Esercizio A1

> *Determinare se i vettori* $(1, 0, 2, -1), (3, 3, 1, 2), (-3, 1, 0, 4), (4, -1, 2, -5)$ *sono o no una base di* $\mathbb{R}^4$.

Affinché i vettori siano una base devono essere un sistema di generatori e devono essere linearmente indipendenti.

Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

la matrice dei vettori disposti per colonna, verifichiamo se sono linearmente indipendenti controllando se il $det(M) \neq 0$.

$$det(M) = -46$$

quindi i vettori sono linearmente indipendenti. Da ciò ne deriva che il rango della matrice è massimo, ovvero 4, e quindi sono un sistema di generatori.

Di conseguenza <u>sono una base di $dim(M) = 4$ e quindi generano tutto $\mathbb{R}^4$</u>.

Esercizio A2

> *Determinare il rango della trasformazione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *in* $\mathbb{R}^3$ *rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice:*
>
> $$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice è già quadrata, quindi si calcola il determinante della matrice 3×3.

$$det(M) = 17.$$

Il $det(M) \neq 0$ e quindi $\boxed{Rk(M) = 3}$. Poiché' $Rk(M) = 3 = min(3,3)$, il rango di M è massimo.

Esercizio A3

> *Determinare gli autovalori e gli autovettori dell'operatore lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda i due vettori e_1, e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente in $(1,1)$ e $(0,5)$.*

La matrice canonica dell'applicazione lineare è $A = \big(f(e_1), f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Per determinare gli autovalori e gli autovettori si ricorre ad una delle definizioni di autovettore:

$$A - \lambda I \text{ non è invertibile, ovvero } det(A - \lambda I) = 0.$$

Quindi

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 1.$$

Per l'autovalore $\boxed{\lambda_2 = 1}$, $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y = -\dfrac{a}{4} \end{cases}.$$

l'autovettore è $\boxed{a(1, -\frac{1}{4})}$.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 5$, $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

l'autovettore non esiste.

Esercizio B1

> *Sia G un gruppo, $g \in G$, e sia $\alpha\colon\ \mathbb{Z} \to G$ la funzione definita da $\alpha(n) = x^n$. Mostrare che α è un omomorfismo di gruppi.*

Sia il gruppo Z definito con l'operazione di somma ed il gruppo G con l'operazione di moltiplicazione, ovvero $(Z, +), (G, \cdot)$.

Affinché α sia un omomorfismo di gruppi deve valere che

$$\alpha(a + b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b) \quad \forall a, b \in Z.$$

Da cui

$$\alpha(a + b) = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = \alpha(a) \cdot \alpha(b).$$

La proprietà è verificata, quindi <u>α è un omomorfismo fra gruppi</u>.

Esercizio B2

> *Usare il teorema di Lagrange per mostrare esplicitamente che un gruppo di 12 elementi non ha sottogruppi di ordine 5 (non basta ricordare l'enunciato del teorema, occorre ricordare la dimostrazione).*

Dal teorema di Lagrange, con $|G : H| = r$,

$$|G| = r \cdot |H|$$

da cui

$$12 = r \cdot 5$$

ovvero non esiste un r che moltiplicato 5 dia come valore 12, quindi un gruppo di 12 elementi non ha sottogruppi di ordine 5.

Esercizio B3

> *Risolvere l'equazione $z = -\overline{z}$ in campo complesso.*

Con $z = x + iy$, il suo coniugato è definito come $\overline{z} = x - iy$.

Da cui

$$x + iy = -(x + iy) \implies x + iy = -x + iy \implies 2x = 0 \implies \boxed{x = 0}.$$