal scopo utilizziamo la seguente matrice ausiliaria $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1),1} & \cdots & a_{(n-1),n} \end{pmatrix}$, che differisce dalla matrice A per la prima riga duplicata, e questo significa che $\det C_1 = 0$ per il teorema degli orlati. Ora possiamo sviluppare il determinante della matrice rispetto al prima riga, avremo quindi $\lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{12} + \cdots + (-1)^{n-1}\lambda_n a_{1n} = 0$, ma questa equazione rappresenta nient'altro che la prima equazione del sistema S (basta sostituire i λ_i con gli x_i), quindi non solo ho soddisfatto la prima equazioni del sistema ma questi oggetti rappresentano anche la n-upla che volevamo dimostrare appartenente alle soluzioni di S, e quindi ho dimostrato che la n-upla $(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n)$ è quantomeno soluzione della prima equazione di S, questo processo si può iterare con altre matrici ausiliari e risulterà che $(\lambda_1, -\lambda_2, \dots, (-1)^{n-1}\lambda_n)$ è effettivamente soluzione per S.

Esempio: $S : \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ si ha che $\overline{S} = \langle \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \rangle$

5. Applicazioni Lineari

Definizione

Un'applicazione lineare non è nient'altro che un'applicazione che soddisfa delle proprietà, dunque siano V, V' spazi vettoriali, $f : V \to V'$ viene detta **lineare** se soddisfa le seguenti proprietà:

1) Linearità rispetto la somma: $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \ f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$
   l'immagine della somma è uguale alla somma delle immagini
2) Linearità rispetto al prodotto: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \underline{v} \in V,\ f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$
   analogo del concetto di omomorfismo in algebra

Le applicazioni lineari sono conosciute anche con la nomenclatura di omomorfismi (lineari), altre nomenclature sono:

- Se $V = V'$ si parla di *endo*morfismo
- Se f è iniettiva di *mono*morfismo
- Se f è suriettiva di *epi*morfismo
- Se f è biettiva di *iso*morfismo
- L'endomorfismo biettivo si dice *auto*morfismo

Esempi

1) $f: V \to V$, l'applicazione che porta ogni vettore nel vettore nullo $(\underline{v} \mapsto \underline{0})$, è un endomorfismo detto endomorfismo nullo (applicazione nulla). È un applicazione lineare poiché le due proprietà sono banalmente verificate (analogo ragionamento per la funzione identica $(\underline{v} \mapsto \underline{v})$)
2) $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x + y, y) \in \mathbb{R}^3$ è un applicazione lineare poiché per $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ risulta $f\big((x, y) + (x', y')\big) = f(x + x', y + y') = (x + x', x + x' + y + y', y + y') = (x, x + y, y) + (x', x' + y', y') = f(x, y) + f(x', y')$ (lineare rispetto la somma) mentre per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $h \in \mathbb{R}$ si ha $f\big(h(x, y)\big) = f(hx, hy) = (hx, hx + hy, hy) = h(x, x + y, y) = h \cdot f(x, y)$ (lineare rispetto il prodotto)
3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'applicazione è la proiezione della prima coordinata $\big((x, y) \mapsto x\big)$, è un applicazione lineare, e le proprietà sono banalmente verificate. L'applicazione non è iniettiva poiché ad esempio $(1,2)$ e $(1,3)$ hanno la stessa immagine, ma è suriettiva poiché $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \to x$; di conseguenza si tratta di un epimorfismo (non monomorfismo).
4) $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, questa applicazione va dallo spazio dei polinomi di grado al più due in $\mathbb{R}^3$, ed associa $ax^2 + bx + c \longmapsto (a, b, c)$. Questa applicazione è lineare: $f\big((ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c')\big) = f\big((a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')\big) = (a + a', b + b', c + c') = (a, b, c) + (a', b', c') = f(ax^2 + bx + c) + f(a'x^2 + b'x + c')$, ed anche $f\big(u(ax^2 + bx + c)\big) = f\big((ua)x^2 + (ub)x + (uc)\big) = (ua, ub, uc) = u(a, b, c) = u \cdot f(ax^2 + bx + c)$. È inoltre sia iniettiva che suriettiva, di conseguenza quest'applicazione è un isomorfismo (la proprietà di isomorfismo ci sarà utile in seguito)
5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x \mapsto x^2$ non è un applicazione lineare, infatti $f(1 + 2) = f(3) = 9 \neq f(1) + f(2) = 5$
6) Sia una matrice $A \in \mathbb{R}_{mn}$ di dimensioni arbitrarie definiamo la seguente applicazione lineare (ci sarà molto utile) $f: X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^m$, è sicuramente lineare poiché $f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = f(X_1) + f(X_2)$ e $f(hX) = A(hX) = h(AX) = h \cdot f(X)$
   Esempio con matrice concreta: $f: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + 2z \\ 2x + z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
7) L'applicazione $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{22} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ non è lineare perché $f\left(2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 2f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposizioni

- Sia $f: V \to V'$ un applicazione lineare, allora valgono le seguenti proposizioni:
  I. $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V, f(h\underline{v} + k\underline{w}) = h \cdot f(\underline{v}) + k \cdot f(\underline{w})$
  II. $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_{V'}$
  III. $f(h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \cdots + h_n\underline{v}_n) = h_1 \cdot f(\underline{v}_1) + \cdots + h_n \cdot f(\underline{v}_n)$
  IV. $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$

  Dimostrazione: (I) applichiamo la linearità rispetto la somma e poi la linearità rispetto il prodotto su ciascun addento: $f(h\underline{v} + k\underline{w}) = f(h\underline{v}) + f(k\underline{w}) = h \cdot f(\underline{v}) + k \cdot f(\underline{w})$. (II) la dimostrazione che l'elemento neutro viene mandato nell'elemento neutro è la seguente (si sfrutta la proprietà dell'elemento neutro): $f(\underline{0}) = f(\underline{0} + \underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0}) \Rightarrow f(\underline{0}) = f(\underline{0}) - f(\underline{0}) = \underline{0}$. (III) si dimostra per induzione su n: abbiamo già dimostrato l'asserto vero per $n = 1$ nel punto (I), supponiamolo vero per $n-1$ e scriviamo $f\left(\underbrace{h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \cdots}_{} + h_n\underline{v}_n\right) = f(h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_{n-1}\underline{v}_{n-1}) + h_n \cdot f(\underline{v}_n) = h_1 \cdot f(\underline{v}_1) + \cdots + h_{n-1} \cdot f(\underline{v}_{n-1}) + h_n \cdot f(\underline{v}_n)$. (IV) $f(-\underline{v}) = f(-1\underline{v}) = -1f(\underline{v}) = -f(\underline{v})$
- Sia $f: V \to V'$ un applicazione lineare
  I. f conserva la dipendenza: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t \in V$ dipendente $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t)$ dipendente in V' (mentre la dipendenza lineare viene conservata l'indipendenza non è detto che lo sia)
  Dim.: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ sono dipendenti quindi esistono i scalari non tutti nulli tale che la combinazione lineare corrispondente è uguale all'elemento neutro: $h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_t\underline{v}_t = \underline{0}$; applicando ora la funzione f ad ambo i membri di questa uguaglianza avremo che $f(h_1\underline{v}_1 + \cdots + h_t\underline{v}_t) = h_1 \cdot f(\underline{v}_1) + \cdots + h_n \cdot f(\underline{v}_n) = f(\underline{0}) = \underline{0}$ (per la (III) e la (II) della proposizione precedente).
  II. Se un vettore appartiene al sottospazio generato da un certo insieme S allora l'immagine di quel vettore appartiene al sottospazio generato dall'immagine di quel sottoinsieme (conseguenza della I): $\underline{v} \in \langle S \rangle \Rightarrow f(\underline{v}) \in \langle f(S) \rangle$
  Dim.: Consideriamo l'insieme finito $\underline{v} = h_1\underline{s}_1 + \cdots + h_n\underline{s}_n$ con $S = \{\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n\}$, applicando f ad entrambi i membri: $f(\underline{v}) = h_1 \cdot f(\underline{s}_1) + \cdots + h_n \cdot f(\underline{s}_n)$ e trovo che $f(\underline{v}) \in \langle f(\underline{s}_1), \dots, f(\underline{s}_n) \rangle$
  III. $W \leq V \Rightarrow f(W) \leq V'$ (l'immagine di ogni sottospazio del dominio risulta essere un sottospazio del codominio, se l'applicazione non è lineare allora è solo sottoinsieme del codominio).
  Dim.: Sappiamo per certo che $W \neq \emptyset$ poiché essendo sottospazio contiene almeno l'elemento neutro, ma allora anche l'immagine $f(W) \neq \emptyset$ poiché contiene l'immagine dell'elemento neutro. Dunque, ci resta da dimostrare che sia stabile rispetto alla somma e al prodotto. Siano $\underline{v}', \underline{w}' \in f(W) \Rightarrow \exists \underline{v}, \underline{w} \in W : f(\underline{v}) = \underline{v}', f(\underline{w}) = \underline{w}'$; a questo punto dobbiamo dimostrare che $\underline{v}' + \underline{w}' \in f(W)$, a tal proposito dobbiamo trovare un oggetto all'interno di W tale che la sua immagine sia proprio $\underline{v}' + \underline{w}'$; ossia $\underline{v} + \underline{w}$: $f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = f(\underline{v} + \underline{w}) = \underline{v}' + \underline{w}' \in f(W)$. Allo stesso modo, per il prodotto: $h\underline{v} = h \cdot f(\underline{v}) = f(h\underline{v}) = h\underline{v}' \in f(W)$.
  IV. $W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle \Rightarrow f(W) = \langle f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n) \rangle$ (se W è generato da $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ allora un insieme di generatori per il sottospazio immagine viene dato dalle immagini dei generatori)
  Dim.: $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W \Rightarrow f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n) \in f(W)$. Allora, se ci appartengono tutti gli oggetti del tipo $f(\underline{w}_i)$ anche il sottospazio generato da tutti gli $f(\underline{w}_i)$ è contenuto all'interno di $f(W)$, in simboli: $\langle f(\underline{w}_i), \dots, f(\underline{w}_n) \rangle \in f(W)$; abbiamo così dimostrato una delle due inclusioni. A questo punto dimostriamo che ogni elemento di $f(W) \in \langle f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n) \rangle$, ovvero che ogni elemento $\underline{w}' \in f(W)$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi $f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n)$. A tal proposito sia $\underline{w}' \in f(W) \Rightarrow \exists \underline{w} \in W : \underline{w}' = f(\underline{w})$, essendo $\underline{w} \in W = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \rangle$ sappiamo che certi scalari $h_i \in \mathbb{R} : \underline{w} = h_1\underline{w}_1 + \cdots + h_n\underline{w}_n$; ma allora si ha $\underline{w}' = f(h_1\underline{w}_1 + \cdots + h_n\underline{w}_n) = h_1 \cdot f(\underline{w}_1) + \cdots + h_n \cdot f(\underline{w}_n)$ e dunque $\underline{w}'$ si può scrivere come combinazione lineare dei $f(\underline{w}_i)$ e di conseguenza, per doppia inclusione, $f(W) = \langle f(\underline{w}_1), \dots, f(\underline{w}_n) \rangle$.

Concetto di Ker e sue proprietà

Definizione: Sia $f: V \to V'$ un applicazione lineare, denotiamo il sottospazio immagine di f con $\mathrm{Im}\, f$ ed è l'insieme $\{f(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} = f(V) = \mathrm{Im}\, f$; un altro insieme utile è il cosiddetto $\ker$ (nucleo, dal tedesco kernel) che è l'insieme di tutti gli oggetti del dominio che vengono portati nell'elemento neutro, ovvero $\mathbf{ker}\, \boldsymbol{f} = \{\underline{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V} : \boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{v}}) = \underline{\mathbf{0}}\}$. Inoltre, il ker è anche un sottospazio vettoriale.

Proposizione: $\ker f \leq V \qquad \mathrm{Im}\, f \leq V'$

Dimostrazione: $\mathrm{Im}\, f$ poiché coincide con $f(V)$ è sottospazio vettoriale per la proposizione vista precedentemente. $\ker f \neq \emptyset$ poiché $\underline{0} \in \ker f$ per definizione. Siano ora $\underline{v}, \underline{w} \in \ker f \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in \ker f$ ciò significa che $f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{w}) \in \ker f$; allo stesso modo per $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $f(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{v}) = \lambda \underline{0} = \underline{0} \Rightarrow f(\lambda \underline{v}) \in \ker f$.

Corollario: Sia $f: V \to V'$ lineare, con V spazio vettoriale finitamente generato. Se prendo una base $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ di V allora $\mathrm{Im}\, f = \langle f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n) \rangle$ (è generato ma non è detto che sia essa stessa base).

Essendo un corollario della proposizione IV vista precedentemente la dimostrazione è inutile.

Proposizione: Sia $f: V \to V'$ lineare allora $\mathbf{1})\ f\ suriettiva \iff \mathrm{Im}\, f = V' \quad \mathbf{2})\ f\ iniettiva \iff \ker f = \{\underline{0}\}$

Dimostrazione: la prima è ovvia e precedentemente osservata. La seconda ci dice che una funzione è iniettiva se il ker è il singleton dell'elemento neutro e lo si dimostra per doppia implicazione. $\Rightarrow$: sappiamo che $\underline{0} \in \ker f \Rightarrow \{\underline{0}\} \subseteq \ker f$, supponiamo che $\underline{v} \in \ker f \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0}$ ma anche $f(\underline{0}) = \underline{0}$ dunque per l'iniettività abbiamo che $\underline{v} = \underline{0}$ e questo comporta anche l'inclusione di $\ker f \subseteq \{\underline{0}\}$. $\Leftarrow$: prendiamo due oggetti $f(\underline{v})$ e $f(\underline{w}) \in \ker f$, dunque sarà $f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v}) - f(\underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow f(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w}$.

Proposizione (correlazione tra indipendenza e iniettività di una funzione): Sia $f: V \to V'$ un monomorfismo (omomorfismo iniettivo) succede che l'indipendenza viene conservata, dunque: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ indipendenti $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ indipendenti. (In particolare: base di $V \Rightarrow$ base di $f(V)$)

Dimostrazione: Prendiamo una combinazione lineare dei vettori immagine ed eguagliamola all'elemento neutro: $h_1 \cdot f(\underline{v}_1) + \dots + h_n \cdot f(\underline{v}_n) = \underline{0}$, affinché questi vettori siano indipendenti bisogna dimostrare che tutti gli scalari siano necessariamente pari a zero. Per la proprietà di linearità di f si ha che il primo membro si può rileggere come $f(h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n)$ e quindi $h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n \in \ker f$, ed appartenendo al ker deve essere pari all'elemento neutro e dunque per l'iniettività abbiamo $h_1\underline{v}_1 + \dots + h_n\underline{v}_n = \underline{0}$ ed essendo questi vettori indipendenti allora $h_1 = \dots = h_n = 0$ e quindi $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ sono indipendenti.

Teorema: Se $f: V_n \to V$ allora la seguente uguaglianza è vera: $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = n$

Dimostrazione: Se il $\ker f = V_n \Rightarrow n + 0 = n$ essendo $\mathrm{Im}\, f$ pari al singleton dell'elemento neutro. Mentre per $\ker f = \{\underline{0}\}$ significa che f è iniettiva ed allora presa una base del dominio $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ di V allora (per la precedente proposizione) $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$ è base di $\mathrm{Im}\, f$ e quindi avendo trovato una base di dimensione n si ha che $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = 0 + n = n$. Supponiamo ora che il $\{\underline{0}\} < \ker f < V_n$: sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ base di $\ker f$ e completiamola in una base di V_n aggiungendo almeno un vettore: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t, \underline{v}_{t+1}, \dots, \underline{v}_n$ base di V_n. Quello da dimostrare è che $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n - t$ che è il numero di vettori usati per completare la base di V_n, quindi bisogna dimostrare che $f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n)$ sia una base di $\mathrm{Im}\, f$: prendiamo il sistema di generatori per $\mathrm{Im}\, f = \langle f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t), f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$, ma essendo $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_t)$ pari all'elemento neutro possono essere rimossi dal sistema di generatori e dunque si ha che $\mathrm{Im}\, f = \langle f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n) \rangle$; rimane da dimostrare che $f(\underline{v}_{t+1}), \dots, f(\underline{v}_n)$ sono indipendenti: $h_{t+1} \cdot f(\underline{v}_{t+1}) + \dots + h_n \cdot f(\underline{v}_n) = f(h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n\underline{v}_n) = \underline{0} \Rightarrow h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n\underline{v}_n \in \ker f$ e quindi questo vettore può essere riscritto come combinazione lineare della base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$ e quindi $\exists h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R} : h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n\underline{v}_n = h_1\underline{v}_1 + \dots + h_t\underline{v}_t$; portando a sinistra entrambi i membri avremo che : $h_{t+1}\underline{v}_{t+1} + \dots + h_n\underline{v}_n - h_1\underline{v}_1 + \dots - h_t\underline{v}_t = \underline{0}$ ed essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t, \underline{v}_{t+1}, \dots, \underline{v}_n$ base si ha che $h_1 = \dots = h_t = h_{t+1} = h_n = 0$. E questo dimostra che questi vettori sono indipendenti ed un sistema di generatori e dunque una base di dimensione $n - t$.

Isomorfismo coordinato

L'isomorfismo coordinato è quel concetto per il quale uno spazio vettoriale ha una forma un po' più semplice, ad esempio sia V_n uno spazio vettoriale di dimensione n e prendiamo un riferimento $\mathcal{R} = (\underline{e_1}, \dots, \underline{e_n})$ allora posso considerare la seguente applicazione $C_{\mathcal{R}} : \underline{v} = h_1\underline{e_1} + \dots + h_n\underline{e_n} \in V_n \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, questa applicazione porta un vettore $\underline{v}$ in una n-upla determinata, avendo il vettore $\underline{v}$ l'unicità di scrittura. $C_{\mathcal{R}}$ è dunque ben definita ed è anche lineare (dimostrare la sua linearità per esercizio), inoltre si ha che $\ker C_{\mathcal{R}} = \{\underline{v} \in V_n : C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) = (0, \dots, 0)\} = \{\underline{0}\}$ e quindi $\underline{v} = 0\underline{e_1} + \dots + 0\underline{e_n} = \underline{0}$ di conseguenza si ha che l'isomorfismo coordinato è iniettivo. Dimostriamo anche la sua suriettività: $\mathrm{Im}\ C_{\mathcal{R}} = \langle C_{\mathcal{R}}(\underline{e_1}), \dots, C_{\mathcal{R}}(\underline{e_n})\rangle$ dove $C_{\mathcal{R}}(\underline{e_1})$ è il primo vettore del riferimento canonico di $\mathbb{R}^n$ e così via per gli altri, e dunque avremo che $\mathrm{Im}\ C_{\mathcal{R}} = \langle (1,0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0,1)\rangle = \mathbb{R}^n$ e quindi l'applicazione è suriettiva.

Teorema: Ogni spazio vettoriale finitamente generato (diverso da 0) di dimensione n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$

Proposizione: Sia $f: V \to V'$ isomorfismo lineare (applicazione lineare biettiva, quindi ha un'inversa) allora l'inversa $f^{-1}: V' \to V$ è anch'essa un isomorfismo lineare.

Dimostrazione: Iniziamo col dimostrare che f^{-1} sia lineare rispetto alla somma, siano $\underline{v}', \underline{w}' \in V'$ (dominio di f^{-1} e codominio di f) dobbiamo dimostrare che $f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$, poiché $\underline{v}', \underline{w}' \in V'$ e data la suriettività di f possiamo dire che $\exists \underline{v}, \underline{w} \in V : \underline{v}' = f(\underline{v})$ e $\underline{w}' = f(\underline{w})$; a questo punto possiamo scrivere $f^{-1}(\underline{v}' + \underline{w}') = f^{-1}\left(f(\underline{v}) + f(\underline{w})\right) = f^{-1}\left(f(\underline{v} + \underline{w})\right) = \underline{v} + \underline{w} = f^{-1}(\underline{v}') + f^{-1}(\underline{w}')$; ora in modo analogo dimostriamo la linearità rispetto al prodotto: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $f^{-1}(\lambda\underline{v}') = f^{-1}\left(\lambda \cdot f(\underline{v})\right) = f^{-1}\left(f(\lambda\underline{v})\right) = \lambda\underline{v} = \lambda \cdot f^{-1}(\underline{v}')$. L'altra implicazione si dimostra praticamente con la proposizione stessa.

Corollario: Sia $f: V \to V'$ un isomorfismo lineare allora:

I. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono indipendente se e solamente se le loro corrispettive immagini sono indipendenti. In simboli: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ indipendenti $\Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ indipendenti.
L'implicazione da sinistra a destra è vera per la correlazione tra indipendenza e iniettività di una funzione, da destra a sinistra invece (essendo f un isomorfismo) posso per la proposizione precedente dire che le immagini di $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ sono anch'esse indipendenti.

II. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dipendenti $\Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ dipendenti.
In generale la dipendenza lineare viene conservata, in più se è isomorfismo allora vale anche il contrario, la dimostrazione è semplicemente la negazione della precedente.

III. Sia $W \le V$ allora $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ base di $W \Leftrightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ base di $f(W)$.
L'implicazione da sinistra a destra è dimostrata in una proposizione precedente, per l'altra implicazione utilizziamo di nuovo il corollario, per cui sapendo che f è un isomorfismo basta applicare f^{-1} per dimostrare l'implicazione, essendo f^{-1} anch'esso un isomorfismo lineare.

Esempio: Sia $W \le \mathbb{R}_2[x]$ dove $W = \langle x^2 + 2x,\ x - 1,\ 2x^2 + 3x,\ x^2 + 3x - 2\rangle$, l'idea è quella di utilizzare la coordinazione associata allo spazio dei polinomi $\mathbb{R}_2[x]$ che è $\mathbb{R}^3$, prendendo come riferimento $x^2 + x + 1$ e di conseguenza posso scrivere $f(W) = \langle (1,2,0), (0,1,-1), (2,3,0), (1,3,-2)\rangle$; utilizzando la III del precedente corollario sappiamo che $f(W)$ è anch'esso un isomorfismo e che è generato dalle terne descritte precedentemente, a questo punto, per trovare una base del sottospazio W basta trovare una base di $f(W)$ e invertirla.

Teorema: Un applicazione lineare $f: V_n \to V'_m$ risulta essere "nota" quando sono noti i corrispondenti dei vettori di una base (significa che conosco come agiscono tutti i vettori del dominio ogni volta che conosce come agisce sui vettori di una base)

Dimostrazione: Supponiamo che $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ sia una base del dominio V_n e supponiamo che siano noti le basi $f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_n)$, allora conosco anche l'applicazione lineare valutata in un vettore $\underline{v} \in V_n$ poiché posso scrivere $\underline{v}$ come combinazione della base $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ e dunque $f(\underline{v}) = f(h_1\underline{e}_1 + \dots + h_n\underline{e}_n) = h_1 \cdot f(\underline{e}_1) + \dots + h_n \cdot f(\underline{e}_n)$; e di conseguenza è noto.

Forma canonica delle applicazioni lineari e matrice di passaggio

Prendiamo un applicazione lineare $f: V_n \to V'_m$ ed un riferimento del dominio e uno del codominio, rispettivamente $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di V_n e $\mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m)$ di V_m. Per ogni vettore del dominio scriviamo la su immagine come combinazione lineare dei $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_m$, quindi: $f(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{e}'_1 + \dots + a_{m1}\underline{e}'_m, \dots, f(\underline{e}_n) = a_{1n}\underline{e}'_1 + \dots + a_{mn}\underline{e}'_m$. A questo punto possiamo creare una matrice con i coefficienti nel seguente modo: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{m,n}$; questa matrice è molto utile per poter descrivere la funzione f e prende il nome di **matrice associata ad $\boldsymbol{f}$ nei riferimenti $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ ed $\boldsymbol{\mathcal{R}'}$**; usualmente descritta con il simbolo $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f)$. Il procedimento così descritto per la definizione è anche il metodo in cui va calcolata la matrice associata. In particolare, se la funzione f è un endomorfismo (dominio uguale al codominio) e $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ allora sarà $M_{\mathcal{R}}(f)$.

Proprietà della matrice associata: Sia $\underline{v} \in V_n$, se definiamo con X la colonna delle componenti di $\underline{v}$ nel riferimento del dominio $\mathcal{R}$ e con X' i vettori colonna delle componenti di $f(\underline{v})$ in $\mathcal{R}'$ allora X e X' sono legati dalla seguente relazione: $X' = AX$ (Quindi se mi viene fornita la matrice associata e conosco le componenti del vettore nel riferimento del dominio allora posso ottenere le componenti nel riferimento di arrivo a prescindere da come è definita la funzione f).

Dimostrazione: $X' = (x'_1, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m$ e $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (sono entrambi colonne, ma per praticità le scrivo in riga per considerarli come oggetti in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$) poiché lo spazio del codominio e del dominio sono rispettivamente m ed n. Sia $\underline{v} \in V_n$ per ipotesi (X componenti di $\underline{v}$ in $\mathcal{R}$) posso scriverla come combinazione lineare: $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n$. A questo punto applico f ad entrambi i membri dell'uguaglianza, risulterà dunque $f(\underline{v}) = x_1 \cdot f(\underline{e}_1) + \dots + x_n \cdot f(\underline{e}_n)$, ma essendo $f(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{e}'_1 + \dots + a_{m1}\underline{e}'_m, \dots, f(\underline{e}_n) = a_{1n}\underline{e}'_1 + \dots + a_{mn}\underline{e}'_m$ otteniamo $f(\underline{v}) = x_1(a_{11}\underline{e}'_1 + \dots + a_{m1}\underline{e}'_m) + \dots + x_n(a_{1n}\underline{e}'_1 + \dots + a_{mn}\underline{e}'_m) = (x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n})\underline{e}'_1 + \dots + (x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn})\underline{e}'_m$ e poiché ho l'unicità di scrittura e posso scrivere anche $f(v) = x'_1\underline{e}'_1 + \dots + \underline{e}'_m x'_m$ risulterà che $x'_1 = x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n}, \dots, x'_m = x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn}$; abbiamo così scoperto che $AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n} \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = X'$.

Osservazione: la proprietà della matrice associata è in realtà una proprietà caratterizzante la matrice, nel senso che se ho una matrice A di n righe ed m colonne e questa matrice è tale da avere la seguente proprietà: $X' = AX$ dove $X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v})$ (colonna delle componenti di $\underline{v}$ nel riferimento $\mathcal{R}$) e $X' = C_{\mathcal{R}'}\left(f(\underline{v})\right)$ per ogni $\underline{v}$ allora la matrice $A = M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f)$.

Proposizione: La matrice (quadrata) di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$ è invertibile (la sua inversa risulta essere proprio la matrice di passaggio da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$).

Dimostrazione: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ ricordando che la matrice di passaggio si costruisce per colonne prendendo le componenti del vecchio riferimento (in questo caso $\mathcal{R}$) nel nuovo riferimento. Quindi se $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ la matrice A la costruisco con $C_{\mathcal{R}'}(f(\underline{e}_1))$ per la prima colonna, … e $C_{\mathcal{R}'}(f(\underline{e}_n))$ per la n-sima colonna. La matrice A è invertibile perché essendo i vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ indipendenti ed essendo la coordinazione un isomorfismo anche le loro immagini saranno indipendenti; quindi, i vettori rappresentati le colonne di A sono indipendenti, di conseguenza tutte le colonne di A sono indipendenti ed essendo il rango di A massimo (per il teorema degli orlati) segue che $\det(A) \neq 0$, quindi A è invertibile.

Corollario: Se P è la matrice di passaggio da $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, allora P^{-1} è di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$.

Dimostrazione: P è di passaggio, allora prendo le componenti $X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v})$ e $X' = C_{\mathcal{R}'}(f(\underline{v}))$ con $\underline{v} \in V_n$, e quindi $X' = PX$, moltiplicando entrambi i membri per P^{-1} si ottiene $P^{-1}X' = X$. Scriviamo in maniera generica la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e andiamo a dimostrare che P^{-1} sia effettivamente la matrice di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$. Siano $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ e $\mathcal{R}' = (\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$, allora la matrice di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ (chiamiamola B) sarà $B = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ essendo $\begin{matrix} \underline{e}'_1 = x_{11}\underline{e}_1 + \cdots + x_{n1}\underline{e}_n \\ \vdots \\ \underline{e}'_n = x_{1n}\underline{e}_1 + \cdots + x_{nn}\underline{e}_n \end{matrix}$; a questo punto, prendiamo le componenti del vettore $\underline{e}'_1$ che nel riferimento $\mathcal{R}$ sono $x_{11}\underline{e}_1 + \cdots + x_{n1}\underline{e}_n$, d'altro canto le componenti di $\underline{e}'_1$ nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ allora la avrò: $\underbrace{P\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{X'=PX} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}X'=X} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ di conseguenza la prima colonna di P^{-1} è uguale alla prima colonna di B, iterando questo procedimento per i vettori $\underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ risulterà che ogni colonna di P^{-1} sarà uguale alla rispettiva colonne di B dunque, come volevasi dimostrare, la matrice di passaggio da $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ è proprio P^{-1}.

6. Matrici simili e diagonalizzazione (spazi vettoriali)

Matrici simili

La definizione di matrici simili riguarda matrici quadrate, dunque: siano $A, A' \in \mathbb{R}_n$ diremo che A è **simile** ad A', in simboli $A \sim A'$, se e soltanto se esiste una matrice quadrata P con determinante diverso da zero (quindi invertibile) tale che la $P^{-1}AP = A'$. Definizione in simboli: $A \sim A' \Leftrightarrow \exists P : |P| \neq 0$ e $P^{-1}AP = A'$ (il prodotto $P^{-1}AP$ è chiamato in ambito algebrico anche coniugato di A mediante P).

La similitudine è una relazione d'equivalenza, cioè riflessiva, simmetrica e transitiva:

- **Riflessiva**: $A \sim A$ infatti $I_nAI_n = A$ essendo $|I_n| = 1$ e $I_n^{-1} = I_n$
- **Simmetrica**: se $A \sim A'$ allora $A' \sim A$: infatti $\begin{matrix} P^{-1}AP & = & A' \\ & \Downarrow & \\ P(P^{-1}AP)P^{-1} & = & PA'P^{-1} \\ & \Downarrow & \\ A & = & (P^{-1})^{-1}A'P^{-1} \end{matrix}$
- **Transitiva**: se $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$: infatti per $A \sim B$ esiste un P invertibile tale che $P^{-1}AP = B$, per $B \sim C$ esiste invece un P_1 invertibile tale che $P_1^{-1}BP_1 = C$, ma questo vuol dire che per sostituzione si ha $C = P_1^{-1}BP_1 = P_1^{-1}(P^{-1}AP)P_1 = (P_1^{-1}P^{-1})A(PP_1) = (PP_1)^{-1}A(PP_1)$ e quindi $A \sim C$ essendo PP_1 una matrice invertibile con determinante non nullo per il teorema di Cauchy-Binet.

Teorema: Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo e siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ riferimenti di V_n allora $A = M_{\mathcal{R}}(f) \sim M_{\mathcal{R}'}(f) = A'$ (mette in relazione le matrici associate tra due riferimenti di un endomorfismo, $A \sim A'$).

Dimostrazione: Sia P la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R}$ al riferimento $\mathcal{R}'$ allora per $\underline{v} \in V_n$ ho $X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v})$ e $X' = C_{\mathcal{R}'}(\underline{v})$, mentre per l'immagine di $\underline{v}$ ho $Y = C_{\mathcal{R}}\left(f(\underline{v})\right)$ e $Y' = C_{\mathcal{R}'}\left(f(\underline{v})\right)$. Ora, poiché P è la matrice di passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ ho le seguenti relazioni: $X' = PX$ e $Y' = PY$; mentre per la proprietà di matrice associata ad una funzione ho $Y = AX$ e $Y' = A'X'$ a questo punto posso eseguire i seguenti passaggi: $Y' = PY = A'X' = A'PX \Rightarrow Y = \underbrace{P^{-1}A'P}_{Z}X$ (moltiplicando entrambi i membri a sinistra per P^{-1}); il prodotto Z è una matrice tale che ogni volta che moltiplico a destra per le componenti di un certo vettore nel riferimento $\mathcal{R}$ ottengo le componenti in R', quindi Z soddisfa la proprietà di matrice associata. Ma questa proprietà definisce univocamente la matrice associata in un riferimento, e allora $P^{-1}A'P = A \Rightarrow A' \sim A$.

Diagonalizzazione di un endomorfismo

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$ ne vado a fare il determinante: $\det(A - tI_n)$ dove t è un'incognita. Il determinante di questa matrice è detto **polinomio caratteristico** della matrice A, ne consegue che con equazione caratteristica intendiamo $\det(A - tI_n) = 0$. $A - tI_n$ è sostanzialmente una matrice del seguente tipo $A - tI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - t & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$.

<u>Lemma</u>: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
<u>Dimostrazione</u>: Se $A \sim A'$ allora esiste un P invertibile tale che $A' = P^{-1}AP$, tentiamo a questo punto di confutare il polinomio caratteristico di A', quindi $\det(A' - tI_n) = \det(P^{-1}AP - tI_n)$. Osserviamo che la matrice identica $I_n = P^{-1}P$, ne consegue $\det(A' - tI_n) = \det(P^{-1}AP - tP^{-1}P) = \det[P^{-1}(AP - tP)]$, è possibile mettere in evidenza P^{-1} a sinistra grazie alla distributività del prodotto righe per colonne sulla somma di matrici, e per lo stesso motivo metto in evidenza a destra P: $\det(A' - tI_n) = \det[P^{-1}(A - tI_n)P]$, applicando Cauchy-Binet $\det[P^{-1}(A - tI_n)P] = \det(P^{-1}) \det(A - tI_n) \det P$, essendo numeri reali posso spostarli a piacere, dunque $\det(P^{-1}) \det(P) \det(A - tI_n) = \det(A - tI_n)$ essendo $\det(P^{-1})$ l'inverso di $\det(P)$ e quindi $\det(P^{-1}P) = \det(I_n) = 1$. Abbiamo così trovato che $\det(A' - tI_n) = \det(A - tI_n)$.

Diamo le seguenti <u>definizioni</u>:

- Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo, fissato un riferimento $\mathcal{R}$ ne prendiamo la matrice associata $A = M_{\mathcal{R}}(f)$ e definisco il **polinomio caratteristico di f** come il polinomio caratteristico di A (quindi della matrice associata al suo riferimento). Il polinomio caratteristico è ben definito, dunque non dipende dal riferimento scelto perché le matrici associate sono simili per un teorema visto nel capitolo precedente.
- Un endomorfismo $f: V_n \to V_n$ è detto **diagonalizzabile** se esiste almeno un riferimento $\mathcal{R}$ in cui la matrice associata $M_{\mathcal{R}}(f)$ è diagonale (matrice quadrata dove solo la diagonale può avere valori diversi da zero).
- Una matrice $A \in \mathbb{R}_n$ è detta **diagonalizzabile** se è simile ad una diagonale.

<u>Proposizione</u> (correlazione delle precedenti definizioni): Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo diagonalizzabile allora ogni matrice associata ad f (non è detto che sia diagonale) è diagonalizzabile.
<u>Dimostrazione</u>: Poiché l'endomorfismo è diagonalizzabile $\exists \mathcal{R}$ di V_n : $M_{\mathcal{R}}(f)$ è diagonale. A questo punto $\forall \mathcal{R}'$ di V_n succede che $M_{\mathcal{R}'}(f) \sim M_{\mathcal{R}}(f) \Rightarrow M_{\mathcal{R}'}(f)$ è diagonalizzabile per definizione, essendo simile ad una matrice diagonale.

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo e sia $\mathcal{R}$ un riferimento di V_n con $M_{\mathcal{R}}(f)$ diagonalizzabile allora f è effettivamente diagonalizzabile.
<u>Dimostrazione</u>: Per semplicità $A = M_{\mathcal{R}}(f)$; so che questa matrice, essendo diagonalizzabile, è simile ad una matrice diagonale e quindi esiste una matrice P invertibile tale che $P^{-1}AP = D$ con D una certa matrice diagonale. Sia $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ cominciamo con definire le componenti del riferimento $\mathcal{R}$ di $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ ovvero $X_1 = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1) = (1,0,\ldots,0), \ldots, X_n = C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_n) = (0,\ldots,0,1)$; definiamo con $F_p: X \in \mathbb{R}^n \mapsto PX \in \mathbb{R}^n$ un applicazione lineare che porta l'oggetto X (vettore colonna) in un altro vettore colonna PX, questa tipologia di applicazione è un isomorfismo lineare poiché F_p è invertibile ed ha inversa $F_{P^{-1}}: X \to P^{-1}X$. Inoltre, sapendo che $X_1, \ldots, X_n$ sono linearmente indipendenti anche le immagini $PX_1, \ldots, PX_n$ sono linearmente indipendenti, questi n vettori sono n-uple, essendo oggetti di $\mathbb{R}^n$, a questo punto vado a fare la controimmagine nell'isomorfismo coordinato a riferimento $\mathcal{R}$ di questi n vettori, vado praticamente a prendere $C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_1) = \underline{e}_1', \ldots, C_{\mathcal{R}}^{-1}(PX_n) = \underline{e}_n'$ che costituiscono ancora a loro volta vettori indipendenti e poiché sono in numero pari alla dimensione dello spazio vettoriale questi vettori formano una base, quindi

posso ordinarli secondo i loro pedici e quindi avrò effettivamente il riferimento $\mathcal{R}' = (\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n')$. Prendiamo ora la matrice di passaggio B da $\mathcal{R}'$ ad $\mathcal{R}$, quello che succede (secondo quanto visto nella dimostrazione del teorema delle matrici simili) è che la matrice $B^{-1}AB = A'$, di conseguenza se dimostriamo che $B = P$ avremmo dimostrato che $A' = M_{\mathcal{R}'}(f) \sim M_{\mathcal{R}}(f) = A$ e quindi la proposizione. La matrice di passaggio si costruisce per colonne quindi osserviamo la prima colonna di B, ovvero $C_{\mathcal{R}}(\underline{e}_1') = PX_1 = P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, proseguendo per le restanti colonne troveremo che tutte le colonne di B coincidono a tutte le colonne di P, e cioè che $B = P$ e quindi $A' = D$.

<u>Corollario</u>: Se $f: V_n \to V_n$ è un endomorfismo diagonalizzabile nel riferimento $\mathcal{R}$ allora anche la matrice associata lo è (quindi la diagonalizzabilità di un endomorfismo può essere visto con la diagonalizzabilità di $M_{\mathcal{R}}(f)$, questo corollario mette praticamente insieme le due proposizioni precedenti).

<u>Esempio</u>: Sia $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ una matrice diagonale e sia $F_A: X \in \mathbb{R}^3 \mapsto AX \in \mathbb{R}^3$ endomorfismo, esso è diagonalizzabile poiché nel riferimento naturale la matrice associata ad F_A è proprio A. Un altro esempio è dato dall'endomorfismo identico (id_V) che è banalmente diagonalizzabile poiché in un qualunque riferimento la matrice associata $M_{\mathcal{R}}(\mathrm{id}_V) = I_n$ che è una matrice per sua natura diagonale. Anche l'endomorfismo nullo è diagonalizzabile poiché in qualunque riferimento la matrice associata è la matrice nulla (che è diagonale).

<u>Definizione pratica</u>: Sia $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo allora un certo elemento $\underline{v} \in V_n$ si dice **autovettore** di **autovalore λ** (numero reale) se e solo se $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$.

<u>Proposizione</u> (Il concetto di autovettore e autovalore è ben definito): Se $\underline{v}$ è un autovettore di autovalori λ_1 e λ_2 allora $\lambda_1 = \lambda_2$ (un autovettore può avere un unico e solo autovalore).

<u>Dimostrazione</u>: $f(\underline{v}) = \lambda_1\underline{v}$ essendo autovettore di autovalore λ_1, ma anche autovalore λ_2 quindi $f(\underline{v}) = \lambda_1\underline{v} = \lambda_2\underline{v} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ poiché $\underline{v} \neq 0$ per definizione.

<u>Teorema</u>: un endomorfismo lineare $f: V_n \to V_n$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base formata da autovettori (rapporto preliminare tra diagonalizzabilità ed esistenza degli autovettori).

<u>Dimostrazione</u>: cominciamo col dimostrare che se f è diagonalizzabile allora esiste una base di autovettori. f è diagonalizzabile significa che esiste un riferimento in cui la matrice è diagonale, supponiamo che $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ sia il riferimento per cui $M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix}a_1 & 0 & \dots & 0\\0 & a_2 & & \vdots\\\vdots & & \ddots & 0\\0 & \dots & 0 & a_n\end{pmatrix}$, scriviamo le immagini del riferimento come combinazione lineare delle colonne, ovvero $f(\underline{e}_1) = a_1\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2 + \dots + 0\underline{e}_n = a_1\underline{e}_1, \dots, f(\underline{e}_n) = a_n\underline{e}_n$ questo significa che $\underline{e}_1$ è un autovettore poiché $\underline{e}_1$ è non nullo e la sua immagine è proporzionale a se stesso, allo stesso modo $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ sono autovettori e dunque il riferimento $\mathcal{R}$ è formata da autovettori e quindi esiste effettivamente una base formata da autovettori e la base in questione è proprio quella data dal riferimento in cui la funzione ha una matrice associata diagonale. Resta da dimostrare l'altra implicazione: sia $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ con $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ autovettori, questo vuol dire che $\begin{matrix}\exists\lambda_1 \in \mathbb{R} : f(\underline{e}_1) = \lambda_1\underline{e}_1\\\vdots\\\exists\lambda_n \in \mathbb{R} : f(\underline{e}_n) = \lambda_n\underline{e}_n\end{matrix}$ (si tenga presente che sono gli autovettori a non dover essere nulli, non gli autovalori), di conseguenza la matrice associata ad f nel riferimento $\mathcal{R}$ è $M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\0 & \lambda_2 & & \vdots\\\vdots & & \ddots & 0\\0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Proposizione: prendiamo un endomorfismo $f: V_n \to V_n$ e fissiamone un riferimento $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ con $M_{\mathcal{R}}(f) = A = (a_{ij})$ allora esiste un autovettore che ammette h come autovalore se e solamente se $\det(A - hI_n) = 0$ (quindi per poter trovare gli autovalori bisogna risolvere l'equazione caratteristica).
$\underline{v}$ è autovettore di $f \Leftrightarrow X = C_{\mathcal{R}}(\underline{v})$ è una soluzione non banale dell'equazione matriciale $(A - hI_n)X = 0$.
Dimostrazione: h è un autovalore significa che esiste un $\underline{v} \neq 0$ tale che $f(\underline{v}) = h\underline{v}$, in termini di coordinate il tutto si traduce nel seguente modo: esiste un $Z = C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) \neq 0$ tale che $AZ = hZ$, dove Z sono le componenti di $\underline{v}$. Ma allora $AZ = hZ \Rightarrow AZ - hI_nZ = 0 \Rightarrow (A - hI_n)Z = 0$, abbiamo così trovato che h è una autovalore se e solamente se esiste un $\underline{v}$ le cui componenti sono diverse da zero e soddisfano l'equazione $(A - hI_n)$. Si osservi l'equazione $(A - hI_n)X = 0$, dove X è una colonna di incognite che ha 2 soluzioni (matrice nulla o Z) ma questo significa che il sistema di equazione omogeneo ha ∞ soluzioni per i sistemi di equazioni (che ha una, nessuna o infinite soluzioni). A questo punto si può assumere che il rango di $A - hI_n$ non è massimo (avendo infinite soluzioni) e quindi il $\det(A - hI_n) = 0$. Abbiamo così dimostrato entrambe le proposizioni poiché sostanzialmente le implicazioni scritte sopra sono in realtà equivalenze.

Definizione: sia h autovalore dell'endomorfismo $f: V_n \to V_n$ definisco come **autospazio relativo ad h** e lo denoto $V(h) = \{\underline{v} \in V_n | f(\underline{v}) = h(\underline{v})\}$ (non necessariamente $\underline{v}$ deve essere non nullo).
Proposizioni:
1) $V(h) \leq V_n$ e $\dim V(h) \geq 1$
   Dim.: se h è un autovalore vuol dire che esiste un vettore non nullo $\underline{v} \in V(h)$, di conseguenza $V(h) \neq \emptyset$ e la dimensione è maggiore o uguale ad uno poiché c'è almeno un vettore non nullo, resta da dimostrare che $V(h)$ sia sottospazio vettoriale e che quindi sia stabile rispetto al somma e il prodotto: siano $\underline{v}, \underline{w} \in V(h)$ allora $f(\underline{v}) = h\underline{v}$ e $f(\underline{w}) = h\underline{w}$ (il fatto che siano autovettori o meno non è rilevante) ne consegue $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) = h\underline{v} + h\underline{w} = h(\underline{v} + \underline{w})$. Ragionamento analogo per il prodotto, sia $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $f(\lambda\underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{v}) = \lambda \cdot (h\underline{v}) = h \cdot (\lambda\underline{v})$.
2) L'autospazio è isomorfo: $V(h) \simeq \{X | (A - hI_n)X = 0\} = \overline{S}$
   Dim.: Basta considerare la coordinazione associata e ridurre il dominio all'autospazio, così posso prenderne le componenti che per la proposizione precedente devono appartenere all'insieme delle soluzioni $\overline{S}$, in simboli $\underline{v} \in V(h) \mapsto C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) \in \overline{S}$. Viceversa, se prendo un elemento di $\overline{S}$: se è nullo allora appartiene a $V(h)$, altrimenti è un autovettore e allora sempre per la proposizione precedente posso trovare un vettore appartenente all'autospazio che abbia quelle immagini.
3) L'intersezione di due autospazi con autovalori diversi è triviale (cioè fa il singleton dell'elemento neutro): $V(h) \cap V(k) = \{\underline{0}\}$ se $h \neq k$ (in particolare vuol dire che i due sottospazi sono in somma diretta)
   Dim.: Prendiamo un qualunque vettore $\underline{v} \in V(h) \cap V(k)$ e supponiamo che sia diverso dal vettore nullo, quindi è sia autovettore di autovalore h che autovettore di autovalore k, ma poiché un autovettore può avere un unico e solo autovalore si arriverebbe all'assurdo che $h = k$, di conseguenza $\underline{v} = \underline{0}$
4) Autospazi relativi ad autovalori distinti $V(h_1), \dots, V(h_t)$ con $h_i \neq h_j$ sono in somma diretta
   Dim. per induzione: $t = 2$ è vera per la proposizione precedente, supposta vera per $t - 1$ dimostriamo che l'intersezione di un sottospazio con il sottospazio generato da tutti gli altri sia triviale: $\underline{v} \in V(h_1) \cap \langle V(h_2), \dots, V(h_t) \rangle$ ma $\langle V(h_2), \dots, V(h_t) \rangle$ significa che $V(h_2) \oplus \dots \oplus V(h_t)$, allora per $\underline{v}$ so che $f(\underline{v}) = h_1\underline{v}$ poiché appartiene a $V(h_1)$, ma so anche che appartiene al sottospazio generato dai $t - 1$ rimanenti e quindi posso scriverlo come $\underline{v} = \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_t$ e quindi $f(\underline{v}) = f(\underline{v}_2) + \dots + f(\underline{v}_t)$ ma essendo $f(\underline{v}_2)$ oggetto di $V(h_2)$ posso scriverlo $f(\underline{v}_2) = h_2\underline{v}_2$… allora $f(\underline{v}) = h_2\underline{v}_2 + \dots + h_t\underline{v}_t$ ma è anche vero che posso scrivere $f(\underline{v}) = h_1\underline{v}_2 + \dots + h_1\underline{v}_t$ di conseguenza $h_1 = h_2, \dots, h_1 = h_t$ (essendoci l'unicità di scrittura per la somma diretta) ma questo contraddice l'ipotesi che gli autovalori siano tutti distinti.
5) Autovettori di autovalori distinti sono indipendenti
   Dim.: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ autovalori degli autovettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_t$, rispettivamente; supponiamo per assurdo che gli autovettori non siano indipendenti, cioè ad esempio $\underline{v}_1 \in \langle \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_t \rangle$ ma questo significa che $V(\lambda_1) \cap$

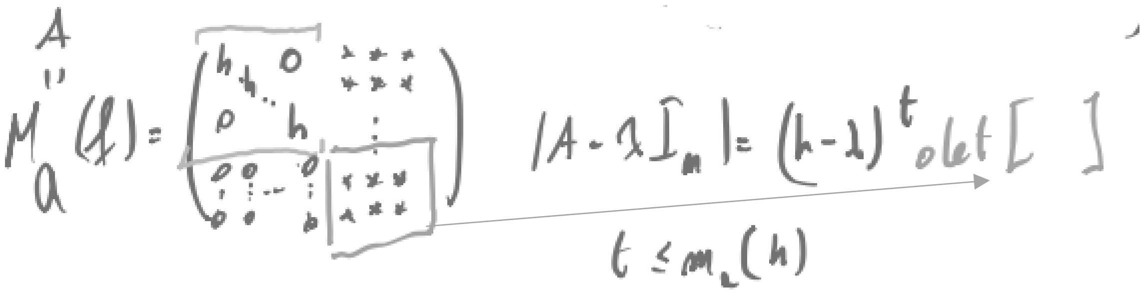
$\langle V(\lambda_2), \dots, V(\lambda_t) \rangle \neq \{\underline{0}\}$, e ciò contraddice l'ipotesi che i vettori siano in somma diretta per la proprietà precedente.

<u>Corollario</u>: Se l'equazione caratteristica di un endomorfismo $f: V_n \to V_n$ ha n radici (numero massimo) reali e distinte allora f è diagonalizzabile (l'altra implicazione non sussiste).
<u>Dimostrazione</u>: Se ha n radici reali e distinte significa che ciascuna di queste radici per il polinomio caratteristico è un autovalore, e dunque esistono n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Di questi autovalori vado a prendere uno degli autovettori corrispondenti che lo caratterizzano, supponiamo siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Questi vettori, essendo autovettori di autovalori distinti, sono linearmente indipendenti, di conseguenza sono una base di V_n, ma per un teorema precedente se esiste una base formata da autovettori allora f è diagonalizzabile.

Alcune definizioni:

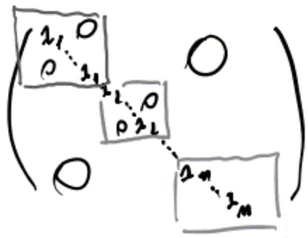
- **Molteplicità algebrica**: sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ un polinomio esso ha sempre nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ al più n soluzioni. Allora posso fattorizzare questo polinomi nel seguente modo: $(x-\alpha_1)^{n_{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot (x-\alpha_t)^{n_{\alpha_t}}$ dove n_{α_i} è la molteplicità algebrica della radice α_t. Inoltre, gli α_i sono tutte e sole le soluzioni del polinomio in questione. $t \leq n$ succede che la molteplicità algebrica delle soluzioni $n_{\alpha_1} + \dots + n_{\alpha_t} = n$.
- **Molteplicità geometrica**: Sia $V(h)$ un autospazio relativo ad h; $\dim V(h)$ è detta molteplicità geometrica di h, in simboli $m_g(h)$
- La molteplicità algebrica di un autovalore h è $m_a(h)$ ed è pari alla $m_a(h)$ in $\det(A - tI_n) = 0$

<u>Proposizione</u>: $m_g(h) \leq m_a(h)$
<u>Dimostrazione</u>: Prendiamo una base per $V(h) = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t$ con $t = m_g(h)$ per definizione, allora completiamo ad una base di V_n: $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{e}_{t+1}, \dots, \underline{e}_n$ e ne prendo il riferimento corrispondente $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_t, \underline{e}_{t+1}, \dots, \underline{e}_n)$ e vado a calcolare la matrice associata al riferimento:



<u>Corollario</u>: Se $m_a(h) = 1 \Rightarrow m_g(h) = 1$
<u>Dimostrazione</u>: Per definizione $m_g(h) \geq 1$, mentre per il teorema precedente $m_g(h) \leq m_a(h)$ dunque risulterà $1 \leq m_g(h) \leq m_a(h) = 1$

<u>Teorema</u>: Un endomorfismo $f: V_n \to V_n$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ il polinomio caratteristico di f ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ (sono tutte radici reali) e per ogni radice h si ha che $m_a(h) = m_g(h)$.
<u>Dimostrazione</u>: $\Rightarrow$: Essendo f diagonalizzabile $\exists \mathcal{R} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ di autovettori, non è detto che questi vettori siano autovettori di autovalori distinti, a tal proposito considero i vettori ordinati nel seguente modo: $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i_1} \rangle \leq V(\lambda_1), \dots, \langle \underline{e}_{i_{m-1}+1}, \dots, \underline{e}_{i_n} \rangle \leq V(\lambda_m)$ (praticamente metto vicini quelli con lo stesso autovalore) così facendo so che $V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m) = V$ poiché questi sottospazi contengono delle basi di V e ciò vuol dire che $\langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i_1} \rangle = V(\lambda_1), \dots, \langle \underline{e}_{i_{m-1}+1}, \dots, \underline{e}_{i_n} \rangle = V(\lambda_m)$ altrimenti si arriverebbe all'assurdo che V appartenga ad un suo sottospazio proprio. Grazie all'uguaglianza possiamo calcolarci la molteplicità geometrica degli autovalori: $m_g(\lambda_1) = i_1, \dots, m_g(\lambda_m) = n - i_{m-1}$. A questo punto, computata la molteplicità algebrica, andiamo a computare il polinomio caratteristico, riprendiamo il riferimento di autovettore e prendiamo la matrice associata al riferimento (vedi immagine in seguito).



Esplicitando ogni volta il polinomio caratteristico avremo il seguente determinante: $\det = (\lambda_1 - x)^{i_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_m - x)^{n-i_{m-1}}$, questo non solo ci dice che il polinomio caratteristico visto che si decompone in polinomi di primo grado ha tutte radici reali ma anche che $m_a(\lambda_1) = i_1, \ldots, m_a(\lambda_m) = n - i_{m-1}$.
$\Leftarrow$: scriviamoci il polinomio caratteristico $p(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_t)^{n_t}$, poiché ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ il polinomio si può decomporre nel prodotto di polinomi di primo grado (a meno del segno); inoltre il prodotto di polinomi ha come grado la somma dei gradi e quindi $n_1 + \cdots + n_t = n$, sapendo poi che per ogni radice dell'equazione caratteristica (per ipotesi) deve succedere che la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica, dunque: $n_1 = m_g(\lambda_1), \ldots, n_t = m_g(\lambda_t)$. Andiamo ad analizzare la somma diretta degli autospazi relativi all'autovalore λ_i: $V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t)$ che ha dimensione n (corollario della relazione di Grassmann) e allora essendo $V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t) \leq V$ si ha proprio $V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_t) = V$. Bisogna ora dimostrare che il mio endomorfismo sia diagonalizzabile, dunque mostriamo che esista una base di V fatta di autovettori; per una proprietà della somma diretta (relazione di Grassmann per la somma diretta) prendiamo una base per ogni autospazio e andiamo a farne l'unione, questa sarà una base per V fatta di autovettori: $B_1 \cup \ldots \cup B_t$ e a questo punto per il criterio di diagonalizzabilità abbiamo terminato.

Diagonalizzazione di una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}_n$ noi sappiamo che A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ F_A è diagonalizzabile, i concetti di autovalore e autovettore si trasportano per quanto riguarda la diagonalizzabilità per la matrice, definisco dunque **autovettore per A**: $Y \in \mathbb{R}^n \neq 0 : AY = hY$ con Y colonna o riga e h **autovalore** corrispondente. Invece con **autospazio** si intende $V(h) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = hX\}$.

Supponiamo che A sia diagonalizzabile, se F_A è diagonalizzabile (è lo è per la proprietà di diagonalizzabilità) allora esiste un riferimento di autovettori per $F_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Prendiamo un riferimento di autovettori $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, abbiamo quindi la matrice associata $M_{\mathcal{R}}(F_A)$ diagonale, d'altro canto, come già osservato, nel riferimento naturale F_A ha come matrice associata al riferimento naturale proprio $A = M_{\mathcal{R}_{\text{nat}}}(F_A)$. Di conseguenza sappiamo che matrici associate a due riferimenti dello stesso endomorfismo sono simili, quindi $M_{\mathcal{R}}(F_A) = D \sim A = M_{\mathcal{R}_{\text{nat}}}(F_A)$, e questo vuol dire che esiste una matrice P invertibile tale che $P^{-1}AP = D$ dove P è la matrice di passaggio da $\mathcal{R} \to \mathcal{R}_{\text{nat}}$ (abbiamo già visto in precedenza la possibilità di poter scegliere P come matrice di passaggio). La matrice P sappiamo che è fatta nel seguente modo (costruita per colonne):

$$P = \begin{pmatrix} \downarrow & & \\ & & \\ \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{pmatrix}$$

prima colonna $\underline{e}_1 = a_{11}(1,0,\ldots,0) + \ldots + a_{m1}(0,0,\ldots,1)$

$\ldots$

$\underline{e}_m = a_{12}(1,0,\ldots,0) + \ldots + a_{m2}(0,\ldots,0,1)$

Le colonne sono i componenti del vecchio nel nuovo, quindi quello che succede è che, di fatto, D è la matrice deli autovalori presi nell'ordine.

Praticamente se noi troviamo le componenti degli autovettori nel riferimento naturale le possiamo mettere nella matrice P e questa matrice realizza la diagonalizzazione.

Spazi Vettoriali: Prodotti diretti esterni

Vediamo di seguito un procedimento per la costruzione di ulteriori spazi vettoriali ed è il concetto di prodotto esterno. Il prodotto che fino ad ora avevamo visto è il **prodotto diretto interno** (dove abbiamo già lo spazio vettoriale e scrivevamo un prodotto diretto da qualcosa interno allo spazio vettoriale).

Il **prodotto diretto esterno**, invece, prende due spazi vettoriali e ne crea uno nuovo che viene poi ad essere canonicamente somma diretta interna dei due "sottospazi". Siano V, W spazi vettoriali arbitrari ne prendo il prodotto cartesiano $V \times W = \{(\underline{v}, \underline{w}) | \underline{v} \in V, \underline{w} \in W\}$ che sarà il nostro insieme sostegno, devo andarci a definire una somma interna ed un prodotto esterno e li definisco nel seguente modo:

- $+: (V \times W) \times (V \times W) \to V \times W$
  $\left((\underline{v}, \underline{w}), (\underline{v}', \underline{w}')\right) \mapsto (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$
- $\cdot : \mathbb{R} \times (V \times W) \to V \times W$
  $\left(\lambda, (\underline{v}, \underline{w})\right) \mapsto (\lambda \underline{v}, \lambda \underline{w})$

È banale vedere che la terna $(V \times W, +, \ \cdot)$ è spazio vettoriale (ovvero ne soddisfa gli assiomi). Esplicitiamo a questo punte alcune cose:

- Elemento neutro sarà la coppia $(\underline{0}, \underline{0})$ con primo elemento appartenente a V e secondo a W
- L'opposto di $(\underline{v}, \underline{w})$ sarà la coppia $(-\underline{v}, -\underline{w})$

Questo metodo di costruire spazi vettoriali crea uno spazio vettoriale più grande perché all'interno $V \times W$ contiene dei sottospazi vettoriali che sono da un lato isomorfi a V e dall'altro isomorfi a W. Sono inoltre sottospazi canonici: $H = \{(\underline{0}, \underline{w}) | \underline{w} \in W\}$ e $K = \{(\underline{v}, \underline{0}) | \underline{v} \in V\}$, questi due sottospazi (è semplice dimostrare che siano sottospazi) hanno come intersezione la coppia $(\underline{0}, \underline{0})$, quindi $H \cap K = \{(\underline{0}, \underline{0})\}$, quello che andremo a vedere è che ogni elemento del prodotto diretto $V \times W$ può essere scritto come somma di un elemento di H e un elemento di K, praticamente $V \times W \ni \underline{u} = (\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{0}) + (\underline{0}, \underline{w})$ e questo vuol dire che $V \times W$ è in realtà somma diretta dei sottospazi H e K. È facile convincersi che K è isomorfo a V e che H è isomorfo a W, infatti $K \simeq V$ perché $\underline{v} \in V \to (\underline{v}, \underline{0})$ e analogamente $H \simeq W$ perché $\underline{w} \in W \to (\underline{0}, \underline{w})$ quindi possiamo dire che il prodotto diretto ha dimensione la somma delle dimensioni di H e di K, poiché $V \times W = H \oplus K$, ma essendo $\dim K = \dim V$ e $\dim H = \dim W$ la dimensione del prodotto interno è la somma delle due dimensioni: $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

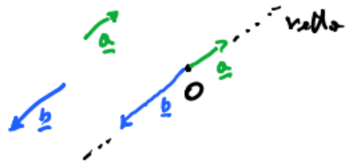
7. Geometria

Spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi dello spazio (e del piano)

Gli spazi vettoriali dei vettori geometrici liberi nello spazio (o piano) sono classi di equipollenza in cui figurano tutti i vettori equipollenti ad un dato vettore geometrico. Prendiamo due vettori geometrici liberi non nulli (ovvero diversi dal vettore triviale): $\underline{a} = \overline{AB}$ e $\underline{b} = \overline{CD}$ dove $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono segmenti generici (posso prendere tutti i segmenti a loro equipollenti). Andiamo adesso a dare le seguenti proprietà:

- $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (i segmenti corrispondenti che li rappresentano) sono paralleli
  Verifichiamo che questa definizione sia ben posta (il che vuol dire che cambiando i rappresentanti i due oggetti sono ancora paralleli tra loro): se prendo un vettore $\overline{A'B'}$ equipollente ad $\overline{AB}$ e un vettore $\overline{C'D'}$ equipollente a $\overline{CD}$, a causa della relazione di equipollenza trovo subito, sotto il punto di vista pratico, che anche $\overline{A'B'} \parallel \overline{C'D'}$.

In termini di spazi vettoriali fissiamo un punto O, allora possiamo prenderci dei rappresentati come segue: $\overline{OA'} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{OB'} \parallel \overline{CD}$, ora, poiché la definizione precedente è ben posta si ha che $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ sono paralleli, ciò significa che i due segmenti oltre ad essere paralleli ed hanno un punto in comune giacciono sulla stessa retta. Di conseguenza si può estendere la definizione precedente in:



- $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ sono paralleli $\Leftrightarrow \overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ giacciono sulla stessa retta $\Leftrightarrow \overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$ sono proporzionali $\Leftrightarrow$ $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono proporzionali $\Leftrightarrow$ $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sono dipendenti (linearmente).

Il vettore nullo è parallelo ad ogni vettore (<u>per definizione</u>), e questo implica, essendo un sistema contenente il vettore nullo quasi per definizione dipendente, che:

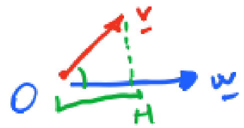
- $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a}$ e $\underline{b}$ costituiscono un sistema linearmente dipendente

Siano $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathcal{V}$ (dove $\mathcal{V}$ è spazio, ma vale anche per il piano) e fissiamo un punto O, $\underline{a} = \overline{OA}, \underline{b} = \overline{OB}, \underline{c} = \overline{OC}$, allora:

- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ dipendenti $\Leftrightarrow \underline{a} = h\underline{b} + k\underline{c}$ con $h, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{OA} = h\overline{OB} + k\overline{OC} \Leftrightarrow \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ sono contenuti in uno stesso piano
  Dalla penultima condizione possiamo dire due cose: o che i punti O, B, C sono allineati e quindi giacciono sulla stessa retta, e per questa retta passante per i tre punti esiste una retta per cui passa A, altrimenti, se O, B, C non sono allineati significa che esiste un unico piano passante per O, B, C ed il punto A sta nel piano identificato da O, B, C. Il piano che contiene O, B, C, A vale anche per il primo caso poiché per una retta passano infiniti piani.

<u>Definizione</u>: Siano $\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{V}$ vettori geometrici liberi non nulli e fissiamo un punto O allora $\underline{a} = \overline{OP}$ e $\underline{b} = \overline{OQ}$ allora l'**angolo** $\underline{a}\hat{}\underline{b}$ è la misura in radianti dell'angolo convesso ($\leq 180°$) formato da $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ (si verifica intuitivamente che la definizione è ben posta).

<u>Definizione</u> (prodotto scalare standard tra due vettori geometrici liberi) $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$:



- $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ se $\underline{v} = \underline{0}$ o $\underline{w} = \underline{0}$
- $\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}\hat{}\underline{w}) = |\underline{w}| \cdot |\overline{OH}|$

Questo prodotto gode delle seguenti proprietà:

1. **Simmetria** (commutatività per prodotti esterni) $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$ dipende dal fatto che $\underline{v}\hat{}\underline{w} = \underline{w}\hat{}\underline{v}$ (poiché per definizione bisogna fare la misura in radianti dell'angolo convesso)
2. **Bilinearità** $(h\underline{u} + k\underline{v})\underline{w} = h(\underline{u} \cdot \underline{w}) + k(\underline{v} \cdot \underline{w})$ (dimostrazione geometrica, servono altre nozioni)
3. **Definito positivo** $\forall \underline{v} \in \mathcal{V}$ $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ essendo $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\underline{v}\hat{}\underline{v}) = |\underline{v}|^2$
   $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$ essendo $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Questo prodotto scalare standard ci permette di dire che $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2 \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$

<u>Definizione</u>: chiamerò **versore** un vettore di lunghezza unitaria, ovvero un vettore il cui modulo è pari ad uno. Mentre con **versore di una retta orientata** indicherò quel versore parallelo e concorde alla retta.

<u>Vettori ortogonali</u>: siano $\underline{a} = \overline{AB}$ e $\underline{b} = \overline{CD}$ due vettori non nulli poniamo per definizione:

- $\underline{a} \perp \underline{b} \Leftrightarrow \overline{CD} \perp \overline{AB}$ è questa è una definizione ben posta

- Fissato un punto O avremo $\underline{a} \perp \underline{b} \Leftrightarrow \overline{OA} \perp \overline{OB} \Leftrightarrow \theta = \underline{a}\hat{}\underline{b} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

Sempre per definizione si pone che il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore; quindi, non è necessario prendere $\underline{a}$ e $\underline{b}$ non nulli per dire che $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b} \quad \forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{V}$

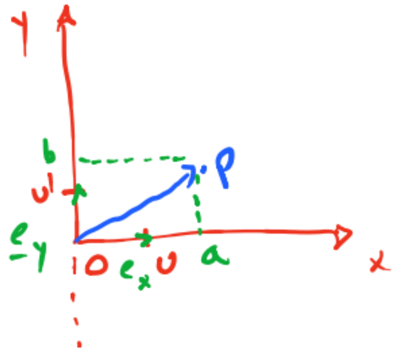
Cominciamo ora con il ricordare che lo spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi del piano $\mathcal{V}_\pi$ ha dimensione 2 mentre lo spazio vettoriale dei vettori geometrici liberi dello spazio ha $\dim \mathcal{V} = 3$. E generalizziamo questa osservazione dando la seguente <u>definizione</u>: Si dice **riferimento ortonormale** del piano un riferimento in cui i vettori sono ortogonali quindi $\mathcal{R}_\pi = (\underline{v}, \underline{w})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$. Allo stesso modo il riferimento ortonormale dello spazio è $\mathcal{R} = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{u})$ con $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$, $\underline{w} \cdot \underline{u} = 0$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. Sia per quanto riguarda il piano che lo spazio, l'altra condizione per essere un riferimento ortogonale è che i vettori devono essere versori. Per semplicità di notazione consideriamo un riferimento ortonormale del piano.

Proposizione: Se $\underline{a}, \underline{b}$ sono vettori geometrici del piano ($\underline{a}, \underline{b} \in \mathcal{V}_\pi$) e $\underline{a} = a_1\underline{v} + a_2\underline{w}$, $\underline{b} = b_1\underline{v} + b_2\underline{w}$ (ovvero scritti come combinazione lineare del riferimento $\mathcal{R}_\pi$) allora $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$.
Dimostrazione: applichiamo al prodotto scalare standard la sua proprietà di essere bilineare e simmetrico: $\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1\underline{v} + a_2\underline{w}) \cdot (b_1\underline{v} + b_2\underline{w}) = a_1b_1(\underline{v} \cdot \underline{v}) + a_1b_2(\underline{v} \cdot \underline{w}) + a_2b_1(\underline{w} \cdot \underline{v}) + a_2b_2(\underline{w} \cdot \underline{w})$ essendo $\underline{v}$ e $\underline{w}$ versori ortogonali si ha che $(\underline{v} \cdot \underline{v}) = 1$, $(\underline{w} \cdot \underline{w}) = 1$, $(\underline{v} \cdot \underline{w}) = 0$ e $(\underline{w} \cdot \underline{v}) = 0$, da cui la tesi.

Corollario: Se esprimo $\underline{v}$ come $C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) = (\underline{a}, \underline{b})$ avrò $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, considerazioni del tutto analoghe (anche per la proposizione precedente) si attuano nello spazio: $|\underline{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ esprimendo $\underline{v}$ come $C_{\mathcal{R}}(\underline{v}) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

Definizione: definisco **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** una coppia che ha come primo oggetto un punto detto origine e secondo oggetto una coppia (se si parla di spazio sarà una terna), in particolare un riferimento ortonormale del piano: $\mathcal{R} = \left(O, (\underline{e}_x, \underline{e}_y)\right)$.

Essendo $\underline{e}_x$ un versore e quindi un vettore geometrico libero ne posso prendere un segmento che rappresenti il vettore, ad esempio $\overline{OU} = \underline{e}_x$, allo stesso modo $\overline{OU'} = \underline{e}_y$, i punti U, U' sono detti **punti unitari**. Mentre le rette passanti per $\overline{OU}$ e $\overline{OU'}$ sono detti **assi coordinati** (praticamente l'asse x e l'asse y). Di seguito diamo la rappresentazione delle rette orientate concordemente ai versori e calcolo di un punto P tramite proiezioni:



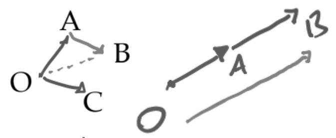
$\overline{OP} = a\,\overline{OU} + b\,\overline{OU'}$

ordinate   oscissa

$P(a,b)$

Con ovviamente i punti particolari con coordinate: $O(0,0)$ $U(1,0)$ $U'(0,1)$

Proposizione: dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, le componenti del vettore $\overline{AB}$ (la classe di equipollenza dei vettori equipollenti del vettore geometrico di punto iniziale A e finale B) sono $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$.
Dimostrazione: iniziamo con l'osservare che per la regola del parallelogrammo $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ (vedi sotto), ed essendo questi vettori geometrici liberi posso estrapolare $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ e da questa relazione applichiamo l'isomorfismo coordinato che ci dice che le componenti di $\overline{AB}$ saranno uguali alle componenti di $\overline{OB}$ meno le componenti di $\overline{OA}$, dunque chiamiamo le componenti incognite di $\overline{AB}$ come (x, y), mentre le componenti di $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ sono per definizione (x_1, y_1) e (x_2, y_2) rispettivamente. Allora ciò vuol dire che la coppia $(x, y) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, come volevasi dimostrare.



Spesso denoteremo $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ direttamente con le componenti come facciamo con i punti, ma questa definizione (per la precedente proposizione) non è ambigua infatti $\overline{OP}(a, b) \equiv P(a, b)$.
Prendiamo due vettori geometrici liberi $\underline{v}(v_x, v_y)$ e $\underline{w}(w_x, w_y)$ diversi dal vettore nullo, allora:

$$\cos \underline{v}\hat{\ }\underline{w} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \qquad \cos \underline{v}\hat{\ }\underline{e}_x = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \cos \underline{v}\hat{\ }\underline{e}_y = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Cambiamenti di riferimento

Se dati due riferimenti cartesiani ortogonali monometrici $\mathcal{R} = \left(O, (\underline{e_x}, \underline{e_y})\right)$, $\mathcal{R}' = \left(O', (\underline{e'_x}, \underline{e'_y})\right)$ voglio passare dalle coordinate di un punto P in $\mathcal{R}$ alle coordinate in $\mathcal{R}'$ si usa il seguente metodo.

Diciamo che il punto P abbia coordinate (x, y) in $\mathcal{R}$ e coordinate (x', y') in $\mathcal{R}'$ e noi vogliamo trovare delle formule che ci permettono di passare da (x, y) a (x', y'). Per poter fare questa cosa ci viene in aiuto la matrice di passaggio da un riferimento ad un altro, in particolare dal riferimento $(\underline{e_x}, \underline{e_y})$ al riferimento $(\underline{e'_x}, \underline{e'_y})$, ovvero la matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ e quindi (proprietà della matrice di passaggio) se moltiplichiamo a destra la colonna delle componenti di un vettore nel vecchio riferimento otteniamo la colonna delle componenti nel nuovo riferimento.

Riprendiamo le coordinate nel punto P che, come ben sappiamo, per definizione sono le componenti del vettore geometrico libero $\overline{OP}$ e $\overline{O'P}$, rispettivamente per (x, y) e (x', y'), e andiamo a definire anche le coordinate delle origini dei riferimenti. Per il punto O è $(0,0)$ mentre per O', essendo traslato rispetto all'origine, chiamiamole (c_1, c_2), una volta conosciute le coordinate di O e P, per un lemma visto in precedenza, si conoscono anche le coordinate di $\overline{OP}$ ovvero (x, y), mentre $\overline{O'P}(x' - c_1,\ y' - c_2)$.

A questo punto utilizziamo la matrice di passaggio moltiplicandola a sinistra della colonna delle componenti del vettore $\overline{OP}$ nel riferimento che sottende $\mathcal{R}$, risulteranno le componenti dello stesso vettore nel riferimento che sottende R' quindi $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - c_1 \\ y' - c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - c_1 = b_{11}x + b_{12}y \\ y' - c_2 = b_{21}x + b_{22}y' \end{cases}$ a questo sistema esplicitando le coordinate dei punti x' e y' in termini di coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}$ otterremo il seguente sistema: $\begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y + c_1 \\ y' = b_{21}x + b_{22}y + c_2 \end{cases}$ che sono le **formule di passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.**

Prodotto vettoriale

Definiamo il prodotte vettoriale nello spazio (non è possibile definirlo con il piano): prendo un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $\mathcal{R} = \left(O, \mathcal{R}_\mathcal{V} = (\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z})\right)$ e due vettori: $\underline{v}(v_x, v_y, v_z) = v_x\underline{e_x} + v_y\underline{e_y} + v_z\underline{e_z}$ e $\underline{w}(w_x, w_y, w_z) = w_x\underline{e_x} + w_y\underline{e_y} + w_z\underline{e_z}$. Allora il prodotto vettoriale $\underline{v} \times \underline{w}$ è per definizione $\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - w_y v_z)\underline{e_x} - (v_x w_z - v_z w_x)\underline{e_y} + (v_x w_y - w_x v_y)\underline{e_z}$ (il determinante sviluppato per la prima riga).

Esempio: $\underline{v}(1,0,1), \underline{w}(2,2,0)$ $\quad \underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-2,2,2)$

<u>Proprietà</u>: Siano $\underline{v}(v_x, v_y, v_z)$ e $\underline{w}(w_x, w_y, w_z) \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{R} = \left(O, \mathcal{R}_\mathcal{V} = (\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z})\right)$

1. $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0$ (il prodotto vettoriale è sempre ortogonale al prodotto dei due vettori fra di loro)
   <u>Dim.</u>: $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = \left((v_y w_z - w_y v_z)\underline{e_x} - (v_x w_z - v_z w_x)\underline{e_y} + (v_x w_y - w_x v_y)\underline{e_z}\right) \cdot \underline{v} = v_y \dot{w}_z v_x - w_y \ddot{v}_z v_x - v_x \dot{w}_z v_y + v_z \ddot{w}_x v_y + v_x \ddot{w}_y v_z - w_x \ddot{v}_y v_z = 0$
2. $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0$
   Dunque: $(\underline{v} \times \underline{w}) \perp \underline{v}$ e $(\underline{v} \times \underline{w}) \perp \underline{w}$
3. $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow \underline{v} \parallel \underline{w}$
   <u>Dim.</u>: le componenti del prodotto vettoriale sono i minori di ordine 2 della matrice $\begin{pmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$ e quindi per dimostrare la nostra ipotesi bisogna andare a dimostrare che tutti i minori di ordine 2

della matrice rettangolare $\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$ siano uguali a 0 e lo sono, quindi il rango di questa sottomatrice $\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$ è 1; e di conseguenza $\begin{vmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$ e dunque per il teorema degli orlati (essendo la sottomatrice di rango 1) le righe (v_x, v_y, v_z) e (w_x, w_y, w_z) sono proporzionali (dipendenti), ovvero (per la coordinazione associata) $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono dipendenti.

4. $\underline{v} \times \underline{w} = -(\underline{w} \times \underline{v})$ (non è simmetrico)

   Dim.: Pensando al determinante $\begin{vmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ se si scambiano la seconda e la terza riga per la proprietà del determinante le due matrici avranno il segno scambiato.

5. $\underline{e_x} \times \underline{e_y} = \underline{e_z}$ $\quad\quad$ $\underline{e_y} \times \underline{e_z} = \underline{e_x}$ $\quad\quad$ $\underline{e_z} \times \underline{e_x} = \underline{e_y}$

   Dim.: Basta farsi i conti: $(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$ (nota che $(0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$)

Rappresentazioni

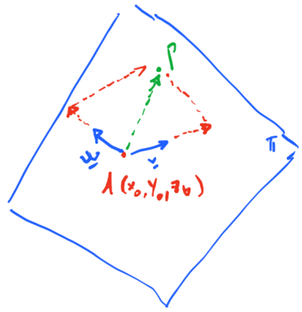
Definizione: un insieme di punti del piano X è **rappresentabile** se e soltanto se esiste un sistema di equazioni S_T in due incognite (ed eventuali parametri T) tale che $P \in X \Leftrightarrow \exists \overline{T}$ (valore per quei parametri) tale che le coordinate di P nel riferimento fissato appartengono a $\overline{S_{\overline{T}}}$ (l'insieme di soluzioni di $\overline{S_{\overline{T}}}$).

Esempio ipotetico di parametri: se avessimo $3x + 4y + k = 0$ come nostro sistema e $(2,3)$ ne è soluzione allora deve esistere un $\overline{k}$ per cui $(2,3)$ è soluzione di $3x + 4y + k = 0$. Concetto analogo ovviamente nel caso dello spazio, che avrò semplicemente tre componenti e quindi 3 incognite.

Rappresentazione di un piano nello spazio

Rappresentazione parametrica: Sia π un piano dello spazio. Allora π è rappresentato da un sistema parametrico a coefficienti reali del tipo $\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ t = t_0 + ns + n't \end{cases}$ dove (l, m, n) ed (l', m', n') sono terne di numeri reali indipendenti ed s, t parametri reali. x, y, z sono soluzioni di questo sistema se esistono dei valori per s, t tale che x, y, z soddisfino il sistema

Dimostrazione: Vogliamo trovare le costanti (l, m, n) e (l', m', n') tali che un punto P appartenga al piano se e solamente se le sue coordinate soddisfino quel sistema di equazioni. Fissiamo un punto del piano $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, dopodiché, sapendo che il piano è determinato da un punto e da due vettori che giacciono sul piano e ci danno la direzione del piano (oppure semplicemente da tre punti), siano $\underline{v}(l, m, n)$ e $\underline{v}'(l', m', n')$ due vettori liberi indipendenti e paralleli a π allora: $P \in \pi \Leftrightarrow \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}'$ applicati in A sono complanari $\Leftrightarrow \overline{AP}, \underline{v}, \underline{v}'$ dipendenti $\Leftrightarrow \overline{AP} \in \langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle$. Abbiamo così visto che questo sistema è formato da tre vettori dipendenti e quello che dipende dai rimanenti è proprio $\overline{AP}$ essendo $\underline{v}, \underline{v}'$ indipendenti. In termini di componenti questo significa che (applicando la coordinazione associata) $C_{\mathcal{R}}(P) = C_{\mathcal{R}}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \langle (l, m, n), (l', m', n') \rangle = \langle \underline{v}, \underline{v}' \rangle$ che è equivalente a scrivere: $\exists t, s \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = ls + l't \\ y - y_0 = ms + m't. \\ t - t_0 = ns + n't \end{cases}$



Ogni sistema del tipo $\begin{cases} x = x_0 + ls + l't \\ y = y_0 + ms + m't \\ t = t_0 + ns + n't \end{cases}$ rappresenta un piano.

Di quanto mi muovo su una direzione è determinato dal parametro s mentre di quanto mi muovo sull'altra è determinato dal parametro t

Proposizione (rappresentazione in forma ordinaria o cartesiana): Il piano π è rappresentato da un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, inoltre il vettore $\underline{w}(a, b, c) \perp \pi$.

Dimostrazione: Segue lo stesso percorso della dimostrazione precedente solamente che arrivati al punto della coordinazione associata non sviluppiamo in termini di combinazione lineare ma utilizziamo il fatto che questi tre vettori sono dipendenti: $P \in \pi \Leftrightarrow \underline{v}, \underline{v}'$ e $\overline{AP}$ dipendenti $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$, sviluppandolo per la prima riga: $\underbrace{(mn' - n'm)}_{a}(x - x_0) + \underbrace{(l'n - ln')}_{b}(y - y_0) + \underbrace{(lm' - l'm)}_{c}(z - z_0) = 0$ chiamando poi tutti i termini senza incognita $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ risulterà $ax + by + cz + d = 0$; ora ci rimane da osservare che $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ e che $\underline{w}(a, b, c) \perp \pi$; ma essendo a, b, c i minori della sottomatrice rettangolare presi a segno alterno essi rappresentano le componenti del prodotto vettoriale tra $\underline{v}$ e $\underline{v}'$, e poiché questi ultimi non sono paralleli (essendo indipendenti) il prodotto non può essere nullo (per una proprietà già vista) deve succedere che $(a, b, c) = (l, m, n) \times (l', m', n') \neq \underline{0}$, dopodiché il prodotto vettoriale è perpendicolare a entrambi i vettori del prodotto, ma allora se è perpendicolare ai due vettori del piano $\underline{v}$ e $\underline{v}'$, evidentemente è perpendicolare anche al piano stesso.

Proposizione (il viceversa della precedente): Ogni equazione $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ rappresenta un piano π ortogonale a (a, b, c).

Dimostrazione: vado a prendere due vettori ortogonali ad (a, b, c) che siano indipendenti, per trovarli devo risolvere il sistema $\underline{v} \cdot (a, b, c) = 0$, ovvero devo risolvere il sistema $av_x + bv_y + cv_z = 0$; essendo per ipotesi $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ abbiamo la certezza che uno tra a, b, c deve essere diverso da zero, diciamo che sia $a \neq 0$ allora $v_x = -\frac{1}{a}(bv_y + cv_z)$ e quindi $\overline{S} = \left\{\left(-\frac{1}{a}(bv_y + cv_z), v_y, v_z\right) \middle| v_y, v_z \in \mathbb{R}\right\}$ con $\dim \overline{S} = 2$ e quindi sicuramente posso trovare due vettori ortogonali ad (a, b, c) che siano indipendenti. Prendo un piano π' passante per questi due vettori e perpendicolare ad (a, b, c), mi fisso una soluzione dell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ e il punto corrispondente a questa soluzione lo chiamo $A(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ allora succede che il piano π' per la rappresentazione ordinaria è rappresentato dall'equazione $a'x + b'x + c'z + d' = 0$ e (a', b', c') ed è perpendicolare a π', ma essendo π' perpendicolare a sua volta alla terna (a, b, c) (essendo parallelo ai due vettori fissati in precedenza), ed essendo le due terne entrambe perpendicolari allo stesso piano risulta $(a, b, c) \parallel (a', b', c')$ e questo vuol dire che posso scrivere $ax + by + cz + d = 0$ come $kax + kby + kcz + d' = 0$ con $k \neq 0$; il piano π' risulta quindi avere l'equazione così descritta, inoltre essendo $k \neq 0$ posso scrivere $ax + by + cz + \frac{d'}{k} = 0$; a questo punto per la scelta fatta di A le sue coordinate soddisfano l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ oltre all'equazione $ax + by + cz + \frac{d'}{k} = 0$, ma poiché entrambi passano per $A(x_0, y_0, z_0)$ posso eguagliare le equazioni e quindi $d = \frac{d'}{k} \Rightarrow d' = dk$ e questo vuol dire che l'equazione π': $a'x + b'x + c'z + d' = 0$ è equivalente (dividendo per k) a $ax + by + cz + d = 0$ e quindi π' è il piano π stesso

Osservazione: Abbiamo dimostrato che due equazioni del tipo $ax + by + cz + d = 0$ che rappresentano lo stesso identico piano devono essere proporzionali ($k \neq 0$) e viceversa.

Esempi:

1) Come si rappresenta tutto lo spazio?
   Semplicemente con una tautologia (un'equazione sempre vera) come $0 = 0$
2) Come si rappresenta l'insieme vuoto?
   Con una contraddizione: $0 \neq 0$ (l'equazione parametrica non è mai soddisfatta)
3) Sia π per $A(4,3,-2)$ e parallelo ai vettori $\underline{v}(1,-1,0)$ e $\underline{v}'(2,1,3)$. Come si scrive l'equazione parametrica e la rappresentazione cartesiana?

$$\pi : \begin{cases} x = 4 + s + 2t \\ y = 3 - s + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x - 4 & y - 3 & z + 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = x + y - z - 9 = 0$$

Rappresentazione della retta nel piano

Rappresentazione parametrica: Una retta r può essere rappresentata mediante un sistema di equazioni in un parametro del tipo $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ con la coppia $(l, m) \neq (0,0)$ e t parametro (si nota subito che si ha una dimostrazione simile a quella fatta con il piano nello spazio).

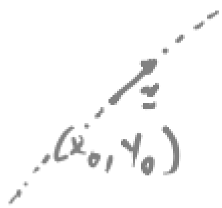
Dimostrazione (simile a quella fatta con il piano): Prendiamo un punto $A(x_0, y_0) \in r$ e un vettore direzione $\underline{v}(l, m) \parallel r$ con $(l, m) \neq (0,0)$, vediamo che un punto $P \in r \Leftrightarrow \overline{AP} \parallel \underline{v}$, e questo mi assicura anche che P appartenga alla retta, altrimenti non potrebbe essere parallelo a $\underline{v}$, inoltre $\overline{AP} \parallel \underline{v} \Leftrightarrow \overline{AP}$ e $\underline{v}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0), (l, m)$ dipendenti (per la coordinazione associata) $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \end{cases}$; quest'ultima condizione significa anche che il primo vettore è proporzionale al secondo.

Rappresentazione ordinaria: la retta è rappresentata da un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0,0)$, inoltre il vettore $\underline{v}(-b, a) \parallel r$.

Dimostrazione: Prendiamo un punto $A(x_0, y_0) \in r$ e un vettore direzione $\underline{v}(l, m) \parallel r$ con $(l, m) \neq (0,0)$ allora $P \in r \Leftrightarrow \overline{AP} \parallel \underline{v} \Leftrightarrow \overline{AP}$ e $\underline{v}$ sono dipendenti $\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0)$ con (l, m) dipendenti; si mettano queste due coppie sulla matrice e se ne faccia il determinante: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0$; poiché sono dipendenti il determinante è zero e questo vuol dire anche che (sviluppando il determinante attraverso la prima riga) $m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ con $(m, -l) = (a, b)$ e $c = -mx_0 + ly_0$; si noti anche che la coppia $(a, b) \neq 0$ per il semplice motivo che per ipotesi $(l, m) \neq (0,0)$ ed inoltre $(-b, a) \parallel \underline{v}$ e quindi parallelo ad r.

Viceversa (della rappresentazione parametrica): Ogni sistema $\begin{cases} x = x_0 + sl \\ y = y_0 + sm \end{cases}$ con $(l, m) \neq (0,0)$ rappresenta la retta che passa per (x_0, y_0) ed è parallela al vettore $\underline{v}(l, m)$

Dimostrazione: non è una vera dimostrazione, è più una cosa intuitiva. Il fatto che le coordinate di un punto debbano soddisfare quel sistema parametrico significa che (essendo s parametro) se faccio $s = 0$ si ha che $x = x_0$ e $y = y_0$; di conseguenza l'insieme di soluzioni del sistema ammette per certo la soluzione (x_0, y_0); in realtà per ogni valore di s il sistema ammette sempre e solo una soluzione, essendo (x_0, y_0) fissati a monte. Quindi variare s significa variare il modulo del vettore $\underline{v}(l, m)$ e quindi ci si sposta sempre muovendosi sulla stessa retta (vedi figura a destra).



Viceversa (della rappresentazione ordinaria): Ogni equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0,0)$ rappresenta una retta r che sia parallela al vettore $\underline{v}(-b, a)$.

Dimostrazione: poiché $(a, b) \neq (0,0)$ l'equazione ammette $ax + by + c = 0$ almeno una soluzione (se $a \neq 0$ esplicito x, se è $b \neq 0$ allora esplicito y) allora mi prendo una soluzione $A(x_0, y_0)$ e vado a costruirmi la retta $a'x + b'y + c' = 0$ passante per il punto A e parallela al vettore $\underline{v}(-b, a)$. Ne consegue che la coppia $(-b', a')$ deve essere proporzionale a $(-b, a)$ e quindi $(-b', a') \parallel (-b, a)$ ed allora, essendo entrambe le coppie diverse da (0,0), posso scrivere $a' = ka$, $b' = kb$, dopodiché (esattamente come fatto con il piano), imponendo la condizione che l'equazione $a'x + b'y + c' = 0$ deve passare per il punto (x_0, y_0) si ha anche $c' = kc$. Quindi abbiamo trovato che $a'x + b'y + c' = 0 \Leftrightarrow kax + kby + kc = 0$; semplificando la costante k (che non può essere nulla per via delle tre uguaglianze descritte precedentemente) vuol dire che è la stessa equazione di partenza e mi rappresenta proprio la retta $r: ax + by + c = 0$.

Osservazione: Due equazioni ordinarie rappresentano la stessa retta se e solo se sono proporzionali ($k \neq 0$).

Definizione: se ho una retta r ed un vettore non nullo $\underline{v}(l, m) \parallel r$ allora le componenti di questo vettore $\underline{v}$ le chiamo **numeri direttori** (o **parametri**) della retta r. E questi parametri di vettori (per il parallelismo) sono ben definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Altre tipologie di espressione

Espressione di una retta passante per due punti

Siano $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \pi$, una retta r passante per A e B (si può parafrasare anche con $\overline{AB} \parallel r$) è semplicemente una retta passante per A e parallela a $\underline{v}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Quindi $r : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$ con stesso parametro t. Inoltre, il precedente sistema si può riscrivere come $\begin{cases} x - x_1 = (x_2 - x_1)t \\ y - y_1 = (y_2 - y_1)t \end{cases}$ e se li guardo come vettori avrò che $(x - x_1, y - y_1)$ è proporzionale a $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, altro modo per vedere che sono proporzionali è il determinante: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$; che si avvicina molto alla formula dei rapporti uguali, infatti se succede che $y_2 - y_1 \neq 0 \neq x_2 - x_1$ (quindi se A, B non sono paralleli ne all'asse x ne all'asse y) dividendo per $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$ avrò la formula dei **rapporti uguali**: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Altra formulazione classica per una retta è la <u>forma esplicita</u>: parto dalla forma ordinaria $ax + by + c = 0$ della retta r (si noti che una retta passa per $(0,0)$ se e soltanto se $c = 0$). Può succedere che se $b \neq 0$ posso esplicitare $y \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, chiamando $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = p$, si ha la **forma esplicita** (che non è detto che esista, infatti dipende da b) $y = mx + p$ dove m è detto **coefficiente angolare** di r.

Coseni direttori

Prendiamo una retta **orientata** r (ne fissiamo un verso) e prendiamo un vettore $\underline{v} \parallel r$ e definisco i **coseni direttori** di questa retta come i coseni dell'angolo che forma con il vettore delle ascisse e quello che forma con il vettore unitario dell'asse delle ordinate, rispettivamente: $\cos(e_x \hat{} \underline{v})$ e $\cos(e_y \hat{} \underline{v})$. E come già visto in precedenza per $r: ax + by + c = 0$ sarà: : $\cos(e_x \hat{} \underline{v}) = \pm {}^{b}/_{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\cos(e_y \hat{} \underline{v}) = \pm {}^{a}/_{\sqrt{a^2 + b^2}}$; non è detto che il vettore $(-b, a)$ punti nella stessa direzione della retta, ma è comunque parallelo ad essa, per cui il $\pm$ è a seconda che $(-b, a)$ sia concorde $(+)$ o discorde $(-)$ con l'orientazione fissata della retta r.

Quindi, i **coseni direttori** sono semplicemente i coseni degli angoli che formano un vettore parallelo alla retta con gli assi coordinati.

Rette parallele

Due rette r e r' sono parallele se e solamente se o hanno intersezione vuota $r \cap r' \neq \emptyset$ (propriamente), oppure se coincidono $r = r'$ (impropriamente).

Al fine di determinare qualche criterio di parallelismo prendiamo dei numeri di vettori per r e r'. Ovvero siano $\underline{v}(l, m) \parallel r$ e $\underline{v}'(l', m') \parallel r'$, dire che $r \parallel r'$ equivale a dire che quei vettori sono paralleli e dunque che $(l, m), (l', m')$ sono proporzionali. Volendo esprimere le rette con la rappresentazione cartesiana, quindi si ha $r: ax + by + c = 0$ e $r': a'x + b'y + c' = 0$ con $(-b, a) \parallel r$ e $(-b', a') \parallel r'$ e di conseguenza $r \parallel r' \Leftrightarrow (-b, a)$ è proporzionale a $(-b', a') \Leftrightarrow (a, b)$ proporzionale a (a', b'); a questo punto possono succedere due cose: tutta la terna (a, b, c) è proporzionale a (a', b', c') e quindi le due equazioni sono proporzionali di una costante non nulla e definiscono quindi la stessa retta (parallele impropriamente); altrimenti, (a, b, c) non è proporzionale a (a', b', c') e quindi sono parallele propriamente (non possono avere punti in comune).

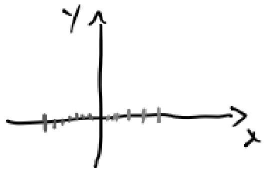
Vediamo perché non possono avere punti in comune, prendiamo il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, sappiamo che (a, b) è proporzionale a (a', b'), se risulta (a, b, c) non proporzionale a (a', b', c') allora il rango della matrice incompleta di quel sistema è 1, ma essendo le terne non proporzionali la matrice completa ha rango 2 e quindi per Rouché-Capelli avremo un sistema non compatibile e cioè che le due equazioni non hanno punti in comune. Viceversa, se anche (a, b, c) è proporzionale a (a', b', c') allora il sistema avrà un numero infinito di soluzione e quindi sarà un sistema compatibile.

Distanza tra insiemi

Vediamola per il piano (in maniera analoga si procede per lo spazio), siano $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2) \in \pi$ la distanza dal punta A al punto B si definisce $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |\overline{AB}|$

La distanza tra due sottoinsiemi $S, T \subseteq \pi$ la definisco come l'estremo inferiore (non dico minimo poiché non ho la certezza che stia all'interno degli insiemi) delle distanze tra i punti di S e di T, più precisamente $\mathrm{dist}(S, T) = \inf\{d(P, Q),\ P \in S, Q \in T\} \geq 0$.

Esempi: 1)



$X = \{(-\frac{1}{n}, 0) / n \in \mathbb{N}\}$

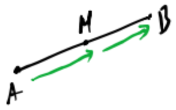
$Y = \{(\frac{1}{n}, 0) / n \in \mathbb{N}\}$

$\mathrm{dist}(X, Y) = 0$

2) $X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{dist}(X, Y) = 0$ poiché $\exists P \in X \cap Y$ per cui $d(P, P) = 0$.

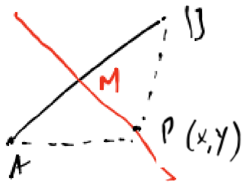
Punto medio di un segmento

Prendiamo un segmento del piano, che è ovviamente delimitato dai suoi estremi: $A(x_1, y_1) \neq B(x_2, y_2)$, allora il punto medio $M(x_M, y_M)$ è un punto che si trova alla stessa distanza dal punta A e dal punto B, quindi risulterà che i vettori geometrici $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ sono uguali, allora passando alla coordinazione associata le componenti di $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ devono essere le stesse, quindi $(x_M - x_1, y_M - y_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M)$ da cui il sistema $\begin{cases} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} \\ y_M = \frac{y_2 + y_1}{2} \end{cases}$



Asse del segmento

Dato sempre il segmento precedente, l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti (l'insieme dei punti) che ha la stessa distanza dal punto A e dal punto B (si trova quindi sulla retta perpendicolare al segmento $\overline{AB}$ che passa per il punto medio).



Si può verificare con le distanze, infatti, $P \in r \Leftrightarrow d(A, P) = d(B, P)$, e ciò vuol dire $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \Leftrightarrow 2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$ che, se la si nota bene, è l'equazione di una retta del tipo $ax + by + c = 0$ e poiché $A \neq B$ o $x_2 - x_1 \neq 0$ oppure $y_2 - y_1 \neq 0$ perché o $x_1 \neq x_2$ oppure $y_1 \neq y_2$, questa è un equazione ordinaria della retta.

Un vettore parallelo a questa retta sarà dunque $(-b, a) = (y_1 - y_2, x_2 - x_1)$ e quello che si può verificare e che il vettore geometrico $\overline{AB}$ ha le componenti $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ovvero (a, b) e quindi il prodotto scalare tra $(-b, a)$ e (a, b) è pari a zero, di conseguenza se $-ab + ab = 0 \Rightarrow r \perp \overline{AB}$.

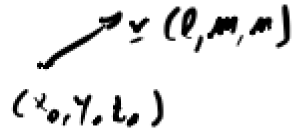
Quest'asse, come già detto in precedenza, deve passare per il punto medio del segmento, infatti se si prova a sostituire le espressioni del punto medio alle incognite dell'equazione $2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$ (quindi x_M con x e y_M con y) si troverà che il punto medio è soluzione dell'equazione.

Rappresentazione ordinaria di una retta nello spazio

Una retta nello spazio si potrebbe rappresentare utilizzando una rappresentazione parametrica dello stesso tipo di quella usata con il piano, quindi $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, ma quello che non funziona come analogo è la rappresentazione ordinaria poiché quello che ottengo è una matrice rettangolare e quindi non mi è possibile fare il determinante, ma quello che posso fare è definire una retta nello spazio come intersezione dei due piani, e sarà proprio questa che chiamerò rappresentazione ordinaria della retta nello spazio.

Vado a prendere due piani che non siano paralleli (altrimenti avrei una intersezione o vuota oppure i due piani sono coincidenti) $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ e la loro intersezione sarà una retta, il fatto che non siano paralleli implica, oltre che la terna (a, b, c) rappresenta le componenti di un vettore perpendicolare al piano, che le due terne non sono proporzionali, e questo significa che la matrice incompleta (3x2), dato che coincide con la dimensione del sottospazio generato ad esempio dalle righe (non proporzionali), ha rango 2. Quindi avendo rango massimo, per la teoria dei sistemi, il sistema omogeneo associato ammette ∞^1 soluzioni.

Dopodiché, considerato che questo è un sistema particolare perché dovrebbe esserci d, tutte le soluzioni di questa equazione si scrivono come una somma di una soluzione particolare, ad esempio (x_0, y_0, z_0), cioè un punto comune alle due equazioni e somma di un elemento generico che sia soluzione del sistema omogeneo associato, quindi con $d = d' = 0$, la si può scrivere quindi come sistema generato dalla terna (l, m, n). Più precisamente, tutte le soluzioni saranno descritte da $(x_0, y_0, z_0) + \langle (l, m, n) \rangle$ con, ovviamente, $(l, m, n) \neq (0,0,0)$, e sostanzialmente sto descrivendo una retta, perché prendo (x_0, y_0, z_0) e ci sommo una cosa proporzionale ad (l, m, n) di una certa costante di proporzionalità:



Dall'intersezione di due piani non paralleli viene fuori una retta.