NUMERI COMPLESSI

Esercizi svolti

1. Calcolare le seguenti potenze di i:

$a)\ i^{12} \qquad b)\ i^{27} \qquad c)\ i^{41} \qquad d)\ \dfrac{1}{i^{15}} \qquad e)\ i^{34} \qquad f)\ i^{-9}$

2. Semplificare le seguenti espressioni:

$a)\ (\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}\,i) \qquad b)\ (3+i)(3-i)\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}\,i\right)$

$c)\ \dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} \qquad d)\ \overline{(1-i)^3}$

3. Verificare che $z=-1\pm 2i$ soddisfa l'equazione $z^3+z^2+3z-5=0$.

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi :

$a)\ 1+i-\dfrac{i}{1-2i} \qquad b)\ (1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}\,i) \qquad c)\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}-1\right)^2$

5. Mettere in forma esponenziale e in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$a)\ z=-i \qquad b)\ z=-1-i \qquad c)\ z=\dfrac{1}{3+3i} \qquad d)\ z=\dfrac{4i}{\sqrt{3}+i} \qquad e)\ z=(1+i)(2-2i).$

6. Calcolare le potenze: $z^2,\ z^6,\ z^{22}$ dei seguenti numeri complessi:

$a)\ z=\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{1}{i} \qquad b)\ z=\dfrac{1+i}{2-2i}.$

7. Calcolare le seguenti radici e rappresentarle nel piano complesso:

$a)\ \left(1-i\sqrt{3}\right)^{1/2} \qquad b)\ \sqrt[4]{-2} \qquad c)\ \sqrt[5]{-i} \qquad d)\ \sqrt[3]{1+i}$

$e)\ \left(\dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{1/4} \qquad f)\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/4}.$

8. Dato il numero complesso $z=e^{\pi i/6}+e^{\pi i/2}$

a) esprimere z in forma algebrica e in forma esponenziale

b) calcolare le radici cubiche di z.

9. Risolvere le seguenti equazioni e rappresentare le soluzioni nel piano complesso:

$a)\ z^2+3iz+4=0 \qquad b)\ z^4+2z^2+4=0$

$c)\ z^6+7z^3-8=0 \qquad d)\ z\overline{z}-z+\dfrac{i}{4}=0$

$e)\ z^4+iz=0 \qquad f)\ z^6-iz^4+z^2-i=0.$

10. Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

$a)\ \ z^4 + 2z^2 + 2 = 0$ $\qquad$ $b)\ \ z^5 + (1+i)z = 0$

$c)\ \ (z-2i)^4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ $\qquad$ $d)\ \ z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

$e)\ \ z^2 + 2z + 1 + i = 0$ $\qquad$ $f)\ \ (z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3$

$g)\ \ z^2 = 3 - 4i.$

11. Verificare che $z = 2i$ è una radice del polinomio $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4$. Calcolare poi tutte le radici di $P(z)$.

12. Sapendo che $1 + i$ è radice del polinomio $P(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$, trovare le altre radici. Decomporre $P(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

13. Verificare che il polinomio :

    $P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + [(-\sqrt{3}+2)i - 2]z - i\sqrt{3} - 2$

    si annulla per $z = -1$ e trovare le altre radici.

14. Trovare un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali di grado 5, avente $z = 3$ come radice semplice, $z = 2 - 3i$ come radice di molteplicità 2, e tale che $P(0) = 1$.

15. Sia $z = r\,e^{i\theta}$ un numero complesso non nullo, e siano $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ le n radici n-esime di z $(n \geq 2)$ date da

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

    Dimostrare che

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0.$$

SOLUZIONI degli esercizi sui NUMERI COMPLESSI

1. (a) $i^{12} = (i^4)^3 = 1$

   (b) $i^{27} = i^{24} i^3 = i^3 = -i$

   (c) $i^{41} = i^{40} i = i$

   (d) $\dfrac{1}{i^{15}} = \dfrac{1}{i^{12} i^3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} = i$

   (e) $i^{34} = i^{32} \cdot i^2 = i^2 = -1$

   (f) $i^{-9} = (i^9)^{-1} = (i^8 \cdot i)^{-1} = (i)^{-1} = \dfrac{1}{i} = -i$

2. (a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2} i) = \sqrt{2} - i - i + \sqrt{2} i^2 = \sqrt{2} - 2i - \sqrt{2} = -2i$

   (b) $(3+i)(3-i)\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} i\right) = (9 - i^2)\,\dfrac{2+i}{10} = (9+1)\,\dfrac{2+i}{10} = 2 + i$

   (c) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \dfrac{5}{(2 - i - 2i + i^2)(3-i)} = \dfrac{5}{(1-3i)(3-i)} =$

   $= \dfrac{5}{3 - i - 9i + 3i^2} = \dfrac{5}{-10i} = \dfrac{1}{2}\, i$

   (d) $\overline{(1-i)^3} = \left(\overline{(1-i)}\right)^3 = (1+i)^3 = 1 + i^3 + 3i + 3(i^2) = 1 - i + 3i - 3 = -2 + 2i$

   Possiamo anche usare la forma esponenziale per calcolare $(1+i)^3$:

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} \quad \Rightarrow \quad (1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\, e^{3\pi i/4} = 2\sqrt{2}\, \left(\cos \tfrac{3}{4}\pi + i \sin \tfrac{3}{4}\pi\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\, \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i.$$

3. Calcolando $P(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$ per $z = -1 + 2i$ si ha:

   $(-1+2i)^3 + (-1+2i)^2 + 3(-1+2i) - 5 = -1 - 8i + 6i + 12 + 1 - 4 - 4i - 3 + 6i - 5 = 0.$

   Dunque $z = -1 + 2i$ soddisfa l'equazione $P(z) = 0$, cioè è una radice del polinomio $P(z)$.

   Per $z = -1 - 2i$ si procede in modo analogo, oppure, più semplicemente, si osserva che $P(z)$ ha coefficienti reali, e quindi essendo $-1 + 2i$ una radice di $P(z)$, anche il coniugato $\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i$ deve essere una radice di $P(z)$.

4. (a) $\left|1 + i - \dfrac{i}{1-2i}\right| = \left|1 + i - \dfrac{i(1+2i)}{1 - (2i)^2}\right| = \left|1 + i - \dfrac{i-2}{5}\right| = \left|\dfrac{5 + 5i - i + 2}{5}\right| =$

   $= \dfrac{1}{5}|7 + 4i| = \dfrac{1}{5}\sqrt{49 + 16} = \dfrac{1}{5}\sqrt{65}$

   (b) $|(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3} i)| = |(1 - i^2)|\ |1 + \sqrt{3} i| = 2\sqrt{1+3} = 4$

   (c) $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i} - 1\right)^2\right| = \left|\dfrac{1+i}{1-i} - 1\right|^2 = \left|\dfrac{2i}{1-i}\right|^2 = \dfrac{|2i|^2}{|1-i|^2} = \dfrac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2$

5. (a) Si ha $-i = e^{3\pi i/2} = \cos(\frac{3}{2}\pi) + i\ \sin(\frac{3}{2}\pi)$.

Infatti il modulo di $z = -i$ è $|z| = 1$, e l'argomento $\theta = \arg(z)$ soddisfa:

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases} \implies \theta = \tfrac{3}{2}\pi.$$

(b) Posto $z = -1 - i = r\, e^{i\theta}$, si ha $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \theta = \tfrac{5}{4}\pi.$$

Dunque $-1 - i = \sqrt{2}\, e^{5\pi i/4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\ \sin\frac{5}{4}\pi\right)$.

(c) Si ha

$$z = \frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+i} = \frac{1}{3}\frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{6}(1-i) \ = \ r\, e^{i\theta}$$

$$\implies r = |z| = \tfrac{1}{6}\sqrt{2}, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \ \theta = \tfrac{7}{4}\pi,$$

$$\implies z = \tfrac{\sqrt{2}}{6}\, e^{7\pi i/4} = \tfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\cos\tfrac{7}{4}\pi + i\ \sin\tfrac{7}{4}\pi\right).$$

(d) $$z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{4\sqrt{3}i+4}{4} = 1 + \sqrt{3}i \ = \ r\, e^{i\theta}$$

$$\implies r = |z| = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \theta = \tfrac{\pi}{3},$$

$$\implies z = 2\, e^{i\pi/3} = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\ \sin\tfrac{\pi}{3}\right).$$

(e) $z = (1+i)(2-2i) = 2(1+i)(1-i) = 2(1-i^2) = 4 = 4\, e^{i\,0} = 4(\cos 0 + i \sin 0)$.

6. (a) $$z = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + \frac{1}{i} = \frac{2(\sqrt{3}+i)}{3-i^2} - i = \frac{\sqrt{3}+i}{2} - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ i.$$

Per calcolare le potenze di z mettiamo z in forma esponenziale: $z = r\, e^{i\theta}$. Si ha

$$r = |z| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3+1} = 1, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \theta = \ \tfrac{11}{6}\pi,$$

da cui $z = e^{11\pi i/6}$. Calcoliamo adesso i numeri z^2 , z^6 , z^{22} .

- $z^2 = e^{11\pi i/3} = e^{5\pi i/3} = \cos\frac{5}{3}\pi + i\ \sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $z^6 = e^{11\pi i} = \cos(11\pi) + i\sin(11\pi) = -1$.
- $z^{22} = e^{121\pi i/3} = e^{\pi i/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $$z = \frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2}\ \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2}\ \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1}{2}\ \frac{1-1+2i}{2} = \frac{1}{2}i.$$

Da questo otteniamo

- $z^2 = -\dfrac{1}{4}$,
- $z^6 = \dfrac{1}{2^6}\, i^6 = \dfrac{1}{64}\, i^2 = -\dfrac{1}{64}$,
- $z^{22} = \dfrac{1}{2^{22}}\, i^{22} = \dfrac{1}{2^{22}}\, i^2 = -\dfrac{1}{2^{22}}$.

7. (a) Ricordiamo la formula per le radici n-esime di un numero complesso (non nullo) z, cioè per gli n numeri complessi w tali che $w^n = z$. Scrivendo z in forma esponenziale come $z = r\, e^{i\theta}$, e indicando collettivamente le n radici con $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, si ha

$$\sqrt[n]{z} \;=\; z^{1/n} \;=\; \left(r\, e^{i\theta}\right)^{1/n} \;=\; \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

In particolare le due radici quadrate di un qualunque numero complesso (non nullo) z sono l'una l'opposto dell'altra:

$$\begin{aligned}\sqrt{z} \;=\; z^{1/2} \;&=\; \sqrt{r}\; e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \;=\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}, \;\; \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} \\ &=\; \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}, \;\; -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \;=\; \pm\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$z = 1 - i\sqrt{3} \;=\; r\, e^{i\theta} \quad\Longrightarrow\quad r = |z| = 2, \quad \begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\;\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \theta = \tfrac{5}{3}\pi.$$

Dunque in forma esponenziale $1 - i\sqrt{3} = 2\, e^{5\pi i/3}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{1/2} \;&=\; \sqrt{2}\; e^{i\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \;=\; \sqrt{2}\, e^{5\pi i/6}, \; \sqrt{2}\, e^{11\pi i/6} \\ &=\; \pm\sqrt{2}\, e^{5\pi i/6} \;=\; \pm\sqrt{2}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right).\end{aligned}$$

Nel piano complesso le radici ottenute sono i due punti sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ di coordinate $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, simmetrici rispetto all'origine.

(b) In forma esponenziale $-2 \;=\; 2\, e^{\pi i}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \sqrt[4]{-2} \;=\; (-2)^{1/4} \;&=\; \sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ &=\; \sqrt[4]{2}\, e^{\pi i/4}, \;\; \sqrt[4]{2}\, e^{3\pi i/4}, \;\; \sqrt[4]{2}\, e^{5\pi i/4}, \;\; \sqrt[4]{2}\, e^{7\pi i/4} \\ &= \pm\sqrt[4]{2}\, e^{\pi i/4}, \;\; \pm\sqrt[4]{2}\, e^{3\pi i/4} \\ &= \pm\sqrt[4]{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \;\; \pm\sqrt[4]{2}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

Nel piano complesso queste 4 radici sono i vertici del quadrato inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[4]{2}$ con i lati paralleli agli assi coordinati.

(c) Si ha $-i \;=\; e^{3\pi i/2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \sqrt[5]{-i} \;=\; (-i)^{1/5} \;&=\; e^{i\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \\ &=\; e^{3\pi i/10}, \; e^{7\pi i/10}, \; e^{11\pi i/10}, \; e^{15\pi i/10}(= e^{3\pi i/2} \;=\; -i), \; e^{19\pi i/10}.\end{aligned}$$

Queste 5 radici sono i vertici del pentagono regolare inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine con un vertice nel punto $-i \cong (0, -1)$.

(d) Si ha $1+i=\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1+i} \;=\; (1+i)^{1/3} \;=\; \sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}} \quad (k=0,1,2)$$
$$= \sqrt[6]{2}\,e^{\pi i/12},\ \sqrt[6]{2}\,e^{3\pi i/4},\ \sqrt[6]{2}\,e^{17\pi i/12}.$$

Queste 3 radici sono i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt[6]{2}$ con un vertice nel punto

$$\sqrt[6]{2}\,e^{3\pi i/4} \;=\; \sqrt[6]{2}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \;\cong\; \left(-\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

(e) Si ha $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}} \;=\; \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{1+3} \;=\; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \;=\; e^{4\pi i/3}$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{-2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{1/4} \;=\; e^{i\frac{\frac{4}{3}\pi+2k\pi}{4}} \quad (k=0,1,2,3)$$
$$= e^{\pi i/3},\ e^{5\pi i/6},\ e^{4\pi i/3},\ e^{11\pi i/6}$$
$$= \pm\,e^{\pi i/3},\ \ \pm\,e^{5\pi i/6}$$
$$= \pm\left(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \ \pm\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}\right).$$

Questi sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine.

(f) Si ha $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=e^{\pi i/2}$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1+i}{1-i}\right)^{1/4} \;=\; i^{1/4} \;=\; e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}} \quad (k=0,1,2,3)$$
$$= e^{\pi i/8},\ e^{5\pi i/8},\ e^{9\pi i/8},\ e^{13\pi i/8}$$
$$= \pm\,e^{\pi i/8},\ \ \pm\,e^{5\pi i/8}.$$

Questi sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine.

8. (a) $z=e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}+i=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\,i.$

In forma esponenziale $z=r\,e^{i\theta}$ si ha $r=|z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$,

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad z \;=\; \sqrt{3}\,e^{\pi i/3}.$$

(b) $\sqrt[3]{z} \;=\; z^{1/3} \;=\; \sqrt[6]{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad (k=0,1,2) \;=\; \sqrt[6]{3}\,e^{\pi i/9},\ \sqrt[6]{3}\,e^{7\pi i/9},\ \sqrt[6]{3}\,e^{13\pi i/9}.$

9. (a) Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo:

$$z=\frac{-3i\pm\sqrt{9i^2-16}}{2}=\frac{-3i\pm\sqrt{-25}}{2}=\frac{-3i\pm5\sqrt{-1}}{2}=\frac{-3i\pm5i}{2}$$

da cui $z_1=-4i$, $z_2=i$. Nel piano complesso questi sono i due punti situati sull'asse delle y di coordinate $(0,-4)$ e $(0,1)$.

(b) Posto $z^2 = t$, risolviamo l'equazione di secondo grado $t^2 + 2t + 4 = 0$:

$$t = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Essendo $z^2 = t \quad \Rightarrow \quad z = t^{1/2}$, dobbiamo calcolare le seguenti radici quadrate: $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{1/2}$, $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{1/2}$.

- Poiché $-1 - i\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento $\frac{4\pi}{3}$, si ha $-1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{4\pi i/3}$

$$\Longrightarrow \quad (-1 - i\sqrt{3})^{1/2} = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \quad = \pm\sqrt{2}\; e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$= \pm\sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

- Poiché $-1 + i\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento $\frac{2\pi}{3}$, si ha $-1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{2\pi i/3}$

$$\Longrightarrow \quad (-1 + i\sqrt{3})^{1/2} = \pm\sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Dunque le soluzioni dell'equazione di partenza sono i quattro numeri complessi

$$z_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \qquad z_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3}),$$
$$z_3 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad z_4 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

che nel piano complesso sono i vertici, di coordinate

$$\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \tfrac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tfrac{\sqrt{6}}{2}\right),\ \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

di un rettangolo inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine.

(c) Posto $t = z^3$ si ottiene l'equazione $t^2 + 7t - 8 = 0$, che ha soluzioni $t = -8$ e $t = 1$. Pertanto $z^3 = -8$ oppure $z^3 = 1$.

- Se $z^3 = -8$ allora

$$z = \sqrt[3]{-8} = (8\,e^{\pi i})^{1/3} = 2\,e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2)$$
$$= 2\,e^{\pi i/3},\ 2\,e^{\pi i},\ 2\,e^{5\pi i/3} = -2,\ 1 \pm i\sqrt{3}.$$

- Se $z^3 = 1$ si ha $z = \sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2) \quad = 1,\ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

In definitiva otteniamo le 6 soluzioni: $z = 1,\ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -2,\ 1 \pm i\sqrt{3}$. Le prime 3 sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine (con un vertice nel punto $(1, 0)$), le altre 3 sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 (con un vertice nel punto $(-2, 0)$).

(d) Posto $z = x + iy$ e ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$, si ottiene l'equazione:

$$x^2 + y^2 - x - iy + \tfrac{i}{4} = 0.$$

Annullando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \frac{1}{4} - y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni: $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{i}{4}\,, \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{i}{4}.$$

Nel piano complesso questi sono i punti di coordinate $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

(e) Raccogliendo z a fattor comune otteniamo l'equazione $z(z^3 + i) = 0$, da cui $z = 0$ oppure $z^3 + i = 0$, cioè $z^3 = -i$,

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{-i} = e^{i\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2) \quad = e^{\pi i/2},\ e^{7\pi i/6},\ e^{11\pi i/6}$$

$$= i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Otteniamo così l'origine più i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine (con un vertice nel punto $(0,1)$).

(f) Con un raccoglimento parziale otteniamo

$$z^6 - iz^4 + z^2 - i = z^4\left(z^2 - i\right) + z^2 - i = \left(z^2 - i\right)\left(z^4 + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad z^2 = i,\ z^4 = -1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{i},\ \sqrt[4]{-1}.$$

Scrivendo $i = e^{\pi i/2}$, $-1 = e^{\pi i}$, otteniamo

$$z = e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \quad = \pm e^{\pi i/4} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$z = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad = \pm e^{\pi i/4},\ \pm e^{3\pi i/4}$$

$$= \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Abbiamo così 4 soluzioni: $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (con molteplicità 2) e

$$z = \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (con molteplicità 1).}$$

Queste sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine.

10. (a) Posto $z^2 = t$ si ottiene l'equazione $t^2 + 2t + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $t = -1 \pm i$. Dobbiamo quindi calcolare le radici quadrate di $-1 \pm i$.

- $-1 + i = \sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$

  $\Rightarrow \quad z = \sqrt{-1 + i} = (-1 + i)^{1/2} = \pm \sqrt[4]{2}\ e^{3\pi i/8}.$
- $-1 - i = \sqrt{2}\, e^{5\pi i/4}$

  $\Rightarrow \quad z = \sqrt{-1 - i} = (-1 - i)^{1/2} = \pm \sqrt[4]{2}\ e^{5\pi i/8}.$

(b) Raccogliendo z si ottiene

$$z\left(z^4 + 1 + i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0,\ \sqrt[4]{-1 - i}.$$

Scrivendo $-1 - i = \sqrt{2}\ e^{5\pi i/4}$ otteniamo, oltre a $z = 0$, le 4 soluzioni

$$z = (-1 - i)^{1/4} = \sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

(c) Dalla definizione di radice n-esima di un numero complesso si ha

$$z - 2i \;=\; \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right)^{1/4} \;=\; \left(e^{\pi i/6}\right)^{1/4} \;=\; e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow \quad z \;=\; 2i + e^{\pi i/24},\; 2i + e^{13\pi i/24},\; 2i + e^{25\pi i/24},\; 2i + e^{37\pi i/24}.$$

(d) Posto $z^3 = t$ otteniamo l'equazione $t^2 - 2t + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $t = 1 \pm i$. Dobbiamo quindi calcolare le radici cubiche dei due numeri complessi $1 \pm i$.

- $1 + i \;=\; \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$

  $$\Rightarrow \quad z \;=\; \sqrt[3]{1+i} \;=\; (1+i)^{1/3} \;=\; \sqrt[6]{2}\; e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2)\;\; .$$

- $1 - i \;=\; \sqrt{2}\, e^{7\pi i/4}$

  $$\Rightarrow \quad z \;=\; \sqrt{1-i} \;=\; (1-i)^{1/3} \;=\; \sqrt[6]{2}\; e^{i\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}} \quad (k = 0, 1, 2)\;\; .$$

(e) Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado otteniamo:

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - 1 - i} = -1 \pm \sqrt{-i}.$$

Dobbiamo calcolare $\sqrt{-i}$, cioè le due radici quadrate di $-i$. (Poichè queste sono l'una l'opposto dell'altra, il "$\pm$" nella formula precedente è superfluo e si può sostituire con "+".) Scrivendo $-i = e^{3\pi i/2}$, otteniamo

$$\sqrt{-i} \;=\; e^{i\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \;=\; \pm\, e^{3\pi i/4} \;=\; \pm\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

da cui

$$z \;=\; -1 \pm \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \;=\; -1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2},\;\; -1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

(f) Si ha

$$(\sqrt{3} + i)^3 \;=\; 3\sqrt{3} - i + 9i - 3\sqrt{3} \;=\; 8i.$$

L'equazione proposta diventa $(z + i)^2 = 8i \quad \Rightarrow \quad z + i = \sqrt{8i}$

$$\Rightarrow \quad z \;=\; -i + (8i)^{1/2} = -i + \sqrt{8}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \;=\; -i \pm 2\sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$$

$$=\; -i \pm 2\sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \;=\; 2 + i,\;\; -2 - 3i.$$

(g) Le soluzioni sono le due radici quadrate di $3 - 4i$: $z \;=\; \sqrt{3 - 4i}$. In forma esponenziale $3 - 4i \;= r\, e^{i\theta}$, con $r = \sqrt{9 + 16} = 5$,

$$\begin{cases} \cos\theta = 3/5 \\ \sin\theta = -4/5. \end{cases}$$

Questo sistema determina univocamente θ ma non ne fornisce il valore esplicito (θ non è un angolo notevole). La formula per le radici quadrate fornisce comunque la soluzione esplicita

$$z \;=\; \sqrt{3 - 4i} \;=\; \pm\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \;=\; \pm\sqrt{5}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \;=\; \pm\sqrt{5}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

dove $\cos\frac{\theta}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2}$ sono determinati dalle formule di bisezione

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

I segni "$\pm$" si determinano osservando che θ sta nel quarto quadrante (essendo $\cos\theta > 0$, $\sin\theta < 0$) e quindi $\theta/2$ sta nel secondo quadrante. Ne segue che

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pm(-2+i) = -2+i\,,\ 2-i.$$

Un altro metodo per risolvere l'equazione $z^2 = 3 - 4i$ è quello di utilizzare la forma cartesiana: $z = x + iy$. Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \\ y = -\frac{2}{x}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, posto $x^2 = t$, otteniamo $t^2 - 3t - 4 = 0$, da cui $t = 4, -1$. La soluzione $t = -1 < 0$ non è ammissibile in quanto $t = x^2 \geq 0$. Otteniamo così $x = \pm 2 \ \Rightarrow\ y = \mp 1$, e infine $z = 2 - i,\ -2 + i$.

11. Si ha: $P(2i) = 16 - 8i - 20 + 8i + 4 = 0$, quindi $z = 2i$ è una radice di $P(z)$. Poichè $P(z)$ ha coefficienti reali, anche $\overline{2i} = -2i$ è una radice di $P(z)$. Ricordiamo che un polinomio ha la radice $z = z_0$ se e solo se esso è divisibile per $(z - z_0)$. Pertanto $P(z)$ è divisibile per il polinomio

$$(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4.$$

Eseguendo la divisione di $P(z)$ per questo polinomio otteniamo

$$P(z) = \left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

Le altre radici di $P(z)$ sono dunque le soluzioni dell'equazione $z^2 + z + 1 = 0$, cioè $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

In definitiva le radici di $P(z)$ sono $\pm 2i$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Poiché $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali, se ha la radice $1 + i$ ha anche la radice $1 - i$; dunque $P(z)$ è divisibile per il polinomio:

$$A(z) = [z - (1+i)]\,[z - (1-i)] = (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2.$$

Per trovare le altre radici di $P(z)$ eseguiamo la divisione di $P(z)$ per $A(z)$, ottenendo

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 - 3z + 2\right).$$

Le radici di $z^2 - 3z + 2$ sono 2 e 1. Pertanto le radici di $P(z)$ sono: $1+i,\ 1-i,\ 1,\ 2$. La decomposizione di $P(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ è:

$P(z) = (z-1)(z-2)(z^2 - 2z + 2).$

Su $\mathbb{C}$, $P(z)$ si decompone in fattori di primo grado:

$P(z) = (z-1)(z-2)(z-1-i)(z-1+i).$

13. Si ha

$$P(-1) = (-1)^3 + (1+2i)(-1)^2 + \left[(-\sqrt{3}+2)i - 2\right](-1) - i\sqrt{3} - 2$$
$$= -1 + 1 + 2i + \sqrt{3}\,i - 2i + 2 - i\sqrt{3} - 2 = 0.$$

Pertanto $z = -1$ è radice di $P(z)$. Per trovare le altre radici, dividiamo $P(z)$ per $(z+1)$ ad esempio utilizzando il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1+2i & (-\sqrt{3}+2)i-2 & & -i\sqrt{3}-2 \\ -1 & & -1 & -2i & & \sqrt{3}i+2 \\ \hline & 1 & 2i & -\sqrt{3}i-2 & & // \end{array}$$

Dunque $P(z) = (z+1)(z^2 + 2iz - 2 - i\sqrt{3})$.

Le radici del polinomio di secondo grado $z^2 + 2iz - 2 - i\sqrt{3}$ sono:

$z = -i \pm \sqrt{-1 + 2 + i\sqrt{3}} = -i \pm \sqrt{1 + i\sqrt{3}}.$

Poiché $1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{\pi i/3}$, le radici quadrate di $1 + i\sqrt{3}$ sono

$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \pm\sqrt{2}\;e^{i\frac{\pi}{6}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i).$

Sommando a queste $-i$ otteniamo infine le seguenti tre radici di $P(z)$:

$z \;=\; -1,\;\; \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right),\;\; -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right).$

14. Poiché $P(z)$ deve avere coefficienti reali, se ammette la radice $z = 2-3i$ (con molteplicità 2) ammette anche la radice $\overline{z} = 2+3i$ (ancora con molteplicità 2). Dunque $P(z)$ è divisibile per

$$\Big([z-(2-3i)]\,[z-(2+3i)]\Big)^2 = \left[(z-2)^2 - (3i)^2\right]^2 = \left(z^2 - 4z + 13\right)^2.$$

Inoltre $P(z)$ deve essere divisibile per $z-3$ (avendo $z=3$ come radice semplice). Poiché $P(z)$ deve essere di grado 5, sarà

$P(z) = k(z-3)(z^2 - 4z + 13)^2, \qquad k \in \mathbb{C}.$

Poiché $P(0) = 1$, si deve avere: $1 = k \cdot (-3) \cdot 169$, da cui $k = -\frac{1}{507}$. Pertanto il polinomio cercato è:

$P(z) = -\,\frac{1}{507}\,(z-3)(z^2 - 4z + 13)^2.$

15. Si ha:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \;&=\; \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}} \left\{ 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + e^{i\frac{6\pi}{n}} + \cdots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \\
&=\; \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}} \left\{ 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^3 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^{n-1} \right\} \\
&=\; \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}} \; \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&=\; \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}} \; \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Abbiamo usato l'identità (somma di una progressione geometrica)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$