Calcolo delle probabilità

Testi

- **PICCOLO, D. (2001) *Statistica* - Il Mulino - Bologna.**
- **BORRA, S. e DI CIACCIO, A. (2008) *Statistica: metodologia per le scienze sociali ed economiche* – McGraw-Hill – Milano.**

definizione classica della probabilità (esempio)

definizione classica della probabilità (esempio)

- **Lancio un dado e fra tutte le 6 possibili facce la probabilità che esca quella con 5 è 1/6 !**

definizione classica della probabilità (esempio)

- **Lancio un dado e fra tutte le 6 possibili facce la probabilità che esca quella con 5 è 1/6 !**

definizione classica della probabilità (esempio)

- Lancio un dado e fra tutte le 6 possibili facce la probabilità che esca quella con 5 è 1/6 !

- La probabilità che esca un numero dispari è 3/6 !

definizione classica della probabilità (esempio)

- **Lancio un dado e fra tutte le 6 possibili facce la probabilità che esca quella con 5 è 1/6 !**

- **La probabilità che esca un numero dispari è 3/6 !**

definizione classica della probabilità (esempio)

- Lancio un dado e fra tutte le 6 possibili facce la probabilità che esca quella con 5 è 1/6 !

- La probabilità che esca un numero dispari è 3/6 !

- La probabilità che esca un numero maggiore di due è 4/6 !

momenti fondamentali della assiomatizzazione

(Kolmogoroff 1932)!

momenti fondamentali della assiomatizzazione
(Kolmogoroff 1932)!

- **individuazione dei concetti primitivi**

momenti fondamentali della assiomatizzazione

(Kolmogoroff 1932)!

- **individuazione dei concetti primitivi**

momenti fondamentali della assiomatizzazione

(Kolmogoroff 1932)!

- **individuazione dei concetti primitivi**

- **enunciazione dei postulati o assiomi**

momenti fondamentali della assiomatizzazione

(Kolmogoroff 1932)!

- **individuazione dei concetti primitivi**

- **enunciazione dei postulati o assiomi**

momenti fondamentali della assiomatizzazione

(Kolmogoroff 1932)!

- **individuazione dei concetti primitivi**
- **enunciazione dei postulati o assiomi**
- **dimostrazione dei teoremi**

concetti primitivi della probabilità

concetti primitivi della probabilità

- **prova** : esperimento soggetto ad incertezza

concetti primitivi della probabilità

- **prova** : esperimento soggetto ad incertezza

concetti primitivi della probabilità

- **prova** : esperimento soggetto ad incertezza

- **evento** : uno dei possibili risultati della prova

concetti primitivi della probabilità

- **prova** : esperimento soggetto ad incertezza

- **evento** : uno dei possibili risultati della prova

concetti primitivi della probabilità

- **prova** : esperimento soggetto ad incertezza

- **evento** : uno dei possibili risultati della
  prova

- **probabilità** : numero associato al verifi-
  carsi di un evento

operazioni tra eventi

$$\overline{A}$$

operazioni tra eventi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$

$$\overline{A}$$

operazioni tra eventi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$

$$\overline{A}$$

operazioni tra eventi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$
- **negazione** ; A **e** $\overline{A}$

operazioni tra eventi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$
- **negazione** ; A e $\overline{A}$

operazioni tra eventi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
- **negazione** ; A e $\overline{A}$
- **intersezione** $\cap$; $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

operazioni tra insiemi

$$\overline{A}$$

operazioni tra insiemi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$

$$\overline{\boldsymbol{A}}$$

operazioni tra insiemi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$

$$\overline{A}$$

operazioni tra insiemi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$
- **negazione** ; A e $\overline{A}$

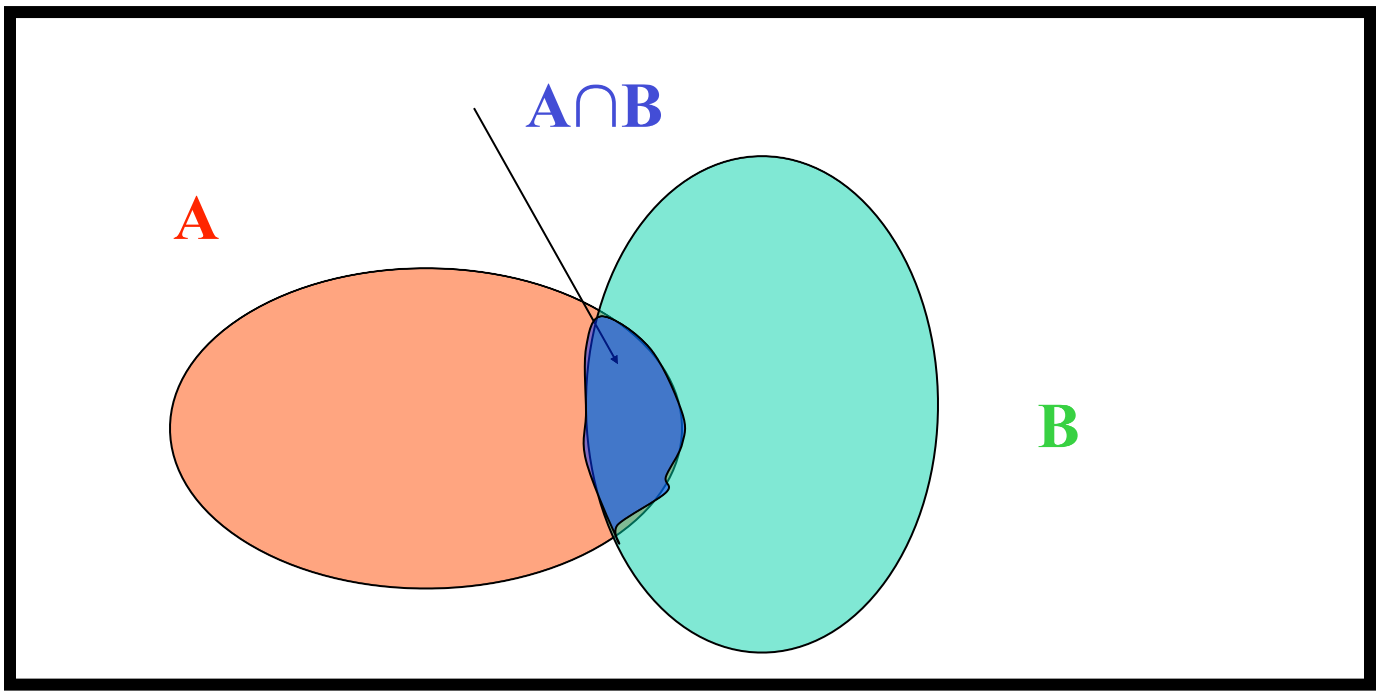
operazioni tra insiemi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$
- **negazione** ; A **e** $\overline{A}$

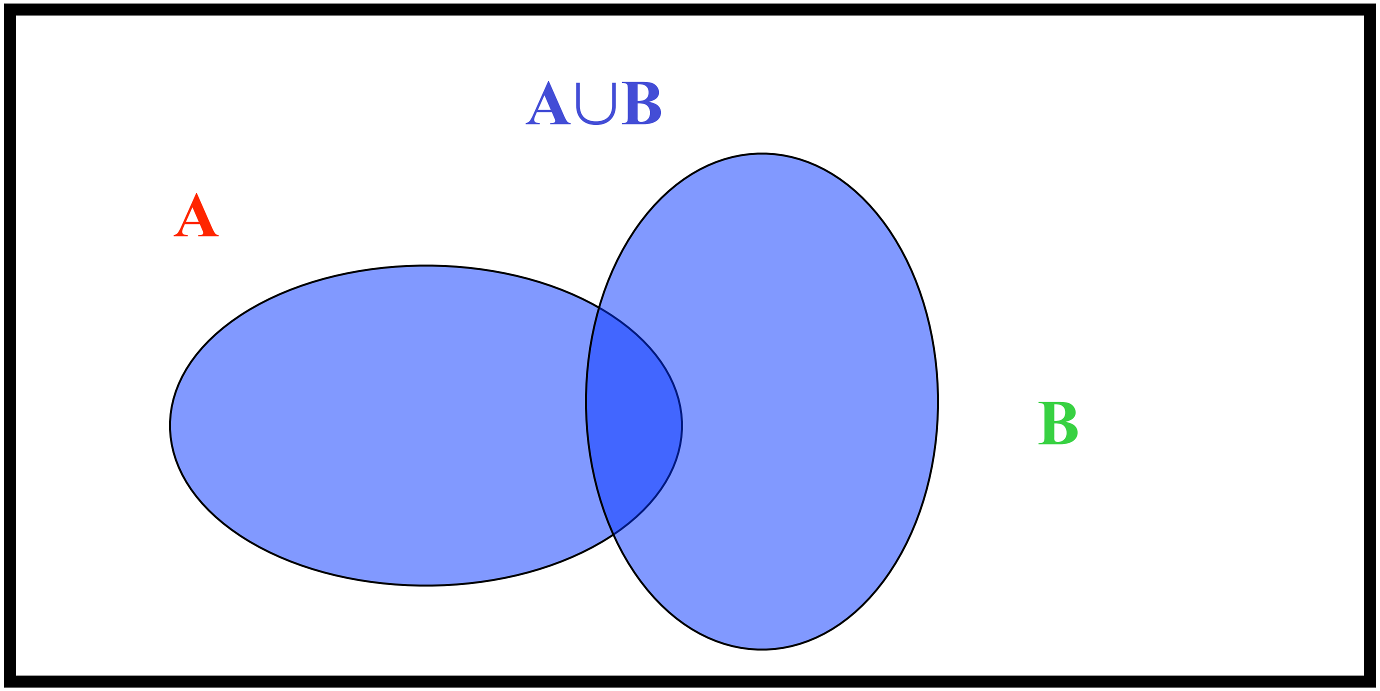
operazioni tra insiemi

- **unione** $\cup$; $\mathbf{A \cup B}$
- **negazione** ; $\boldsymbol{A}$ **e** $\overline{\boldsymbol{A}}$
- **intersezione** $\cap$; $\mathbf{A \cap B}$

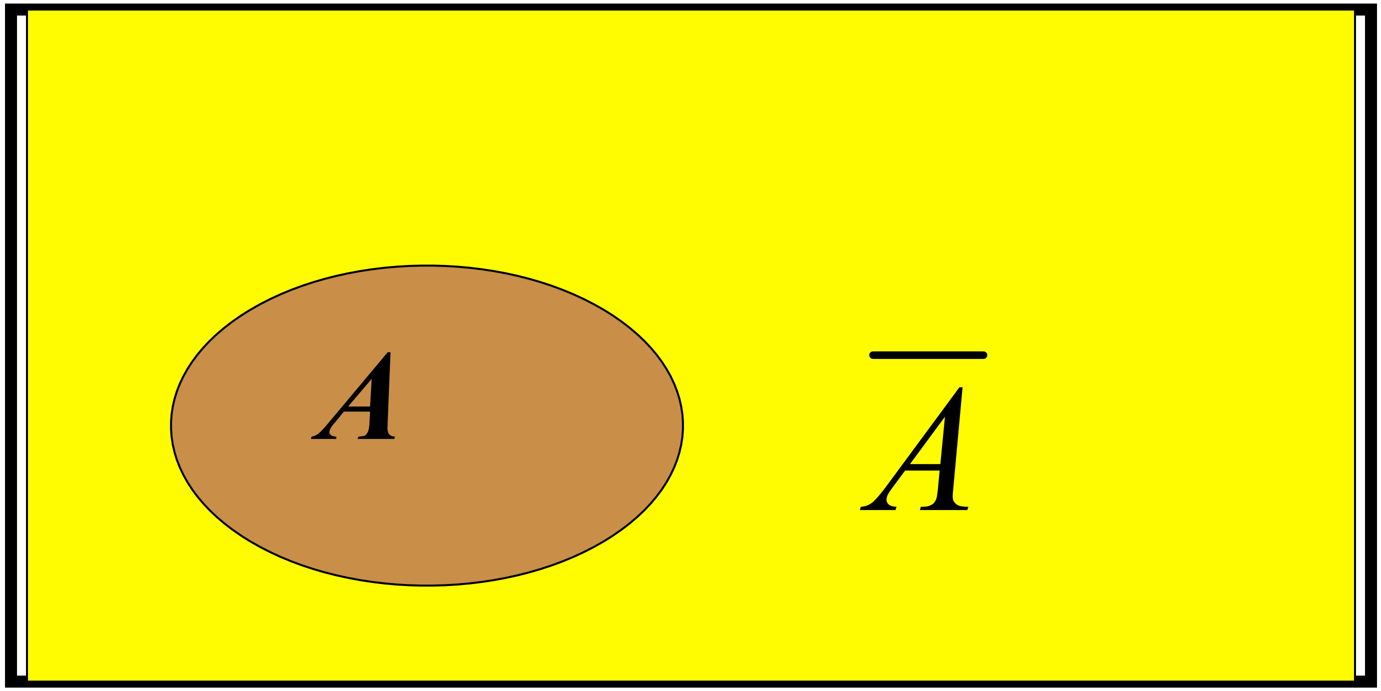
I diagrammi di Venn



I diagrammi di Venn



I diagrammi di Venn



Definizioni di eventi

Definizioni di eventi

- **Evento semplice (elementare)**

Definizioni di eventi

- **Evento semplice (elementare)**

Definizioni di eventi

- Evento semplice (elementare)

- Evento composto

Definizioni di eventi

- **Evento semplice (elementare)**

- **Evento composto**

Definizioni di eventi

- Evento semplice (elementare)
- Evento composto
- Spazio campione

- **Eventi incompatibili (se la loro intersezione è l'insieme vuoto)**

- **Eventi incompatibili (se la loro intersezione è l’insieme vuoto)**

- **Eventi incompatibili (se la loro intersezione è l’insieme vuoto)**

- **Eventi necessari (se la loro unione è l’evento certo)**

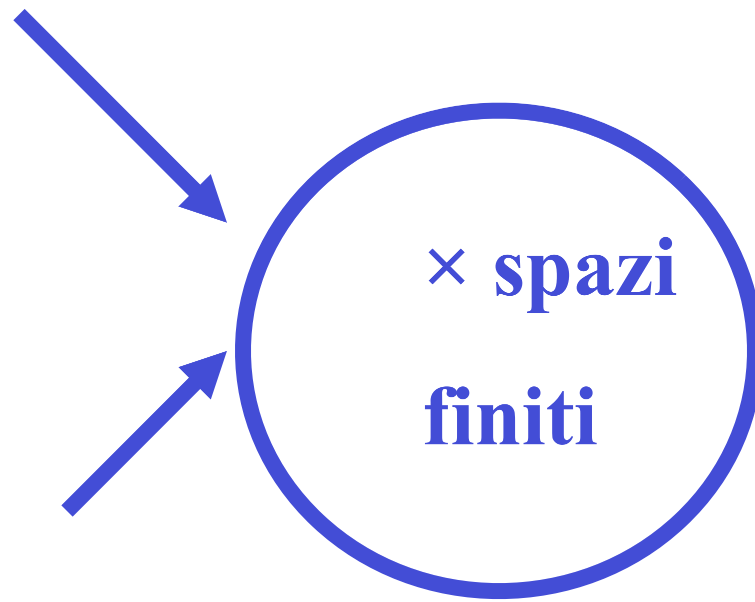
- **Eventi incompatibili (se la loro intersezione è l’insieme vuoto)**

- **Eventi necessari (se la loro unione è l’evento certo)**

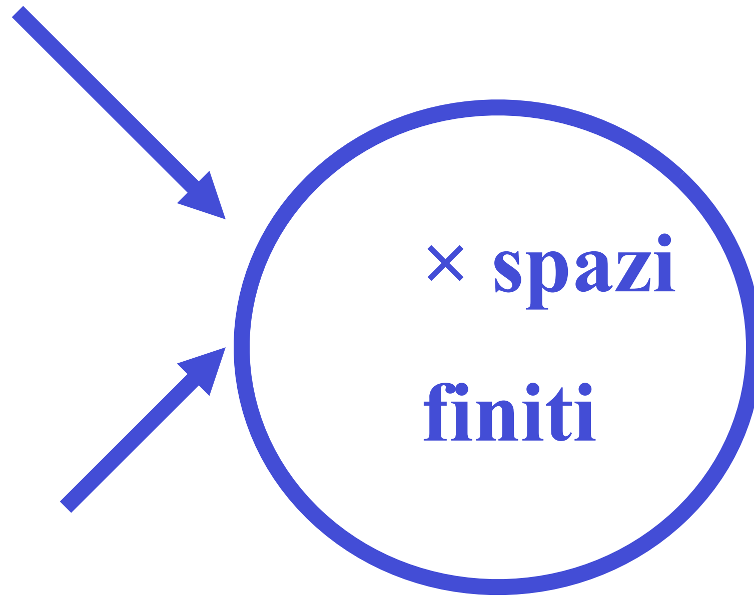
- **Eventi incompatibili (se la loro intersezione è l’insieme vuoto)**

- **Eventi necessari (se la loro unione è l’evento certo)**

- **Partizione dello spazio campione**


× spazi
finiti

- **Spazio campione (Evento certo Ω)**



- **Spazio campione (Evento certo Ω)**

$$|\Omega| = n$$

× spazi finiti

- **Spazio campione (Evento certo Ω)**

$$|\,\Omega\,| = n$$

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{A}$

× spazi finiti

- **Spazio campione (Evento certo Ω)**

$$|\Omega| = n$$

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{A}$

$$|\mathcal{A}| = 2^n$$

× spazi finiti

- **Spazio campione (Evento certo Ω)**

$$|\,\Omega\,| = n$$

- **Spazio degli eventi $\mathcal{A}$**

$$|\,\mathcal{A}\,| = 2^n$$

× spazi finiti

- **Evento impossibile $\emptyset$**

perché | A | proprio 2^k ?

- **si ricordi il binomio di Newton!**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0,\dots,n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **posto $x = y = 1$ diventa**

$$2^n = \sum_{k=0,\dots,n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots\dots + \binom{n}{k}$$

spazio di probabilità

$$(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$$

spazio di probabilità

- **Ω spazio campionario.**
- ***A* è una famiglia di sottoinsiemi di Ω tale che:**

  - Ω, Ø sono elementi di *A*;

  - se B appartiene ad *A*, allora anche il suo complementare è elemento di *A*;

  - se B e C sono elementi di *A*, allora la loro unione è elemento di *A*.

spazio di probabilità

- **P è una probabilità, ovvero una funzione P: $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ che verifica i seguenti postulati**

I postulati della probabilità

$$Pr(E_i) \geq 0 \quad per\ ogni\ E_i \subset \Omega$$

$$Pr(\Omega) = 1$$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

$$Pr(E_i) \geq 0 \quad \textit{per ogni } E_i \subset \Omega$$

$$Pr(\Omega) = 1$$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

- 1) $Pr(E_i) \geq 0 \quad per\ ogni\ E_i \subset \Omega$

$$Pr(\Omega) = 1$$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

- 1) $Pr(E_i) \geq 0 \quad per\ ogni\ E_i \subset \Omega$

$$Pr(\Omega) = 1$$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

- 1) $Pr(E_i) \geq 0 \quad \textit{per ogni } E_i \subset \Omega$

- 2) $Pr(\Omega) = 1$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

- 1) $Pr(E_i) \geq 0 \quad \textit{per ogni } E_i \subset \Omega$

- 2) $Pr(\Omega) = 1$

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$$

con gli eventi E_i *incompatibili a due a due*

I postulati della probabilità

- 1) $Pr(E_i) \geq 0 \quad per\ ogni\ E_i \subset \Omega$

- 2) $Pr(\Omega) = 1$

- 3) $Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(E_i)$

  con gli eventi E_i incompatibili a due a due

Principali teoremi

- 1) $P_r(B \cap \overline{A}) = P_r(B) - P_r(B \cap A)$

- 2) $P_r(\overline{A}) = 1 - P_r(A)$

- 3) $\boldsymbol{P_r}(\varnothing) = 0$

Principali teoremi (segue)

- 4) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P}_r(A) \leq \boldsymbol{P}_r(B)$

- 5) $0 \leq P_r(A) \leq 1$

- 6) $P_r(A \cup B) =$

$$= P_r(A) + P_r(B) - P_r(A \cap B)$$

dismutazioni

sono le *permutazioni* che non hanno elementi uguali nello stesso posto e sono in numero di:

$$!N = N! \sum_{i=0,1,\ldots,N} \frac{(-1)^i}{i!}$$

ad esempio: !3=2; !4=9 ; !5=44; !6=264

Esercizio

Tizio è un commesso viaggiatore che deve passare da 4 suoi clienti, scegliendoli a caso, uno per ciascuna mattina. Sempronio è un concorrente che deve utilizzare le stesse mattine per gli stessi clienti e

non vorrebbe incontrarsi con Tizio. Se sceglie pure lui a caso i 4 clienti da visitare qual è la probabilità che non lo incontri?

Esercizio

Due critici gastronomici devono valutare i 6 migliori ristoranti di Parigi. Iniziano e finiscono negli stessi giorni, visitando entrambi un ristorante al giorno (solo la sera a cena) e scegliendo in modo del tutto casuale i ristoranti da valutare. Qual è la probabilità che non si incontrino mai? (Ovviamente per entrambi la scelta del ristorante è sì a caso ma…senza ripetizioni!)

dismutazioni

il rapporto fra *dismutazioni* e *permutazioni*, per N→ ∞ tende ad $\frac{1}{e}$ **e vi converge pure molto rapidamente !**

$$\lim_{N \to \infty} \frac{!N}{N!} = \frac{1}{e} \cong 0.367879$$

Esercizio

Un’urna contente b palline bianche e g gialle.

Determinare:

1. La probabilità che la prima pallina sia gialla.
2. La probabilità che la seconda pallina sia gialla.

Esercizio

Tre cacciatori: A,B e C avvistano una lepre e sparano contemporaneamente alla povera bestiola. Le probabilità di colpire l'animale sono, rispettivamente P[A]= 0.3; P[B]= 0.4 e P[C]= 0.7 (i relativi eventi sono indipendenti fra loro). Calcolare la probabilità dell'evento E º{la lepre è colpita}.

o subordinata

Probabilità condizionata

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Eventi indipendenti

- Due eventi A e B si dicono **indipendenti** se e solo se

$$P_r(A|B) = P_r(A)$$

- oppure

$$P_r(A \cap B) = P_r(A)P_r(B)$$

Teorema

In una certa prova, se A e B sono eventi indipendenti, allora lo sono anche

$$\bar{\boldsymbol{A}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{A} \quad e \quad \bar{\mathrm{B}}$$

$$\bar{\mathrm{A}} \quad e \quad \bar{\mathrm{B}}$$

Esercizio

Siano A e B due eventi tali che:

1. $P(A) = 3/8$
2. $P(B) = 5/8$
3. $P(A \cup B) = 3/4$

Determinare $P(A|B)$ e $P(B|A)$

Esercizio

Determinare $P(B|A)$ se:

1. A è un sottoinsieme di B.
2. A e B sono incompatibili.

Esercizio

Siano A e B due eventi tali che:

1. $P(A) = 1/4$
2. $P(B) = p$
3. $P(A \cup B) = 1/3$

Determinare *p* se: A e B sono incompatibili; A e B sono indipendenti; A è un sottoinsieme di B.

Eventi mutuamente indipendenti

- Una collezione di eventi $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \ldots \subset \Omega$ sono *mutuamente indipendenti* se, per ogni gruppo di $m > 1$ eventi, risulta che

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap \ldots\ldots\ldots \cap E_m) =$$
$$\Pr(E_1)\Pr(E_2)\ldots\ldots\ldots\Pr(E_m)$$

Osservazione

Va ricordato che indipendenza e incompatibilità non hanno nessun legame tra loro: la prima è una relazione tra probabilità, la seconda tra eventi!!!
Possiamo solo dire che se due eventi incompatibili hanno probabilità positive, allora non possono essere indipendenti.

Teorema delle probabilità totali (esempio)

Tre dadi <u>non equi</u> hanno la probabilità di far uscire il 5 (evento A) rispettivamente con 0.1 0.2 e 0.3. Scegliendo a caso un dado qual è la probabilità che esca il 5? $\Omega \equiv \{ E_1, E_2, E_3 \}$

$$P_r(A) =$$

$$P_r(A|E_1)P_r(E_1) + P_r(A|E_2)P_r(E_2) + P_r(A|E_3)P_r(E_3)$$

Teorema delle probabilità totali

Data una partizione di $\Omega \equiv \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$
per ogni evento A
si ha che

$$\boldsymbol{P}_r(A) = \boldsymbol{P}_r(A|E_1)\boldsymbol{P}_r(E_1) + \boldsymbol{P}_r(A|E_2)\boldsymbol{P}_r(E_2) + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \boldsymbol{P}_r(A|E_n)\boldsymbol{P}_r(E_n)$$

Esercizio

Un’azienda possiede 3 stabilimenti A, B e C che producono rispettivamente il 10%, 30%, 60% della produzione totale. E’ noto che dai 3 stabilimenti provengono dei pezzi difettosi in percentuale rispettivamente del 10%, 5%, 5%. Qual è la probabilità che un pezzo preso a caso sia difettoso?

Esercizio

Relativamente all'esercizio precedente, viene estratto un pezzo e sappiamo che è difettoso. Qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento A?

Esercizio

Si considerino 3 Urne, aventi tutte la stessa probabilità di essere selezionate. In particolare abbiamo:

1. Urna 1: 5 verdi, 4 rosse, 1 nera.
2. Urna 2: 3 verdi, 2 rosse.
3. Urna 3: 2 verdi, 6 rosse, 9 nere.

Si prende a caso una pallina, è nera. Qual è la probabilità che venga dalla prima urna? E dalla seconda?

una riflessione sulla $\cap$

- Si ha che

$$\boldsymbol{P}_r(A \cap B) = \boldsymbol{P}_r(A)\boldsymbol{P}_r(B|A)$$

- oppure

$$\boldsymbol{P}_r(A \cap B) = \boldsymbol{P}_r(B)\boldsymbol{P}_r(A|B)$$

Teorema di *Bayes* (formulazione ridotta)

$$\mathrm{P_r}\left(A \middle| B\right) = \frac{\mathrm{P_r}\left(B \middle| A\right)\mathrm{P_r}\left(A\right)}{\mathrm{P_r}\left(B\right)}$$

Teorema di *Bayes*
(esempio del lancio del dado)

- **L'evento *E* è quello relativo all'uscita del 6**

- **L'evento *A* è l'informazione ricevuta che il risultato è pari!**

Teorema di *Bayes*

(esempio del lancio del dado)

probabilità finale che esca il 6, sapendo *A*

probabilità iniziale che esca il 6

$$P_r\left(E \middle| A\right) = \frac{1}{6}\;\frac{1}{\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Esercizio

Due carte sono colore di rosso, una da una sola parte e l’altra da entrambi i lati. Si estrae una carta a caso ed il solo lato visibile è rosso. Qual è la probabilità che anche l’altro sia rosso?

Esercizio

Una popolazione si compone del 40% di fumatori e del 60% di non fumatori. Si sa che il 25% dei fumatori ed il 7% dei non fumatori sono affetti da una malattia respiratoria. Si seleziona una persona scelta a caso e risulta malata. Qual è la probabilità che sia un fumatore?

Esercizio

Tre mobili, tra loro uguali, contengono due cassetti. In particolare:

1. Il primo ha una moneta d’oro in entrambi i cassetti;
2. Il secondo ha moneta d’argento nel primo ed una d’oro nel secondo;
3. Il terzo una moneta d’argento in entrambi i cassetti.

Si apre a caso un cassetto e si trova una moneta d’oro. Qual è la probabilità che anche l’altro contenga una moneta d’oro?

Esercizio (Monty Hall Problem)

Ci sono 3 porte A, B, C ed una sola contiene un premio. Il conduttore del gioco chiede al concorrente di selezionare una porta. Dopo il conduttore apre una delle altre due porte (aprendo sempre quella senza premio). A questo punto da al concorrente la possibilità di cambiare porta. Cosa dovrebbe fare?

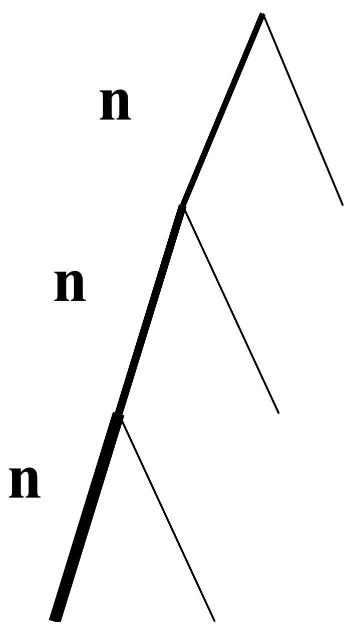
Teorema di *Bayes*

Data una partizione di per ogni evento *A* si ha che $\Omega \equiv \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

$$\boldsymbol{P}_r(E_i \mid A) = \frac{\boldsymbol{P}_r(A \mid E_i)\,\boldsymbol{P}_r(E_i)}{\boldsymbol{P}_r(A \mid E_1)\,\boldsymbol{P}_r(E_1) + \dots\dots + \boldsymbol{P}_r(A \mid E_n)\,\boldsymbol{P}_r(E_n)}$$

Regola del prodotto
(esempio dell'estrazione da un'urna)

Da un'urna con 10 palle, 4 nere e 6 rosse, qual è la probabilità *p* di estrarne 3 nere consecutivamente?



I palla nera 4/10

II palla nera 3/9

III palla nera 2/8

$$p = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

Regola del prodotto

Se abbiamo *n* eventi A_i, i=1,…,*n*, allora risulterà sempre verificato che:

$$Pr\left[A_1 A_2 \ldots A_n\right] = P_r\left[A_1\right] P_r\left[A_2 \middle| A_1\right] P_r\left[A_3 \middle| A_1 A_2\right] \ldots P_r\left[A_n \middle| A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\right]$$

Esercizi

Si hanno due urne:

1. Urna 1: 3 palline rosse e 2 verdi.
2. Urna 2: 2 palline rosse e 5 verdi.

Si prende un'urna a caso, si estrae una pallina e la si mette nell'altra urna. Quindi si estrae una pallina dalla seconda urna. Determinare la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore

Esercizi

L'urna A contiene due palle bianche e due nere ; l'urna B contiene tre palle bianche e due nere. Si trasferisce una palla da A a B e poi si estrae da B una palla che risulta essere bianca. Qual è la probabilità che fosse bianca la palla trasferita?

Esercizio

Si supponga di avere un'urna contenente quattro (4) palline bianche e/o nere in una proporzione del tutto arbitraria. Si supponga di estrarne una. E' nera. Se ne estrae un'altra. E' nera anche questa.
Qual è la probabilità che anche la successiva pallina estratta sia nera?
p.s. le estrazioni sono, ovviamente, senza reimmissione!

Esercizi

I tre moschettieri (dunque quattro persone) hanno mischiato i loro stivali nel corridoio dell'albergo nel quale sono ospitati.
D'Artagnan si alza per primo e prende due stivali a caso. Calcolare la probabilità che:

1. i due stivali siano proprio i suoi
2. i due stivali siano una coppia ben assortita

Esercizi

La duchessa d'Aquitania e la duchessa di Borgogna aspettano entrambe un erede dai rispettivi consorti. Dimostrare che i seguenti eventi sono indipendenti, due a due, ma non tre a tre.

A=L'erede d'Aquitania è maschio

B=L'erede di Borgogna è maschio

C=I due eredi hanno lo stesso sesso

Esercizio

Si hanno a disposizione 7 palle che possono essere lanciate in 10 buche differenti.
Si supponga che ciascuna palla possa cadere in modo del tutto casuale in ciascuna delle 10 buche ed in maniera indipendente l'una dall'altra. Qual è la probabilità che tutte le palle cadano in buche diverse tra loro?

Esercizio

Un'urna contiene 50 palle di cui una sola è rossa e le altre nere. Antonio e Cesare estraggono a sorte chi gioca per primo e poi, alternativamente, estraggono una palla per volta (senza reimmissione). Vince il gioco chi estrae la palla rossa. Chi è favorito in questo gioco e . . . . perché?

Esercizio

Biancaneve sta pulendo la cucina quando entra la Strega cattiva sotto le spoglie di una mite vecchina, offrendole un cesto con cinque mele. Due mele sono buone, due bacate ed una avvelenata. Biancaneve, grata ed ignara, comincia a mangiarle prendendole a caso,una per volta, dal cesto. Quando, però, si avvede che quella presa è bacata, la getta insieme a tutte quelle rimaste nel cesto ad un porcellino affamato che subito le trangugia. E' più probabile che resti avvelenata Biancaneve oppure il porcellino?

le variabili casuali

la variabile casuale (v.c.) *X*

una grandezza numerica che non conosciamo ancora (al nostro livello di informazione):

- **la temperatura domani alle 12 ad *Aquila*;**
- **il cambio $/€ del prossimo fine settimana;**
- **il numero di figli degli sposi *Z* e *W* fra 10 anni;**
- **il valore delle azioni *Fiat* alla borsa questa sera**

Variabili aleatorie

Una variabile aleatoria è una regola (funzione) che associa ad ogni evento un numero reale.

$$X : \Omega \text{ ® } R$$

Esercizio

Un dado non equo ha la peculiarità di avere la probabilità, per ciascuna faccia, proporzionale al doppio del numero impresso sulla stessa. Definire ***X*** la v.c. corrispondente al risultato del lancio del dado.

Esercizio

Si lancino due dadi. Definire le variabile aleatorie

X = somma dei due punteggi

Y = massimo dei suoi valori

la variabile casuale (v.c.) *X*

- **la v.c. è definita perfettamente tramite la sua funzione di densità $f(x)$ o la sua funzione di distribuzione $F(x)$**
- **quest'ultima permette di collegarla alla probabilità con la relazione**

$$\boxed{F(x)=P_r[\, X \le x \,]}$$

Esercizio

Una moneta viene truccata in modo che la probabilità di testa sia 2/3. La moneta viene lanciata 3 volte. Rappresentare la v.a.

X = numero di teste consecutive

valore atteso di una v.c. discreta

se *X* è una v.c. discreta (finita o numerabile) si definisce il suo valore atteso nella maniera che segue:

$$E\left[X\right] = \mu = \sum_{i \in I_X} p_i \times x_i$$

valore **atteso** di una v.c. discreta

si prenda ad esempio il risultato (*X*) del lancio di un dado regolare

$$E\left[X\right] = \sum_{i \in I_X} p_i \times x_i = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \cdots \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$$

Varianza

$$\mathrm{VAR}[X] = \sigma^2 = \sum_{i \in I_X} p_i \times (x_i - \mu)^2$$

Esercizio

Un'urna contiene tre palle numerate con 1,2 e 3. Vengono estratte due palle, senza reimmissione dall'urna. Sia X la v.c. relativa al primo numero estratto ed Y la v.c. relativa al più piccolo dei due numeri estratti. Calcolare la media di X e Y.

Esercizio

Un'urna contiene quattro palle blu e quattro rosse. Da questa vengono estratte, senza reimmissione, due (2) palle. Si indichi con X la v.c. relativa al numero di palle rosse estratte. Si calcoli la media, la varianza e si rappresenti graficamente la funzione di ripartizione di X.

Esercizio

Un giocatore lancia un dado. Se si presenta un numero primo vince quel numero di euro, in caso contrario egli perde quel numero di euro. Si descriva la variabile aleatoria X relativa ai possibili esiti della prova.

la v. c. *X* di *Bernoulli*

- **è legata all'esperimento più semplice che si può immaginare, tipo: pari/dispari; testa/croce; in generale successo/insuccesso**
- **la sua funzione di densità risulta**

è una probabilità!

$$f(x;p) = \begin{cases} p & x = 1 \Leftrightarrow successo \\ \\ 1 - p = q & x = 0 \Leftrightarrow insuccesso \end{cases}$$

la v. c. *X* di *Bernoulli* caratteristiche *teoriche*

$$\textit{media} = \mu_X = p$$

$$\textit{varianza} = \sigma_X^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q$$

la v. c. *X geometrica*

E' legata al semplice esperimento :

quanti lanci debbo fare per ottenere la prima testa; la sua funzione di densità risulta

$$f(x) = p \times (1-p)^{x-1} \quad \forall\, x = 1,2,........$$

è una probabilità!

lancio un tetraedro regolare, qual è la probabilità che esca la prima volta il 3 al terzo lancio?

$$P_r[X=3] = (1/4)*(1-1/4)^2 = 0.140625$$

Esercizio

Il capitano Achab, mentre sta governano la sua baleniera in piena tempesta, per confortarsi un poco cerca di accendere la pipa di cui è accanito fumatore. Ha 4 fiammiferi solamente e la probabilità di accenderla con ciascuno di essi, visto il vento da tregenda, è solamente di 1/3. Definire X la v.c. pari al numero di fiammiferi utilizzabili dal capitano Achab.

la v. c. *X geometrica* caratteristiche *teoriche*

$$media = \mu_X = 1/p$$

$$varianza = \sigma_X^2 = (1-p)/p^2$$

la v. c. X binomiale

è legata ad n prove *bernoulliane*, indipendenti e tutte uguali fra loro, la sua funzione di densità risulta

$$f(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n-x}$$

è una probabilità!

$$\forall\ x = 0,1,2,\ldots,n$$

la v. c. *X* *Binomiale* caratteristiche *teoriche*

$$\textit{media} = \mu_X = n \cdot p$$

$$\textit{varianza} = \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$$

Esercizio

Una moneta viene lanciata 6 volte. Determinare la probabilità che escano due teste. Rappresentare, inoltre, la v.a.

X = numero di teste uscite.

Esercizio

Un dado viene lanciato 7 volte. Determinare la probabilità che si presenti 3 volte il numero 5.

Esercizio

La probabilità che un uomo colpisca un bersaglio è 1/3. Se egli spara 5 volte, qual è la probabilità che colpisca il bersaglio almeno due volte?

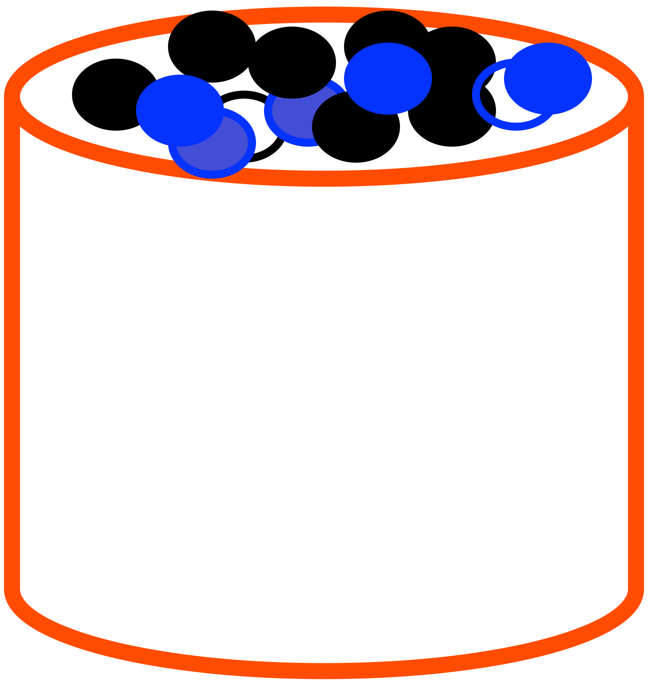
Esercizio

Due giocatori giocano a testa o croce con una moneta equa. Il giocatore A lancia 5 volte la moneta mentre B la lancia 4 volte. Siano X e Y il numero di volte che esce testa rispettivamente per A e B. Qual è la probabilità che X=Y?

Esercizio

Una scatola contiene 3 palline rosse e 2 palline bianche. Si estrae, con reimmissione, tre volte una pallina. Determinare la probabilità che sia estratta una pallina rossa. Rappresentare la v.a. relativa al numero di palline rosse estratte.

una bella....distribuzione da un problema pratico!!!!!



un'urna contiene *H* palle di cui *b* blu e le altre *H-b* nere

qual è la probabilità che estraendone *n* senza reimmissione *x* di queste siano blu?

la v.c. *X* *ipergeometrica*

$$P_r\left[X = x\right] = f(x, n, H, b) = \frac{\binom{H-b}{n-x} \times \binom{b}{x}}{\binom{H}{n}}$$

$$Max(0, n - H + b) \geq x \geq \min(n, b)$$

la v.c. *X* *ipergeometrica*

- **è legata alle estrazioni in blocco!**
- **in ciascuna delle estrazioni la probabilità si modifica in funzione del risultato precedente**

Esercizio

Mario gioca 2 due numeri al gioco del lotto.
Qual è la probabilità di fare ambo?
Qualora giocasse 7 numeri, quale sarebbe la probabilità di fare ambo?

Esercizio

Le 52 carte da gioco vengono accuratamente mescolate e distribuite tra 4 giocatori. Qual è la probabilità che un giocatore prefissato riceva 0,1,2,3,4 assi?

Esercizio

Un giocatore lancia un dado. Se si presenta un numero primo vince quel numero di euro, in caso contrario egli perde quel numero di euro. Si descriva la variabile aleatoria X relativa ai possibili esiti della prova.

Esercizi prima parte

Due giocatori hanno ciascuno in mano un mazzo di carte francesi ben mischiate. Le carte complessivamente sono 52.
Scoprono contemporaneamente, ciascuno dal proprio mazzo, una carta per volta. Qual è, approssimativamente, la probabilità che non estraggano nello stesso istante la stessa carta?

Esercizi prima parte

Il Sig. Pinco Pallino parte dall'aeroporto di New York per Roma con tre valigie che gli dovranno essere consegnate sul tapis roulant nella città di destinazione. Considerando che le valigie del suo volo vengono consegnate all'arrivo in modo del tutto casuale e che sono complessivamente 120, qual è la probabilità che esse siano una di seguito all'altra sul tapis roulant?

Esercizi prima parte

Un'urna contiene 10 palle numerate da 0 a 9. Vengono estratte, con reimmissione, cinque palle per formare un numero di cinque cifre. Qual è la probabilità che il numero formato sia palindromo?

Esercizi prima parte

Quanti anagrammi si possono fare con la parola dialettale sicula quaquaraqua?

Esercizi prima parte

Determinare la probabilità che un numero di 5 cifre, generato in modo del tutto casuale, abbia almeno due cifre uguali.

Esercizi prima parte

Uno studio medico sulla tubercolosi (TBC) effettuato su una certa popolazione ha fornito i seguenti risultati:

- P[TBC] = 0.001
- P[test postivo|TBC] = 0.999
- P[test postivo|TBC^c] = 0.002

Determinare la probabilità che un individuo, scelto casualmente fra quelli per i quali il test è positivo, abbia veramente la tubercolosi. In altri termini calcolare P[TBC|test postivo]

Esercizi prima parte

Un'urna contiene 4 palline numerate da 1 a 4. Se ne estraggono due senza reimmissione. Sia X il numero della prima pallina estratta ed Y il più grande tra i due numeri estratti. Calcolare media e varianza delle due variabili aleatorie. Calcolare anche $P(X=1|Y=3)$.

Esercizi prima parte

La scatola A contiene nove carte numerate da 1 a 9. La scatola B contiene 5 carte numerate da 1 a 5. Viene scelta una scatola a caso e ne viene estratta una. Il numero è pari, qual è la probabilità che provenga dalla scatola A?

Esercizi prima parte

Una scatola contiene una moneta normale ed una con testa su entrambe la facce. Si estrae a caso e si lancia una moneta. Se si presenta testa , si lancia l'altra moneta altrimenti si lancia nuovamente la stessa moneta. Determinare la probabilità che al secondo lancio si presenti testa.

Esercizio

Si lanci una moneta finché non si è presentata una testa o croce quattro volte. Determinare la variabile aleatoria X relativa al numero di lanci della moneta.