Esercizio 1

Nel piano euclideo E^3 determinare:

a) l'equazione del piano per $P(1,2,1)$ e parallelo alle rette: $r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$; $s : \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$.

L'equazione cartesiana di un piano passante per un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a due rette è data da

$$det(\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}) = 0$$

dove $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sono rispettivamente i vettori direzione delle due rette. Per ricavarli è sufficiente riscrivere le equazioni delle rette dalla forma cartesiana a quella parametrica.

$$r : \begin{cases} x = & z - 1 \\ y = & 2z + 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & -1 + t \\ y = & 3 + 2t \\ z = & t \end{cases} \implies v_1 = (1, 2, 1).$$

$$s : \begin{cases} x = & -z + 1 \\ y = & 3z - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & 1 - t \\ y = & -2 + 3t \\ z = & t \end{cases} \implies v_2 = (-1, 3, 1).$$

Da cui,

$$det(\begin{pmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}) = \boxed{\text{-x - 2y + 5z = 0}}$$

b) l'equazione del piano per $P(1,1,1)$ e perpendicolare alla retta: $t : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

La generica equazione di un piano è

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

ovvero è descritta mediante un punto interno al piano, un vettore ortogonale al piano ed una costante. Conoscendo un punto interno al piano ed un vettore ortogonale al piano è possibile ricavare la costante d.

Le coordinate del punto interno sono note ed il vettore ortogonale al piano è dato dal vettore direzione della retta t perpendicolare al piano.

Essendo però t descritta mediante due equazioni del piano, per ricavare il vettore direzione di t bisogna eseguire il prodotto tra i vettori dei dua piani che la descrivono, ottenendo così il vettore ortogonale, ovvero il vettore direzione di t.

(a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono i due vettori ortogonali ai piani che descrivono la retta t e sono dati rispettivamente dai coefficienti dei due piani.

Quindi

$$v_t = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = det \begin{pmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = [(b_1c_2 - c_1b_2), (c_1a_2 - a_1c_2), (a_1b_2 - b_1a_2)]$$
$$= (-5, 0, -5).$$

$-5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + d = 0 \implies d = 10.$

$\boxed{-5x - 5z + 10 = 0.}$

Esercizio 2

Determinare l'equazione della retta passante per $P(3,2)$ tangente la circonferenza

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1.$$

Per prima cosa si verifica se il punto appartiene alla circonferenza.

$$9 + 4 - 6 - 4 - 1 = 0 \implies 2 = 0. \ P \text{ non appartiene alla circonferenza.}$$

Il fascio di rette passanti per il punto P

$$y - 2 = m(x - 3);$$

$$mx - y - 3m + 2 = 0.$$

Le soluzioni del sistema dato dall'equazione della circonferenza e quella della retta sono i punti di intersezione. Per risolvere il sistema e trovare la tangente si impone la condizione di tangenza, ovvero $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ sul polinomio di secondo grado.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ mx - y - 3m + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{aligned} x^2 + (mx - 3m + 2)^2 - 2x - 2(mx - 3m + 2) - 1 = 0 \\ y = mx - 3m + 2 \end{aligned}$$

$$\implies \begin{aligned} &x^2 + m^2x^2 - 3m^2x + 2mx - 3m^2x9m^2 - 6m + 2mx \cancel{-\text{6m}} \cancel{+4} - 2x - 2mx \cancel{+\text{6m}} \cancel{-4} - 1 = 0 \\ &y = mx - 3m + 2 \end{aligned}$$

TODO

Esercizio 3

Si cosideri l'equazione $x^2 + y^2 + kx - 3ky - 1 = 0$.

a) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ *rappresenta una circonferenza.*
Per qualsiasi k.

b) Determinare i valori di k *per cui la circonferenza interseca gli assi cartesiani nei punti* P_1, P_2 *tali che* $d(P_1, P_2) = 3$.

Per determinare le intersezioni con gli assi sufficiente mettere a sistema l'equzione della circonferenza con le equazioni degli assi cartesiani, ed imporre la distanza fra due punti uguale a 3.

$$P(0,\ldots) = \begin{cases} x^2 + y^2 + kx - 3ky - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} y^2 - 3ky - 1 = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} y_{1,2} = 3k \pm \sqrt{9k^2 + 4} \\ x = 0 \end{matrix}.$$

$$P(\ldots,0) = \begin{cases} x^2 + y^2 + kx - 3ky - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} x^2 + kx - 1 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} x = -k \pm \sqrt{k^2 + 4} \\ y = 0 \end{matrix}.$$