Corso di Matematica II
Anno Accademico 2009–2010.

Esercizi di Algebra Lineare.
Calcolo di autovalori ed autovettori

May 7, 2010

> Commenti e correzioni sono benvenuti.
> Mi scuso se ci fosse qualche errore banale di calcolo, nonché per l'italiano non proprio manzoniano.
> Nota: ho utilizzato come definizio/notazione di polinomio caratteristico di una matrice M il polinomio $\mathrm{Det}(\lambda - M)$, piuttosto che $\det M - \lambda$.

Esercizio 1

Si trovino gli autovalori ed i corrispondenti autovettori della matrice

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Cerchiamo prima gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$\mathrm{Det}(\lambda\mathbf{1} - A) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

Sviluppando il determinante lungo la *terza colonna*[1] si ha

$$\mathrm{Det}(\lambda\mathbf{1} - A) = (\lambda - 1)\left(\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)((\lambda - 2)\lambda - 3) =$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

[1] C'est plus facile.....

Quindi il polinomio caratteristico ha tre radici distinte, $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3)$, e dunque queste tre radici sono autovalori.

Dobbiamo ora determinare gli autovettori pertinenti ai tre autovalori, cioè, per $i = 1, 2, 3$ fissati dobbiamo trovare i vettori Ψ_i che soddisfino

$$A\Psi_i = \lambda_i \Psi_i, \quad \text{o, in modo equivalente, } (\lambda_i \mathbf{1} - A)\Psi_i = 0.$$

1. $i = 1, \lambda_1 = 1$. Dobbiamo considerare il nucleo della matrice $\mathbf{1} - A$, ovvero trovare i vettori (non nulli) $\Psi_1 = (x, y, z)$ che soddisfino (sostituendo $\lambda = 1$ nella equazione (0.1)),

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

In altre parole, dobbiamo risolvere, nelle *tre variabili* x, y, z, il sistema

$$\begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y & = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

Le soluzioni di questo sistema sono: $(x = 0, y = 0, z = \text{qualsiasi})$, e dunque gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad z \neq 0.$$

Note:
i) Notando che, per esempio, la prima riga della matrice qui sopra è 2 volte la terza più la seconda, ci si può ridurre, in luogo di (0.3), a considerare il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases}$$

(Ovviamente, le soluzioni sono le stesse). In generale, però, è meglio tenersi le tre equazioni; infatti, se per caso avessimo sbagliato a calcolare il polinomio caratteristico di A e/o le sue radici, tenendo le tre equazioni ci accorgeremmo, (o, almeno, dovremmo accorgerci), che il sistema analogo al (0.3) con λ non autovalore, ha solo la soluzione banale $x = 0, y = 0, z = 0$). Peraltro, come si vedrà, in questo esercizio sarà facile vedere quale riga eliminare.
ii) Che $(0, 0, z)$ sia un autovettore di A relativo all'autovalore 1 dovrebbe essere lampante *guardando* la forma della matrice A.

2. $i = 2, \lambda_2 = -1$. In questo caso dobbiamo cercare il nucleo della matrice

$$-\mathbf{1} - A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

In questo caso, la prima riga è -3 volte la seconda, quindi ci si può limitare a risolvere il sistema di *due* equazioni in *tre* variabili

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ x - y - 2\,z & = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale di questo sistema è data dalle terne $(x, x, 0)$, e dunque la famiglia di autovettori Ψ_2 relativi all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x \neq 0.$$

3. $i = 3, \lambda_3 = 3$. In questo caso ho

$$(3\mathbf{1} - A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema da risolvere è, dunque,

$$\begin{cases} x + 3y & = 0 \\ x - y + 2\,z & = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni trovo $4\,y - 2\,z = 0 \Rightarrow z = 2\,y$; sostituendo questo nella terza equazione ho

$$x \underbrace{-y + 4\,y}_{=3\,y} = 0$$

da cui trovo che la soluzione genrale è data dalle terne $(-3\,y, y, 2\,y)$. Dunque, l'autovettore Ψ_3 è

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} -3\,y \\ y \\ 2\,y \end{bmatrix} \qquad y \neq 0.$$

1 Esercizio 2

Si trovino gli autovalori ed i corrispondenti autovettori della matrice

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione

Sviluppando il determinante di $\lambda - A$ (per esempio, lungo la prima riga, ma non ci sono differenze significative tra le varie scelte possibili) si ottiene

$$\det(\lambda - A) = \lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 11\,\lambda - 6 = 0$$

Da qui si osseva che $\lambda_1 = 1$ è una radice. Si osserva poi (con Ruffini, ad esempio) che

$$\det(\lambda - A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\,\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Dunque gli autovalori di A sono $1, 2, 3$.

Calcoliamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$. Dobbiamo risolvere

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ovvero il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y + z &= 0 \\ -3x - y - z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

Osserviamo che le prime due equazioni sono coincidenti, e quindi possiamo risolvere (*nelle* 3 *variabili* (x, y, z)) il sistema ridotto formato dalle ultime due equazioni (che sono, come si vede, indipendenti), i. e.:

$$\begin{cases} -3x - y - z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

Dalla seconda abbiamo

$$z = x + y \tag{1.1}$$

sostituendo nella primasi trova $-3x - y - (x + y) = 0$ che dà $y = -2\,x$.

Risostituendo nella (1.1) si ha infine $z = x + (-2x) = -x$. Dunque gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_1 = 1$ sono dati dalla famiglia

$$\psi_1 = x\,(1, -2, -1),\ x \neq 0$$

Con calcoli analoghi si vede che gli autovettori relativi a λ_2 e λ_3 sono, rispettivamente,

$$\psi_2 = x\,(1, -1, -1), \quad \text{e } \psi_3 = x\,(1, -1, 0)$$

Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Se ne calcolino gli autovalori, e si determini l'autospazio (cioè la famiglia ad un paramentro di autovettori) relativo all'unico autovalore intero di M.

Soluzione

Il determinante di $\lambda - M$, cioè il polinomio caratteristico di M è:

$$\mathrm{Det}(\lambda - M) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 3\,\lambda^2 - 9\,\lambda + 11.$$

Non è difficile notare che $\lambda_1 = 1$ è una radice del polinomio caratteristico (i coefficienti di $\mathrm{Det}(\lambda - M)$ sommano a zero).

Utilizzando, ad esempio, la regola di Ruffini, otteniamo la fattorizzazione

$$\mathrm{Det}(\lambda - M) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\,\lambda - 11\right).$$

Il discriminante del fattore di secondo grado di questa espressione è

$$\Delta = 4 + 44 = 48 = 2^4 \cdot 3,$$

e le radici corrispondenti non sono numeri interi ($\lambda_\pm = 1 \pm 2\sqrt{3}$). Dunque la radice intera cercata è $\lambda = 1$.

Per finire l'esercizio dobbiamo calcolare l'autovettore relativo a $\lambda = 1$, ovvero trovare (almeno un) vettore non nullo ψ che soddisfi

$$M\psi = \psi.$$

Detto

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix},$$

dovremo risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prendendo come equazioni indipendenti di quest'ultimo sistema le prime due si ha

$$\begin{cases} 2\psi_1 + 2\psi_2 = 0 \\ 2\psi_1 = -2\psi_3 \end{cases}$$

da cui l'autovettore cercato si può scrivere nella forma parametrica

$$\psi = \psi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$