

Esercizi di probabilità

Esercizio 1. Se A e B sono due eventi incompatibili tali che $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.6$. Quanto vale $P(B)$?

Esercizio 2. Se $P(A) = 1/3$ e $P(B^c) = 1/4$, possono essere A e B incompatibili?

Esercizio 3. Dimostrare che se $P(A^c) = \alpha$ e $P(B^c) = \beta$, allora $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$.

Esercizio 4. Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Trovare:

- $P(\omega_1)$ se $P(\omega_2) = 1/3$, $P(\omega_3) = 1/6$, $P(\omega_4) = 1/9$.
- $P(\omega_1)$ e $P(\omega_2)$ se $P(\omega_3) = P(\omega_4) = 1/4$ e $P(\omega_1) = 2P(\omega_2)$.
- $P(\omega_1)$ se $P(\omega_2 \cup \omega_3) = 2/3$, $P(\omega_2 \cup \omega_4) = 1/2$ e $P(\omega_2) = 1/3$.

Esercizio 5. Una moneta viene truccata in modo tale da rendere la probabilità che si presenti testa il doppio di quella che si presenti croce. Determinare $P(C)$ e $P(T)$.

Esercizio 6. Due uomini, u_1 e u_2 , e tre donne, d_1 , d_2 e d_3 , sono impegnati in un torneo di scacchi. Le persone dello stesso sesso hanno la stessa probabilità di vittoria, ma ciascun uomo ha probabilità di vittoria doppia rispetto a quella di qualsiasi donna. Determinare:

- La probabilità che una donna vinca il torneo.
- Se u_1 e d_1 sono sposati, qual è la probabilità che uno di essi vinca il torneo.

Esercizio 7. Si prendano a caso tre lampadine fra 15 disponibili, di cui 5 difettose. Determinare:

- La probabilità che nessuna sia difettosa.
- La probabilità che esattamente una sia difettosa.
- La probabilità che almeno una sia difettosa.

Esercizio 8. Due carte sono estratte a caso da 10 carte numerate da 1 a 10. Determinare:

- La probabilità che la somma sia dispari se le carte vengono estratte senza reimmissione.
- La probabilità che la somma sia dispari se le carte vengono estratte con reimmissione.
- La probabilità che la somma sia dispari se le carte vengono estratte contemporaneamente.

Esercizio 9. Un dado viene tarato in modo che i numeri pari hanno la stessa probabilità di presentarsi, i numeri dispari hanno la stessa probabilità di presentarsi e, inoltre, ciascun numero pari ha probabilità pari a due volte di quella di ciascun numero dispari. Determinare:

- La probabilità che si presenti un numero pari.
- La probabilità che si presenti un numero primo.
- La probabilità che si presenti un numero primo dispari.

Esercizio 10. In una stanza ci sono n persone. Qual è la probabilità che almeno 2 di esse festeggino il compleanno lo stesso giorno? Rispondere considerando sempre un anno composto da 365 giorni.

Esercizio 11. Un'urna contiene b palline bianche e g gialle. Determinare:

- La probabilità che la prima pallina sia gialla.
- La probabilità che la seconda pallina sia gialla.

Esercizio 12. In una lotteria vengono venduti 1 milione di biglietti. Al momento dell'estrazione da ognuna di 6 urne, contenti ciascuna dieci palline numerate da 0 a 9, vengono estratte le cifre del biglietto vincente partendo da quella di sinistra.

1. Qual è la probabilità che esca il numero 009672?
2. Come cambia la probabilità di vittoria dopo che dalle prime 4 urne sono stati estratti i numeri 0096?

Esercizio 13. Si consideri la prova consistente nel lancio di due dadi. Rispondere alle seguenti domande:

- Definire l'insieme Ω degli eventi elementari.
- Determinare la cardinalità dello spazio degli eventi A .
- Calcolare la probabilità di ottenere un punteggio pari a 8.
- Calcolare la probabilità di ottenere un punteggio maggiore di 6.

Esercizio 14. Ripetere l'esercizio precedente supponendo che il secondo dado sia truccato in modo che la probabilità che si presenti un numero sia proporzionale a quel numero (ad esempio, la probabilità che si presenti 4 è doppia rispetto a quella che si presenti 2, ecc.).

Esercizio 15. Si consideri un'urna con 40 palline bianche e 60 palline rosse. Si estraggono due palline senza reimmissione. Determinare la probabilità che la seconda pallina sia rossa.

Esercizio 16. Un campione di k oggetti viene estratto da una popolazione, più numerosa, di n oggetti. Siano N_w e N_{w0} il numero di diversi campioni che possono essere estratti secondo che, rispettivamente, il campionamento sia fatto con o senza reimmissione. In particolare:

- Trovare i valori di N_w e N_{w0} (nell'estrazione si dà importanza all'ordine).
- Mostrare che quando n è grande, questi due valori sono approssimativamente uguali (nel senso che il rapporto è vicino a 1).

Esercizio 17. Tizio è un commesso viaggiatore che deve passare da 4 suoi clienti, scegliendoli a caso, uno per ciascuna mattina. Sempronio è un concorrente che deve utilizzare le stesse mattine per gli stessi clienti e non vorrebbe incontrarsi con Tizio. Se sceglie pure lui a caso i 4 clienti da visitare qual è la probabilità che non lo incontri?

Esercizio 18. Si gettano n palle in n buche differenti. E' più probabile che cadano tutte nella stessa buca oppure che ognuna cada in una buca differente?