Teorema 10.15 3SAT è NP-completo.

DIMOSTRAZIONE 3SAT è in $\mathcal{NP}$ perché SAT è in $\mathcal{NP}$. Per dimostrare che è NP-completo, riduciamo CSAT a 3SAT. Data un'espressione in CNF $E = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k$, formiamo una nuova espressione F sostituendo ogni clausola e_i nel modo che descriveremo. Il tempo necessario per costruire F è lineare nella lunghezza di E, e vedremo che un assegnamento di valori di verità soddisfa E se e solo se possiamo estenderlo a un assegnamento che soddisfa F.

1. Se e_i è un letterale[4], poniamo x, introduciamo due nuove variabili u e v. Sostituiamo (x) con le quattro clausole $(x+u+v)(x+u+\overline{v})(x+\overline{u}+v)(x+\overline{u}+\overline{v})$. Poiché u e v compaiono in tutte le combinazioni, c'è un solo modo di soddisfare tutte le clausole: rendere vera x. Di conseguenza tutti gli assegnamenti che soddisfano E, e solo quelli, si possono estendere ad assegnamenti che soddisfano F.

2. Sia e_i la somma di due letterali: $(x + y)$. Introduciamo la nuova variabile z e sostituiamo e_i con il prodotto di due clausole $(x + y + z)(x + y + \overline{z})$. Come nel caso 1, il solo modo per soddisfarle è soddisfare $(x + y)$.

3. Se è la somma di tre letterali, e_i è già nella forma richiesta per 3-CNF e possiamo lasciarla in F così com'è.

4. Sia $e_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$ per un $m \geq 4$. Introduciamo le nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}$ e sostituiamo e_i con il prodotto di clausole

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + y_1)(x_3 + \overline{y_1} + y_2)(x_4 + \overline{y_2} + y_3)\cdots\\&(x_{m-2} + \overline{y_{m-4}} + y_{m-3})(x_{m-1} + x_m + \overline{y_{m-3}})\end{aligned} \tag{10.2}$$

   Un assegnamento T che soddisfa E deve rendere vero almeno un letterale di e_i; sia x_j quel letterale (x_j può essere una variabile semplice o negata). Se dichiariamo $y_1, y_2, \ldots, y_{j-2}$ vere e $y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_{m-3}$ false, tutte le clausole di (10.2) risultano vere. Perciò T può essere estesa in modo da soddisfarle. Viceversa, se in T tutte le x sono false, non è possibile estendere T rendendo (10.2) vera. Infatti ci sono $m - 2$ clausole, e ognuna delle $m - 3$ variabili y, che sia vera o falsa, può rendere vera una sola clausola.

Abbiamo così mostrato come ridurre ogni istanza E di CSAT a un'istanza F di 3SAT in modo che F sia soddisfacibile se e solo se E è soddisfacibile. È chiaro che il tempo impiegato dalla costruzione è lineare rispetto alla lunghezza di E, perché in nessuno dei quattro casi svolti una clausola si espande di un fattore maggiore di 32/3 (il rapporto dei numeri di simboli nel caso 1) ed è facile determinare i simboli di F in tempo proporzionale al loro numero. Poiché CSAT è NP-completo, ne segue che lo stesso vale per 3-SAT. □