Richiami di algebra lineare e geometria di $\mathbb{R}^n$

- combinazione lineare, conica e convessa
- spazi lineari
- insiemi convessi, funzioni convesse

rif. BT 1.5

Combinazione lineare, conica, affine, convessa

Definizione

Un vettore $y \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $x^1, \ldots, x^k$ se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

Se $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ la combinazione è detta *conica*

Se $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ la combinazione è detta *affine*

Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*

Esempio

Dati $x^1 = \binom{7/2}{1}, x^2 = \binom{1}{3/2}$
Il punto $y = \binom{-1}{1}$ è combinazione lineare di x^1, x^2 ?

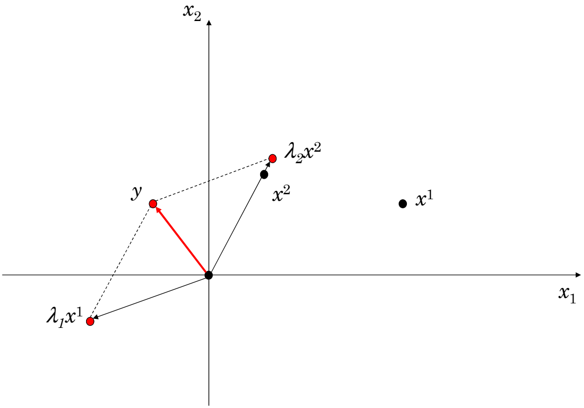
Equivale a risolvere un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 7/2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 3/2\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

da cui: $\lambda_1 = -10/17, \lambda_2 = 18/17$
quindi: $y = -10/17 \binom{7/2}{1} + 18/17 \binom{1}{3/2} = \binom{-1}{1}$

Geometricamente

$$x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 x^1 = \begin{pmatrix} -35/17 \\ -10/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2.06 \\ -0.59 \end{pmatrix},\ \lambda_2 x^2 = \begin{pmatrix} 18/17 \\ 27/17 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.06 \\ 1.59 \end{pmatrix}$$



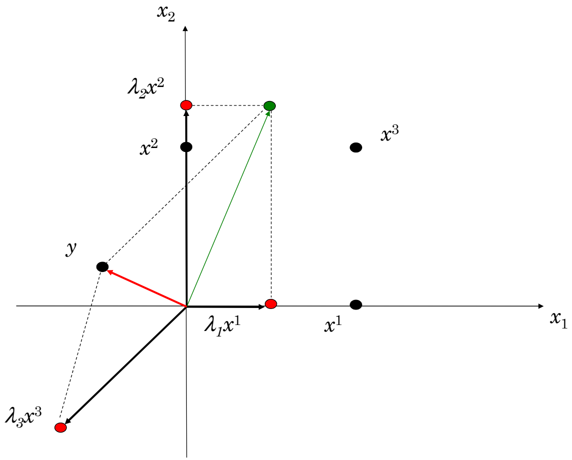
Generare punti per combinazione lineare

Dati $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

scegliendo $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 5/4, \lambda_3 = -1$

otteniamo: $z = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5/4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

[fix] y



Involucro lineare, sottospazi

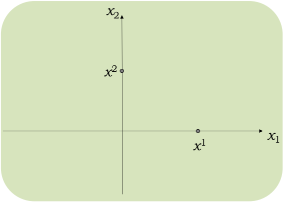
Definizione
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice *involucro lineare* di S o *sottospazio generato da S* linsieme $lin(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S

Definizione
Un insieme $L \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno *spazio lineare* (o *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$) se e solo se qualsiasi combinazione lineare di ogni sottoinsieme finito di L appartiene a L, cioè $lin(L) = L$

Proprietà Ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

Esempi

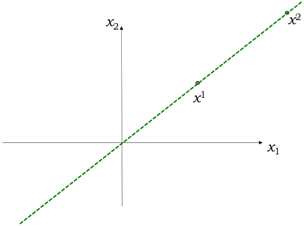
$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$



$$y = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow lin(S) = \mathbb{R}^2$

$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$



$$y = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow lin(S)$ retta per $(0,0), x^1, x^2$

Indipendenza lineare

Definizione

Un insieme $S = \{x^1, \dots, x^k\}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ si dice *linearmente indipendente* se non esistono k numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0_n$

Ovvero, S è indipendente se è possibile ottenere il vettore nullo solamente con tutti i lambda uguali a zero.

Un insieme $S = \{x^1, \dots, x^k\}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ non linearmente indipendente si dice *dipendente*

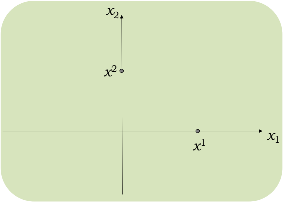
Ovvero, S è dipendente se è possibile ottenere il vettore nullo, con almeno un lambda diverso da zero.

Proprietà

- Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente, ogni suo sottoinsieme è linearmente indipendente (cioè, S non contiene alcun sottoinsieme linearmente dipendente)
- L'insieme $\{0_n\}$ è linearmente dipendente. Quindi, il vettore 0_n non appartiene ad alcun insieme linearmente indipendente

Esempi (continua)

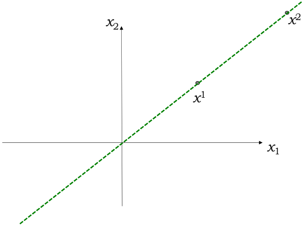
$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
S lin. indipendente

$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = -2\lambda_2$
S lin. dipendente

Basi

Definizione
in quanto sottospazio, lin(S) = S
Dato un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce base di S una collezione B di vettori linearmente indipendenti tale che $S = lin(B)$
ovvero l'involucro lineare (o spazio generato) da B è S

Proprietà Tutte le basi di un dato sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi

Definizione
Il numero di elementi di una base di un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ detto *dimensione* del sottospazio $(dim(S))$

Nota

- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- i sottospazi 1-dimensionali sono rette per l'origine, 2-dimensionali piani per l'origine, ...

Proprietà delle basi

- ogni sottospazio proprio $S \subset \mathbb{R}^n$ ha $dim(S) < n$
- Se S è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$ allora $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti gli elementi di S (diciamo $\perp S$)
- se $dim(S) = m \leq n$ allora esistono $n - m$ vettori linearmente indipendenti ortogonali a S

Teorema

questo è un insieme generico (e non una base)

Dati i vettori $x^1, \ldots, x^K$, sia $S = lin(\{x^1, \ldots, x^K\})$ tale che $dim(S) = m$. Allora:

(i) esiste una base di S composta da m fra i vettori di $x^1, \ldots, x^K$

(ii) se $k \leq m$ e $x^1, \ldots, x^k$ sono linearmente indipendenti, possiamo formare una base di S scegliendo $m - k$ fra i vettori $x^{k+1}, \ldots, x^K$ e aggiungendoli a $x^1, \ldots, x^k$

Vale a dire, con K = {x1, ..., xk}, possiamo formare una base B di S unendo un qualsiasi sottoinsieme linearmente indipendente di K, avente numero di vettori minore della dimensione della base (dim(S)), con alcuni dei restanti vettori di K, fino ad avere |B| = dim(S).

Rappresentazione rispetto ad una base

Definizione

Data una base $B = \{x^1, \dots, x^r\}$ di un sottospazio S ed un generico vettore $y \in S$ si definisce *rappresentazione di y rispetto a B* il vettore $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tale che $y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i$

Ovvero, se è possibile ottenere un vettore y appartenente ad S mediante combinazione lineare dei vettori della base B moltiplicati per un vettore qualsiasi V, V si definisce rappresentazione di y rispetto a B.

Funzioni lineari

Definizione
Dati due spazi lineari $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T \subseteq \mathbb{R}^m$, si dice *funzione lineare* un funzione $f : S \to T$ tale che, per ogni coppia di vettori $x, y \in S$ ed un qualunque scalare $k \in \mathbb{R}$, soddisfi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(kx) = kf(x)$$

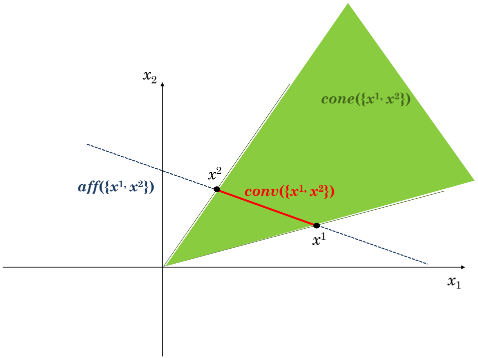
Ogni funzione lineare f da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ si può rappresentare con una matrice A dimensioni $m \times n$, cioè, $y = Ax, x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Nel caso $m = 1$: $f(x) = c^T x$, con c vettore di $\mathbb{R}^n$

Involucro conico, affine, convesso

Si dice *involucro conico [affine, convesso]* di $S \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme $cone(S)$ $[aff(S), conv(S)]$ di tutte le combinazioni coniche [affini, convesse] di elementi di S

Esempio. $x^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. si ha: $lin(S) = \mathbb{R}^2$



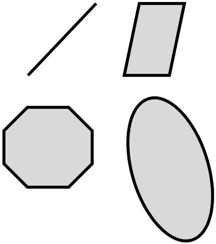
Insiemi convessi

Definizione

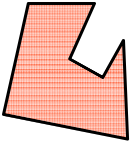
Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, per ogni $x, y \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in S$$

Esempi



convessi



non convesso

Intersezione di insiemi convessi

Teorema
Siano $S, T \subset \mathbb{R}^n$ insiemi convessi. Allora $\overset{\text{[fix] S}}{A} \cap \overset{\text{[fix] T}}{B}$ un insieme convesso.

Dimostrazione Siano $x, y \in S \cap T$. Comunque scelto un $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:
$z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in S$, in quanto S convesso
$z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in T$, in quanto T convesso
Quindi, $z \in S \cap T$, ovvero $S \cap T$ convesso.

□

Funzioni convesse

Definizione

Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ definita su un insieme convesso $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *convessa* se per ogni $x, y \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \text{ con } z = \lambda x + (1 - \lambda) y$$