Francesco Daddi - gennaio 2010

Retta tangente ad una conica in un suo punto

Data una conica $\mathcal{C} : a\,x^2 + 2\,bxy + c\,y^2 + 2\,dx + 2\,ey + f = 0$ e un suo punto $P(x_0\,;\,y_0)$, vogliamo trovare l'equazione cartesiana della retta tangente in P. Per far ciò ci sono molti metodi e uno dei più semplici è il seguente: si operano le seguenti sostituzioni (*formule di sdoppiamento*)

$$\begin{cases} x^2 \longrightarrow x_0 x \\ xy \longrightarrow \dfrac{xy_0 + x_0 y}{2} \\ y^2 \longrightarrow y_0 y \\ x \longrightarrow \dfrac{x + x_0}{2} \\ y \longrightarrow \dfrac{y + y_0}{2} \end{cases} \tag{1}$$

nell'equazione $a\,x^2 + 2\,bxy + c\,y^2 + 2\,dx + 2\,ey + f = 0$:

$$a\,x_0 x + 2\,b\,\frac{xy_0 + x_0 y}{2} + c\,y_0 y + 2\,d\,\frac{x + x_0}{2} + 2\,e\,\frac{y + y_0}{2} + f = 0$$

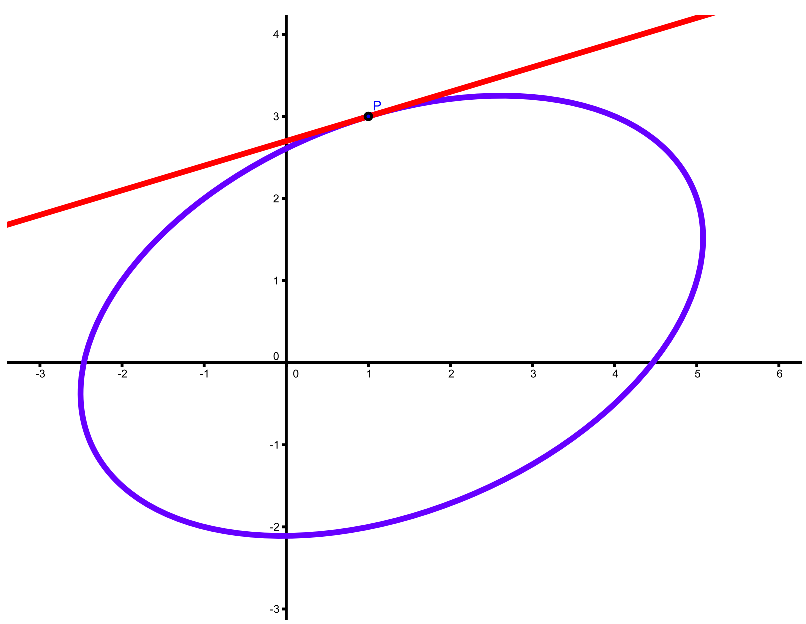
da cui, svolgendo i calcoli, ricaviamo:

$$(a\,x_0 + b\,y_0 + d)\,x + (b\,x_0 + c\,y_0 + e)\,y + d\,x_0 + e\,y_0 + f = 0\,. \tag{2}$$

Esempio 1. *Determinare l'equazione della retta tangente alla conica* $\mathcal{C} : x^2 - xy + 2\,y^2 - 2\,x - y - 11 = 0$ *nel suo punto* $P(1\,;\,3)$.

Soluzione. Applicando la formula (2) ponendo $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = 2$, $d = -1$, $e = -\dfrac{1}{2}$, $f = -11$ si arriva all'equazione cartesiana della retta tangente in P:

$$-\frac{3}{2}\,x + 5\,y - \frac{27}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,x - 10\,y + 27 = 0\,.$$



Alternativamente è possibile trovare l'equazione della retta tangente nel modo seguente (*polare di P rispetto alla conica*):

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{3}$$

Esempio 2. *Determinare l'equazione della retta tangente alla conica* $\mathcal{C} : 3\,x^2 + 2\,xy - 4\,y^2 - 4\,x + 7\,y - 25 = 0$ *nel suo punto* $P(-3\,;\,2)$*.*

Soluzione. Applicando la formula (3) abbiamo

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & \dfrac{7}{2} \\ -2 & \dfrac{7}{2} & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,;$$

la retta tangente in P ha equazione cartesiana

$$-9\,x - \frac{15}{2}\,y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,x + 5\,y + 8 = 0\,.$$