Capitolo 4

Spazi Vettoriali e Sottospazi Vettoriali

4.1 Spazi vettoriali

Introduciamo in questo paragrafo la definizione di spazio vettoriale, concetto su cui si basa l'algebra lineare. Nel testo si studieranno, salvo avviso contrario, solo gli spazi vettoriali costruiti sul campo dei numeri reali, cioè solo spazi vettoriali reali. Cenni sugli spazi vettoriali complessi sono stati inseriti nei paragrafi "Per saperne di più".
La definizione di spazio vettoriale trae origine dal ben noto esempio dell'insieme dei vettori V_3 nello spazio tridimensionale ordinario, già trattato nel capitolo precedente. Si intende algebrizzare tale concetto con il duplice scopo di dimostrare teoremi dalle conseguenze fondamentali nel caso dello spazio vettoriale ordinario V_3 e di estendere tali nozioni a spazi vettoriali di dimensione superiore a tre.

Definizione 4.1 *Un insieme V si dice* spazio vettoriale sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ *o* spazio vettoriale reale *se sono definite su V le due operazioni seguenti:*

A. *la somma:*

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

rispetto alla quale V ha la struttura di gruppo commutativo, ossia valgono le proprietà:

1. *commutativa:* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*;*

2. *associativa:* $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$*;*

3. *esistenza dell'elemento neutro:* $\exists\, \mathbf{o} \in V \mid \mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$*;*

4. *esistenza dell'opposto:* $\forall \mathbf{x} \in V \;\; \exists - \mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$*;*

B. *il prodotto per numeri reali:*

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, \mathbf{x}) \longmapsto \lambda\mathbf{x}$$

per cui valgono le seguenti proprietà:

1. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$*;*
2. $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*
3. $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*
4. $1\,\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$.

Gli elementi di V prendono il nome di vettori *e saranno, in generale, indicati con le lettere minuscole in grassetto. Gli elementi di $\mathbb{R}$ prendono il nome di* scalari*, quindi il prodotto di un numero reale per un vettore è spesso anche detto* prodotto di uno scalare per un vettore. *L'elemento neutro* $\mathbf{o}$ *di V viene detto* vettore nullo.

Osservazione 4.1 Si può introdurre una definizione analoga di spazio vettoriale ma costruito su un qualsiasi campo, per esempio sul campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Nel caso di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ lo spazio vettoriale si dice anche *spazio vettoriale complesso*.

Osservazione 4.2 È chiaro che il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un esempio evidente di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto, come del resto si otterrà come caso particolare dell'Esempio 4.3, ma $\mathbb{R}$ è anche un esempio di spazio vettoriale sul campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Osservazione 4.3 Si osservi che le proprietà **B.**1. e **B.**2., a differenza di quanto accade per $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con l'usuale somma e prodotto di numeri reali, non possono essere chiamate proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma, in quanto esse coinvolgono elementi appartenenti ad insiemi diversi. Analogamente, la proprietà **B.**3. non è la proprietà associativa.

Verranno descritti di seguito gli esempi ritenuti più significativi, si rimanda al Paragrafo 4.5 per ulteriori esempi ed esercizi.

Esempio 4.1 Iniziamo con gli esempi che hanno dato il nome alla struttura di spazio vettoriale appena definita. Gli insiemi dei vettori di una retta vettoriale V_1, di un piano vettoriale V_2 e dello spazio vettoriale ordinario V_3 sono esempi di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di un numero reale per un vettore definite nel Capitolo 3.

Esempio 4.2 Gli insiemi delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$ di m righe e n colonne, ad elementi reali, definiti nel Capitolo 2, sono esempi di spazi vettoriali reali rispetto alle operazioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per un numero reale là definite.

Esempio 4.3 L'*esempio fondamentale*:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

è un caso particolare dell'esempio precedente ma, visto il ruolo fondamentale che avrà in tutto il corso, lo trattiamo a parte. La somma di due n-uple di $\mathbb{R}^n$ è definita come:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ è dato dalla n-upla $(0, 0, \dots, 0)$ e l'opposto del vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è il vettore $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Il prodotto di un numero reale λ per un elemento di $\mathbb{R}^n$ è definito da:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Si osservi che, come caso particolare, $\mathbb{R}$ ha la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. In questo caso, le operazioni di somma e di prodotto per numeri reali coincidono con le usuali operazioni di somma e di prodotto di numeri reali.

Esempio 4.4 Il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ (ma non su $\mathbb{R}$), analogamente il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ ha la struttura di spazio vettoriale su se stesso e anche su $\mathbb{R}$. Si lascia per esercizio la spiegazione dettagliata di tali affermazioni.

Esempio 4.5 L'insieme delle funzioni reali di variabile reale $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dove la somma di due elementi f e g di $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ è definita da:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e il prodotto di una funzione $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ per un numero reale λ è:

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si verifica facilmente che il vettore nullo è la funzione nulla $\mathcal{O}$, definita da $\mathcal{O}(x) = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, l'opposto di f è la funzione $-f$ definita in modo evidente:

$$(-f)(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, anche l'insieme delle funzioni $\mathcal{F}(A, V) = \{F : \mathcal{I} \longrightarrow V\}$ da un insieme $\mathcal{I}$ qualsiasi ad uno spazio vettoriale reale V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 4.6 Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali, ossia:

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n\},$$

($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ indica l'insieme dei numeri naturali). Le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale conferiscono a $\mathbb{R}[x]$ la struttura di spazio vettoriale reale. Il vettore nullo è dato dal numero reale 0 e l'opposto del polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ è il polinomio:

$$-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n.$$

Vale il seguente teorema, il cui enunciato è naturalmente intuibile.

Teorema 4.1 *In uno spazio vettoriale reale V si ha:*

1. *il vettore nullo $\mathbf{o}$ è unico;*
2. *per ogni vettore $\mathbf{x} \in V$ l'opposto $-\mathbf{x}$ è unico;*
3. *se per $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ si ha $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, allora $\mathbf{y} = \mathbf{z}$;*
4. $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$ *(con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in V$)* $\iff$ $\lambda = 0$ *oppure* $\mathbf{x} = \mathbf{o}$*;*
5. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$*, per ogni* $\mathbf{x} \in V$.

Dimostrazione La dimostrazione, quasi un esercizio, si può leggere nel Paragrafo 4.5. ▮

Osservazione 4.4 L'insieme $\{\mathbf{o}\}$ formato dal solo vettore nullo è un esempio di spazio vettoriale reale. Si osservi che è l'unico spazio vettoriale sul campo reale con un numero finito di elementi.

4.2 Sottospazi vettoriali

La nozione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale, oggetto di questo paragrafo, intende estendere il concetto, già considerato nel capitolo precedente, degli insiemi dei vettori di una retta vettoriale V_1 e di un piano vettoriale V_2 visti come sottoinsiemi dello spazio vettoriale V_3.

4.2.1 Definizione ed esempi

Definizione 4.2 *Sia V uno spazio vettoriale reale, un sottoinsieme $\mathcal{W} \subseteq V$ è un* sottospazio vettoriale *di V se $\mathcal{W}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V, ossia se è* chiuso *rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalari definite in V, vale a dire:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{W},$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{W} \implies \lambda \mathbf{x} \in \mathcal{W},$$

che equivale a:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W} \implies \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in \mathcal{W}.$$

Osservazione 4.5 Segue dalla Definizione 4.2 e dalla proprietà $4.$ del Teorema 4.1 che il vettore nullo $\mathbf{o}$ di uno spazio vettoriale V deve necessariamente appartenere ad ogni sottospazio vettoriale $\mathcal{W}$ di V.

Esempio 4.7 Ogni spazio vettoriale V ammette almeno due sottospazi vettoriali: V e $\{\mathbf{o}\}$. Essi coincidono se e solo se $V = \{\mathbf{o}\}$. Tali sottospazi vettoriali si dicono *impropri*.

Esempio 4.8 L'insieme dei vettori ordinari di ogni piano vettoriale V_2 è un sottospazio vettoriale di V_3, insieme dei vettori dello spazio. L'insieme dei vettori di una retta vettoriale V_1 è un sottospazio vettoriale del piano vettoriale V_2 che la contiene e ogni retta vettoriale è un sottospazio vettoriale di V_3.

Esempio 4.9 Si osservi che, nonostante $\mathbb{Q}$ sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ (spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$) *non* è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}$, in quanto su $\mathbb{Q}$ non è definito lo stesso prodotto di $\mathbb{R}$. Infatti, il prodotto di un numero reale per un numero razionale non è necessariamente razionale.

Esempio 4.10 Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da: $f_a(x) = ax$; l'insieme:

$$\mathcal{W} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, introdotto nell'Esempio 4.5. Infatti se $f_a, f_b \in \mathcal{W}$, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si ha che $\lambda f_a + \mu f_b \in \mathcal{W}$, poiché $\lambda f_a + \mu f_b = f_{\lambda a + \mu b}$. La verifica è lasciata al Lettore per esercizio.

Esempio 4.11 Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali, introdotto nell'Esempio 4.6. Sottospazi vettoriali notevoli di $\mathbb{R}[x]$ sono gli insiemi dei polinomi di grado non superiore ad un numero fissato n, in formule, indichiamo con:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale ad n. La verifica che $\mathbb{R}_n[x]$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ è lasciata per esercizio. In particolare, quindi, l'insieme $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ in quanto può essere visto come l'insieme dei polinomi di grado zero. In generale, l'insieme dei polinomi di grado fissato $n > 0$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, anche se è un sottoinsieme di $\mathbb{R}_n[x]$. Infatti, per esempio, l'insieme dei polinomi di grado 3:

$$\mathcal{P} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, 3,\ a_3 \neq 0\}$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ in quanto non contiene il vettore nullo e *non* coincide con $\mathbb{R}_3[x]$.

Ci occupiamo ora della rappresentazione dei sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale fondamentale $\mathbb{R}^n$ mediante equazioni. Per capire meglio la teoria, iniziamo con un esercizio.

Esercizio 4.1 Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\},$$

$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5\},$$

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2 - x_3 = 0\},$$

dire quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ giustificando la risposta.

Soluzione È facile osservare che $\mathcal{C}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché non contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, in altri termini l'equazione lineare che definisce $\mathcal{C}$ non è omogenea.

Dimostriamo che $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Siano (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) due elementi di $\mathcal{A}$ ossia tali che $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$, verifichiamo che la loro somma $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ è un elemento di $\mathcal{A}$, vale a dire:

$$2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = 0,$$

che è ovvia conseguenza dell'appartenenza ad $\mathcal{A}$ di (x_1, x_2, x_3) e di (y_1, y_2, y_3). Analogamente si verifica che $\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ è un elemento di $\mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}$.
Si dimostra in modo analogo che $\mathcal{B}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{D}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, pur contenendo il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, infatti dati $(1, 0, 2), (2, 0, 8) \in \mathcal{D}$ la loro somma $(3, 0, 10)$ non appartiene a $\mathcal{D}$ in quanto $2 \cdot 3^2 – 10 \neq 0$.

L'esercizio precedente suggerisce il seguente risultato di carattere generale.

Esempio 4.12 – Esempio fondamentale di sottospazio vettoriale L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. La verifica, che è una conseguenza evidente dell'esempio precedente, può essere anche ottenuta procedendo in modo sintetico. Infatti, passando alla notazione matriciale di un sistema lineare omogeneo $AX = O$, con $A \in \mathbb{R}^{m,n}, X \in \mathbb{R}^{n,1}, O \in \mathbb{R}^{m,1}$ (cfr. Par. 2.2.1), si ha che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$ coincide con l'insieme:

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = O\},$$

dove si identifica $\mathbb{R}^{n,1}$ con $\mathbb{R}^n$. Dati $X_1, X_2 \in \mathcal{N}(A)$, allora $AX_1 = AX_2 = O$. Si deve dimostrare che $\lambda X_1 + \mu X_2 \in \mathcal{N}(A)$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ma:

$$A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda AX_1 + \mu AX_2 = O.$$

Il sottospazio vettoriale $\mathcal{N}(A)$ di $\mathbb{R}^n$ prende il nome di *nullspace* (o annullatore o nullificatore) della matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Esercizio 4.2 Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale reale contiene sempre un numero infinito di vettori?

Continuiamo con un elenco di sottospazi vettoriali notevoli dello spazio vettoriale delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$. Le verifiche sono lasciate per esercizio.

Esempio 4.13 Il sottoinsieme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$ (spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n) formato dalle matrici diagonali, definito in (2.2), è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$.

Esempio 4.14 Il sottoinsieme $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{n,n})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici triangolari superiori, definite in (2.6), è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$; analoga affermazione vale per il sottoinsieme delle matrici triangolari inferiori.

lo studio di una teoria astratta e a volte ostica partendo dal caso, più facile, dello spazio vettoriale V_3, dall'altro perché abbiamo deciso di non far sempre riferimento al Capitolo 3 per rendere i due capitoli indipendenti tra di loro e per non perdere la scansione logica del discorso.

4.3.1 Base di uno spazio vettoriale

Definizione 4.8 *Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale reale V, si dice che un vettore $\mathbf{x} \in V$ è* combinazione lineare *dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ se esistono k numeri reali $x_1, x_2, \dots x_k$ tali che:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_k.$$

I numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_k$ si dicono coefficienti della combinazione lineare.

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ in V si vogliono considerare tutte le loro combinazioni lineari. Tale insieme indicato con:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k),$$

o con $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, in inglese prende il nome di *span* di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, di cui

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

è il *sistema (o insieme) di generatori*. Si ha:

Teorema 4.7 *$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è un sottospazio vettoriale di V ed è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.*

Dimostrazione È un esercizio che segue dalla definizione di sottospazio vettoriale. ▮

Osservazione 4.11 A differenza di ciò che la notazione usata potrebbe far pensare, si osservi che le combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ non dipendono dall'ordine in cui si considerano i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, cioè ad esempio:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k).$$

È consuetudine, infatti, usare le parentesi tonde per indicare questo sottospazio vettoriale anziché le parentesi graffe, che sarebbero corrette dal punto di vista matematico.

Esempio 4.23 In $\mathbb{R}^4$, dati i due vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0, 0)$ il piano vettoriale $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Definizione 4.9 *Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vettori qualsiasi di V. Si dice che un sottospazio vettoriale $\mathcal{W}$ di V ammette come* sistema di generatori *l'insieme dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ se:*

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

Il teorema che segue, la cui dimostrazione è un esercizio, permette di cambiare i generatori di un sottospazio vettoriale.

Teorema 4.8 *Dato $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots \mathbf{v}_k)$, si possono aggiungere o sostituire più generatori di W con loro combinazioni lineari.*

Ad esempio, come conseguenza del teorema precedente si ottiene:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k, \lambda\mathbf{v}_l + \mu\mathbf{v}_m) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i + \lambda\mathbf{v}_j),$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $l, m,\ j \neq i$ nell'insieme $\{1, 2, \dots, k\}$ e dove con il simbolo $\hat{\mathbf{v}}_i$ si indica che si è tolto $\mathbf{v}_i$ dall'elenco dei generatori.

Osservazione 4.12 Come immediata conseguenza del teorema precedente si ottiene che $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ammette infiniti generatori e quindi ha infiniti sistemi di generatori.

Osservazione 4.13 Nell'Esempio 4.23 l'insieme $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è un sistema di generatori di $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ ma anche $\{2\mathbf{i}, 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\}$ è un altro insieme di generatori di $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e così via, ma $\{\mathbf{i}\}$ non è un sistema di generatori di $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Definizione 4.10 *Uno spazio vettoriale reale V si dice* finitamente generato *se esistono m vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ di V per cui:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m) = V.$$

Analogamente, un sottospazio vettoriale $\mathcal{W}$ di uno spazio vettoriale reale V si dice finitamente generato *se esistono k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ tali che*

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \mathcal{W}.$$

Esempio 4.24 Lo spazio vettoriale dei numeri reali può essere generato da un qualsiasi numero non nullo: $\mathbb{R} = \mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(35)$ e quindi è un esempio di spazio vettoriale reale finitamente generato. Analogamente, l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale finitamente generato in quanto $\mathbb{C} = \mathcal{L}(1, i)$, dove con i si indica l'unità immaginaria. D'altra parte $\mathbb{C}$ è anche uno spazio vettoriale complesso finitamente generato perché, in questo caso, $\mathbb{C} = \mathcal{L}(1)$.

Esempio 4.25 $\mathbb{R}^n$ è finitamente generato, per esempio:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathcal{L}((1,2,3),(2,3,0),(0,0,2),(4,5,6)).$$

Esempio 4.26 $\mathbb{R}^{2,2}$ è generato, per esempio, dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ma anche dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.14 Si osservi che uno spazio vettoriale finitamente generato ammette un numero finito di generatori, ma ciò non significa che *ogni* suo sistema di generatori debba avere un numero finito di elementi.

Esempio 4.27 Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ è un esempio di spazio vettoriale reale *non finitamente generato.* Infatti, se $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ sono k polinomi e d è il loro massimo grado, allora $\mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x))$ non contiene polinomi di grado maggiore a d e quindi $\mathbb{R}[x] \neq \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x))$. È facile, invece, verificare che il sottospazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale ad n è finitamente generato:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2, \ldots, x^n).$$

Esempio 4.28 Nel Paragrafo 4.5 si dimostra che anche lo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ descritto nell'Esempio 4.5, non è finitamente generato.

Esempio 4.29 Consideriamo il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$$

introdotto nell'Esercizio 4.1 e determiniamone un sistema di generatori. A tale scopo si deve risolvere il sistema lineare omogeneo che definisce $\mathcal{W}$. Come descritto nel Paragrafo 1.2 si ottengono infinite soluzioni date da:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t. \end{cases}$$

In altri termini, il generico vettore di $\mathcal{W}$ è del tipo $(2t, -t, t) = t(2, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}$, ossia $(2, -1, 1)$ è un generatore di $\mathcal{W}$.

In questo testo si studieranno solo spazi vettoriali finitamente generati, le definizioni e le proprietà che seguono sono da considerarsi in questo contesto, anche se alcune di esse possono essere agevolmente riscritte nel caso di spazi vettoriali non finitamente generati, ma in tutto il testo non saranno mai discusse tali generalizzazioni. Per uno studio approfondito degli spazi vettoriali non finitamente generati si può far riferimento a testi di base di Analisi Funzionale (ad esempio [16]).

Poiché si vuole enunciare la definizione rigorosa di dimensione di uno spazio vettoriale V (finitamente generato), sono riprese e riformulate, in un contesto più generale, alcune definizioni e proprietà già studiate nel capitolo precedente, nel caso particolare dello spazio vettoriale V_3.

Definizione 4.11 *Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale reale V, essi si dicono* linearmente indipendenti *se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo ha coefficienti tutti nulli, vale a dire:*

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o} \implies x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0. \tag{4.1}$$

L'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ di vettori linearmente indipendenti si dice libero.
Di conseguenza, k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ di V si dicono linearmente dipendenti *se esiste almeno una loro combinazione lineare che dà il vettore nullo a coefficienti non tutti nulli.*

Osservazione 4.15 Si osservi che in (4.1) vale anche l'implicazione opposta.

Prima di proporre alcuni esempi conviene dimostrare la seguente proprietà, molto facile, ma utile per riconoscere vettori linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.

Teorema 4.9 *Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ di uno spazio vettoriale reale V, essi sono linearmente dipendenti se e solo se uno qualsiasi di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione Supponiamo che, per ipotesi, i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ siano linearmente dipendenti, allora $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$ con $x_1 \neq 0$ (se il coefficiente non nullo non fosse x_1 potremmo commutare in modo da porre al primo posto il coefficiente non nullo), è perciò possibile ricavare:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{x_k}{x_1}\mathbf{v}_k$$

da cui la tesi. Il viceversa è lasciato per esercizio. ▮

La verifica degli esempi che seguono è lasciata per esercizio.

Esempio 4.30 Ogni insieme contenente un solo vettore $\mathcal{I} = \{\mathbf{x}\}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ è libero.

Esempio 4.31 In V_3 i vettori di una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono linearmente indipendenti, lo stesso vale per ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{B}$.

Esempio 4.32 Se in un insieme di vettori $\mathcal{A}$ compare il vettore nullo, allora $\mathcal{A}$ non è libero. L'insieme $\{\mathbf{o}\}$ non è libero.

Esempio 4.33 Se $\mathcal{C}$ è un insieme libero di vettori, allora ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{C}$ è libero.

Esempio 4.34 Se $\mathcal{D}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti allora ogni insieme che contiene $\mathcal{D}$ è formato da vettori linearmente dipendenti.

La definizione che segue estende la nozione di base già data nel capitolo precedente nel caso particolare dello spazio vettoriale V_3 (cfr. Def. 3.7).

Definizione 4.12 *Sia V uno spazio vettoriale reale, un insieme finito e ordinato di vettori $\mathcal{B}= (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ di V prende il nome di* base *di V se:*

1. *$\mathcal{B}$ è un insieme libero,*

2. *$\mathcal{B}$ è un sistema di generatori di V, ossia $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$.*

Osservazione 4.16 Si noti quindi che sarà fondamentale l'ordine in cui sono considerati i vettori di una base.

Esempio 4.35 1. Una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un esempio di base di V_3, in quanto verifica la definizione appena enunciata.

2. In $\mathbb{R}^n$ una base è data da:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)).$$

Questa base particolare, molto naturale, prende il nome di *base standard* o *base canonica* di $\mathbb{R}^n$. Per esempio, nel caso particolare di $\mathbb{R}^4$ si ha che la quaterna: $(1, 2, 3, 4)$ si scrive come $1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$, da cui la giustificazione della particolare denominazione della base usata. Sempre in $\mathbb{R}^4$ se si considera, invece, la base: $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1 = (2, 0, 0, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 3, 0, 0), \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{f}_4 = (0, 0, 0, 4))$ si ha:

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3 + 1\mathbf{f}_4$$

che è una decomposizione molto meno naturale della precedente.

3. Analogamente al caso di $\mathbb{R}^n$, la base canonica dello spazio vettoriale delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$ è formata, ordinatamente, dalle mn matrici E_{ij} aventi il numero 1 al posto ij e 0 per ogni altro elemento. Nel caso particolare di $\mathbb{R}^{2,3}$ la base canonica è formata dalle 6 matrici seguenti:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{13} + 4E_{21} + 5E_{22} + 6E_{23}.$$

4. In $\mathbb{R}_n[x]$ una base è data dall'insieme $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Il teorema che segue *caratterizza* le basi in V.

Teorema 4.10 1. *Sia* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *una base dello spazio vettoriale reale* V*, allora ogni vettore* $\mathbf{x}$ *di* V *si decompone in modo unico come:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n, \tag{4.2}$$

con $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. *Se* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *è un insieme di vettori di* V *tale che ogni vettore* $\mathbf{x}$ *di* V *si decomponga in modo unico rispetto a tali vettori come in (4.2) allora l'insieme* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base di* V.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Osservazione 4.17 Fissata una base $\mathcal{B}$ in V, per ogni vettore $\mathbf{x}$ di V la n-upla di numeri reali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, individuata univocamente da (4.2), si indica spesso con la matrice colonna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

I numeri reali $x_i, i = 1, 2, \dots, n,$ sono le *componenti* di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Osservazione 4.18 Fissata una base $\mathcal{B}$ in V, dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di V le cui matrici colonne delle componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, sono:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ha componenti, rispetto a $\mathcal{B}$:

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e il vettore $\lambda\mathbf{x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ha componenti, rispetto a $\mathcal{B}$:

$$\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi, inoltre, l'assoluta coerenza tra le definizioni di somma di matrici e somma di vettori e tra prodotto di un numero reale per una matrice e prodotto di un numero reale per un vettore.

Dalla definizione di base di uno spazio vettoriale e dal Teorema 4.10 emergono in modo naturale le seguenti domande:

1. in ogni spazio vettoriale esiste sempre almeno una base?
2. In caso affermativo, su uno spazio vettoriale quante basi esistono?
3. Nel caso in cui esistano molte basi su uno spazio vettoriale, quanti vettori contengono ciascuna?

Nel caso particolare degli spazi vettoriali dei vettori ordinari V_3, V_2 e V_1, aiutati dalla visualizzazione geometrica, conosciamo già le risposte alle precedenti domande (cfr. Teor. 3.4); i teoremi che seguono permettono di dare analoghe risposte nel caso particolare degli spazi vettoriali finitamente generati, quali, ad esempio: $\mathbb{R}^n$ e lo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$ (cfr. Es. 4.35). Enunciamo uno di seguito all'altro i teoremi che caratterizzano la struttura degli spazi vettoriali, anteponendo il commento e le loro conseguenze alle loro dimostrazioni.