МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОД СЕТОК РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

УДК 517.9
ББК 22.193
М545

А в т о р ы:
А. В. Костин, Д. В. Костин, И. В. Колесникова, М. Н. Силаева

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» *С. А. Шабров,*
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» *Л. В. Стенюхин*

Костин А. В.
М545 Метод сеток решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными : учебное пособие / А.В. Костин, Д. В. Костин, И. В. Колесникова, М. Н. Силаева ; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – 43 с.
ISBN 978-5-9273-2760-7

Настоящее учебное пособие посвящено рассмотрению простейших разностных схем для уравнения теплопроводности и для уравнения Лапласа.

Для бакалавров 3 и 4 курсов очной формы обучения математических факультетов вузов.

УДК 517.9
ББК 22.193

ISBN 978-5-9273-2760-7

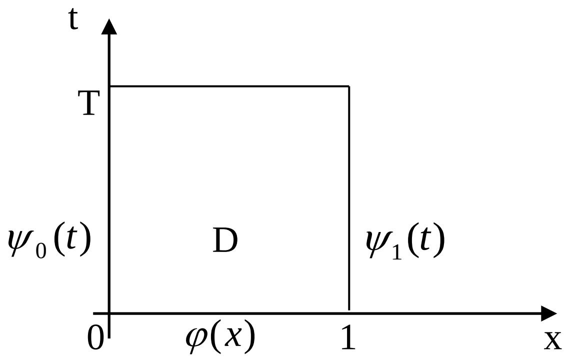
Оглавление

Простейшие разностные схемы для уравнения теплопроводности

1. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t;x), \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (1)$$



с начальным и краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0;x) = \varphi(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(t;0) = \psi_0(t), & \\ u(t;1) = \psi_1(t). & 0 \le t \le T, \end{cases} \qquad (2)$$

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения $f(t;x)$ и функции $\varphi(x), \psi_0(t), \psi_1(t)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность гладкого решения $\hat{u}(t;x)$ задачи (1) - (2).

2. Разностная схема

Построим разностную схему - разностный (сеточный) аналог дифференциальной задачи (1) - (2).

Выполним следующие шаги:

1) Область непрерывного изменения аргументов $D = \{ \ (t;x) \in R^2 : \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 1 \ \}$ заменим дискретным множеством точек – сеткой $D_h = \{ \ (t_i; x_j) \in R^2 : \quad 0 \le i \le M, \quad 0 \le j \le N. \ \}$,

$t_i = i\tau, \ \ \tau = \dfrac{T}{M}, \quad i = 0, \dots, M, \qquad x_j = jh, \ \ h = \dfrac{1}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$ Точки $(i\tau; jh), \quad i = 0, \dots, M, \quad j = 0, \dots, N$ называются узлами сетки D_h, τ и h называются шагами сетки по оси Ot и Ox, соответственно. Узел $(i\tau; jh)$ сетки D_h будем обозначать $(i; j)$.

Сетку D_h можно представить в виде

$$D_h = \omega_h \times \omega_\tau ,$$

где

$$\omega_h = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1\},$$

$$\omega_\tau = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_M = T\}.$$

Замечание. При реализации метода сеток шаги τ и h обычно выбирают согласованно. Поэтому сетка и обозначена через D_h.

2) Все функции в исходной дифференциальной задаче (1) – (2) заменим сеточными функциями - функциями, определенными в узлах сетки D_h. Сеточную функцию обозначим через $u_h = \{u_j^i\}, \ \ i = 0, \dots, M, \quad j = 0, \dots, N.$ Проекцию функции $u(t;x)$ на сетку D_h обозначим через $[u]_h = \{u(i\tau; jh\}, \ \ i = 0, \dots, M, \quad j = 0, \dots, N.$

3) Производные в исходной дифференциальной задаче (1) – (2) заменим разностными отношениями – сходящимися формулами численного дифференцирования:

$$\frac{\partial u(\tau;h)}{\partial t} \approx \frac{u(t+\Delta t;x)-u(t;x)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 u(\tau;h)}{\partial x^2} \approx \frac{u(t;x-\Delta h)-2u(x;y)+u(t;x+\Delta h)}{\left(\Delta h\right)^2}.$$

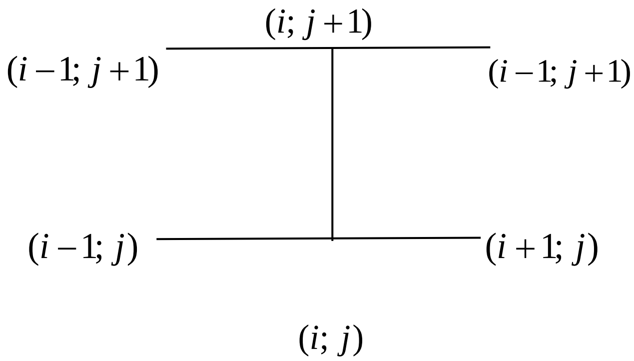
В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{i+1}-u_j^i}{\tau} = \sigma \dfrac{u_{j-1}^{i+1}-2u_j^{i+1}+u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + (1-\sigma)\dfrac{u_{j-1}^i-2u_j^i+u_{j+1}^i}{h^2} + f_j^i, \\ \qquad i=0,1,\ldots,M-1, \quad j=1,\ldots,N-1; \\ u_j^0=\varphi_j^0, \qquad j=0,\ldots,N; \\ \qquad u_0^i=\psi_0^i, \quad u_N^i=\psi_N^i, \quad i=0,\ldots,M. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь σ - числовой параметр $(0 \le \sigma \le 1)$, f_j^i - сеточная аппроксимация правой части дифференциального уравнения $f(t;x)$, φ_j^0 - сеточная аппроксимация начального условия $\varphi(x)$, ψ_0^i и ψ_N^i - сеточные аппроксимации краевых условий $\psi_0(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$, соответственно.

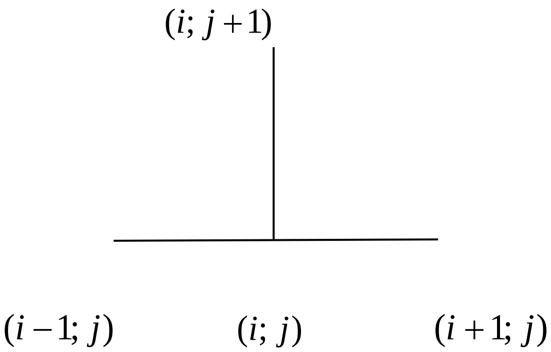
Система (3) называется **разностной схемой - разностным (дискретным) аналогом дифференциальной задачи (1) – (2)**.

Для построения разностной схемы (3) при $0<\sigma<1$ используется шесть точек – шеститочечный шаблон:

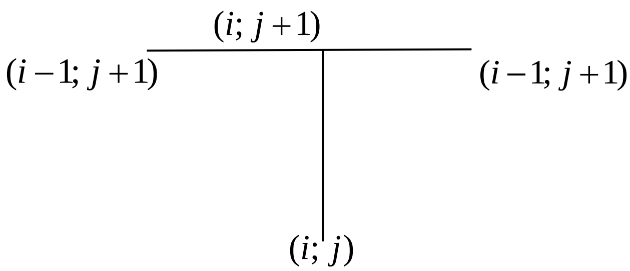


В этом случае разностную схему (3) принято называть **схемой с весами**.

Замечание. При $\sigma = 0$ разностная схема (3) называется **явной.** Шаблон имеет вид:



При $\sigma = 1$разностная схема (3) называется целиком **неявной**. Шаблон имеет вид:



При $\sigma = 1/2$ разностная схема (3) называется схемой **Кранка-Николсона**.

Разностная схема (3) имеет послойную структуру. Зная решение на i - ом слое ($t = i\tau$) мы можем найти решение на $(i+1)$ - ом слое.

3. Аппроксимация и устойчивость разностной схемы

Введем пространства E - функций $u(t;x)$ непрерывных на D и имеющих, непрерывные частные производные $\frac{\partial u(t;x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(t;x)}{\partial x^2}$, и пространство $F = C(D) \times C(0;1) \times C(0;T) \times C(0;T).$:

Теперь дифференциальную задачу (1)-(2) можно записать в виде операторного уравнения:

$$L\,u = g,$$

где $L: \ E \to \ F, \ u \in E, \ g \in F,$

$$Lu = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ 0 < t < T, \quad 0 < x < 1; \\ u(0;x), \quad 0 \le x \le 1; \\ u(t;0), \quad u(t;1), \quad 0 \le t \le T; \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} f(t;x), \quad 0 < t < t, \ \ 0 < x < 1; \\ \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1; \\ \psi_0(t), \quad \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Введем пространства сеточных функций E_h и F_h.

$$E_h: \ u_h \in E_h, \ \|u_h\|_{E_h} = \max_{i,j} |u_j^i|,$$

$$F_h: \ g_h \in F_h, \ \|g_h\|_{F_h} = \max\{\gamma, \quad a, \quad b, \ c\},$$

где $\gamma = \max\limits_{i,j} \left| f_j^i \right|,$

$$a = \max_j |\varphi(jh)|, \ b = \max_i |\psi_0(i\tau)|, \ c = \max_i |\psi_1(i\tau)|.$$

Теперь разностную схему (3) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_h \, u_h = g_h, \tag{4}$$

где $L_h: \ E_h \to \ F_h, \ u_h \in E_h, \ g_h \in F_h,$

$$L_h u_h = \begin{cases} \dfrac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} - \sigma \dfrac{u_{j-1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} - (1-\sigma)\dfrac{u_{j-1}^i - 2u_j^i + u_{j+1}^i}{h^2}, \\ \qquad i = 0,1,\ldots, M-1, \quad j = 1,\ldots, N-1; \\ \\ u_j^0, \quad j = 0,\ldots, N; \\ \\ u_0^i, \quad u_N^i, \quad i = 0,\ldots, M; \end{cases}$$

$$g_h = \begin{cases} f_j^i, & i = 0,1,\ldots,M-1, \quad j = 1,\ldots,N-1; \\ \varphi_j^0, & i = 0, \quad j = 0,\ldots,N; \\ \psi_0^i, \ i = 0,\ldots,M, \ j = 0, & \psi_N^i, \quad i = 0,\ldots,M, \quad j = N. \end{cases}$$

Замечание. Операторы $L: \ E \to F$ и $L_h: \ E_h \to F_h$ линейные и ограниченные.

По определению **разностная схема (4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (1) - (2) на ее решении** $\hat{u}(t;x)$ если

$$\left\| L_h[\hat{u}]_h - g_h \right\|_{F_h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \ (\tau, h \to 0)..$$

При этом, если существует константа $C > 0$ не зависящая от h, и

$$\left\| L_h[\hat{u}]_h - g_h \right\|_{F_h} \le Ch^k \quad \text{при} \quad h \to 0 \ (\tau, h \to 0).,$$

то будем говорить, что разностная схема (4) **аппроксимирует задачу** (1)-(2) **с порядком** h^k.

Разность $L_h[\hat{u}]_h - g_h = \delta g_h$ называется **невязкой**.

Пусть $0 < \sigma < 1$. Введем в рассмотрение промежуточный слой по t:

$$\tilde{t} = i\tau + \frac{\tau}{2}.$$

Тогда

а) $$\frac{\hat{u}((i+1)\tau; jh) - \hat{u}(i\tau; jh)}{\tau} = \frac{u((i+1)\tau; jh) - u(i\tau; jh)}{2\frac{\tau}{2}} = \frac{\partial \hat{u}(\tilde{t}; jh)}{\partial t} + O(\tau^2);$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma\hat{u}\left(\tilde{t}+\frac{\tau}{2};\, jh\right)+(1-\sigma)\hat{u}\left(\tilde{t}-\frac{\tau}{2};\, jh\right)=\\
&\sigma\left\{\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)+\frac{\tau}{2}\frac{\partial\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\frac{\partial^2\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right)\right\}+\\
\text{б)}\quad&(1-\sigma)\left\{\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)-\frac{\tau}{2}\frac{\partial\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right)\right\}=\\
&\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t}+O\left(\tau^2\right).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\sigma\frac{\hat{u}\left(\tilde{t}+\frac{\tau}{2};(j-1)h\right)-2\hat{u}\left(\tilde{t}+\frac{\tau}{2};\, jh\right)+\hat{u}\left(\tilde{t}+\frac{\tau}{2};(j+1)h\right)}{h^2}+\\
&+(1-\sigma)\frac{\hat{u}\left(\tilde{t}-\frac{\tau}{2};(j-1)h\right)-2\hat{u}\left(\tilde{t}-\frac{\tau}{2};\, jh\right)+\hat{u}\left(\tilde{t}-\frac{\tau}{2};(j-1)h\right)}{h^2}=\\
&=\frac{\partial^2\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial x^2}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau\frac{\partial^3\hat{u}\left(\tilde{t};\, jh\right)}{\partial t\partial x^2}+O\left(\tau^2+h^2\right).
\end{aligned}
$$

Так как для краевых условий на промежуточном слое

$$
L_h\left[\hat{u}\right]_h=\begin{cases}
\dfrac{\hat{u}\left((i+1)\tau;\, jh\right)-\hat{u}\left(i\tau;\, jh\right)}{\tau}-\\
-\sigma\dfrac{\hat{u}\left((i+1)\tau;(j-1)h\right)-2\hat{u}\left((i+1)\tau;\, jh\right)+\hat{u}\left((i+1)\tau;(j+1)h\right)}{h^2}-\\
-(1-\sigma)\dfrac{\hat{u}\left(i\tau;(j-1)h\right)-2\hat{u}\left(i\tau;\, jh\right)+\hat{u}\left(i\tau;(j+1)h\right)}{h^2},\\
i=1,\ldots,M-1,\quad j=1,\ldots,N-1;\\
\hat{u}\left(0;\, jh\right),\quad i=0,\quad j=0,\ldots,N;\\
\hat{u}\left(\tilde{t};0\right),\quad i=0,\ldots,M,\quad j=0;\quad \hat{u}\left(\tilde{t};1\right),\quad i=0,\ldots,M,\quad j=N;
\end{cases}
$$

То полагая

$$f_j^i = f(\tilde{t}; jh) = f\left(i\tau + \frac{\tau}{2}; jh\right), \varphi_j^0 = \varphi(jh), \psi_0^i = \psi_0(\tilde{t}) = \psi_0\left(i\tau + \frac{\tau}{2}\right),$$

$\psi_N^i = \psi_1(\tilde{t}) = \psi_1\left(i\tau + \frac{\tau}{2}\right)$, имеем при $\sigma \neq \frac{1}{2}$

$$\delta g_h = \begin{cases} O(\tau) + O(h^2), & i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ 0, \quad i = 0, & j = 0, \ldots, N; \\ 0, \quad i = 0, \ldots, M, & j = 0, \quad j = N. \end{cases}$$

и при $\sigma = \frac{1}{2}$

$$\delta g_h = \begin{cases} O(\tau^2) + O(h^2), & i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ 0, \quad i = 0, & j = 0, \ldots, N; \\ 0, \quad i = 0, \ldots, M, & j = 0, \quad j = N. \end{cases}$$

Отсюда, используя промежуточный слой $\tilde{t} = i\tau + \frac{\tau}{2}$ и соответствующую аппроксимацию входных данных задачи (1)-(2): $f_j^i = f(\tilde{t}; jh) = f\left(i\tau + \frac{\tau}{2}; jh\right)$, $\varphi_j^0 = \varphi(jh)$, $\psi_0^i = \psi_0(\tilde{t}) = \psi_0\left(i\tau + \frac{\tau}{2}\right)$, $\psi_N^i = \psi_1(\tilde{t}) = \psi_1\left(i\tau + \frac{\tau}{2}\right)$ получаем, что разностная схема с весами обладает свойством аппроксимации и

1) $\|\delta g_h\|_{F_h} = O(\tau) + O(h^2)$, при $0 < \sigma < 1$, $\sigma \neq \frac{1}{2}$,

2) $\|\delta g_h\|_{F_h} = O(\tau^2) + O(h^2)$, при $\sigma = \frac{1}{2}$.

Аналогично проверяем, что явная и целиком неявная разностные схемы обладают свойством аппроксимации и $\|\delta g_h\|_{F_h} = O(\tau) + O(h^2)$.

Для явной разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} - \dfrac{u_{j-1}^i - 2u_j^i + u_{j+1}^i}{h^2} = f(i\tau; jh), \\ \quad i = 0, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \quad u_j^0 = \varphi(jh), \quad j = 0, \dots, N; \\ u_0^i = \psi_0(i\tau), \quad u_N^i = \psi_1(i\tau), \quad i = 0, \dots, M; \end{cases} \tag{5}$$

мы полагаем $f_j^i = f(i\tau; jh)$, $\varphi_j^0 = \varphi(jh)$, $\psi_0^i = \psi_0(i\tau)$, $\psi_N^i = \psi_1(i\tau)$ и проверяем аппроксимацию на слое $t = i\tau$.

Для целиком неявной разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} - \dfrac{u_{j-1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} = f((i+1)\tau; jh), \\ \quad i = 0, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \quad u_j^0 = \varphi(jh), \quad j = 0, \dots, N; \\ u_0^i = \psi_0(i\tau), \quad u_N^i = \psi_1(i\tau), \quad i = 0, \dots, M; \end{cases} \tag{6}$$

мы полагаем $f_j^i = f((i+1)\tau; jh)$, $\varphi_j^0 = \varphi(jh)$, $\psi_0^i = \psi_0(i\tau)$, $\psi_N^i = \psi_1(i\tau)$ и проверяем аппроксимацию на слое $t = (i+1)\tau$.

Разностная схема (4) называется устойчивой, если для достаточно малых шагов сетки τ и h выполнены условия:

1) Для любой сеточной функции $g_h \in F_h$, уравнение $L_h\ u_h = g_h$ имеет единственное решение $\hat{u}_h \in E_h$ (существует обратный оператор $L_h^{-1}:\ F_h \to\ E_h$).

2) Существует константа $\mathrm{A} > 0$, независящая от h (τ и h), такая, что для решения $\hat{u}_h$ уравнения $L_h\ u_h = g_h$ имеет место неравенство

$$\left\|\hat{u}_h\right\|_{E_h} \le \mathrm{A}\left\|g_h\right\|_{F_h} \qquad (7)$$

(норма обратного оператора равномерно по h ограничена константой $\mathrm{A} > 0$: $\left\|L_h^{-1}\right\| \le \mathrm{A}$).

Замечание. Условие 2) определения устойчивости разностной схемы принято называть **условием устойчивости разностной схемы**.

Имеет место

Предложение. Если решение $\left\{\hat{u}_j^i\right\}, i = 0,\ldots,M, \quad j = 0,\ldots,N$ разностной схемы (4) для любого $i = 0,\ldots,M-1$ удовлетворяет условию

$$\max_j\left|\hat{u}_j^{i+1}\right| \le \max_j\left|\hat{u}_j^i\right| + \tau\max_{i,j}\left|f_j^i\right|, \qquad (8)$$

то схема (4) устойчивая.

Неравенство (6) называется **принципом максимума**.

Действительно, рассмотрим две разностные схемы

$$L_h\ v_h = g_h^0 \quad \text{и} \quad L_h\ w_h = g_h^1,$$

где сеточные функции g_h^0 и g_h^0 определены выражениями:

$$g_h^0 = \begin{cases} 0, \ i=1,\dots,M-1, \ \ j=1,\dots,N-1; \\ \varphi_j^0, \ i=0, \ \ j=0,\dots,N; \\ \psi_0^i, \ i=0,\dots,M, \ \ j=0; \ \ \psi_N^0, \ \ i=0,\dots,M, \ \ j=N; \end{cases}$$

(однородное уравнение, неоднородные начальное и краевые условия) и

$$g_h^0 = \begin{cases} f_j^i, \ i=1,\dots,M-1, \ \ j=1,\dots,N-1; \\ 0, \ i=0, \ \ j=0,\dots,N; \\ 0, \ i=0,\dots,M, \ \ j=0, \ \ \ j=N; \end{cases}$$

(неоднородное уравнение, однородные начальное и краевые условия).

Очевидно, если существуют решения первой и второй задач $\hat{v}_h$ и $\hat{w}_h$, то существует и решение $\hat{u}_h = \hat{v}_h + \hat{w}_h$ разностной схемы (4).

Применим принцип максимума (6) к решению $\hat{v}_h$ первой задачи:

$$\max_j \left|\hat{v}_j^{i+1}\right| \le \max_j \left|\hat{v}_j^{i}\right| \le \ldots \le \max_j \left|\hat{v}_j^{0}\right| =$$
$$= \max\left(\max_j \left|\varphi(jh)\right|, \ \max_i \left|\psi_0(i\tau)\right|, \ \max_i \left|\psi_1(i\tau)\right| \right).$$

Применим принцип максимума (6) к решению $\hat{w}_h$ второй задачи:

$$\max_j \left|\hat{w}_j^{i+1}\right| \le \max_j \left|\hat{w}_j^{i}\right| + \tau \max_{i,j} \left|f_j^i\right| \le$$
$$\le \max_j \left|\hat{w}_j^{i-1}\right| + 2\tau \max_{i,j} \left|f_j^i\right| \le \ldots \le$$
$$\le \max_j \left|w_j^{0}\right| + (i+1)\tau \max_{i,j} \left|f_j^i\right| \le T \max_{i,j} \left|f_j^i\right|.$$

Таким образом, для решения $\hat{u}_h = \hat{v}_h + \hat{w}_h$ разностной схемы (4) справедливо неравенство

$$\max_j \left|\hat{u}_j^{i+1}\right| \le \max_j \left|\hat{v}_j^{i+1}\right| + \max_j \left|\hat{w}_j^{i+1}\right| \le$$

$$= \max\left(\max_j \left|\varphi(jh)\right|,\ \max_i \left|\psi_0(i\tau)\right|,\ \max_i \left|\psi_1(i\tau)\right| \right) + T \max_{i,j} \left| f_j^i \right|.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\hat{u}_h\right\|_{E_h} \le \left(1+T\right)\left\|g_h\right\|_{F_h},$$

условие устойчивости (7) выполнено с константой $\mathrm{A} = 1 + T$.

Предложение доказано.

Ограничимся исследованием устойчивости разностной схемы (4) в двух крайних случаях: целиком неявной схемы $(\sigma = 1)$ и явной схемы $(\sigma = 0)$.

Устойчивость целиком неявной схемы $(\sigma = 1)$.

Обозначим $\lambda = \dfrac{\tau}{h^2}$. Получим из (6) для каждого $i = 0, \ldots, M-1$

$$\lambda u_{j-1}^{i+1} - (1+2\lambda) u_j^{i+1} + \lambda u_{j=1}^{i+1} = -u_j^i - \tau f((i+1)\tau; jh), \qquad (9)$$
$$j = 1, \ldots, N-1.$$

Система (9) однозначно разрешима (см. условие устойчивости метода прогонки решения системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей).

Пусть $\hat{u}_j^{i+1},\ j = 0, \ldots, N$ - решение (9) и $\max_j \left|\hat{u}_j^{i+1}\right| = \hat{u}_k^{i+1}$, где k наименьший из всех индексов, для которых $\left|\hat{u}_{k-1}^{i+1}\right| < \hat{u}_k^{i+1}$. Если $k = 0$ или $k = N$, то неравенство (8) выполнено. Пусть $k \ne 0, N$.

Уравнение системы (9) при $j = k$ запишем в виде

$$\lambda\left(\hat{u}_{k-1}^{i+1}-\hat{u}_{k}^{i+1}\right)+\lambda\left(\hat{u}_{k+1}^{i+1}-\hat{u}_{k}^{i+1}\right)-u_{k}^{i+1}=-u_{k}^{i}-\tau f\left((i+1)\tau;\, jh\right).$$

Так как сумма скобок в левой части равенства строго меньше нуля, имеем

$$\max_{j}\left|\hat{u}_{j}^{i+1}\right|=\hat{u}_{k}^{i+1}\leq\max_{j}\left|\hat{u}_{j}^{i}\right|+\tau\max_{i,j}\left|f_{j}^{i}\right|.$$

Следовательно, для целиком неявной разностной схемы имеет место неравенство (8). Это означает, что **целиком неявная разностная схема устойчива при любом соотношении шагов τ и h.**

Устойчивость явной схемы $(\sigma=0)$

Обозначив $\lambda=\dfrac{\tau}{h^{2}}$, из (5) для каждого $i=0,\ldots,M-1$ решение $\left\{\hat{u}_{j}^{i+1}\right\}$, $j=0,\ldots,N$ разностной схемы находится по формуле:

$$\hat{u}_{j}^{i+1}=\lambda\left(\hat{u}_{j-1}^{i}+\hat{u}_{j+1}^{i}\right)+(1-2\lambda)\hat{u}_{j}^{i}+\tau f_{j}^{i},\qquad j=1,\ldots,N-1. \qquad (10)$$

Очевидно, если $1-2\lambda\geq 0$, то

$$\left|\hat{u}_{j}^{i+1}\right|\leq\left|\hat{u}_{j}^{i}\right|+\tau\max_{i,j}\left|f_{j}^{i}\right|$$

и неравенство (8) выполнено. Следовательно, явная разностная схема устойчива при условии $\lambda=\dfrac{\tau}{h^{2}}\leq\dfrac{1}{2}$.

Установим, что при $\lambda=\dfrac{\tau}{h^{2}}>\dfrac{1}{2}$ явная разностная схема является неустойчивой. Для этого достаточно показать, что, однажды возникнув, ошибка в решении будет при дальнейших вычислениях неограниченно возрастать.

Рассмотрим однородную задачу $\left(\; f_{j}^{i}=f\left(i\tau;\, jh\right)\equiv 0\;\right)$. При этом схема примет вид

$$\hat{u}_j^{i+1} = \lambda\left(\hat{u}_{j-1}^i + \hat{u}_{j+1}^i\right) + (1-2\lambda)\hat{u}_j^i.$$

Пусть на k-ом слое возникла ошибки $\delta_j^k, \;\; j = 1,\ldots,N-1$. Тогда для вычисления ошибки на следующем слое получим формулу:

$$\delta_j^{k+1} = \lambda\left(\delta_{j-1}^k + \delta_{j+1}^k\right) + (1-2\lambda)\delta_j^k.$$

Предположим, что $\delta_j^k = (-1)^m \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0,$ где ε - некоторое достаточно малое число. Тогда

$$\delta_j^{k+1} = \lambda\left((-1)^{m-1} + (-1)^{m+1}\right)\varepsilon + (1-2\lambda)(-1)^m \varepsilon == (-1)^m (1-4\lambda)\varepsilon$$

или

$$\delta_j^{k+1} = (-1)^{m+1}(4\lambda - 1)\varepsilon,$$

так как $4\lambda - 1 > 0$ при $\lambda > \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, на слое $t = (k+l)\tau$ получим:

$$\left|\delta_j^{k+l}\right| = (4\lambda - 1)^l \varepsilon \to \infty, \text{ при } l \to \infty.$$

Замечание. При значительном уменьшении шага τ (при фиксированном T) растет число шагов и, следовательно, растет суммарная ошибка вычислений.

Окончательно получаем, что явная разностная схема устойчива при $\tau \le \dfrac{h^2}{2}$ **и неустойчива при** $\tau > \dfrac{h^2}{2}$.

Замечание. Разностная схема (3) с весами устойчива:

1) при любом соотношении шагов, если $\sigma \ge \dfrac{1}{2}$;

2) при $\tau \le \dfrac{h^2}{4\left(\dfrac{1}{2}-\sigma\right)}$, если $\sigma < \dfrac{1}{2}$.

Имеет место

Теорема Филиппова. Если разностная схема (4) (то же (3)) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (1)-(2) на ее решении $\hat{u}_h \in E_h$ и устойчива, то она сходящаяся:

$$\left\|\hat{u}_h - [\hat{u}]_h\right\|_{E_h} \to 0 \text{ при } h \to 0 \ (\tau, h \to 0).$$

Действительно, имеем

$$L_h\ \hat{u}_h = g_h \text{ и } L_h\ [\hat{u}]_h = g_h + \delta g_h,$$

здесь $\hat{u}_h$ - решение разностной схемы (3) (или что тоже (4)), $\hat{u}$ - точное решение исходной дифференциальной задачи (1) – (2).

Отсюда получаем

$$L_h\ \left([\hat{u}]_h - u_h\right) = \delta g_h.$$

Пусть разностная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком h^k. Тогда из условий аппроксимации и устойчивости немедленно следует, что

$$\left\|[\hat{u}]_h - \hat{u}_h\right\|_{E_h} \le c\left\|\delta g_h\right\|_{F_h} \le c \cdot Ah^k.$$

Следовательно, разностная схема является сходящейся с порядком h^k.

Окончательно получаем:

Разностная схема (3) с весами сходящаяся:

1) при любом соотношении шагов с порядком $O(\tau) + O(h^2)$, **если** $\sigma > \dfrac{1}{2}$**;**

2) при любом соотношении шагов с порядком $O(\tau^2)+O(h^2)$, **если** $\sigma=\frac{1}{2}$**;**

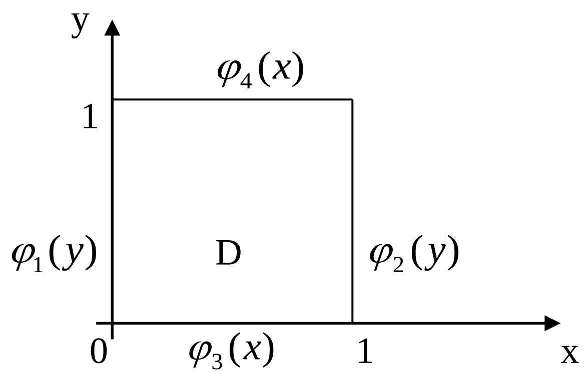
3) при $\tau \le \dfrac{h^2}{4\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}$ **с порядком** $O(\tau)+O(h^2)$, **если** $\sigma<\frac{1}{2}$.

Разностная схема для эллиптического уравнения

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x;y), \qquad 0\le x\le 1, \qquad 0\le y\le 1, \qquad (1)$$



с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0;y)=\varphi_1(y), & \\ u(1;y)=\varphi_2(y), & 0\le y\le 1, \\ u(x;0)=\varphi_3(x), & \\ u(x;1)=\varphi_4(x), & 0\le x\le 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Будем считать, что правая часть дифференциального уравнения $f(x;y)$ и функции $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность гладкого решения $\hat{u}(x;y)$ задачи (1) - (2).

2. Разностная схема

Построим разностную схему - разностный аналог дифференциальной задачи (1) - (2).

Выполним следующие шаги:

1) Область непрерывного изменения аргументов $D = \{\ (x;y) \in R^2 :\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.\ \}$ заменим дискретным множеством точек – сеткой $D_h = \{\ (x_i;y_j) \in R^2 :\ \ 0 \le i \le M,\ \ 0 \le j \le N.\ \}$,

$x_i = ih,\ h = \dfrac{1}{M},\ \ i = 0,\dots,M,\ \ \ y_j = j\hbar,\ \hbar = \dfrac{1}{N},\ \ j = 0,\dots,N.$ Точки $(ih; j\hbar),\ \ i = 0,\dots,M,\ \ j = 0,\dots,N$ называются узлами сетки D_h, h и $\hbar$ называются шагами сетки по оси Ox и Oy, соответственно. Узел $(i\tau; jh)$ сетки D_h будем обозначать $(i;j)$. Обозначим множество внутренних узлов сетки через $\Omega_h = \{\ (x_i;y_j) \in R^2 :\ \ 0 < i < M,\ \ 0 < j < N.\ \}$ и через $\Gamma_h = D_h \setminus \Omega_h$ - множество граничных узлов.

Сетку Ω_h можно представить в виде

$$\Omega_h = \omega_h \times \omega_\hbar,$$

где $\omega_h = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1\}$, $\omega_\hbar = \{0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = 1\}$.

Замечание. При реализации метода сеток шаги обычно выбирают согласованно. Поэтому сетка и обозначена через D_h.

2) Все функции в исходной дифференциальной задаче (1) – (2) заменим сеточными функциями - функциями, определенными в узлах сетки D_h. Сеточную функцию обозначим через $u_h = \{u_{ij}\},\ i = 0,\dots,M, \quad j = 0,\dots,N.$ Проекцию функции $u(x;y)$ на сетку D_h обозначим через $[u]_h = \{u(ih;j\hbar)\},\ i = 0,\dots,M, \quad j = 0,\dots,N.$

3) Производные в исходной дифференциальной задаче (1) – (2) заменим разностными отношениями – сходящимися формулами численного дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-\Delta x;y) - 2u(x;y) + u(x+\Delta x;y)}{(\Delta x)^2},$$

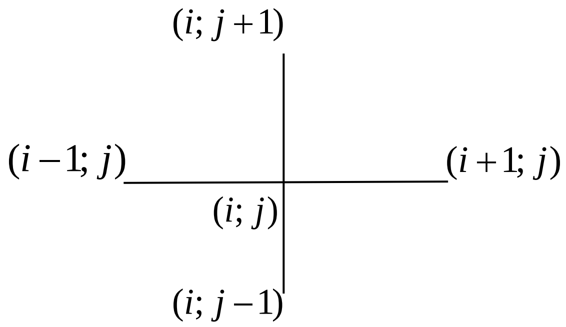
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x;y-\Delta y) - 2u(x;y) + u(x;y+\Delta y)}{(\Delta y)^2}.$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\hbar^2} = f(ih;j\hbar), \\ \quad i = 1,\dots,M-1, \quad j = 1,\dots,N-1; \\ u_{0j} = \varphi_1(j\hbar), \quad u_{Mj} = \varphi_2(j\hbar), \quad j = 0,\dots,N; \\ u_{i0} = \varphi_3(ih), \quad u_{iN} = \varphi_4(ih), \quad i = 0,\dots,M. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) называется разностной схемой - разностным (дискретным) аналогом дифференциальной задачи (1) – (2).

Для построения разностной схемы (3) используется пять точек – пятиточечный шаблон:



Введем пространства сеточных функций E_h и F_h.

$$E_h : \; u_h \in E_h, \; \|u_h\|_{E_h} = \max_{i,j} |u_{ij}|,$$

$$F_h : \; g_h \in F_h, \; \|g_h\|_{E_h} = \max \{ \gamma, \; a, \; b, \; c, \; d \},$$

где $\gamma = \max\limits_{i,j} | f(ih; j\hbar) |$,

$a = \max\limits_{j} |\varphi_1(j\hbar)|$, $\qquad b = \max\limits_{j} |\varphi_2(j\hbar)|$, $\qquad c = \max\limits_{i} |\varphi_3(ih)|$, $d = \max\limits_{i} |\varphi_4(ih)|$.

Теперь разностную схему (3) можно записать в виде операторного уравнения

$$L_h \, u_h = g_h, \tag{4}$$

где $L_h : \; E_h \to F_h, \; u_h \in E_h, \; g_h \in F_h,$

$$L_h u_h = \begin{cases} \dfrac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\hbar^2}, \\ \qquad i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ \\ \qquad u_{0j}, \quad u_{Mj}, \quad j = 0, \ldots, N; \\ \\ \qquad u_{i0}, \quad u_{iN}, \quad i = 0, \ldots, M; \end{cases}$$

$$g_h = \begin{cases} f(ih; j\hbar), \qquad i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ \\ \qquad \varphi_1(j\hbar), \quad \varphi_2(j\hbar), \quad j = 0, \ldots, N; \\ \\ \qquad \varphi_3(ih), \quad \varphi_4(ih), \quad i = 0, \ldots, M. \end{cases}$$

3. Аппроксимация и устойчивость разностной схемы

Разностная схема (4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (1) - (2) на ее решении $\hat{u}(x, y)$ если

$$\left\| L_h [\hat{u}]_h - g_h \right\|_{F_h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \ \left(h, \hbar \to 0\right)..$$

Разность $L_h [\hat{u}]_h - g_h = \delta g_h$ называется невязкой.

Покажем, что невязка $\delta g_h \to 0$ при $h \to 0$.

Так как

$$L_h[\hat{u}]_h = \begin{cases} \dfrac{\hat{u}\big((i-1)h; j\hbar\big) - 2\hat{u}\big(ih; j\hbar\big) + \hat{u}\big((i+1)h; j\hbar\big)}{h^2} + \\ \dfrac{\hat{u}\big((ih; (j-1)\hbar\big) - 2\hat{u}\big(ih; j\hbar\big) + u\big(ih; (j+1)\hbar\big)}{\hbar^2}, \\ i = 1, \ldots, M-1; \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ \qquad \hat{u}(0; j\hbar), \ \hat{u}(1; j\hbar), \quad j = 0, \ldots, N; \\ \qquad \hat{u}(ih; 0), \quad \hat{u}(ih; 1), \ i = 0, \ldots, M; \end{cases}$$

то, заменяя здесь $\hat{u}\big((i \pm 1)h; j\hbar\big)$ и $\hat{u}\big(ih; (j \pm 1)\hbar\big)$ соответствующими разложениями решения $\hat{u}(x; y)$ по формуле Тейлора в точке $\big(ih; j\hbar\big)$:

$$\hat{u}\big((i \pm 1)h; j\hbar\big) =$$

$$= \hat{u}\big(ih; j\hbar\big) \pm h \frac{\partial \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial x^3} + O\big(h^4\big),$$

$$\hat{u}\big(ih; (j \pm 1)\hbar\big) =$$

$$= \hat{u}\big(ih; j\hbar\big) \pm \hbar \frac{\partial \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial y} + \frac{\hbar^2}{2!} \frac{\partial^2 \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial y^2} \pm \frac{\hbar^3}{3!} \frac{\partial^3 \hat{u}\big(ih; j\hbar\big)}{\partial y^3} + O\big(\hbar^4\big),$$

получаем

$$\delta g_h = \begin{cases} O\big(h^2\big) + O\big(\hbar^2\big), \qquad i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1; \\ \qquad 0, \quad i = 0, \qquad i = M, \quad j = 0, \ldots, N; \\ \qquad 0, \quad j = 0, \qquad j = N, \quad i = 0, \ldots, M. \end{cases}$$

Следовательно, $\left\|\delta g_h\right\|_{F_h} = O\left(h^2\right) + O\left(\hbar^2\right)$ и разностная схема (4) обладает свойством аппроксимации.

Разностная схема (4) называется устойчивой, если для достаточно малых шагов сетки h и $\hbar$ выполнены условия:

1) Для любой сеточной функции $g_h \in F_h$, уравнение $L_h\ u_h = g_h$ имеет единственное решение $\hat{u}_h \in E_h$ (существует обратный оператор $L_h^{-1}:\ F_h \to\ E_h$).

2) Существует константа $\mathrm{A} > 0$, независящая от h (h и $\hbar$), такая, что для решения $\hat{u}_h$ уравнения $L_h\ u_h = g_h$ имеет место неравенство

$$\left\|\hat{u}_h\right\|_{E_h} \leq \mathrm{A}\left\|g_h\right\|_{F_h}$$

(норма обратного оператора равномерно по h ограничена константой $\mathrm{A} > 0$: $\left\|L_h^{-1}\right\| \leq \mathrm{A}$).

Замечание. Условие 2) определения устойчивости разностной схемы принято называть условием устойчивости.

Проверку устойчивости разностной схемы (4) разобьем на несколько этапов.

Предложение 1. Пусть сеточная функция $v_h = \left\{v_{ij}\right\}$ определена на всей сетке D_h и отлична от константы (не все координаты вектора $v_h = \left\{v_{ij}\right\}$ равны одному и тому же числу). Пусть на множестве внутренних узлов сетки Ω_h имеет место неравенство

$$\frac{v_{i-1j}-2v_{ij}+v_{i+1j}}{h^2}+\frac{v_{ij-1}-2v_{ij}-v_{ij+1}}{\hbar^2}\ge 0,$$
$$i=1,\ldots,M-1,\quad j=1,\ldots,N-1.$$

Тогда сеточная функция $v_h=\{v_{ij}\}$ принимает свое наибольшее значение в одном из граничных узлов сетки

$$v_{km}\ge v_{ij}\qquad (kh;m\hbar)\in\Gamma_h,\quad i=0,\ldots,M,\qquad j=0,\ldots,N.$$

Предложение 2. Пусть сеточная функция $w_h=\{w_{ij}\}$ определена на всей сетке D_h и отлична от константы. Пусть на множестве внутренних узлов сетки Ω_h имеет место неравенство

$$\frac{w_{i-1j}-2w_{ij}+w_{i+1j}}{h^2}+\frac{w_{ij-1}-2w_{ij}-w_{ij+1}}{\hbar^2}\le 0,$$
$$i=1,\ldots,M-1,\quad j=1,\ldots,N-1.$$

Тогда сеточная функция $w_h=\{w_{ij}\}$ принимает свое наименьшее значение в одном из граничных узлов сетки

$$w_{rs}\le w_{ij}\qquad (rh;s\hbar)\in\Gamma_h,\quad i=0,\ldots,M,\qquad j=0,\ldots,N.$$

Из Предложений 1 и 2 немедленно следует

Предложение 3. Если существует сеточная функция $z_h=\{z_{ij}\}$, определенная на всей сетке D_h, такая, что на множестве внутренних узлов сетки Ω_h имеет место равенство

$$\frac{z_{i-1j}-2z_{ij}+z_{i+1j}}{h^2}+\frac{z_{ij-1}-2z_{ij}-z_{ij+1}}{\hbar^2}=0,$$
$$i=1,\ldots,M-1,\quad j=1,\ldots,N-1,$$

то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на множестве граничных узлов $\Gamma_h = D_h \setminus \Omega_h$.

Отсюда немедленно получаем выполнение условия 1) определения устойчивости разностной схемы. Действительно из предложения 3 следует, что однородная разностная схема $L_h\, u_h = \theta_h = \{\theta_{ij}\}$, $(\theta_{ij} = 0$ для всех $i = 0,\ldots,M,\quad j = 0,\ldots,N\ )$ имеет только нулевое решение $\hat{u}_h = \{\hat{u}_{ij}\}$, $\hat{u}_{ij} = 0$ для всех $i = 0,\ldots,M,\quad j = 0,\ldots,N.$ Таким образом, неоднородное уравнение $L_h\, u_h = g_h$ имеет единственное решение $\hat{u}_h \in E_h$ для любой сеточной функции $g_h \in F_h$.

Перейдем к доказательству условия устойчивости.

Заметим, что для любого многочлена второй степени

$$P(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \alpha x + \beta y + \sigma$$

имеет место равенство

$$\frac{P\big((i-1)h;\, j\hbar\big) - 2P\big(ih;\, j\hbar\big) + P\big((i+1)i;\, j\hbar\big)}{h^2} +$$
$$\frac{P\big(ih;(j-1)\hbar\big) - 2P\big(ih;\, j\hbar\big) + P\big(ih;(j+1)\hbar\big)}{\hbar^2} =$$
$$\frac{\partial^2 P\big(ih;\, j\hbar\big)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P\big(ih;\, j\hbar\big)}{\partial y^2},$$
$$i = 1,\ldots,M-1,\quad j = 1,\ldots,N-1.$$

Положим

$$P(x,y) = \frac{1}{4}\big(R^2 - (x^2 + y^2)\big)\gamma + \max\big(\ a,\quad b,\quad c,\quad d\ \big),$$

где $R > \sqrt{2}, \ \gamma = \max\limits_{i,j} \left| f(ih; j\hbar) \right|,$

$a = \max\limits_{j} \left| \varphi_1(j\hbar) \right|, \ b = \max\limits_{j} \left| \varphi_2(j\hbar) \right|, \ c = \max\limits_{i} \left| \varphi_3(ih) \right|, \ d = \max\limits_{i} \left| \varphi_4(ih) \right|.$

Введем оператор Δ_h :

$$\Delta_h z_h = \left\{ \frac{z_{i-1j} - 2z_{ij} + z_{i+1j}}{h^2} + \frac{z_{ij-1} - 2z_{ij} - z_{ij+1}}{\hbar^2} \right\},$$

$$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Имеем

$$\Delta_h [P]_h =$$

$$\left\{ \frac{P((i-1)h; j\hbar) - 2P(ih; j\hbar) + P((i+1)h; \hbar)}{h^2} + \right.$$

$$\left. \frac{P(ih; (j-1)\hbar) - 2P(ih; j\hbar) + P(ih; (j+1)\hbar)}{\hbar^2} = -\gamma \right\},$$

$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$

Рассмотрим разность $\hat{u}_h - [P]_h = \{ \hat{u}_{ij} - P(ih; j\hbar) \}$, где $\hat{u}_h \in E_h$ - решение разностной схемы.

Очевидно, что

$$\Delta_h \left(\hat{u}_h - [P]_h \right) = \{ f(ih; j\hbar) + \gamma \}, \ i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Так как $f(ih; j\hbar) + \gamma \geq 0$ для $i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1,$ то из Предложения 1 следует, что сеточная функция $\hat{u}_h - [P]_h = \{ \hat{u}_{ij} - P(ih; j\hbar) \}$ $(i = 0, \ldots, M, \quad j = 0, \ldots, N)$ достигает своего наибольшего значения в одном из граничных узлов и, следовательно, $\hat{u}_{ij} - P(ih;\, j\hbar) \le 0$ или $\hat{u}_{ij} \le P(ih;\, j\hbar)$ во всех узлах сетки D_h.

Теперь рассмотрим сеточную функцию $\hat{u}_h + [P]_h = \{\ \hat{u}_{ij} + P(ih;\, j\hbar)\ \}$. Применив к этой функции оператор Δ_h, получим

$$\Delta_h\left(\hat{u}_h + [P]_h\right) = \{\ f(ih;\, j\hbar) - \gamma\ \},\ i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Так как $f(ih;\, j\hbar) - \gamma \le 0$ для $i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1,$ то из Предложения 2 следует, что сеточная функция $\hat{u}_h + [P]_h = \{\ \hat{u}_{ij} + P(ih;\, j\hbar)\ \} \quad (i = 0, \ldots, M, \quad j = 0, \ldots, N)$ достигает своего наименьшего значения в одном из граничных узлов и, следовательно, $\hat{u}_{ij} + P(ih;\, j\hbar) \ge 0$ или $\hat{u}_{ij} \ge -P(ih;\, j\hbar)$ во всех узлах сетки D_h.

Таким образом,

$$-P(ih;\, j\hbar) \le \hat{u}_{ij} \le P(ih;\, j\hbar)$$

во всех узлах сетки D_h. Следовательно,

$$\left\|\hat{u}_h\right\|_{E_h} = \max_{ij}\left|\hat{u}_{ij}\right| \le \max_{ij}\left|P(ih;\, j\hbar)\right| \le \left(\frac{1}{4}R^2 + 1\right)\left\|g_h\right\|_{F_h}$$

и условие устойчивости для разностной схемы (4) выполняется с константой $\mathrm{A} = {}^1\!/_4 R^2 + 1$.

По теореме Филиппова из аппроксимации и устойчивости разностной схемы получаем ее сходимость:

$$\left\|\hat{u}_h - [\hat{u}]_h\right\|_{E_h} \to 0 \text{ при } h \to 0 \ (h, \hbar \to 0).,$$

здесь $\hat{u}_h$ - решение разностной схемы (3) (или что тоже самое (4)), $\hat{u}$ - точное решение исходной дифференциальной задачи (1) – (2).

4. Итерационный метод решения разностной схемы

Пусть $h = \hbar$. Тогда из (3) имеем

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}\right) - \frac{h^2}{4} f(ih; j\hbar),$$

$$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Определим алгоритм итерационного метода формулой

$$u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1j}^{(n)} + u_{i+1j}^{(n)} + u_{ij-1}^{(n)} + u_{ij+1}^{(n)}\right) - \frac{h^2}{4} f(ih; j\hbar),$$

$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$

Для любого n остальные значения $u_{ij}^{(n)}$ в граничных узлах сетки определяются граничными условиями:

$$u_{0j}^{(n+1)} = \varphi_1(j\hbar), \quad u_{Mj}^{(n+1)} = \varphi_2(j\hbar), \qquad j = 0, \ldots, N,$$

$$u_{i0}^{(n+1)} = \varphi_3(ih), \quad u_{iN}^{(n+1)} = \varphi_4(ih), \qquad i = 0, \ldots, M.$$

В качестве начального приближения выберем сеточную функцию $u_h^{(0)}$:

$$u_{0j}^{(0)} = \varphi_1(j\hbar), \quad u_{Mj}^{(0)} = \varphi_2(j\hbar), \qquad j = 0, \ldots, N,$$

$$u_{i0}^{(0)} = \varphi_3(ih), \quad u_{iN}^{(0)} = \varphi_4(ih), \qquad i = 0, \ldots, M,$$

$$u_{ij}^{(0)} = 1, \ i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Покажем, что $u_h^{(n)} \to \hat{u}_h$ при $n \to \infty$.

Обозначим, через $v_h^{(n)} = \hat{u}_h - u_h^{(n)}$ ошибку n-ого приближения. Тогда

$$v_{ij}^{(n)} = 0, \text{ если } (ih; j\hbar) \in \Gamma_h,$$

$$v_{ij}^{(n)} = \frac{v_{i+1j}^{(n-1)} + v_{ij+1}^{(n-1)} + v_{i-1j}^{(n-1)} + v_{ij-1}^{(n+1)}}{4},$$ если $(ih; j\hbar) \in \Omega_h$.

Положим $\max\limits_{ij} \left| v_{ij}^{(n)} \right| = \mathrm{A}_n$. Нужно доказать, что $\mathrm{A}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Имеет место неравенство

$$\left| v_{ij}^{(n+1)} \right| \le \frac{3}{4} \mathrm{A}_n = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \mathrm{A}_n \text{ для } (ih; j\hbar) \in \Omega_h^{(1)},$$

где $\Omega_h^{(1)}$ - множество внутренних узлов сетки, находящихся на расстоянии равном h от множества граничных узлов Γ_h, так как, по крайней мере, одно из слагаемых формулы (5) равно нулю. Далее получаем, что

$$\left| v_{ij}^{(n+1)} \right| \le \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \mathrm{A}_n \text{ для } (ih; j\hbar) \in \Omega_h^{(2)},$$

где $\Omega_h^{(2)}$ - множество внутренних узлов сетки, находящихся на расстоянии равном $2h$ от множества граничных узлов Γ_h, так как, по крайней мере, одно из слагаемых формулы (5) удовлетворяет предыдущему неравенству. Таким образом,

$$\left|v_{ij}^{(n+1)}\right| \le \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) \mathrm{A}_n \text{ для } (ih; j\hbar) \in \Omega_h^{(k)},$$

где $\Omega_h^{(k)}$ - множество внутренних узлов сетки, находящихся на расстоянии равном kh от множества граничных узлов Γ_h, для любого k, $1 \le k \le L$, здесь L - наибольшее расстояние от внутреннего узла сетки до множества ее граничных узлов.

Отсюда получаем, что $\mathrm{A}_{n+1} \le \left(1 - \frac{1}{4^L}\right) \mathrm{A}_n$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{A}_n = 0.$ Сходимость алгоритма доказана.

Задания для практической работы

1. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальным условием u(x,0)=f(x), $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 0{,}1$.

Номер варианта	Функция f(x)
1	x(x-1)
2	1+x*x
3	x*x(1-x)
4	ln(1+x)
5	exp(-x)
6	(x*x+x+1)
7	cos x
8	xsin(x-1)

9	xsin(2πx)
10	1/(1+x*x)
11	xexp(-x)
12	arctg x
13	1-x*x
14	1/(1+x)
15	(x*x+0,5)cos(πx)

2. Найти решение задачи Дирихле в квадрате со стороной 1 для уравнения Лапласа с краевыми условиями вида u(0,y)=f1(y), u(1,y)=f2(y), u(x,0)=f3(x), u(x,1)=f4(x), ($0 \le y \le 1, 0 \le x \le 1$).

Номер варианта	f1(y)	f2(y)	f3(y)	f4(y)
1	y*y	cos y+(2-cos 1)y	x*x*x	x+1
2	exp(y)-exp(1)y*y	y	-x*x*x+1	x*x
3	-y*y+1	y	sinx+1-x*x*x(1+sin 1)	x
4	0	y	sin x-x*x*xsin 1	x
5	exp(y)+y*y(1-exp(1))-1	y	0	x
6	y*y	cos y+y(3-cos 1)	x*x*x	2x+1
7	0	y	sin x-x*x*xsin 1	x*x
8	1	y+1	1	x+1
9	3-7y	7-6y	4x+3	5x-4
10	5-8y	11-7y	6x+5	7x-3

11	y	y+exp(1)	exp(x)	exp(x)+1
12	0	tg y	0	tg x
13	0	sin y	0	sin x
14	1	1+cos y	x	x+cos x

```
program msetellip;
{                  Лабораторная работа N 9
             Метод сеток для уравнения Лапласа
             Выполнила студентка 4 курса группы    }
const nm=101;
type
       matr=array[0..nm,0..nm] of real;
var
        g1                          :text;
        name                        :string;
        i,j,k,nx,ny                 :word;
        m,sx,sy                     :integer;
        a,am,r,t,hx,hy,eps,x,y      :real;
        u                           :matr;

function f1(y:real):real;
begin
      f1:=y*y
end;
function f2(y:real):real;
begin
      f2:=Cos(y)+(2-Cos(1))*y
```

```
end;
function f3(x:real):real;
begin
      f3:=x*x*x
end;
function f4(x:real):real;
begin
      f4:=x+1
end;

begin
        write('Введите имя выходного файла  ');
readln(name);
        assign(g1,name); rewrite(g1);
        writeln(g1,'        Лабораторная работа N 9');
        writeln(g1,' Метод сеток для уравнения
Лапласа');
        writeln(g1,'Выполнил студент 4 курса группы
');
        writeln(g1);
        write('Введите число шагов по оси x ');
read(nx);
        write('Введите число шагов по оси y ');
read(ny);
        write('Введите условие останова eps ');
read(eps);
        writeln(g1,'Условие останова eps =  ',eps);
        write('Введите максимально допустимое число
итераций m ');
```

```
        read(m);
        write('Введите шаги печати по оси x и по оси y
'); readln(sx,sy);
        hx:=1.0/nx; writeln(g1,'Шаг по оси x  ',hx);
        hy:=1.0/ny; writeln(g1,'Шаг по оси y  ',hy);
        t:=sqr(hx/hy);
        for j:=0 to ny do
        begin y:=j*hy; u[0,j]:=f1(y); u[ny,j]:=f2(y)
end;
        for i:=0 to nx do
        begin x:=i*hx; u[i,0]:=f3(x); u[i,nx]:=f4(x)
end;
        for i:=1 to nx-1 do
        for j:=1 to ny-1 do u[i,j]:=1.0;
        k:=1;
repeat
        am:=0;
        for i:=1 to nx-1 do
        for j:=1 to ny-1 do
      begin
        a:=0.5*(u[i-1,j]+u[i+1,j]+u[i,j-
1]*t+u[i,j+1]*t)/(1+t);
        if abs(a-u[i,j])>=am then am:=abs(a-u[i,j]);
        u[i,j]:=a;
      end;
        r:=am; k:=k+1; if k>m then
begin
        Writeln(g1,'Число итераций превышает m=  ',m);
close(g1);
```

```
        exit;
        end;
        until  r<=eps;
          writeln(g1,'                         Решение
задачи');
Writeln(g1,'*************************************
*************************');
write(g1,  '     y= ');
for j:=0 to ny div sy do begin y:=j*sy*hy;
write(g1,y:4:2,'     ') end;
writeln(g1);
Writeln(g1,'x=');
Writeln(g1,'*************************************
*************************');
        for i:=0 to nx div sx do
        begin x:=i*sx*hx; write(g1,' ',x:4:2,'* ');
        for j:=0 to ny div sy do
write(g1,u[i*sx,j*sy]:7:4,'  ');
        writeln(g1)
        end;
Writeln(g1);
Writeln(g1,'*************************************
*************************');
writeln(g1,'Число итераций k=  ',k);
   close(g1)
end.
```

```
program msetpar;
{                   Лабораторная работа N 9
        Метод сеток для уравнения теплопроводности
        Выполнил студент 4 курса группы              }
const nm=200;
type
        vec=array[1..nm] of real;
var
        g1                  :text;
        name                :string;
        i,j,nx,nt,n,m       :word;
        sx,sx0,st           :integer;
        t,t1,ht,hx          :real;
        z,u                 :vec;

function f(x:real):real;
begin
        if (x-0.5)<=0 then f:=10-20*x else f:=40*x-20
end;
procedure spar(hx,ht:real; n:word; var u:vec);
var
        i               :word;
        al,a1,b1        :real;
        p,q             :vec;
begin
        al:=ht/(hx*hx); b1:=-al; a1:=1+2*al;
        p[1]:=-b1/a1; q[1]:=(u[2]-b1*u[1])/a1;
        for i:=2 to n-1 do
            begin
```

```
                p[i]:=-b1/(b1*p[i-1]+a1);
                q[i]:=(u[i+1]-b1*q[i-1])/(b1*p[i-1]+a1)
             end;
        u[n]:=(u[n]-b1*u[n+1]-b1*q[n-1])/(b1*p[n-
1]+a1);
        for i:=1 to n-2 do u[n-i]:=q[n-i-1]+p[n-i-
1]*u[n-i+1]
end;

begin
        write('Введите имя выходного файла  ');
readln(name);
        assign(g1,name); rewrite(g1);
        writeln(g1,'        Лабораторная работа N 9');
        writeln(g1,'   Метод сеток для уравнения
теплопроводности');
        writeln(g1,'Выполнил студент 4 курса группы
');
        writeln(g1);
        write('Введите шаг по оси t '); read(ht);
        write('Введите число шагов по оси x ');
read(nx);
        write('Введите число шагов по оси t ');
read(nt);
        write('Введите шаги печати по оси x и по оси t
'); readln(sx,st);
        hx:=1.0/nx; n:=nx div sx+1; sx:=sx-1;
        writeln(g1,'Шаг по оси x  ',hx);
        writeln(g1,'Шаг по оси t  ',ht);
```

```
        u[1]:=f(0); u[nx+1]:=f(1);
        z[1]:=0; z[nx+1]:=1;
        for i:=2 to nx do begin z[i]:=(i-1)*hx;
u[i]:=f((i-1)*hx) end;
        writeln(g1);
        writeln(g1,'                          Решение
задачи');
Writeln(g1,'****************************************
************************');
write(g1,  '       *x= ');
for i:=1 to n do write(g1,z[i+(i-1)*sx]:4:2,'      ');
writeln(g1);
Writeln(g1,'****************************************
************************');
        t:=0; t1:=(st-1)*ht;
        writeln(g1);
        write(g1,'t= ',t:4:2,'*');
        for i:=1 to n do write(g1,u[i+(i-1)*sx]:9:4,'
');
        writeln(g1);
        for i:=1 to nt do
begin
        spar(hx,ht,nx,u); t:=t+ht; if(t-0.00001)>=t1
then
        begin t1:=t1+st*ht; write(g1,'t= ',t:4:2,'*');
              for j:=1 to n do  write(g1,u[j+(j-
1)*sx]:9:4,' '); writeln(g1)
        end
end;
```

```
Writeln(g1);
Writeln(g1,'*****************************************
*************************');
   close(g1)
end.
```

У ч е б н о е   и з д а н и е

Костин Алексей Владимирович
Костин Дмитрий Владимирович
Колесникова Инна Викторовна
Силаева Марина Николаевна

МЕТОД СЕТОК РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Подписано в печать 28.01.2019. Формат 60×84/16.
Усл. п. л. 2,5. Тираж 40. Заказ 153

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинала-макета
в типографии Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3