

LÓGICA MATEMÁTICA

Professora: Izabel Cristina



PRINCÍPIOS LÓGICOS

A **lógica matemática** analisa determinada **proposição** buscando identificar se representa uma afirmação **verdadeira** ou **falsa**.

A princípio, a lógica era ligada à filosofia, tendo sido iniciada por **Aristóteles** (384-322 a.C.), só passou a ser uma área da **Matemática** a partir dos trabalhos de **George Boole** (1815-1864) e **Augustus de Morgan** (1806-1871), quando eles apresentaram os fundamentos da lógica algébrica.

Essa mudança de paradigma tornou a lógica matemática uma importante ferramenta para a programação de computadores.

LÓGICO PROPOSICIONAL

A **lógica proposicional** é a forma mais simples de lógica. Nela os fatos do mundo real são representados por sentenças sem argumentos, chamadas de **proposições**.

| <i>MUNDO REAL</i> | <i>PROPOSIÇÃO LÓGICA</i> |
|---|---------------------------------|
| Hoje está chovendo | P |
| A rua está molhada | Q |
| Se está chovendo, então a rua está molhada. | $P \rightarrow Q$ |

As **proposições** são palavras ou símbolos que expressam um pensamento com um sentido completo e indicam afirmações de fatos ou de ideias.

Essas afirmações assumem valores lógicos que podem ser **verdadeiros** ou **falsos** e para representar uma proposição usualmente utilizamos as letras **p** e **q**.

$1 + 1 = 2$ é uma proposição verdadeira da aritmética.

$0 > 1$ é uma proposição falsa da aritmética.

- **O Brasil está localizado na América do Sul.** (proposição verdadeira).
- **A Terra é plana.** (proposição falsa).

Se não é possível definir a interpretação (**verdadeiro ou falso**) da sentença, esta não é uma **proposição**.

“Feliz ano novo!”

Será que isso é uma **proposição verdadeira** ou **falsa**?

Nenhuma, pois não se trata de uma sentença para a qual se possa atribuir um valor lógico.

Somente sentenças **declarativas** podem ser reconhecidas como **verdadeiras** ou **falsas**.

Não são consideradas proposições:

- **INTERROGATIVAS:**

As frases interrogativas são feitas para expressar dúvidas, buscar informações e esclarecer problemas de comunicação. Elas terminam com ponto de interrogação.

Qual o seu nome?

O jogo foi de quanto?

Por que você escolheu esse caminho?

- **IMPERATIVAS:**

As frases imperativas são utilizadas para emissão de ordens, conselhos e pedidos. Levam ponto final ou ponto de exclamação e também podem ser afirmativas ou negativas.

Preste atenção!

Estude mais.

- **EXCLAMATIVAS:**

As frases exclamativas expressam emoções fortes, como surpresa, raiva, alegria, nojo ou dor. Essas frases terminam com ponto de exclamação.

Feliz aniversário!

Eu passei na prova!

- **SENTENÇAS ABERTAS:**

São aquelas que possuem algum grau de indeterminação.

Ele demorou várias horas.

$x < 10$.

- **PARADOXOS LÓGICOS:**

É uma declaração aparentemente verdadeira, mas que leva a uma contradição lógica ou que contradiz a intuição comum.

O nada é tudo.

Eu estou cheio de me sentir vazio.

O silêncio é o melhor discurso.

EXERCÍCIO

Verifique se as expressões abaixo são proposições. Justifique sua resposta.

- a) **Boa sorte!**
- b) **Estou dormindo acordado.**
- c) **$x + 3 > 7$.**
- d) **Não faça isto!**
- e) **Cecília é escritora.**
- f) **Quantos japoneses moram no Brasil?**

PRINCÍPIOS DAS PROPOSIÇÕES

- **Princípio da Identidade:** Uma proposição **Verdadeira** é **Verdadeira**, e uma proposição **Falsa** é **Falsa**.
- **Princípio do Terceiro Excluído:** Uma proposição ou é **verdadeira** ou **falsa** não existindo uma terceira possibilidade.
- **Princípio da Não-Contradição:** Uma proposição não pode ser **verdadeira** e **falsa** simultaneamente.

PROPOSIÇÃO (SIMPLES E COMPOSTA)

- Serão consideradas **proposições simples** aquelas que vêm sozinhas, desacompanhadas de outras proposições.

Todo homem é mortal.

- Quando duas (ou mais) proposições vêm conectadas entre si, formando uma só sentença, estaremos diante de uma **proposição composta**.

João é médico e Pedro é dentista.

Maria vai ao cinema **ou** Paulo vai ao circo.

Ou Luís é baiano, **ou** é paulista.

Se chover amanhã de manhã, **então** não irei à praia.

Comprarei uma mansão **se e somente se** eu ganhar na loteria.

CONECTIVO LÓGICO é um símbolo ou palavra que usamos para conectar **duas** ou **mais proposições** para que elas sejam **válidas**, de modo que a proposição composta formada dependa apenas das proposições que a originou. Por causa dos conectivos conseguimos dar um **valor lógico** para esta proposição formada.

CONNECTIVOS LÓGICOS

CONNECTIVO "E": Proposições compostas em que está presente o conectivo "**e**" são ditas **CONJUNÇÕES**. Simbolicamente, esse conectivo pode ser representado por " **\wedge** ".

Então, se temos a sentença: "Marcos é médico **e** Maria é estudante"

Poderemos representá-la apenas por: **$p \wedge q$** .

Onde: **p** = Marcos é médico e **q** = Maria é estudante.

Uma **conjunção** só será **verdadeira**, se **ambas as proposições** componentes **forem também verdadeiras**.

| Marcos é médico | Maria é estudante | Marcos é médico e Maria é estudante |
|-----------------|-------------------|-------------------------------------|
| p | q | $p \wedge q$ |
| V | V | V |

Se for verdade apenas que *Marcos é médico*, mas falso que *Maria é estudante*, teremos:

| Marcos é médico | Maria é estudante | Marcos é médico e Maria é estudante |
|-----------------|-------------------|-------------------------------------|
| p | q | $p \wedge q$ |
| V | F | F |

Por outro lado, se for verdadeiro que *Maria é estudante*, e falso que *Marcos é médico*, teremos:

| Marcos é médico | Maria é estudante | Marcos é médico e Maria é estudante |
|-----------------|-------------------|-------------------------------------|
| p | q | $p \wedge q$ |
| F | V | F |

Enfim, se ambas as sentenças simples forem falsas, teremos que:

| Marcos é médico | Maria é estudante | Marcos é médico e Maria é estudante |
|-----------------|-------------------|-------------------------------------|
| p | q | $p \wedge q$ |
| F | F | F |

TABELA VERDADE DA CONJUNÇÃO

Dadas as proposições **p** e **q**, o valor lógico da proposição **$p \wedge q$** é **verdadeiro** apenas quando ambas as proposições são **verdadeiras**.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

CONECTIVO “OU”: Recebe o nome de **DISJUNÇÃO** toda proposição composta em que as partes estejam unidas pelo conectivo **ou**.

Simbolicamente, representaremos esse conectivo por “**V**”.

Portanto, se temos a sentença:

“Marcos é médico **ou** Maria é estudante”

Representaremos por: **p V q**

Então, uma **disjunção** será **falsa** quando as **duas partes** que a compõem **forem ambas falsas**.

E nos demais casos, a **disjunção** será **verdadeira**

TABELA VERDADE DA DISJUNÇÃO

Dadas as proposições **p** e **q**, o valor lógico da proposição **p** \vee **q** é verdadeiro quando, pelo menos, uma das proposições é verdadeira.

| p | q | p \vee q |
|---|---|------------|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

CONECTIVO “OU...OU”: Recebe o nome de **DISJUNÇÃO EXCLUSIVA** toda proposição composta em que as partes estejam unidas pelo conectivo “**ou p ,ou q**”. Simbolicamente, representaremos esse conectivo por “**v**”.

Portanto, se temos a sentença:

“**Ou** irei jogar basquete **ou** irei à casa de João”

Representaremos por: **$p \vee q$**

Então, só será **verdadeira** se uma das partes for **falsa** e a outra **verdadeira** (independentemente da ordem) não podendo acontecer **verdadeira** nos dois casos, caso aconteça a proposição resultante desta operação será **falsa**.

TABELA VERDADE DA DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

Dadas as proposições **p** e **q**, o valor lógico da proposição **$p \vee q$** só é **verdadeiro** se exatamente uma das proposições for **verdadeira**. Se as duas forem **verdadeiras** ou as duas forem **falsas**, o resultado é **falso**.

| P | Q | $P \vee Q$ |
|----------|----------|------------------------------|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

CONECTIVO "SE ... ENTÃO ...": A **CONDICIONAL** é a operação realizada quando na proposição utiliza-se o conectivo **se... então....**

Para representar esse operador usamos o símbolo \rightarrow .

Assim, $p \rightarrow q$ significa "**se p, então q**".

"**Se** nasci em Juazeiro do Norte, **então** sou cearense."

O resultado desta operação só será **falso** se a primeira parte for **verdadeira**, e a segunda for **falsa**. É importante ressaltar que uma operação **condicional** não significa que uma proposição é a consequência da outra, o que estamos tratando é apenas de relações entre valores lógicos.

TABELA VERDADE DA CONDICIONAL

Dadas as proposições **p** e **q**, o valor lógico da proposição $p \rightarrow q$ é **falso** quando **p** é **verdadeiro** e **q** é **falso** e é **verdadeiro nos demais casos**.

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

CONECTIVO "... SE E SOMENTE SE ...": A estrutura dita **BICONDICIONAL** apresenta o conectivo "**se e somente se**", separando as duas sentenças simples.

"Eduardo fica alegre **se e somente se** Mariana sorri."

A **bicondicional** é uma conjunção entre **duas condicionais**:

"Eduardo fica alegre **somente se** Mariana sorri **e** Mariana sorri **somente se** Eduardo fica alegre"

Haverá duas situações em que a **bicondicional** será verdadeira: quando **antecedente** e **consequente** forem **ambos verdadeiros**, ou quando forem **ambos falsos**. Nos demais casos, a **bicondicional** será **falsa**.

TABELA VERDADE DA BICONDISCIONAL

Dadas as proposições **p** e **q**, o valor lógico da proposição **$p \leftrightarrow q$** é verdadeiro apenas quando **ambas as proposições** são **verdadeiras** ou **ambas** são **falsas**.

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|-----------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

NEGAÇÃO LÓGICA: A negação de uma proposição é o **contrário lógico** daquela proposição. Isso significa que a negação de uma proposição verdadeira torna-se falsa, e vice-versa. A negação de uma proposição é mostrada simbolicamente com " \sim " ou " \neg " antes da proposição.

Negação do "e" (conjunção)

A negação da conjunção "**p e q**" é "**não (p e q)**". Isso é igual a "**não p ou não q**". Em outras palavras, você troca o "**e**" pelo "**ou**" e nega as duas proposições. Por exemplo:

Proposição original: "Pedro é alto e Maria é inteligente".

Negação: "Pedro não é alto ou Maria não é inteligente".

Negação do “ou” (disjunção inclusiva)

A negação da disjunção inclusiva “**p ou q**” é “**não (p ou q)**”. Isso é igual a “**não p e não q**”. Aqui, você troca o “**ou**” pelo “**e**” e nega ambas as proposições. Por exemplo:

Proposição original: “Pedro é alto ou Maria é inteligente”.

Negação: “Pedro não é alto e Maria não é inteligente”.

Negação do “se..., então” (condicional)

A negação da condicional “**se p, então q**” é “**p e não q**”. Em termos práticos, você mantém a primeira proposição como está e nega a segunda proposição e troca o “**se...então**” pelo “**e**”. Por exemplo:

Proposição original: “Se Pedro é alto, então Maria é inteligente”.

Negação: “Pedro é alto e Maria não é inteligente”.

Negação do “se e somente se” (bicondicional)

A negação da bicondicional “**p se e somente se q**” é “**ou p, ou q**”. Você troca o “**se e somente se**” pelo “**ou...ou**” e mantém as proposições como estão. Por exemplo:

Proposição original: “Pedro é alto se e somente se Maria é inteligente”.

Negação: “Ou Pedro é alto, ou Maria não é inteligente”.

Negação do “ou...ou” (disjunção exclusiva)

A negação da disjunção exclusiva “**ou p ou q**” é “**p se e somente se q**”. Isso transforma a disjunção exclusiva em uma proposição bicondicional. Por exemplo:

Proposição original: “Ou Pedro ou Maria é inteligente” (no sentido exclusivo).

Negação: “Pedro é inteligente se e somente se Maria é inteligente”.

| Proposição | Negação |
|--|--|
| Pedro é mineiro e João é capixaba | Pedro não é mineiro ou João não é capixaba |
| Pedro ou João viajará | Pedro não viajará e João não viajará |
| Se chove, então a rua está molhada | Chove e a rua não está molhada |
| Pedro viajará se e somente se João viajará | Ou Pedro viajará ou João viajará |
| Ou Pedro viajará ou João viajará | Pedro não viajará e João não viajará |

| CONECTIVOS LÓGICOS | | | | | | |
|---------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|---------------------|---|---|
| OPERAÇÃO LÓGICA | SÍMBOLOS | LÊ-SE | ESQUEMA | ESTRUTURA LÓGICA | VALOR LÓGICO | EXEMPLOS |
| Negação | \sim ou \neg | não | $\sim p$ ou $\neg p$ | não p | Terá valor falso se a proposição for verdadeira e vice-versa | O carro não é amarelo |
| Conjunção | \wedge | e | $p \wedge q$ | p e q | Será verdadeira, somente se todas as proposições forem também verdadeiras | Pedro é enfermeiro e Márcia é médica |
| Disjunção inclusiva | \vee | ou | $p \vee q$ | p ou q | será verdadeira se todas as proposições forem verdadeiras | Pedro é enfermeiro ou Márcia é médica |
| Disjunção exclusiva | $\underline{\vee}$ | ou...ou | $p \underline{\vee} q$ | ou p ou q | Será verdadeira se uma das partes for falsa e a outra verdadeira (independentemente da ordem) | ou Pedro é enfermeiro ou Márcia é médica |
| Condicional | \rightarrow | se...então | $p \rightarrow q$ | se p então q | Será falsa quando a proposição antecedente for verdadeira e a consequente for falsa | Se Pedro é enfermeiro então Márcia é médica |
| Bicondicional | \leftrightarrow | ...se e somente se... | $p \leftrightarrow q$ | p se e somente se q | Será verdadeira quando ambas as proposições forem verdadeiras ou ambas falsas | Pedro é enfermeiro se e somente se Márcia é médica |



+

OBRIGADO!

+

