

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ
МНОГОЧЛЕНАМИ.
СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ**

Учебно-методическое пособие
для практических занятий в вузах

Составители:
А.П. Карпова,
М.Н. Небольсина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
30 ноября 2011 г., протокол № 0500-09

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Воронежского государственного архитектурно-строительного университета В.П. Трофимов

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 4-го курса дневного отделения и 5-го курса вечернего отделения математического факультета.

Для направлений: 010100 – Математика, 010200 – Математика. Прикладная математика; специальности 010101 – Математика

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Интерполяция алгебраическими многочленами

1. 1. Постановка задачи интерполяции

Пусть для функции $f: X \rightarrow R$, $X \subset R$ известны ее значения в $(n + 1)$ -й точках $x_j \in X$, $i = 0, \dots, n$. Запишем эти значения функции f в табл. 1.1.

Таблица 1.1

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_n)$

Далее будем считать, что выполнено условие

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Задача приближенного вычисления для заданной табл. 1.1 значения функции $f(x)$ при $x \neq x_j$, $i = 0, \dots, n$ называется **задачей интерполяции** (распространения внутрь).

Решение этой задачи можно найти следующим образом: строится алгебраический многочлен степени не выше n

$$P_n(x; x_0, x_1, \dots, x_n; f) = P_n(x; f), \quad (1.1)$$

принимаящий в точках x_0, x_1, \dots, x_n те же значения, что и функция f :

$$f(x_i) = P_n(x_i; f), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Интерполяционным многочленом (интерполянт) для табл. 1.1 называется многочлен (1.1) степени не выше n , удовлетворяющий условию (1.2). Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются **узлами интерполяции**.

Вычисление значения $f(x)$ при $x \neq x_j$, $i = 0, \dots, n$ по формуле

$$f(x) \approx P_n(x; f) \quad (1.3)$$

называется **интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена**.

Замечание 1.1. Если $x \notin [a, b]$, то вычисление $f(x)$ с помощью (1.3) называют **экстраполяцией**.

Теорема 1.1. Для табл. 1.1 интерполяционный многочлен существует и единственен.

Для табл. 1.1 с равноотстоящими узлами $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h > 0$ введем в рассмотрение **конечные разности** функции f .

Обозначим $f_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$. Величину

$$\Delta f(x_k) = \Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k$$

назовем **конечной разностью первого порядка** функции f в точке $x_k = x_0 + kh$.

Конечной разностью второго порядка функции f в точке x_k назовем величину

$$\Delta^2 f(x_k) = \Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}.$$

Если известны **конечные разности m -го порядка**, то **конечная разность $(m+1)$ -го порядка** функции f в точке x_k определяется как

$$\Delta^{m+1} f(x_k) = \Delta^{m+1} f_k = \Delta(\Delta^m f_k) = \Delta^m f_{k+1} - \Delta^m f_k,$$

где $m \geq 1, \Delta^0 f_k = f_k$.

Замечание 1.2. При малых $\Delta x = h = x_{i+1} - x_i$ справедлива приближенная формула $f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$.

Для табл. 1.1 можно построить таблицу конечных разностей (табл. 1.2)

Таблица 1.2

Узлы	Конечные разности					
	0-го порядка	1-го порядка	2-го порядка	...	$(n-1)$ -го порядка	n -го порядка
x_0	f_0					
x_1	f_1	Δf_0	$\Delta^2 f_0$			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$...		
...		
				...	$\Delta^{n-1} f_0$	
				...	$\Delta^{n-1} f_1$	$\Delta^n f_0$
...		
x_{n-1}	f_{n-1}		$\Delta^2 f_{n-2}$			
x_n	f_n	Δf_{n-1}				
Число разностей	$n+1$	n	$n-1$...	2	1

Обобщенной степенью n числа x называется произведение n сомножителей: $x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h)$, $x^{[0]} = 1$.

$$\Delta x^{[n]} = (x-h)^{[n]} - x^{[n]} = nhx^{[n-1]}, \quad \Delta^k x^{[n]} = 0 \text{ при } k > n.$$

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))h^k \Delta^k x^{[n-k]} \text{ при } k < n.$$

1.2. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной: $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где h – шаг интерполяции. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в точках x_i значения

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

Условия (1.4) эквивалентны тому, что $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ при $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Следуя Ньютону, будем искать полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Пользуясь обобщенной степенью, последнее выражение запишем так:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \\ + a_3(x - x_0)^{[3]} + \dots + a_n(x - x_0)^{[n]}. \quad (1.5)$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) полинома $P_n(x)$. Полагая $x = x_0$ в выражении (1.5), получим

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0.$$

Чтобы найти коэффициент a_1 , составим первую конечную разность

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]}h + 3a_3(x - x_0)^{[2]}h + \\ + \dots + na_n(x - x_0)^{[n-1]}h.$$

Полагая в последнем выражении $x = x_0$, получим

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h, \text{ откуда } a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}.$$

Последовательно продолжая этот процесс, мы обнаружим, что $a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), где $0! = 1$ и $\Delta^0 y = y$.

Подставляя найденные значения коэффициентов a_i в выражение (1.5), получим **интерполяционный полином Ньютона**

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]}. \quad (1.6)$$

Для практического использования интерполяционную формулу Ньютона обычно записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введем новую переменную q по формуле $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Получим

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (1.7)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$ представляет собой число шагов, необходимых для достижения точки x исходя из точки x_0 . Это и есть окончательный вид **первой интерполяционной формулы Ньютона**.

Формулу (1.7) выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения x_0 , где q мало по абсолютной величине.

Если в формуле (1.7) положить $n = 1$, то получим формулу **линейного интерполирования**: $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$.

При $n = 2$ будем иметь **формулу параболического, или квадратичного, интерполирования**: $P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$.

Остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и рассматриваемой точкой x .

1.3. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функции вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть имеем систему значений функции $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) для равноотстоящих значений аргумента $x_i = x_0 + ih$.

Построим интерполирующий полином следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Или, используя обобщенную степень, получаем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} + a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \dots + a_n(x - x_1)^{[n]}.$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) полинома $P_n(x)$.

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Подставляя эти значения, получим

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ & + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3! h^3} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n) \dots (x - x_1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Это **вторая интерполяционная формула Ньютона**. Введем более удобную запись формулы (1.8). Пусть $q = \frac{x - x_n}{h}$. Получим

$$P_n(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Это и есть обычный вид **второй интерполяционной формулы Ньютона**.

Остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и рассматриваемой точкой x .

Замечание. 1.3. Как первая, так и вторая, обе интерполяционные формулы Ньютона могут быть использованы для экстраполирования функ-

ции, т.е. нахождения значений функции y для значений аргументов x , лежащих вне пределов таблицы. Если $x < x_0$ и x близко к x_0 , то применяют первую интерполяционную формулу Ньютона, причем тогда $q = \frac{x-x_0}{h} < 0$. Если $x > x_n$ и x близко к x_n , то применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона, причем тогда $q = \frac{x-x_n}{h} > 0$.

1.4. Центральные разности

При построении интерполяционных формул Ньютона используются лишь значения функции, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения, т.е. эти формулы носят односторонний характер.

Введем понятие центральных разностей. Это разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы разностей данной функции, соответствующей начальным значениям x_0 и y_0 , или в строках, непосредственно примыкающих к ней. Это разности Δy_{-1} , Δy_0 , $\Delta^2 y_{-1}$, ... в табл. 1.3.

Таблица 1.3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
	y_{-4}						
x_{-4}		Δy_{-4}					
	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
x_{-3}		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
x_{-2}		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
x_{-1}		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
x_0		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
x_1		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
x_2		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
	y_3		$\Delta^2 y_2$				
x_3		Δy_3					
	y_4						

1.5. Интерполяционные формулы Гаусса

Пусть имеется $2n + 1$ равноотстоящих узлов интерполирования

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ ($i = -n, -(n-1), \dots, n-1$),

и для функции $y = f(x)$ известны ее значения в этих узлах

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, \pm 1, \dots, \pm n).$$

Требуется построить полином $P(x)$ степени не выше $2n$ такой, что

$$P(x_i) = y_i \text{ при } i = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Будем искать этот полином в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} + \dots + a_{2n-1}(x - x_{-(n-1)})^{[2n-1]} + a_{2n}(x - x_{-(n-1)})^{[2n]}.$$

Применяя для вычисления коэффициентов a_i ($i = 0, 1, \dots, 2n$) тот же способ, что и при выводе интерполяционных формул Ньютона, и учитывая формулу $\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i$, последовательно находим:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3}, \\ a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}, \dots, \quad a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!h^{2n-1}}, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}.$$

Далее, введя переменную $q = \frac{x-x_0}{h}$ и сделав замену, получим первую интерполяционную формулу Гаусса

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots \\ \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \quad (1.9)$$

Первая интерполяционная формула Гаусса содержит центральные разности

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Аналогично можно получить вторую интерполяционную формулу Гаусса

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \quad (1.10)$$

в которую входят центральные разности

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

1.6. Интерполяционная формула Стирлинга

Взяв среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса, получим формулу Стирлинга

$$P(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\ + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots + \\
& + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \dots [q^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} \times \\
& \quad \times \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \\
& + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \dots [q^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n},
\end{aligned}$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Легко видеть, что $P(x_i) = y_i$ при $i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

Если $2n$ – порядок максимальной используемой разности таблицы и $x \in [x_0 - nh, x_0 + nh]$, то остаточный член интерполяционной формулы Стирлинга

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \dots (q^2 - n^2),$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$, $\xi \in [x_0 - nh, x_0 + nh]$.

Если же аналитическое выражение функции $f(x)$ неизвестно, то при h малом полагают

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \dots (q^2 - n^2).$$

1.7. Интерполяционная формула Бесселя

Для вывода этой формулы воспользуемся второй интерполяционной формулой Гаусса.

Возьмем $2n + 2$ равноотстоящих узлов интерполирования

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$$

с шагом h , и пусть $y_i = f(x_i)$ ($i = -n, \dots, n+1$) – заданные значения функции $y = f(x)$.

Выберем за начальные значения $x = x_1$, $y = y_1$ и используем узлы x_{1+k} ($k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$), тогда $\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q - 1$. Заменяем в правой части формулы Гаусса q на $q - 1$ и, увеличив индексы всех разностей на 1, получим вспомогательную формулу

$$\begin{aligned}
P(x) = & y_1 + (q-1)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
& + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)(q-3)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \dots \\
& \dots + \frac{(q+n-2)\dots(q-n)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Взяв среднее арифметическое этой формулы и формулы Гаусса, получим формулу Бесселя

$$\begin{aligned}
P(x) = & \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \\
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \cdot \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots \\
& \dots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} \\
& + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2) \dots (q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+2} y_{-n},
\end{aligned}$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Если $2n+1$ – порядок максимальной используемой разности таблицы и $x \in [x_0 - nh, x_0 + (n+1)h]$, то остаточный член интерполяционной формулы Бесселя

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \dots (q^2 - n^2)(q - (n+1)),$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \xi \in [x_0 - nh, x_0 + (n+1)h].$$

Если же функция $f(x)$ задана таблично и шаг h мал, то принимают

$$\begin{aligned}
R_n(x) \approx & \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+2)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)(q^2 - 3^2) \times \dots \\
& \dots \times (q^2 - n^2)(q^2 - (n+1)).
\end{aligned}$$

Замечание 1.4. При построении интерполяционных формул Ньютона в качестве x_0 выбирают первый или последний узел, для центральных формул начальным является средний. При $|q| \leq 0,25$ целесообразней применять формулу Стирлинга, а при $0,25 \leq q \leq 0,75$ – Бесселя.

2. Интерполяция сплайнами

2.1. Понятие сплайна

Возникает задача построения локального интерполанта, являющегося гладкой функцией на всем отрезке $[a, b]$. Эта задача решается с помощью сплайнов.

Термин сплайн (англ. *spline*) имеет техническое происхождение. Первоначально сплайнами называли длинные гибкие деревянные рейки, использовавшиеся английскими кораблестроителями для вычерчивания дета-

лей корпуса корабля в натуральную величину. Другими словами, сплайн был чертежным инструментом для построения гладких кривых.

В вычислительной математике под сплайном на отрезке $[a, b]$ понимают кусочно-полиномиальную функцию, гладкую на всем отрезке.

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Набор точек $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ принято называть **сеткой**.

Сплайном степени k порядка m на отрезке $[a, b]$, соответствующим сетке $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$, называется функция $\phi \in C^m[a, b]$, совпадающая на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ с многочленом

$$\phi(x) = \phi_j(x) = a_0^{[j]} + a_1^{[j]}x + \dots + a_k^{[j]}x^k \quad (2.1)$$

степени не выше k (рис. 2.1).

Из определения следует, что для многочленов (2.1), представляющих сплайн на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, имеет место равенство

$$\phi_j^{(i)}(x_j) = \phi_{j+1}^{(i)}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

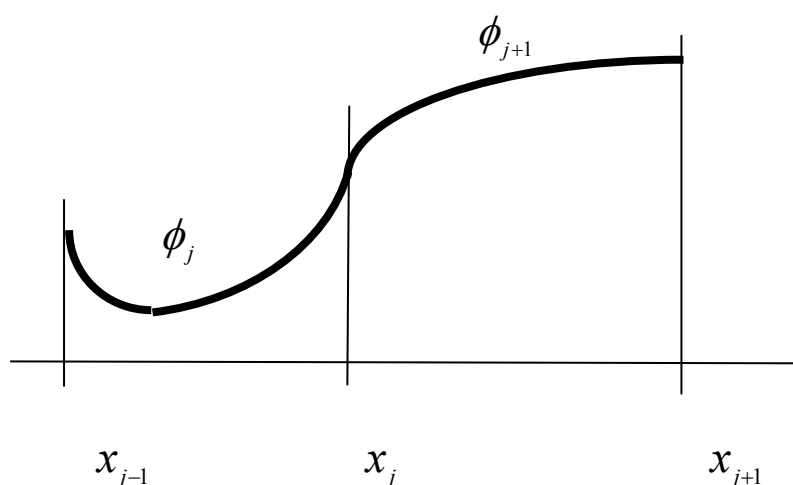


Рис. 2.1

Таким образом, сплайн – это функция, склеенная из многочленов $\phi_j(x)$ так, что в результате получается m раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$.

Для сплайнов степени k и порядка m на отрезке $[a, b]$ используется обозначение

$$S_k^m(x; \Delta_n) = S_k^m(x) = S_{k,d}(x),$$

где число $d = k - m$ называется **дефектом сплайна**.

Сплайн называется **интерполяционным** для заданной табл. 1.1, если

$$S_k^m(x; \Delta_n) = f(x_j), \quad (2.3)$$

где $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ – узлы интерполяции.

Интерполяция посредством сплайнов называется **сплайн-интерполяцией**.

Замечание 2.1. Непрерывная кусочно-линейная функция (ломаная) является сплайном первой степени нулевого порядка (дефект равен 1).

На практике чаще всего используются сплайны третьей степени второго порядка. Такие сплайны называют **кубическими**. Выбор значения гладкости $m = 2$ объясняется в том числе и тем, что при движении режущего инструмента в автоматизированных металлообрабатывающих комплексах по траектории, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой кривой, не должны возникать ударные нагрузки. В случае разрывов второй производной по второму закону Ньютона они появляются и могут привести к разрушению инструмента или дефектам обрабатываемой поверхности. При этом значение степени $k = 3$ является минимальным для обеспечения существования интерполяционного сплайна класса $C^2[a; b]$ для любой табл. 1.1.

2.2. Конструирование интерполяционного кубического сплайна

На частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$ локальное представление (2.1) кубического сплайна $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ имеет вид

$$\phi_j(x) = a_0^{[j]} + a_1^{[j]}x + a_2^{[j]}x^2 + a_3^{[j]}x^3, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Поэтому для задания сплайна требуется определить $4n$ неизвестных.

При этом должны быть выполнены условия:

1) интерполяционности ($2n$ уравнений)

$$\phi_j(x_{j-1}) = f(x_{j-1}), \quad \phi_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (2.5)$$

2) гладкости ($2n - 2$ уравнений)

$$\phi_j'(x_j) = \phi_{j+1}'(x_j), \quad \phi_j''(x_j) = \phi_{j+1}''(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.6)$$

Таким образом, для определения интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ имеем систему (2.5)–(2.6), состоящую из $4n - 2$ уравнений относительно $4n$ неизвестных. Для того чтобы получить систему, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, можно дополнительно задать два крайних условия. Наиболее часто используют следующие крайние условия:

1) $S_3''(x_0) = \delta_0, S_3''(x_n) = \delta_n$.

Если $\delta_0 = \delta_n = 0$, то сплайн называют **естественным сплайном**. Это условие соответствует ситуации, когда в точках $(x_0; f(x_0))$ и $(x_n; f(x_n))$ рейка (*spline*) закреплена шарнирно (может свободно поворачиваться вокруг этих точек). В этом случае конец рейки, расположенный левее x_0 (правее x_n), оказывается прямолинейным, следовательно на нем $\phi_1''(x) = 0, x \leq x_0$ ($\phi_n''(x) = 0, x \geq x_n$);

$$2) S_3''(x_0) = S_3''(x_1), S_3''(x_{n-1}) = S_3''(x_n).$$

В этом случае сплайн называют **сплайном с параболическими концевыми участками** и вторая производная сплайна на концевых частичных отрезках $[x_0, x_1]$ и $[x_{n-1}, x_n]$ есть константа (как линейная функция, принимающая в концевых точках отрезка равные значения). Это означает, что сплайн на концевых отрезках представляется многочленом второй степени (график такого многочлена – парабола).

$$3) S_3'(x_0) = \gamma_0, S_3'(x_n) = \gamma_n.$$

Это условие задает наклоны сплайна в концевых узлах. Такой сплайн называется **сплайном с жестко закрепленными концами**. Это соответствует ситуации, когда конец рейки (*spline*), расположенный левее x_0 (правее x_n), жестко закреплен под заданным углом к оси x .

Замечание 2.2. Система с одним из краевых условий 1), 2), 3) редко используется на практике для построения интерполяционного кубического сплайна из-за большого числа неизвестных.

2.3. Оптимальный способ построения кубического сплайна

Напомним, что для кубического сплайна вторая производная $S_3''(x)$ есть кусочно-линейная функция на отрезке $[a; b]$.

Обозначим для j -го частичного отрезка $[x_{j-1}; x_j]$ через $h_j = x_j - x_{j-1}$ его длину и положим $\alpha_{j-1} = \phi_j''(x_{j-1})$, $\alpha_j = \phi_j''(x_j)$. График $\phi_j''(x)$ есть прямая, проходящая через точки $(x_{j-1}; \alpha_{j-1})$ и $(x_j; \alpha_j)$. Имеем

$$\phi_j''(x) = \alpha_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + \alpha_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}. \quad (2.7)$$

Найдем теперь $\phi_j'(x)$ как первообразную для $\phi_j''(x)$ на $[x_{j-1}; x_j]$:

$$\phi_j'(x) = -\alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \beta_j. \quad (2.8)$$

Аналогично получим $\phi_j(x)$ как первообразную для $\phi_j'(x)$ на $[x_{j-1}; x_j]$:

$$\phi_j(x) = \alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \beta_j x + \gamma_j. \quad (2.9)$$

Значения β_j и γ_j нужно выбрать так, чтобы сплайн на концах отрезка $[x_{j-1}; x_j]$ принимал заданные условием интерполяции значения $f(x_{j-1})$ и $f(x_j)$ соответственно.

Полагая в (2.9) $x = x_{j-1}$ и $x = x_j$, получим систему уравнений относительно неизвестных β_j и γ_j :

$$\begin{cases} \alpha_{j-1} \frac{h_j^2}{6} + \beta_j x_{j-1} + \gamma_j = f(x_{j-1}), \\ \alpha_j \frac{h_j^2}{6} + \beta_j x_j + \gamma_j = f(x_j). \end{cases}$$

Найдем решение этой системы.

$$\beta_j = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

$$\gamma_j = \frac{f(x_{j-1})x_j - f(x_j)x_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_{j-1}x_j - \alpha_jx_{j-1}).$$

Подставив найденные выражения для β_j и γ_j в (2.8) и (2.9), имеем

$$\phi'_j(x) = -\alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_j(x) = & \alpha_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \alpha_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \\ & + \left[\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right] x + \\ & + \frac{f(x_{j-1})x_j - f(x_j)x_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(\alpha_{j-1}x_j - \alpha_jx_{j-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если известны $\alpha_{j-1} = \phi''_j(x_{j-1})$, $\alpha_j = \phi''_j(x_j)$, то полученные формулы (2.7), (2.10) и (2.11) позволяют вычислить значение интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ и его производных $S'_3(x)$, $S''_3(x)$ в любой точке отрезка $[x_{j-1}; x_j]$.

Теперь найдем $\alpha_j = \phi''_j(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Положим в (2.10) $x = x_j$ и воспользуемся условием $\phi'_j(x_j) = \phi'_{j+1}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ (см. (2.6)), получим систему линейных уравнений:

$$h_j\alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.12)$$

где

$$g_j = 6 \left[\frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_{j+1}} - \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} \right]. \quad (2.13)$$

Итак, доказана

Теорема 2.1. *Формулы (2.11) представляют для функции f (заданной табл. 1.1) интерполяционный кубический сплайн $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ тогда и только тогда, когда вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является решением системы (2.12)–(2.13).*

Система (2.12)–(2.13) содержит $n-1$ уравнение относительно $n+1$ неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. После добавления краевого условия 1) получаем систему из $n+1$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных.

Для краевых условий 1) система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_0 = \delta_0, \\ h_j\alpha_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})\alpha_j + h_{j+1}\alpha_{j+1} = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_n = \delta_n, \end{cases}$$

Матрица полученной системы уравнений для определения $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ оказывается трехдиагональной.

Замечание 2.3. Системы линейных уравнений с трехдиагональными матрицами эффективно решаются методом прогонки (специальная моди-

фикация метода Гаусса для решения систем линейных уравнений). Если трехдиагональная матрица имеет преобладающую главную диагональ, то ее определитель отличен от нуля.

Из замечания 2.3 немедленно следует

Теорема 2.2. *Интерполяционный кубический естественный сплайн $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ (удовлетворяющий условиям (2.5)–(2.6) и $S_3''(x_0)0$, $S_3''(x_n) = 0$) существует и единственен.*

Сформулируем без доказательства предложение, устанавливающее характер сходимости интерполяционного кубического естественного сплайна. Имеет место

Предложение 2.1. *Если $f \in C^{(4)}[a; b]$ и $\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^n$ – равномерная сетка с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, то для интерполяционного кубического естественного сплайна $S_3^2(x; \Delta_n) = S_3(x)$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f(x) - S_3(x)| &\leq c_0 h^4 M_4, \\ \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f'(x) - S_3'(x)| &\leq c_1 h^3 M_4, \\ \max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} |f''(x) - S_3''(x)| &\leq c_2 h^2 M_4, \end{aligned}$$

где $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.

Таким образом, для $f \in C^{(4)}[a; b]$ интерполяционный кубический естественный сплайн и его производные до второго порядка включительно на отрезке $[a; b]$ при $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) равномерно сходятся к интерполируемой функции f и ее производным соответственно.

Задание (по вариантам). С помощью интерполяционных многочленов Ньютона, Стирлинга и Бесселя найдите значение функции $f(x)$, заданной табл. 1, в точках x_1, x_2, x_3 (табл. 2). С помощью сплайн-интерполяции найдите значение данной функции в точке x_3 .

Вариант 1.

Таблица 1

Значения функции $f(x)$ в узлах сетки

Узлы сетки	Значение функции $f(x)$ в узлах
0,0	0,946083
0,1	1,028685
0,2	1,108047
0,3	1,183958
0,4	1,256227
0,5	1,324684
0,6	1,389181
0,7	1,449592
0,8	1,505817
0,9	1,557775

Таблица 2

Варианты задания точек x_1, x_2, x_3

Вариант	x_1	x_2	x_3
1	0,175118	0,715878	0,464331
2	0,090566	0,826611	0,395142
3	0,157369	0,826216	0,445135
4	0,053526	0,866027	0,610308
5	0,109658	0,710092	0,468515
6	0,094189	0,755627	0,343888
7	0,132747	0,755108	0,447232
8	0,058421	0,731564	0,429815
9	0,063946	0,907395	0,455020
10	0,182461	0,717093	0,525286
11	0,173762	0,759231	0,482714
12	0,129140	0,766507	0,238812

Вариант 2.

Таблица 1

Значения функции $f(x)$ в узлах сетки

Узлы сетки	Значение функции $f(x)$ в узлах
0,0	0,962852
0,1	1,044824
0,2	1,123512
0,3	1,198709
0,4	1,270228
0,5	1,337904
0,6	1,401593
0,7	1,461175
0,8	1,516552
0,9	1,567650

Таблица 2

Варианты задания точек x_1, x_2, x_3

Вариант	x_1	x_2	x_3
1	0,052914	0,882964	0,391986
2	0,147327	0,721404	0,355038
3	0,148489	0,822272	0,544808
4	0,070926	0,901307	0,213966
5	0,124548	0,769617	0,303341
6	0,009510	0,944211	0,417157
7	0,087996	0,778350	0,546174

Продолжение таблицы 2

Вариант	x_1	x_2	x_3
8	0,051598	0,709740	0,542017
9	0,083288	0,887929	0,517459
10	0,174607	0,902430	0,240569
11	0,172537	0,819656	0,698720
12	0,160270	0,851787	0,463563

ПРИЛОЖЕНИЕ

На первом этапе создается входной файл, содержащий значения функции в узлах интерполяции (эти значения берутся из табл. 1) и строится таблица конечных разностей. Значения этой таблицы обозначаются $fr[i,j]$ и являются входными для методов Ньютона, Стирлинга и Бесселя. Для кубического сплайна создается новый входной файл (содержащий число частичных отрезков, узлы интерполяции и значения функции в узлах).

Для выполнения задания можно использовать следующие процедуры-функции:

1. Процедура **newt**, реализующая алгоритм построения первой интерполяционной формулы Ньютона:

```
function newt(m,k:integer; x:real):real;
```

{Входные параметры: m — степень интерполяционного многочлена, k — номер ближайшего узла, x — точка, в которой ищем значение интерполяционного многочлена}.

```
var
    i :integer;
    y,z,q :real;
begin
    y:=fr[k,1]; q:=x*10-k+1;
    z:=1;
    for i:=1 to m do begin
        z:=z*(q-i+1)/i;
        y:=y+z*fr[k,i+1]
    end;
    newt:=y
end.
```

Здесь q — число шагов, необходимое для достижения точки x исходя из точки x_0 ;

2. Процедура **stir**, реализующая алгоритм построения формулы Стирлинга:

```
function stir(m,k:integer; x:real):real;
```

{Входные параметры: m — степень интерполяционного многочлена, k — номер ближайшего узла, x — точка, в которой ищем значение интерполяционного многочлена.}

```
var
    i,j,ii,jj,l :integer;
    y,z,q,r,s :real;
begin
    l:=trunc(m/2); q:=x*10-k+1; z:=1.0; i:=2;
    y:=fr[k,1]+0.5*q*(fr[k-1,2]+fr[k,2]);
```

```

repeat
  ii:=trunc((i-1)/2);
  z:=z*(q+ii)*(q-ii)/((i-1)*i);
  y:=y+z*fr[k-trunc(i/2),i+1];
  i:=i+2
until i>2*l;
r:=0.0; s:=q; j:=3;
repeat
  jj:=trunc((j-1)/2);
  s:=s*(q+jj)*(q-jj)/((j-1)*j);
r:=r+s*0.5*(fr[k-trunc((j+1)/2),j+1]+(fr[k-trunc(j/2),j+1]));
  j:=j+2
until j>2*l-1;
stir:=y+r
end;

```

3. Процедура **spl**, реализующая алгоритм построения естественного кубического сплайна.

Процедура spl составляет систему, основываясь на оптимальном способе построения естественного кубического сплайна. Процедура sy решает систему методом прогонки.

```

procedure sy(il,ir:integer; a,b,d:vec; var c:vec);

```

{Входные параметры: il – номер 1-го уравнения системы; ir – номер последнего уравнения системы; a – коэффициенты ниже главной диагонали; b – коэффициенты выше главной диагонали; d – коэффициенты на главной диагонали; c – вектор правой части.

Выходные параметры: c – решение системы.}

```

var
  i,j,l :integer;
  r      :real;
begin
  l:=il+1;
  for i:=l to ir do begin
    r:=b[i]/d[i-1];
    d[i]:=d[i]-r*a[i-1];
    c[i]:=c[i]-r*c[i-1]
  end;
  c[ir]:=c[ir]/d[ir];
  for i:=l to ir do begin
    j:=ir-i+1;
    c[j]:=(c[j]-a[j]*c[j+1])/d[j]
  end
end;

```

procedure spl(n:integer; x,f:vec; var x0,y0:real; var i0:integer);
 {Входные параметры: n – число узлов; x – вектор, состоящий из узлов; f – вектор, содержащий значения функции в узлах; x_0 – точка, в которой ищем значение интерполяционного многочлена.

Выходные параметры: y_0 – значение кубического сплайна в точке x_0 ; i_0 – номер частичного отрезка, в котором находится точка.}

```

var
  i      :integer;
  r,t    :real;
  a,b,c,d :vec;
begin
  for i:=1 to n do b[i]:=x[i]-x[i-1];
  for i:=1 to n do if (x[i-1]<x0) and (x0<=x[i]) then i0:=i;
  write('i0= ',i0);
  for i:=1 to n-1 do
  begin
    d[i]:=2*(b[i]+b[i+1]);
    a[i]:=b[i+1];
    c[i]:=6*((f[i+1]-f[i])/b[i+1]-(f[i]-f[i-1])/b[i])
  end;
  sy(1,n-1,a,b,d,c); c[0]:=0; c[n]:=0;
  r:=(x[i0]-x0); t:=(x0-x[i0-1]);
  y0:=(c[i0-1]*r*r*r+c[i0]*t*t*t)/(6*b[i0]);
  y0:=y0+(f[i0-1]/b[i0]-c[i0-1]*b[i0]/6)*r;
  y0:=y0+(f[i0]/b[i0]-c[i0]*b[i0]/6)*t
end.
```

Учебное издание

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Учебно-методическое пособие
для практических занятий в вузах

Составители:

Карпова Антонина Петровна,
Небольсина Марина Николаевна

Корректор В.П. Бахметьев

Компьютерная верстка Е.Н. Комарчук

Подп. в печ. 18.12.2012. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 1,2. Тираж 50 экз. Заказ 1032.

Издательско-полиграфический центр

Воронежского государственного университета.

394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. (факс): +7 (473) 259-80-26

<http://www.ppc.vsu.ru>; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии

Издательско-полиграфического центра

Воронежского государственного университета.

394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. +7 (473) 220-41-33