9

Algebra lineare avanzata

9.1 La norma di un vettore

La norma $\|x\|_2 = \|x\|$ (Euclidea) di un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ di dimensione n (anche detta modulo o lunghezza di x) è definita dalla seguente espressione.

$$\|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x'x} \tag{9.1}$$

La norma Euclidea di un vettore, quindi, si calcola estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore.

È immediato osservare che nella matrice degli scostamenti dalla media $\tilde{X}$ le norme dei vettori colonna $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, ..., $\tilde{X}_p$ non sono altro che gli scostamenti quadratici medi delle variabili originarie moltiplicati per $\sqrt{n-1}$.

Nella matrice degli scostamenti standardizzati Z le norme dei vettori colonna Z_1, Z_2, ..., Z_p sono tutte uguali a $\sqrt{n-1}$. Dal punto di vista algebrico quindi, l'operazione di standardizzazione equivale a lavorare con vettori colonna (variabili) che hanno la stessa origine e presentano la stessa norma.

Esercizio 9.1

Generare una matrice di numeri casuali di dimensione $n \times p$ dalla distribuzione χ^2 con 5 gradi di libertà.

1. Verificare tramite un ciclo `for` che la norma al quadrato di ogni colonna della matrice degli scostamenti dalla media divisa per $\sqrt{n-1}$ non è altro che la varianza campionaria delle variabili originarie. Calcolare la norma manualmente e tramite la funzione di MATLAB denominata `norm`

2. Tenendo presente che i numeri nella matrice sono stati generati da una distribuzione χ^2 con 5 gradi di libertà, quali valori ci attendiamo per le medie e le varianze campionarie di ogni colonna?