Metodo delle due fasi

- Il problema artificiale
- la fase I del Simplesso
- esempi

rif. Fi 3.2.5;

Problema artificiale

Dato un problema in forma standard $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\text{[fix] b}}{=} 0, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, definiamo *problema artificiale*:

$$w = \min \sum_{i=1}^{m} y_i$$

s.t.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

le variabili $\mathbf{y}$ sono dette *artificiali*.

Esempio

$$\min 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

da cui il tableau:

0	0	0	1	1	0
1	3	4	1	0	1
2	1	3	0	1	2

$$\min y_1 + y_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_1 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

sottraendo alla riga 0 le altre:

-3	-4	-7	0	0	-3	
1	3	4	1	0	1	y_1
2	1	3	0	1	2	y_2

forma canonica

Fase I

Possiamo quindi risolvere il problema artificiale col Metodo del Simplesso, ottenendo la soluzione $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ di valore w^*. Sono possibili 2 casi:

- $w^* > 0$ non esiste una soluzione del prob. artificiale con $y_i = 0, i = 1, \ldots, m$, quindi il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ non ammette soluzione: il problema originale è inammissibile
- $w^* = 0$ quindi $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}^*$ è sol. ammissibile del problema originale.

  2 sottocasi per il tableau ottimo:

  (a) tutte le variabili artificiali sono fuori base
  (b) esiste una variabile y_h in base

Caso $2a$: variabili artificiali fuori base

- eliminando le colonne corrispondenti alle var. artificiali il tableau [fix] è in forma canonica risp. a una base
- sostituire la f.o. (funzione obiettivo) artificiale con quella originaria, portare la riga 0 in forma canonica
- applicare il Metodo del Simplesso (Fase II)

Esempio (continua)

scegliamo la var. entrante x_3 e $t = \arg\min\{1/4, 2/3\} = 1 \implies$ var. uscente y_1

-3	-4	-7	0	0	-3	
1	3	**4**	1	0	1	y_1
2	1	3	0	1	2	y_2

$PIVOT$ $(t = 1, 3)$ $\implies$

-5/4	5/4	0	7/4	0	-5/4	
1/4	3/4	1	1/4	0	1/4	x_3
5/4	-5/4	0	-3/4	1	5/4	y_2

scegliamo la var. entrante x_1 e $t = \arg\min\{1, 1\} = 2 \implies$ var. uscente y_2

$PIVOT$ $(t = 2, 1)$ $\implies$

0	0	0	1	1	0	
0	1	1	2/5	-1/4	0	x_3
1	-1	0	-3/5	4/5	1	x_1

soluzione ottima $(1, 0, 0, 0, 0)$ di valore 0

Esempio (continua)

le variabili y_1, y_2 sono fuori base, quindi eliminiamo le corrisp. colonne e ripristiniamo la f.o. originaria

3	4	6	0	
0	1	1	0	x_3
1	-1	0	1	x_1

mettiamo in forma canonica sommando alla riga 0 le righe 1 e 2 moltiplicate per -6 e -3 risp.

0	1	0	-3	
0	1	1	0	x_3
1	-1	0	1	x_1

Riga#0 - (6 x Riga#1) - (3 x Riga#2)

Prendiamo 6 e 3 perché le righe 1 e 2, rispettivamente,
hanno in base x3 ed x1,
e la riga 0 alla colonna x3 vale 6 e alla colonna x1 vale 3.

eseguiamo quindi la FASE II: $\mathbf{c} \geq \mathbf{0} \implies (1, 0, 0)$ è soluzione ottima

Caso $2b$: variabile y_h in base

essendo $w^* = 0$ deve essere $y_h^* = 0$, quindi abbiamo un caso degenere. Se $h = B(i)$, si ha:

x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	y_1	$\cdots$	y_h	$\cdots$	y_n		
							0			0	$-w$
		$\vdots$					$\vdots$				
							0				
$\bar{a}_{i1}$		$\bar{a}_{ih}$		$\bar{a}_{in}$			1			0	y_h
							0				
		$\vdots$					$\vdots$				
							0				

Caso $2b$: variabile y_h in base

• se esiste un $\bar{a}_{ij} \neq 0$, eseguiamo $PIVOT(i, j)$ in modo da far uscire y_h dalla base.

- possiamo farlo anche se $\bar{a}_{ij} < 0$ in quanto $\bar{b}_i = 0$, quindi rimane $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$
- il valore $w = w^*$ non cambia

ripetendo il procedimento per tutte le var artificiali in base ci si riconduce al caso $(2a)$.

• se invece tutti i valori $\bar{a}_{i1}, \dots, \bar{a}_{in}$ sono nulli, eliminando le var. arificiali si ottiene una riga del tableau tutta nulla, cioè la corrispondente equazione era ottenibile come combinazione lineare delle altre e può essere eliminata ($\equiv \mathbf{A}$ non ha rango m)

Esempio

$$\min 7x_1 - 3x_2 - 6x_3$$

s.t.

$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min y_1 + y_2$$

s.t.

[fix] + y1

$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3$$

[fix] + y2

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

da cui il tableau:

0	0	0	1	1	0
3	-4	-2	1	0	3
1	1	1	0	1	1

sottraendo alla riga 0 le altre:

-4	3	1	0	0	-4	
3	-4	-2	1	0	3	y_1
1	1	1	0	1	1	y_2

forma canonica

Esempio

scegliamo la var. entrante x_1 e $t = \arg\min\{1,1\} = 2 \implies$ var. uscente y_2

-4	3	1	0	0	-4	
3	-4	-2	1	0	3	y_1
1	1	1	0	1	1	y_2

$PIVOT$
$(t = 2, 1)$
$\implies$

0	7	5	0	4	0	
0	-7	-5	1	-3	0	y_1
1	1	1	0	1	1	x_1

OSS. la var artificiale y_1 rimane in base nel tableau ottimo del problema artificiale. Eseguiamo quindi un nuovo pivot:

$PIVOT$
$(t = 1, 3)$
$\implies$

0	0	0	1	1	0	
0	7/5	1	-1/5	3/5	0	y_1 [fix] x3
1	-2/5	0	1/5	-2/5	1	x_1

tutte le var. artificiali sono fuori base

Esempio

eliminiamo le var. artificiali e ripristiniamo la funzione obiettivo originaria:

7	-3	-6	0
0	7/5	1	0
1	-2/5	0	1

in forma canonica $\Longrightarrow$

[fix] 41/5

0	28/5	0	-7
0	7/5	1	0
1	-2/5	0	1

Sull'operazione di forma canonica sul tableau finale, vedi pagina 7.

Inizia FASE II:

STOP: $(1,0,0)$ **soluzione ottima**