Rette nel piano

Equazione della retta: $\boxed{ax + by + c = 0}$ o $\boxed{y = mx + q}$.

Se $q = 0$ la retta passa per l'origine.

Coefficiente angolare: (Di una retta) $\boxed{m = -\frac{a}{b}}$ $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ (Fra due punti)

La retta perpendicolare ha coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{m}$.

Fascio di rette: (Esplicita) $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$ (Implicita)

Retta passante per due punti: $\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$

Oppure si impone il passagio per il primo punto, si ricava il coefficiente angolare e si impone il passaggio per il secondo punto.

Intersezione fra rette: Si mettono a sistema le equazioni.

- Se il sistema è impossibile le rette sono parallele.
- Se il sistema è indeterminato le rette sono coincidenti.

Distanza tra due punti: $\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

Distanza punto retta:

1. Si individua il coefficiente angolare della retta perpendicolare alla retta data;
2. Si costruisce un fascio proprio in P e si sceglie la retta perpendicolare;
3. Si individua il punto di intersezione H tra la retta data e la perpendicolare;
4. Si calcola la distanza PH.

oppure

(Implicita) $\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ $\boxed{d(P, r) = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}}}$ (Esplicita)

Piano

Equazione del piano: $ax + by + cz + d = 0$

a, b, c sono i parametri direttori del piano, o anche i coefficienti dei vettori ortogonali al piano.

Piani paralleli: Due piani sono paralleli se differiscono unicamente per il coefficiente d.

Fascio di piani paralleli: Dato un generico piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, il fascio di piani paralleli a π ha equazione $ax + by + cz + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Fascio di piani passanti per una retta: Data una retta r descritta come intersezione fra due piani, il fascio di piani passanti per r ha equazione

$$k(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + j(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Porre $\frac{j}{k} = h$ e sviluppare.

Piano con un punto ed un vettore ortogonale: Con $v = (a, b, c)$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$,

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

Problemi svolti:

Piano contenente una retta e perpendicolare ad un'altra retta

Piano contenente un punto e parallelo a due rette

Rette nello spazio

Equazione di una retta come intersezione di due piani:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con $(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) \neq k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)$ e $k \in \mathbb{R}$ (ipotesi di indipendenza lineare).

Il vettore direzione della retta è $v = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$.

Moltiplicazione tra vettori:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = det \begin{bmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} &= b_1c_2x + c_1a_2y + a_1b_2z - a_2b_1z - a_1c_2y - c_1b_2x \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)x + (c_1a_2 - a_1c_2)y + (a_1b_2 - b_1a_2)z \\ &= [(b_1c_2 - c_1b_2), (c_1a_2 - a_1c_2), (a_1b_2 - b_1a_2)].\end{aligned}$$

Equazione parametrica di una retta:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Il vettore direzione della retta è $v = (a, b, c)$.

Retta passante per due punti:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Retta passante per un punto o con vettore direzione od ortogonale ad un piano:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

Rette parallele: Le rette

$$r: \begin{cases} x = x_1 + ta_1 \\ y = y_1 + tb_1 \\ z = z_1 + tc_1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = x_2 + ta_2 \\ y = y_2 + tb_2 \\ z = z_2 + tc_2 \end{cases}$$

· sono parallele se $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$, con $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (i vettori sono paralleli);

· sono ortogonali se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ (i vettori sono ortogonali).

Circonferenza

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{con} \quad c = a^2 + b^2 - r^2$$

Centro: $C = (a, b)$.

Raggio: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fuochi:
Se $a^2 > b^2$ allora $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Se $a^2 < b^2$ allora $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Vertici: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$.

Coniche

Equazione generale di una conica: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Il termine bxy si chiama termine rettangolare.

Sia il $\Delta = b^2 - 4ac$, allora se:

- $\Delta > 0$ è un'iperbole;
- $\Delta < 0$ è un'ellisse;
- $\Delta = 0$ è una parabola.