Geometria della programmazione lineare

- poliedri
- punti estremi, vertici, soluzioni di base
- esistenza di punti estremi

rif. Fi 3.1; BT 2.1, 2.2, 2.5

Iperpiani, semispazi, poliedri

Definizione

Sia $\mathbf{a}$ un vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$ e b uno scalare.

l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$ è detto *iperpiano*

l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\}$ è detto *semispazio*

Osservazione Un semispazio è un insieme chiuso e convesso (per la convessità della funzione $\mathbf{a}^T\mathbf{x} - b$) e un iperpiano coincide con la frontiera del corrispondente semispazio

Definizione

Si definisce *poliedro* ogni insieme che può essere descritto come l'intersezione di un numero finito di semispazi

quindi:

un poliedro è a sua volta un insieme chiuso e convesso

la regione ammissibile di un problema di PL è un poliedro

Esercizio

Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se è un poliedro:

(i) $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 - 8x + 15 \leq 0$

(ii) l'insieme vuoto

In entrambi i casi la risposta è affermativa:

(i) la funzione è una parabola di vertice $(4, -1)$ che assume valori ≤ 0 nell'intervallo $[3, 5]$

(ii) l'insieme vuoto può essere descritto da $\{x : x \leq 0, x \geq 1\}$

Politopi

Definizione

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste una costante M tale che il valore assoluto di ogni componente di $\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in S$, è minore o uguale a M

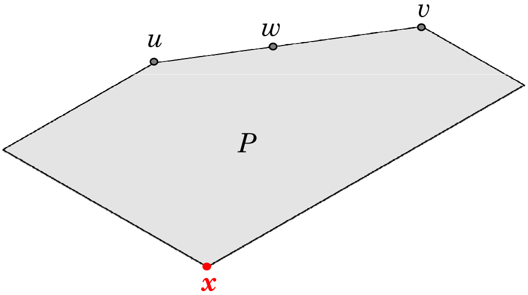
Definizione

Un poliedro limitato è detto *politopo*

Punti estremi

Definizione

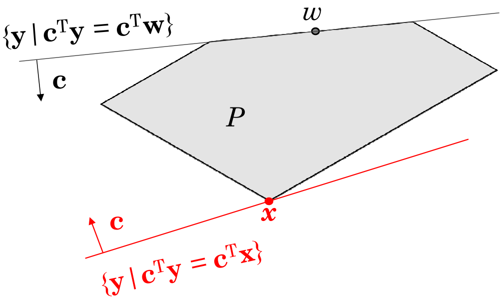
Sia P un poliedro. Un vettore $\mathbf{x} \in P$ è un *punto estremo* di P se non esistono due punti di $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ diversi da x, ed uno scalare $\lambda \in [0, 1]$ tali che $x = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$



x punto estremo, w no

Vertici

Definizione
Sia P un poliedro. Un vettore $\mathbf{x} \in P$ è un *vertice* di P se esiste un qualche $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$



quindi $\mathbf{x}$ è un vertice di P se e solo se P giace su un lato di un iperpiano $\{\mathbf{y} : \mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\}$ che interseca P solo in $\mathbf{x}$

Algebricamente...

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro definito da:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_i^T x &\geq b_i, \qquad & i \in M_1 \\
\mathbf{a}_i^T x &\leq b_i, \qquad & i \in M_2 \\
\mathbf{a}_i^T x &= b_i, \qquad & i \in M_3
\end{aligned}
$$

Definizione

Se un vettore $\mathbf{x}^*$ soddisfa [fix] i $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b_i$ per qualche $i \in M_1, M_2, M_3$, il corrispondente vincolo si dice *attivo* in $\mathbf{x}$.

Teorema

Sia $I = \{i | \mathbf{a}^T\mathbf{x}^* = b_i\}$ l'insieme dei vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$. Allora, esistono n vettori $\{\mathbf{a}_i | i \in I\}$ linearmente indipendenti se e solo se il sistema di equazioni $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b_i, i \in I$ ha un'unica soluzione

Soluzioni di base

Definizione
Il vettore $\mathbf{x}^*$ si dice *soluzione di base* se

(i) tutti i vincoli di uguaglianza sono attivi (i.e. $\mathbf{x}^*$ è ammissibile risp. ad essi)

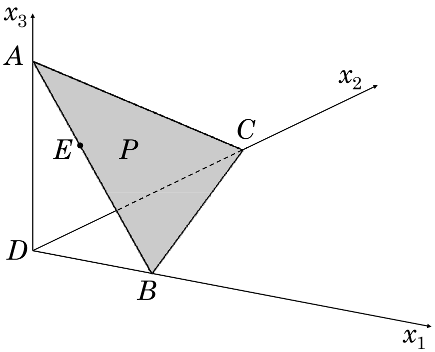
(ii) fra tutti i vincoli attivi in $\mathbf{x}^*$ ce ne sono n (i cui vettori sono) linearmente indipendenti

Una soluzione di base $\mathbf{x}^*$ che soddisfa <u>tutti</u> i vincoli è detta *soluzione di base ammissibile* (sba)

Osservazione Se il numero m di vincoli che definisce il poliedro P è minore di n non esistono soluzioni di base

Esempio

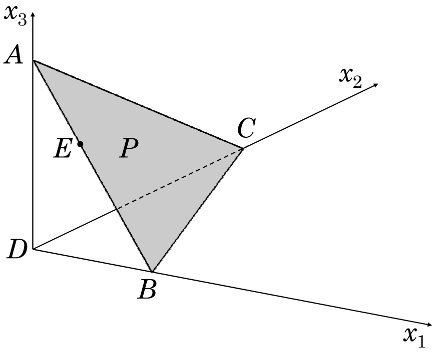
$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- A, B, C soluzioni di base ammissibili
- D non è sol. di base (non soddisfa il vincolo $=$)
- E è ammissibile ma non sol. di base

Esempio

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$



- in questo caso anche D è soluzione di base.

Quindi, il fatto che un punto sia o no soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

Equivalenza punti estremi-vertici-sba

Teorema
Sia P un poliedro non vuoto e sia $\mathbf{x}^* \in P$. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a) $\mathbf{x}^*$ è un vertice

(b) $\mathbf{x}^*$ è un punto estremo

(c) $\mathbf{x}^*$ è una soluzione di base ammissibile

Dimostrazione $(a) \implies (b)$
$(a) \implies$ esiste $\mathbf{c}$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ quindi, presi due punti generici $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in P$, entrambi diversi da $\mathbf{x}^*$, risulta: $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{w}$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{z}$. Di conseguenza, per ogni $\lambda \in [0, 1]$:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T(\lambda\mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z})$$

cioè, $\mathbf{x}^* \neq \lambda\mathbf{w} + (1-\lambda)\mathbf{z}$

Dimostrazione (cont.)

Assumiamo che tutti i vincoli di disuguaglianza abbiano la forma $\mathbf{a}_i^T \geq b_i$

$(b) \implies (c)$

Supponiamo che $\mathbf{x}^*$ non sia sba e dimostriamo che non è punto estremo.

$\mathbf{x}^*$ non sba $\implies$ non esistono n vettori linearmente indipendenti in $I = \{i | \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* = b_i\}$. Quindi, i vettori $\mathbf{a}_i$ giacciono in un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^n$ ed esiste un qualche vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus 0_n$ tale che $\mathbf{a}^T \mathbf{d} = 0$, per ogni $i \in I$.

Scegliamo un $\epsilon > 0$ piccolo e costruiamo i vettori:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \epsilon \mathbf{d}, \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \epsilon \mathbf{d}$$

Dimostrazione (cont.)

- per $i \in I$ si ha: $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \epsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i$
- per $i \notin I$ risulta $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$: quindi, se ϵ è sufficientemente piccolo, $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \epsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} > b_i$.

Quindi, se ϵ è sufficientemente piccolo, $\mathbf{y} \in P$. Analogamente si dimostra che $\mathbf{z} \in P$. Ma abbiamo anche che $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$, che implica che $\mathbf{x}^*$ non è punto estremo

$(c) \implies (a)$

$\mathbf{x}^*$ è sba. Poniamo $\mathbf{c} = \sum_{i\in I}\mathbf{a}_i$. Quindi abbiamo:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \sum_{i\in I}\mathbf{a}_i\mathbf{x}^* = \sum_{i\in I} b_i$$

Inoltre, per ogni $\mathbf{x} \in P$ ed ogni i risulta $\mathbf{a}_i^T \geq b_i$ e

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i\in I}\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq \sum_{i\in I} b_i \tag{1}$$

Dimostrazione (cont.)

In sostanza, $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ottima per il problema di minimizzare $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ su P.

Si osservi infine che la disequazione (1) è soddisfatta all'uguaglianza se e solo se $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$ per ogni $i \in I$.

Dato che x^* è una sba, ci sono n vincoli attivi linearmente indipendenti in $\mathbf{x}^*$, cioè x^* è l'unica soluzione del sistema $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, i \in I$ (teorema precedente).

Segue che $\mathbf{x}^*$ è l'unica soluzione ottima di $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ su P, cioè è un vertice di P. $\square$

Conseguenza

- Ogni soluzione di base è definita da n vincoli attivi linearmente indipendenti, che definiscono un unico punto
- quindi, diverse soluzioni di base corrispondono a diversi insiemi di n vincoli linearmente indipendenti, da cui:

Corollario

Dato un numero finito m di disuguaglianze lineari, il numero di soluzioni di base o di sba (e quindi di vertici) è finito. In particolare è minore o uguale a $\binom{n}{m}$

Ricapitolando

- dato che la proprietà di essere punto estremo (o vertice) è puramente geometrica, il risultato di equivalenza implica che lo stesso vale per la proprietà di sba
- la proprietà di essere soluzione di base dipende dalla rappresentazione del poliedro

Esistenza di punti estremi

Non tutti i poliedri hanno punti estremi. Ad es, se la matrice $\mathbf{A}$ ha meno di n righe, il poliedro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ non ha sba.

In generale si ha:

Definizione

Si dice che un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ *contiene una retta* se esiste un vettore $\mathbf{x} \in P$ ed un vettore non nullo $\mathbf{d}$ tali che $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in P$ per ogni scalare λ

Teorema

Un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ ha almeno un punto estremo se e solo se non contiene una retta

Osservazione Un poliedro in forma standard non contiene mai una retta e quindi ha almeno un punto estremo