Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Por:
Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias
Medellín
2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

(a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas $x1$, $x2$ antes de t años como

$$ {}_tq_{\overline{x_1x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}$$

Encuentre ${}_tq_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Observe que ${}_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {}_tp_{x_1x_2}$.

(b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \mathring{e}x_1^s$. Encuentre $1 - \frac{\mathring{e}x_1^s}{e_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}

(c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

(d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x. Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

Definición de funciones

```
muxt.gm <- function(t,x,pars){
  a <- pars[1]
  b <- pars[2]
  C <- pars[3]
  mx <- a + b*C^(x+t)
  return(mx)
}
tpx.gm <- function(t,x,pars){
  a <-  pars[1]
  b <- pars[2]
  C <- pars[3]
  p <- exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))
  return(p)
}
```

Definición de parámetros

```
#--- parámetros GM
a <-  0.0005
b <- 10^(-4.12)
C <- 10^(0.038)
pars <- c(a,b,C)
#--- parámetros del problema
x1 <- 30
t <- 20
theta <- 1.2
w <- 110
```

Solución

(a)

Con la información en el enunciado se tiene que:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1x_2}} = {}_tq_{x_1}\cdot{}_tq_{x_2} &= (1-{}_tp_{x_1})(1-{}_tp_{x_2})\\
&= 1-{}_tp_{x_1}-{}_tp_{x_2}+{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}\\
\therefore\ {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= 1-{}_tp_{\overline{x_1x_2}}\\
&\text{Donde}\\
{}_tp_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tp_{x_1}+{}_tp_{x_2}-{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= {}_tq_{x_1}\cdot{}_tq_{x_1^s}\\
&= 1-{}_tp_{x_1}-{}_tp_{x_1^s}+{}_tp_{x_1}\,{}_tp_{x_1^s}\\
&\text{Por el modelo multiplicativo:}\\
&= 1-{}_tp_{x_1}-{}_tp^{\theta}{}_{x_1}+{}_tp_{x_1}\,{}_tp^{\theta}{}_{x_1}\\
&\text{Finalmente se tiene que:}\\
{}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= (1-{}_tp_{x_1})(1-{}_tp^{\theta}{}_{x_1})
\end{aligned}
$$

Calculando la probabilidad de que una vida sana de (30) sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```r
pt.x1 <- tpx.gm(t,x1,pars)
```

```
[1] 0.9352907
```

$$ {}_tp_{x_1} = 0.9353 $$

Suponiendo que (x_1^s) sufre de insuficiencia cardíaca (IC). La probabilidad de que una vida de (30) con IC sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```r
pt.x1^theta
```

```
[1] 0.9228602
```

$$ {}_tp_{x_1^s} = 0.9229 $$

Por ende, dos vidas de la misma edad (30), la primera en condición sana y la segunda con IC la probabilidad de que ambas fallezcan antes de cumplir 50 años es:

```r
(1-pt.x1)*(1-(pt.x1)^theta)
```

```
[1] 0.004991664
```

$$ {}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} = 0.0049 $$

(b)

Se conoce que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \mathring{e}x_1^s \\
&\text{Ahora, por definición, la vida media remanente se escribe como:} \\
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(x_1^s) > t)dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_{x_1^s} dt \\
&\text{Por el modelo multiplicativo:} \\
&= \int_0^\infty {}_tp^\theta{}_{x_1} dt \\
&= \int_0^{\omega - x_1} \left(e^{-at-\frac{bc^{x_1}}{ln(c)}(c^t-1)}\right)^\theta dt
\end{aligned}
$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)^theta
e.x1s <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 42.07763
```

Es decir, la esperanza de vida de (30) con IC es de $\mathring{e}x_1^s = 42.0776$ años.

Reciprocamente, se calcula la vida remanente de (30) siendo sano:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)
e.x1 <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 44.11117
```

Es decir, la esperanza de vida de (30) es de $\mathring{e}x_1 = 44.1112$ años.

Por lo tanto,

```
1 - (e.x1s / e.x1)
```

```
[1] 0.04610038
```

la disminución de la esperanza de vida para 30^s es del 4.61 %.

(c)

Aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega - x} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t)\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} P(t < T(x_1^s))\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp_{x_1^s}\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&\text{Por el modelo multiplicativo:} \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp^{\theta}{}_{x_1}\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x} {}_tp^{\theta+1}{}_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{\omega - x_1} \left(e^{-at - \frac{bc^{x_1}}{ln(c)}(c^t - 1)}\right)^{\theta+1} \left(a + bc^{x_1+t}\right) dt
\end{aligned}$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) (tpx.gm(t,x1,pars)^(theta+1)) * muxt.gm(t,x1,pars)
integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 0.4545455
```

Luego $\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) = 0.4545$ o también $\mathbb{P}(T(x_1^s) < T(x_1)) = 0.5455$, es decir, una persona de 30 años, con IC tiene un $54.55\,\%$ de probabilidades de fallecer antes que otra de la misma edad pero en condición sana, si la supervivencia estuviera descrita por la función Gompertz-Makeham con los parámetros especificados.

(d)

```r
#---------generar tablas de vida con base
# en la fuerza de mortalidad estimada
require(lifecontingencies)
x = seq(0,109)
probs = tpx.gm(1,x,pars)
D = probs2lifetable(probs, radix = 100000, type = "px", name = "TablaVidaGM")
```

head(D)		tail(D)	
x	*lx*	*x*	*lx*
0	100000.00	105	19.8658931
1	99942.09	106	9.1503806
2	99883.49	107	3.9264942
3	99824.13	108	1.5595249
4	99763.95	109	0.5692864
5	99702.86	110	0.1895262

```r
TVH <- new("lifetable", x=D@x, lx=D@lx, name="tablas.GM")
```

```r
#------probabilidad de fallecer
qxt(TVH,x=x1,t=t)
```

```
[1] 0.06470933
```

Con las tablas de vida la probabilidad de que (30) fallezca antes de cumplir 50 es de 6.47 % aproximadamente.

El anterior resultado se puede verificar, puesto que coincide exactamente con el complemento de la probabilidad de sobrevivir la vida de (30) de Gompertz-Makeham calculada en **(a)**, como se muestra a continuación:

```r
1 - pt.x1
```

```
[1] 0.06470933
```