



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Por:
Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias
Medellín
2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu_{x+t}^s = \theta \mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

- (a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas x_1, x_2 antes de t años como

$${}_tq_{\overline{x_1x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}$$

Encuentre ${}_tq_{\overline{x_1, x_1^s}}$. Observe que ${}_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {}_tp_{x_1x_2}$.

- (b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \hat{e}_{x_1^s}$. Encuentre $1 - \frac{\hat{e}_{x_1^s}}{\hat{e}_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}
- (c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.
- (d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

Definición de funciones

```
muxt.gm <- function(t,x,parms){
  a <- parms[1]
  b <- parms[2]
  C <- parms[3]
  mx <- a + b*C^(x+t)
  return(mx)
}
tpx.gm <- function(t,x,parms){
  a <- parms[1]
  b <- parms[2]
  C <- parms[3]
  p <- exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))
  return(p)
}
```

Definición de parámetros

```
#--- parámetros GM
a <- 0.0005
b <- 10^(-4.12)
C <- 10^(0.038)
parms <- c(a,b,C)
#--- parámetros del problema
x1 <- 30
t <- 20
theta <- 1.2
w <- 110
```

Solución

(a)

Con la información en el enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2} = (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp_{x_2}) \\ &= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2} \\ \therefore {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= 1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2}} \\ \text{Donde} \\ {}_tp_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_1^s} \\ &= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1^s} + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_1^s} \end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1}^\theta + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_1}^\theta$$

Finalmente se tiene que:

$${}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} = (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp_{x_1}^\theta)$$

Calculando la probabilidad de que una vida sana de (30) sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1 <- tpx.gm(t,x1,pars)
```

```
[1] 0.9352907
```

$${}_tp_{x_1} = 0.9353$$

Suponiendo que (x_1^s) sufre de insuficiencia cardíaca. La probabilidad de que una vida de (30) con IC sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1^theta
```

```
[1] 0.9228602
```

$${}_tp_{x_1^s} = 0.9229$$

Por ende, dos vidas de la misma edad (30), la primera en condición sana y la segunda con IC la probabilidad de que ambas fallezcan antes de cumplir 50 años es:

```
(1-pt.x1)*(1-(pt.x1)^theta)
```

```
[1] 0.004991664
```

$${}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} = 0.0049$$

(b)

Se conoce que:

$$\mathbb{E}[T(x_1^s)] = \hat{e}x_1^s$$

Ahora, por definición:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(x_1^s) > t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_{x_1^s} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty {}_t p_{x_1}^\theta dt \\ &= \int_0^{\omega - x_1} \left(e^{-at - \frac{bex_1}{\ln(c)}(c^t - 1)} \right)^\theta dt\end{aligned}$$

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)^theta
integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 42.07763
```

(c)

Aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega-x} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} P(t < T(x_1^s)) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1^s} {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^\theta {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^{\theta+1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x_1} \left(e^{-at - \frac{bcx_1}{\ln(c)}(c^t-1)} \right)^{\theta+1} (a + bc^{x_1+t}) dt\end{aligned}$$

```
#-----uso de integracion numerica con R
f <- function(t) (tpx.gm(t,x1,pars)^(theta+1)) * muxt.gm(t,x1,pars)
integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 0.4545455
```

(d)

```
#-----generar tablas de vida con base
# en la fuerza de mortalidad estimada
require(lifecontingencies)
x = seq(0,109)
probs = tpx.gm(1,x,pars)
D = probs2lifetable(probs, radix = 100000, type = "px", name = "TablaVidaGM")
head(D)
```

```
      x      lx
1 0 100000.00
2 1  99942.09
3 2  99883.49
4 3  99824.13
5 4  99763.95
6 5  99702.86
```

```
tail(D)
```

```
      x      lx
106 105 19.8658931
107 106  9.1503806
108 107  3.9264942
109 108  1.5595249
110 109  0.5692864
111 110  0.1895262
```

```
TVH <- new("lifetable", x=D@x, lx=D@lx, name="tablas.GM")
```

```
#-----probabilidad de fallecer
qxt(TVH,x=x1,t=t)
```

```
[1] 0.06470933
```

```
pxt(TVH,x=x1,t=t)
```

```
[1] 0.9352907
```

La probabilidad de que (30) fallezca antes de cumplir 50 es de 6.47 % aproximadamente.