Introduzione al Metodo del Simplesso

Giacomo Zambelli

1 Soluzioni di base e problemi in forma standard

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare (PL), relativo all'esempio di produzione di utensili visto in classe.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 130x_1 & + & 100x_2 & & \\ & 1,5x_1 & + & x_2 & \leq & 27 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\ & 0,3x_1 & + & 0,5x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Dove z é una variabile ausiliare che rappresenta il valore della funzione obiettivo.

Se disegniamo sul piano cartesiano la regione ammissibile dei vincoli, vediamo che il valore ottimale della funzione obiettivo é raggiunto da un vertice della regione poligonale definita dai vincoli, ovvero il punto $(12, 9)$. Il valore ottimale é 2460.

Per un problema di PL generale, le *soluzioni di base* sono la rappresentazione algebrica dei vertici.

Definizione 1 (Soluzione di base) *Dato un insieme di vincoli lineari in n variabili, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi i vincoli è una* soluzione di base *per il sistema di vincoli se vi sono n vincoli linearmente indipendenti che sono* attivi *in x (ovvero x soddisfa tali vincoli ad uguaglianza).*

Nell'esempio precedente, $(12, 9)$ é una soluzione di base ammissibile del sistema poiché soddisfa i vincoli [fix] 1,5 $x_1 + x_2 \leq 27$ e $x_1 + x_2 \leq 21$ ad uguaglianza, e tali vincoli sono linearmente indipendenti. Il punto $(0, 27)$ é una soluzione di base ma non é ammissibile.

E' conveniente, nella trattazione del metodo del simplesso, ridurre il problema in *forma standard*, ovvero un problema di massimizzazione in cui tutte le variabili sono nonnegative e gli altri vincoli sono tutti di uguaglianza. Il seguente PL in forma standard ha m vincoli e n variabili.

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \\
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad\quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

In termini di matrici

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & c^T x \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Nota che possiamo sempre assumere, e d'ora in poi assumeremo, senza perdita di generalitá, che la matrice A abbia rango m. Ogni problema puó essere riscritto in forma standard mediante vari "trucchetti". Il problema precedente puó essere ridotto in forma standard aggiungendo variabili di scarto.

$$
\begin{array}{rrcrcccccccr}
\max z = & 130x_1 & + & 100x_2 & & & & & & & & \\
& 1,5x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 27 \\
& x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 21 \\
& 0,3x_1 & + & 0,5x_2 & & & & & + & s_3 & = & 9 \\
& x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per problemi in forma standard le soluzioni di base hanno una forma particolare.

Definizione 2 (Base di un sistema in forma standard) *Data una matrice $m \times n$ A a rango pieno nelle righe e un vettore b con m componenti, un insieme $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ é una* base *per il sistema $Ax = b$, $x \geq 0$, se $|B| = m$ e la matrice A_B formata dalle colonne di A corrispondenti ad indici in B é non-singolare.*

Teorema 3 (Soluzione di base per sistemi in forma standard) *Data una matrice $m \times n$ A a rango pieno nelle righe e un vettore b con m componenti, un vettore $\bar{x}$ che soddisfa i vincoli é una soluzione di base per il sistema $Ax = b$, $x \geq 0$ se e solo se esiste una base B per A tale che $\bar{x}_i = 0$ per ogni $i \notin B$.*

Le variabili x_j con $j \in B$ si dicono *variabili in base (rispetto alla base B)*. Si noti che, se B é una base associata a $\bar{x}$, $\bar{x}$ é completamente determinata da B, poiché $A_B\bar{x}_B + A_N\bar{x}_N = A_B\bar{x}_B + A_N 0 = b$ (dove A_N denota la sotto-matrice di A relativa alle colonne non in base ed $\bar{x}_B$, $\bar{x}_N$ sono definiti similmente) implica $\bar{x}_B = A_B^{-1}b$. Se $\bar{x}$ é ammissibile, ovvero $A_B^{-1}b \geq 0$, allora B é detta una *base ammissibile.*

Una delle proprietá principali della PL é che se un problema di PL ha una soluzione ottimale, allora ha una soluzione ottimale che é una soluzione di base ammissibile. Se non vi é una soluzione, allora il sistema é o inammissibile oppure illimitato.

Teorema 4 (Teorema fondamentale della PL) *Ogni problema di PL soddisfa esattamente una delle seguenti:*

- *Il problema ha una soluzione ottima, ovvero esiste una soluzione ammissibile che ha valore maggiore o uguale a qualunque altra soluzione ammissibile.*
- *Il problema non ha soluzioni ammissibili.*
- *Il problema é illimitato, ovvero la funzione obiettivo assume valori arbitrariamente elevati nella regione ammissibile.*

2 Il Metodo del Simplesso

Nel metodo del simplesso, il problema deve sempre essere in forma standard (1). Inoltre, il metodo necessita di una soluzione di base ammissibile del sistema per iniziare, e si muove lungo il perimetro della regione ammissibile passando, ad ogni iterazione, da una soluzione di base ad una adiacente di valore maggiore, fino al raggiungimento dell'ottimo, oppure fino a quando non si determini che il problema é illimitato. Supponiamo dunque di avere una base ammissibile B . Il metodo inizia costruendo il *dizionario* (o *tableau*) del problema (1).

Passo 0: Inizializzazione Mediante operazioni riga, scriviamo il problema in modo che le variabili in base siano espresse in termini unicamente delle variabili non in base, e che la funzione obiettivo sia scritta solo in termini delle variabili non in base. In questo modo ogni variabile in base appare esattamente in un una riga del sistema.

In termini di matrici: moltiplicando a sinistra per A_B^{-1} i vincoli del problema, il problema diventa

$$\begin{aligned} \max z = & \quad c^T x \\ & I x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Per eliminare le variabili in base dalla funzione obiettivo, sostituiamo $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ nella funzione obiettivo, ottenendo

$$\begin{aligned} \max z = & \quad c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \\ & I x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Definendo $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$, $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, e $\bar{v} = c_B^T A_B^{-1} b$, otteniamo il problema

$$\begin{aligned} \max z = & \quad \bar{c}_N^T x_N + \bar{v} \\ & I x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

che é equivalente al problema originario. Si noti che $\bar{v}$ é il valore della funzione obiettivo per la soluzione di base $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ associata a B.

Il problema in forma dizionario si scrive:

$$\begin{array}{ccccccc} z & & & - & \bar{c}_N^T x_N & = & \bar{v} \\ & & I x_B & + & \bar{A}_N x_N & = & \bar{b} \end{array}$$

Si noti che ogni variabile in base appare in una sola riga del problema in forma dizionario (rispetto alla base B data); se x_j é una variabile in base, e appare nella riga i-esima, diremo che x_j é *in base nella riga i-esima* (rispetto alla base B).

Nell'esempio precedente, il problema in forma dizionario rispetto alla base $\{s_1, s_2, s_3\}$ si scrive:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
z & - & 130x_1 & - & 100x_2 & & & & & & & = & 0 \\
& & 1,5x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 27 \\
& & x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 21 \\
& & 0,3x_1 & + & 0,5x_2 & & & & & + & s_3 & = & 9
\end{array}$$

La soluzione di base corrispondente é data da $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 27$, $s_2 = 21$, $s_3 = 9$, e il valore della funzione obiettivo é 0. Tale soluzione corrisponde al vertice $(0, 0)$ nel problema originario.

Passo 1: Scegliere la variabile entrante

Definizione 5 *Data una base ammissibile per il problema, il* costo ridotto *di una variabile x_j non in base é l'opposto del coefficiente di x_j nella prima riga del dizionario corrispondente alla base corrente.*

Ovvero, il costo ridotto di x_j é $\bar{c}_j$, e rappresenta l'incremento marginale della funzione obiettivo all'aumentare di x_j. Se aumentiamo il valore di x_j lasciando le rimanenti variabili non in base a zero, otteniamo $z - \bar{c}_j x_j = \bar{v}$, ovvero $z = \bar{v} + \bar{c}_j x_j$, dunque il valore della funzione obiettivo aumenta.

> **Scelta della variabile entrante:** *Si scelga una variabile x_j il cui costo ridotto $\bar{c}_j$ sia strettamente positivo.*

Nell'esempio precedente, i costi ridotti di x_1 e x_2 sono 130 e 100, rispettivamente. Se aumentiamo il valore di x_1 di una unitá, il valore della funzione obiettivo aumenta di 130. Scegliamo dunque di far entrare x_j in base.

Passo 2: scegliere la variabile uscente Nell'esempio, vogliamo aumentare x_1 il piú possibile senza violare i vincoli. Supponiamo di aumentare x_1 di θ. Per soddifare i vincoli i valori delle variabili in base devono essere modificate come segue:

$$\begin{array}{rcl}
s_1 & = & 27 - 1,5\theta \\
s_2 & = & 21 - \theta \\
s_3 & = & 9 - 0,3\theta
\end{array}$$

Il massimo valore di θ che possiamo scegliere preservando la non-negativitá di s_1, s_2, s_3 é $\min\{\frac{27}{1{,}5}, \frac{21}{1}, \frac{9}{0{,}3}\}$, ovvero 18, altrimenti s_1 diventerebbe negativa. Dunque s_1 é la variabile che viene scelta per uscire dalla base.

> **Regola del quoziente minimo** *Se x_j entra in base, allora la variabile uscente é la variabile in base nella riga corrispondente al quoziente minimo*
> $$\min_{i\,:\,\bar{a}_{ij}>0}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}\right\}$$

Passo 3: Pivot Se x_j é la variabile entrante selezionata al passo 1 e x_k la variabile in base uscente selezionata al passo 2, vogliamo riportare il problema in forma dizionario rispetto alla nuova base ottenuta inserendo x_j e rimuovendo x_k. Questo viene fatto mediante operazioni riga-equivalenti, di modo tale che la colonna del tableau corrispondente a x_j diventi della forma $\begin{bmatrix} 0 \\ e_k \end{bmatrix}$, dove e_k denota il vettore unitario k-esimo. Questa operazione si chiama *pivot*.

Nell'esempio precedente, x_1 entra in base e s_1 esce. In questo momento, la riga del dizionario contenente s_1 é $1,5x_1 + x_2 + s_1 = 27$, e x_1 deve apparire in tale riga con coefficiente 1, dunque dividiamo la riga per $1,5$ ottenendo la nuova riga del dizionario $x_1 + 2/3x_2 + 2/3s_1 = 18$. La seconda riga del dizionario é $x_1 + x_2 + s_2 = 21$. Nel nuovo dizionario x_1 deve avere coefficiente 0 nella prima riga, dunque, sottraendo la prima riga del nuovo dizionario alla seconda riga del vecchio dizionario, otteniamo l'equazione $1/3x_2 - 2/3s_1 + s_2 = 3$. Procedendo in maniera similare per tutte le righe del dizionario, otteniamo il dizionario relativo alla nuova base.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
z & & & - & \frac{40}{3}x_2 & + & \frac{260}{3}s_1 & & & & & = & 2340 \\
 & x_1 & + & & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}s_1 & & & & & = & 18 \\
 & & & & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{2}{3}s_1 & + & s_2 & & & = & 3 \\
 & & & & 0,3x_2 & - & 0,2s_1 & & & + & s_3 & = & 3,6
\end{array}$$

Condizioni di Terminazione Nell'esempio precedente, l'unica variabile candidata ad entrare in base é x_2, con costo ridotto $\frac{40}{3}$. Per la regola del quoziente minimo s_2 esce dalla base. Il nuovo tableau é:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
z & & & + & 60s_1 & + & 40s_2 & & & = & 2460 \\
& x_1 & & + & 2s_1 & - & 2s_2 & & & = & 12 \\
& & x_2 & - & 2s_1 & + & 3s_2 & & & = & 9 \\
& & & - & 0,4s_1 & - & 0,9s_2 & + & s_3 & = & 0,9
\end{array}
$$

A questo punto tutte le variabili hanno costo ridotto non-positivo, dunque il valore della funzione obiettivo non puó essere incrementato e il metodo del simplesso termina con la soluzione ottimale $x_1 = 12$, $x_2 = 9$, $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 0,9$, di valore 2460. Si noti che il metodo del simplesso, proiettando il problema nello spazio delle x, ha percorso i vertici $(0,0)$, $(18,0)$, $(12,9)$.

> **Condizione di ottimalitá:** *Il metodo del simplesso termina con una soluzione ottimale quando tutti i costi ridotti sono non-positivi.*

Si supponga invece di avere un tableau della forma:

$$
\begin{array}{cccccccc}
z & & & + & 1,5s_1 & - & 0,25s_2 & = & 3 \\
& x_1 & & + & 0,5s_1 & - & 0,25s_2 & = & 2 \\
& & x_2 & - & 0,5s_1 & - & 0,25s_2 & = & 1
\end{array}
$$

L'unico candidato per entrare in base é s_2. Se aumentiamo s_2 di θ, per soddisfare i vincoli dobbiamo modificare il valore delle variabili in base come segue:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 + 0,25\theta \\
x_2 &= 1 + 0,25\theta
\end{aligned}
$$

dunque possiamo aumentare s_2 arbitrariamente senza uscire dalla regione ammissibile. Dunque il valore della funzione obiettivo puó essere arbitrariamente grande.

> **Determinare se il problema é illimitato:** Se tutti i coefficienti della colonna corrispondente alla variabile entrante sono non-positivi, allora il problema é illimitato.

Ci sono svariati dettagli che devono essere presi in considerazione per avere un vero e proprio algoritmo. Ne menzioniamo due, la cui trattazione è al di fuori dello scopo di queste note.

Come partire? Nell'esempio visto, era immediato determinare una soluzione di base da cui partire. In generale non abbiamo sottomano una soluzione di base iniziale "ovvia" da cui partire. Determinare tale soluzione ammonta a risolvere un certo problema di programmazione lineare ausiliario, la cui soluzione ci permetterà di stabilire se il problema originale ammetta o meno una soluzione. Nel caso il problema originale ammetta soluzione, allora dalla soluzione ottima del problema ausiliario saremo in grado di "leggere" una soluzione di base del problema originale.

Considerazioni sulla terminazione del metodo del simplesso: Non é ovvio che il metodo del simplesso termini in tempo finito. Infatti, se non si é cauti nella scelta della variabile entrante e della variabile uscente, il metodo potrebbe "ciclare", ovvero rivistare una soluzione di base giá visitata in precedenza. Vi sono regole di scelta della variabile entrante e uscente (quale ad esempio quella di scegliere, tra le possibili variabili entranti e uscenti, sempre quelle di indice minimo) che garantiscono che il metodo del simplesso termini in tempo finito.