МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Построение решений задач для уравнений с частными производными в Maxima

Учебное пособие для вузов

Составители: С. А. Ткачева,
Л. В. Безручкина,
А.С. Рябенко,
П. В. Садчиков

Воронеж
2021

Утверждено научно-методическим советом математического факультета

от 27.05.2021 года протокол № 0500-05

Рецензент: к.ф-м. н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета Савченко Г.Б.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 2-го и 4-5 курсов математического факультета очной формы обучения, обучающихся по направлениям 01.03.01 Математика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 01.03.04 Прикладная математика и по специальностям 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, 10.05.04 Информационно-аналитические системы безопасности

Система символьной математики Maxima

Maxima - еще одна программа для выполнения математических вычислений, символьных преобразований, а также построения разнообразных графиков. Сложные вычисления оформляются в виде отдельных процедур, которые затем могут быть использованы при решении других задач. Система Maxima распространяется под лицензией GPL и доступна как пользователям ОС Linux, так и пользователям Windows. Подробности по истории системы, инсталляционный модуль (размером всего в 10 MB), документацию, исходный код и другую сопутствующую информацию можно найти на Web-узле пакета http://maxima.sourceforge.net. Выбор программы в меню **Пуск** vxmaxima позволит начать сеанс работы с этой программой.

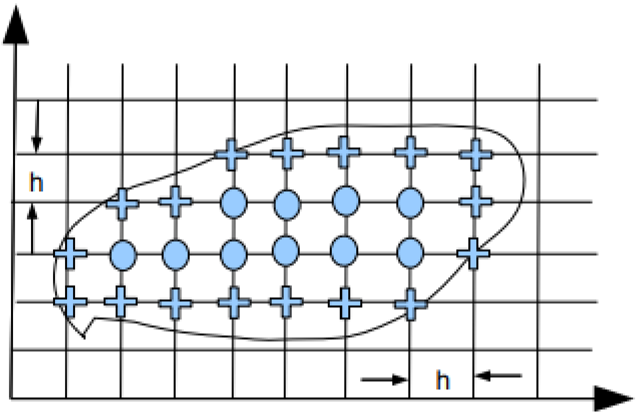
Метод сеток для решения дифференциальных уравнений в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют широкие приложения в математической физике, гидродинамике и других областях знаний. В большинстве своем такие уравнения в явном виде не решаются. Поэтому широкое распространение получили методы приближенного их решения, в частности, метод сеток. Метод сеток или метод конечных разностей является наиболее распространенным и эффективным методом численного решения для уравнений математической физики. Для решения дифференциального уравнения методом конечных разностей (сеток) сначала область, на которой ищется решение, заменяется дискретным множеством точек (разностной сеткой). В этом методе, как правило, используются регулярные сетки, шаг которых либо постоянен, либо меняется по несложному закону. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем рассмотрены более подробно в пособиях [1], [2].

Пусть в качестве области изменения функции задан прямоугольник. Оси *x* и *y* разбиваются на отрезки, которые являются шагами сетки по соответствующим направлениям. Через точки деления проводятся прямые, параллельные осям координат. Совокупность точек пересечения (узлов) этих прямых и образует сетку в заданной двумерной области. Узлы, расстояние между которыми равно шагу сетки по одной из осей, называются соседними.

Способ построения сетки не меняется и в том случае, если задана область произвольной формы. Узлы сетки, попавшие внутрь области, называются внутренними узлами. Точки пересечения прямых, образующих сетку, с границей области называются граничными узлами. Для двумерной области произвольной формы сетка в общем случае всегда является нерегулярной, причем особенности геометрии учитываются только в около граничных точках.

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}$$



На рисунке внутренние точки области обозначены кружками, граничные— крестиками. Решение уравнения в частных производных ищется во внутренних точках области, в граничных точках области оно задается граничными условиями.

Прежде чем приступать к решению дифференциального уравнения, оно само и граничные условия заменяются разностными аналогами. Запишем ряд Тейлора для функции *f(x)*:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots$$

Если оборвать этот ряд на втором члене, то получим

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h \quad ,\text{или} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Выражение, стоящее в правой части, называется правой разностной производной. Она аппроксимирует первую производную *f'(x)* в точке *x* .

В разложении Тейлора функции *f(x)* можно заменить h на $-h$ и получить левую разностную производную

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} .$$

Вычитая $f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h$

из

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h,$$

получаем центральную разностную производную

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] .$$

Если в ряде Тейлора оставить третий член ряда, то можно получить центральную разностную производную для аппроксимации *f ''(x)*:

$$f''(x) \approx \frac{1}{h}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \ .$$

Если исходить из разложения Тейлора функции двух переменных

$$u(x+h,y) = u(x,y) + u_x(x,y)h + u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!} + \cdots ,$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - u_x(x,y)h + u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!} + \cdots ,$$

то можно получить следующие аппроксимации частных производных:

$$u_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \ ,$$

$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)] \ ,$$

$$u_y(x,y) \approx \frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{k} \ ,$$

$$u_{yy}(x,y) \approx \frac{1}{k^2}[u(x,y+k) - 2u(x,y) + u(x,y-k)]$$

Разностные операторы, соответствующие дифференциальному уравнению, записываются во внутренних узлах сетки. Разностные операторы, соответствующие граничным условиям, записываются в граничных узлах сетки. В результате получаем систему алгебраических уравнений, число которых пропорционально числу внутренних узлов сеточной области. Для получения численного решения требуется решить эту систему уравнений.

При реализации вычислений на ЭВМ удобно использовать обозначения:

$$u(x,y) = u_{i,j}, \quad u(x,y+k) = u_{i+1,j}, \quad u(x,y-k) = u_{i-1,j},$$

$$u(x+h,y)=u_{i,j+1},\quad u(x-h,y)=u_{i,j-1},$$

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2h}\left[u_{i,j+1}-u_{i,j-1}\right],\quad u_x(x,y)=\frac{1}{2k}\left[u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right]$$

$$u_{xx}(x,y)=\frac{1}{h^2}\left[u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right],\quad u_{yy}(x,y)=\frac{1}{k^2}\left[u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right]$$

Пример 1. Рассмотрим задачу теплопроводности в стержне, начальная температура которого равна нулю. Пусть температура левого конца фиксирована, а на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, так что тепловой поток пропорционален разности температур конца стержня и среды. Температура среды определяется функцией g(t). Найти решение следующей задачи:

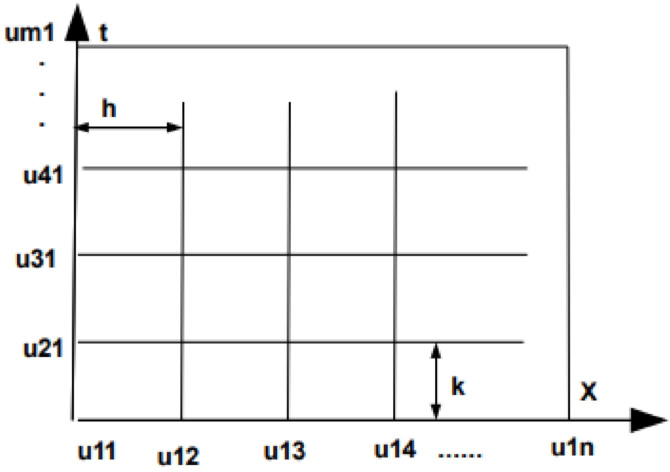
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,0<x<1,0<t<\infty$$

$$u(0,t)=1,$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=-[u(1,t)-g(t)]0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=0,\qquad 0\le x\le 1$$

Решение. Построим в плоскости прямоугольную сетку,



узлы которой определяются формулами:

$$x_j = jh, \;\; j = 0, 1, 2, \dots, n, \qquad t_i = ik, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, m\,.$$

Значения u_{ij} на левой и нижней сторонах сетки известны из граничных и начальных условий. Наша задача состоит в отыскании остальных значений u_{ij}.

Для решения задачи заменим частные производные в уравнении теплопроводности их конечно-разностными аппроксимациями

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = \frac{1}{k}[u_{i+1,j} - u_{i,j}] \;,$$

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)]$$
$$= \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i.j} + u_{i,j-1}]$$

Подставим эти выражения в наше уравнение u_t=u_{xx} и разрешим получившееся уравнение относительно значений функции на верхнем временном слое. Имеем:

$$\frac{1}{k}\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right] = \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i.j} + u_{i,j-1}]$$

Отсюда

$$u_{i+1,j} = \frac{k}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i.j} + u_{i,j-1}]+u_{i,j} \quad (1)$$

Полученная формула выражает решение в данный момент времени через решение в предыдущий момент времени (индекс i относится к временной переменной).

Аппроксимируем производную в граничном условии $u_x(1,t) = -[u(1,t) - g(t)]$ на правом конце, заменив $u_x(1,t)$левой разностной производной, поскольку правая разностная производная требует значений функции за пределами сетки:

$$\frac{1}{h}[u_{i,n} - u_{i,n-1}] = -[u_{i,n} - g_i] \ , \ g_i = g(ik) \ .$$

Отсюда находим:

$$u_{i,n} = \frac{u_{i,n-1} - hg_i}{1+h}.$$

Таки м образом, для решения поставленной задачи мы будем использовать явную схему бегущего счета: заменяя частные производные по времени и пространственной переменной конечно-разностными производными, получаем явные выражения для $u_{i,j}$ через значения функции u в предыдущие моменты времени.

Шаг 1. Находим решение на сеточном слое t=Δt , используя явную формулу (1).

Шаг 2. Величину $u_{2,n}$ находим по формуле (2).

Выполнив шаги 1-2, получаем решение для *t*=Δ*t*. Повторив шаги 1-2, получаем решение при *t=2*Δ*t* и далее.

Недостаток явной схемы: если шаг по времени оказывается достаточно большим по сравнению с шагом по x, погрешности округления могут стать настолько большими, что полученное решение теряет смысл. Отношение шагов по t и x зависит от уравнения и граничных условий. Для применимости явной схемы должно выполняться условие $k\ /h^2 \le 0{,}5$. В противном случае метод будет численно не устойчив.

Пример 2. Найти решение следующей начально-краевой задачи для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 \le x \le m,\ 0 \le t \le n \\ u(x,0) = 0{,}2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ u(0,t) = u(m,t) = 0 \end{cases}$$

Решение. Пусть $m=40$, $n=50$, шаг изменения пространственной переменной: $h=1$. Заменим частные производные в уравнении их разностными аппроксимациями

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)]$$
$$= \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{i.j} + u_{i,j-1}]$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{k^2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

Получим

$$\frac{1}{h^2}\left[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right] = \frac{1}{a^2k^2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

Выразим значение $u_{i+1,j}$:

$$u_{i+1,j} = \frac{a^2k^2}{h^2}\left[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right] + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}$$

Полученная явная разностная схема будет устойчивой, если $\frac{a^2k^2}{h^2} \le 0,5$,

Следовательно, $k \le \sqrt{0,5}\frac{h}{a}$/

Решение задачи можно представить в виде алгоритма

1. Вводим сетку: *m=40, n=50, h=1*. Создаем нулевой массив значений $u_{i,j}$ размера $m \times n$.

2. Задаем значения *a=1, k=0,1*.

3. Заполняем первую и вторую строки массива u начальными условиями $u(x,0) = 0,2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ (нулевой начальной скорости соответствует совпадение значений (смещений) в первом и втором столбцах).

4. Заполняем первый и последний столбец массива u граничными условиями $u(0,t) = u(m,t) = 0$ (на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени).

5. Находим решение, используя разностную схему

$$u_{i+1,j} = \frac{a^2k^2}{h^2}\left[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right] + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}.$$

Также можно использовать и неявные разностные схемы. В этом случае частные производные заменяются конечно-разностными аппроксимациями, но $u_{i+1,j}$ не выражаются в явном виде через значения на предыдущих слоях. Для определения $u_{i+1,j}$ на каждом временном шаге необходимо решать систему уравнений. При использовании неявных схем можно вести вычисления с достаточно большим шагом. Преимущество неявных схем перед явными в том, что в неявных схемах шаг сетки можно сделать достаточно большим, не опасаясь, что ошибки округления приведут к неверному решению.

Приведем реализацию метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных на рассмотренном примере. Выполним реализацию конечно-разностного метода в системе компьютерной математики Maxima.

Пример 3. Решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 \le x \le m,\ 0 \le t \le n \\ u(x,0) = 0,2x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ u(0,t) = u(m,t) = 0 \end{cases}$$

Решение: Вводим сетку: *m=40* , *n=50* , *h=1*, предварительно убираем из Maxima результаты предыдущих вычислений. Создаем нулевой массив значений u размера $m \times n$.

```
(%i3)   kill(all)$m:40$n:50$ h:1$
```

```
(%i4)   for i:1 thru m do for j:1 thru n do (arraymake (u, [i,j]), u[i,j]:0)$
```

Задаем значения *a=1*, *k=0,1*.

```
(%i6)   a:1$ k:0.01$
```

Заполняем первую и вторую строки массива u начальными условиями $u(x,0)=0,2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ (нулевой начальной скорости соответствует совпадение значений (смещений) в первом и втором столбцах).

```
(%i7)	for j:1 thru n do (u[1,j]:0.2·j·cos(%pi·j/2), u[2,j]:u[1,j])$
```

Заполняем первый и последний столбец массива u граничными условиями $u(0,t)=u(m,t)=0$ (на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени).

```
(%i8)	for i:1 thru m do (u[i,1]:0, u[i,n]:0)$
```

Находим решение, используя разностную схему

$$u_{i+1,j}=\frac{a^2k^2}{h^2}\left[u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right]+2u_{i,j}-u_{i-1,j}.$$

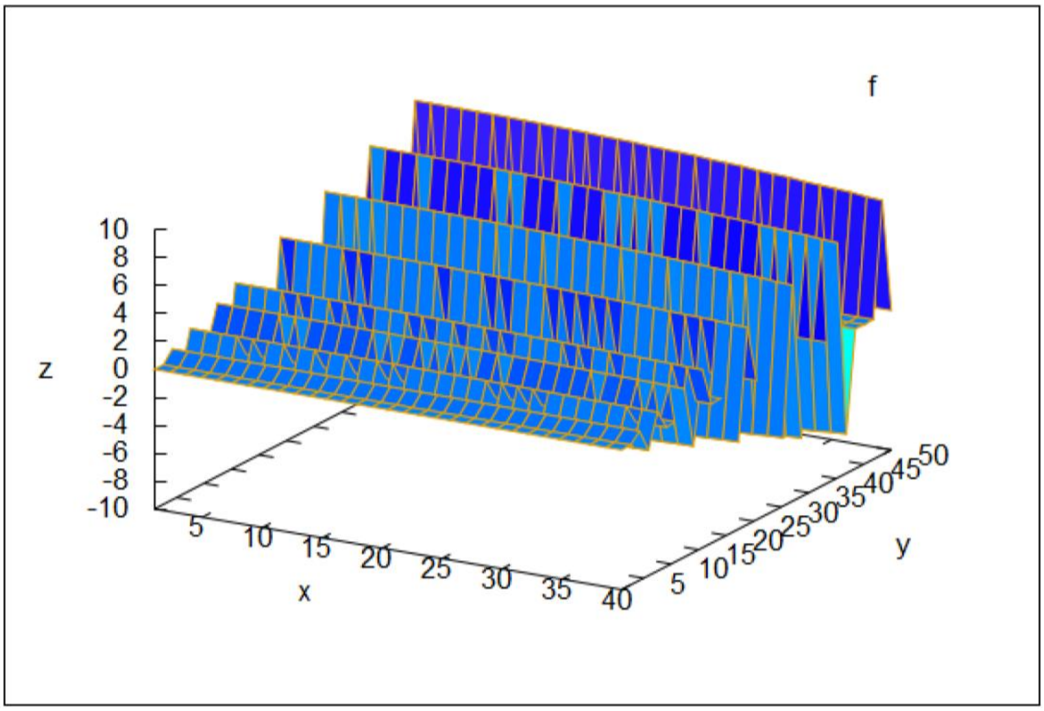
```
(%i9)	for i:2 thru m−1 do for j:2 thru n−1 do
	u[i+1,j]:float((a·k/h)^2·(u[i,j+1]−
	2·u[i,j]+u[i,j−1])+2·u[i,j]−u[i−1,j]),number$
```

Для вывода полученного решения в виде поверхности преобразуем наш массив u в функцию двух переменных:

```
(%i10)	f(x,y):=float(u[round(x),round(y)])$
```

Построим график

```
(%i12)	wxplot3d(f, [x,1,m], [y,1,n], [plot_format,gnuplot])$
```

(%t11) 

Далее приведем алгоритм решения начально-граничной задачи для уравнения теплопроводности, рассмотренной в примере 1.

Пример 4. Методом сеток с шагом *h =1* пространственной переменной и *k=1* временной координаты найти приближенное решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(где x - смещение, t - время) в квадрате *[0,n]* × *[0,n]*, используя явную разностную схему.

Граничные условия:

$$u(0,t) = g_1(t) = \alpha \; (x = 0, 0 \le t \le n)$$

$$u(n,t) = g_2(t) = \alpha \; (x = n, 0 \le t \le n)$$

Начальное условие:

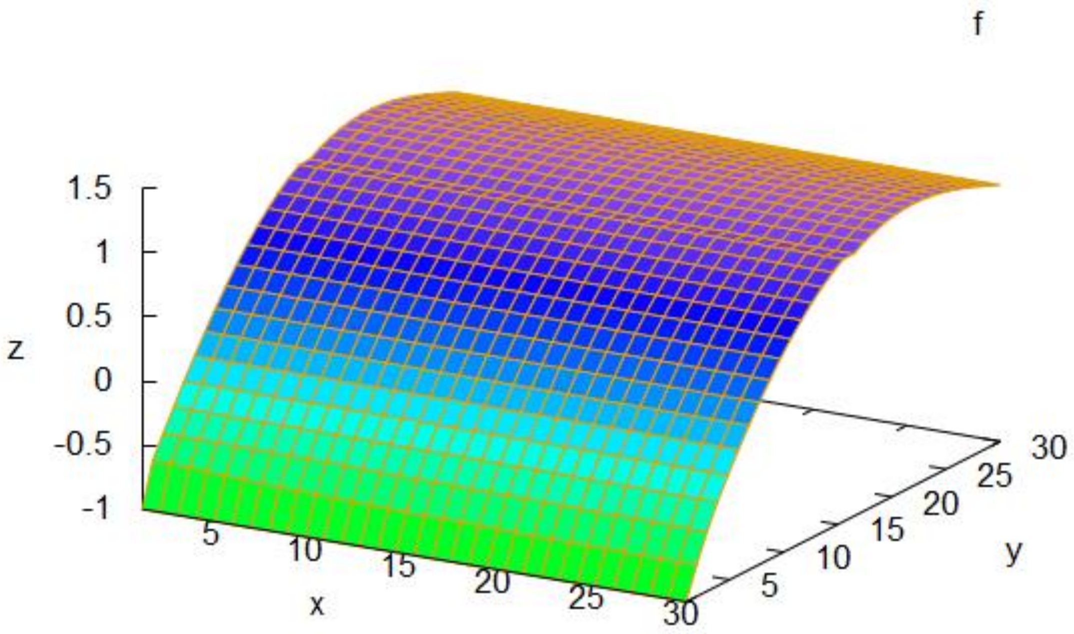
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{n}\right) + \frac{x}{n}\beta + \frac{n-x}{n}\alpha \quad (t = 0, 0 \le x \le n)$$

Результат представить в виде графика поверхности.

Рассмотрим случай n=30, c=5, $\alpha=-1,\ \beta=1$.

Приведем результат решения в программе Maxima:

```
(%i3) kill(all)$m:30$n:30$ h:1$

(%i4) for i:1 thru m do for j:1 thru n do (arraymake (u, [i,j]), u[i,j]:0)$

(%i6) c:5$ k:0.01$

(%i7) for j:1 thru n do (u[1,j]:sin(%pi·j/n)+j/n−(n−j)/n, u[2,j]:u[1,j])$

(%i8) for i:1 thru m do (u[i,1]:(−1), u[i,n]:1)$

(%i9) for i:2 thru m−1 do for j:2 thru n−1 do
      u[i+1,j]:float((c·k/(h^2))·(u[i,j+1]−
      2·u[i,j]+u[i,j−1])+u[i,j]),number$

(%i10) f(x,y):=float(u[round(x),round(y)])$

(%i11) wxplot3d(f, [x,1,m], [y,1,n], [plot_format,gnuplot])$
```



Задания для лабораторных работ

1. Лабораторная работа. Метод сеток для волнового уравнения

Методом сеток с шагом h найти приближенное решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(где x - смещение, t - время) в прямоугольной области *[0,m]* × *[0,n]*, используя явную разностную схему. Граничные условия: на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени: $u(0,t) = u(m,t) = 0$.

Начальные условия: $u(x,0) = \varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Так как концы струны закреплены, то $\varphi(0) = \varphi(m) = 0$. Шаг изменения времени подбирается самостоятельно (так, чтобы разностная схема была устойчивой). Результат представить в виде графика поверхности.

1. $a = 1, \quad m = 42, \quad n = 30, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}1x\sin\left(\frac{\pi x}{21}\right).$

2. $a = 1, \quad m = 36, \quad n = 25, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right)\cos(\pi x).$

3. $a = 1, \quad m = 39, \quad n = 45, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}2x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$

4. $a = 1, \quad m = 40, \quad n = 30, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}2x\sin\left(\frac{\pi x}{43}\right).$

5. $a = 1, \quad m = 35, \quad n = 25, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{11}\right)\cos(\pi x).$

6. $a=1,\quad m=36,\quad n=44,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,3x\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right).$

7. $a=1,\quad m=41,\quad n=28,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,3x\sin\left(\dfrac{\pi x}{33}\right).$

8. $a=1,\quad m=40,\quad n=30,\quad h=1,\quad \varphi(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{7}\right)\cos(\pi x).$

9. $a=1,\quad m=40,\quad n=43,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,25x\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right).$

10. $a=1,\quad m=40,\quad n=30,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,25x\sin\left(\dfrac{\pi x}{35}\right).$

11. $a=1,\quad m=45,\quad n=35,\quad h=1,\quad \varphi(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{9}\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).$

12. $a=1,\quad m=45,\quad n=40,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,15x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).$

13. $a=1,\quad m=40,\quad n=30,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,15x\sin\left(\dfrac{\pi x}{25}\right).$

14. $a=1,\quad m=37,\quad n=24,\quad h=1,\quad \varphi(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\cos(\pi x).$

15. $a=1,\quad m=39,\quad n=45,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,1x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right).$

16. $a=1,\quad m=50,\quad n=40,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,5x\sin\left(\dfrac{\pi x}{5}\right).$

17. $a=1,\quad m=47,\quad n=34,\quad h=1,\quad \varphi(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)\cos(\pi x).$

18. $a=1,\quad m=49,\quad n=35,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,7x\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right).$

19. $a=1,\quad m=40,\quad n=50,\quad h=1,\quad \varphi(x)=0,45x\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right).$

20. $a = 1, \quad m = 55, \quad n = 35, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$

21. $a = 4, \quad m = 40, \quad n = 35, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}35x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

22. $a = 3, \quad m = 45, \quad n = 35, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$

23. $a = 1, \quad m = 55, \quad n = 45, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}95x\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right).$

24. $a = 2, \quad m = 47, \quad n = 53, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = 0{,}35x\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right).$

25. $a = 5, \quad m = 44, \quad n = 34, \quad h = 1, \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$

2. Лабораторная работа. Метод сеток для уравнения теплопроводности

Методом сеток с шагом *h =1* пространственной переменной и *k=1* временной координаты найти приближенное решение уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (где x - смещение, t - время) в квадрате *[0,n]* × *[0,n]*, используя явную разностную схему.

Граничные условия:

$$u(0,t) = g_1(t) = \alpha \; (x = 0,\, 0 \le t \le n)$$

$$u(n,t) = g_2(t) = \alpha \; (x = n,\, 0 \le t \le n)$$

Начальное условие:

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{n}\right) + \frac{x}{n}\beta + \frac{n-x}{n}\alpha \quad (t = 0,\, 0 \le x \le n).$$

Результат представить в виде графика поверхности.

1. $n = 30, \; c = 5, \alpha = -1, \; \beta = 1.$

2. $n = 50,\ \ c = 3, \alpha = 2,\ \ \beta = 3$.

3. $n = 10,\ \ c = 4, \alpha = -1,\ \ \beta = 0$.

4. $n = 20,\ \ c = 3, \alpha = 1,\ \ \beta = 1$.

5. $n = 50,\ \ c = 10, \alpha = 2,\ \ \beta = 1$.

6. $n = 40,\ \ c = 5, \alpha = -1,\ \ \beta = -1$.

7. $n = 25,\ \ c = 4, \alpha = -1,\ \ \beta = 1$.

8. $n = 45,\ \ c = 10, \alpha = 2,\ \ \beta = 2$.

9. $n = 10,\ \ c = 3, \alpha = -1,\ \ \beta = 0$.

10. $n = 45,\ \ c = 4, \alpha = 1,\ \ \beta = 2$.

11. $n = 50,\ \ c = 5, \alpha = 1,\ \ \beta = 1$.

12. $n = 30,\ \ c = 4, \alpha = -2,\ \ \beta = 2$.

13. $n = 55,\ \ c = 3, \alpha = 1,\ \ \beta = 1$.

14. $n = 15,\ \ c = 4, \alpha = -1,\ \ \beta = -1$.

15. $n = 60,\ \ c = 5, \alpha = 1,\ \ \beta = 3$

16. $n = 35,\ \ c = 10, \alpha = 1,\ \ \beta = 2$.

17. $n = 25,\ \ c = 15\ \alpha = -1,\ \ \beta = 3$.

18. $n = 40,\ \ c = 20, \alpha = 0,\ \ \beta = 1$.

19. $n = 45,\ \ c = 10, \alpha = 3,\ \ \beta = 2$.

20. $n = 15,\ \ c = 20, \alpha = -1,\ \ \beta = 2$.

21. $n = 50,\ \ c = 15, \alpha = -1,\ \ \beta = 3$.

22. $n = 60,\ \ c = 1, \alpha = -2,\ \ \beta = -1$.

23. $n = 40,\ \ c = 25, \alpha = -2,\ \ \beta = -2$.

24. $n = 30,\ \ c = 15, \alpha = 0,\ \ \beta = -3$.

25. $n = 35,\ \ c = 10, \alpha = -3,\ \ \beta = -1$.

3. Лабораторная работа. Метод сеток для уравнения диффузии

Методом сеток с шагом *h=1* найти приближенное решение уравнения диффузии: $\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (где x - смещение, t - время) в прямоугольной области *[0,a]*× *[0,b]* , используя явную разностную схему. Граничные условия:

$$u(0,t) = g_1(t) = \alpha \, (x = 0, 0 \le t \le n)$$
$$u(n,t) = g_2(t) = \alpha \, (x = a, 0 \le t \le n).$$

Начальное условие:

$$u(x,0) = f(x) \quad (t = 0, 0 \le x \le a).$$

Шаг изменения времени выбирается самостоятельно (так, чтобы разностная схема была устойчивой). Результат представить в виде графика поверхности.

1. $d = 1, a = 60, b = 50, h = 1, f(x) = \sin(x), g_1(t) = 0, g_2(t) = \sin 60^{\circ}.$
2. $d = 2, a = 40, b = 60, h = 1, f(x) = \cos(x), g_1(t) = 1, g_2(t) = \cos 40^{\circ}.$
3. $d = 10, a = 30, b = 20, h = 1, f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t) = 0, g_2(t) = \sin 15^{\circ}.$
4. $d = 3, a = 50, b = 60, h = 1, f(x) = 2\sin(x), g_1(t) = 0, g_2(t) = \sin 45^{\circ}.$
5. $d = 2, a = 50, b = 60, h = 1, f(x) = 2\cos(x), g_1(t) = 1, g_2(t) = \cos 45^{\circ}.$
6. $d = 10, a = 40, b = 20, h = 1, f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t) = 0, g_2(t) = \sin 30^{\circ}.$
7. $d = 5, a = 25, b = 30, h = 1, f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), g_1(t) = 0, g_2(t) = \sin 15^{\circ}.$
8. $d = 10, a = 40, b = 55, h = 1, f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t) = 1, g_2(t) = \cos 15^{\circ}.$

9. $d=10, a=30, b=20, h=1,\ f(x)=2\sin\left(\frac{x}{3}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 45^{\circ}.$

10. $d=6, a=45, b=55, h=1,\ f(x)=2\sin\left(\frac{x}{4}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 15^{\circ}.$

11. $d=4, a=45, b=65, h=1,\ f(x)=2\cos\left(\frac{x}{4}\right), g_1(t)=1,\ g_2(t)=\cos 10^{\circ}.$

12. $d=10, a=35, b=25, h=1,\ f(x)=0{,}5\sin\left(\frac{x}{4}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 10^{\circ}$

13. $d=5, a=25, b=50, h=1,\ f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 45^{\circ}.$

14. $d=7, a=30, b=60, h=1,\ f(x)=3\cos\left(\frac{x}{4}\right), g_1(t)=1,\ g_2(t)=\cos 30^{\circ}.$

15. $d=8, a=25, b=45, h=1,\ f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 40^{\circ}.$

16. $d=2, a=55, b=25, h=1,\ f(x)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 60^{\circ}.$

17. $d=9, a=50, b=35, h=1,\ f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right), g_1(t)=1,\ g_2(t)=\cos 60^{\circ}.$

18. $d=3, a=35, b=45, h=1,\ f(x)=\frac{1}{2}\sin(x), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 45^{\circ}.$

19. $d=5, a=30, b=20, h=1,\ f(x)=\frac{1}{4}\sin(x), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 30^{\circ}.$

20. $d=1, a=50, b=35, h=1,\ f(x)=\frac{1}{4}\cos(x), g_1(t)=1,\ g_2(t)=\cos 15^{\circ}.$

21. $d=6, a=35, b=25, h=1,\ f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{6}\right), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 40^{\circ}.$

22. $d=1, a=30, b=25, h=1,\ f(x)=0.1\sin(x), g_1(t)=0,\ g_2(t)=\sin 30^{\circ}.$

23. $d=10, a=25, b=45, h=1,\ f(x)=0.1\cos(x), g_1(t)=1,\ g_2(t)=\cos 15^{\circ}.$

24. $d=5, a=40, b=25, h=1, \; f(x)=0.1\sin\left(\dfrac{x}{2}\right), \; g_1(t)=0, \; g_2(t)=\sin 60^{\circ}.$

25. $d=10, a=25, b=45, h=1, \; f(x)=0.1\cos(x), \; g_1(t)=1, \; g_2(t)=\cos 15^{\circ}.$

Список литературы

1. Губина Т. Н. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики MAXIMA / Т. Н Губина, Е. В. Андропова. – Елец, ЕГУ им. И. А. Бунина, 2009. – 49 с.
2. Ткачева С. А. Символьные вычисления в системах компьютерной математики / С. А Ткачева, П. В. Садчиков, Л. В. Безручкина. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020. – 69 с.

Учебное издание

Введение в теорию нелинейных параболических задач

Учебное пособие для вузов

Составители: Ткачева Светлана Анатольевна,
Безручкина Людмила Валентиновна,
Рябенко Александр Сергеевич,
Садчиков Павел Валерьевич