Teorema 10.20 Il problema della copertura per nodi è NP-completo.

DIMOSTRAZIONE NC è chiaramente in $\mathcal{NP}$. Scegliamo un insieme di k nodi e verifichiamo che contenga almeno un estremo di ogni lato di G.

Per completare la dimostrazione, riduciamo IS a NC. Ci basiamo sul fatto, illustrato dalla Figura 10.8, che il complemento di un insieme indipendente è una copertura per nodi. Per esempio l'insieme dei nodi di tratto più sottile nella figura è una copertura per nodi. Poiché i nodi con tratto spesso formano un insieme indipendente massimale, gli altri formano una copertura minimale.

Siano G e k gli elementi di un'istanza del problema dell'insieme indipendente. Se G ha n nodi, siano G e $n - k$ gli elementi dell'istanza di NC che vogliamo costruire. La trasformazione si può evidentemente compiere in tempo lineare. Sosteniamo che

- G ha un insieme indipendente di dimensione k se e solo se G ha una copertura per nodi di dimensione $n - k$.

(Se) Sia N l'insieme dei nodi di G, e C la copertura per nodi di dimensione $n - k$. Affermiamo che $N - C$ è un insieme indipendente. Supponiamo il contrario, cioè che ci siano due nodi v e w in $N - C$ uniti da un lato di G. Poiché né v né w sono in C, il lato (v, w) di G non è coperto da C. Abbiamo quindi dimostrato per assurdo che $N - C$ è un insieme indipendente. Questo insieme ha chiaramente k nodi; e questa parte della dimostrazione è conclusa.

(Solo se) Sia I un insieme indipendente di k nodi. Affermiamo che $N - I$ è una copertura per nodi con $n - k$ nodi. Ragioniamo per assurdo. Se un lato (v, w) non è coperto da $N - I$, sia v sia w sono in I; ma essi sono uniti da un lato, il che contraddice la definizione di insieme indipendente. $\square$