Poliedri in forma standard

- soluzioni di base
- basi e soluzioni di base adiacenti
- degenerazione

rif. Fi 3.1.1; BT 2.3

Soluzioni di base di poliedri in forma standard

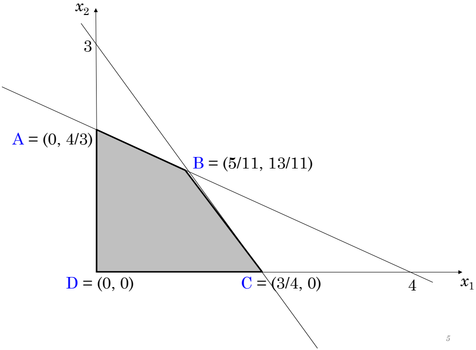
$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Una soluzione di base x:

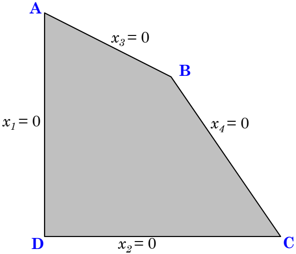
- soddisfa tutti i vincoli di uguaglianza (cioè è soluzione del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- è descritta da n vincoli attivi linearmente indipendenti; quindi, se $\mathbf{A}$ è una matrice $m \times n$ in cui le m righe sono linearmente indipendenti ($\implies m \leq n$), ha $n - m$ variabili nulle

Esempio

$$\max 5x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$4x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$-\min -5x_1 - 4x_2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



Esempio

Annullando 2 delle 4 variabili si ottengono le soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ corrispondenti ai vertici

$$
\begin{aligned}
-\min -5x_1 - 4x_2 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\
4x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
x_1, x_2 = 0 & \Longrightarrow & x_3 = 4, x_4 = 3 & D = (0, 0) \\
x_2, x_4 = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 3/4, x_3 = 13/4 & C = (3/4, 0) \\
x_3, x_4 = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 5/11, x_2 = 13/11 & B = (5/11, 13/11) \\
x_1, x_3 = 0 & \Longrightarrow & x_2 = 4/3, x_4 = 5/3 & A = (0, 4/3)
\end{array}
$$

In generale...

Se abbiamo un sistema di equazioni lineari con n incognite ed m vincoli (con $m \leq n$), annullando $n - m$ incognite si ricavano le rimanenti m incognite in modo univoco (a meno di singolarità)

Dato:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Definizione
Si dice *rango* di $\mathbf{A}$ la dimensione del sottospazio generato dai vettori colonna di $\mathbf{A}$. Se $rango(\mathbf{A}) = \min\{m, n\}$ allora si dice che la matrice ha rango pieno

d'ora in poi facciamo la seguente:
Ipotesi $m \leq n$ e $rango(\mathbf{A}) = m$, cioè $\mathbf{A}$ ha rango pieno

Basi di $\mathbf{A}$

Definizione

Una collezione di m colonne di $\mathbf{A}$ linearmente indipendenti è detta *base* di $\mathbf{A}$. Queste formano una sottomatrice quadrata $\mathbf{B}$ non singolare.
Le variabili x_j associate alle colonne di B si dicono *variabili in base*, le altre *variabili fuori base*

Esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione rispetto ad una base

esplicitiamo le colonne di $\mathbf{A}$ in base e fuori base

$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{F}]$ $\qquad$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix}$

riscriviamo il sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies [\mathbf{B} \quad \mathbf{F}] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix} \implies \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{F}\mathbf{x}_F = \mathbf{b}$$

essendo $\mathbf{B}$ invertibile, si ottiene

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

ovvero

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F$$

Soluzione di base

quindi, la soluzione

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F \\ \mathbf{x}_F \end{array} \right]$$

soddisfa sempre il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Definizione

La soluzione ottenuta ponendo $\mathbf{x}_F = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ si dice *soluzione di base associata alla base* $\mathbf{B}$. Se $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ la soluzione una s.b.a. e $\mathbf{B}$ si dice *base ammissibile*

Esempio (continua)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & \color{blue}{3} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \overset{\text{[fix] -}}{\cancel{+}} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_F \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

in cui $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/11 & 3/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$

Esempio (continua)

quindi, il sistema equivalente è:

$$\begin{cases} x_1 = 5/11 + 1/11x_3 - 3/11x_4 \\ x_2 = 13/11 - 4/11x_3 + 1/11x_4 \end{cases}$$

e la s.b.a. $x_1 = 5/11, x_2 = 13/11, x_3 = 0, x_4 = 0$ corrisponde al vertice B

Esercizio. Enumerare le rimanenti basi di A e calcolare le corrispondenti soluzioni di base

Basi vs. soluzioni di base

- soluzioni di base distinte corrispondono a basi diverse. Infatti, $\mathbf{B}$ è non-singolare e $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ha un'unica soluzione
- basi diverse possono corrispondere alla medesima soluzione di base

Ovvero:
- una base può avere una sola soluzione, quindi due soluzioni (di base) distinte non posso corrispondere alla stessa base;
- partendo da basi diverse si possono ottenere stesse soluzioni (di base).

Esempio

$$
\begin{aligned}
-\min -5x_1 - 4x_2 & \\
x_1 + x_4 &= 1 \\
x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\
x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Basi vs. soluzioni di base

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_4 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basi adiacenti

Definizione
Due soluzioni di base si dicono adiacenti se esistono $n-1$ vincoli linearmente indipendenti che sono attivi in entrambe

Per problemi in forma standard, si dice che *due basi sono adiacenti* se differiscono di una sola colonna.

Soluzioni di base adiacenti possono essere sempre ottenute da basi adiacenti.

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$