Teorema 11.3 Se M è una TM (deterministica o non deterministica) con limite polinomiale sullo spazio, e $p(n)$ è il suo limite polinomiale sullo spazio, allora esiste una costante c tale che, se M accetta un input w di lunghezza n, lo fa entro $c^{1+p(n)}$ mosse.

DIMOSTRAZIONE Il concetto di fondo è che M deve ripetere una ID prima di superare le $c^{1+p(n)}$ mosse. Se M ripete una ID e poi accetta, deve esistere una sequenza più breve di ID che conduce all'accettazione. In altre parole, se $\alpha \overset{*}{\vdash} \beta \overset{*}{\vdash} \beta \overset{*}{\vdash} \gamma$, dove α è la ID iniziale, β è la ID ripetuta e γ è la ID accettante, allora $\alpha \overset{*}{\vdash} \beta \overset{*}{\vdash} \gamma$ è una sequenza più breve di ID che conduce all'accettazione.

Il ragionamento per cui c deve esistere poggia sul fatto che, se lo spazio usato dalla TM è limitato, c'è solo un numero limitato di ID. In particolare, sia t il numero di simboli di nastro di M e sia s il numero di stati di M. Se si usano solo $p(n)$ celle di nastro, il numero di ID diverse di M è al massimo $sp(n)t^{p(n)}$. Possiamo infatti scegliere uno degli s stati, collocare la testina su una qualunque delle $p(n)$ posizioni di nastro, e riempire le $p(n)$ celle con una qualsiasi delle $t^{p(n)}$ sequenze di simboli di nastro.

Poniamo $c = s + t$ e consideriamo l'espansione binomiale di $(t + s)^{1+p(n)}$:

$$t^{1+p(n)} + \big(1 + p(n)\big)st^{p(n)} + \cdots$$

Osserviamo che il secondo termine è almeno tanto grande quanto $sp(n)t^{p(n)}$, il che dimostra che $c^{1+p(n)}$ è almeno uguale al numero di ID possibili di M. Concludiamo la dimostrazione osservando che se M accetta w di lunghezza n, lo fa con una sequenza di mosse che non ripete una ID. Perciò M accetta con una sequenza di mosse che non è più lunga del numero di ID distinte, che è $c^{1+p(n)}$. $\square$