

ESERCIZIO 1

Disegnare un grafo $G = (V, E)$ che abbia le seguenti caratteristiche:

- a) G è connesso,
- b) G soddisfa il teorema di König, e
- c) $\alpha(G) + \tau(G) = 8$.

ESERCIZIO 1

Ricordiamo il teorema di Gallai:

Per ogni grafo G con n nodi si ha:

$$\alpha(G) + \tau(G) = n \quad (1)$$

Se inoltre G non ha nodi isolati

$$\mu(G) + \rho(G) = n \quad (2)$$

Dal teorema di Gallai deduciamo che G deve avere 8 nodi.

ESERCIZIO 1

Ricordiamo il teorema di König:

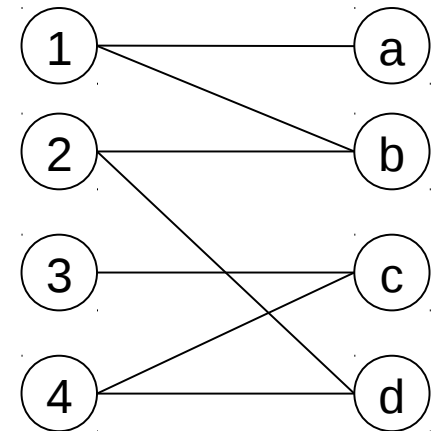
Se $G = (X, Y, E)$ è un grafo bipartito allora $\mu(G) = \tau(G)$.

Dal teorema di König deduciamo che G deve essere bipartito.

Proviamo a disegnare un grafo bipartito con 8 nodi.

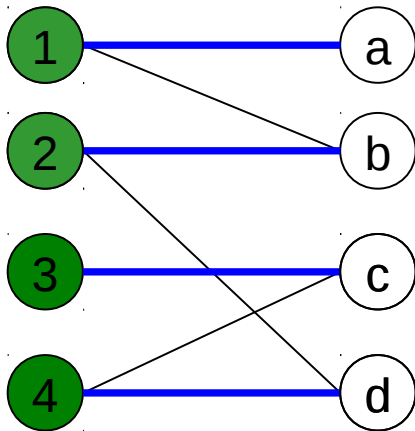
G soddisfa le condizioni a), b) e c)?

Il grafo è connesso \Rightarrow a) è verificata.



ESERCIZIO 1

Calcoliamo su G un massimo matching M e un minimo trasversale T :



$$M = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)\}$$

$$\mu(G) = 4$$

$$T = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\tau(G) = 4$$

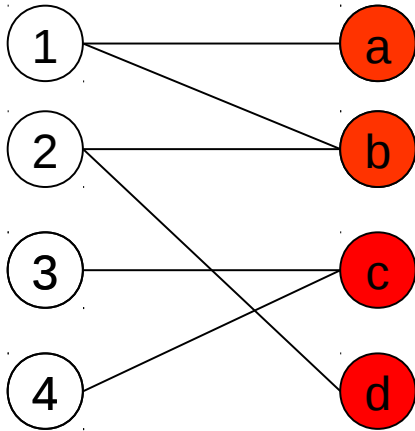
Poiché $\mu(G) = \tau(G)$, il teorema di König è soddisfatto



b) è verificata.

ESERCIZIO 1

Ricordiamo che, se T è un trasversale su G allora $V-T$ è un insieme stabile. In particolare, se T è minimo allora $V-T$ è massimo.



$$V-T = \{a, b, c, d\}$$

$$\alpha(G) = 4$$

Pertanto, $\alpha(G) + \tau(G) = 8 \Rightarrow c)$ è verificata.

ESERCIZIO 2

Disegnare un grafo $G = (V, E)$ che abbia le seguenti caratteristiche:

- a) G è connesso,
- b) G soddisfa il teorema di König,
- c) $\alpha(G) + \mu(G) = 9$, e
- d) $\rho(G) = 8$.

ESERCIZIO 2

Poiché deve essere verificato il teorema di König, deduciamo che

- il grafo G deve essere bipartito, e
- su G deve essere verificata la condizione $\mu(G) = \tau(G)$.

Dalla condizione c) sappiamo che deve essere $\alpha(G) + \mu(G) = 9$.

Pertanto, dal teorema di König e dalla condizione c) abbiamo:

$$\alpha(G) + \tau(G) = 9.$$

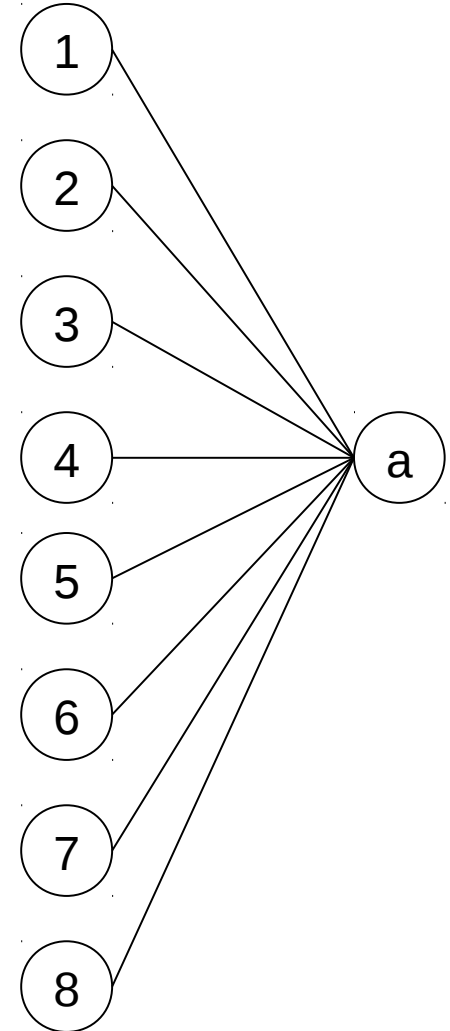
Dal teorema di Gallai deduciamo che G deve avere 9 nodi.

ESERCIZIO 2

Proviamo a disegnare un grafo bipartito con 9 nodi.

G soddisfa le condizioni a), b) c) e d)?

Il grafo è connesso \Rightarrow a) è verificata.



ESERCIZIO 2

Calcoliamo su G un massimo matching M e un minimo trasversale T :

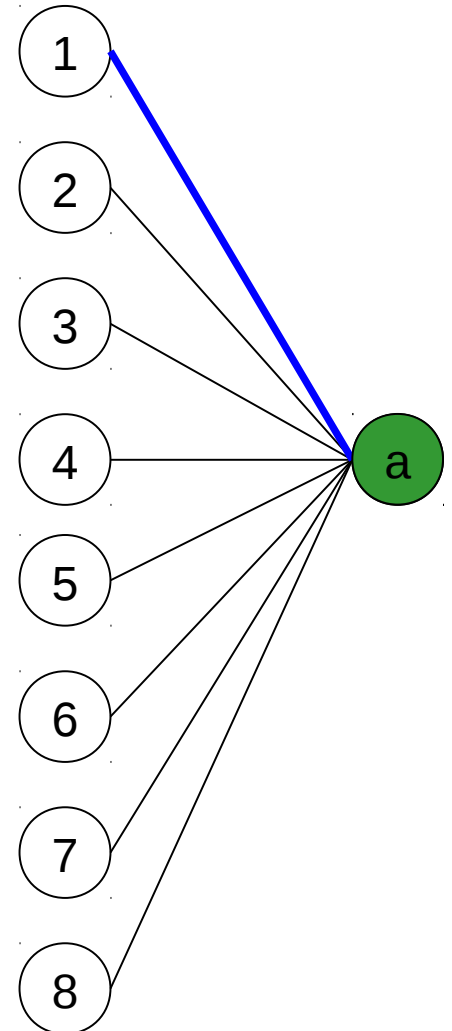
$$M = \{(1, a)\} \quad T = \{a\}$$

$$\mu(G) = 1 \quad \tau(G) = 1$$

Poiché $\mu(G) = \tau(G)$, il teorema di König è soddisfatto



b) è verificata.



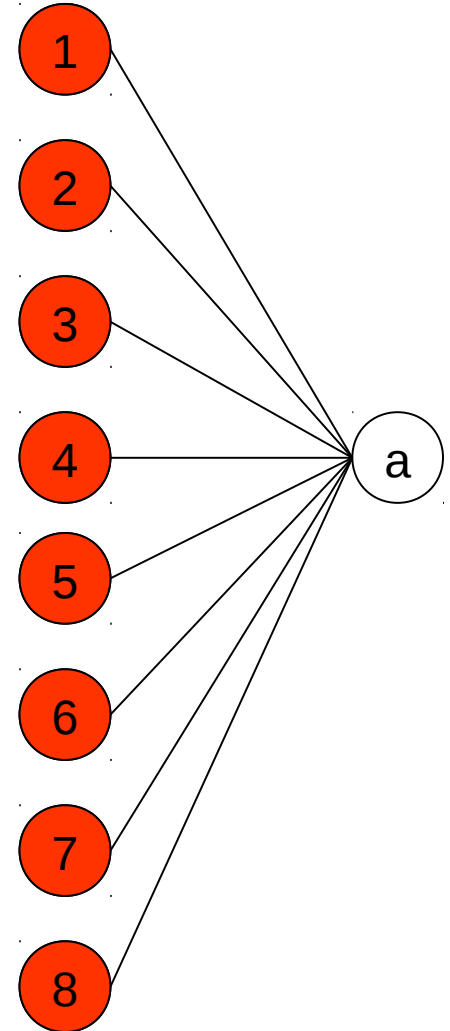
ESERCIZIO 2

Un massimo insieme stabile su G è dato da $V-T$:

$$V-T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\alpha(G) = 8$$

Pertanto, $\alpha(G) + \tau(G) = 9 \Rightarrow c)$ è verificata.



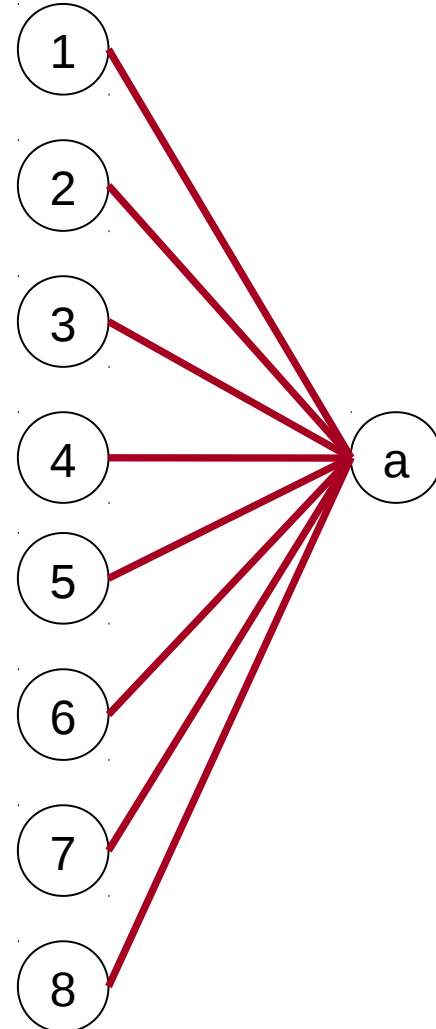
ESERCIZIO 2

Calcoliamo il minimo edge-cover F su G :

$$F = \{(1,a), (2,a), (3,a), (4,a), (5,a), (6,a), (7,a), (8,a)\}$$

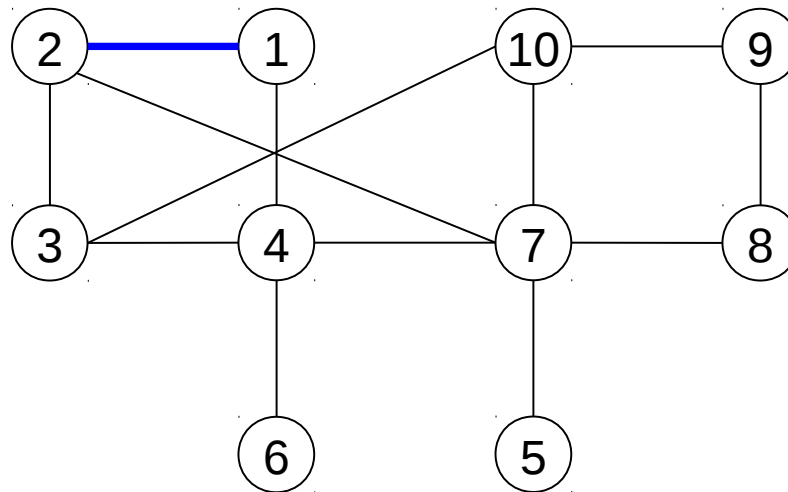
$$\rho(G) = 8$$

Poiché $\rho(G) = 8 \Rightarrow d)$ è verificata.



ESERCIZIO 3

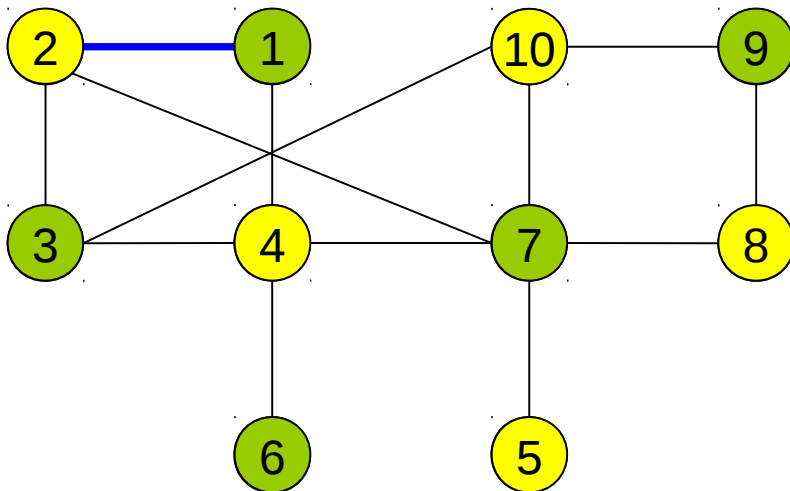
Dato il grafo in figura G e il matching $M = \{(1,2)\}$ determinare i valori di un massimo matching e di un minimo trasversale.



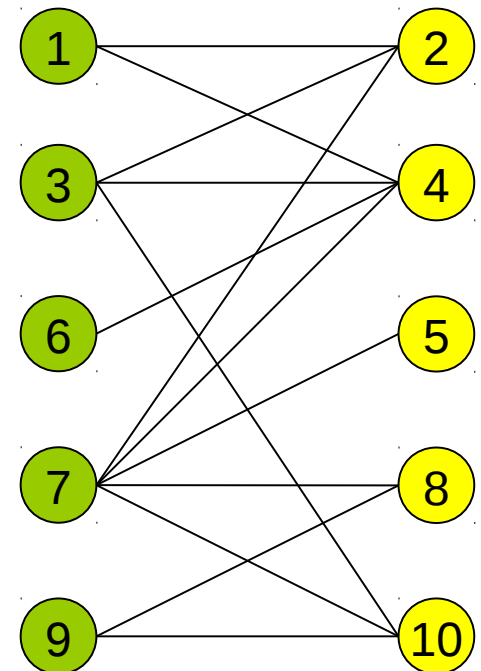
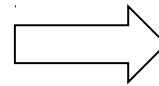
ESERCIZIO 3

Innanzitutto dobbiamo verificare che G sia un grafo bipartito.

Vediamo se G è bicoloreabile:



G è bipartito



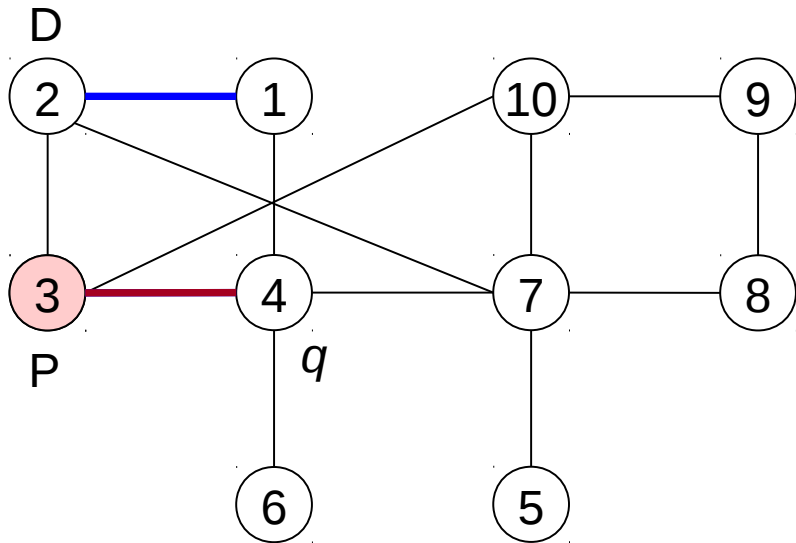
ESERCIZIO 3

Step 1: Matching corrente: $M = \{(1,2)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 3$.

LABEL (3) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2, 4, 10\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(3)$:

$2 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(2) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(2) = 3$

$4 \notin M \Rightarrow \text{STOP}$, $\text{pred}(4) = 3, q = 4$

Cammino aumentante: $P = \{(3,4)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (3,4)\}$.

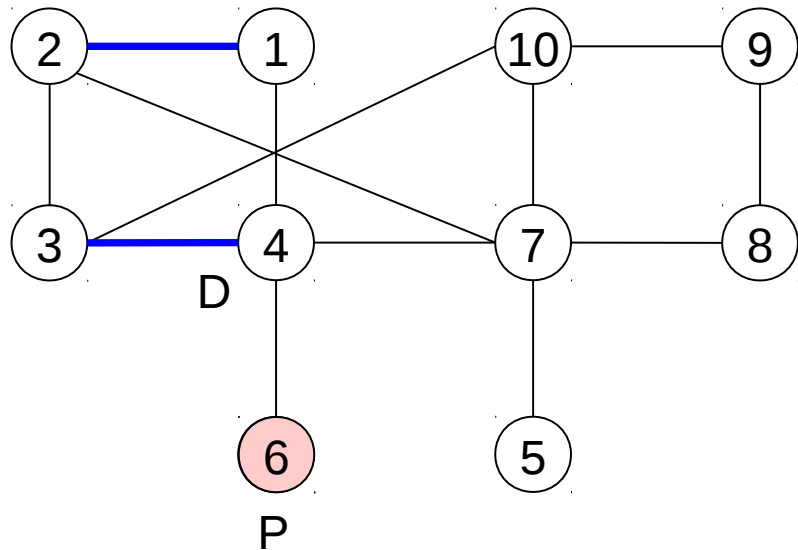
ESERCIZIO 3

Step 2: Matching corrente: $M = \{(1,2), (3,4)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 6$.

LABEL (6) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(6) = \{4\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(6)$:

$4 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(4) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(4) = 6$

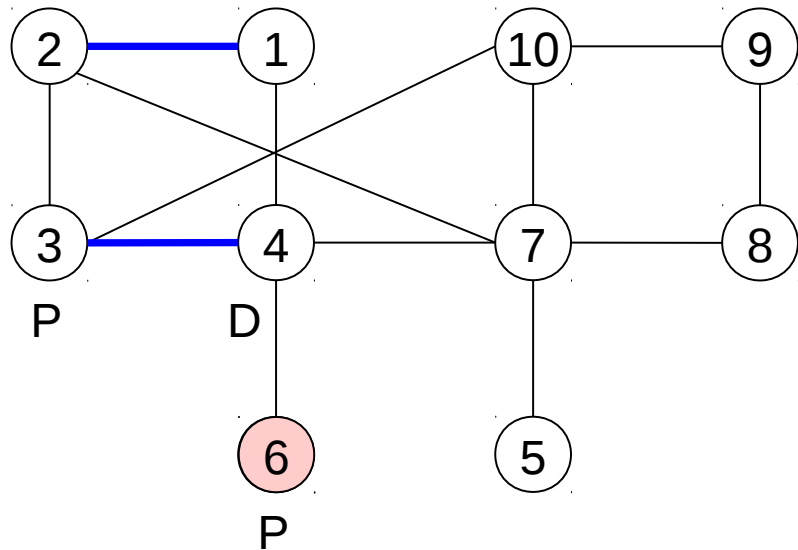
ESERCIZIO 3

Step 2: Matching corrente: $M = \{(1,2), (3,4)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 6$.

LABEL (6) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(6) = \{4\}$



Avviamo la procedura esplora dispari:

$u = 3$ =nodo accoppiato a 4 nel matching M

LABEL (3) = PARI, pred (3) = 4

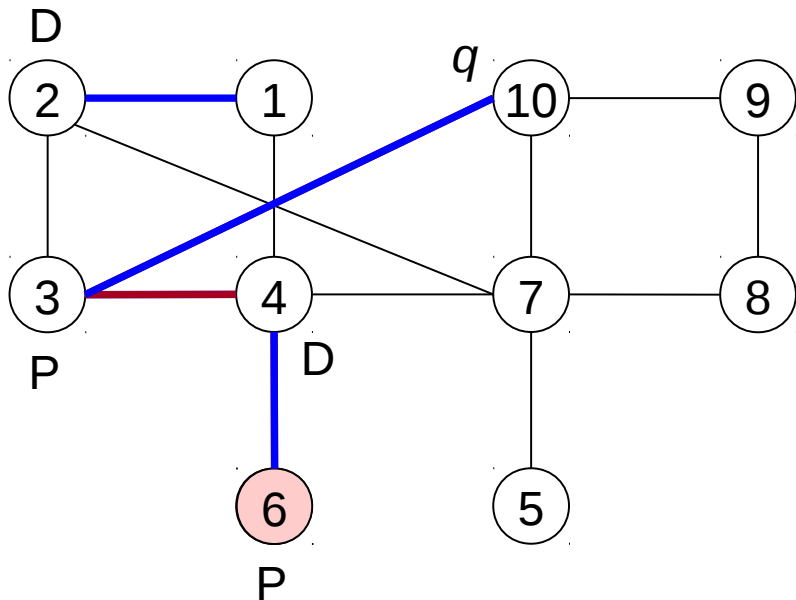
ESERCIZIO 3

Step 2: Matching corrente: $M = \{(1,2), (3,4)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 6$.

LABEL (6) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(6) = \{4\}$



Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2,10,4\}$

Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(3)$:

$2 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(2) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(2) = 3$

$10 \notin M \Rightarrow \text{STOP}$, $\text{pred}(10) = 3, q = 10$

Cammino aumentante: $P = \{(6,4), (4,3), (3,10)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (3,10), (6,4)\}$.

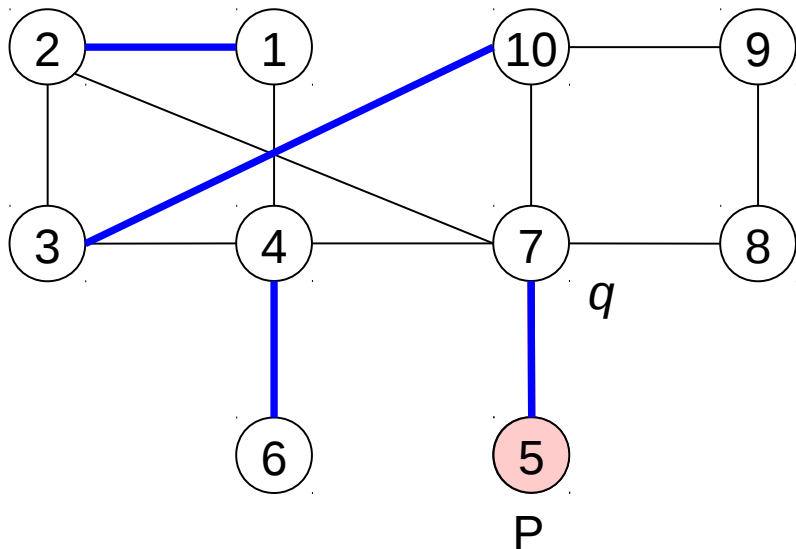
ESERCIZIO 3

Step 3: Matching corrente: $M = \{(1,2), (3,10), (6,4)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 5$.

LABEL (5) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(5) = \{7\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(5)$:

$7 \notin M \Rightarrow \text{STOP}$, $\text{pred}(7) = 5, q = 7$

Cammino aumentante: $P = \{(5,7)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (3,10), (6,4), (5,7)\}$.

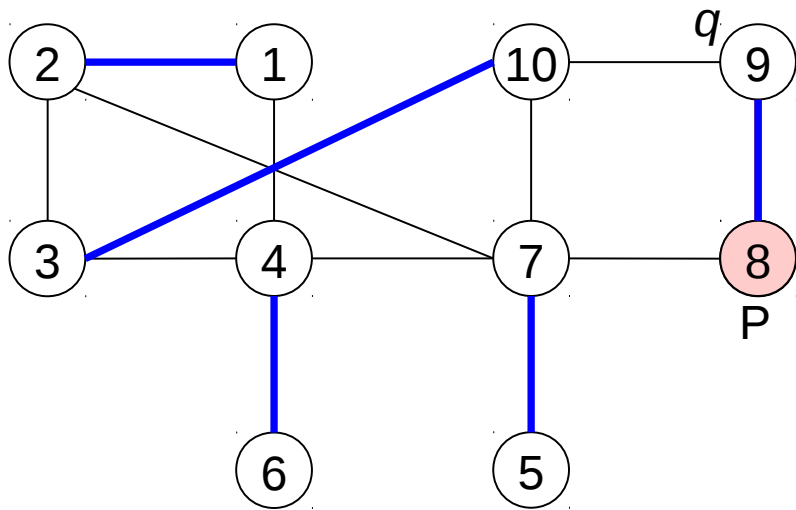
ESERCIZIO 3

Step 4: Matching corrente: $M = \{(1,2), (3,10), (6,4), (5,7)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 8$.

LABEL (8) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(8) = \{9,7\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(8)$:

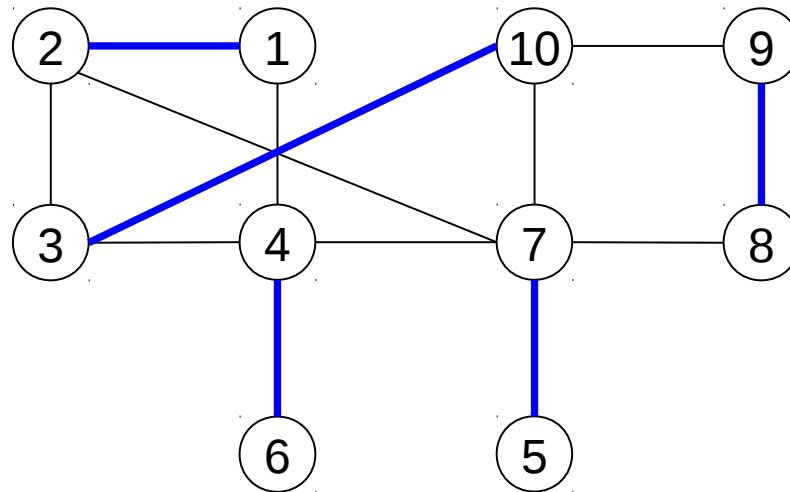
$9 \notin M \Rightarrow \text{STOP}$, $\text{pred}(9) = 8, q = 9$

Cammino aumentante: $P = \{(8,9)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (3,10), (6,4), (5,7), (8,9)\}$.

ESERCIZIO 3

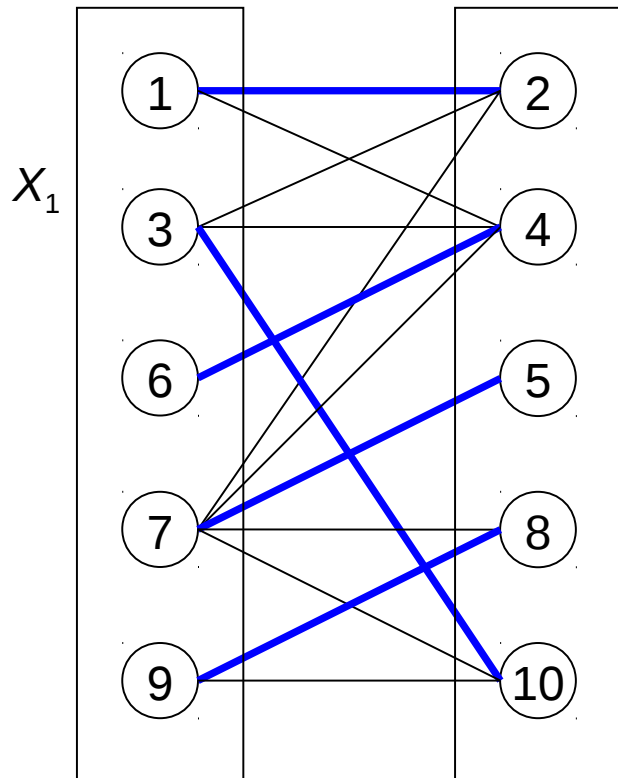
Poiché non esistono nodi esposti rispetto al matching corrente, possiamo concludere che M è massimo.



$$M = \{(1,2), (3,10), (6,4), (5,7), (8,9)\} \Rightarrow \mu(G) = 5.$$

ESERCIZIO 3

Per calcolare un minimo trasversale, riscriviamo G nella forma con le due partizioni:



$$Y_2$$

X_1 = insieme di nodi saturi rispetto a $M = \{1,3,6,7,9\}$

$$X_2 = X - X_1 = \emptyset$$

Y_1 = nodi raggiungibili da $X_2 = \emptyset$

$$Y_2 = Y - Y_1 = \{2, 4, 5, 8, 10\}$$

ESERCIZIO 3

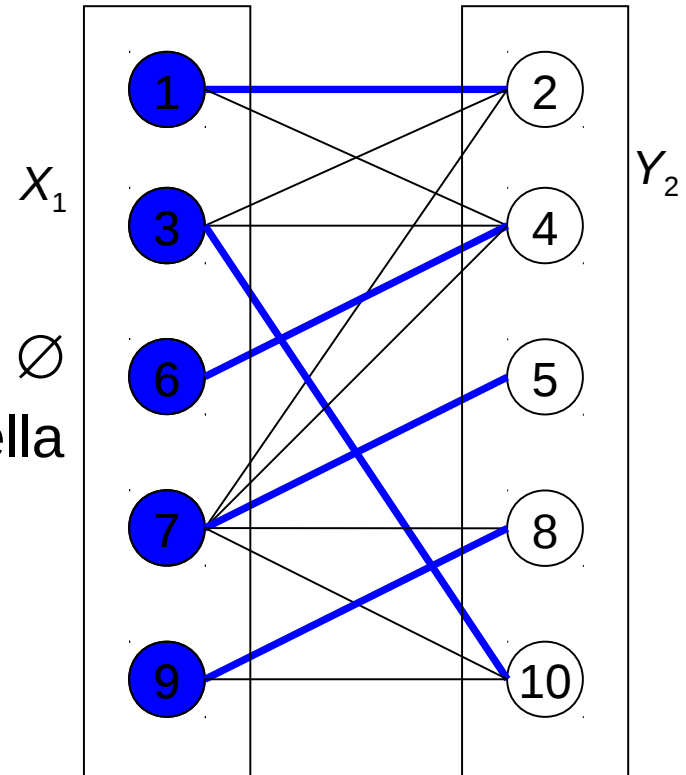
Come scegliamo i nodi da inserire nel trasversale T ?

Per ogni arco $(x_i, y_i) \in M$,

- Se $y_i \in Y_1 \Rightarrow y_i \in T$
- Se $y_i \notin Y_1 \Rightarrow x_i \in T$

Nella situazione corrente, poiché $Y_1 = \emptyset$ il trasversale T conterrà solo i nodi della partizione X .

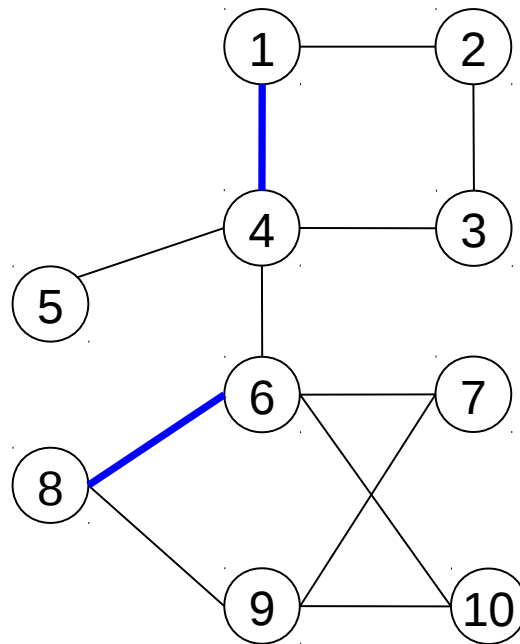
Pertanto $T = \{1, 3, 6, 7, 9\} \Rightarrow \tau(G) = 5$.



OSSERVAZIONE: Se il massimo matching su G è PERFETTO, allora il minimo trasversale T coincide con la partizione X di G .

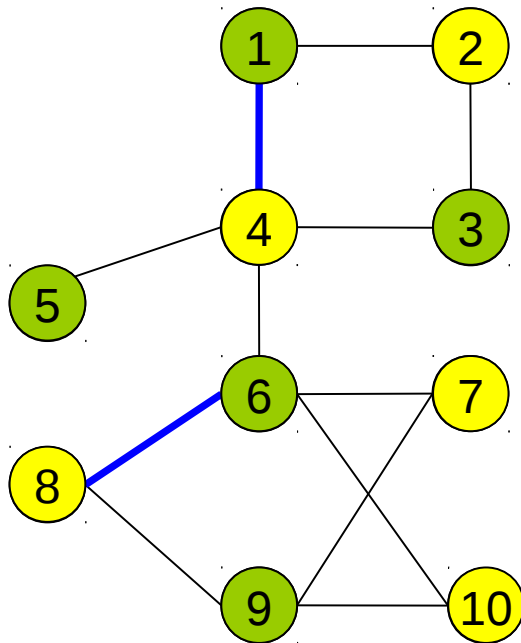
ESERCIZIO 4

Dato il grafo in figura G e il matching $M = \{(1,4), (6,8)\}$ determinare i valori di un massimo matching e di un minimo trasversale.

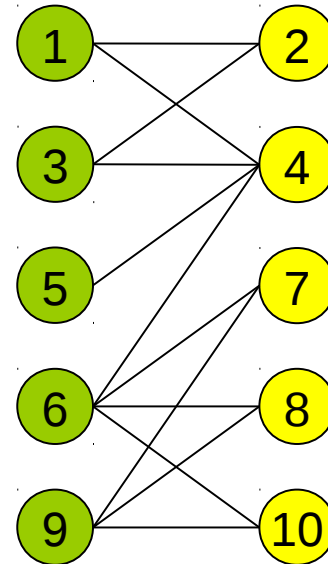
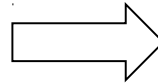


ESERCIZIO 4

Vediamo se G è bicoloreabile:



G è bipartito



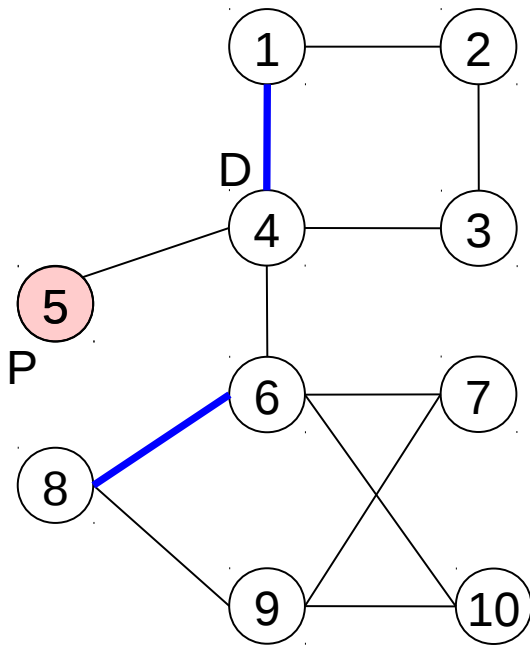
ESERCIZIO 4

Step 1: Matching corrente: $M = \{(1,4), (6,8)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 5$.

LABEL (5) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(5) = \{4\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(5)$:

$4 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(4) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(4) = 5$

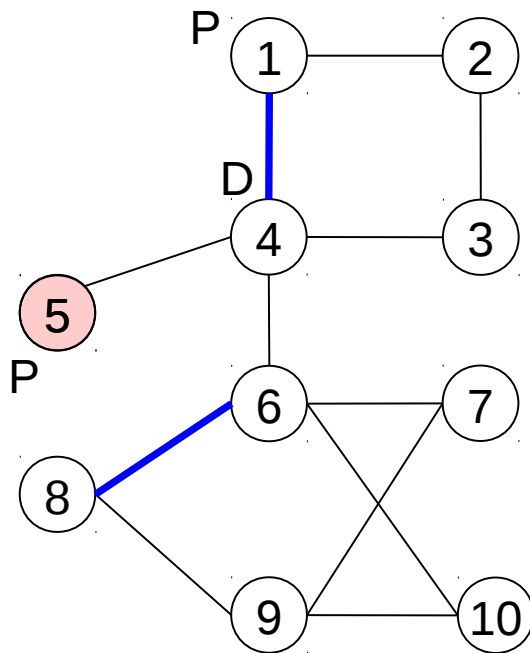
ESERCIZIO 4

Step 1: Matching corrente: $M = \{(1,4), (6,8)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 5$.

LABEL (5) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(5) = \{4\}$



Avviamo la procedura esplora dispari:

$u = 1$ =nodo accoppiato a 4 nel matching M

LABEL (1) = PARI, pred (1) = 4

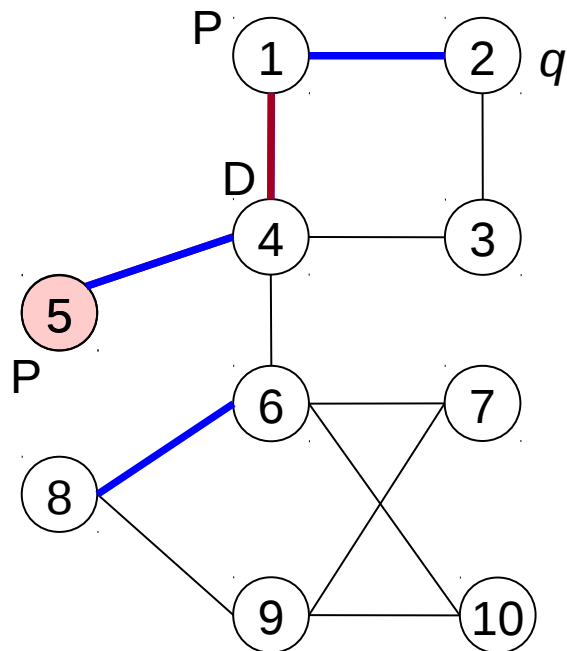
ESERCIZIO 4

Step 1: Matching corrente: $M = \{(1,4), (6,8)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 5$.

LABEL (5) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(5) = \{4\}$



Nodi adiacenti a 1 = $\delta(1) = \{2, 4\}$

Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(1)$:

$2 \notin M \Rightarrow \text{STOP, pred}(2) = 1, q = 2$

Cammino aumentante: $P = \{(5,4), (4,1), (1,2)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (5,4), (6,8)\}$.

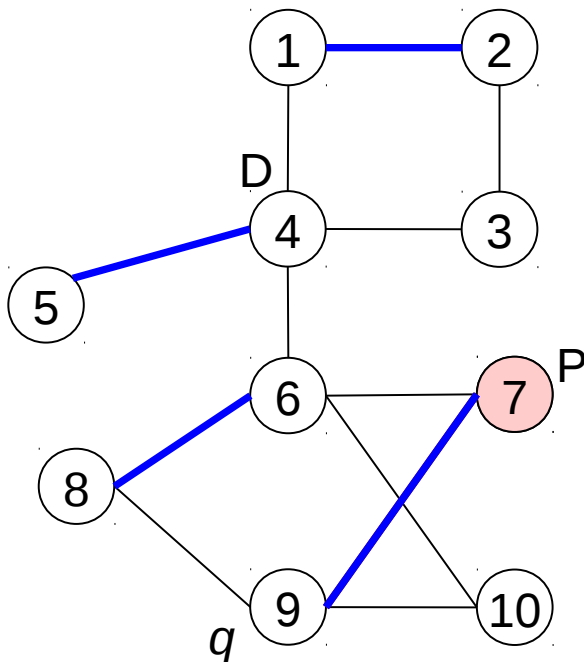
ESERCIZIO 4

Step 2: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 7$.

LABEL (7) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(7) = \{9,6\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(7)$:

$9 \notin M \Rightarrow \text{STOP}$, $\text{pred}(9) = 7, q = 9$

Cammino aumentante: $P = \{(7,9)\}$

Aggiorniamo il matching corrente: $M = (M - P) \cup (P - M) = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

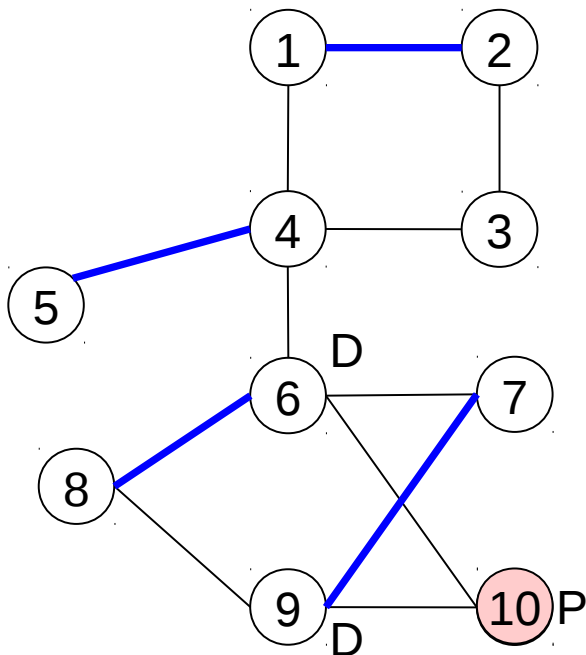
ESERCIZIO 4

Step 3: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 10$.

$\text{LABEL}(10) = \text{PARI}$

Nodi adiacenti a $v = \delta(10) = \{6,9\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(10)$:

$6 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(6) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(6) = 10$

$9 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(9) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(9) = 10$

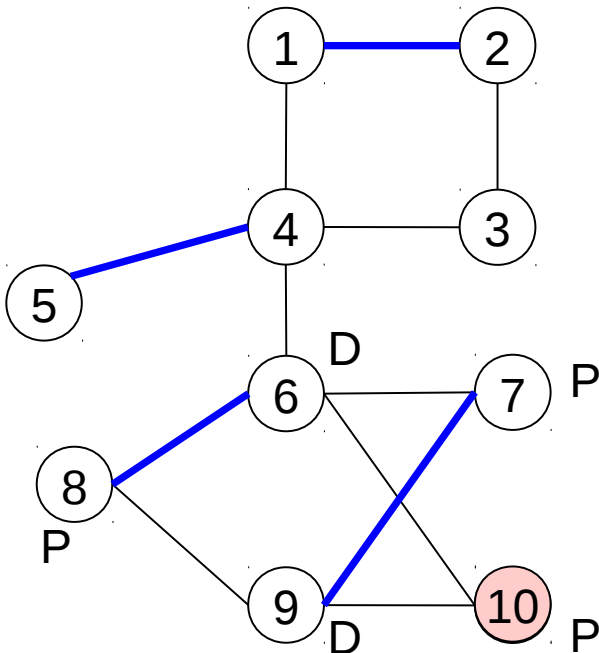
ESERCIZIO 4

Step 3: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 10$.

$\text{LABEL}(10) = \text{PARI}$

Nodi adiacenti a $v = \delta(10) = \{6,9\}$



Avviamo la procedura esplora dispari:

$u = 8$ =nodo accoppiato a 6 nel matching M

$\text{LABEL}(8) = \text{PARI}$, $\text{pred}(8) = 6$

$u = 7$ =nodo accoppiato a 9 nel matching M

$\text{LABEL}(7) = \text{PARI}$, $\text{pred}(7) = 9$

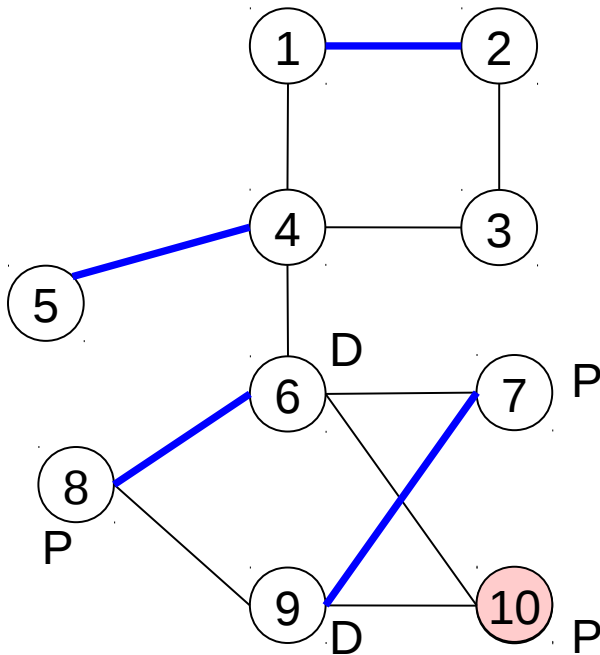
ESERCIZIO 4

Step 3: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 10$.

LABEL (10) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(10) = \{6, 9\}$



Nodi adiacenti a $8 = \delta(8) = \{6, 9\}$

Non esistono nodi NON ETICHETTATI tra gli adiacenti del nodo 8.

Nodi adiacenti a $7 = \delta(7) = \{6, 9\}$

Non esistono nodi NON ETICHETTATI tra gli adiacenti del nodo 8.

Non esistono cammini aumentanti a partire dal nodo esposto $v=10 \Rightarrow$ Possiamo cancellare $v=10$ e tutti gli archi incidenti su v .

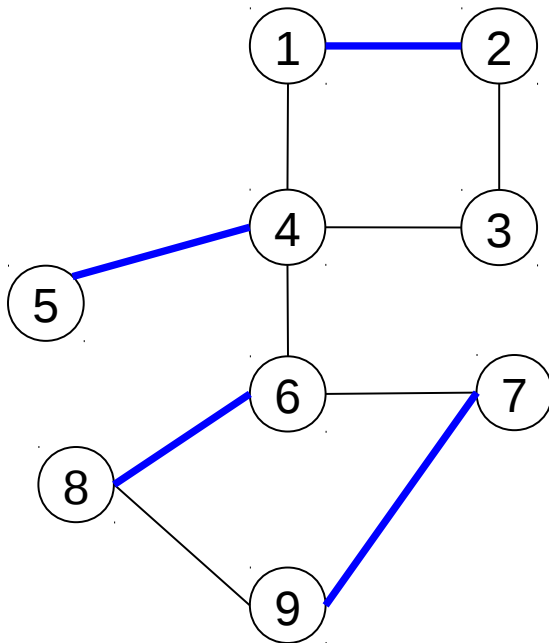
ESERCIZIO 4

Step 3: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 10$.

LABEL (10) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(10) = \{6,9\}$



**NON POSSO FERMARMÌ SE ESISTE
QUALCHE NODO ESPOSTO RISPETTO AL
MATCHING CORRENTE CHE NON E'
ANCORA STATO ANALIZZATO!**

**$v = 3$ è un nodo esposto rispetto ad M non
ancora analizzato.**

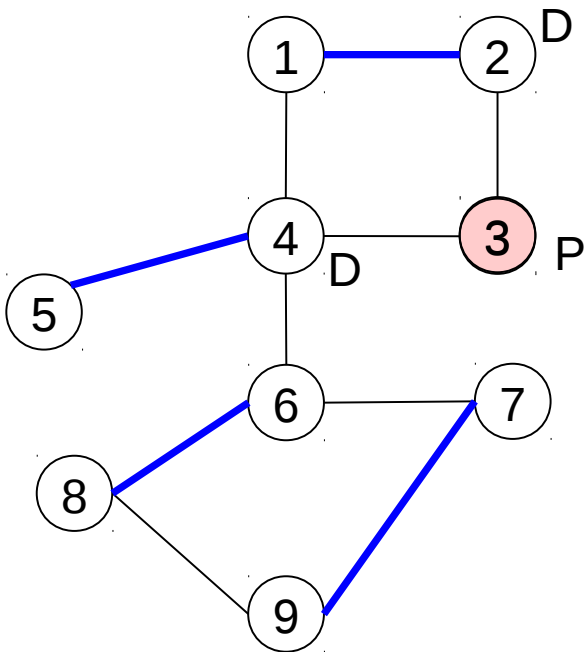
ESERCIZIO 4

Step 4: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 3$.

LABEL (3) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2,4\}$



Avviamo la procedura esplora pari:

Analizziamo i nodi in $\delta(3)$:

$2 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(2) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(2) = 3$

$4 \in M \Rightarrow \text{LABEL}(4) = \text{DISPARI}$, $\text{pred}(4) = 3$

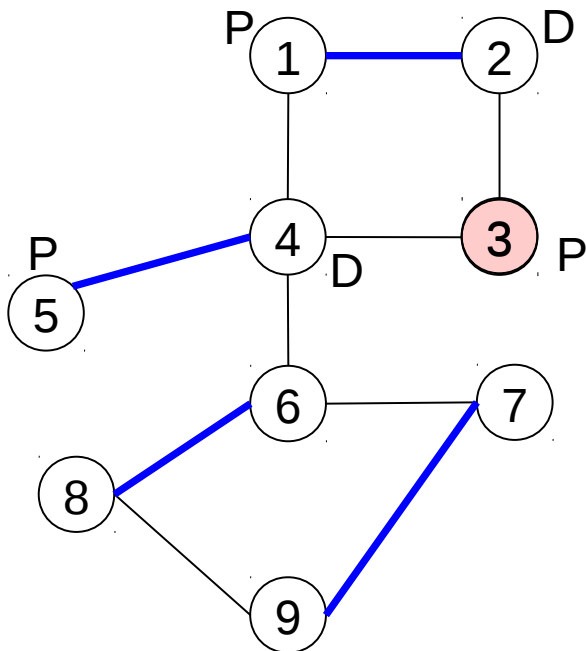
ESERCIZIO 4

Step 4: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 3$.

LABEL (3) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2,4\}$



Avviamo la procedura esplora dispari:

$u = 1$ =nodo accoppiato a 2 nel matching M

LABEL (1) = PARI, pred (1) = 2

$u = 5$ =nodo accoppiato a 4 nel matching M

LABEL (5) = PARI, pred (5) = 4

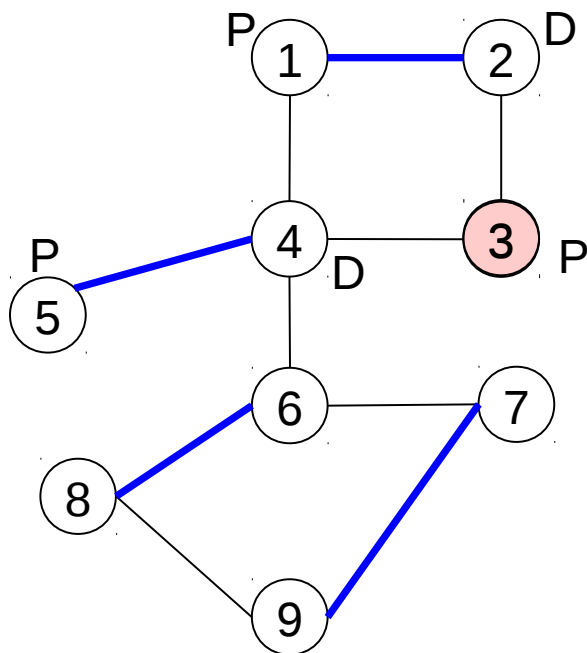
ESERCIZIO 4

Step 4: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 3$.

LABEL (3) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2,4\}$



Nodi adiacenti a 1 = $\delta(1) = \{2, 4\}$

Non esistono nodi NON ETICHETTATI tra gli adiacenti del nodo 1.

Nodi adiacenti a 5 = $\delta(5) = \{4\}$

Non esistono nodi NON ETICHETTATI tra gli adiacenti del nodo 5.

Non esistono cammini aumentanti a partire dal nodo esposto $v=3 \Rightarrow$ Possiamo cancellare $v=3$ e tutti gli archi incidenti su v .

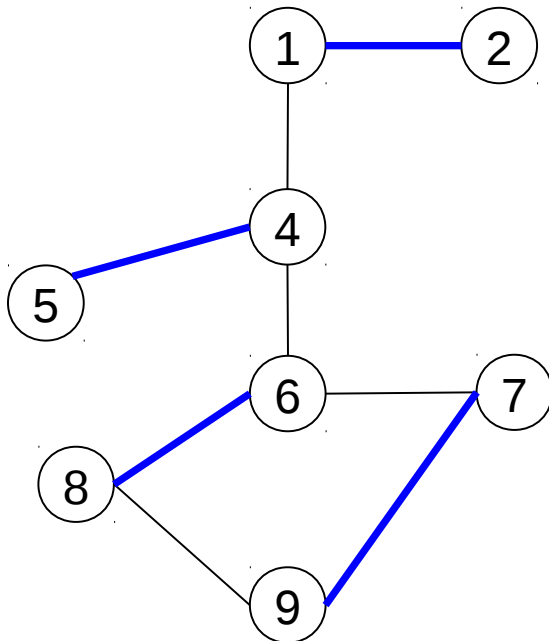
ESERCIZIO 4

Step 4: Matching corrente: $M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\}$.

Scegliamo un nodo esposto rispetto a M : $v = 3$.

LABEL (3) = PARI

Nodi adiacenti a $v = \delta(3) = \{2,4\}$

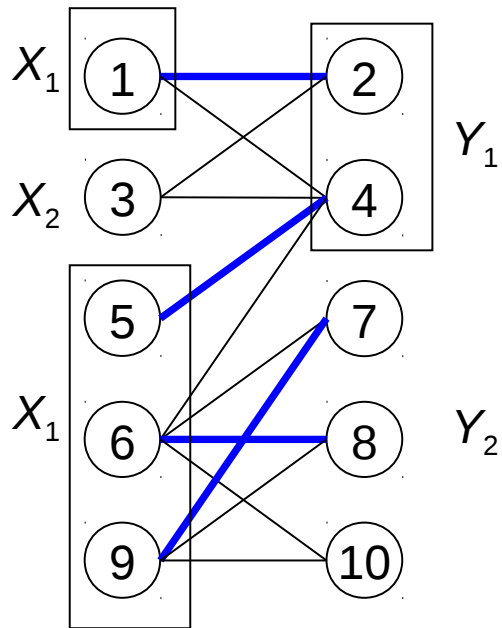


POICHE' NON ESISTONO ALTRI NODI ESPOSTI RISPETTO AL MATCHING CORRENTE CHE NON SONO STATI ANALIZZATI, POSSIAMO CONCLUDERE CHE IL MATCHING CORRENTE E' MASSIMO.

$$M = \{(1,2), (5,4), (6,8), (7,9)\} \Rightarrow \mu(G) = 4.$$

ESERCIZIO 4

Per calcolare un minimo trasversale, riscriviamo G nella forma con le due partizioni:



X_1 = insieme di nodi saturi rispetto a $M = \{1, 5, 6, 9\}$

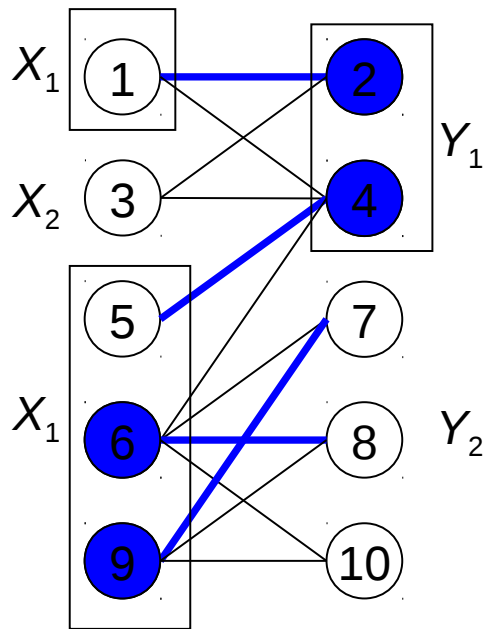
$X_2 = X - X_1 = \{3\}$

Y_1 = nodi raggiungibili da $X_2 = \{2, 4\}$

$Y_2 = Y - Y_1 = \{7, 8, 10\}$

ESERCIZIO 4

Scegliamo i nodi da inserire nel trasversale T analizzando tutti gli archi del matching massimo.



Arco (1,2): $2 \in Y_1 \Rightarrow 2 \in T$

Arco (5,4): $4 \in Y_1 \Rightarrow 4 \in T$

Arco (6,8): $8 \notin Y_1 \Rightarrow 6 \in T$

Arco (9,7): $7 \notin Y_1 \Rightarrow 9 \in T$

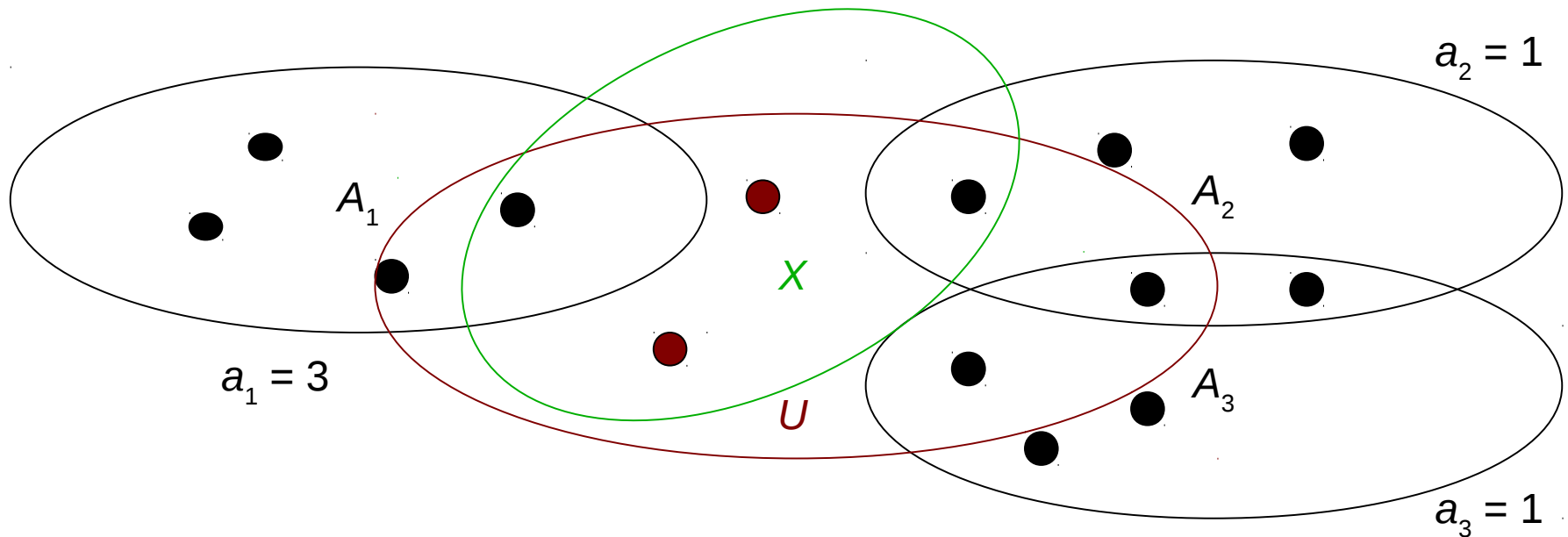
Pertanto $T = \{2, 4, 6, 9\} \Rightarrow \tau(G) = 4$

ESERCIZIO 5

Siano U, A_1, \dots, A_n insiemi finiti, e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Sia

$$F = \{X \subseteq U : |X \cap A_k| \leq a_k \text{ per ciascun } k = 1, \dots, n\}.$$

Dire se la coppia (U, F) individua o meno un matroide motivando la risposta.



ESERCIZIO 5

Ricordiamo che la coppia (U, F) è un matroide se valgono le seguenti condizioni:

1. $\emptyset \in F$
2. Per ogni $Y \subseteq X$, $X \in F \Rightarrow Y \in F$.
3. Dati $X, Y \in F$, con $|X| < |Y|$, esiste $y \in Y$ tale che $X \cup \{y\} \in F$.

Banalmente $\emptyset \in F$.

Supponiamo che $X \in F$. Allora $|X \cap A_k| \leq a_k$, per ciascun $k = 1, \dots, n$.

Se $Y \subseteq X$, allora $|Y| \leq |X|$. Pertanto

$$|Y \cap A_k| \leq |X \cap A_k| \leq a_k.$$

Possiamo quindi concludere che la coppia è subclusiva.

ESERCIZIO 5

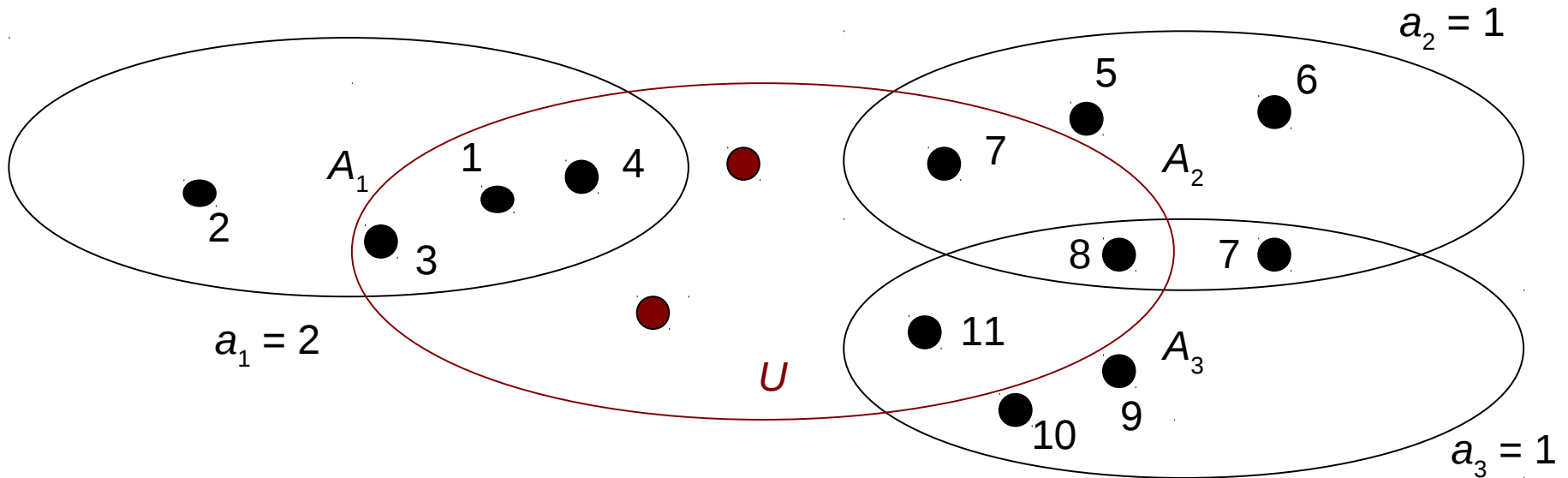
Resta da verificare se la coppia (U, F) soddisfa la proprietà di scambio.

Se pensiamo che tale proprietà sia soddisfatta dobbiamo dimostrarlo in maniera formale.

Viceversa, se pensiamo che la proprietà di scambio non sia soddisfatta dobbiamo cercare un controesempio in cui essa non vale.

ESERCIZIO 5

Consideriamo la seguente situazione:

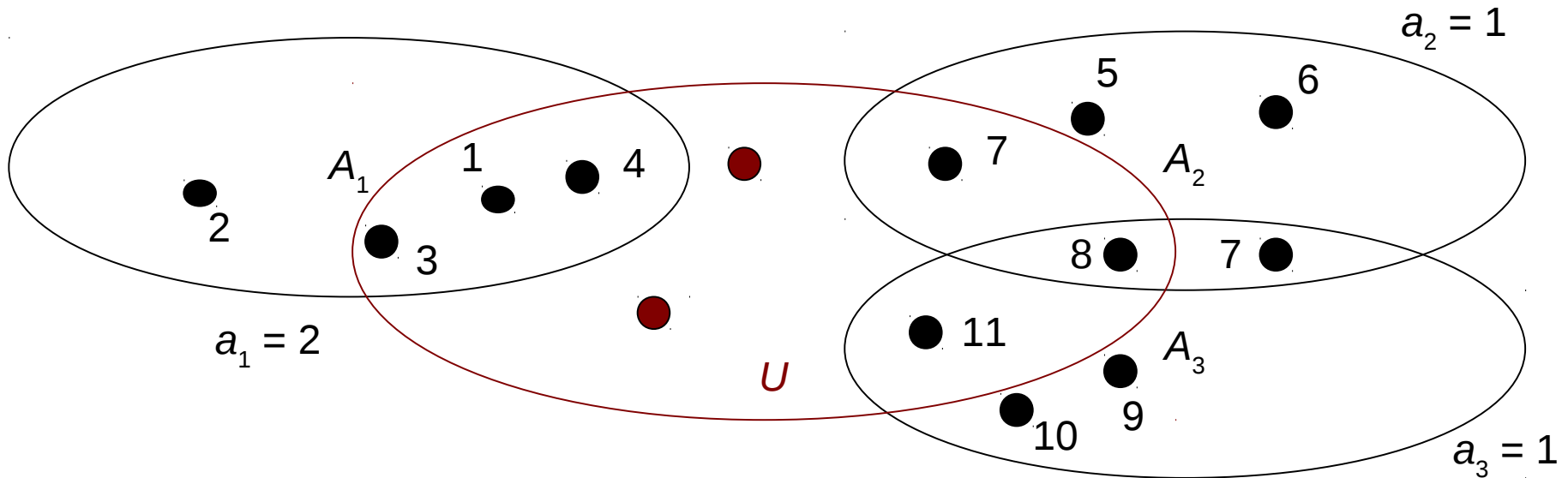


Siano: $Y = \{1, 4, 7, 11\}$ e $X = \{1, 3, 8\}$. Entrambi gli insiemi appartengono a F . Infatti:

$$\begin{aligned} Y \cap A_1 &= \{1, 4\} \Rightarrow |Y \cap A_1| = 2 \leq a_1 & X \cap A_1 &= \{1, 3\} \Rightarrow |X \cap A_1| = 2 \leq a_1 \\ Y \cap A_2 &= \{7\} \Rightarrow |Y \cap A_2| = 1 \leq a_2 & X \cap A_2 &= \{8\} \Rightarrow |X \cap A_2| = 1 \leq a_2 \\ Y \cap A_3 &= \{11\} \Rightarrow |Y \cap A_3| = 1 \leq a_3 & X \cap A_3 &= \{8\} \Rightarrow |X \cap A_3| = 1 \leq a_3 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

Consideriamo la seguente situazione:



Tuttavia è immediato osservare che, per ogni $y \in Y \setminus X$, l'insieme $X \cup \{y\} \notin F$.

Pertanto la proprietà di scambio non è verificata e la coppia (U, F) non è un matroide.