Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

PAOLA FAVRO – ANDREANA ZUCCO

Appunti di Geometria Analitica

Quaderno # 25 – Febbraio 2004

PREFAZIONE

Sono qui raccolte le lezioni e le esercitazioni svolte nell'Anno Accademico 2003-2004 nel Corso di Geometria I del Corso di Laurea di I° livello in Matematica.

Più che una trattazione esauriente della Geometria Analitica, per la quale ci si può riferire a tanti rigorosi ed eleganti trattati, alcuni dei quali citati nella bibliografia, queste pagine hanno semplicemente lo scopo di agevolare gli studenti del I° anno nella preparazione del loro primo esame di Geometria.

Un particolare ringraziamento alla Dott. Rosanna Garbaccio Bogin per l'accurata revisione del testo.

Torino, febbraio 2004

Università di Torino

INDICE

CAPITOLO I

SISTEMI LINEARI

1.1 - Equazioni lineari.

Premettiamo alcune definizioni note.
Un'**equazione** lineare a coefficienti reali **in una incognita x** è del tipo:

(1) $$\mathbf{ax + b = 0}$$

ossia anche $ax + b - b = -b$ dunque $ax = -b$.
Supposto $a \neq 0$, esiste l'inverso di a che è il numero 1/a. Allora la (1) si può scrivere come $(1/a)ax = (1/a)(-b)$ e quindi la (1) ammette la soluzione (detta anche radice):

(2) $$x = -\frac{b}{a}.$$

Per $a = 0$ e $b = 0$ la (1) diventa un'identità, ogni numero reale è soluzione e l'equazione si dice indeterminata.
Per $a = 0$ e $b \neq 0$ la (1) non ha soluzioni e l'equazione è impossibile.

Un'equazione lineare a coefficienti reali nelle due incognite x ed y è del tipo:

(3) $$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

una sua soluzione è una coppia di numeri che sostituita nella (3) la rende soddisfatta.
Consideriamo ad esempio l'equazione:

(4) $$2x - y + 4 = 0.$$

Scelto un valore per la x, diciamo ad esempio 3, si ha una soluzione se $6 - y + 4 = 0$, ossia se $y = 10$, quindi la coppia (3, 10) è soluzione della (4). Così, scelto un valore per la y, diciamo ad esempio 6, si ha una soluzione se $2x - 6 + 4 = 0$ ossia se $x = 1$; quindi la coppia (1, 6) è una soluzione della (4).
Se nella (3) il termine noto c è nullo, l'equazione lineare si dice **omogenea**

$$\mathbf{ax + by = 0}$$

ed ha come soluzioni $x = \lambda b$ $y = -\lambda a$ dove λ è un fattore, ossia un numero, arbitrario.

Un'**equazione lineare nelle tre incognite x, y, z** è del tipo:

(5) $$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}.$$

Una soluzione è una terna di numeri che si ottiene fissando in modo arbitrario due delle tre incognite e determinando quindi il corrispondente valore della terza.

Un'**equazione lineare nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$** si scrive

(6) $$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0}$$

ove con a_i si intende il coefficiente dell'incognita x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ e con b il termine noto.
Una soluzione della (6) è una n-pla che si ottiene nel seguente modo: si fissano $n - 1$ incognite, si sostituiscono nell'equazione data ottenendo un'equazione con una sola incognita e si determina quest'ultima risolvendo l'equazione ottenuta.
Se $b = 0$, l'equazione si dice **omogenea**. In tal caso se $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ è una soluzione anche $(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)$ lo è, qualunque sia λ reale.

1.2 - Determinanti.

La teoria dei determinanti e dei sistemi lineari verrà sviluppata nel corso di Geometria 2. Ci limitiamo qui a quei risultati che serviranno nella nostra trattazione.

Dati quattro numeri reali $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, si dice **matrice quadrata di ordine 2** la tabella:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Alla matrice quadrata A è associato il numero reale $\mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, che si dice **determinante del 2° ordine** (determinante della matrice A), e si indica con il simbolo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

In modo analogo si definisce **matrice quadrata di ordine 3** la tabella:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

e si dice **determinante del 3° ordine** (determinante della matrice A), e si indica con il simbolo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

il numero reale $\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}}$.
E' facile verificare che tale numero si può ottenere anche nel seguente modo che utilizza determinanti del 2° ordine:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

I numeri a_{ij} si dicono elementi della matrice e sono disposti in tre righe e tre colonne. Righe e colonne si dicono linee.

Per calcolare i determinanti sono utili le seguenti proprietà:
1) Il determinante di una matrice con gli elementi di una linea tutti nulli ha valore zero.
2) Se gli elementi di una riga si moltiplicano per uno stesso numero, il determinante risulta moltiplicato per il numero.
3) Se si scambiano tra loro due righe di una matrice, il determinante cambia segno.
4) Il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo.
5) Se gli elementi della i-esima riga di una matrice sono della forma $a_{ij} + b_{ij}$, il suo determinante è la somma di due determinanti, quello della matrice con la i-esima riga formata dalle a_{ij}, e quello della matrice con la i-esima riga formata dalle b_{ij}.
6) Se gli elementi di una riga di una matrice si ottengono come combinazione lineare (con gli stessi coefficienti) di elementi corrispondenti delle rimanenti righe, il suo determinante è nullo, e viceversa.
7) Il valore del determinante di una matrice non cambia se agli elementi di una riga vengono aggiunti gli elementi corrispondenti di un'altra riga moltiplicati per una costante.
8) Il valore del determinante di una matrice non cambia se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne.

Per la proprietà (8) segue che valgono proprietà analoghe alle precedenti sostituendo alle righe le colonne.

La matrice: $A_{11} = \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ si può pensare ottenuta dalla matrice A del terzo ordine cancellando la prima riga e la prima colonna; il determinante det A_{11} si dice **minore** dell'elemento a_{11}.
In modo analogo si indica con A_{ij} la matrice ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna e si dice **cofattore** dell'elemento a_{ij} il numero $\boldsymbol{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}}$.
Vale la seguente regola di sviluppo secondo gli elementri di una riga:
Il valore di un determinante è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di un riga per i rispettivi cofattori.

1.3 - Sistemi lineari.

Un sistema lineare di n equazioni in p incognite $x_1, x_2, \ldots, x_p$ è un insieme di n equazioni lineari del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad = .. \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

dove le a_{ij} e le b_i sono numeri reali: soluzione del sistema è un qualunque insieme di p numeri reali che verifica ogni equazione del sistema.
Un sistema che ammette soluzioni si dice **compatibile**, se non ammette soluzioni si dice **incompatibile**.

Consideriamo alcuni casi particolari.
Dato un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

si hanno le seguenti possibilità:

1) Se il determinante della matrice dei coefficienti, det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, è diverso da zero il sistema è compatibile ed ha una sola soluzione, espressa dalla **formula di Cramer**:

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

2) Se il determinante della matrice dei coefficienti, det A, è eguale a zero si hanno ancora due possibilità:
   2a) se tutti i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo ad una colonna di coefficienti i termini noti (cioè i determinanti che sono i numeratori delle soluzioni del caso (1)) sono nulli, il sistema è compatibile ed ha infinite soluzioni:le due equazioni differiscono solo per un coefficiente di proporzionalità;
   2b) se invece almeno uno dei determinanti precedenti è diverso da zero, il sistema è incompatibile.

Dato un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

si hanno le seguenti possibilità.

1) Se il determinante della matrice dei coefficienti $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ è diverso da zero il sistema è compatibile ed ha una sola soluzione, espressa dalla formula di Cramer:

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad x_3 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

2) Se il determinante della matrice dei coefficienti $\det A$ è eguale a zero si hanno ancora due possibilità:
   2a) se tutti i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo ad una colonna di coefficienti i termini noti (cioè i determinanti che sono i numeratori delle soluzioni del caso (1)) sono nulli il sistema è compatibile ed ha infinite soluzioni;
   2b) se invece almeno uno dei determinanti precedenti è diverso da zero, il sistema è incompatibile.

Per risolvere un sistema lineare, il calcolo dei determinanti può risultare lungo; si può utilizzare un metodo più veloce detto **metodo delle eliminazioni successive (di Gauss)**. Tale metodo è basato sul fatto che a partire da un sistema lineare si ottiene un **sistema equivalente**, cioè con le stesse soluzioni, se:

i) si scambiano tra loro le equazioni;
ii) si moltiplicano entrambi i membri di una equazione per un numero reale non nullo;
iii) si somma ad una equazione il prodotto di un'altra per un numero reale non nullo.

Supponiamo per semplicità di considerare i sistemi di tre equazioni in tre incognite. A partire da un sistema lineare si cerca allora di ottenere un sistema equivalente, detto **sistema triangolare**, i cui coefficienti formino un determinante del tipo:

$$\det A = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Allo scopo, a partire ad esempio dal sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

possiamo supporre (eventualmente scambiando le equazioni) che sia $a_{11} \neq 0$, e sostituire nel sistema:

- alla seconda equazione, la seconda equazione iniziale moltiplicata per $-a_{11}$ e sommata alla prima moltiplicata per a_{21} (supposto anch'esso non nullo, altrimenti il passaggio è inutile);
- alla terza equazione, la terza equazione iniziale moltiplicata per $-a_{11}$ e sommata alla prima moltiplicata per a_{31} (supposto anch'esso non nullo, altrimenti il passaggio è inutile).

Si ottiene il sistema equivalente a quello iniziale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

dove i termini con gli apici sono ottenuti dai calcoli.
Per questo sistema si hanno tre possibilità:

i) un'equazione ha tutti i coefficienti a'_{ij} nulli ed anche b'_i è zero: si può eliminare l'equazione ed il sistema ha due equazioni e tre incognite; si cerca risolverlo come un sistema in due incognite, considerando la terza come un parametro;

ii) un'equazione ha tutti i coefficienti a'_{ij} nulli e b'_i diverso da zero: il sistema è incompatibile;

iii) se sia nella seconda che nella terza equazione vi è un coefficiente a'_{ij} non nullo si ripete il procedimento di eliminazione; possiamo supporre (eventualmente scambiando le equazioni) che sia $a'_{22} \neq 0$, e sostituire nel sistema alla terza equazione, la terza equazione del sistema ora ottenuto moltiplicata per $-a'_{22}$ e sommata alla seconda moltiplicata per a'_{32} (supposto anch'esso non nullo altrimenti il sistema è già in forma triangolare); si ottiene il sistema equivalente a quello iniziale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

che si risolve per sostituzione a partire dall'ultima equazione.

Vediamo di eseguire il procedimento su esempi numerici.

ESEMPIO 1.3.1 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione e mandando $E_2 \to -2E_2 + E_1$ ed $E_3 \to -2E_3 + 3E_1$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad 7\,x_2 - 3x_3 = -3 \\ \qquad 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$$

e successivamente $E_3 \to -E_3 + E_2$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad 7\,x_2 - 3x_3 = -3 \\ \qquad\qquad 4x_3 = -8 \end{cases}$$

da cui si ricava $x_3 = -2$, $x_2 = -9/7$, $x_1 = 10/7$.

ESEMPIO 1.3.2 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione e mandando $E_2 \to -E_2 + 2E_1$ ed $E_3 \to -E_3 + E_1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad -3x_3 = 2 \\ \qquad -3x_3 = 2 \end{cases}$$

questo sistema ha forma triangolare, è compatibile ed ha le infinite soluzioni:

$x_3 = -2/3$, $x_1 = 1/3 - k$, $x_2 = k$ per ogni k reale.

ESEMPIO 1.3.3 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione e mandando $E_2 \to -E_2 + E_1$ ed $E_3 \to -E_3 + 2E_1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -x_2 - x_3 = -2 \\ \quad -x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

si ottiene un assurdo ed il sistema è incompatibile.

Il metodo di riduzione si applica anche a sistemi in cui il numero delle equazioni non è eguale a quello delle incognite; vediamo alcuni esempi:

ESEMPIO 1.3.4 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione mandando $E_2 \to -3E_2 + E_1$, $E_3 \to -3E_3 + 2E_1$, $E_4 \to -3E_4 + E_1$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \quad -7x_2 + 5x_3 = 22 \\ \quad -5x_2 + 7x_3 = 26 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

mandando poi $E_3 \to -7E_3 + 5E_2$ e $E_4 \to 7E_4 + 2E_2$ si ottiene:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ -7x_2 + 5x_3 = 22 \\ -24x_3 = -72 \\ 24x_3 = 72 \end{cases}$$

da cui si ricava $x_3 = 3$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$.

ESEMPIO 1.3.5 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione e mandando: $E_2 \to -3E_2 + E_1$ $E_3 \to -3E_3 + 2E_1$ $E_4 \to -3E_4 + E_1$ si ottiene:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ -3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 - x_3 = -6 \\ 6x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases}$$

questo è compatibile ed ha le infinite soluzioni:

$x_3 = 3k + 6$, $x_1 = 4k + 6$, $x_2 = k$ per ogni k reale.

ESEMPIO 1.3.6 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Con il procedimento descritto sopra si ottiene, indicando con E_i la i-esima equazione e mandando: $E_2 \to -3E_2 + E_1$ $E_3 \to -3E_3 + 2E_1$ $E_4 \to -3E_4 + E_1$ si ottiene:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ -3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 - x_3 = -36 \\ 6x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases}$$

mandando poi $E_3 \to E_3 + E_2$ e $E_4 \to 3E_4 + 6E_1$ si ha:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ -3x_2 + x_3 = 6 \\ 0 = -30 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

poiché la terza equazione contiene un assurdo, il sistema è incompatibile.

Osserviamo che anche il metodo di Cramer, con opportuni artifici, può essere utilizzato per risolvere sistemi in cui il numero delle equazioni non è eguale a quello delle incognite; vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 1.3.7 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

I coefficienti di x_1 ed x_2 formano una matrice il cui determinante è non nullo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$$

Il sistema dato si può scrivere:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 + 1 \\ 5x_1 + 8x_2 = -2x_3 + 3 \end{cases}$$

che è un sistema nelle due incognite x_1 ed x_2, mentre x_3 si può considerare come parametro.
Poiché, come calcolato, il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, si può determinare la soluzione con la formula di Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} x_3 + 1 & 3 \\ -2x_3 + 3 & 8 \end{vmatrix} = 14x_3 - 1 \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_3 + 1 \\ 5 & -2x_3 + 3 \end{vmatrix} = -9x_3 + 1.$$

Il sistema dato ha quindi le infinite soluzioni: $x_1 = 14k - 1$, $x_2 = -9k + 1$, $x_3 = k$ al variare di k in **R**.

ESEMPIO 1.3.8 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - 21x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

In questo caso tutti i determinanti delle matrici formate dai coefficienti di due tra le incognite sono nulli; i coefficienti sono in proporzione ed anche i termini noti sono in proporzione: il sistema si può ridurre ad una sola equazione: $2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1$ ed ha infinite soluzioni: $x_1 = h$, $x_2 = k$, $x_3 = 2h - 7k - 1$ al variare di h e k in **R**.

ESEMPIO 1.3.9 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_1 + 21x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

In questo caso tutti i determinanti delle matrici formate dai coefficienti di due tra le incognite sono nulli; i coefficienti sono in proporzione ma i termini noti non sono nello stesso rapporto di proporzione: si ottiene quindi un assurdo:

$$4 = -6x_1 + 21x_2 - 3x_3 = -3(2x_1 - 7x_2 - x_3) = -3(1) = -3.$$

Il sistema risulta quindi incompatibile.

Osserviamo infine che esistono particolari sistemi lineari che sono sempre compatibili: i sistemi aventi termini noti tutti eguali a zero, che sono detti **sistemi omogenei**.
Se il sistema omogeneo ha eguale numero di equazioni e di incognite (supponiamo n), si ha:
- solo la soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero;
- infinite soluzioni se il determinante della matrice dei coefficienti è eguale da zero.

Per il caso in cui il numero di equazioni è minore del numero delle incognite, vediamo alcuni esempi.

ESEMPIO 1.3.10 - Risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

I coefficienti di x_1 ed x_2 formano una matrice il cui determinante è non nullo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1.$$

Il sistema dato si può scrivere:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = -5x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 = -x_3 \end{cases}$$

che è un sistema nelle due incognite x_1 ed x_2, mentre x_3 si può considerare come parametro.
Poiché, come calcolato, il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, si può determinare la soluzione con la formula di Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} -5x_3 & 3 \\ -x_3 & 4 \end{vmatrix} = -17x_3 \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 4 & -5x_3 \\ 5 & -x_3 \end{vmatrix} = 21x_3.$$

Il sistema dato ha quindi le infinite soluzioni: $x_1 = -17k$, $x_2 = 21k$, $x_3 = k$ al variare di k in **R**.
Scegliendo $k = 0$ si trova, in particolare, la soluzione nulla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

ESEMPIO 1.3.11 - Risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}.$$

In questo caso tutti i determinanti delle matrici formate dai coefficienti di due tra le incognite sono nulli: i coefficienti sono in proporzione e il sistema si può ridurre ad una sola equazione:

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$$

ed ha le infinite soluzioni: $x_1 = \dfrac{-3h - 5k}{4}$, $x_2 = h$, $x_3 = k$ al variare di h e k in **R**.

1.4 - Esercizi proposti.

I.1 - Verificare che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 8 & 13 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

I.2 - Verificare che:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & -14 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -312 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

I.3 - Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$ (incompatibile)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases}$$ ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$)

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$ ($x_1 = 2k$, $x_2 = -k$, $x_3 = k$, $\forall k \in \mathbf{R}$)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$ $(x_1 = \frac{24}{19},\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{32}{19},\ x_4 = -\frac{4}{19})$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$ (sistema incompatibile)

I.4 - Discutere e risolvere al variare di k il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + 2y + kz = 0 \\ x - y - z = 0 \\ kx + 2y = 0 \end{cases}.$$

(se $k \neq 0$ e $k \neq -2$ una soluzione: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
se $k = 0$ infinite soluzioni: $x = t$, $y = 0$, $z = t$ $\forall t \in \mathbf{R}$;
se $k = -2$ infinite soluzioni: $x = h$, $y = h$, $z = 0$ $\forall h \in \mathbf{R}$).

CAPITOLO II

CALCOLO VETTORIALE

2.1 - Vettori del piano.

2.1.1 - Premesse.

In Fisica vi sono grandezze scalari e grandezze vettoriali. Per individuare le prime basta un numero eventualmente con segno quando abbia senso parlare di valori positivi o negativi delle grandezze, come ad esempio la temperatura; le altre come ad esempio la velocità sono individuate oltre che da un numero positivo, detto modulo, dalla direzione e dal verso, ossia da un vettore.
Quando interviene anche il punto di applicazione del vettore si parla di vettore applicato, altrimenti di vettore libero o più semplicemente di vettore.
Anche se la teoria dei vettori è un capitolo della Fisica, vedremo che il calcolo vettoriale è uno strumento molto utile per la Geometria Analitica.
I vettori che verranno utilizzati sono vettori liberi. La loro definizione ha bisogno di alcune premesse.

Consideriamo nel piano le coppie ordinate di punti (A, B) ove A viene detto primo estremo e B secondo estremo.
Una coppia ordinata, detta anche **segmento orientato** (A, B) individua:

i) un numero non negativo d(A, B) = d(B, A) che rappresenta la distanza di A da B rispetto ad una data unità di misura;

se d(A, B) $\neq$ 0, ossia A non coincide con B:

ii) una retta: quella che contiene i punti A e B;
iii) un verso sulla retta: quello che va da A al punto B.

Nell'insieme dei segmenti orientati del piano introduciamo una relazione, detta di **equipollenza**. Diciamo:

(A, B) equipollente (C, D) o, più semplicemente, **(A, B) $\boldsymbol{\sigma}$ (C, D)**

se si verifica una delle seguenti condizioni:
1) se B coincide con A, anche D coincide con C;
oppure
2) (A, B) e (C, D) appartengono alla stessa retta sono uguali e concordi;
oppure
3) (A, B) e (C, D) appartengono a due rette parallele e la retta AC che congiunge i primi estremi è parallela alla retta BD che congiunge i secondi estremi.
Quindi: *due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno lunghezza nulla oppure hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso*.

Tale relazione σ è:
riflessiva se comunque scelta (A, B) si ha (A, B) σ (A, B);
simmetrica se (A, B) σ (C, D) $\rightarrow$ (C, D) σ (A, B);
transitiva se (A, B) σ (C, D) e (C, D) σ (E, F) $\rightarrow$ (A, B) σ (E, F).

Possiamo suddividere l'insieme dei segmenti orientati in sottoinsiemi che diremo **classi di equivalenza**. Se in ogni classe mettiamo tutti i segmenti equipollenti ad un dato segmento orientato, per individuare una classe basta un qualsiasi elemento che si può scegliere come rappresentante.

DEFINIZIONE 2.1.1 - *Si dice **vettore libero** o semplicemente **vettore** una classe di segmenti orientati equipollenti.*

2.1.2 - Nomenclatura e notazioni.

Considerato un vettore, che indicheremo con **u** oppure con $\vec{u}$, se (A, B) è un suo rappresentante si pone **u** = B – A o anche B = A + **u**.
La distanza di A da B dice **norma** o **modulo** del vettore **u** = B – A e si indica con

$$\|\mathbf{u}\| \quad \text{o} \quad \|B-A\| \quad \text{o} \quad |\mathbf{u}| \quad \text{o} \quad |B-A|.$$

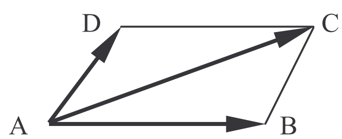
Il vettore nullo **0** ha modulo zero, direzione e verso indeterminati.
I vettori con norma 1 sono detti **versori**.

OSSERVAZIONE. Nel seguito verranno introdotte diverse operazioni fra vettori utilizzando dei segmenti che li rappresentano. Occorre verificare che le operazioni siano indipendenti dalla scelta dei rappresentanti. Lasciamo al lettore la verifica.

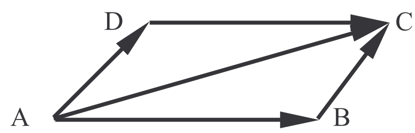
2.1.3 - Somma di due vettori.

La somma di due vettori si definisce su due rappresentanti dei vettori:
scelto un punto A se B – A è un rappresentante del vettore **u** e C – B un rappresentante del vettore **v** allora C – A è un rappresentante del vettore **u** + **v**. L'operazione è indipendente dalla scelta del punto A.

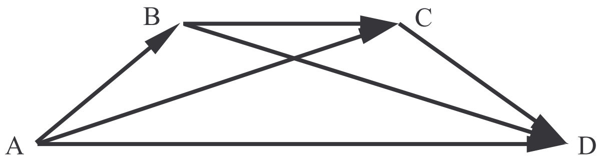
La costruzione di un rappresentante del vettore **u** + **v** può essere fatta anche mediante la regola del parallelogramma se **u** e **v** non hanno rappresentanti sulla stessa retta.
Ossia se B – A è un rappresentante del vettore **u** e D – A un rappresentante del vettore **v**, si costruisce il parallelogramma ABCD, il segmento orientato AC rappresenta **u** + **v**.



PROPRIETÀ 2.1.1 - *L'insieme dei vettori con l'operazione di somma forma un gruppo commutativo*.
Dimostrazione. La somma dei vettori sopra definita gode infatti delle seguenti proprietà:
- Proprietà commutativa: **u** + **v** = **v** + **u** infatti se **u** = B – A = C – D e C – B è un rappresentante di **v**, per un noto criterio, il convesso ABCD è un parallelogramma.



- Proprietà associativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ infatti si ha che $(B – A) + (C – B) + (D – C) = D – A$ comunque si raggruppino gli addendi.



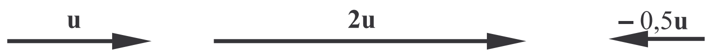
- Il vettore nullo **0** è elemento neutro: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ovvio vista la definizione di **0**.
- Per ogni vettore **u** esiste il vettore opposto $-\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$; infatti per costruire l'opposto di **u** basta considerare un suo rappresentante A – B; un rappresentante di $-\mathbf{u}$ sarà B – A perché $(B – A) + (A – B) = \mathbf{0}$.

2.1.4 - Prodotto di un numero reale per un vettore.

Introduciamo ora una legge di composizione, detta **prodotto**, che ad una coppia ordinata formata da un numero reale ed un vettore associa un solo vettore.

DEFINIZIONE 2.1.2 - *Se λ è un numero reale ed* **u** *un vettore, per prodotto* $\lambda\mathbf{u}$ *si intende il vettore* **w** *tale che:*
è per definizione il vettore nullo se $\lambda = 0$ *oppure* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *ossia* $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *e* $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *altrimenti è il vettore tale che:*
- $\|\mathbf{w}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{u}\|$;
- ***w*** *ha la direzione di* **u**;
- ***w*** *ha il verso di* **u** *se* $\lambda > 0$, *verso contrario se* $\lambda < 0$.

ESEMPIO 2.1.1



PROPRIETÀ 2.1.2
Scelti comunque i vettori **u** *e* **v** *ed i numeri reali λ e μ valgono le seguenti eguaglianze:*
$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$;
$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$;
$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$;
$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
La giustificazione segue dalla Definizione 2.1.2.
In particolare, dalla seconda e quarta relazione, segue che se n è un numero naturale si ha: $n\mathbf{u} = (1+ 1+\ldots+ 1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + 1\mathbf{u} +\ldots+ 1\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u} +\ldots+ \mathbf{u}$ (n volte).

DEFINIZIONE 2.1.3 - *Due vettori* **u** *e* **v** *si dicono* ***paralleli*** *se hanno rappresentanti sulla stessa retta, ossia* $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

L'insieme dei vettori, definiti come classi di segmenti del piano orientati equipollenti con la somma e il prodotto per un numero reale prima definiti è un caso particolare di **spazio vettoriale** sul campo dei numeri reali, che indicheremo con S_2.

2.2 - Generalità sugli spazi vettoriali.

2.2.1 - Definizione di spazio vettoriale.

Fissiamo un campo numerico K, ad esempio K = **R** (campo dei numeri reali) oppure K = **C** (campo dei numeri complessi) e sia V un insieme i cui elementi denotiamo con $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,….

DEFINIZIONE 2.2.1 - *Diciamo che V è uno **spazio vettoriale** su K se in V sono date:*
*- un'operazione, detta **somma**, che ad ogni coppia $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ di elementi di V associa un unico elemento di V denotato con $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$;*
*- un'operazione, detta **prodotto per scalare**, che ad ogni coppia $\lambda \in K$ e $\mathbf{v} \in V$ associa un unico elemento di V denotato con $\lambda\mathbf{v}$.*
Le due operazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:
(I) {V, +} è un gruppo commutativo, cioè:
I_1 - per ogni scelta di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ in V si ha: $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \mathbf{v_2} + \mathbf{v_1}$ (proprietà commutativa);
I_2 - per ogni scelta di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ in V si ha: $(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) + \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + (\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3})$ (proprietà associativa);
I_3 - esiste un elemento $\mathbf{0}$ in V tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = v$ per ogni $\mathbf{v} \in V$;
I_4 - per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste $\mathbf{v'}$ (oppposto di $\mathbf{v}$) tale che $v + v' = \mathbf{0}$.
(II) la legge di prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà, per ogni scelta di λ e μ in K e per ogni scelta di $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v}$ in V:
II_1 - $\lambda(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = \lambda\mathbf{v_1} + \lambda\mathbf{v_2}$;
II_2 - $(\lambda + \mu)\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$;
II_3 - $(\lambda\mu)\,\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$;
II_4 - $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, dove 1 è l'unità moltiplicativa di K.
Gli elementi di K vengono detti **scalari**, gli elementi di V vengono detti **vettori**.

Vediamo ora alcuni esempi di spazi vettoriali.

ESEMPIO 2.2.1 - L'insieme dei vettori dello spazio, definiti come classi di segmenti orientati equipollenti, con le operazioni di somma di vettori e prodotto di un numero reale per un vettore definite in 2.1.3 e 2.1.4, è uno spazio vettoriale sui reali che viene indicato con S_3.

ESEMPIO 2.2.2 - Sia $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ l'insieme delle n-ple di numeri reali.
La somma di due elementi di $\mathbf{R}^n$ è definita da:

$$(a_1,\ldots, a_n) + (b_1,\ldots, b_n) = (a_1 + b_1,\ldots, a_n + b_n).$$

Il prodotto di un numero reale λ per un elemento di $\mathbf{R}^n$ è definito da:

$$\lambda(a_1,\ldots, a_n) = (\lambda a_1,\ldots, \lambda a_n).$$

Si verifica che $\mathbf{R}^n$ rispetto alle operazioni sopra definite è uno spazio vettoriale su **R** che viene detto **esempio fondamentale**.

ESEMPIO 2.2.3 - Sia $\mathbf{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale ad n con le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un reale per un polinomio. Si verifica che $\mathbf{R}_n[x]$ è uno spazio vettoriale su **R**.
Se si considera invece l'insieme dei polinomi di grado n rispetto alle stesse operazioni, non si ottiene uno spazio vettoriale in quanto, ad esempio, manca il polinomio nullo.

ESEMPIO 2.2.4 - Consideriamo l'insieme $M_{m,n}$ delle matrici con m righe ed n colonne ad elementi reali: una matrice di $M_{m,n}$ è una tabella rettangolare di numeri del tipo:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\|.$$

Date due matrici di $M_{m,n}$, A = $\|a_{ij}\|$ e B = $\|b_{ij}\|$ (quindi con lo stesso numero di righe e di colonne) definiamo:

- **somma di A e B** la matrice C = $\|a_{ij} + b_{ij}\|$ i cui elementi sono la somma degli elementi di A e B che stanno nella stessa posizione;
- **prodotto di un reale λ per la matrice A** la matrice λA = $\|\lambda a_{ij}\|$ i cui elementi sono i prodotti degli elementi di A per λ.

Rispetto a tali operazioni $M_{m,n}$ è uno spazio vettoriale su **R**.

DEFINIZIONE 2.2.2 - *Un sottoinsieme non vuoto V' di uno spazio vettoriale V si dice **sotto-spazio vettoriale** di V se è, a sua volta, spazio vettoriale per le restrizioni delle operazioni di V a V'.*

Esistono due criteri equivalenti per stabilire quando un sottoinsieme non vuoto è un sotto-spazio.

PROPRIETÀ 2.2.1 - **I° criterio**.
V' è un sottospazio di V se è chiuso rispetto alle due operazioni. Ossia:
1) $\forall \mathbf{u} \in V'$ e $\forall \mathbf{v} \in V' \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V'$;
2) $\forall \mathbf{u} \in V'$ e $\forall \lambda \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{u} \in V'$.
Si osservi che la 2) implica che $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \in V'$ e che $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in V'$.
Tutte le altre proprietà della definizione di spazio vettoriale sono verificate anche in V' in quanto proprietà di tipo universale.

PROPRIETÀ 2.2.2 - **II° criterio**.
V' è un sottospazio di V se: $\forall \mathbf{u} \in V', \forall \mathbf{v} \in V'$ e $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \forall \beta \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in V'$.

ESEMPIO 2.2.5 - L'insieme formato dal solo vettore nullo è sottospazio vettoriale di qualsiasi spazio vettoriale; per verificarlo basta usare uno dei due criteri.

ESEMPIO 2.2.6 - Il sottoinsieme H di $\mathbf{R}^4$ formato dalle quaterne del tipo $(a_1, a_2, 0, 0)$ è sottospazio vettoriale. Infatti usando il I° criterio si ha:
$(a_1, a_2, 0, 0) + (b_1, b_2, 0, 0) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0, 0) \in H$,
$\lambda(a_1, a_2, 0, 0) = (\lambda a_1, \lambda a_2, 0, 0) \in H$.
Non è sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ il sottoinsieme K delle quaterne $(a_1, 1, 0, 0)$ in quanto non contiene il vettore nullo.

Tenendo conto dei criteri visti si dimostra facilmente la:

PROPRIETÀ 2.2.3 - *L'intersezione insiemistica di due sottospazi H e K di V è supporto di un sottospazio di V.*

DEFINIZIONE 2.2.3 - *Due sottospazi H e K di V si dicono disgiunti se* $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$.

Invece l'unione insiemistica di due sottospazi non è, in generale, un sottospazio.

ESEMPIO 2.2.7 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ siano H il sottospazio vettoriale delle quaterne $(0, a_2, a_3, 0)$ e K il sottospazio vettoriale delle quaterne $(a_1, 0, 0, a_4)$. La loro unione insiemistica contiene gli elementi (0, 1, 2, 0) e (2, 0, 0, 3) ma non (0, 1, 2, 0) + (2, 0, 0, 3) = = (2, 1, 2, 3) e quindi non è un sottospazio.

PROPRIETÀ 2.2.4 - *Siano H e K due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Il sottoinsieme S i cui elementi sono del tipo* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *al variare di* $\mathbf{x}$ *in H e di* $\mathbf{y}$ *in K è un sottospazio vettoriale di V che si dice* ***sottospazio somma*** *di H e K e si indica con S = H + K.*
Anche questa proprietà si dimostra usando uno dei due criteri visti.

2.2.2 - Dipendenza ed indipendenza lineare. Basi e dimensione.

DEFINIZIONE 2.2.4 - *Siano* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *m vettori di uno spazio vettoriale V su* ***R*** *(campo dei numeri reali) ed* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *m numeri reali, il vettore*

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots\ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m$$

si dice ***combinazione lineare*** *(in breve c.l.) dei vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *con coefficienti* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Fissati m vettori di V, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ l'insieme dei vettori loro combinazioni lineari è un sottospazio vettoriale F di V che viene anche indicato con $L < \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m >$.
$L < \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m >$ non dipende dall'ordine con cui si considerano i vettori per la proprietà commutativa della somma.

DEFINIZIONE 2.2.5 - *Un insieme di vettori* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *si dice un sistema di* ***generatori*** *di V se ogni vettore* $\mathbf{u}$ *di V è c.l. di* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

DEFINIZIONE 2.2.6 - *Sia V uno spazio vettoriale. Un sistema di vettori* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *si dice* ***linearmente dipendente*** *o* ***legato*** *(brevemente l.d.) se esiste una combinazione lineare con scalari* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *non tutti nulli che dà il vettore nullo:*

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots\ldots + \alpha_p\mathbf{v}_p.$$

In questo caso i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *sono detti l.d.*
Un sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *si dice* ***linearmente indipendente*** *o* ***libero*** *(brevemente l.i.) se l'unica combinazione lineare dei vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *che dà il vettore nullo è quella con gli scalari tutti nulli. In tal caso i vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *sono detti l.i.*

Valgono le seguenti proprietà:
- se uno dei p vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ è il vettore nullo, i vettori sono l.d., come prova la relazione
$$\mathbf{0} = 0\,\mathbf{v}_1 + \ldots\ldots + 1\,\mathbf{0} + \ldots\ldots + 0\,\mathbf{v}_p;$$
- i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono l.d. se e solo se uno di essi è esprimibile come c.l. dei rimanenti;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.d. anche ogni suo soprainsieme lo è;
- un vettore $\mathbf{v}$ non nullo è l.i.;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.i. nessuno dei vettori è nullo;
- se il sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ è l.i. anche ogni suo sottoinsieme lo è.

Nel caso di vettori dello spazio S_3 due vettori paralleli sono linearmente dipendenti.
Se diciamo complanari tre vettori dello spazio S_3 se esistono tre loro rappresentanti su uno stesso piano, vale la:

PROPRIETÀ 2.2.5 - *Tre vettori dello spazio S_3 sono complanari se e solo se sono l.d., mentre quattro vettori di S_3 sono sempre l.d.*

DEFINIZIONE 2.2.7 - *Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che l'insieme ordinato di vettori $\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n$ forma una **base** di V se i vettori formano un sistema di generatori e inoltre sono l.i.*

TEOREMA 2.2.6 - *Un sistema di vettori $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V è una base di V se e solo se ogni vettore **v** di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$.*
Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$ sia una base di V e proviamo che ogni vettore **v** di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$.
Se **v** avesse due scritture: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 +\dots+ x_n\mathbf{v}_n = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 +\dots+ x'_n\mathbf{v}_n$ si avrebbe $(x_1 - x'_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - x'_2)\mathbf{v}_2 +\dots+ (x_n - x'_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.
Poiché $\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti 0. Ne segue che $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$,..., $x_n = x'_n$.
Viceversa se ogni vettore **v** di V si scrive in modo unico come c.l. di $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$ è immediato che $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$ sia un sistema di generatori.
Inoltre esprimendo il vettore nullo mediante $\{\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_n\}$ si ha:

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 +\dots+ x_n\mathbf{v}_n = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_n.$$

Per l'unicità della scrittura deve essere $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, … $x_n = 0$ e quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

DEFINIZIONE 2.2.8 - *Se $\{\mathbf{e}_1,\dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V l'espressione:*

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 +\dots+ x_n\mathbf{e}_n$$

*è detta **decomposizione** del vettore rispetto alla base.*
Gli scalari sono univocamente determinati dal vettore e si dicono **componenti** rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1,\dots, \mathbf{e}_n\}$.

OSSERVAZIONE - Il vettore nullo ha componenti (0, 0,…, 0). Il vettore $\mathbf{e}_1$ ha componenti (1, 0,…, 0) nella base $\{\mathbf{e}_1,\dots, \mathbf{e}_n\}$ infatti si ha:

$$\mathbf{e}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 +\dots+ 0\mathbf{e}_n$$

e così $\mathbf{e}_2$ ha componenti (0, 1, 0,…, 0),…, $\mathbf{e}_n$ ha componenti (0,…, 0, 1).

DEFINIZIONE 2.2.9 - *Uno spazio vettoriale V si dice **finitamente generato** se esiste un numero finito r di vettori $\mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_r$ tali che $V = L < \mathbf{v}_1,\dots, \mathbf{v}_r >$.*

Nel seguito supporremo che V sia finitamente generato.
Si può dimostrare che in V tutte le basi sono formate dallo stesso numero di vettori, quindi si può dare la seguente

DEFINIZIONE 2.2.10 - *Si dice **dimensione** di uno spazio vettoriale V finitamente generato il numero n di vettori che ne costituiscono una qualunque base.*
Per indicare che la dimensione di V è n si scrive dimV = n oppure V_n.
Se V = {**0**} si pone dimV = 0.

OSSERVAZIONE 1 - La dimensione n di V è anche il massimo numero di vettori l.i. di V.

OSSERVAZIONE 2 - In vari esercizi è nota la dimensione n dello spazio V. In tal caso per decidere se n vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2,\dots, \mathbf{u}_n$ costituiscono una base di V basta verificare se gli n vettori sono l.i. oppure se generano V, perché una proprietà implica l'altra.

ESEMPIO 2.2.8 - Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ ha dimensione n e una sua base è formata dalle n-ple: (1, 0, 0,…, 0), (0, 1, 0,…, 0), …., (0, 0,…, 0, 1).

ESEMPIO 2.2.9 - Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_n[x]$ ha dimensione n + 1 e una sua base è formata dai polinomi: 1, x, x^2,…, x^n.

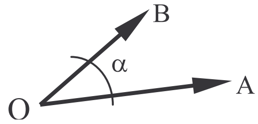
ESEMPIO 2.2.10 - Lo spazio vettoriale $M_{m,n}$ ha dimensione mn e una sua base è formata dalle matrici i cui elementi sono quasi tutti 0 ed un solo elemento è uguale ad 1 in tutti i modi possibili.

2.3 - Vettori dello spazio.

2.3.1 - Angolo di due vettori non nulli.

Fissato un arbitrario punto O e considerati i vettori $\mathbf{u}$ = A – O e $\mathbf{v}$ = B – O, l'angolo ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) è l'angolo convesso (eventualmente piatto) delle semirette AO, OB.

$0 \le \alpha \le \pi$



Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi$ i vettori **u** e **v** sono paralleli, se $\alpha = \pi/2$ i vettori **u** e **v** sono ortogonali.

2.3.2 - Prodotto scalare.

DEFINIZIONE 2.3.1 - *Considerati due vettori* ***u*** *e* ***v*** *di* S_3 *si dice* ***prodotto scalare*** *di* ***u*** *e* ***v****, e si indica* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$*, il* ***numero reale*** *che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei vettori per il coseno del loro angolo:*

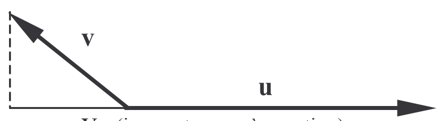
(1) $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Tale numero è zero se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ossia se **u** e **v** sono ortogonali. Questo fatto si esprime dicendo:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori ***u*** *e* ***v*** *siano ortogonali è che* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Se si considerano le proiezioni ortogonali di segmenti su una retta orientata dotati di segno, allora il prodotto scalare è semplicemente il prodotto della norma del primo vettore per la proiezione con segno del secondo vettore sul primo, che indichiamo con v_u: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, v_u$.

V_u (in questo caso è positivo)



V_u (in questo caso è negativo)

Se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ la formula (1) diventa $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{u}\| = (\|\mathbf{u}\|)^2$ ossia la norma di un vettore **u** è la radice quadrata del numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Inoltre se **u** e **v** sono diversi dal vettore nullo si ha $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:
i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
ii) $(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v})$;
iii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e vale zero se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

In Geometria 2 si proverà che il prodotto scalare è un esempio di forma bilineare simmetrica definita positiva. Uno spazio vettoriale in cui è definita una forma bilineare simmetrica definita positiva si dice **spazio vettoriale euclideo**.

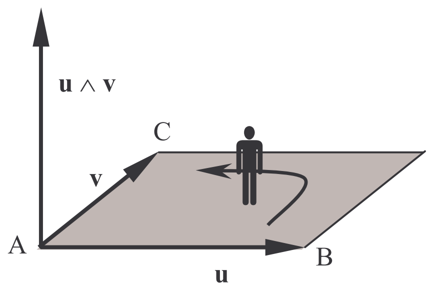
2.3.3 - Il prodotto vettoriale o prodotto esterno di due vettori dello spazio S_3.

Consideriamo i vettori dello spazio S_3 e introduciamo, oltre a quelle già viste per i vettori del piano, un'ulteriore operazione.

DEFINIZIONE 2.3.2 - *Dati due vettori* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *di* S_3 *si dice loro* ***prodotto vettoriale*** *o* ***esterno*** *un vettore, che si indica* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, *e si legge* $\mathbf{u}$ *vettore* $\mathbf{v}$ *oppure* $\mathbf{u}$ *esterno* $\mathbf{v}$, *così definito:*
se i vettori sono paralleli, in particolare uno è il vettore nullo: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
se $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *non sono paralleli:*
- $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ *è ortogonale sia ad* $\mathbf{u}$ *che a* $\mathbf{v}$;
- il modulo di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ *è* $\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \; sen(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
- il verso è quello indicato in figura, ossia è il verso piedi-testa dell'uomo che posto sul piano individuato da $\mathbf{u} = B - A$ *e* $\mathbf{v} = C - A$, *vede la minima rotazione di* $\mathbf{u}$ *per sovrapporsi a* $\mathbf{v}$ *avvenire in senso antiorario.*

Si verifica facilmente che il modulo di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati consecutivi due rappresentanti di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

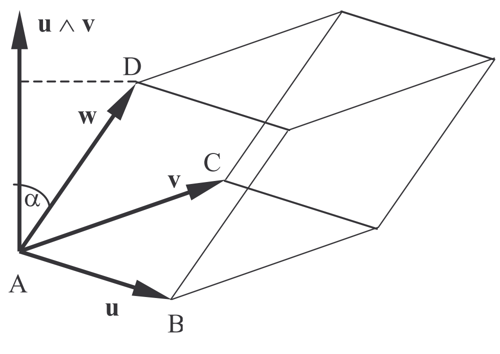
Per il prodotto vettoriale valgono le seguenti proprietà:
i) $(\mathbf{u} + \mathbf{u'}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u'} \wedge \mathbf{v}$;
ii) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{v'}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v'}$;
iii) $(\lambda\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ ove λ è un numero reale;
iv) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$;
v) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$.



Il **prodotto misto** di tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ è il numero reale $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ e poiché l'ordine in cui vengono eseguite le operazioni è solo quello indicato, si scrive semplicemente $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.

TEOREMA 2.3.1 - *Il valore assoluto del prodotto misto quando non è nullo, rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$ e $\mathbf{w} = D - A$ sono tre vettori non complanari, ossia che non hanno rappresentanti su uno stesso piano, individuano un parallelepipedo avente come base il parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la cui area è il modulo del vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e come altezza relati-



va a tale base il valore assoluto della proiezione del vettore $\mathbf{w}$ su $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
Quindi $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ rappresenta, a meno del segno, il volume del parallelepipedo.

OSSERVAZIONE 1 - Se almeno uno dei tre vettori è nullo o se i tre vettori sono complanari il prodotto misto è nullo in quanto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{w}$ e quindi il loro prodotto scalare è zero.

OSSERVAZIONE 2 - Il volume del tetraedro individuato da tre vettori è 1/6 del valore assoluto del loro prodotto misto.

2.3.4 - Espressioni in componenti.

Introdotta nello spazio vettoriale S_2 una base, ossia una coppia ordinata di vettori l.i., ogni vettore di S_2 si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 , \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2.$$

Ora è possibile dare le espressioni in componenti delle operazioni viste, tenuto conto delle relative proprietà:
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2$;
- $\lambda\mathbf{u} = \lambda(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) = \lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2$.

ESEMPIO 2.3.1 - Se $\mathbf{u}$ ha componenti (2, 3) e $\mathbf{v}$ ha componenti (–1, – 4);
- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ha componenti (2 – 1, 3 – 4) = (1, –1);
- $3\mathbf{u}$ ha componenti (6, 9);
- $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ ha componenti (–2, –3).

Per il prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Per semplificare l'espressione del prodotto scalare in componenti è opportuno scegliere una base particolare, detta **base ortonormale**, formata da due versori fra loro ortogonali $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. In questa ipotesi si ha $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, da cui:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = u_1v_1 + u_2v_2$$

Due vettori sono paralleli se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ossia $u_1 = \lambda v_1$ e $u_2 = \lambda v_2$ ossia se $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2}$.

Ad esempio $\mathbf{u}$ = (–1, 2) è parallelo a $\mathbf{v}$ = (+ 0,5 , –1).

Due vettori sono ortogonali se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, quindi in una base ortonormale sono ortogonali se $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$.
Ad esempio $\mathbf{u}$ = (–1, 2) è ortogonale a $\mathbf{v}$ = (4, 2).

Considerazioni del tutto analoghe alle precedenti si possono fare per S_3. Introdotta nello spazio vettoriale S_3 una base, ossia una terna ordinata di vettori l.i., ogni vettore di S_3 si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

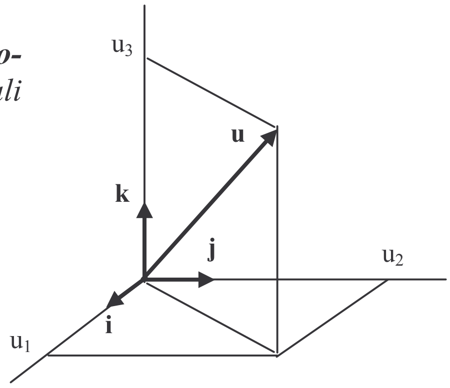
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

e le espressioni in componenti delle operazioni viste, risultano:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3$,

$\lambda\mathbf{u} = \lambda(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) = \lambda u_1\mathbf{e}_1 + \lambda u_2\mathbf{e}_2 + \lambda u_3\mathbf{e}_3$.
Anche in questo caso per ottenere un'espressione più semplice del prodotto scalare si introduce una base opportuna.

DEFINIZIONE 2.3.3 - *{**i, j, k**} è una **base ortonormale positiva** per S_3 se **i, j, k** sono versori a due a due ortogonali cioè, espresso in formule:*

$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1;$
$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0;$
$\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i};$
$\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}.$



Considerati due vettori qualsiasi nella base ortonormale:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

utilizzando le proprietà del prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Esprimendo i vettori nella base ortonormale è anche possibile ottenere un'espressione semplice del prodotto vettoriale in componenti:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})\wedge(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

che possiamo scrivere, con abuso di scrittura, come sviluppo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

ESEMPIO 2.3.2 - Se $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ il loro prodotto vettoriale risulta:
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (-1 + 6)\mathbf{i} + (-3 + 1)\mathbf{j} + (2 - 1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Il **prodotto misto** di tre vettori **w, u, v** è il numero reale $(\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.
In una base ortonormale positiva è lo sviluppo del determinante delle componenti.
Infatti posto $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\,\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, utilizzando le proprietà del prodotto scalare si ha:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

ossia lo sviluppo del determinante del terzo ordine:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Il valore assoluto del prodotto misto, quando non è nullo, rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori (Teorema 2.3.1); da tale significato geometrico seguono diverse proprietà dei determinanti del terzo ordine, ma non tutte.
Ad esempio che il valore di un determinante non cambia se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne va verificato in altro modo, ad esempio direttamente con il calcolo.

ESEMPIO 2.3.3 - Verificare che i seguenti tre vettori sono complanari:
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,
$\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$,
$\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Poiché si ha $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$ il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori è nullo, quindi i tre vettori sono complanari, ossia l.d.

2.3.5 - Applicazioni dei vettori alla geometria elementare ed alla trigonometria.

Diversi teoremi di geometria elementare si possono giustificare coi vettori, per esempio:

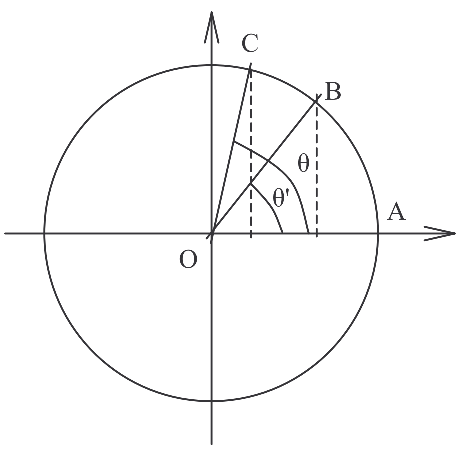
TEOREMA 2.3.2 - *Siano (A, B, C, D) un quadrilatero convesso qualsiasi ed M, N, P, Q i punti medi dei suoi lati, allora (M, N, P, Q) è un parallelogramma.*
La tesi è $M - N = Q - P$.
Ma $M - B = (A - B)/2$ $N - B = (C - B)/2$ per cui $M - N = (A - C)/2$.
Analogamente si prova che $Q - P = (A - C)/2$.

TEOREMA 2.3.3 - *Teorema di Carnot.*
In un triangolo qualunque il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo da essi compreso.
Dimostrazione. Sia (A,B,C) un triangolo qualsiasi. Posto $\mathbf{u} = B - A$ e $\mathbf{v} = C - A$ risulta $C - B = \mathbf{u} - \mathbf{v}$; il teorema segue dalle uguaglianze:

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

DEFINIZIONE 2.3.4 - *Dicesi baricentro di n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ di S_3 il punto G tale che $G - O = \frac{1}{n}[(P_1 - O) + \ldots (P_n - O)]$ dove O è un punto arbitrario.*
Per n = 2 il baricentro di due punti A e B è il punto medio del segmento AB.
Per n = 3 il baricento di tre punti A, B, C è il punto di incontro delle mediane del triangolo ABC.

Vediamo anche, ad esempio, come si possa ricavare una delle formule trigonometriche di addizione e sottrazione.
Sul cerchio unitario di centro O si considerino tre punti A, B, C. Sia $A - O = \mathbf{i}$; poniamo l'angolo $AOC = \theta$, l'angolo $AOB = \theta'$ quindi $BOC = \theta - \theta'$.



Risulta:
$B - O = \cos\theta'\ \mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta'\ \mathbf{j}$
$C - O = \cos\theta\ \mathbf{i} + \mathrm{sen}\theta\ \mathbf{j}$
Per definizione di prodotto scalare:
$(B - O) \cdot (C - O) = (1)(1)\cos(BOC) = \cos(\theta - \theta')$.
Esprimendo il prodotto scalare in componenti si ha:
$(B - O) \cdot (C - O) = \cos\theta \cos\theta' + \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\theta'$.
da cui: $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta \cos\theta' + \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\theta'$.

2.4 - Esercizi proposti.

II.1 - In $\mathbf{R}^3$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}(2, 1, 2)$, $\mathbf{b}(1, 1, -1)$, $\mathbf{c}(0, -1, 4)$.
i) provare che **a** e **b** sono linearmente indipendenti;
ii) provare che **a**, **b** e **c** sono linearmente dipendenti. ($\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$)

II.2 - Dire se i seguenti vettori dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti:
i) $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 3, -1)$; (linearmente dipendenti $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$)
ii) $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$; (linearmente indipendenti)
iii) $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{w} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{t} = (8, 5, 7)$. (linearmente dipendenti)

II.3 - Dire se i seguenti vettori dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti:
i) $\mathbf{u} = (0, -1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, -3, 6, 9)$; (linearmente dipendenti $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$)
ii) $\mathbf{u} = (1, -2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 2, 0)$. (linearmente indipendenti)

II.4 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$ sono dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (a, 1)$ dove a è un numero reale; dire per quali valori di a **u** e **v** sono linearmente indipendenti. ($a \neq 1/2$)

II.5 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ si considerino i sottoinsiemi:
i) $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$; (si)
ii) $G = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + x_3 - 1 = 0\}$; (no)
iii) $H = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}$. (no)
Stabilire quali di essi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.

II.6 - Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottoinsiemi:
i) $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;
ii) $G = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = -x_4\}$.
Dimostrare che sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.
Determinare una base e la dimensione di F e G. (dim F = 2, base ((1, 0, –1, 0),(0, 1, 0, –1))
(dim G = 2, base ((1, 1, 0, 0),(0, 0, 1 ,–1))

II.7 - Nello spazio vettoriale E_3, rispetto alla base canonica $B(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ sono dati i vettori: $\mathbf{a}(1, 2, -1)$, $\mathbf{b}(2, 3, 1)$, $\mathbf{c}(0, -1, 4)$.
Determinare i numeri reali r,s,t in modo che il vettore $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ sia:
i) eguale ad $\mathbf{e_1}$; ($r = -13$, $s = 7$, $t = -5$)
ii) parallelo al vettore $\mathbf{u} = 3\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$. ($r = -25k$, $s = 14k$, $t = -10k$ $\forall k \in \mathbf{R}$)

II.8 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{u}(1, -1, 2)$ e $\mathbf{v}(3, 2, -1)$. Verificare che:
i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1$;
ii) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$;
iii) $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) = -25$.

II.9 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto ad una base ortonormale positiva, sono dati i vettori $\mathbf{u}(-3, 2, 1)$, $\mathbf{v}(-2, 1, 3)$ e $\mathbf{w}(1, 1, -7)$. Determinare le componenti di un vettore **x** che sia perpendicolare ad **u** e **v** e tale che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 10$. ($\mathbf{x} = (10, 14, 2)$)

II.10 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{u}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}(0, 1, 2)$. Verificare che:

i) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (-2, -2, 1)$;

ii) $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = 3$;

iii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = (6, 6, -3)$.

II.11 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{a}(1, -2, 1)$, $\mathbf{b}(3, 0, -1)$ e $\mathbf{c}(1, 1, 0)$. Verificare che:

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 6$;

ii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 12$.

II.12 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto ad una base ortonormale positiva sono dati i vettori $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(0, 1, -2)$ e $\mathbf{c}(2, 0, 3)$. Calcolare:

i) l'area del triangolo di lati $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; $(s = \sqrt{6}/2)$

ii) il volume con segno del tetraedro di spigoli $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. $(V = 5/6)$

II.13 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sono dati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Determinare:

i) il loro prodotto vettoriale ed il loro prodotto scalare; $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k};\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7)$

ii) i loro moduli; $(\|\mathbf{u}\| = 3;\ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{11})$

iii) un vettore complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. ($a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ per ogni a, b reale)

II.14 - Nello spazio vettoriale $\mathbf{E_3}$, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sono dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;

i) calcolare $(\mathbf{u} - 3\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$; (3)

ii) trovare un vettore che abbia tutte le componenti eguali e come modulo il modulo di $\mathbf{u}$;
$(\mathbf{x} = \pm\sqrt{2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}))$

iii) dire se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. (si)

CAPITOLO III

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

3.1 - Riferimento cartesiano.

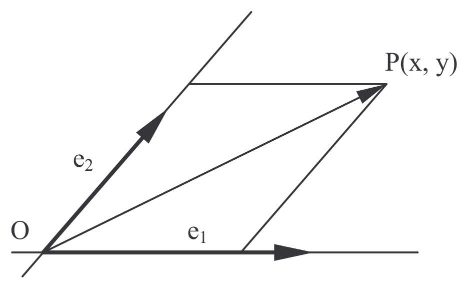
Siano E_2 il piano affine euclideo, O un punto di E_2 e $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base dello spazio vettoriale S_2 associato ad E_2. Diciamo che il punto P ha coordinate (x, y) nel riferimento $R\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se il vettore P – O ha componenti x ed y rispetto alla base $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e viceversa:

$$P = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

Il punto O viene detto **origine** del sistema di riferimento ed ha coordinate (0, 0).

La retta per O parallela ad $\mathbf{e}_1$ viene detta **asse delle x** o **asse delle ascisse**, un suo punto ha coordinate (x, 0); la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_2$ viene detta **asse delle y** o **asse delle ordinate**, un suo punto ha coordinate (0, y).

Se $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono versori e sono ortogonali il riferimento viene detto **riferimento cartesiano ortonormale** ed i versori sono indicati con **i** e **j.**



Le coordinate del punto medio di due punti dati sono le semisomme delle coordinate (v. Definizione 2.3.4 per n = 2).

ESEMPIO 3.1.1 - Il punto medio del segmento di estremi A(–2, –5) e B(0, 3) è il punto M di coordinate (–1, –1).

Se $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ sono **simmetrici rispetto all'origine**, si ha: $\mathbf{x_2 = -x_1}$, $\mathbf{y_2 = -y_1}$; infatti si verifica che l'origine è il loro punto medio. Se P_2 e P_1 sono **simmetrici rispetto all'asse x,** si ha: $\mathbf{x_2 = x_1}$, $\mathbf{y_2 = -y_1}$ ed analogamente per l'asse y.

Le componenti del vettore differenza di due punti sono date dalla differenza delle componenti, infatti si ha:

$$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$$

quindi se $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$

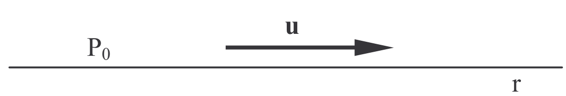
$$P_2 - P_1 = (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) - (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2.$$

3.2 - Equazioni della retta.

Esistono più modi per rappresentare una retta del piano.

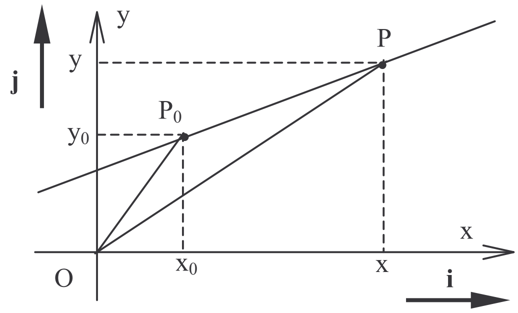
La retta per un punto P_0 parallela ad un vettore **u** è formata dai punti P tali che il vettore $P - P_0$ sia parallelo al vettore **u**, ossia

(1) $$P - P_0 = t\mathbf{u} \quad \text{ove t varia in } \mathbf{R}.$$



Tale formula, detta **equazione vettoriale della retta**, è indipendente dalla dimensione dello spazio vettoriale, ossia vale in dimensione 2, 3,…, n.

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, ossia un punto O detto origine ed una base ortonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ indichiamo con (x, y) le coordinate del punto P e con (x_0, y_0) le coordinate del punto P_0.



Risulta:
$P - P_0 = (P - O) - (P_0 - O) = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}$.
Se $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$ la (1) diventa: $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} = t(l\mathbf{i} + m\mathbf{j})$ ed eguagliando le componenti si ottengono le **equazioni parametriche della retta**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

DEFINIZIONE 3.2.1. - *Si dicono **parametri direttori** della retta le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta, quindi la coppia (l, m) e le coppie ad essa proporzionali.*
Eliminando il parametro t si ottiene **l'equazione cartesiana della retta**. Se i parametri direttori (l, m) sono entrambi non nulli la retta ha equazione: $\mathbf{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}}$.
Se $l = 0$ la retta ha equazione $x = x_0$, se $m = 0$ la retta ha equazione $y = y_0$.

ESEMPIO 3.2.1 - Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta per P_0 di coordinate (2, –1) e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ eliminando il parametro t si ha: $3x - y - 7 = 0$.

Anche la retta per due punti P_0 e P_1 si può pensare come retta per un punto (per esempio P_0) e parallela al vettore $P_1 - P_0$:

$$\mathbf{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}} \qquad \text{ove} \quad x_1 \neq x_0 \ \text{ e } \ y_1 \neq y_0.$$

Se $x_1 = x_0$ la retta ha equazione parametriche $x = x_0$, $y = y_0 + (y_1 - y_0)t$ e la sua equazione cartesiana è semplicemente: $x - x_0 = 0$, (infatti è un'equazione lineare in x ed y soddisfatta dalle coordinate di P_1 e P_0).

ESEMPIO 3.2.2 - Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta per P_0 di coordinate (2, 3) e per P_1 di coordinate (3, –2).

Risulta $P_1 - P_0 = (1, -5)$ quindi: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$. Eliminando il parametro t si ha: $5x + y - 13 = 0$.

Una retta può anche essere individuata come retta per un punto P_0 ed ortogonale ad un vettore $\mathbf{n}$: è quindi formata dai punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(L'espressione precedente rappresenta in dimensione 2 una retta, in dimensione 3 un piano, in dimensione 4 un iperpiano,….. in dimensione n una varietà lineare di dimensione n – 1).
Se $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ si ottiene l'equazione cartesiana della retta:

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

che è del tipo: $\mathbf{ax + by + c = 0}$ se si pone $c = -ax_0 - by_0$.
Un'equazione lineare in x ed y rappresenta una retta ed i coefficienti a, b della x e della y hanno il significato di componenti di un vettore ortogonale alla retta.
L'equazione di una retta è determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Si osservi che la retta scritta nella forma cartesiana precedente ha come parametri direttori $(-b, a)$; se invece la retta è scritta in forma esplicita $\mathbf{y = mx + p}$, ha $(m, -1)$ come componenti di un vettore ortogonale, mentre i parametri direttori sono proporzionali alla coppia $(1, m)$.

ESEMPIO 3.2.3 - La retta per P_0 di coordinate $(2, -3)$ ed ortogonale ad $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ha come equazione cartesiana:

$$2(x - 2) + 5(y + 3) = 0 \qquad \text{cioé} \qquad 2x + 5y + 11 = 0.$$

Notiamo che l'asse x essendo ortogonale al vettore $\mathbf{j}(0, 1)$ha equazione cartesiana $y = 0$, e l'asse y essendo ortogonale al vettore $\mathbf{i}(1, 0)$ ha equazione cartesiana $x = 0$.

3.3 - Cenni su questioni angolari.

Date due rette r ed s, dalle loro equazioni parametriche o cartesiane possiamo ricavare i parametri direttori (l, m) e (l', m'). In tal modo abbiamo le componenti di due vettori **r** ed **s** che danno le direzioni delle rette.
Considerato come angolo α delle due rette uno qualsiasi dei quattro angoli (uguali a due a due) che esse formano, dalla formula del prodotto scalare: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\| \cos(\mathbf{r}, \mathbf{s})$
si ricava il coseno dell'angolo α:

$$\cos\alpha = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}.$$

I coseni degli angoli che una retta forma con gli assi coordinati si dicono **coseni direttori** e sono definiti a meno di un segno.

ESEMPIO 3.3.1 - Date le rette r: $3x - y + 2 = 0$ ed s: $x - y + 7 = 0$ si ricava che il coseno del loro angolo è dato da: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{20}}{5}$ oppure $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{20}}{5}$.

In particolare si ricava la **condizione di ortogonalità fra due rette:**

$$\mathbf{ll' + mm' = 0} \qquad \mathbf{aa' + bb' = 0}$$

mentre dalla nozione di vettori paralleli si ricava la **condizione di parallelismo**:

$$\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l'}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m'}}, \qquad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}}.$$

Se le rette sono scritte in forma esplicita come $y = mx + p$ ed $y = m'x + p'$ (cioè si sono scelti come parametri direttori rispettivamente $(1, m)$ ed $(1, m')$) le condizioni precedenti assumono la forma più semplice:

- condizione di parallelismo: $\mathbf{m = m'}$:
- condizione di perpendicolarità: $\mathbf{mm' + 1 = 0}$.

ESEMPIO 3.3.2 - Dato il punto P_0 di coordinate $(-2, 3)$ e la retta r: $2x + 5y + 1 = 0$, determinare: i) la retta per P_0 parallela ad r;

ii) la retta per P_0 ortogonale ad r.

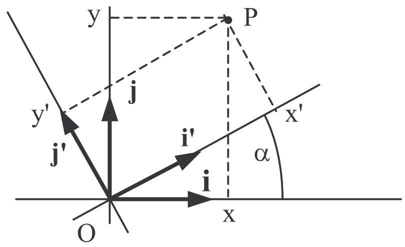
i) Una retta parallela ad r è del tipo $2x + 5y + h = 0$; dovendo passare per il punto $P_0\,(-2, 3)$ risulta $h = 4 - 15 \quad h = -11 \;\to\; 2x + 5y - 11 = 0$.

ii) Una retta ortogonale ad r è del tipo $5x - 2y + h = 0$; dovendo passare per il punto $P_0\,(-2, 3)$ risulta $h = 10 + 6 \quad h = 16 \;\to\; 5x - 2y + 16 = 0$.

Dopo aver osservato che $x \geq 0$ è un semipiano come anche $y \geq 0$ considerando l'equazione vettoriale della retta sotto forma di prodotto scalare $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0$ si può notare che risulta $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} \geq 0$ per tutti i punti P del semipiano verso cui è orientato $\mathbf{n}$, mentre $(Q - P_0) \cdot \mathbf{n} \leq 0$ è l'altro semipiano.

3.4 - Rotazioni degli assi cartesiani.

Una rotazione è un cambiamento di riferimento in cui non varia l'origine, ossia si passa da $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ a $R'(O, \mathbf{i'}, \mathbf{j'})$ ruotando di un angolo α. Usando note formule trigonometriche, i versori $\mathbf{i'}$ e $\mathbf{j'}$ della nuova base si possono esprimere nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ mediante le relazioni:



$$\mathbf{i'} = \cos\alpha\, \mathbf{i} + \text{sen}\alpha\, \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j'} = -\text{sen}\alpha\, \mathbf{i} + \cos\alpha\, \mathbf{j}$$

Si ha allora $P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i'} + y'\mathbf{j'} = x'(\cos\alpha\, \mathbf{i} + \text{sen}\alpha\, \mathbf{j}) + y'(-\text{sen}\alpha\, \mathbf{i} + \cos\alpha\, \mathbf{j}) =$ $= (x'\cos\alpha - y'\text{sen}\alpha)\,\mathbf{i} + (x'\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha)\,\mathbf{j}$ da cui segue:

(1) $$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\text{sen}\alpha \\ y = x'\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Queste relazioni esprimono le coordinate di P nel riferimento R mediante le coordinate nel riferimento R'. Per esprimere le coordinate nel riferimento R' note quelle nel riferimento R si può risolvere il sistema (1) considerando x' ed y' come incognite e si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\alpha \\ y' = -x\,\text{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$

ESEMPIO 3.4.1 - Il punto A ha coordinate $(\sqrt{2}, 2)$ nel riferimento $R(O, x, y)$ dopo la rotazione degli assi di 135° attorno all'origine ha coordinate:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}\cos 135° + 2\,\text{sen}135° = -1 + \sqrt{2} \\ y' = -\sqrt{2}\,\text{sen}135° + 2\cos 135° = -1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

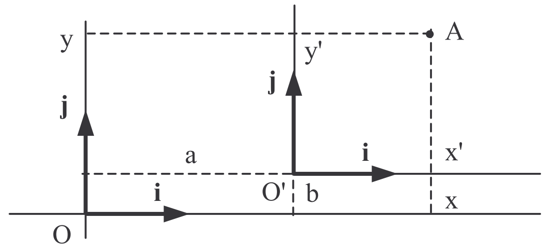
3.5 - Traslazione degli assi cartesiani.

Una traslazione è un cambiamento di riferimento in cui varia solo l'origine, mentre i versori degli assi restano fissi ossia si passa da $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ a $R'(O', \mathbf{i}, \mathbf{j})$.
Se il punto A ha coordinate (x, y) rispetto a $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ e ha coordinate (x', y') rispetto a $R'(O', \mathbf{i}, \mathbf{j})$, indicando con (a, b) le coordinate di O' poiché si ha:

$$A - O = (A - O') + (O' - O)$$

passando alle componenti si trova:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}.$$



3.6 - Mutua posizione di due rette.

Due rette possono avere:
i) un punto comune e allora si dicono **incidenti**;
ii) infiniti punti comuni e allora si dicono **coincidenti**;
iii) nessun punto comune e allora si dicono **parallele**.

ESEMPIO 3.6.1 -
i) Le rette seguenti hanno in comune il punto $(-1, 2)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s: 2x - y + 4 = 0$$

ii) Le rette seguenti coincidono: $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y + 6 = 0$.
iii) Le rette seguenti sono parallele: $2x - y + 3 = 0$, $4x - 2y = 0$.
Le verifiche si fanno risolvendo i sistemi delle equazioni delle rette.

3.7 - Fasci di rette.

Si dice fascio **proprio** di rette l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un dato punto, fascio **improprio** l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una data direzione.
Date due rette distinte r ed s di equazioni:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

una loro combinazione lineare con coefficienti λ e μ:

$$\boldsymbol{\lambda(ax + by + c) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0}$$

è l'equazione della generica retta del fascio; infatti essendo un'equazione lineare in x ed y rappresenta una retta, inoltre passa per il punto comune P_0 ad r ed s, oppure è parallela alla loro direzione comune.
Se $P_1 = (x_1, y_1)$ è diverso da P_0 vi è una ed una sola retta del fascio che passa per P_1, la sua equazione è:

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(ax + by + c) - (ax_1 + by_1 + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0.$$

ESEMPIO 3.7.1 - Scrivere l'equazione della retta appartenente al fascio individuato da

$$s: \; x + 2y - 4 = 0 \quad \text{ed} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad \text{e passante per il punto } P_0 = (3, 1).$$

Dopo aver scritto r in forma cartesiana, $x - 2y + 5 = 0$, si scrive l'equazione del fascio:

$$\lambda(x + 2y - 4) + \mu(x - 2y + 5) = 0.$$

Si impone il passaggio per il punto $P_0 = (3, 1)$ e si ha:

$$\lambda(3 + 2 - 4) + \mu(3 - 2 + 5) = 0 \qquad \lambda + 6\mu = 0.$$

Tale equazione ha infinite soluzioni, si può scegliere ad esempio $\lambda = 6$ e $\mu = -1$ e si ottiene: $5x + 14y - 29 = 0$.

ESEMPIO 3.7.2 - Scrivere l'equazione del fascio improprio di rette parallele ad r di equazione: $x + 2y - 4 = 0$.
L'equazione del fascio è data da $x + 2y + k = 0$ al variare di k in **R**.

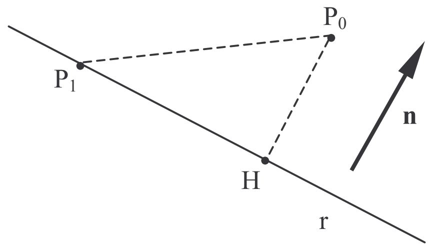
3.8 - Distanze.

a) **Distanza di due punti.**
Dati due punti $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ la loro distanza è il modulo del vettore $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ quindi:

$$d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ .$$

ESEMPIO 3.8.1 - La distanza del punto A(–3, 4) dall'origine è 5.

b) **Distanza di un punto da una retta**.
Considerati il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, siano $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto di r ed $\mathbf{n} = (a, b)$ un vettore ortogonale ad r.
Per definizione $\mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0)$ è il prodotto del modulo di $\mathbf{n}$ per la proiezione con segno di $P_1 - P_0$ su $\mathbf{n}$, ossia è il prodotto del modulo di $\mathbf{n}$ per la distanza di P_0 da r, a meno del segno perché qui si considerano distanze positive:



$$d(P_0, r) = \frac{|\mathbf{n} \cdot (P_0 - P_1)|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Esprimendo il prodotto scalare in componenti e ricordando che $c = -ax_1 - by_1$, perché P_1 verifica l'equazione di r si ottiene:

$$\mathbf{d(P_0, r)} = \frac{|\mathbf{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}|}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}} = \frac{|\mathbf{ax_0 + by_0 + c}|}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}}.$$

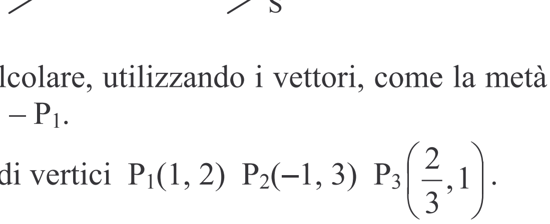
ESEMPIO 3.8.2 - La distanza di P(1, –2) dalla retta r di equazione $3x + 4y - 20 = 0$ è:

$$d(P, r) = \frac{|3 - 8 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5.$$

c) **Distanza di due rette parallele.**
La distanza di due rette parallele *r* ed *s* è la distanza di un qualsiasi punto di *s* da *r*.

ESEMPIO 3.8.3 - Siano r: $x + 3y + 1 = 0$, s: $x + 3y - 6 = 0$ ed il punto S(0, 2) appartenente ad *s*. La distanza di S da *r* sarà:

$$d(r, s) = d(S, r) = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}.$$



d) **Area del triangolo.**
L'area del triangolo di vertici $P_1\ P_2\ P_3$ si può calcolare, utilizzando i vettori, come la metà del modulo del prodotto vettoriale di $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

ESEMPIO 3.8.4 - Calcolare l'area *A* del triangolo di vertici $P_1(1, 2)$ $P_2(-1, 3)$ $P_3\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

Poiché $P_2 - P_1 = (-2, 1, 0)$ e $P_3 - P_1 = \left(-\frac{1}{3}, -1, 0\right)$ si ha:

$(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = \frac{7}{3}\mathbf{k}$ per cui A vale $\frac{7}{6}$.

3.9 - Esercizi proposti.

III.1 - Dati i punti A(1, 2) e B(−1, 3), determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e le coordinate del punto A' simmetrico di A rispetto a B. (M(0,5/2) A'(−3, 4))

III.2 - Di un triangolo ABC sono noti i vertici A(3, 4), B(1, 2) ed il baricentro G(2, 1). Determinare le coordinate del vertice C. (C(2, −3))

III.3 - Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della retta congiungente i punti A e B nei seguenti casi:
i) A(2, 1), B(3, −2); ($x = 2 + t$, $y = 1 - 3t$; $3x + y - 7 = 0$)
ii) A(2, 1), B(2, −3)). ($x = 2$, $y = 1 + 4t$; $x = 2$)

III.4 - Scrivere l'equazione cartesiana della retta r passante per il punto A(3, −5) e parallela alla retta $x + 2y - 4 = 0$. ($x + 2y + 7 = 0$)

III.5 - Date le rette r: $x + ky + k = 0$ ed s: $kx + y + k = 0$, determinare per quali valori di k:
i) le rette sono parallele; ($k = -1$ e $k = 1$ (coincidenti))
ii) il loro punto comune appartiene alla retta t : $x + y + 3 = 0$. ($k = -3$)

III.6 - Dati i punti A(0, 0), B(2, −1) e la retta r: $4x - 3y = 0$, determinare i punti C di r tali che il triangolo ABC sia isoscele sulla base BC. (C $(3\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5)$ e C'$(-3\sqrt{5}/5, -4\sqrt{5}/5)$)

III.7 - Date le rette r: $2x - y + 1 = 0$ ed s: $x - y = 0$, determinare l'equazione della retta r' simmetrica di r rispetto ad s. ($x - 2y - 1 = 0$)

III.8 - Dati i punti M(1, 1) e C(1, 0), determinare:
i) le coordinate dei punti A e B, vertici del triangolo ABC avente M come baricentro e tale che i vettori A − C e B − C siano paralleli rispettivamente ai vettori **u**(1, 1) e **v**(1, −2); (A(2, 1), B(0, 2))
ii) le coordinate dei punti P della retta MC tali che l'angolo APB sia retto. (P$(1, (3 + \sqrt{5})/2)$); P'$(1, (3 - \sqrt{5})/2)$)

III.9 - Date le rette r: $2x + by + 1 = 0$ ed s: $x - y + c = 0$, con b e c parametri reali, dire per quali valori dei parametri le rette sono:
i) incidenti; ($b \neq -2$)
ii) parallele non coincidenti; ($b = -2$ e $c \neq 1/2$)
iii) coincidenti. ($b = -2$ e $c = 1/2$)

III.10 - Date le rette r: $4x + 3y - 10 = 0$, s: $x + 5y + 6 = 0$, t: $3x - 2y + 1 = 0$, determinare:
i) perimetro ed area del triangolo da esse individuato ($2p = 5 + \sqrt{13} + \sqrt{26}$; $S = 17/2$)
ii) l'equazione della retta contenente un'altezza a scelta del triangolo.

III.11 - Verificare se le tre rette r: $x + y - 5 = 0$, s: $2x - 3y + 1 = 0$, t: $11x - 14y = 0$ appartengono allo stesso fascio. (si)

III.12 - Determinare la mediana della striscia individuata dalle rette parallele $x + 2y = 0$ ed $x + 2y + 7 = 0$. $(x + 2y + 7/2 = 0)$

III.13 - Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette: $x + y + 7 = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$. $\left(\left(5 \pm 4\sqrt{2}\right)x + \left(5 \mp 3\sqrt{2}\right)y + 35 \pm \sqrt{2} = 0\right)$

CAPITOLO IV

ALCUNI LUOGHI NOTEVOLI DEL PIANO

4.1 - Generalità sulla rappresentazione delle curve piane.

Una linea piana può essere definita o come traiettoria di un punto che si muove nel piano secondo una data legge oppure mediante una proprietà che caratterizza i suoi punti. Quindi fissato un sistema di riferimento cartesiano $R(O, x, y)$ si hanno le seguenti rappresentazioni della curva:

- come traiettoria di un punto P(t) le cui coordinate sono espresse in funzione di un parametro t

(1) $$x = x(t) \quad y = y(t)$$

- come luogo dei punti P(x, y) le cui coordinate soddisfano un'equazione cartesiana del tipo

(2) $$f(x, y) = 0.$$

In generale si può passare, almeno su piccoli tratti di curva dalla (1) alla (2) eliminando t; viceversa risolvendo la (2) rispetto ad una delle incognite si perviene alla (1).
Affinchè la definizione data corrisponda alla nozione intuitiva che abbiamo di curva, occorre che le funzioni che appaiono in (1) ed in (2) soddisfino a condizioni restrittive quali, ad esempio, la continuità.
Tale argomento sarà sviluppato in altri corsi.

DEFINIZIONE 4.1.1 - *Se f è un polinomio la curva si dice **algebrica** ed il grado del polinomio si dice **ordine** della curva, altrimenti la curva si dice **trascendente**.*
Ad esempio le rette e le circonferenze nel piano sono curve algebriche del primo e secondo ordine, la sinusoide $y - \sin x = 0$ è una curva trascendente.

DEFINIZIONE 4.1.2 - *Si dice **conica** ogni linea piana algebrica del secondo ordine.*

4.2 - La circonferenza.

4.2.1 - Equazione della circonferenza.

Nel piano, la circonferenza è il luogo dei punti P aventi distanza costante r da un punto fisso C, detto centro: $CP = r$.
Se nel piano è dato un riferimento cartesiano ortogonale, fissato un numero reale positivo r ed indicate con (α, β) le coordinate di C, la condizione affinché un generico punto P(x, y) appartenga alla circonferenza è espressa dall'equazione:

$$\mathbf{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.}$$

Sviluppando i calcoli l'equazione diventa:

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0}$$

con $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$.
Si può quindi dire che l'equazione della circonferenza è una equazione di secondo grado in x ed y con le condizioni:

- i coefficienti di x^2 e di y^2 sono eguali,

- il coefficiente di xy è zero (cioè manca il termine xy).

Affinché un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenti una circonferenza reale di centro $C(\alpha, \beta)$ con $\boldsymbol{\alpha = -a/2}$, $\boldsymbol{\beta = -b/2}$ e raggio r, il numero $\boldsymbol{r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 - c}$ deve essere ≥ 0. Se il raggio è zero, la circonferenza si riduce al suo centro.

ESEMPIO 4.2.1 - L'equazione $3x^2 + 3y^2 - 2x + 5y - 21 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro C $(1/3, -5/6)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+7}$.

L'equazione $3x^2 + 3y^2 - 2x + 5y + 21 = 0$ non rappresenta punti reali in quanto il raggio r risulta $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{36}-7} = \sqrt{-\frac{223}{36}}$, che non è un numero reale.

ESEMPIO 4.2.2 - L'equazione $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro C $(-1, -2)$ e raggio zero, il cui unico punto è C stesso.

4.2.2 - Equazione della tangente alla circonferenza.

Data la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ ed un suo punto $P_0(x_0, y_0)$, la tangente in P_0 a σ è la retta per P_0 perpendicolare alla retta CP_0. Come parametri direttori della retta CP_0 possiamo assumere le differenze $x_0 - \alpha$ ed $y_0 - \beta$, quindi l'equazione della retta tangente risulta:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y - x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = 0.$$

Poiché il punto P_0 appartiene alla circonferenza, le sue coordinate ne soddisfano l'equazione:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0 \text{ da cui } -x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0.$$

L'equazione della retta tangente si può allora scrivere:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y + \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0$$

ovvero

$$\mathbf{x_0x + y_0y - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + \gamma = 0}.$$

Questa formula si ottiene dall'equazione della circonferenza con la **regola degli sdoppiamenti** cioè "sdoppiando'' x^2 in x_0x, y^2 in y_0y, x in $\frac{x + x_0}{2}$, y in $\frac{y + y_0}{2}$.

ESEMPIO 4.2.3 - Dati la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ed il suo punto $P(1, 2)$, l'equazione della retta tangente a σ in P si può scrivere:

$1x + 2y - 1(x + 1) - 0(y + 2) - 3 = 0$ cioé $y - 2 = 0$.

4.2.3 - Fascio di circonferenze.

Date due circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 - 2\alpha_1x - 2\beta_1y + \gamma_1 = 0$$
$$\sigma_2 : x^2 + y^2 - 2\alpha_2x - 2\beta_2y + \gamma_2 = 0$$

consideriamo l'equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1) + \mu(x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2) = 0$$

ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di σ_1 e σ_2 con coefficienti reali λ e μ non entrambi nulli.
Tale equazione si può scrivere:

(3) $$(\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu)x - 2(\beta_1\lambda + \beta_2\mu)y + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 = 0$$

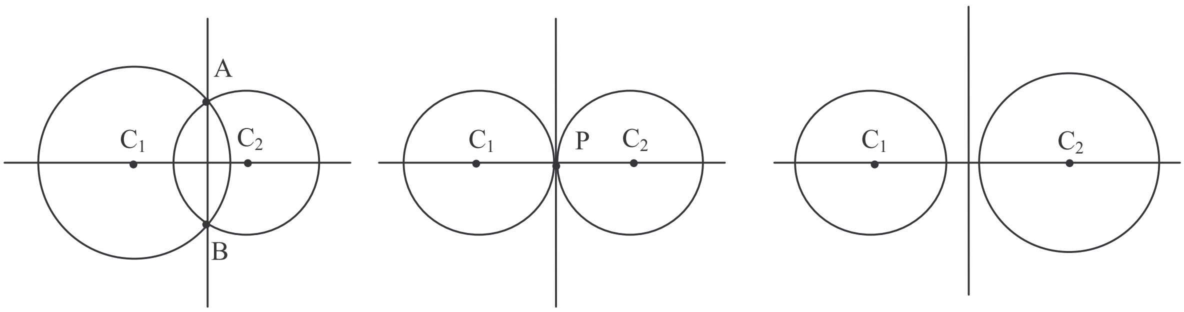
e si hanno le seguenti possibilità:

1) se le due circonferenze sono concentriche, cioè $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ anche la (3) rappresenta, fissati due numeri reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una circonferenza ad esse concentrica. La (3) rappresenta, al variare di λ e μ, un insieme di infinite circonferenze concentriche detto **fascio di circonferenze concentriche**;
2) se le due circonferenze non sono concentriche la (3) rappresenta, fissati due numeri reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una circonferenza che passa per gli eventuali punti comuni a σ_1 e σ_2 (in quanto le coordinate di tali punti soddisfano le equazioni di σ_1 e σ_2 e quindi la (3)).

La (3) rappresenta al variare di λ e μ, un insieme di infinite circonferenze detto **fascio di circonferenze.**
Se $\lambda + \mu = 0$ la (3) è l'equazione di una retta:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

detta **asse radicale** che passa per gli eventuali punti comuni a σ_1 e σ_2 detti **punti base del fascio** in quanto tutte le circonferenze del fascio passano per essi.
E' facile verificare che l'asse radicale è perpendicolare alla congiungente i centri di σ_1 e σ_2 e che tutti i centri delle circonferenze del fascio appartengono a tale congiungente che si dice **asse centrale del fascio**.



Se le circonferenze σ_1 e σ_2 sono tangenti l'asse radicale passa per il punto di tangenza ed è perpendicolare all'asse centrale: coincide quindi con la tangente comune a σ_1 e σ_2.
Ne segue che tutte le circonferenze tangenti ad una circonferenza σ in un suo punto P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P.

Considerato un qualunque punto A del piano, diverso dagli eventuali punti base, esiste sempre una ed una sola circonferenza del fascio che passa per A: infatti imponendo che le coordinate di A soddisfino la (3) si ottiene un'equazione di I° grado in λ e μ e quindi si ottiene un unico rapporto λ/μ che individua la circonferenza cercata.

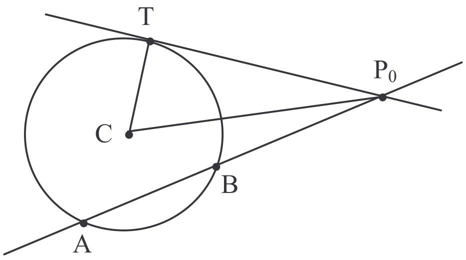
ESEMPIO 4.2.4 - Determinare l'equazione della circonferenza passante per l'origine e tangente la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ in P(1, 2).
Le circonferenze tangenti σ in P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P ed hanno quindi equazione: $\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3) + \mu(y - 2) = 0$.

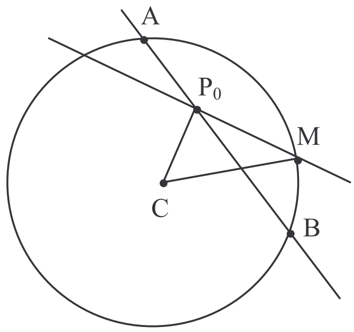
La circonferenza di tale fascio passante per l'origine si ottiene scegliendo λ e μ in modo che (0, 0) soddisfi l'equazione; deve essere $-3\lambda - 2\mu = 0$, da cui $\mu = -3\lambda/2$ e l'equazione della circonferenza risulta: $x^2 + y^2 - 2x - 3/2y = 0$.

4.2.4 - Potenza di un punto rispetto alla circonferenza.

Considerati in un piano una circonferenza σ (di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio r) ed un punto P_0 (di coordinate (x_0, y_0)), è noto dalla geometria elementare che se si conduce da P_0 una secante s a σ e si indicano con A e B i punti di intersezione (eventualmente coincidenti), il prodotto $P_0A \cdot P_0B$ non varia al variare di s.

- se P_0 è esterno alla circonferenza risulta $P_0A \cdot P_0B = (P_0T)^2$ dove T è il punto di tangenza di una tangente per P_0 a σ. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CTP_0 si ha $(P_0T)^2 = (P_0C)^2 - (CT)^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2$;
- se P_0 appartiene alla circonferenza risulta $P_0A \cdot P_0B = 0$ in quanto $P_0 = A = B$;
- se P_0 è interno alla circonferenza, indicato con M un estremo della corda per P_0 e perpendicolare al raggio CP_0, risulta $P_0A \cdot P_0B = (P_0M)^2$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CMP_0 si ha:
  $(P_0M)^2 = (CM)^2 - (P_0C)^2 = r^2 - [(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2]$.





DEFINIZIONE 4.2.1.- *Si definisce* ***potenza di un punto*** P_0 ***di coordinate*** (x_0, y_0) ***rispetto alla circonferenza*** σ *di equazione* $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ *il valore che assume il primo membro dell'equazione della circonferenza sostituendo* x_0 *ad* x *ed* y_0 *ad* y

$$p = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2.$$

Da quanto visto sopra risulta il significato geometrico di p; in particolare p ha segno + se P_0 è esterno alla circonferenza, ha segno $-$ se P_0 è interno alla circonferenza e risulta ovviamente p = 0 se P_0 appartiene alla circonferenza.

Consideriamo ora due circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\sigma_1 : \quad x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\sigma_2 : \quad x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

Un punto P (X,Y) ha eguale potenza rispetto alle due circonferenze se:

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha_1 X - 2\beta_1 Y + \gamma_1 = X^2 + Y^2 - 2\alpha_2 X - 2\beta_2 Y + \gamma_2$$

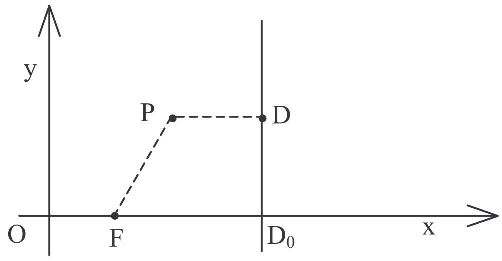
cioè, semplificando: $2(\alpha_1 - \alpha_2)X + 2(\beta_1 - \beta_2)Y - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$ che è l'equazione dell'asse radicale; quindi: **l'asse radicale è il luogo dei punti aventi la stessa potenza rispetto alle due circonferenze.**

4.3 - Le coniche come luoghi geometrici.

4.3.1 - Coniche elementari.

DEFINIZIONE 4.3.1 - *Assegnati in un piano un punto F detto* ***fuoco*** *ed una retta d detta* ***direttrice****, si dice* ***conica*** *il luogo descritto da un punto P che varia nel piano in modo che le sue distanze dal punto F e dalla retta d conservino rapporto costante* $\mathbf{e} \geq 0$ *detto* ***eccentricità****.*

Se indichiamo con D la proiezione di P su d, la condizione geometrica che deve essere soddisfatta dal generico punto P della conica è data da:



(4) $$\frac{\mathbf{PF}}{\mathbf{PD}} = \mathbf{e}.$$

Per esprimere analiticamente la condizione si sceglie un riferimento cartesiano avente l'asse x coincidente con la perpendicolare per F alla direttrice ed orientato da F verso d: F avrà coordinate (c, 0) ed d avrà equazione $x - h = 0$. Indicate con (x, y) le coordinate del generico punto P della conica, la (4) elevata al quadrato diventa:

(5) $$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-h)^2} = e^2.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione:

(6) $$\mathbf{(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2(c - e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0}$$

Si possono presentare vari casi.

Consideriamo il caso particolare in cui il fuoco appartiene alla direttrice, quindi $c = h$.
La (6) diventa: $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2c(1 - e^2)x + c^2(1 - e^2) = 0$ ovvero:

$$(1 - e^2)(x - c)^2 + y^2 = 0$$

- se $1 - e^2 > 0$ quindi $0 < e < 1$ l'equazione è soddisfatta solo per $x = c$ ed $y = 0$ e la conica ha il solo punto reale (c, 0);
- se $e = 1$ la (1) diventa $y^2 = 0$ e la conica si spezza nelle due rette coincidenti $y = 0$, $y = 0$;
- se $1 - e^2 < 0$ e quindi $e > 1$ (essendo e positivo) la conica si spezza in due rette reali distinte ed incidenti nel fuoco: $y = \pm\sqrt{e^2 - 1}\,(x - c)$.

Le coniche così ottenute si dicono **coniche degeneri.**

Supponiamo ora che F non appartenga alla direttrice, quindi con $c \neq h$, ed esaminiamo i vari casi che si presentano al variare di **e**.

I) $\mathbf{e \neq 1}$
Per semplificare l'equazione si sceglie come origine O del riferimento il punto dell'asse x per cui risulta $OF / OD_0 = e^2$ (essendo D_0 il punto di intersezione della direttrice con l'asse x); risulta allora $c/h = e^2$ e quindi $c - e^2h = 0$.
La (6) diventa:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + c^2(e^2 - 1)/e^2 = 0$$

o ancora

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{c^2/e^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{c^2(1-e^2)/e^2}} = \mathbf{1}.$$

Essendo l'equazione simmetrica in x ed y, l'origine è centro di simmetria della conica e la conica si dice **a centro**.

Se $\mathbf{e < 1}$ la conica si dice **ellisse**; ponendo: $\mathbf{a^2 = c^2/e^2}$, $\mathbf{b^2 = c^2(1 - e^2)/e^2}$, da cui segue $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$, la sua equazione diventa:

(7) $$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}.$$

Se $\mathbf{e > 1}$ la conica si dice **iperbole**; ponendo: $\mathbf{a^2 = c^2/e^2}$, $\mathbf{b^2 = c^2(e^2 - 1)/e^2}$, da cui segue $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, la sua equazione diventa:

(8) $$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}.$$

II) $\mathbf{e = 1}$

La conica risulta in questo caso il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice e si dice **parabola.** In questo caso la (6) diventa:

$$y^2 - 2(c - h)x + c^2 - h^2 = 0.$$

Scegliendo l'origine O del riferimento nel punto medio tra F e D_0 risulta $c = -h$ e l'equazione (6) si semplifica ulteriormente:

$$\mathbf{y^2 - 4cx = 0}$$

od anche

(9) $$\mathbf{y^2 = 2px}$$

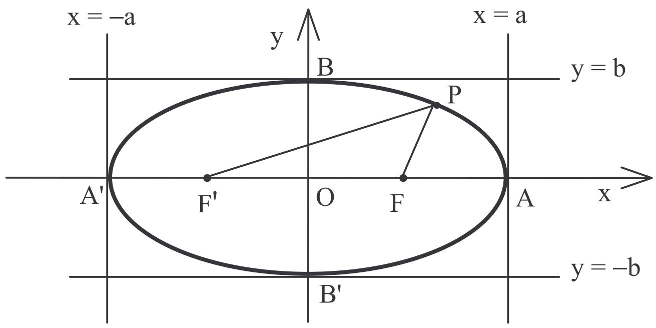
con p = 2c, che si può supporre positivo orientando opportunamente gli assi.

Abbiamo così ottenuto tre tipi di coniche: ellisse, iperbole (coniche a centro) e parabola le cui equazioni hanno una forma particolarmente semplice dovuta al riferimento scelto.
Tale forma si dice **forma canonica**.

4.3.2 - Ellisse.

L'equazione canonica dell'ellisse è: $$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1} \qquad (7)$$

con le quantità positive a,b,c,e legate dalle relazioni: $\mathbf{a^2 = c^2/e^2}$, $\mathbf{b^2 = c^2(1 - e^2)/e^2}$ da cui segue $\mathbf{a^2 - b^2 = c^2}$.



Intersecando l'ellisse con gli assi coordinati si trovano quattro punti di intersezione, detti **vertici** : A(a, 0), A'(– a, 0), B(0, b), B'(0, – b).

Poiché per i punti dell'ellisse risulta sempre $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, essi sono tutti interni al rettangolo individuato dalle rette $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$.
Se $P(x, y)$ è un punto dell'ellisse, lo sono anche $P_1(x, -y)$, $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$, si ha che l'ellisse ha due assi di simmetria ortogonali che si dicono **assi dell'ellisse** che si incontrano nel **centro di simmetria**.
Per le proprietà di simmetria anche il punto $F'(-c, 0)$ e la retta $x = -h$ sono rispettivamente fuoco e direttrice quindi l'ellisse ha due fuochi e due direttrici, la retta FF' si dice **asse focale.**

Usando i due fuochi si può dimostrare una proprietà caratterizzante dell'ellisse che viene anche usata per definirla:

PROPRIETÀ 4.3.1 - *L'ellisse è il luogo dei punti del piano aventi da due punti fissi, detti fuochi, distanze con somma costante 2a.*
Dimostrazione.
i) Proviamo dapprima che l'ellisse gode di questa proprietà. Applicando la condizione che caratterizza l'appartenenza di un punto P all'ellisse rispetto ai due fuochi ed alle due direttrici, si ha che valgono le relazioni: $PF/PD = e$, $PF'/PD' = e$, da cui segue:
$PF = e\,PD$, $PF' = e\,PD'$.
Essendo $PD + PD' = 2|h| = 2c/e^2$, segue che $PF + PF' = e\,(PD + PD') = 2c/e = 2a$.
ii) Vediamo ora che i punti che soddisfano alla condizione $PF + PF' = 2a$ sono i punti dell'ellisse di equazione (7). Scegliamo un riferimento cartesiano ortogonale avente come asse x l'asse focale e come origine il punto medio di FF': risulta $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.
Affinché un punto $P(x, y)$ soddisfi alla condizione $PF + PF' = 2a$ deve essere:
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
elevando al quadrato si ottiene:
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$cx - a^2 = (-a)\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$c\,(x - a^2/c)\,/\,a = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$e\,(x - h) = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{essendo } c/a = e,\ a^2/c = h$$
ed elevando al quadrato: $e^2\,(x-h)^2 = (x-c)^2 + y^2$ che è la (5).

ESEMPIO 4.3.1 - Determinare l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1(1, 0)$ ed $F_2(-1, 0)$ e tale che la somma delle distanze dai fuochi sia 8.
Un punto $P(x, y)$ appartiene all'ellisse se $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 8$. Isolando un radicale e quadrando si ottiene $(x-1)^2 + y^2 = 64 + (x+1)^2 + y^2 - 16\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ e semplificando $-4x - 64 = -16\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ cioè $4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = x + 16$ da cui:
$(x+16)^2 = 16\,(x^2 + 2x + 1 + y^2)$ ed eseguendo i calcoli $15x^2 + 16y^2 = 240$ cioè $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

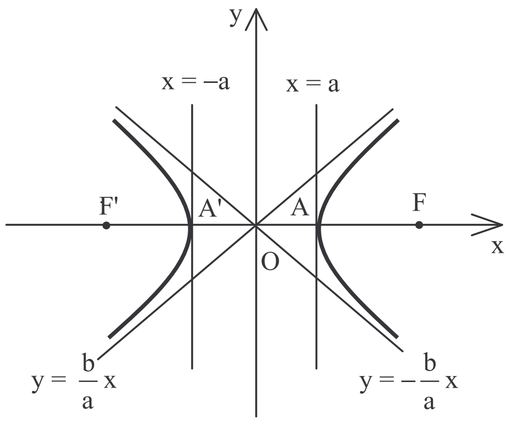
4.3.3 - Iperbole.

L'equazione canonica dell'iperbole è: $$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (8)$$
con le quantità positive a,b,c,e legate dalle relazioni: $\mathbf{a^2 = c^2/e^2}$, $\mathbf{b^2 = c^2(e^2 - 1)/e^2}$ da cui segue: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$**.** Anche qui si hanno le simmetrie rispetto agli assi coordinati ed al-

l'origine: anche l'iperbole ha **due assi di simmetria ortogonale**, **un centro di simmetria**, **due fuochi e due direttrici**.

Solo l'asse x (asse focale o trasverso) ha intersezioni reali con l'iperbole nei punti A(a, 0), A'(–a, 0) detti **vertici**; l'asse y non interseca l'iperbole e si dice non trasverso.

Risolvendo l'equazione (8) rispetto ad y si ricava: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, quindi si hanno valori reali di y solo per $|x| \geq a$; internamente alla striscia delimitata dalle rette x = a ed x = – a non si hanno punti dell'iperbole.



Al crescere di $|x|$ anche $|y|$ cresce e la curva si avvicina indefinitamente alle rette $y = \frac{b}{a}x$ oppure $y = -\frac{b}{a}x$: tali rette sono gli **asintoti** dell'iperbole.

Anche per l'iperbole si può dimostrare una proprietà caratterizzante analoga a quella vista nel caso dell'ellisse:

PROPRIETÀ 4.3.2 - *L'iperbole è il luogo dei punti del piano avente da due punti fissi, detti fuochi, distanze con differenza costante in valore assoluto 2a.*

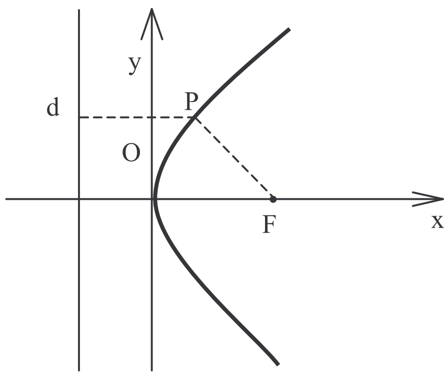
4.3.4 - Parabola.

L' equazione canonica della parabola è: $\mathbf{y^2 = 2px}$ (p > 0) (9).

Tale curva, nel riferimento canonico, passa per l'origine, detto **vertice**, che è la sola intersezione con gli assi coordinati.

L'asse delle x è asse di simmetria e viene detto **asse della parabola,** non c'è invece simmetria rispetto all'asse delle y, non c'è quindi centro di simmetria, c'è un solo **fuoco** F di coordinate $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, ed una sola **direttrice** di equazione $x + \frac{p}{2} = 0$.

Poiché per la parabola si ha eccentricità e = 1 la Definizione 4.3.1 diventa:
La parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto, detto fuoco, e da una retta, detta direttrice.



ESEMPIO 4.3.2 - Determinare l'equazione della parabola avente fuoco F(1, 0) e direttrice di equazione x + 1 = 0.

Un punto P(x, y) appartiene alla parabola se la sua distanza da F, $PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ è uguale alla distanza |x + 1| di P dalla direttrice cioè: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x + 1|$. Elevando al quadrato si ha: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1$ da cui $y^2 = 4x$.

Vediamo ora alcuni esempi più generali.

ESEMPIO 4.3.3 - Considerata la conica $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ determinarne il tipo, la distanza focale, l'eccentricità, i vertici, i fuochi.

L'equazione si può trasformare in $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$ e in $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4/3} = 1$ che è l'equazione canonica di una ellisse. Ricordando le posizioni fatte si ha:

- semiasse maggiore $a = 2$;
- semiasse minore $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;
- distanza focale $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$;
- eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;
- vertici $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B'\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

ESEMPIO 4.3.4 - Considerata la conica $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ determinarne il tipo, la distanza focale, i vertici, i fuochi, direttrici e asintoti.

L'equazione si può trasformare in $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ che è l'equazione canonica di una iperbole.
Ricordando le posizioni fatte si ha:

- semiasse maggiore $a = 2$;
- semiasse minore $b = 1$;
- distanza focale $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$;
- eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
- vertici $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$;
- fuochi $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$;
- direttrici $x = h = \frac{a^2}{c}$, $x = -h = -\frac{a^2}{c}$ da cui $x - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$ ed $x + \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$;
- asintoti $y = \frac{x}{2}$ ed $y = -\frac{x}{2}$.

ESEMPIO 4.3.5 - Data la parabola $3y^2 - 2x = 0$ determinarne l'equazione canonica, fuoco e direttrice.
L'equazione si può trasformare in $y^2 = 2x/3$, quindi $p = 1/3$ e $c = p/2 = 1/6$. Risulta allora che il fuoco è $F(1/6, 0)$ e la direttrice è $x = -1/6$.

ESEMPIO 4.3.6 - Determinare l'equazione della parabola avente fuoco $F(-1, -3)$ e direttrice $x = y$.
Un punto $P(x, y)$ appartiene alla parabola se la sua distanza da F, $PF = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2}$ è uguale alla distanza $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ di P dalla direttrice cioè: $\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$.
Elevando al quadrato si ha: $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = (x^2 - 2xy + y^2)/2$ da cui
$2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 + 12y + 18 = x^2 - 2xy + y^2$ cioè $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 12y + 20 = 0$ oppure:

$$(x + y)^2 + 4x + 12y + 20 = 0.$$

ESEMPIO 4.3.7. - Determinare l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_1(-2, 2)$ ed $F_2(4, 2)$ tale che la differenza delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi sia, in valore assoluto, 4.
Un punto P(x, y) appartiene all'iperbole se

$$\left| \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \right| = 4.$$

Isolando un radicale e quadrando si ottiene:

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (\pm 4 + \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\ )^2$$

ed eseguendo i calcoli:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \pm 8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$12x - 12 = \pm 8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$, da cui ancora, semplificando e quadrando:
$(3x - 3)^2 = 4(x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4)$ cioè $5x^2 - 4y^2 + 16y + 14x - 71 = 0$.

Da questi ultimi esempi si vede che una conica, definita come luogo geometrico, ha, in un riferimento qualunque, cioè non nel riferimento canonico, come equazione un generico polinomio di secondo grado in x ed y eguagliato a zero. Questo è coerente con la Definizione 4.1.2 di conica.

4.4 - Esercizi proposti.

IV.1 - Dire quali tra le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza ed, in tal caso, determinarne centro e raggio:
i) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$; (C(0, 1) r = 2)
ii) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$; (C(1, 2), r = 0)
iii) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 12 = 0$. (no)

IV 2 - Scrivere l'equazione della circonferenza σ di centro C(1, –2) e soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:
i) di raggio 2; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$)
ii) passante per il punto P(3, 1); ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$)
iii) tangente all'asse x; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$)
iv) tangente alla retta s di equazione $x - y + 1 = 0$; ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$)
v) secante la retta s: $x - y + 1 = 0$ secondo un segmento di lunghezza 4. ($x^2 + y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$)

IV.3 - Scrivere l'equazione della circonferenza σ soddisfacente alle seguenti condizioni:
i) i punti A(1, 3) e B(–3, 5) sono estremi di un diametro; ($x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$)
ii) passa per i punti A(2, 0), B(0, 1), C(–1, 1); ($x^2 + y^2 + x + 5y - 6 = 0$)
iii) passa per i punti A(1, 2), B(–1, 0) ed ha centro sulla retta $4x - y - 4 = 0$. ($x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$)

IV.4 - Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di circonferenze σ_1 e σ_2 nei seguenti casi :
i) σ_1: $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 + 2x = 0$; (esterne)
ii) σ_1: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$; (tangenti)
iii) σ_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e σ_2: $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$. (secanti)

IV.5 - Dati la circonferenza σ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ed i due punti A(3, 0) e B(0, 0), dire se i punti appartengono alla circonferenza o sono interni o esterni; se possibile condurre da essi le tangenti a σ. (A esterno, tangenti da A: $y = \pm(x-3)/\sqrt{3}$; $B \in \sigma$, tangente in B: $x = 0$)

IV.6 - Tra tutte le circonferenze tangenti alla retta $x + 2y - 3 = 0$ nel suo punto P(1, 1) determinare quella che:

i) passa per A(2, –1); ($3x^2 + 3y^2 - x + 4y - 9 = 0$)

ii) ha centro sull'asse y. ($x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$)

IV.7 - Tra tutte le circonferenze tangenti a σ: $x^2 + y^2 - 5 = 0$ in A(2, 1) trovare quelle tangenti a σ': $4x^2 + 4y^2 - 5 = 0$. ($x^2 + y^2 - x - y/2 - 5/2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 3x - 3y/2 + 5/2 = 0$)

IV.8 - Data la circonferenza σ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ ed il suo punto A(0, 3) determinare:

i) centro e raggio di σ; (C(–1, 1), $r = \sqrt{5}$)

ii) la tangente a σ in A; ($x + 2y - 6 = 0$)

iii) gli altri vertici del quadrato inscritto in σ avente un vertice in A. ((–2, –1), (1, 0), (–3, 2))

IV.9 - Determinare vertici, fuochi ed eventuali asintoti delle seguenti coniche:

i) $2x^2 + 8y^2 = 12$;

ii) $5x^2 - 7y^2 = 5$;

iii) $x^2 - 3y = 0$;

iv) $x^2/3 + y^2/2 = 6$;

v) $x^2/6 + y^2/2 = 6$;

vi) $2x^2 + 8y^2 = 12$.

IV.10 - Determinare l'equazione della retta tangente alla conica $x^2 - 2y = 0$ nel suo punto P(2, 2). ($2x - y - 2 = 0$)

IV.11 - Dati la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ ed il suo punto P(1, 1), determinare:

i) l'equazione della retta r tangente a σ in P; ($x + y - 2 = 0$)

ii) l'equazione della circonferenza tangente a σ in P e passante per l'origine; ($x^2 + y^2 - x - y = 0$)

iii) l'equazione della conica avente come direttrice la retta r, come fuoco il punto F(3, 3) ed eccentricità $e = \sqrt{2}/2$. ($3x^2 + 3y^2 - 2xy - 20x - 20y + 68 = 0$)

IV.12 - Date le circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$:

i) verificare che sono secanti e determinare l'equazione della retta passante per i loro punti comuni P e Q; ($x + 2y - 5 = 0$)

ii) determinare l'equazione della circonferenza passante per P e Q ed avente centro sulla retta $x - y + 2 = 0$; ($x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$)

iii) determinare l'equazione della conica avente come direttrice la retta PQ, come fuoco il punto F (4, 8) ed eccentricità $e = \sqrt{5}$. ($3y^2 + 4xy - 2x - 4y - 55 = 0$)

IV.13 - Date le circonferenze σ_1 e σ_2 di equazioni rispettivamente: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ e $x^2 + y^2 - 4y = 0$:

i) verificare che sono secanti in due punti A e B; (A(0, 0), B(2, 2))

ii) determinare l'equazione della circonferenza avente diametro AB; ($x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$)

iii) detto A il punto di ascissa minore tra A e B, determinare l'equazione della parabola γ avente vertice in A e fuoco in B. ($x^2 + y^2 - 2xy - 16x - 16y = 0$)

IV.14 - Dati: la circonferenza σ di equazione: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, il suo punto $P(3, 1)$ e la retta r di equazione: $x + y = 0$, determinare:

i) l'equazione della circonferenza γ tangente a σ in P ed avente il centro sulla retta r; ($x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$)

ii) l'equazione della retta s tangente a γ in P; ($x = 3$)

iii) l'equazione ed il tipo della conica avente fuoco in P, direttrice relativa a P la retta r e passante per il punto $A(2, 2)$; ($7x^2 + 7y^2 - 2xy - 48x - 16y + 80 = 0$, ellisse)

iv) l'area del triangolo avente un lato su r, uno su s ed uno sulla congiungente P con il centro C di γ. ($S = 8$)

CAPITOLO V

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO: PIANI E RETTE

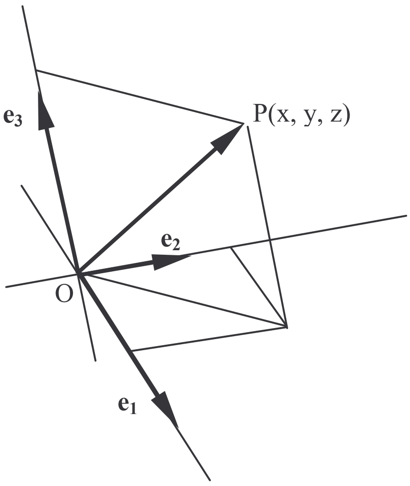
5.1 - Riferimento cartesiano.

Siano E_3 lo spazio affine euclideo, O un punto di E_3 e $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base dello spazio vettoriale S_3 associato ad E_3. Diciamo che il punto P ha coordinate (x, y, z) nel riferimento $R\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se il vettore P – O ha componenti x, y, z rispetto alla base $B\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e viceversa:

$$P = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad P - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Il punto O viene detto origine del sistema di riferimento ed ha coordinate (0, 0, 0).

La retta per O parallela ad $\mathbf{e}_1$ viene detta **asse delle x** o **asse delle ascisse**, un suo punto ha coordinate (x, 0, 0), la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_2$ viene detta **asse delle y** o **asse delle ordinate**, un suo punto ha coordinate (0, y, 0), la retta per O parallela ad $\mathbf{e}_3$ viene detta **asse delle z** o **asse delle quote**, un suo punto ha coordinate (0, 0, z).



Nel seguito supporremo che il riferimento $R\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sia formato da una base ortonormale positiva $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di S_3 ossia formata da versori a due a due ortogonali. (v. Definizione 2.3.3).

Le coordinate del punto medio di due punti dati sono le semisomme delle coordinate.
(v. Definizione 2.3.4 nel caso n = 2).

ESEMPIO 5.1.1 - Il punto medio del segmento di estremi A(2, –5, 6) e B(0, 3, 2) è il punto M(1, –1, 4).

Se $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ sono simmetrici rispetto all'origine, si ha:

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1, \quad z_2 = -z_1$$

infatti si verifica che l'origine è il loro punto medio.

Le componenti del vettore differenza di due punti sono date dalla differenza delle coordinate, infatti si ha:

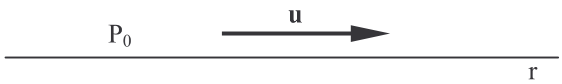
$$P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$$

quindi se $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ risulta:

$$P_2 - P_1 = (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) - (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{e}_3.$$

5.2 - Equazioni parametriche della retta.

La retta per un punto P_0 parallela ad un vettore $\mathbf{u}$ è formata dai punti P tali che il vettore $P - P_0$ sia parallelo al vettore $\mathbf{u}$, ossia $P - P_0 = t\mathbf{u}$ (1) ove t varia in $\mathbf{R}$.



Se P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ la (1) diventa:

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = tl\mathbf{i} + tm\mathbf{j} + tn\mathbf{k}.$$

Eguagliando le componenti dei due vettori si ottengono le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Si dicono **parametri direttori** della retta le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta, quindi nel caso visto la terna (l, m, n) e le terne ad essa proporzionali.

ESEMPIO 5.2.1 - Scrivere le equazioni parametriche della retta per P_0 di coordinate $(2, -1, 7)$ e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 7 - t \end{cases}$$

Anche la retta per due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$ si può pensare come retta per un punto (per esempio P_0) e parallela al vettore $P_1 - P_0$:

$$\frac{\mathbf{x - x_0}}{\mathbf{x_1 - x_0}} = \frac{\mathbf{y - y_0}}{\mathbf{y_1 - y_0}} = \frac{\mathbf{z - z_0}}{\mathbf{z_1 - z_0}} \quad \text{ove} \quad x_1 \neq x_0 \quad y_1 \neq y_0 \quad z_1 \neq z_0.$$

ESEMPIO 5.2.2 - Scrivere le equazioni parametriche della retta per P_0 di coordinate $(2, 3, -3)$ e per P_1 di coordinate $(3, 4, 0)$ significa scrivere le equazioni parametriche della retta per $P_0(2, 3, -3)$ e parallela al vettore $P_1 - P_0$ di componenti $(1, 1, 3)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$

5.3 - Rappresentazione del piano.

Il piano può essere individuato come piano per un punto P_0 ed ortogonale ad un vettore $\mathbf{n}$, ossia come il luogo dei punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(In dimensione 2 l'espressione precedente rappresenta una retta.)

Se $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) si ottiene l'equazione cartesiana del piano

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

Ponendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ si ottiene un'equazione del tipo:

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}.$$

Un'equazione lineare in x, y, z rappresenta un piano e i coefficienti a, b, c della x, della y e della z hanno il significato di componenti di un vettore ortogonale al piano. L'equazione di un piano è determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

ESEMPIO 5.3.1 - Il piano per P_0 di coordinate (2, –3, 2) ed ortogonale ad $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ha come equazione cartesiana: $2(x-2) + 5(y+3) + (z-2) = 0$ ossia $2x + 5y + z + 9 = 0$.

In particolare:
- il piano coordinato **xy**, essendo ortogonale al vettore **k**, ha equazione cartesiana $\mathbf{z = 0}$;
- il piano coordinato **yz**, essendo ortogonale al vettore **i**, ha equazione cartesiana $\mathbf{x = 0}$;
- il piano coordinato **zx**, essendo ortogonale al vettore **j**, ha equazione cartesiana $\mathbf{y = 0}$.

Altro modo di individuare un piano π è assegnare un punto P_0 che appartiene a π e due vettori l.i. **u** e **v** che sono paralleli a π; il piano π è formato dai punti P tali che $P - P_0$, **u, v** sono complanari, il loro prodotto misto deve essere nullo:

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

Da tale equazione vettoriale, supposto fissato il riferimento ortogonale monometrico, si arriva all'equazione cartesiana ricordando che il prodotto misto di tre vettori, note le componenti, è dato dallo sviluppo di un opportuno determinante del terzo ordine. Quindi se P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) e $\mathbf{u} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = l'\mathbf{i} + m'\mathbf{j} + n'\mathbf{k}$ l'equazione del piano è:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Si osservi che il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano π cercato.

ESEMPIO 5.3.2 - Trovare il piano per P_0 di coordinate (–1, –1, 1) e parallelo ad $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
Si ha: $2(x+1) - (y+1) + (z-1) = 0$ ossia $2x - y + z = 0$.

Un piano π è anche individuato da tre punti non allineati : $P_0\ P_1\ P_2$. Tale caso rientra nel caso precedente, π è il luogo dei punti P tali che i vettori $P - P_0$, $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$ siano complanari.
Il piano π è quindi il luogo dei punti P tali che:

$$(P - P_0) \cdot (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) = 0.$$

Esplicitando il prodotto misto in componenti, supposto che P_0 abbia coordinate (x_0, y_0, z_0), P_1 coordinate (x_1, y_1, z_1) e P_2 coordinate (x_2, y_2, z_2) si ha:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si osservi che $(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$ risulta un vettore ortogonale al piano dei tre punti.

ESEMPIO 5.3.3 - L'equazione del piano per i punti A(1, 2, 3), B(1, 0, 2) C(0, 0, 1) è

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 - 0 & 2 - 0 & 3 - 1 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

e sviluppando il determinate si ottiene l'equazione cartesiana $2x + y - 2z + 2 = 0$.

5.4 - Ortogonalità e parallelismo fra rette.

Due rette r ed s in forma parametrica
- r: $P - P_0 = t\mathbf{u}$ ove t varia in **R**;
- s: $P - P_1 = k\mathbf{v}$ ove k varia in **R**.

sono ortogonali se **u** e **v** sono ortogonali, ossia $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, sono parallele se **u** e **v** sono paralleli, ossia $\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Posto $\mathbf{u} = (l, m, n)$ e $\mathbf{v} = (l', m', n')$: **r ed s sono ortogonali se** $\mathbf{ll' + mm' + nn' = 0}$;

r ed s sono parallele se $\dfrac{\mathbf{l}}{\mathbf{l'}} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{m'}} = \dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{n'}}$.

ESEMPIO 5.4.1 - Date le rette:

$$r: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 5 + 3t \\ z = -5 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 - 3t \\ z = -7 + 2t \end{cases} \qquad p: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 + 6t \end{cases} \qquad u: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

la retta r è parallela ad s, ortogonale a p, né parallela né ortogonale ad u.

5.5 - Ortogonalità e parallelismo fra piani.

Due piani α e β

α: $(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$

β: $(P - P_1) \cdot \mathbf{n'} = 0$, di equazione cartesiana $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

- sono **ortogonali** se **n** e **n' sono ortogonali**, ossia $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n'} = 0$, ossia $\mathbf{aa' + bb' + cc' = 0}$;
- sono **paralleli** se **n** e **n' sono paralleli**, ossia $\mathbf{n'} = \lambda\mathbf{n}$, ossia: $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}$.

Se anche: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ allora i due piani coincidono.

ESEMPIO 5.5.1 - Dati i piani:

α_1: $2x - y + 3z + 8 = 0$;

α_2: $3x - 2z = 0$;

α_3: $4x - 2y + 6z + 20 = 0$;

α_4: $-2x + y - 3z - 8 = 0$;

α_5: $5x + 4y - 2z + 15 = 0$;

α_6: $x + y + 4z + 6 = 0$.

si ha che α_1 è ortogonale ad α_2 ed α_5; parallelo ad α_3; coincidente con α_4; né parallelo né ortogonale ad α_6.

5.6 - Intersezione di due piani.

L'intersezione di α: $ax + by + cz + d = 0$ e β: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ è data dai punti che soddisfano entrambe le equazioni, ossia dai punti che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

Ci sono tre possibilità:
i) sistema incompatibile (v. Esempio 1.3.9), i piani sono paralleli;
ii) sistema con infinite soluzioni al variare di un parametro (v. Esempio 1.3.7), l'intersezione è una retta;
iii) sistema con infinite soluzioni al variare di due parametri (v. Esempio 1.3.8), le due equazioni rappresentano lo stesso piano.

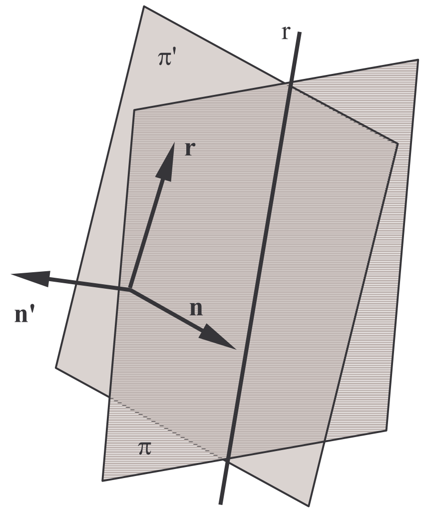
5.7 - Retta come intersezione di due piani.

La retta $\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases}$, se i suoi parametri direttori sono tutti diversi da zero, si può anche rappresentare, eliminando il parametro t, nel seguente modo:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n};$$

ossia si può considerare r come intersezione di due piani, ad esempio: $\frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n}$ e $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$.

Se invece, ad esempio, $l = 0$, $m \neq 0$ ed $n \neq 0$ la retta risulta intersezione dei piani $x = a$ e $\frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$.



ESEMPIO 5.7.1 - Trovare due piani aventi per intersezione la retta r: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = -1 + 9t \end{cases}$.

Eliminando il parametro t si ricava $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{9}$ da cui:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} \\ \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{9} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 3y - 11 = 0 \\ 9y - z + 26 = 0 \end{cases}.$$

Se una retta è data come intersezione di due piani per determinarne i parametri direttori si può procedere in vari modi.

a) Un modo semplice è risolvere il sistema delle due equazioni dei piani: le infinite soluzioni esprimono la retta in forma parametrica.

ESEMPIO 5.7.2 - Data la retta come intersezione di piani $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 5x + 8y + 2z = 3 \end{cases}$ risolvendo il sistema (v. Esempio 1.3.7), si ottiene come soluzione: $\begin{cases} x = 14k - 1 \\ y = -9k + 1 \\ z = k \end{cases}$.

Si ha che i parametri direttori sono proporzionali alla terna $(14, -9, 1)$.

b) Un altro modo è quello di considerare i vettori **n** perpendicolare ad un piano ed **n'** perpendicolare all'altro; il loro prodotto esterno è un vettore parallelo alla retta.

Facendo sempre riferimento all'Esempio 5.7.2, si ha $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$ ed $\mathbf{n'} = (5, 8, 2)$, il vettore $\mathbf{r} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n'}$ è parallelo alla retta e risulta $\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

c) Un terzo modo è quello di trovare due punti A e B di r, il vettore B – A ha come componenti i parametri direttori di r.
Facendo ancora riferimento all'Esempio 1.3.7 si possono considerare come A(–1, 1, 0) e B(27, –17, 2), allora il vettore B – A = (28, –18, 2) è parallelo ad r e le sue componenti (proporzionali a quelle trovate con i metodi precedenti) sono ancora parametri direttori di r.

5.8 - Fasci di piani.

Data una retta r dello spazio si dice **fascio (proprio)** di piani per r l'insieme di tutti i piani dello spazio passanti per r.
Considerati due piani passanti per r:
- π di equazione: $ax + by + cz + d = 0$,
- π' di equazione: $a'x + b'y + c'z + d' = 0$,

l'equazione cartesiana di tutti i piani del fascio è la loro combinazione lineare (in breve c.l.) di coefficienti reali λ, μ:

$$(2) \qquad \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Infatti (2) è, per ogni λ, μ, l'equazione di un piano α che contiene tutti i punti della retta perché se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ appartiene alla retta soddisfa alle equazioni di π e di π' e quindi alla (2).

ESEMPIO 5.8.1. - Determinare l'equazione del generico piano per la retta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Prima si scrive r come intersezione di due piani $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ poi l'equazione del fascio $\lambda(x - 2y + 3) + \mu(y - z) = 0$.

ESEMPIO 5.8.2 - Determinare il piano per Q(1, –2, 0) e per la retta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

A partire dall'equazione del generico piano per r determinata nell' Esempio 5.8.1 s'impone il passaggio per il punto Q(1, –2, 0): $\lambda(1 + 4 + 3) - 2\mu = 0$ e si ottiene il piano cercato: $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Si dice fascio **improprio** l'insieme dei piani paralleli ad un piano fisso.
Se il piano π ha equazione: $ax + by + cz + d = 0$, il generico piano del fascio ha equazione $ax + by + cz + k = 0$ al variare di k in **R**.

ESEMPIO 5.8.3 - Dato il piano di equazione $x + 2y + 5z + 7 = 0$, il fascio dei piani paralleli ha equazione $x + 2y + 5z + d = 0$ al variare di d in **R**.

5.9 - Intersezione retta-piano, parallelismo retta-piano.

Supponiamo che la retta r sia rappresentata mediante le equazioni parametriche:

r: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ ed il piano π dall'equazione $ax + by + cz + d = 0$.

L'eventuale punto comune si trova risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r e di π e quindi corrisponde al valore di t che soddisfa la seguente equazione risolvente:

$$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + (al + bm + cn)\,t = 0$$

ossia un'equazione del tipo $B + At = 0$.

Se $A \neq 0$ si ricava t che sostituito nelle equazioni di r dà le coordinate del punto in cui r interseca il piano π.

Se $A = 0$ si hanno due possibilità:

- se $B \neq 0$ non c'è nessun valore di t che soddisfi l'equazione risolvente, la retta r è parallela a π;
- se $B = 0$ l'equazione risolvente in t è un'identità, ossia la retta $r \in \pi$, si può ancora considerare la retta r parallela a π.

Quindi **la condizione di parallelismo retta-piano** è data da $\mathbf{al + bm + cn = 0}$.

Casi particolari:

- Il piano $ax + by + c = 0$ è parallelo all'asse z.
- Il piano $ax + bz + c = 0$ è parallelo all'asse y.
- Il piano $ay + bz + c = 0$ è parallelo all'asse x.

ESEMPIO 5.9.1 - L'intersezione del piano $3x + 4y - z + 3 = 0$ con l'asse z è il punto di coordinate (0, 0, 3).

5.10 - Ortogonalità retta-piano.

La retta r parallela al vettore **r** è ortogonale al piano di vettore ortogonale **n** se **r** è parallelo ad **n**. Secondo le solite notazioni

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{l}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{n}}.$$

ESEMPIO 5.10.1 - La retta per Q(0, 2, 1) ortogonale al piano $x + 2y - z + 3 = 0$ ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

5.11 - Angoli.

Due rette r ed s dello spazio, non necessariamente incidenti, formano un angolo γ (e anche un angolo $\pi - \gamma$) se un vettore **r** parallelo ad r ed un vettore **s** parallelo ad s formano un angolo γ.

Per la formula del prodotto scalare, tenuto conto che si ha la possibilità di trovare due angoli, si ha:

$$\cos\gamma = \pm\frac{\mathbf{r}.\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\|\,\|\mathbf{s}\|}.$$

Due piani π e π' formano un angolo γ se esistono un vettore **n** ortogonale a π , ed un vettore **n'** ortogonale a π' che formano un angolo γ. In questo caso si ha una formula analoga alla precedente.
Un piano ed una retta r formano un angolo γ (minore di un angolo retto) se il vettore **r** parallelo ad r forma un angolo uguale a $(\pi/2\,) - \gamma$ con un vettore **n** ortogonale a π, per cui si ha per $\sin\gamma$ il valore assoluto della frazione seguente:

$$\frac{\mathbf{r}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{r}\|\,\|\mathbf{n}\|}.$$

ESEMPIO 5.11.1 - Determinare l'angolo della retta r: $x = 3$, $y = 2 + t$, $z = -t$ con il piano π: $x + y + 1 = 0$.
Per la formula precedente si ha: $\sin(r\ \pi) = \frac{1}{2}$.

5.12 - Mutua posizione di due rette nello spazio.

Due rette sullo stesso piano si dicono **complanari**; possono essere **incidenti** se si intersecano in in punto, o **parallele**.

ESEMPIO 5.12.1 - Le rette r: $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = t$ ed s: $x = 1 + 3k$, $y = 3 - k$, $z = 4k$ hanno in comune il punto P(1, 3, 0), e quindi sono incidenti.
Le rette r: $x + z = 0$, $x - y - z + 2 = 0$ ed s: $x = 2 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ sono parallele, avendo i parametri direttori proporzionali.

Due rette si dicono **sghembe** se non sono complanari.
Per provare che due rette sono sghembe si deve quindi verificare che non siano parallele e che non abbiano punti in comune.

ESEMPIO 5.12.3 - L'asse z e la retta r: $z = 0$, $x + y + 1 = 0$ non sono paralleli perché l'asse z ha parametri direttori (0, 0, 1) mentre la retta r ha parametri direttori (–1, 1, 0). Inoltre poiché l'asse z ha equazioni $x = 0$, $y = 0$, il sistema formato dai quattro piani è incompatibile: le rette sono sghembe.

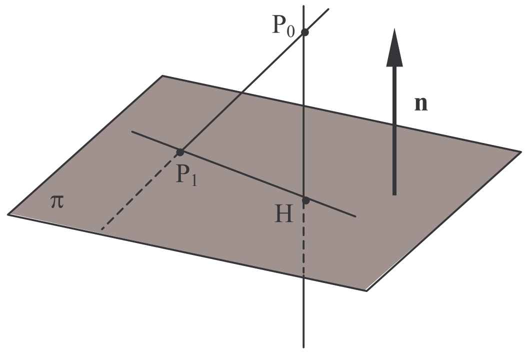
5.13 - Distanze ed applicazioni.

a) **Distanza di due punti** $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.
La distanza di P_2 e P_1 è il modulo del vettore $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$
ossia $d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

ESEMPIO 5.13.1 - La distanza del punto A(–3, 4, 0) dall'origine è 5.

b) **Distanza di un punto** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **dal piano** $\boldsymbol{\pi}$ di equazione $ax + by + cz + d = 0$.
Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto di π e $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vettore ortogonale a π.

Per definizione $\mathbf{n} \cdot (P_1 - P_0)$ è il modulo di $\mathbf{n}$ per la proiezione con segno di $P_1 - P_0$ su $\mathbf{n}$ ossia è il modulo di $\mathbf{n}$ per la distanza di P_0 da π, a meno del segno perché si considerano distanze positive.



Con calcoli già visti nel § 3.8 si ricava:

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

ESEMPIO 5.13.2 - La distanza del piano $x + 2y + 2z - 5 = 0$ dall'origine è $\frac{5}{3}$.

c) **L'area del triangolo** $P_1\ P_2\ P_3$ si può calcolare come la metà del modulo del prodotto vettoriale dei vettori $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

ESEMPIO 5.13.3 - Calcolare l'area A del triangolo $P_1(1, 2, 0)$ $P_2(-1, 3, 1)$ $P_3(0, 1, 2)$.
Poiché $P_2 - P_1 = (-2, 1, 1)$ e $P_3 - P_1 = (-1, -1, 2)$ si ha:
$(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = (2 + 1)\mathbf{i} - (-4 + 1)\mathbf{j} + (2 + 1)\mathbf{k}$ per cui:
$$A = \frac{1}{2}\ \|3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 9 + 9} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

d) **Il volume del tetraedro** di vertici $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ con $i = 1, 2, 3, 4$ si calcola con la formula vettoriale:

$$\text{vol}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{6}(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \cdot (P_4 - P_1).$$

Tenendo conto che consideriamo il volume una quantità positiva, il secondo membro va considerato in valore assoluto.

ESEMPIO 5.13.4 - Dati i vertici $A(-2, -2, -1)$, $B(1, -1, -3)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, -1, 3)$ calcolare il volume del tetraedro.

E' dato da $\text{Vol} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{51}{6}$.

e) **Distanza di un punto da una retta.**
Per calcolare la distanza di un punto P da una retta r, che è, per definizione, la distanza del punto P dal punto H piede della retta per P perpendicolare ed incidente ad r non si può applicare direttamente una formula ma si devono calcolare le coordinate di H e successivamente la distanza dei punti P ed H.

ESEMPIO 5.13.5 - Calcolare la distanza di $P(1, 2, 0)$ dalla retta r: $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$.

Il piano α per P perpendicolare ad r ha equazione $x + y - z - 3 = 0$. Il punto H, piede della perpendicolare, è il punto di intersezione di α ed r; ha coordinate $(2, 1, 0)$.
Risulta quindi $d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{2}$.

5.14 - Esercizi proposti.

V.1 - Determinare le equazioni dei seguenti piani:
i) passante per il punto A(1, 1, 0) e parallelo ai vettori **u**(1, 0, −1) e **v**(0, 2, 3); $(2x - 3y + 2z + 1 = 0)$
ii) passante per i punti B(0, 1, –1), C(3, 2, 1) e parallelo al vettore **w**(0, 0, 5); $(x - 3y + 3 = 0)$
iii) passante per il punto D(1, 1, –1) ed ortogonale al vettore **n**(1, –1, 2); $(x - y + 2z + 2 = 0)$
iv) passante per i punti E(0, 1, 0), F(2, –1, 0) e G(1, 2, 2). $(x + y - z - 1 = 0)$

V.2 - Scrivere l'equazione dei seguenti piani:
i) passante per il punto A(1, 2, 3) e perpendicolare al vettore **n**(0, 1, –2); $(y - 2z + 4 = 0)$
ii) passante per il punto B(0, 1, –1) e parallelo ai vettori **u**(1, 0, –1) e **v**(1, 2, –1); $(x + z + 1 = 0)$
iii) passante per i punti A(1, 2, 3), B(0, 1, 2) e parallelo al vettore **u**(0, 1, –2); $(3x - 2y - z + 4 = 0)$
iv) passante per i punti A(1, 2, 3), B(0, 2, 1) e C(1, –1, 2). $(6x + y - 3z + 1 = 0)$

V.3 - Rappresentare, mediante equazioni parametriche e come intersezione di piani, la retta r passante per il punto A(1, 1, 0) e parallela al vettore **u**(1, –1, 2). $(x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t)$

V.4 - Rappresentare, in forma parametrica e come intersezione di piani, le seguenti rette:
i) passante per i punti A(1, 2, –1) e B(0, 1, 4); $(x = 1 + t, y = 2 + t, z = -1 - 5t)$
ii) passante per A e parallela alla retta $x - 1 = 2y + 3 = 1 - z$; $(x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = -1 - 2t)$
iii) passante per A e parallela all'asse z; $(x = 1, y = 2, z = -1 + t)$
iv) passante per A e parallela ai piani cordinati xy e yz; $(x = 1, y = 2 + t, z = -1)$
v) passante per A e parallela ai piani $x + y - 1 = 0$ e $2y + 3 = 0$. $(x = 1, y = 2, z = -1 + t)$

V.5 - Determinare i valori dei parametri reali h e k tali che i piani $2x + hy - 2z + 3 = 0$ e $x + 2y + kz + 1 = 0$:
i) siano paralleli; $(h = 4, k = -1)$
ii) si intersechino in una retta parallela al vettore **u**(1, 1, 1). $(h = 0, k = -3)$

V.6 - Studiare la mutua posizione piano - retta nei seguenti casi:
i) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 2 - t$; (incidenti)
ii) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x = 1 + t, y = 1 + 3t, z = -1$; $(r \subseteq \alpha)$
iii) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x + 2z = 0, 2x - y + z = 0$; (incidenti)
iv) α: $3x - y + z - 1 = 0$ ed r: $x - 1 = 0, -y + z = 0$. (paralleli)

V.7 - Determinare le equazioni della retta passante per il punto P(1, –1, 2) perpendicolare ed incidente la retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$. $(x - y - z = 0, x + z - 3 = 0)$

V.8 - Trovare le equazioni della retta per l'origine incidente le rette
r: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x = y - 1 \\ x = z + 3 \end{cases}$. $(4x - y + z = 0,\ 4x - 3y - z = 0)$

V.9 - Trovare le coordinate di un punto ed i parametri direttori della retta intersezione dei piani: $2x - y + z - 1 = 0$ e $x + y - z + 2 = 0$. $(r = (0, 3, 3))$

V.10 - Trovare le equazioni dei piani bisettori degli angoli formati dai due piani:
$2x - y - 2z - 6 = 0$ e $x - 2y - 2z + 3 = 0$. $(x + y = 9,\ 3x - 3y - 4z = 3)$

V.11 - Verificare che la retta r di equazioni $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ ed il piano π di equazione: $3x + 5y - 5z = 1$ sono paralleli e rappresentare il fascio improprio delle rette parallele ad r e giacenti su π. $(3x + 5y - 5z - 1 = 0,\ h(x - y + z) + k(2x + y - z) = 0)$

V.12 - Verificare che le rette r: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 4 - t \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$ sono complanari e non parallele.

V.13 - Condurre per P(1, 2, 3) la retta ortogonale alle rette r: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$.
$(x = 1,\ y = 2)$

V.14 - Condurre per P (1, 2, –2) la retta parallela al piano: $x - 2y + 3z = 6$ ed ortogonale alla retta r: $\begin{cases} y = 2z \\ x = z + 1 \end{cases}$. $(x + 2y + z - 3 = 0,\ x - 2y + 3z + 9 = 0)$

V.15 - Data la retta r di equazioni $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$ ed il punto P (2, –1, 3):

i) determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r; (P'(2, 1, –1))
ii) determinare le equazioni della retta per P perpendicolare ad r ed incidente ad s di equazioni: $\begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$. $(3x - 4y - z - 7 = 0,\quad x + 2y + z - 3 = 0)$

V.16 - Date le due rette sghembe r: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ determinare le equazioni della retta perpendicolare ed incidente le rette date. $(x + z - 1 = 0,\ y = 0)$

V.17 - Determinare le equazioni della retta complanare con il piano p di equazione $x + 3y + 2z + 4 = 0$ ed incidente l'asse x e l'asse z. $(x + 3y + 2z + 4 = 0,\ y = 0)$

V.18 - Calcolare la distanza del punto P(2, 3, –1) dalla retta r: $\begin{cases} x = 2z \\ y = z + 2 \end{cases}$. $((\sqrt{30})/3)$

V.19 - Date le rette r: $\begin{cases} x = t - 6 \\ y = t \\ z = t + 5 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x + y - z + 7 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$ ed il punto P(1, 0, –2) determinare l'equazione del piano per P e parallelo ad entrambe le rette. $(x - 2y + z + 1 = 0)$

V.20 - Data la retta r: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed il punto A(0, 1, 1) determinare :

- le equazioni parametriche di r; (x = (t – 1)/2, y = t, z = 2t + 2)
- le intersezioni di r con i tre piani coordinati; (X = (0, 1, 4), Y = (–1/2, 0, 2), Z = (–1, –1, 0))
- un piano parallelo alla retta r;
- la retta parallela ad r e passante per A; (x = 1/2t, y = 1 + t, z = 1 + 2t)
- il piano perpendicolare alla retta r e passante per A; (x + 2y + 4z – 6 = 0)
- la distanza di r dall'origine. ($\sqrt{77}$ /7)

V.21 - Dati il punto P(1, 2, 0) e la retta r di equazioni $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ determinare:

i) le equazioni della rette per P e parallela ad r; (x = 1 + t, y = 2 + t, z = –t)
ii) la distanza di P da r; ($\sqrt{2}$)
iii) le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r. (P'(3, 0, 0)

CAPITOLO VI

ALCUNE SUPERFICIE NOTEVOLI

6.1 - Superficie sferica.

6.1.1 - L'equazione della superficie sferica.

La superficie sferica è l'analogo nello spazio della circonferenza nel piano.

DEFINIZIONE 6.1.1 - *La superficie sferica è il luogo dei punti P aventi distanza fissata $r \geq 0$ da un punto fisso C, detto centro: CP = r.*

Se nello spazio è dato un riferimento cartesiano ortogonale, fissato un numero reale positivo r ed indicate con (α, β, γ) le coordinate di C, la condizione affinché un generico punto P(x, y, z) appartenga alla superficie sferica è espressa dall'equazione:

$$\mathbf{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2}$$

sviluppando i calcoli l'equazione diventa:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0}$$

con $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$.
Si può quindi dire che l'equazione della superficie sferica è una equazione di secondo grado in x, y, z con le condizioni:
- i coefficienti di x^2, di y^2 e di z^2 sono eguali;
- i coefficienti di xy, xz, yz sono eguali a zero (cioè mancano tali termini).

Inoltre, affinché un'equazione del tipo $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$ rappresenti una superficie sferica di centro $C(\alpha, \beta, \gamma)$ con $\boldsymbol{\alpha = -a/2}$, $\boldsymbol{\beta = -b/2}$, $\boldsymbol{\gamma = -c/2}$ e raggio r, il numero $\mathbf{r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 - d}$ deve essere ≥ 0.

ESEMPIO 6.1.1 - L'equazione $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x + 5y - 21 = 0$ rappresenta la superficie sferica di centro $C(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}, 0)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} + 7} = \sqrt{\frac{281}{36}}$.
L'equazione $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x + 5y + 21 = 0$ non rappresenta punti di reali in quanto il raggio r risulta $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{36} - 7} = \sqrt{-\frac{223}{36}}$ che non è un numero reale.

Se il raggio è zero, la superficie sferica si riduce al suo centro.

ESEMPIO 6.1.2 - $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 6 = 0$ è l'equazione della superficie sferica di centro C (–1, –2, 1) e raggio zero, il cui unico punto è C stesso.

6.1.2 - Equazione del piano tangente alla superficie sferica.

Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ ed un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, il piano tangente in P_0 a Σ è il piano per P_0 perpendicolare alla retta CP_0.

Come parametri direttori della retta CP_0 possiamo assumere le componenti del vettore $P_0 - C = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta, z_0 - \gamma)$, quindi l'equazione del piano tangente risulta:

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$x_0x + y_0y + zz_0 - \alpha x - \beta y - \gamma z - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$$

Poiché il punto P_0 appartiene alla superficie sferica, le sue coordinate ne soddisfano l'equazione: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta = 0$ da cui:

$-x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0$; l'equazione del piano tangente si può allora scrivere: $x_0x + y_0y + z_0z - \alpha x - \beta y - \gamma z + \delta - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0 = 0$, ovvero:

$$\mathbf{x_0x + y_0y + z_0z - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) - \gamma(z + z_0) + \delta = 0}.$$

Questa formula si ottiene dall'equazione della superficie sferica con la **regola degli sdoppiamenti** cioè "sdoppiando'' x^2 in x_0x, y^2 in y_0y, z^2 in z_0z, $2x$ in $x + x_0$, $2y$ in $y + y_0$, $2z$ in $z + z_0$.

ESEMPIO 6.1.3 - Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$ ed il suo punto $P(1, 2, 0)$, essendo $C(1, 0, 4)$ il centro di Σ, l'equazione del piano tangente a Σ in P si può scrivere: $1x + 2y - 1(x + 1) - 0(y + 2) - 4(z + 0) - 3 = 0$ cioè: $y - 2z - 2 = 0$.

6.1.3 - Fascio di superficie sferiche.

Date due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\Sigma_1: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1 = 0$$
$$\Sigma_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

consideriamo l'equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2) = 0$$

ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di Σ_1 e Σ_2 con coefficienti reali λ e μ non entrambi nulli.

Tale equazione si può scrivere:

(1) $\mathbf{(\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu)x - 2(\beta_1\lambda + \beta_2\mu)y - 2(\gamma_1\lambda + \gamma_2\mu)z + \lambda\delta_1 + \mu\delta_2 = 0}$

e si hanno le seguenti possibilità:

- se le due superficie sferiche sono concentriche, cioè $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$ anche la (1) rappresenta, fissati due reali λ e μ, con $\lambda + \mu \neq 0$, una superficie sferica ad esse concentrica.

La (1) rappresenta quindi, al variare di λ e μ (con $\lambda + \mu \neq 0$), un insieme di infinite superficie sferiche concentriche detto **fascio di superficie sferiche concentriche**, la cui equazione si può scrivere più semplicemente come:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta = 0 \quad \text{con } \delta = (\lambda\delta_1 + \mu\delta_2) / (\lambda + \mu).$$

- se le due superficie sferiche non sono concentriche la (1) rappresenta, fissati due reali λ e μ, (con $\lambda + \mu \neq 0$), una superficie sferica che passa per gli eventuali punti comuni a Σ_1 e Σ_2 (in quanto le coordinate di tali punti soddisfano le equazioni di Σ_1 e Σ_2 e quindi la (1)).

La (1) rappresenta quindi, al variare di λ e μ (con $\lambda + \mu \neq 0$), un insieme di infinite superficie sferiche detto **fascio di superficie sferiche.**

Se $\lambda + \mu = 0$ la (1) è l'equazione di un piano :

$$\mathbf{2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y + 2(\gamma_1 - \gamma_2)z - \delta_1 + \delta_2 = 0}$$

detto **piano radicale** che passa per gli eventuali punti comuni a Σ_1 e Σ_2. Poiché i punti comuni a due superficie sferiche secanti individuano una circonferenza, questa viene detta **circonferenza base del fascio** in quanto tutte le superficie sferiche del fascio passano per essa. Tale circonferenza appartiene al piano radicale.
E' facile verificare che il piano radicale è perpendicolare alla congiungente i centri di Σ_1 e Σ_2 e che tutti i centri delle superficie sferiche del fascio appartengono a tale congiungente che si dice **asse centrale del fascio**.
Se le superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 sono tangenti, il piano radicale passa per il punto di tangenza ed è perpendicolare all'asse centrale: coincide quindi con il piano tangente comune a Σ_1 e Σ_2.
Ne segue che tutte le superficie sferiche tangenti ad una superficie sferica Σ in un suo punto P appartengono al fascio individuato da Σ e dal piano tangente a Σ in P.

Considerato un qualunque punto A dello spazio, non appartenente all'eventuale circonferenza base, esiste sempre una ed una sola superficie sferica del fascio che passi per A: infatti imponendo che le coordinate di A soddisfino la (1) si ottiene un'equazione di I° grado in λ e μ e quindi un unico rapporto λ/μ che individua la superficie cercata.

ESEMPIO 6.1.4 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per l'origine e tangente alla superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$ nel suo punto P(1, 2, 0).
Le superficie sferiche tangenti a Σ nel suo punto P(1, 2, 0) appartengono al fascio individuato da Σ e dal piano tangente a Σ in P (v. Esempio 6.1.3) ed hanno quindi equazione: $\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3) + \mu(y - 2z - 2) = 0$.
In particolare la superficie sferica del fascio passante per l'origine si ottiene scegliendo λ e μ in modo che (0, 0, 0) soddisfi l'equazione; risulta $-3\lambda - 2\mu = 0$. Scegliendo $\lambda = 2$ e $\mu = -3$ l'equazione della superficie sferica cercata risulta: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y/2 - 5z = 0$.

6.1.4 - Potenza di un punto rispetto ad una superficie sferica.

DEFINIZIONE 6.1.2 - *Si definisce **potenza di un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rispetto alla superficie sferica Σ** di equazione*: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ *il numero*

$$\mathbf{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta}$$

cioè il valore, con segno che l'equazione di Σ assume in P_0

La potenza è: un numero positivo se P_0 è esterno alla superficie sferica;
un numero negativo se P_0 è interno alla superficie sferica;
il numero zero se P_0 appartiene alla superficie sferica.

Consideriamo ora due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 di equazioni rispettivamente:

$$\Sigma_1:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z + \delta_1 = 0$$
$$\Sigma_2:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y - 2\gamma_2 z + \delta_2 = 0.$$

Un punto P(X, Y, Z) ha eguale potenza rispetto alle due superficie sferiche se:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\alpha_1 X - 2\beta_1 Y - 2\gamma_1 Z + \delta_1 = X^2 + Y^2 - 2\alpha_2 X - 2\beta_2 Y - 2\gamma_2 Z + \delta_2$$

cioè semplificando: $2(\alpha_1 - \alpha_2)X + 2(\beta_1 - \beta_2)Y - 2(\gamma_1 - \gamma_2) Z - \delta_1 + \delta_2 = 0$.
che è l'equazione del piano radicale, quindi: **il piano radicale è il luogo dei punti aventi la stessa potenza rispetto alle due superficie sferiche.**

6.1.5 - La circonferenza nello spazio.

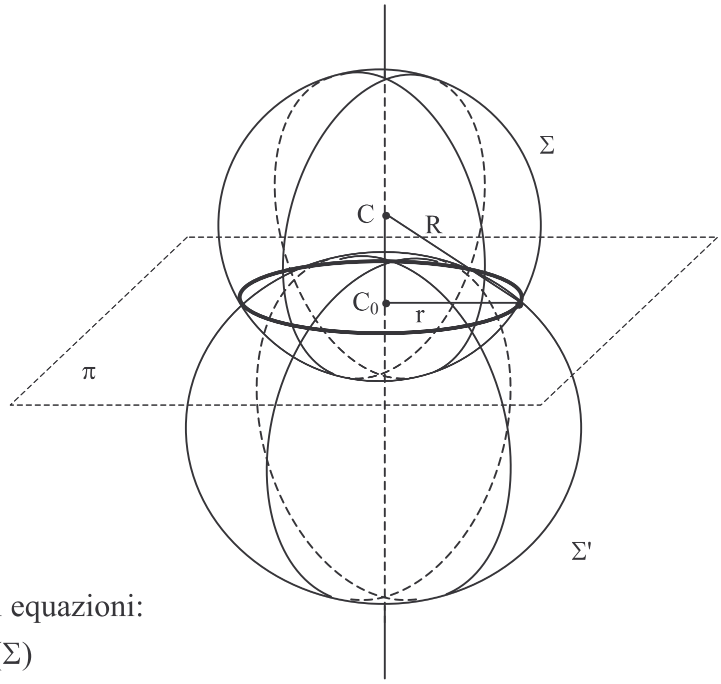
Nello spazio, *la circonferenza è il luogo dei punti P di un piano π aventi distanza fissata r da un punto fisso C di π, detto centro: CP = r.*
Una circonferenza si può quindi rappresentare nello spazio come intersezione del piano π e di una superficie sferica Σ opportuna, ad esempio quella di centro C e raggio *r*.
Una circonferenza, nello spazio, si può anche rappresentare come intersezione di due superficie sferiche Σ_1 e Σ_2 aventi almeno un punto in comune, cioè come circonferenza base del fascio individuato da Σ_1 e Σ_2; la stessa circonferenza si può rappresentare come intersezione di due qualunque altre superficie sferiche del fascio individuato da Σ_1 e Σ_2, o da una superficie sferica del fascio e dal piano radicale.

ESEMPIO 6.1.5 - La circonferenza del piano π: x + y = 0 avente centro in C(1, –1, 3) e raggio 1 si può rappresentare come intersezione del piano π con la superficie sferica di centro C e raggio 1 ed ha quindi equazioni: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1 & (\Sigma)\\ x+y=0 & (\pi)\end{cases}$,

oppure come intersezione di due qualunque superficie sferiche del fascio, ad esempio Σ e la superficie sferica Σ' ottenuta dall'equazione del fascio $\lambda\Sigma + \mu\pi = 0$ scegliendo $\lambda = \mu = 1$.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1 & (\Sigma)\\ x^2+y^2+z^2-x+3y-6z+10=0 & (\Sigma')\end{cases}.$$

Quando la circonferenza è data come intersezione di due superficie sferiche Σ e Σ', per trovare il piano a cui appartiene è sufficiente trovare il piano radicale π del fascio individuato da Σ e Σ', il suo centro è il punto di intersezione C_0 del piano radicale con l'asse centrale ed il suo raggio *r* si ricava dal teorema di Pitagora come $r = \sqrt{R^2-(CC_0)^2}$ dove C ed R sono rispettivamente centro e raggio di Σ.



ESEMPIO 6.1.6 - La circonferenza di equazioni:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-x+2y-4=0 & (\Sigma)\\ x^2+y^2+z^2-2x-3=0 & (\Sigma')\end{cases}$$

appartiene al piano radicale π: $(x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4) - (x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3) = 0$
cioè: $x + 2y - 1 = 0$.
Il suo centro C_0 è l'intersezione del piano π con l'asse centrale. L'asse centrale è la retta per il centro $C\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ di Σ e perpendicolare a π ed ha quindi equazioni $\begin{cases}2x = y+2\\ z=0\end{cases}$.

Risolvendo il sistema: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ si ottiene $C_0(1, 0, 0)$.

Essendo $(CC_0)^2 = \dfrac{5}{4}$ ed $R^2 = \dfrac{21}{4}$ risulta $r = \sqrt{\dfrac{21}{4} - \dfrac{5}{4}} = 2$.

6.2 - Rappresentazione di superficie e curve.

Abbiamo visto che un piano nello spazio si rappresenta con una equazione lineare in x,y,z: $ax + by + cz + d = 0$ con a, b, c non tutti nulli.
Una superficie si dice **algebrica** quando si può rappresentare in coordinate cartesiane con un'equazione algebrica $F(x, y, z) = 0$, dove $F(x, y, z)$ è un polinomio in x, y, z a coefficienti costanti.
Il grado del polinomio $F(x, y, z)$ che compare a primo membro si dice **grado** od **ordine** della superficie.
Le superficie algebriche del 1° ordine hanno equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ e sono dunque solo i piani.
Le superficie del 2° ordine vengono dette **quadriche**; ad esempio la superficie sferica è una quadrica poiché la sua equazione è un polinomio di secondo grado in x, y, z eguagliato a zero.
Una superficie si può anche rappresentare mediante equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

che esprimono le coordinate del punto in funzione di due parametri (u, v) che variano in una certa regione di $\mathbf{R}^2$.

Abbiamo visto che una retta si può rappresentare come intersezione di due piani oppure in forma parametrica (v. § 5.2).
Una curva *L* dello spazio si può rappresentare o come intersezione di due superficie

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

oppure come luogo descritto da un punto $P = P(t)$ le cui coordinate cartesiane dipendono da un parametro t, cioè mediante equazioni parametriche del tipo:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t).$$

Un elemento importante nello studio delle curve è il concetto di retta tangente in un punto.

DEFINIZIONE 6.2.1 - *Si dice retta* ***tangente*** *alla curva L in $P_0 = P(t_0)$ la posizione limite, se esiste, della retta per P_0 e per un punto P(t) al tendere di t a t_0.*

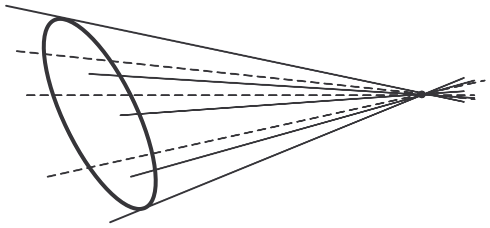
Quindi se la curva è piana la retta tangente in un suo qualunque punto appartiene al piano della curva; ad esempio le tangenti alla circonferenza data dall'intersezione di una sfera S con un piano π devono stare su π.

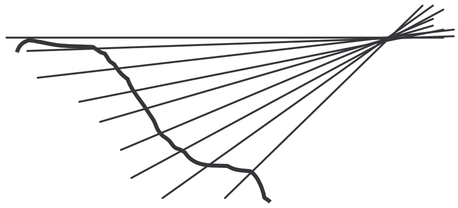
ESEMPIO 6.2.1 - Data la circonferenza σ intersezione della superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ con il piano π $x - z = 0$, la retta tangente a σ nel suo punto P(1, 1, 1) è la retta intersezione del piano π con il piano π' tangente a Σ in P.
π' ha equazione $z - 1 = 0$ e la retta tangente ha equazioni $x - z = 0$, $z - 1 = 0$.

6.3 - Coni.

6.3.1 - Coni e funzioni omogenee.

DEFINIZIONE 6.3.1 - *Si dice **cono** la superficie rigata dello spazio, generata dalle rette, dette **generatrici**, incidenti una curva, detta **direttrice**, e passanti per un punto fisso, detto **vertice**.*





ESEMPIO 6.3.1 - La superficie *S* di equazione $xz - y^2 = 0$ è un cono di vertice l'origine.
Per dimostrarlo vediamo che se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è un punto di *S*, la retta OP_0 è contenuta in *S*: cioè il generico punto $P(t)$ della retta OP_0 (che ha coordinate (x_0t, y_0t, z_0t)) appartiene alla superficie *S*.
Infatti sostituendo le coordinate del punto nell'equazione di *S* si ottiene: $t^2x_0z_0 - (ty_0)^2 = 0$ ossia $t^2[x_0z_0 - (y_0)^2] = 0$ che è un'identità per qualunque valore di t in quanto risulta: $x_0z_0 - (y_0)^2 = 0$ essendo P_0 un punto di *S*.

DEFINIZIONE 6.3.2 - *Una funzione f(x, y, z) si dice **omogenea di grado k** se, per ogni t, x, y, z risulta* $\boldsymbol{f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)}$.

ESEMPIO 6.3.2 - $f(x, y, z) = 2x^2 - 4xz + y^2$ è una funzione omogenea, $g(x, y, z) = x^3 - yz$ non lo è.

Con la stessa tecnica usata nell'esempio 6.3.1, si prova la:

PROPRIETÀ 6.3.1 - *Se f è una funzione omogenea nelle variabili x – a, y – b, z – c, l'equazione*

$$f(x - a, y - b, z - c) = 0$$

rappresenta un cono con vertice in V(a, b, c).

ESEMPIO 6.3.3 - $(x - 1)^2 - (x - 1)(y - 2) + (z - 1)^2 = 0$ è un cono con vertice $V(1, 2, 1)$.

6.3.2 - Rappresentazione di un cono.

Esaminiamo alcuni casi particolari.
i) Se la direttrice *L* è descritta dal punto $Q(x(u), y(u), z(u))$ e il vertice è $V(a, b, c)$, il generico punto P del cono è un punto della retta VQ quindi:

$$P - V = v(Q - V)$$

da cui si ottengono le equazioni parametriche del cono:

$$\begin{cases} x = a + v(x(u) - a) \\ y = b + v(y(u) - b) \\ z = c + v(z(u) - c) \end{cases}.$$

Le linee *u = costante* sono rette.

Le linee *v = costante* sono direttrici, ad eccezione di v = 0 che si riduce al vertice.

Per avere l'equazione cartesiana del cono occorre eliminare dalle espressioni precedenti i parametri u e v , cosa a volte difficile od impossibile.

ESEMPIO 6.3.4 - Trovare le equazioni parametriche del cono di vertice V(1, 1, 2) e direttrice *L*: $x = u$, $y = 1 - u^2$, $z = u^3$.

Applicando la formula si ottiene: $\begin{cases} x = 1 + v(u-1) \\ y = 1 - vu^2 \\ z = 2 + v(u^3 - 2) \end{cases}$.

ii) Se la curva direttrice *L* è data come intersezione di due superficie $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ un punto $P(x, y, z)$ sta sul cono di vertice $V(a, b, c)$ se e solo se appartiene alla retta VP_0 dove P_0 è un punto che varia su *L* e quindi ne soddisfa le equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x = a + t(x_0 - a)} \\ \mathbf{y = b + t(y_0 - b)} \\ \mathbf{z = c + t(z_0 - c)} \\ \mathbf{F(x_0, y_0, z_0) = 0} \\ \mathbf{G(x_0, y_0, z_0) = 0} \end{cases} .$$

Per avere l'equazione cartesiana del cono occorre eliminare t, x_0, y_0, z_0 fra le precedenti cinque equazioni.

Un cono può anche essere definito senza assegnare esplicitamente la direttrice: ad esempio come cono tangente ad una sfera e di vertice assegnato.

ESEMPIO 6.3.5 - Determinare l'equazione cartesiana del cono di vertice V(0, 0, 3) e tangente alla sfera *S*: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si considera la retta generica per V: $x = lt$, $y = mt$, $z = 3 + nt$ e si impone che abbia due intersezioni coincidenti con *S*.
L'equazione risolvente del sistema è: $(l^2 + m^2 + n^2)\, t^2 + 6nt + 8 = 0$ che ha due radici coincidenti se $9n^2 - 8(l^2 + m^2 + n^2) = 0$ ossia $8l^2 + 8m^2 - n^2 = 0$, per cui l'equazione cartesiana del cono è $8(x^2 + y^2) - (z - 3)^2 = 0$.

6.4 - Cilindri.

DEFINIZIONE 6.4.1 - *Si dice **cilindro** la superficie rigata dello spazio, generata dalle rette, dette **generatrici**, incidenti una curva, detta **direttrice**, e parallele ad una direzione fissa.*
Se la direzione è data dal vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e la direttrice *L* è descritta dal punto Q di coordinate (x(u), y(u), z(u)), il cilindro è l'unione di tutte le rette parallele a **v** che intersecano *L*. Queste rette hanno equazione vettoriale $P = Q(u) + t\,\mathbf{v}$ dove $Q(u) \in L$.

ESEMPIO 6.4.1 - Determinare l'equazione del cilindro avente direttrice *L*: x = u, y = cos u, $z = u^2$ e generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
La generica retta passante per un punto di *L* e parallela a **v** ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = u + t \\ y = \cos u - 3t \\ z = u^2 + t \end{cases}$, con u e t ∈ **R** e quindi queste sono le equazioni parametriche del cilindro.

Il cilindro si presenta facilmente in forma parametrica, ma non sempre è facile eliminare i due parametri.
Se la direzione è data dal vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ e la direttrice *L* è data come intersezione di due superficie f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0 un punto P sta sul cilindro se e solo se:

$$P = Q + t\mathbf{v} \qquad \text{ove Q sta su } L.$$

Le equazioni parametriche del cilindro si ottengono quindi scrivendo le equazioni parametriche della retta per $Q(x_0, y_0, z_0)$ e parallela a **v** ed imponendo che Q stia su *L* cioè sulle due superficie che individuano *L*:

$$\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + lt} \\ \mathbf{y = y_0 + mt} \\ \mathbf{z = z_0 + nt} \\ \mathbf{f(x_0, y_0, z_0) = 0} \\ \mathbf{g(x_0, y_0, z_0) = 0} \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana del cilindro si ottiene eliminando x_0, y_0, z_0, t dalle cinque equazioni, ma ciò non sempre è possibile.

ESEMPIO 6.4.2 - Determinare l'equazione del cilindro avente come direttrice la curva *L* di equazioni x = 0, $x^2 - xy + y^2 - 3z = 0$ e generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 - t \\ z = z_0 + 2t \\ x_0 = 0 \\ x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2 - 3z_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui si ottiene } x^2 + 2xy + y^2 + 3(2x - z) = 0.$$

Consideriamo ora il caso particolare dei cilindri paralleli ad uno degli assi coordinati.

TEOREMA 6.4.1 - *Se f(x, y) = 0 rappresenta è l'equazione di una curva L del piano x, y la stessa equazione*

$$f(x, y) = 0$$

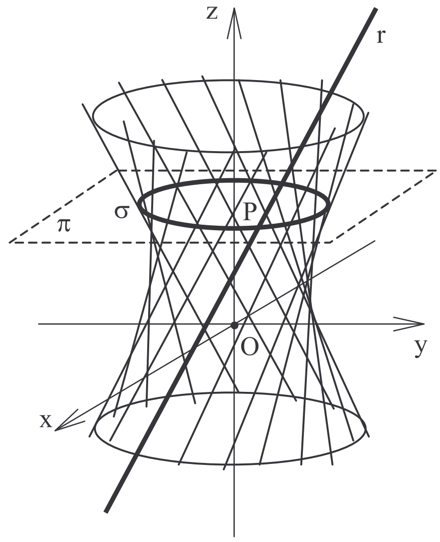
rappresenta nello spazio un cilindro di direttrice L e con le generatrici parallele all'asse z.

Quindi considerata una linea L data da f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0 se si elimina una variabile (per esempio z) fra le due equazioni si ottiene (ad esempio h(x, y) = 0) l'equazione del cilindro che proietta *L* secondo la direzione dell'asse corrispondente alla variabile eliminata (in questo caso z), mentre la stessa equazione rappresenta la curva proiezione di *L* sul piano coordinato delle variabili rimanenti (in questo caso x, y).
Se la curva *L* è una circonferenza il cilindro si dice **circolare**.

6.5 - Superficie di rotazione.

6.5.1 - Generalità sulle superficie di rotazione.

DEFINIZIONE 6.5.1 - *Si dice **rotonda** o **di rotazione** ogni superficie generata da una linea L di forma invariabile che ruota attorno ad una retta detta **asse** della superficie. Ogni punto della linea genera un cerchio detto **parallelo**, contenuto in un piano perpendicolare all'asse e con il centro sull'asse.*
*I piani passanti per l'asse incontrano la superficie secondo linee tutte congruenti fra loro, simmetriche rispetto all'asse, dette **meridiani**.*



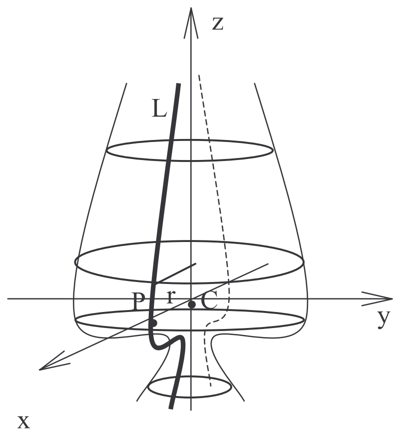
ESEMPIO 6.5.1 - Determinare la superficie di rotazione attorno all'asse z della retta r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2z \end{cases}$.

Sia P(1, 2t, t) il punto generico di r.
Il piano π per P ortogonale all'asse z ha equazione z = t.
La circonferenza σ del piano π che passa per P ed ha centro sull'asse z, si può scrivere come intersezione di π con la sfera di centro l'origine e raggio OP: $\begin{cases} z = t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4t^2 + t^2 \end{cases}$.

Eliminando t si ottiene l'equazione cartesiana della superficie: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ (iperboloide rotondo ad una falda).

ESEMPIO 6.5.2 - Determinare la superficie di rotazione della retta s: x + 2z – 5 = y – z = 0 attorno alla retta s_1: x – z + 1 = y – 2 = 0.
In questo caso le rette non sono ortogonali e sono incidenti in V(1, 2, 2) si avrà un cono.
L'equazione cartesiana è $5x^2 - y^2 + 5z^2 + 12xz - 34x + 4y - 32z + 45 = 0$

ESEMPIO 6.5.3 - Supponiamo ora di dover determinare la superficie S di rotazione tale che l'asse coincida con l'asse z e tale che la linea L stia sul piano xz, ossia sia rappresentata dalle equazioni $\begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.



Un punto P(X, 0, Z) di L descrive il cerchio del piano z = Z, di centro C(0, 0, Z) e raggio PC = X

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - Z)^2 = X^2 \\ z = Z \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = X^2 \\ z = Z \end{cases}.$$

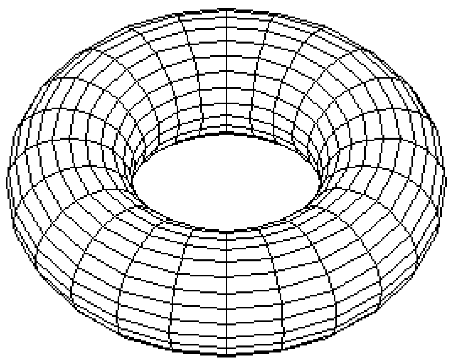
Tenuto conto che il punto P che descrive S ha le coordinate che soddisfano l'equazione f(X, Z) = 0 l'equazione di S si ottiene eliminando X e Z fra le precedenti e f(X, Z) = 0:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

ossia si ottiene da f(x, z) = 0 tenendo fissa z e sostituendo x con $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Risultato analogo vale per una qualsiasi superficie ottenuta per rotazione attorno ad un asse coordinato di una curva appartenente ad un piano coordinato contenente tale asse.

ESEMPIO 6.5.4 - Come caso particolare del precedente consideriamo una circonferenza che ruoti attorno ad una retta che non ne sia diametro. Esso genera una superficie detta **toro**, di forma anulare se l'asse è esterno alla circonferenza.
Supponiamo che l'asse di rotazione sia l'asse z e che l'equazione della circonferenza sul piano xz sia: $\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.



L'equazione di questo toro risulta quindi:

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$$

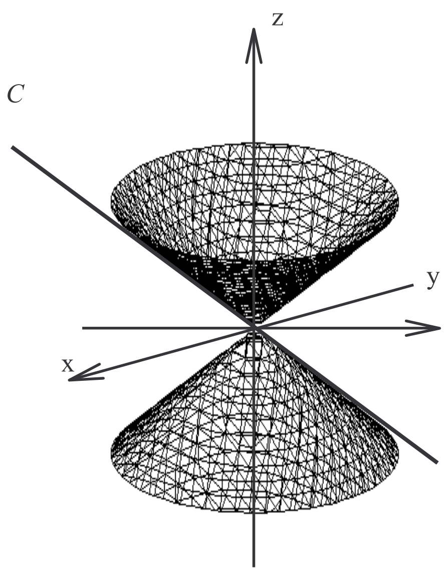
ed eliminando la radice si ottiene

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

Il toro è dunque una superficie algebrica del 4° ordine.

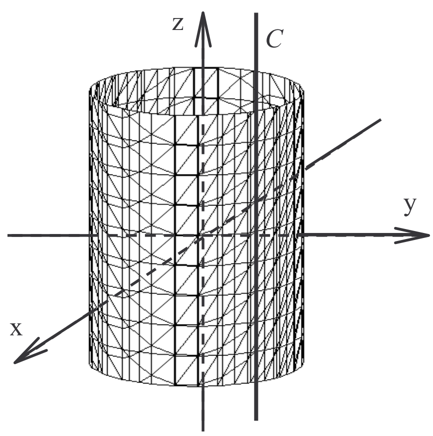
6.5.2 - Esempi di superficie di rotazione che sono quadriche.

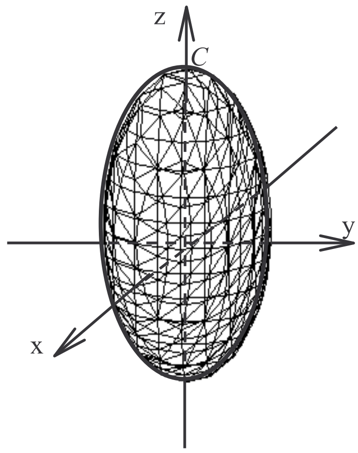
Con il metodo usato nell'Esempio 6.5.3 troviamo l'equazione della superficie facendo ruotare attorno all'asse z la curva *C* nei vari casi:



1) Sia *C* $\begin{cases} x - hz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$ una retta incidente l'asse z nell'origine, la superficie di rotazione è un cono di equazione $x^2 + y^2 - h^2z^2 = 0$.

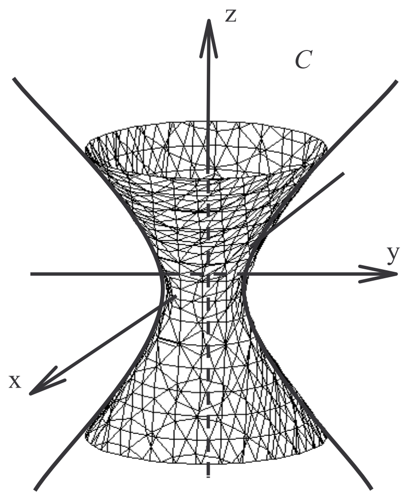
2) Sia *C* $\begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}$ $(h \neq 0)$ una retta parallela all'asse z; la superficie di rotazione: $x^2 + y^2 = h^2$ è un cilindro rotondo di raggio h.



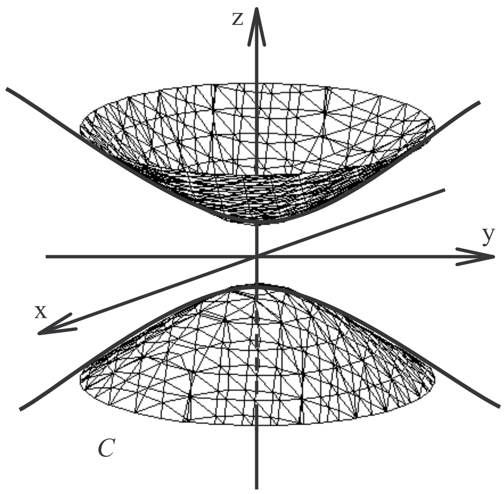


3) Sia C $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'ellisse, la superficie di rotazione è $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ caso particolare dell'ellissoide a punti reali $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

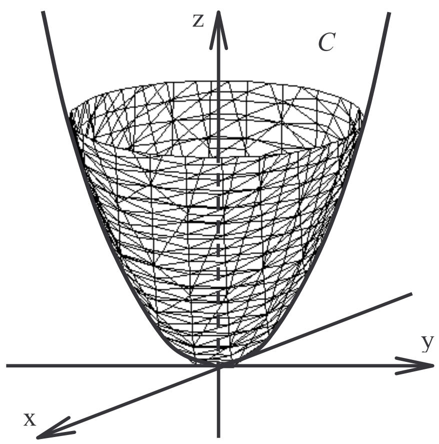
Se a = b = c l'ellissoide è una sfera di centro l'origine e raggio a.



4) Sia C $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'iperbole; la superficie di rotazione è $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ iperboloide rotondo ad una falda, caso particolare dell'iperboloide ad una falda $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



5) Sia C $\begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ un'iperbole che ha come asse trasverso l'asse z; la superficie di rotazione è $\dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=1$, caso particolare dell'iperboloide a due falde $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

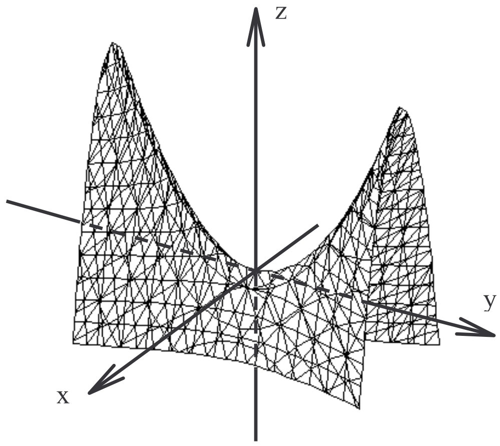


6) Sia C $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x=0 \end{cases}$ una parabola del piano yz; la superficie di rotazione è $x^2 + y^2 = 2pz$, caso particolare del paraboloide ellittico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$.

OSSERVAZIONE - Le equazioni polinomiali di secondo grado a punti reali possono rappresentare varii luoghi geometrici:

0) due piani;
1) cono;
2) cilindro;
3) ellissoide;
4) iperboloide ad una falda;
5) iperboloide a due falde;
6) paraboloide ellittico;
7) paraboloide iperbolico.

Solo il paraboloide iperbolico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ non è mai una superficie di rotazione. Per la sua particolare forma viene anche detto paraboloide a sella.



6.6 - Esercizi proposti.

VI.1 - Determinare l'equazione della superficie sferica di centro C(1, –2, –2) e tangente al piano $x - z + 1 = 0$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 1 = 0)$

VI.2 - Determinare l'equazione della superficie sferica di centro C(1, –2, –2) e tangente alla retta $x = y = z$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 3 = 0)$

VI.3 - Data la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$, determinare l'equazione del piano tangente nel suo punto P(2, –1, 0).

VI.4 - Considerate la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$ e la retta di equazioni: $x - 1 = y - 2 = 0$:
i) verificare che la retta è esterna alla superficie sferica;
ii) scrivere l'equazione dei piani passanti per la retta e tangenti alla superficie sferica.
$(y = 2,\ 4x + 3y - 10 = 0)$

VI.5 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per i punti A(4, 2, 3) e B(–1, –2, 2) ed avente centro sulla retta $x = y = z$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 11 = 0)$

VI.6 - Data la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - z - 7 = 0$ determinare l'equazione della retta tangente a Σ nel suo punto P(1, –1, 2) e perpendicolare alla retta $x - z = 2y + z - 3 = 0$. $(x = 1 + t,\ y = -1,\ z = 2 - t)$

VI.7 - Determinare l'equazione dei piani paralleli all'asse z, alla retta di equazioni: $x + y + z = y - z = 0$ e tangenti alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.
$(x + 2y - 2 \pm \sqrt{5} = 0)$

VI.8 - Determinare l'equazione della superficie sferica tangente al piano $x + y + 2z - 4 = 0$ nel suo punto $P(2, 0, 1)$ ed inoltre soddisfacente ad una delle due condizioni:

i) passante per il punto $A(1, 1, 0)$; $(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5x + 3y + 2z - 2 = 0)$

ii) avente centro sul piano $x + y + z + 1 = 0$. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 3 = 0)$

VI.9 - Determinare l'equazione della superficie sferica passante per la circonferenza intersezione del piano: $2x - y + z - 2 = 0$ con la superficie sferica: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ e per l'origine. $(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x + 5y + 3z = 0)$

VI.10 - Determinare centro e raggio della circonferenza intersezione del piano $x-y-z+2=0$ con la superficie sferica: $x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 3 = 0$. $(C(-1/2, 1, 1/2), r = \sqrt{2}/2)$

VI.11 - Data la superficie sferica Σ: $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ ed il suo punto $V(1, 2\sqrt{2}, 0)$ determinare le equazioni dei piani perpendicolari alla congiungente il centro della superficie sferica con V e che intersechino Σ in una circonferenza di raggio $r = \dfrac{1}{2}$.

$(x + 2\sqrt{2}\, y \pm (3\sqrt{35})/2 = 0)$

VI.12 - Dati i punti $A(2, 0, 0)$, $B(3, 2, -1)$, $C(-2, 1, 1)$, scrivere le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. $(x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 4 = 0$ e $x + y + 3z - 2 = 0)$

VI.13 - Dati il punto $A(3, -3, 1)$ e le rette r: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ ed s: $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$:

i) determinare l'equazione del piano p passante per A e parallelo ad r e ad s;

$(2x + y + z - 4 = 0)$

ii) determinare l'equazione della superficie sferica tangente al piano p in A ed avente centro sul piano xy. $(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 11 = 0)$

VI.14 - Determinare le equazioni della circonferenza del piano $z + 1 = 0$, di centro $Q(2, 3, -1)$ e raggio $r = \sqrt{3}$; determinare inoltre le equazioni delle superficie sferiche passanti per la circonferenza e tangenti alla retta $x = y - 3 = 0$

VI.15 - Date le superficie sferiche Σ_1: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ studiare il loro fascio determinando piano radicale, asse centrale e circonferenza base. Scrivere l'equazione del cono con vertice nell'origine e direttrice la circonferenza base del fascio. $(9x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 32xy = 0)$

VI.16 - Determinare l'equazione del cilindro circoscritto alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avente generatrici parallele alla direzione $(1, -1, 0)$ $(x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy = 2)$
Studiare la curva sezione di tale cilindro con il piano $x = 0$. (ellisse $y^2/2 + z^2 = 1$)

VI.17 - Determinare l'equazione della superficie di rotazione generata ruotando la retta r: $z - 1 = 2y - x = 0$ attorno alla retta s: $x = 2t$, $y = t$, $z = 0$. $(x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 5 = 0)$

VI.18 - Determinare l'equazione della superficie sferica Σ tangente nel punto $P(-1, 0, 0)$ al piano $2x + y - 2z + 2 = 0$ ed avente il centro sul piano $y + z + 1 = 0$.

$(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0)$

VI.19 - Determinare l'equazione del cilindro avente come direttrice la circonferenza sezione della superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 3 = 0$ con il piano $y = 1$ ed avente generatrici parallele all'asse y. $(x^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0)$

VI.20 - Considerata la circonferenza C di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 15 = 0$, $z = 0$ determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa di C attorno all'asse y. $((x^2 + y^2 + z^2 + 15)^2 = 64(x^2 + z^2))$

VI.21 - Determinare l'equazione della superficie rigata avente vertice V(0, 0, 0) e come direttrice la curva C di equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $z = 2$. $(x^2 + y^2 - 4z^2 = 0)$
Calcolare il volume del cono elementare di vertice V e base C. $(32\pi/3)$

VI.22 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico è data la retta r di equazioni $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$. Scrivere l'equazione del cono generato dalla rotazione di r attorno all'asse z. $(9x^2 + 9y^2 - 5(z - 3)^2 = 0)$

VI.23 - Determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente come direttrice la circonferenza di equazioni: $x = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e generatrici parallele alla retta $x - y + 1 = 0$, $z = 2$. $((-x + y)^2 + z^2 = 16)$

VI.24 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico è data la curva *L* di equazioni $x = t^2$, $y = 2 - t$, $z = 1 + 2t$. Scrivere l'equazione del cono di vertice V (0, 0, 2) e direttrice *L*. $(3x(2y + z - 2) = (y + 2z - 4)^2)$

VI.25 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico determinare le equazioni del cono Σ di vertice V(1, 2, 2) e direttrice la parabola γ di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$. $((2z - y - 2)^2 = 4(z - 2)(z - x - 1))$

VI.26 - Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortonormale monometrico sono date le superficie sferiche di equazioni rispettivamente Σ_1: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2z - 8 = 0$, Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 2y - 5 = 0$.
Determinare:
i) l' equazione del piano radicale del fascio da loro individuato e verificare che tale piano è secante le due superficie sferiche; $(x - 2y + 2z + 3 = 0)$
ii) centro e raggio della circonferenza intersezione; $(C(3, 2, -1), r = 4)$
iii) l'equazione del cilindro circoscritto alla superficie sferica Σ_1 ed avente generatrici parallele al vettore **k**. $(x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0)$

CAPITOLO VII

CONICHE

7.1 - Coordinate omogenee nel piano proiettivo.

Per studiare le coniche come curve algebriche del secondo ordine (v. Definizione 4.1.2) è opportuno ampliare il piano cartesiano con la retta all'infinito, definendo il piano proiettivo.

Nell'insieme $I = \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ delle terne non nulle di numeri reali consideriamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(\mathbf{x_1, x_2, x_3})\ \boldsymbol{\sigma}\ (\mathbf{y_1, y_2, y_3}) \Leftrightarrow \exists\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0} \ \ \textbf{tale che} \ \ \mathbf{y_i = \lambda x_i}\ (i = 1, 2, 3).$$

Ad esempio la terna (1, 2, –1) è in relazione con la terna (–3, – 6, 3), ma non con la terna (–3, 6, 1).

Costruiamo poi l'insieme quoziente I/σ ed indichiamo la generica classe di equivalenza di I/σ con $\{(x_1, x_2, x_3)\}$.

Osserviamo che se per un elemento (x_1, x_2, x_3) di una classe di equivalenza si ha $x_3 = 0$, per ogni altra terna di tale classe la terza componente è zero, poiché $y_3 = \lambda x_3$.

Consideriamo poi il sottoinsieme I^* contenuto in I/σ formato dalle classi di equivalenza in cui $x_3 \neq 0$ e stabiliamo una corrispondenza fra I^* ed $\mathbf{R}^2$ nel seguente modo:

$$\phi: I^* \to \mathbf{R}^2$$

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Valgono le proprietà:

- ϕ è ben definita:

infatti se $(y_1, y_2, y_3)\ \sigma\ (x_1, x_2, x_3)$ si ha $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$, $y_3 = \lambda x_3$ dunque

$$\phi\,(\{(y_1, y_2, y_3)\}) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) = \left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_3}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_3}\right) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \phi(\{(x_1, x_2, x_3)\}).$$

- ϕ è suriettiva:

infatti considerato $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ si ha $\phi(\{(x, y, 1)\}) = (x, y)$.

- ϕ è iniettiva:

se $\phi(\{(x_1, x_2, x_3)\}) = \phi(\{(y_1, y_2, y_3)\})$ allora $\dfrac{x_1}{x_3} = \dfrac{y_1}{y_3}$ e $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{y_2}{y_3}$

quindi $x_3 = ky_3$, $x_1 = ky_1$, $x_2 = ky_2$ (con $k \neq 0$) ossia $\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(y_1, y_2, y_3)\}$.

La corrispondenza ϕ è quindi biunivoca, ogni punto (x, y) di $\mathbf{R}^2$ può essere rappresentato con una terna di numeri (x_1, x_2, x_3) tali che:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \qquad \frac{x_2}{x_3} = y \qquad \text{con } \ x_3 \neq 0.$$

Se il punto P(x, y) appartiene alla retta

$$r : ax + by + c = 0$$

tutte le terne (x_1, x_2, x_3) tali che $\dfrac{x_1}{x_3} = x$, $\dfrac{x_2}{x_3} = y$, $(x_3 \neq 0)$ verificano l'equazione

(1) $$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

DEFINIZIONE 7.1.1 - *L'insieme quoziente* I/σ *si dice* ***piano proiettivo*** *o* ***piano ampliato.*** *Si dice* ***punto del piano ampliato*** *ogni classe di equivalenza, elemento di* I/σ *e* ***retta ampliata*** *l'insieme degli elementi di* I/σ *che soddisfano la (1).*

Ad esempio (2, –3, 2) è un punto della retta $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ perché sostituendo 2λ ad x_1, -3λ ad x_2 e 2λ ad x_3 si ottiene un'identità.
Vediamo ora che esistono elementi di I/σ che non stanno in I* e che soddisfano la (1), tali elementi vengono detti **punti impropri** o **punti all'infinito**.
Osserviamo che:
- se la terna $(\alpha, \beta, 0)$ soddisfa la (1) , anche la terna $(\lambda\alpha, \lambda\beta, 0)$ la soddisfa;
- dato che a e b non sono entrambi nulli, esiste una terna con $x_3 = 0$ che soddisfa la (1): è il punto $(b, -a, 0)$;
- tale punto è comune a tutte le rette parallele alla retta r;
- è l'unico punto improprio di r.

Infatti si ha: $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ supposto $a \neq 0$ si ricava $\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = -\dfrac{b}{a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$

per cui tutte le soluzioni del sistema sono del tipo $\lambda\left(-\dfrac{b}{a}, 1, 0\right)$ ossia $\lambda(b, -a, 0)$ è l'unico punto improprio di r.
Quindi *ogni retta ampliata contiene un unico punto improprio che è comune a tutte le sue parallele*.

ESEMPIO 7.1.1 - Le rette r: $x - 2y + 2 = 0$ ed r': $x - 2y + 7 = 0$ hanno in comune il punto all'infinito $P_\infty = (2, 1, 0)$.

Infatti passando a coordinate omogenee il punto comune alle due rette è soluzione del sistema : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Vediamo alcuni casi particolari di rette:
$x_1 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(0, \lambda, \mu)$; il suo punto improprio è (0, 1, 0);
$x_2 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(\lambda, 0, \mu)$; il suo punto improprio è (1, 0, 0);
$x_3 = 0$ è soddisfatta da tutti i punti del tipo $(\lambda, \mu, 0)$; tutti i suoi punti sono impropri.

Osserviamo che ogni punto improprio sta su una retta propria, sulle sue parallele e sulla retta impropria.

ESEMPIO 7.1.2 - $(\alpha, \beta, 0)$ appartiene alla retta propria $\beta x_1 - \alpha x_2 = 0$, alle sue parallele $\beta x_1 - \alpha x_2 + cx_3 = 0$ ed alla retta impropria $x_3 = 0$.

Vediamo ora altri esempi di punti impropri.

ESEMPIO 7.1.3 - La retta $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ in coordinate omogenee diventa $\dfrac{x_1 - x_0x_3}{l} = \dfrac{x_2 - y_0x_3}{m}$ quindi il suo unico punto improprio è (l, m, 0), come facilmente si verifica.

ESEMPIO 7.1.4 - Per determinare i punti impropri della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ occorre passare in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm i x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Si ottengono due punti impropri immaginari (1, ± i, 0) detti **punti ciclici**.
Tali punti sono i punti impropri delle due rette immaginarie dette **rette isotrope**, ciascuna delle quali è perpendicolare a se stessa, di equazioni: $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.
Le coordinate dei punti ciclici soddisfano l'equazione di qualunque circonferenza, quindi ogni circonferenza del piano passa per i punti ciclici.

ESEMPIO 7.1.5 - Per determinare i punti impropri dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ occorre passare in coordinate omogenee. $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm \frac{a}{b} x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$

Si ottengono due punti reali distinti (a, b, 0), (a, – b, 0), quindi la retta impropria è secante l'iperbole. I punti impropri dell'iperbole vengono detti **direzioni asintotiche**.

Procedendo in modo analogo si vede che la retta all'infinito ha in comune con l'ellisse due punti immaginari ossia è esterna all'ellisse.

Intersecando la retta all'infinito con la parabola $y^2 = 2px$, (che ha equazione omogenea $x_2^2 = 2px_1x_3$) si ottengono due punti reali coincidenti (1, 0, 0) ossia la retta all'infinito è tangente alla parabola.

7.2 - Classificazione delle coniche.

Ricordiamo che si dice **conica** l'insieme C dei punti del piano (x, y) soddisfacenti ad una equazione algebrica di II° grado in x, y:

(2) $$\mathbf{f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}.$$

Se consideriamo il piano proiettivo, l'equazione della conica in coordinate omogenee diventa:

(3) $$\mathbf{f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0}.$$

DEFINIZIONE 7.2.1 - *Si dice* ***punto doppio*** *della conica C un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ di C le cui coordinate sono soluzioni del sistema (le cui equazioni sono le derivate parziali della (3) rispettivamente rispetto ad x_1, x_2, x_3, divise per due ed eguagliate a zero):*

(4) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Poiché si ricava facilmente che
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)+x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)+x_3(a_{13}x_3 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)=0$
l'eventuale punto soluzione del sistema è un punto della conica.

Il determinante dei coefficienti del sistema è:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$$

e viene detto **discriminante della conica**.
Ricordando la teoria dei sistemi si ha che:

- se $\mathbf{A \neq 0}$, il sistema ha solo la soluzione nulla $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ che non rappresenta nessun punto del piano ampliato, quindi la conica non ha punti doppi e si dice **non degenere**;
- se $\mathbf{A = 0}$ il sistema ha soluzioni non nulle, la conica ha almeno un punto doppio P_0, si spezza nel prodotto di due rette e si dice **degenere**.

Una conica si dice:

- **semplicemente degenere** se è composta da due rette distinte e incidenti;
- **doppiamente degenere** se è composta da due rette coincidenti.

Per illustrare quanto detto vediamo i seguenti esempi:

ESEMPIO 7.2.1 - Data la conica: $x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0$ verificare che è composta da due rette distinte ed incidenti e che $P_0\,(-4, 4)$ è punto doppio.

Poiché $A = 0$ ed $A_{33} = -\dfrac{1}{4}$ il sistema (4) in coordinate non omogenee si scrive:

$$\begin{cases} x + 3y/2 - 2 = 0 \\ 3x/2 + 2y - 2 = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}.$$ Tale sistema ammette solo la soluzione $P_0(-4, 4)$.

Intersechiamo la generica retta per P_0 $\begin{cases} x = -4 + lt \\ y = 4 + mt \end{cases}$ con la conica. L'equazione risolvente del sistema formato dalle equazioni della retta e della conica è $(l^2 + 3lm + 2m^2)t^2 = 0$.

Se $l^2 + 3lm + 2m^2 = 0$ ossia $\dfrac{l}{m} = -2$ oppure $\dfrac{l}{m} = -1$ l'equazione risolvente è un'identità e le rette r_1 $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$ ed r_2 $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 4 + t \end{cases}$ sono le rette in cui si spezza la conica.

Se $l^2 + 3\,lm + 2\,m^2 \neq 0$ allora $t^2 = 0$, ossia ogni retta diversa da r_1 ed r_2 interseca la conica solo in P_0 in cui ci sono due intersezioni coincidenti.

ESEMPIO 7.2.2 - Data la conica: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ verificare che è doppiamente degenere.

Il sistema (4) in coordinate non omogenee si scrive: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases}.$

Tale sistema ammette infinite soluzioni: tutti i punti della retta $x + y - 1 = 0$ sono punti doppi ossia la conica è doppiamente degenere e la sua equazione diventa $(x + y - 1)^2 = 0$.

DEFINIZIONE 7.2.2 - *Una conica C si dice:*
- di tipo ellittico *se non ha punti all'infinito, cioè la retta impropria non interseca C;*
- di tipo parabolico *se ha un solo punto all'infinito, cioè la retta impropria è tangente a C;*
- di tipo iperbolico *se ha due punti distinti all'infinito, cioè la retta impropria è secante a C.*

Per determinare i punti di intersezione tra la conica e la retta impropria si deve risolvere il sistema: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$ e, sostituendo, $\begin{cases} x_3 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$.

L'equazione di secondo grado ha come discriminante $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Il sistema: - ha due soluzioni reali distinte se $\Delta > 0$;
- ha due soluzioni reali coincidenti se $\Delta = 0$;
- non ha soluzioni reali se $\Delta < 0$.

Si osserva che $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ è l'opposto del minore $\mathbf{A_{33}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix}$ dell'elemento a_{33} del determinante **A**, quindi:

- **la conica è di tipo iperbolico** se $\mathbf{A_{33} < 0}$;
- **la conica è di tipo parabolico** se $\mathbf{A_{33} = 0}$;
- **la conica è di tipo ellittico** se $\mathbf{A_{33} > 0}$.

DEFINIZIONE 7.2.3 - *Una conica non degenere ed a punti reali si dice* ***iperbole, parabola, ellisse,*** *a seconda che sia di tipo iperbolico, parabolico, ellittico.*

OSSERVAZIONE 1 - Ricordando l'Esempio 7.1.5 la definizione ora data è coerente con i nomi delle coniche ottenute come luoghi di punti.

OSSERVAZIONE 2 - Abbiamo detto che una conica è di tipo parabolico se $A_{33} = 0$. Tale condizione implica che il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione (3) sia un quadrato; si può allora porre $a_{11} = a^2$, $a_{22} = b^2$ e $a_{12} = ab$ e la conica si può scrivere nella forma:

$$(ax_1 + bx_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

ed il punto improprio della conica ha coordinate $(-b, a, 0)$.

ESEMPIO 7.2.3 - Determinare il tipo della conica: $2x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & -5 \end{vmatrix} = -10 - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{51}{4} \neq 0$ quindi la conica è non degenere. Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$.

La conica è di tipo ellittico, quindi è un'ellisse.

ESEMPIO 7.2.4 - Determinare il tipo della conica: $2x^2 + xy - y^2 + x + y - 3 = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3 \end{vmatrix} = 6 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{27}{4} \neq 0$ quindi la conica è non degenere. Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1/4 = -9/4 < 0$.

La conica è di tipo iperbolico, quindi è un'iperbole.

ESEMPIO 7.2.5 - Determinare il tipo della conica: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$.

Calcoliamo $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 -1 -1 -1 = -4 \neq 0$ quindi la conica è non degenere.

Per determinarne il tipo calcoliamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

La conica è di tipo parabolico, quindi è una parabola.
Notiamo che, come osservato prima, il complesso dei termini di secondo grado è un quadrato $(x - y)^2$.

ESEMPIO 7.2.6 - Verificare che la seguente conica: $x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0$ è degenere e si spezza in due rette.
Poichè $A = 0$ ed $A_{33} < 0$ si tratta di una conica degenere di tipo iperbolico. Per ricavarne le componenti si riscrive l'equazione nella forma: $x^2 + x(y + 1) - 2y^2 + 2y = 0$.
Tale equazione di secondo grado in x ha discriminante $(y + 1)^2 + 8y^2 - 8y = 9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2$, per cui ricavando x mediante y si ha: $x = \frac{-(y+1) \pm (3y-1)}{2}$ e quindi si ottiene che la conica si spezza nelle rette: $x - y + 1 = 0$ e $x + 2y = 0$.

ESEMPIO 7.2.7 - Verificare che la conica: $2x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ è degenere di tipo ellittico.
Infatti si ha $A = 0$ e $A_{33} > 0$. In questo caso la conica non contiene rette reali.

7.3 - Intersezione di una retta r e di una conica *C*.

Date la retta r di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$ e la conica *C* di equazione (2) i loro punti comuni sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}.$$

L'equazione risolvente in t è di secondo grado: $\boldsymbol{\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0}$ dove:

$\alpha = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$;

$\beta = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\, l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\, m$;

$\gamma = f(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$.

Possono presentarsi vari casi.

1) L'**equazione risolvente è un'identità**: quindi ci sono infinite soluzioni e la retta è contenuta nella conica (che è quindi degenere).

ESEMPIO 7.3.1 - $\begin{cases} 2xy + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ La conica $2xy + y = 0$ contiene la retta $y = 0$; infatti la sua equazione si può scrivere: $y(2x + 1) = 0$.

2) L'**equazione risolvente ha grado zero, ma non è un'identità**: le due intersezioni mancanti sono all'infinito; ad esempio *C* è un'iperbole ed r è un suo asintoto, vi è un punto di molteplicità due all'infinito.

ESEMPIO 7.3.2 - $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ non ci sono soluzioni al finito.

Passando a coordinate omogenee si ottiene il sistema: $\begin{cases} 4x_1^2 - 9x_2^2 = x_3^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = x_3^2 \\ x_1 = -\dfrac{3}{2}x_2 \end{cases}$

la cui soluzione è il punto (–3, 2, 0) contato due volte.

3) L'**equazione risolvente ha grado uno**: vi è una sola intersezione al finito, ad esempio *C* è una parabola ed r è parallela all'asse della parabola; una soluzione è al finito e l'altra all'infinito.

ESEMPIO 7.3.3 - $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = 2x \\ y = 2 \end{cases}$ una sola soluzione al finito P(2, 2).

Passando a coordinate omogenee si ottiene il sistema:

$\begin{cases} x_2^2 = 2x_1x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_3^2 - 2x_1x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3(2x_3 - x_1) = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x_3 = x_1 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$

e si ottengono i punti: Q(1, 0, 0) all'infinito e P(2, 2, 1) (soluzione al finito trovata anche prima).

4) l'**equazione risolvente ha grado due**, vi sono due intersezioni: reali distinte, reali coincidenti, complesse coniugate ed in corrispondenza la retta si dirà rispettivamente **secante, tangente, esterna.**

ESEMPIO 7.3.4 - Considerata la conica di equazione: $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$:

- verificare che non è degenere. Si ha $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$.

- determinarne il tipo. $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$. La conica è un'iperbole.

- trovarne le intersezioni con la retta all'infinito:

$\begin{cases} 3x_1^2 - 4x_1x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (3x_1 - 4x_2)x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ cioè (0, 1, 0) e $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ cioè $\left(\dfrac{4}{3}, 1, 0\right)$.

- trovarne le intersezioni con la retta $x + 2y + 1 = 0$:

$\begin{cases} y = -\dfrac{x+1}{2} \\ 3x^2 - 4x\dfrac{-x-1}{2} + 8x + 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{x+1}{2} \\ 3x^2 + 2x^2 + 2x + 8x + 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{x+1}{2} \\ 5x^2 + 10x + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\dfrac{x+1}{2} \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ contato due volte.

I due punti di intersezione coincidono, la retta è tangente alla conica nel punto A(–1, 0).

- trovarne le intersezioni con la retta $y = -\frac{1}{2}x + 2$:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 3x^2 - 4x(-\frac{1}{2}x + 2) + 8x + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 3x^2 + 2x^2 - 8x + 8x + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 5x^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = \pm i \\ y = 2 \mp i/2 \end{cases}$ poiché i due punti sono immaginari la retta è esterna all'iperbole.

7.4 - Retta tangente ad una conica.

Riprendiamo l'equazione risolvente del sistema fra una retta r ed una conica *C* vista nel paragrafo precedente:

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0.$$

Per semplicità supponiamo la conica non degenere, ossia senza punti doppi. Sia P_0 un punto di *C*, cioè $\gamma = 0$, la retta r risulterà tangente a *C* in P_0 se $\beta = 0$.
Tale condizione permette di ricavare i parametri direttori della tangente in P_0:

$$\frac{1}{m} = -\frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}.$$

Tali valori sostituiti in $m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$ danno l'equazione della tangente:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Ma $P_0 \in C$, quindi tenuto conto che

$$a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = -(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0)$$

la retta precedente si scrive anche:

(5) $$\mathbf{a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0}$$

che si dice ottenuta dall'equazione della conica con la **regola degli sdoppiamenti** cioè con le sostituzioni:

$$x^2 \to x_0x, \quad y^2 \to y_0y, \quad xy \to \frac{x_0y + y_0x}{2}, \quad x \to \frac{x + x_0}{2}, \quad y \to \frac{y + y_0}{2}.$$

L'equazione (5) si può anche scrivere:

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0.$$

Se si considera l'equazione (3) della conica in coordinate omogenee, la tangente alla conica nel suo punto P_0 di coordinate omogenee (x_0, y_0, z_0) diventa:

(5') $$\mathbf{x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + x_2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) + x_3(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0) = 0}$$

che si ottiene anche calcolando:

(5'') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} \mathbf{x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0} \mathbf{x_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{P_0} \mathbf{x_3 = 0}.$$

Se nella (5') si mettono invece in evidenza le coordinate di P_0 si ottiene:

$$x_0(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + y_0(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + z_0(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

che, facendo uso delle derivate parziali, si può anche scrivere:

(5''') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\mathbf{x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\mathbf{y_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\mathbf{z_0 = 0}.$$

ESEMPIO 7.4.1 - Determinare la tangente alla conica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$ nel suo punto P(2, 0). La tangente ha equazione: $2x - 2\frac{2y}{2} - 2\frac{x+2}{2} = 0$ ossia $x - 2y - 2 = 0$.

7.5 - Cenni sulla polarità rispetto ad una conica.

Sia *C* una conica non degenere di equazione in coordinate cartesiane non omogenee:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Nel § 7.4 abbiamo visto che l'equazione della retta tangente in un suo punto $P_0(x_0, y_0)$ si ottiene mediante la regola degli sdoppiamenti:

(5) $$a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

L'espressione (5) ad un punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ del piano, anche non appartenente alla conica, fa corrispondere una retta p_0 che si dice **polare di P_0 rispetto alla conica** e P_0 si dice **polo della retta p_0**. La polare di $P_0(x_0, y_0)$ ha quindi equazione:

(6) $$\mathbf{a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0}.$$

Ovviamente *la polare di un punto della conica è la tangente alla conica nel punto.*

ESEMPIO 7.5.1 - Data la conica di equazione $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$, trovare la polare del punto B(1, 2).

Si ha: $3x - 4\frac{y+2x}{2} + 8\frac{x+1}{2} + 5 = 0$ da cui $3x - 2y - 4x + 4x + 4 + 5 = 0$,

cioè: $3x - 2y + 9 = 0$.

In modo del tutto analogo a quanto visto nel § 7.4 la polare del punto $P_0(x_0, y_0)$ si può anche scrivere:

$$\mathbf{x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0}$$

o, se si considera l'equazione (3) della conica in coordinate omogenee, la polare del punto P_0 di coordinate omogenee (x_0, y_0, z_0) diventa:

(6') $$\mathbf{x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + x_2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) + x_3(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0) = 0}$$

che si ottiene anche calcolando:

(6") $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{P_0} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{P_0} x_3 = 0$$

oppure:

(6"') $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) z_0 = 0.$$

ESEMPIO 7.5.2 - La conica precedente, passando a coordinate omogenee, ha equazione: $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_3^2 = 0$. Per calcolare la polare di B(1, 2, 1) si può usare la (6"):

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_B = (6x_1 - 4x_2 + 8x_3)_B = 6$; $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_B = (-4x_1)_B = -4$; $\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_B = (8x_1 + 10x_3)_B = 18$

e si ottiene $6x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 0$ cioè $3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 0$.

Per costruire graficamente la polare di una conica *C* noto il polo e viceversa si usa il:

TEOREMA DI RECIPROCITÀ 7.5.1 - *Se $P_1(x_1, y_1)$ appartiene alla polare di $P_0(x_0, y_0)$, la polare di $P_1(x_1, y_1)$ passa per $P_0(x_0, y_0)$.*

Dimostrazione. Se $P_1(x_1, y_1)$ appartiene alla polare di P_0 le sue coordinate ne soddisfano l'equazione cioè:

$$a_{11}x_0x_1 + a_{12}(y_0x_1 + x_0y_1) + a_{22}y_0y_1 + a_{13}(x_1 + x_0) + a_2(y_1 + y_0) + a_{33} = 0$$

e tale espressione dice anche che le coordinate(x_0, y_0) di P_0 soddisfano l'equazione della polare di P_1.

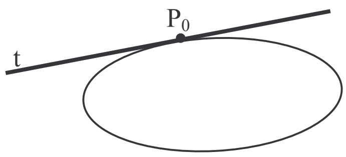
Applicando il teorema di reciprocità vediamo separatamente come si possa costruire geometricamente la polare di un punto sulla conica, interno od esterno ad essa, e viceversa come si trovi il polo di una retta tangente, esterna o secante la conica.

Dati la conica *C* ed il polo P_0:

Date la conica *C* e la polare p_0:

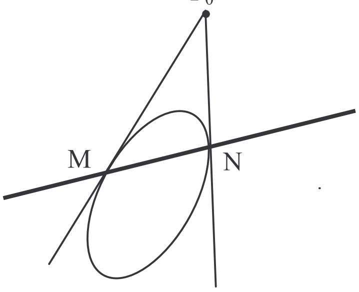
Se P_0 appartiene alla conica la polare è la tangente.

Se la retta è la tangente alla conica, il polo è il punto di tangenza.



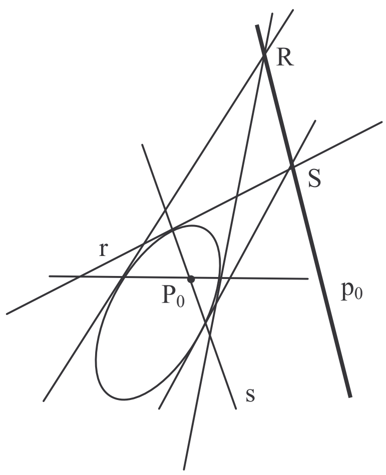
Se P_0 è esterno alla conica, si conducono da P_0 le due tangenti a *C*; la polare p_0 di P_0 è la retta MN congiungente i due punti di contatto.

Se p_0 incontra la conica in due punti distinti M ed N, il suo polo è il punto comune alle tangenti a *C* in M ed N.



Se P_0 è interno alla conica, si costruiscono due rette r ed s per P_0, se ne trovano i poli R ed S (v.sopra), la polare di P_0 è la retta RS.

Se p_0 non interseca la conica, si considerano due suoi punti R ed S, se ne costruiscono le polari r ed s (v. sopra). L'intersezione di r ed s è il polo P_0 cercato.



7.6 - Diametri.

DEFINIZIONE 7.6.1 - *Si dice **diametro la polare di un punto improprio**.*

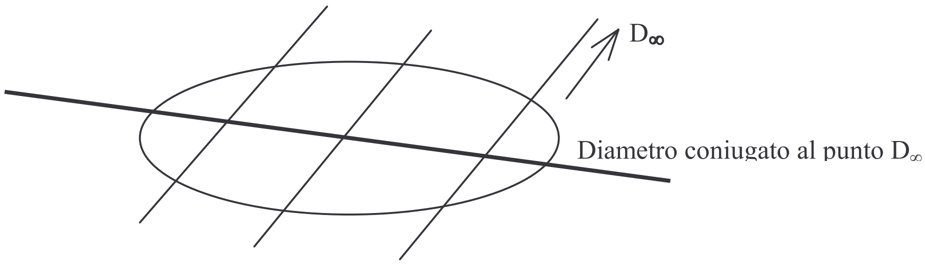
Il diametro relativo al punto $D_\infty(l, m, 0)$ si dice **diametro coniugato al punto D_∞** ed ha equazione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{D_\infty} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{D_\infty} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{D_\infty} x_3 = 0$$

o anche

(7) $$x_1(a_{11}l + a_{12}m) + x_2(a_{12}l + a_{22}m) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Si può dimostrare che *il diametro coniugato ad un punto improprio, distinto da una direzione asintotica, è il* ***luogo dei punti medi*** *delle corde appartenenti al fascio di rette parallele individuato dal punto improprio.*



ESEMPIO 7.6.1 - Data la conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ determinare il diametro coniugato alla direzione $R(1, -1, 0)$.
Passando, come nell'esempio precedente, a coordinate omogenee si ottiene la retta:
$(6x_1 - 4x_2 + 8x_3)_R x_1 + (-4x_1)_R x_2 + (8x_1 + 10x_3)_R x_3 = 0 \qquad 10x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$
ed in coordinate cartesiane: $5x - 2y + 4 = 0$.

7.7 - Coniche a centro.

L'equazione (7) del diametro si può anche scrivere:

(7') $$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)l + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)m = 0$$

che mette in evidenza che i diametri sono le rette del fascio individuato dalle rette:

$$d_1:\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \quad \text{e} \quad d_2:\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

Le rette d_1 e d_2 sono i diametri coniugati rispettivamente alle direzioni $X_\infty(1, 0, 0)$ ed $Y_\infty(0, 1, 0)$, cioè ai punti impropri degli assi del riferimento.
Tale fascio è proprio se e solo se $A_{33} \neq 0$. In tal caso il centro C del fascio è il punto di intersezione di d_1 e d_2 e si ottiene risolvendo il sistema:

(8) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono: $\dfrac{x_1}{x_3} = \dfrac{A_{13}}{A_{33}} = x_C$, $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{A_{23}}{A_{33}} = y_C$, dove A_{13} ed A_{23} sono i cofattori di a_{13} ed a_{23} nella matrice della conica. Per la proprietà dei diametri enunciata sopra, il punto $C(x_C, y_C)$ è **centro di simmetria della conica**.
Poiché esiste il centro della conica se e solo se $A_{33} \neq 0$, *l'ellisse e l'iperbole sono* ***coniche a centro***.
PROPRIETÀ 7.7.1 - *Il* ***centro*** *della conica è* ***il polo della retta impropria***.

Dimostrazione - Per costruzione il centro della conica appartiene alle polari dei punti X_∞ ed Y_∞ della retta impropria, per il teorema di reciprocità esso è quindi il polo della retta impropria.

Le coordinate del centro della conica sono quindi le soluzioni del sistema (analogo all'(8) in coordinate non omogenee):

(8') $$\begin{cases} \mathbf{a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0} \\ \mathbf{a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0} \end{cases} \qquad \text{od anche} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0} \end{cases}.$$

ESEMPIO 7.7.1 - Per determinare il centro della conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ si deve risolvere il sistema: $\begin{cases} 6x - 4y + 8 = 0 \\ -4x = 0 \end{cases}$ quindi $C(0, 2)$.

In una conica a centro se d è il diametro coniugato alla direzione del diametro d', per il teorema di reciprocità, d' è il diametro coniugato alla direzione del diametro d: i diametri d e d' si dicono **diametri coniugati.**

Abbiamo visto (per la (7)) che il diametro d' coniugato alla direzione $D_\infty = (l, m, 0)$ del diametro d è la retta di equazione:

$$x_1(a_{11}l + a_{12}m) + x_2(a_{12}l + a_{22}m) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0$$

che ha come punto improprio $(a_{12}l + a_{22}m, -(a_{11}l + a_{12}m), 0)$; quindi d e d' risultano ortogonali se:

$$l(a_{12}l + a_{22}m) - m(a_{11}l + a_{12}m) = 0$$

(9) $$\mathbf{a_{12}l^2 - (a_{11} - a_{22})lm - a_{12}m^2 = 0}.$$

Questa relazione individua le direzioni di una coppia di diametri coniugati ed ortogonali, nella ipotesi che la conica non sia una circonferenza.

DEFINIZIONE 7.7.2 - *Si dicono **assi di simmetria ortogonale** di una conica a centro, i due diametri coniugati ed ortogonali*.

Gli assi di simmetria di una conica a centro sono quindi le rette per il centro $C(x_C, y_C)$ aventi le direzioni coniugate ed ortogonali individuate dalla relazione (9).
L'equazione complessiva degli assi è quindi

(10) $$\mathbf{a_{12}(x - x_C)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_C)(y - y_C) - a_{12}(y - y_C)^2 = 0}.$$

ESEMPIO 7.7.2 - Determinare gli assi della conica $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$.
Abbiamo visto nell'Esempio 7.7.1 che la conica data ha centro $C(0, 2)$. Le direzioni degli assi, cioè della coppia di diametri coniugati ed ortogonali si ottengono risolvendo l'equazione (9):

$$2l^2 + 3lm - 2m^2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad 2\left(\frac{m}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{m}{l}\right) - 2 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{m}{l} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Le equazioni degli assi si ottengono quindi scrivendo le rette per C aventi le direzioni ottenute:

- se $\frac{m}{l} = 2$, scegliendo $m = 2$ ed $l = 1$ si ottiene la retta $x = \frac{y - 2}{2}$ cioè: $2x - y + 2 = 0$;

- se $\frac{m}{l} = -\frac{1}{2}$, scegliendo $m = -1$ ed $l = 2$ si ottiene la retta $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1}$ cioè $x + 2y - 4 = 0$.

Applicando invece direttamente la formula (10) l'equazione complessiva degli assi risulta: $-2x^2 - 3x(y - 2) + 2(y - 2)^2 = 0$. Per ottenere le equazioni dei due assi risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta dividendo l'equazione precedente per $(y - 2)^2$; si ha $2\left(\frac{x}{y-2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y-2}\right) - 2 = 0$ che ha soluzioni $\frac{1}{2}$ e -2.

Si ottengono le rette $2x - y + 2 = 0$ e $x + 2y - 4 = 0$.

OSSERVAZIONE 1 - Il centro di una conica risulta essere **centro di simmetria**, infatti si verifica che *il centro della conica è punto medio delle corde passanti per esso.*

Gli assi della conica sono **assi di simmetria ortogonale** della conica: e si è già detto che *un asse è il luogo dei punti medi delle corde aventi direzione ortogonale all'asse.*

Se *C* è un'iperbole, abbiamo definito direzioni asintotiche i suoi punti impropri (v. Esempio 7.1.5).

DEFINIZIONE 7.7.3 - *Si dicono **asintoti** di un'iperbole le rette per il suo centro aventi le direzioni asintotiche.*

Ricordiamo che le direzioni asintotiche sono le intersezioni dell'iperbole con la retta impropria, quindi sono le soluzioni dell'equazione $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ che si ottiene eguagliando a zero il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione (2) della conica.

Quindi $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ è l'equazione complessiva delle rette che dall'origine del riferimento proiettano le direzioni asintotiche.

Per scrivere le equazioni degli asintoti se ne devono quindi calcolare le direzioni risolvendo l'equazione:

$$\mathbf{a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0}. \tag{11}$$

Indicando con $C(x_C, y_C)$ il centro l'equazione complessiva degli asintoti risulta:

$$\mathbf{a_{11}(x - x_C)^2 + 2a_{12}(x - x_C)(y - y_C) + a_{22}(y - y_C)^2 = 0}. \tag{12}$$

L'iperbole si dice **equilatera** se gli asintoti sono ortogonali e si verifica che ciò accade quando $\mathbf{a_{11} + a_{22} = 0}$.

ESEMPIO 7.7.3 - Abbiamo visto negli Esempi 7.3.4 e 7.7.1 che la conica *C* di equazione: $3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$ è un'iperbole di centro $C(0, 2)$. Intersecando *C* con la retta impropria si trovano le direzioni asintotiche $(0, 1, 0)$ e $(4, 3, 0)$.

Gli asintoti di *C* sono quindi le rette:

- r_1 passante per C ed avente direzione $(0, 1, 0)$ di equazione: $x = 0$;
- r_2 passante per C ed avente direzione $(4, 3, 0)$ di equazione: $3x - 4y + 8 = 0$.

Volendo invece applicare la formula (11) dell'equazione complessiva degli asintoti, questa risulta, nel nostro caso, $3x^2 - 4x(y - 2) = 0$, da cui si ricavano le equazioni degli asintoti $3x - 4y + 8 = 0$ ed $x = 0$.

OSSERVAZIONE 2 - I fuochi di una conica sono le intersezioni delle tangenti alla conica uscenti dai punti ciclici. Ogni conica a centro ha due fuochi reali appartenenti all'asse maggiore se si tratta di un'ellisse, all'asse trasverso se si tratta di un'iperbole.

Direttrice è la polare di un fuoco.

Data una conica a centro *C,* se si assume come riferimento quello avente come origine il centro della conica e come assi coordinati gli assi della conica, detto **riferimento canonico** la sua equazione assume la forma particolarmente semplice detta **equazione canonica della conica**:

$$\mathbf{LX^2 + MY^2 + N = 0}. \tag{13}$$

Per ottenere la forma canonica dell'equazione di una conica a centro data in un riferimento qualunque, anziché effettuare il cambiamento di riferimento, si usano i numeri: A discriminante della conica, il suo minore A_{33} e $T = a_{11} + a_{22}$ che sono detti **invarianti metrici** in quanto si può dimostrare che sono indipendenti dal riferimento scelto.
Calcoliamo il valore dei tre invarianti per la conica di equazione (13) dove L, M, N sono le incognite:

$$A = \begin{vmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = LMN; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix} = LM; \qquad T = L + M.$$

Per determinare L, M, N è quindi sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{LMN = A} \\ \mathbf{LM = A_{33}} \\ \mathbf{L + M = T} \end{cases}$$

con gli invarianti A, A_{33}, T noti, in quanto calcolati per l'equazione data nel riferimento iniziale.
Si ricava $N = A/A_{33}$ (si noti che per ipotesi la conica è a centro e quindi $A_{33} \neq 0$).
L ed M sono le soluzioni di un sistema simmetrico, quindi sono le soluzioni dell'equazione ausiliaria $Z^2 - TZ + A_{33} = 0$.

ESEMPIO 7.7.4 - Determinare l'equazione canonica dell'ellisse $2x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$ dell'Esempio 7.2.3.
Abbiamo già calcolato $A = -51/4$, $A_{33} = 2$, $T = 2 + 1 = 3$. I coefficienti L, M, N della forma canonica sono quindi le soluzioni del sistema: $\begin{cases} LMN = -51/4 \\ LM = 2 \\ L + M = 3 \end{cases}$. Si ricava $N = -51/8$.

L'equazione $Z^2 - 3Z + 2 = 0$ ha soluzioni $Z_1 = 2$, $Z_2 = 1$ (entrambe positive essendo *C* una ellisse) e l'equazione canonica cercata è: $X^2 + 2Y^2 - 51/8 = 0$ oppure $2X^2 + Y^2 - 51/8 = 0$ a seconda di quale asse della conica si scelga come asse X o Y.

ESEMPIO 7.7.5 - Determinare l'equazione canonica dell'iperbole $2x^2 + xy - y^2 + x + y - 3 = 0$ dell'Esempio 7.2.4.
Abbiamo già calcolato $A = 27/4$, $A_{33} = -9/4$, $T = 2 - 1 = 1$. I coefficienti L, M, N della forma canonica sono quindi le soluzioni del sistema $\begin{cases} LMN = 27/4 \\ LM = -9/4. \\ L + M = 1 \end{cases}$ Si ricava $N = -3$.

L'equazione $Z^2 - Z - 9/4 = 0$ ha soluzioni $Z_1 = (1 + \sqrt{10})/2$, $Z_2 = (1 - \sqrt{10})/2$ (discordi, essendo *C* una iperbole) e l'equazione canonica cercata è:
$X^2(1 + \sqrt{10})/2 + Y^2(1 - \sqrt{10})/2 - 3 = 0$ oppure $X^2(1 - \sqrt{10})/2 + Y^2(1+\sqrt{10})/2 - 3 = 0$
a seconda di quale asse della conica si scelga come asse X o Y.

7.8 - Parabola.

Riprendendo l'equazione del fascio dei diametri:

(7') $$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)l + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)m = 0$$

si ha che tale fascio è improprio se $A_{33} = 0$, cioè se la conica è una parabola.
Ricordando (v. Osservazione 2 § 7.2) che una conica di tipo parabolico si può scrivere nella forma:

$$(ax_1 + bx_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

la (7') diventa

(7'') $$(a^2x_1 + abx_2 + a_{13}x_3)\,l + (abx_1 + b^2x_2 + a_{23}x_3)\,m = 0$$

ovvero

$$ax_1(al + bm) + bx_2(al + bm) + x_3(a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Quindi qualunque siano l ed m la retta del fascio ha direzione costante (– b, a, 0), cioè il punto improprio della parabola.
Poiché il diametro coniugato ad una direzione è asse di simmetria rispetto a questa direzione, il diametro coniugato alla direzione (a, b, 0) ortogonale alla direzione dei diametri è *l'unico diametro di simmetria ortogonale* e si dice **asse della parabola.**
In altre parole si può dire che l'**asse della parabola** *è la polare del punto improprio perpendicolare al punto all'infinito della parabola.*
L'asse della parabola è quindi la polare di $A_\infty(a, b, 0)$ ed ha come equazione, dalla (7'')

(14) $$\mathbf{(a^2x_1 + abx_2 + a_{13}x_3)a + (abx_1 + b^2x_2 + a_{23}x_3)b = 0}$$

o, passando a coordinate non omogenee e facendo uso delle derivate parziali:

(14') $$\mathbf{a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0}\,.$$

L'asse della parabola interseca la parabola in un solo punto al finito detto **vertice,** le cui coordinate si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni di asse e parabola.

ESEMPIO 7.8.1 - Data la parabola: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ determinarne asse e vertice.
L'equazione della parabola si può scrivere: $(x - y)^2 + 2x + 2y - 4 = 0$, quindi $A_\infty(1, -1, 0)$.
Calcoliamo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (2x - 2y + 2)$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-2x + 2y + 2)$. Applicando la (14'), l'equazione dell'asse risulta: $(2x - 2y + 2) - (-2x + 2y + 2) = 0$ ossia $x - y = 0$.
Il vertice ha come coordinate le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

quindi risulta V(1, 1).

Scegliendo un riferimento avente l'asse X coincidente con l'asse della parabola e l'origine nel vertice della parabola, detto **riferimento canonico**, l'equazione della parabola assume la forma particolarmente semplice:

(15) $$\mathbf{PY^2 + QX = 0}$$

detta **equazione canonica della parabola.**
Per ottenere la forma canonica dell'equazione di una parabola data in un riferimento qualunque, anziché effettuare il cambiamento di riferimento, si possono usare gli **invarianti**

metrici cioè i numeri: A discriminante della conica e $T = a_{11} + a_{22}$ che sono indipendenti dal riferimento.

Calcoliamo gli invarianti per la conica di equazione (15):

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & Q/2 \\ 0 & P & 0 \\ Q/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -PQ^2/4 \qquad A_{33} = 0 \qquad T = P.$$

Per determinare le incognite P e Q è quindi sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{PQ^2/4 = -A} \\ \mathbf{P = T} \end{cases}$$

con gli invarianti A e T noti, in quanto calcolati per l'equazione della parabola nel riferimento iniziale.

ESEMPIO 7.8.4 - Determinare l'equazione canonica della parabola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ dell'Esempio 7.2.5.
Abbiamo già calcolato $A = -4$, $A_{33} = 0$, $T = 1 + 1 = 2$. I coefficienti P e Q della forma canonica sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} PQ^2/4 = 4 \\ P = 2 \end{cases}$ e quindi $Q^2 = 16/2 = 8$ $\quad Q = \pm 2\sqrt{2}$.

L'equazione canonica cercata è: $2Y^2 + 2\sqrt{2}\,X = 0$ oppure $2Y^2 - 2\sqrt{2}\,X = 0$ a seconda di quale orientamento si scelga per l'asse della parabola.

OSSERVAZIONE - Come già detto i fuochi di una conica sono le intersezioni delle tangenti alla conica uscenti dai punti ciclici. La parabola ha un unico fuoco reale appartenente al suo asse e la direttrice è la polare del fuoco.

7.9 - Intersezione di due coniche.

Trovare i punti comuni a due date coniche *F* e *G* rispettivamente di equazioni:

(2) $\qquad f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

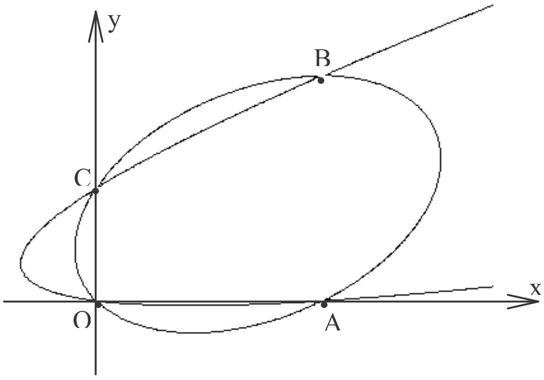
(2') $\qquad g(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$

equivale a risolvere il sistema da esse formato che ammette "in generale" quattro soluzioni. Poiché le coniche sono date in forma non omogenea, si possono trovare, al finito, meno di quattro soluzioni (reali o immaginarie) se alcuni dei punti comuni sono all'infinito come nel caso di due iperboli aventi un asintoto comune o nel caso di due circonferenze che, oltre che in due punti di intersezione al finito (reali o immaginari), si intersecano nei punti ciclici della retta impropria (per cui passano tutte le circonferenze).
Il sistema ammette invece infinite soluzioni se le coniche coincidono o si spezzano in coniche degeneri aventi una retta in comune.
Riferendoci al caso generale, le coordinate dei punti di intersezione A, B, C, D si determinano risolvendo il sistema di quarto grado formato dalle due equazioni.

Si possono presentare diversi casi:
a) le intersezioni sono reali e distinte (Esempio 7.9.1);
b) le intersezioni sono reali ma due distinte e due coincidenti: le coniche si dicono **tangenti** (Esempio 7.9.2);

c) le intersezioni sono reali ma a due a due coincidenti: le coniche si dicono **bitangenti** (Esempio 7.9.3);
d) le intersezioni sono reali ma tre coincidono in uno stesso punto e la quarta è distinta da queste: le coniche si dicono **osculatrici** (Esempio 7.9.4);
e) le quattro intersezioni sono reali ma coincidono in un unico punto: le coniche si dicono **iperosculatrici** (Esempio 7.9.5);
f) le intersezioni sono due reali e due immaginarie (complesse coniugate): le coniche si intersecano in due soli punti reali (ad esempio due circonferenze secanti);
g) le quattro intersezioni sono immaginarie: le coniche non hanno punti reali comuni (ad esempio due circonferenze esterne fra loro).

ESEMPIO 7.9.1 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - xy - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y = 0 \end{cases}.$$



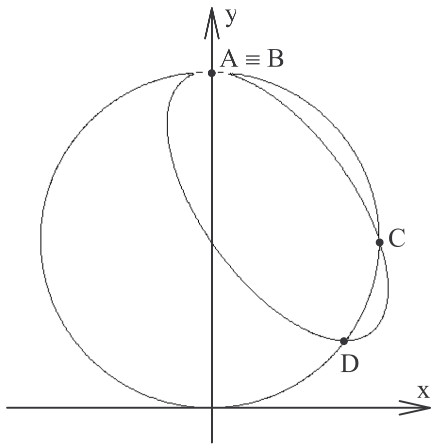
Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene: $\begin{cases} x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y = 0 \\ 7y(2y - x - 2) = 0 \end{cases}$ da cui:

I) $\begin{cases} x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y = 0 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: O(0, 0), A(2, 0), B(2, 2), C(0, 1).

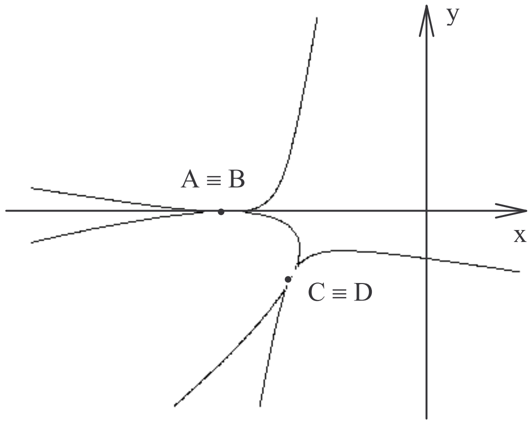
ESEMPIO 7.9.2 - Determinare i punti di intersezione delle coniche: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 3x^2 + 3xy + 2y^2 - 6x - 6y + 4 = 0 \end{cases}$.



Eliminando y^2 si ottiene: $\begin{cases} y^2 = 2y - x^2 \\ x^2 + 3xy - 6x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

da cui $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{2 - 3x}$; sostituendo infine nella prima equazione si ottiene: $5x^4 - 9x^3 + 4x^2 = 0$ che ha come soluzioni: x = 0 (doppio), x = 1, $x = \dfrac{4}{5}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: A ≡ B(0, 2) doppio, C(1, 1), $D\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.



ESEMPIO 7.9.3 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene: $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ 5y(y - 2x - 1) = 0 \end{cases}$

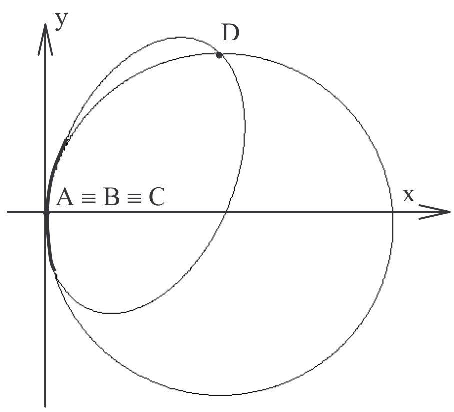
da cui:

I) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ che ha la soluzione doppia $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ che ha la soluzione doppia $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: $A \equiv B(-1, 0)$, $C \equiv D\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

ESEMPIO 7.9.4 - Determinare i punti di intersezione delle coniche:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2x^2 + y^2 - xy - 2x = 0 \end{cases}.$$

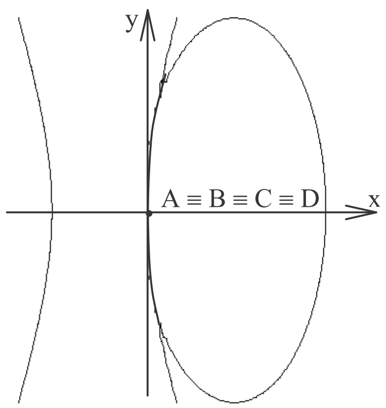


Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x(x - y) = 0 \end{cases}$ da cui:

I) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ che ha soluzione doppia $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;

II) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x = y \end{cases}$ che ha soluzioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

I punti comuni alle due coniche sono quindi: $A \equiv B \equiv C(0, 0)$, $D(1, 1)$.



ESEMPIO 7.9.5 - Determinare i punti di intersezione delle coniche: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ -8x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$.

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ 12x^2 = 0 \end{cases}$ che ha soluzione quadrupla $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Le quattro intersezioni sono quindi coincidenti: $A \equiv B \equiv C \equiv D(0, 0)$.

7.10 - Fasci di coniche.

Considerando una combinazione lineare delle equazioni (2) e (2') di parametri h e k non entrambi nulli:

$$h\,f(x, y) + k\,g(x, y) = 0 \tag{16}$$

si ha ancora un'equazione di secondo grado in x, y, ossia una conica.
Al variare di h e k in **R** si ottiene un **fascio di coniche**.
Al fascio appartengono *F* e *G* che si ottengono in (16): *F* per h = 1 e k = 0 e *G* per h = 0 e k = 1.
I quattro punti A, B, C, D, reali od immaginari, distinti o coincidenti, comuni alla (2) ed alla (2') sono comuni a tutte le coniche del fascio e vengono detti **punti base del fascio**.
Per ogni punto del piano distinto dai punti base passa una ed una sola conica del fascio.

Il discriminante della generica conica (16) del fascio è:

$$A(h, k) = \begin{vmatrix} ha_{11} + kb_{11} & ha_{12} + kb_{12} & ha_{13} + kb_{13} \\ ha_{12} + kb_{12} & ha_{22} + kb_{22} & ha_{23} + kb_{23} \\ ha_{13} + kb_{13} & ha_{23} + kb_{23} & ha_{33} + kb_{33} \end{vmatrix}.$$

A(h, k) = 0 è un'equazione omogenea di terzo grado in h, k; ammette tre soluzioni (contate con la dovuta molteplicità) di cui almeno una reale e quindi *in un fascio di coniche esistono tre coniche degeneri delle quali una è certamente reale*.

Esaminiamo i fasci che si ottengono con le coppie di coniche considerate negli esempi precedenti.

ESEMPIO 7.10.1 - Le coniche dell'Esempio 7.9.1 individuano il fascio:

$$h(x^2 + 2y^2 - xy - 2x - 2y) + k(x^2 + 16y^2 - 8xy - 2x - 16y) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + k)x^2 + (2h + 16k)y^2 + (-h - 8k)xy - 2(h + k)x - 2(h + 8k)y = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+k & -\frac{h}{2}-4k & -h-k \\ -\frac{h}{2}-4k & 2h+16k & -h-8k \\ -h-k & -h-8k & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)(h + 8k)(4h + 18k) = 0$.

- Se $h + k = 0$ si ottiene la conica degenere $2y^2 - xy - 2y = 0$ che si spezza nel prodotto $y(2y - x - 2) = 0$ delle rette OA e BC;
- se $h + 8k = 0$ si ottiene la conica degenere $x^2 - 2x = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x - 2) = 0$ delle rette OC ed AB;
- se $4h + 18k = 0$ si ottiene la conica degenere $x^2 - 2y^2 + xy - 2x + 2y = 0$ che si spezza nel prodotto $(x - y)(x + 2y - 2) = 0$ delle rette OB ed AC.

ESEMPIO 7.10.2 - Le coniche dell'Esempio 7.9.2 individuano il fascio:

$$h(x^2 + y^2 - 2y) + k(3x^2 + 2y^2 + 3xy - 6x - 6y + 4) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + 3k)x^2 + (h + 2k)y^2 + 3kxy - 6kx - 2(h + 3k)y + 4k = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+3k & \frac{3}{2}k & -3k \\ \frac{3}{2}k & h+2k & -(h+3k) \\ -3k & -(h+3k) & 4k \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + 3k)(h + k)^2 = 0$.

- Se $h + 3k = 0$ si ottiene la conica degenere $y^2 - 3xy + 6x - 4 = 0$ che si spezza nel prodotto $(y - 2)(3x - y - 2) = 0$ della retta tangente alle coniche in A e della retta CD;
- se $h + k = 0$ (sol. doppia) si ottiene la conica degenere $2x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ che si spezza nel prodotto $(x + y - 2)(2x + y - 2) = 0$ delle rette AC ed AD.

ESEMPIO 7.10.3 - Le coniche dell'Esempio 7.9.3 individuano il fascio:

$$h(x^2 - y^2 + 6xy + 2x + 4y + 1) + k(x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - y + 1) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + k)x^2 + (-h + 4k)y^2 + 2(3h - 2k)xy + 2(h + k)x + (4h - k)y + (h + k) = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica:

$$A = \begin{vmatrix} h+k & 3h-2k & h+k \\ 3h-2k & -h+4k & 2h-\frac{1}{2}k \\ h+k & 2h-\frac{1}{2}k & h+k \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)(h - \frac{3}{2}k)^2 = 0$.

- Se $h + k = 0$ si ottiene la conica degenere $y^2 - 2xy - y = 0$ che si spezza nel prodotto $y(2x - y + 1) = 0$ delle rette tangenti alle coniche rispettivamente in A ed in C;
- se $h - \frac{3}{2}k = 0$ (soluzione doppia) si ottiene la conica $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ che si spezza nel prodotto $(x + y + 1)^2 = 0$ della retta AC contata due volte.

ESEMPIO 7.10.4 - Le coniche dell'Esempio 7.9.4 individuano il fascio:

$$h(x^2 + y^2 - 2x) + k(2x^2 + y^2 - xy - 2x) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(h + 2k)x^2 + (h + k)y^2 - kxy - 2(h + k)x = 0.$$

Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} h+2k & -\frac{1}{2}k & -(h+k) \\ -\frac{1}{2}k & h+k & 0 \\ -(h+k) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-(h + k)^3 = 0$ che ha soluzione tripla $h + k = 0$.

Si ottiene un'unica conica degenere $x^2 - xy = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x - y) = 0$ della retta tangente alle coniche in A e della retta AD.

ESEMPIO 7.10.5 - Le coniche dell'Esempio 7.9.5 individuano il fascio:

$$h(4x^2 + y^2 - 4x) + k(-8x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

la cui generica conica ha equazione:

$$(4h - 8k)x^2 + (h + k)y^2 - 4(h + k)x = 0.$$

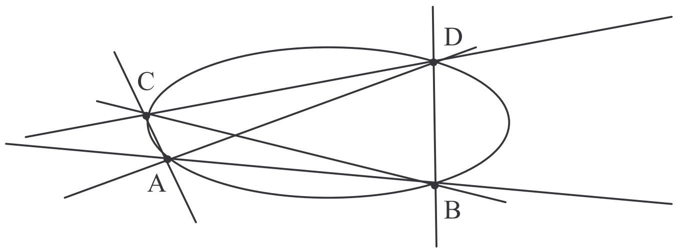
Le coniche degeneri del fascio si trovano per i valori di h e k che annullano il discriminante della conica: $A = \begin{vmatrix} 4h-8k & 0 & -2(h+k) \\ 0 & h+k & 0 \\ -2(h+k) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Sviluppando il determinante si ottiene: $-4(h + k)^3 = 0$ che ha soluzione tripla $h + k = 0$.
Si ottiene un'unica conica degenere $x^2 = 0$ che si spezza nel prodotto $x(x) = 0$ della retta tangente alle coniche in A contata due volte.

7.11 - Punti base e coniche degeneri del fascio.

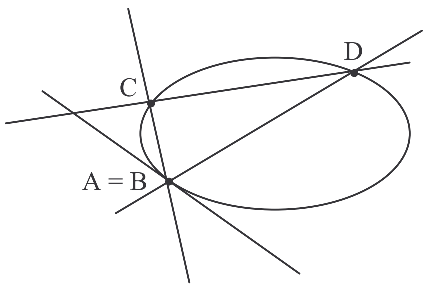
Come abbiamo visto negli esempi precedenti i punti base permettono di individuare le coniche degeneri del fascio, tenendo presente che la retta congiungente due punti coincidenti di una conica è la retta tangente alla conica nel punto.
Per semplicità consideriamo solo il caso in cui tutti i quattro punti base sono reali, riprendendo, nell'ordine, i casi esaminati prima:
a) i quattro punti A, B, C, D, sono reali e distinti: il fascio contiene tre coniche degeneri:

C_1 formata dalle rette AB, CD;
C_2 formata dalle rette AC, BD;
C_3 formata dalle rette AD, BC;



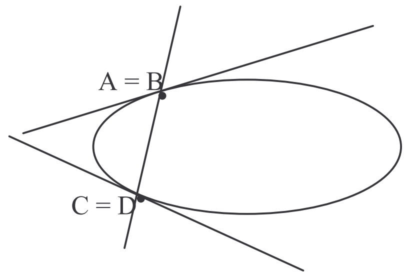
b) i punti A e B coincidono, C e D sono distinti tra loro e da A: il fascio è costituito da coniche tangenti in A e contiene le coniche degeneri:

C_1 formata dalle rette AC, AD;
$C_2 = C_3$ formata dalla retta CD e dalla tangente in A;



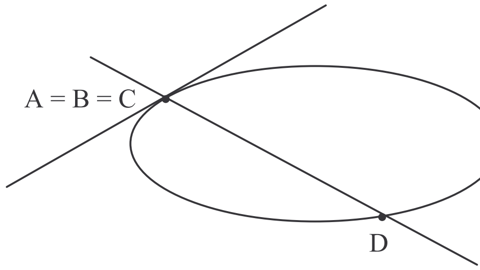
c) i punti A e B coincidono ed anche C e D coincidono fra loro, ma A ≠ C: il fascio è costituito da coniche bitangenti in A ed in C e contiene le coniche degeneri:

C_1 formata dalle due rette tangenti in A e in C;
$C_2 = C_3$ formata dalla retta AC contata due volte;



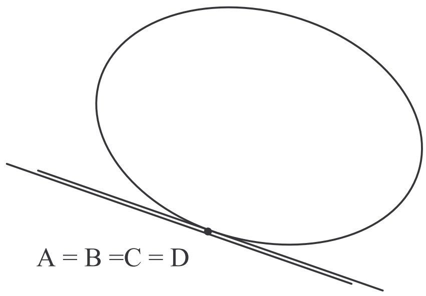
d) i punti A, B, C coincidono e D è distinto da essi: il fascio è costituito da coniche osculatrici in A e contiene le coniche degeneri:

$C_1 = C_2 = C_3$ formata dalla retta tangente in A e dalla retta AD;



e) i punti A, B, C, D coincidono: il fascio è costituito da coniche iperosculatrici in A e contiene le coniche degeneri:

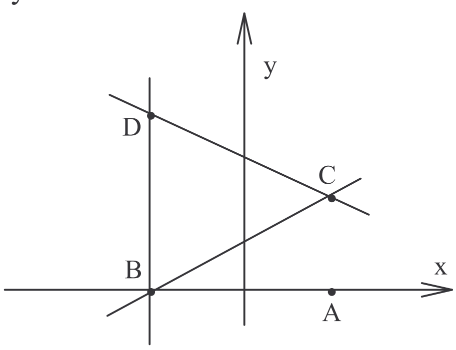
$C_1 = C_2 = C_3$ formata dalla retta tangente in A contata due volte;



Quando sono noti i punti base è possibile individuare le coniche degeneri ed utilizzarle per scrivere l'equazione del fascio.

ESEMPIO 7.11.1 - Determinare l'equazione della conica passante per i punti: A(1, 0), B(–1, 0), C(1, 1), D(–1, 2) e tangente in B alla retta t: $y = x + 1$.

I° modo
Determiniamo l'equazione del fascio di coniche tangenti in B a t e passanti per C e D (caso b).
Le coniche degeneri del fascio sono:
C_1 formata dalle rette BC e BD che ha equazione $(x - 2y + 1)(x + 1) = 0$;
C_2 formata dalla tangente e dalla retta CD che ha equazione $(x - y + 1)(x + 2y - 3) = 0$.



Il fascio ha equazione: $h((x - 2y + 1)(x + 1) + k(x - y + 1)(x + 2y - 3) = 0$.
Tra le coniche del fascio cerchiamo quella che passa per A sostituendo x con 1 ed y con 0:
$4h - 4k = 0$, $h = k = 1$ e l'equazione della conica diventa: $2x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 2 = 0$.

Ovviamente si può costruire il fascio di coniche tangenti in B e per A e C (o per A e D) ed imporre poi il passaggio per il rimanente punto.

II° modo
Determiniamo l'equazione del fascio di coniche tangenti passanti per A, B, C, D (caso a). Tra le coniche degeneri del fascio consideriamo ad esempio C_3 formata dalle rette AB e CD: $y(x + 2y – 3) = 0$ e C_4 formata dalle rette AC e BD: $(x – 1)(x + 1) = 0$.
Il fascio ha equazione: $h\, y(x + 2y – 3) + k(x – 1)(x + 1) = 0$.
Cerchiamo poi la conica del fascio avente t come tangente

$$\begin{cases} h\, y(x + 2y - 3) + k(x - 1)(x + 1) = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione risolvente: $(3h + k)x^2 – 2hx – h – k = 0$.
Affinché la retta sia tangente le soluzioni devono coincidere, cioè:
$\frac{\Delta}{4} = h^2 + (3h + k)(h + k) = 0$ da cui $(2h + k)^2 = 0$ ovvero $h = –1$ e $k = 2$ e si ritrova la conica: $2x^2 – 2y^2 – xy + 3y – 2 = 0$.

7.12 - Esercizi proposti.

VII.1 - Date le coniche:
i) $2x^2 + xy – y^2 + x + 4y – 3 = 0$;
ii) $3x^2 – 2xy + 3y^2 + 2x + 2y = 0$;
iii) $xy – 2x – 4y = 0$;
iv) $16x^2 + 24xy + 9y^2 – 14x + 2y – 1 = 0$;
dire se sono degeneri oppure no, determinarne il tipo e scriverle in forma canonica.

VII.2 - Data la conica $5x^2 + 4xy + 2y^2 – 6x + 1 = 0$:
i) verificare che è non degenere e di tipo ellittico;
ii) scriverla in forma canonica utilizzando gli invarianti metrici. $(X^2 + 6Y^2 – 2 = 0)$

VII.3 - Dati nel piano il punto A(3, 1) e la retta r: $x + y = 0$:
i) scrivere l'equazione della parabola di fuoco A e direttrice r;
$(x^2 + y^2 – 2xy – 12x – 4y + 20 = 0)$
ii) scriverla in forma canonica utilizzando gli invarianti metrici. $(2Y^2 \pm 8\sqrt{2}\, X = 0)$

VII.4 - Nel piano è data la conica $2x^2 + y^2 + 3xy – 10x – 7y + 12 = 0$:
i) verificare che è degenere;
ii) scrivere l'equazione delle due rette in cui si spezza. $(2x + y – 4 = 0,\ x + y – 3 = 0)$

VII.5 - Nel piano è data la conica C: $x^2 – xy – 2y^2 – x + 5y = 0$:
i) verificare che C è un'iperbole e scriverla in forma canonica;
$$\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}X^2 + \frac{-1-\sqrt{10}}{2}Y^2 + 2 = 0\right)$$
ii) determinare le equazioni delle parabole tangenti a C nell'origine e passanti per i punti A(–1, 0), B(0, 1). $((3 \pm \sqrt{5})(x^2 – 6xy + 5y^2 + x – 5y) + 8xy = 0)$

VII.6 - Dato il fascio di coniche $h(3x^2 – 2xy + 3y^2 + 2y) + k(x^2 – 4x + 4) = 0$ con h e k parametri reali, dire per quali valori di h e k la conica è:
- degenere; (h = 0 ed h/k = 35/3)

- parabola; $(h = 0 \text{ ed } h/k = -3/8)$
- ellisse; $(8h^2 + 3hk > 0)$
- iperbole. $(8h^2 + 3hk < 0)$

VII.7 - Determinare l'equazione del fascio di coniche per i punti comuni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed agli assi coordinati. $(h(x^2 + y^2 - 1) + k\,xy = 0)$
Di tale fascio determinare le coniche degeneri e le parabole.
$((x + y - 1)(x + y + 1) = 0)$, $((x - y + 1)(x - y - 1) = 0)$ e sono parabole)
Determinare la conica del fascio passante per il punto A(1 ,1) precisandone il tipo e la forma canonica. ($x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, ellisse; forma canonica $3X^2 + Y^2 - 2 = 0$)

VII.8 - Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ in P(1, 1) ed a $x^2 + y^2 + 2x = 0$ in Q (–1, –1), determinandone coniche degeneri e parabole.
($h(y^2 - 1) + k(x - y)^2 = 0$, coniche degeneri per h = 0 e k = 0 e sono le parabole)
Studiare la conica del fascio passante per R(1/2, 5/4) determinandone la forma canonica.
($x^2 - 2xy + 1 = 0$, iperbole; forma canonica $\frac{\sqrt{5}-1}{2}X^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}Y^2 - 1 = 0$)

VII.9 - Nel fascio di coniche tangenti nell'origine alla retta $x - y = 0$ ed in P(1, 0) alla retta $x - y - 1 = 0$ trovare quella che passa per il vertice della parabola $x^2 = y - 1$.
Studiare tale conica e scriverne l'equazione in forma canonica.
($x^2 - 2xy - y^2 - x + y = 0$, iperbole equilatera; centro C(1/2, 0); assi $x - 1/2 = (-1 \pm \sqrt{2})y$;
asintoti $x - 1/2 = (1 \pm \sqrt{2})y$; forma canonica $\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 - 1/4 = 0$)

BIBLIOGRAFIA

E. Abbena, E. Bargero, S. Garbiero: *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria Analitica*, Levrotto e Bella, Torino 1990

S. Abeasis: *Algebra lineare e Geometria*, Zanichelli, Bologna 1993

G. Fano, A. Terracini: *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Paravia, Torino 1957

F. Fava, F. Tricerri: *Geometria e Algebra Lineare*, Levrotto e Bella, Torino 1991

S. Greco, P. Valabrega: *Lezioni di algebra lineare e geometria*, voll. I e II, Levrotto e Bella, Torino 1999

C .Longo: *Lezioni di Geometria*, Libr. Er. V. Veschi, Roma 1969

A. Sanini: *Lezioni di Geometria per allievi ingegneri*, Levrotto e Bella, Torino 1994
A. Sanini: *Esercizi di Geometria*, Levrotto e Bella, Torino 1994

E. Sernesi: *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino 1989

M. Stoka: *Corso di Geometria*, II^a ed., Cedam, Padova 1995
M. Stoka, V. Pipitone: *Esercizi e problemi di Geometria*, Cedam, Padova 1999