Teorema 8.17 Se un computer:

1. ha solo istruzioni che aumentano la lunghezza massima delle parole di non più di un'unità

2. ha solo istruzioni che una TM multinastro può eseguire su parole di lunghezza k in $O(k^2)$ passi o meno

allora la macchina di Turing descritta nel Paragrafo 8.6.2 può simulare n passi del computer in $O(n^3)$ dei suoi passi.

DIMOSTRAZIONE Partiamo dall'osservazione che il primo nastro (la memoria) della TM nella Figura 8.22 contiene inizialmente solo il programma del computer. Il programma può essere lungo, ma è fisso e di lunghezza costante, indipendente da n, il numero dei passi di istruzione eseguiti dal computer. Esiste perciò una costante c, che è la parola più lunga o l'indirizzo più lungo tra quelli presenti nel programma. Inoltre esiste una costante d, che è il numero di parole occupate dal programma.

Di conseguenza, dopo aver eseguito n passi, il computer non può aver creato alcuna parola più lunga di $c + n$, e perciò non può aver creato o usato alcun indirizzo che a sua volta sia più lungo di $c + n$ bit. Ciascuna istruzione crea al massimo un unico nuovo indirizzo che prende un valore, per cui il numero totale di indirizzi dopo l'esecuzione di n istruzioni è al massimo $d + n$. Dato che ciascuna combinazione indirizzo-parola richiede al massimo $2(c + n) + 2$ bit, inclusi l'indirizzo, il contenuto e due simboli marcatori per separarli, il numero totale di celle di nastro della TM occupate dopo che n istruzioni sono state simulate è al massimo $2(d + n)(c + n + 1)$. Poiché c e d sono costanti, tale numero di celle è $O(n^2)$.

Sappiamo ora che ognuna delle ricerche di indirizzi, in numero fisso, coinvolte in un'unica istruzione, può essere eseguita in un tempo $O(n^2)$. Dato che le parole sono $O(n)$ in lunghezza, il nostro secondo assunto indica che ognuna delle istruzioni stesse può essere svolta dalla TM in un tempo $O(n^2)$. L'unico costo residuo e significativo di un'istruzione riguarda il tempo impiegato dalla TM per creare maggiore spazio sul suo nastro allo scopo di contenere una parola nuova oppure una estesa. La tecnica impiegata richiede di copiare al massimo $O(n^2)$ dati dal nastro 1 al nastro ausiliario, e viceversa. Perciò anch'essa richiede solo un tempo $O(n^2)$ per ogni istruzione del computer.

Il risultato è che la TM simula un passo del computer in $O(n^2)$ dei suoi passi. Di conseguenza, come abbiamo sostenuto nell'enunciato del teorema, n passi del computer possono essere simulati in $O(n^3)$ passi della macchina di Turing. □

Come osservazione finale risulta chiaro che, a condizione di elevare al cubo il numero di passi, una TM multinastro può simulare un computer. Sappiamo anche dal Paragrafo 8.4.3 che una TM a nastro unico può simulare una TM multinastro elevando al quadrato il numero dei passi. La conclusione è riassunta nel prossimo teorema.