Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Por:

Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias
Medellín

2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

(a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas $x1$, $x2$ antes de t años como

$$_tq_{\overline{x_1x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}$$

Encuentre $_tq_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Observe que $_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {}_tp_{x_1x_2}$.

(b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \mathring{e}x_1^s$. Encuentre $1 - \frac{\mathring{e}x_1^s}{e_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}

(c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

(d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x. Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

```
muxt.gm <- function(t,x,pars){
  a <- pars[1]
  b <- pars[2]
  C <- pars[3]
  mx <- a + b*C^(x+t)
  return(mx)
}

tpx.gm <- function(t,x,pars){
  a <-  pars[1]
  b <- pars[2]
  C <- pars[3]
  p <- exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))
  return(p)
}

#--- parámetros GM
a <-  0.0005
b <- 10^(-4.12)
C <- 10^(0.038)

#--- parámetros del problema
x1 <- 30
t <- 20
theta <- 1.2
w <- 110
```

Solución

(a)

Con la información en el enunciado se tiene que:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2} = (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp_{x_2}) \\
&= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2} \\
\therefore {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= 1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2}} \\
&\text{Donde} \\
{}_tp_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_1^s} \\
&= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1^s} + {}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_1^s} \\
&\text{Por el modelo multiplicativo:} \\
&= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp^{\theta}{}_{x_1} + {}_tp_{x_1}\,{}_tp^{\theta}{}_{x_1} \\
&\text{Finalmente se tiene que:} \\
{}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp^{\theta}{}_{x_1})
\end{aligned}
$$

```
(pt.x1 = tpx.gm(t,x1,c(a,b,C)))
```

```
[1] 0.9352907
```

```
(1-pt.x1)*(1-(pt.x1)^theta)
```

```
[1] 0.004991664
```

(b)

Se conoce que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \mathring{e}x_1^s \\
&\text{Ahora, por definición:} \\
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(x_1^s) > t)dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_{x_1^s} dt \\
&\text{Por el modelo multiplicativo:} \\
&= \int_0^\infty {}_tp^\theta{}_{x_1} dt \\
&= \int_0^{\omega - x_1} \left(e^{-at-\frac{bc^{x_1}}{ln(c)}(c^t-1)}\right)^\theta dt
\end{aligned}
$$

```r
#------uso de integracion numerica con R
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,c(a,b,C))^theta
(integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value)
```

```
[1] 42.07763
```

(c)

Aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega - x} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t) \, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} P(t < T(x_1^s)) \, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp_{x_1^s} \, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&\text{Por el modelo multiplicativo:} \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp^{\theta}{}_{x_1} \, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp^{\theta+1}{}_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x_1} \left(e^{-at - \frac{bc^{x_1}}{ln(c)}(c^t - 1)} \right)^{\theta+1} \left(a + bc^{x_1+t} \right) dt
\end{aligned}
$$

```
#------uso de integracion numerica con R
f <- function(t) (tpx.gm(t,x1,c(a,b,C))^(theta+1)) * muxt.gm(t,x1,c(a,b,C))
(integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value)
```

```
[1] 0.4545455
```