ESERCIZIO 1: Punto 1

La seguente matrice è una matrice delle distanze di un’istanza del problema del Commesso Viaggiatore.

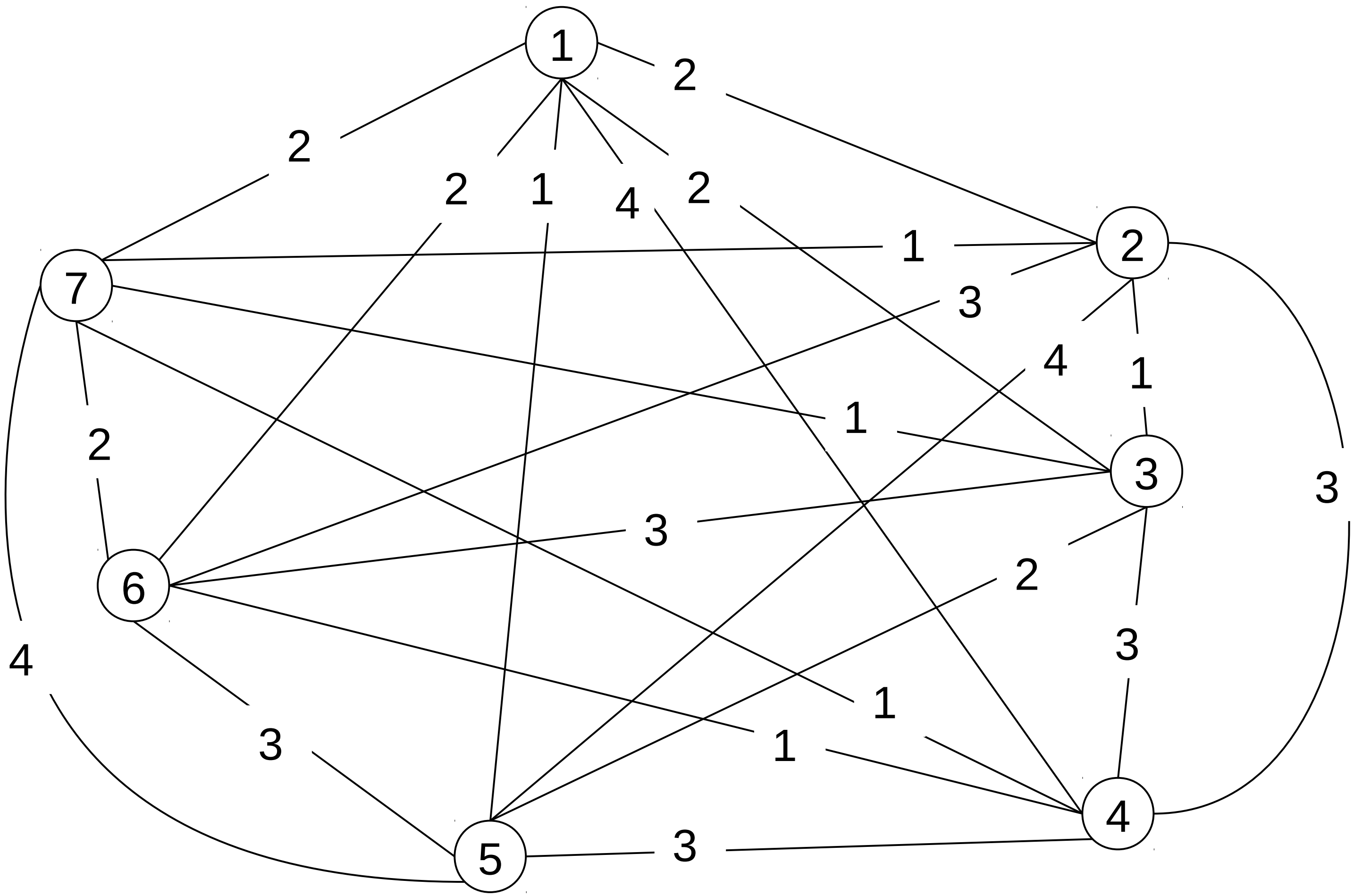
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	-	2	2	4	1	2	2
2	2	-	1	3	4	3	1
3	2	1	-	3	2	3	1
4	4	3	3	-	3	1	1
5	1	4	2	3	-	3	4
6	2	3	3	1	3	-	2
7	2	1	1	1	4	2	-

Calcolare

1. Il valore del rilassamento che si ottiene determinando l’1-albero di costo minimo.

ESERCIZIO 1: Punto 1

Disegniamo il grafo *G* = (*V*, *E*) associato alla matrice delle distanze.

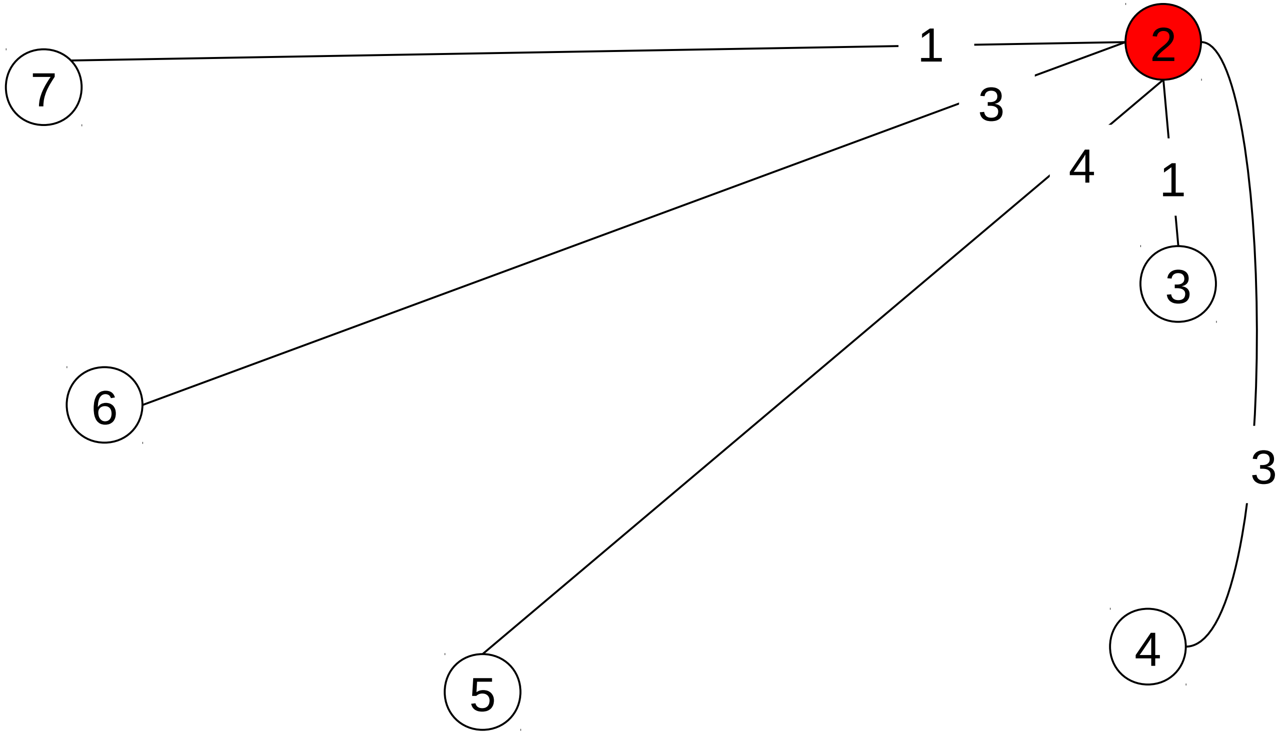


ESERCIZIO 1: Punto 1

Non consideriamo il nodo $v = 1$ e calcoliamo il minimo albero ricoprente su G utilizzando l'algoritmo di Prim.

$T = \{2\}$; $V–T = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$c^*_{2i} = \min \{c_{2i} : i \in V–T\} = c_{23} = c_{27} = 1$

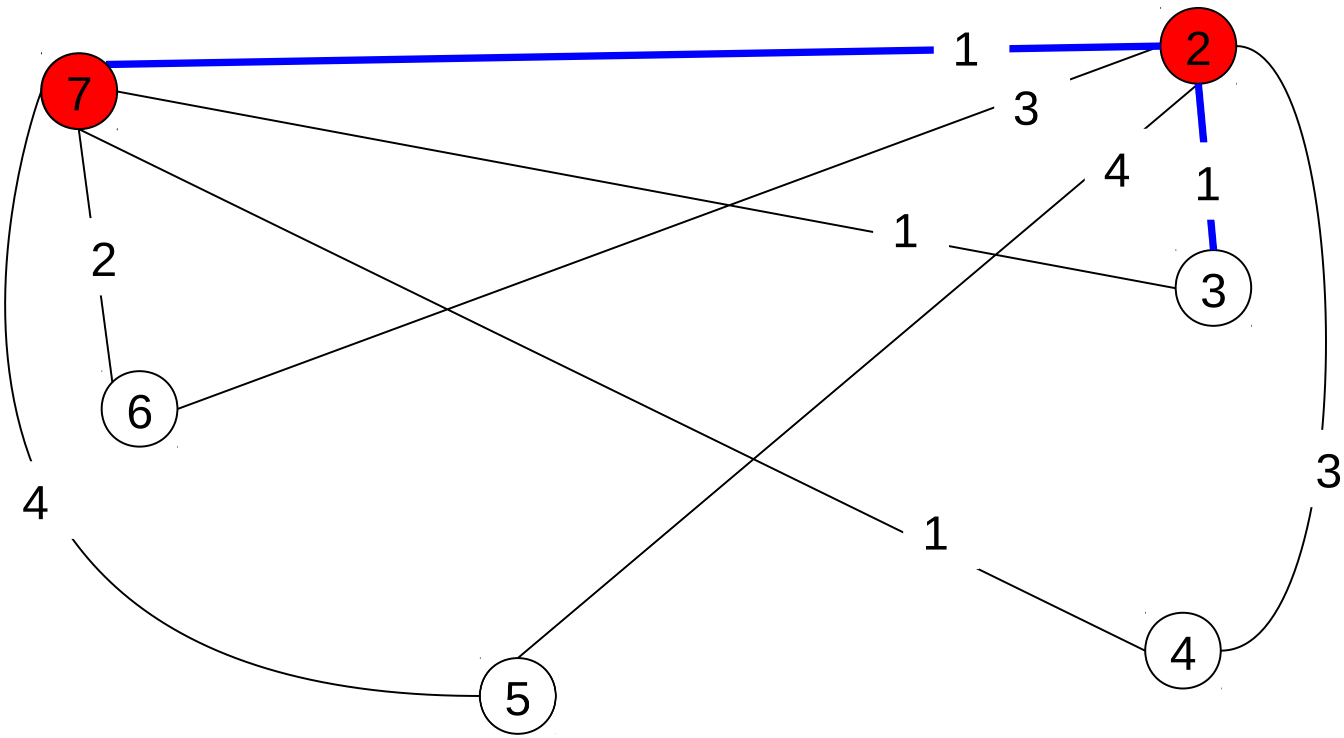


ESERCIZIO 1: Punto 1

Non consideriamo il nodo v = 1 e calcoliamo il minimo albero ricoprente su G utilizzando l'algoritmo di Prim.

$T = \{2\}$; $V–T = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$\boxed{c^*_{2i} = \min\{c_{2i} : i \in V–T\} = c_{27} = 1}$ ⇒ $T = \{2, 7\}$; $V–T = \{3, 4, 5, 6\}$



ESERCIZIO 1: Punto 1

Non consideriamo il nodo v = 1 e calcoliamo il minimo albero ricoprente su G utilizzando l'algoritmo di Prim.

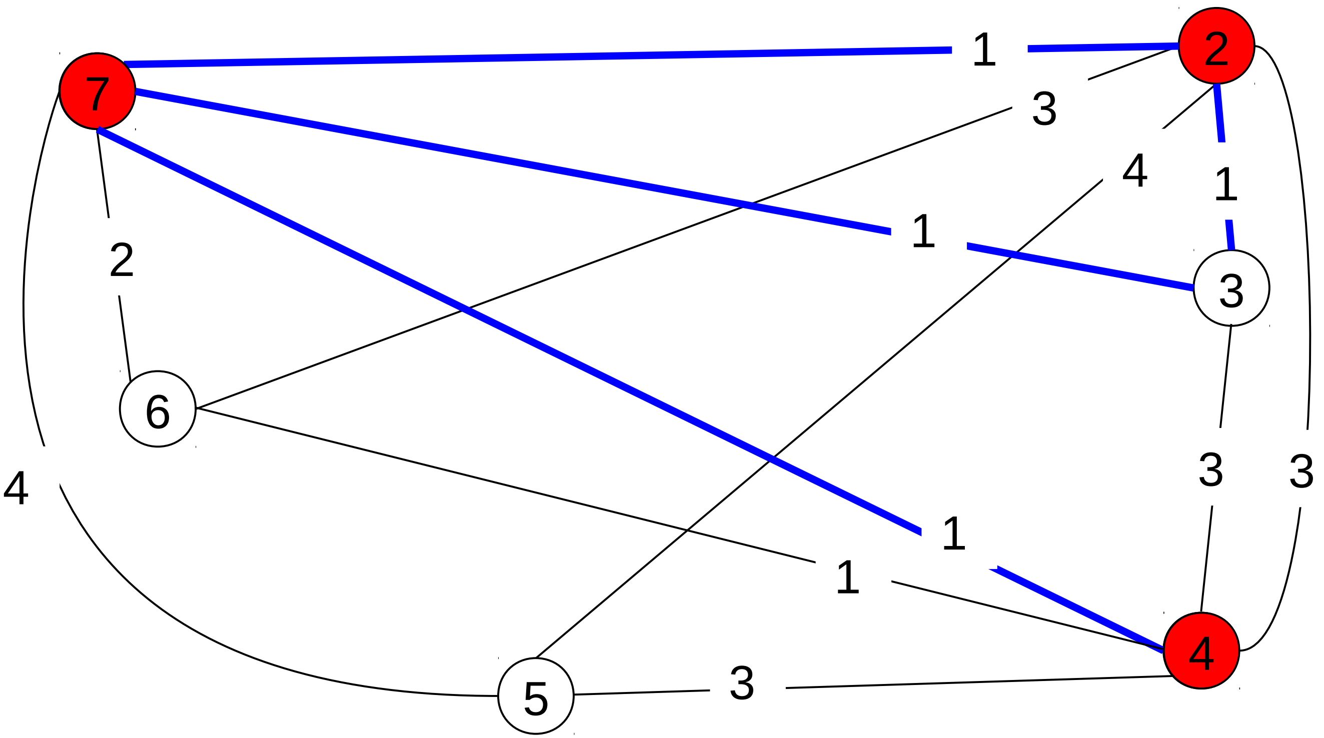
T = {2, 7}; V–T = {3, 4, 5, 6}

$c^*_{2i} = \min\{c_{2i} : i \in V - T\} = c_{23} = 1$

$\boxed{c^*_{7i} = \min\{c_{7i} : i \in V - T\} = c_{73} = c_{74} = 1}$

T = {2, 7,4};

V–T = {3, 5, 6}



ESERCIZIO 1: Punto 1

Non consideriamo il nodo v = 1 e calcoliamo il minimo albero ricoprente su G utilizzando l'algoritmo di Prim.

$T = \{2, 7, 4\}$; $V–T = \{3, 5, 6\}$

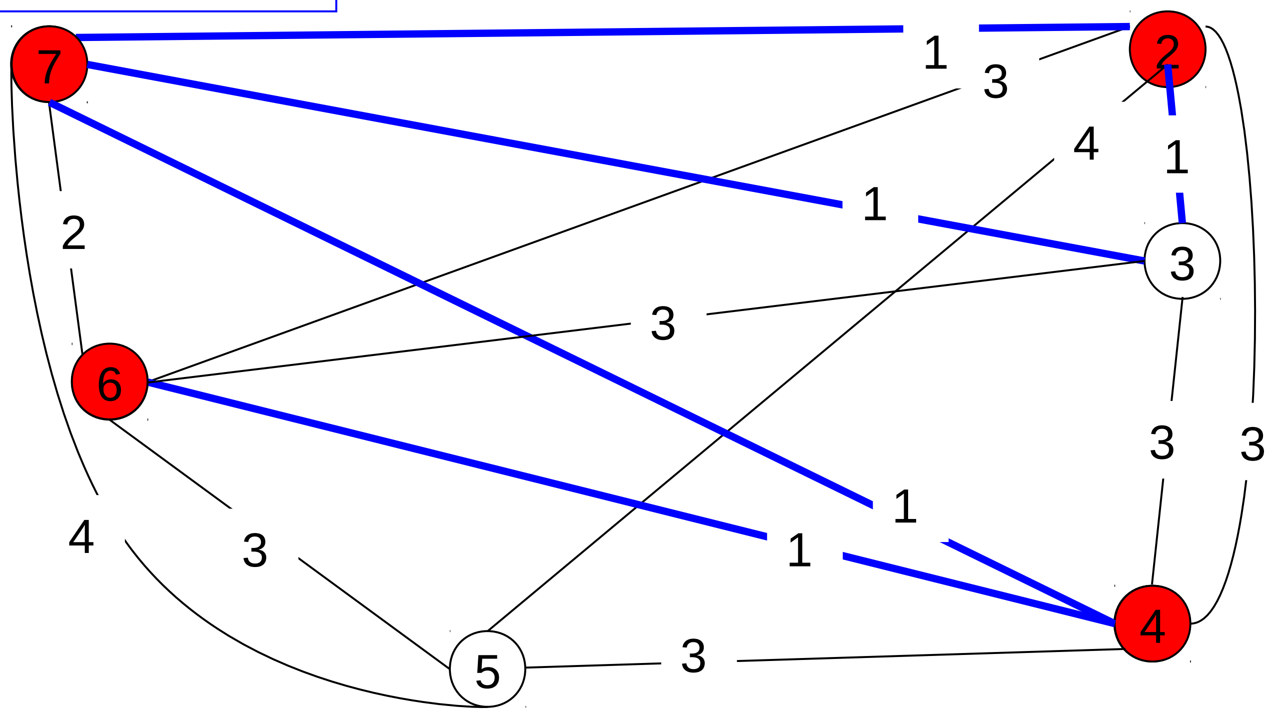
$c^*_{2i} = \min \{c_{2i} : i \in V–T\} = c_{23} = 1$

$c^*_{7i} = \min \{c_{7i} : i \in V–T\} = c_{73} = 1$

$\boxed{c^*_{4i} = \min \{c_{4i} : i \in V–T\} = c_{46} = 1}$

$T = \{2, 7, 4, 6\}$;

$V–T = \{3, 5\}$



ESERCIZIO 1: Punto 1

Non consideriamo il nodo v = 1 e calcoliamo il minimo albero ricoprente su G utilizzando l'algoritmo di Prim.

$T = \{2, 7, 4, 6\}$; $V–T = \{3, 5\}$

$c^*_{2i} = \min \{c_{2i} : i \in V–T\} = c_{23} = 1$

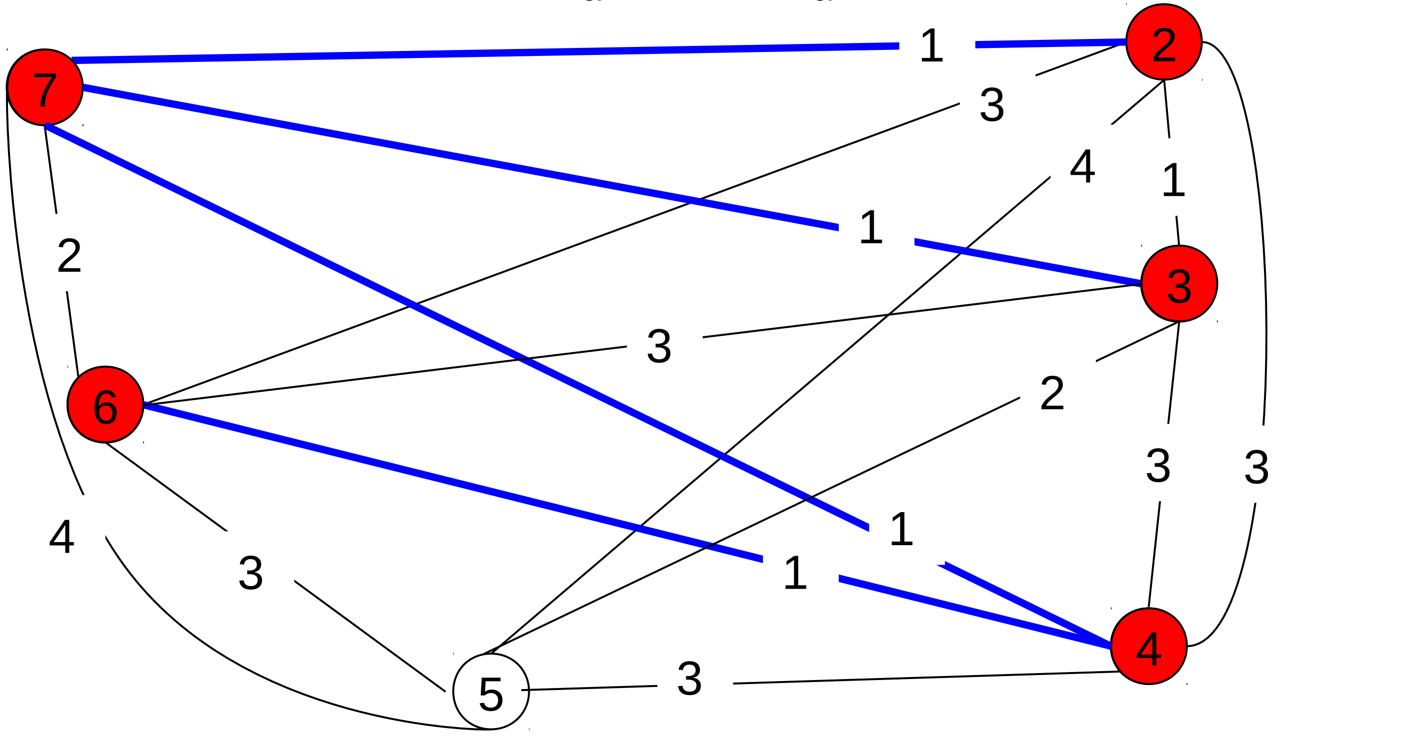
$c^*_{4i} = \min \{c_{4i} : i \in V–T\} = c_{43} = c_{45} = 3$

$\boxed{c^*_{7i} = \min \{c_{7i} : i \in V–T\} = c_{73} = 1}$

$c^*_{6i} = \min \{c_{6i} : i \in V–T\} = c_{63} = c_{65} = 3$

$T = \{2, 7, 4, 6, 3\}$;

$V–T = \{5\}$

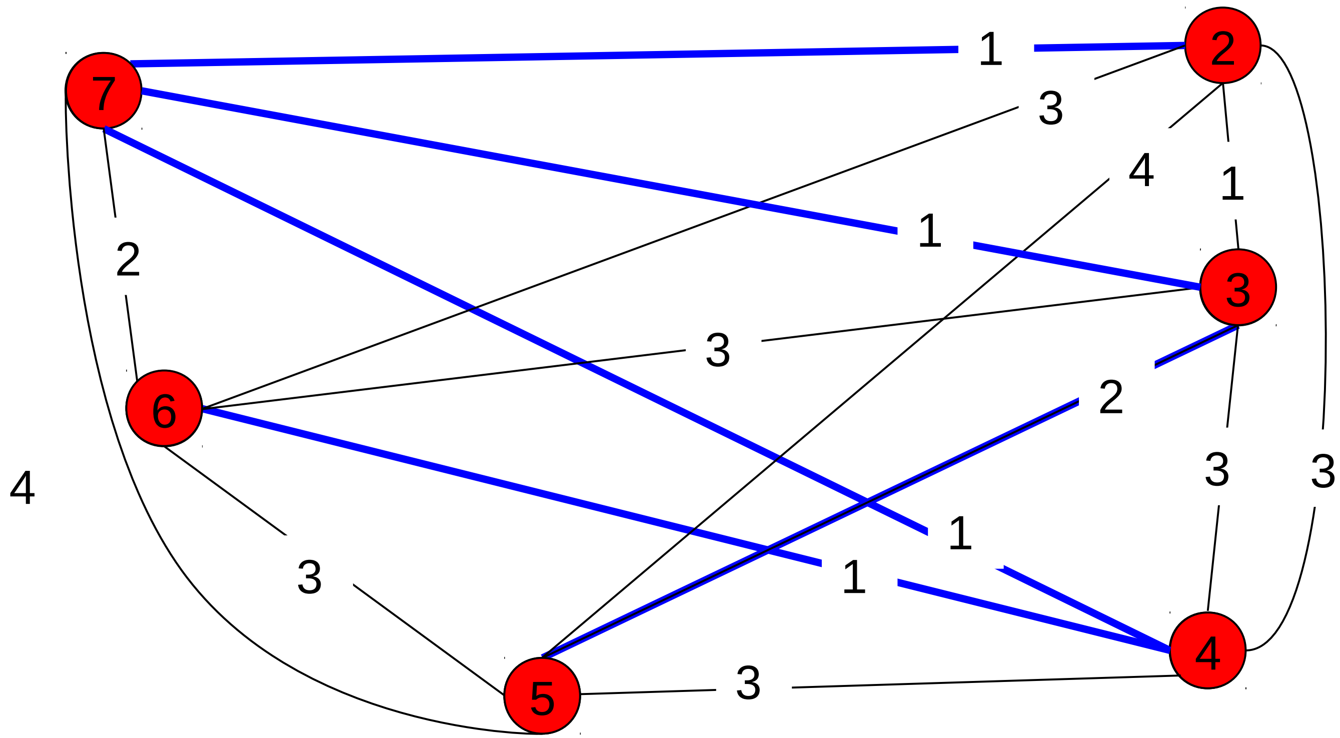


ESERCIZIO 1: Punto 1

A questo punto, l’arco che dista meno dal nodo 5 è l’arco (3,5).

T = {2, 7, 4, 6, 3, 5}; *V*–*T* = ∅

Minimo albero ricoprente = {27, 74, 46, 73, 35}

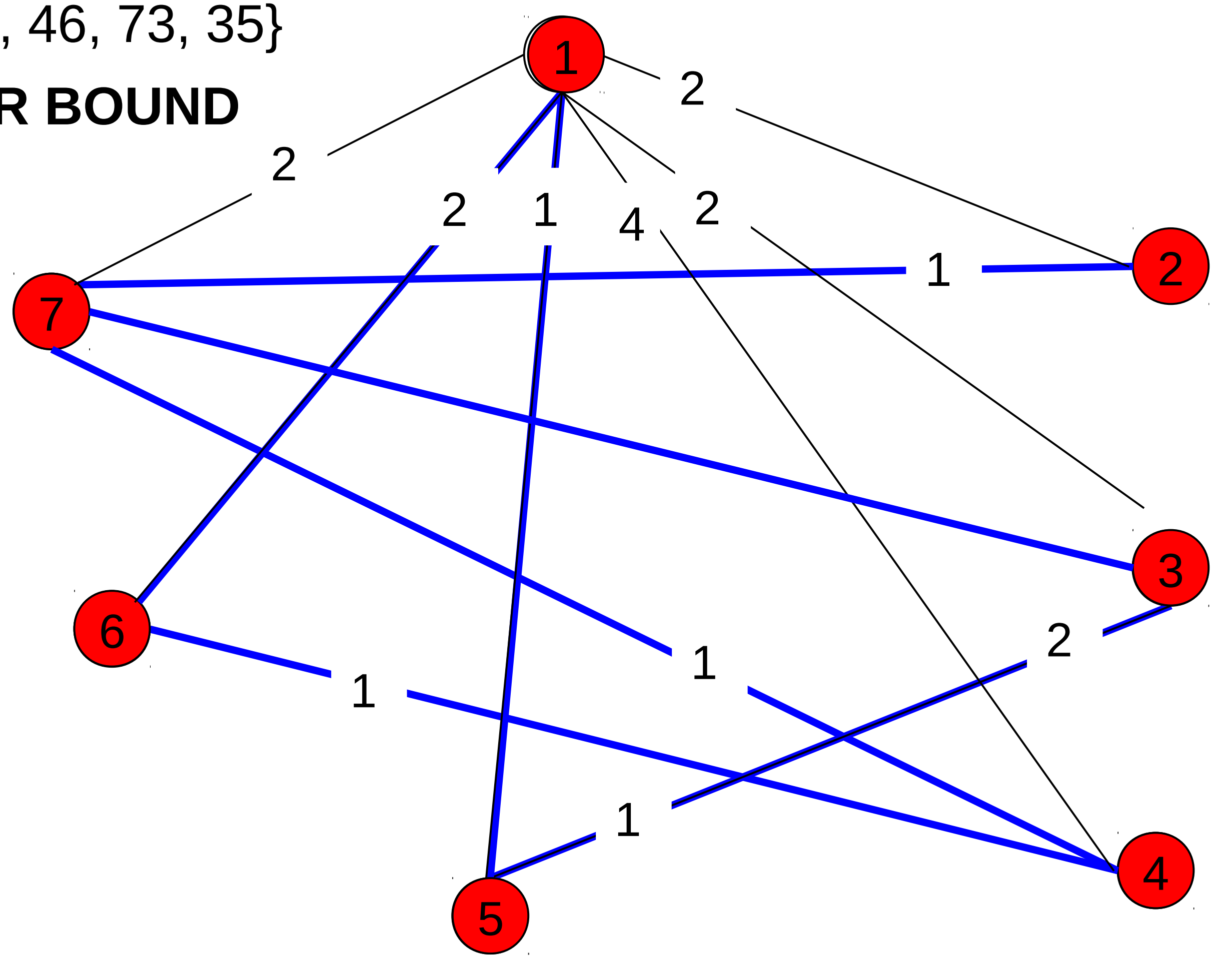


ESERCIZIO 1: Punto 1

Per calcolare l'1-abero, re-introduciamo il nodo 1 e prendiamo i due archi di costo minimo uscenti da tale nodo.

1-albero = {15, 16, 27, 74, 46, 73, 35}

C(1-albero) = 9 = LOWER BOUND



ESERCIZIO 1: Punto 2

La seguente matrice è una matrice delle distanze di un'istanza del problema del Commesso Viaggiatore.

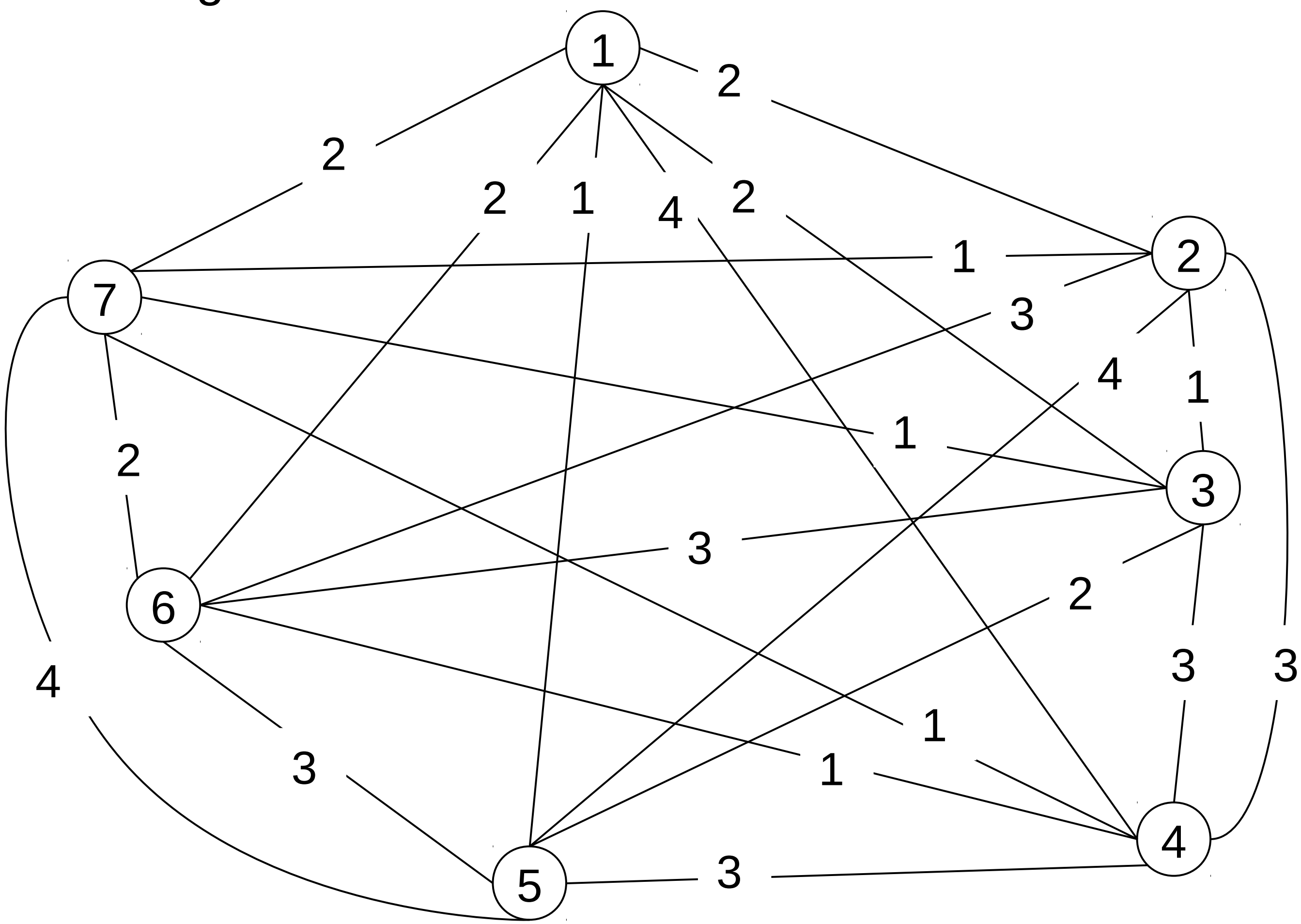
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	-	2	2	4	1	2	2
2	2	-	1	3	4	3	1
3	2	1	-	3	2	3	1
4	4	3	3	-	3	1	1
5	1	4	2	3	-	3	4
6	2	3	3	1	3	-	2
7	2	1	1	1	4	2	-

Calcolare

1. Il valore di una soluzione euristica calcolata con l'algoritmo Double Tree.

ESERCIZIO 1: Punto 2

Calcoliamo il minimo albero ricoprente sul grafo di partenza $G = (V, E)$ utilizzando l'algoritmo di Prim.



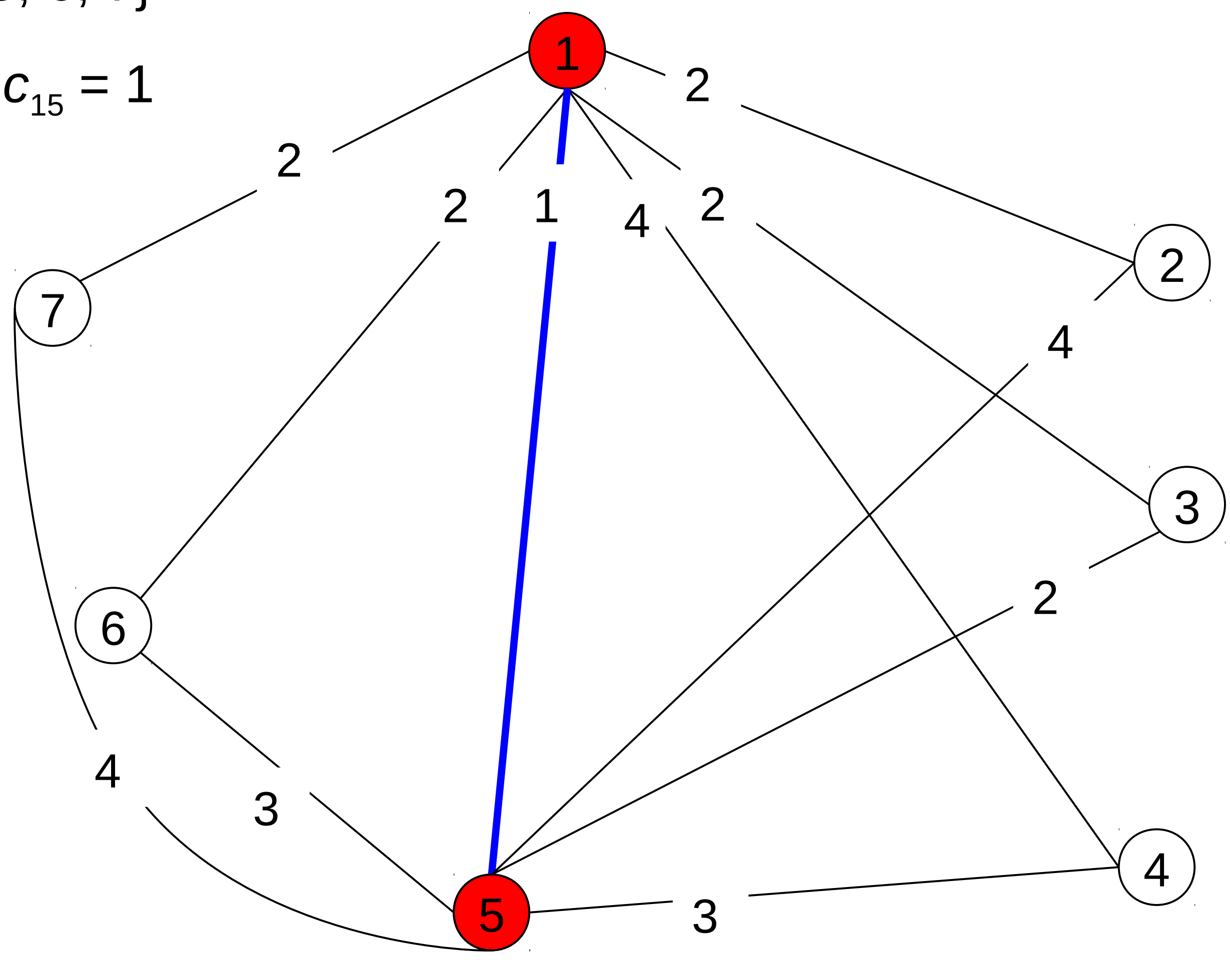
ESERCIZIO 1: Punto 2

$T = \{1\}$; $V – T = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$c^*_{1i} = \min \{c_{1i} : i \in V – T\} = c_{15} = 1$

$T = \{1, 5\}$;

$V–T = \{2, 3, 4, 6, 7\}$



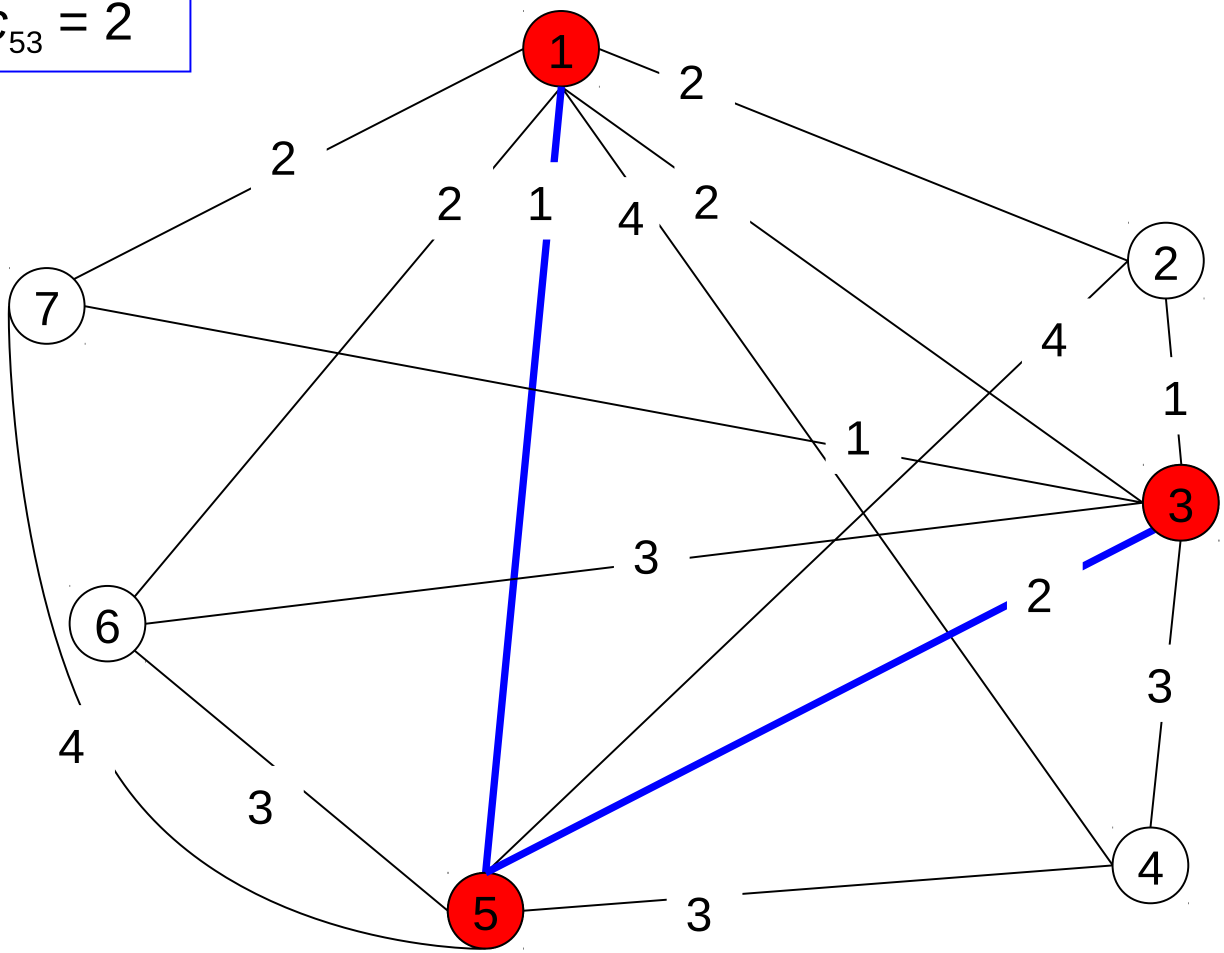
ESERCIZIO 1: Punto 2

$c^*_{1i} = \min \{c_{1i} : i \in V - T\} = c_{12} = c_{13} = c_{16} = c_{17} = 2$

$\boxed{c^*_{5i} = \min \{c_{5i} : i \in V - T\} = c_{53} = 2}$

$T = \{1, 5, 3\};$

$V - T = \{2, 4, 6, 7\}$



ESERCIZIO 1: Punto 2

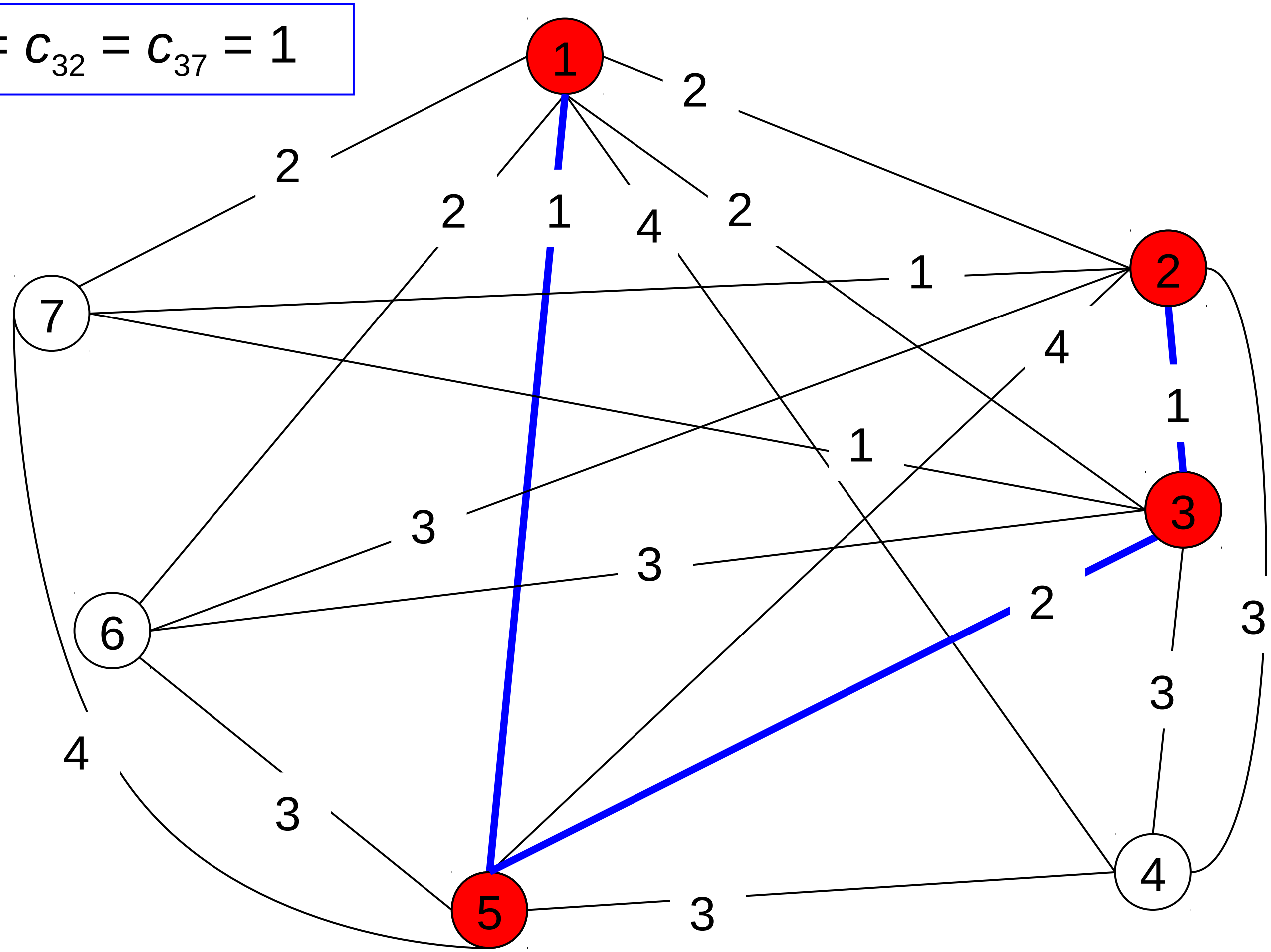
$c^*_{1i} = \min \{c_{1i} : i \in V - T\} = c_{12} = c_{13} = c_{16} = c_{17} = 2$

$c^*_{5i} = \min \{c_{5i} : i \in V - T\} = c_{54} = c_{56} = 2$

$\boxed{c^*_{3i} = \min \{c_{3i} : i \in V - T\} = c_{32} = c_{37} = 1}$

$T = \{1, 5, 3, 2\};$

$V - T = \{4, 6, 7\}$



ESERCIZIO 1: Punto 2

$c^*_{1i} = \min\{c_{1i} : i \in V - T\} = c_{12} = c_{13} = c_{16} = c_{17} = 2$

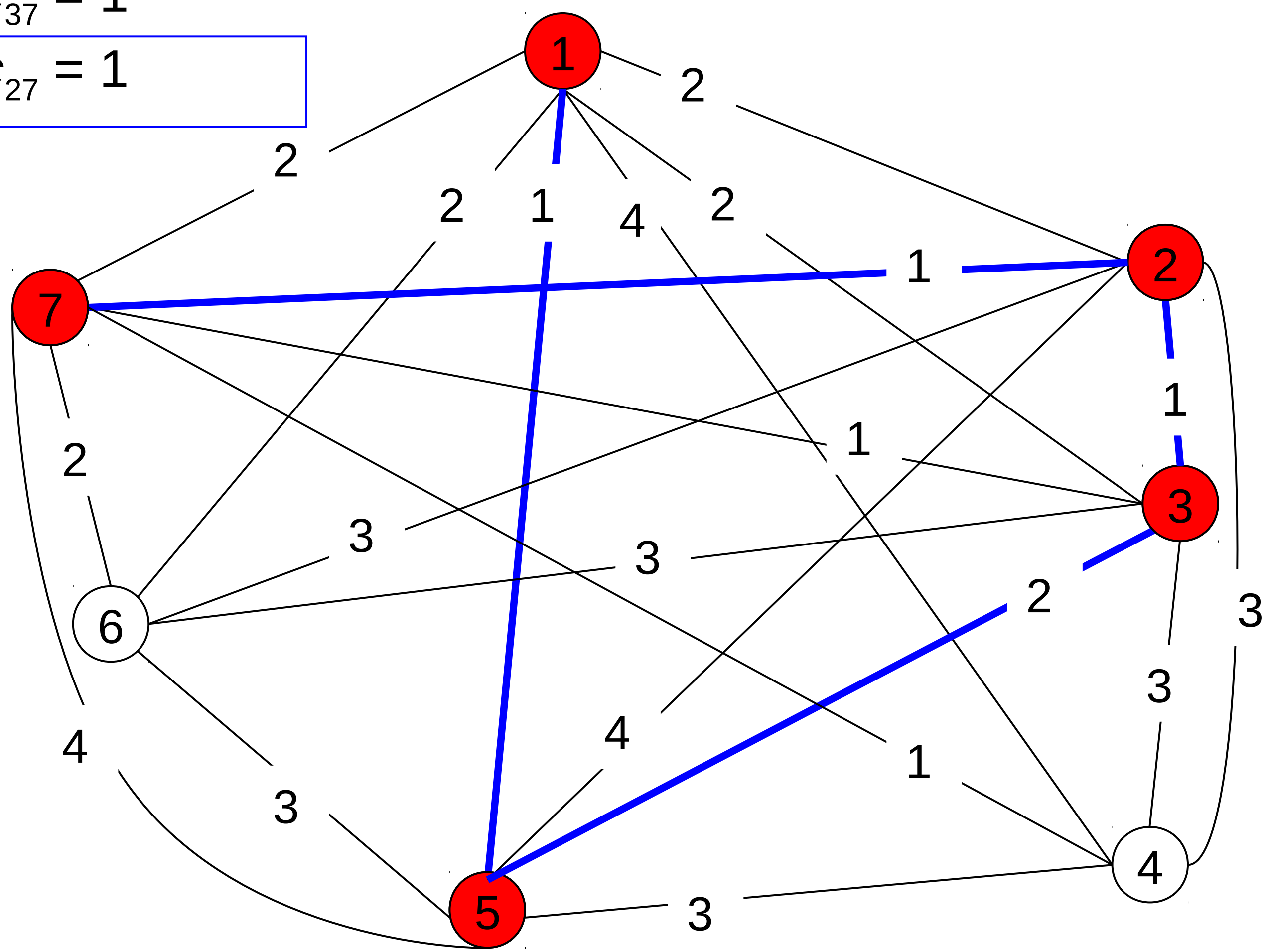
$c^*_{5i} = \min\{c_{5i} : i \in V - T\} = c_{54} = c_{56} = 2$

$c^*_{3i} = \min\{c_{3i} : i \in V - T\} = c_{37} = 1$

$\boxed{c^*_{2i} = \min\{c_{2i} : i \in V - T\} = c_{27} = 1}$

$T = \{1, 5, 3, 2, 7\};$

$V - T = \{4, 6\}$



ESERCIZIO 1: Punto 2

$c^*_{1i} = \min\,\{c_{1i} : i \in V - T\} = c_{12} = c_{13} = c_{16} = c_{17} = 2$

$c^*_{5i} = \min\,\{c_{5i} : i \in V - T\} = c_{54} = c_{56} = 2$

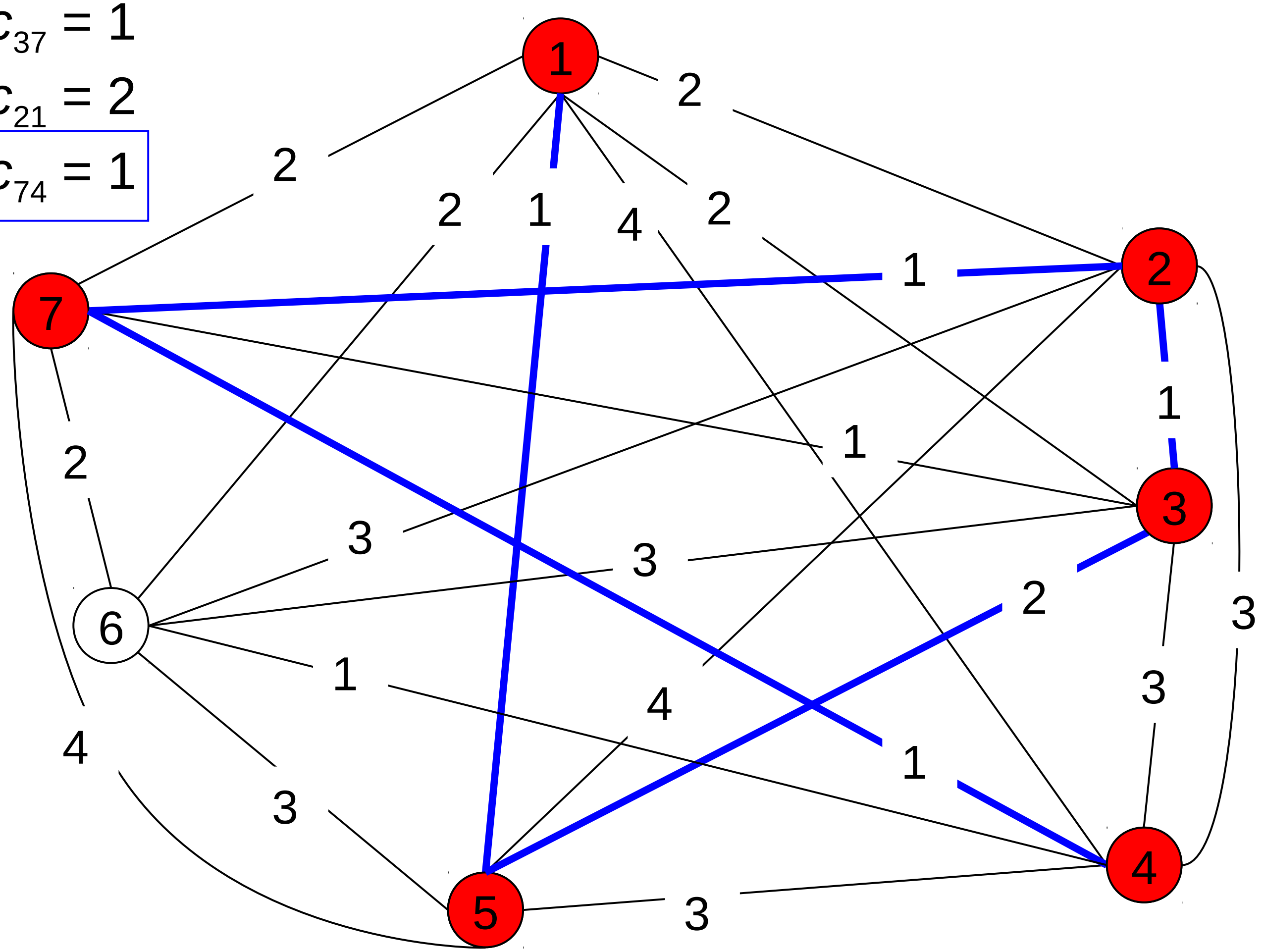
$c^*_{3i} = \min\,\{c_{3i} : i \in V - T\} = c_{37} = 1$

$c^*_{2i} = \min\,\{c_{2i} : i \in V - T\} = c_{21} = 2$

$\boxed{c^*_{7i} = \min\,\{c_{7i} : i \in V - T\} = c_{74} = 1}$

$T = \{1, 5, 3, 2, 7, 4\};$

$V - T = \{6\}$

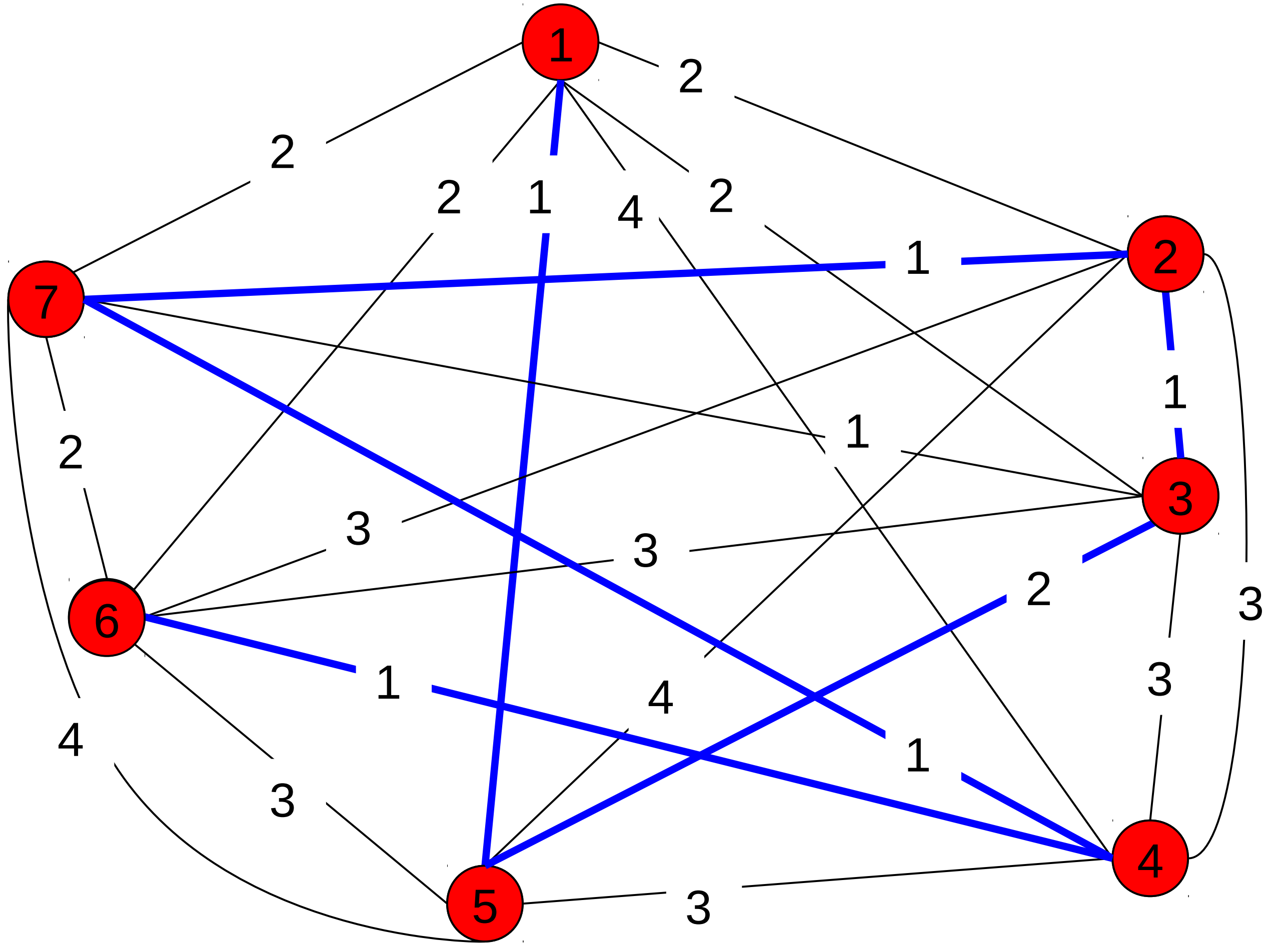


ESERCIZIO 1: Punto 2

A questo punto, l'arco che dista meno dal nodo 6 è l'arco (4,6).

T = {1, 5, 3, 2, 7, 4, 6}; $V–T = \emptyset$

Minimo albero ricoprente = {15, 53, 32, 27, 74, 46}



ESERCIZIO 1: Punto 2

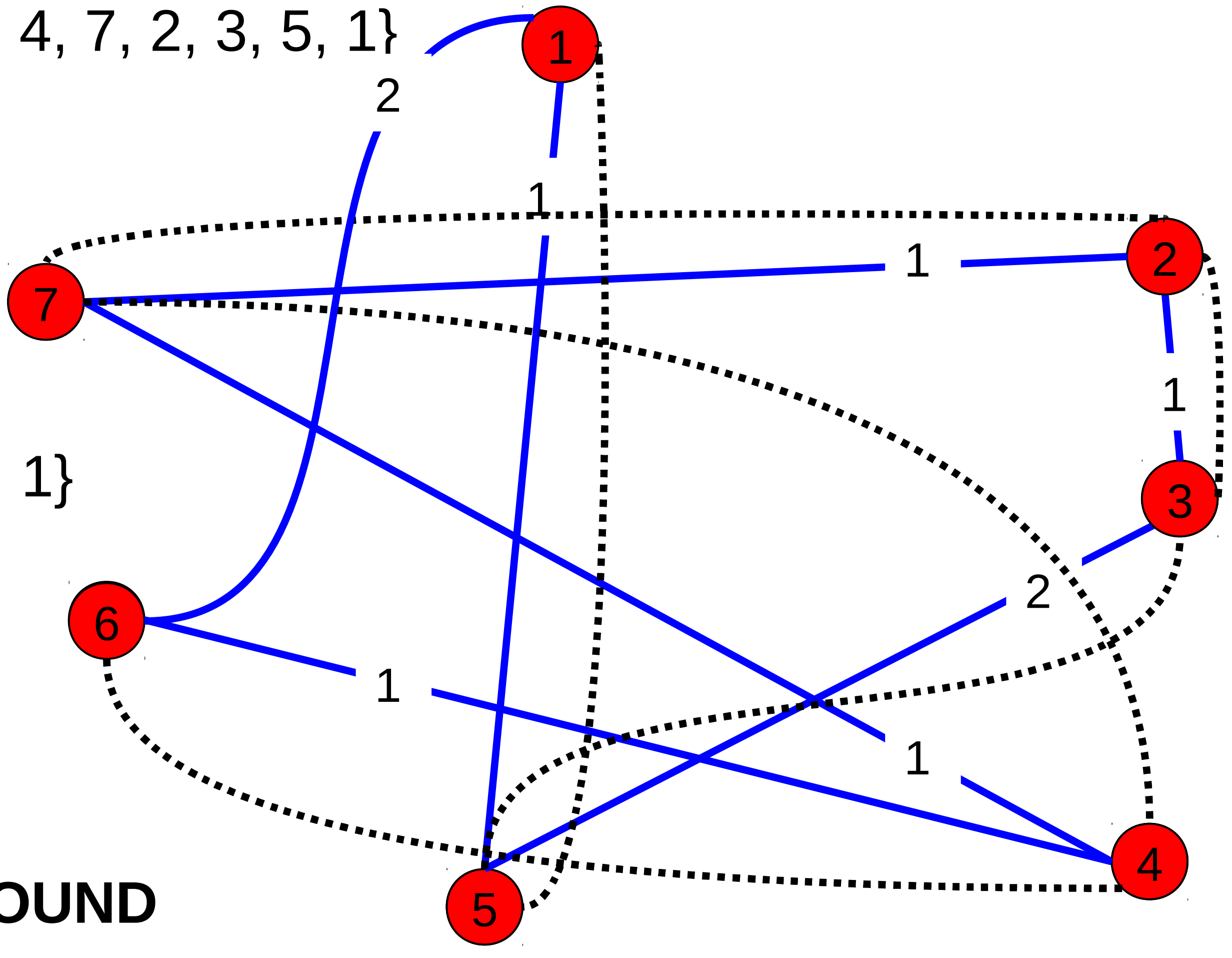
Raddoppiamo gli archi dell'albero ricoprente
Il percorso euleriano sul multigrafo ottenuto è dato da:

P_E = {1, 5, 3, 2, 7, 4, 6, 4, 7, 2, 3, 5, 1}

Ricaviamo il

cammino hamiltoniano

P_H = {1, 5, 3, 2, 7, 4, 6, 1}



$C(P_H)$ = 9 = UPPER BOUND

ESERCIZIO 1: Punto 3

La seguente matrice è una matrice delle distanze di un'istanza del problema del Commesso Viaggiatore.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	-	2	2	4	1	2	2
2	2	-	1	3	4	3	1
3	2	1	-	3	2	3	1
4	4	3	3	-	3	1	1
5	1	4	2	3	-	3	4
6	2	3	3	1	3	-	2
7	2	1	1	1	4	2	-

Calcolare

1. Il valore di una soluzione euristica calcolata con l'algoritmo di Christofides.

ESERCIZIO 1: Punto 3

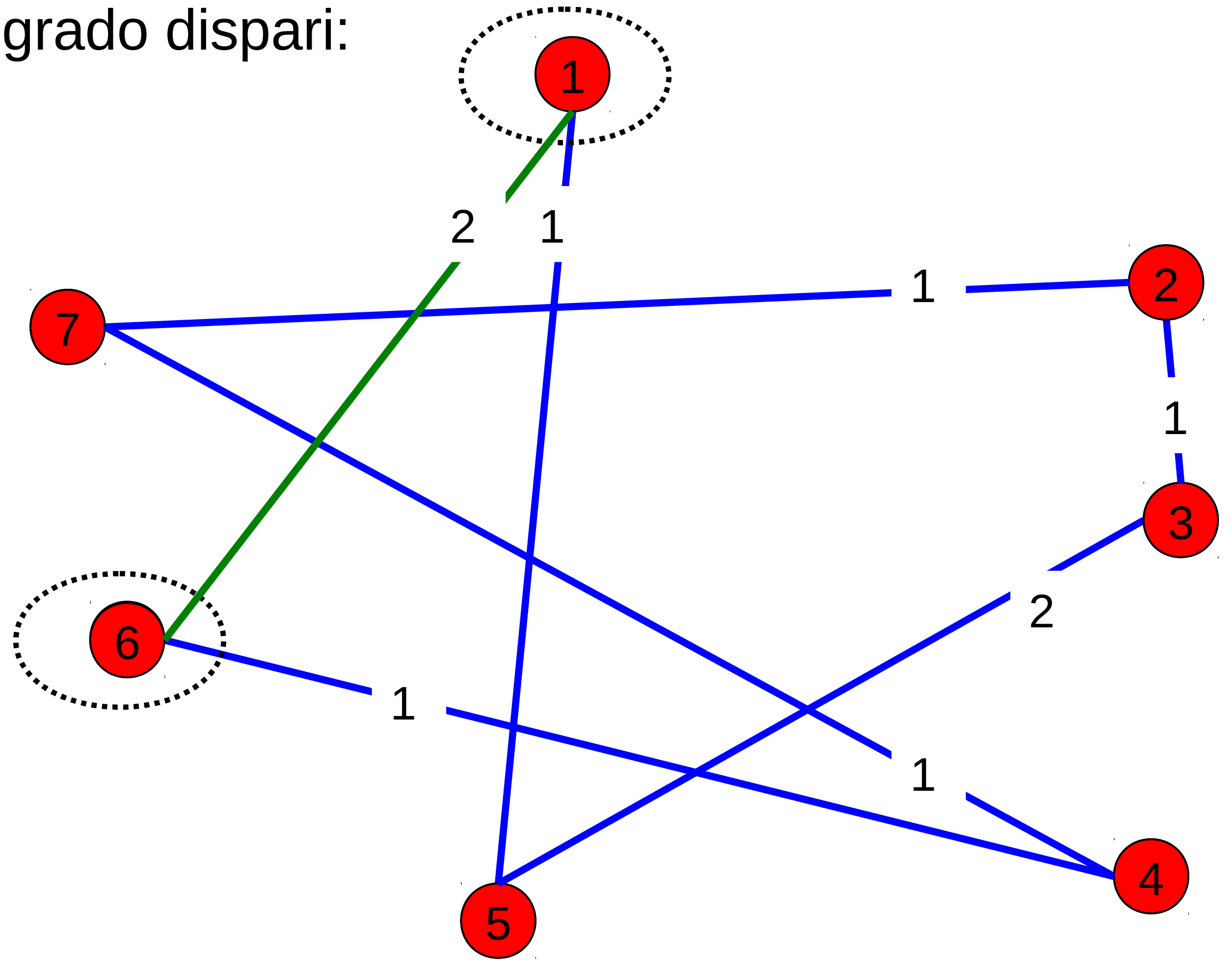
Ereditiamo il minimo albero ricoprente dal punto precedente

Individuiamo i nodi di grado dispari:

$V_d = \{1, 6\}$

Sottografo completo indotto da V_d.

Matching perfetto sul sottografo indotto: $M = \{16\}$

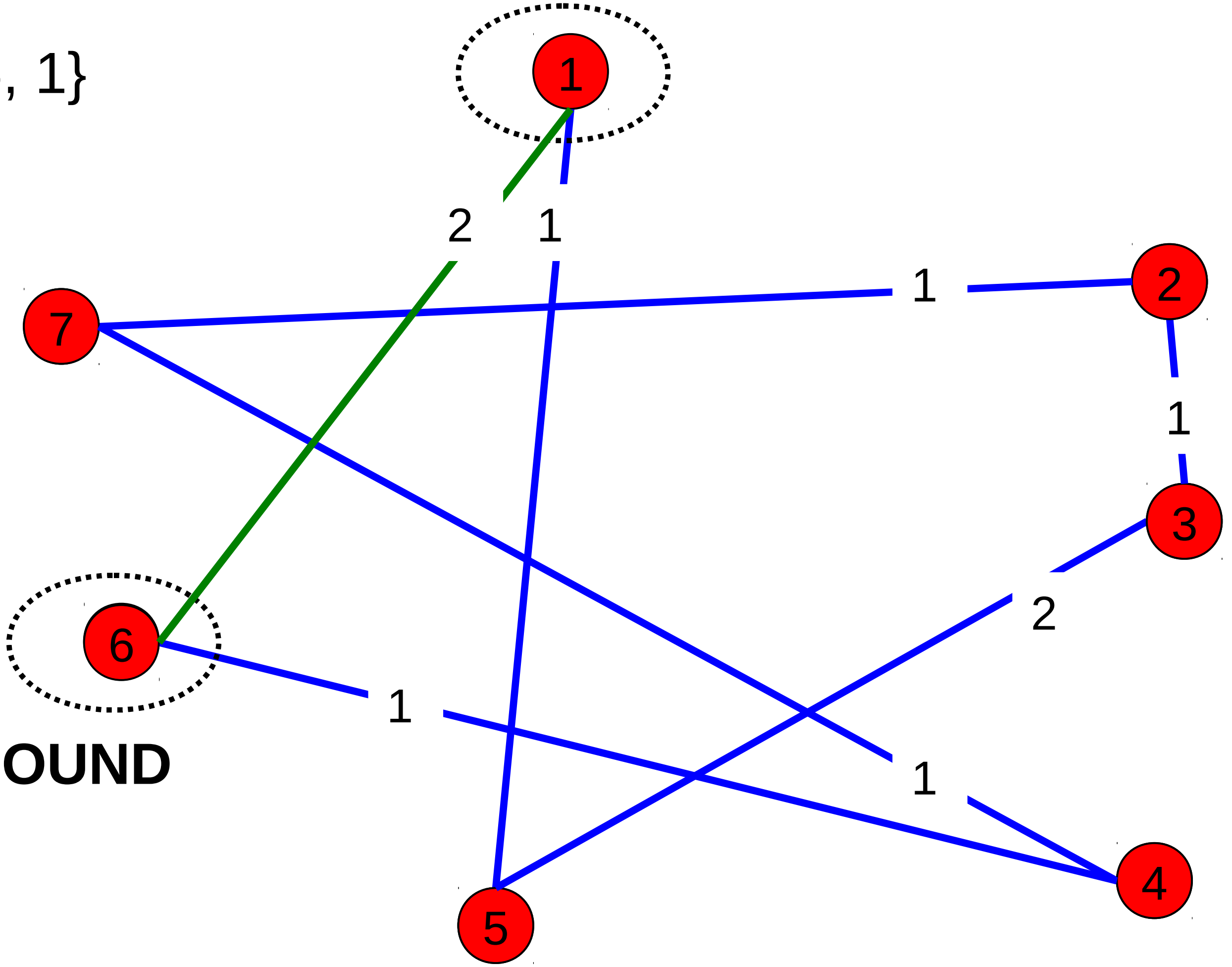


ESERCIZIO 1: Punto 3

Consideriamoil grafo euleriano dato da $M \cup T$
Il percorso euleriano sul multigrafo ottenuto è dato da:

$P_E = \{1, 5, 3, 2, 7, 4, 6, 1\}$

In questo caso
$P_H = P_E$.



***C*(P_H) = 9 = UPPER BOUND**

ESERCIZIO 2

La tabella che segue contiene una lista di progetti che possono essere attivati nel prossimo anno. Il budget totale a disposizione è 170mila euro.

Ogni progetto ha un costo a_i e un profitto (atteso) p_i. Dopo aver formulato il problema di selezionare un sottoinsieme di progetti in modo da massimizzare il profitto finale e rispettare il vincolo di budget, determinare un upper bound per il profitto massimo ottenibile.

Progetto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Peso	16	12	30	12	40	41	24	22
Profitto	96	125	170	120	160	82	42	240

ESERCIZIO 2

Il problema può essere formulato come segue:

Variabili di decisione:

$x_i = 1$ se e solo se il progetto i-esimo è attivato.

$$z^* = \max\,(96x_1 + 125x_2 + 170x_3 + 120x_4 + 160x_5 + 82x_6 + 42x_7 + 240x_8)$$

$$16x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 12x_4 + 40x_5 + 41x_6 + 24x_7 + 22x_8 \leq 170$$

$$x \in \{0,1\}^8$$

ESERCIZIO 2

Consideriamo il rilassamento lineare del problema che corrisponde ad un Knapsack continuo

$$z^*_{RL} = \max\,(96x_1 + 125x_2 + 170x_3 + 120x_4 + 160x_5 + 82x_6 + 42x_7 + 240x_8)$$

$$16x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 12x_4 + 40x_5 + 41x_6 + 24x_7 + 22x_8 \leq 170$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Riordiniamo i progetti in modo tale che

$$\frac{p_1}{a_1} \geq \frac{p_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{p_n}{a_n}$$

ESERCIZIO 2

$p_1/a_1 = 96/16 = 6 \quad \Rightarrow \quad y_4$

$p_2/a_2 = 125/12 = 10{,}41 \quad \Rightarrow \quad y_2$

$p_3/a_3 = 170/30 = 5{,}6 \quad \Rightarrow \quad y_5$

$p_4/a_4 = 120/12 = 10 \quad \Rightarrow \quad y_3$

$p_5/a_5 = 160/40 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_6$

$p_6/a_6 = 82/41 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_7$

$p_7/a_7 = 42/24 = 1{,}75 \quad \Rightarrow \quad y_8$

$p_8/a_8 = 240/22 = 10{,}9 \quad \Rightarrow \quad y_1$

$$z^*_{RL} = \max\,(240y_1 + 125y_2 + 120y_3 + 96y_4 + 170y_5 + 160y_6 + 82y_7 + 42y_8)$$

$$22y_1 + 12y_2 + 12y_3 + 16y_4 + 30y_5 + 40y_6 + 41y_7 + 24y_8 \leq 170$$

$$0 \leq y \leq 1$$

ESERCIZIO 2

Individuiamo il progetto *h* per cui $\sum_{j=1}^{h} a_j > b$

$y_1 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{1} a_1 = 22 < 170$

$y_1 = y_2 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{2} a_j = 34 < 170$

$y_1 = y_2 = y_3 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} a_j = 46 < 170$

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{4} a_j = 62 < 170$

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{5} a_j = 92 < 170$

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{6} a_j = 132 < 170$

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 1 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{7} a_j = 173 > 170 \Rightarrow h = 7$

ESERCIZIO 2

Per il progetto *h* fissiamo la variabile y_h:

$$y_7 = \frac{\left(b - \sum_{j=1}^{h-1} a_j\right)}{a_h} = \frac{170-132}{41} = \frac{38}{41} = 0{,}92$$

La restante variabile $y_8 = 0$.

Il valore della funzione obiettivo è pari a $z^*_{RL} = 986{,}44$ e corrisponde ad un UPPER BOUND per il valore ottimo z^* del problema iniziale.