Capitolo 4

Teoria della Programmazione Lineare

In questo capitolo iniziamo lo studio formale dei problemi di Programmazione Lineare e, in particolare, dimostriamo il *Teorema fondamentale della Programmazione Lineare.* A tale fine è necessario approfondire lo studio di alcune proprietà geometriche dell'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare. Le nozioni introdotte in questo capitolo, oltre ad essere di interesse autonomo, costituiscono anche la base del metodo risolutivo che verrà analizzato nel prossimo capitolo.

4.1 Elementi di geometria in $\mathbb{R}^n$

4.1.1 Insiemi Convessi

Definizione 4.1.1 *Siano x e y due punti in $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ ottenuti come*

$$z = (1 - \beta)x + \beta y,$$

al variare di β nell'intervallo $[0, 1]$ viene definito come segmento (chiuso) di estremi x e y *e viene sinteticamente indicato con $[x, y]$.*

Esempio 4.1.2 Nella Figura 4.1 è rappresentato il segmento in $\mathbb{R}^2$ avente per estremi i punti $x = (1, 1)^T$ e $y = (8, 5)^T$. Per $\beta = 0$ ritroviamo il punto x, mentre per $\beta = 1$ ritroviamo il punto y; i punti segnati nella figura come x_a, x_b e x_c corrispondono rispettivamente a valori di β pari a 0.25, 0.5 e 0.75.

Dalla Figura 4.1 risulta ovvio che il concetto di segmento è la generalizzazione, al caso di $\mathbb{R}^n$ del usuale concetto di segmento valido nel piano.

Notiamo anche come, nel caso in cui gli estremi appartengano ad $\mathbb{R}$, e sono quindi due numeri (scalari), diciamo a e b, il concetto di segmento (chiuso) di estremi a e b coincida con quello di intervallo $[a, b]$, fatto che giustifica la notazione $[x, y]$ impiegata per indicare il segmento.

Definizione 4.1.3 *Un insieme $X \in \mathbb{R}^n$* è convesso *se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme, appartiene all'insieme anche tutto il segmento che li congiunge.*

Utilizzando il concetto di segmento chiuso, la definizione di insieme convesso può essere riformulata nel modo seguente:

Un insieme X è convesso se per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ si ha $[x, y] \subseteq X$.

Dalla definizione segue che l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo vettore sono insiemi convessi (banali). Il più semplice insieme convesso non banale è il *segmento* di estremi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 4.1.4 In $\mathbb{R}^2$ gli insiemi (a) , (b) della Figura 4.2 sono convessi, mentre gli insiemi (c), (d) della stessa figura non lo sono. Infatti agli insiemi (c),(d) appartengono coppie di punti, quali quelle segnate nella figura, tali che il segmento che li congiunge presenta dei punti non appartenenti all'insieme; ciò non avviene invece comunque si prendano coppie di punti negli insiemi (a) e (b).

Una importante proprietà degli insiemi convessi è espressa dal seguente teorema.

Teorema 4.1.5 *L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.*

Dim.: Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi e sia $X = X_1 \cap X_2$ la loro intersezione. Siano x ed y due vettori in X, allora $x, y \in X_1$ ed $x, y \in X_2$. Poiché X_1 ed X_2 sono insiemi convessi abbiamo che $[x, y] \subseteq X_1$ e che $[x, y] \subseteq X_2$. Ma allora $[x, y] \subseteq X$ e l'insieme X è convesso $\square$

Esempio 4.1.6 L'insieme (e) della Figura 4.2 è dato dall'intersezione di due insiemi convessi ed è convesso

Dal Teorema 4.1.5 si può derivare, con un semplice ragionamento induttivo, il seguente corollario.

Corollario 4.1.7 *L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso.*

Passiamo ora a considerare dei particolari insiemi convessi che rivestono un ruolo importante nella teoria della programmazione lineare.

Definizione 4.1.8 *Sia a un vettore di $\mathbb{R}^n$ e b un numero reale. L'insieme*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

è detto iperpiano definito dall'equazione $a^T x = b$. Gli insiemi

$$\begin{aligned} S^{\leq} &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\} \\ S^{\geq} &= \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\} \end{aligned}$$

sono detti semispazi chiusi definiti dalle disequazioni $a^T x \leq b$ e $a^T x \geq b$.

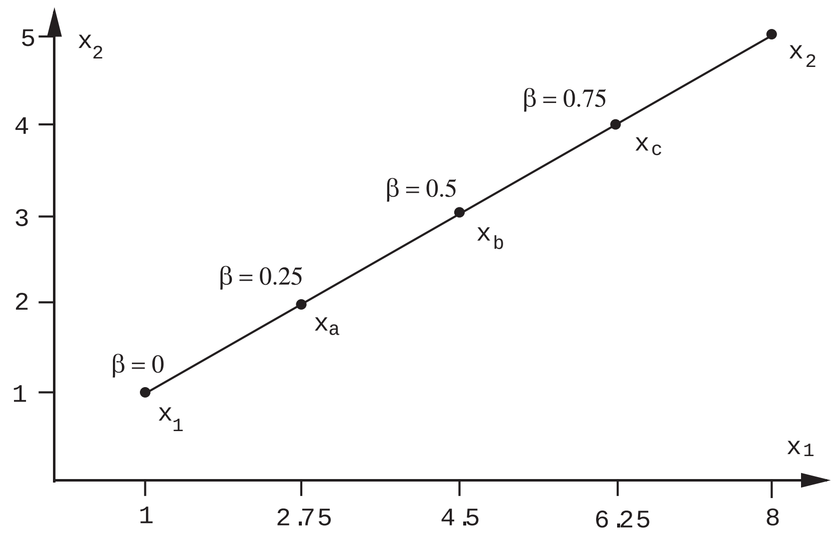

Figura 4.1: Esempio di segmento.

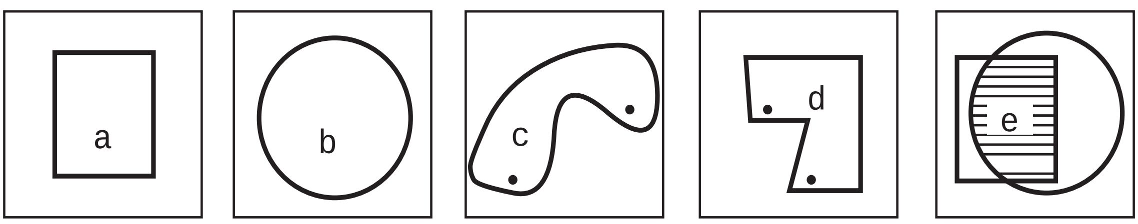

Figura 4.2: Insiemi convessi e non convessi.

Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^2$ il concetto di iperpiano coincide con quello di retta, mentre nel caso dello spazio $\mathbb{R}^3$ il concetto di iperpiano coincide con quello di piano. In maniera intuitiva, i semispazi possono essere pensati come l' insieme dei punti che "giacciono" da una stessa parte rispetto all'iperpiano.

Esempio 4.1.9 Con riferimento alla Figura 4.3, l'iperpiano (= retta) $10x_1 + 5x_2 = 25$ divide lo spazio (= piano) in due semispazi: $S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 10x_1 + 5x_2 \geq 25\}$, indicato in grigio nella figura, e $S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 10x_1 + 5x_2 \leq 25\}$, indicato in bianco nella figura.

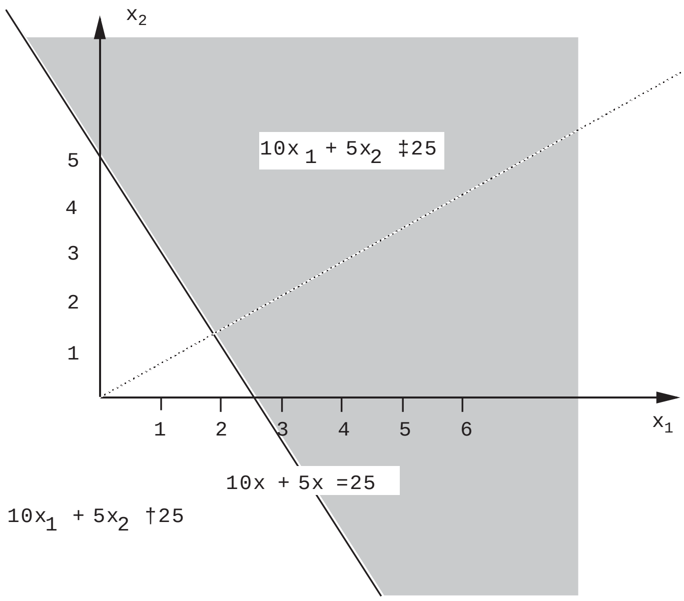

Figura 4.3: Retta e semipiani individuati da un'equazione lineare.

Notiamo che l'iperpiano H fa parte di tutti e due i semispazi e che l'intersezione dei due semispazi coincide con l'iperpiano. In termini insiemistici abbiamo che

$$H \subset S^{\geq}, \qquad H \subset S^{\leq}, \qquad S^{\geq} \cap S^{\leq} = H.$$

I semispazi e gli iperpiani sono insiemi convessi.

Teorema 4.1.10 *Un semispazio chiuso è un insieme convesso.*

Dim.: Dimostreremo il teorema per un semispazio $S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$, la dimostrazione per il semispazio $S^{\geq}$ ottenuto invertendo il verso della disequazione è analoga. Consideriamo due generici vettori x ed y appartenenti ad $S^{\leq}$, vogliamo dimostrare che ogni vettore $z \in [x, y]$ appartiene ad $S^{\leq}$, ovvero soddisfa la relazione $a^T z \leq b$.

Sia $z = \beta x + (1 - \beta)y$ con $0 \leq \beta \leq 1$. Poiché x ed y appartengono ad $S^{\leq}$ abbiamo che $a^T x \leq b$ e $a^T y \leq b$. Inoltre, poiché β ed $1 - \beta$ sono reali non negativi abbiamo che

$$a^T(\beta x + (1 - \beta)y) = \beta a^T x + (1 - \beta)a^T y \leq \beta b + (1 - \beta)b = b$$

e quindi che $a^T z \leq b$ □

Utilizzando il Teorema (4.1.10) e il Teorema (4.1.5) e ora facile dimostrare che anche un iperpiano è un insieme convesso.

Corollario 4.1.11 *Un iperpiano è un insieme convesso.*

Dim.: Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi chiusi ($S^{\leq}$ e $S^{\geq}$). Per il Teorema (4.1.10) un semispazio chiuso è un insieme convesso mentre, per il Teorema (4.1.5), l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso. □

Notiamo ora che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è definito come l'insieme di punti che soddisfa i vincoli, cioè un insieme di equazioni e disequazioni lineari. Usando la terminologia appena introdotta, possiamo anche dire che l' insieme di punti ammissibili di un problema di PL è dato dall' intersezione di un numero finito di semispazi (disequazioni lineari) e iperpiani (equazioni lineari). Quindi, applicando il Teorema (4.1.10), il Corollario 4.1.11 e il Teorema (4.1.5) abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.1.12 *L'insieme ammissibile di un problema di programmazione lineare è un insieme convesso.*

In particolare è usuale introdurre la seguente definizione:

Definizione 4.1.13 *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un* poliedro *se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani. Un poliedro limitato*[1] *viene detto* polìtopo.

Usando un punto di vista più algebrico possiamo parafrasare la precedente definizione e dire che un poliedro è l'insieme di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni e disequazioni lineari. In particolare, notiamo che l'insieme vuoto è un poliedro (è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni inconsistente) e che anche $\mathbb{R}^n$ è un poliedro ($\mathbb{R}^n$ è, per esempio, l'insieme di soluzioni dell'equazione lineare $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$). Notiamo anche che l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare è un poliedro.

[1] Un insieme $P \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste una costante $M > 0$ tale che, per ogni punto x appartenente a P risulti $|x_i| \leq M$ per ogni $i = 1, \ldots, n$

4.1.2 Vertici

In questa sezione formalizziamo il concetto intuitivo di *vertice*. Questo concetto riveste un ruolo fondamentale nella teoria della programmazione lineare.

Definizione 4.1.14 *Un vettore x appartenente ad un insieme convesso C è detto* vertice[2] *di C se non esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in C$ tali che $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ ed $x \in [x_1, x_2]$.*

Esempio 4.1.15 Nell'insieme di Figura 4.4 il punto A non è un vertice, in quanto è interno al segmento che congiunge i punti B e C, anch'essi appartenenti all'insieme; lo stesso vale per il punto D, interno al segmento [E,F]. Sono invece vertici dell'insieme i punti E, F, G, H.

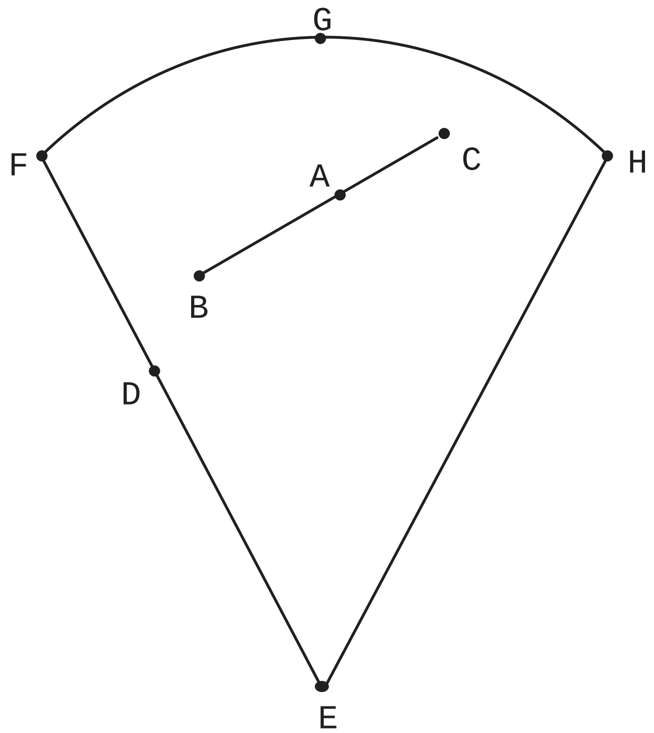

Figura 4.4: Vertici di un insieme.

La Figura 4.5 fornisce un esempio di poliedro in cui il punto $\bar{x}$ è vertice mentre il punto v non è vertice in quanto è interno al segmento che congiunge due punti u e w appartenenti al poliedro ed entrambi diversi da v.

[2] Per precisione notiamo che nella letteratura quella appena data è la definizione di *punto estremo*, mentre viene normalmente indicato con vertice un punto che soddisfa una proprietà più complessa, che qui non riportiamo. Nel caso però di poliedri, che saranno gli unici insiemi convessi che prenderemo in considerazione in questo corso, le due definizioni coincidono, cioé un punto appartenente a un poliedro è un vertice del poliedro stesso se e solo se è un suo punto estremo.

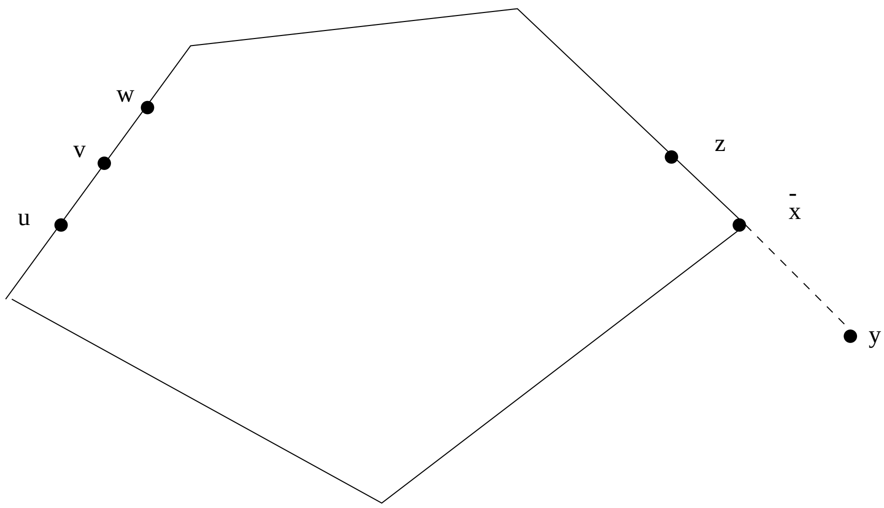

Figura 4.5: Esempio di vertice di un poliedro

4.1.3 Caratterizzazione dei vertici di un problema di PL

Il problema che ci proponiamo di affrontare ora è quello di *caratterizzare* i vertici dell'insieme dei punti ammissibili di un problema di PL. Una risposta è fornita dal teorema che segue che mette in relazione l'esistenza di un vertice con l'esistenza di n vincoli attivi linearmente indipendenti. Si consideri quindi un generico problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Denotando con a_i^T, $i = 1, \ldots, m$ le righe della matrice A possiamo introdurre la seguente definizione:

Definizione 4.1.16 Vincoli attivi
Se un vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $a_i^T \bar{x} = b_i$ per qualche $i \in \{1, \ldots, m\}$ si dice che il corrispondente vincolo è attivo *in $\bar{x}$. Inoltre, dato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si indica con $I(\bar{x})$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi, cioè:*

$$I(\bar{x}) = \Big\{ i \in \{1, \ldots, m\} \;\; | \;\; a_i^T \bar{x} = b_i \Big\}.$$

Per brevità, nel seguito, chiameremo spesso *vincoli linearmente indipendenti* quei vincoli per i quali risultano linearmente indipendenti i vettori a_i^T corrispondenti.

Teorema 4.1.17 *Siano dati un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \;\; | \;\; Ax \geq b\}$ e un punto $\bar{x} \in P$. Il punto $\bar{x}$ è un vertice di P se e solo se esistono n righe a_i^T della matrice A con $i \in I(\bar{x})$ che sono linearmente indipendenti.*

Dim.: Dimostriamo innanzitutto la condizione necessaria, cioè che se esiste un vertice del poliedro allora esistono n vincoli attivi nel vertice linearmente indipendenti. Supponiamo che $\bar{x}$ sia un vertice del poliedro P e che, per assurdo, il numero dei vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indipendenti sia $k < n$. Allora esiste un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che

$$a_i^T d = 0, \qquad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x}). \tag{4.1.1}$$

Poiché per ogni vincolo non attivo in $\bar{x}$, cioè per ogni $i \notin I(\bar{x})$ si ha

$$a_i^T \bar{x} > b_i,$$

allora esiste $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che i vettori

$$\begin{aligned} y &= \bar{x} - \epsilon d \\ z &= \bar{x} + \epsilon d \end{aligned}$$

soddisfano $a_i^T y \geq b_i$, $a_i^T z \geq b_i$ per ogni $i \notin I(\bar{x})$. Inoltre per la (4.1.1), per ogni $i \in I(\bar{x})$ si ha

$$\begin{aligned} a_i^T y &= a_i^T \bar{x} - \epsilon a_i^T d = b_i \\ a_i^T z &= a_i^T \bar{x} + \epsilon a_i^T d = b_i \end{aligned}$$

e quindi i vettori y e z soddisfano tutti i vincoli $a_i^T x \geq b_i$, $i = 1, \dots, m$ e quindi appartengono al poliedro P. Ora poiché risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z,$$

con y e z vettori di P entrambi diversi da $\bar{x}$, allora $\bar{x}$ non è un vertice e questa è una contraddizione.

Dimostriamo ora la condizione sufficiente, cioè che se esistono n vincoli attivi in uno stesso punto linearmente indipendenti allora tale punto è un vertice di P. Supponiamo quindi che esistano n righe a_i^T con $i \in I(\bar{x})$ linearmente indipendenti e che per assurdo $\bar{x}$ non sia vertice di P. Innanzitutto osserviamo che se $\bar{x}$ non è un vertice, allora necessariamente $P \supset \{\bar{x}\}$ (cioè $\bar{x}$ non è l'unico punto di P) ed inoltre esistono due vettori y e z entrambi diversi da $\bar{x}$ appartenenti a P, cioè che soddisfano

$$a_i^T y \geq b_i, \qquad a_i^T z \geq b_i, \qquad i = 1, \dots, m,$$

tali che

$$\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda) z \qquad \text{con} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Ora, se per qualche $i \in I(\bar{x})$ risultasse $a_i^T y > b_i$ oppure $a_i^T z > b_i$ allora si avrebbe

$$a_i^T \bar{x} = \lambda a_i^T y + (1 - \lambda) a_i^T z > \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i = b_i$$

e questo contraddice il fatto che $i \in I(\bar{x})$. Allora deve necessariamente essere

$$a_i^T y = b_i, \qquad a_i^T z = b_i, \qquad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x})$$

ma questo implica che il sistema

$$a_i^T x = b_i, \qquad i \in I(\bar{x})$$

ammette piú di una soluzione (cioè $\bar{x}$, y e z) contraddicendo l'ipotesi che esistano n righe a_i^T con $i \in I(\bar{x})$ linearmente indipendenti nel qual caso, come è noto, la soluzione è unica. $\square$

Seguono tre corollari che discendono in maniera immediata dal teorema appena dimostrato.

Corollario 4.1.18 *Sia dato un poliedro* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$*. Se la matrice* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di* n*, allora* P *non ha vertici. In particolare se* $m < n$ *allora* P *non ha vertici.*

Corollario 4.1.19 *Siano dati un poliedro* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ *e un punto* $\bar{x} \in P$*. Il punto* $\bar{x}$ *è un vertice di* P *se e solo se è soluzione unica del sistema*

$$a_i^T x = b_i \qquad i \in I(\bar{x}).$$

Corollario 4.1.20 *Un poliedro* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ *ha al piú un numero finito di vertici.*

Dim.: Se $m < n$ il poliedro ovviamente non ha vertici. Se $m \geq n$, per il Corollario 4.1.19 ogni vertice del poliedro corrisponde ad un sottoinsieme di n righe linearmente indipendenti della matrice A. Ora poiché la matrice A ha al piú $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ sottoinsiemi distinti di n righe, allora il poliedro ha al piú $\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ vertici. □

Esempio 4.1.21 *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle disuguaglianze*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e rappresentarlo geometricamente su un sistema di assi cartesiani Ox_1x_2*.*

Si osservi innanzitutto che in questo esempio la dimensione n è pari a 2 e il numero dei vincoli m pari a 4. Si devono determinare tutte le possibili intersezioni delle rette $3x_1 - 2x_2 = -30$, $2x_1 - x_2 = -12$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ che costituiscono il poliedro; si osservi che tali intersezioni sono $\binom{4}{2} = 6$. Per ogni punto così ottenuto si deve verificare innanzitutto l'appartenenza del punto al poliedro, e poi, affinché sia un vertice, l'indipendenza lineare dei vincoli attivi in quel punto.

1. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ 2x_1 - x_2 = -12 \end{cases}$ corrispondente al primo e al secondo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_1 = (6, 24)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il primo e il secondo vincolo e quindi $I(P_1) = \{1, 2\}$ e poiché i vettori $a_1^T = (3, \ -2)$ e $a_2^T = (2, \ -1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_1 è un vertice del poliedro.

2. Il sistema $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (0, 15)$ che non appartiene al poliedro.

3. Il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al primo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (-10, 0)$ che non appartiene al poliedro.

4. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al terzo vincolo ha come unica soluzione il punto $P_4 = (0, 12)$ che si verifica immediatamente appartenere al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il secondo e il terzo vincolo e quindi $I(P_4) = \{2, 3\}$ e poiché i vettori $a_2^T = (2, \ -1)$ e $a_3^T = (1, \ 0)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_4 è un vertice del poliedro.

5. Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -12 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al secondo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_5 = (-6, 0)$ che non appartiene al poliedro.

6. Il sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ corrispondente al terzo e al quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_6 = (0, 0)$ che si verifica immediatamente essere appartenente al poliedro; in questo punto ovviamente risultano attivi il terzo e il quarto vincolo e quindi $I(P_6) = \{3, 4\}$ e poiché i vettori $a_3^T = (1, \ 0)$ e $a_4^T = (0, \ 1)$ corrispondenti a questi due vincoli sono linearmente indipendenti, allora il punto P_6 è un vertice del poliedro.

La rappresentazione geometrica di questo poliedro è riportata in Figura 4.6. □

Esempio 4.1.22 *Dato il poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

verificare se i punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1/2)$ *e* $P_3 = (0, 0, 1)$ *sono vertici del poliedro.*

In questo esempio la dimensione n è pari a 3 e il numero dei vincoli m è pari a 5. Riscrivendo i primi due vincoli nella forma di disuguaglianza di maggiore o uguale, la matrice A dei coefficienti delle

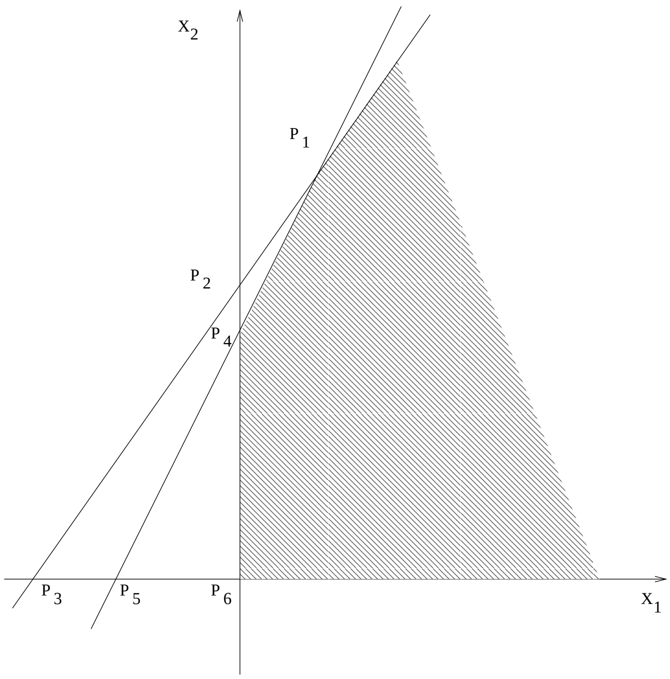

Figura 4.6: Poliedro dell'Esempio 4.1.21

disuguaglianze che descrivono il poliedro è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni punto dato, dopo aver verificato l'appartenenza del punto al poliedro, si deve verificare se esistono tre vincoli attivi in quel punto linearmente indipendenti.
Nel punto $P_1 = (0, 0, 0)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi il terzo, il quarto e il quinto vincolo e quindi $I(P_1) = \{3, 4, 5\}$ e poiché le righe a_3^T, a_4^T e a_5^T della matrice A sono linearmente indipendenti, il punto P_1 è vertice del poliedro.
Nel punto $P_2 = (0, 0, 1/2)$ (che appartiene al poliedro) sono attivi solamente due vincoli (il terzo e il quarto) e quindi il punto P_2 non può essere un vertice del poliedro.
Nel punto $P_3 = (0, 0, 1)$ (che appartiene al poliedro) si hanno tre vincoli attivi; in particolare risulta $I(P_3) = \{1, 3, 4\}$ e le corrispondenti righe a_1^T, a_3^T e a_4^T della matrice A sono linearmente indipendenti e quindi il punto P_3 è un vertice del poliedro. □

Esempio 4.1.23 *Determinare i vertici del poliedro descritto dalle seguenti disuguaglianze*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4. \end{cases}$$

In questo caso si ha $n = 3$ e $m = 4$ e quindi si devono determinare punti del poliedro in cui sono attivi tre vincoli linearmente indipendenti. Si devono quindi considerare $\binom{4}{3} = 4$ sistemi di equazioni in tre variabili:

1. il sistema ottenuto dai primi tre vincoli ha come unica soluzione il punto $P_1(1, 1, 0)$ che non è ammissibile;
2. si consideri ora il sistema ottenuto dal primo, dal secondo e dal quarto vincolo; la matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 in quanto i tre vincoli considerati (il primo, il secondo e il quarto) non sono linearmente indipendenti (il vettore corrispondente al quarto vincolo si può ottenere come somma dei vettori corrispondenti al primo e al secondo vincolo). Quindi non si può avere un vertice.
3. il sistema ottenuto dal primo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_2 = (2, 2, -3)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_2 è un vertice del poliedro.
4. il sistema ottenuto dal secondo, dal terzo e dal quarto vincolo ha come unica soluzione il punto $P_3 = (3, 2, -5)$ che appartiene al poliedro e poiché i tre vincoli attivi in P_3 sono linearmente indipendenti, P_3 è un vertice del poliedro.

$\square$

Osservazione 4.1.24 Se tra vincoli che descrivono un poliedro è presente un vincolo di uguaglianza, nella determinazione dei vertici ci si può limitare a considerare solo i sistemi che contengono questo vincolo di uguaglianza, facendo diminuire considerevolmente il numero dei sistemi da prendere in considerazione. L'esempio che segue mostra una situazione di questo tipo.

Esempio 4.1.25 *Calcolare tutti i vertici del seguente poliedro:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ x & \geq & 0. & & & & \end{array}$$

Bisogna analizzare tutti i possibili sistemi di tre equazioni "estraibili" dal sistema dato, che ha cinque vincoli. Riportiamo il sistema per esteso:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Per ogni sistema bisogna preliminarmente verificare che il rango sia pari a n, cioè a 3. Se il rango è 3 si calcola l'unica soluzione del sistema. Se questa appartiene al poliedro (cioè se soddisfa tutti i vincoli che definiscono il poliedro) si ha un vertice del poliedro. Siccome è presente un vincolo di uguaglianza, ci si può limitare ad analizzare solo i sistemi che contengono il vincolo di uguaglianza.

I vertici sono 2:

$$v_1 = (5/3, 0, 2/3)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal primo, secondo e quarto vincolo e

$$v_2 = (1, 0, 0)^T,$$

corrispondente al sistema formato dal secondo, quarto e quinto vincolo.

Per quanto riguarda gli altri sistemi "estraibili" risulta che per il sistema formato dai vincoli

- primo, secondo e terzo: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- primo, secondo e quinto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quarto: il rango è 3 ma la soluzione corrispondente non è ammissibile;
- secondo, terzo e quinto: il rango è minore di tre.

□

Come è facile osservare, non tutti i poliedri hanno almeno un vertice. Un controesempio banale di poliedro che non ha vertici è un semispazio in $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$. Se la matrice A ha un numero di righe strettamente minore di n, allora il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ non ha vertici perché è ovvio che in questo caso non è possibile trovare n vincoli attivi né, tantomeno, n vincoli attivi linearmente indipendenti (vedi il Corollario 4.1.18).

Il fatto che un poliedro abbia o non abbia vertici è basato sulla possibilità di un poliedro di contenere o meno rette. Questo concetto verrà ora formalizzato introducendo innanzitutto la seguente definizione.

Definizione 4.1.26 *Si dice che un poliedro P* contiene una retta[3] *se esiste un punto $\tilde{x} \in P$ e un vettore non nullo $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $\tilde{x} + \lambda d \in P$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$*

Riportiamo quindi, senza dimostrazione, il seguente risultato, che non verrà utilizzato nel seguito, ma che aiuta a capire la relazione tra vertici e poliedri che non contengono rette.

Teorema 4.1.27 *Sia P un poliedro non vuoto. P possiede almeno un vertice se e solo se P non contiene rette.*

[3]L'insieme di punti $\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$ è una retta che viene spesso indicata come retta che passa per $\tilde{x}$ e ha direzione d Analogamente, l'insieme di punti $\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{x} + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ è una semiretta che viene indicata come semiretta che ha origine in $\tilde{x}$ e direzione d.

4.2 Il Teorema fondamentale della Programmazione Lineare

Quanto fino ad ora esaminato permette di enunciare e dimostrare un risultato di fondamentale importanza che caratterizza i problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 4.2.1 – TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE
Si consideri il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \tag{PL}$$

Supponiamo che il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ Ax \geq b\ \}$ *non contenga rette. Allora una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:*

1. *Il problema è inammissibile, ovvero il poliedro P è vuoto;*
2. *Il problema* (PL) *è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema* (PL) *ammette soluzioni ottime e almeno una di queste soluzioni è un vertice del poliedro P.*

Dim.: Le tre affermazioni 1, 2 e 3 sono ovviamente mutuamente escludentesi (cioè al più una di esse può essere vera). Per dimostrare il teorema è allora sufficiente far vedere che almeno una di esse è vera per il problema di PL dato. A questo fine basta mostrare che se né l'affermazione 1 né quella 2 sono verificate allora l'affermazione 3 è verificata. Supponiamo dunque che P sia non vuoto e che il problema di PL non sia illimitato inferiormente.

Se P è costituito da un solo punto $\bar{x}$, cioè $P = \{\bar{x}\}$, allora $\bar{x}$ è un vertice ed è anche, ovviamente, una soluzione ottima del problema; il teorema è quindi vero in questo caso.

Consideriamo allora il caso non banale in cui P è costituito da infiniti punti [4]. Per dimostrare che l'affermazione 3 è vera dimostriamo prima la seguente affermazione intermedia:

Se $\tilde{x}$ è un punto di P che non è un vertice,
allora è possibile trovare un punto $\hat{x}$ appartenente a P tale che
$c^T\hat{x} \leq c^T\tilde{x}$ e il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti
in $\hat{x}$ è maggiore che in $\tilde{x}$. (4.2.2)

Sia $\tilde{x}$ un punto qualunque di P e indichiamo con k il numero dei vincoli attivi in $\tilde{x}$ che sono linearmente indipendenti. Siccome $\tilde{x}$ non è un vertice, ne segue che $k < n$. Sia $I(\tilde{x})$ l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\tilde{x}$; poiché $k < n$, si può trovare un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $a_i^T d = 0$ per

[4] Se il poliedro P contiene almeno due punti distinti deve contenere, in quanto insieme convesso, tutto il segmento che congiunge questi due punti. Siccome questo segmento contiene infiniti punti possiamo concludere che un poliedro non vuoto o contiene un singolo punto o ne contiene infiniti

ogni $i \in I(\tilde{x})$. Inoltre, si può assumere che $c^T d \leq 0$; infatti se questo non si verificasse (cioè se fosse $c^T d > 0$) sarebbe sufficiente prendere $-d$ e ottenere comunque $c^T d \leq 0$.
Ora possono verificarsi due casi: $c^T d < 0$ e $c^T d = 0$.

• Primo caso: $c^T d < 0$. Consideriamo la semiretta $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$ con $\lambda \geq 0$. Per ogni punto della semiretta $\tilde{x} + \lambda d$ e per $i \in I(\tilde{x})$ si ha

$$a_i^T x(\lambda) = a_i^T \tilde{x} + \lambda a_i^T d = a_i^T \tilde{x} = b_i. \tag{4.2.3}$$

Quindi tutti i vincoli che erano attivi in $\tilde{x}$ rimangono attivi in tutti i punti della semiretta. Ora, se l'intera semiretta è contenuta nel poliedro P si può far tendere λ a $+\infty$ e poiché $c^T d < 0$ si ha

$$\lim_{\lambda \to +\infty} c^T(\tilde{x} + \lambda d) = c^T \tilde{x} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda c^T d = -\infty.$$

Il problema sarebbe quindi illimitato inferiormente; ma ciò è stato escluso per ipotesi (la 2 è stata assunta non vera) e quindi la semiretta non è interamente contenuta in P

Se la semiretta $x(\lambda)$ non è interamente contenuta in P, devono esistere valori di λ per i quali i punti $x(\lambda)$ non appartengono al poliedro P, ovvero deve esistere almeno un indice $j \notin I(\tilde{x})$ tale che, per tali valori di λ, il $j-$esimo vincolo è violato, cioè risulta $a_j^T x(\lambda) < b_j$. Sia ora $\hat{I}(\tilde{x})$ l'insieme di tutti gli indici $j \notin I(\tilde{x})$ per i quali esistono valori di λ tali che $a_j^T x(\lambda) < b_j$. Notiamo che, più semplicemente, un indice j appartiene a $\hat{I}(\tilde{x})$ se e solo se $a_j^T d < 0$. Poniamo

$$\hat{\lambda} = \min_{j \in \hat{I}(\tilde{x})} \frac{b_j - a_j^T \tilde{x}}{a_j^T d}. \tag{4.2.4}$$

Risulta $\hat{\lambda} > 0$ perché $b_j - a_j^T \tilde{x} < 0$ per ogni $j \notin I(\tilde{x})$ (e quindi per ogni j in $\hat{I}(\tilde{x})$) mentre, per quanto detto sopra, $a_j^T d < 0$. Notiamo che per questa scelta di $\hat{\lambda}$ risulta

$$a_j^T x(\hat{\lambda}) \geq b_j, \quad \text{per ogni} \quad j \notin I(\tilde{x}). \tag{4.2.5}$$

Infatti, se $j \notin \hat{I}(\tilde{x})$, per definizione di $I(\tilde{x})$, la (4.2.5) vale per ogni λ e, in particolare, per $\lambda = \hat{\lambda}$. Se invece $j \in \hat{I}(\tilde{x})$, si verifica per sostituzione diretta, che la (4.2.5) deriva dalla (4.2.4).

Poniamo $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$. $\hat{x}$ è un punto appartenente al poliedro P in quanto risulta:

- $a_i^T \hat{x} = b_i$ per ogni $i \in I(\tilde{x})$ (vedi la (4.2.3));
- $a_j^T \hat{x} \geq b_j$ per ogni $j \notin I(\tilde{x})$ (vedi la (4.2.5)).

In particolare si ha $a_j^T x(\hat{\lambda}) = b_j$ per un indice $j \in \hat{I}(\tilde{x})$ (più precisamente risulta $a_j^T x(\hat{\lambda}) = b_j$ per quegl'indici j per cui si raggiunge il minimo nella (4.2.4); questo si verifica di nuovo per sostituzione diretta). Questo significa che il vincolo $j-$esimo (che non era attivo in $\tilde{x}$) è attivo in $\hat{x} = x(\hat{\lambda})$.

Ora dimostriamo che a_j non può essere ottenuto come combinazione lineare dei vettori a_i, $i \in I(\tilde{x})$. Se per assurdo fosse

$$a_j = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i \qquad \text{con} \quad \mu_i \in \mathbb{R}, \tag{4.2.6}$$

moltiplicando scalarmente per il vettore d entrambe i membri della (4.2.6) e tenendo conto che $a_i^T d = 0$ per ogni $i \in I(\tilde{x})$, si avrebbe

$$a_j^T d = \sum_{i \in I(\tilde{x})} \mu_i a_i^T d = 0 \tag{4.2.7}$$

e questo è assurdo perché $a_j^T d < 0$, in quanto $j \in \hat{I}(\tilde{x})$. Perciò, spostandosi da $\tilde{x}$ a $\tilde{x} + \hat{\lambda} d$, il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è almeno pari a $k+1$. Inoltre, ricordando che $c^T d < 0$ e $\hat{\lambda} \geq 0$, si ha che $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda} c^T d \leq c^T \tilde{x}$. Possiamo quindi concludere che nel caso $c^T d < 0$ l'affermazione (4.2.2) è verificata.

• Secondo caso: $c^T d = 0$. Consideriamo la retta $x(\lambda) = \tilde{x} + \lambda d$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché si è supposto che il poliedro P non contenga rette, ragionando nello stesso modo del caso precedente, ci si può spostare da $\tilde{x}$ lungo la direzione d e determinare un punto $\hat{x}$ in cui il numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti è maggiore del numero dei vincoli attivi linearmente indipendenti in $\tilde{x}$. Inoltre, poiché $c^T d = 0$ si ha $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x} + \hat{\lambda} c^T d = c^T \tilde{x}$. Quindi, anche in questo caso, l'affermazione (4.2.2) risulta verificata.

Il punto $\hat{x}$ appartiene a P. Sono possibili allora due casi. O $\hat{x}$ è un vertice di P o è possibile applicare di nuovo l'affermazione (4.2.2) e concludere che esiste un ulteriore punto $\check{x}$ in P in cui il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti è strettamente maggiore del numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in $\hat{x}$ e $c^T \check{x} \leq c^T \hat{x}$. Iterando questo procedimento, e tenendo conto che il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in un punto può essere al più n, un semplice ragionamento induttivo mostra che dalla (4.2.2) possiamo dedurre che

Se $\tilde{x}$ è un punto di P che non è un vertice,
allora è possibile trovare un vertice $\hat{v}$ di P tale che
$c^T \hat{v} \leq c^T \tilde{x}$. (4.2.8)

Siano, ora, $\{v_1, \ldots, v_p\}$ i vertici di P (ricordiamo che i vertici sono sicuramente in numero finito, vedi il Corollario 4.1.20); indichiamo con v^* uno di questi vertice per cui $c^T v^* \leq c^T v_h$ per ogni $h = 1, \ldots, p$. Dalla definizione di v^* e dalla (4.2.8) segue immediatamente che per ogni punto $\tilde{x} \in P$ possiamo scrivere, per un qualche vertice $\hat{v}$:

$$c^T \tilde{x} \geq c^T \hat{v} \geq c^T v^*.$$

Per definizione, questo mostra che il vertice v^* è una soluzione ottima del problema di PL e che l'affermazione 3 è vera. □

Un'immediata conseguenza del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare è che se il poliedro è un politopo, allora il problema ammette soluzione ottima in un vertice del politopo. Questo risultato è formalizzato nel seguente corollario.

Corollario 4.2.2 *Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \}$ è un politopo non vuoto, allora il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima (finita) in un vertice del poliedro P.*

Osservazione 4.2.3 La struttura lineare di un problema di Programmazione Lineare è l'elemento chiave che permette di ottenere un risultato così forte [5] circa la possibile soluzione di un problema di ottimizzazione. Infatti, come controesempio si consideri il problema in una variabile reale

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{x} \\ \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Questo problema non ammette soluzione ottima pur non essendo illimitato inferiormente. L'alternativa espressa dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in questo caso non vale proprio perché viene meno l'ipotesi fondamentale di linearità della funzione obiettivo.

Osservazione 4.2.5 Se un problema di Programmazione Lineare, come accade spesso nei problemi provenienti da modelli reali, presenta limitazioni inferiori e superiori sulle variabili cioè è del tipo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

dove $l \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$ sono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore delle variabili, allora il poliedro che descrive l'insieme ammissibile è un politopo e quindi vale la caratterizzazione delle soluzioni data dal Corollario 4.2.2.

È interessante approfondire un poco la natura dell'insieme delle soluzioni di un problema di PL. Nello studio della risoluzione grafica di problemi di PL (cfr. paragrafo 3.3) si sarà notato che sembra essere vero che se un problema di PL ha più di una soluzione ottima, allora ne ammette infinite. Ci proponiamo qui di precisare questa affermazione.

[5] In effetti è possibile ottenere risultati ancora più forti di quelli fin qui elencati. Usando il Teorema 4.1.27 possiamo sostituire l'ipotesi che il poliedro "non contenga rette" con quella che "possieda almeno un vertice". È possibile mostrare che in effetti questa ipotesi (che il poliedro "non contenga rette" o, equivalentemente "possieda almeno un vertice") è necessaria solo per dimostrare che nel caso 3 del Teorema 4.2.1 se esistono vertici allora c'è almeno una soluzione ottima che cade su un vertice. La dimostrazione di questo risultato più forte richiede però strumenti analitici più complessi di quelli usati in questo corso. Vogliamo comunque riportare, per completezza, questa versione del Teorema 4.2.1.

Teorema 4.2.4 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases} \tag{PL}$$

Una e una sola delle seguenti tre affermazioni è vera:

1. *Il poliedro P è vuoto;*
2. *Il problema* (PL) *è illimitato inferiormente;*
3. *Il problema* (PL) *ammette soluzioni ottime.*

Nel caso in cui il problema ammetta soluzioni ottime e se P ammette almeno un vertice, allora almeno una soluzione ottima cade su un vertice.

Sia dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ e un corrispondente problema di PL:

$$\min \; c^T x$$
$$x \in P.$$

Supponiamo che questo problema abbia (almeno) una soluzione ottima x^*. Indichiamo con $z^* = c^T x^*$ il *valore ottimo*, cioè il valore assunto dalla funzione obiettivo all'ottimo. È evidente che se $\hat{x}^*$ è una qualunque altra soluzione ottima, risulta $z^* = c^T \hat{x}^*$. Vice versa, se un punto x è ammissibile, cioè se $x \in P$ e risulta $c^T x = z^*$, allora x è una soluzione ottima per definizione. Riassumendo possiamo affermare che l'insieme delle soluzioni ottime del problema di PL dato è

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; c^T x = z^*\}.$$

Questo mostra immediatamente che l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di PL è un poliedro contenuto in P, in quanto intersezione di P, definito da un insieme di equazioni e disequazioni lineari con l'iperpiano

$$\{x \in \mathbb{R}^n \; : \; c^T x = z^*\}.$$

Quindi vale il seguente teorema.

Teorema 4.2.6 *Sia dato un problema di PL*

$$\min \; c^T x$$
$$x \in P.$$

L'insieme delle soluzioni ottime di questo problema è un poliedro contenuto in P