Esercizio A1

> *Determinare se i tre vettori di $\mathbb{R}^3$: $(1,2,-2),(-1,3,3)$ e $(1,3,-2)$ siano o no linearmente indipendenti.*

Metodo 1

Se $det(M_{atrice}) \neq 0$ allora i vettori sono linearmente indipendenti.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$det(M) = (1\cdot3\cdot-2)+(-1\cdot3\cdot-2)+(1\cdot2\cdot3)-(1\cdot3\cdot-2)-(-1\cdot2\cdot-2)-(1\cdot3\cdot3) = -6+6+6+6-4-1.$$

Il determinante è diverso da zero, quindi possiamo concludere che <u>i vettori sono linearmente indipendenti</u>.

Metodo 2

Se $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ è risolto solo per $(a,b,c) = (0,0,0)$ allora i vettori sono linearmente indipendenti.

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b + c & = 0 \\ 2a + 3b + 3c & = 0 \\ -2a + 3b - 2c & = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a = b - c \\ 2a + 3b + 3c = 0 \\ b = 0 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{matrix} \quad .$$

$(0,0,0)$ è l'unica soluzione del sistema, quindi possiamo concludere che <u>i vettori sono linearmente indipendenti</u>.

> *Determinare la dimensione del sottospazio da essi generato.*

I tre vettori costituiscono una base, essendo linearmente indipendenti ed essendo un sistema di generatori (avendo rango massimo, ovvero uguale a 3). Concludiamo che <u>$dim(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3$, ovvero tutto $\mathbb{R}^3$</u>.

Esercizio A2

Determinare il nucleo della trasformazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo è l'insieme di vettori soluzione del sistema di equazioni omogeneo $Ax = 0$. Quindi per trovarlo è sufficiente trovare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z & = 0 \quad x = 0 \\ y + 2z & = 0 \quad y = 0. \\ x + 3z & = 0 \quad z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{Ker(F) = \{\} \text{ e } dim(Ker(F)) = 0}$.

Esercizio A3

> *Determinare gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice:* $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Sfruttiamo la definizione di autovalore ed autovettore: $A_f - \lambda I$ deve essere non invertibile, ovvero il $det(A_f - \lambda I) = 0$.

$$A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix};$$

$$det(A_f - \lambda I) = (-3-\lambda)[(4-\lambda)(3-\lambda)-2)] = (-3-\lambda)(10-7\lambda+\lambda^2) = 0;$$

$\lambda_1 = -3;$

$$\lambda_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-10}}{2} = \frac{7 \pm 6}{2} = 13/2, 1/2;$$

Per l'autovalore $\boxed{\lambda_1 = -3}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 2y & = 0 \\ x + 6y - z & = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} 7w + 2y = 0 \\ w + 6y - z = 0 \\ x = w \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = -7/2w \\ z = -20w \\ x = w \end{matrix};$$

l'autovetore è $(w, -7/2w, -20w)$, ovvero $\boxed{w(1, -7/2, -20)}$.

Per gli autovalori λ_2 e λ_3 si applica lo stesso procedimento.

Esercizio B1

> *Determinare gli interi a, b tali che $10a + 23b = 1$.*

Sfruttiamo il teorema di Bézout.
Se a, b sono interi e (a, b) è il loro massimo comune divisore, allora esistono interi h, k tali che $ha + kb = (a, b)$.

$$MCD(10, 23)\textbf{:} \quad \begin{array}{l} 23 = 10 \ * \ 2 + \ 1 \ ; \\ 10 = 2 \ \ * \ 5 + \underline{0}. \end{array}$$

Il massimo comune divisore di 10 e 23 è proprio 1, quindi il teorema di Bézout ci garantisce che esistono due interi che soddisfano l'equazione.
Per ricavarli è sufficiente risalire ricorsivamente (in questo caso si tratta di un solo passaggio) l'algoritmo di Euclide tenendo a mente che $a = qb + r \implies r = a - qb$

Quindi $1 = 23 - 10 \cdot 2$, con $\boxed{a = -2, b = 1}$.

Esercizio B2

> *Quali sono gli argomenti dei numeri complessi z di modulo 3 tali che $Re(z) + Im(z) = 0$?*

Affinché sia $Re(z) + Im(z) = 0$ deve valere che $Re(z) = -Im(z)$, ovvero $x = -iy$, quindi $iy = -x$.

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \tfrac{3}{\sqrt{2}};$$

$$\left.\begin{array}{l} x = |z|\cos\theta \implies \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 3\cos\theta \implies \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = |z|\sin\theta \implies -\dfrac{3}{\sqrt{2}} = 3\sin\theta \implies \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. ; \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\theta = \tfrac{\pi}{4} + k2\pi}.$$

Esercizio B3

> *Determinare la parità della permutazione (247536)(45)(1745932) in* S_{11}.

$1 \to 7 \to 5;$
$5 \to 9;$
$9 \to 3 \to 6;$
$6 \to 2;$
$2 \to 1.$

$3 \to 2 \to 4;$
$4 \to 5 \to 4 \to 7;$
$7 \to 4 \to 5 \to 3.$

(15962)(347)

$(5-1)+(3-1)=6$ $\boxed{\text{Pari } (+1)}$.

Extra: (12)(16)(19)(15)(37)(34).