Esercizio A1

> *Determinare se i tre vettori di* $\mathbb{R}^3$: $(1,2,0),(0,8,3)$ *e* $(1,0,-2)$ *siano o no linearmente indipendenti.*

Metodo 1

Se $det(M_{atrice}) \neq 0$ allora i vettori sono linearmente indipendenti.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$det(M) = (1 \cdot 8 \cdot -2) + (0 \cdot 0 \cdot 0) + (2 \cdot 3 \cdot 1) - (1 \cdot 8 \cdot 0) - (0 \cdot 2 \cdot -2) - (1 \cdot 0 \cdot 3) = -10.$$

Il determinante è diverso da zero, quindi possiamo concludere che i vettori sono linearmente indipendenti.

Metodo 2

Se $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ è risolto solo per $(a,b,c) = (0,0,0)$ allora i vettori sono linearmente indipendenti.

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c & = 0 \\ 2a + 8b & = 0\ ; \\ 3b - 2c & = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -c \\ c = 4b\ ; \\ b = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{matrix} \quad .$$

$(0,0,0)$ è l'unica soluzione del sistema, quindi possiamo concludere che i vettori sono linearmente indipendenti.

> *Determinare la dimensione del sottospazio da essi generato.*

I tre vettori costituiscono una base, essendo linearmente indipendenti ed essendo un sistema di generatori (avendo rango massimo, ovvero uguale a 3). Concludiamo che $dim(\{v_1, v_2, v_3\}) = 3$, ovvero tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio A2

> *Ridurre a scala la matrice:* $\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$r_i = r_i - \dfrac{a_i}{a_p} r_p.$

$$r_1 = r_1 - 1r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$r_3 = r_3 + 2r_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

È una *matrice triangolare superiore.*

$$r_1 = r_1 - 2r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = r_2 - 1r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$r_1 = r_1 - 1r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix};$$

È una *matrice triangolare superiore ed inferiore.*

Divido le righe con *pivot* $\neq 1$ per il *pivot*, per ottenere pivot tutti uguali a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

È una *matrice triangolare.*

Esercizio A3

> *Determinare gli autovalori e gli autovettori della trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda i due vettori e_1, e_2 della base canonica di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente in $(0,8)$ e $(1,2)$.*

Sfruttiamo la definizione di autovalore ed autovettore: $A_f - \lambda I$ deve essere non invertibile, ovvero il $det(A_f - \lambda I) = 0$.

$$A_f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A_f - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 8 & 2-\lambda \end{pmatrix};$$

$$det(A_f - \lambda I) = -\lambda(2-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 8;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 4, -2;$$

Per l'autovalore $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -4x + y & = 0 \\ 8x - 2y & = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} y = 4x \\ 8x - 8x = 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = 4x \\ 0 = 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = 4w \\ x = w \end{matrix};$$

l'autovetore è $(w, 4w)$, ovvero $w(1,4)$.

Per l'autovalore $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2x + y & = 0 \\ 8x + 4y & = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} y = -2x \\ 8x - 8x = 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = -2x \\ 0 = 0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = -2w \\ x = w \end{matrix};$$

l'autovetore è $(w, -2w)$, ovvero $w(1,-2)$.

Esercizio B1

> *Determinare con l'algoritmo di Euclide il minimo comune multiplo tra 1988 e 1805.*

$MCD(1988, 1805)$**:**

$$\begin{aligned}
1988 &= 1805 * 1 + 183 \\
1805 &= 183 \ \ * 9 + 158 \\
183 &= 158 \ \ * 1 + 25 \\
158 &= 25 \ \ \ \ * 6 + 8 \\
25 &= 8 \ \ \ \ \ \ * 3 + 1 \\
8 &= 1 \ \ \ \ \ \ * 8 + \underline{0}
\end{aligned}$$

L'MCD è l'ultimo resto prima dello 0, quindi $MCD(1988, 1805) = 1$.

$$mcm(1988, 1805) = \frac{1988 \cdot 1805}{1} = \underline{3588340}.$$