CAIO PEDERNEIRAS/SHUTTERSTOCK.COM

- Hospital de campanha montado no Estádio do Pacaembu, em São Paulo (SP) para tratamento de pacientes com covid-19. Fotografia de 2020.

Introdução

Na abertura deste Capítulo, vimos como algumas ONGs auxiliam na construção de moradias para famílias sem recursos. Nesse processo de construção ou na reforma de um imóvel, muitas atividades envolvem medições e cálculos de áreas e perímetros. Neste Capítulo, veremos como calcular a área de algumas figuras planas.

As áreas que precisamos determinar no dia a dia nem sempre são de polígonos perfeitos, mas saber como realizar esse cálculo nos ajuda a fazer uma boa aproximação de áreas que não têm uma forma específica.

Área de polígonos

O Estádio Municipal Paulo Machado de Carvalho, conhecido como Pacaembu, em São Paulo, teve seu campo de futebol, de 105 m de comprimento por 68 m de largura, ocupado por um hospital de campanha durante 84 dias, em 2020, para o tratamento de pacientes com covid-19.

Para determinar a área do hospital de campanha, utilizando essas informações, podemos realizar uma aproximação, calculando a área do campo de futebol. Para isso, precisamos retomar o cálculo da área de um retângulo visto no Ensino Fundamental. A seguir, veremos como determinar a área desse e de outros polígonos.

PENSE E RESPONDA

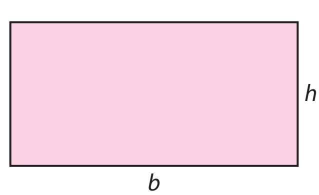
Calcule a área do campo de futebol do Estádio do Pacaembu e determine a porcentagem ocupada pelo hospital de campanha montado em 2020, sabendo que a área do hospital era de 6 300 m^2.

7 140 m^2; aproximadamente 88%

Área do retângulo

A área S de um retângulo de lados de medidas b e h, com b e h reais positivos, é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h.

EDITORIA DE ARTE



$$S = b \cdot h$$

PARA ASSISTIR

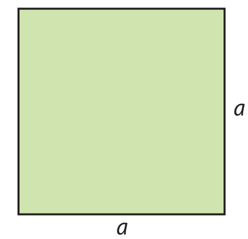
ÁREA de figuras planas: qualquer área com uma única fórmula: "porque sim" não é resposta. 2020. Vídeo (20min22s). Publicado pelo canal A Matemaníaca por Julia Jaccoud. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=l0z1uX0_sMA. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse vídeo apresenta, de maneira clara e sucinta, como obter as fórmulas de áreas de figuras planas.

Área do quadrado

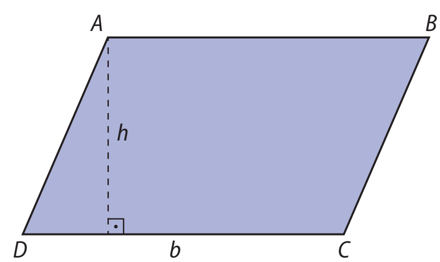
Todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área S de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados (a).

$$S = a^2$$

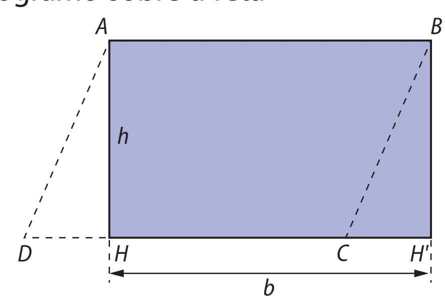


Área do paralelogramo

Vamos considerar um paralelogramo $ABCD$ cuja base mede b e a altura, h como mostra a figura a seguir.



Projetando ortogonalmente os vértices A e B desse paralelogramo sobre a reta que passa pelos pontos D e C, obtemos os pontos H e H', respectivamente, determinando o retângulo $ABH'H$, como indicado na figura ao lado. Os triângulos AHD e $BH'C$ são congruentes pelo caso LAA_O (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto). Desse modo, eles têm a mesma área.



Logo, a área S do paralelogramo $ABCD$ é igual à área do retângulo $ABH'H$:

$$S = b \cdot h$$

O resultado obtido independe do lado escolhido para ser a base do paralelogramo. Caso tivéssemos escolhido o outro lado do paralelogramo como base, e sua respectiva altura, o resultado seria o mesmo.

PENSE E RESPONDA

Imagine que o lado $\overline{CD}$ do paralelogramo $ABCD$ fique fixo e o lado $\overleftrightarrow{AB}$ deslize sobre a reta AB. Que figuras obtemos? Qual é a área dessas figuras obtidas? Justifique sua resposta.

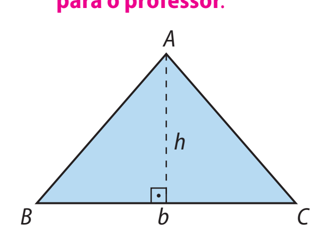
Ver as **Orientações para o professor**.

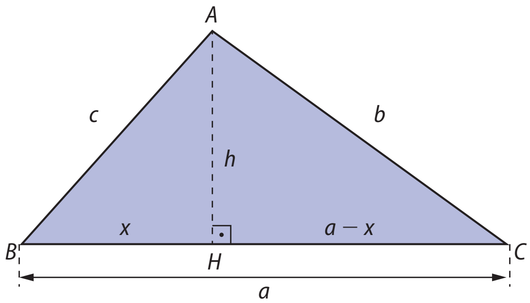
Área do triângulo

Vamos considerar um triângulo ABC cuja base $\overline{BC}$ mede b, e a altura relativa a essa base mede h.

A área S do triângulo ABC é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base.

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$





Outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer é a partir da medida de seus três lados.

Seja um triângulo *ABC* em que *a*, *b* e *c* são, respectivamente, as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e *h* é a medida da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, como mostra a figura ao lado.

A área *S* do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ em que } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ é}$$

o semiperímetro do triângulo.

SAIBA QUE...

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu por volta do ano 100. Ficou conhecido pela fórmula para o cálculo da área de um triângulo e que leva seu nome. O livro em que apresenta essa fórmula, **A métrica**, só foi encontrado em 1896.

Fonte dos dados: BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Essa expressão para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como **fórmula de Heron**.

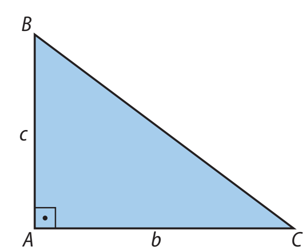
PARA ACESSAR

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Sala de estudo**: fórmula de Herão. [2020]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-formula-de-herao-2/. Acesso em: 28 jul. 2020.

Esse *site* apresenta várias maneiras de realizar a demonstração da fórmula de Heron.

Área do triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo *ABC*, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e vice-versa. Assim, sendo $AB = c$, $AC = b$ e *S* a área do triângulo retângulo *ABC*, temos:



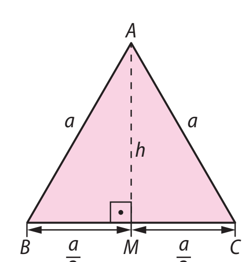
$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também bissetriz e mediana. Vamos considerar um triângulo equilátero *ABC* como mostra a figura ao lado.

A área *S* do triângulo equilátero *ABC* é dada por:



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

PENSE E RESPONDA

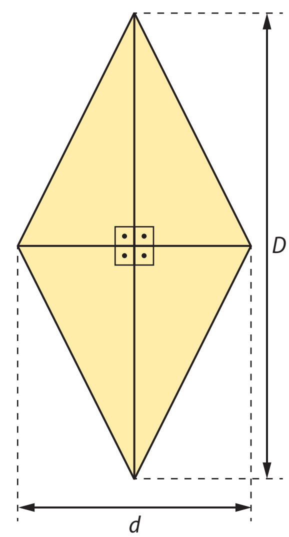
Partindo da expressão $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$ para o cálculo da área do triângulo, como chegar à expressão $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ para o triângulo equilátero?

DICA: Use o teorema de Pitágoras para determinar a medida da altura h. Ver as **Orientações para o professor**.

Área do losango

Todo losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si.

Observe que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes de mesma área. Assim, sua área S é a soma das áreas desses quatro triângulos:



$$S = 4 \cdot S\triangle = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{(D \cdot d)}{2}$$

Então: $$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

Portanto, a área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

Em um losango:

- os ângulos opostos são congruentes.
- as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.
- as diagonais se intersectam no ponto médio.

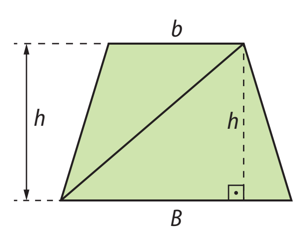
PENSE E RESPONDA

Quais dessas propriedades são verdadeiras para todos os paralelogramos? Justifique.

Ver as **Orientações para o professor**.

Área do trapézio

Vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem B, b e h, respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h, como mostra a figura ao lado.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área S do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$S = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Então: $$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

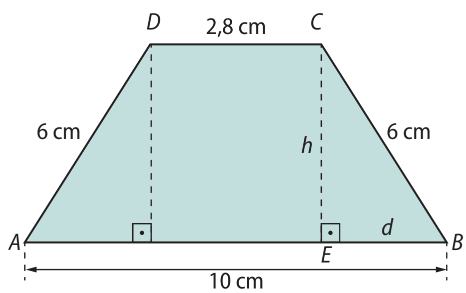
Portanto, a área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 10 cm e 2,8 cm. Se a medida de cada um dos outros dois lados é 6 cm, qual é a área desse trapézio?

Resolução

Como os lados não paralelos têm medidas iguais, o trapézio é isósceles.



Vamos calcular a medida *d* no triângulo *CEB* para determinar a altura do trapézio:

$$d = \frac{10 - 2,8}{2} = \frac{7,2}{2} \Rightarrow d = 3,6 \text{ cm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CEB*, temos:

$$h^2 + 3,6^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 23,04$$

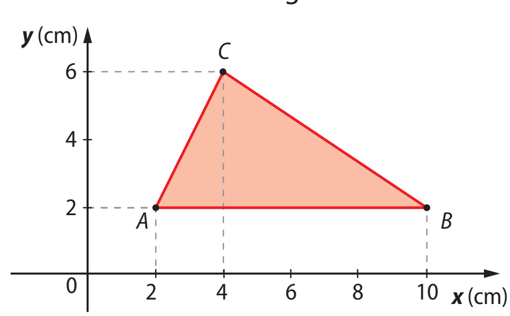
Logo, $h = 4,8$ cm.

Cálculo da área do trapézio:

$$S = \frac{(10 + 2,8) \cdot 4,8}{2} = \frac{(12,8 \cdot 4,8)}{2} = 30,72$$

Portanto, $S = 30,72$ cm².

2. Calcule a área do triângulo *ABC*.



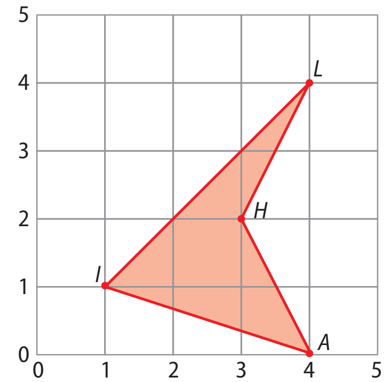
Resolução

A base do triângulo mede 8 cm ($10 - 2 = 8$), e a altura, 4 cm ($6 - 2 = 4$). Logo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Assim, a área do triângulo *ABC* é 16 cm².

3. Determine a área do quadrilátero *ILHA* representado a seguir.



Resolução

Inicialmente, observamos que o quadrilátero é não convexo.

Precisamos então, decompor a figura em polígonos cuja área sabemos calcular. Uma possibilidade é considerar os triângulos *ILA* e *LHA*.

A área do quadrilátero *ILHA* é a área do triângulo *ILA* menos a área do triângulo *LHA*.

No triângulo *ILA*, considerando a base como o lado $\overline{LA}$, a altura relativa a esse lado pode ser obtida com o auxílio da malha quadriculada e vale 3 u.c. (unidades de comprimento). Assim:

$A_{ILA} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \Rightarrow A_{ILA} = 6$ u.a. (unidades de área)

Usamos raciocínio análogo no $\triangle LHA$ e determinamos sua área:

$$A_{LHA} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \Rightarrow A_{LHA} = 2 \text{ u.a.}$$

De posse desses valores, conseguimos determinar a área do quadrilátero *ILHA*:

$A_{ILHA} = A_{ILA} - A_{LHA} = 6 - 2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ILHA} = 4$ u.a.

Portanto, a área do quadrilátero *ILHA* é 4 unidades de área.

PENSE E RESPONDA

A decomposição proposta na atividade **3** é a única possível para resolvê-la? Se não, indique uma outra possibilidade. O enunciado dessa atividade fornece todas as informações necessárias para a resolução?

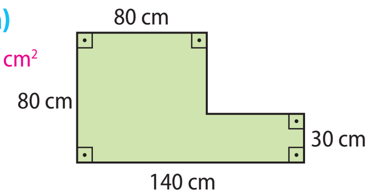
Ver as **Orientações para o professor**.

> ATIVIDADES

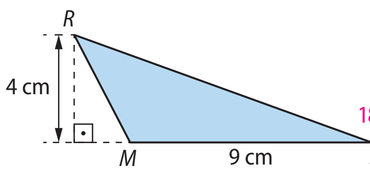
NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Calcule a área das figuras a seguir.

a) 8 200 cm²

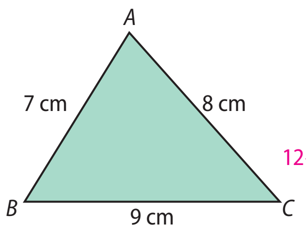


b)



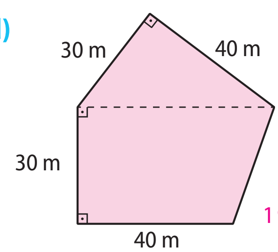
18 cm²

c)



$12\sqrt{5}$ cm²

d)



1 950 m²

2. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede? 11 azulejos

3. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm². Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial? $5\sqrt{2}$ cm

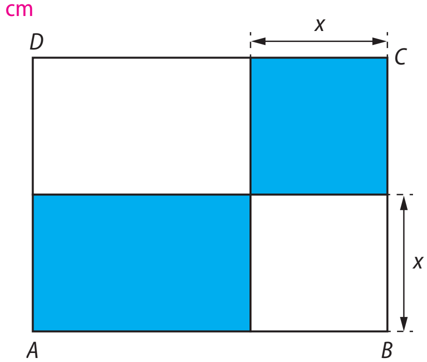
4. O que ocorre com a área de um quadrado se aumentarmos em 20% a medida de seu lado? aumenta 44%

5. (Vunesp-SP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles:

a) determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede; 437,5 azulejos

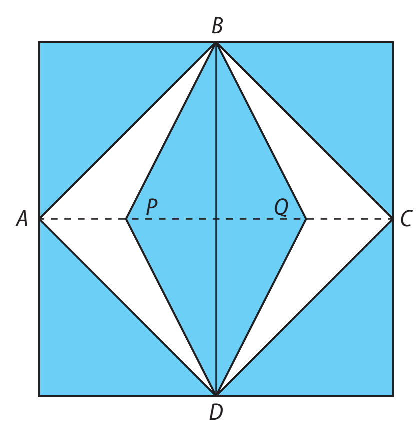
b) encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles. 50 cm

6. Considere o retângulo *ABCD* a seguir. 12 cm



Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

7. (Enem/MEC) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m².
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral? alternativa **b**

a) R$ 22,50

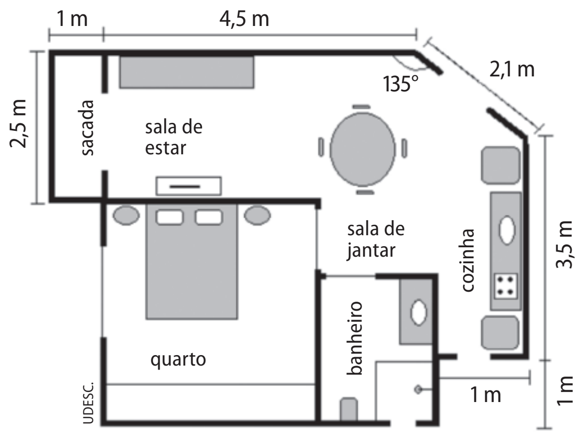
b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00

8. (Udesc-SC) Maria precisa comprar piso para o seu apartamento cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento. alternativa **c**



De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente:

a) 38 m²

b) 37 m²

c) 40 m²

d) 39 m²

e) 42 m²

FÓRUM

Você sabe o que é uma horta comunitária?

São áreas públicas nas quais são plantadas hortaliças, legumes e alguns frutos para consumo dos moradores. Nos espaços urbanos existem muitas áreas públicas ociosas, que não possuem uma destinação definida e acabam se tornando um depósito de entulhos e focos de contaminação, enquanto muitas famílias menos favorecidas não possuem acesso a alimentos saudáveis. Por meio da implantação de hortas comunitárias, o solo urbano passa a ser aproveitado para a produção de alimentos, livres de agrotóxicos, que servirão para alimentar essas famílias, solucionando os problemas de falta de alimentos e de carência nutricional, além de gerar renda com a venda do excedente. Muitas hortas comunitárias são construídas por estudantes em ambientes escolares ou próximas a escolas.

JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK.COM

Pessoas trabalhando em horta comunitária em Salvador (BA). Fotografia de 2019.

Fonte dos dados: OLIVEIRA, G. B. de; CALVO, P. A. N.; CASTRO, P. G. de. Horticultura urbana. **Bisus**: PUC-SP, São Paulo, v. 1, 2018. Disponível em: https://www.pucsp.br/sites/default/files/download/bisus2018-vol1-horticultura-urbana.pdf. Acesso em: 13 jul. 2020.

Após ler o texto, reúna-se a um colega e façam o que se pede a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Inicialmente, respondam às questões: Vocês conhecem alguma horta comunitária? Já participaram da organização e manutenção desse tipo de projeto?
- Abram uma roda de conversa com a turma e com o professor e debatam a respeito dos benefícios de uma horta comunitária para a comunidade local e seus impactos sociais e na saúde.

Respostas pessoais.

Área do círculo e de suas partes

Atualmente, a agricultura tem lançado mão de equipamentos cada vez mais tecnológicos para aumentar e melhorar a produtividade. A irrigação das culturas por meio do sistema chamado de pivô central é um deles. Trata-se de uma máquina que faz a irrigação de água da plantação e cobre uma área de forma circular do campo considerado.

KLEYTON KAMOGAWA/SHUTTERSTOCK.COM

■ Campo de cultivo sendo irrigado pelo sistema de pivô central. Cerro Largo (RS). Fotografia de 2018.

PARA ASSISTIR

ENTENDA como o braço de um pivô central de irrigação gira. São Paulo: Globo Rural, 2014. Vídeo (3 min). Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/3336969/. Acesso em: 28 jul. 2020.

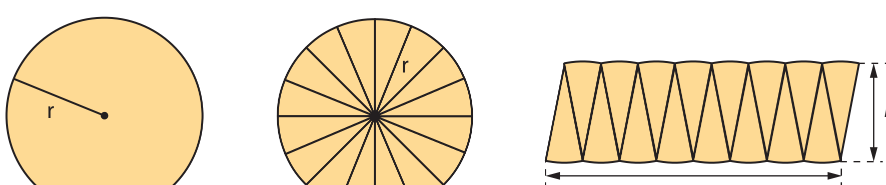
Esse vídeo mostra como funciona o sistema de irrigação de pivô central.

No exemplo apresentado no vídeo do boxe **Para assistir**, o pivô central tem um braço de 580 m e é capaz de irrigar uma área de 100 hectares. Para poder estabelecer essa relação entre as dimensões do pivô central e a área atendida, é preciso saber como calcular a área de um círculo. É o que veremos a seguir.

Área do círculo

Vamos considerar um círculo cujo raio mede r. Dividindo-o em um número par de partes iguais, como feito a seguir, podemos observar que essas partes podem formar uma figura que lembra um paralelogramo. Quanto mais aumentarmos a quantidade dessas partes que dividem o círculo, mais a base da figura formada se aproximará de πr, ou seja, da metade do comprimento da circunferência.

EDITORIA DE ARTE



Dessa forma, quanto mais aumentarmos a quantidade de partes, mais a área da figura se aproxima da área de um paralelogramo de lados de medidas πr e r.

Portanto, ao aumentar indefinidamente a quantidade de partes que dividem o círculo, a área do círculo e a da figura vão coincidir, concluindo-se que a área do círculo é dada por: $S = \pi r \cdot r = \pi r^2$.

Logo, a área de um círculo de raio r é dada por:

$$S = \pi r^2$$

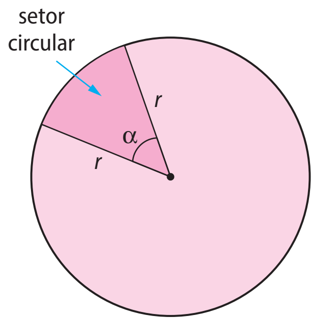
PENSE E RESPONDA

5 306 600 m^2 ou 530,660 ha (1 ha = = 1 hm^2).

- Em 2009, foi instalado, no estado do Tocantins, o maior pivô central do mundo, com um raio de 1 300 m. Qual é a área irrigada por esse pivô? Use $\pi \simeq 3{,}14$.
- Essa área é maior ou menor do que a área de 100 ha irrigada pelo pivô central apresentado no vídeo?

É maior.

Área do setor circular



Denominamos **setor circular** a região do círculo delimitada por um dos seus ângulos centrais.

Vamos calcular a área de um setor circular relativo a um ângulo central α, montando uma regra de três simples que relacione a medida do ângulo central e a área:

$$\begin{array}{rcl} 360° & \text{——} & \pi r^2 \\ \alpha & \text{——} & S_\alpha \end{array}$$

Portanto: $\boxed{S_\alpha = \dfrac{\alpha \cdot \pi r^2}{360°}}$

PENSE E RESPONDA

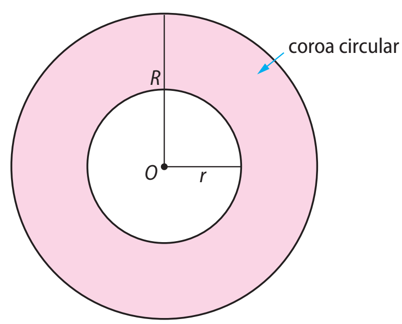
Reúna-se a um colega para realizar as atividades a seguir.

- Pesquisem o que é um segmento circular.
- Debatam e registrem uma maneira para calcular a área de um segmento circular. Em seguida, compartilhem com os demais colegas e com o professor. Vocês pensaram da mesma maneira?

Ver as **Orientações para o professor**.

Área da coroa circular

A **coroa circular** é a região compreendida entre duas circunferências concêntricas (de mesmo centro) que estão em um mesmo plano e têm as medidas de seus raios diferentes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

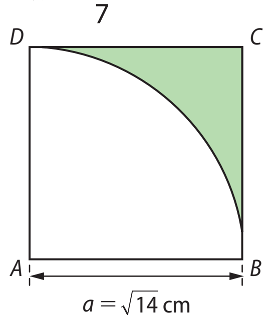
A área S de uma coroa circular é igual à diferença entre a área do círculo maior e a do círculo menor cujos raios medem, respectivamente, R e r. Nesse caso, temos: $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Assim: $\boxed{S = \pi(R^2 - r^2)}$

ATIVIDADE RESOLVIDA

4. Na figura, $ABCD$ é um quadrado e $\overset{\frown}{BD}$ é um arco de circunferência de centro A. Qual é a área da parte colorida de verde?

Considere $\pi \simeq \dfrac{22}{7}$.



Resolução

A área da parte colorida de verde é igual à área do quadrado $ABCD$ menos a quarta parte da área do círculo de raio a.

$S_{\text{quadrado}} = a^2 \Rightarrow S_{\text{quadrado}} = \left(\sqrt{14}\right)^2$

Logo, $S_{\text{quadrado}} = 14$

$$\frac{S_{\text{círculo}}}{4} = \frac{\pi a^2}{4} \Rightarrow \frac{S_{\text{círculo}}}{4} = \frac{\frac{22}{7} \cdot 14}{4} = 11$$

Assim: $S = S_{\text{quadrado}} - \dfrac{S_{\text{círculo}}}{4} = 14 - 11 = 3$

Portanto, a área da parte colorida é 3 cm².

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

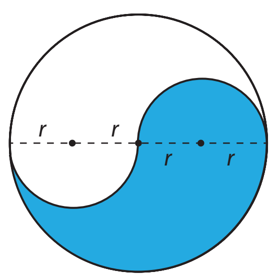
9. Qual é a medida do diâmetro de um círculo de área 100π dm²? 20 dm

10. (ESPM-SP) Da área de um quadrado, retiramos a área correspondente a um círculo de diâmetro igual à metade da medida do lado do quadrado. A área restante, em percentagem da área original do quadrado, vale aproximadamente: alternativa **d**

a) 50%
b) 60%
c) 75%
d) 80%
e) 90%

11. O jardim de uma praça no centro de uma cidade tem forma semicircular com diâmetro medindo 15 m. Qual é a área desse jardim? $28{,}125\pi$ m²

12. Sabendo que $r = 10$ cm, calcule a área da região colorida de azul na figura. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.) $S = 628$ cm²

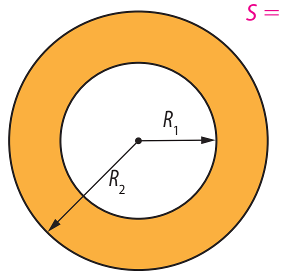


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

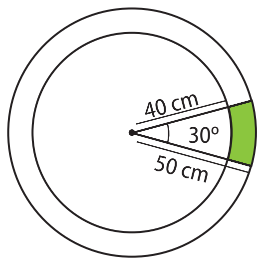
13. (Insper-SP) Uma pizzaria vende pizzas circulares com 32 cm de diâmetro, divididas em 8 pedaços iguais. O dono do estabelecimento pensou em criar uma pizza de tamanho maior, a ser dividida em 12 pedaços iguais, de modo que a área de cada um deles seja igual à área de um pedaço da pizza menor. Para isso, o diâmetro da pizza de 12 pedaços deve ser aproximadamente igual a: alternativa **b**

a) 36 cm
b) 40 cm
c) 44 cm
d) 48 cm
e) 52 cm

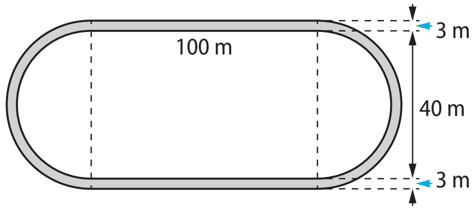
14. Determine a área da região colorida de laranja da figura. (Dados: $R_1 = 3$ m, $R_2 = 5$ m.) $S = 16\pi$ m²



15. Duas circunferências concêntricas têm raios iguais a 50 cm e 40 cm, conforme indica a figura. Calcule a área destacada em verde. $S = 75\pi$ cm²

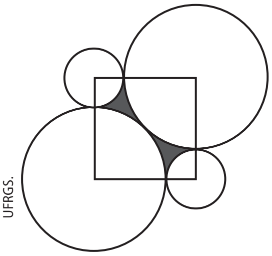


16. Uma praça é formada por um retângulo de comprimento 100 m e largura 40 m e dois semicírculos com diâmetro coincidindo com o lado menor do retângulo. R$ 50.253,00



Em torno da praça será construída uma calçada de 3 m de largura, cujo preço por metro quadrado é R$ 50,00. Calcule o custo total desse projeto. (Adote $\pi \simeq 3{,}14$.)

17. (UFRGS-RS) Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura abaixo.



UFRGS.

A área da região sombreada é alternativa **e**

a) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\pi.$

b) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi.$

c) $1 + \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)\pi.$

d) $1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\pi.$

e) $1 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi.$

Uma aproximação de π

Os cálculos da área do círculo e de suas partes envolvem o número irracional π. O texto a seguir aborda a aproximação usada pelos egípcios, além de alguns fatos a respeito da Geometria na história da Matemática.

Análise: área que estuda mais profundamente a natureza de conjuntos de números reais e de funções, tal como suas características e propriedades.

Um pouco sobre a abrangência da Geometria

De uma forma simplista muitos consideram a Matemática englobando essencialmente a Geometria, a Álgebra e a **Análise**.

A Geometria é provavelmente a mais antiga das três áreas e surgiu, sem dúvida, da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos etc.

No início, pelo que se sabe, a Geometria era simplesmente uma coleção de conhecimentos práticos, como por exemplo, a fórmula aproximada da área A do círculo de diâmetro d, $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, conhecida dos egípcios desde o ano 1500 antes de Cristo. Comparando-se com a expressão correta, $\frac{\pi d^2}{4}$, verifica-se que, essencialmente, a fórmula aproximada corresponde a adotar para π um valor da ordem de 3,16.

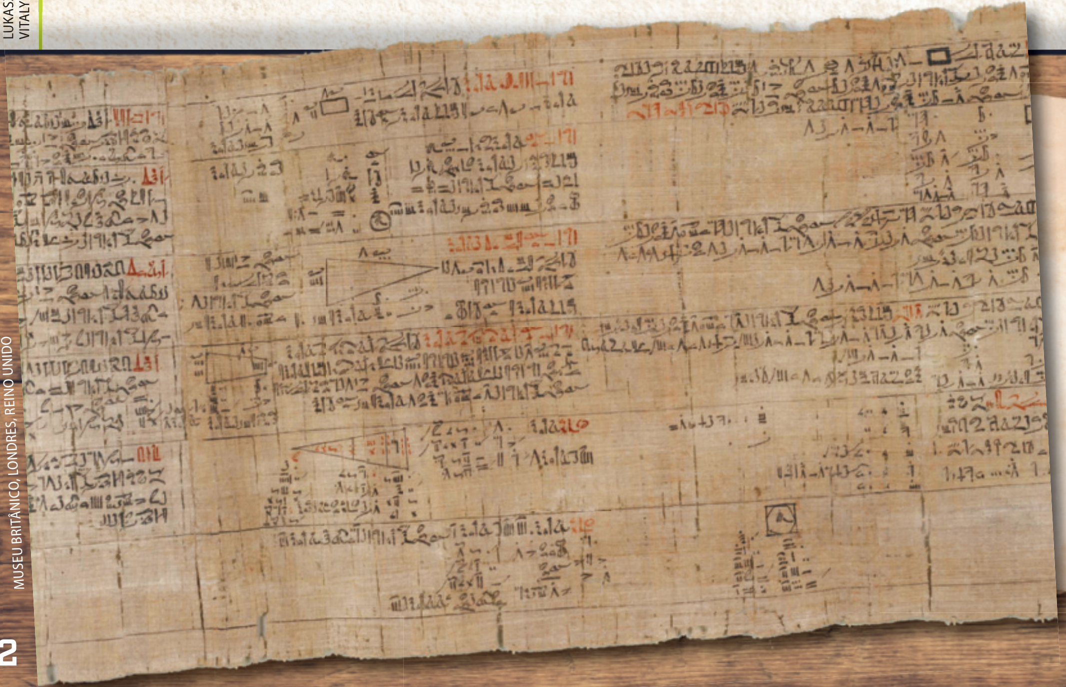
Os gregos realmente dispuseram-se a organizar a Geometria como uma ciência e trataram de ordenar os fatos geométricos procurando demonstrar certas proposições a partir de outras mais simples; culminaram nos anos 300 antes de Cristo com a publicação dos "Elementos" de Euclides.

Trata-se da primeira exposição dedutiva da Geometria Elementar de que se tem notícia, partindo de certos postulados ou axiomas que eram proposições simples representando uma certa evidência natural. Sobre os "Elementos", disse Einstein, numa certa ocasião: "Quem não soube entusiasmar-se por este livro em sua juventude, não nasceu para pesquisador teórico." Apesar das demonstrações de Euclides estarem cheias de apelos à intuição, utilizando postulados admitidos tacitamente, não se pode negar que seu trabalho constituiu-se, durante muitos séculos, em um modelo de apresentação matemática, com forte influência na cultura do ocidente.

[...]

OLIVA, W. M. A independência do axioma das paralelas e as geometrias não euclidianas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 2. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/2/8.htm. Acesso em: 14 jul. 2020.

LUKASZ SZWAJ/SHUTTERSTOCK.COM; VITALY KOROVIN/SHUTTERSTOCK.COM



MUSEU BRITÂNICO, LONDRES, REINO UNIDO

- O papiro de Ahmes foi escrito por volta de 1650 a.C. e contém diversos problemas matemáticos, entre eles, um que fala a respeito da área do círculo.

ANTON WATMAN/SHUTTERSTOCK.COM

Polígonos regulares


SCOTT RICHARDSON/SHUTTERSTOCK.COM

■ Chave de boca sendo utilizada para soltar uma porca sextavada.

No Ensino Fundamental você já estudou algumas características dos polígonos regulares. Vamos ver algumas outras, inclusive como calcular suas áreas. Mas, antes, veja alguns exemplos de situações envolvendo polígonos regulares.

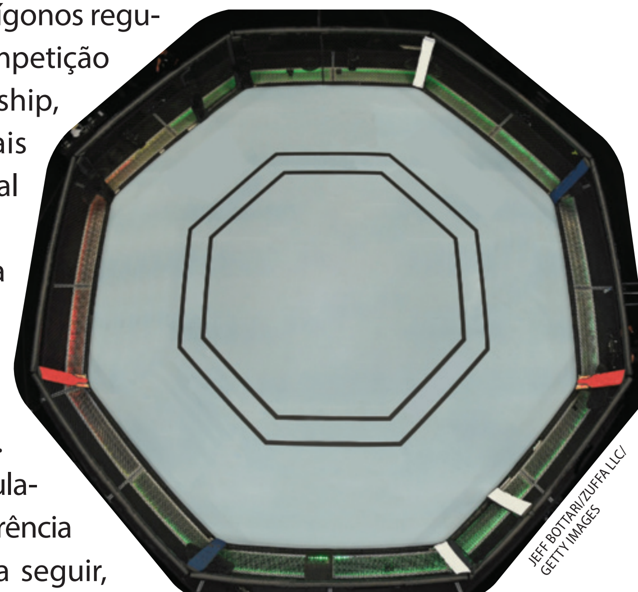
Você conhece uma chave de boca? Sabe para que ela serve?

A chave de boca é uma ferramenta muito utilizada por mecânicos de automóvel quando precisam soltar ou apertar parafusos dos carros. Esses parafusos, em sua maioria, possuem o formato sextavado, ou seja, vistos de cima, lembram um hexágono regular.

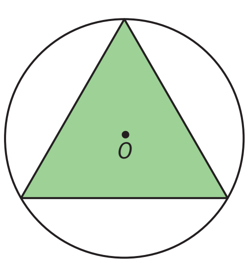
No esporte também podemos identificar polígonos regulares. Basta dar uma olhada nos tatames de competição do UFC (sigla de Ultimate Fighting Championship, uma organização americana de artes marciais mistas, também conhecida como Mixed Martial Arts – MMA), os famosos octógonos.

Um polígono é regular quando apresenta todos os seus lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes. Um fato bastante significativo é que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

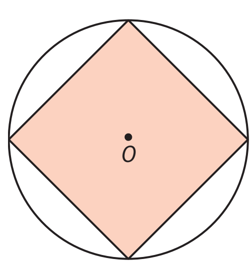
A seguir, vamos estudar alguns polígonos regulares e relacionar seus elementos com os da circunferência na qual ele está inscrito. Observe, nas figuras a seguir, exemplos de polígonos regulares inscritos em circunferências.


JEFF BOTTARI/ZUFFA LLC/ GETTY IMAGES

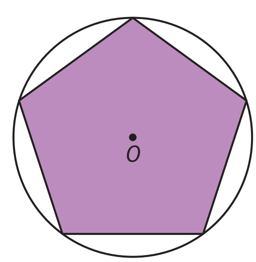
■ Área de competição de UFC.



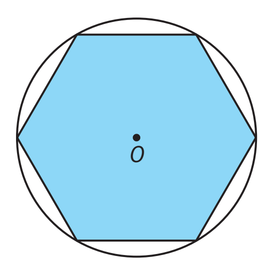
■ Triângulo equilátero inscrito.



■ Quadrado inscrito.



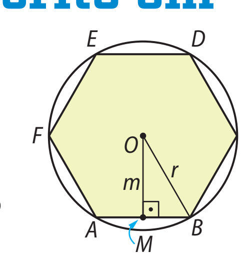
■ Pentágono inscrito.



■ Hexágono inscrito.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

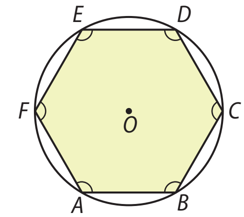
Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência



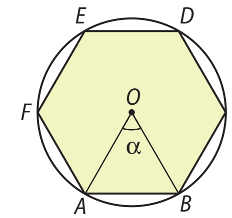
O centro O e o raio r da circunferência na qual o polígono regular está inscrito são denominados, respectivamente, **centro** e **raio do polígono**.

A distância m do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular denomina-se **apótema** do polígono.

Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados de **ângulos internos** do polígono. A medida de cada ângulo interno de um polígono de n lados é dada por $\beta = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.



Um ângulo α cujo vértice está no centro da circunferência circunscrita ao polígono regular e cujos lados passam por dois vértices consecutivos desse polígono é chamado de **ângulo central** do polígono.



A medida de um ângulo central de um polígono regular é dada por $\alpha = \frac{360°}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.

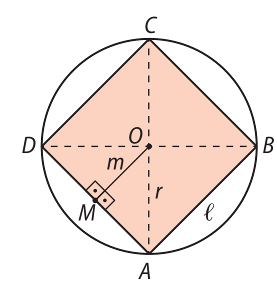
Relações métricas nos polígonos regulares

Quando consideramos a medida ℓ do lado de um polígono regular, a medida m do apótema do mesmo polígono e a medida r do raio da circunferência na qual esse polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

Vamos estudar como obter essas relações no quadrado, no hexágono regular e no triângulo equilátero inscritos em uma circunferência.

Quadrado

Considere o quadrado $ABCD$, inscrito em uma circunferência de raio r, representado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AOD, temos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

Assim:

$$\boxed{\ell = r\sqrt{2}}$$

O segmento de reta $\overline{OM}$ é congruente aos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$. Observe, na figura anterior, que:

$$m + m = \ell \Rightarrow 2m = \ell \Rightarrow m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$\boxed{m = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

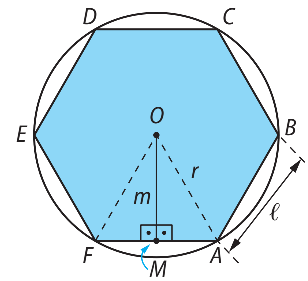
PENSE E RESPONDA

Analise a representação do quadrado $ABCD$, inscrito na circunferência de raio r, e justifique por que os segmentos $\overline{OM}$, $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$ são congruentes. Essa é uma característica que só vale nos quadrados? Justifique.

Ver as **Orientações para o professor**.

Hexágono regular

Considere o hexágono regular *ABCDEF*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $\text{med}\left(F\hat{O}A\right) = \dfrac{360°}{6} = 60°$
- $\overline{OA} \cong \overline{OF}$ e $O\hat{F}A \cong O\hat{A}F$ (pois o triângulo *OAF* é isósceles)

Assim, $\text{med}\left(O\hat{F}A\right) = \text{med}\left(O\hat{A}F\right) = 60°$, pois $\dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$ e podemos concluir que o triângulo *OAF* é equilátero.

Como *AOF* é um triângulo equilátero, então:

$$\ell = r$$

Como $\dfrac{FA}{2} = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{r}{2}$, então:

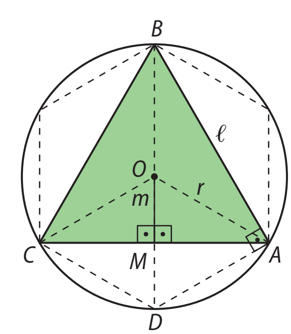
$$r^2 = m^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, inscrito em uma circunferência de raio *r*, representado na figura. Observe que $\overline{AD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência, então, pelo que vimos, $AD = r$. Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras:



$$(BD)^2 = \ell^2 + (DA)^2 \Rightarrow (2r)^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{3}$$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OMA*, temos:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r}{2}$$

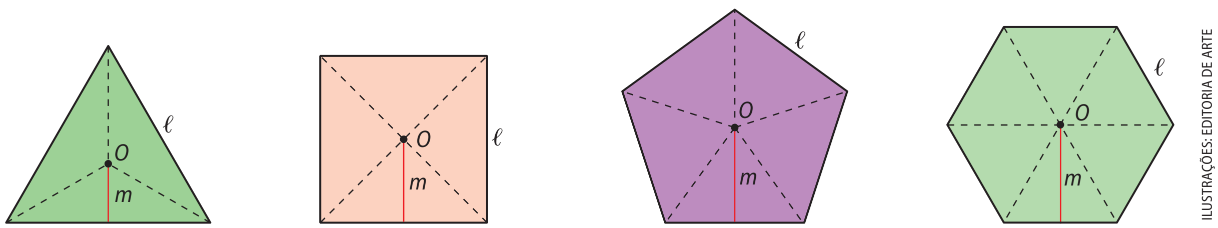
Portanto:

$$m = \frac{r}{2}$$

Área de um polígono regular

Vamos considerar os polígonos regulares a seguir, em que:

- ℓ é a medida do lado;
- m é a medida do apótema;
- O é o centro do polígono;
- $n \cdot \ell$ é a medida do perímetro ($2p$, em que p é a medida do semiperímetro do polígono).



Triângulo equilátero. Quadrado. Pentágono regular. Hexágono regular.

Unindo o centro O de um polígono regular de n lados a cada um dos seus vértices, esse polígono fica decomposto em n triângulos isósceles congruentes.

Como a medida da altura de cada um desses triângulos é igual à medida do apótema do polígono, a área de cada um desses polígonos é igual a n vezes a área do triângulo formado: $A = \dfrac{(n \cdot \ell \cdot m)}{2}$.

Como $n\ell$ é a medida do perímetro do polígono, a área também pode ser expressa por:

$$A = \frac{2pm}{2} \Rightarrow A = p \cdot m$$

A área de um polígono regular de n lados é igual ao produto da medida p, do semiperímetro, pela medida m, do apótema.

Área e perímetro de um polígono regular em função da medida dos lados

Considere a situação a seguir.

Para cercar um terreno quadrado de 4 metros de lado, Antônio usou 16 metros de arame. Seu cliente, satisfeito com o trabalho realizado, pediu que ele colocasse cerca em outro terreno, também quadrado, mas com o quádruplo da área do primeiro. Antônio ficou pensando se usaria, então, o quádruplo da metragem de arame.

PENSE E RESPONDA

Junte-se a um colega e avaliem a suposição de Antônio. Ele estava correto? Justifiquem a resposta.

Não. Resposta esperada: Se a área quadruplica, o perímetro dobra.

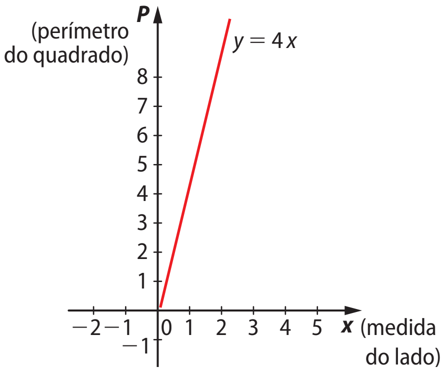
Para compreender melhor o problema, vamos relacionar o perímetro P e a área S de um quadrado, em função da medida x do seu lado:

x (em metro)	**P (em metro)**	**S (em metro quadrado)**
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64
n	$4n$	n^2

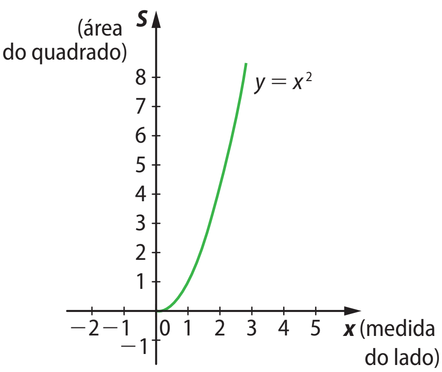
Analisando esses dados, podemos perceber que, ao dobrarmos a medida do lado do quadrado, seu perímetro também dobra, porém, sua área quadruplica. Ao triplicarmos a medida do lado, o perímetro triplica, mas área passa a ser multiplicada por 9, ou seja, 3^2. Assim, podemos perceber que a variação do perímetro do quadrado em função do lado é linear, enquanto a variação da área é quadrática.

Voltando para o problema de Antônio, o novo terreno tem área de 64 m^2 ($4 \cdot 16$ m^2) e, portanto, ele precisará de 32 metros de arame para cercá-lo.

Agora, vamos observar essas variações graficamente:



Variação do perímetro do quadrado em função da medida x do lado.



Variação da área do quadrado em função da medida x do lado.

Para construir esses gráficos, consideramos apenas valores de $x > 0$, pois x representa a medida do lado do quadrado.

O perímetro P de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado e é modelado pela função afim dada por $P(x) = 4x$. Já a área S do quadrado, em função da medida x do lado, corresponde à função quadrática definida por $S(x) = x^2$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Determine a área S de um quadrado inscrito em uma circunferência de 5 dm de raio.

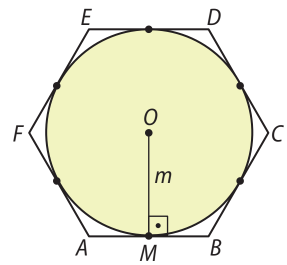
Resolução

Nesse caso, o lado do quadrado é dado por: $\ell = r\sqrt{2}$, ou seja, $\ell = 5\sqrt{2}$ dm.

Logo, $S = \ell^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$

Portanto, $S = 50 \text{ dm}^2$.

6. Determine a medida R do raio da circunferência inscrita no hexágono regular cujo lado mede 4 cm.



Resolução

A medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular é igual à medida do apótema desse polígono. Assim, $R = m$.

Para o hexágono regular, temos: $\ell = r$ e $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao hexágono.

De acordo com o enunciado, temos $\ell = r = 4$ cm. Assim:

$$m = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Logo a medida R do raio da circunferência inscrita é $2\sqrt{3}$ cm.

7. Sabendo que uma circunferência tem 10 cm de raio, determine a medida do lado e a medida do apótema do hexágono regular nela inscrito.

Resolução

Como temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r, sabemos que $\ell = r$, e portanto, $\ell = 10$ cm.

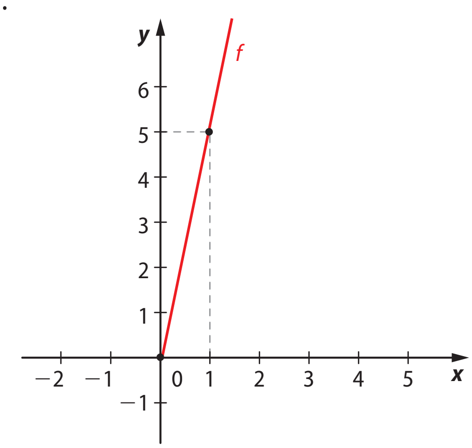
Nessas condições a medida m do apótema do hexágono regular é dada por $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $m = \frac{10\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $m = 5\sqrt{3}$ cm.

8. Observe o gráfico representado e faça o que se pede a seguir.

a) Escreva a lei de formação da função representada.

b) Considerando que essa função representa a variação do perímetro P de um polígono regular em função da medida do seu lado, identifique esse polígono, justificando.



Resolução

a) Conhecemos dois pares ordenados do gráfico: (0, 0) e (1, 5). Como se trata de uma reta, tem-se que $f(x) = ax + b$. Como a função passa por (0, 0), $b = 0$. Assim, $f(x) = ax$. Para $x = 1$, $y = 5$. Logo, $a = 5$.
Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 5x$, com $x > 0$.

b) A lei da função é $f(x) = 5x$. Isso quer dizer que, para uma medida x do lado desse polígono, o perímetro é $5x$. Como se trata de um polígono regular, todos os lados têm mesma medida, então concluímos que esse polígono é um pentágono regular.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

18. Dado um triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm, calcule:

a) o raio da circunferência circunscrita; $2\sqrt{3}$ cm

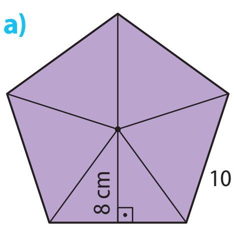
b) a medida do apótema. $\sqrt{3}$ cm

19. Na circunferência de raio 2 cm está inscrito um hexágono regular. Qual é a área desse polígono? 10,38 cm²

(Adote $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

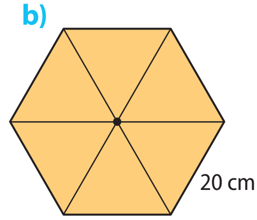
20. Calcule as áreas dos polígonos regulares representados a seguir.

a)



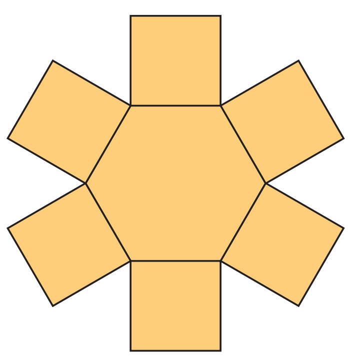
200 cm²

b)



$600\sqrt{3}$ cm²

21. A figura a seguir foi recortada de uma cartolina e é formada por um hexágono regular e seis quadrados. Cada lado do hexágono mede 10 cm.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, quantos centímetros quadrados de cartolina foram usados para fazer a figura? 859,5 cm²

22. Calcule a área de um triângulo equilátero, sabendo que seu apótema mede 3 cm. $27\sqrt{3}$ cm²

23. São dados dois quadrados: um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. Determine a razão entre:

a) o perímetro do quadrado inscrito e o do quadrado circunscrito; $\frac{\sqrt{2}}{2}$

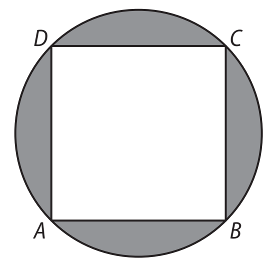
b) a área do quadrado inscrito e a do quadrado circunscrito. $\frac{1}{2}$

24. O apótema de um hexágono regular mede $6\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do seu lado; 12 cm

b) sua área. $216\sqrt{3}$ cm²

25. Na figura a seguir, o quadrado *ABCD* está inscrito em uma circunferência. Sabendo que o lado desse quadrado mede *a*, expresse, em função de *a*, a área da região sombreada.



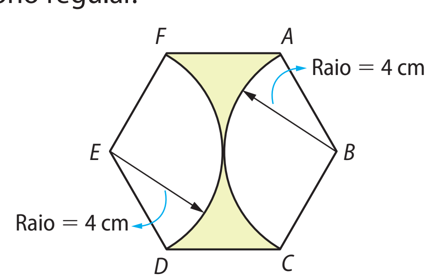
$a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ u²

26. Observe a relação entre a medida dos lados e o perímetro de um polígono regular. Identifique qual é esse polígono regular e justifique sua resposta. Decágono; a medida do lado é *x* e o perímetro, 10*x*.

Medida do lado	2	3	4	5
Medida do perímetro	20	30	40	50

27. Considerando os estudos sobre a variação da área e do perímetro de um polígono regular em função da medida do lado, elabore um problema e resolva-o. Depois troque-o com um de seus colegas e resolva o problema proposto por ele. Em seguida, discutam as soluções, verificando se chegaram às mesmas conclusões e quais procedimentos utilizaram. Resposta pessoal.

28. (Ence-RJ) A figura abaixo representa um hexágono regular.



Calcule:

a) a medida do seu apótema; $m = 2\sqrt{3}$ cm

b) a área da região colorida de verde. $\frac{72\sqrt{3}-32\pi}{3}$ cm²

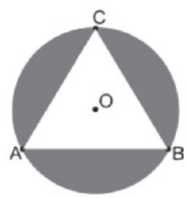
29. Calcule a área de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm. $54\sqrt{3}$ cm²

30. (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a “Estrela de David” (Figura 1).

▪ Figura 1

UEL.

▪ Figura 2



▪ Figura 3

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência.

Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item. 88 cm²

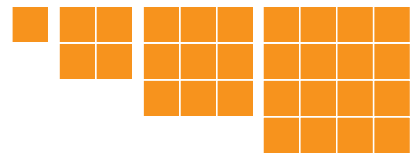
31. Em algumas cidades, serão construídas praças na forma de octógono regular. Para isso, foi elaborado um projeto, em que consta a medida *m* do lado do octógono, uma vez que o comprimento do lado poderia variar conforme o local para a construção da praça.

a) Faça um esboço do polígono regular que representa a praça. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Qual a função que relaciona o perímetro *P* e a medida do lado *m* do octógono regular? $P(m) = 8m$

c) Construa o gráfico que representa essa função. Ver as **Orientações para o professor**.

32. Observe a sequência de figuras abaixo, formadas por quadrados alaranjados congruentes:

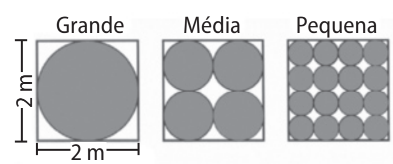


EDITORIA DE ARTE

Considere a medida do lado de um quadrado ■ como sendo 1 unidade de comprimento (u.c.), e a área desse quadrado como 1 unidade de área (u.a.), e copie o quadro a seguir no seu caderno, completando-o.

Medida do lado (em u.c.)	1	2	3	4	5
Medida do perímetro (em u.c.)	4	8	12	16	20
Medida da área (em u.a.)	1	4	9	16	25

33. (Enem/MEC) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



ENEM.

Área do círculo: πr^2

As sobras de material de produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II;

b) a entidade I recebe metade do material da entidade III;

c) a entidade II recebe o dobro de material da entidade III;

d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III;

e) as três entidades recebem iguais quantidades de material. alternativa **e**

Razão entre áreas de polígonos semelhantes

Podemos definir o que são polígonos semelhantes:

> Dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

No Ensino Fundamental, você provavelmente estudou a semelhança de triângulos. A partir dessa semelhança, algumas consequências podem ser demonstradas. Veja, a seguir, uma delas.

Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança k, então:

I. a razão entre os perímetros também é k;

II. a razão entre duas alturas homólogas também é k;

III. a razão entre duas bissetrizes homólogas também é k;

IV. a razão entre as áreas é igual a k^2.

Podemos definir o que são polígonos semelhantes:

É possível demonstrar que as consequências **I** a **IV** apresentadas são válidas para figuras que podem ser decompostas em um número finito de polígonos.

Ladrilhamento do plano

Na instalação de pisos e azulejos em cozinhas e banheiros, por exemplo, o termo usado na construção civil é "assentar" (o piso ou o azulejo). Nesse processo, para obter um bom acabamento, os profissionais precisam recobrir a maior área possível utilizando apenas peças inteiras. Porém, normalmente, é necessário fazer o que chamam de "recorte", assentando pedaços dessas peças para recobrir totalmente a superfície.

Em Matemática, a ideia de ladrilhamento está associada ao recobrimento do plano utilizando determinadas composições de polígonos.

WITTYBEAR/SHUTTERSTOCK.COM

Considere a situação a seguir.

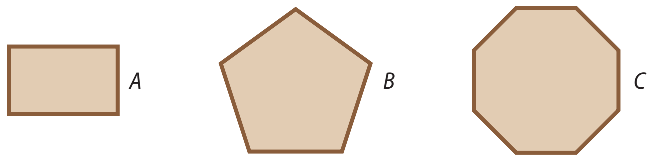
Carlos foi contratado para assentar pisos em determinada superfície retangular. Para obter um bom acabamento, ele pretende recobrir a maior área possível dessa superfície utilizando apenas pisos inteiros e de um único modelo, dentre os modelos *A*, *B* ou *C* indicados a seguir.

PENSE E RESPONDA

Dentre os três modelos apresentados, qual você recomendaria que Carlos utilizasse a fim de evitar, o máximo possível, os recortes?

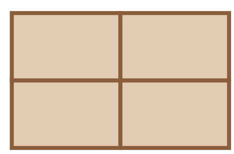
Ver as **Orientações para o professor**.

Modelos de pisos



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Se Carlos utilizar o piso do modelo *A*, poderá compor um ladrilhamento seguindo o padrão indicado a seguir. Note que, para determinar esse padrão, não é necessário realizar nenhum recorte do piso do modelo *A*.

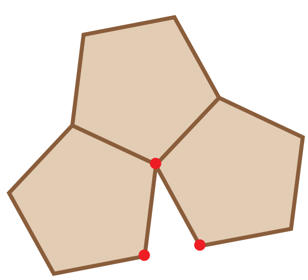


Composição com pisos do modelo *A*

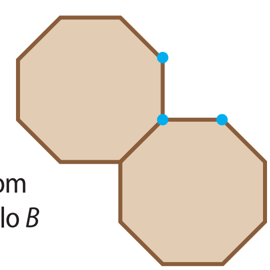
SAIBA QUE...

A ideia de ladrilhamento é utilizada em diferentes manifestações artísticas. Por exemplo, o artista gráfico holandês Escher, em suas obras de tesselação, partia de figuras geométricas para criar imagens, como de peixes ou de aves, que se encaixavam perfeitamente. A tesselação é um tipo de pavimentação, com peças de mosaico, de uma superfície plana.

Porém, se Carlos utilizar o piso do modelo *B* ou do modelo *C*, ele teria as seguintes situações:



Composição com pisos do modelo *B*



Composição com pisos do modelo *C*

Observe que na composição com pisos do modelo *B* não é possível encaixar um novo piso desse mesmo modelo na região triangular determinada pelos pontos destacados em vermelho. Também, na composição com pisos do modelo *C*, não é possível encaixar um novo piso desse modelo para recobrir a região triangular determinada pelos pontos destacados em azul.

Isso indica que, ao utilizar o piso do modelo *B*, no mínimo a cada três pisos assentados, Carlos teria de fazer um recorte do piso original. Semelhantemente, ao utilizar o piso do modelo *C*, no mínimo a cada dois pisos assentados, seria necessário realizar ao menos um recorte do piso original.

Assim, ao utilizar o modelo *B* ou o modelo *C*, seria necessário fazer mais recortes nos pisos para conseguir recobrir toda a superfície retangular. Portanto, o modelo *A* é mais adequado à necessidade de Carlos.

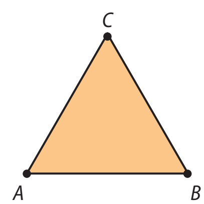
Essa situação nos dá ideia do que, em Matemática, denominamos **ladrilhamento do plano**, que é o recobrimento do plano com base em determinado padrão geométrico. Esse padrão pode ser composto de um único polígono ou da combinação de diferentes polígonos.

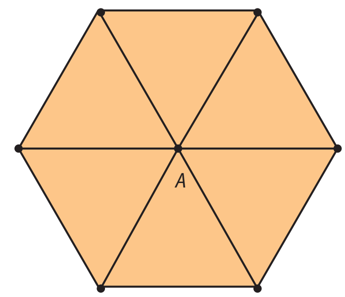
Então, surge uma questão: será que é possível ladrilhar um plano utilizando qualquer padrão geométrico? A resposta para essa pergunta é não!

Os polígonos utilizados para fazer o ladrilhamento devem obedecer às seguintes condições:

- a intersecção entre os polígonos é sempre um vértice ou um lado ou é vazia;
- a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma, obedecendo a um padrão.

Considere um triângulo equilátero *ABC*.



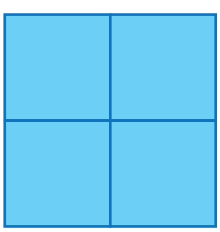


É possível compor um ladrilhamento com seis triângulos equiláteros congruentes ao triângulo *ABC*, todos concorrendo no vértice *A*.

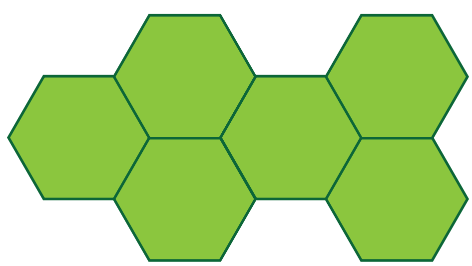
Denotamos esse ladrilhamento por 3.3.3.3.3.3 ou {6, 3}. A notação {6, 3} indica que são seis vértices coincidentes e que o polígono regular considerado possui três lados.

Veja outros exemplos:

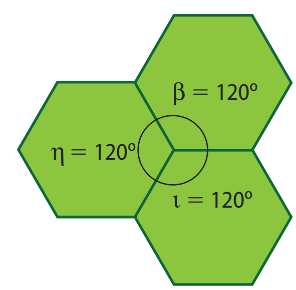
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



- Notação: {4, 4}, ou seja, quatro vértices coincidem, e o polígono regular possui quatro lados.



- Notação: {3, 6}, ou seja, três vértices coincidem, e o polígono regular possui seis lados.

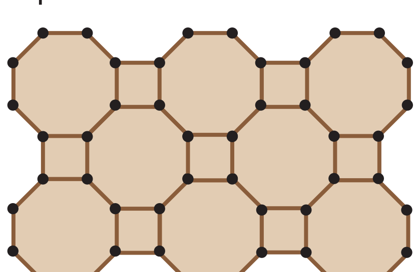


- A medida do ângulo interno de um hexágono regular é 120°.

Para ser possível obter um ladrilhamento, é necessário que a soma da medida dos ângulos internos dos polígonos, relativos aos vértices coincidentes, seja 360°.

O ladrilhamento do plano também pode ser feito pela composição de dois ou mais polígonos regulares convexos com lados congruentes, de modo que o padrão de cada vértice obedeça sempre à mesma ordem.

A figura a seguir representa uma maneira de obter o ladrilhamento do plano utilizando octógonos regulares e quadrados.

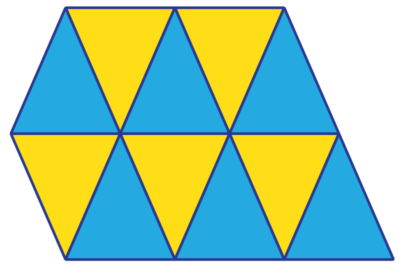


PENSE E RESPONDA

Quais são as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares que compõem essa figura?

135°, (do octógono regular); 90° (do quadrado)

Os ladrilhamentos também podem ser feitos com alguns polígonos congruentes, ainda que sejam não regulares. Na figura a seguir, por exemplo, o padrão geométrico utilizado é composto de triângulos que não são regulares.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Considere dois pentágonos regulares cuja medida do lado do primeiro pentágono é o dobro da medida do lado do segundo. Sabendo que a área do primeiro pentágono é 200 cm², determine a área do segundo pentágono regular.

Resolução

Polígonos regulares de mesmo número de lados são sempre semelhantes entre si.

Sendo ℓ_1 a medida do lado do primeiro pentágono e ℓ_2 a medida do lado do segundo, temos:

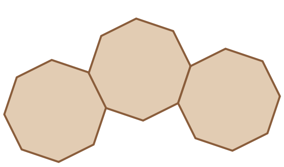
$$\ell_1 = 2\ell_2 \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 = k \text{ (razão de semelhança entre os lados)}$$

Indicando por A_1 a área do primeiro pentágono e por A_2 a área do segundo, a razão entre as duas áreas deve ser igual ao quadrado de k. Logo:

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 2^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 4 \Rightarrow A_2 = 50$$

Portanto, a área do segundo pentágono regular é igual a 50 cm².

10. Para fazer o ladrilhamento de uma superfície, Caio comprou pisos em formato de octógonos regulares. Ao iniciar o trabalho de revestimento, notou que não seria possível recobrir todo o piso. Observe:



a) Explique o motivo pelo qual Caio não conseguirá ladrilhar a superfície usando somente pisos nesse formato.

b) Caio resolveu voltar à loja para comprar algum outro piso que se encaixe perfeitamente ao ladrilhamento já iniciado. Ele deve procurar por pisos no formato de qual polígono regular?

Resolução

a) A medida do ângulo interno no octógono regular é dada por $\beta = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$ e 135 não é divisor de 360.

Com dois octógonos regulares, a soma dos ângulos justapostos em um mesmo vértice é 270°; com três octógonos regulares, essa soma passa a 405°. Assim, usando somente octógonos regulares não é possível ladrilhar o piso.

b) Sabemos que a medida de cada ângulo interno do octógono regular é igual a 135°. Assim, temos:

$2 \cdot 135° + x = 360°$, em que x é a medida do ângulo do polígono regular desconhecido.

Assim, temos: $x = 360° - 270°$

Logo, $x = 90°$.

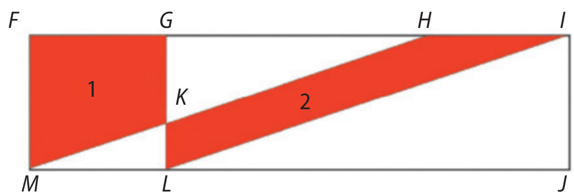
O polígono regular que possui ângulos iguais a 90° é o quadrado.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

34. Justifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: Ver as **Orientações para o professor**.
"Se triplicarmos a medida do lado de um quadrado, então sua área também triplicará.".

35. (UFRN) Miguel pintará um painel retangular com motivos geométricos. As duas regiões destacadas, a região 1 (*FGKM*), contida no quadrado *FGLM*, e a região 2 (*HILK*), contida no paralelogramo *HILM*, conforme figura abaixo, serão pintadas de vermelho. Sabe-se que a tinta utilizada para pintar uma região qualquer depende proporcionalmente de sua área.



UFRN.

Se Miguel gastasse, na pintura da região 1, $\frac{3}{7}$ da tinta vermelha de que dispõe, poderíamos afirmar que alternativa **d**

a) o restante de tinta vermelha daria, exatamente, para a pintura da região 2.

b) o restante de tinta vermelha seria insuficiente para a pintura da região 2.

c) a região 2 seria pintada e ainda sobrariam $\frac{3}{7}$ de tinta vermelha.

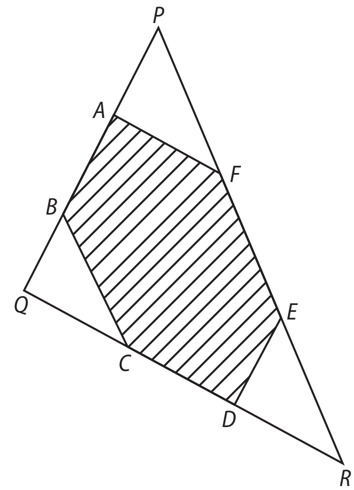
d) a região 2 seria pintada e ainda sobraria $\frac{1}{7}$ de tinta vermelha.

36. (Mack-SP) Um engenheiro fez a planta de um apartamento, de modo que cada centímetro do desenho corresponde a 50 centímetros reais. Então a área real de um terraço que tem 20 cm^2 na planta é, em metros quadrados, igual a: alternativa **c**

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 10

37. Ao utilizarmos a combinação de dois hexágonos regulares e dois triângulos equiláteros, cujos lados tenham a mesma medida, é possível ladrilhar o plano? Justifique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

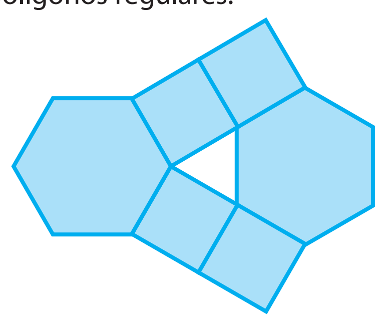
38. (Unip-SP) *PQR* é um triângulo com 27 cm^2 de área. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são pontos médios dos segmentos *PB*, *AQ*, *QD*, *CR*, *RF* e *EP*, respectivamente. alternativa **d**



A área da região hachurada, em centímetros quadrados, é:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21

39. Observe o ladrilhamento a seguir, composto de polígonos regulares.


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

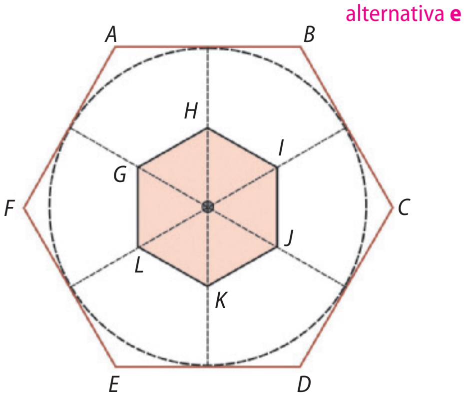
a) Identifique os polígonos que estão destacados em azul. dois hexágonos regulares e quatro quadrados

b) Na parte central desse ladrilhamento, há um polígono. Diga qual é esse polígono, justificando sua resposta. triângulo equilátero
Ver as **Orientações para o professor**.

40. O pátio de uma escola tem formato retangular, com 3,5 m de largura por 5,5 m de comprimento. A direção decidiu recobrir essa área com ladrilhos quadrados com 12 cm de lado. Quantos ladrilhos serão necessários para revestir todo o pátio? 1 337 ladrilhos

41. Usando um *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, investigue se é possível fazer um ladrilhamento utilizando apenas pentágonos regulares. Registre o passo a passo do resultado e justifique suas conclusões.
Ver as **Orientações para o professor**.

42. (FGV-SP) A figura indica um hexágono regular *ABCDEF*, de área S_1, e um hexágono regular *GHIJKL*, de vértices nos pontos médios dos apótemas do hexágono *ABCDEF* e área S_2.
alternativa **e**



FGV.

Nas condições descritas, $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

a) $\frac{3}{4}$

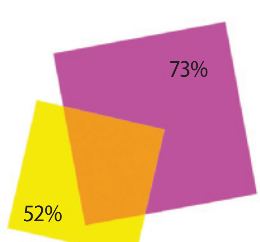
b) $\frac{8}{25}$

c) $\frac{7}{25}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{3}{16}$

43. (OBMEP) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior? alternativa **a**



OBMEP.

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{7}$

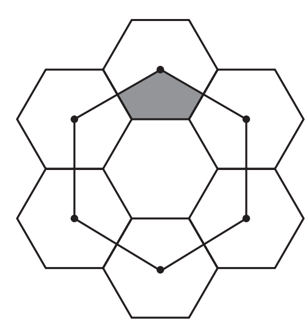
e) $\frac{4}{5}$

44. Uma construtora decidiu inovar e encomendou ladrilhos no formato de dodecágonos regulares (polígonos de 12 lados congruentes). Ao se depararem com esses ladrilhos de formato inusitado, alguns pedreiros disseram que não seria possível usar apenas esse ladrilho, pois sobraria espaço entre eles. Ao ouvir os colegas, o mestre de obras encontrou a solução para esse problema. Ele afirmou que somente com os ladrilhos no formato de dodecágonos regulares, de fato, não era possível recobrir todo o piso, mas se esses ladrilhos fossem combinados com outro tipo de ladrilho poligonal, o problema estaria resolvido.

a) Explique por que não é possível usar somente os ladrilhos em formato de dodecágono regular para cobrir todo o piso, sem deixar espaço. Se possível, utilize um *software* de geometria dinâmica para auxiliar na sua explicação. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Considerando a solução dada pelo mestre de obras, que tipo de ladrilho seria possível combinar com o dodecágono regular para satisfazer às condições de ladrilhamento? triângulo equilátero

45. (Fuvest-SP) A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a: alternativa **e**


EDITORIA DE ARTE

a) $3\sqrt{3}$

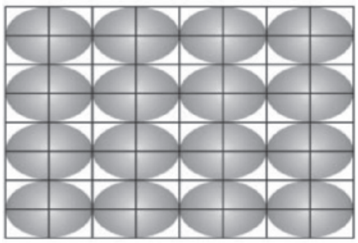
b) $2\sqrt{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

46. (Enem/MEC) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:



IMAGENS: ENEM.

■ Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

■ Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

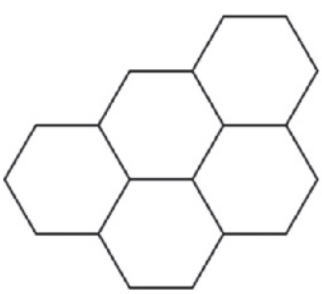
A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

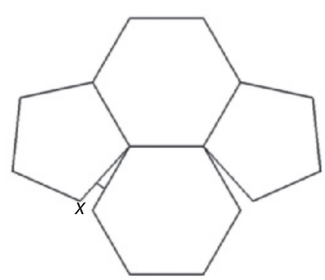
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.
b) quadrado. alternativa **b**
c) pentágono.
d) hexágono.
e) eneágono.

47. (CP2) Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano. A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.



■ Figura 1



COLÉGIO PEDRO II

■ Figura 2

Na Figura 2, a medida *x* do ângulo é igual a

a) 14°.
b) 12°. alternativa **b**
c) 10°.
d) 8°.

> CONEXÕES

Áreas verdes

As áreas verdes, em centros urbanos, são fundamentais para diversos aspectos, entre eles, a melhora na qualidade no ar. Leia o texto a seguir.

A importância das áreas verdes nas cidades

Desde a Antiguidade, as áreas verdes e jardins tinham finalidades de passeio, lugar para expor luxo e de repouso. Atualmente com os problemas gerados pelas cidades modernas, elas e os parques e jardins são uma exigência não só para a ornamentação urbana, mas também como necessidade higiênica, de recreação e principalmente de defesa do meio ambiente diante da degradação das cidades.

[...]

Além de servirem como equilíbrio do ambiente urbano e de locais de lazer, também podem oferecer um colorido e plasticidade ao meio urbano.

Outro fator importante referente à vegetação é a arborização das vias públicas que serve como um filtro para atenuar ruídos, retenção de pó, oxigenação do ar, além de oferecer sombra e a sensação de frescor.

LIMA, V.; AMORIM, M. C. de C. T. A importância das áreas verdes para a qualidade ambiental das cidades. **Revista Formação**, Presidente Prudente, v. 1, n. 13, p. 139-165, 2006. Disponível em: http://revista.fct.unesp.br/index.php/formacao/article/viewFile/835/849. Acesso em: 8 jul. 2020.

SOUTHERN WIND/SHUTTERSTOCK.COM

Vista aérea do parque no entorno do Mosteiro Nossa Senhora das Graças, em Belo Horizonte (MG). Fotografia de 2013.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Índice de Áreas Verdes

Indicadores e índices são números que procuram descrever um determinado aspecto da realidade, ou apresentam uma relação entre vários deles [...]. Dentre alguns indicadores que expressam a qualidade ambiental de uma cidade, destaca-se: o Índice de Áreas Verdes (IAV) que mede a relação entre a quantidade de área verde (m^2) e a população que vive em determinada cidade.

[...] em termos gerais, o IAV é aquele que denota a quantidade de espaços livres de uso público, em km^2 (quilômetro quadrado) ou m^2 (metro quadrado) dividido pela quantidade de habitantes de uma cidade.

[...]

$$\text{TAVC} = \Sigma \text{ áreas de parques } (m^2) + \Sigma \text{ áreas de praças } (m^2)$$

$$\text{IAV} = \frac{\text{TAVC}}{\text{NH}}$$

Onde:

TAVC = Total de áreas verdes consideradas (parques e praças)

IAV = Índice de área verdes

NH = Número de habitantes

TOLEDO, F. dos S.; MAZZEI, K.; SANTOS, D. G. dos. Um índice de áreas verdes (IAV) na cidade de Uberlândia / MG. **REVSBAU**, Piracicaba, v. 4, n. 3, p. 86-97, 2009. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/revsbau/article/view/66415/38256. Acesso em: 8 jul. 2020.

SAIBA QUE...

Σ é o símbolo utilizado para o somatório, que indica a soma de determinados números. É também a décima oitava letra do alfabeto grego, que corresponde ao **S** maiúsculo.

A Organização Mundial de Saúde (OMS) recomenda um mínimo de 12 m^2 de área verde por habitante.

Fonte dos dados: PROGRAMA CIDADES SUSTENTÁVEIS. **Área verde por habitante**. São Paulo, 2020. Disponível em: https://2013-2016-indicadores.cidadessustentaveis.org.br/area-verde-por-habitante. Acesso em: 15 jul. 2020.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. **NÃO ESCREVA NO LIVRO**

1. Em sua opinião, por que é importante ter áreas verdes na cidade? Há áreas verdes em sua cidade? Converse com seus colegas sobre esses espaços. Resposta pessoal.

2. A cidade de Porto Alegre, no Rio Grande do Sul, possuía, em 2014, 62 961 882 m^2 de áreas verdes (praças e parques). Na mesma data, a população da cidade era de 1 409 351 habitantes.

Fonte dos dados: PROGRAMA CIDADES SUSTENTÁVEIS. **Área verde por habitante**: Porto Alegre, RS. São Paulo, 2020. Disponível em: https://2013-2016-indicadores.cidadessustentaveis.org.br/br/RS/porto-alegre/area-verde-por-habitante. Acesso em: 8 jul. 2020.

Calcule o índice de áreas verdes (*IAV*) de Porto Alegre, em 2014 e compare com o índice mínimo estabelecido pela ONU.
IAV = 44,6744 m^2/hab. O índice está acima do recomendado pela ONU.

WATIN/SHUTTERSTOCK.COM

PENSE E RESPONDA

Que conceitos matemáticos você utilizou para realizar as atividades desta seção? porcentagem e área

Professor, para instalar a versão do **GeoGebra Clássico 5** nos computadores da sua escola, acessar o *site* <https://www.geogebra.org/download?lang=pt> (acesso em: 15 jul. 2020).

Explorando polígonos inscritos na circunferência

De acordo com o que estudamos, a área (A) de um polígono regular é o produto de seu apótema (m) pelo semiperímetro (p), $A = p \cdot m$. Vimos também que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Utilizando essas informações, podemos criar um arquivo no **GeoGebra** em que é possível construir um polígono regular com tantos lados quanto desejarmos e, em seguida, o programa calcula o valor de sua área. Desse modo, podemos comparar o valor obtido com a fórmula anterior.

Para realizar esta atividade, utilizaremos a versão instalada do **GeoGebra Classic 5**. Para isso, siga o roteiro a seguir:

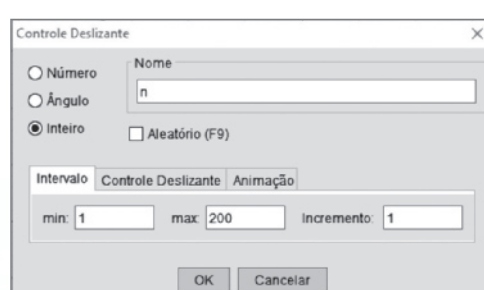
I. No **Campo de entrada**, localizado no rodapé da página, digite "$A = (0, 0)$" para criar o ponto A, de coordenadas (0, 0).

II. Em seguida, digite "$B = (1, 0)$", para criar o ponto $B(1, 0)$.

III. Utilizando a ferramenta **Círculo dados centro e Um de seus pontos**, , marque primeiro o ponto A e, depois, o ponto B. O programa fornecerá uma circunferência de raio 1, cujo centro é o ponto A, e B é um de seus pontos.

IV. Utilizando a ferramenta **Ampliar**, , clique sobre a circunferência até que ela se ajuste ao espaço disponível.

V. Crie um **Controle deslizante.** Na caixa de diálogo aberta (Figura **1**), nomeie-o como n e selecione a opção **Inteiro**. Além disso, altere os valores **min** e **máx** para 1 e 200, respectivamente. Mantenha o incremento em 1.



IMAGENS: GEOGEBRA

Figura **1**

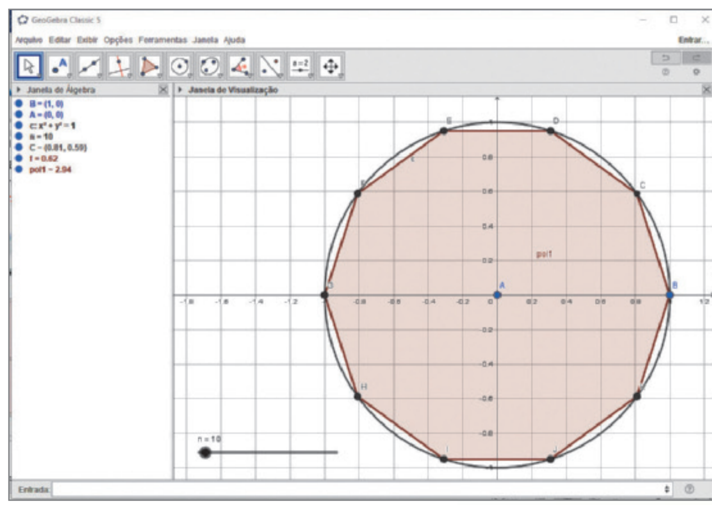
PASSION ARTIST/SHUTTERSTOCK.COM

VI. Para evitar que o polígono fique muito grande à medida que aumentamos o valor de n, vamos limitar a medida do raio da circunferência em função do número de lados. Assim, digite "C=(cos(2*pi/n),sen(2*pi/n))" no **Campo de entrada** para criar o ponto C.

VII. Mova o controle deslizante para $n = 3$, de tal forma que o ponto C fique visível.

VIII. Utilizando a ferramenta **Polígono regular**, clique primeiro sobre o ponto B e, depois, em C. Para o número de lados, digite "n". Assim, o valor do controle deslizante n é que vai determinar o número de lados do polígono.

Observe que na **Janela de Álgebra** aparece um objeto chamado **pol1** e, ao lado, um número. Esse número representa a área do polígono inscrito construído.



IMAGENS: GEOGEBRA

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Durante a construção, definimos o intervalo do controle deslizante de 1 a 200. Explique o que acontece quando $n = 1$ e $n = 2$.

2. Para $n = 3$, o polígono na tela será um triângulo equilátero.

- Utilizando a ferramenta **Reta perpendicular**, trace uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo, a partir do ponto A.
- Marque o ponto de intersecção dessa reta com o lado do triângulo, utilizando a ferramenta **Interseção de dois objetos**.

A distância entre esse ponto e o ponto A é o apótema desse triângulo.

a) Utilizando a ferramenta **Distância, comprimento ou perímetro**, meça o apótema e anote.

b) Com a mesma ferramenta anterior, meça um dos lados do triângulo e anote.

c) Calcule a área do triângulo equilátero, usando a fórmula do semiperímetro.

d) Compare o valor calculado com o valor fornecido pelo **GeoGebra**.

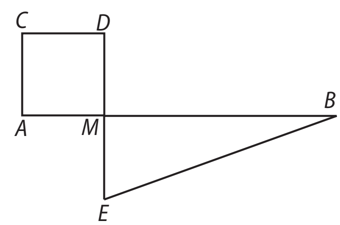
3. O que acontece com o valor da área quando aumentamos o número de lados?

4. Ao definir $n = 200$, o polígono inscrito se parece com qual figura? O que podemos afirmar sobre o valor da área do polígono para esse caso?

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (UFRGS-RS) Considere $\overline{AB}$ um segmento de comprimento 10 e M um ponto desse segmento, distinto de A e de B, como na figura abaixo. Em qualquer posição do ponto M, $AMDC$ é quadrado e BME é triângulo retângulo em M.



UFRGS.

Tomando x como a medida dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{EM}$, para que valor(es) de x as áreas do quadrado $AMDC$ e do triângulo BME são iguais?

a) 0 e $\frac{10}{3}$.

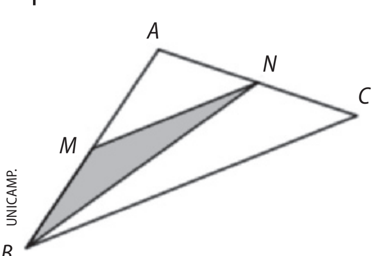
b) 0, 2 e 3.

c) $\frac{10}{3}$. alternativa **c**

d) 0, $\frac{10}{3}$ e 10.

e) 5.

2. (Unicamp-SP) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado AB, e N é o ponto médio do lado AC.



UNICAMP.

Se a área do triângulo MBN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a

a) $3t$.

b) $2\sqrt{3}t$.

c) $4t$. alternativa **c**

d) $3\sqrt{2}t$.

3. (Unifor-CE) Um pequeno terreno retangular tem área de 104 m². Sabendo que seu comprimento tem 3 m a menos que o dobro de sua largura, é correto concluir que a medida desse comprimento está entre: alternativa **b**

a) 14 m e 16 m

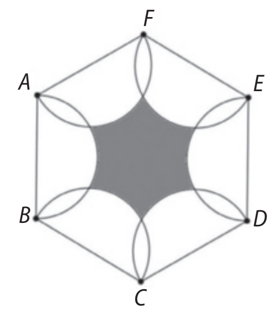
b) 12 m e 14 m

c) 10 m e 12 m

d) 8 m e 10 m

e) 6 m e 8 m

4. (UFRGS-RS) A partir de um hexágono regular de lado unitário, constroem-se semicírculos de diâmetros também unitários, conforme indicados na figura abaixo.



UFRGS.

A medida da área sombreada é alternativa **a**

a) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$.

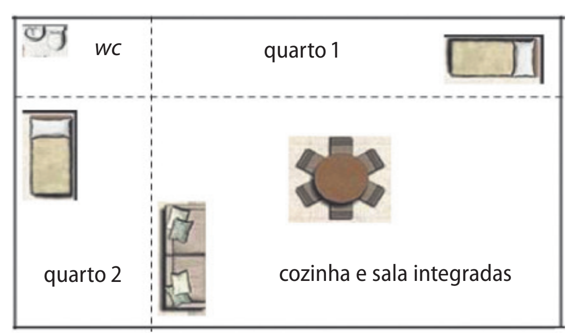
b) $\frac{\pi}{4}$.

c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) $\frac{3\sqrt{3}+\pi}{4}$.

e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. (Udesc-SC) O projeto de uma casa é apresentado em forma retangular e dividido em quatro cômodos, também retangulares, conforme ilustra a Figura 3.



UDESC.

■ Figura 3: Projeto de uma casa de quatro cômodos.

Sabendo que a área do banheiro (wc) é igual a 3 m² e que as áreas dos quartos 1 e 2 são, respectivamente, 9 m² e 8 m², então a área total do projeto desta casa, em metros quadrados, é igual a: alternativa **c**

a) 24

b) 32

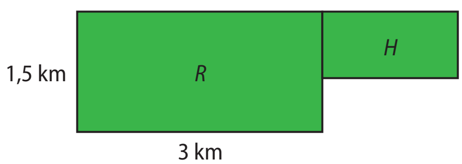
c) 44

d) 72

e) 56

6. (UFABC-SP) Observe a figura. As duas áreas retangulares são utilizadas para o plantio de cana-de-açúcar, sendo que a área *R* está para a área *H* na razão de 9 para 5. Sabe-se que um hectare (ha) de cana produz 8 mil litros de etanol. Dado: 1 ha = 10 000 m² alternativa **d**

EDITORIA DE ARTE



Pode-se concluir, então, que as áreas *R* e *H*, juntas, produzem:

a) $2,5 \cdot 10^6$ litros de etanol.

b) $3,6 \cdot 10^6$ litros de etanol.

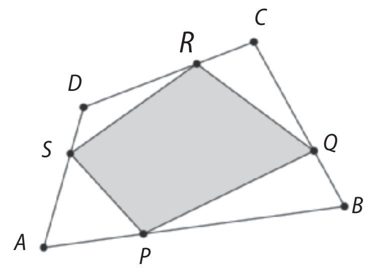
c) $4,5 \cdot 10^6$ litros de etanol.

d) $5,6 \cdot 10^6$ litros de etanol.

e) $6,2 \cdot 10^6$ litros de etanol.

7. (OBMEP) A figura mostra um quadrilátero convexo *ABCD* de área 1 e pontos *P*, *Q*, *R* e *S* tais que alternativa **b**

$$AP = \frac{AB}{3},\ BQ = \frac{BC}{3},\ CR = \frac{CD}{3} \text{ e } DS = \frac{DA}{3}.$$



OBMEP

Qual é a área do quadrilátero *PQRS*?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{9}$

e) $\frac{6}{7}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, retomamos o conceito de área de polígonos e do círculo e de suas partes. Aprofundamos nosso estudo, refletindo sobre a variação da área e do perímetro de polígonos regulares em função do comprimento dos lados. Vimos como a medida do ângulo interno de polígonos regulares está diretamente relacionada à possibilidade de ladrilhamento do plano.

Nas páginas de abertura, abordamos o trabalho das ONGs e os programas sociais direcionados para a construção e a reforma de moradias populares.

Na seção **Conexões**, conhecemos o índice de áreas verdes (*IAV*) de uma cidade e pudemos pensar sobre a importância de parques e praças arborizados nas grandes cidades.

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **1**:

- Você se lembrava como calcular a área de figuras como o quadrado, o triângulo e o losango?
- A partir da área do círculo, podemos calcular a área de uma coroa circular e do setor circular. Você se recorda como?
- Vimos que a variação da área de um polígono regular em função da medida do comprimento do seu lado é modelada pela função quadrática. E qual função modela a relação entre o perímetro e a medida do lado de um polígono regular?
- Ao escolher polígonos regulares para ladrilhar um plano, qual critério geométrico devemos considerar?
- Sobre o estudo relacionado às áreas de polígonos regulares inscritos na circunferência, as atividades da seção **Explorando a tecnologia** ajudaram você a compreender melhor esse tema? Respostas pessoais

CAPÍTULO 2

Geometria espacial de posição

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 4, 5, 6 e 7
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT315
  - Competência específica 4: EM13MAT405
  - Competência específica 5
- **Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

O mundo em que vivemos é tridimensional. Você já pensou como poderíamos representar objetos do mundo real em superfícies bidimensionais, como uma folha de papel ou a tela do computador? Para realizar essa tarefa são usados conhecimentos da geometria espacial, assunto deste Capítulo.

Profissionais como engenheiros, arquitetos, *designers* são algumas das pessoas que precisam realizar essa representação do mundo real, desenhando peças automobilísticas, plantas de imóveis etc. Para isso, é preciso saber os fundamentos do desenho técnico e da geometria descritiva.

Os desenhos técnicos são representações gráficas de formas, dimensões e posições de um objeto seguindo algumas regras e padrões. Essas regras são necessárias para que qualquer pessoa que tenha acesso ao desenho consiga entendê-lo e interpretá-lo, sem precisar de explicações adicionais.

A geometria descritiva é a área do conhecimento dedicada a fazer essa transposição do mundo real (3D) para a folha de papel ou para a tela do computador (2D). Isso pode ser feito usando as vistas e projeções ou as perspectivas.

REAMOLKO/SHUTTERSTOCK.COM

VIVIANE MOOS/CORBIS/GETTY IMAGES

■ Os projetistas são os profissionais especializados em realizar projetos dos mais diversos temas utilizando os conceitos do desenho técnico.

SCHAB/SHUTTERSTOCK.COM

Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.

1. O que significa dizer que algo é tridimensional? E que algo é bidimensional?

2. No Brasil, as normas para a realização do desenho técnico são coordenadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Vocês já conheciam ou já fizeram um desenho técnico? Quais são as principais diferenças entre o desenho técnico e o desenho artístico?

3. No desenho técnico, podemos ter representações por meio das perspectivas e das projeções. Vocês conhecem essas técnicas? Pesquisem sobre cada uma delas e sobre os principais tipos de perspectiva.

Introdução

No Ensino Fundamental estudamos vários aspectos dos poliedros. Agora, no Ensino Médio, vamos formalizar algumas ideias vistas em anos anteriores, como a definição matemática de prismas e pirâmides. Para isso, são necessários alguns conceitos da chamada **geometria espacial de posição,** que estuda a posição entre os entes geométricos e é o tema deste Capítulo.

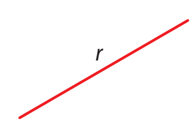
Além disso, como vimos na abertura, o desenho técnico, muito presente em áreas como o *design*, a Arquitetura e a Engenharia, utiliza conceitos da geometria descritiva, relacionada com a geometria de posição.

Noções primitivas

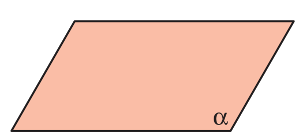
Para iniciar os estudos da geometria espacial de posição, precisamos partir de algumas noções que são aceitas sem definição. Essas noções são as de ponto, reta e plano e são chamadas de **noções primitivas**.

Veja a seguir como essas noções são representadas.

- Ponto *A*. Em geral, para dar nome aos pontos, usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto.



- Reta *r*. Para nomear as retas, é comum usarmos letras minúsculas de nosso alfabeto.



- Plano α. Para nomear os planos, usamos as letras gregas minúsculas.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Essas representações são úteis para o estudo de Geometria, pois permitem a visualização de alguns conceitos por meio de esquemas. No entanto, elas apenas dão uma ideia do que são esses conceitos geométricos, uma vez que eles não existem no mundo real. Apesar disso, alguns objetos do cotidiano lembram a forma das representações dessas noções primitivas. Assim, podemos dizer, por exemplo, que o ponto-final da ortografia lembra um ponto, uma corda esticada lembra uma reta e uma folha de papel lembra um plano. Na Geometria, o ponto não tem dimensão, enquanto o ponto-final tem dimensões, mesmo que pequenas. Da mesma maneira, a reta é ilimitada, ou seja, não tem começo nem fim e não tem espessura. O plano também não é limitado, ou seja, se estende em todas as direções e também não tem espessura.

Qualquer outro conceito geométrico diferente das noções primitivas precisa ser definido com base nessas noções primitivas ou em outros conceitos já estabelecidos anteriormente.

Ao longo deste Capítulo, apresentaremos diversas afirmações, que podem ser divididas em três tipos:

- **Postulados** ou **axiomas**: são proposições (afirmações matemáticas) aceitas sem necessidade de demonstração.
- **Definições**: são proposições feitas a partir de noções primitivas, de definições anteriores ou de resultados já demonstrados. As definições também não são demonstradas.
- **Teoremas**: são proposições enunciadas com base em postulados, em definições e em resultados já demonstrados. Só têm validade se forem demonstrados, ou seja, validados com base em uma argumentação lógica.

Nesta coleção, não apresentaremos a demonstração de todos os teoremas enunciados, apenas a de alguns considerados importantes ou cuja demonstração auxilie no entendimento de algum conteúdo.

Ainda a respeito dos teoremas, eles são essencialmente constituídos de duas partes, a hipótese e a tese. A **hipótese** é o conjunto de afirmações que supomos verdadeiras, e a **tese** é aquilo que queremos demonstrar como verdadeiro. A demonstração de um teorema é o raciocínio percorrido para se chegar da hipótese à tese usando os resultados admitidos e/ou demonstrados anteriormente. Para demonstrar um teorema, explicitamos o que é a hipótese e o que é a tese.

Para fazer a demonstração de um teorema, podemos utilizar diversas técnicas estabelecidas ao longo do desenvolvimento da Matemática. Alguns exemplos de tipos de demonstração são: demonstração **direta**, demonstração **por absurdo**, demonstração **por contrapositiva**, **princípio da indução finita** e demonstração por **contraexemplo**.

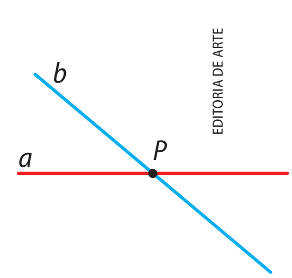
A demonstração por absurdo, por exemplo, consiste em admitir que a tese não é verdadeira e, utilizando argumentos lógicos, chegar a algum resultado que contraria um ou mais elementos da hipótese ou um dos postulados apresentados. Como a hipótese é o que supomos verdadeiro e os postulados são admitidos como verdadeiros, por essa técnica de demonstração chegamos a uma contradição e concluímos que a tese é falsa, ou seja, a tese é verdadeira e o teorema está demonstrado. A teoria matemática que valida essa técnica pertence ao campo da Lógica.

Para iniciar os estudos da geometria espacial, ou seja, a geometria do espaço, apresentamos a seguir a definição de espaço no contexto da Geometria.

Espaço é o conjunto formado por todos os pontos.

Além disso, também precisamos retomar as definições de reta paralela e de reta concorrente. Assim:

Duas retas são **concorrentes** quando têm apenas um ponto comum.



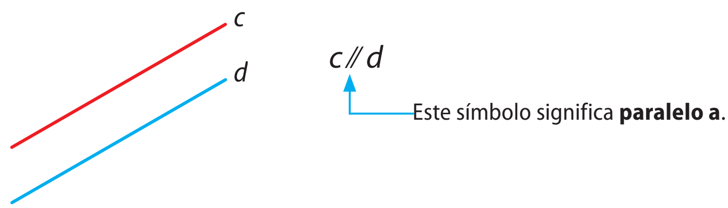
As retas a e b são concorrentes e o ponto P é o único ponto comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, podemos escrever: $a \cap b = \{P\}$.

PENSE E RESPONDA

Dê exemplos de situações do cotidiano que podemos relacionar com retas paralelas.

Respostas possíveis: As linhas paralelas de um campo de futebol, a faixa de pedestres etc.

Duas retas são **paralelas** quando são coplanares (estão em um mesmo plano) e não têm ponto comum.



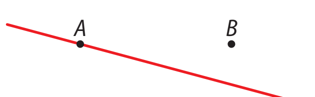
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

As retas *c* e *d* são paralelas, pois estão no mesmo plano e não têm ponto comum entre elas. Usando a notação de conjuntos, escrevemos: $c \cap d = \varnothing$ ou $c \cap d = \{\ \}$

Postulados

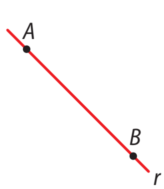
As primeiras proposições que vamos apresentar são alguns postulados relacionados a pontos, retas e planos que serão utilizados no estudo da geometria espacial.

Postulados da reta

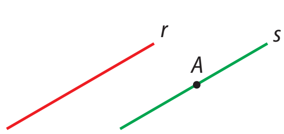


▪ $A \in r$ e $B \notin r$.

R$_1$: Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



R$_2$: Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.



R$_3$: Por um ponto *A*, fora de uma reta *r*, passa uma única reta *s* paralela à reta *r*.

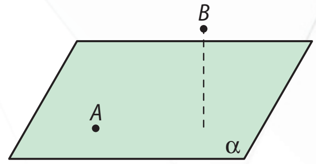
O postulado **R**$_3$ também é conhecido como postulado de Euclides. Por causa desse postulado, dizemos que estudamos uma Geometria Euclidiana.

Existem geometrias em que esse postulado não é verdadeiro. Por exemplo, a que tem como modelo uma esfera. Pensando em uma relação com o globo terrestre, os meridianos seriam algumas das retas nesse modelo de geometria.

Postulados do plano

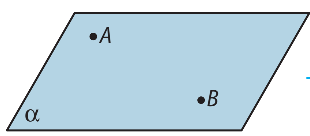
P_1: Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

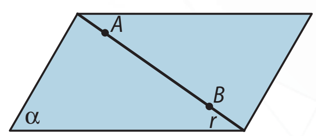


■ $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

P_2: Toda reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

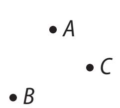


■ $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

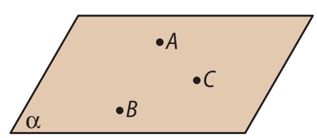


■ $r \subset \alpha$

P_3: Três pontos que não estão em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano.

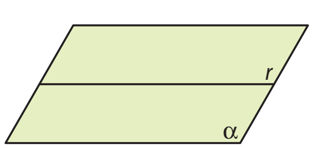


■ A, B e C não colineares.

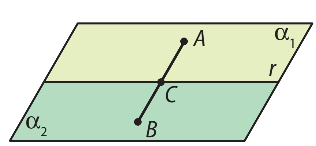


■ plano α.

P_4: Uma reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas **semiplanos**.



■ $r \subset \alpha$



■ α_1 e α_2: semiplanos de origem r.

A reta r é considerada a **origem dos semiplanos**, e os semiplanos α_1 e α_2 são ditos **opostos**.

Um segmento de reta que liga um ponto qualquer de α_1 a um ponto qualquer de α_2 tem um único ponto em comum com a reta r.

ISNIPER/SHUTTERSTOCK.COM

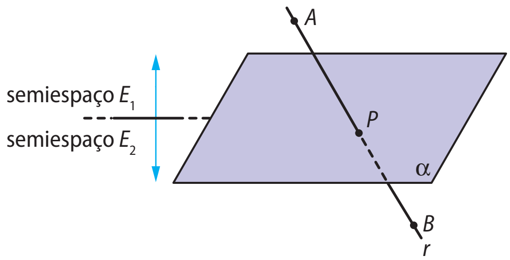
PENSE E RESPONDA

- Se os pontos não fossem distintos, ainda assim o postulado R_2 seria válido? E no caso do P_2? Justifique.
- No postulado P_3, o que acontece se os pontos forem colineares?

Ver as **Orientações para o professor**.

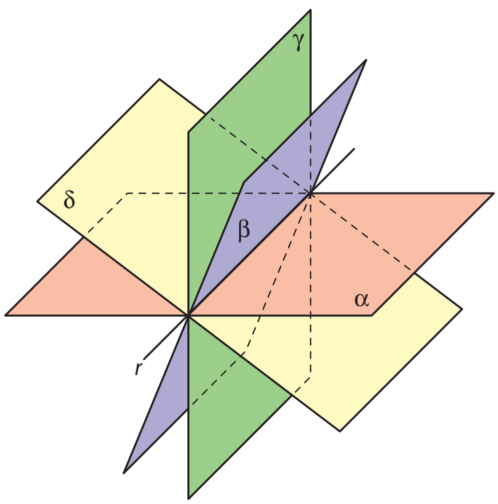
P_5: Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



O plano α é considerado a **origem dos semiespaços**.

Uma reta determinada por dois pontos, um em cada semiespaço, intersecta necessariamente o plano.



P_6: Por uma reta passam infinitos planos.

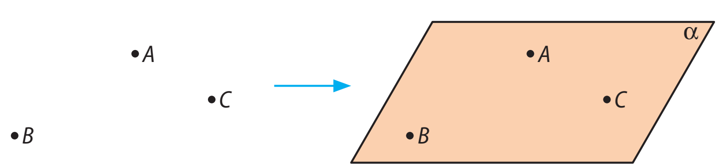
A partir desses postulados, poderemos enunciar definições e teoremas da geometria espacial de posição.

Determinação do plano

Um plano pode ser determinado de quatro maneiras distintas. Acompanhe cada uma delas a seguir.

1ª) Pelo postulado **P_3** do plano

Três pontos distintos e não alinhados determinam um único plano.



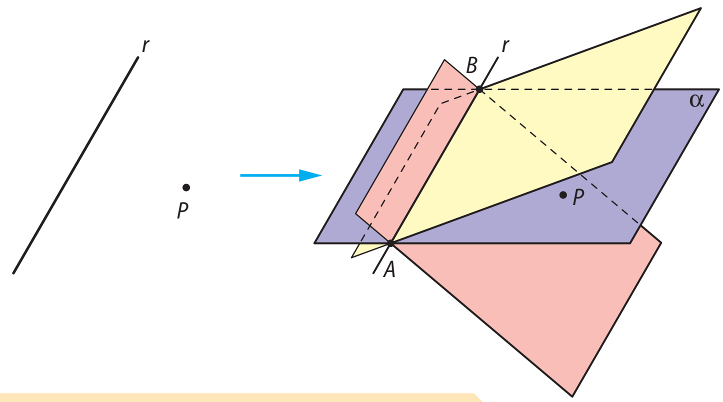
Além da indicação usando as letras gregas, também podemos denotar um plano pelos pontos que o determinam. Assim, escrevemos **plano *ABC*** para o plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*.

2ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 1: Uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano.

Demonstração

Seja *r* uma reta e *P* um ponto fora dessa reta. Pelo postulado $\mathbf{R_1}$ existem dois pontos distintos *A* e *B* em *r*. Dessa forma, como os pontos *A*, *B* e *P* não são colineares, pelo postulado $\mathbf{P_3}$ eles determinam um único plano.

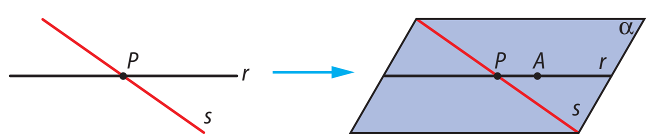


3ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração

Sejam duas retas *r* e *s* concorrentes no ponto *P*. Considerando um ponto *A* sobre a reta *r*, distinto do ponto *P* (que existe pelo postulado $\mathbf{R_1}$), sabemos pelo teorema **1** que a reta *s* e o ponto *A*, exterior a *s*, determinam um único plano α.



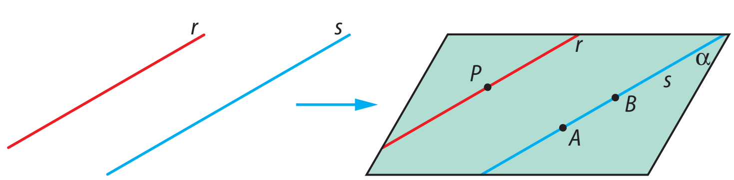
Observe que esse plano α contém a reta *s*, por construção, e também contém a reta *r*, por nele estarem situados os pontos *P* e *A* da mesma reta (postulado $\mathbf{P_2}$ do plano).

4ª) Pelo teorema a seguir.

Teorema 3: Duas retas paralelas determinam um único plano.

Demonstração

Sejam as retas paralelas *r* e *s*. Pelo postulado $\mathbf{R_1}$, considerando um ponto *P* em *r* e dois pontos *A* e *B* distintos em *s*, determinamos o plano α, uma vez que *P*, *A* e *B* são três pontos não alinhados (postulado $\mathbf{P_3}$ do plano).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

Observe a representação do bloco retangular *ABCDEFGH* em que estão destacadas as retas *r*, *s*, *t* e *u*.

- Indique um par de retas contidas em um mesmo plano.
- Indique um par de retas que estão em planos distintos.

Respostas possíveis: retas *r* e *t*; retas *r* e *s*; retas $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

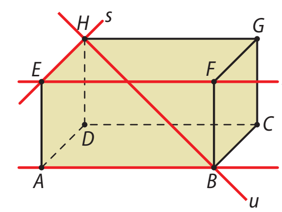
Respostas possíveis: retas *s* e *u*; retas *s* e *t*; retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

Posições relativas de duas retas no plano e no espaço

No início deste Capítulo, retomamos os conceitos de retas concorrentes e retas paralelas. Essas definições são utilizadas para retas coplanares, ou seja, que estão em um mesmo plano. Agora, vamos ampliar os estudos de posição relativa de duas retas para retas no espaço.

Para determinar quais são as possíveis posições relativas de retas, observamos se as retas estão em um mesmo plano e se há pontos em comum entre elas.

Duas retas são **coplanares** quando existe um plano que as contém.

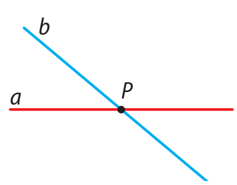


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

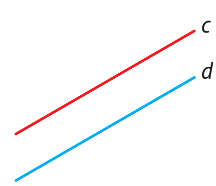
Por exemplo, na figura ao lado, as retas *r* e *s* são coplanares. Veja que elas são concorrentes no ponto *E* (pelo teorema **2**, determinam um único plano). Duas retas complanares são:

Concorrentes quando têm apenas um ponto comum.

Paralelas quando não têm ponto comum.

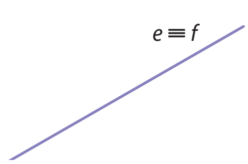


- $a \cap b = \{P\}$



- $c \mathbin{/\!/} d$
  $c \cap d = \varnothing$

Coincidentes quando têm todos os pontos comuns.



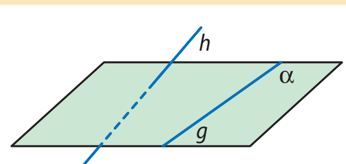
$e \equiv f$ ou $e = f$

Este símbolo significa **identicamente igual a**.

SAIBA QUE...

Uma **reta suporte** que contém dois pontos ou contém um segmento de reta é a reta que passa por esses dois pontos ou passa pelo segmento de reta que os contém.

Duas retas são **reversas** quando não existe um plano que as contém.

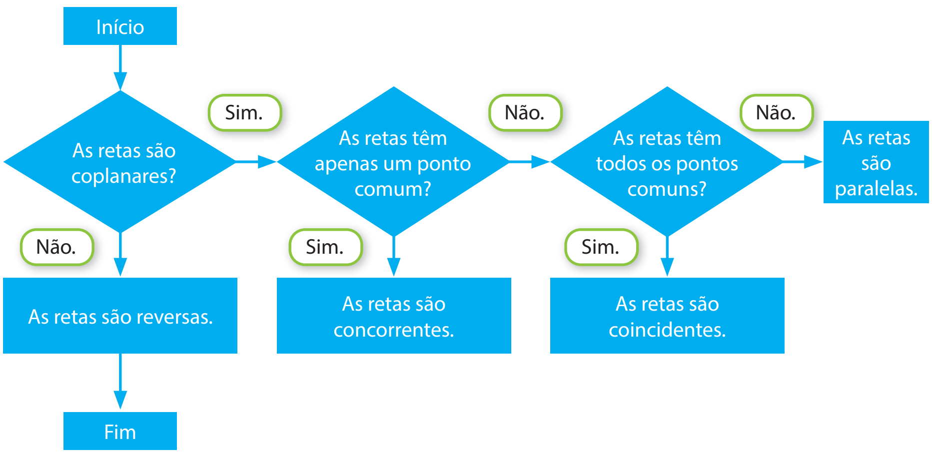


PENSE E RESPONDA

Duas retas reversas têm ponto comum? Justifique sua resposta.

Ver as **Orientações para o professor**.

Com as classificações apresentadas, podemos montar um fluxograma que nos auxilia a compreender cada um dos casos de posições relativas de duas retas no plano e no espaço.



PENSE E RESPONDA

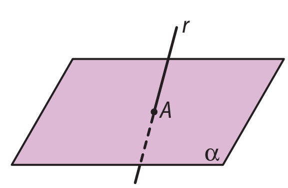
Reúna-se a um colega e debatam: essa é a única maneira de representar as posições relativas de duas retas no plano e no espaço por meio de um fluxograma? Justifiquem sua resposta e, caso não seja a única, construam outro fluxograma.

Não. Ver as **Orientações para o professor**.

Posições relativas de uma reta e um plano no espaço

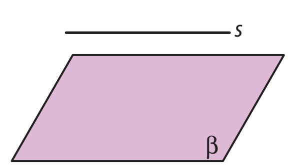
Agora, vamos ver como uma reta e um plano podem estar posicionados no espaço. Para isso, vamos observar o número de pontos comuns que eles têm.

Uma reta r e um plano α são **secantes**, ou **concorrentes**, quando têm um único ponto em comum.



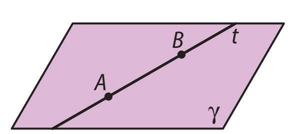
■ $r \cap \alpha = \{A\}$

Uma reta s e um plano β são **paralelos** quando não têm ponto em comum.



■ $s \cap \beta = \varnothing$

Uma reta t está **contida** em um plano γ quando ambos têm em comum todos os pontos da reta t.



■ $t \subset \gamma$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega e construam um fluxograma para identificar as posições relativas de uma reta e um plano no espaço.

Ver as **Orientações para o professor**.

Pelo postulado $\mathbf{P}_2$, basta que a reta t e o plano γ tenham mais de um ponto comum para que essa reta esteja contida nesse plano.

Posições relativas de dois planos no espaço

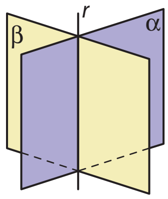
Para finalizar as posições relativas, vamos ver como dois planos no espaço podem se relacionar. Mais uma vez, vamos observar os pontos comuns entre eles.

PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega, e construam um fluxograma para identificar as posições relativas de dois planos no espaço.

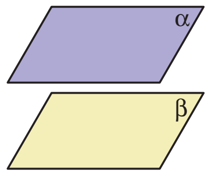
Ver as **Orientações para o professor**.

Dois planos α e β são **secantes**, ou **concorrentes**, quando têm uma única reta em comum.



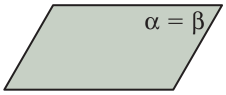
$\alpha \cap \beta = r$

Dois planos α e β são **paralelos** quando não têm ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Dois planos α e β são **coincidentes** quando têm mais de uma reta em comum (3º e 4º casos da determinação do plano).



$\alpha = \beta$ ou $\alpha \equiv \beta$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> ATIVIDADE RESOLVIDA

1. Dados, em um plano, duas retas distintas tangentes a uma mesma circunferência, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando-as.

a) As retas são necessariamente concorrentes.

b) As retas são necessariamente paralelas.

c) As retas podem ser paralelas.

Resolução

Para cada item, vamos buscar um contraexemplo para comprovar que a afirmação é falsa ou utilizaremos os resultados já estudados para mostrar que a afirmação é verdadeira.

a) Essa afirmação é falsa, pois, caso as retas sejam tangentes em pontos diametralmente opostos da circunferência, elas serão paralelas.

b) Essa afirmação é falsa, pois as retas só serão paralelas na situação indicada no item anterior. Em qualquer outra situação, as retas serão concorrentes.

c) Como vimos nos itens anteriores, as retas podem ser paralelas ou concorrentes. Então essa afirmação é verdadeira. Note que a afirmação traz uma possibilidade e não uma afirmação absoluta, válida para todos os casos. Isso faz com que não precisemos demonstrá-la, mas apenas determinar um caso que a atenda.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Leia as afirmações a seguir.

I. ______ pontos distintos determinam uma única reta.

II. Em um plano, estão contidas ______ retas.

III. Uma reta em um plano divide-o em duas regiões, denominadas ______.

IV. Por uma reta passam ______ planos.

V. Podemos determinar um plano de ______ maneiras.

As palavras que preenchem corretamente as lacunas, na ordem, são:

a) dois – infinitas – semiespaços – infinitos - quatro

b) infinitos – infinitas – semiespaços – infinitos – quatro

alternativa **c**

c) dois – infinitas – semiplanos – infinitos – quatro

d) infinitos – duas – semiplanos – dois – infinitas

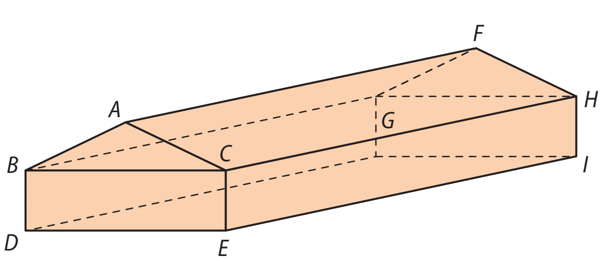
e) dois – duas – semiplanos – dois – infinitas

2. Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas, paralelas entre si? um ou três

3. Quantos são os planos determinados por quatro pontos, dois a dois, distintos entre si?

Ver as **Orientações para o professor**.

4. Dada a figura, considere a reta suporte de cada segmento de reta da figura e identifique:



a) um par de retas reversas; Resposta possível: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EI}$

b) um par de retas coplanares; Resposta possível: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$

c) dois pares de retas concorrentes; Resposta possível: $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{HI}$

d) dois pares de retas paralelas. Resposta possível: $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$

Ver as **Orientações para o professor**.

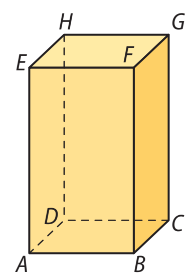
5. Considere um ponto *M* em um plano α e uma reta *r*, secante a α, que o "fura" em um ponto distinto de *M*. Reúna-se com um colega e façam o que se pede em cada item.

a) Façam um desenho que represente a situação.

b) Verifiquem se a frase a seguir é verdadeira ou falsa. Justifiquem sua resposta.

> Existem infinitas retas contidas em α que passam pelo ponto *M* e pelo ponto de intersecção de *r* e α.

6. Observando a figura a seguir, responda.



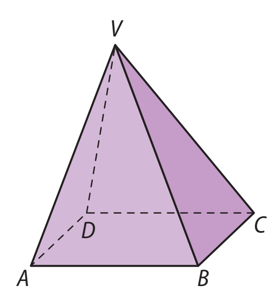
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{BF}$ em relação ao plano *ABC*? secante

b) Qual é a posição da reta $\overleftrightarrow{FG}$ em relação ao plano *FGH*? Está contida.

- Reúna-se a um colega, e elaborem duas outras perguntas sobre posições relativas com base na figura. Depois troquem com outra dupla e confiram juntos as respostas. Resposta pessoal.

7. Observando a figura seguinte, responda.



a) Qual é a posição relativa entre os planos *VAB* e *VBC*? secantes

b) Qual é a intersecção dos planos *ABC* e *VBC*? a reta $\overleftrightarrow{BC}$

c) Há planos paralelos na figura? não

Paralelismo no espaço

Estudamos as posições relativas de duas retas, de uma reta e um plano e de dois planos. Em alguns desses casos, falamos a respeito de paralelismo no espaço. Vamos retomar essas ideias:

- Duas retas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto em comum.
- Uma reta é paralela a um plano quando eles não têm ponto em comum.
- Dois planos são paralelos quando não têm ponto em comum.

Teoremas sobre paralelismo

Apresentaremos, agora, alguns teoremas relacionados ao paralelismo que se destacam no estudo da geometria espacial.

Teorema 4: Se uma reta r é paralela a um plano α e se um plano β contém r e é secante a α, segundo uma reta s, então as retas r e s são paralelas.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese

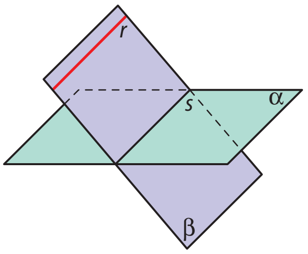
$r \parallel \alpha$

$\beta \supset r$

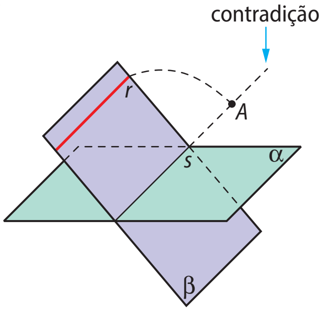
$\alpha \cap \beta = s$

Tese

$r \parallel s$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



Demonstração

Vamos realizar a demonstração por absurdo. Para isso, admitimos que a negação da tese seja verdadeira, isto é, r não é paralela a s. Se isso fosse verdade, como r e s estão contidas no plano β, elas seriam retas concorrentes e teriam um ponto A em comum. Mas, como $s \subset \alpha$, o ponto A pertenceria a r e a α, o que contraria a hipótese $r \parallel \alpha$.

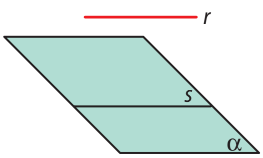
Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que r não é paralela a s é falsa. Portanto, r é paralela a s.

PENSE E RESPONDA

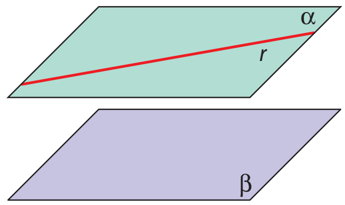
Quais são a hipótese e a tese no teorema **5**?

Ver as **Orientações para o professor**.

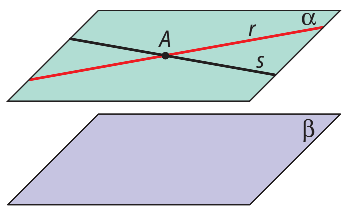
Teorema 5: Se uma reta r, não contida em um plano α, é paralela a uma reta s, contida em α, então r e α são paralelos.



Teorema 6: Se α e β são planos paralelos, então qualquer reta *r* contida em α é paralela ao plano β.



Teorema 7: Se um plano α contém duas retas, *r* e *s*, concorrentes e ambas paralelas a outro plano, β, então α e β são paralelos.



PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega e debatam a respeito das questões a seguir. Usem os resultados vistos até aqui para justificar as respostas.

- Dados dois planos paralelos α e β, podemos ter retas em α e em β que não sejam paralelas? Justifiquem.
- Podemos ter retas paralelas contidas em dois planos secantes entre si? Justifiquem.

Ver as **Orientações para o professor**.

> ATIVIDADE RESOLVIDA

2. Dentre as afirmativas a seguir, referentes à Geometria de posição, determine a única que é falsa.

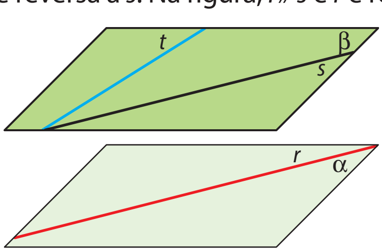
I. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ou é reversa a qualquer reta do outro.

II. Se uma reta é paralela a dois planos, então os planos são paralelos.

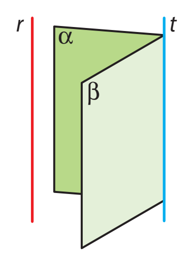
III. Se dois planos paralelos intersectam um terceiro, então as intersecções são retas paralelas.

Resolução

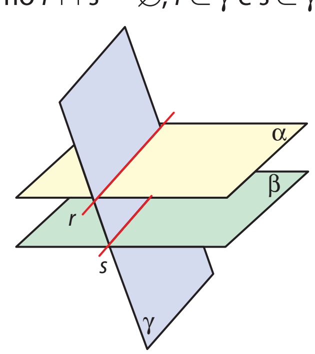
I. A afirmação é verdadeira. Se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = \varnothing$, então $r \cap s = \varnothing$. Logo, $r /\!/ s$ ou *r* é reversa a *s*. Na figura, $r /\!/ s$ e *r* é reversa a *t*.



II. A afirmação é falsa, pois podemos ter $r /\!/ \alpha$, $r /\!/ \beta$ e $r /\!/ t$, em que $t = \alpha \cap \beta$, como mostra a figura a seguir.



III. A afirmação é verdadeira. Se $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então $r \cap s = \varnothing$.
Como $r \cap s = \varnothing$, $r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma$, então $r /\!/ s$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

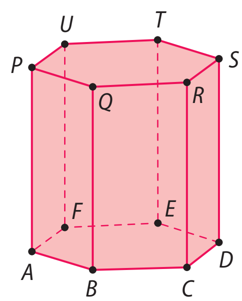
Portanto, a única alternativa falsa é a **II**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

8. A figura a seguir representa um sólido geométrico chamado prisma reto de base hexagonal. Nessa figura, temos:

- as bases são os hexágonos regulares *ABCDEF* e *PQRSTU*;
- os planos que contêm as bases são paralelos;
- os segmentos de reta que unem as bases são paralelos entre si. Por exemplo: $\overline{AP} \,/\!/\, \overline{CR}$;
- os segmentos de reta que unem as bases são perpendiculares às bases.



A partir dessas informações, faça o que se pede em cada item.

Resposta possível: $\overleftrightarrow{ST}$

a) Indique uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{DE}$.

b) A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao plano que contém o hexágono *PQRSTU*? Justifique.
Resposta esperada: Sim, pelo teorema **6**.

c) Sabendo que $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{UF}$ são paralelas ao plano que contém o quadrilátero *BCRQ*, o que podemos afirmar sobre esse plano e o plano que contém o quadrilátero *EFUT*? Justifique sua resposta. Resposta esperada: Os planos são paralelos, pelo teorema **7**.

9. (PUC-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos. alternativa **a**

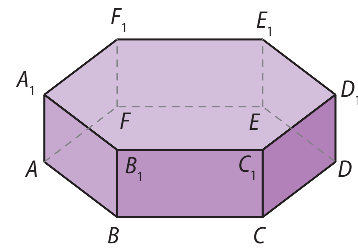
b) Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.

c) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apoie em duas retas reversas dadas.

d) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

e) Existem planos reversos.

10. (UFPE) A figura abaixo ilustra um prisma hexagonal regular $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Analise a veracidade das afirmações seguintes, referentes às posições relativas de retas e planos contendo vértices desse prisma.

V **a)** A reta contendo a aresta $\overline{AB}$ e a reta contendo a aresta $\overline{D_1E_1}$ são paralelas entre si.

V **b)** A reta contendo a aresta $\overline{AB}$ e a reta contendo a aresta $\overline{C_1D_1}$ são reversas.

V **c)** O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face DEE_1D_1 são paralelos.

F **d)** O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face CDD_1C_1 são paralelos entre si.

F **e)** A reta contendo a aresta $\overline{AB}$ é paralela ao plano contendo a face CDD_1C_1.

11. (ITA-SP) Quais são as sentenças falsas?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro.

II. Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.

III. Em dois planos paralelos distintos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a infinitas retas desse plano.

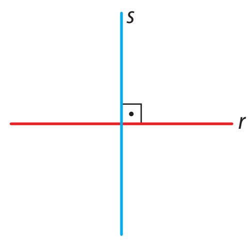
V. Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III
b) I; II; V alternativa **b**
c) I; III; IV
d) II; III; IV
e) I; II; IV

Perpendicularismo no espaço

Vimos que duas retas coplanares podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. No caso de retas concorrentes, podemos ainda classificá-las de acordo com o ângulo entre elas.

Duas retas concorrentes são **perpendiculares** quando formam entre si um ângulo de 90°.



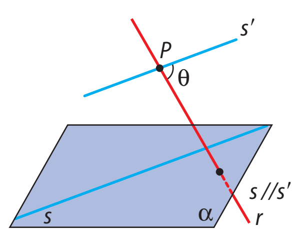
$r \perp s$

Este símbolo significa **perpendicular a**.

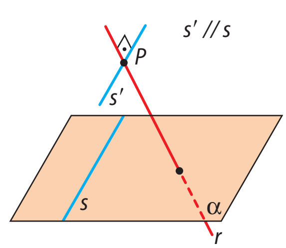
Duas retas concorrentes são **oblíquas** quando formam um ângulo diferente de 90°.

Agora vamos ver o que acontece com o ângulo entre retas reversas. Para isso, precisamos compreender o que é ângulo entre retas reversas.

Sejam *r* e *s* duas retas reversas. Consideremos sobre a reta *r* um ponto *P* e por ele tracemos a reta *s'*, paralela à reta *s*, como mostra a figura a seguir. O ângulo θ formado pelas retas *r* e *s'* é, por definição, o ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*. É possível demonstrar que esse ângulo não depende do ponto *P* escolhido.



Quando essas retas formam um ângulo de 90°, são chamadas de **ortogonais**.



r e *s* são retas reversas ortogonais.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Agora vamos estudar o perpendicularismo entre reta e plano.

PENSE E RESPONDA

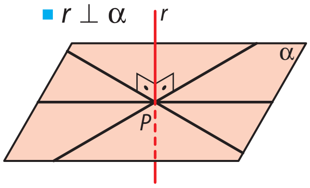
Você já ouviu falar na expressão "colocar no esquadro"? Se sim, em que contexto? Pesquise o significado dessa expressão e qual a relação dela com o conteúdo apresentado aqui.
Resposta pessoal.

PENSE E RESPONDA

Na definição de ângulo entre retas reversas, por que podemos traçar a reta *s'*, paralela à reta *s* no ponto *P*?
Resposta esperada: O postulado R_3 garante essa construção.

Perpendicularismo entre reta e plano

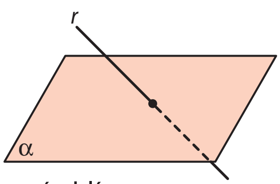
Vimos que uma reta e um plano podem ser paralelos, secantes ou a reta pode estar contida no plano. No caso de a reta ser secante ao plano, vamos ver que ela pode ser perpendicular ou oblíqua a esse plano.



■ $r \perp \alpha$

Sejam uma reta r e um plano α secantes em um ponto P.
Dizemos que r é **perpendicular** a α quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

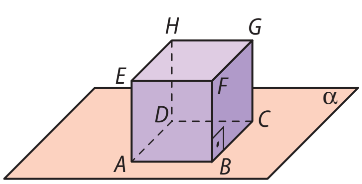


■ r é oblíqua a α.

Toda reta que intersecta um plano e não é perpendicular a ele é chamada **oblíqua** a esse plano.

Teorema 8: Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes s e t de um plano α, então ela é perpendicular ao plano α.

É possível demonstrar que o teorema **8** é uma condição necessária e suficiente para determinar a perpendicularidade entre reta e plano. Isso quer dizer que para a reta r ser perpendicular ao plano α, basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes de α que passam pelo ponto P. Esse raciocínio será utilizado em outros conteúdos deste Capítulo.



■ $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BC}$

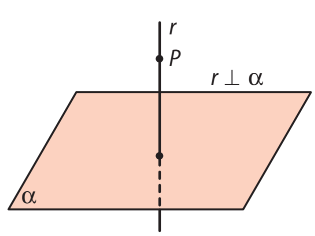
Por exemplo, observe ao lado a figura do cubo apoiado no plano α. Como $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$, então $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular ao plano ABC.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades do perpendicularismo que podem ser demonstradas.

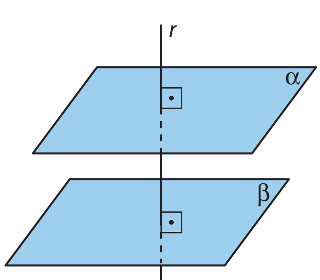
PENSE E RESPONDA

Se tivermos a reta secante ao plano perpendicular a apenas uma reta contida no plano, podemos garantir que a reta secante é perpendicular ao plano? Justifique.

Não. Ver as **Orientações para o professor**.



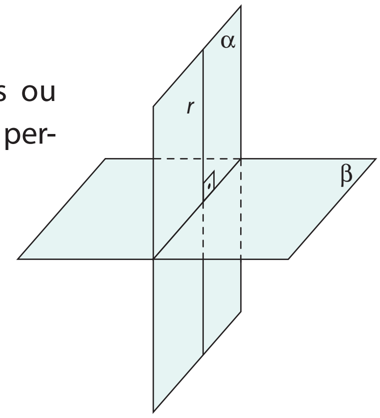
Propriedade 1: Por um ponto P fora de um plano α passa uma única reta r perpendicular a α.



Propriedade 2: Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são planos paralelos.

Planos perpendiculares

Vimos que dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou secantes. Vamos ver agora que, neste último caso, eles podem ser perpendiculares ou oblíquos.



EDITORIA DE ARTE

Dados dois planos secantes α e β, α é **perpendicular** a β se existe uma reta *r* contida em um deles que é perpendicular ao outro.

Se dois planos secantes não são perpendiculares, eles são denominados **oblíquos**.

PENSE E RESPONDA

Qual é a diferença entre falarmos que "uma reta e um plano são perpendiculares" e que "uma reta e um plano formam um ângulo de 90°"?

Ver as **Orientações para o professor**.

Teoremas sobre perpendicularismo

Apresentamos a seguir alguns teoremas sobre perpendicularismo.

Teorema 9: Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então *r* faz ângulo de 90° com qualquer reta contida em α.

Teorema 10: Se uma reta *r*, secante a um plano α, forma um ângulo de 90° com duas retas concorrentes *s* e *t* desse plano α, então a reta *r* é perpendicular ao plano α.

Teorema 11: Sejam uma reta *r* e um plano α tais que $r \perp \alpha$ no ponto *A*. Sendo *s* uma reta de α que passa pelo ponto *A* e *t* uma reta de α perpendicular à *s* e concorrente com esta num ponto $B \neq A$, então qualquer reta que passa pelo ponto *B* e por um ponto *C* de *r* é perpendicular à reta *t*.

Teorema 12: Duas retas distintas, *r* e *s*, perpendiculares a um mesmo plano α, são paralelas.

AXEIZ/SHUTTERSTOCK.COM

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Considere as retas *r*, *s* e *t* distintas, tais que $s \perp r$ e $t \perp r$. Relativamente às retas *s* e *t*, podemos afirmar que:

I. Elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.

II. Elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.

III. Elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.

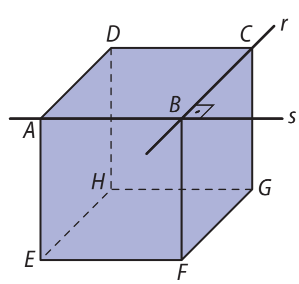
IV. Elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

V. Elas podem ser unicamente reversas.

Qual dessas afirmações é verdadeira?

Resolução

Uma das maneiras de resolver esse problema é desenhando as retas como retas suporte de arestas de um cubo. No cubo *ABCDEFGH*, representado na figura a seguir, sejam *r* a reta que passa por *B* e *C*, que indicaremos por $\overleftrightarrow{BC}$, e *s* a reta que passa por *A* e *B*, que indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$. Note que $s \perp r$. Nas condições do enunciado, podemos ter:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $t = \overleftrightarrow{CD}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e $s \parallel t$.
- $t = \overleftrightarrow{BF}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e *s* e *t* são retas concorrentes.
- $t = \overleftrightarrow{CG}$, então $s \perp r$, $t \perp r$ e *s* e *t* são retas reversas.

Portanto, a afirmação verdadeira é a **IV**.

4. Sejam um plano α e uma reta *r*, paralela a α. Quais proposições a seguir são verdadeiras?

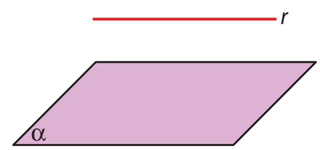
I. Toda reta paralela à *r* está contida em α.

II. Toda reta perpendicular à *r* é perpendicular a α.

III. Toda reta ortogonal à *r* é perpendicular a α.

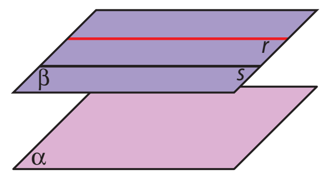
Resolução

Ilustrando o enunciado, temos a figura a seguir.

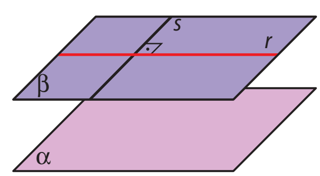


Agora, analisaremos cada uma das afirmações.

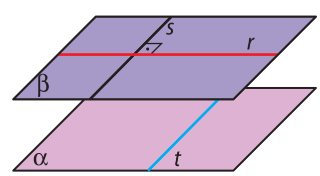
I. Falsa, pois existe um plano $\beta \parallel \alpha$ que contém *r*. Em β existe uma reta *s*, $s \parallel r$ e *s* não está contida em α.



II. Falsa. Considerando β do item **I**, existe $s \perp r$, $s \subset \beta$, $s \parallel \alpha$; logo, *s* não é perpendicular a α.



III. Falsa. Considere *s* do item **II**. Existe uma reta *t*, $t \subset \alpha$ e $t \parallel s$; *t* é ortogonal a *r* e não é perpendicular a α.



Portanto, nenhuma das proposições é verdadeira.

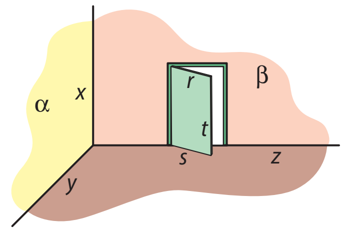
PENSE E RESPONDA

- Existe uma reta *t* que seja perpendicular à reta *r* e ao plano α? Se *t* existe, como construir essa reta? Ela é única? Justifique suas respostas.
- Existe uma reta *s* que seja paralela à reta *r* e esteja contida no plano α? Se *s* existe, como construir essa reta? Ela é única? Justifique suas respostas.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

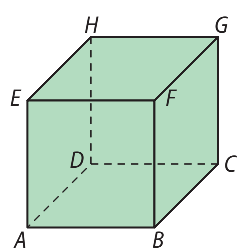
12. A figura a seguir mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



a) Que posições relativas têm as retas suporte que contêm *r* e *s*; *s* e *t*; *x* e *r*; *y* e *t*? paralelas; perpendiculares; reversas; reversas

b) Que posições relativas têm a reta suporte de *t* e o plano suporte de α? E a reta suporte de *r* e o plano suporte de β? paralelos; secantes

13. A figura seguinte representa um cubo. Observando-a, determine as posições relativas:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$. perpendiculares

b) das retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. reversas ortogonais

14. (EsPCEx-SP) Considere duas retas *r* e *s* no espaço e quatro pontos distintos, *A*, *B*, *C* e *D*, de modo que os pontos *A* e *B* pertencem à reta *r* e os pontos *C* e *D* pertencem à reta *s*. Dentre as afirmações abaixo:

I. Se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, então *r* e *s* são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos *ABC* e *ABD* serão sempre coplanares.

III. Se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas *r* e *s* são coplanares.

Pode-se concluir que: alternativa **c**

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

15. (Fatec-SP) A reta *r* é a intersecção dos planos α e β, perpendiculares entre si. A reta *s*, contida em α, intercepta *r* no ponto *P*. A reta *t*, perpendicular a β, intercepta-o no ponto *Q*, não pertencente a *r*. Nessas condições, é verdade que as retas: alternativa **e**

a) *r* e *s* são perpendiculares entre si.

b) *s* e *t* são paralelas entre si.

c) *r* e *t* são concorrentes.

d) *s* e *t* são reversas.

e) *r* e *t* são ortogonais.

16. (EEM-SP)

I. Duas retas reversas podem ser ambas perpendiculares a uma mesma reta *t*.

II. Se *r* é uma reta de um plano e *s* uma paralela ao mesmo plano, então, certamente, *r* e *s* são paralelas.

III. Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano.

Relativamente às afirmações acima, podemos afirmar que: alternativa **e**

a) todas são verdadeiras.

b) somente I e II são verdadeiras.

c) somente II e III são verdadeiras.

d) somente II é verdadeira.

e) somente I é verdadeira.

17. (Fuvest-SP) É correta a afirmação: alternativa **e**

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

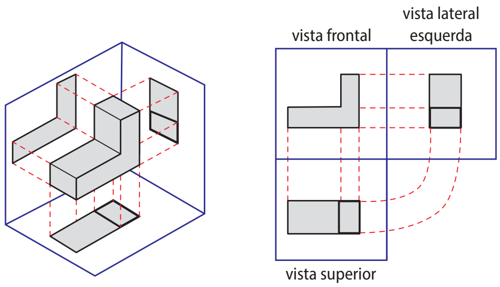
d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda ortogonal a uma delas será paralela à outra.

e) Se duas retas forem ortogonais, toda paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.

Projeção ortogonal

Na abertura deste Capítulo, vimos algumas ideias do desenho técnico. Uma delas é a projeção, que consiste em projetar as vistas de um objeto em planos. As mais comuns são as vistas frontal, superior e lateral.

Veja abaixo um exemplo de uma peça e suas vistas.



EDITORIA DE ARTE

Essa projeção é chamada de projeção ortogonal, pois é feita perpendicularmente ao plano de projeção, e as vistas são chamadas de **ortográficas**. Ela é muito utilizada nos projetos de fabricação de peças industriais.

PARA ASSISTIR

Saiba um pouco mais a respeito das vistas ortográficas com este vídeo:

CROQUI de vistas ortográficas. 2019. Vídeo (9min18s). Publicado pelo canal Markoni Heringer. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XizsOiUwQCA. Acesso em: 14 jul. 2020.

Veremos a seguir o conceito de projeção ortogonal relativa a um ponto, a uma reta e a uma figura qualquer, que são a base para a execução dos projetos.

FÓRUM

Como os espaços públicos são projetados?

Você já parou para pensar quem são as pessoas que projetam espaços públicos como praças e parques? A equipe responsável por esses projetos é formada por diversos profissionais, entre eles, arquitetos e engenheiros, que os desenvolverão para que empreiteiros e pedreiros possam executá-los. Existem diversos fatores a serem levados em consideração ao planejar uma obra como essa.

Após ler o texto, reúna-se a mais dois colegas e façam o que se pede a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

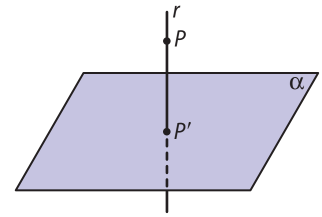
1. Quais são os fatores que vocês acham que devem ser levados em conta ao se fazer o projeto arquitetônico de uma praça ou de um parque público? Respostas possíveis: público-alvo, iluminação, tipo de utilização, tipo de pavimentação, estrutura do terreno, sustentabilidade.
2. Na sua cidade há algum espaço público que foi revitalizado para poder ser mais utilizado? Pesquisem quais alterações foram feitas e como isso contribuiu para o uso desse espaço. Resposta pessoal.
3. Pesquisem a respeito da importância da Arquitetura no melhor aproveitamento do uso do espaço público pela população. Em seguida, montem uma roda de discussão para debater o tema. Resposta pessoal.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Consideremos um ponto P e um plano α, $P \notin \alpha$.

Pelo ponto P, tracemos a reta r perpendicular ao plano α. Pela propriedade **1**, essa reta é única e intersecta α no ponto P'.

> A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o ponto P', $P' \in \alpha$, de modo que $\overline{PP'} \perp \alpha$. Se $P \in \alpha$, definimos $P' \equiv P$.

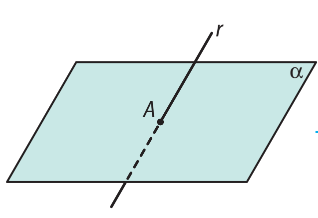


Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

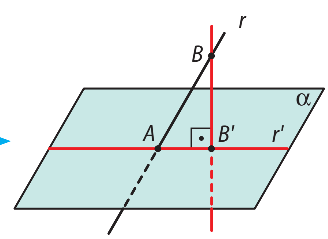
> A projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é a figura obtida pelas projeções ortogonais, sobre α, de todos os pontos de r.

Consideremos, primeiramente, o caso em que a reta r é oblíqua a um plano α e que intersecta o plano no ponto A, conforme mostra a figura **1**.

Tomando outro ponto, B de r, determinamos o ponto B', que é a projeção ortogonal de B sobre o plano α (figura **2**).



■ Figura **1**



■ Figura **2**

Pelo postulado $\mathbf{R}_2$, obtemos, então, a reta r', determinada pelos pontos A e B', e que é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano α.

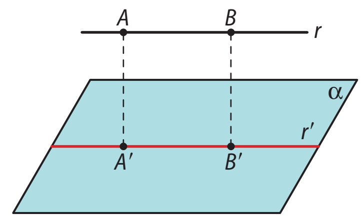
PENSE E RESPONDA

Como você acha que poderíamos definir a projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α?

Ver as **Orientações para o professor**.

Vejamos, agora, casos em que a reta *r* não é oblíqua ao plano α.

- Se *r* é paralela a α, então *r'* é uma reta no plano α paralela a *r*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A': projeção ortogonal de *A* sobre α.
B': projeção ortogonal de *B* sobre α.

- Se *r* está contida em α, então *r'* coincide com *r*.
- Se *r* é perpendicular a α, então a projeção ortogonal de *r* sobre α é o ponto em que a reta *r* intersecta o plano α.

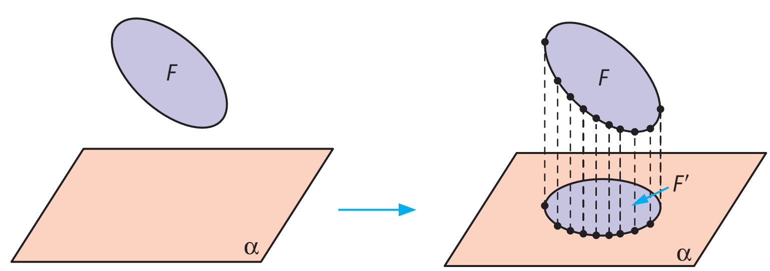
Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano

PENSE E RESPONDA

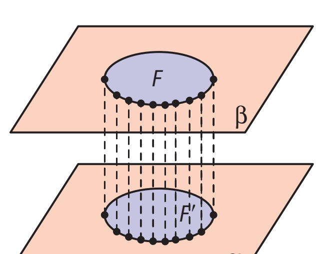
Como é a projeção ortogonal de um polígono convexo sobre um plano α, sabendo que ele está contido em um plano β, perpendicular a α?

Um segmento de reta.

A projeção ortogonal de uma figura *F* sobre um plano α é a figura *F'* obtida pelas projeções ortogonais de todos os pontos de *F* sobre α



Se a figura *F* está contida em um plano β paralelo ao plano α, então *F'* é congruente a *F*.



ATIVIDADE RESOLVIDA

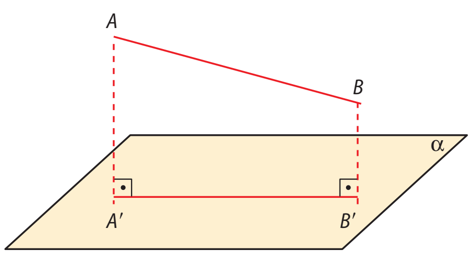
5. Mostre que a projeção ortogonal de um segmento de reta oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor do que o segmento.

Resolução

Para demonstrar esse resultado, vamos primeiro identificar quem são a hipótese e a tese.

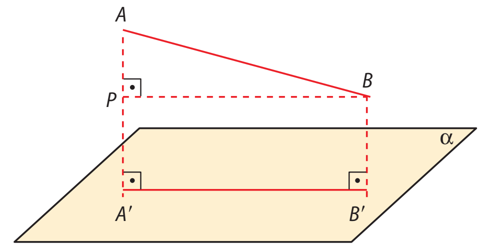
Hipótese
$\overline{AB}$ oblíquo a α
$\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α

Tese
$A'B' < AB$



Primeiramente, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$ e $B \notin \alpha$.

Traçamos um segmento paralelo ao segmento $\overline{A'B'}$ passando por B e que intersecta o segmento $\overline{AA'}$ no ponto P.

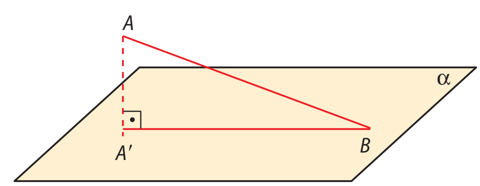


Por construção, $A'B'BP$ é um retângulo e, portanto, $\overline{A'B'} \equiv \overline{PB}$.

Também por construção, $\triangle ABP$ é retângulo em $\hat{P}$. Então, $PB < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo.

Portanto, de $\overline{A'B'} \equiv \overline{PB}$ e $PB < AB$, concluímos que $A'B' < AB$.

Agora, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$ e $B \in \alpha$. (o caso $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$ é análogo)



Nesse caso, $\triangle ABA'$ é retângulo em $\hat{A'}$.

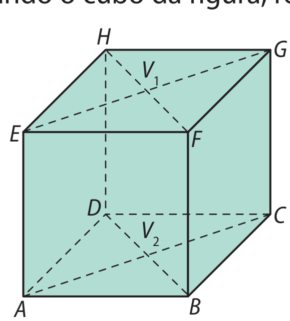
Então $A'B < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo. Como $B \in \alpha$, $B' \equiv B$.

Portanto, $A'B' < AB$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

18. Observando o cubo da figura, responda.

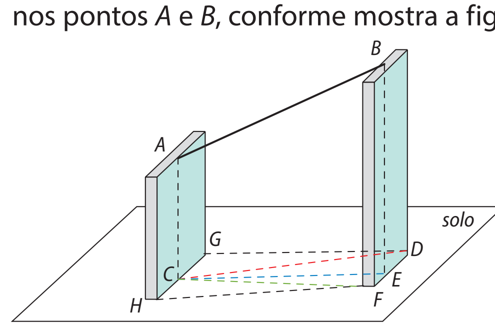


a) Qual é a projeção ortogonal do ponto G sobre o plano ABC? o ponto C

b) Qual é a projeção ortogonal do ponto A sobre o plano BCF? o ponto B

c) Qual é a projeção ortogonal do ponto V_1 sobre o plano ABC? o ponto V_2

19. (UEA-AM) Uma haste de metal foi presa entre dois muros, ambos perpendiculares ao solo, nos pontos A e B, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A projeção ortogonal dessa haste, no solo, é representada na figura pelo segmento

a) $\overline{HF}$

b) $\overline{GD}$

c) $\overline{CD}$

d) $\overline{CE}$ alternativa **d**

e) $\overline{CF}$

> CONEXÕES

Arquitetura

A Arquitetura é uma das profissões em que são feitos muitos projetos utilizando conceitos do desenho técnico. Para ser um arquiteto, é necessário realizar o curso de Arquitetura e Urbanismo, um dos mais concorridos em diversas universidades do Brasil. Mas você sabe o que faz um arquiteto? Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais a respeito dessa profissão.

KEO/SHUTTERSTOCK.COM

- Os arquitetos são responsáveis pelos projetos de imóveis e, em alguns casos, a construção de uma maquete é uma das etapas do projeto.

A profissão de arquiteto

Arquiteto é o profissional que projeta e idealiza os espaços para os mais diversos usos humanos. O profissional formado em Arquitetura e Urbanismo [...] está apto a trabalhar em órgãos públicos (municipais, estaduais ou federais), em empresas privadas, em organizações não governamentais ou como profissional autônomo, no desenvolvimento de projetos de edifícios, de urbanismo e de paisagismo e, ainda, em restauração de monumentos, em estudos de impactos ambientais e arquitetura de interiores.

[...]

[...] este profissional deverá obter conhecimento das diferentes áreas que envolvem a sua formação: ciências da natureza, ciências exatas – aplicadas à Arquitetura e Urbanismo – e ciências humanas, através da apropriação, construção e socialização de conhecimentos teórico-práticos que garantam: a valorização da criatividade intelectual; a capacidade de compreender e traduzir as necessidades sociais do indivíduo, de grupos e da sociedade em geral; e uma visão social de mundo, comprometida com a cidadania e com a transformação da sociedade brasileira.

[...]

GUIA de Profissões: arquitetura e urbanismo. **Portal da Universidade Estadual Paulista**, [2020]. Disponível em: https://www2.unesp.br/portal#!/guiadeprofissoes/humanidades/arquitetura-e-urbanismo/. Acesso em: 14 jul. 2020.

Durante a execução de um projeto arquitetônico, o profissional precisa fazer diversos desenhos para que a execução da obra saia como o planejado. Para isso, são usadas as vistas e as projeções. Além da projeção ortogonal que estudamos, os arquitetos também utilizam a projeção cônica.

Um dos arquitetos mais reconhecidos mundialmente é o espanhol Antoni Gaudí (1852-1926). Sua obra mais famosa é a basílica de La Sagrada Família, localizada em Barcelona (Espanha) e um ícone da arquitetura catalã. O monumento recebe, anualmente, cerca de três milhões de visitantes. Um fato curioso é que, ainda hoje, a obra não está concluída. Antoni Gaudí assumiu a construção em 1883, trabalhando nela até 1926, ano de sua morte. Atualmente, a construção ainda segue com diversos arquitetos se inspirando nas obras de Gaudí a fim de concluir esse ícone mundial.

Fonte dos dados: JONES, R. Clássicos da arquitetura: La Sagrada Familia - Antoni Gaudí. **ArchDaily**, c2008-2020. Disponível em: https://www.archdaily.com.br/br/787647/classicos-da-arquitetura-la-sagrada-familia-antoni-gaudi. Acesso em: 14 jul. 2020.

WIRESTOCK IMAGES/SHUTTERSTOCK.COM

- Vista frontal da basílica de La Sagrada Família, localizada em Barcelona (Espanha). A conclusão das obras está prevista para 2026. Fotografia de 2018.

KEO/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Você já tinha ouvido falar na profissão de arquiteto? Na região onde você mora existe alguma universidade que disponibilize esse curso de graduação? Pesquise a respeito do curso: qual é a duração, quantas vagas há, qual é o processo de ingresso etc. Resposta pessoal.

2. Você conhece outras profissões que utilizem desenho técnico e projeções no seu dia a dia? Pesquise sobre o assunto e compartilhe os resultados com os demais colegas da turma. Resposta pessoal. Resposta esperada: Profissões como engenheiro e *designer* (de interiores, de embalagens).

3. Reúna-se a dois colegas e escolham um monumento ou um edifício que seja conhecido na sua cidade. Pesquisem quem foi o responsável pela concepção do projeto: foi um arquiteto? Ele tem outros projetos na cidade? Apresentem a pesquisa feita para o restante da turma. Resposta pessoal.

4. Reúna-se a dois colegas e escolham um objeto para fazer a projeção ortogonal das vistas frontal, superior e lateral. Resposta pessoal.

PENSE E RESPONDA

Que conceitos matemáticos podem ser relacionados com as atividades desta seção?

Resposta esperada: Projeção ortogonal.

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Programando posições relativas de retas e de planos

Para que os computadores executem tarefas é necessário que sejam programados para tal. Essa programação pode ser feita em diversas linguagens e formas. Para esta atividade, vamos utilizar o **Scratch**, um *software* que pode ser usado *on-line* pelo *link* <https://scratch.mit.edu/> (acesso em: 14 jul. 2020) ou pode ser baixado para o computador e usado *off-line*.

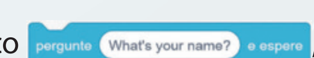
O **Scratch** utiliza uma linguagem de programação em blocos. Basta identificar os comandos que deseja executar – à esquerda da tela – e arrastar os blocos para a área de trabalho – no centro da tela. Não se esqueça de garantir que seu bloco, isto é, sua sequência de comandos, seja coerente e atenda a seu objetivo. Explore a plataforma: veja as ferramentas, os tutoriais e divirta-se com alguns programas já prontos na aba **Explorar** do *site*.

Nesta atividade, será explorada a posição relativa entre duas retas com base nas propriedades verificadas, isto é, será construído um programa que vai perguntar sobre uma série de propriedades envolvendo duas retas e, com base nas respostas fornecidas, retornará um resultado sobre a posição relativa entre essas retas.

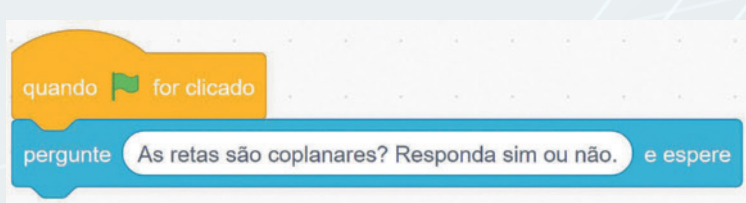
Para construir esse programa é preciso pensar em quais são as perguntas necessárias para determinar precisamente a posição relativa entre duas retas. Usaremos o fluxograma construído na página **53** para isso, acompanhando os passos a seguir.

I. Adicione na área de trabalho o bloco 

que está na barra lateral na categoria **Eventos**. Ao clicar na bandeira verde no topo direito, o programa será executado.

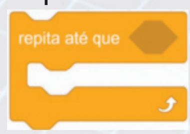
II. Na categoria **Sensores**, arraste o bloco 

, encaixe-o no passo anterior e altere a pergunta para "As retas são coplanares? Responda sim ou não.".



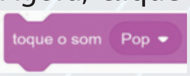
IMAGENS: SCRATCH

TOPIC SENTENCES/SHUTTERSTOCK.COM

III. Note que se a resposta dada pelo usuário for diferente de "sim" ou "não", o computador pode interpretar as informações equivocadamente, apresentando um erro ou chegando a uma conclusão errada. Para que isso não aconteça, vamos garantir que as únicas respostas possíveis sejam "sim" ou "não", clicando em **Controle** e arrastando o bloco 

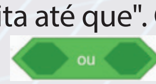
para o código.

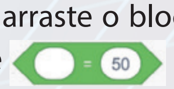
SCRATCH

IV. Agora, clique em **Som** e arraste o bloco 

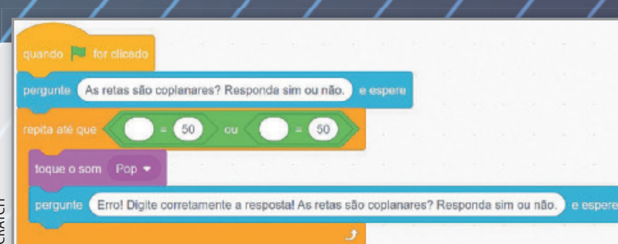
para dentro da chave anterior; repita a pergunta, colocando um aviso de erro no início da frase. Para isso, arraste um novo bloco de criação de pergunta e escreva "Erro! Digite corretamente a resposta! As retas são coplanares? Responda sim ou não.".

SCRATCH

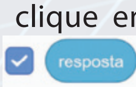
V. É preciso avisar o programa de que ele deve parar de repetir essa notificação de erro e seguir com o código quando a resposta "sim" ou "não" for dada. Para fazer isso, adicione essa verificação no losango vazio posicionado logo após "repita até que". Como há duas respostas possíveis, em **Operadores**, arraste o bloco 

para dentro desse losango e, na sequência, arraste 

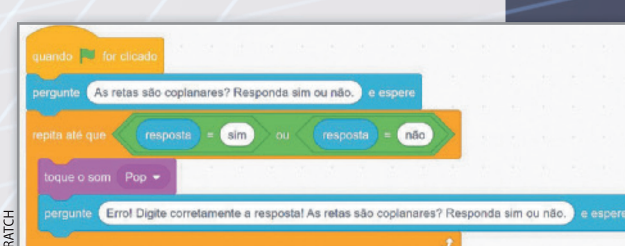
para cada um dos losangos do bloco anterior.



SCRATCH

VI. Agora clique em **Sensores** e arraste o bloco 

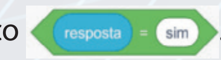
para dentro da primeira igualdade e substitua o "50" por "sim". Repita o processo para a segunda igualdade e troque o "50" por "não".



SCRATCH

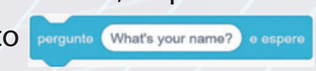
VII. Agora que as respostas foram dadas, é necessário instruir o programa sobre o que fazer com elas. Se a resposta for "sim", é necessário perguntar se as retas têm um único ponto comum. Para isso, em **Controle,** arraste o bloco 

SCRATCH

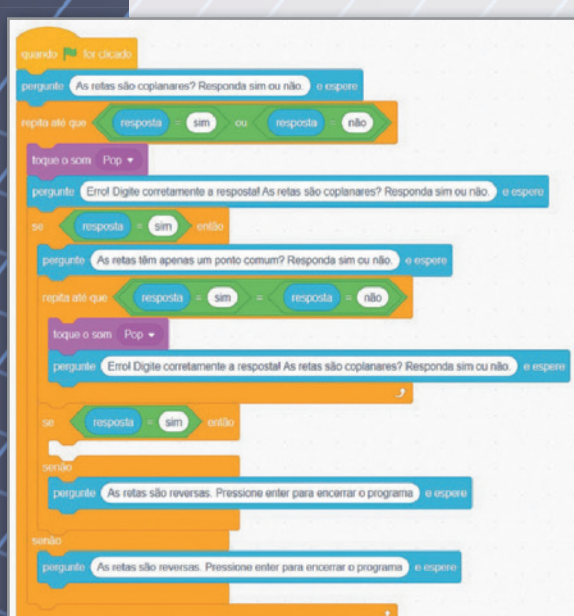
para o fim do bloco anterior e preencha o losango com o bloco 

.

SCRATCH

VIII. Caso a resposta seja "não", as retas são reversas e precisamos notificar o usuário sobre isso. Para isso, clique em **Sensores**, arraste o bloco 

para o "senão" e digite "As retas são reversas". Pressione ***Enter*** para encerrar o programa.



SCRATCH

IX. Com isso, finalizamos a primeira pergunta a ser feita para descobrir a posição relativa entre duas retas. Para fazer as demais perguntas, a estrutura é muito parecida com a da primeira. Assim, repita o que foi criado até aqui. Vá até a primeira pergunta, clique com o botão direito, selecione **Duplicar** e arraste o bloco copiado para dentro do "se". Troque as perguntas para "As retas têm apenas um ponto comum? Responda sim ou não.". Não esqueça de trocar a pergunta no erro também.

Se a resposta for "sim", a conclusão é que as retas são concorrentes. Para notificar essa resposta para o usuário, mova o bloco copiado do "senão" para o "se" e altere o texto para "As retas são concorrentes". Pressione ***Enter*** para encerrar o programa.

X. Para o caso em que a resposta seja "não", precisamos perguntar se as retas têm todos os pontos comuns. Para isso, repita os passos anteriores para copiar o bloco da pergunta e altere as perguntas e respostas correspondentes. O programa final ficará assim:

SCRATCH

Pressione a bandeira verde e teste as perguntas que aparecerão na tela da direita. Experimente dar respostas erradas também, para observar as mensagens de erro.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Crie um programa para determinar a posição relativa entre uma reta e um plano.

2. Crie um código que diga qual é a posição relativa entre dois planos considerados.

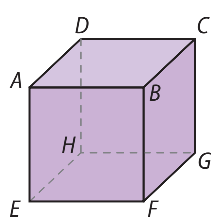
> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Analise as afirmações a seguir e indique qual delas é falsa. alternativa **d**

a) Três pontos distintos de uma circunferência definem um plano.
b) O centro e os extremos de um diâmetro de uma circunferência não definem um plano.
c) Dois diâmetros distintos de uma circunferência definem um plano.
d) Se dois pontos de uma circunferência pertencem a um plano, então a circunferência está contida nesse plano.
e) Dadas uma reta e uma circunferência em um mesmo plano e que não se intersectam, há somente uma reta paralela à reta dada que passa pelo centro da circunferência.

2. (Vunesp-SP) Considere o cubo da figura. Das alternativas abaixo, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é: alternativa **e**



a) (*A*, *D*), (*C*, *G*), (*E*, *H*)
b) (*A*, *E*), (*H*, *G*), (*B*, *F*)
c) (*A*, *H*), (*C*, *F*), (*F*, *H*)
d) (*A*, *E*), (*B*, *C*), (*D*, *H*)
e) (*A*, *D*), (*C*, *G*), (*E*, *F*)

3. (UERN) Seja um plano α e uma reta *s* secante a α. Para qualquer reta *r* contida em α, é correto afirmar: alternativa **e**

a) *r* e *s* podem ser paralelas, apenas.
b) *r* e *s* podem ser reversas, apenas.
c) *r* e *s* podem ser concorrentes, apenas.
d) *r* e *s* podem ser paralelas ou reversas.
e) *r* e *s* podem ser reversas ou concorrentes.

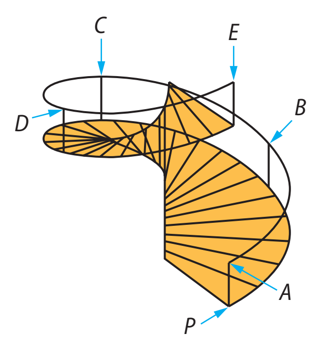
4. (URRN) Um plano é determinado por: alternativa **d**

a) uma única reta.
b) duas retas quaisquer.
c) três pontos quaisquer.
d) uma reta e um ponto não pertencente a ela.
e) uma reta e um ponto a ela pertencente.

5. (Vunesp-SP) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, *r* e *s*, reversas. Seja *t* a perpendicular comum a *r* e a *s*. Então: alternativa **c**

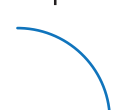
a) *t* é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
b) *t* é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
c) *t* é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) *t* é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em *r* e *s*.
e) *t* é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

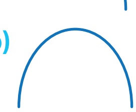
6. (Enem/MEC) O acesso entre dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P*, *A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.

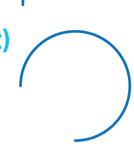


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A figura que melhor representa a projeção ortogonal sobre o piso da casa (plano) do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é: alternativa **c**

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

7. (UEPB) Entre as proposições dadas abaixo, a única correta é: alternativa **b**

a) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

b) Duas retas concorrentes determinam um único plano.

c) Os pontos $(-1, 2)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$ são colineares.

d) Se duas retas, r, s, do espaço são paralelas a um plano α, então r e s são paralelas.

e) Dados dois pontos distintos, A, B, do espaço, existe um único plano que os contém.

8. (UFAL) Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si. A reta r é perpendicular ao plano α e a reta s é perpendicular ao plano β. Nessas condições: alternativa **c**

a) a reta r não pode ter pontos comuns com o plano β.

b) as retas r e s são concorrentes.

c) as retas r e s podem ser reversas.

d) a reta s está contida em um plano perpendicular a α.

e) as retas r e s são paralelas entre si.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, vimos que a geometria espacial de posição é uma das áreas da Matemática em que o método dedutivo está muito presente. Ele consiste em demonstrar resultados a partir de noções primitivas, definições e postulados, que são aceitos sem demonstração. Vimos alguns tipos de demonstrações e fizemos algumas ao longo do Capítulo. Estudamos também as posições relativas entre os principais entes geométricos (ponto, reta e plano) no plano e no espaço.

Estudamos o conceito de paralelismo e de perpendicularismo e como eles se relacionam. Vimos também alguns teoremas e propriedades relacionados a esses conceitos. Outro conteúdo abordado foi o de projeção ortogonal e sua relevância para projetistas e para o trabalho com vistas e projeções.

Nas páginas de abertura, foi discutido como o desenho técnico é importante para representarmos o nosso mundo tridimensional em um suporte bidimensional (como a folha de papel). Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a fazer essa transposição utilizando o desenho técnico e a geometria descritiva?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo 2: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados neste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue identificar se há um entendimento mais claro do funcionamento da estrutura lógica da geometria espacial e da Matemática como um todo?
- Você se sente confiante para realizar uma demonstração em Matemática?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre o conceito de posições relativas? E de projeções ortogonais?
- Você consegue relacionar o conteúdo visto neste Capítulo com algumas das tarefas executadas por arquitetos, engenheiros e projetistas?

CAPÍTULO

3

Poliedros

A beleza dos cristais é de encher os olhos, não é mesmo? Estes cristais, na sua forma mais pura, lembram poliedros, assunto deste Capítulo.

A ciência que estuda os cristais é chamada Cristalografia, cujos estudos são importantes para o avanço tecnológico de diversas áreas, entre elas, a engenharia dos materiais.

Os cristalógrafos classificam esses minerais conforme o sistema cristalino a que pertencem: cúbico, tetragonal, hexagonal, trigonal, ortorrômbico, monoclínico ou triclínico. Esse sistema foi definido de acordo com a disposição, de modo geométrico, dos átomos dos cristais. O arranjo desses átomos garante algumas propriedades ao cristal, como a dureza e o formato. O tipo de arranjo atômico, por exemplo, é o que diferencia um frágil carbono de um diamante inquebrável.

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 3, 4 e 7
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT309
  - Competência específica 5: EM13MAT504
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

MONIKA WISNIEWSKA/SHUTTERSTOCK.COM; STELLARI.STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item. NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Observe a imagem. Quais formas geométricas, planas ou espaciais, você consegue identificar?

2. Na região onde vocês moram, há mineração de algum tipo de cristal? Qual(is)? Caso não tenha, faça uma breve pesquisa a respeito da mineração de cristais no Brasil: locais onde ocorre, principais cristais extraídos e o destino desses recursos.

3. Escolham um dos sistemas cristalinos citados no texto e respondam às questões:

- Qual sistema foi escolhido?
- Por que vocês acham que esse sistema recebe esse nome?
- Qual é o formato das células cristalinas desse sistema? Pesquisem em livros ou na internet a respeito do formato das células do sistema cristalino e encontrem o nome de um cristal que pertença a ele.

Pedras semipreciosas: fluorita, quartzo, quartzo esfumaçado e quartzo rosa.

Poliedros

É comum encontrarmos no dia a dia objetos cujos formatos lembram sólidos geométricos. Basta observarmos ao nosso redor, pois eles estão presentes na arquitetura, na engenharia, nas artes plásticas, entre outras áreas do nosso cotidiano. Neste Capítulo, vamos estudar os sólidos geométricos conhecidos como poliedros.

Frequentemente, na arquitetura e engenharia, os projetos e as construções utilizam formatos que lembram poliedros para, por exemplo, obter o melhor aproveitamento da área ou mesmo para criar ambientes mais agradáveis à vista. Observe a seguir o prédio da Biblioteca Nacional de Belarus, país do Leste Europeu. Obra dos arquitetos Viktor Kramarenko e Mikhail Vinogradov, o prédio é conhecido como "diamante bielorrusso" e tem formato de um poliedro.

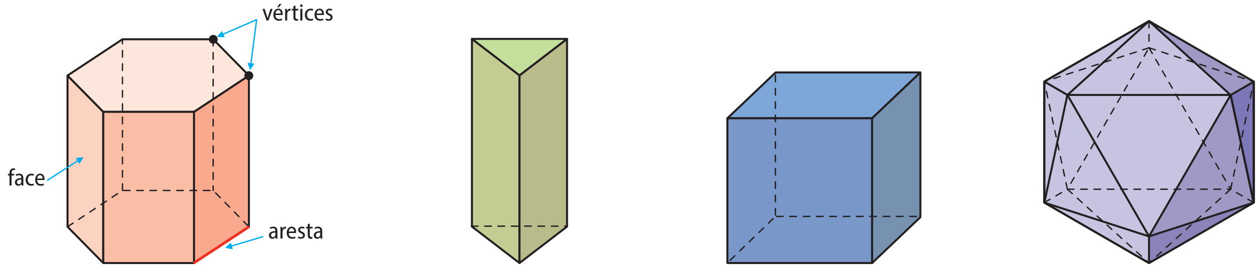
Os **poliedros** são sólidos formados por um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles, em que:

- cada lado de um desses polígonos é comum a dois, e somente dois, polígonos;
- a intersecção de dois desses polígonos é um lado comum ou é um vértice comum ou é vazia.

BAHDANOVICH ALENA/ SHUTTERSTOCK.COM

Prédio da Biblioteca Nacional de Belarus. Fotografia de 2014.

Observe alguns exemplos de poliedros:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Em um poliedro, destacamos os seguintes elementos:

- **faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro;
- **arestas**: são os lados comuns a duas faces do poliedro;
- **vértices**: são os vértices das faces do poliedro.

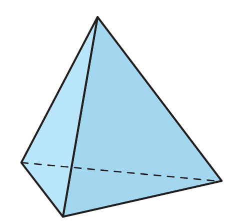
Assim como os polígonos são nomeados pelo seu número de lados, os poliedros são nomeados pelo seu número de faces. Observe a seguir o nome e o respectivo número de faces de alguns poliedros.

Nome do poliedro	Número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
heptaedro	7
octaedro	8
eneaedro	9
decaedro	10
undecaedro	11
dodecaedro	12
icosaedro	20

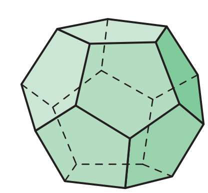
SAIBA QUE...

Observação:

A palavra "poliedro" é formada por **poli**, do grego *polys* (muitos ou vários), e **edro**, do grego *hedra* (face), ou seja, um poliedro seria um sólido de **muitas faces**.



Tetraedro: 4 faces.



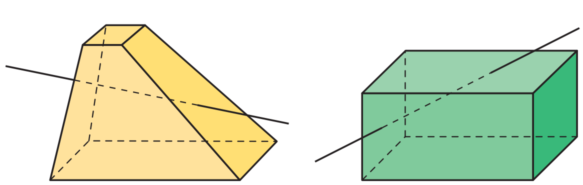
Dodecaedro: 12 faces.

Poliedros convexos e poliedros não convexos

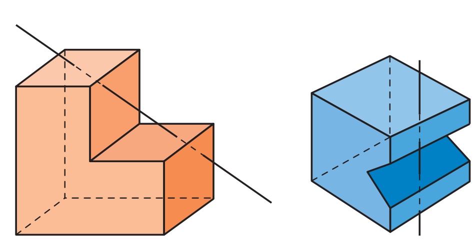
Em um poliedro, se qualquer reta, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, dizemos que ele é **convexo**; caso contrário, é um **não convexo**.

Exemplos:

Poliedros convexos



Poliedros não convexos



Neste Capítulo, concentraremos nossos estudos nos poliedros convexos.

Relação de Euler

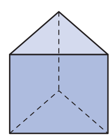
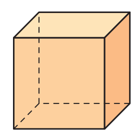
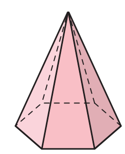
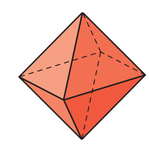
Existe uma relação importante que envolve o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V) de um poliedro convexo. Essa relação é válida para todo poliedro convexo e recebe o nome de **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

ROOK76/SHUTTERSTOCK.COM

Selo postal da Suíça em homenagem a Leonhard Euler.

$$V - A + F = 2$$

Veja alguns exemplos:

Poliedro				
F	5	6	7	8
A	9	12	12	12
V	6	8	7	6
$V - A + F = 2$	$6 - 9 + 5 = 2$	$8 - 12 + 6 = 2$	$7 - 12 + 7 = 2$	$6 - 12 + 8 = 2$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A relação de Euler pode ser empregada para determinar o número de um dos elementos (faces, arestas ou vértices) de um poliedro convexo, desde que os outros dois sejam conhecidos. Um poliedro em que é válida a relação de Euler é conhecido como **poliedro euleriano**.

Os poliedros convexos são todos eulerianos. Sendo assim, em todo poliedro convexo vale a relação $V - A + F = 2$.

Observação:

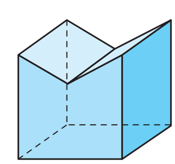
Há poliedros não convexos para os quais vale a relação de Euler. Na figura, temos um exemplo.

$A = 15$

$V = 10$

$F = 7$

$V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2$ Ver as **Orientações para o professor**.



Poliedro não convexo em que a relação de Euler é válida.

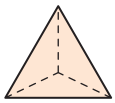
Poliedro regular

Um poliedro convexo é **regular** quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e quando em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

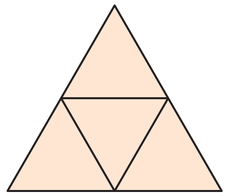
É possível provar que existem somente cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Observe a seguir representações dos cinco poliedros regulares e as respectivas planificações de suas superfícies.

- 4 faces triangulares
- 4 vértices
- 6 arestas

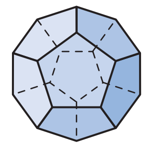


■ Tetraedro regular.

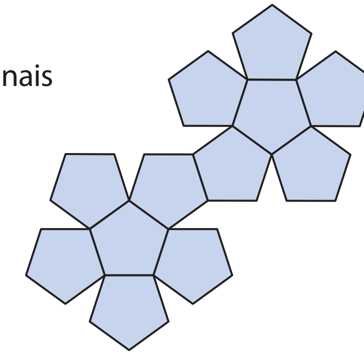


■ Planificação da superfície.

- 12 faces pentagonais
- 20 vértices
- 30 arestas



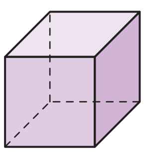
■ Dodecaedro regular.



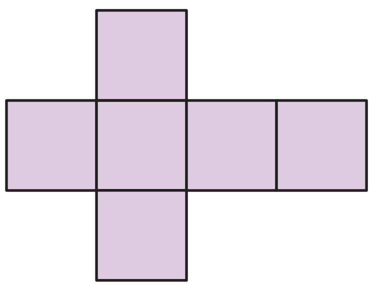
■ Planificação da superfície.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- 6 faces quadrangulares
- 8 vértices
- 12 arestas

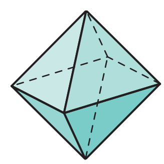


■ Hexaedro regular.

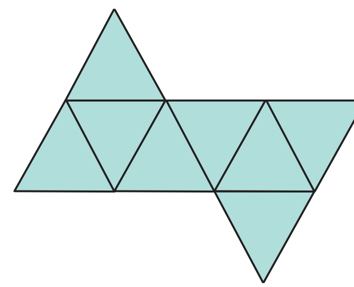


■ Planificação da superfície.

- 8 faces triangulares
- 6 vértices
- 12 arestas

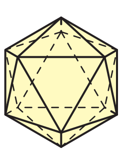


■ Octaedro regular.

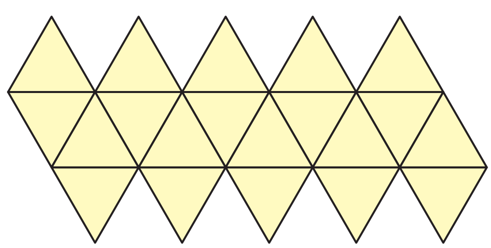


■ Planificação da superfície.

- 20 faces triangulares
- 12 vértices
- 30 arestas



■ Icosaedro regular.



■ Planificação da superfície.

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão levam o nome do filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.), que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais.

Para que um poliedro seja considerado um **poliedro de Platão**, é necessário que as faces do poliedro tenham o mesmo número de arestas, em todos os vértices concorra o mesmo número de arestas e seja válida a relação de Euler. Assim, os poliedros de Platão englobam todos os poliedros regulares convexos, e existem somente cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Nos poliedros de Platão, as faces não precisam ser polígonos regulares; assim, nem todo poliedro de Platão é regular.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em um poliedro convexo, o número de faces é 11 e o número de vértices é 18. Calcule o número de arestas.

Resolução

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, válida para qualquer poliedro convexo, temos: $F = 11$ e $V = 18$. Logo, $V - A + F = 2 \Rightarrow 18 - A + 11 = 2 \Rightarrow A = 27$.

Portanto, o poliedro tem 27 arestas.

2. Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e duas hexagonais. Calcule o número de vértices desse poliedro.

Resolução

Pelo enunciado, o poliedro possui oito faces, sendo seis quadrangulares e duas hexagonais. Vamos determinar o número de arestas:

Seis faces quadrangulares: $6 \cdot 4 = 24$ arestas

Duas faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$ arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:

$2A = 24 + 12 \Rightarrow 2A = 36 \Rightarrow A = 18$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$

Assim, o número de vértices é 12.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

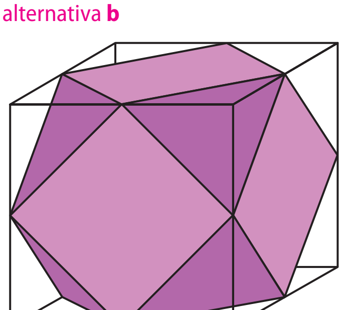
1. Em um poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é nove. Determine o número de vértices. 9 vértices

2. Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices. 15 arestas e 10 vértices

3. (Fatec-SP) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Calcule o número de vértices desse poliedro. 12 vértices

4. (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. 10 vértices

5. (Unifesp-SP) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo. alternativa **b**



EDITORIA DE ARTE

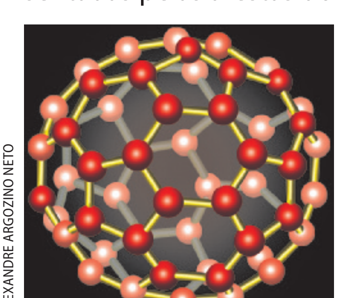
O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

a) 8 e 8.
b) 8 e 6.
c) 6 e 8.
d) 8 e 4.
e) 6 e 6.

6. Em uma publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares. Em homenagem ao arquiteto estadunidense Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno. 60 átomos e 90 ligações

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Trabalho. Fundacentro. **Fulerenos**. Disponível em: http://antigo.fundacentro.gov.br/nanotecnologia/fulerenos. Acesso em: 22 ago. 2020.

Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações representadas pelas arestas do poliedro.



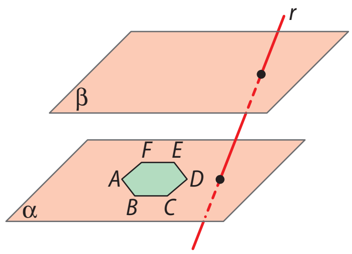
ALEXANDRE ARGOZINO NETO

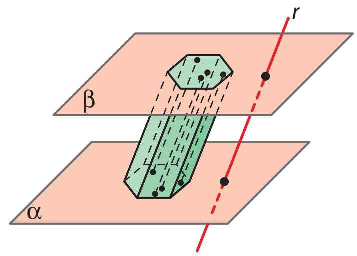
Representação de molécula de fulereno (imagem sem escala; cores-fantasia).

Prismas

Agora, vamos estudar os prismas, suas características, seus elementos e as maneiras de calcular a área da superfície e o volume de um prisma.

Vamos considerar dois planos paralelos α e β, um polígono convexo, contido em α, e uma reta *r* secante a esses planos e que não intersecta o polígono.



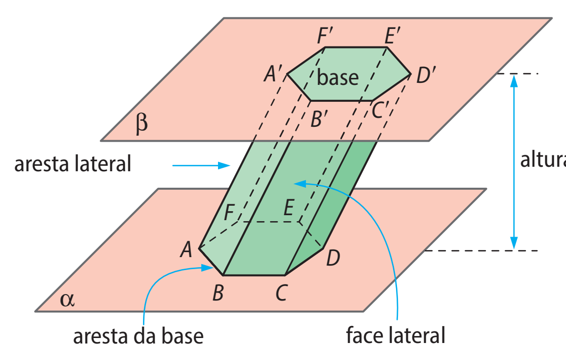


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *r*, com uma extremidade em um ponto de um polígono convexo e a outra no plano β, é denominada **prisma**.

Considerando o prisma representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

- **bases**: são os polígonos convexos congruentes *ABCDEF* e *A'B'C'D'E'F'* situados nos planos paralelos α e β (planos das bases);
- **faces laterais**: são os paralelogramos *ABB'A'*, *BCC'B'*, ..., *AFF'A'*;
- **vértices**: são os vértices das faces do prisma, *A*, *B*, ..., *E'*, *F'*;
- **arestas das bases**: são os lados dos polígonos das bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{F'A'}$;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ..., $\overline{FF'}$;
- **altura**: é a distância entre os planos das bases.



Podemos classificar os prismas de acordo com o número de lados dos polígonos das bases. Por exemplo, os prismas podem ser:

- **triangulares**: quando as bases são triângulos;
- **quadrangulares**: quando as bases são quadriláteros;
- **pentagonais**: quando as bases são pentágonos, e assim por diante.

DIFFERR/SHUTTERSTOCK.COM

■ É comum, em nosso cotidiano, encontrarmos objetos que lembram o formato de prismas, como o contêiner utilizado para transportar diversos tipos de produtos e os pavimentos hexagonais utilizados em praças e calçadas.

T.W. VAN URK/SHUTTERSTOCK.COM

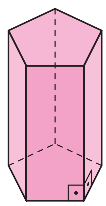
De acordo com a inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas podem ser **retos** ou **oblíquos**.

Em um prisma reto, as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, e em um prisma oblíquo, as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

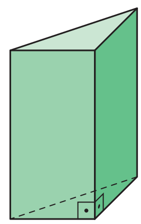
Exemplos:

Prismas retos

As bases de um prisma hexagonal regular são hexágonos regulares; suas faces laterais são retângulos congruentes.

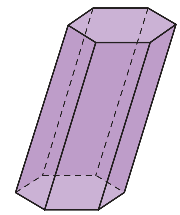


▪ Prisma pentagonal.

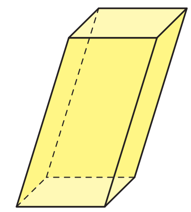


▪ Prisma triangular.

Prismas oblíquos



▪ Prisma hexagonal.



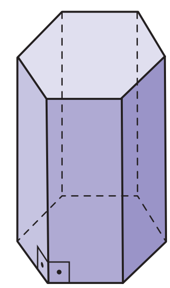
▪ Prisma quadrangular.

PENSE E RESPONDA

Sabendo que a figura ao lado apresenta um prisma hexagonal regular, que figuras geométricas compõem suas bases e suas faces laterais?

Prisma regular

Se o prisma for reto e as bases forem polígonos regulares, o prisma é dito **regular**. Um exemplo é a figura ao lado, que representa um prisma hexagonal regular.



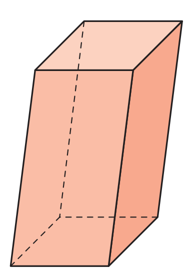
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Paralelepípedos

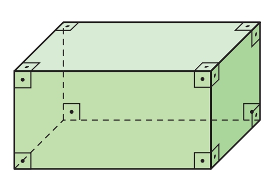
Os prismas cujas bases são paralelogramos recebem nomes especiais.

- **Paralelepípedo**: é um prisma cujas bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo reto retângulo** ou **bloco retangular**: é um prisma reto cujas bases e faces laterais são retângulos. O paralelepípedo reto retângulo é um caso particular do paralelepípedo.
- **Cubo** ou **hexaedro regular**: é um prisma reto cujas faces são todas quadradas. O cubo é um caso particular do paralelepípedo reto retângulo.

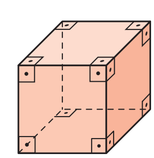
Exemplos:



▪ Paralelepípedo.

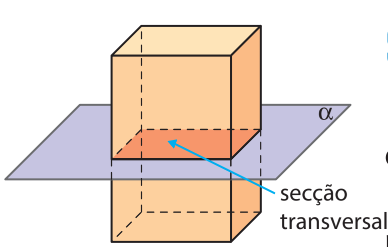


▪ Paralelepípedo reto retângulo.



▪ Cubo.

Secção transversal de um prisma



A intersecção de um prisma com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do prisma**.

Observe na figura que a secção transversal de um prisma é um polígono congruente aos polígonos das bases.

Área da superfície de um prisma

Em um prisma, definimos:

- **área da base** (S_b) como a área de um dos dois polígonos que formam as bases;
- **área lateral** (S_ℓ) como a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** (S_t) como a soma da área lateral e das áreas das bases.

Assim, podemos escrever:

$$S_t = S_\ell + 2S_b$$

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Academia de Platão

O filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.) contribuiu, de forma contundente, para a estruturação da matemática da Grécia antiga por meio de sua escola em Atenas, a Academia.

A Academia de Platão

[...] Perto do ano de 377 a.C., Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível. [...] Platão herdou de Pitágoras a ideia de que a matemática estruturava o universo. Tinha, no entanto, uma concepção geométrica, contrastando com a concepção aritmética pitagórica.

[...]

No tempo de Platão, três célebres problemas receberam a atenção dos matemáticos [...]. Os três problemas são enunciados a seguir:

Duplicação do cubo. Encontrar o lado x de um cubo que tem como volume duas vezes o volume de um cubo de lado a. [...] O problema equivale, portanto, a encontrar o valor $\sqrt[3]{2}$ usando régua e compasso.

Trisseção do ângulo. Dado um ângulo θ, encontrar, usando a régua e o compasso, o ângulo $\theta/3$.

Quadratura do círculo. Encontrar o lado x de um quadrado que tenha a mesma área de um círculo de raio r [...], o que equivale a determinar o valor de π usando régua e compasso.

Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão "quadratura do círculo" ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX.

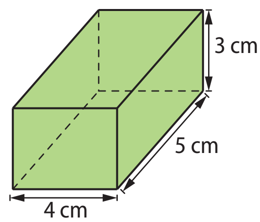
MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 37-38. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 30 jul. 2020.

JOYCE NELSON/SHUTTERSTOCK.COM

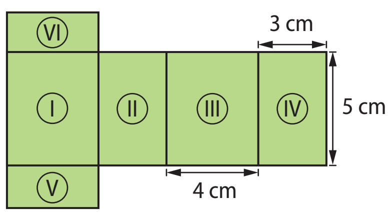
Estátua de Platão presente na Academia de Atenas, Grécia. Fotografia de 2019.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, determine a área total da superfície do paralelepípedo.



Resolução



A superfície do paralelepípedo é formada por seis faces retangulares, indicadas na planificação anterior. Note que I = III, II = IV e V = VI. Calculando cada área, temos:

$S_I = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$

$S_{II} = 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

$S_V = 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$

Então:

$S_t = 2S_I + 2S_{II} + 2S_V$

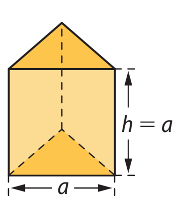
$S_t = 2(20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94$

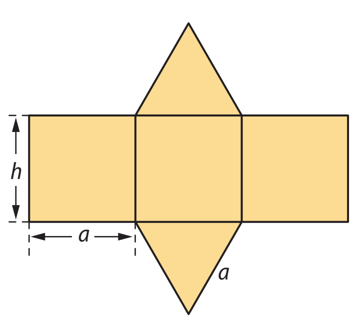
Portanto, a área total da superfície é de 94 cm².

4. Em um prisma triangular regular, a medida *a* da aresta da base é igual à medida *h* da altura do prisma. Sabendo que a área lateral é 10 m², calcule a área total do prisma.

Resolução

Planificando a superfície do prisma, temos:





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A face lateral é um retângulo de dimensões *a* e *h*.

$S_\ell = 3 \cdot (a \cdot h) \Rightarrow S_\ell = 3 \cdot (a \cdot a) \Rightarrow S_\ell = 3a^2$

Como $S_\ell = 10\text{ m}^2$, temos:

$3a^2 = 10 \Rightarrow a^2 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{10}{3}} = \sqrt{\dfrac{30}{9}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$ m, pois a > 0.

A base é um triângulo equilátero cujo lado mede *a*. Assim:

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{10\sqrt{3}}{12}\text{ m}^2$$

Cálculo da área total:

$$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 10 + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{12} = 10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Portanto, $S_t = 10\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{m}^2$.

5. Felipe está construindo uma piscina no quintal de sua casa no formato de um bloco retangular que possui internamente 8 metros de comprimento, 4 metros de largura e 1,5 metro de profundidade. O revestimento escolhido por Felipe para cobrir a área interna da piscina é formado por quadrados de cerâmica com 25 cm de lado vendidos por R$ 1,50 a unidade. Considerando que não haverá espaço entre os quadrados, calcule o valor que Felipe deve gastar para comprar a quantidade exata de revestimento necessário para cobrir a área interna da piscina.

Resolução

A área total de um paralelepípedo reto retângulo é dada por $S_t = S_l + 2 \cdot S_b$.

Por se tratar de uma piscina, o revestimento não será colocado em uma das faces do paralelepípedo. Assim, temos:

$S_t = 8 \cdot 4 + 2\,(4 \cdot 1{,}5) + 2\,(8 \cdot 1{,}5) = 68\text{ m}^2$

A área de cada revestimento é:

$A_R = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625\text{ m}^2$

O total de unidades necessárias para o revestimento é de $\dfrac{68}{0{,}0625} = 1088$.

Felipe precisará comprar 800 unidades. Como cada unidade custa R$ 1,50, então o custo total do revestimento é dado por:

$1088 \cdot 1{,}5 = 1632$

O custo do revestimento será de R$ 1.632,00.

ATIVIDADES

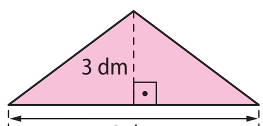
NÃO ESCREVA NO LIVRO

7. Dado um cubo de aresta 8 cm, calcule a área total do cubo. $384\ cm^2$

8. A diagonal de um paralelepípedo reto retângulo mede 13 dm, e a diagonal da base, 5 dm. Determine as três dimensões do paralelepípedo, sendo a soma das medidas de todas as suas arestas igual a 76 dm. 3 dm, 4 dm e 12 dm

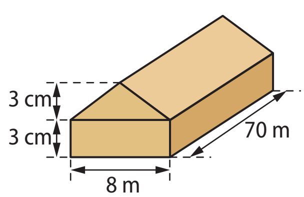
9. Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine sua área lateral. $400\ cm^2$

10. Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com medidas indicadas na figura. $S_t = 132\ dm^2$



Sabendo que a altura do prisma é igual a $\frac{1}{3}$ do perímetro da base, calcule a área total da superfície do prisma.

11. (UFRN) Atualmente, uma das técnicas muito utilizadas no cultivo de hortaliças é a produção em estufas (plasticultura), pois, entre outros fatores, possibilita a proteção contra chuvas, frio, insetos e um aumento da produtividade, que pode atingir até 200%, como no exemplo da abóbora italiana. $1\,192\ m^2$

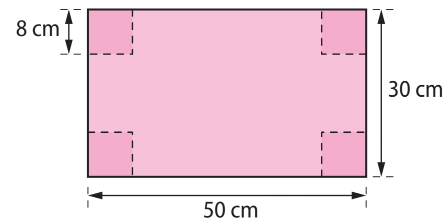


Considerando uma estufa como a representada acima, em que o triângulo da fachada é isósceles, calcule a área de plástico utilizado para revesti-la totalmente (exceto o piso).

12. Em um paralelepípedo reto retângulo, o comprimento é o dobro da largura, e a altura é 15 cm. Sabendo que a área total é $424\ cm^2$, calcular as dimensões desconhecidas desse paralelepípedo. 8 cm; 4 cm

13. As dimensões de um paralelepípedo reto retângulo são números consecutivos. Sabendo que a soma das medidas de todas as suas arestas é 84 cm, calcule a área total da superfície desse paralelepípedo. $292\ cm^2$

14. (FCMSC-SP) Dispondo de uma folha de cartolina medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha (ver figura abaixo).

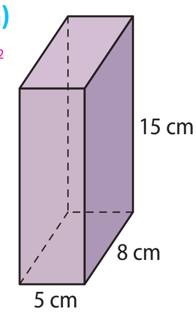


Qual será o volume dessa caixa, em centímetros cúbicos? $V = 3\,808\ cm^3$

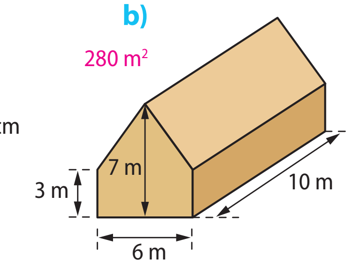
15. (UnB-DF) Em um prisma triangular regular, a área lateral é o quádruplo da área da base. Sabendo que o triângulo da base pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 dm, calcule a área total do prisma em decímetros quadrados e multiplique o resultado por $\sqrt{3}$. $54\ dm^2$

16. Calcule a área total dos prismas retos ilustrados.

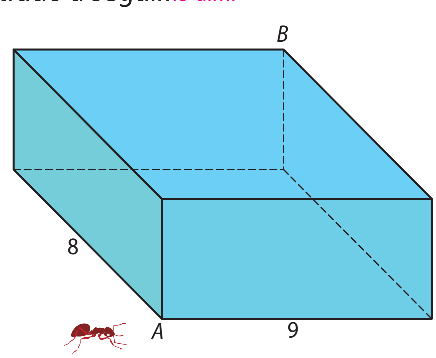
a) $470\ cm^2$



b) $280\ m^2$



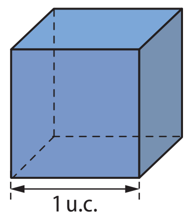
17. (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice *A* do paralelepípedo reto ilustrado a seguir. 15 u.m.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice *B* (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)?

Volume



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Para medir a quantidade de espaço que um sólido S ocupa, precisamos comparar esse sólido com uma unidade de medida de volume. O número real V positivo, obtido por essa comparação, é chamado de volume do sólido.

Vamos adotar como unidade de medida padrão um cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de comprimento), conhecido como cubo unitário. Consideremos que o volume desse cubo unitário seja de 1 (u.c.)^3.

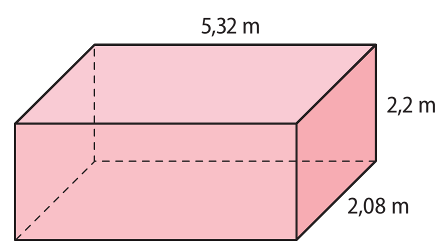
Volume de um paralelepípedo

Um caminhoneiro transporta sacos de areia em um caminhão com carroceria do tipo baú, que tem capacidade de 4 000 kg e comprimento igual a 5,32 m, largura de 2,08 m e 2,2 m de altura.

Para calcular o volume da carroceria desse caminhão, podemos representar a carroceira por meio de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5,32 m, 2,08 m e 2,2 m. Observe:

VERESHCHAGIN DMITRY/
SHUTTERSTOCK.COM

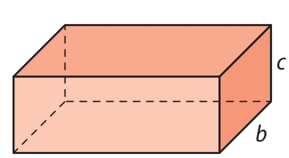
- Existem diversos tamanhos de caminhões-baú, mas todos eles possuem uma carroceria em formato que lembra um paralelepípedo.



Para calcular esse volume, devemos multiplicar as três dimensões do paralelepípedo: **comprimento**, **largura** e **altura**. Observe:

$$V = 5{,}32 \text{ m} \cdot 2{,}08 \text{ m} \cdot 2{,}2 \text{ m} \simeq 24{,}34 \text{ m}^3$$

No caso geral de um paralelepípedo qualquer, prova-se que o volume V desse paralelepípedo de dimensões com medidas a, b e c é dado por:



$$V = a \cdot b \cdot c$$

Como o produto $a \cdot b$ equivale à área da base A_b e c é a medida h da altura, podemos dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela medida da altura:

$$V = S_b \cdot h$$

SAIBA QUE...

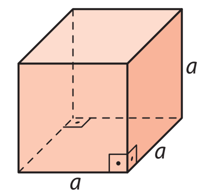
Lembre-se de que a grandeza volume se relaciona com a grandeza capacidade; desse modo, podemos também relacionar suas unidades de medida. Veja um exemplo:

1 m^3 = 1 000 L

Volume de um cubo

Em um cubo, as três dimensões têm a mesma medida e, indicando cada uma delas por a, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$



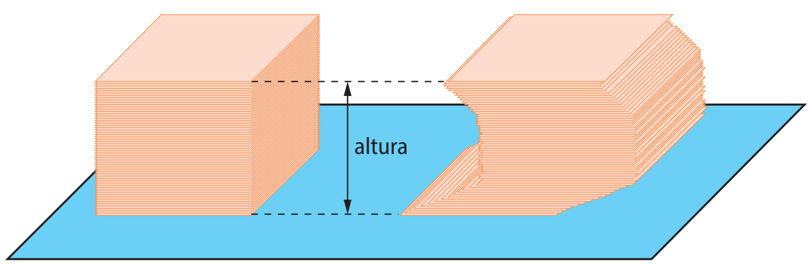
Princípio de Cavalieri

Apresentamos o cálculo que determina o volume do paralelepípedo reto retângulo e do cubo. No entanto, a fórmula para o cálculo do volume de outros sólidos pode não ser tão simples assim e, para estabelecê-la, precisamos de um resultado matemático, conhecido como princípio de Cavalieri.

Vamos considerar duas pilhas de papel sulfite idênticas com a mesma quantidade de folhas em cada pilha, colocadas sobre uma mesa.

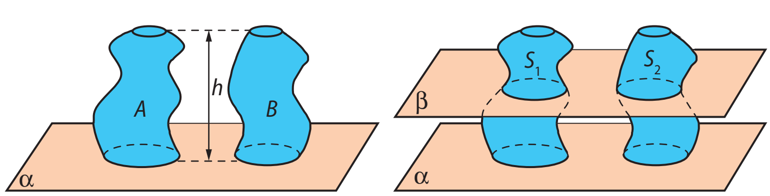
SAIBA QUE...

O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647).



Essas pilhas podem ser dispostas sobre a mesa de diferentes formas, como podemos observar na figura. Observe que qualquer plano paralelo ao plano da mesa que intersecta as pilhas determinará intersecções de mesma área, que poderemos considerar como uma folha de sulfite. Além disso, em ambas as pilhas, temos a mesma quantidade de folhas, ou seja, as pilhas têm o mesmo volume. Essa é a ideia do princípio de Cavalieri.

Considere dois sólidos A e B de mesma altura com as bases contidas em um mesmo plano horizontal α. Traçando um plano β, paralelo a α e secante aos sólidos, determinamos duas secções transversais cujas áreas são S_1 e S_2.



O **princípio de Cavalieri** afirma que, se para todo plano β, nas condições anteriores, tivermos $S_1 = S_2$, então os sólidos A e B terão o mesmo volume.

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado; no entanto, não o faremos aqui por envolver conceitos matemáticos que não são estudados no Ensino Médio. Vamos considerá-lo verdadeiro e aplicá-lo para a determinação do volume de alguns sólidos.

Volume de um prisma

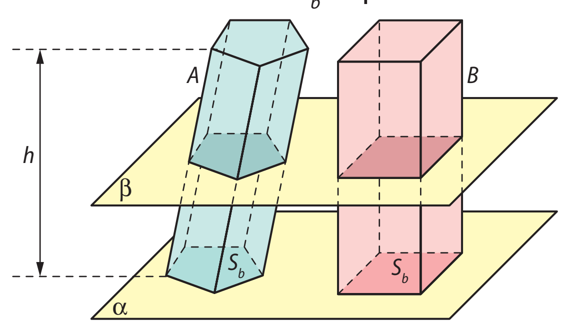
Certo fabricante de itens alimentícios tem em seu catálogo um produto cuja embalagem lembra um prisma de base hexagonal, como podemos ver na imagem.

SELMA CAPARROZ

Para propósitos de armazenamento, o fabricante precisa saber qual o volume de cada embalagem. Como ele pode determinar isso?

Para responder a essa pergunta, vamos usar o princípio de Cavalieri e determinar uma fórmula para calcular o volume de um prisma.

Seja *A* um sólido de altura *h* e área da base S_b. Considere, ainda, um paralelepípedo reto retângulo *B* de mesma altura *h* e área da base também S_b e que ambos estão apoiados no plano α.



EDITORIA DE ARTE

Qualquer plano β, paralelo ao plano α, que intersecte os sólidos *A* e *B*, determina secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases de *A* e *B* são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do prisma *A* é igual ao volume do paralelepípedo reto retângulo *B*.

Como o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto da área da base S_b pela medida da altura *h*, então o volume do prisma V_{prisma} também será calculado da mesma forma. Assim, podemos escrever:

$$V_{prisma} = S_b \cdot h$$

PENSE E RESPONDA

Qual o volume da embalagem, sabendo que a área da base da embalagem é igual a 6 cm^2 e que cada embalagem tem 10 cm de altura? 60 cm^3

> FÓRUM

Reciclagem de embalagens

Atualmente, a questão do lixo, relacionado ao descarte de embalagens, tem se tornado um grande problema, mesmo em pequenas cidades. Leia o texto a seguir e, em seguida, discuta com seus colegas as questões propostas.

Embalagem: quanto mais simples, melhor

Você já prestou atenção na quantidade e variedade de embalagens que acompanham os produtos que consumimos? Será que precisamos de todas elas? É certo que as embalagens são muito úteis: protegem os produtos contra sujeira e o ataque de insetos e roedores, conservam os produtos por mais tempo e os deixam mais atraentes, facilitam o transporte e trazem informações importantes para o consumidor. O problema é que, depois de cumprir sua função, elas acabam indo para o lixo.

O pior é que as embalagens estão ficando cada vez mais sofisticadas e complexas. Com o aperfeiçoamento das técnicas de conservação de produtos, novos materiais foram agregados às embalagens para torná-las mais eficientes. Essas misturas, no entanto, dificultam tanto a sua degradação natural como a sua reciclagem.

CONSUMO sustentável: manual de educação. Brasília, DF: MMA: MEC: Idec, 2005. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf. Acesso em: 30 jul. 2020.

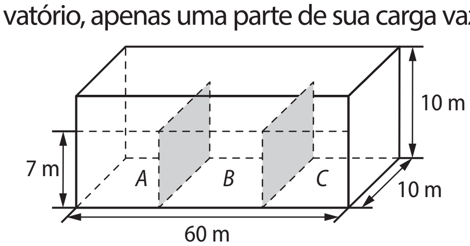
Resposta pessoal.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

Reflita, discuta com seus colegas e enumerem ações que podem ser adotadas por nós e pelas empresas para minimizar os problemas causados pelo lixo. Em seguida, elaborem um quadro contendo todas as boas práticas sugeridas.

> ATIVIDADE RESOLVIDA

6. (Enem/MEC) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m $\times$ 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, *A*, *B* e *C*, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



EDITORIA DE ARTE

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento *C*. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3$ m³
b) $1{,}8 \times 10^3$ m³
c) $2{,}0 \times 10^3$ m³
d) $3{,}2 \times 10^3$ m³
e) $6{,}0 \times 10^3$ m³

Resolução

Vamos calcular o volume da região acima das placas e do compartimento *C*, onde está o furo que provocará o vazamento.

Assim, temos:

$V = 60 \cdot 10(10 - 7) + (60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$

$V = 1\,800 + 1\,400$

$V = 3\,200$

Dessa maneira, o volume de petróleo derramado é igual a $3{,}2 \cdot 10^3$ m³.

Outro modo de resolver é calcular o volume total do reservatório e subtrair o volume dos compartimentos *A* e *B*.

$V = 60 \cdot 10 \cdot 10 - 2(60 : 3) \cdot 10 \cdot 7$

$V = 6\,000 - 2\,800$

$V = 3\,200$

A resposta correta é a alternativa **d**.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

18. Qual é o volume de argila necessário para produzir 5 000 tijolos, tendo cada tijolo a forma de um paralelepípedo com dimensões 18 cm, 9 cm e 6 cm? 4,86 m^3

ALIS PHOTO/ SHUTTERSTOCK.COM

19. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto retângulo formam uma progressão geométrica. Se a menor das arestas mede $\frac{1}{2}$ cm e o volume de tal paralelepípedo é 64 cm^3, calcule as medidas das outras arestas. 4 cm e 32 cm.

20. (UEPB) Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m, tem capacidade igual a: alternativa **c**

a) 4 000 litros
b) 6 000 litros
c) 8 000 litros
d) 2 000 litros
e) 1000 litros

21. Uma empresa alimentícia vai começar a produzir bombons de chocolate em formatos de cubo de aresta 4 cm e de paralelepípedo reto retângulo com comprimento de 6 cm, largura de 5 cm e altura de 2 cm em três tipos, chocolate ao leite, meio amargo e branco. A seguir, temos as dimensões dos bombons e os custos dos chocolates. Resposta pessoal.

Tipo	1	2
Dimensões (cm)	$4 \times 4 \times 4$	$6 \times 5 \times 2$

Tipos	Ao leite	Meio amargo	Branco
Custo (R\$/cm³)	0,03	0,05	0,04

Elabore um problema envolvendo as dimensões dos bombons, associando ao custo por cm^3.

22. (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:

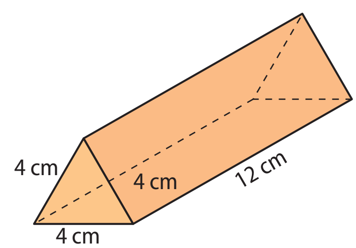
a) 8 400 L
b) 84 L
c) 840 L
d) 8,4 L
e) n.d.a.

alternativa **c**

23. (UFRN) Quando se diz que, numa região, caiu uma chuva com precipitação de 10 mm de água, isso significa que cada metro quadrado dessa região recebeu 10 litros de água da chuva.
Uma caixa-d'água de 1,5 m de altura, 0,8 m de largura e 1,4 m de comprimento, com uma abertura na face superior, na forma de um quadrado com 40 cm de lado, recebeu água diretamente de uma chuva de 70 mm.
Admitindo-se que a caixa só tenha recebido água da chuva, pode-se afirmar que o nível da água nessa caixa aumentou: alternativa **b**

a) 0,8 cm
b) 1 cm
c) 1,2 cm
d) 2 cm

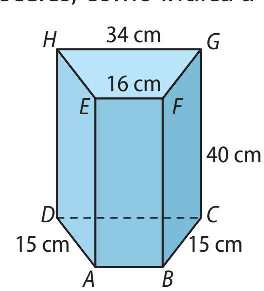
24. Uma barra de chocolate tem o formato da figura a seguir. Calcule o volume de chocolate contido nessa barra. (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.) 83,04 cm^3



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

25. Uma pizzaria projetou uma caixa para colocar suas pizzas no formato de um prisma regular reto com base octogonal com lado de medida *x* e com altura de medida *y*. Reservaram um espaço para armazenamento das caixas e verificaram que era possível montar 10 pilhas de 40 caixas cada. Determine uma fórmula para o volume que as caixas ocuparão. O volume das caixas é $800x^2y\left(1+\sqrt{2}\right)$.

26. Um prisma reto, de ferro, de densidade aproximada 7,5 g/cm^3, tem por base um trapézio isósceles, como indica a figura.



SAIBA QUE...

Densidade de um corpo é a razão entre a massa e o volume desse corpo.

Determine:

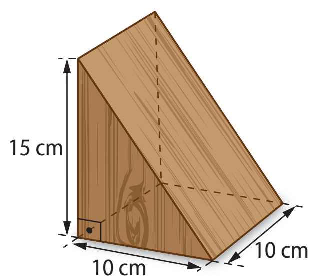
a) o volume desse sólido; 12 000 cm^3
b) a massa desse sólido. 90 kg

27. Um arquiteto fez o projeto para construir uma coluna de concreto que vai sustentar uma ponte. A coluna tem a forma de um prisma hexagonal regular de aresta de base 2 m e altura do prisma 8 m. Calcule:

a) a área lateral da estrutura de madeira que deve ser utilizada para a construção da coluna; $96\ m^2$

b) o volume de concreto necessário para preencher a forma da coluna. $48\sqrt{3}\ m^3$

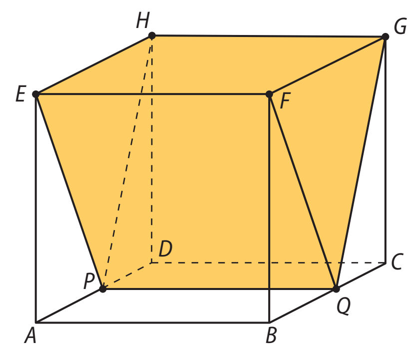
28. (Ufersa-RN) De uma viga de madeira de secção quadrada de lado $\ell = 10$ cm, extrai-se uma cunha de altura $h = 15$ cm, conforme a figura.



O volume da cunha é: alternativa **c**

a) $250\ cm^3$
b) $500\ cm^3$
c) $750\ cm^3$
d) $1000\ cm^3$

29. (UFRGS-RS) Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, P e Q, sejam os pontos médios respectivamente das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O volume desse sólido é: alternativa c

a) 64
b) 128
c) 256
d) 512
e) 1024

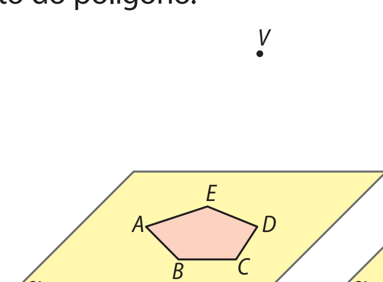
Pirâmides

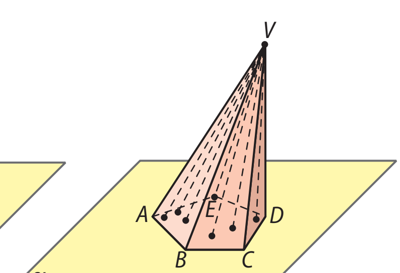
Além dos prismas, há um outro grupo de poliedros cujo formato pode ser associado a objetos do cotidiano.

Esse tipo de poliedro é denominado pirâmide.

Considere um plano α, um polígono convexo, contido em α, e um ponto V que não pertence a α.

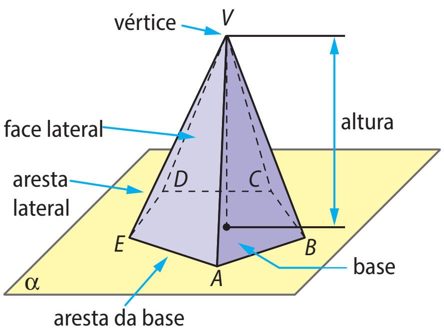
Pirâmide é a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do polígono.





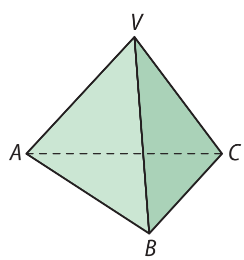
Considerando a pirâmide representada na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

- **base**: é o polígono convexo *ABCDE* contido no plano α;
- **vértice da pirâmide**: é o ponto *V*; os **vértices da base** são os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*;
- **faces laterais**: são os triângulos *VAB*, *VBC*, ..., *VEA*;
- **arestas da base**: são os lados do polígono da base $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{EA}$;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ..., $\overline{VE}$;
- **altura**: é a distância entre o ponto *V* e o plano da base, α.

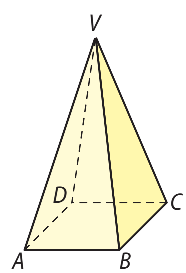


Podemos classificar as pirâmides de acordo com o número de lados do polígono da base. Por exemplo, as pirâmides são:

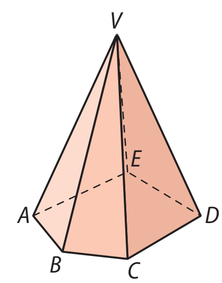
- **triangulares**: quando a base é um triângulo;
- **quadrangulares**: quando a base é um quadrilátero;
- **pentagonais**: quando a base é um pentágono, e assim por diante.



Pirâmide triangular.



Pirâmide quadrangular.



Pirâmide pentagonal.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

JOANA KRUSE/ALAMY/FOTOARENA

Pirâmide de Quéops, localizada em Gizé, no Egito. Fotografia de 2015. Ela é a única das sete maravilhas do mundo antigo que se mantém até hoje.

ALEXANDRU NIKA/SHUTTERSTOCK.COM; AVS-IMAGES/SHUTTERSTOCK.COM; HILCH/SHUTTERSTOCK.COM

JAVIER GIL/ONLY FRANCE/AFP

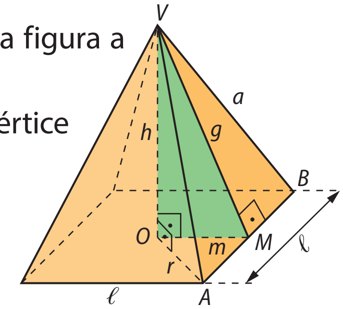
Entrada do Museu do Louvre, em Paris, na França. Fotografia de 2016. A pirâmide feita de vidro e aço foi planejada pelo arquiteto I. M. Pei e inaugurada em 1989 como uma nova entrada para suportar o fluxo de pessoas no museu.

Pirâmide regular

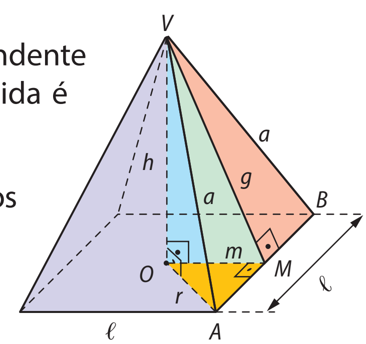
Numa pirâmide, se a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro O da base, ou seja, o centro da circunferência circunscrita ao polígono da base, a pirâmide é **reta**. Se a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base não é o centro da base, a pirâmide é **oblíqua**.

Uma **pirâmide regular** é uma pirâmide reta que tem como base um polígono regular.

Considerando a pirâmide regular de base quadrada representada na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos geométricos:



- **altura da pirâmide**: é a medida do segmento de reta $\overline{VO}$, que liga o vértice V ao plano da base, indicada por h;
- **faces laterais**: são triângulos isósceles congruentes;
- **arestas laterais**: são congruentes e sua medida é indicada por a;
- **arestas da base**: são congruentes, compõem o polígono que forma a base, e sua medida é indicada por ℓ;
- **apótema da base**: é o apótema do polígono regular da base, ou seja, o segmento $\overline{OM}$, e sua medida é indicada por m;
- **raio da base**: é o raio da circunferência de centro O na qual o polígono da base está inscrito e sua medida é indicada por r;
- **apótema da pirâmide**: é a altura de cada face lateral (correspondente à altura $\overline{VM}$ relativa à base de um triângulo isósceles), cuja medida é indicada por g.

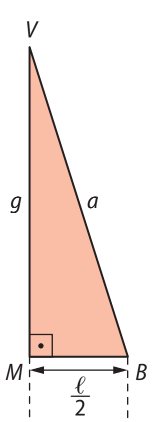


Nas pirâmides regulares, podemos determinar as medidas de todos os seus elementos conhecendo alguns deles. Considere a pirâmide regular representada na figura a seguir e observe os triângulos retângulos VMB, VOM, VOA e OMA.

Esse é um bom momento para incentivar os estudantes a relacionar os triângulos indicados na figura da pirâmide com as representações deles. Isso reforça o trabalho com noção espacial.

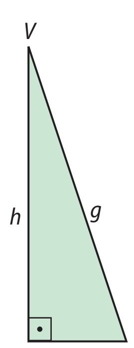
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos as seguintes relações:

- $\triangle VMB$



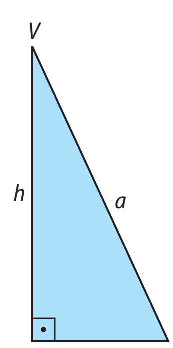
$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

- $\triangle VOM$



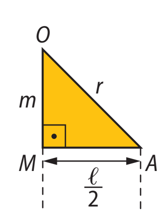
$$g^2 = h^2 + m^2$$

- $\triangle VOA$



$$a^2 = h^2 + r^2$$

- $\triangle OMA$



$$r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

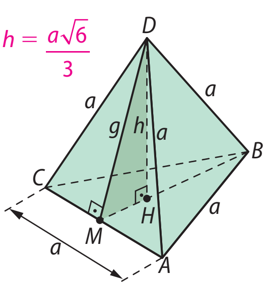
PENSE E RESPONDA

A pirâmide que possui quatro faces idênticas, sendo todas elas triângulos equiláteros, é chamada de **tetraedro regular**.

Como todas as faces são triângulos equiláteros, todas as arestas (da base e da lateral) são congruentes.

Utilizando a imagem a seguir, que representa um tetraedro regular e alguns de seus elementos, determine a altura (h) da pirâmide em função de sua aresta de medida a.

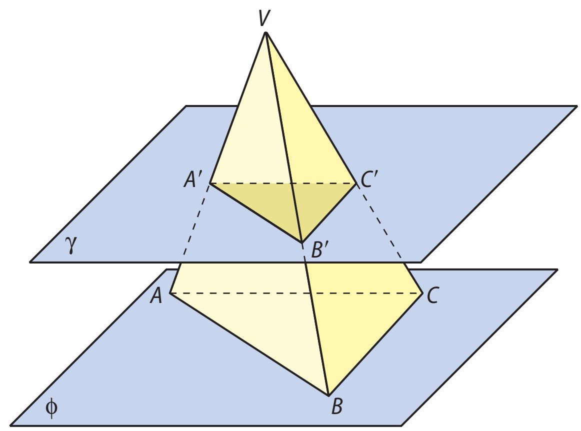
$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Secção transversal de uma pirâmide

A intersecção de uma pirâmide com um plano paralelo à sua base é denominada **secção transversal** da pirâmide.

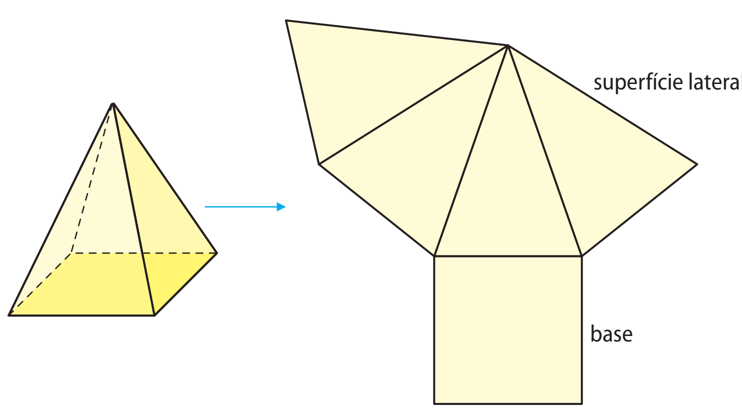
É possível provar que a secção transversal de uma pirâmide é um polígono semelhante ao polígono da base.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Área da superfície de uma pirâmide

A figura a seguir representa a planificação da superfície de uma pirâmide quadrangular regular.



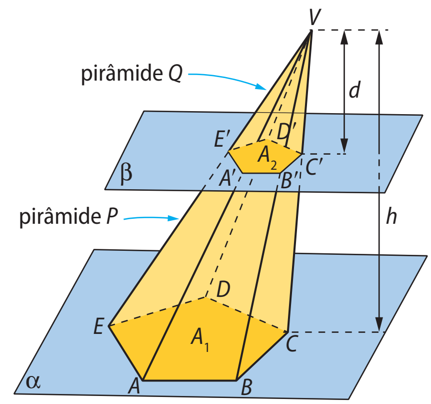
Em uma pirâmide, definimos:

- **área da base** (**S_b**) como a área do polígono da base da pirâmide;
- **área lateral** (**S_ℓ**) como a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** (**S_t**) como a soma da área lateral e da área da base.

Então, podemos escrever:

$$S_t = S_\ell + S_b$$

Volume de uma pirâmide



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere a pirâmide *P*, de altura *h* e base *ABCDE* de área A_1, contida em um plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α e secante à pirâmide. O plano β determina uma secção transversal *A'B'C'D'E'* de área A_2, que é base da pirâmide *Q* de altura *d* (pirâmide menor) e semelhante à base *ABCDE*.

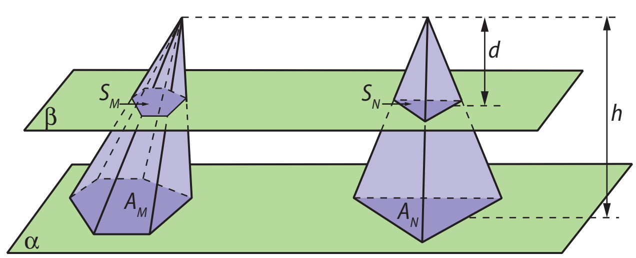
No Capítulo **1** deste livro, estudamos um pouco sobre semelhança de polígonos e vimos, também, que se *AB* e *A´B´* são os comprimentos dos lados correspondentes de dois polígonos semelhantes de áreas *F* e *F´*, então:

$$\frac{F}{F'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

Note, na figura anterior, que as respectivas faces laterais das pirâmides *Q* e *P* são triângulos semelhantes.

Usando semelhança de triângulos, pode-se demonstrar que as bases de áreas A_1 e A_2 são polígonos semelhantes, com razão de semelhança $\frac{h}{d}$, então, $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$.

Agora, considere duas pirâmides *M* e *N* de mesma medida *h* de altura, com bases de mesma área A_M e A_N contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo a α e secante às pirâmides, determina duas secções transversais de áreas S_M e S_N, respectivamente.



Vimos anteriormente que a razão entre a área da base e da secção transversal de cada pirâmide vale $\frac{A_M}{S_M} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$ e $\frac{A_N}{S_N} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$.

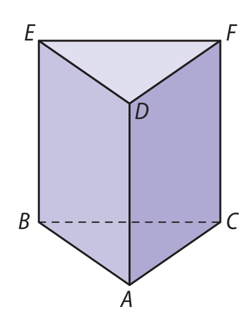
Logo, $\frac{A_M}{S_M} = \frac{A_N}{S_N}$.

Como $A_M = A_N$, concluímos que $S_M = S_N$ para qualquer plano β paralelo a α.

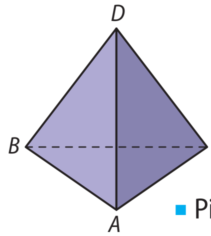
Com isso, pelo princípio de Cavalieri, como todas as secções transversais de duas pirâmides de mesma altura têm áreas iguais, então seus volumes são iguais.

Provamos, assim, que duas pirâmides de mesma base e com mesma altura têm volumes iguais. Esse fato será utilizado a seguir para determinar o volume de uma pirâmide.

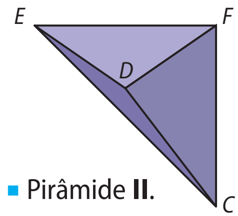
Para calcular o volume de uma pirâmide qualquer, primeiramente, vamos considerar o prisma reto de base triangular a seguir.



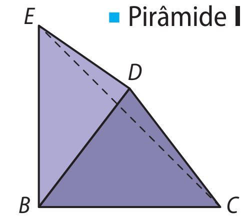
Esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares, como mostram as figuras a seguir.



Pirâmide **I**.



Pirâmide **II**.



Pirâmide **III**.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que:

- as pirâmides **I** e **II** têm a mesma altura (altura do prisma), têm bases congruentes ($\triangle ABC \cong \Delta DEF$, pois cada triângulo é uma base do prisma) e, portanto, pelo resultado da página anterior, as pirâmides **I** e **II** têm o mesmo volume;
- considerando as pirâmides **II** e **III** com respectivas bases *CEF* e *BCE*, a altura (distância do ponto *D* ao retângulo *BCFE*) dessas pirâmides é a mesma, têm bases congruentes ($\triangle CEF \cong \triangle BCE$, pois cada um desses triângulos é a metade do retângulo *BCFE*) e, portanto, novamente pelo resultado da página anterior, as pirâmides **II** e **III** têm o mesmo volume.

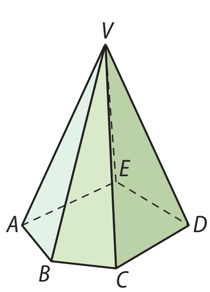
Logo, as pirâmides **I**, **II** e **III** têm o mesmo volume, ou seja, $V_1 = V_2 = V_3$.

Seja $V_{\text{prisma}} = V_1 + V_2 + V_3$ (soma dos volumes das três pirâmides) e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{\text{prisma}} = V + V + V \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Assim, o volume de cada pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma triangular dado. Como o volume do prisma é $V_{\text{prisma}} = S_b \cdot h$, podemos escrever:

$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$



Essa é a fórmula de cálculo do volume de uma pirâmide triangular.

Agora, vamos mostrar que ela também é válida para uma pirâmide qualquer. Para isso, considere uma pirâmide de altura medindo h cuja base é um polígono convexo de n lados com área S_b. A figura mostra um exemplo para n igual a 5.

Como o polígono é convexo, a partir de um dos vértices da base traçamos todas as $(n - 2)$ diagonais do polígono da base, obtendo $(n - 2)$ triângulos. Podemos dividir a pirâmide em $(n - 2)$ pirâmides triangulares de mesma altura da pirâmide original e área da base $S_1, S_2, ..., S_{n-2}$, traçando planos determinados por essas diagonais e pelo vértice V. O volume V da pirâmide será igual à soma dos volumes das $(n - 2)$ pirâmides triangulares. Então, pelo resultado anterior:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot S_{n-2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot h\,(S_1 + S_2 + ... + S_{n-2})$$

Mas $S_b = S_1 + S_2 + ... + S_{n-2}$. Então, o volume de uma pirâmide qualquer de altura medindo h e área da base S_b é igual a:

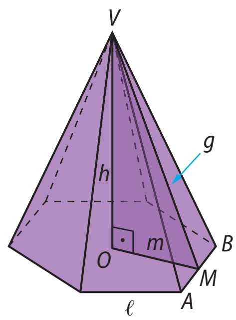
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

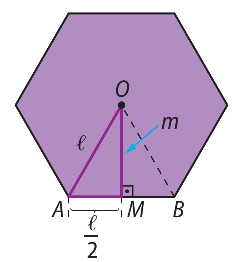
ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Em uma feira de artesanato, foi construída uma tenda com tecido no formato de uma pirâmide hexagonal regular com 8 m de altura e aresta da base medindo $4\sqrt{3}$ m. Considerando que quem armou a tenda deixou uma das faces laterais como porta (sem fechamento do tecido), calcule a quantidade de tecido necessária para a cobertura da tenda.

Resolução

Primeiro vamos representar a tenda e sua base:





No triângulo *AOB*, *m* é a medida do apótema da base, então:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow m = 6$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VOM*, temos:

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow g = 10, \text{ pois } g > 0.$$

Cálculo de área S_f de uma face da pirâmide:

$$S_f = \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow S_f = \frac{4\sqrt{3}\cdot 10}{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow S_f = 20\sqrt{3}$$

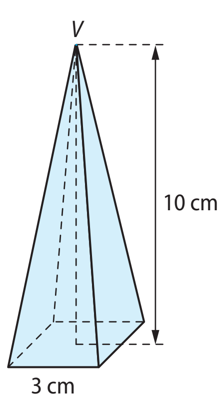
Como uma das faces laterais não usará tecido (porta), a área lateral será dada por:

$$5 \cdot 20\sqrt{3}\ \text{m}^2 = 100\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Portanto, serão necessários $100\sqrt{3}$ m² de tecido.

8. Calcule o volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado de 3 cm de lado e sua altura mede 10 cm.

Resolução



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe a pirâmide da figura.

Como $V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$, precisamos determinar a área da base (S_b).

A base é um quadrado, logo:

$$S_b = \ell^2 \Rightarrow S_b = 3^2 = 9 \Rightarrow S_b = 9\ \text{cm}^2$$

Cálculo do volume (*V*):

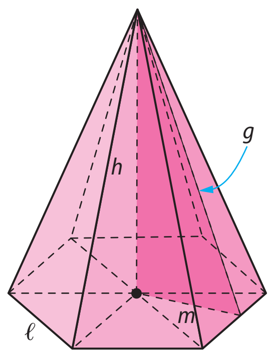
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10 = 30 \Rightarrow V = 30\ \text{cm}^3$$

Portanto, o volume da pirâmide é 30 cm³.

9. Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede $\ell = 2$ cm. Sabendo que a área lateral da pirâmide é 30 cm², calcule o volume da pirâmide.

Resolução

Seja a pirâmide a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Apótema da base (m):

A base é um hexágono regular, logo:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

Como a base é hexagonal, a pirâmide tem seis faces laterais:

$$S_f = \frac{S_\ell}{6} \Rightarrow S_f = \frac{30}{6} = 5 \Rightarrow S_f = 5$$

Apótema da pirâmide (g):

$$S_f = \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2g}{2} \Rightarrow g = 5$$

Altura da pirâmide (h):

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{22}, \text{ pois } h > 0.$$

Área da base (S_b):

Como a base é um hexágono regular, sua área é igual a seis vezes a área do triângulo equilátero de aresta $\ell = 2$ cm.

$$S_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow S_b = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Volume da pirâmide (V):

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{22} = 2\sqrt{66} \Rightarrow V = 2\sqrt{66}$$

Portanto, o volume da pirâmide é $2\sqrt{66}$ cm³.

10. Considere um tetraedro regular $ABCV$ de aresta de medida $a = 4$ cm, em que $\overline{AM}$ é uma mediana do triângulo equilátero ABC, base do tetraedro.

A partir dessas informações, determine:

a) a medida da mediana $\overline{AM}$;

b) a medida da altura do tetraedro;

c) a área total da superfície do tetraedro.

Resolução

a) Em um triângulo equilátero, a mediana coincide com a altura. Assim, a medida da mediana $\overline{AM}$ é igual à medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo equilátero ABC de lado de medida a, ou seja:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da mediana $\overline{AM}$ é $2\sqrt{3}$ cm.

b) Vimos que a medida h da altura de um tetraedro regular é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Então:

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Portanto, a medida da altura do tetraedro é $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

c) A área total S_t da superfície de um tetraedro regular é dada por $S_t = a^2\sqrt{3}$. Então:

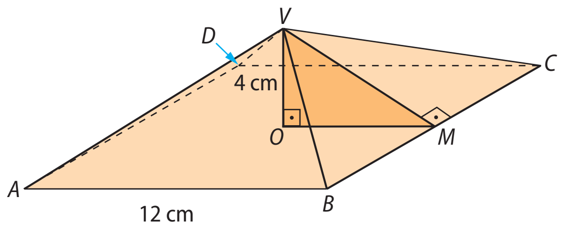
$$S_t = a^2\sqrt{3} = 4^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

Portanto, a área total da superfície do tetraedro é $16\sqrt{3}$ cm².

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

30. Considere a pirâmide quadrangular regular indicada na figura e determine o que se pede.



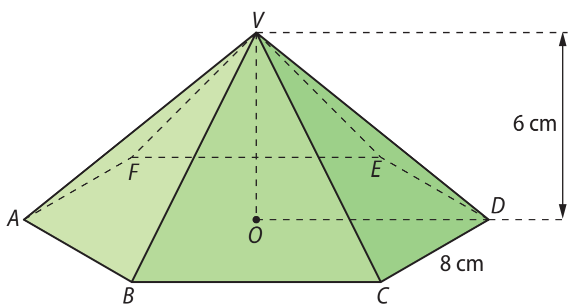
a) A medida do apótema da base. 6 cm

b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{13}$ cm

c) A medida da aresta lateral. $2\sqrt{22}$ cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48\left(3+\sqrt{13}\right)$ cm²

31. Considere a pirâmide hexagonal regular indicada na figura e determine o que se pede.



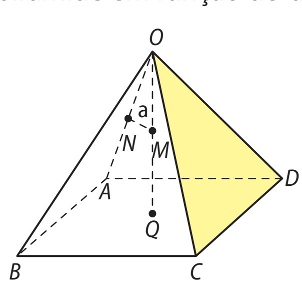
a) A medida do apótema da base. $4\sqrt{3}$ cm

b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{21}$ cm

c) A medida da aresta lateral. 10 cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48\sqrt{3}\left(2+\sqrt{7}\right)$ cm²

32. (Vunesp-SP) A ilustração mostra uma pirâmide regular de base quadrada cuja altura tem a mesma medida que as arestas da base. Pelo ponto médio M da altura $\overline{OQ}$ traça-se o segmento $\overline{MN}$ perpendicular à aresta $\overline{OA}$. Se 'a' expressa a medida de $\overline{MN}$, determine o volume da pirâmide em função de 'a'. $V = 8a^3\sqrt{3}$

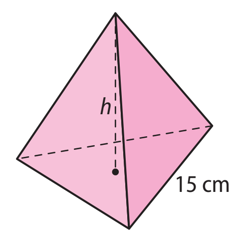


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

33. Em uma pirâmide regular de base quadrada, a medida do perímetro da base é 40 cm. Sabendo que a altura da pirâmide mede 12 cm, calcule a área lateral da superfície dessa pirâmide. 260 cm²

34. Calcule a área lateral da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 13 cm e o apótema da pirâmide mede 12 cm. 180 cm²

35. A figura a seguir mostra uma pirâmide de base triangular em que todas as arestas têm medida igual a 15 cm. Determine a área total da superfície dessa pirâmide. $225\sqrt{3}$ cm²



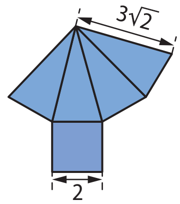
36. Um artista projetou uma pirâmide regular de base quadrada para ser exposta na entrada de uma universidade. A pirâmide tem 4 metros de altura e o quadrado da base da pirâmide tem lado de 6 metros. As faces laterais da pirâmide devem ser pintadas, mas há uma restrição: a pirâmide não deve ser monocromática, ou seja, é necessário usar mais de uma cor na pintura. Veja o rendimento de cada uma das cores de tinta disponíveis.

Resposta pessoal.

Cor	Rendimento (m²/L)
Amarelo	28
Azul	24
Laranja	25
Rosa	27
Roxo	22
Verde	24
Vermelho	22

Elabore um problema envolvendo: custo, quantidade de cores e quantidade de demãos.

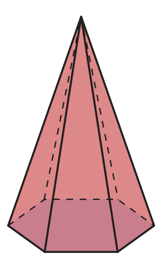
37. (FUC-MT) Determine o volume de uma pirâmide cuja planificação é: $V = \frac{16}{3}$ u³



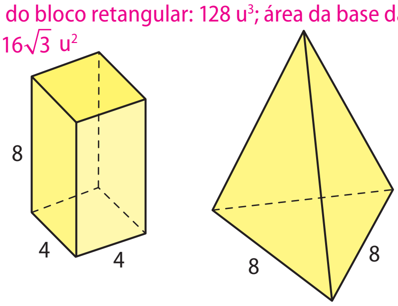
38. (UFPA) Uma pirâmide triangular regular tem 9 cm³ de volume e $4\sqrt{3}$ cm de altura. Qual a medida de aresta da base? alternativa **b**

a) $\sqrt{2}$ cm
b) 3 cm
c) $2\sqrt{2}$ cm
d) $\sqrt{3}$ cm
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

39. (UFPE) Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm³. Dado: use a aproximação: $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. $\simeq 83$ cm³



40. (UFPR) As figuras a seguir apresentam um bloco retangular de base quadrada, uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero, e algumas de suas medidas.
a) volume do bloco retangular: 128 u³; área da base da pirâmide: $16\sqrt{3}$ u²

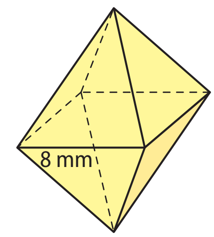


a) Calcule o volume do bloco retangular e a área da base da pirâmide.

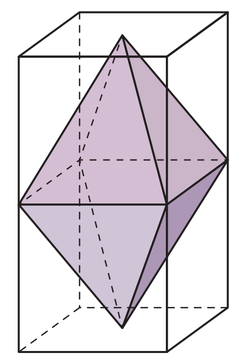
b) Qual deve ser a altura da pirâmide, para que seu volume seja igual ao do bloco retangular? $8\sqrt{3}$ u

41. Uma pedra preciosa tem a forma de um octaedro regular de aresta 8 mm, conforme indica a figura. Calcule o volume dessa pedra.

$\frac{512\sqrt{2}}{3}$ mm³



42. (UFMA) A figura a seguir representa um paralelepípedo retângulo, no qual está inscrito um octaedro cujas 8 faces são triângulos equiláteros com 1 cm de lado. (Obs.: octaedro é o sólido resultante da reunião de duas pirâmides quadrangulares de bases congruentes.)

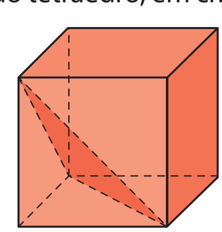


Nessas condições, é correto afirmar que o volume do paralelepípedo, em centímetros cúbicos, é: alternativa **a**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{2}$

43. (Unicamp-SP) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.
Ver as **Orientações para o professor**.

44. (UFPE) Os vértices de um tetraedro são um dos vértices de um cubo de aresta 30 cm e os três vértices ligados a ele por uma aresta do cubo, como ilustrado na figura abaixo. Se V é o volume do tetraedro, em cm³, assinale $V/100$.
45 cm³



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CONEXÕES

Arte e Geometria

Amilcar de Castro (1920-2002) foi um artista brasileiro que produziu muitas obras de arte com inspirações na Geometria. Leia o texto a seguir.

Amílcar de Castro

Artista plástico, nasceu em 1920, na cidade mineira de Paraisópolis. Formou-se em Direito, mas não exerceu a profissão. Em 1944 inscreve-se na Escola de Arquitetura e Belas Artes em Belo Horizonte, frequentando o curso livre de desenho e pintura de Alberto da Veiga Guignard, e o de escultura figurativa com Franz Weissmann. Com Guignard, foi introduzido na técnica do lápis duro, com o qual sulcava as folhas de papel, primeiro índice dos cortes que faria nas chapas de ferro que o tornariam o mais importante escultor brasileiro em atividade, reconhecível pelas monumentais esculturas em chapas de ferro cortadas e dobradas.

FGV CPDOC. **Amílcar de Castro**. Rio de Janeiro, c2020. Disponível em: https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/JK/biografias/amilcar_de_castro. Acesso em: 31 jul. 2020.

IMAGEM LICENCIADA PELO INSTITUTO AMILCAR DE CASTRO

Obra de Amilcar de Castro de 1951 – Material: madeira.

IMAGEM LICENCIADA PELO INSTITUTO AMILCAR DE CASTRO. FOTO: EDUARDO ALONSO

Obra de Amilcar de Castro de 1952, com a qual ganhou o prêmio da II Bienal de São Paulo, em 1953 – Material: cobre. Dimensão: 43 cm × 43 cm × 43 cm.

1. b) Espera-se que os estudantes respondam que essa caixa deve ter as dimensões maiores do que as da peça e que todos os lados devem ser iguais, por exemplo: 50 cm × 50 cm × 50 cm.

PARA ASSISTIR

AMILCAR de Castro. Direção: João Vargas Penna. Brasil: Porta Curtas, 2003. Vídeo (13 min). Disponível em: http://portacurtas.org.br/filme/?name=amilcar_de_castro. Acesso em: 31 jul. 2020.

O documentário **Amilcar de Castro** apresenta o processo de criação do artista e a relação de suas obras com a Geometria.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Observe uma escultura de Amilcar de Castro:

A partir das dimensões da obra dadas pelo artista, faça o que se pede:

a) Calcule o volume. $12\,800\ cm^3$.

b) Suponha que será necessário transportar essa peça para uma exposição em uma escola da cidade. Para isso, a transportadora separou uma caixa no formato de um cubo. Com um colega, estimem as dimensões dessa caixa que será utilizada para o transporte da peça.

IMAGEM LICENCIADA PELO INSTITUTO AMILCAR DE CASTRO

Escultura **Década 90**. Dimensões: 40 cm × 40 cm × 8 cm. Esculpida em madeira de baraúna.

2. Você conhece outro artista brasileiro que utiliza elementos de Geometria em suas obras? Se sim, compartilhe com os colegas. Caso não conheça, faça uma breve pesquisa e apresente-a aos colegas.

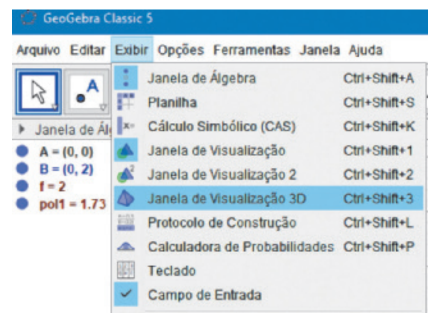
Resposta pessoal. Aproveitar esse momento e falar aos estudantes a respeito do Instituto Inhotim (MG), um dos maiores museus a céu aberto do mundo. Acessar mais informações pelo *site* do instituto disponível em <https://www.inhotim.org.br/> (acesso em: 31 jul. 2020).

Construção de modelos de sólidos geométricos

Vamos utilizar o **GeoGebra** para construir um modelo de sólido geométrico e, em seguida, observar sua planificação. Para isso, acompanhe os passos a seguir.

I. Utilizando a ferramenta **Polígono regular**, , marque os pontos $A(0,0)$ e $B(0,2)$ no plano cartesiano e, em seguida, digite "3" na caixa de diálogo que será aberta para informar o número de lados. Na **Janela de visualização**, será criado um triângulo equilátero de lado de medida 2 unidades. Automaticamente, o **GeoGebra** vai nomear esse polígono como **pol1**.

II. No menu **Exibir**, clique na opção **Janela de visualização 3D**. Ao lado da **Janela de visualização** aparecerá uma outra janela, mostrando um sistema cartesiano tridimensional que está interligado com o sistema cartesiano da **Janela de visualização**. O plano cinza na **Janela de visualização 3D** representa o plano da **Janela de visualização** em que construímos o triângulo equilátero.

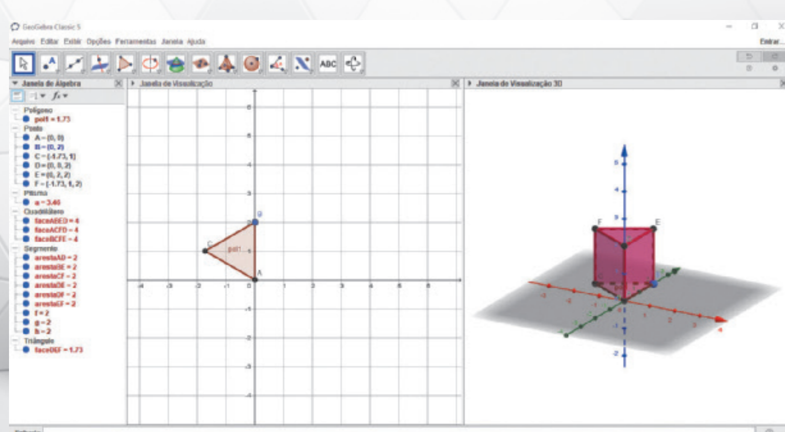


IMAGENS: GEOGEBRA; EDITORIA DE ARTE

Ver as **Orientações para o professor**.

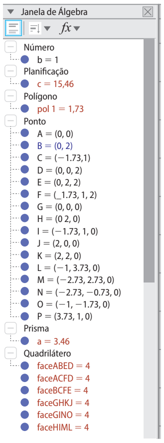
III. Ao clicar na **Janela de visualização 3D**, uma nova barra de ferramentas substituirá a anterior, com instrumentos para a construção de elementos no campo tridimensional, como planos e sólidos geométricos. Veja a imagem a seguir.

IV. Clique na seta do menu com o ícone e escolha a ferramenta **Extrusão para prisma ou cilindro**, , e, em seguida, clique no triângulo na **Janela de visualização 3D**. Na sequência, digite "2" na caixa de diálogo aberta para informar a altura do prisma. Desse modo, será construído um prisma regular de base triangular com altura medindo 2 unidades. A tela do *software* ficará semelhante à imagem a seguir.



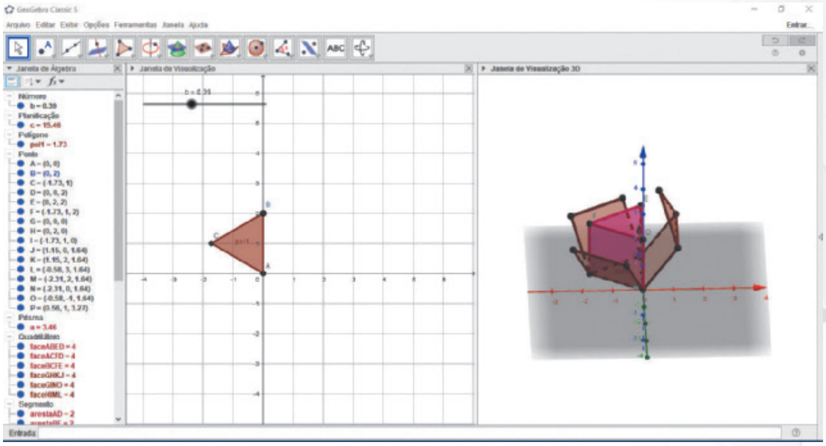
DMIT/SHUTTERSTOCK.COM

V. Para planificar o prisma, no mesmo menu do item anterior, escolha a ferramenta **Planificação** e, na **Janela de Álgebra**, clique no item que está abaixo da opção **Prisma**, como mostra a imagem a seguir.



IMAGENS: GEOGEBRA; EDITORIA DE ARTE

VI. Você perceberá que alguns elementos foram acrescentados à construção e um **Controle deslizante** foi criado. Os novos elementos são as faces do prisma que, juntas, formam a respectiva planificação. Ao alterar o valor do **Controle deslizante**, é possível visualizar o processo de planificação do prisma na **Janela de visualização 3D**. Ao final, a tela do *software* ficará semelhante à imagem a seguir.



Agora, faça o que se pede na atividade a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Considere dois prismas regulares: o primeiro, cuja base é um triângulo equilátero de lado 4, e o segundo, cuja base é um hexágono regular de lado 2. Utilizando o **GeoGebra**, faça o que se pede.

a) Determine as alturas dos prismas, de modo que o volume de ambos seja igual. A altura do prisma de base triangular deve ser 1,5 vez maior do que a altura do prisma de base hexagonal.

b) Qual desses prismas apresenta maior área lateral?
O prisma de base triangular.

DMI T/SHUTTERSTOCK.COM

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

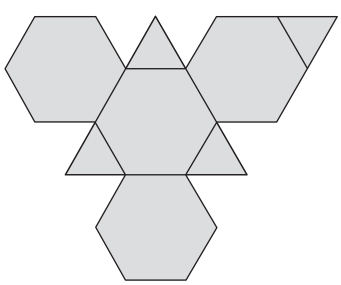
1. (UFCG-PB) Um professor de Matemática, em uma aula de Geometria, pediu que cada aluno construísse um poliedro convexo regular com 20 faces triangulares. Podemos afirmar que o número de vértices do poliedro construído por cada aluno é igual a: alternativa **b**

a) 28
b) 12
c) 19
d) 27
e) 41

2. (EsPCEx-SP) Um poliedro convexo, com 13 vértices, tem uma face hexagonal e 18 faces formadas por polígonos do tipo P. Com base nessas informações, pode-se concluir que o polígono P é um:

a) dodecágono.
b) octógono.
c) pentágono.
d) quadrilátero.
e) triângulo. alternativa **e**

3. (UFJF-MG) A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



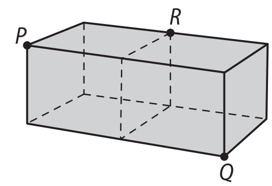
O número de vértices desse poliedro é

a) 12 alternativa **a**
b) 18
c) 21
d) 30
e) 36

4. (UFPI) Um poliedro convexo, constituído de faces triangulares e quadrangulares, possui 20 arestas, e a soma dos ângulos de suas faces é igual a 2 880º. É correto afirmar que esse poliedro possui: alternativa **a**

a) 8 faces triangulares.
b) 12 vértices.
c) 10 faces.
d) 8 faces quadrangulares.

5. (Famerp-SP) Dois cubos idênticos, de aresta igual a 1 dm, foram unidos com sobreposição perfeita de duas das suas faces. P é vértice de um dos cubos, Q é vértice do outro cubo e R é vértice compartilhado por ambos os cubos, conforme indica a figura.



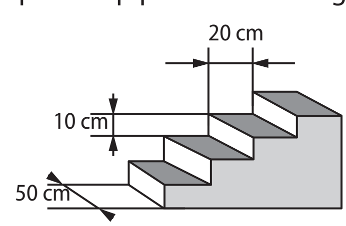
A área do triângulo de vértices P, Q e R é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ dm² alternativa **a**
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ dm²
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm²
d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ dm²
e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ dm²

6. (Unicamp-SP) Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm², 3 cm² e 4 cm². O volume desse paralelepípedo é igual a

a) $2\sqrt{3}$ cm³
b) $2\sqrt{6}$ cm³ alternativa **b**
c) 24 cm³
d) 12 cm³

7. (Fuvest-SP) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto retângulo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a alternativa **a**

a) 2,1 m³
b) 2,3 m³
c) 3,0 m³
d) 4,2 m³
e) 6,0 m³

8. (Unicamp-SP) Se um tetraedro e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{2\sqrt[4]{3}}$ alternativa **c**

d) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{3}}$

9. (UEG-GO) Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. O volume dessa pirâmide é igual a alternativa **b**

a) 25 cm^3

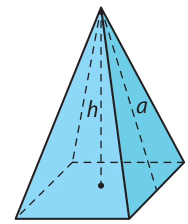
b) 30 cm^3

c) 13 cm^3

d) 9 cm^3

e) 12 cm^3

10. (UFRJ) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em metro quadrado, é: alternativa **d**



EDITORIA DE ARTE

a) 13 272

b) 26 544

c) 39 816

d) 53 088

e) 79 432

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Na abertura deste Capítulo, conhecemos a ciência que estuda os cristais, a Cristalografia. Vimos que os minerais são classificados conforme seu sistema cristalino e possuem configurações geométricas bem claras, que determinam diversas propriedades físicas e químicas do cristal.

Ainda neste Capítulo, vimos o que são poliedros, estudamos a relação de Euler e compreendemos os critérios para que um poliedro seja de Platão.

Em seguida, foi dada maior ênfase aos prismas e às pirâmides e à determinação das áreas e dos volumes desses sólidos geométricos.

Conhecemos o trabalho do artista Amilcar de Castro, que usa a Geometria para criar formas tridimensionais bastante inusitadas.

Vamos refletir sobre as aprendizagens deste Capítulo:

- Você conhecia a relação de Euler, a igualdade que relaciona a quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro?
- Você sabia que existem apenas cinco classes para os poliedros de Platão?
- Como você diferencia um prisma de uma pirâmide?
- O estudo das áreas e dos volumes dos paralelepípedos é bastante explorado pela indústria de embalagens. Explique por quê.
- O teorema de Pitágoras, tema abordado no Ensino Fundamental – Anos Finais, é muito utilizado no estudo da Geometria espacial. Cite um exemplo, envolvendo pirâmides, no qual seja necessário utilizar esse teorema.
- Outros artistas brasileiros, como Lygia Clark e Franz Weissmann, também têm como base do seu trabalho a Geometria. Faça uma pesquisa sobre eles. Respostas pessoais.

CAPÍTULO 4

Corpos redondos

> **A BNCC NESTE CAPÍTULO:**

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4 e 10
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2: EM13MAT201
  - Competência específica 3: EM13MAT309
  - Competência específica 4: EM13MAT405
  - Competência específica 5: EM13MAT504 e EM13MAT509
- **Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3

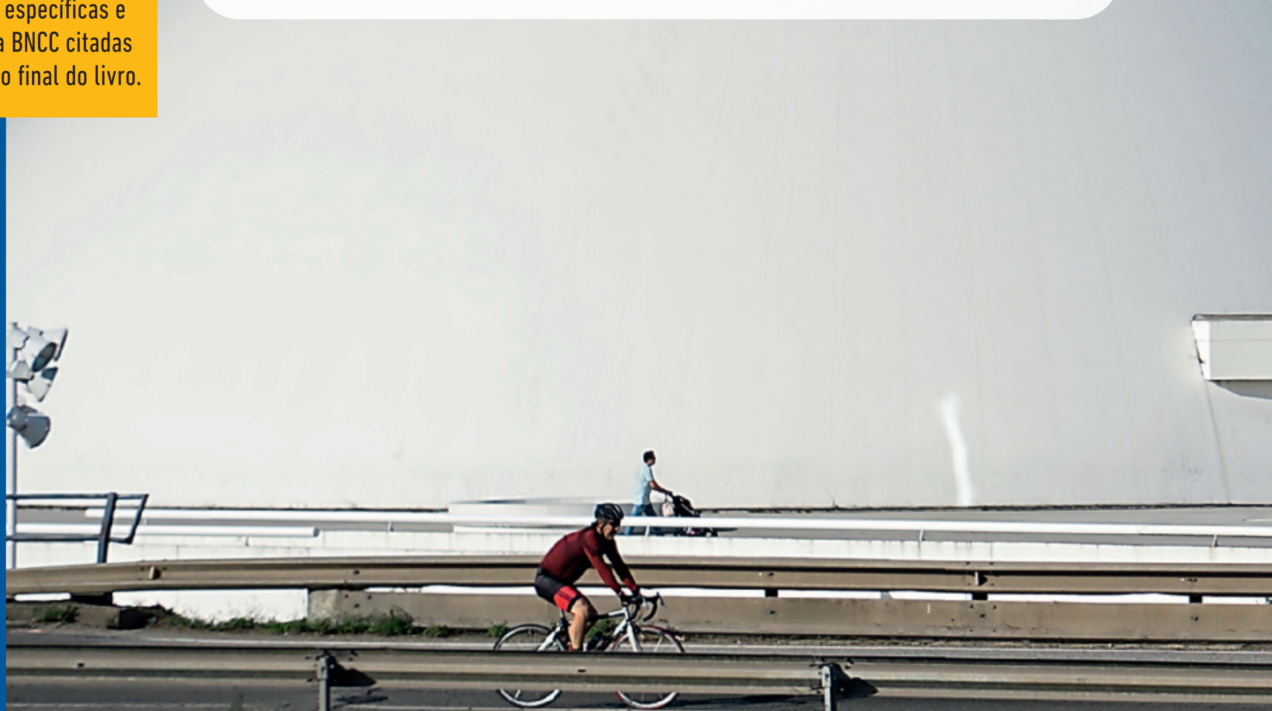
O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Observe essas formas sinuosas do Centro Cultural Internacional Oscar Niemeyer, o equilíbrio dessa construção, as simetrias, o modo como a luz é refletida, tudo isso projetado pelo arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012), cujas obras são mundialmente conhecidas em razão das curvas e da representação moderna explorando formas arredondadas. Aliás, esse é o assunto da vez!

Niemeyer nasceu no Rio de Janeiro e se formou arquiteto pela Escola Nacional de Belas Artes, em 1934. Viajou pelo mundo e projetou construções importantes, como o Palácio do Congresso Nacional, o Palácio do Planalto, o Palácio da Alvorada (todos em Brasília), o Museu de Arte Contemporânea de Niterói (Rio de Janeiro), o Conjunto Copan e o Pavilhão Lucas Nogueira Garcez, popularmente chamado de Oca (ambos em São Paulo), a Estação Cabo Branco (Paraíba), o Conjunto Arquitetônico da Pampulha (Minas Gerais), entre outras obras nacionais e internacionais.

O que vemos nas construções projetadas por Niemeyer é a presença marcante das curvas e dos formatos arredondados. O arquiteto explorou essas formas para alcançar o equilíbrio dessas imensas construções. Parece até que algumas partes flutuam, mesmo compostas por toneladas de concreto.

Fonte dos dados: FUNDAÇÃO OSCAR NIEMEYER. Disponível em: http://www.niemeyer.org.br. Acesso em: 11 ago. 2020.



ANA DEL CASTILLO/SHUTTERSTOCK.COM

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Você já ouviu falar de Oscar Niemeyer? Conhece alguma de suas obras?
2. Façam uma pesquisa sobre uma das construções citadas no texto. Elaborem uma ficha contendo as seguintes informações: ano de inauguração da construção, local e utilização do espaço (se é um museu, um prédio residencial etc.).
3. Observe a imagem e descreva as formas geométricas que você identifica.

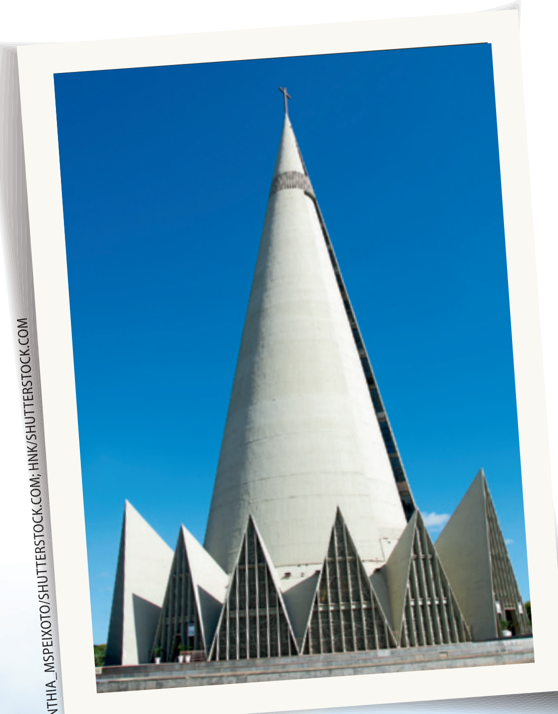
HNK/SHUTTERSTOCK.COM

Centro Cultural Internacional Oscar Niemeyer, localizado em Astúrias, Espanha. Fotografia de 2019.

Introdução

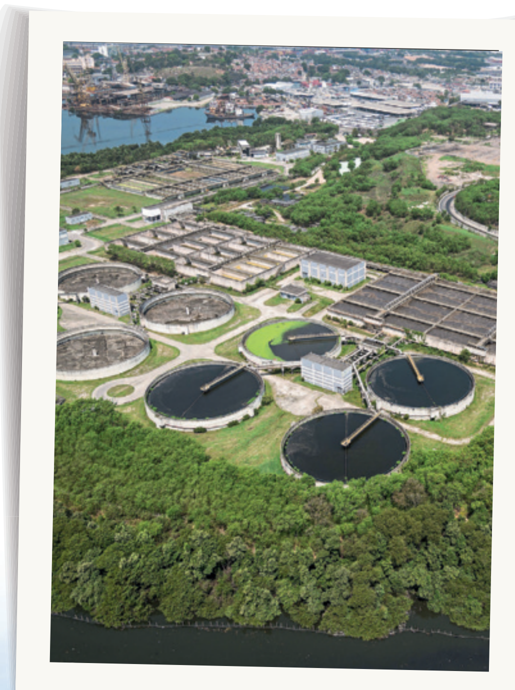
No Capítulo anterior, estudamos os sólidos geométricos chamados de poliedros. Neste Capítulo, iremos estudar os sólidos geométricos que têm pelo menos uma parte de sua superfície curva, denominados **corpos redondos**: cilindro, cone e esfera.

Diversos objetos que utilizamos no dia a dia apresentam formas arredondadas, como copos, panelas, entre outros. Na arquitetura, também observamos formas arredondadas, como nas construções. Na indústria, os tanques de gás natural têm o formato esférico, modelo mais recomendado para esse tipo de produto.



CINTHIA_MSPEIXOTO/SHUTTERSTOCK.COM; HNK/SHUTTERSTOCK.COM

- A Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, também conhecida como Catedral de Maringá, localizada em Maringá (PR), lembra o formato de um cone. Fotografia de 2019.



LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS; HNK/SHUTTERSTOCK.COM

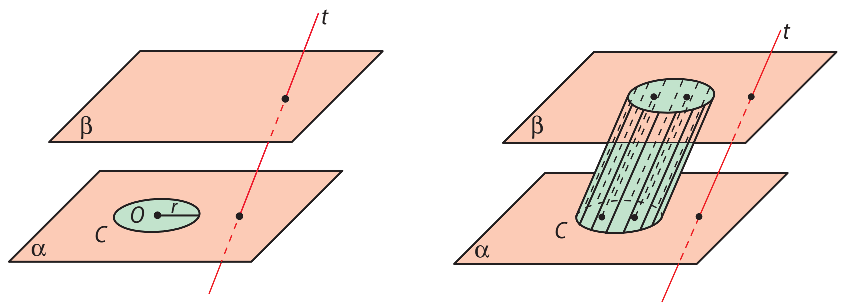
- Estação de tratamento de água no Rio de Janeiro (RJ). Alguns reservatórios dessas estações possuem formato cilíndrico. Fotografia de 2015.

A.PAES/SHUTTERSTOCK.COM

- Depósito de gás liquefeito de petróleo (GLP) em refinaria de Coari (AM). Fotografia de 2006.

Cilindro

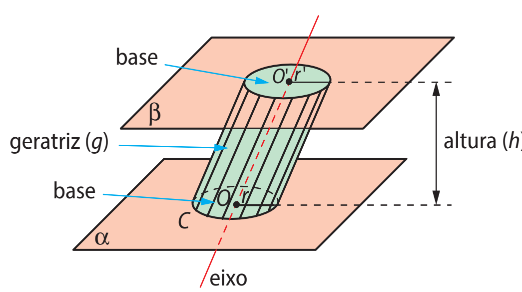
Dados dois planos paralelos α e β, um círculo *C* de centro *O* e raio *r* contido em α e uma reta *t* secante aos planos α e β que não intersecta *C*, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *t*, com uma extremidade em um ponto do círculo *C* e a outra no plano β, é denominada **cilindro circular** ou simplesmente **cilindro**.



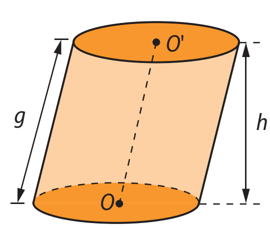
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando o cilindro representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

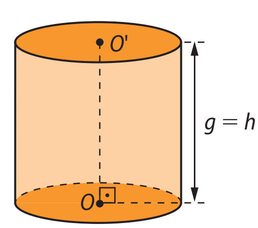
- **bases**: são os círculos de raio *r* e centros *O* e *O′* situados nos planos paralelos α e β, respectivamente;
- **raio da base**: é o raio do círculo *C*;
- **altura**: é a distância entre os planos paralelos α e β, cuja medida indicaremos por *h*;
- **eixo**: é a reta *OO′* que contém os centros das bases;
- **geratrizes**: são os segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, cuja medida indicaremos por *g*.



De acordo com a inclinação das geratrizes em relação aos planos das bases, os cilindros podem ser **oblíquos** ou **retos**.



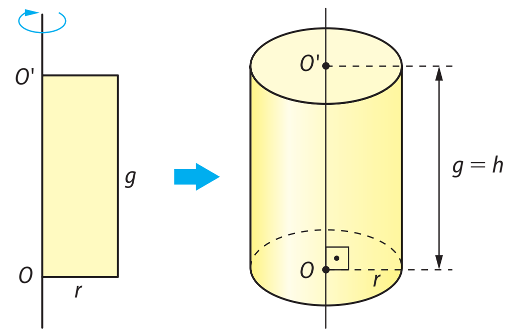
Cilindro oblíquo



Cilindro reto

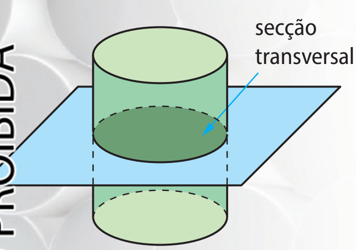
Um cilindro é oblíquo quando as geratrizes são oblíquas aos planos das bases e é reto quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Um cilindro reto também pode ser obtido pela rotação completa de um retângulo de lados de medidas r e g em torno do eixo OO'. Assim, o cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Secções de um cilindro



A secção obtida pela intersecção de um cilindro com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do cilindro**.

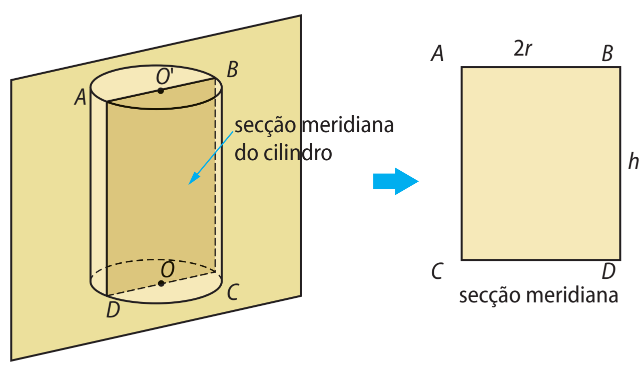
A secção obtida pela intersecção de um cilindro com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cilindro**.

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões $2r$ (medida do diâmetro das bases do cilindro) e h (medida da altura do cilindro).

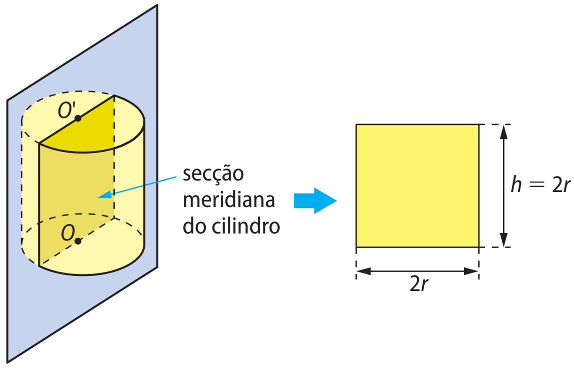
PENSE E RESPONDA

Observe a imagem anterior e responda: qual figura geométrica plana é determinada pela secção transversal do cilindro?

A secção transversal é um círculo congruente às bases.



Se a medida da altura do cilindro for igual à medida do diâmetro da base, ou seja, $h = 2r$, então a secção meridiana é um quadrado e o cilindro é chamado de **cilindro equilátero**.

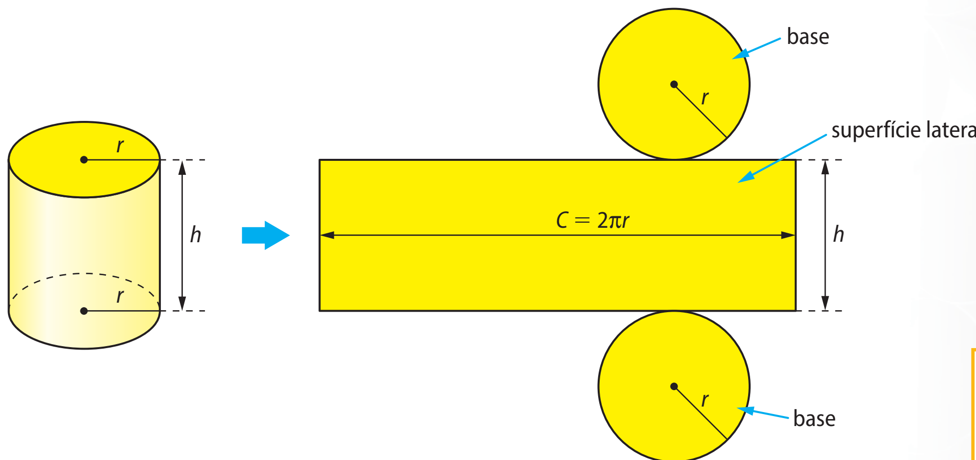


VITALY SOSNOVSKIY/SHUTTERSTOCK.COM

Área da superfície de um cilindro reto

Vamos planificar a superfície de um cilindro reto de altura medindo *h* e raio da base *r* para determinar a área da sua superfície.

EDITORIA DE ARTE



A superfície total de um cilindro reto é formada pela superfície lateral e pela superfície das duas bases circulares. Como podemos observar pela planificação, a área dessa superfície é a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e h mais as áreas das bases, cada uma delas com área equivalente à área de um círculo de raio r.

Assim, temos:

- **área da base (S_b):** $S_b = \pi r^2$
- **área lateral (S_ℓ):** $S_\ell = 2\pi rh$

PENSE E RESPONDA

Observando a imagem dada anteriormente e considerando as fórmulas apresentadas ao lado, determine uma fórmula para obter a área total da superfície de um cilindro reto relacionando o raio e a altura do cilindro.

$S_t = 2\pi r(h + r)$

VITALY SOSNOVSKY/SHUTTERSTOCK.COM

Volume de um cilindro

Considere a situação a seguir.

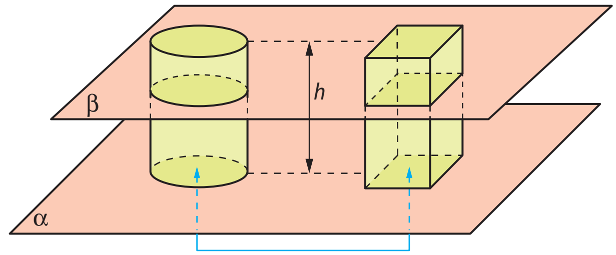
Em um treinamento do Corpo de Bombeiros, uma mangueira acoplada a um caminhão foi esticada e completamente preenchida com água para testes, formando um cilindro reto. Para o planejamento de futuras ações, deseja-se saber o volume de água necessário para preencher o interior dessa mangueira.

Para responder a questões como essa, é necessário calcular o volume do cilindro, o que veremos a seguir como fazer.

CHINGYUNSONG/SHUTTERSTOCK.COM

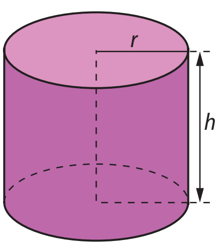
▪ Bombeiro conectando uma mangueira cilíndrica ao caminhão.

Considere um cilindro e um prisma com mesma altura h e bases de áreas iguais a S_b contidas em um plano α.



As bases têm áreas iguais e valem S_b.

Qualquer plano β paralelo às bases e que intersecte os dois sólidos determina neles secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases do cilindro e do prisma são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b.



Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que calcular o volume do cilindro é equivalente a calcular o volume do prisma.

Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, então o volume do cilindro também o será, e podemos escrever:

volume do cilindro = (área da base) · (medida da altura)

Em um cilindro circular reto de raio r, a área da base é dada por $S_b = \pi r^2$. Portanto, o volume do cilindro é dado por:

$$V = S_b \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \pi r^2 h}$$

FÓRUM

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Economia de água

É sabido da importância de se economizar água. Uma pessoa com bons hábitos de consumo consegue economizar cerca de 40 litros de água por dia! No entanto, a responsabilidade por mudança nos hábitos de consumo dos recursos hídricos não deve partir somente dos indivíduos, mas também de todos os setores da economia.

Por exemplo, em 2018, foi divulgada uma pesquisa pelo IBGE que apontou que, em 2015, o setor agropecuário foi o setor da economia que teve o pior desempenho na utilização de água: para cada 1 real de riqueza gerada, foram gastos 91,58 litros de água. Para se ter uma ideia, o setor agropecuário gerou, em 2015, R$ 263,6 bilhões de riqueza.

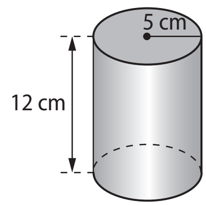
Fontes dos dados: COSTA, D. Saiba quais setores da economia são menos eficientes no uso da água. **O Globo**, 16 mar. 2018. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/saiba-quais-setores-da-economia-sao-menos-eficientes-no-uso-da-agua-22496692. Acesso em: 5 ago. 2020. PIB da agropecuária tem alta de 1,8% em 2015. **Revista Safra**, 4 mar. 2016. Disponível em: http://revistasafra.com.br/pib-da-agropecuaria-tem-alta-de-18-em-2015/. Acesso em: 5 ago. 2020.

- Junte-se a seus colegas, e debatam sobre a questão da economia dos recursos naturais e a respeito do alcance, do impacto e da responsabilidade de cada pessoa e de cada instituição. Debatam, também, sobre como lidar com o seguinte dado: a agropecuária é um dos setores que mais geram riqueza no país, mas também é um dos que mais consomem recursos naturais. Como equilibrar essa situação? Resposta pessoal.

ANANALINE/SHUTTERSTOCK.COM

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Uma lata tem o formato cilíndrico reta, com as medidas indicadas na figura. Nessas condições, responda:

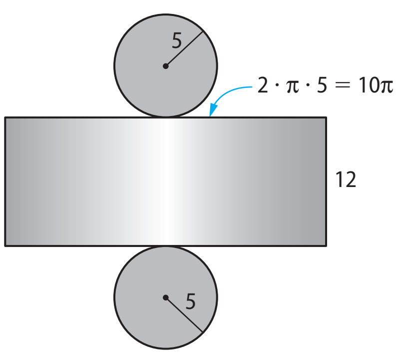


a) Qual é a quantidade mínima de papel, em cm², necessária para cobrir a superfície lateral dessa lata?

b) Qual é a área total da superfície dessa lata? Use $\pi = 3{,}14$.

Resolução

Planificando a superfície do cilindro, temos:



a) Área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = 10\pi \cdot 12 = 120\pi \Rightarrow S_\ell = 120\pi$ cm²

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$S_\ell = 120 \cdot 3{,}14 = 376{,}8$

A quantidade mínima de papel é 376,8 cm².

b) Área total (S_t):

$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 376{,}8 + 2 \cdot (\pi 5^2) = 376{,}8 + 50\pi = 376{,}8 + 50 \cdot 3{,}14 = 533{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_t = 533{,}8$ cm²

Podemos também calcular diretamente pela fórmula

$S_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow S_t = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (12 + 5) = 10\pi \cdot 17$

$S_t = 170 \cdot (3{,}14) = 533{,}8 \Rightarrow S_t = 533{,}8$ cm²

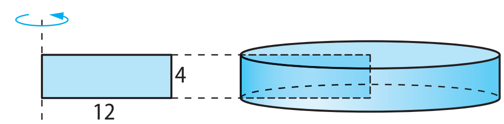
Portanto, a área total da superfície da lata é 533,8 cm².

2. Calcule a área total do sólido obtido pela rotação completa de um retângulo de dimensões 4 cm e 12 cm em torno do lado:

a) menor; **b)** maior.

Resolução

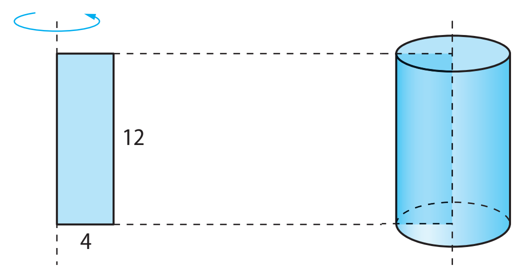
a) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 12 cm e altura 4 cm.



$S_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow$
$\Rightarrow S_t = 2\pi \cdot 12\ (4 + 12) \Rightarrow S_t = 384\pi$

Portanto, $S_t = 384\pi$ cm².

b) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 4 cm e altura 12 cm. Assim:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$S_t = 2\pi \cdot 4(12 + 4) \Rightarrow S_t = 128\pi$

Portanto, $S_t = 128\pi$ cm².

3. Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm em determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior do que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

Resolução

Vamos indicar o volume de líquido no primeiro recipiente por V_1, e, no segundo, por V_2.

$V_1 = \pi r^2 h$ e $V_2 = \pi R^2 H$

Do enunciado: $R = 2r$ e $h = 10$ cm.

Como o volume de líquido é o mesmo:

$V_1 = V_2 \Rightarrow \pi r^2 h = \pi (2r)^2 H$

$r^2 h = 4r^2 H \Rightarrow H = \dfrac{h}{4} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

Portanto, $H = 2{,}5$ cm.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Um cilindro reto tem altura igual a 5 cm e raio da base medindo 6 cm. Determine:

a) área da base; 36π cm²

b) área lateral; 60π cm²

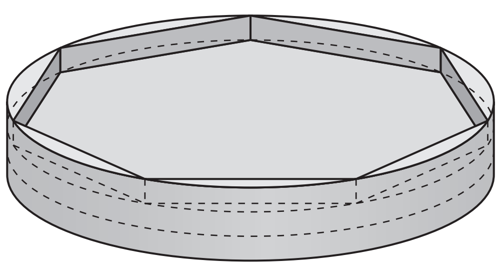
c) área total. 132π cm²

2. Determine a área lateral de um cilindro cujo perímetro da base é 62,8 cm e cuja altura é a metade do raio da base. Adote $\pi = 3{,}14$. 314 cm²

3. Da rotação completa de um retângulo de dimensões 5 cm e 9 cm obtém-se um cilindro reto cuja área da base é 25π cm². Calcule a área total desse cilindro. 140π cm²

4. A área lateral de um cilindro é 20π cm². Se o raio da base mede 5 cm, calcule a altura *h* desse cilindro. 2 cm

5. (UFG-GO) A figura a seguir representa uma moeda semelhante à de vinte e cinco centavos de real, com 20 mm de diâmetro e 3 mm de espessura.



EDITORIA DE ARTE

Em cada face circular da moeda está inscrito um prisma heptagonal regular, em baixo relevo, com 1 mm de profundidade. Apenas uma das faces está visível na figura, mas a outra face é idêntica a ela. Após a fabricação, a moeda é banhada com uma substância antioxidante.

Desconsiderando a existência de inscrições e outras figuras na superfície da moeda, calcule a área da superfície a ser banhada com antioxidante.

Dados: $\pi = 3{,}14$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0{,}4$. 928,4 mm²

6. Quantos centímetros quadrados de folha de flandres são necessários para construir uma lata de óleo, com tampa, no formato de um cilindro reto, tendo 8 cm de diâmetro de base e 18 cm de altura? 176π cm²

7. Em um cilindro equilátero, a área da secção meridiana vale 400 cm². Calcule:

a) a altura do cilindro; 20 cm

b) a área total da superfície do cilindro. 600π cm²

8. (UEMG) Uma empresa de produtos de limpeza deseja fabricar uma embalagem com tampa para seu produto. Foram apresentados dois tipos de embalagens com volumes iguais. A primeira é um cilindro de raio da base igual a 2 cm e altura igual a 10 cm; e a segunda, um paralelepípedo de dimensões iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O metro quadrado do material utilizado na fabricação das embalagens custa R$ 25,00. Considerando-se $\pi = 3$, o valor da embalagem que terá o menor custo será: alternativa **a**

a) R$ 0,36

b) R$ 0,27

c) R$ 0,54

d) R$ 0,41

9. (Enem/MEC) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas: alternativa **d**

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

a) I

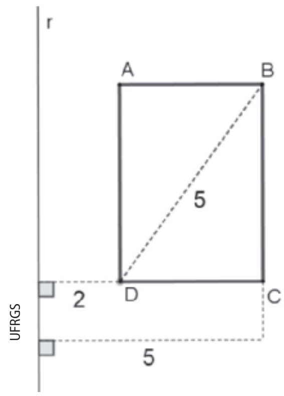
b) II

c) III

d) IV

e) V

10. (UFRGS-RS) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo *ABCD* em torno da reta *r*, conforme indicado na figura a seguir.



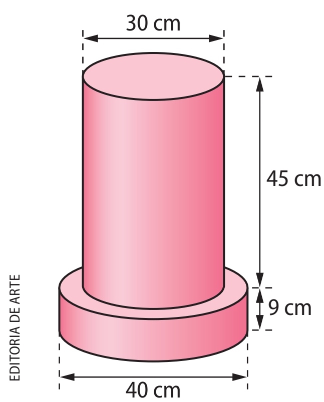
O volume do sólido obtido é alternativa **d**

a) 16π. **b)** 84. **c)** 100. **d)** 84π. **e)** 100π.

11. Considere o sólido composto de dois cilindros retos, conforme indica a figura. Calcule:

a) a área total da superfície desse sólido. $2\,510\pi$ cm^2

b) o volume total desse sólido. $13\,725\pi$ cm^3



12. (Enem/MEC) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.
Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5 **b)** 1,0 **c)** 2,0 **d)** 3,5 **e)** 8,0

alternativa **c**

13. Um cilindro reto tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 80π cm^2. Determine seu volume. 75π cm^3

14. (UEG-GO) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que com a jarra completamente cheia conseguia encher oito copos de 300 mL cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30 cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm^2, é: alternativa **d**

a) 10 **b)** 30 **c)** 60 **d)** 80

15. Certo produto de limpeza é vendido em dois recipientes cilíndricos:

(1) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 11,6 cm;

(2) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 16,6 cm.

Os preços desse produto são R$ 0,70 e R$ 1,10, respectivamente, para as latas (1) e (2).

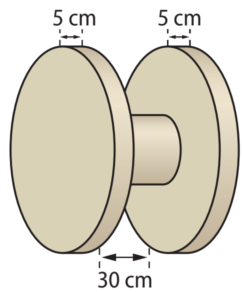
a) Calcule os volumes em cada recipiente. $V_1 \simeq 350$ cm^3; $V_2 \simeq 500$ cm^3

b) Qual das duas embalagens apresenta melhor preço para o consumidor?
A lata (1) apresenta melhor preço para o consumidor.

16. (Ulbra-RS) A Gestão Ambiental visa ao uso de práticas que garantem a conservação e a preservação da biodiversidade, a reciclagem das matérias-primas e a redução do impacto ambiental das atividades humanas sobre os recursos naturais. Consciente da importância de reaproveitar sobras de madeira, uma serraria que trabalha apenas com madeira de reflorestamento resolveu calcular a sobra de madeira na confecção de peças cilíndricas. Para confeccionar uma peça cilíndrica, a serraria faz os cortes adequados em um prisma quadrangular de arestas da base 5 cm e altura 0,8 m e obtém um cilindro de 5 cm de diâmetro e 0,8 m de altura. A sobra de madeira na fabricação de mil destas peças é, em cm^3 (utilize $\pi = 3{,}14$), a seguinte: alternativa **c**

a) $4{,}3 \cdot 10^{-5}$ **b)** 430 **c)** $4{,}3 \cdot 10^5$ **d)** 1570 **e)** 2000

17. O sólido de madeira indicado na figura é utilizado para enrolar cabos telefônicos.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

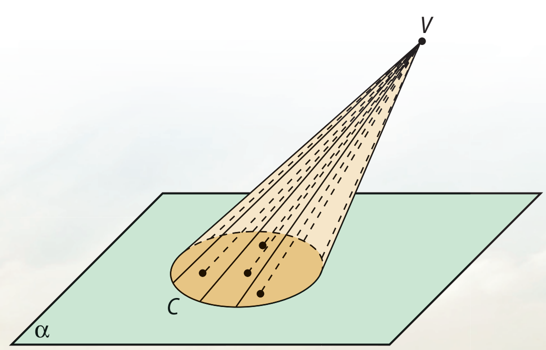
Os cilindros das extremidades têm 80 cm de diâmetro e o cilindro interno, 20 cm de diâmetro. Determine o volume de madeira gasto para construir esse sólido. $19\,000\pi \text{ cm}^3$

18. É possível construir caixas-d'água cilíndricas usando duas chapas de aço retangulares para revestimento lateral e duas chapas de aço quadradas para as bases. As chapas retangulares são encurvadas e soldadas e as chapas quadradas são cortadas em círculos inscritos e soldadas. Essas chapas são vendidas por 200 reais o metro quadrado.
Elabore um problema no qual seja necessário determinar o preço aproximado do gasto com chapas de aço para construir uma caixa-d'água de volume acima de 20 mil litros a partir da altura da caixa-d'água.
Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.
Resposta pessoal.

Cone

Além do cilindro, há outro grupo de corpos redondos, cuja forma pode ser associada a objetos do cotidiano, como funis, casquinha de sorvete e cones de trânsito. Esse tipo de corpo redondo, que é denominado **cone**, estudaremos a seguir.

Dado um plano α, um círculo C contido em α e um ponto V que não pertence a α, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do círculo C é denominada **cone circular** ou, simplesmente, **cone**.

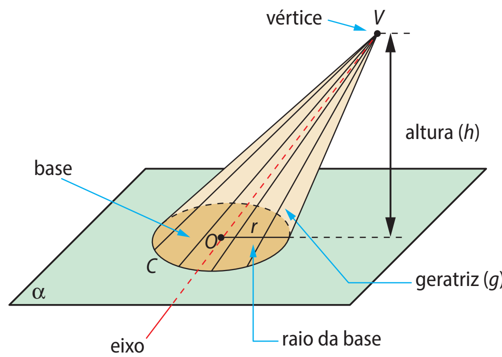


CHANCHAI HOWHARN/SHUTTERSTOCK.COM

LIPING/SHUTTERSTOCK.COM

Os cones de trânsito, como o próprio nome já diz, lembram cones.

Considerando o cone representado na figura a seguir, destacamos os seguintes elementos:

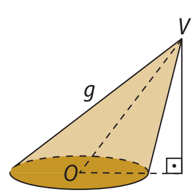


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

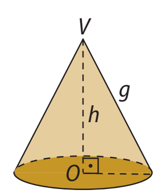
- **base**: é o círculo *C* de raio *r* e centro *O* situado no plano α;
- **eixo**: é a reta *OV*;
- **vértice**: é o ponto *V*;
- **raio da base**: é o raio do círculo *C*;
- **altura**: é a distância do ponto *V* ao plano da base, e indicaremos sua medida por *h*;
- **geratriz**: é qualquer segmento de reta cujos extremos são o vértice *V* e um ponto qualquer da circunferência da base, e indicaremos sua medida por *g*.

De acordo com a inclinação do eixo do cone em relação ao plano da base, um cone pode ser oblíquo ou reto.

Um cone é **oblíquo** quando seu eixo é oblíquo ao plano da base e é **reto** quando seu eixo é perpendicular ao plano da base.

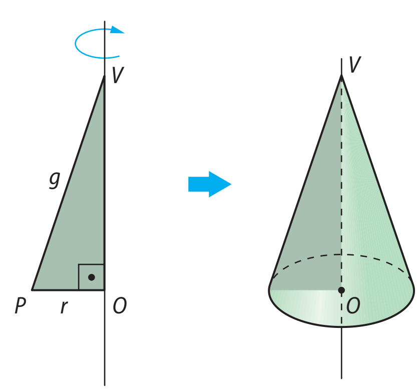


Cone oblíquo



Cone reto

Um cone circular reto também pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno do eixo de um dos catetos. Assim, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.



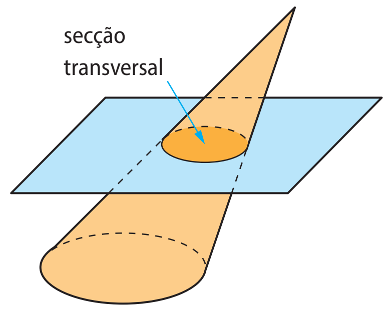
Secções de um cone

PENSE E RESPONDA

Qual é a forma geométrica plana determinada pela secção transversal de um cone?

A secção transversal de um cone é um círculo.

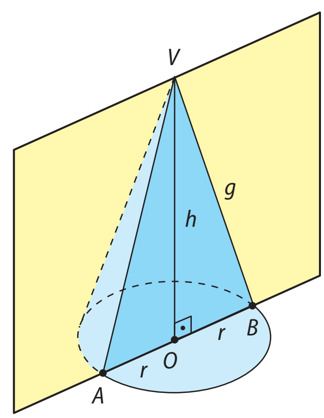
A secção obtida pela intersecção de um cone com um plano paralelo à sua base é denominada **secção transversal do cone**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A secção obtida pela intersecção de um cone com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cone**.

No cone circular reto, a secção meridiana é um **triângulo isósceles** de base $2r$ e lados congruentes medindo g.

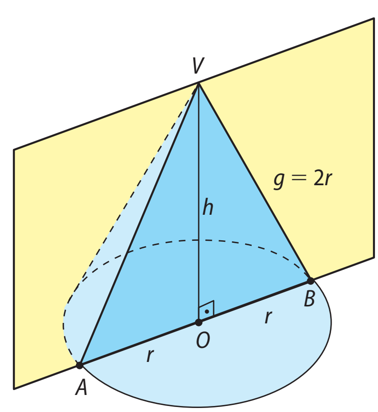


Quando a secção meridiana for um triângulo equilátero, ou seja, $g = 2r$, o cone é chamado de **cone equilátero**.

PENSE E RESPONDA

Observando as figuras dos cones retos ao lado, utilize o teorema de Pitágoras no triângulo *VBO* para determinar uma relação entre as medidas da geratriz g, altura h e raio r da base de um cone circular reto.

$g^2 = h^2 + r^2$



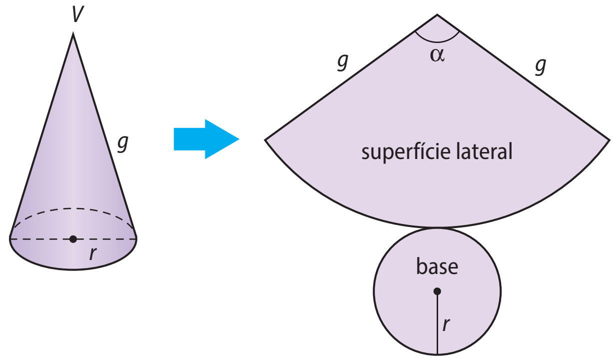
Cone equilátero

A relação que você obteve no **Pense e Responda** é muito importante na resolução de problemas que tratam de cones.

Área da superfície de um cone reto

Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base r e geratriz g para determinar sua área.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

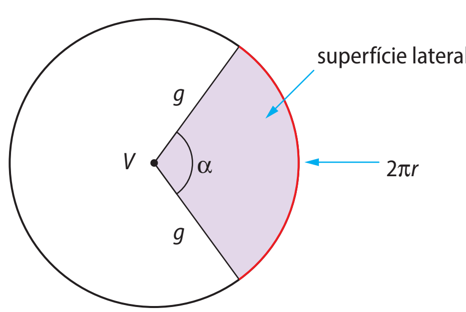


A superfície total do cone é formada pela superfície da base (círculo) mais a superfície lateral (um setor circular). Assim, temos:

- **área da base (S_b)**: é a área do círculo de raio r.

$$S_b = \pi r^2$$

- **área lateral (S_ℓ)**: a área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, que é o comprimento da circunferência da base do cone. Atenção: o ângulo central do arco precisa estar em radianos.



■ Setor circular correspondente à superfície lateral do cone.

Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, é possível determinar a área da superfície lateral (S_ℓ) pela regra de três a seguir:

comprimento do arco do setor		área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	S_ℓ

$$2\pi r \cdot \pi g^2 = 2\pi g \cdot S_\ell \Rightarrow S_\ell = \frac{\cancel{2\pi} r \cdot \cancel{\pi} g^{\cancel{2}}}{\cancel{2\pi g}} \Rightarrow \boxed{S_\ell = \pi r g}$$

PENSE E RESPONDA

Observando as imagens dadas anteriormente e considerando as fórmulas apresentadas, determine uma fórmula para obter a área total da superfície de um cone reto relacionando o raio da base e a geratriz do cone.

$S_t = \pi r(g + r)$

Volume de um cone

Considere a situação a seguir.

Um doce muito famoso e tradicional no Brasil é o canudinho de doce de leite. Ele consiste em uma massa fina frita em formato que lembra um cone que é recheado com doce de leite cremoso. Exatamente por ser muito famoso, o dono de uma confeitaria decidiu produzir e vender esse doce.

Cones de sorvete.

Para determinar quanto de doce de leite seria necessário fazer, é preciso responder duas perguntas: quantas unidades de canudinhos ele pretende produzir por dia e qual a quantidade de doce de leite necessária para preencher cada canudo.

Mas como calcular essa quantidade?

Assim como fizemos para determinar o volume de uma pirâmide, no Capítulo anterior, aplicando o princípio de Cavalieri, podemos utilizar o mesmo raciocínio para determinar o volume de um cone.

Considere um cone *C* e uma pirâmide *P* de mesma altura de medidas *h* e bases de mesma área S_b, contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo ao plano α, distante *h*' do vértice e secante aos sólidos *C* e *P* determina duas secções transversais de áreas S_1 e S_2, respectivamente.

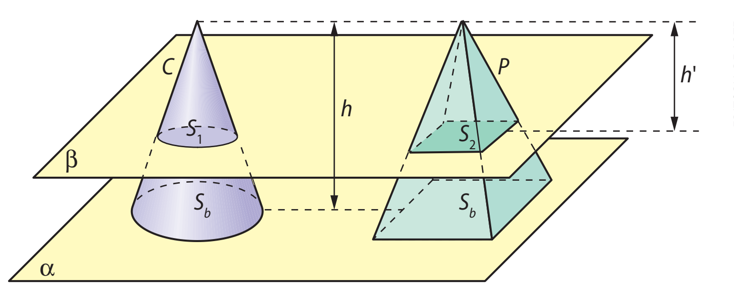
Sabemos que para pirâmides vale a igualdade $\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Prova-se que a relação análoga vale também para cones, ou seja, $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Logo, $\frac{S_1}{S_b} = \frac{S_2}{S_b}$ e, portanto, $S_1 = S_2$.

PENSE E RESPONDA

Voltando ao problema do recheio de doce de leite, se o dono da doceria fez 800 mL de doce de leite, aproximadamente quantos canudos com 3 cm de diâmetro por 8 cm de altura ele poderá preencher? Saiba que 1 cm^3 = 1 mL.

42 canudos



Assim, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que o volume da pirâmide *P* é igual ao volume do cone *C* e podemos escrever:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

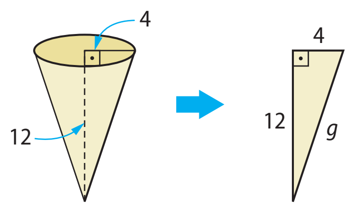
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

4. Um fabricante resolveu fazer a embalagem para um de seus produtos no formato de um cone reto, com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual será a quantidade mínima do material utilizado para cobrir toda a superfície dessa embalagem? Use $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{10} = 3{,}16$.

Resolução

Modelo de embalagem:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$

$g = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$g = 4\sqrt{10}$ cm

Vamos agora determinar a área da base (S_b):

$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \Rightarrow S_b = 16\pi$ cm²

Cálculo da área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} = 16\pi\sqrt{10}$

$\Rightarrow S_\ell = 16\pi\sqrt{10}$ cm²

Cálculo da área total (S_t):

$S_t = S_b + S_\ell = 16\pi + 16\pi\sqrt{10} = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right) \Rightarrow$

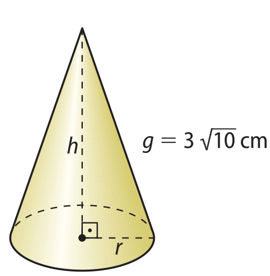
$\Rightarrow S_t = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right)$ cm²

Como $\sqrt{10} = 3{,}16$, obtemos:

$S_t = 16 \cdot (3{,}14) \cdot (1 + 3{,}16) = 50{,}24 \cdot (4{,}16) \cong 209$

Portanto, a quantidade mínima será de 209 cm² de material.

5. Em um cone reto, a área da base é 9π cm² e a geratriz mede $3\sqrt{10}$ cm. Determine o volume do cone.



Resolução

Primeiro, vamos determinar o raio do cone:

$S_b = 9\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 3$ cm

Cálculo da altura do cone:

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$\left(3\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 90 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 81 \Rightarrow h = 9 \Rightarrow h = 9$ cm

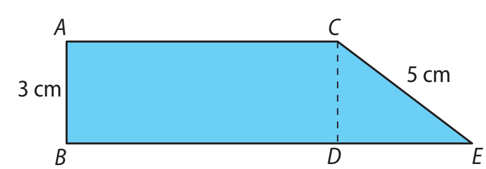
Cálculo do volume do cone:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 27\pi \Rightarrow V = 27\pi$ cm³

Portanto, o volume do cone é 27π cm³.

6. (UFV-MG) O trapézio retângulo a seguir sofre uma rotação de 360° em torno da base maior. Sabendo-se que $AB = 3$ cm, $CE = 5$ cm e que o volume do sólido obtido é 84π cm³, determine AC.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

O volume do cilindro gerado pela rotação do retângulo *ABCD* pode ser determinado pela diferença entre o volume do sólido e o volume do cone gerado pela rotação do triângulo *CDE*. O triângulo *CDE* é retângulo em *D*. Indicando a medida de *DE* por *h*, aplicamos o teorema de Pitágoras no $\triangle CDE$ e obtemos:

$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$, ou seja, $h = 4$ cm.

Cálculo do volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cone} = 12\pi$ cm³

Cálculo do volume do cilindro:

$V_{cilindro} = V_{sólido} - V_{cone} = 84\pi - 12\pi = 72\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 72\pi$ cm³

Seja a medida $AC = x$, temos:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot x \Rightarrow 72\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot x \Rightarrow x = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8$ cm

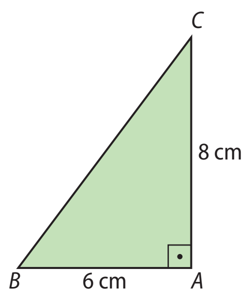
Portanto, $AC = 8$ cm.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

19. Um funil de papel no formato de um cone reto tem 6 cm de diâmetro e 4 cm de altura. Qual é a área lateral desse funil? (Use $\pi = 3{,}14$.) Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. $47{,}1\ \text{cm}^2$

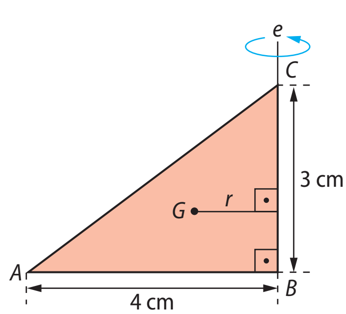
20. Considere o triângulo retângulo *ABC* da figura.



Determine a área total do sólido obtido pela rotação completa do triângulo em torno do lado:

a) $\overline{AC}$; $96\pi\ \text{cm}^2$ **b)** $\overline{AB}$. $144\pi\ \text{cm}^2$

21. (UERJ) Uma linha poligonal fechada de três lados limita um triângulo de perímetro ℓ. Se ela gira em torno de um de seus lados, gera uma superfície de área *S* igual ao produto de ℓ pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro *G* da poligonal.
A figura a seguir mostra a linha (*ABCA*) que dá uma volta em torno de *BC*.



a) Esboce a figura gerada e indique o cálculo da área de sua superfície que é igual a $36\pi\ \text{cm}^2$. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Calcule a distância *r* do baricentro *G* dessa linha ao eixo de rotação.

SAIBA QUE...

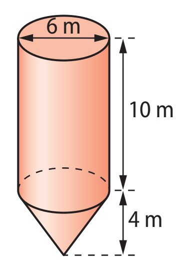
Baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo (denotado por *G*).

22. A geratriz de um cone equilátero mede 20 cm. Calcule a área da base (S_b) desse cone. $100\pi\ \text{cm}^2$

23. Determine a altura de um chapéu de cartolina de formato cônico construído a partir de um setor circular de raio 15 cm e ângulo central de 120°. $10\sqrt{2}\ \text{cm}$

24. A superfície lateral de um cone circular reto é feita com uma peça circular de papel de 20 cm de diâmetro cortando-se fora um setor de $\frac{\pi}{5}$ radianos. Calcule a altura do cone que tem essa superfície lateral. $\sqrt{19}\ \text{cm}$

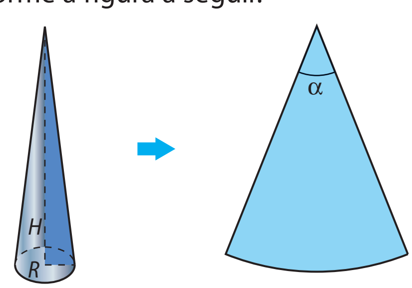
25. Uma cooperativa agrícola vai construir um silo para armazenamento de cereais em grãos. O silo terá o formato indicado na figura. O corpo será cilíndrico e a base terminará em um funil cônico.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

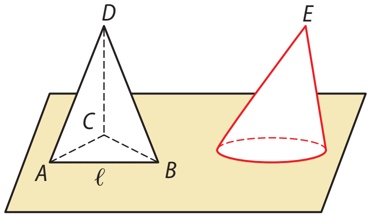
Para que a superfície desse silo não enferruje, será necessário pintá-lo externamente. Se com uma lata de tinta pode-se pintar 10 m², qual é o número mínimo de latas para pintar a superfície total desse silo? Use $\pi = 3{,}14$. Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. 27 latas.

26. É dada a superfície de um cone circular reto (sem fundo) de raio *R* e altura *H*. Cortando-o por uma de suas geratrizes e abrindo tal superfície, obtém-se um setor circular plano conforme a figura a seguir.



Qual é a relação entre *R* e *H* para que o ângulo α seja 45°? $H = 3\sqrt{7}\,R$

27. Considere uma pirâmide de base triangular e um cone, ambos de mesma altura *H*, de acordo com a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A pirâmide *ABCD* tem como base um triângulo equilátero *ABC* de lado ℓ, e o cone, de vértice *E*, tem como base um círculo de mesma área que o triângulo *ABC*.
Supondo que a base da pirâmide de base triangular e a base do cone estão em um mesmo plano, determine uma fórmula para calcular o volume do cone de vértice *E*, relacionando a medida de ℓ e de *H*. $V = \frac{\ell^2 H\sqrt{3}}{12}$

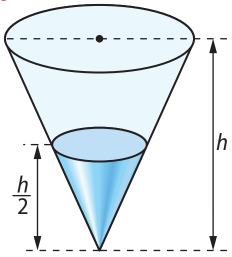
28. (ITA-SP) As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2. 96π m^2

29. Um cone circular reto tem 3 cm de raio e 15π cm^2 de área lateral. Calcule seu volume. 12π cm^3

30. Considere um triângulo retângulo e isósceles cuja hipotenusa mede 2 cm. Determine o volume do sólido obtido pela rotação completa desse triângulo em torno da hipotenusa. $\frac{2\pi}{3}$ cm^3

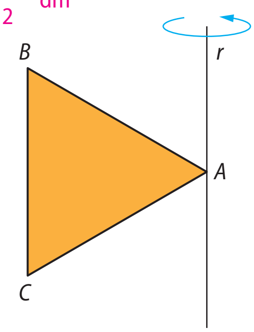
31. O raio da base de um cone de revolução mede 3 cm, e o perímetro de sua secção meridiana mede 16 cm. Determine seu volume. 12π cm^3

32. Na figura a seguir, tem-se um recipiente no formato de um cone circular reto, com um líquido que atinge metade de sua altura. Se *V* é a capacidade do cone, qual é o volume do líquido? $V' = \frac{V}{8}$



33. Uma ampulheta pode ser considerada como formada por dois cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. Determine a razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro. $\frac{1}{6}$

34. A medida dos lados de um triângulo equilátero *ABC* é 5 dm. O triângulo gira em torno de uma reta *r* do plano do triângulo, paralela ao lado *BC* e passando pelo vértice *A*. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo. $\frac{125\pi}{2}$ dm^3



35. Cisternas são depósitos que captam e armazenam água da chuva. São muito utilizadas em regiões em que há escassez de água e passaram a ser adotadas também em grandes centros urbanos por causa do racionamento gerado pelos baixos níveis de água das represas. Um modelo de reservatório muito utilizado é formado por um cilindro sobreposto por um cone de mesma base, como é possível ver na figura.


SELMA CAPARROZ

Uma escola pretende construir uma cisterna cujo reservatório terá o mesmo formato do modelo da imagem. Entre as especificações do projeto, a escola decidiu que a cisterna deve ter altura máxima de 4 metros e capacidade para armazenar no mínimo 12 mil litros e no máximo 24 mil litros de água.
Elabore um problema envolvendo a construção de uma cisterna que atenda às necessidades e condições dessa escola. Resposta pessoal.

CONEXÕES

Água: recurso e disponibilidade

Leia o texto a seguir a respeito da água como recurso natural e sua disponibilidade no Brasil.

Água: um recurso cada vez mais ameaçado

A água é um recurso natural essencial para a sobrevivência de todas as espécies que habitam a Terra.

[...]

Os alimentos que ingerimos dependem diretamente da água para a sua produção. Necessitamos da água também para a higiene pessoal, para lavar roupas e utensílios e para a manutenção da limpeza de nossas habitações. Ela é essencial na produção de energia elétrica, na limpeza das cidades, na construção de obras, no combate a incêndios e na irrigação de jardins, entre outros. As indústrias utilizam grandes quantidades de água, seja como matéria-prima, seja na remoção de impurezas, na geração de vapor e na refrigeração. Dentre todas as nossas atividades, porém, é a agricultura aquela que mais consome água – cerca de 70% de toda a água consumida no planeta é utilizada pela irrigação. [...]

[...]

De maneira geral, o Brasil é um país privilegiado quanto ao volume de recursos hídricos, pois abriga 13,7% da água doce do mundo. Porém, a disponibilidade desses recursos não é uniforme. [...] mais de 73% da água doce disponível no país encontra-se na bacia Amazônica, que é habitada por menos de 5% da população. Apenas 27% dos recursos hídricos brasileiros estão disponíveis para as demais regiões, onde residem 95% da população do país [...]. Não só a disponibilidade de água não é uniforme, mas a oferta de água tratada reflete os contrastes no desenvolvimento dos Estados brasileiros. Enquanto na região Sudeste 87,5% dos domicílios são atendidos por rede de distribuição de água, no Nordeste a porcentagem é de apenas 58,7%.

O Brasil registra também elevado desperdício: de 20% a 60% da água tratada para consumo se perde na distribuição, dependendo das condições de conservação das redes de abastecimento.

BRASIL. Ministério da Educação. Ministério do Meio Ambiente. **Manual de educação para o consumo sustentável**. Brasília, DF: Consumers International/MMA/MEC/IDEC, 2005. p. 26; 28-29. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf. Acesso em: 7 ago. 2020.

IADAMS/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, faça o que se pede na atividade a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Como podemos ver, a oferta de água no mundo é escassa (e no Brasil não é diferente), de modo que precisamos ter uma noção completa de como consumimos esse recurso. Pensando nisso, foi criado o conceito de **pegada hídrica**, que consiste em saber o volume de água que é utilizada durante todo o processo de produção de um bem ou de um serviço. Por exemplo, a média global da pegada hídrica para 1 kg de carne bovina é 15,5 mil litros de água.

Esse conceito foi criado em 2002 e um de seus pioneiros foi o professor neerlandês Arjen Hoekstra (1967-2019).

Fonte dos dados: EMBRAPA. **Contando Ciência na *web***. Disponível em: https://www.embrapa.br/contando-ciencia/agua/-/asset_publisher/EljjNRSeHvoC/content/consumo-de-agua-para-producao-de-um-produto/1355746?inheritRedirect=false. Acesso em: 7 ago. 2020.

Respostas pessoais.

a) Em grupo, pesquise mais informações sobre o conceito de pegada hídrica e seu valor para alguns bens e serviços que vocês consomem normalmente.

b) O que vocês acham desse conceito? De que modo ele pode nos ajudar a economizar água?

NOWACZYK/SHUTTERSTOCK.COM

Rio Amazonas, o maior rio do mundo em volume de água. Fotografia de 2016.

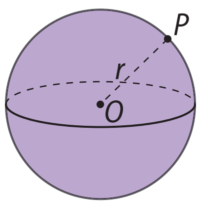
Esfera

SAIBA QUE...

O planeta Terra tem, por definição, a forma de um geoide, que tem a superfície irregular.

Muitos objetos e construções que vemos em nosso cotidiano possuem formatos que lembram esferas ou partes de uma esfera. Apesar de não constituírem rigorosamente esferas, possuem um formato muito próximo ao delas e, por isso, para alguns cálculos, pode-se tratar esses objetos como esferas e é isso, inclusive, que faremos aqui.

Uma bola de futebol é um exemplo de um objeto com formato muito próximo ao de uma esfera, mas que não constitui rigorosamente uma esfera. A própria Terra, como sabemos, é muito parecida com uma esfera quando observada à distância, mas por vários motivos, como o fato de ser achatada nos polos, não possui o formato de uma esfera.



EDITORIA DE ARTE

Vamos considerar um ponto O e um número real r positivo como indicado na figura.

O conjunto de todos os pontos P do espaço, cuja distância ao ponto O é igual a r, é denominado **superfície esférica** de centro O e raio r.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera**. Dessa maneira, a esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r.

De modo bastante simples, podemos dizer que a superfície esférica é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

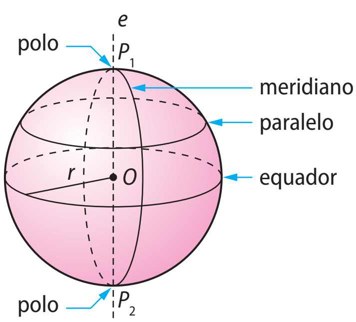
As denominações **centro** e **raio** são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.

Domo da Rocha, parte do Santuário Nobre, ou Monte do Templo (nome dado por muçulmanos e judeus, respectivamente), onde também está localizada a Mesquita de Al Aqsa, em Jerusalém. Fotografia de 2020.

DMITRIY FELDMAN SVARSHIK/SHUTTERSTOCK.COM

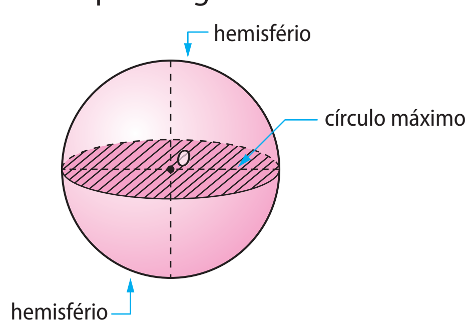
Dada uma esfera, destacamos os seguintes elementos:

- **eixo**: é qualquer reta que contém o centro da esfera, e indicamos por *e*;
- **polos**: são os pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo *e*, e indicamos por P_1 e P_2;
- **equador**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano perpendicular ao eixo *e* e que passa pelo centro da esfera;
- **paralelo**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano perpendicular ao eixo *e*. É, portanto, paralelo ao equador;
- **meridiano**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano que contém o eixo *e*.

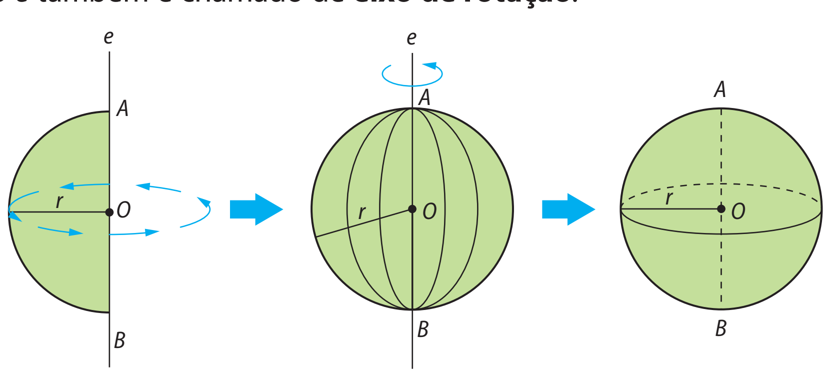


Os círculos obtidos pela intersecção da esfera com um plano que passa pelo centro *O* são chamados **círculos máximos**.

Fixado um eixo *e*, o equador é um particular círculo máximo que divide a esfera em duas partes iguais chamadas de **hemisférios**.



A esfera também pode ser obtida pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém seu diâmetro. Por isso, o eixo *e* também é chamado de **eixo de rotação**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE...

Os mesmos elementos da esfera foram adotados para dividir a Terra. Ela é dividida em dois hemisférios (Norte e Sul), a partir da linha do equador, que corresponde à uma circunferência máxima do planeta, medindo 40 075 km.

3D_KOT/SHUTTERSTOCK.COM

Volume de uma esfera

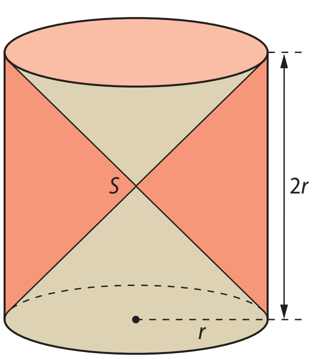
▪ O rolamento de esferas é o mais conhecido e utilizado de todos.

Rolamentos são peças utilizadas em máquinas para reduzir o atrito entre partes móveis. O rolamento pode ficar preso a uma superfície fixa, permitindo que um eixo acoplado na parte interna gire livremente, ou ele pode ficar com a parte interna presa a um eixo fixo e permitir que a parte externa gire livremente.

O rolamento mais utilizado é o de esferas, formado por um anel externo, um anel interno, várias esferas (que são as principais responsáveis pelo movimento com baixo atrito) e uma gaiola que mantém as esferas em seus lugares. Além disso, o rolamento recebe uma lubrificação e, por fim, é blindado para evitar o acúmulo de pó em seu interior.

Cada peça que compõe o rolamento é, em geral, feita de aço, de modo que é preciso fundi-lo para colocá-lo em uma forma. Para saber quanto de aço irá nas formas das esferas, é necessário determinar o volume dessas esferas. E como fazemos isso?

Para calcular o volume de uma esfera de raio r, vamos utilizar o princípio de Cavalieri. Considere um cilindro equilátero de altura $2r$ e raio da base r. Retirando dois cones circulares retos, de altura r e raio da base r, cujas bases coincidem com as bases desse cilindro, obtemos o sólido A, representado na figura a seguir na cor laranja.



EDITORIA DE ARTE

▪ Sólido *A*

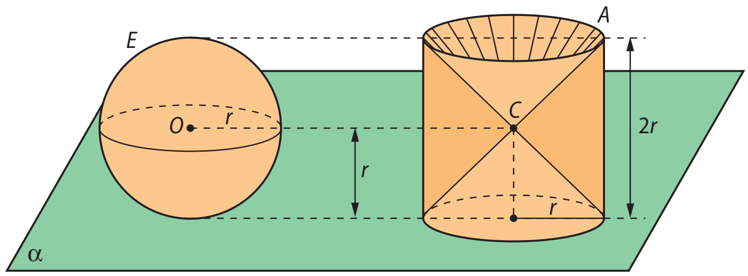
O volume do sólido A é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero e os volumes dos dois cones circulares retos, ou seja:

$$V_A = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

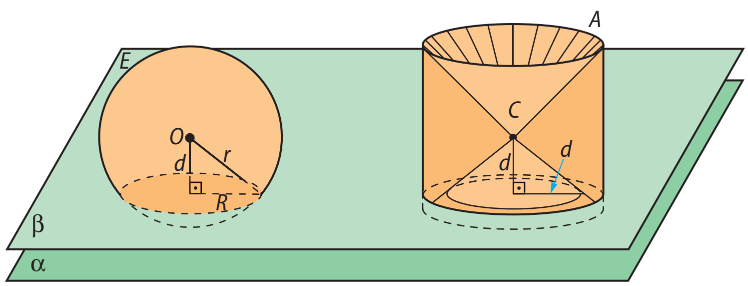
FEDOROV IVAN SERGEEVICH/SHUTTERSTOCK.COM

WAJ/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, vamos considerar uma esfera E de raio r e o sólido A, apoiados em um mesmo plano α, conforme mostra a figura a seguir.



Considere também um plano β paralelo a α que secciona a esfera E e o sólido A a uma distância d do centro da esfera O, como mostra a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O plano β determina um círculo na esfera E, cujo raio indicaremos por R. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = R^2 + d^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - d^2$$

Assim, a área S_1 do círculo é dada por:

$$S_1 = \pi R^2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{I}$$

A secção determinada pelo plano β no sólido A é uma coroa circular de raios r e d e sua área S_2 é dada por:

$$S_2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{II}$$

Assim, comparando I e II, verificamos que a área da secção plana da esfera E (círculo) é igual à área da secção plana do sólido A (coroa circular).

Pelo princípio de Cavalieri, a esfera E tem o mesmo volume que o sólido A e, portanto, o volume V da esfera é dado por: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

PARA OUVIR

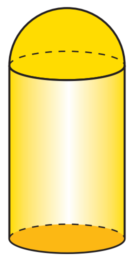
MATEMÁTICA das esferas. Campinas: Unicamp. *Podcast*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1272. Acesso em: 8 ago. 2020.

Você imagina quantas moedas de 1 real são necessárias para recobrir uma quadra de vôlei? E quantas laranjas podem preencher o espaço de uma sala de aula? Ouça o *podcast* **Matemática das esferas** e surpreenda-se.

TACIO PHILIP SANSONOVSKI/SHUTTERSTOCK.COM

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

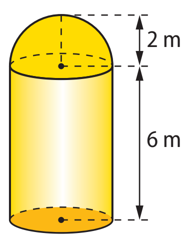
7. Um silo tem o formato de um cilindro circular reto (com fundo) sob uma semiesfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

O volume do silo é igual à soma dos volumes de uma semiesfera de raio 2 m e de um cilindro de raio 2 m e altura 6 m.



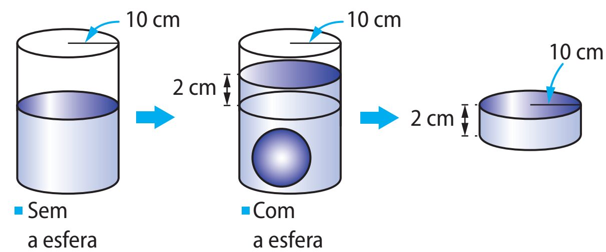
$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3}{2} = \frac{16\pi}{3} \text{ m}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 22 \cdot 6 = 24\pi \text{ m}^3$$

$$\text{Logo: } V_{\text{silo}} = \frac{16\pi}{3} + 24\pi = \frac{88}{3}\pi \Rightarrow V_{\text{silo}} = \frac{88\pi}{3} \text{m}^3$$

8. Para medir o diâmetro de uma esfera maciça, João utilizou a seguinte estratégia: colocou certa quantidade de água em um cilindro de raio 10 cm e altura 20 cm. Em seguida, mergulhou a esfera na água, de modo que ela ficou totalmente submersa. Ele, então, verificou que a altura da água no cilindro subiu 2 cm. Assim, pôde determinar o diâmetro da esfera. Qual é esse diâmetro?

Resolução



A estratégia de João é correta, pois o volume de água deslocada (e conhecida, pois se trata de um cilindro) é equivalente ao volume da esfera.

O volume de água deslocada corresponde ao volume de um cilindro de raio 10 cm e altura 2 cm.

$$V_{\text{deslocado}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 200\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 200\pi \Rightarrow R = \sqrt[3]{150} \text{ cm}$$

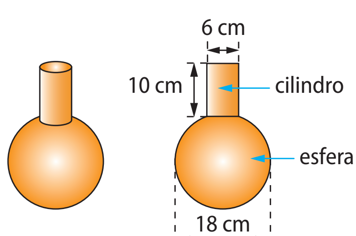
O diâmetro é igual a $2 \cdot \sqrt[3]{150}$ cm, aproximadamente 10,6 cm.

> ATIVIDADES

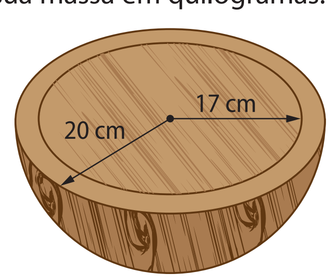
NÃO ESCREVA NO LIVRO

36. Calcule, aproximadamente, a capacidade em mililitros do recipiente indicado na figura. Adote $\pi = 3{,}14$.

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. 3 334,68 mL

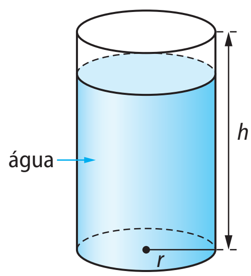


37. O recipiente da imagem é uma semiesfera de madeira cuja densidade é 0,7 g/cm³ e raios internos e externos conforme a indicação. Calcule sua massa em quilogramas. 4,52 kg



38. Um reservatório no formato de uma semiesfera tem 18 m de diâmetro. Qual é o volume de água que cabe nesse reservatório? 486π m^3

39. (Unifesp-SP) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura $h = 50$ cm e raio $r = 15$ cm.



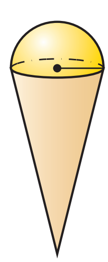
Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$). 34,325 L

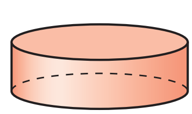
b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água? 8,95 cm

40. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero de raio a. Qual é a razão entre o volume V_1 da esfera e o volume V_2 do cilindro? $\frac{2}{3}$

41. Uma casquinha de sorvete, no formato de cone, tem 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. Depois de totalmente preenchida, ainda é adicionada meia bola de sorvete, conforme a imagem.
Já o recipiente cilíndrico que armazena o sorvete possui 18 cm de diâmetro e 5 cm de altura.



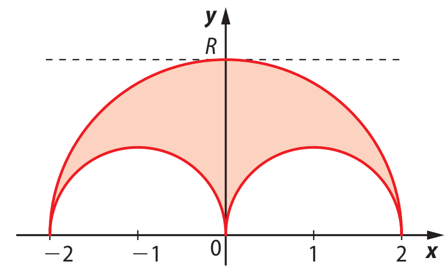
- Casquinha cônica com meia bola de sorvete.



- Recipiente contendo sorvete.

Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio. 60 casquinhas

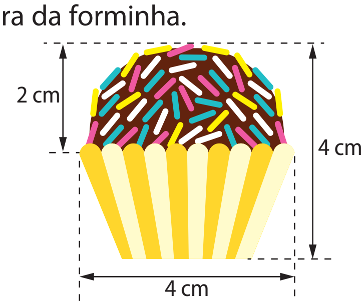
42. (PUC-RS) A região R da figura está limitada por três semicírculos.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sabendo que R efetua uma volta completa em torno do eixo x, calcule o volume do sólido gerado. 8π

43. Em uma festa de arrecadação de fundos em uma escola, os pais de uma estudante resolveram fazer brigadeiros para vender durante a festa. Solicitando ajuda à filha, pediram a ela que confeccionasse caixinhas de papel-cartão para colocar cada um dos brigadeiros. As caixinhas confeccionadas deveriam ter formato cúbico, com todas as faces coladas, com exceção da tampa. Antes de ser armazenado na caixinha, o brigadeiro é colocado em uma forminha de formato cilíndrico, de modo que metade do doce, de formato esférico, fique para fora da forminha.



Forme pequenos grupos com seus colegas e, juntos, respondam às questões a seguir. Para todas as situações necessárias, considerem $\pi = 3{,}14$.
Utilizem a calculadora para auxiliá-los nos cálculos.

a) Qual é o volume, aproximado, de cada brigadeiro? aproximadamente 33,49 cm^3

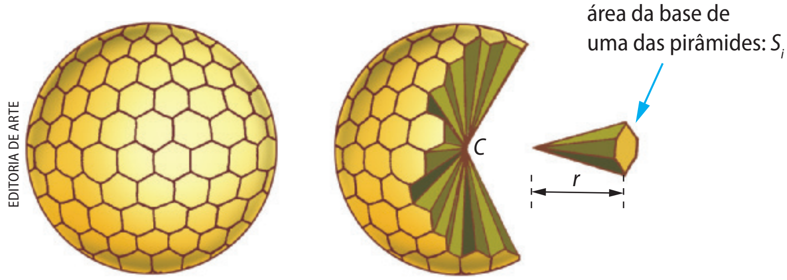
b) Qual é a capacidade aproximada das forminhas de formato cilíndrico? 25,12 cm^3

c) Sabendo que cada folha de papel-cartão tem 50×70 centímetros, quantas caixinhas de aresta igual a 4 cm poderão ser confeccionadas?
36 caixinhas.

Área de uma superfície esférica

Agora que já aprendemos como determinar o volume de uma esfera, vamos usar esse resultado para verificar o cálculo da área de uma superfície esférica.

Uma esfera pode ser imaginada como a reunião de vários sólidos, parecidos com "pirâmides", de vértices em C (centro da esfera), como representado na figura a seguir.



De fato, esses sólidos não são verdadeiramente pirâmides, pois a "base" de cada sólido é uma superfície arredondada. Entretanto, vê-se que, quantos mais sólidos considerarmos, mais a base deixa de ser arredondada e se torna mais plana, se aproximando, assim, da forma de uma pirâmide.

A altura de cada "pirâmide" é o raio r da esfera.

Considere uma esfera de centro C decomposta em uma quantidade de n sólidos parecidos com pirâmides cujos vértices se encontram no centro da esfera.

Desse modo, a superfície esférica fica dividida em n "polígonos", bases das pirâmides, cujas áreas chamaremos de S_1, S_2, S_3, ..., S_n. Para n muito grande, cada "polígono" tem área e perímetro muito pequenos e a soma das áreas de todos esses polígonos se aproxima da área da superfície esférica S:

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n \simeq S \quad \text{I}$$

Além disso, quanto maior for o número n, mais a soma dos volumes de todas essas "pirâmides" se aproxima do volume da esfera. O volume de uma pirâmide é dado por $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ e, sendo $h = r$ (raio da esfera) e $S_b = S_i$, que é a área do i-ésimo polígono, podemos escrever o volume da i-ésima pirâmide como $V_i = \frac{1}{3} S_i \cdot r$, $i = 1, 2, ..., n$.

Assim, se V é o volume da esfera, para n muito grande, temos:

$$V \simeq V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$

$$V \simeq \frac{S_1 \cdot r}{3} + \frac{S_2 \cdot r}{3} + \frac{S_3 \cdot r}{3} + ... + \frac{S_n \cdot r}{3} = \frac{1}{3} \cdot r(S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n) \quad \text{II}$$

Substituindo I em II:

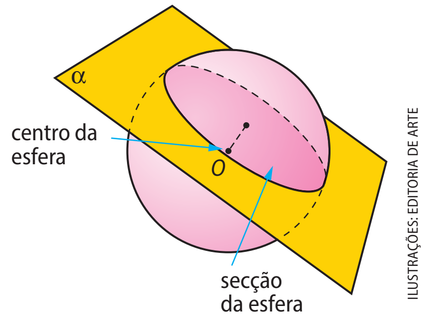
$$V \simeq \frac{1}{3} S \cdot r$$

Logo, como $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, temos: $\dfrac{4\pi r^3}{3} \simeq \dfrac{1}{3} S \cdot r \Rightarrow \boxed{S \simeq 4\pi r^2}$

Vimos que, quanto maior for o número n, mais S se aproxima de $4\pi r^2$. Logo, fazendo n tender ao infinito, obtemos a igualdade $S = 4\pi r^2$.

Secção de uma esfera

Ao seccionar uma esfera por um plano α, a intersecção entre o plano e a esfera é um círculo, como representado na figura a seguir.



Quando o plano passa pelo ponto O (centro da esfera), como já vimos, o círculo obtido é chamado de círculo máximo.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. A professora Cristina produziu com os estudantes de sua turma da pré-escola enfeites de Natal no formato de esferas, com 12 cm de diâmetro cada uma. Para pintar a superfície dessas esferas, ela dispõe de uma latinha de tinta, na qual o fabricante afirma ser possível pintar até 5 m² de superfície com esse conteúdo. Nessas condições, qual é o número máximo de enfeites que a turma de Cristina poderá pintar?

Resolução

Em cada esfera: $r = \frac{12}{2} \Rightarrow r = 6$ cm.

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2$

$S_{esfera} = 144\pi$ cm²

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$S_{esfera} = 452{,}16$ cm².

Como é possível pintar até 5 m² (50 000 cm²) com a latinha de tinta, temos: $\frac{50\,000}{452{,}16} \simeq 110{,}58$

Portanto, a turma da professora Cristina poderá pintar até 110 enfeites.

10. Uma esfera cuja superfície tem área igual a 676π cm². Nessas condições, determine:

a) a medida do raio da esfera;

b) o volume da esfera.

Resolução

a) Cálculo do raio da esfera:

$S = 676\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 676\pi \Rightarrow r^2 = 169$

Como r é positivo, temos $r = 13$.

Portanto, o raio da esfera é $r = 13$ cm.

b) Cálculo do volume:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 \Rightarrow V = \frac{8\,788}{3}\pi$,

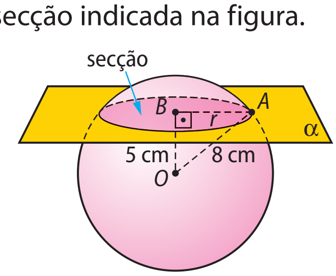
ou seja, $V = \frac{8\,788}{3}\pi$ cm³

Portanto, o volume da esfera é $V = \frac{8\,788}{3}\pi$ cm³.

11. Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm de seu centro. Calcule o raio do círculo encontrado pela secção.

Resolução

A intersecção do plano α com a esfera determina a secção indicada na figura.



Do triângulo retângulo OBA:

$8^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow 64 = 25 + r^2 \Rightarrow r^2 = 39$

Como r é positivo, $r = \sqrt{39}$ cm.

Portanto, o raio do círculo encontrado pela secção é $\sqrt{39}$ cm.

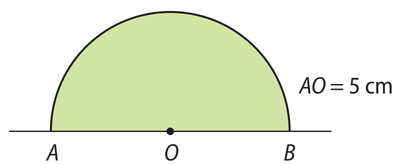
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

44. Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8π cm², calcule o raio da esfera. $\sqrt{2}$ cm

45. Um plano α secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância do centro da esfera ao plano α é 12 cm. Calcule a área da secção obtida. 256π cm²

46. Qual é a área total da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno de seu diâmetro *AB*? 100π cm²



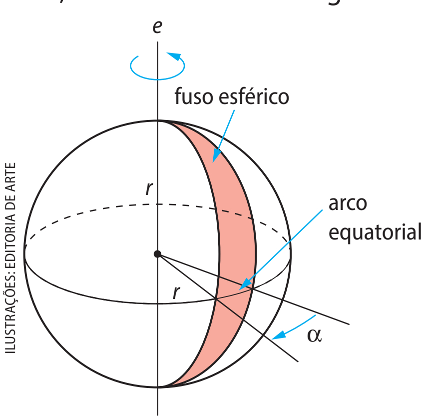
47. Supondo que a Terra seja uma esfera perfeita, e sabendo que seu raio é de aproximadamente 6 400 km, determine:

a) a área total da superfície terrestre (use $\pi = 3$); 491 520 000 km²

b) o valor percentual que ocupa o continente americano, cuja área é de 42 215 000 km², em relação à superfície total da Terra.

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. aproximadamente 8,59%

48. Chamamos de **fuso esférico** a superfície gerada pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de uma semicircunferência de raio *r* em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado na figura a seguir. $\frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dê a fórmula que calcula a área do fuso esférico em função da medida do ângulo α e do raio *r*.

49. (Faap-SP) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é 12π dm³ e o raio da base é 3 dm. $\sqrt{6}$ dm

50. Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera. $4\,500\pi$ cm³

51. Uma igreja possui uma cúpula abobadada com formato externo de uma semiesfera de diâmetro medindo 12 metros.

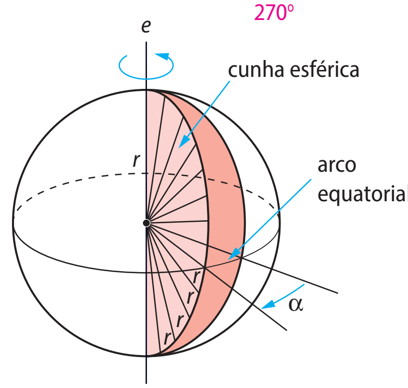
OPIS ZAGREB/SHUTTERSTOCK.COM

- Diversos templos religiosos possuem abóbadas (ou domos) no formato semiesférico. Um dos mais famosos é o da Basílica de São Pedro, no Vaticano. Fotografia de 2019.

Para evitar vazamentos será aplicado externamente uma manta asfáltica apenas na região da abóbada. A empresa que instala a manta asfáltica cobra R$ 120,00 por metro quadrado para a instalação da manta. Qual será o valor da instalação da manta asfáltica nessa abóbada? Considere $\pi = 3{,}14$. R$ 27.129,60

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

52. Chamamos de **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de um semicírculo de raio *r* em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado a seguir. $\frac{\pi r^3 \alpha}{270°}$



Escreva a fórmula que calcula o volume de uma cunha esférica, em função da medida do ângulo α e do raio *r*.

Arquimedes

A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, em seu anverso, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE (Superar as próprias limitações e dominar o universo).

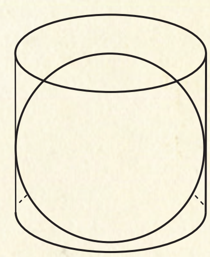
Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.

Leia a seguir um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro.

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres"[...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R, inscrita num cilindro circular reto, de altura $2R$ e cuja base tem raio R (Fig. 1).

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$



EDITORIA DE ARTE

Figura I. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Então *o volume do cilindro é* $\frac{3}{2}$ *do volume da esfera, e a área total do cilindro também é* $\frac{3}{2}$ *da área da esfera*. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves [...], há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 10. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 8 ago. 2020.

OLEX RUNDA/SHUTTERSTOCK.COM