Dualità forte e condizioni di ottimalità

- Dualità forte
- Dualità debole
- Condizioni di scarto complementare

BT 4.3

Dualità debole

Teorema

Data una soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ del problema primale (in forma generica) ed una $\mathbf{p}$ del duale, risulta $\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Dimostrazione Definiamo le quantità

$$u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) \qquad\qquad v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j$$

le regole di costruzione implicano che, in entrambi i casi, le due quantità moltiplicate hanno lo stesso segno, quindi, $u_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$ e $v_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$. Risulta anche:

$$\sum_i u_i = \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} \qquad\qquad \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

da cui

$$0 \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}$$

□

Conseguenze

Corollario

(a) se il primale è (inferiormente) illimitato, allora il duale è inammissibile

(b) se il duale è (superiormente) illimitato, allora il primale è inammissibile

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito		NO	
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile		SI	

Dualità forte

Teorema

Se un problema di PL ha una soluzione ottima anche il suo duale ce l'ha e i rispettivi valori coincidono

Dimostrazione (forma standard)

Consideriamo un problema

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplesso (con una regola anticiclaggio), si calcola una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ associata alla base $\mathbf{B}$. Alla terminazione **Test_Opt** $\rightarrow$ *true*:

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}^T$$

Dimostrazione (cont.)

Quindi, definendo $\mathbf{p} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ risulta $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$, cioè, $\mathbf{p}$ è una soluzione ammissibile del problema duale

$$\max \mathbf{p}^T \mathbf{b}$$

s.t.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

ed inoltre si ha:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

cioè, $\mathbf{p}$ è una soluzione ottima del problema duale e i due valori ottimi coincidono $\square$

Conseguenze

	Ottimo finito	Illimitato	Inammissibile
Ottimo finito	SI	NO	NO
Illimitato	NO	NO	SI
Inammissibile	NO	SI	-

Infine, esistono problemi di PL per cui sia il primale che il duale sono inammissibili.

Esercizio Dato il problema primale:

$$\min x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

scrivere il suo duale e verificare che sono entrambi inammissibili

Condizioni di scarto complementare

Teorema

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ammissibili risp. per il problema primale e duale. Esse sono ottime se e solo se

$$p_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

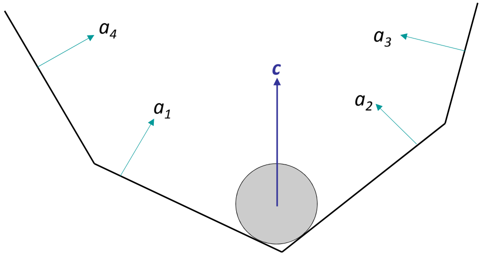
$$(c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j) x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Dimostrazione Ricordiamo dalla dimostrazione della dualità debole che $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ e che $\sum_i u_i + \sum_j v_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b}$. Quindi, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ sono ottime, per il teorema della dualità forte si ha $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} = 0$, cioè $u_i = v_j = 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.

Viceversa, se $u_i = v_j = 0$ per ogni i, j, si ha $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{p}^T \mathbf{b} = 0$ che implica $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ soluzioni ottime. $\square$

Interpretazione fisica

Una sfera solida giace in un poliedro descritto da disuguaglianze $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b_i$.
Soggetta alla forza di gravità, la sfera raggiunge il punto di minima energia potenziale x^*:



possiamo immaginare il punto di equilibrio come la soluzione ottima del problema $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, \forall i$

Interpretazione fisica

all'equilibrio, la forza di gravità è bilanciata dalle spinte delle pareti, ortogonali alle stesse, cioè allineate ai vettori $\mathbf{a}_i$. Quindi, si ha

$$\mathbf{c} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

con p_i moltiplicatori non negativi. Naturalmente, per le pareti che non toccano la sfera si ha $p_i = 0$, quindi risulta $p_i(b_i - \mathbf{a}^T \mathbf{x}^*)$, cioè,

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = \sum_i p_i b_i = \sum_i p_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

In altri termini, il vettore $\mathbf{p}$ è la soluzione del problema duale

$$\begin{aligned} \max \mathbf{p}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$