Note sul corso di Algebra Lineare del Prof. Poletti (1o semestre a.a. 2008-09) Osservazioni ed esempi

Giulio Peruginelli

22 dicembre 2008

Aggiunti 2 esercizi nell'ultima pagina.

AVVERTENZA: quanto segue sono approfondimenti/chiarimenti di quanto fatto in classe.
Posso modificare/aggiungere qualcosa a quanto ho scritto nei giorni precedenti, quindi vi invito ogni volta a scorrere tutto questo scritto.

Martedì 18 Novembre

- Scomposizione di una permutazione in prodotto di cicli disgiunti.

Esempio:

Sia data la seguente permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$$

dove S_9 è il gruppo simmetrico di ordine 9. Vogliamo trovare la scomposizione in cicli (disgiunti!) di σ.

Consideriamo le **iterate** di σ sull'elemento 1, vale a dire i seguenti elementi di $I_9 = \{1, 2, \ldots, 9\}$:

$$1,\ \sigma(1) = 4,\ \sigma(\sigma(1)) = 2,\ \sigma(\sigma(\sigma(1))) = 3,\ \sigma(\sigma(\sigma(\sigma(1)))) = 1$$

Continuando in questo modo ad applicare σ continueremo ad ottenere gli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Abbiamo ottenuto il ciclo $(1\ 4\ 2\ 3)$

(osserviamo anche che considerando un qualsiasi elemento di questo insieme così ottenuto e rioperando la procedura adesso descritta otteniamo sempre lo stesso insieme).

Per andare avanti scegliamo un altro elemento di I_9 non contenuto in $\{1, 2, 3, 4\}$, ad esempio 5. Operando come prima otteniamo:

$$5,\ \sigma(5) = 6,\ \sigma(\sigma(5)) = 7,\ \sigma(\sigma(\sigma(5))) = 5$$

Abbiamo ottenuto così un altro ciclo, (5 6 7), costituito dagli elementi $\{5, 6, 7\}$. Prendiamo adesso 8 (o comunque un qualsiasi altro elemento di I_9 non contenuto nei due cicli finora ottenuti):

$$8,\ \sigma(8) = 9,\ \sigma(\sigma(8)) = 8$$

Il terzo ciclo che abbiamo ottenuto è costituito dagli elementi $\{8, 9\}$. Avendo esaurito tutti gli elementi di I_9, possiamo scrivere la decomposizione di σ in cicli disgiunti, in questo modo:

$$\sigma = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6\ 7)(8\ 9)$$

Il ciclo (1 4 2 3) sta ad indicare la permutazione di I_9 che manda 1 in 4, 4 in 2, 2 in 3 e 3 in 1, e lascia fissi i restanti elementi di I_9. Allo stesso modo (8 9) è lo scambio di 8 e 9 (e lascia inalterati i restanti elementi) e analogamente per (5 6 7).

NB: l'ordine è importante!! $(1\ 2\ 3\ 4) \neq (1\ 4\ 2\ 3)$ (però allo stesso tempo abbiamo che $(1\ 4\ 2\ 3) = (4\ 2\ 3\ 1)$).

Tale procedimento può essere ovviamente generalizzato ad una qualsiasi permutazione del gruppo simmetrico di ordine n.

- Scomposizione di un ciclo in prodotto di scambi.

In generale abbiamo che:

$$(i_1\ i_2\ \dots\ , i_n) = (i_1\ i_n)(i_1\ i_{n-1})\dots(i_1\ i_2)$$

ad esempio:

$$(5\ 1\ 2\ 4\ 3) = (5\ 3)(5\ 4)(5\ 2)(5\ 1)$$

Per la verifica di quest'ultima uguaglianza ricordarsi che quando si compongono permutazioni si inizia prima ad operare a sinistra, come per l'usuale composizione di funzioni.

In generale non potremo richiedere che nella decomposizione di un ciclo come prodotto di scambi, gli scambi siano disgiunti.

- Segno di una permutazione

I due fatti osservati sopra implicano che data una permutazione essa si decompone come prodotto di scambi. Il **segno** di una permutazione σ è uguale a

$$sgn(\sigma) = (-1)^h$$

dove h è il numero di scambi di una qualsiasi decomposizione di σ. Tale valore NON dipende dalla decomposizione scelta. Osserviamo che $sgn(\sigma) \in \{1, -1\}$, ed è uguale ad 1 se e solo se σ si decompone come prodotto di un numero pari di scambi ed è uguale a -1 se e solo se si decompone come prodotto di un numero dispari di scambi. In particolare il segno di uno scambio è pari a -1.

Vediamo tutto questo nel caso $n = 4$.

Definiamo il polinomio (NB: è assolutamente proibito e sopratutto inutile sviluppare questo prodotto!!!!):

$$\begin{aligned} D(X_1, X_2, X_3, X_4) =& (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_1 - X_4) \\ & (X_2 - X_3)(X_2 - X_4) \\ & (X_3 - X_4) \end{aligned}$$

Un modo compatto di scrivere questo polinomio è il seguente:

$$D(X_1, X_2, X_3, X_4) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (X_i - X_j)$$

Data $\sigma \in S_4$ *definiamo* come σ opera sul polinomio $D(X_1, X_2, X_3, X_4)$:

$$\begin{aligned} D(X_1, X_2, X_3, X_4)^\sigma =& (X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(2)})(X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(3)})(X_{\sigma(1)} - X_{\sigma(4)}) \\ & (X_{\sigma(2)} - X_{\sigma(3)})(X_{\sigma(2)} - X_{\sigma(4)}) \\ & (X_{\sigma(3)} - X_{\sigma(4)}) \end{aligned}$$

ad esempio se $\sigma = (1\ 3\ 2)$ abbiamo che

$$D(X_1, X_2, X_3, X_4)^\sigma = (X_3 - X_1)(X_3 - X_2)(X_3 - X_4)(X_1 - X_2)(X_1 - X_4)(X_2 - X_4) = D(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

abbiamo così ottenuto lo stesso polinomio. Si può dimostrare che ogni permutazione di S_4 associa al polinomio D il polinomio $\pm D$: basta osservare che se $\sigma \in S_4$ e (i, j) è una coppia di valori in I_4, con $i < j$, allora $\sigma(\{i, j\}) = \{k, l\}$, dove $k, l \in I_4$, con $k \neq l$ (perchè? riflettere su questo punto). L'insieme $\{k, l\}$ non è necessariamente disgiunto dall'insieme $\{i, j\}$.

Il coefficiente ± 1 determina univocamente il segno della permutazione. Notare che questo NON dipende dalla scomposizione di σ come prodotto di cicli o di scambi.

Se $\theta = (2\ 4)$ abbiamo che

$$D(X_1, X_2, X_3, X_4)^\theta = (X_1-X_4)(X_1-X_3)(X_1-X_2)(X_4-X_3)(X_4-X_2)(X_3-X_2) = -D(X_1, X_2, X_3, X_4$$

Esercizio: dimostrare che se θ è uno scambio qualsiasi allora $D^\theta = -D$ (per brevità ho omesso di indicare le variabili, ma si tratta sempre dello stesso polinomio).

Se $\sigma, \eta \in S_4$ e $\psi = \sigma\eta$ allora si verifica facilmente che

$$D^\psi = (D^\eta)^\sigma$$

NB: FARE ATTENZIONE all'ordine con cui si opera con le due permutazioni σ e η (a lezione forse ho scritto $D^\psi = (D^\sigma)^\eta$ nel qual caso ho sbagliato!)

Sia adesso $\sigma \in S_4$ una generica permutazione e supponiamo di avere due scomposizioni distinte:

$$\sigma = \theta_1 \dots \theta_k$$

$$\sigma = \theta'_1 \dots \theta'_h$$

dove θ_i, θ'_i sono scambi. Risulta che

$$D^\sigma = D^{(\theta_1 \dots \theta_k)} = (\dots((D^{\theta_k})^{\theta_{k-1}})^{\cdots})^{\theta_1} = (\dots(-D)^{\theta_{k-1}})^{\cdots})^{\theta_1} = (\dots(-1)^2(D^{\theta_{k-2}})^{\cdots})^{\theta_1} = (-1)^k D$$

se uso la prima decomposizione di σ e allo stesso modo

$$D^\sigma = D^{(\theta'_1 \dots \theta'_h)} = (-1)^h D$$

se uso la seconda. Quindi abbiamo ricavato che $(-1)^h = (-1)^k$ e quindi h e k hanno la stessa parità.

<u>Esercizi</u> (da svolgere solo per gli interessati, NON sono argomento d'esame!!!):

Scomporre in cicli disgiunti le seguenti permutazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$$

$$(5\ 1\ 2\ 4\ 3)(5\ 1\ 3) \in S_5$$

$$(1\ 2\ 4)(3\ 1\ 4)(1\ 4\ 2) \in S_4$$

NB: Per gli ultimi due esempi, bisognerà prima calcolare il prodotto delle permutazioni (che NON sono digiunte!) e poi applicare l' usuale procedura. Altrimenti si può applicare anche l'usuale procedura anche direttamente, senza sviluppare il prodotto: provare.