Parcial 2

Modelos multiestados, matemática financiera, seguros de vida & atención médica

Por:
Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias
Medellín
2021

Problema 1

Problema sobre seguros médicos y seguros de vida.

Hipótesis para el problema:

(a) La fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la ley de mortalidad asignada. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.5 y §2.6).

(b) Una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa: $\mu^s_{x+t} = k\mu_{x+t}$, con $k = 1.02$.

(c) La intensidad de transición μ^{ai}_x según el modelo Weibull dado en la sección §7.6.4, pag. 248, con los valores de los parámetros para mujeres especificados en el ejemplo 7.6.1, pag. 251.

(d) Utilice una tasa $i = 0.06$ y una tasa para incremento de costo de vida de $iq = 0.025$, ambas efectivas anuales. Calcule para la edad: $x = 40$. Use $n = 110 - x$ de manera que es un seguro de vida entera. Valor asegurado inicial $C = 100$ unidades.

Puntos:

(a) Calcule la prima neta $\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n|}}$, definida en (7.51), pag. 251, para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnóstico de cirugía arterial. Ayuda: ver el Ejemplo 7.6.1, pag. 251.

(b) Repita el cálculo del punto anterior cambiando la intensidad de transición μ^{ai}_x por $0.01 + \mu^{ai}_x$. ¿Qué significa este cambio? ¿Cómo afecta las primas $\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n|}}$?

(c) Calcule la prima neta del seguro vida temporal, $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$, definida en (7.3), pag. 220 y la correspondiente para el seguro de vida que paga al final del mes, $A^{1(m)}_{x:\overline{n|}}$ (ver (7.38), pag. 239), usando la relación

$$A^{1(m)}_{x:\overline{n|}} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{A}_{x:\overline{n|}}$$

Ayuda: recordar que $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1)$, es la tasa nominal a m períodos, ver (5.2), pag. 141.

Solución

Wilfred Perks propuso dos leyes de mortalidad en 1932, este trabajo se solucionó usando la primera de sus leyes. Definida a continuación:

Primera ley de mortalidad Perks. *Utilizando la parametrización de la librería R MortalityLaws, por*

$$\mu_{x+t} = \frac{a_1 e^{a_3(x+t)} + a_2}{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1}. \tag{1}$$

para $x \in \{0, 1, \cdots, \omega\}$, con a_1, a_2, a_3, a_4 parámetros positivos y la probabilidad de supervivencia como:

$$ {}_tp_x = e^{-a_1 t}\left(\frac{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1}{a_4 e^{a_3 x} + 1}\right)^g, \qquad \text{con } g = \frac{a_1 a_4 - a_2}{a_3 a_4} \tag{2}$$

Los parámetros a_1, a_2, a_3 y a_4 dados en el ejemplo ***2.6.2*** *son:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 7.130052 \times 10^{-7},\\ a_2 &= 2.005330 \times 10^{-5},\\ a_3 &= 1.123180 \times 10^{-1},\\ a_4 &= 1.982141 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Definición en R

```
#----------Ley Perks 1
#----------Definir la fuerza de mortalidad
muxt.perk1 <- function(t, x, pars){
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  a4 <- pars[4]
  m <- (a1 + a2*exp(a3*(x + t)))/(a4*exp(a3*(x + t)) + 1)
  return(m)
}

#----------Definir tpx
tpx.perks1 <- function(t, x, pars){
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  a4 <- pars[4]
  g <- (a1*a4 - a2)/(a3*a4)
  v <- exp(- a1*t)*((a4*exp(a3*(x + t)) + 1)/(a4*exp(a3*x) + 1))^g
  return(v)
}

#----------Tasas y beneficio
i <- 0.06
iq <- 0.025
bt <- function(t) 100*(1+iq)^(floor(t))

#----------Edades y período temporal en años
x <- 40
n <- 110 - x

#----------muxai Weibull
require(eha)
muxai <- function(t) hweibull(x + t, shape = aw, scale = bw)

#----------muxai Weibull
tpxai <- function(t) pweibull(x + t, shape = aw,scale=bw,lower.tail=FALSE)

#----------Parámetros modelo Weibull
#----------a = shape, b = scale
#----------Mujeres
mu <- 3.615433E-09
tau <- 3.284108255
aw <- tau+1
bw <- ((tau+1)/mu)^(1/(tau+1))

#----------Parámetros Perks 1
pars <- c(7.130052*10^(-7), 2.005330*10^(-5), 1.123180*10^(-01), 1.982141*10^(-05))
```

(a) Para calcular la prima neta para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnostico de la cirugía arterial, para la vida de una mujer de edad $x = 40$ y el temporal es $n = 110 - x$ con un costo inicial de $C = 100$ unidades monetarias y una tasa inflación de $iq = 2.5\,\%$ efectivo anual. Utilizando una tasa técnica $i = 0.06$ efectivo anual.

Para el modelo, la intensidad μ_x^{ai} se calculará como una Weibull especificada con los parámetros de las mujeres del ejemplo 7.6.1, donde $a = 4.284108$ y $b = 131.2171$

Luego la intensidad de pasar de sano a enfermo es:

$$\mu_x^{ai} = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}$$

Ahora se calcula μ_x^{ad} que es la fuerza de mortalidad de la Perks 1.

$$\mu_x^{ad} = \mu_{x+t} = \frac{a_1 e^{a_3(x+t)} + a_2}{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1}$$
$$\mu_{40}^{ad} = \mu_{40+t} = \frac{7.130052 \times 10^{-7} e^{a_3(x+t)} + 2.005330 \times 10^{-5}}{1.982141 \times 10^{-5} e^{1.123180 \times 10^{-1}(x+t)} + 1}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} &= \int_0^{110-x} v^t b(t) \mu_{x+t}^{ai} {}_t p_x^{aa} dt \\
&= \int_0^{110-x} v^t b(t) \mu_{x+t}^{ai} exp\left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} + \mu_{x+u}^{ad} \right\} dt \\
&= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x exp\left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\} \mu_{x+t}^{ai} dt
\end{aligned}$$

Para desarrollar en cálculo de la integral se utilizará el siguiente código y así obtener el resultado.

Desarrollo en R

```
# Función de la prima neta
fn <- function(t) bt(t) * (1+i)^(-t) * muxai(t) * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars)

# Prima neta
int(fn, 0, n)
```

```
[1] 3.680344
```

Por tanto la prima neta para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnostico del diagnostico de la cirugía arterial es: $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{ai} = 3.680344$ unidades monetarias.

(b) Para este literal, si partimos desde la última ecuación para reemplazar la intensidad μ_x^{ai} por $0.01 + \mu_x^{ai}$ nos da que:

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{ai}_{x:\overline{n}|} &= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} du\right\} \mu^{ai}_{x+t} dt \\
&= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x exp\left\{-\int_0^t \left(0.01+\mu^{ai}_{x+u}\right) du\right\} \left(0.01+\mu^{ai}_{x+u}\right) dt \\
&= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \frac{exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} du\right\}}{exp(0.01t)} \left(0.01+\mu^{ai}_{x+u}\right) dt \\
&= 100 \left(\int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} du\right\} \frac{0.01}{exp(0.0t)} dt\right) \\
&+ 100 \left(\int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x exp\left\{-\int_0^t \mu^{ai}_{x+u} du\right\} \frac{1}{exp(0.01t)} \mu^{ai}_{x+u} dt\right)
\end{aligned}
$$

```
#Prima neta con intensidad 0.01 + mu_{x+t}^{ai}
fn2 <- function(t){
  bt(t) * (1+i)^(-t) * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars) * 0.01/exp(0.01*t) +
  bt(t) * (1+i)^(-t) * muxai(t) * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars) * 1/exp(0.01*t)
}

int(fn2, 0, n)
```

```
[1] 19.18331
```