1. Постановка задачи

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \qquad (1)$$

с квадратной невырожденной матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ ($a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1,\ldots,m$), $\Delta = \det A \neq 0$, $x, b \in \mathbf{R}^m$, $x = (x_1,\ldots,x_m)^T$, $b = (b_1,\ldots,b_m)^T$.

Вектор $\hat{x}$ называется **решением системы** (1), если $A\hat{x} \equiv b$.

Обычно рассматриваются следующие вычислительные задачи:

1) Нахождение решения $\hat{x}$ системы (1).

2) Вычисление определителя $\Delta = \det A$ матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$.

3) Нахождение обратной матрицы A^{-1} для невырожденной матрицы A $\left(A^{-1}A = AA^{-1} = I = diag\ (1,1,\ldots,1)\right)$.

Замечание 1. *Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только случай невырожденной матрицы* A, $\det A \neq 0$. *Общий случай требует специальных подходов к понятию решения. Отметим, что при численных расчетах грань между случаями* $\det A \neq 0$ *и* $\det A = 0$ *достаточно условна.*

Из курса линейной алгебры известно, что формальное решение системы (1) существует и может быть найдено по формулам Крамера:

$$\hat{x} = A^{-1}b, \qquad \hat{x}_i = \Delta_i / \Delta, \quad i - 1,\ldots,m,$$

где

$$\Delta = \det A, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,i-1} & b_m & a_{m,i+1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Напомним наиболее часто используемые в $\mathbf{R}^m$ векторные нормы: $\|x\|_e = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2\right)^{1/2}$ - евклидова норма; $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|$ - l_1 - норма; $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|$ - l_∞ - норма.

Внимание! *В пространстве* $\mathbf{R}^m$ *все нормы эквивалентны и сходимость в любой из них влечет сходимость в остальных нормах.*

Нормы матрицы A, согласованные с соответствующими нормами векторов

в $\mathbf{R}^m$, вычисляются по формулам $\left(\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$:

$\|A\|_e = \max\limits_i \sqrt{\lambda_i\left(AA^T\right)}$, здесь через $\lambda_i\left(AA^T\right)$ обозначены собственные значения матрицы AA^T, A^T - транспонированная матрица, число $\sqrt{\lambda_i\left(AA^T\right)}$ называется сингулярным числом матрицы A; $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le m} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}|$; $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|$.

Для согласованных норм вектора и матрицы имеет место неравенство

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \ .$$

Часто используются матричные нормы: $\|A\|_{сф} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j-1}^{m} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ (сферическая норма) и $\|A\|_M = m \cdot \max_{1 \le j \le m} |a_{ij}|$ (максимальная норма). При этом сферическая норма согласована с евклидовой векторной нормой, а максимальная норма согласована со всеми рассмотренными векторными нормами.

Решение $\hat{x}$ системы (1) непрерывно зависит от входных данных: матрицы A и вектора правой части b. Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$(A + \mathrm{E})x = b + \varepsilon \qquad (2).$$

Если возмущение E удовлетворяет условию $\|\mathrm{E}\| < 1/\|A^{-1}\|$, то система (2) имеет единственное решение:

$$\tilde{x} = (A + \mathrm{E})^{-1}(b + \varepsilon) = \left(I + A^{-1}\mathrm{E}\right)^{-1} A^{-1}(b + \varepsilon).$$

Введем относительные величины возмущений векторов $\hat{x}, b \in R^m$ и матриц $A: R^m \to R^m$ и $A^{-1}: R^m \to R^m$:

$$\delta\hat{x} = \frac{\|\hat{x} - \tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|},\ \delta b = \frac{\|\varepsilon\|}{\|b\|},\ \delta A = \frac{\|\mathrm{E}\|}{\|A\|},\ \delta A^{-1} = \frac{\left\|(A + \mathrm{E})^{-1} - A^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|}.$$

Воспользовавшись тождеством $(A + \mathrm{E})^{-1} - A^{-1} = -(A + \mathrm{E})^{-1}\mathrm{E}A^{-1}$, получим

$$\hat{x} - \tilde{x} = A^{-1}b - (A + \mathrm{E})^{-1}(b + \varepsilon) = (A + \mathrm{E})^{-1}\mathrm{E}A^{-1}b - (A + \mathrm{E})^{-1}\varepsilon =$$
$$= (A + \mathrm{E})^{-1}(\mathrm{E}\hat{x} - \varepsilon).$$

Отсюда для любых согласованных норм, используя оценки $\|b\| \le \|A\| \cdot \|\hat{x}\|$, $\left\|(A + \mathrm{E})^{-1}\right\| \le \|A^{-1}\| / \left(1 - \|\mathrm{E}\| \cdot \|A^{-1}\|\right)$, получаем:

$$\delta\hat{x} = \frac{\|\hat{x}-\tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\mathrm{E}\| + \|A^{-1}\|\frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{x}\|}}{1-\|\mathrm{E}\|\cdot\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\frac{\|\mathrm{E}\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\mathrm{E}\|}{\|A\|}+\frac{\|\varepsilon\|}{\|b\|}\right)$$

Или

$$\delta A^{-1} \le \frac{\delta A\cdot condA}{1-\delta A\cdot condA}, \qquad (3)$$

$$\delta\hat{x} \le \frac{condA}{1-\delta A\cdot condA}\left(\delta A+\delta b\right). \qquad (4)$$

В неравенствах (3)-(4) число $condA = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ называется **числом обусловленности матрицы** A в рассматриваемой матричной норме. Из неравенства (4) вытекает, что $\delta\hat{x}\to 0$ при $\delta A\to 0$ и $\delta b\to 0$.

Полученные формулы (3), (4) дают количественные оценки возмущения обратной матрицы и решения системы (1) при изменении матрицы и вектора правой части системы. Из них следует, что в окрестности любой невырожденной матрицы обратная матрица и решение системы (1) являются непрерывными функциями входных данных.

Из очевидного неравенства $\|AA^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ следует, что $condA \ge 1$. Таким образом, **хорошо обусловлены** матрицы с малым числом обусловленности, при этом относительная погрешность решения системы (1) мала.

Замечание 2. *Для априорной оценки числа обусловленности* $condA$ *требуется найти обратную матрицу к заданной матрице* A *- это самостоятельная сложная вычислительная задача.*

Замечание 3. *Анализ погрешности округления при решении системы* (1) *позволяет (с помощью достаточно громоздких выкладок) получить следующие оценки для* δA *и* δb *:*

$$\delta A = O\left(m2^{-t}\right) = O\left(m\varepsilon_M\right),$$

$$\delta b = O\left(m2^{-t}\right) = O\left(m\varepsilon_M\right),$$

где t *- разрядность ЭВМ,* ε_M *-* ***машинное эпсилон****.*

Из формулы (4) *следует оценка относительной погрешности решения системы:*

$$\delta\hat{x} = O\left(m \cdot \varepsilon_M \cdot condA\right).$$

Пример 1. Пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно найти решение системы (1) с матрицей A:

$$\hat{x}_m = b_m,\ \hat{x}_{m-1} = b_{m-1} - ab_m,\ \hat{x}_{m-2} = b_{m-2} - a \cdot (b_{m-1} - ab_m), \dots .$$

Отсюда следует, что если b_m задано с погрешностью ε, то погрешность в вычислении $\hat{x}_1$ будет равна $(-1)^{m-1} a^{m-1} \varepsilon$. При $m = 40,\ a = 7$ эта погрешность будет величиной порядка 10^{32} и мы рискуем не иметь в решении системы ни одного верного знака. Возникшая ситуация может быть предсказана с помощью такой характеристики матрицы A, как число обусловленности. Вычислив обратную матрицу A^{-1}, получим

$$cond_\infty A = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = (1+a)\frac{a^m - 1}{a - 1}.$$

Для выбранных параметров $cond_\infty A \approx 8{,}5 \cdot 10^{33}$ и, следовательно, матрица A плохо обусловлена.

Из этого примера можно извлечь еще одно следствие, состоящее в том, что большое число обусловленности матрицы нельзя обязательно связывать с близостью к вырожденности или наличию малого собственного значения. Можно пронормировать матрицу A, разделив все ее элементы на a. Тогда мы получим матрицу

$$B = a^{-1}A = \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \qquad cond_\infty B = cond_\infty A.$$

Матрица B - плохо обусловлена, но ее собственные значения отнюдь не малы.

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две большие группы: **прямые** и **итерационные** методы.

Прямые методы позволяют найти решение системы (1) за конечное число шагов. Они с алгебраической точки зрения достаточно просты и являются наиболее универсальными. Их существенным недостатком при использовании ЭВМ среднего класса является ограничение на размер матрицы системы (1).

Итерационные методы часто используются для решения больших систем $\left(m = 10^3 \div 10^9\right)$ со специальными матрицами (разреженными, слабозаполненными).

2. Прямые методы. Метод Гаусса

Значительная часть наиболее известных прямых методов решения системы (1) сводится к последовательному решению одной или нескольких систем

$$Gx = y \tag{5}$$

с матрицами G «простого» вида (диагональными, «почти» диагональными, треугольными, «почти» треугольными).

2.1. Классическая схема метода Гаусса. LU – разложение матрицы

Классическая схема метода Гаусса основана на сведении системы (1) к эквивалентной системе (5) с верхней треугольной матрицей G:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Gx = y \quad \left(G = \{g_{ij}\}, \quad g_{ij} = 0, \quad j < i\right).$$

Получение такой системы - построение матрицы G и вектора правой части y называется **прямым ходом** метода Гаусса. Решение новой системы $Gx = y$ называется **обратным ходом** метода Гаусса.

Прямой ход метода Гаусса. Пусть невырожденная матрица A имеет ненулевые главные миноры всех порядков от 1 до m-1:

$$A\begin{bmatrix}1,\ldots,r\\1,\ldots,r\end{bmatrix}\neq 0,\qquad r=1,2,\ldots,m-1. \qquad (6)$$

Рассмотрим матрицы и векторы

$$\left.\begin{aligned} A_k &= N_k A_{k-1}, \qquad A_0 = A,\\ b^{(k)} &= N_k b^{(k-1)}, \qquad b^{(0)} = b, \quad k=1,\ldots,m-1,\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

где нижняя треугольная матрица N_k строится по k - тому столбцу матрицы A_{k-1} и имеет вид:

$$N_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & n_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & n_{mk}^{(k)} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Замечание 4. *Нижние треугольные матрицы* N_k $(k=1,\ldots,m-1)$ *отличаются от единичной матрицы лишь поддиагональными элементами в* k *-ом столбце,* $\det N_k = 1$. *При этом*

$$N_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -n_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -n_{mk}^{(k)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\det N_k^{-1} = 1, \ \ k = 1, \dots, m-1.$$

Легко получить и произведение матриц $N_1^{-1} N_2^{-1} \dots N_k^{-1} (k = 1, \dots, m-1)$. *Для его нахождения не нужно производить практически никаких вычислений. Ненулевые элементы произведения располагаются в первых* k *столбцах и совпадают с элементами матриц* $N_1^{-1}, N_2^{-1}, \dots, N_k^{-1}$.

Имеем

$$N_1^{-1}N_2^{-1}\ldots N_k^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -n_{21}^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -n_{31}^{(1)} & -n_{32}^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -n_{k1}^{(1)} & -n_{k2}^{(2)} & -n_{k3}^{(3)} & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -n_{k+1,1}^{(1)} & -n_{k+1,2}^{(2)} & -n_{k+1,3}^{(3)} & \ldots & -n_{k+1,k}^{(k)} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -n_{m1}^{(1)} & -n_{m2}^{(2)} & -n_{m3}^{(3)} & \ldots & -n_{mk}^{(k)} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляется произведение матриц $N_1N_2\ldots N_k$ $(k=1,\ldots,m-1)$.

Обозначим элементы матрицы A_k через $a_{ij}^{(k)}$. Для каждого $k=1,\ldots,m-1$ элементы матрицы N_k выберем так, чтобы

$$a_{ij}^{(k)}=0, \text{ если } i>j, \quad j\le k,$$

$$a_{ii}^{(k)}\ne 0, \text{ если } i\le k.$$

На первом шаге прямого хода метода Гаусса $k=1$ имеем (по условию (6) $a_{11}=a_{11}^{(0)}\ne 0$):

$$N_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n_{21}^{(1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n_{31}^{(1)} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n_{m-1,1}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ n_{m1}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n_{i1}^{(1)}=-\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}},\ i=2,\ldots,m,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1,m-1}^{(0)} & a_{1m}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2,m-1}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3,m-1}^{(1)} & a_{3m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m-1,2}^{(1)} & a_{m-1,3}^{(1)} & \cdots & a_{m-1,m-1}^{(1)} & a_{m-1,m}^{(1)} \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \cdots & a_{m,m-1}^{(1)} & a_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_{m-1}^{(1)} \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^{(1)} = -\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} + a_{ij}^{(0)}, \;\; b_i^{(1)} = -\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)} + b_i^{(0)}, \;\; i, j = 2, \ldots, m.$$

На втором шаге $k = 2$ имеем ($a_{22}^{(1)} \neq 0$ по условию (6)):

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n_{32}^{(2)} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n_{m-1,2}^{(2)} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & n_{m,2}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_{i2}^{(2)} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \;\; i = 3, \ldots, m,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1,m-1}^{(0)} & a_{1,m}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2,m-1}^{(1)} & a_{2,m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,m-1}^{(2)} & a_{3,m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{m-1,m-1}^{(2)} & a_{m-1,m}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{m,3}^{(2)} & \cdots & a_{m,m-1}^{(2)} & a_{mm}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_{m-1}^{(2)} \\ b_m^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^{(2)} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)} + a_{ij}^{(1)}, \;\; b_i^{(2)} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} + b_i^{(1)}, \;\; i, j = 3, \ldots, m.$$

Условие (6) позволяет продолжить этот процесс до $k = m - 1$:

$$N_{m-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&n_{m,m-1}^{(m-2)}&1\end{pmatrix},\qquad n_{m,m-1}^{(m-2)}=-\frac{a_{m,m-1}^{(m-2)}}{a_{m-1,m-1}^{(m-2)}},$$

$$A_{m-1}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(0)}&a_{12}^{(0)}&a_{13}^{(0)}&\cdots&a_{1,m-1}^{(0)}&a_{1,m}^{(0)}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&\cdots&a_{2,m-1}^{(1)}&a_{2,m}^{(1)}\\0&0&a_{33}^{(2)}&\cdots&a_{3,m-1}^{(2)}&a_{3,m}^{(2)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{m-1,m-1}^{(m-2)}&a_{m-1,m}^{(m-2)}\\0&0&0&\cdots&0&a_{mm}^{(m-1)}\end{pmatrix},\qquad b^{(m-1)}=\begin{pmatrix}b_1^{(0)}\\b_2^{(1)}\\b_3^{(2)}\\\vdots\\b_{m-1}^{(m-2)}\\b_m^{(m-1)}\end{pmatrix},$$

$$a_{mm}^{(m-1)}=-\frac{a_{m,m-1}^{(m-2)}}{a_{m-2,m-2}^{(m-2)}}a_{m-1,m}^{(m-2)}+a_{mm}^{(m-2)},\ \ b_m^{(m-1)}=-\frac{a_{m,m-1}^{(m-2)}}{a_{m-1,m-1}^{(m-2)}}b_{m-1}^{(m-2)}+b_m^{(m-2)}.$$

За $m-1$ шагов прямого хода метода Гаусса мы построим верхнюю треугольную матрицу

$$A_{m-1}=N_{m-1}N_{m-2}\ldots N_2N_1A.$$

Отсюда находим представление матрицы A в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц:

$$A=\left(N_1^{-1}N_2^{-1}\ldots N_{m-1}^{-1}\right)A_{m-1}=LU,\qquad (9)$$

где $L=N_1^{-1}N_2^{-1}\ldots N_{m-1}^{-1}$ - нижняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами, $\det L=1,$ $U=A_{m-1}$ - верхняя треугольная матрица, $\det U = \det A$. Формулу (9) принято называть **LU – разложением матрицы** A.

Внимание! *LU – разложение матрицы (формула (9)) существует и единственно при выполнении условия (6).*

Таким образом, при выполнении условия (6) мы в результате прямого хода метода Гаусса получаем эквивалентную (1) систему линейных уравнений с верхней треугольной матрицей:

$$Ux = y, \tag{10}$$

где $U = A_{m-1}$ и $y = b^{(m-1)}$.

Обратный ход метода Гаусса. Теперь мы можем вычислить решение $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m)^T$ системы (10) с верхней треугольной матрицей. В силу эквивалентности систем (10) и (1) $\hat{x}$ будет и решением системы (1). Пусть $U = \{u_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$.

Координаты решения $\hat{x}$ находятся в обратном порядке по формулам

$$\begin{cases} \hat{x}_m = \dfrac{y_m}{u_{mm}}, \\ \hat{x}_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{m} u_{ij} \cdot \hat{x}_j}{u_{ii}}, \quad i = m-1, m-2, \ldots, 1. \end{cases} \tag{11}$$

Вычисление решения системы (1) по формулам (11) является **обратным ходом метода Гаусса.**

Замечание 5. *Изложенный алгоритм решения системы* (1) *называют* ***классической схемой метода Гаусса.*** *Эта схема применима в случае, когда* *выполнено условие* (6). *Для реализации алгоритма потребуется примерно* $O\left(\frac{2m^3}{3}\right)$ *арифметических операций.*

Внимание! *Если известно* LU *– разложение матрицы* A*, то решение системы* (1) *сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:*

$Lz = b$, $Ux = z.$

Полученное в формуле (9) LU – разложение матрицы A позволяет вычислить определитель матрицы A и найти обратную матрицу A^{-1}.

Так как

$$\det A = \det(LU) = \det L \cdot \det U = u_{11}u_{22}\ldots u_{mm}, \qquad U = A_{m-1},$$

то

$$\det A = \det A_{m-1} = a_{11}a_{22}^{(1)}\ldots a_{mm}^{(m-1)}. \qquad (12)$$

Если A вырожденная матрица $\det A = 0$, то на некотором k-ом шаге прямого хода метода Гаусса $a_{kj}^{(k-1)} = 0, j = k,\ldots,m$ и процесс останавливается. При этом мы можем определить ранг матрицы A.

Для построения обратной матрицы A^{-1} нужно решить матричное уравнение

$$A \cdot X = I. \qquad (13)$$

Матрица $\hat{X} = \{\hat{x}_{ij}\}, \ (i, j = 1,\ldots,m)$ - решение уравнения (13) и дает A^{-1}. Очевидно, что k-ый столбец $\hat{X}^{(k)} = (\hat{x}_{1k},\ldots,\hat{x}_{mk})$ матрицы $\hat{X}$ является решением системы линейных уравнений $A \cdot x = e^{(k)}$, где вектор правой части системы

$e^{(k)} = (0,\ldots,0,\underset{k}{1},0,\ldots,0)^T$, $k = 1,\ldots,m.$ При этом для решения системы (13) LU – разложение матрицы A строится только один раз.

Влияние ошибок округления на вычислительный процесс. Пусть выполнено условие (6) и $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \ldots, \tilde{N}_{m-1}$ и $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_{m-1}$ - реально вычисленные матрицы прямого хода метода Гаусса. Положим

$$\left(\tilde{N}_1^{-1}\tilde{N}_2^{-1}\ldots\tilde{N}_{m-1}^{-1}\right)\cdot \tilde{A}_{m-1} = A + \mathrm{M}. \qquad (14)$$

Обозначим через μ_{ij} элементы матрицы эквивалентного возмущения M, через $\tilde{a}_{ij}^{(k)}$ элементы матрицы $\tilde{A}_k$.

Имеют место оценки

$$\left|\mu_{ij}\right| \mathrel{\tilde{\le}} \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 1{,}5\cdot(i-1)\,p^{-t+1}\alpha, & j \ge i, \\ 1{,}5\cdot(j-1)\,p^{-t+1}\alpha, & j < i, \end{cases} \qquad (15)$$

где p - основание системы счисления, t - разрядность ЭВМ,

$\alpha = \max\limits_{0\le k\le m-1} \alpha_k$, $\alpha_k = \max\limits_{i>k,\ j\ge k} \left|\tilde{a}_{ij}^{(k)}\right|.$

В условиях и обозначениях (14) выполняется неравенство

$$\left\|\mathrm{M}\right\|_{сф} \mathrel{\tilde{\le}} \frac{\sqrt{6}}{4} m^2 p^{-t+1}\alpha, \qquad (16)$$

здесь через $\left\|\mathrm{M}\right\|_{сф}$ обозначена сферическая норма матрицы M.

Замечание 6. *Оценки* (15), (16) *получены без каких-либо предположений относительно величины главных миноров матрицы* A, *кроме, конечно, выполнения условия осуществимости прямого хода метода Гаусса. Таким образом, существенным условием неустойчивости процесса* *вычислений является значительный рост элементов промежуточных матриц* $\tilde{A}_k$.

Если принципиально не менять общую схему вычислений, то единственной возможностью в какой-то мере регулировать рост элементов матриц $\tilde{A}_k$ *является использование перестановок при реализации прямого хода метода Гаусса.*

2.2. Метод Гаусса с выбором ведущего (главного) элемента

Пусть A - произвольная невырожденная матрица. Вместо последовательности (7) рассмотрим последовательность матриц

$$\hat{A}_k = \hat{N}_k \left(P_{ki_k} \hat{A}_{k-1} R_{kj_k} \right), \qquad \hat{A}_0 = A, \qquad k = 1, \ldots, m-1, \qquad (17)$$

где P_{ki_k}, R_{kj_k} - матрицы перестановок, причем $i_k, j_k \geq k.$ Для любого k в (17) выберем матрицы перестановок так, чтобы в позициях (k,k) матриц $P_{ki_k} \hat{A}_{k-1} R_{kj_k}$ находились ненулевые элементы и каждая из матриц $\hat{N}_k$ строится согласно (8) по k -ому столбцу матрицы $P_{ki_k} \hat{A}_{k-1} R_{kj_k}$.

Описанный алгоритм (17) называют **методом Гаусса с выбором ведущего (главного) элемента.**

Внимание! *В позиции* (k,k) *матрицы* $P_{ki_k} \hat{A}_{k-1} R_{kj_k}$ *стоит тот же элемент, который находится в позиции* (i_k, j_k) *матрицы* $\hat{A}_{k-1}$. *Поэтому для осуществимости процесса* (16) *необходимо выбирать такие перестановки* P_{ki_k}, R_{kj_k}, *индексы* (i_k, j_k) *которых определяют позицию ненулевого элемента матрицы* $\hat{A}_{k-1}$.

Реализуя процесс (17), получим следующее разложение матрицы A на множители

$$A=\left(P_{1i_1}\hat{N}_1^{-1}\dots P_{m-1,j_{m-1}}\hat{N}_{m-1}^{-1}\right)\cdot\left(\hat{A}_{m-1}R_{m-1,j_{m-1}}\dots R_{1j_1}\right). \qquad (18)$$

В разложении (18) матрицы, стоящие в скобках уже не являются треугольными.

Рассмотрим матрицы $\breve{N}_{r-1}^{-1}=P_{ki_k}\dots P_{ri_r}\hat{N}_{r-1}^{-1}P_{ri_r}\dots P_{ki_k}$. Очевидно матрицы $\breve{N}_{r-1}^{-1}$ являются матрицами типа N_k (см. (8)) и отличаются от матриц $\hat{N}_{r-1}^{-1}$ лишь перестановкой поддиагональных элементов в $(r-1)$-ом столбце.

Равенство (18) можно записать в виде

$$\breve{A}=\left(\breve{N}_1^{-1}\dots\breve{N}_{m-1}^{-1}\right)\cdot\hat{A}_{m-1},$$

где

$$\breve{A}=\left(P_{m-1,i_{m-1}}\dots P_{1i_1}\right)\cdot A\cdot\left(R_{1i_1}\dots R_{m-1,i_{m-1}}\right).$$

Сравнивая найденное представление с (9), делаем вывод, что процесс (17) определяет разложение на треугольные множители матрицы $\breve{A}$, которая получается из матрицы A путем перестановок ее строк и столбцов. Так как перестановки не вносят дополнительных ошибок, то оценки (15), (16) переносятся на матрицу $\breve{A}$ и процесс (17). Следовательно, рост элементов матриц $\hat{A}_k$ полностью определяется стратегией выбора перестановок (ведущих элементов).

Элементы матриц $\hat{A}_k$ в позициях (i_k, j_k) процесса (17) называются **ведущими (главными) элементами** метода Гаусса.

Существуют три наиболее распространенные **стратегии выбора ведущих элементов**:

1) В качестве ведущего элемента k-го шага выбирается максимальный по модулю элемент $\hat{a}_{ij}^{(k-1)}$ матрицы $\hat{A}_{k-1}$ при условиях $i \geq k,\ \ j = k$; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента **по столбцу**.

2) В качестве ведущего элемента k-го шага выбирается максимальный по модулю элемент $\hat{a}_{ij}^{(k-1)}$ матрицы $\hat{A}_{k-1}$ при условиях $i = k,\ \ j \geq k$; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента **по строке**.

3) В качестве ведущего элемента k-го шага выбирается максимальный по модулю элемент $\hat{a}_{ij}^{(k-1)}$ матрицы $\hat{A}_{k-1}$ при условиях $i \geq k,\ \ j \geq k$; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента **по всей матрице**.

Замечание 7. *Применение стратегий выбора ведущих элементов по столбцу и по всей матрице обеспечивает для элементов матриц* $\hat{N}_k$ *выполнение неравенства* $\left|\hat{n}_{ij}^{(k)}\right| \leq 1$.

Замечание 8. *Существуют матрицы, для которых применение стратегии выбора ведущего элемента по столбцу в обозначениях* (14) *приводит к выполнению соотношения* $\alpha_k = 2^k \alpha_0$ *для всех* k. *Указанный рост элементов достигается на матрицах специального вида. В практических вычислениях он оказывается, как правило, не слишком большим.*

Какова бы ни была матрица A*, применение стратегии выбора ведущего элемента по всей матрице в обозначениях* (14) *приводит к выполнению при всех* k *соотношения*

$$\alpha_k \le f(k) \cdot \alpha_0,$$

где $f(k) \le k^{1/2} \cdot \left(2^1 3^{1/2} 4^{1/3} \ldots k^{1/(k-1)}\right)^{1/2}.$

Отметим, что эта оценка по-видимому сильно завышена, так как до сих пор не найдено ни одной матрицы, для которой $f(k) \ge k$.

Внимание! *Если матрица* A *имеет преобладающую главную диагональ*

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} \left|a_{ij}\right|, \quad i = 1, \ldots, m$$

и не осуществляется выбор ведущих элементов, то при реализации прямого хода метода Гаусса не происходит рост элементов.

2.3. Компактная схема метода Гаусса

Обозначим через l_{ij} и u_{ij} элементы матриц L и U, соответственно, в LU – разложение матрицы A. Элементы матрицы A теперь вычисляются по формуле

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir} \cdot u_{rj}, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Эти уравнения относительно l_{ij} и u_{ij} рекуррентно разрешимы, при этом

$$
\begin{cases}
u_{11} = a_{11}, \\
u_{1j} = a_{1j}, \quad l_{j1} = \dfrac{a_{j1}}{u_{11}}, \quad j = 2,3,\ldots,m, \\
u_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{r=1}^{i-1} l_{ir} \cdot u_{ri}, \qquad i = 2,3,\ldots,m, \\
u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{r=1}^{i-1} l_{ir} \cdot u_{rj}, \quad l_{ji} = \dfrac{a_{ji} - \sum\limits_{r=1}^{j-1} l_{jr} \cdot u_{ri}}{u_{ii}}, \\
\qquad i = 2,3,\ldots,m, \quad j = i+1, i+2, \ldots, m.
\end{cases} \tag{19}
$$

Из (19) получаем

$$
l_{11} \cdot u_{11} = A\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{1} \end{bmatrix}, \qquad (l_{22} \cdot u_{22}) = \frac{A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{1} \end{bmatrix}}, \ldots, (l_{mm} \cdot u_{mm}) = \frac{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & m-1 \\ 1 & 2 & \ldots & m-1 \end{bmatrix}}.
$$

Формулы (19), позволяющие найти треугольные матрицы L и U в разложении (9), называются **компактной схемой метода Гаусса**.

2.4. Метод прогонки

Пусть матрица A является трехдиагональной $(a_{ij} = 0,\ |i-j| > 1)$. Главную и побочные диагонали матрицы A обозначим через $\{\gamma_i\},\ i = 1,\ldots,m$, $\{\alpha_i\},\ i = 2,\ldots,m$, $\{\beta_i\},\ i = 1,\ldots,m-1$; столбец свободных членов системы (1) обозначим через $\{\phi_i\},\ i = 1,\ldots,m$.

Теперь систему (1) можно записать в виде

$$
\begin{cases}
\gamma_1 x_1 + \beta_1 x_2 & = & \phi_1, \\
\alpha_i x_{i-1} + \gamma_i x_i + \beta_i x_{i+1} & = & \phi_i, \quad i = 2, \ldots, m-1, \\
\alpha_m x_{m-1} + \gamma_m x_m & = & \phi_m.
\end{cases} \qquad (20)
$$

Построим формулы LU – разложения матрицы A системы (20):

$$A = LU,$$

$$
A = \begin{pmatrix}
\gamma_1 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{m-1} & \gamma_{m-1} & \beta_{m-1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_m & \gamma_m
\end{pmatrix},
$$

$$
L = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
l_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & l_m & 1
\end{pmatrix}, \qquad
U = \begin{pmatrix}
v_1 & w_1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & v_2 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & v_{m-1} & w_{m-1} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & v_m
\end{pmatrix}.
$$

В этом случае формулы (19) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&v_1 = \gamma_1, && w_1 = \beta_1, && l_2 = \alpha_2 / v_1, \\
&v_i = \gamma_i - l_i w_i, && w_i = \beta_i, && l_{i+1} = \alpha_{i+1} / v_i, \\
&&& i = 2, 3, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Алгоритм решения системы (20) принято записывать в виде:

$$x_k = \xi_k x_{k+1} + \eta_k, \qquad k = 1, \dots, m-1, \qquad (21)$$

где коэффициенты ξ_k, η_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{\beta_1}{\gamma_1}, \qquad \eta_1 = \dfrac{\phi_1}{\gamma_1}, \\ \xi_k = \dfrac{-\beta_k}{\gamma_k + \alpha_k \xi_{k-1}}, \qquad \eta_k = \dfrac{\phi_k - \alpha_k \eta_{k-1}}{\gamma_k + \alpha_k \xi_{k-1}}, \\ k = 2, \dots, m-1. \end{cases} \qquad (22)$$

Алгоритм (21)-(22) решения систем с трехдиагональной матрицей называется **методом прогонки.** Сначала по формулам (22) находятся коэффициенты ξ_k, η_k $(k = 1, \dots, m-1)$. Вычисление величин ξ_k, η_k называется **прямой прогонкой**. Теперь, решая совместно последнее уравнение системы (20) и уравнение (21), отвечающее $k = m-1$, найдем координаты $\hat{x}_m, \hat{x}_{m-1}$ решения системы, если только полученная система совместна. Зная $\hat{x}_{m-1}$, по формулам (21) определим остальные координаты решения $\hat{x}_k$ $(k = m-2, m-3, \dots, 1)$. Вычисление координат $\hat{x}_k$ решения системы (20) в обратном порядке называется **обратной прогонкой**. Для реализации алгоритма потребуется примерно $O(m)$ арифметических операций.

Замечание 9. *Пусть матрица системы* (20) *имеет преобладающую главную диагональ и выполнены условия:*

$$|\gamma_k| \geq |\alpha_k| + |\beta_k| + \delta, \qquad k = 1, \dots, m, \qquad (23)$$

где $\delta > 0,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_m = 0.$

Условия (23) *гарантируют существование единственного решения* $\hat{x}$ *системы* (20) *и позволяют осуществить прямой и обратный ходы прогонки (формулы* (21)-(22)*). При этом*

$$\max_{0\le k\le m}|\hat{x}_k| \le \frac{1}{\delta}\cdot\max_{0\le k\le m}|\phi_k|.$$

2.4. Точность решения

Точность является важнейшей характеристикой любого численного метода, в том числе и разложения матрицы на множители. Пусть найдено LU – разложение матрицы A. Обозначим через $\widetilde{L}, \widetilde{U}$ реально вычисленные матрицы прямого хода метода Гаусса. Тогда

$$LU = A + \mathrm{M}$$

и эквивалентное возмущение M удовлетворяет неравенству (см. формулы (14),(15),(16))

$$\|\mathrm{M}\|_{сф} \mathrel{\widetilde{\le}} f(m)\cdot p^{-t+1}\|A\|_{сф},$$

где функция $f(m)$ зависит только от размерности m матрицы системы (1) и способа получения разложения.

Связь точности решения системы с точностью разложения матрицы на множители гораздо сложнее. Реально вычисленное решение $\widetilde{x}$ системы (1) является точным решением возмущенной системы (2): $(A+\mathrm{E})\widetilde{x} = b + \varepsilon$. При этом

$$\|\mathrm{E}\|_{сф} \le \varphi(m)\cdot p^{-t+1}\|A\|_{сф}, \quad \|\varepsilon\|_{e} \le \psi(m)\cdot p^{-t+1}\|b\|_{e},$$

где $\varphi(m) + \psi(m) \mathrel{\widetilde{\le}} 2\cdot f(m),$ если только в пределах таких возмущений матрица $A + \mathrm{E}$ остается невырожденной.

Для относительной погрешности решения системы (1) в этом случае имеет место оценка

$$\delta\hat{x} = \frac{\|\hat{x} - \tilde{x}\|}{\|\hat{x}\|} \,\tilde{\leq}\, 2\,f(m) \cdot p^{-t+1} \cdot cond_{сф} A.$$

3. Итерационные методы

Изложенные выше прямые методы решения системы (1) теоретически приводят к точному решению. Здесь мы опишем итерационные методы, с помощью которых в принципе может быть построено не само решение $\hat{x}$, а последовательность элементов $x^{(n)}$ к нему сходящаяся $\left(x^{(n)} \to \hat{x}\right.$ при $\left.n \to \infty\right)$. Некоторый элемент $x^{(N)}$, достаточно близкий к решению $\hat{x}$ - пределу последовательности, принимается за приближенное решение. Таким образом, итерационные методы имеют некоторую теоретически необходимую ошибку (**алгоритмическую ошибку** метода). Это обстоятельство не является их недостатком по сравнению с прямыми методами. Алгоритмическая ошибка может быть сделана меньше, чем погрешность, вызванная ошибками округления при реализации прямого метода.

Общим недостатком итерационных методов является наличие дополнительных условий для сходимости последовательности приближенных решений.

Конечно, сходимость итерационных методов может иметь место только теоретически. При наличии ошибок округления вычисленные приближения будут отличаться от истинных. Поэтому нельзя гарантировать, что вычисленные приближения с достаточно большими номерами лежат в сколь угодно малой окрестности решения $\hat{x}$. Можно только утверждать, что они попадают в некоторую окрестность решения, размеры которой определяются точностью вычислений. После того как получено приближенное решение из этой окрестности, продолжение вычислений не повышает точности результата.

3.1. Принцип сжимающих отображений

Большинство итерационных методов (и не только для систем линейных уравнений) может быть получено применением принципа неподвижной точки (сжимающих отображений). Приведем его формулировку.

Пусть E - полное линейное нормированное пространство и F - его отображение в себя. F называется **сжимающим** на множестве $X \subseteq E$, если существует такое число $q \in [0,1)$, что для любых x' и x'' из X выполнено неравенство

$$\|F(x') - F(x'')\| \le q\|x' - x''\|.$$

Предложение (принцип сжимающих отображений). *Пусть* X *- замкнутое ограниченное множество в* E $(X \subseteq E)$ *и отображение* F *- сжимающее на множестве* X *. Тогда уравнение*

$$x = F(x) \qquad (24)$$

имеет в X *единственное решение* $\hat{x}$*. При этом при любом выборе вектора* $x^{(0)} \in X$ *последовательность*

$$x^{(n+1)} = F(x^{(n)}) \qquad (25)$$

сходится при $n \to \infty$ *к* $\hat{x}$*.*

3.2. Метод простых итераций (последовательных приближений)

Заменим систему (1) эквивалентной системой, имеющий вид (24):

$$x = Bx + c. \tag{26}$$

Построим по начальному приближению $x^{(0)}$ итерационный процесс, задаваемый формулой (сравните с формулой (25))

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c, \qquad n = 0,1,\ldots \tag{27}$$

Алгоритм (27) называется методом **простой итерации** или **стационарным** методом.

Укажем наиболее распространенные способы перехода от системы (1) к эквивалентной системе вида (26):

1. $x = x - Ax + b, \qquad B = (I - A), \qquad c = b.$
2. $x = x + H(b - Ax), \qquad B = (I - HA), \qquad c = Hb,$

где H - некоторая невырожденная матрица.

3. $x = x + \tau S^{-1}(b - Ax), \qquad B = (I - \tau S^{-1}A), \qquad c = \tau S^{-1}b,$

где τ - числовой параметр, S - невырожденная матрица.

Для третьего способа перехода от исходной системы (1) к эквивалентной системе (26) алгоритм (27) принято записывать в виде

$$S\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\tau} + Ax^{(n)} = b. \tag{28}$$

Формула (28) называется **общим неявным методом простой итерации**. Значение параметра τ выбирается для каждой конкретной системы так, чтобы скорость сходимости последовательности приближений $x^{(n)}$ была максимальной.

Теорема 1. *Если* $\|B\| \le q < 1,$ *то система* (26) *имеет единственное решение* $\hat{x} = (I - B)^{-1}b$ *и метод простой итерации* (27) *сходится*

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \hat{x}$ *при любом выборе начального приближения* $x^{(0)}$ *со скоростью не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем* q *. При этом:*

$$\left\|\hat{x} - x^{(n)}\right\| \le \frac{q^n}{1-q}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|, \quad \left\|\hat{x} - x^{(n)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|.$$

Внимание! *Для сходимости метода простой итерации достаточно выполнения условия* $\|B\| < 1$ *в любой норме.*

Теорема 2. *Пусть матрица* A *системы* (1) *невырождена. Тогда метод простой итерации* (27) *сходится при любом выборе начального приближения* $x^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда спектральный радиус* λ_B *матрицы* B *меньше единицы* $\left(\lambda_B = \max\limits_k |\lambda_k(B)|\right.$*, где* $\lambda_k(B)$*- собственные числа матрицы* $\left.B\right)$.

Оценим степень влияния ошибки округления на вычислительный процесс.

Обозначим через $\tilde{x}^{(n)}$ реально вычисленное значение n-ого приближения, а через $\delta^{(n)}$ - вектор погрешности округления на n-ом шаге. Вместо формулы (27) получим:

$$\tilde{x}^{(n+1)} = B\tilde{x}^{(n)} + \delta^{(n+1)}, \; n = 0,1,2,\dots.$$

Вектор суммарной ошибки $\varepsilon^{(n+1)} = \tilde{x}^{(n+1)} - x^{(n+1)}$ на $(n+1)$-ом шаге имеет вид:

$$\varepsilon^{(n+1)} = B\tilde{x}^{(n)} - B\tilde{x}^{(n)} + \delta^{(n+1)} = B\left(\tilde{x}^{(n)} - x^{(n)}\right) = B\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n+1)},$$

$n = 0,1,2,\dots$.

В условиях теоремы 1 имеем:

$$\left\|\varepsilon^{(n+1)}\right\| \le q \left\|\varepsilon^{(n)}\right\| + \left\|\delta^{(n)}\right\|, \ 0 < q < 1, \ n = 0,1,2,\ldots.$$

Из полученного неравенства следует, что с ростом n суммарная ошибка $\varepsilon^{(n)}$ ведет себя как величина порядка $\delta = \max\limits_{0\le j\le n} \max\limits_{1<i<m} \left|\delta_i^{(j)}\right|$, то есть **точность результата соответствует точности выполнения арифметических операций**. Это общее свойство итерационных методов является их важнейшим преимуществом перед другими численными методами.

Замечание 10. *Теорема* 2 *хотя и дает необходимые и достаточные условия сходимости метода простых итераций, но часто ее практическое значение не велико.*

Рассмотрим систему (1) *с матрицей* A *из примера* 1. *Воспользовавшись первым способом перехода к системе* (26)*, допускающей применение метода простых итераций, получим эквивалентную систему* $x = Bx + c = (I - A)x + c,$ *в которой матрица* B *имеет вид*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Весь спектр матрицы B *сводится к одной точке* $\lambda = 0$. *С точки зрения теоремы* 2 *это очень хороший случай. Однако в примере* 1 *было показано, что при довольно скромных размерах матрицы* A $(m = 40)$ *при* $a = 7$ *мы находим решение системы* (1) *с огромной погрешностью.*

Выясним, что будет происходить, если для решения системы использовать метод простых итераций.

Будем считать, что по формуле (27) *вычисляются не векторы* $x^{(n)}$, *а приращения* $\rho^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)}$:

$$\rho^{(n+1)} = B\rho^{(n)} = B^2\rho^{(n-1)} = \ldots = B^n\rho^{(1)}.$$

В реальных вычислениях получим

$$\rho^{(k+1)} = \left(B^k + \Delta_k\right)\rho^{(1)},$$

где Δ_k *- матрица ошибок на* k *- ом шаге.*

Нетрудно подсчитать, что $B^m = 0$ *и при* $k < m$ *матрица* B^k *имеет элементы отличные от нуля только в позициях* $(1, k+1), (2, k+2), \ldots$ *и каждый из этих элементов равен* $(-a)^k$.

При $k \le m-1$ *имеем*

$$\left\|\rho^{(k+1)}\right\|_\infty \le \left\|B^k + \Delta_k\right\|_\infty \cdot \left\|\rho^{(1)}\right\|_\infty \approx a^k \left\|\rho^{(1)}\right\|_\infty.$$

Отсюда следует, что если $a > 1$, *но не настолько велико, чтобы наступило переполнение, когда* $k \approx m$, *то сходимости итераций все равно не будет.*

В самом деле, поскольку $B^m = 0$, $\Delta_m \ne 0$, *то* $\rho^{(m+1)} = \Delta_m\rho^{(1)}$. *Поэтому для всех последующих итераций получится аналогичная ситуация, которая, очевидно, повторится сколько угодно раз. Таким образом, условия теоремы выполнены, а итерации в реальных вычислениях не сходятся.*

Для ускорения сходимости итерационный процесс (27) должен быть построен так, чтобы норма матрицы B была возможно меньше. Если возвратиться к способам перехода от системы (1) к эквивалентной системе (26), это означает, что нужно выбирать матрицу H или, соответственно, параметр τ и матрицу S так, чтобы нормы $\|I - HA\|$ или $\|I - \tau S^{-1}A\|$ были возможно меньше.

Если бы мы могли положить $H = A^{-1}$, то процесс (при отсутствии ошибок округления) сошелся бы за одну итерацию. Используя дополнительные свойства заданной матрицы A, можно выбирать матрицы H, приближающиеся к A^{-1}.

Замечание 11. *В приложениях довольно часто встречаются системы с положительно определенными симметричными матрицами. Мы не приводим здесь подробности применения итерационных методов для решения таких систем. Отметим только, что для любой положительно определенной симметричной матрицы* $A\ \left(a_{ij} = a_{ji},\ (Ax, x) > 0,\ x \neq 0\right)$ *можно так подобрать матрицу* H*, чтобы итерационный процесс* (27) *сходился. Действительно, так как собственные числа матрицы* A *принадлежат некоторому интервалу* $(0;\alpha)$*, то можно положить*

$$H = \frac{2}{\alpha} \cdot I, \quad B = I - HA = I - \frac{2}{\alpha} A.$$

Нетрудно видеть, что спектральный радиус матрицы B *меньше единицы* $\left(\lambda_k(B) = 1 - \frac{2}{\alpha} \cdot \lambda_k(A), \qquad -1 < \lambda_k(B) < 1\right).$

Отметим, что случай положительно определенной симметричной матрицы является достаточно общим, так как система (1) *эквивалентна системе* $A^T Ax = A^T b$ *с положительно определенной симметричной матрицей. Однако матрица* $A^T A$ *является, вообще говоря, значительно хуже обусловленной, чем матрица* A*. Поэтому практическое значение такого преобразования системы невелико.*

3.3. Алгоритмы основных (простейших) итерационных методов

1) Метод релаксации (ослабления). Алгоритм метода релаксации задается формулой

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \tau \cdot \left(b - Ax^{(n)}\right), \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$$B = I - \tau \cdot A, \qquad c = \tau b,$$

или (см. (28))

$$\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\tau} + Ax^{(n)} = b \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$$S = I, \qquad \tau > 0.$$

Метод релаксации сходится для симметричной положительно определенной матрицы A при $0 < \tau < 2/\|A\|$.

2) Метод Якоби. Алгоритм метода Якоби задается формулой

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + D^{-1}\left(b - Ax^{(n)}\right), \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$$D = diag\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}\right), \;\; a_{ii} \neq 0, \;\; i = 1,\ldots,m,$$

$$B = I - D^{-1}A, \qquad c = D^{-1}b,$$

или (см. (28))

$$D \cdot \left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right) + Ax^{(n)} = b \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$$S = D, \qquad \tau = 1.$$

Метод Якоби сходится, если матрица A имеет преобладающую главную диагональ:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left|a_{ij}\right|.$$

3) Метод Зейделя. Представим матрицу A в виде

$$A = A_L + D + A_U, \qquad (29)$$

где

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,m-1} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}), \ a_{ii} \neq 0, \ i = 1, \dots, m.$$

Алгоритм метода Зейделя записывается в виде (см. (29)):

$$(A_L + D)x^{(n+1)} + A_U x^{(n)} = b, \qquad n = 0,1,\dots,$$

$$B = -(A_L + D)^{-1} A_U, \qquad c = (A_L + D)^{-1} b,$$

или (см. (28))

$$(A_L + D)\cdot\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right) + Ax^{(n)} = b, \qquad n = 0,1,\dots,$$

$$S = A_L + D, \qquad \tau = 1.$$

Метод Зейделя неявный, но матрица $A_L + D$ легко обратима. Отсюда получаем вычислительные формулы алгоритма метода Зейделя:

$$x_k^{(n+1)} = \frac{1}{a_{kk}}\left(-\sum_{j>k} a_{kj}^{(n+1)} - \sum_{j<k} a_{kj}^{(n)} + b_k \right), \qquad k = 1, \dots, m.$$

По теореме 2 метод Зейделя сходится тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы $B = -(A_L + D)^{-1} A_U = I - (A_L + D)^{-1} A$

по модулю меньше единицы. Нетрудно проверить, что эти собственные значения являются корнями уравнения $\det\left(A_L + D + \lambda A_U\right) = 0.$

Метод Зейделя сходится, если матрица A имеет преобладающую главную диагональ.

Если матрица A симметричная и положительно определенная, то метод Зейделя является сходящимся. Следовательно, метод Зейделя всегда сходится для эквивалентной системы $A^T Ax = A^T b.$

4) Метод верхней релаксации. В обозначениях (29) алгоритм метода верхней релаксации задается формулой (см. (28))

$$\left(D + \omega A_L\right)\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\omega} + Ax^{(n)} = b \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$$S = D + \omega A_L, \qquad \tau = \omega > 0,$$

или (см. (27))

$$x^{(n+1)} = \left(I - \left(D + \omega A_L\right)^{-1} \cdot \omega A\right)x^{(n)} + \omega\left(D + A_L\right)^{-1} b,$$

$$n = 0,1,\ldots,$$

$$B = I - \left(D + \omega A_L\right)^{-1} \cdot \omega A = \left(D + \omega A_L\right)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega A_U\right),$$

$$c = \omega\left(D + A_L\right)^{-1} b.$$

При $\omega = 1$ отсюда получаем метод Зейделя.

Если матрица A симметричная и положительно определенная, то метод верхней релаксации является сходящимся при $0 < \omega < 2$.

4. Итерационное уточнение решения

Пусть $x^{(N)}$ - реально вычисленное (любым способом, например, методом Гаусса) решение системы (1). Запишем точное решение $\hat{x}$

системы (1) в виде $\hat{x} = x^{(N)} + \Delta^{(N)}$. Подставив это выражение в (1), получим

$$A\Delta^{(N)} = r^{(N)}, \qquad (30)$$

где $r^{(N)} = b - Ax^{(N)}$. Вектор $r^{(N)}$ называется невязкой. Теперь, решая систему (30), найдем поправку $\Delta^{(N)}$. Следующее приближение к точному решению системы (1) получается как $x^{(N+1)} = x^{(N)} + \tilde{\Delta}^{(N)}$, где $\tilde{\Delta}^{(N)}$ - реально вычисленное решение системы (30). Затем вычисляем невязку $r^{(N+1)} = b - Ax^{(N+1)}$ и вторую поправку к точному решению $\Delta^{(N+1)}$ как решение системы (30) с правой частью $r^{(N+1)}$. Вторым приближением к решению будет вектор $x^{(N+2)} = x^{(N+1)} + \tilde{\Delta}^{(N+1)}$ и так далее.

Будем считать, что численный метод решения системы (30) и применяемая машинная арифметика вычисления невязки таковы, что реальная поправка $\tilde{\Delta}^{(N)}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\left\|\Delta^{(N)} - \tilde{\Delta}^{(N)}\right\|_e}{\left\|\Delta^{(N)}\right\|_e} \le \theta,$$

где θ заметно меньше единицы. Основная трудность в удовлетворении этого условия связана со способом вычисления невязки. Если $x^{(N)}$ достаточно близко к точному решению, то невязка мала и ее вычисление приводит к большим относительным ошибкам. Кроме того, малость невязки может привести к значительной потере точности при вычислении поправки $\Delta^{(N)}$ (вычисления вблизи машинного нуля). Поэтому обычно поступают следующим образом:

1) Вычисляют невязку с удвоенной точностью.

2) Нормируют невязку.
3) Решают систему (30).
4) Умножают вычисленную поправку на величину обратную нормирующему множителю.

Процесс уточнения решения тем эффективнее, чем меньше θ. Обычно достаточно провести 2-3 итерации, чтобы достичь нужной точности.

Замечание 12. *При последовательном выполнении процесса уточнения решения* 1)-4) *нет никаких оснований ожидать существенного уменьшения норм невязок. Более того, нормы невязок на некоторых шагах могут даже несколько увеличиться. Несмотря на это точность последовательных приближений* $x^{(N)}$ *повышается.*

Описанный процесс уточнения связан с устранением влияния обусловленности матрицы исходной системы на погрешность в решении.

Задание. Найдите решение системы линейных уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ методами Гаусса, простой итерации и Зейделя.

Варианты заданий

Номер	**Матрица**	**Вектор**

Номер	**Матрица**	**Вектор**
1	27.70153 2.71425 -0.85915 0.99784 -0.78454 -1.85121 34.29314 2.11113 4.53818 -0.66302 -0.18283 1.68413 24.80947 3.07213 3.91096 -3.82808 3.08101 2.52143 31.08655 1.41026 -1.80561 3.17782 2.32840 -2.29968 34.34837	2.06829 0.11903 4.44773 -3.16207 0.84720
2	28.07253 2.75060 -0.87066 1.01121 -0.79505 -1.87601 34.75242 2.13941 4.59896 -0.67190 -0.18528 1.70669 25.14174 3.11327 3.96334 -3.87935 3.12227 2.55520 31.50288 1.42915 -1.82980 3.22038 2.35959 -2.33048 34.80840	4.50730 -3.20442 0.85854 2.09599 0.12062
3	28.44353 2.78695 -0.88216 1.02457 -0.80556 -1.90080 35.21171 2.16768 4.65974 -0.68078 -0.18773 1.72924 25.47401 3.15442 4.01572 -3.93062 3.16353 2.58897 31.91922 1.44804 -1.85398 3.26294 2.39077 -2.36128 35.26842	2.12369 0.12222 4.56687 -3.24677 0.86989
4	28.81453 2.82330 -0.89367 1.03793 -0.81607 -1.92559 35.67099 2.19596 4.72052 -0.68966 -0.19017 1.75180 25.80628 3.19556 4.06810 -3.98189 3.20480 2.62274 32.33556 1.46693 -1.87816 3.30550 2.42195 -2.39208 35.72844	2.15139 0.12381 4.62644 -3.28912 0.88124

Номер	**Матрица**	**Вектор**
5	29.55654 2.89600 -0.91668 1.06466 -0.83708 -1.97518 36.58956 2.25250 4.84208 -0.70742 -0.19507 1.79691 26.47082 3.27785 4.17286 -4.08443 3.28733 2.69027 33.16823 1.50470 -1.92653 3.39062 2.48432 -2.45368 36.64849	2.20679 0.12700 4.74557 -3.37381 0.90393
6	29.92754 2.93236 -0.92819 1.07803 -0.84759 -1.99997 37.04884 2.28078 4.90286 -0.71630 -0.19752 1.81946 26.80309 3.31899 4.22524 4.13570 3.32859 2.72404 33.58457 1.52359 -1.95071 3.43318 2.51551 -2.48448 37.10851	2.23449 0.12859 -4.80514 -3.41616 0.91527
7	30.29854 2.96871 -0.93970 1.09139 -0.85809 -2.02477 37.50812 2.30905 4.96364 -0.72518 -0.19997 1.84202 27.13536 3.36014 4.27761 -4.18696 3.36985 2.75781 34.00091 1.54248 -1.97489 3.47574 2.54669 -2.51528 37.56853	2.26219 0.13019 4.86471 -3.45851 0.92662
8	30.66955 3.00506 -0.95120 1.10475 -0.86860 -2.04956 37.96740 2.33733 5.02442 -0.73406 -0.20242 1.86458 27.46763 3.40128 4.32999 -4.23823 3.41112 2.79158 34.41725 1.56136 -1.99907 3.51830 2.57787 -2.54608 38.02856	2.28989 0.13178 4.92428 -3.50086 0.93797

Номер	**Матрица**	**Вектор**
9	31.04055 3.04141 -0.96271 1.11812 -0.87911 -2.07435 38.42669 2.36560 5.08520 -0.74293 -0.20487 1.88713 27.79990 3.44243 4.38237 -4.28950 3.45238 2.82535 34.83359 1.58025 -2.02325 3.56086 2.60906 -2.57688 38.48858	2.31759 0.13338 4.98384 -3.54321 0.94931
10	17.26399 1.69156 -0.53544 0.62187 -0.48894 -1.15370 21.37197 1.31569 2.82826 -0.41320 -0.11394 1.04958 15.46162 1.91459 2.43737 -2.38572 1.92013 1.57139 19.37358 0.87890 -1.12528 1.98046 1.45109 -1.43320 21.40640	1.28899 0.07418 2.77189 -1.97065 0.52798
11	17.63499 1.72791 -0.54694 0.63523 -0.49945 -1.17850 21.83126 1.34396 2.88904 -0.42208 -0.11639 1.07213 15.79389 1.95574 2.48975 -2.43698 1.96139 1.60516 19.78992 0.89778 -1.14947 2.02302 1.48228 -1.46400 21.86642	1.31669 0.07577 2.83146 -2.01300 0.53933
12	18.00599 1.76426 -0.55845 0.64860 -0.50995 -1.20329 22.29054 1.37224 2.94982 -0.43096 -0.11884 1.09469 16.12616 1.99688 2.54213 -2.48825 2.00266 1.63893 20.20626 0.91667 -1.17365 2.06558 1.51346 -1.49480 22.32644	1.34439 0.07737 2.89103 -2.05534 0.55068

Номер	Матрица	Вектор
13	18.37699 1.80061 -0.56996 0.66196 -0.52046 -1.22808 22.74982 1.40051 3.01060 -0.43984 -0.12129 1.11724 16.45843 2.03803 2.59450 -2.53952 2.04392 1.67270 20.62259 0.93556 -1.19783 2.10814 1.54464 -1.52559 22.78647	1.37209 0.07896 2.95059 -2.09769 0.56202
14	18.74800 1.83696 -0.58146 0.67532 -0.53097 -1.25288 23.20911 1.42878 3.07138 -0.44872 -0.12374 1.13980 16.79070 2.07917 2.64688 -2.59079 2.08518 1.70647 21.03893 0.95445 -1.22201 2.15070 1.57583 -1.55639 23.24649	1.39979 0.08056 3.01016 -2.14004 0.57337
15	19.11900 1.87332 -0.59297 0.68869 -0.54147 -1.27767 23.66839 1.45706 3.13216 -0.45760 -0.12618 1.16235 17.12297 2.12032 2.69926 -2.64206 2.12645 1.74024 21.45527 0.97333 -1.24620 2.19326 1.60701 -1.58719 23.70651	1.42749 0.08215 3.06973 -2.18239 0.58472
16	19.49000 1.90967 -0.60447 0.70205 -0.55198 -1.30246 24.12767 1.48533 3.19294 -0.46648 -0.12863 1.18491 17.45524 2.16146 2.75164 -2.69333 2.16771 1.77400 21.87161 0.99222 -1.27038 2.23582 1.63820 -1.61799 24.16653	1.45519 0.08374 3.12930 -2.22474 0.59606

Номер	Матрица	Вектор
17	19.86100 1.94602 -0.61598 0.71542 -0.56249 -1.32725 24.58696 1.51361 3.25372 -0.47536 -0.13108 1.20746 17.78751 2.20260 2.80402 -2.74460 2.20897 1.80777 22.28794 1.01111 -1.29456 2.27838 1.66938 -1.64879 24.62656	1.48289 0.08534 3.18887 -2.26709 0.60741
18	22.70536 2.22471 -0.70420 0.81787 -0.64305 -1.51733 28.10813 1.73037 3.71969 -0.54344 -0.14985 1.38039 20.33491 2.51805 3.20559 -3.13766 2.52533 2.06667 25.47987 1.15591 -1.47996 2.60468 1.90846 -1.88492 28.15340	1.69526 0.09756 3.64555 -2.59177 0.69440
19	23.44736 2.29742 -0.72721 0.84460 -0.66406 -1.56692 29.02669 1.78692 3.84125 -0.56120 -0.15475 1.42550 20.99945 2.60034 3.31035 -3.24020 2.60785 2.13421 26.31254 1.19369 -1.52832 2.68980 1.97083 -1.94652 29.07344	1.75066 0.10075 3.76469 -2.67646 0.71709
20	23.81837 2.33377 -0.73872 0.85797 -0.67457 -1.59171 29.48598 1.81520 3.90203 -0.57008 -0.15720 1.44805 21.33172 2.64148 3.36273 -3.29147 2.64912 2.16798 26.72888 1.21258 -1.55251 2.73236 2.00201 -1.97732 29.53347	1.77836 0.10234 3.82426 -2.71881 0.72844

Номер	**Матрица**					**Вектор**
21	24.18937	2.37012	-0.75022	0.87133	-0.68507	1.80606
	-1.61651	29.94526	1.84347	3.96281	-0.57896	0.10394
	-0.15965	1.47061	21.66399	2.68262	3.41511	3.88382
	-3.34274	2.69038	2.20175	27.14522	1.23146	-2.76116
	-1.57669	2.77492	2.03319	-2.00812	29.99349	0.73978
22	24.56037	2.40647	-0.76173	0.88469	-0.69558	1.83376
	-1.64130	30.40454	1.87175	4.02359	-0.58784	0.10553
	-0.16210	1.49316	21.99626	2.72377	3.46749	3.94339
	-3.39400	2.73164	2.23552	27.56155	1.25035	-2.80351
	-1.60087	2.81748	2.06438	-2.03892	30.45351	0.75113
23	24.93137	2.44282	-0.77324	0.89806	-0.70609	1.86146
	-1.66609	30.86383	1.90002	4.08437	-0.59672	0.10713
	-0.16455	1.51572	22.32853	2.76491	3.51987	4.00296
	-3.44527	2.77291	2.26929	27.97789	1.26924	-2.84586
	-1.62505	2.86004	2.09556	-2.06972	30.91354	0.76248
24	25.30238	2.47917	-0.78474	0.91142	-0.71660	1.88916
	-1.69089	31.32311	1.92829	4.14514	-0.60560	0.10872
	-0.16699	1.53827	22.66080	2.80606	3.57224	4.06253
	-3.49654	2.81417	2.30305	28.39423	1.28813	-2.88821
	-1.64923	2.90260	2.12675	-2.10052	31.37356	0.77382

Номер	**Матрица**	**Вектор**
25	25.57444 2.50583 -0.79318 0.92122 -0.72430 -1.70907 31.65992 1.94903 4.18972 -0.61211 -0.16879 1.55482 22.90446 2.83623 3.61066 -3.53414 2.84443 2.32782 28.69954 1.30198 -1.66697 2.93381 2.14961 -2.12310 31.71091	1.90947 0.10989 4.10621 -2.91927 0.78214
26	25.94545 2.54218 -0.80469 0.93459 -0.73481 -1.73386 32.11920 1.97730 4.25050 -0.62099 -0.17124 1.57737 23.23673 2.87738 3.66303 -3.58541 2.88569 2.36159 29.11588 1.32086 -1.69115 2.97637 2.18080 -2.15390 32.17093	1.93717 0.11148 4.16578 -2.96162 0.79349
27	26.31645 2.57853 -0.81619 0.94795 -0.74532 -1.75865 32.57848 2.00558 4.31127 -0.62987 -0.17369 1.59993 23.56900 2.91852 3.71541 -3.63668 2.92696 2.39536 29.53222 1.33975 -1.71533 3.01893 2.21198 -2.18470 32.63095	1.96487 0.11308 4.22535 -3.00396 0.80484
28	26.68745 2.61489 -0.82770 0.96131 -0.75582 -1.78345 33.03777 2.03385 4.37205 -0.63875 -0.17614 1.62248 23.90127 2.95966 3.76779 -3.68795 2.96822 2.42913 29.94856 1.35864 1.73952 3.06149 2.24317 -2.21550 33.09098	1.99257 -04.2849 -1.11467 3.04631 0.81618

Номер	**Матрица**					**Вектор**
29	26.98425	2.64397	-0.83691	0.97200	-0.76423	2.01473
	-1.80328	33.40519	2.05647	4.42068	-0.64585	0.11595
	-0.17809	1.64053	24.16708	2.99258	3.80970	4.33257
	-3.72896	3.00123	2.45614	30.28163	1.37375	-3.08019
	-1.75886	3.09554	2.26811	-2.24014	33.45900	0.82526
30	27.35526	2.68032	-0.84841	0.98537	-0.77474	2.04243
	-1.82807	33.86448	2.08474	4.48146	-0.65473	0.11754
	-0.18054	1.66308	24.49935	3.03372	3.86207	4.39214
	-3.78023	3.04250	2.48991	30.69796	1.39264	-3.12254
	-1.78304	3.13810	2.29930	-2.27094	33.91902	0.83661
31	27.72626	2.71667	-0.85992	0.99873	-0.78524	2.07013
	-1.85287	34.32376	2.11302	4.54224	-0.66361	0.11913
	-0.18299	1.68564	24.83162	3.07487	3.91445	4.45170
	-3.83150	3.08376	2.52368	31.11430	1.41152	-3.16489
	-1.80723	3.18066	2.33048	-2.30174	34.37904	0.84795
32	28.09726	2.75302	-0.87143	1.01210	-0.79575	2.09783
	-1.87766	34.78304	2.14129	4.60302	-0.67249	0.12073
	-0.18544	1.70819	25.16389	3.11601	3.96683	4.51127
	-3.88277	3.12502	2.55745	31.53064	1.43041	-3.20724
	-1.83141	3.22322	2.36166	-2.33254	34.83906	0.85930

Номер	Матрица					Вектор
33	28.46826	2.78937	-0.88293	1.02546	-0.80626	2.12553
	-1.90245	35.24233	2.16957	4.66379	-0.68137	0.12232
	-0.18789	1.73075	25.49616	3.15716	4.01921	4.57084
	-3.93404	3.16629	2.59122	31.94698	1.44930	-3.24959
	-1.85559	3.26578	2.39285	-2.36334	35.29909	0.87065
34	27.45419	2.69001	-0.85148	0.98893	-0.77754	2.04982
	-1.83469	33.98695	2.09228	4.49766	-0.65710	0.11797
	-0.18120	1.66910	24.58796	3.04470	3.87604	4.40802
	-3.79390	3.05350	2.49892	30.80899	1.39767	-3.13384
	-1.78949	3.14945	2.30761	-2.27915	34.04169	0.83963
35	27.82519	2.72636	-0.86299	1.00230	-0.78805	2.07752
	-1.85948	34.44623	2.12056	4.55844	-0.66598	0.11956
	-0.18365	1.69165	24.92023	3.08584	3.92842	4.46759
	-3.84517	3.09476	2.53268	31.22533	1.41656	-3.17618
	-1.81367	3.19201	2.33880	-2.30995	34.50171	0.85098
36	28.19620	2.76272	-0.87449	1.01566	-0.79855	2.10522
	-1.88427	34.90552	2.14883	4.61922	-0.67486	0.12115
	-0.18609	1.71421	25.25250	3.12699	3.98080	4.52716
	-3.89644	3.13603	2.56645	31.64166	1.43545	-3.21853
	-1.83786	3.23457	2.36998	-2.34075	34.96174	0.86232

Номер	Матрица	Вектор
37	28.56720 2.79907 -0.88600 1.02902 -0.80906 -1.90906 35.36480 2.17711 4.68000 -0.68374 -0.18854 1.73676 25.58477 3.16813 4.03318 -3.94771 3.17729 2.60022 32.05800 1.45434 -1.86204 3.27713 2.40116 -2.37155 35.42176	2.13292 0.12275 4.58672 -3.26088 0.87367
38	28.93820 2.83542 -0.89751 1.04239 -0.81957 -1.93386 35.82408 2.20538 4.74078 -0.69262 -0.19099 1.75932 25.91704 3.20927 4.08556 -3.99898 3.21855 2.63399 32.47434 1.47322 -1.88622 3.31969 2.43235 -2.40235 35.88178	2.16062 0.12434 4.64629 -3.30323 0.88502
39	28.93820 2.83542 -0.89751 1.04239 -0.81957 -1.93386 35.82408 2.20538 4.74078 -0.69262 -0.19099 1.75932 25.91704 3.20927 4.08556 -3.99898 3.21855 2.63399 32.47434 1.47322 -1.88622 3.31969 2.43235 -2.40235 35.88178	2.16062 0.12434 4.64629 -3.30323 0.88502
40	29.68021 2.90812 -0.92052 1.06912 -0.84058 -1.98344 36.74265 2.26193 4.86234 -0.71038 -0.19589 1.80443 26.58158 3.29156 4.19032 -4.10152 3.30108 2.70153 33.30701 1.51100 -1.93459 3.40481 2.49472 -2.46395 36.80183	2.21602 0.12753 4.76543 -3.38793 0.90771

Номер	**Матрица**					**Вектор**
41	30.05121	2.94447	-0.93203	1.08248	-0.85109	2.24372
	-2.00824	37.20193	2.29020	4.92312	-0.71926	0.12912
	-0.19834	1.82698	26.91385	3.33271	4.24269	4.82500
	-4.15278	3.34234	2.73530	33.72335	1.52989	-3.43028
	-1.95877	3.44737	2.52590	-2.49475	37.26185	0.91906
42	24.28830	2.37981	-0.75329	0.87489	-0.68788	1.81344
	-1.62312	30.06774	1.85101	3.97901	-0.58132	0.10436
	-0.16030	1.47662	21.75259	2.69360	3.42908	3.89971
	-3.35641	2.70138	2.21075	27.25624	1.23650	-2.77246
	-1.58314	2.78627	2.04151	-2.01633	30.11616	0.74281
43	28.24566	2.76756	-0.87603	1.01744	-0.79995	2.10891
	-1.88758	34.96676	2.15260	4.62733	-0.67604	0.12137
	-0.18642	1.71721	25.29680	3.13247	3.98778	4.53510
	-3.90328	3.14153	2.57096	31.69717	1.43797	-3.22418
	-1.84108	3.24024	2.37414	-2.34486	35.02307	0.86384
44	28.61667	2.80391	-0.88753	1.03081	-0.81046	2.13661
	-1.91237	35.42604	2.18088	4.68811	-0.68492	0.12296
	-0.18887	1.73977	25.62907	3.17362	4.04016	4.59467
	-3.95455	3.18279	2.60473	32.11351	1.45685	-3.26653
	-1.86526	3.28280	2.40532	-2.37566	35.48310	0.87518

Номер	Матрица	Вектор
45	28.98767 2.84027 -0.89904 1.04417 -0.82097 -1.93716 35.88532 2.20915 4.74889 -0.69380 -0.19132 1.76232 25.96134 3.21476 4.09254 -4.00581 3.22405 2.63849 32.52985 1.47574 -1.88945 3.32536 2.43651 -2.40646 35.94312	2.16431 0.12455 4.65423 -3.30888 0.88653
46	29.35867 2.87662 -0.91055 1.05753 -0.83148 -1.96196 36.34460 2.23742 4.80966 -0.70268 -0.19377 1.78488 26.29361 3.25591 4.14492 -4.05708 3.26532 2.67226 32.94619 1.49463 -1.91363 3.36792 2.46769 -2.43726 36.40314	2.19202 0.12615 4.71380 -3.35123 0.89788
47	29.72967 2.91297 -0.92205 1.07090 -0.84198 -1.98675 36.80389 2.26570 4.87044 -0.71156 -0.19621 1.80744 26.62588 3.29705 4.19730 -4.10835 3.30658 2.70603 33.36253 1.51352 -1.93781 3.41048 2.49887 -2.46805 36.86316	2.21972 0.12774 4.77337 -3.39358 0.90922