

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ
МНОГОЧЛЕНАМИ.
СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ**

Учебно-методическое пособие
для лекционных занятий в вузах

Составители:
В.П. Трофимов,
А.П. Карпова,
М.Н. Небольсина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
30 ноября 2011 г., протокол № 0500-09

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. С.А. Шабров

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 4-го курса дневного отделения и 5-го курса вечернего отделения математического факультета.

Для направлений: 010100 – Математика, 010200 – Математика. Прикладная математика; специальности 010101 – Математика

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Интерполяция алгебраическими многочленами

1. 1. Постановка задачи интерполяции

Пусть для функции $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$ известны ее значения в $(n+1)$ -й точках $x_i \in X$, $i=0, \dots, n$. Запишем эти значения функции f в табл. 1.1

Таблица 1.1

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_n)$

Далее будем считать, что выполнено условие

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Задача приближенного вычисления для заданной табл. 1.1 значения функции $f(x)$ при $x \neq x_i$, $i=0, \dots, n$ называется **задачей интерполяции** (распространения внутрь).

Решение этой задачи можно найти следующим образом: строится алгебраический многочлен степени не выше n

$$P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n; f) = P_n(x; f), \quad (1.1)$$

принимаяющий в точках x_0, x_1, \dots, x_n те же значения, что и функция f :

$$f(x_i) = P_n(x_i; f), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Интерполяционным многочленом (интерполянт) для табл. 1.1 называется многочлен (1.1) степени не выше n , удовлетворяющий условию (1.2). Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются **узлами интерполяции**.

Вычисление значения $f(x)$ при $x \neq x_i$, $i=0, \dots, n$ по формуле

$$f(x) \approx P_n(x; f) \quad (1.3)$$

называется **интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена**.

Замечание 1.1. Если $x \notin [a; b]$, то вычисление $f(x)$ с помощью (1.3) называют **экстраполяцией**.

Замечание 1.2. Существуют различные формы записи интерполяционного многочлена.

Теорема 1.1. Для табл. 1.1 интерполяционный многочлен существует и единственен.

Доказательство. Запишем интерполяционный многочлен в виде

$$P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n; f) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Из условия (1.2) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов интерполяционного многочлена a_0, a_1, \dots, a_n

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \quad (1.4)$$

Так как $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, то определитель системы (1.4) (определитель Вандермонда) отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= (x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_0) (x_{n-1} - x_{n-2}) \dots (x_{n-1} - x_0) \dots (x_1 - x_0) \neq 0.$$

Следовательно, для любой табл. 1.1 можно построить единственный интерполяционный многочлен (его коэффициенты определяются единственным решением системы (1.4)).

Теорема доказана.

Важное замечание 1.1. Наиболее общим способом решения задачи интерполяции для табл. 1.1 является **линейное интерполирование**: интерполянт разыскивается в виде **обобщенного полинома – линейной комбинации заданной системы линейно независимых базисных функций** $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$:

$$\Phi_n(x; a_0, a_1, \dots, a_n; f) = \Phi_n(x; f) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x),$$

где коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n определяются из условия интерполяции

$$f(x_j) = \Phi_n(x; f) = \sum_{j=0}^n a_j f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

В этом случае для определения коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n получаем аналог системы (1.4)

$$\begin{cases} a_0 \varphi_0(x_0) + a_1 \varphi_1(x_0) + \dots + a_n \varphi_n(x_0) = f(x_0), \\ a_0 \varphi_0(x_1) + a_1 \varphi_1(x_1) + \dots + a_n \varphi_n(x_1) = f(x_1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 \varphi_0(x_n) + a_1 \varphi_1(x_n) + \dots + a_n \varphi_n(x_n) = f(x_n). \end{cases}$$

В силу линейной независимости базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$ определитель полученной системы отличен от нуля и, следовательно, решение задачи интерполяции с помощью обобщенного полинома существует и единственно.

Для случая, когда интерполянт является интерполяционным многочленом, система базисных функций имеет вид

$$\varphi_j(x) = x^j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Для периодической функции $f(t)$ с периодом T интерполянт разыскивается по системе базисных тригонометрических функций

$$\varphi_j(t) = a_j \cos \frac{j\pi t}{T} + b_j \sin \frac{j\pi t}{T}.$$

Такая интерполяция называется **тригонометрической**. В этом случае интерполянт – тригонометрический полином степени $N = 2n + 1$ имеет вид

$$\Phi_N(t; f) = a_0 + \sum_{j=1}^n \left(a_j \cos \frac{j\pi t}{T} + b_j \sin \frac{j\pi t}{T} \right).$$

Предложение 1.1. Пусть $P^{(n)}$ – пространство многочленов степени не выше n . Если $f \in P^{(n)}$, то для любой табл. 1.1

$$P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n; f) \equiv f(x).$$

Задание. Докажите предложение 1.1.

Замечание 1.3. Решение системы (1.4) является достаточно сложной вычислительной задачей. Поэтому способом построения интерполяционного многочлена, установленным при доказательстве теоремы 1.1, на практике обычно не пользуются. Более удобный способ построения интерполяционного многочлена был предложен Лагранжем.

1.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для каждого узла интерполяции x_k , $k = 0, \dots, n$ найдем многочлен $l_k^{(n)}(x)$ степени n , равный нулю во всех узлах, кроме k -го, в котором он равен 1:

$$l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n.$$

Систему многочленов $l_k^{(n)}(x)$ принято называть **базисом Лагранжа**.

Нетрудно построить полиномы $l_k^{(n)}(x)$. Действительно, зная корни полинома, имеем:

1) многочлен $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$ равен нулю во всех узлах интерполяции, кроме x_k ;

2) многочлен

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

равен 1 при $x = x_k$ и равен нулю во всех остальных узлах.

Итак, для любого $k = 0, \dots, n$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Введем многочлен $\omega(x)$ $(n+1)$ -й степени, построенный по узлам интерполяции:

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n).$$

Заметим, что производная многочлена $\omega(x)$ в точке x_k

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n).$$

Теперь многочлен $l_k^{(n)}(x)$ можно записать в виде

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}. \quad (1.5)$$

По построению многочлен $f(x_k)l_k^{(n)}(x)$ имеет степень n , принимает в узле x_k значение $f(x_k)$ и равен нулю во всех остальных узлах интерполяции.

Следовательно, многочлен

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot l_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} \quad (1.6)$$

является интерполяционным многочленом для табл. 1.1 (имеет степень не выше n и $L_n(x_i; f) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$).

Формулу (1.6) называют **интерполяционной формулой Лагранжа**, а полином $L_n(x; f)$ – **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

Замечание 1.4. Число арифметических операций, необходимых для вычисления по формуле (1.6), имеет порядок $O(n^2)$.

Пример. Найдем интерполяционный многочлен Лагранжа для $n = 1$.

В этом случае формула (1.6) примет вид

$$L_1(x; f) = f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)(x-x_1) - f(x_1)(x-x_0)}{x_0-x_1}.$$

Графиком функции $L_1(x; f)$ является прямая, проходящая через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_1; f(x_1))$. Такая полиномиальная интерполяция называется **линейной полиномиальной** (не путать с линейным интерполированием (см. важное замечание 1.1)).

Задание. Найдите интерполяционные многочлены Лагранжа для $n = 2, 3$.

Замечание 1.5. Поскольку интерполяционный многочлен (1.6) линейно зависит от значений функции $f(x_i)$, то интерполяционный многочлен для суммы функций равен сумме интерполяционных многочленов слагаемых.

1.3. Погрешность интерполяции

Погрешностью интерполяции называется разность

$$r_n(x; f) = f(x) - P_n(x; f). \quad (1.7)$$

Очевидно, что в узлах интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n

$$r_n(x_i; f) = f(x_i) - P_n(x_i; f) = 0.$$

В остальных точках погрешность интерполяции, вообще говоря, отлична от нуля.

Замечание 1.6. Из предложения 1.1 следует, что погрешность интерполяции $r(x_i; f) \equiv 0$ для любой функции $f \in P^{(n)}$, где $P^{(n)}$ – пространство многочленов степени не выше n .

Найдем погрешность интерполяции для многочлена степени $n + 1$ ($f \in P^{(n+1)}$, $\deg f = n + 1$).

В этом случае $r_n(x; f) = f(x) - P_n(x; f)$ есть многочлен степени $n + 1$ и узлы интерполяции x_k , $k = 0, \dots, n$ являются его корнями.

Следовательно,

$$r_n(x; f) = c \cdot \omega(x) = c \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n), \quad (1.8)$$

где $c = \text{const}$.

Продифференцировав по x это равенство $n + 1$ раз, получим

$$r_n^{(n+1)}(x; f) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x; f) = f^{(n+1)}(x) = c \cdot (n + 1)!,$$

так как $P_n(x; f)$ – многочлен степени n , то $P_n^{(n+1)}(x; f) \equiv 0$.

Отсюда найдем $c = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n + 1)!}$. Таким образом, для $f \in P^{(n+1)}$ погрешность интерполяции имеет вид

$$r_n(x; f) = c \cdot \omega(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n + 1)!} \omega(x). \quad (1.9)$$

Однако для произвольной функции, заданной только табл. 1.1, ничего конкретного сказать о погрешности интерполяции нельзя.

Если функция $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ ($C^{(n+1)}[a; b]$ – пространство функций, $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$), то для погрешности интерполяции можно получить формулу, аналогичную (1.8).

Теорема 1.2. Если $f \in C^{(n+1)}[a; b]$, то для любого $x \in [a; b]$ погрешность интерполяции определяется формулой

$$r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \quad (1.10)$$

где ξ – некоторая точка отрезка $[a; b]$ ($\xi = \xi(x) \in [a; b]$).

Доказательство. Будем разыскивать погрешность интерполяции в виде (1.8), положив $c = c(x)$,

$$r_n(x; f) = c(x) \cdot \omega(x).$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a; b]$, $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$ и рассмотрим вспомогательную функцию φ от переменной z .

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= r_n(z; f) - c(x) \omega(z) = \\ &= f(z) - P_n(z; f) - c(x) \omega(z). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi \in C^{(n+1)}[a; b]$ и обращается в нуль в $n+2$ точках отрезка $[a; b]$: $z = x, x_0, x_1, \dots, x_n$. По теореме Ролля функция φ' (производная от функции φ по z) обращается в нуль по крайней мере в $n+1$ точках отрезка $[a; b]$, при этом $\varphi' \in C^{(n)}[a; b]$, функция φ'' равна нулю по крайней мере в n точках этого отрезка, $\varphi'' \in C^{(n-1)}[a; b]$ и так далее.

Таким образом, $\varphi^{(n+1)}(z)$ ($\varphi^{(n+1)} \in C[a; b]$) обращается в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in [a; b]$ и $\xi = \xi(x)$.

Учитывая, что для любого x

$$P_n^{(n+1)}(x; f) \equiv 0 \text{ и } \omega^{(n+1)}(x) \equiv (n+1)!,$$

получаем

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(x) \cdot (n+1)! = 0.$$

Следовательно,

$$c(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

и

$$r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

где $\xi = \xi(x) \in [a; b]$.

Теорема доказана.

Важное замечание 1.2. Из формулы (1.10) следует, что погрешность интерполяции зависит от выбора узлов интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n и гладкости функции f .

Замечание 1.7. Из доказательства теоремы 1.1 получаем, что $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет условию

$$\min\{x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}.$$

Следствие 1.2. Пусть $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ и $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$.

Тогда

$$|r_n(x; f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| \text{ для любого } x \in [a; b], \quad (1.11)$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |r_n(x; f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|, \quad (1.12)$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |r_n(x; f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \quad (1.13)$$

Важный пример (погрешность линейной полиномиальной интерполяции). Пусть $n = 1$ и $f \in C^{(2)}[a; b]$. Обозначим $h = x_1 - x_0$, $q = \frac{x - x_0}{h}$, $0 \leq q \leq 1$. В этом случае $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ и интерполяционный многочлен может быть записан в виде

$$L_1(x; f) = (1 - q) \cdot f(x_0) + q \cdot f(x_1). \quad (1.14)$$

Наибольшее значение $|\omega(x)|$ на отрезке $[x_0; x_1]$ достигается в точке

$$\tau = (x_0 + x_1)/2 \text{ и } \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |\omega(x)| = |\omega(\tau)| = \frac{1}{4} |(x_1 - x_0)(x_0 - x_1)| = \frac{h^2}{4}.$$

Отсюда по формуле (1.12) получаем максимальную оценку погрешности линейной интерполяции

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |r_1(x; f)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)|. \quad (1.15)$$

Если $f \notin C^{(2)}[a; b]$, то оценка (1.15) не имеет места.

Найдем оценку погрешности интерполяции при минимальных требованиях к гладкости функции f .

Пусть f удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a; b]$, то есть для любых $\xi, \eta \in [a; b]$ выполнено неравенство $|f(\xi) - f(\eta)| \leq \alpha |\xi - \eta|$, где $\alpha = \text{const} \geq 0$. Тогда максимальная оценка погрешности линейной интерполяции имеет вид

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |r_1(x; f)| \leq \alpha \frac{h}{2}. \quad (1.16)$$

Действительно, используя формулу (1.14), имеем

$$\begin{aligned}
|f(x) - L_1(x; f)| &= |f(x) - (1-q)f(x_0) - qf(x_1)| = \\
&= |(1-q)f(x_0) + qf(x_1) - (1-q)f(x) - qf(x)| \leq \\
&\leq (1-q)|f(x_0) - f(x)| + q|f(x_1) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Поскольку $f(x_1) = f(x_0 + h)$ и $f(x) = f(x_0 + qh)$, имеем

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x)| &= |f(x_0 + h) - f(x_0 + qh)| \leq \alpha(1-q)h, \\
|f(x_0) - f(x)| &\leq \alpha qh.
\end{aligned}$$

Так как $(1-q)q \leq \frac{1}{4}$ при $0 \leq q \leq 1$, то

$$|f(x) - L_1(x; f)| \leq 2(1-q)q\alpha h \leq \alpha \cdot \frac{h}{2}.$$

Оценка (1.16) доказана.

Если имеется таблица большого числа значений некоторой функции f с постоянным шагом h изменения аргумента, то для вычисления значения $f(x)$ в заданной точке x обычно поступают следующим образом. Выбирают два соседних узла, между которыми находится x . Левый узел принимается за x_0 , а правый — за x_1 , и $f(x)$ вычисляют по формуле линейной интерполяции (1.14). Погрешность интерполяции для $f \in C^{(2)}[a; b]$ оценивается по формуле (1.15).

Замечание 1.8. Для класса $n + 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций константу $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ в (1.11)–(1.13) улучшить (уменьшить) нельзя, так как для случая $f \in P^{(n+1)}$ неравенство (1.11) превращается в равенство. Что касается величины $\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$, то она существенно зависит от выбора узлов интерполяции и, следовательно, может быть уменьшена при специальном выборе узлов.

1.4. Интерполяционный многочлен Ньютона

Удобным представлением интерполяционного многочлена для практических вычислений является его запись в виде **интерполяционного многочлена Ньютона**.

Введем в рассмотрение **разделенные разности** функции f для заданной табл. 1.1.

Значения функции f в узлах x_i , $i = 0, \dots, n$ будем называть **разделенными разностями нулевого порядка**.

Для любой пары узлов x_i, x_j величины

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f(x_j; x_i).$$

будем называть **разделенными разностями первого порядка**.

Разделенной разностью второго порядка на узлах x_i, x_j, x_k назовем величину

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_i; x_j) - f(x_j; x_k)}{x_i - x_k} = \frac{f(x_j; x_k) - f(x_i; x_j)}{x_k - x_i}.$$

Если известны **разделенные разности k -го порядка**, то **разделенная разность $(k+1)$ -го порядка** на узлах $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}$ определяется как

$$\begin{aligned} & f(x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+k+1}) = \\ &= \frac{f(x_{j+1}; x_{j+2}; \dots; x_{j+k+1}) - f(x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j} = \\ &= \frac{f(x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+k}) - f(x_{j+1}; x_{j+2}; \dots; x_{j+k+1})}{x_j - x_{j+k+1}}. \end{aligned}$$

Заметим, что для построения разделенной разности не обязательно соседство узлов, важно их количество: для **разделенной разности k -го порядка** требуется $(k+1)$ узел.

Далее мы будем рассматривать разделенные разности, построенные по соседним узлам $x_0, x_1, \dots, x_k, k \leq n$:

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_k) - f(x_0; x_1; \dots; x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Для табл. 1.1 можно построить таблицу разделенных разностей (табл. 1.2):

Таблица 1.2

Узлы	Разделенные разности					
	0-го порядка	1-го порядка	2-го порядка	...	$(n-1)$ -го порядка	n -го порядка
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$			
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$...		
...		

Узлы	Разделенные разности					
	0-го порядка	1-го по- рядка	2-го порядка	...	(n-1)-го порядка	n-го порядка
...	$f(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})$	$f(x_0; x_1; \dots; x_n)$
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$...	$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$...	$f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}; x_n)$				
Число разностей	$n+1$	n	$n-1$...	2	1

Предложение 1.2. Для разделенной разности k -го порядка справедлива формула

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}. \quad (1.17)$$

Доказательство предложения 1.2 проведем по индукции. Действительно, разделенная разность первого порядка очевидно может быть представлена в виде (1.17):

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Пусть формула (1.17) справедлива для разделенных разностей $(k-1)$ -го порядка. Тогда по определению

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_k) - f(x_0; x_1; \dots; x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

Подставляя сюда вместо разделенных разностей $(k-1)$ -го порядка их представления по формуле (1.17), имеем

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \frac{1}{x_k - x_0} \left[\sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} (x_j - x_i)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^k (x_k - x_i)} + \frac{f(x_0)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^k (x_0 - x_i)} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_k - x_0) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} (x_j - x_i)} \left[\frac{1}{x_j - x_k} - \frac{1}{x_j - x_0} \right] = \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}.
\end{aligned}$$

Предложение 1.2 доказано.

Из предложения 1.2 (формулы (1.17)) получаем следующие важные свойства разделенных разностей:

1) *разделенная разность является линейным оператором относительно функции f ;*

2) *разделенная разность $f(x_0; x_1; \dots; x_k)$ является симметрической функцией своих аргументов x_0, x_1, \dots, x_k (значение $f(x_0; x_1; \dots; x_k)$ не зависит от порядка узлов);*

3) *погрешность интерполяции $r_n(x; f)$ представима формулой*

$$\begin{aligned}
r_n(x; f) &= f(x) - L_n(x; f) = \\
&= f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) \omega(x).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Действительно, имеем

$$f(x) - L_n(x; f) = \omega(x) \cdot \left\{ \frac{f(x)}{\omega(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x) \omega'(x_j)} \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках совпадает с представлением разделенной разности $(n+1)$ -го порядка $f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)$ по формуле (1.17).

Формула (1.18) доказана;

4) *если $f \in C^{(n+1)}[a; b]$, то*

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \tag{1.19}$$

где

$$\min\{x_0, x_1, \dots, x_n\} < \xi < \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Действительно, из следствия 3) предложения 1.2 для любого $k = 1, \dots, n$ имеем

$$f(x) - L_{k-1}(x; f) = f(x; x_0; x_1; \dots; x_{k-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

С другой стороны, по теореме 1.2 для любого $x \in [a; b]$

$$f(x) - L_{k-1}(x; f) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

где $\alpha = \min\{x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} = \beta$. Следовательно,

$$f(x, x_0; x_1; \dots; x_{k-1}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \alpha < \xi < \beta. \text{ Полагая здесь } x = x_k, \text{ получаем следствие 4).}$$

Замечание 1.9. Если f – многочлен степени n $\{f \in P^{(n)}, \deg f = n\}$, то для любого $k = 1, \dots, n$ разделенная разность k -го порядка $f(x; x_0; x_1 \dots; x_{k-1})$ есть многочлен степени $n - k$.

Отсюда следует, что если f – многочлен n -й степени, то разделенная разность $(n+1)$ -го порядка от f **тождественно равна нулю**.

Полученные результаты позволяют записать интерполяционный многочлен для табл. 1.1 в виде $P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n; f) = N(x; f)$:

$$\begin{aligned} N_n(x; f) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \\ & + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Действительно, имеет место очевидное равенство

$$\begin{aligned} N_n(x; f) = & L_0(x; f) + (L_1(x; f) - L_0(x; f)) + \\ & + (L_2(x; f) - L_1(x; f)) + \dots + (L_n(x; f) - L_{n-1}(x; f)), \end{aligned}$$

где $L_k(x; f) = L_k(x; x_0, x_1, \dots, x_k; f)$, $(k=0, 1, \dots, n)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа степени k , построенный по узлам x_0, x_1, \dots, x_k табл. 1.1.

Из очевидного равенства

$$L_{k-1}(x_j; f) = L_{k-1}(x_j; L_k) = L_k(x_j; f) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

следует, что многочлен $L_{k-1}(x; f)$ является интерполяционным для многочлена $L_k(x; f)$.

По следствию 2) предложения 1.2 имеем

$$\begin{aligned} L_k(x; f) - L_{k-1}(x; f) = \\ = \rho_k(x; x_0; x_1; \dots; x_{k-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}), \end{aligned}$$

где $\rho_k(x; x_0; x_1; \dots; x_{k-1})$ – разделенная разность k -го порядка от функции $\rho_k(x) = L_k(x; f)$.

Пусть $\rho_k(x) = L_k(x; f) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$. Из следствия 3) предложения 1.2 получаем, что для любого x разделенная разность

$$\rho_k(x; x_0; x_1; \dots; x_{k-1}) = \alpha_k.$$

Так как $L_k(x_j; f) = f(x_j)$ при $j = 0, 1, \dots, k$, то при $x = x_k$, имеем

$$\rho_k(x_k; x_0; x_1; \dots; x_{k-1}) = \alpha_k = f(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

и, следовательно,

$$L_k(x; f) - L_{k-1}(x; f) = f(x_0; x_1; \dots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k).$$

Формула (1.20) доказана.

Явная запись интерполяционного многочлена для табл. 1.1 в виде (1.20) называется **интерполяционной формулой Ньютона**, а полином $N_n(x; f)$ – **интерполяционным многочленом Ньютона (полиномом Ньютона)**.

Важное замечание 1.3. Интерполяционную формулу Ньютона можно считать дискретным аналогом формулы Тейлора. При этом она не содержит производных и ее погрешность (1.18) напоминает остаточный член формулы Тейлора.

Достоинством записи интерполянта в форме Ньютона является то, что для повышения степени интерполяционного многочлена нет необходимости в его полной перестройке; достаточно лишь добавить к уже полученному выражению еще одно или несколько слагаемых. Кроме того, с помощью разделенных разностей можно приближенно оценивать погрешность интерполяции.

1.5. Интерполяция с равноотстоящими узлами

Зададим узлы интерполяции $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h > 0$ – шаг. Пусть $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ и $[x_0; x_n] \subseteq [a; b]$. Введем безразмерную независимую переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$. Имеем

$$x = x_0 + qh, \quad \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{x_0 + ih - x_0}{h} = i,$$

$$x - x_j = h(q - j), \quad x_i - x_j = h(i - j).$$

Используя полученные выражения, запишем интерполяционный многочлен Лагранжа (1.6) в виде

$$L_n(x; f) = L_n(x_0 + qh) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k^{(n)}(x_0 + qh) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot \tilde{l}_k^{(n)}(q), \quad (1.21)$$

где

$$\tilde{l}_k^{(n)}(q) = (-1)^{n-k} \frac{q(q-1) \dots (q-k+1)(q-k-1) \dots (q-n)}{k!(n-k)!}.$$

Далее

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) = h^{n+1} \tilde{\omega}(q),$$

где

$$\tilde{\omega}(q) = q(q-1) \dots (q-n).$$

Теперь погрешность интерполяции (1.10) представляется формулой

$$r_n(x; f) = r_n(x_0 + qh) = h^{n+1} \tilde{\omega}(q) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (1.22)$$

где $\xi = \xi(x)$ та же самая, что и в формуле (1.9).

Заметим, если $x \in [x_0; x_n]$, то $q \in [0; n]$. В этом случае с учетом (1.12) и (1.22) имеем максимальную оценку погрешности интерполяции для равноотстоящих узлов

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |r_n(x; f)| \leq h^{n+1} \frac{M_{n+1}^h}{(n+1)!} \Omega_n, \quad (1.23)$$

где

$$\Omega_n = \max_{0 \leq q \leq n} |\tilde{\omega}(q)|, \\ M_{n+1}^h = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Величина Ω_n не зависит от h . Ее можно заранее вычислить или оценить. В частности,

$$\Omega_1 = 1/4, \quad \Omega_2 = 2\sqrt{3}/3, \quad \Omega_3 = 1, \quad \Omega_4 < 1,7, \quad \Omega_5 < 17. \quad (1.24)$$

Можно показать, что $\Omega_n \leq n!$. Используя это неравенство, получаем из (1.23)

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |r_n(x; f)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1}^h. \quad (1.25)$$

Важное замечание 1.4. Из оценки (1.23) следует, что если число узлов табл. 1.1 фиксировано ($n = \text{const}$), то при уменьшении h максимальная погрешность интерполяции для равноотстоящих узлов ведет себя как $O(h^{n+1})$. Отметим, что при уменьшении шага h вдвое правая часть оценки (1.23) уменьшится по крайней мере в 2^{n+1} раза, так как $M_{n+1}^{h/2} \leq M_{n+1}^h$.

Замечание 1.10. Для заданного x узлы интерполяции $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$ целесообразно выбирать так, чтобы точка x находилась как можно ближе к середине отрезка $[x_0; x_n]$ (**объясните, почему**).

Если выполнено неравенство $\left| x - \frac{x_0 + x_n}{2} \right| \leq \frac{h}{2}$, то формула (1.23)

для погрешности интерполяции может быть уточнена.

В этом случае справедлива оценка

$$|r_n(x; f)| \leq h^{n+1} \frac{M_{n+1}^h}{(n+1)!} \Omega_n^{(0)}, \quad (1.26)$$

где

$$\Omega_n^{(0)} = \max_{|q - n/2| \leq 1/2} |\tilde{\omega}(q)|.$$

В частности,

$$\Omega_1^{(0)} = 1/4, \Omega_2^{(0)} = 3/8, \Omega_3^{(0)} = 9/16, \Omega_4^{(0)} = 45/32, \Omega_5^{(0)} = 225/64. \quad (1.27)$$

Сопоставляя (1.27) и (1.24), получаем, что оценка (1.26) для x , удов-

летворяющих условию $\left| x - \frac{x_0 + x_n}{2} \right| \leq \frac{h}{2}$, является более точной, чем (1.23).

Для табл. 1.1 с равноотстоящими узлами $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h > 0$ введем в рассмотрение **конечные разности** функции f .

Обозначим $f_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$. Величину

$$\Delta f(x_k) = \Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k \quad (1.28)$$

назовем **конечной разностью первого порядка** функции f в точке $x_k = x_0 + kh$.

Конечной разностью второго порядка функции f в точке x_k назовем величину

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x_k) &= \Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = \\ &= (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Если известны **конечные разности m -го порядка**, то **разделенная разность $(m+1)$ -го порядка** функции f в точке x_k определяется как

$$\Delta^{m+1} f(x_k) = \Delta^{m+1} f_k = \Delta(\Delta^m f_k) = \Delta^m f_{k+1} - \Delta^m f_k, \quad (1.30)$$

где $m \geq 1$, $\Delta^0 f_k = f_k$.

Для табл. 1.1 можно построить таблицу конечных разностей (табл. 1.3):

Таблица 1.3

Узлы	Конечные разности					
	0-го порядка	1-го порядка	2-го порядка	...	$(n-1)$ -го порядка	n -го порядка
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$...		
x_1	f_1					
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$...		

Узлы	Конечные разности					
	0-го порядка	1-го порядка	2-го порядка	...	(n-1)-го порядка	n-го порядка
...	$\Delta^{n-1} f_0$	$\Delta^n f_0$
...	$\Delta^{n-1} f_1$	
...	
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}	$\Delta^2 f_{n-2}$	
x_n	f_n					
Число разностей	$n+1$	n	$n-1$...	2	1

Из предложения 1.2 и его следствий получаем нижеперечисленные основные свойства конечных разностей.

1. Конечная разность является линейным оператором относительно f .

2. Для любого $m \geq 1$ конечная разность вычисляется по формуле

$$\Delta^m f_k = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f_{k+m-j},$$

где C_m^j – коэффициенты бинома Ньютона.

3. Значение функции f в точке $x_i + kh$ (точка принадлежит множеству узлов табл. 1.1, $i+k \leq n$) вычисляется по формуле

$$f(x_i + kh) = f(x_{i+k}) = f_{i+k} = \sum_{j=0}^k C_k^j \Delta^j f_i.$$

4. Разделенные разности и конечные разности связаны соотношением

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!} = \frac{\Delta^k f_0}{h^k k!}. \quad (1.31)$$

5. Если $f \in C^{(n+1)}[a; b]$, то

$$\Delta^m f(x_k) = h^m f^{(m)}(\eta), \quad (1.32)$$

где $\eta \in (x_k; x_{k+m})$.

Из формулы (1.32) следует, что конечные разности n -го порядка от многочлена степени n постоянны, а разности любого более высокого порядка равны нулю.

Используя связь (1.31) между разделенной разностью и конечной разностью и полагая $q = \frac{x - x_0}{h}$, получим из интерполяционной формулы

Ньютона (1.20) интерполяционный многочлен для равноотстоящих узлов ($x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h > 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{N}_n(x; f) = \tilde{N}(x_0 + qh) = f_0 + q \frac{\Delta f_0}{1!} + q(q-1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \\ + q(q-1)(q-2) \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1) \frac{\Delta^n f_0}{n!}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Многочлен (1.33) называется **интерполяционным многочленом Ньютона для равноотстоящих узлов для интерполяции вперед (первым интерполяционным многочленом Ньютона)**. Этот многочлен используется для вычисления значения функции в начале таблицы. Погрешность интерполяции здесь определяется формулой (1.20).

Важное замечание 1.5. Для табл. 1.1 с равноотстоящими узлами величину $f_{k+1} - f_k$ (конечную разность в точке x_k) можно отнести к различным точкам $x_k, x_{k+1/2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, x_{k+1}$. Обозначают эту величину в зависимости от точки, к которой ее относят: Δf_k – **разность вперед**, ∇f_k – **разность назад**, $\delta f_{k+1/2} = f_{k+1/2}^1 - f_{k+1/2}^0$ – **центральная разность**.

Таким образом,

$$f_{k+1} - f_k = \Delta f_k = \nabla f_{k+1} = \delta f_{k+1/2} = f_{k+1/2}^1 - f_{k+1/2}^0.$$

Аналогично (1.30) разности высших порядков определяют с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \nabla^{m+1} f_k &= \nabla(\nabla^m f_k) = \nabla^m f_k - \nabla^m f_{k-1}, \\ \delta^{m+1} f_k &= \delta(\delta^m f_k) = \delta^m f_{k+1/2} - \delta^m f_{k-1/2}, \\ f_k^{m+1} &= f_{k+1/2}^m - f_{k-1/2}^m. \end{aligned}$$

Используя разности назад и центральные, можно построить специальные интерполяционные многочлены для вычисления значения функции в конце и середине таблицы (вторая интерполяционная формула Ньютона, интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя).

1.6. Оптимальный выбор узлов интерполяции. Многочлены Чебышева

Формула (1.9) показывает, что погрешность интерполяции зависит от гладкости интерполируемой функции f ($f \in C^{(n+1)}[a; b]$) и выбора узлов $x_0; x_1; \dots; x_n$. Естественно возникает задача нахождения такого расположения узлов интерполяции x_i , $i = 0, \dots, n$ на отрезке $[a; b]$, при ко-

тором минимальна величина $\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|$ и тем самым минимальна правая часть оценки погрешности интерполяции (1.11). Эта задача называется **задачей об оптимальном выборе узлов интерполяции**.

Замечание 1.11. Величина $\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)| = \|\omega\|_{C[a;b]}$ в конструктивной теории функций называется **уклонением функции ω от нуля на отрезке $[a; b]$** .

Сначала найдем решение задачи об оптимальном выборе узлов интерполяции на отрезке $[-1; 1]$. Для этого нам понадобятся многочлены Чебышева.

Многочлен Чебышева $T_n(x)$ для $n = 1, 2, \dots$ определяется формулой

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n} \left\{ \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right\}. \quad (1.34)$$

Положим $T_0(x) \equiv 1$.

Покажем, что формула (1.34) действительно определяет многочлен степени n с коэффициентом при старшей степени, равным 1.

Используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$\begin{aligned} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n &= x^n + x \cdot C_n^1 \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot C_n^2 (x^2 - 1) + \dots + \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)^n, \\ \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n &= x^n - x \cdot C_n^1 \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot C_n^2 (x^2 - 1) + \dots + (-1)^n \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что члены, содержащие иррациональности, при сложении взаимно уничтожаются. Получаем, что выражение (1.34) действительно является многочленом степени n .

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{x^n} &= \\ &= \frac{1}{2^n} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n \right\} = 1, \end{aligned}$$

то коэффициент при старшей степени x^n , $n \geq 1$ многочлена $T_n(x)$ равен 1.

Таблица 1.4

Многочлены Чебышева

Степень	Многочлен Чебышева
$n = 0$	$T_0(x) \equiv 1$
$n = 1$	$T_1(x) = x$

Степень	Многочлен Чебышева
$n = 2$	$T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$
$n = 3$	$T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$
$n = 4$	$T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$
$n = 5$	$T_5(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$

Рассмотрим поведение многочлена Чебышева $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$.

Положим в формуле (1.34) $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (функция $x = \cos \theta$ взаимно однозначно отображает отрезок $[0; \pi]$ на отрезок $[-1; 1]$).

Получим

$$\begin{aligned} T_n(\cos \theta) &= \frac{1}{2^n} \left\{ \left(\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \right)^n + \left(\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \right)^n \right\} = \\ &= \frac{1}{2^n} \{ \cos n\theta + i \sin n\theta + \cos n\theta - i \sin n\theta \} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta = \tilde{T}_n(\theta) \end{aligned}$$

или

$$T_n(x) \Big|_{x=\cos \theta} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta = \tilde{T}_n(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (1.35)$$

Итак, значения многочлена $T_n(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) при $x = \cos \theta$ совпадают со значениями функции $\tilde{T}_n(\theta)$ на отрезке $[0; \pi]$.

Отсюда получаем, что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |\tilde{T}_n(\theta)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (1.36)$$

Предложение 1.3. *Корни многочлена Чебышева $T_n(x)$, $n \geq 1$ вещественные, различные и принадлежат интервалу $(-1; 1)$.*

Вопрос о корнях многочлена $T_n(x)$ сводится к отысканию корней функции $\tilde{T}_n(\theta)$ на отрезке $[0; \pi]$.

Функция $\tilde{T}_n(\theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta$ обращается в нуль в точках

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отрезку $[0; \pi]$ принадлежат точки θ_k только при $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, все n корней многочлена $T_n(x)$ принадлежат интервалу $(-1; 1)$ и в силу (1.35) находятся по формуле

$$x_k = \cos \theta_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

Предложение 1.3 доказано.

Замечание 1.12. Нули функции $\tilde{T}_n(\theta)$ равномерно распределены на отрезке $[0; \pi]$, расстояние между нулями равно $\frac{\pi}{2n}$. Корни многочлена Чебышева в силу нелинейности функции $\cos \theta$ сгущаются к концам отрезка $[-1; 1]$.

Предложение 1.4. Многочлен Чебышева $T_n(x)$, $n \geq 1$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет экстремумы

$$T_n(\bar{x}_m) = \frac{(-1)^m}{2^{n-1}}, \quad \bar{x}_m = \cos \frac{m\pi}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.38)$$

Действительно, производная $\tilde{T}_n'(\theta) = \frac{-n}{2^{n-1}} \sin n\theta$ обращается на отрезке $[0; \pi]$ в нуль в точках $\bar{\theta}_m = \frac{m\pi}{n}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Точки $\bar{\theta}_m$ находятся между нулями функции $\tilde{T}_n(\theta)$ и, следовательно, являются точками экстремума. Отсюда получаем, что многочлен Чебышева $T_n(x)$ имеет экстремумы при $\bar{x}_m = \cos \frac{m\pi}{n}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Предложение 1.4 доказано.

Важное замечание 1.6. Многочлены Чебышева $T_n(x)$, $n \geq 0$ на отрезке $[-1; 1]$ определяются формулой

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cdot \arccos x). \quad (1.39)$$

Формула (1.39) получается из (1.34) с помощью обратной замены $\theta = \arccos x$ при $-1 \leq x \leq 1$.

С помощью (1.39) легко вычисляются значения многочлена Чебышева на отрезке $[-1; 1]$.

Замечание 1.13. Из формулы (1.39) немедленно получаем следующее.

1. Все многочлены $T_{2k}(x)$ являются четными функциями, а $T_{2k+1}(x)$ – нечетными.

2. Для $n = 1, 2, \dots$ имеет место рекуррентная формула

$$T_{n+1}(x) = x \cdot T_n(x) - \frac{T_{n-1}(x)}{4}.$$

3. Многочлены $\phi_0 = 1/\sqrt{2}$, $\phi_n = T_n(x)$, $n \geq 1$ образуют на отрезке $[-1; 1]$ ортонормированную систему функций с весом $2/(\pi\sqrt{1-x^2})$:

$$\int_{-1}^1 \frac{2T_n(x)T_m(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \cdot \cos m\theta \cdot d\theta = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases}.$$

Теорема 1.3. Многочлен Чебышева $T_n(x)$, $n \geq 1$ среди всех многочленов степени n с коэффициентом при старшей степени x^n , равным 1, имеет на отрезке $[-1; 1]$ наименьшее уклонение от нуля.

Это означает, что для любого многочлена $p_n \in P^{(n)}$, такого, что $\deg p_n = n$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_n(x)}{x^n} = 1$, имеем

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p_n(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (1.40)$$

Доказательство. Пусть существует многочлен $g_n \in P^{(n)}$, такой, что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |g_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (1.41)$$

$$\deg g_n = n, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{x^n} = 1.$$

Тогда разность $T_n(x) - g_n(x)$ будет многочленом степени не выше $n-1$, отличным от тождественного нуля. Кроме того, в силу (1.36) и предположения (1.39) эта разность в $n+1$ точках $\bar{x}_m = \cos \frac{m\pi}{n}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ принимает отличные от нуля значения противоположных знаков:

$$\text{sign}(T_n(\bar{x}_m) - g_n(\bar{x}_m)) = \text{sign}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - g_n(\bar{x}_m)\right) = \text{sign}\left(\frac{(-1)^m}{2^{n-1}}\right),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что многочлен $T_n(x) - g_n(x)$ степени, строго меньшей n , обращается в нуль по крайней мере в n точках (имеет n различных корней), что невозможно.

Теорема 1.3 доказана.

Таким образом, для решения задачи об оптимальном выборе узлов интерполяции на отрезке $[-1; 1]$ в качестве узлов интерполяции нужно брать корни многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$, то есть точки

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.42)$$

При этом в соответствии с (1.36) оценка погрешности интерполяции (1.11) примет вид

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n(x; f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{2^n}, \quad (1.43)$$

$$M_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

Из теоремы 3 следует, что оценку (1.40) улучшить на отрезке $[-1; 1]$ за счет другого выбора узлов интерполяции нельзя.

Рассмотрим случай интерполирования на произвольном отрезке $[a; b]$. Отрезок $[a; b]$ линейной заменой переменной

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$$

взаимно однозначно отображается на отрезок $[-1; 1]$. При этом корням многочлена $T_{n+1}(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ соответствуют корни многочлена $T_{n+1}\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right)$ на отрезке $[a; b]$:

$$T_{n+1}\left(\frac{2x_k - (a+b)}{b-a}\right) = 0,$$

$$x_k = \frac{1}{2} \left((a+b) + (b-a) \cos \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.43)$$

Точки (1.43) являются оптимальными узлами для оценки погрешности интерполяции на произвольном отрезке $[a; b]$.

По узлам (1.43) построим $\omega(x)$:

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot T_{n+1}\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right).$$

Отсюда получаем оценку погрешности интерполяции на произвольном отрезке $[a; b]$ с узлами (1.42) в виде

$$\max_{a \leq x \leq b} |r_n(x; f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}},$$

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

2. Сходимость интерполяционного процесса

2.1. Интерполяционный процесс

Чтобы построить интерполяционный процесс, нужно задать на $[a; b]$ бесконечную матрицу узлов интерполяции

$$\aleph = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_0^{(0)} & & & & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\},$$

где все элементы $x_i^{(k)} \in [a; b]$, $x_i^{(k)} < x_{i+1}^{(k)}$, $i, k = 0, 1, 2, \dots$

Набор узлов интерполяции $\aleph^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$, принадлежащих n -й строке матрицы \aleph , называют **сеткой**. Таким образом, матрица узлов \aleph задает на $[a; b]$ последовательность сеток $\{\aleph^{(n)}\}$.

По каждой сетке $\aleph^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ можно построить интерполяционный многочлен степени n , интерполирующий заданную функцию f

$$P_n(x; x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}; f) = P_n^{(n)}(x; f). \quad (2.1)$$

Последовательность интерполяционных многочленов (2.1) называют **интерполяционным процессом**. Говоря о сходимости интерполяционного процесса, ищут ответ на вопрос о сходимости последовательности интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ к функции $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

2.2. Сходимость интерполяционного процесса

Обычно рассматривают следующие виды сходимости функциональной последовательности $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ для фиксированной последовательности сеток $\{\aleph^{(n)}\}$.

1. Поточечная сходимость к $f(x)$ на $[a; b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(n)}(x; f) = f(x) \text{ для любого } x \in [a; b];$$

$$P_n^{(n)}(x; f) \rightarrow f(x) \text{ на } [a; b].$$

2. Равномерная сходимость к $f(x)$ на $[a; b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |P_n^{(n)}(x; f) - f(x)| = 0;$$

$$P_n^{(n)}(x; f) \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } [a; b].$$

3. Среднеквадратичная сходимость с весом $\rho(x) > 0$ к $f(x)$ на $[a; b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (P_n^{(n)}(x; f) - f(x))^2 \rho(x) dx = 0;$$

$$P_n^{(n)}(x; f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ср}} f(x) \text{ на } [a; b].$$

В дальнейшем нам понадобится важный результат линейного функционального анализа, известный как теорема Банаха – Штейнгауса.

Пусть B – произвольное банахово пространство. Рассмотрим последовательность линейных непрерывных (ограниченных) операторов $A_n : B \rightarrow B$.

Теорема 2.1 (Банах – Штейнгаус). *Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходилась к оператору A при $n \rightarrow \infty$, то есть*

$$A_n f \rightarrow f \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для всех } f \in B,$$

необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) существует $\Lambda > 0$ ($\Lambda = \text{const}$) такая, что $\|A_n\|_{B \rightarrow B} \leq \Lambda$ для всех n .

б) последовательность $A_n f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $f \in \mathfrak{T}$, где \mathfrak{T} – плотное множество в банаховом пространстве B .

Важное замечание 2.1. Для матрицы узлов \aleph на $[0; 1]$ построим последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа

$$L_n(x; x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}; f) = L_n(x; f).$$

Введем оператор $L_n : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$ ($C[0; 1]$ – пространство функций, непрерывных на $[0; 1]$, $\|f\|_{C[0; 1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$), ставящий в соответствие функции $f(x)$ ее интерполяционный многочлен Лагранжа: $f(x) \mapsto L_n(x; f)$.

Положим

$$\lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=0}^n |l_k^{(n)}(x)|,$$

где $l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$ – многочлены базиса Лагранжа (см. (1.6)).

Нетрудно доказать, что $\|L_n\|_{C[0;1] \rightarrow C[0;1]} = \lambda_n$. С другой стороны, имеет место неравенство (Бернштейн)

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}. \quad (2.2)$$

Следовательно, $\|L_n\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из теоремы 2.1 получаем, что последовательность $L_n(x; f)$ не может сходиться равномерно на $[0; 1]$ для любой функции $f \in C[0; 1]$:

$$L_n(x; f) \not\Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x).$$

В противном случае нормы операторов $\|L_n\|$ были бы по условию а) теоремы 2.1 ограничены.

Замечание 2.1. С практической точки зрения интересны два случая сходимости интерполяционного процесса на равномерных сетках (сетках с равноотстоящими узлами).

1. Пусть n фиксировано ($n = \text{const}$). В этом случае рассматривается сходимость интерполяционного процесса при $h \rightarrow 0$ на последовательности сеток $\aleph^{(h)} = \{x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n, h > 0\}$.

2. Пусть h фиксировано ($h = \text{const}$). В этом случае рассматривается сходимость интерполяционного процесса при $n \rightarrow \infty$ на последовательности сеток $\aleph^{(n)} = \{a + ih, i = 0, 1, \dots, n\}$.

Случай 1 для $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ рассмотрен в пункте 1.5 (см. формулы (1.21) и (1.23)). Мы отметили, что погрешность интерполяции есть величина порядка $O(h^{n+1})$ при $h \rightarrow 0$.

Что касается случая 2, то увеличение числа узлов, то есть степени интерполяционного многочлена n , не всегда целесообразно, поскольку неизвестно, как ведет себя максимум модуля производной M_{n+1} с ростом ее порядка, и функция f может вообще иметь только ограниченное число производных.

В общем случае свойство сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит как от выбора на $[a; b]$ матрицы узлов \aleph – последовательности сеток $\{\aleph^{(n)}\}$, так и от гладкости интерполируемой функции f .

Приведем некоторые результаты, иллюстрирующие этот вывод.

Теорема 2.2. (Фабер – Бернштейн). Для любой последовательности сеток $\{\aleph^{(n)}\}$ на $[a; b]$ существует непрерывная на $[a; b]$ функция f , для которой соответствующая последовательность интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ не сходится равномерно при $n \rightarrow \infty$ ни к какой непрерывной функции.

Теорема 2.3 (Марцинкевич). Для любой непрерывной на $[a; b]$ функции f ($f \in C[a; b]$) найдется такая последовательность сеток $\{\aleph^{(n)}\}$ на $[a; b]$, для которой последовательность интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ будет сходиться равномерно при $n \rightarrow \infty$ к функции f :

$$P_n^{(n)}(x, f) \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } [a; b].$$

Теорема 2.4. Если f – целая функция (f является суммой степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости), то для любой последовательности сеток $\{\aleph^{(n)}\}$ на $[a; b]$ последовательность интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ будет сходиться равномерно при $n \rightarrow \infty$ к функции f :

$$P_n^{(n)}(x, f) \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } [a; b].$$

Пример (Бернштейн). Если $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$, то интерполяционные многочлены $P_n^{(n)}(x; f)$, построенные на равномерных сетках $\aleph^{(n)} = \{-1 + ih, i = 0, 1, \dots, n, h = 2/n\}$, не будут сходиться при $n \rightarrow \infty$ к $f(x) = |x|$ ни в одной точке, кроме $x = -1, 0, 1$:

$$P_n^{(n)}(x, f) \not\Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) = |x| \text{ на } [-1; 1] \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Замечание 2.2. Если в предыдущем примере равномерную сетку заменить чебышевской сеткой $\tilde{\aleph}^{(n)}$ (сеткой, построенной по узлам, являющимся корнями многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$), то интерполяционные многочлены $P_n^{(n)}(x; f)$ будут сходиться равномерно к функции $f(x) = |x|$ на $[-1; 1]$:

$$P_n^{(n)}(x, f) \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) = |x| \text{ на } [-1; 1].$$

Среднеквадратичную сходимость с весом последовательности интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ легко обеспечить, выбрав на $[a; b]$ специальную последовательность сеток $\{\aleph^{(n)}\}$.

Предложение 2.1. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ – система многочленов, ортогональных с весом $\rho(x) > 0$ на $[a; b]$. Пусть $x_k^{(n+1)}$, $k = 0, 1, \dots, n$ – корни многочлена $\psi_{n+1}(x)$. Тогда для последовательности сеток $\aleph^{(n)} = \{x_0^{(n+1)}, x_1^{(n+1)}, \dots, x_n^{(n+1)}\}$ соответствующая последовательность интерполяционных многочленов $\{P_n^{(n)}(x; f)\}$ с весом $\rho(x)$ будет среднеквадратично сходиться при $n \rightarrow \infty$ к функции f :

$$P_n^{(n)}(x; f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ср}} f(x) \text{ на } [a; b].$$

Важное замечание 2.2. В практических вычислениях интерполяционные многочлены высокой степени ($n > 6$) обычно не используются. Для интерполяции заданной функции f используют кусочно-полиномиальные функции.

3. Кусочно-полиномиальная интерполяция

3.1. Локально-интерполяционные формулы

Разделим отрезок $[a; b]$ на N частичных отрезков точками

$$a = x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(N)} = b.$$

Выберем на каждом j -м отрезке $[x^{(j-1)}; x^{(j)}]$, $j = 1, 2, \dots, N$ узлы интерполяции $x_0^{[j]} < x_1^{[j]} < \dots < x_{n_j}^{[j]}$ и построим для функции f интерполяционный многочлен степени не выше n_j :

$$P_{n_j}^{[j]}(x; x_0^{[j]}, x_1^{[j]}, \dots, x_{n_j}^{[j]}; f) = P_{n_j}^{[j]}(x; f),$$

где j – номер частичного отрезка, n_j – степень интерполяционного многочлена на отрезке $[x^{(j-1)}; x^{(j)}]$.

Совокупность этих многочленов порождает на отрезке $[a; b]$ функцию $P_N^{[a; b]}(x; f)$, которую мы назовем **локальным интерполянт** функции f на отрезке $[a; b]$:

$$P_N^{[a; b]}(x; f) \Big|_{[x^{(j-1)}, x^{(j)}]} = P_{n_j}^{[j]}(x; f). \quad (3.1)$$

Таким образом, функция $P_N^{[a; b]}(x; f)$ определена на всем отрезке $[a; b]$ и на каждом частичном отрезке совпадает с интерполяционным многочленом $P_{n_j}^{[j]}(x; f)$ (склеена из многочленов, интерполирующих функцию f на частичных отрезках). Функция $P_N^{[a; b]}(x; f)$ не обяза-

тельно гладкая (даже непрерывная) в точках склейки $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N-1)}$ интерполяционных многочленов. Этот способ приближения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется **локальной интерполяцией**.

На каждом частичном отрезке $[x^{(j-)}; x^{(j)}]$ погрешность локальной интерполяции для гладкой функции f можно оценить с помощью формулы (1.12)

$$\max_{x^{(j-1)} \leq x \leq x^{(j)}} |f(x) - P_{n_j}^{[j]}(x; f)| \leq \frac{M_{n_j+1}}{(n_j+1)!} (x^{(j)} - x^{(j-1)})^{n_j+1}, \quad (3.2)$$

$$x \in [x^{(j-)}; x^{(j)}], \quad M_{n_j+1} = \max_{x^{(j-1)} \leq x \leq x^{(j)}} |f^{(n_j+1)}(x)|.$$

Наиболее часто в практике используется локальная интерполянта для равноотстоящих узлов. Разделим отрезок $[a; b]$ на N частичных отрезков равной длины точками

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}. \quad (3.3)$$

Выберем на каждом j -м отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j=1, 2, \dots, N$ узлы интерполяции

$$x_{j,k} = x_j + \frac{k}{n}h, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Здесь расстояние между любыми соседними узлами интерполяции равно $(b-a)/(nN)$.

На каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$ построим для функции f интерполяционный многочлен степени не выше n

$$P_n^{[j]}(x; x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,n}; f) = P_n^{[j]}(x; f). \quad (3.5)$$

Построим на всем отрезке $[a; b]$ локальную интерполянту $P_N^{[a;b]}(x; f)$

$$P_N^{[a;b]}(x; f) \Big|_{x \in [x_{j-1}; x_j]} = P_n^{[j]}(x; f), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Локальная интерполянта $P_N^{[a;b]}(x; f)$ склеена из многочленов $P_n^{[j]}(x; f)$, интерполирующих функцию f на частичных отрезках. Функция $P_N^{[a;b]}(x; f)$ непрерывна в точках склейки x_j , $j = 1, \dots, N-1$:

$$P_n^{[j]}(x_j; f) = P_n^{[j+1]}(x_j; f) = f(x_j).$$

Замечание 3.1. Если общая степень n интерполяционных многочленов $P_n^{[j]}(x; f)$ не зависит от номера j частичного отрезка $[x_{j-1}; x_j]$, то в

этом случае параметром, за счет которого можно повышать точность приближения, является N – число частичных отрезков.

При $n=1$ локальный интерполянт есть кусочно-линейная функция (ломаная) с вершинами в точках $(x_j; f(x_j))$, при $n = 2$ графиками многочленов $P_2^{[j]}(x; f)$ на частичных отрезках $[x_{j-1}; x_j]$ будут параболы и так далее.

Если $f \in C^{(n+1)}[a; b]$, то погрешность локальной интерполяции для $x \in [a; b]$ ($x \in [x_{j-1}; x_j]$) оценивается по формуле

$$\begin{aligned} |f(x) - P_N^{[a;b]}(x; f)| &= |f(x) - P_n^{[j]}(x; f)| \leq \\ &\leq \frac{M_n}{(n+1)!} \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |(x - x_{j,0})(x - x_{j,1}) \dots (x - x_{j,n})| \leq \\ &\leq \frac{M_n}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1}}, \\ M_n &= \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку погрешности для локальной интерполянты с равноотстоящими узлами (3.3)–(3.4)

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_N^{[a;b]}(x; f)| &\leq \frac{M_n}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1}}, \quad (3.6) \\ M_n &= \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \end{aligned}$$

Предложение 3.1. Для $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ интерполяционный процесс, порожденный локальной интерполянтной $P_N^{[a;b]}(x; f)$ для равноотстоящих узлов, определяемых формулами (3.3)–(3.4), равномерно сходится при $N \rightarrow \infty$ к $f(x)$ на $[a; b]$:

$$P_N^{[a;b]}(x; f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } [a; b]$$

со скоростью $O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right)$ при $N \rightarrow \infty$.

Утверждение предложения 3.1 следует из оценки (3.6).

Теперь можно указать способ построения сходящегося интерполяционного процесса для любой непрерывной функции с помощью локальной интерполянты.

Теорема 3.1. Для любой функции $f \in C[a; b]$ интерполяционный процесс, порожденный локальной интерполянтной $P_N^{[a;b]}(x; f)$ для равноотстоящих узлов, определяемых формулами (3.3)–(3.4), равномерно сходится при $N \rightarrow \infty$ к $f(x)$ на $[a; b]$:

$$P_N^{[a;b]}(x, f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } [a; b].$$

Доказательство. Введем оператор

$$L_N^{[a;b]} : C[a; b] \rightarrow C[a; b], (L_N^{[a;b]} f)(x) = P_N^{[a;b]}(x; f).$$

По построению $L_N^{[a;b]}$ – линейный ограниченный оператор в пространстве $C[a; b]$.

Теперь утверждение теоремы 3.1 означает, что последовательность операторов $\{L_N^{[a;b]}\}$ поточечно сходится при $N \rightarrow \infty$ к единичному оператору $E : C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, $E f = f$ и нам нужно только проверить выполнение условий а) и б) теоремы 2.1 для последовательности $\{L_N^{[a;b]}\}$ при $N \rightarrow \infty$.

Выполнение условия б) теоремы 2.1 немедленно следует из предложения 3.1, так как множество $C^{(n+1)}[a; b]$ плотно в $C[a; b]$.

Докажем справедливость условия а). Обозначим через $L_n^{[j]}$ оператор интерполирования на отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $(L_n^{[j]} f)(x) = P_n^{[j]}(x; f)$ (см. (3.4)).

Имеем

$$\begin{aligned} \|L_n^{[j]} f\|_{C[x_{j-1}; x_j]} &= \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |P_n^{[j]}(x; f)| \leq \\ &\leq \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f(x)| \cdot \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \sum_{k=0}^n \left| \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_{j,i})}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_{j,k} - x_{j,i})} \right|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначив

$$\lambda_n^{[j]}(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_{j,i})}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_{j,k} - x_{j,i})} \right|, \quad (3.8)$$

перепишем (3.7) в виде

$$\|L_n^{[j]} f\|_{C[x_{j-1}; x_j]} \leq \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \lambda_n^{[j]}(x) \cdot \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f(x)|. \quad (3.9)$$

Сделаем в (3.8) замену переменной, положив

$$t = \frac{x - x^{(j-1)}}{\frac{h}{n}}.$$

Имеем

$$(x - x_{j,i}) = x^{(j-1)} + \frac{h}{n}t - x^{(j-1)} - \frac{i}{n}h = \frac{h}{n}(t - i),$$

$$(x_{j,k} - x_{j,i}) = x^{(j-1)} + \frac{k}{n}h - x^{(j-1)} - \frac{i}{n}h = \frac{h}{n}(k - i).$$

Подставляя найденные выражения в (3.7), получим функцию $\tilde{\lambda}_n^{[j]}(t)$ от новой переменной t :

$$\tilde{\lambda}_n^{[j]}(t) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t - i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (k - i)} \right|. \quad (3.10)$$

Так как функция $t = \frac{x - x^{(j-1)}}{\frac{h}{n}}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[x_{j-1}; x_j]$ на отрезок $[0; n]$, то

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \lambda_n^{[j]}(x) = \max_{t \in [0; n]} \tilde{\lambda}_n^{[j]}(t). \quad (3.11)$$

Отметим, что в (3.10) вычисляется максимальное значение функции $\tilde{\lambda}_n^{[j]}(t)$, непрерывной на отрезке $[0; n]$, не зависящей от N и j – номера отрезка $[x_{j-1}; x_j]$. Следовательно,

$$\lambda_n = \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \lambda_n^{[j]}(x) = \max_{t \in [0; 1]} \tilde{\lambda}_n^{[j]}(t) \quad (3.12)$$

зависит только от n .

Используя (3.12), имеем

$$\|L_n^{[j]} f\|_{C[x_{j-1}; x_j]} \leq \lambda_n \cdot \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f(x)| \leq \lambda_n \max_{x \in [a; b]} |f(x)|,$$

$$\|L_N^{[a;b]}f\|_{C[a;b]} = \max_{1 \leq j \leq N} \|L_n^{[j]}f\|_{C[x_{j-1};x_j]} \leq \lambda_n \cdot \|f\|_{C[a;b]}.$$

Отсюда для нормы оператора $L_N^{[a;b]}$ получим оценку

$$\|L_N^{[a;b]}\|_{C[a;b]} \leq \lambda_n. \quad (3.13)$$

Условие а) теоремы 2.1 доказано. Так как λ_n не зависит от N , то теорема 3.1 доказана.

3.2. Интерполяция сплайнами

Понятие сплайна. Построенный нами в предыдущем пункте локальный интерполянт $P_N^{[a;b]}(x; f)$ для равноотстоящих узлов, определяемых формулами (3.3)–(3.4), обладает существенным недостатком: в точках склейки – общих точках частичных отрезков $[x_{j-1}; x_j]$ он не является гладкой функцией. Возникает задача построения локального интерполянта, являющегося гладкой функцией на всем отрезке $[a; b]$. Эта задача решается с помощью сплайнов.

Термин сплайн (англ. *spline*) имеет техническое происхождение. Первоначально сплайнами называли длинные гибкие деревянные рейки, использовавшиеся английскими кораблестроителями для вычерчивания деталей корпуса корабля в натуральную величину. Другими словами, сплайн был чертежным инструментом для построения гладких кривых.

В вычислительной математике под сплайном на отрезке $[a; b]$ понимают кусочно-полиномиальную функцию, гладкую на всем отрезке.

Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Набор точек $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ принято называть **сеткой**.

Сплайном степени k порядка m на отрезке $[a; b]$, соответствующим сетке $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$, называется функция $\phi \in C^m[a; b]$, совпадающая на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ с многочленом

$$\phi(x) = \phi_j(x) = a_0^{[j]} + a_1^{[j]}x + \dots + a_k^{[j]}x^k \quad (3.14)$$

степени не выше k .

Из определения следует, что для многочленов (3.14), представляющих сплайн на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, имеет место равенство

$$\phi_j^{(i)}(x_j) = \phi_{j+1}^{(i)}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Таким образом, сплайн – это функция, склеенная из многочленов $\phi_j(x)$ так, что в результате получается m раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a; b]$ (рис. 3.1).

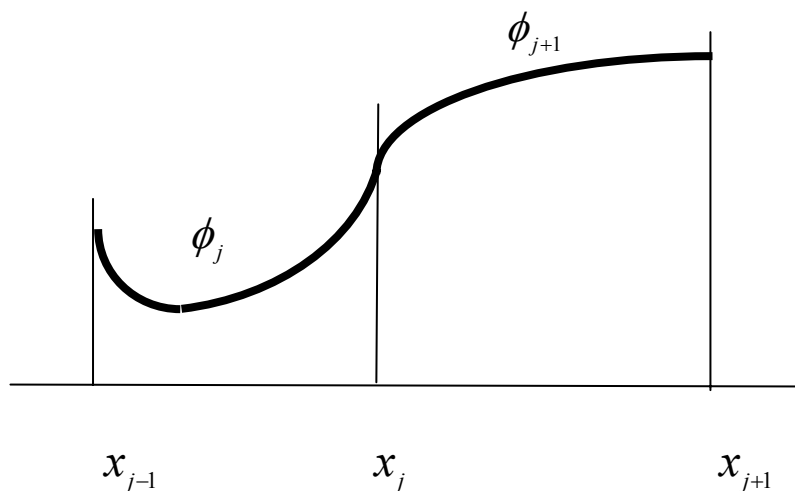


Рис. 3.1

Для сплайнов степени k и порядка m на отрезке $[a; b]$ используется обозначение

$$S_k^m(x; \Delta_n) = S_k^m(x) = S_{k,d}(x),$$

где число $d = k - m$ называется **дефектом сплайна**.

Сплайн называется **интерполяционным** для заданной табл. 1.1, если

$$S_k^m(x_j; \Delta_n) = f(x_j), \quad (3.16)$$

где $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ – узлы интерполяции.

Интерполяция посредством сплайнов называется **сплайн-интерполяцией**.

Замечание 3.2. Непрерывная кусочно-линейная функция (ломаная) является сплайном первой степени нулевого порядка (дефект равен 1).

На практике чаще всего используются сплайны третьей степени второго порядка. Такие сплайны называют **кубическими**. Выбор значения гладкости $m = 2$ объясняется в том числе и тем, что при движении режущего инструмента в автоматизированных металлообрабатывающих комплексах по траектории, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой кривой, не должны возникать ударные нагрузки. В случае разрывов второй производной по второму закону Ньютона они появляются и могут привести к разрушению инструмента или дефектам обрабатываемой поверхности. При этом значение степени $k = 3$ является минимальным для

обеспечения существования интерполяционного сплайна класса $C^2[a; b]$ для любой табл. 1.1.

Конструирование интерполяционного кубического сплайна. На частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$ локальное представление (3.14) кубического сплайна $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ имеет вид

$$\phi_j(x) = a_0^{[j]} + a_1^{[j]}x + a_2^{[j]}x^2 + a_3^{[j]}x^3, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Поэтому для задания сплайна требуется определить $4n$ неизвестных. При этом должны быть выполнены условия:

1) интерполяционности ($2n$ уравнений)

$$\phi_j(x_{j-1}) = f(x_{j-1}), \quad \phi_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.18)$$

2) гладкости ($2n - 2$ уравнений)

$$\phi'_j(x_j) = \phi'_{j+1}(x_j), \quad \phi''_j(x_j) = \phi''_{j+1}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.19)$$

Таким образом, для определения интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ имеем систему (3.18)–(3.19), состоящую из $4n - 2$ уравнений относительно $4n$ неизвестных. Для того чтобы получить систему, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, можно дополнительно задать два краевых условия. Наиболее часто используют следующие краевые условия:

$$1) S_3''(x_0) = \delta_0, \quad S_3''(x_n) = \delta_n.$$

Если $\delta_0 = \delta_n = 0$, то сплайн называют **естественным сплайном**. Это условие соответствует ситуации, когда в точках $(x_0; f(x_0))$ и $(x_n; f(x_n))$ рейка (*spline*) закреплена шарнирно (может свободно поворачиваться вокруг этих точек). В этом случае конец рейки, расположенный левее x_0 (правее x_n), оказывается прямолинейным, следовательно на нем $\phi''_1(x) = 0, x \leq x_0$ ($\phi''_n(x) = 0, x \geq x_n$);

$$2) S_3''(x_0) = S_3''(x_1), \quad S_3''(x_{n-1}) = S_3''(x_n).$$

В этом случае сплайн называют **сплайном с параболическими концевыми участками** и вторая производная сплайна на концевых частичных отрезках $[x_0; x_1]$ и $[x_{n-1}; x_n]$ есть константа (как линейная функция, принимающая в концевых точках отрезка равные значения). Это означает, что сплайн на концевых отрезках представляется многочленом второй степени (график такого многочлена – парабола);

$$3) S_3'(x_0) = \nu_0, \quad S_3'(x_n) = \nu_n.$$

Это условие задает наклоны сплайна в концевых узлах. Такой сплайн называется **сплайном с жестко закрепленными концами**. Это соответ-

вует ситуации, когда конец рейки (*spline*), расположенный левее x_0 (правее x_n), жестко закреплен под заданным углом к оси x .

Замечание 3.3. Система (3.18)–(3.19) с одним из краевых условий 1), 2), 3) редко используется на практике для построения интерполяционного кубического сплайна из-за большого числа неизвестных.

Оптимальный способ построения кубического сплайна. Напомним, что для кубического сплайна вторая производная $S_3''(x)$ есть кусочно-линейная функция на отрезке $[a; b]$.

Обозначим для j -го частичного отрезка $[x_{j-1}; x_j]$ через $h_j = x_j - x_{j-1}$ его длину и положим $\alpha_{j-1} = \phi_j''(x_{j-1})$, $\alpha_j = \phi_j''(x_j)$. График $\phi_j''(x)$ есть прямая, проходящая через точки $(x_{j-1}; \alpha_{j-1})$ и $(x_j; \alpha_j)$. Имеем

$$\phi_j''(x) = \alpha_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + \alpha_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}. \quad (3.21)$$

Найдем теперь $\phi_j'(x)$ как первообразную для $\phi_j''(x)$ на $[x_{j-1}; x_j]$:

$$\phi_j'(x) = -\alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \beta_j. \quad (3.22)$$

Аналогично получим $\phi_j(x)$ как первообразную для $\phi_j'(x)$ на $[x_{j-1}; x_j]$:

$$\phi_j(x) = \alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \beta_j x + \gamma_j. \quad (3.23)$$

Значения β_j и γ_j нужно выбрать так, чтобы сплайн на концах отрезка $[x_{j-1}; x_j]$ принимал заданные условием интерполяции значения $f(x_{j-1})$ и $f(x_j)$ соответственно.

Полагая в (3.23) $x = x_{j-1}$ и $x = x_j$, получим систему уравнений относительно неизвестных β_j и γ_j :

$$\begin{cases} \alpha_{j-1} \frac{h_j^2}{6} + \beta_j x_{j-1} + \gamma_j = f(x_{j-1}), \\ \alpha_j \frac{h_j^2}{6} + \beta_j x_j + \gamma_j = f(x_j). \end{cases}$$

Найдем решение этой системы.

$$\beta_j = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

$$\gamma_j = \frac{f(x_{j-1})x_j - f(x_j)x_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_{j-1}x_j - \alpha_jx_{j-1}).$$

Подставив найденные выражения для β_j и γ_j в (3.22) и (3.23), имеем:

$$\begin{aligned} \phi'_j(x) = & -\alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \\ & + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \phi_j(x) = & \alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \\ & + \left[\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right] \cdot x + \\ & + \frac{f(x_{j-1})x_j - f(x_j)x_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_{j-1}x_j - \alpha_jx_{j-1}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если известны $\alpha_{j-1} = \phi''(x_{j-1})$ и $\alpha_j = \phi''(x_j)$, то полученные формулы (3.21), (3.24) и (3.25) позволяют вычислить значение интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ и его производных $S'_3(x)$, $S''_3(x)$ в любой точке отрезка $[x_{j-1}; x_j]$.

Теперь найдем $\alpha_j = \phi''(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Положим в (3.24) $x = x_j$ и воспользуемся условием $\phi'_j(x_j) = \phi'_{j+1}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ (см. (3.19)), получим систему линейных уравнений:

$$h_j\alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.26)$$

где

$$g_j = 6 \cdot \left[\frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_{j+1}} - \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} \right]. \quad (3.27)$$

Итак, доказана

Теорема 3.2. Формулы (3.25) представляют для функции f (заданной табл. 1.1) интерполяционный кубический сплайн $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ тогда и только тогда, когда вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является решением системы (3.26)–(3.27).

Система (3.26)–(3.27) содержит $n - 1$ уравнение относительно $n + 1$ неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. После добавления одного из краевых условий 1), 2), 3) получаем систему из $n + 1$ уравнения относительно $n + 1$ неизвестных.

Для краевых условий 1) система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_0 = \delta_0, \\ h_j \alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_n = \delta_n. \end{cases}$$

Для краевых условий 2) система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 = 0, \\ h_j \alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Для краевых условий 3) система имеет вид

$$\begin{cases} 2h_1\alpha_0 + h_1\alpha_1 = 6 \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} - 6\nu_0, \\ h_j \alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ h_n \alpha_{n-1} + 2h_n \alpha_n = 6\nu_0 - 6 \cdot \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_n}. \end{cases}$$

В последней системе в краевых условиях 3) производные сплайна в концевых точках вычислены по формуле (3.24) ($\phi'_1(x_0) = \nu_0$ и $\phi'_n(x_n) = \nu_n$).

Во всех случаях матрицы полученных систем уравнений для определения $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ оказываются трехдиагональными.

Замечание 3.4. Системы линейных уравнений с трехдиагональными матрицами эффективно решаются **методом прогонки** (специальная модификация метода Гаусса для решения систем линейных уравнений). Если

трехдиагональная матрица имеет преобладающую главную диагональ, то ее определитель отличен от нуля.

Из замечания 3.4 немедленно следует

Теорема 3.3. *Интерполяционный кубический естественный сплайн $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ (удовлетворяющий условиям (3.18)–(3.19) и $S_3''(x_0) = 0$, $S_3''(x_n) = 0$) существует и единственен.*

Сформулируем без доказательства предложение, устанавливающее характер сходимости интерполяционного кубического естественного сплайна. Имеет место

Предложение 3.2. *Если $f \in C^{(4)}[a; b]$ и $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ – равномерная сетка с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, то для интерполяционного кубического естественного сплайна $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ справедливы оценки*

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f(x) - S_3(x)| \leq c_0 h^4 M_4,$$

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f'(x) - S_3'(x)| \leq c_1 h^3 M_4,$$

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f''(x) - S_3''(x)| \leq c_2 h^2 M_4,$$

$$\text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Таким образом, для $f \in C^{(4)}[a; b]$ интерполяционный кубический естественный сплайн и его производные до второго порядка включительно на отрезке $[a; b]$ при $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) равномерно сходятся к интерполируемой функции f и ее производным соответственно.

Важное замечание 3.1. Пусть для табл. 1.1 с узлами $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ построен интерполяционный кубический естественный сплайн $S_3(x)$. Введем множество функций $K^{(2)}[a; b]$: $\phi \in K^{(2)}[a; b]$, если $\phi(x)$ – функция, непрерывная вместе с производной на $[a; b]$, имеющая кусочно-непрерывную вторую производную на $[a; b]$ и удовлетворяющая условиям

$$\phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad \int_a^b [\phi''(t)]^2 dt < \infty.$$

Тогда $S_3(x)$ доставляет наименьшее значение линейному функционалу $\Phi(\phi) = \int_a^b [\phi''(t)]^2 dt$ на множестве $K^{(2)}[a; b]$, то есть для любой $\phi \in K^{(2)}[a; b]$ имеет место неравенство

$$\Phi(\phi) = \int_a^b [\phi''(t)]^2 dt \geq \int_a^b [S_3''(t)]^2 dt.$$

Эта важная особенность интерполяционного кубического естественного сплайна называется **экстремальным свойством**.

Учебное издание

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Учебно-методическое пособие
для лекционных занятий в вузах

Составители:
Трофимов Валерий Павлович,
Карпова Антонина Петровна,
Небольсина Марина Николаевна

Корректор В.П. Бахметьев

Компьютерная верстка Е.Н. Комарчук

Подп. в печ. 18.12.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,4. Тираж 50 экз. Заказ 1033.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. (факс): +7 (473) 259-80-26
<http://www.ppc.vsu.ru>; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии
Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. +7 (473) 220-41-33