

1. Постановка задачи.

Пусть требуется найти дифференцируемую при $x \geq x_0$ функцию $\hat{y} = \hat{y}(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению при $x > x_0$ и начальному условию при $x = x_0$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad x_0 < x < x_0 + H, \quad H > 0, \quad y(x_0) = y_0. (1)$$

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения $\hat{y} = \hat{y}(x)$ задачи Коши (1).

Численное решение задачи (1) состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_N точного решения $\hat{y}(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_N отрезка $[x_0; x_0 + H]$. При этом величину $|\hat{y}(x_k) - y_k|$ называют локальной алгоритмической ошибкой численного метода при $x = x_k$. В реальных вычислениях всегда присутствует ошибка округления и фактически будут вычислены $\tilde{y}_i (i = 1, \dots, N)$.

Существует множество методов решения задачи Коши (1). Мы рассмотрим два важнейших класса численных методов: методы, основанные на разложении решения в ряд Тейлора, и методы полиномиальной аппроксимации.

Выберем $x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \dots, N, \quad h = \frac{H}{N}$. Точки x_i называются узлами сетки, а величина h - шагом сетки.

2. Метод Тейлора.

Предполагая, что точное решение $\hat{y}(x)$ задачи (1) является аналитической функцией в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 , разложим $\hat{y}(x)$ в ряд Тейлора в точке $x_n \in U(x_0)$:

$$\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{y}^{(k)}(x_n)}{k!} (x - x_n). \quad (2)$$

Заметим, что $\hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}(x))$ и, следовательно,

$$\hat{y}^{(j)}(x) = f^{(j-1)}(x, \hat{y}(x)), \quad j = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Производные $\hat{y}^{(k)}(x) = f^{(k-1)}(x, \hat{y}(x))$, $k = 2, 3, \dots$ вычисляются по правилам дифференцирования сложной функции:

$$f^{(1)}(x, \hat{y}(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\hat{y}}{dx} = f_x(x, \hat{y}(x)) + f_y(x, \hat{y}(x)) f(x, \hat{y}(x)),$$

$$f^{(2)}(x, \hat{y}(x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{d\hat{y}}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{d\hat{y}}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} =$$

$$f_{xx}(x, \hat{y}(x)) + 2f_{xy}(x, \hat{y}(x))f(x, \hat{y}(x)) + f_{yy}(x, \hat{y}(x))[f(x, \hat{y}(x))]^2 +$$

$$f_y(x, \hat{y}(x))[f_x(x, \hat{y}(x)) + f_y(x, \hat{y}(x))f(x, \hat{y}(x))],$$

...

Используя (3), перепишем (2) при $x = x_{n+1}$, $h = x_{n+1} - x_n$, в виде:

$$\hat{y}(x_{n+1}) = \hat{y}(x_n) + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(x_n, \hat{y}(x_n))}{k!} h^k + R_p, \quad (4)$$

где R_p - члены высших порядков. Заменяя в (4) $\hat{y}(x_n)$ на y_n и отбросив R_p , получим алгоритм метода Тейлора

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^p \frac{f^{(k-1)}(x_n, y_n)}{k!} h^k. \quad (5)$$

Обычно алгоритм (5) записывают в виде:

$$y_{n+1} = y_n + hT_p(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

где

$$T_p(x_n, y_n, h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{f^{(j)}(x_n, y_n)}{(j+1)!} h^j.$$

Метод (6) называют **методом Тейлора порядка p** .

Замечания:

1. Для метода Тейлора порядка p остаточный член R_p в формуле (4) имеет вид $R_p = O(h^{p+1})$ при $h \rightarrow 0$. Следовательно, если в алгоритме (6) $y_n = \hat{y}(x_n)$, то локальная алгоритмическая ошибка метода имеет порядок $O(h^{p+1})$.

2. Общее количество шагов численного решения задачи (1) на отрезке $[x_0; x_0 + H]$ определяется отношением $N = H/h$. При заданной точности приближенного решения число шагов N уменьшается с увеличением порядка p метода Тейлора. Но увеличение порядка метода приводит к росту числа членов в формуле (7). Для численной реализации алгоритма (6) нужно вычислять $p(p+1)/2$ значений функции $f(x, y)$ и всех ее частных

производных $\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^j \partial y^{k-j}}$ при $k < p$, $j = 1, \dots, k$. Вычисление большого

числа частных производных является трудной задачей. Поэтому методы Тейлора выше четвертого порядка в вычислительной практике обычно не используются.

Метод Тейлора первого порядка.

Из формулы (6) при $p = 1$ получаем

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Этот алгоритм называется **явным методом Эйлера**. Здесь $T_1(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$.

Метод Тейлора второго порядка.

При $p = 2$ из формулы (6) получаем

$$y_{n+1} = y_n + hT_2(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

где

$$T_2(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)]$$

3. Метод Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутты имеет тот же порядок точности, что и метод Тейлора, но исключает необходимость вычисления значений частных производных от правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$. Основная идея метода состоит в замене функции $T_p(x_n, y_n, h)$ в формуле (6) другой функцией $K_p(x_n, y_n, h)$, не требующей вычисления частных производных от $f(x, y)$ и удовлетворяющей условию

$$|T_p(x_n, y_n, h) - K_p(x_n, y_n, h)| \leq Ch^p, \quad (9)$$

где C - константа, не зависящая от h . Таким образом, алгоритм метода Рунге-Кутты имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + hK_p(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (10)$$

где $K_p(x_n, y_n, h)$ удовлетворяет условию (9). Очевидно, метод (10) имеет ту же алгоритмическую ошибку, что и метод Тейлора. Алгоритм (10) принято называть **методом Рунге-Кутты порядка p** .

Функцию $K_p(x_n, y_n, h)$ разыскивают в виде:

$$K_p(x_n, y_n, h) = \sum_{j=1}^p a_{pj} k_j, \quad (11)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} h k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2),$$

.....

$$k_p = f(x_n + \alpha_p h, y_n + \beta_{p1} h k_1 + \beta_{p2} h k_2 + \dots + \beta_{pp-1} h k_{p-1}).$$

В формулах (11) коэффициенты $a_{pj} (j=1, \dots, p)$ и $\alpha_r, \beta_{rs} (r=2, \dots, p; s=1, \dots, p-1)$ находятся из условия (9).

Метод Рунге-Кутты первого порядка.

При $p=1$ получаем из (11)

$$K_1(x_n, y_n, h) = a_{11} k_1 = a_{11} f(x_n, y_n).$$

Сравнивая $T_1(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$ с $K_1(x_n, y_n, h)$, немедленно получаем из условия (9), что $a_{11} = 1$. Таким образом метод Рунге-Кутты первого порядка совпадает с явным методом Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Метод Рунге-Кутты второго порядка.

При $p = 2$ получаем из (11)

$$K_2(x_n, y_n, h) = a_{21}f(x_n, y_n) + a_{22}f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21}hf(x_n, y_n)). \quad (12)$$

Разлагая $f(x, y)$ во втором слагаемом в (12) по формуле Тейлора в точке (x_n, y_n) получаем

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21}hf(x_n, y_n)) = \\ f(x_n, y_n) + \alpha_2 hf_x(x_n, y_n) + \beta_{21}hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$\begin{aligned} K_2(x_n, y_n, h) = (a_{21} + a_{22})f(x_n, y_n) + \\ a_{22}\alpha_2 hf_x(x_n, y_n) + a_{22}\beta_{21}hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая $T_2(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)]$ и

(14), получаем из условия (9) нелинейную систему уравнений для

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} = 1 \\ a_{22}\alpha_2 = 1/2 \\ a_{22}\beta_{21} = 1/2. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{определения} \\ \text{коэффициентов} \\ a_{21}, a_{22}, \alpha_2, \beta_{21} \end{matrix}$$

Отсюда следует, что для различных $a_{22} \neq 0$ существует целое семейство методов Рунге-Кутты второго порядка с коэффициентами

$$a_{21} = 1 - a_{22}, \text{ и}$$

$$\alpha_2 = \beta_{21} = 1/(2a_{22}):$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + hK_2(x_n, y_n, h) = \\ y_n + h \left[(1 - a_{22})f(x_n, y_n) + a_{22}f\left(x_n + \frac{1}{2a_{22}}h, y_n + \frac{1}{2a_{22}}hf(x_n, y_n)\right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Приведем примеры алгоритмов метода Рунге-Кутты второго порядка.

Метод Хьюна (модифицированный метод трапеций).

В этом случае $a_{22} = 1/2$, $a_{21} = 1 - a_{22} = 1/2$,
 $\alpha_2 = \beta_{21} = 1/(2a_{22}) = 1$. Из (15) получаем алгоритм метода Хьюна

$$y_{n+1} = y_n + hK_2(x_n, y_n, h) = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (16)$$

Модифицированный метод Эйлера.

В этом случае $a_{22} = 1$, $a_{21} = 1 - a_{22} = 0$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1/(2a_{22}) = 1/2$. Из
 (15) получаем алгоритм модифицированного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hK_2(x_n, y_n, h) = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right). \quad (17)$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Наиболее часто в вычислительной практике используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка, алгоритм которого определяется формулами

$$y_{n+1} = y_n + hK_4(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (18)$$

где

$$K_4(x_n, y_n, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Отметим, что если правая часть дифференциального уравнения $f(x, y)$ не зависит от y , то формула (18) совпадает с квадратурной формулой Симпсона. (Решение задачи Коши $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ равносильно вычислению интеграла $y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds$).

Замечание. Метод (18) часто называют просто «методом Рунге-Кутта» без всяких указаний на порядок. Локальная алгоритмическая ошибка этого метода не превосходит Ch^5 , где $C > 0$ - константа, не зависящая от h . Однако оценить C не просто. Это существенный недостаток метода Рунге-Кутта. Грубое оценочное правило выбора шага h предложено Коллатцом: если для некоторой точки (x_n, y_n) величина $\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_4}$ больше нескольких сотых, то шаг h уменьшают.

4. Общий одношаговый метод.

Метод, алгоритм которого определяется формулой

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (19)$$

где Φ_f - функция аргументов x, y, h зависит от правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$, называется **общим одношаговым методом**.

Очевидно, что методы Тейлора и Рунге-Кутта являются частными случаями общего одношагового метода.

Обозначим через \tilde{y}_n - решение уравнения $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\Phi_f(x_n, \tilde{y}_n, h) + \delta_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ с начальным условием \tilde{y}_0 .

Теорема (оценка глобальной погрешности общего одношагового метода).

Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\Phi_f(x, y, h)$ определена и непрерывна в области $D = [x_0, x_0 + H] \times (-\infty, +\infty) \times [0, h_0]$, $h_0 > 0$ и существует константа $M > 0$, не зависящая от x и h , такая, что в области D

$$|\Phi_f(x, y, h) - \Phi_f(x, z, h)| \leq M|y - z|.$$

2. Существует константа $L > 0$ и целое $p > 0$ такие, что в области D

$$\left| \Phi_f(t, v, h) - \frac{w(t+h) - v}{h} \right| \leq Lh^p,$$

где $w(x)$ - решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[t, t+h]$, удовлетворяющее начальному условию $w(t) = v$.

Тогда для глобальной ошибки метода (19) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\hat{y}(x_n) - \tilde{y}_n| &\leq |\hat{y}(x_0) - \tilde{y}_0| \exp[M(x_n - x_0)] + \\ &\left(Lh^p + \frac{\delta}{h} \right) \frac{\exp[M(x_n - x_0)] - 1}{M}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\delta = \max_{0 \leq j \leq N-1} \delta_j$, δ_j - локальная ошибка округления на j -ом шаге.

Из (20) следует, что глобальная ошибка общего одношагового метода (19) состоит из трех частей:

- 1) ошибка при вычислении начального условия,
- 2) суммарная алгоритмическая ошибка метода, характеризуемая величиной Lh^p , убывающая с уменьшением h ,

3) ошибка округления, представленная членом $\frac{\delta}{h}$, который растет с уменьшением h .

Из (20) следует, что попытка уменьшить алгоритмическую ошибку метода приводит к уменьшению h и, следовательно, к увеличению ошибки округления. Кроме того, глобальная ошибка растет с увеличением длины интервала, на котором разыскивается решение дифференциального уравнения.

4. Методы полиномиальной аппроксимации.

Пусть точным решением задачи (1) является полином степени k :

$$\hat{y}(x) = \sum_{j=0}^k \gamma_j x^j. \quad (21)$$

Предположим, что нам известны значения точного решения $\hat{y}(x)$ и $\hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}(x))$ правой части дифференциального уравнения в $m+1$ точках x_{n-i} ($i = 0, 1, \dots, m$). Нашей целью является построение таких численных методов, которые позволили бы в этом случае найти y_{n+1} , совпадающее со значением точного решения в точке x_{n+1} : $\hat{y}(x_{n+1}) = \hat{y}(x_n + h) = y_{n+1}$. Например, для $k=1$ в (21) это позволяет сделать явный метод Эйлера.

Любой метод, дающий возможность найти точное значение $\hat{y}(x_{n+1}) = y_{n+1}$ решения $\hat{y}(x)$ задачи (1), являющегося полиномом (21), называют **методом полиномиальной аппроксимации (формулой численного интегрирования) порядка k** .

Предупреждение. Не путать порядок k метода полиномиальной аппроксимации с порядком p метода Тейлора.

В отличие от метода Тейлора большинство методов полиномиальной аппроксимации использует для вычисления y_{n+1} информацию о нескольких предыдущих шагах. Поэтому метод полиномиальной аппроксимации при $m \geq 1$ называют **многошаговым** в отличие, например, от методов Рунге-Кутты, которые являются **одношаговыми**.

Общий вид алгоритма метода полиномиальной аппроксимации:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m a_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^m b_i f(x_{n-i}, y_{n-i}), \quad (22)$$

где $2m+3$ коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ определяются так, что если точное решение $\hat{y}(x)$ задачи (1) является полиномом степени k и если предварительно найденные значения $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$ являются точными ($y_{n-i} = \hat{y}(x_{n-i})$ при $i = 0, 1, \dots, m$), то алгоритм (22) дает точное значение решения $y_{n+1} = \hat{y}(x_{n+1})$. Очевидно, что $2m+3 \geq k+1$ (число параметров - коэффициентов метода должно быть больше числа коэффициентов полинома (21)).

Найдем условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ метода полиномиальной аппроксимации порядка k .

Семейство задач Коши, решением которых является полином (21), имеет вид

$$y'(x) = \sum_{j=1}^k j \gamma_j x^{j-1}. \quad (23)$$

Для удобства вычислений положим $x_n = 0$. Тогда $x_{n+1} = h$, $x_{n-i} = -ih$, $i = 1, \dots, m$. Из (21) и (23) имеем:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \gamma_j h^j,$$

$$y_n = \gamma_0,$$

$$y_{n-i} = \sum_{j=0}^k \gamma_j (-i)^j h^j, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \sum_{j=1}^k j \gamma_j h^{j-1},$$

$$f(x_n, y_n) = \gamma_1,$$

$$f(x_{n-i}, y_{n-i}) = \sum_{j=1}^k j \gamma_j (-i)^{j-1} h^{j-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Подставляя найденные выражения в (22) и приравнивая коэффициенты при $\gamma_j h^j$, $j = 0, 1, \dots, m$, получим систему $k + 1$ уравнений относительно $2m + 3$ неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_m, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^m a_i = 1 \\ \sum_{i=0}^m (-i)^j a_j + j \sum_{i=-1}^m (-i)^{j-1} b_j = 1, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (24)$$

Система (24) называется **условием корректности** многошагового метода полиномиальной аппроксимации порядка k .

Замечание. Если потребовать, чтобы метод был точен для случая, когда решение задачи (1) принадлежит специальному классу функций иных, чем полиномы (например, экспоненциальных), то можно получить другие условия корректности приближенного метода.

Метод полиномиальной аппроксимации (22), коэффициенты которого $a_0, a_1, \dots, a_m, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ удовлетворяют условию корректности (24), называют **состоятельным**.

Метод (22) называется **явным**, если $b_{-1} = 0$, и **неявным**, если $b_{-1} \neq 0$.

Локальная алгоритмическая ошибка состоятельного многошагового метода полиномиальной аппроксимации порядка k при естественных ограничениях на правую часть дифференциального уравнения $f(x, y)$ определяется выражением

$$C_k \hat{y}^{(k+1)}(\xi) h^{k+1} = O(h^{k+1}), \quad (25)$$

где C_k - константа, не зависящая от h , $x_n - mh \leq \xi \leq x_n + h$.

Опишем два важных семейства состоятельных методов полиномиальной аппроксимации, часто используемые в вычислительной практике.

Метод Адамса-Башфорта (экстраполяционный метод Адамса).

Метод Адамса-Башфорта порядка k является явным многошаговым методом полиномиальной аппроксимации, полученным из (22) при условии

$$m = k - 1, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad (26)$$

то есть

$$y_{n+1} = a_0 y_0 + h \sum_{i=0}^{k-1} b_i f(x_{n-i}, y_{n-i}) \quad (27)$$

Коэффициенты метода $a_0, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ определяются из условия корректности (24). В этом случае (24) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ \sum_{i=0}^{k-1} (-i)^{j-1} b_i = \frac{1}{j}, \quad j = 1, \dots, k. \end{array} \right. \quad (28)$$

Определитель этой системы отличен от нуля и, следовательно, существует единственное решение. Таким образом, для любого k решение системы (28) однозначно определяет метод Адамса-Башфорта порядка k (метод является состоятельным).

Таблица 1. Алгоритмы метода Адамса-Башфорта.

Порядок	Алгоритм
Первый	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ (явный метод Эйлера)
Второй	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{3}{2} f(x_n, y_n) - \frac{1}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \right]$
Третий	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{23}{12} f(x_n, y_n) - \frac{16}{12} f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{5}{12} f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right]$
Четвертый	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{55}{24} f(x_n, y_n) - \frac{59}{24} f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{37}{24} f(x_{n-2}, y_{n-2}) - \frac{9}{24} f(x_{n-3}, y_{n-3}) \right]$

Для численной реализации метода Адамса-Башфорта порядка k требуется k стартовых значений $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}$ (метод является k - шаговым).

Метод Адамса-Мултона (интерполяционный метод Адамса).

Метод Адамса-Мултона порядка k является неявным многошаговым методом полиномиальной аппроксимации, полученным из (22) при условии

$$m = k - 2, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{k-2} = 0, \quad b_{-1} \neq 0, \quad (29)$$

то есть

$$y_{n+1} = a_0 y_0 + h \sum_{i=-1}^{k-2} b_i f(x_{n-i}, y_{n-i}) \quad (30)$$

Коэффициенты метода $a_0, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-2}$ определяются из условия корректности (24). В этом случае (24) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ \sum_{i=-1}^{k-2} (-i)^{j-1} b_i = \frac{1}{j}, \quad j = 1, \dots, k. \end{array} \right. \quad (31)$$

Определитель этой системы отличен от нуля и, следовательно, существует единственное решение. Таким образом, для любого k решение системы (31) однозначно определяет метод Адамса-Мултона порядка k (метод является состоятельным).

Для численной реализации метода Адамса-Мултона порядка k требуется $k-1$ стартовых значений $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+2}$ (метод является $(k-1)$ -шаговым).

Таблица 2. Алгоритмы метода Адамса-Мултона.

Порядок	Алгоритм
Первый	$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ (неявный метод Эйлера)
Второй	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{2} f(x_n, y_n) \right]$ (метод трапеций)
Третий	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{5}{12} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{8}{12} f(x_n, y_n) - \frac{1}{12} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \right]$
Четвертый	$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{9}{24} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{19}{24} f(x_n, y_n) - \frac{5}{24} f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{24} f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right]$

Связь неявных методов с методами прогноза-коррекции.

Запишем алгоритм (22) неявного ($b_{-1} \neq 0$) многошагового метода полиномиальной аппроксимации в виде

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m (a_i y_{n-i} + hb_i f(x_{n-i}, y_{n-i})) + hb_{-1} f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (32)$$

Для определения единственной неизвестной величины y_{n+1} получаем из (32) уравнение

$$y_{n+1} = F(y_{n+1}), \quad (33)$$

где

$$F(y_{n+1}) = \sum_{i=0}^m (a_i y_{n-i} + h b_i f(x_{n-i}, y_{n-i})) + h b_{-1} f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (34)$$

Пусть $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_{n+1} при $x = x_{n+1}$ для всех $y \in [\tilde{y}_{n+1} - \delta, \tilde{y}_{n+1} + \delta]$, $\delta > 0$, где \tilde{y}_{n+1} - точное решение уравнения (33). При выполнении условия

$$h|b_{-1}|L_{n+1} < 1, \quad h < \frac{1}{|b_{-1}|L_{n+1}}.$$

функция F в (33) является сжимающим отображением и, следовательно, при любом выборе начального приближения $y_{n+1}^{[0]} \in [\tilde{y}_{n+1} - \delta, \tilde{y}_{n+1} + \delta]$ итерационный процесс

$$y_{n+1}^{[l+1]} = \sum_{i=0}^m (a_i y_{n-i} + h b_i f(x_{n-i}, y_{n-i})) + h b_{-1} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[l]}), \quad l = 0, 1, \dots \quad (35)$$

при $l \rightarrow \infty$ сходится к точному решению \tilde{y}_{n+1} уравнения (33).

Отметим, что скорость сходимости (35) становится медленной, если величина $h|b_{-1}|L_{n+1}$ будет близка к 1. Поэтому для увеличения скорости сходимости придется выбирать малый шаг h . Но это приведет к увеличению числа шагов N и ошибок округления. В качестве компромисса предлагается «хорошо» выбирать начальное приближение $y_{n+1}^{[0]}$. Пусть, например, решение задачи (1) находится методом Адамса-Мултона

четвертого порядка. Для предсказания $y_{n+1}^{[0]}$ можно выбрать явный метод Эйлера (7) (прогноз)

$$y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

и полученное значение использовать в качестве начального приближения итерационного процесса (35) (коррекция)

$$y_{n+1}^{[l+1]} = y_n + h \left[\frac{19}{24} f(x_n, y_n) - \frac{5}{24} f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{24} f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right] + h \frac{9}{24} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[l]}), \quad l = 0, 1, \dots \quad (36)$$

Формула (36) дает скорректированное значение y_{n+1} после l итераций. Число итераций l зависит от желаемой точности решения и локальной алгоритмической ошибки прогноза. Если для прогноза выбрать более точный метод

$$y_{n+1}^{[0]} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n), \quad (37)$$

то для требуемой точности ответа обычно достаточно одной итерации ($l=1$).

Замечания.

1) Многошаговый метод ($m \geq 1$) не является **самоначинающимся (самостартующим)** в отличие от одношагового метода. Для реализации многошагового метода полиномиальной аппроксимации (22) нужно задать $m+1$ предыдущих (стартовых) значений $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$. Очевидно, что для получения этих значений должен быть использован по крайней мере $m+1$ раз одношаговый метод. Обычно для вычисления стартовых значений пользуются методом Рунге-Кутты.

2) При численной реализации некоторых алгоритмов методов полиномиальной аппроксимации алгоритмическая ошибка и ошибка округления могут усиливаться (накапливаться) при каждом шаге. Поэтому

через несколько шагов возросшая ошибка будет преобладать над самим решением. Это делает совершенно бесполезным применение таких методов. Таким образом, метод должен быть не только точным, но и устойчивым в том смысле, что алгоритмическая ошибка и ошибка округления должны оставаться ограниченными при достаточно малой величине шага h при $n \rightarrow \infty$.

Устойчивость методов полиномиальной аппроксимации.

При анализе устойчивости метода полиномиальной аппроксимации обычно обращаются к тестовой задаче Коши

$$y' = -\lambda y, \quad y(0) = 1, \quad (38)$$

где λ - комплексный параметр.

Применим алгоритм (22) к решению задач (38), получим

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m a_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^m b_i (-\lambda y_{n-i}). \quad (39)$$

Преобразуем (39) в эквивалентное разностное уравнение

$$(1 + \sigma b_{-1}) y_{n+1} - (a_0 - \sigma b_0) y_n - (a_1 - \sigma b_1) y_{n-1} - \dots - (a_m - \sigma b_m) y_{n-m} = 0, \quad (40)$$

где $\sigma = \lambda h$.

Положив в (40) $y_n = z^n$, получим после сокращения на z^{n-m} многочлен степени $(m+1)$:

$$P(z, \sigma) = (1 + \sigma b_{-1}) z^{m+1} - (a_0 - \sigma b_0) z^m - (a_1 - \sigma b_1) z^{m-1} - \dots - (a_m - \sigma b_m). \quad (41)$$

Многочлен (41) будем называть **характеристическим многочленом** метода полиномиальной аппроксимации (22).

Общее решение разностного уравнения (40) определяется формулой

$$y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_{m+1} z_{m+1}^n, \quad (42)$$

где z_1, z_2, \dots, z_{m+1} - $(m+1)$ различных корней характеристического многочлена (41), c_1, c_2, \dots, c_{m+1} - произвольные постоянные, значения которых находятся из стартовых значений $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$ решения. Если характеристический многочлен (41) имеет кратный корень z_i (l_i - его кратность), то соответствующее слагаемое в формуле (42) общего решения будет иметь вид

$$\left(c_i^{(0)} + c_i^{(1)} n + c_i^{(2)} n^2 + \dots + c_i^{(l_i-1)} n^{l_i-1} \right) z_i^n. \quad (43)$$

Заметим, что если $|z_i| > 1$, то $|y_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (даже в том случае, когда корень z_i - простой). Если z_i - корень кратности $l_i > 1$ и $|z_i| = 1$, то из (43) следует, что $|y_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание. При $\sigma = 0$ значение $z = 1$ является простым корнем характеристического многочлена $P(z, 0)$ тогда и только тогда, когда $b_{-1} + b_0 + b_1 + \dots + b_m \neq 0$.

Теорема (критерий устойчивости методов полиномиальной аппроксимации).

Состоятельный метод полиномиальной аппроксимации (22), удовлетворяющий условию $b_{-1} + b_0 + b_1 + \dots + b_m \neq 0$, устойчив (в том смысле, что локальная алгоритмическая ошибка метода и ошибка округления остаются ограниченными при достаточно малой величине шага h) тогда и только тогда, когда все корни ζ_i , $i = 1, \dots, m-1$ многочлена

$$\tilde{P}(z) = \frac{P(z, 0)}{z - 1} = \frac{z^{m+1} - a_0 z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m}{z - 1} \quad (44)$$

таковы, что $|\zeta_i| \leq 1$, а те корни, для которых $|\zeta_i| = 1$, простые.

Корни многочлена (44) принято называть **паразитными**.

Замечание. Методы Адамса-Башфорта и Адамса-Мултона устойчивые. Действительно, для этих методов $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \dots a_m = 0$. Поэтому

$$\tilde{P}(z) = \frac{P(z, 0)}{z - 1} = \frac{z^{m+1} - z^m}{z - 1} = z^m.$$

Здесь все корни многочлена $\tilde{P}(z)$ равны нулю и, следовательно, лежат внутри единичного круга.

Обозначим через \tilde{y}_n - решение уравнения

$$\tilde{y}_{n+1} = \sum_{i=0}^m a_i \tilde{y}_{n-i} + h \sum_{i=1}^m b_i f(x_{n-i}, \tilde{y}_{n-i}) + \delta_n, \quad n = m, \dots, N-1$$

со стартовыми значениями \tilde{y}_i ($i = 0, 1, \dots, m$).

Теорема (оценка глобальной погрешности многошагового метода полиномиальной аппроксимации).

Пусть выполнены следующие условия:

1. Правая часть дифференциального уравнения $f(x, y)$ определена непрерывна в области $D = [x_0, x_0 + H] \times (-\infty, +\infty)$ и существует константа $M > 0$, не зависящая от x такая, что в области D

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|.$$

2. Пусть $\hat{y}(x)$ - точное решение уравнения задачи Коши (1) имеет на отрезке $[x_0, x_0 + H]$ непрерывные производные до порядка $k + 1$, ($k > 1$).

3. Метод полиномиальной аппроксимации (22) является состоятельным и $b_{-1} + b_0 + b_1 + \dots + b_m \neq 0$.

4. При достаточно малом h ($h < h_0$, $h_0 > 0$) все корни ζ_i , $i = 1, \dots, m-1$ многочлена

$$\tilde{P}(z) = \frac{P(z, 0)}{z-1} = \frac{z^{m+1} - a_0 z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m}{z-1}$$

таковы, что $|\zeta_i| \leq 1$, а те корни, для которых $|\zeta_i| = 1$, простые.

Тогда для глобальной ошибки метода (22) справедлива оценка

$$|\hat{y}(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}| \leq \frac{G}{1 - |\mu|M} \left[(1 + |\mu|M) \Theta + x_n \left(\frac{\delta}{h} + Kh^k \right) \right] \exp(GLx_n), \quad (45)$$

где $\Theta = \max_{0 \leq i \leq m} |\tilde{y}_{n-i} - \hat{y}(x_{n-i})|$, $\delta = \max_{m \leq j \leq N-1} \delta_j$, δ_j - локальная ошибка округления на j -ом шаге, G, L, K - постоянные, зависящие от коэффициентов формулы (22) и правой части дифференциального уравнения $f(x, y)$ и независящие от h , $\mu = hb_{-1}$.

Из (45) следует, что глобальная ошибка метода полиномиальной аппроксимации состоит из трех частей:

- 1) ошибка при вычислении стартовых значений,
- 2) суммарная алгоритмическая ошибка метода, характеризуемая величиной Kh^p , убывающая с уменьшением h ,

- 3) ошибка округления, представленная членом $\frac{\delta}{h}$, который растет с уменьшением h .

Погрешность, очевидно, растет с увеличением длины отрезка, на котором разыскивается решение.

Замечание. Все описанные методы решения задачи Коши (1) переносятся на системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H, \quad H > 0,$$

где

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_s), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_s),$$

или

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \dots, y_s(x)),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), \dots, y_s(x)),$$

.....

$$\frac{dy_s}{dx} = f_s(x, y_1(x), \dots, y_s(x)).$$

Формулы сохраняются в прежнем виде, нужно только заменить y на Y , f на F . В оценках погрешности абсолютная величина заменяется на норму вектора.

6. Задание. Найдите на отрезке $[0,1]$ решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), y_2(x)),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, методами Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта четвертого порядка и прогноза-коррекции (используя для прогноза алгоритм (37) и коррекции – метод Адамса-Мултона четвертого порядка).

Варианты заданий.

№ варианта	$f_1(x, y_1(x), y_2(x))$	$f_2(x, y_1(x), y_2(x))$	y_{10}	y_{20}
1	$\arctg(x^2 + y_2^2)$	$\sin(x + y_1)$	0,5	1,5
2	$x^2 y_1 + y_2$	$\cos(y_1 + xy_2)$	-1	1
3	$x^2 + y_2^2$	$xy_1 y_2$	1	1
4	$\sin(x^2 + y_2^2)$	$\cos(xy_1)$	0	0
5	$\cos(y_1 y_2)$	$\sin(y_1 + y_2)$	0	0
6	$2\sqrt{3x^2 + y_1^2 + y_2}$	$\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2}$	0,5	1,2
7	$y_1 + y_2$	$(1 + y_1^2 + y_2^2)^{-1}$	0	0
8	$y_1^2 + y_2^2$	$y_1 y_2$	-1	1
9	$(2 + y_1^2 + y_2^2)^{-1/2}$	$(1 + y_1^2 + y_2^2)^{-1/2}$	1	1
10	$\cos(x + y_2)$	$\sin(x - y_2)$	0,7	-0,5
11	$\exp(y_1 y_2)$	$\exp(-y_1 y_2)$	0	0
12	$\frac{1}{ch(x + y_2)}$	$sh(x^2 - y_1)$	0,2	0
13	$\exp(-y_1 - y_2)$	$\arctg(y_1)$	1	-1
14	$\sin(xy_2)$	$x + \cos(xy_1)$	0	0
№ варианта	$f_1(x, y_1(x), y_2(x))$	$f_2(x, y_1(x), y_2(x))$	y_{10}	y_{20}
15	$\sin(y_1 y_2)$	$\cos(xy_1 y_2)$	-1	2

16	y_2	$axy_2 + x^2y_1$	$a = 0,05$	0	1/6
17			$a = 0,06$	0	1/7
18			$a = 0,07$	0	0,125
19			$a = 0,08$	0	1/9
20			$a = 0,09$	0	0,1
21			$a = 0,1$	0	1/11
22			$a = 0,11$	0	1/11
23			$a = 0,12$	0	1/12
24			$a = 0,13$	0	1/13
25			$a = 0,14$	0	1/14
26	y_2	$axy_2 - y_1$	$a = 0,05$	0	1/6
27			$a = 0,06$	0	1/7
28			$a = 0,07$	0	0,125
29			$a = 0,08$	0	1/9
30			$a = 0,09$	0	0,1
31			$a = 0,1$	0	1/11
32			$a = 0,11$	0	1/12