



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Por:

Facultad de Ciencias
Medellín
2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu_{x^s+t} = \theta \mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

- (a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas x_1 , x_2 antes de t años como

$${}_t q_{\overline{x_1 x_2}} := {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_2}$$

Encuentre ${}_t q_{\overline{x_1, x_1^s}}$. Observe que ${}_t q_{\overline{x_1 x_2}} \neq 1 - {}_t p_{x_1 x_2}$.

- (b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \overset{\circ}{e}_{x_1^s}$. Encuentre $1 - \frac{\overset{\circ}{e}_{x_1^s}}{e_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}
- (c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.
- (d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

Solución

(a)

Sea la probabilidad de fallecer dos vidas x_1 y x_2 antes de t años como:

$${}_t q_{\overline{x_1 x_2}} = {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_2}$$

y la fuerza de mortalidad sub-estándar.

$$\mu_{x+t}^s = \theta \mu_{x+t} \text{ con } \theta > 1$$

Luego:

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{x_1 x_2}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)) \\ &= {}_t p_{x_1} + {}_t p_{x_2} - {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{x_1 x_2}} &= {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_2} = (1 - {}_t p_{x_1})(1 - {}_t p_{x_2}) \\ &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p_{x_2} + {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \\ \therefore {}_t q_{\overline{x_1 x_2}} &= 1 - {}_t p_{\overline{x_1 x_2}} \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} {}_t q_{x_1 x_1^s} &= 1 - {}_t p_{x_1 x_1^s} \\ &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p_{x_1^s} + {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_1^s} \end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo

$$\begin{aligned} &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p_{x_1^\theta} + {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_1^\theta} \\ &= (1 - {}_t p_{x_1}) (1 - {}_t p_{x_1^\theta}) \end{aligned}$$

Luego

$${}_{20} q_{30, 30^s} = (1 - {}_{20} p_{30}) (1 - {}_{20} p_{30^{1.2}})$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \mathring{e}x_1^s \\ \mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(X_1^s) > t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_{x_1^s} dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_{x_1} e^{-\theta t} dt \\ &= \int_0^{\omega - x_1} \left(1 - \frac{t}{\omega - x_1}\right) e^{-\theta t} dt \\ &= \frac{1 - e^{-\theta(\omega - x_1)}}{\theta} + \frac{\theta e^{-\theta(\omega - x_1)}(\theta - x_1) + e^{-\theta(\omega - x_1)} + 1}{\theta^2(\omega - x_1)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega - x} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1 + t} dt \\ &= \int_0^{\omega - x} P(t < T(x_1^s)) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1 + t} dt \\ &= \int_0^{\omega - x} e^{-\theta t} ({}_t p_{x_1})^2 \mu_{x_1 + t} dt \end{aligned}$$