# CAPÍTULO 8

# Anualidades de Vida y Cuidados Médicos

## 8.1. Anualidades de Vida

Una anualidad de vida es un producto financiero que puede ser adquirido por una persona a cambio de una prima, pagable inmediata ó diferida, el cual le garantiza una serie de pagos futuros, durante un período de tiempo determinado ó hasta fallecer.

El vendedor es usualmente una Compañía de Seguros.

La finalidad de una anualidad puede ser proveer una pensión ó renta vitalicia, que es una forma de seguro de vejez (incapacidad laboral por senectud), ó también una renta por invalidez (temporal o permanente), una renta como compensación por incapacidad temporal (caso de maternidad, accidente), o por desempleo. Nótese que en la legislación laboral colombiana las cesantías cumplen un papel similar a un seguro de desempleo.

Los términos anualidad y renta se utilizarán como sinónimos. En este capítulo se examinan diferentes tipos de anualidades de vida.

## 8.2. Anualidades con pagos en tiempo continuo

La metodología de tiempo continuo es muy útil porque permite utilizar todos los recursos del cálculo integral y diferencial.

Recordamos el concepto básico es la tasa instantánea de pago.

Una función $b(t)$, positiva, continua por secciones en cualquier intervalo $[a,b]$, se denomina la tasa instantánea de pagos si el total pagado en el intervalo de tiempo $[0,t]$ está dado por $\int_0^t b(s)ds$.

Por ejemplo, si la tasa de pago es constante, $b(t) \equiv C$, donde $C > 0$, como se tiene $\int_0^1 b(s)ds = C$, entonces el total pagado en 1 año es $C$. De manera similar, como $\int_{1/12}^{2/12} b(s)da = C/12$, entonces el total pagado entre el mes 1 y el mes 2, es $C/12$.

Otros ejemplos de $b(t)$ se desarrollan en las secciones §8.2.4 y §**??**.

El valor presente del total de pagos en $[0,t]$, utilizando una tasa instantánea de interés $\delta$, está dado por

$$B(t) = \int_0^t e^{-\delta s} b(s)ds. \tag{8.1}$$

El objetivo de este capítulo es desarrollar las anualidades de vida que pagan a una vida (x), a una tasa $b(t)$, durante un intervalo $[0,t]$ ó vitalicia.

### 8.2.1. Renta Vitalicia

Una anualidad ó renta vitalicia en tiempo continuo que paga a una tasa $b(t)$, a una vida (x) mientras sobreviva, financiada a una tasa continua $\delta$, tiene un valor presente dado por la variable aleatoria

$$B(T(x)) = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} = \int_0^{T(x)} b(t)e^{-\delta t}dt. \tag{8.2}$$

Y prima neta dada por

$$\bar{a}_{b,x} = \mathbb{E}[B(T(x))] = \int_0^{\omega - x} b(s)e^{-\delta s}{}_s p_x ds. \tag{8.3}$$

En el caso $b(t) \equiv 1$ se usa el símbolo $\bar{a}_x$.

La identidad en (8.3) se comprueba desarrollando primero

$$\mathbb{E}(B(T(x))) = \int_0^{\omega-x} B(t)_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Luego reemplazando $B(t)$ y usando la identidad de cálculo

$$\int_0^a \int_0^t f(t,s) ds dt = \int_0^a \int_s^a f(t,s) dt ds$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B(T(x))) &= \int_0^{\omega-x} B(t)_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} \int_0^t b(s) e^{-\delta s} ds_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} \int_s^{\omega-x} b(s) e^{-\delta s}{}_t p_x \mu_{x+t} dt ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s) e^{-\delta s} \left( \int_s^{\omega-x} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \right) ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s) e^{-\delta s} \left( \int_s^{\omega-x} -\frac{d}{dt} {}_t p_x dt \right) ds \\
&= \int_0^{\omega-x} b(s) e^{-\delta s}{}_s p_x ds.
\end{aligned}$$

**Ejercicio 8.2.1.** *Utilizar la regla de la cadena $\int udv = uv - \int vdu$ para obtener otra comprobación de (8.3).*

**Ejemplo 8.2.1.** *Calcule la prima $\bar{a}_x$ para una vida de edad 58, utilizando una tasa efectiva anual $i = 0.05$, que paga a una tasa constante de $C = 12$ unidades monetarias. Es decir, al final del primer año paga $12$ unidades. Asuma una ley Makeham-Beard. El resultado es $C\bar{a}_{58} = 163.747$, que se puede interpretar según el valor de la unidad.*

El siguiente programa en R calcula esta prima neta.

Código R 8.1: código para la renta vitalicia modelo continuo Ejemplo 8.2.1

```
# Ejemplo anualidad de vida
```

```
#---------ley Makeham - Beard
muxt = function(t,x,pars){
a = pars[1]; b = pars[2]; C=pars[3]; k =pars[4];
C+( a*exp(b*(x+t))  )/( 1 + k*a*exp(b*(x+t)) )}

tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1]; b = pars[2]; C=pars[3]; k =pars[4];
exp(-C*t)*( (exp(-b*x)  + a*k )/( exp(-b*x)+ a*k*exp(b*t)))^(1/(k*b))}
#------------- ejemplo parametros
pars = c(0.000010936, 0.105864876, 0.000227759, 0.327569880)
#-------------
x = 58;w = 110; i = 0.05; C = 12;
#-------------anualidad vida entera pago continuo

fn = function(t){(1+i)^(-t)*tpx(t,x,pars)}
(acx = C*integrate(fn,0,w-x)$value)
[1] 163.7472
```

**Ejemplo 8.2.2.** *Comparando el resultado para la misma vida, pero utilizando una mortalidad sub estándar, multiplicativa, dada en (2.25), pag. 32, con factor $\theta > 1$, se obtiene un menor valor para la renta vitalicia, aproximadamente se dismuye en un $11.73\,\%$ con relación a la inicial.*

$$\theta = 1.7,$$
$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}, \theta > 0,$$

Código R 8.2: código para la renta vitalicia sub-estándar modelo continuo

```
#------caso vida mortalidad subestandar
ddx = 1.7
tpxs = function(t,x,pars){
tpx(t,x,pars)^ddx}
fns = function(t){(1+i)^(-t)*tpxs(t,x,pars)}
(acxs = C*integrate(fns,0,w-x)$value)
[1] 146.5465
```

### 8.2.2. Reservas para anualidades de vida

Se define el flujo de caja para los saldos $F(t)$ de una cuenta de la cual se realizan los pagos de la anualidad y que garantiza una tasa $i = e^{\delta} - 1$.

Asumiendo $F(0) = \bar{a}_{b,x}$ el capital inicial igual a la prima neta, y $F(t)$ función derivable, se asume la siguiente ecuación diferencial

$$F'(t) = \delta F(t) - b(t)I(T(x) > t), \tag{8.4}$$

con condición de cierre en $t = T(x)$

$$\mathbb{E}(e^{-T(x)}F(T(x)) = 0. \tag{8.5}$$

La solución de (8.4) es

$$F(t) = e^{\delta t}\left(F(0) - \int_0^t e^{-\delta s}b(s)I(T(x) > s)ds\right). \tag{8.6}$$

Aplicando la condición de cierre (8.5) se obtiene

$$\bar{a}_{b,x} = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(x)} e^{-\delta s}b(s)ds\right)$$

La ecuación de flujo de caja dada en (8.4) no puede utilizarse con fines contables ya que son saldos contingentes, es decir, dependen de la duración de la vida de (x). En su lugar, se introduce otra función, denominada reserva retrospectiva.

**Definición 8.2.1.** *Para la renta vitalicia con tasa de pago $b(t)$ se define la reserva retrospectiva en el tiempo $t$ como la función $V_t$ dada por*

$$V_t = \mathbb{E}(F(t)|T(x) > t) = \frac{\int_t^{\omega-x} e^{-\delta s}b(s)\ {}_sp_x ds}{e^{-\delta t}\ {}_tp_x}. \tag{8.7}$$

*La demostración de esta identidad está a continuación.*

Y se cumple el siguiente resultado. La reserva $V_t$ en (8.7) satisface la ecuación diferencial de Thiele

$$V_t' = (\delta + \mu_{x+t})V_t - b(t), \tag{8.8}$$

para $0 \leq t \leq \omega - x$. Y tal que se cumple la condición de cierre $V_{\omega-x} = 0$. Además $V_0 = \bar{a}_{b,x}$.

La ecuación de Thiele es una herramienta para diseñar productos, como se muestra en Ramlau-Hansen [1990]. Y se utiliza, junto con los modelos multiestados como una forma moderna de presentar la actuaría de contingencias de vida, por ejemplo, Koller [2012].

## La demostración de la identidad (8.7)

*Demostración.* La solución de (8.4) es

$$F(t) = e^{\delta t}\left(F(0) - \int_0^t e^{-\delta s} I(T(x) > s) b(s) ds\right).$$

Reemplazando $t = T(x)$ se obtiene

$$e^{-\delta T(x)} F(T(x)) = F(0) - \int_0^{T(x)} e^{-\delta s} I(T(x) > s) b(s) ds,$$

y de la condición de cierre se comprobó que

$$F(0) = \int_0^{\omega - x} b(s) e^{-\delta s} {}_s p_x ds = \int_0^{\omega - x} e^{-\int_0^s \delta + \mu_{e+u} du} b(s) ds$$

Luego

$$F(t) = \int_0^{\omega - x} e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{e+u} du} b(s) ds - \int_0^t e^{-\delta(s-t)} I(T(x) > s) b(s) ds.$$

Se calcula a continuación la esperanza aplicando $\mathbb{E}(I(T(x) > t)) = {}_t p_x$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F(t)) &= \int_0^{\omega - x} e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{x+u} du} b(s) ds - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\delta(s-t)} I(T(x) > s) b(s) ds\right) \\
&= \int_0^{\omega - x} e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{x+u} du} b(s) ds - \int_0^t e^{-\delta(s-t)} {}_s p_x b(s) ds \\
&= \int_0^{\omega - x} e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{x+u} du} b(s) ds - \int_0^t e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{x+u} du} b(s) ds \\
&= \int_t^{\omega - x} e^{-\delta(s-t) - \int_0^s \mu_{x+u} du} b(s) ds.
\end{aligned}$$

Ahora como $\mathbb{E}(F(t) \mid T(x) < t) = 0$ se tiene por Teorema de Probabilidad total

$$\mathbb{E}(F(t)) = \mathbb{E}(F(t) \mid T(x) > t) \mathbb{P}(T(x) > t),$$

$$\therefore\ \mathbb{E}(F(t) \mid T(x) > t) = \frac{1}{{}_t p_x} \mathbb{E}(F(t))$$

$$= \frac{1}{{}_tp_x}\int_t^{\omega-x} e^{-\delta(s-t)-\int_0^s \mu_{x+u}du} b(s)ds$$
$$= \frac{\int_t^{\omega-x} e^{-\delta s} b(s)\, {}_sp_x ds}{e^{-\delta t}\, {}_tp_x}.$$

□

## 8.2.3. Temporal a $n$ años

El caso de una anualidad continua temporal a $n$ años tiene valor presente

$$Y = \bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} I(T(x) \leq n) + \bar{a}_{\overline{n}|} I(T(x) > n), \tag{8.9}$$

y la prima neta, su valor esperado

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x \tag{8.10}$$
$$= \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_tp_x dt. \tag{8.11}$$

**Ejercicio 8.2.2.** *Establecer la igualdad entre (8.10) y (8.11) utilizando integración por partes.*

**Ejemplo 8.2.3.** *Calcule la prima $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ para una vida de edad 58, utilizando una tasa efectiva anual $i = 0.05$, que paga a una tasa constante de $C = 12$ unidades monetarias, máximo durante $n = 20$ años. Asuma una ley Makeham-Beard. El resultado es $C\bar{a}_{58:\overline{20}|} = 140.0905$, que se puede interpretar según el valor de la unidad. Utilizando el código R 8.1, se le añade al final la instrucción siguiente.*

```
# anualidad de vida  continua temporal
n = 20
(acxn = C*integrate(fn,0,n)$value)
[1] 140.0905
```

## 8.2.4. Pagos en progresión geométrica

Las anualidades con pagos en progresión geométrica incorporan un factor que busca actualizar los pagos por costo de vida ó por la inflación.

Una anualidad de vida continua para la vida (x), con pagos en progresión geométrica, a una tasa $i_q$, efectiva anual, $q$ veces en el año, donde $i_q < i$, es una tasa representativa del costo de vida, tiene una tasa de pago

$$b(t) = (1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}, \tag{8.12}$$

tiene valor presente

$$B(t) = \int_0^{T(x)} v^t (1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} dt, \tag{8.13}$$

y una prima neta dada por

$$(G^{(q)}\bar{a})_x = \int_0^{\omega - x} v^t (1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{8.14}$$

La versión temporal a $n$ años tiene una prima neta

$$(G^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t (1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{8.15}$$

Una versión de la anualidad $(G^{(q)}\bar{a})_x$ es con $q = 1$, lo que significa que los incrementos ocurren cada año a la tasa $i_q$. Los pagos incian el primer año con una tasa de 1, de tal forma que la tasa de pago es

$$b(t) = (1 + i_q)^{\lfloor t \rfloor},$$

tiene prima neta dada por

$$(G\bar{a})_x = \int_0^{\omega - x} (1 + i_q)^{\lfloor t \rfloor} v^t {}_tp_x dt. \tag{8.16}$$

**Ejemplo 8.2.4.** *Una renta vitalicia para una vida de edad 65 años, paga inicialmente* $12$ *unidades monetarias al final del primer año y posteriormente se incrementan anualmente a una tasa* $i_q = 0.025$ *efectiva anual. Si la anualidad de compra a una tasa efectiva* $i = 0.06$*, y se usa la Ley Gompertz-Makeham, calcular la prima neta para hombre y mujer. Repetir para el caso de 4 pagos en el año.*

Tabla 8.1: Tabla parámetros Gompertz-Makeham

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| m80-89 | 0.0044500000 | 0.0000281400 | 1.1010000000 |
| h80-89 | 0.0049180000 | 0.0000155900 | 1.1070000000 |
| m00-08 | 0.0044440000 | 0.0000005017 | 1.1430000000 |
| h00-08 | 0.0071210000 | 0.0000025040 | 1.1260000000 |

Código R 8.3: código para la renta vitalicia modelo continuo Ejemplo 8.2.4

```
#-Ejemplo anualidad continua pagos geometricos

#--- parametros Gompertz-Makeham
M = matrix(0,4,3)
# mujeres-80-89:
a = 4.450e-03;b = 2.814e-05;C = 1.101e+00;
M[1,]=c(a,b,C)
# hombres-80-89:
a = 4.918e-03; b = 1.559e-05;C = 1.107e+00;
M[2,]=c(a,b,C)
# mujeres-00-08:
a = 4.444e-03;b = 5.017e-07;C = 1.143e+00;
M[3,]=c(a,b,C)
# hombres-00-08:
a = 7.121e-03;b = 2.504e-06;C = 1.126e+00;
M[4,]=c(a,b,C)
colnames(M)=c("a","b","c")
rownames(M)=c("m80-89","h80-89","m00-08","h00-08")
(M)

pars = M[3,]

muxt = function(t,x,pars){
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
mx = a + b*C^(x+t)
return(mx)}

tpx = function(t,x,pars){
```

```
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
p = exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))
return(p)}
x = 58; w = 110;
#----- vida entera con pagos en progresión geométrica,
 creciente a una tasa iq
#-----------tasas y beneficio
i = 0.06
v = (1+i)^(-1)
iq = 0.025
q = 1
pago = 12
bt = function(t){
pago*(1+iq)^(floor(t*q)/q)}

fn <- function(t){bt(t)*v^t*tpx(t,x,pars)}

(Gqcax=integrate(fn, lower = 0,
 upper = 110-x, subdivisions = 200)$value)
[1] 192.851
[1] 211.5787
```

**Ejemplo 8.2.5.** *Una anualidad de vida continua con pagos en progresión geométrica para la vida (x), con tasa de pago* $b(t) = (1 + i_q)^t$*, donde* $i_q < i$ *es una tasa efectiva anual, tiene valor presente de pagos en* $[0, t]$ *dado por*

$$B(t) = (\bar{G}\bar{a})_{\overline{t|}} = \int_0^t (1 + i_q)^s v^s ds \tag{8.17}$$

*y valor presente dado por*

$$B(T(x)) = (\bar{G}\bar{a})_{\overline{T(x)|}}. \tag{8.18}$$

*Nótese que si se define* $i_h = (1 + i)/(1 + i_q) - 1$*, entonces*

$$(1 + i_q)^s v^s = v_h^s,$$

*con* $v_h = 1/(1+i_h)$. *La correspondiente prima neta el es valor esperado* $\mathbb{E}(B(T(x)))$, *que, aplicando la técnica de integración por partes, tiene expresión*

$$(\bar{G}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} v_h^t {}_tp_x dt = \bar{a}_{x|i_h}. \tag{8.19}$$

*Nótese también que se cumple el siguiente límite.*

$$\lim_{q\to\infty}(G^{(q)}\bar{a})_x := (\bar{G}\bar{a})_x$$

### 8.2.5. Pagos con incrementos en progresión aritmética

Una anualidad de vida continua para la vida (x), creciente en progresión aritmética, con tasa de pago $b(t) = (1 + \lfloor qt \rfloor)/q$, tiene valor presente de pagos en $[0, t]$ dado por

$$(I^{(q)}\bar{a})_{\overline{t|}} = \frac{1}{q}\int_0^t (1 + \lfloor qs \rfloor)v^s ds \tag{8.20}$$

y prima neta dada por el valor esperado $\mathbb{E}((I^{(q)}\bar{a})_{\overline{T(x)|}})$, igual a

$$(I^{(q)}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} v^t(1 + \lfloor qt \rfloor){}_tp_x dt \tag{8.21}$$

Además, la función $b(t) = (1 + \lfloor qt \rfloor)/q$ es escalonada, empieza con un valor $1/q$ para $t \in [0, 1/q)$, con $q$ saltos de tamaño $1/q$ en cada año. Por ejemplo, con $q = 4$ tiene $4$ saltos de tamaño $1/4$ en el año, que pueden interpretarse como los finales de cada trimestre.

Un programa R para evaluar esta prima neta es

Código R 8.4: código para la renta vitalicia pagos progresion aritmetica

```
#------------tasas y beneficio
i = 0.06
v = (1+i)^(-1)
iq = 0.025
q = 1
pago = 12
bt = function(t){
```

```
pago*(1+floor(t*q))/q}

fn <- function(t){bt(t)*v^t*tpx(t,x,pars)}

(Iqcax=integrate(fn, lower = 0,
 upper = 110-x, subdivisions = 200)$value)
```

La correspondiente anualidad temporal a $n$ años tiene prima neta dada por

$$(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{q}\int_0^n v^t(1+\lfloor qt\rfloor)/{}_tp_x dt \tag{8.22}$$

Y se puede evaluar con el programa R anterior integrando en $[0, n]$.

**Ejemplo 8.2.6.** *Una versión de (8.21) es con $q = 1$, lo cual implica que los pagos se incrementan pero solamente al final de cada año, en una unidad, de tal forma que la tasa de pago es $b(t) = 1 + \lfloor t\rfloor = \lceil t\rceil$, y tiene valor prima neta dada por*

$$(I\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} \lceil t\rceil v^t{}_tp_x dt. \tag{8.23}$$

*La anualidad temporal a $n$ años correspondiente se define como*

$$(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \lceil t\rceil v^t{}_tp_x dt. \tag{8.24}$$

**Ejemplo 8.2.7.** *Otra versión de (8.21) se obtiene tomando $q \to \infty$. Usando*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1+\lfloor qt\rfloor}{q} = t$$

*se obtiene el límite*

$$\begin{aligned}(\bar{I}\bar{a})_x &:= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt\rfloor){}_tp_x dt \\ &= \int_0^{\omega-x} tv^t{}_tp_x dt \end{aligned}\tag{8.25}$$

La anualidad temporal a $n$ años correspondiente se define como

$$(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n tv^t{}_tp_x dt. \tag{8.26}$$

Dos tipos de anualidades decrecientes en progresión artimética, temporales a $n$ años, se definen como

$$(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-t)v^t {}_tp_x dt. \tag{8.27}$$

$$(D\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-\lceil t\rceil)v^t {}_tp_x dt. \tag{8.28}$$

### 8.2.6. Pagos con incrementos lineales

Una anualidad de vida continua con pagos lineales, para la vida (x), con tasa de pago $b(t) = 1 + \rho\lfloor qt\rfloor$, tiene una prima neta dada por

$$(L^{(q)}\bar{a})_x = (1-\rho)\bar{a}_x + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_x, \tag{8.29}$$

para $\rho \in (0,1), q = 1,2,3,4,12$. Esta anualidad empieza pagando a la tasa $C$ durante el período $[0, 1/q]$. Después incrementa en la tasa $\rho$, en el siguiente período $(1/q, 2/q]$, y así sucesivamente, para completar $q$ incrementos en el año. La comprobación de (8.29) es directa.

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\omega-x} b(t)v^t {}_tp_x dt = \int_0^{\omega-x} (1+\rho\lfloor qt\rfloor)v^t {}_tp_x dt \\
&= 1\int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x dt + \rho\int_0^{\omega-x} v^t(1-1+\lfloor qt\rfloor){}_tp_x dt \\
&= (1-\rho)\int_0^{\omega-x} v^t {}_tp_x dt + \rho q\frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt\rfloor){}_tp_x dt \\
&= (1-\rho)\bar{a}_x + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_x.
\end{aligned}$$

□

La correspondiente anualidad temporal a $n$ años tiene prima dada por

$$(L^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = (1-\rho)\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} \tag{8.30}$$

**Ejemplo 8.2.8.** *Para una vida (48), utilizando la ley Gompertz-Makeham con base en la experiencia ISS 05-08, hombre-mujer, una anualidad de vida continua, que paga inicialmente a una tasa instantánea anual de $C = 12$ mill, y se incrementa en un $5\,\%$ cada semestre, financiada a una tasa efectiva anual de $6.0\,\%$, tiene prima neta calculada con las instrucciones en R siguientes, con los parámetros del Código 8.3 anterior.*

Código R 8.5: código para la renta vitalicia pagos lineales

```
x = 58; w = 110;
#------------tasas y beneficio
i = 0.06
v = (1+i)^(-1)
q = 6
pago = 12
rho = 0.05

bt = function(t){
(1+floor(t*q))/q}

fn <- function(t){bt(t)*v^t*tpx(t,x,pars)}

(Iqcax=integrate(fn, lower = 0,
 upper = 110-x, subdivisions = 200)$value)

hn <- function(t){v^t*tpx(t,x,pars)}

(cax=integrate(hn, lower = 0,
 upper = 110-x, subdivisions = 200)$value)

(Lqcax = (1-rho)*cax + q*rho*Iqcax)
```

**Ejemplo 8.2.9.** *Una anualidad de vida continua lineal para la vida (x), con tasa de pago $b(t) = 1 + \rho t$, tiene prima neta*

$$(\bar{L}\bar{a})_x = \int_0^{\omega-x} (1+\rho t) v^t {}_tp_x dt. \tag{8.31}$$

*Desarrollando, se obtiene*

$$(\bar{L}\bar{a})_x = \bar{a}_x + \rho(\bar{I}\bar{a})_x. \tag{8.32}$$

**Ejemplo 8.2.10.** *Otra versión de una anualidad continua lineal, con incrementos solamente al final de cada año, en una tasa $\rho$, se define reemplazando $q = 1$ en (8.29), de tal forma que la tasa de pago es $b(t) = 1 + \rho\lfloor t \rfloor$, tiene prima neta dada por*

$$(L\bar{a})_x = \int_0^{\omega - x} (1 + \rho\lfloor t \rfloor) v^t {}_tp_x dt. \tag{8.33}$$

*que se puede desarrollar de manera inmediata como*

$$(L\bar{a})_x = (1 - \rho)\bar{a}_x + \rho(I\bar{a})_x, \tag{8.34}$$

*el pago durante el primer año sería a la tasa $1 - \rho + \rho = 1$.*

### 8.2.7. Ejemplos anualidad con pagos variables continuos

**Ejemplo 8.2.11.** *Ver el Ejemplo 6.5.1, en la sección §6.5, pag. 195*

*Considere el siguiente diseño de una anualidad de vida en tiempo continuo, temporal a $n = 10$ años, que consiste en dos sistemas agregados.*

1. *Una anualidad lineal, financiada a una tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada semestre ($q = 2$), en una tasa igual a $10.0\,\%$.*
2. *Una anualidad geométrica, financiada a la tasa $i = 0.07$ efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada año ($q = 1$), a una tasa $i_q = 0.03$.*

*Asumiendo un valor de $C = 12$. Lo primero que se toma en cuenta es que el contrato se para una vida (x).*

1. *Considerando primero el caso de la anualidad lineal. Con la fórmula para anualidades lineales con pagos creciente $q = 2$ veces en cada año, en (8.29), pag. 309, modificada para incluír la restricción a $n$ años, la prima neta es*

   $$(L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n|}} = (1 - \rho)\bar{a}_{x:\overline{n|}} + \rho(2)(I^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n|}}$$

   *usando (8.11)*

   $$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t {}_tp_x dt$$

*y (8.22)*

$$(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{q}\int_0^n v^t(1+\lfloor qt\rfloor)/_t p_x dt$$

*entonces*

$$((12)L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = 12[(1-0.1)(\bar{a}_{x:\overline{n}|} + (0.1)(2)(I^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|})]$$

2. *Para el caso 2, es una anualidad geométrica con $q = 1$ incrementos en el año. Se utiliza la anualidad geométrica con prima neta dada en (8.16)*

$$(G^{(1)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (1+i_q)^{\lfloor t\rfloor} v^t{}_t p_x dt.$$

3. *Por tanto, la respuesta final es que esta anualidad agregada (lineal + geométrica) tiene un costo dado por*

$$C_p = 12[(L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{10}|} + (G^{(1)}\bar{a})_{x:\overline{10}|}].$$

## 8.3. Anualidades de Vida con $m$ pagos anuales

En esta sección se tratan las anualidades de vida con $m$ pagos al año, de $1/m$ cada uno, para $m = 2, 4, 12$, de tal forma que al final del año se completa una unidad de pagos. Por ejemplo, el pago de las mesadas pensionales es mensual con $m = 12$. Existen casos de anualidades agregadas: las mesadas pensionales con $m = 12$ y las mesadas que corresponden a primas adicionales, por ejemplo, con $m = 2$.

La vida remanente de (x), medida en períodos $m$, $K_m(x)$ se definió en (7.24), pag. 233,

$$K_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor \in \left\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m(\omega-x)-1}{m}\right\},$$

La densidad de probabilidad de $K_m(x)$ está dada por

$$\mathbb{P}(K_m(x) = \frac{k}{m}) = {}_{\frac{k}{m}}p_x \times {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}, \tag{8.35}$$

$$k = 0, 1, \ldots, m(\omega - x) - 1.$$

Primero se define la anualidad de Vida con m pagos anticipados en el año.

Esta anualidad de vida es un contrato por el cual una vida (x) recibe $m$ pagos anticipados de $1/m$ en el año, en los tiempos

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m} \ldots, K_m(x).$$

**Ejemplo 8.3.1.** *Para $m = 12$, $K_{12}(x)$ indica el total de meses que sobrevive la vida (x). Si fuera $x = 58$ y $K_{12}(58) = 21 + 8/12$, entonces la vida de edad 58, sobrevivió 21 años y 8 meses. Entonces recibió un total de 21x12+8 = 260 pagos.*

Para encontrar el valor actuarial de esta anualidad, se retoma la anualidad cierta anticipada con $m$ pagos de $1/m$ en el año, durante $n$ años, ver pag.162, la ecuación (5.30a):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} v^{k/m} = \frac{1 - v^n}{m(1 - v^{1/m})} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}.$$

Se reemplaza el total de pagos $mn$ por $mK_m(x) + 1$ en la expresión anterior, y se escribe

$$\ddot{a}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mK_m(x)} v^{k/m} = \frac{1 - v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}. \tag{8.36}$$

El valor actuarial de esta anualidad es el valor esperado de (8.36)

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathbb{E}\left(\ddot{a}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}^{(m)}\right) = \frac{1 - \mathbb{E}(v^{K_m(x)+1/m})}{d^{(m)}}. \tag{8.37}$$

Hay dos maneras de calcular esta esperanza. Una consiste en desarrollar el valor esperado directamente. Otra consiste en utilizar la hipotesis de independencia lineal, ver (2.82), pag. 69. Esta opción se desarrolla en la sección §8.3.7, pag. 331. Con las capacidades de cálculo con el lenguaje R esta opción resulta algo obsoleta.

**Proposición 8.3.1.**

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.38}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}) = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(k+1)/m}|}\, {}_{\frac{k}{m}}p_x\ {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}}\right) {}_{\frac{k}{m}}p_x\ {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}, \qquad (8.39)
\end{aligned}$$

se aplica el Lema 8.3.1 siguiente, y se obtiene

$$\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}}\right) {}_{\frac{k}{m}}p_x\ {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}}\ {}_{\frac{k}{m}}p_x.$$

□

La siguiente identidad se conoce como la fórmula de sumatoria por partes ([1]), ó Lema de Abel.

**Lema 8.3.1.** *Suponga que* $(f_k), (g_k), k = 0, 1, 2, \ldots$ *son dos sucesiones de reales, con sumas acumuladas* $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$*,* $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$*. Entonces, dados* $0 \leq m < n$*,*

$$\sum_{k=m}^{n} g_k F_k = F_n G_n - F_{m-1}G_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} f_k G_{k-1} \qquad (8.40)$$

*En el caso* $m = 0$ *se coloca* $G_{-1} = F_{-1} = 0$*.*

*Demostración.* Para aplicar el Lema a la demostración de (8.39) se definen:

$$\begin{aligned}
f_k &= v^{\frac{k}{m}}, \\
g_k &= {}_{\frac{k}{m}}p_x\,{}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} = \mathbb{P}(K_m(x) = k), \\
F_k &= \sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}},
\end{aligned}$$

[1] similar a la fórmula de integración por partes: $\int_a^b f(t)g(t)dt = F(t)G(t)\mid_a^t - \int_a^b F(t)g(t)dt$ para $G(g) = \int_a^t g(x)dx$ y $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

$$G_k = \mathbb{P}(K_m(x) \leq k) = {}_{\frac{k+1}{m}}p_x.$$

con $m = 0, n = m(\omega - x) - 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left( \sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}} \right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} &= \sum_{k=m}^{n} g_k F_k \\
&= F_n G_n - F_{m-1} G_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} f_k G_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} - \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x,
\end{aligned}$$

□

Para el caso de una anualidad de vida con pagos vencidos la correspondiente prima neta es

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \tag{8.41}$$

**Ejemplo 8.3.2.** *El siguiente programa R calcula la prima para un renta mensual vitalicia, por valor de 1 mill mes anticipado, utilizando la ley GM, para el caso de* $x = 40$*,* $i = 0.07$*,* $m = 12$*.*

Código R 8.6: código para la renta vitalicia pagos mensuales Ejemplo 8.3.2

```
#------------- Gompertz-Makeham
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1];b = pars[2];C = pars[3];s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
#------------parametros GM
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
```

```
#-----------
aaxm = function(x,m,i,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
a = sum(vkm*kmpx)/m
return(a)}
#-----------
x = 40; i = 0.07; m = 12;
#----------respuesta
(12*aaxm(x,m,i,pars))
```

## Relación con tiempo continuo

La anualidad de vida $\bar{a}_x$ tiene relación con la anualidad $\ddot{a}_x^{(m)}$ dada en la identidad (8.42c) siguiente.

**Proposición 8.3.2.** *Dasas las expresiones*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m|}}) = \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right).$$

*donde* $K_m(x) = \frac{1}{m}\lfloor mT(x)\rfloor$ *y* $d^{(m)} = m(1-v^{1/m})$. *Se tienen los siguientes límites.*

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta, \tag{8.42a}$$

$$\lim_{m\to\infty} K_m(x) = T(x), \tag{8.42b}$$

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x. \tag{8.42c}$$

*con* $\delta = \log(1+i)$, $v = 1/(1+i)$.

*Demostración.* Las identidades (8.42a) y (8.42b) son ejercicios. Para (8.42c) se tiene, asumiendo que se permite el intercambio entre límite y esperanza, se tiene

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \frac{1-v^{K_m(x)+1/m}}{d^{(m)}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(x)} v^t dt\right) = \bar{a}_x.
\end{aligned}
$$

□

Una consecuencia de este resultado es que se pueden utilizar las anualidades en tiempo continuo para aproximar las anualidades con $m$ pagos en el año, colocando $\ddot{a}_x^{(m)} \approx \bar{a}_x$. Se obtiene una mejor aproximación con la fórmula

$$
\ddot{a}_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x. \tag{8.43}
$$

### 8.3.1. Temporal a $n$ años

**Proposición 8.3.3.** *El caso de una anualidad de vida con m pagos al año, anticipados, de $1/m$ cada uno, durante máximo $n$ años tiene un valor presente $Y$, dado por la siguiente expresión.*

$$
\begin{aligned}
Y &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n)\\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}
\end{aligned} \tag{8.44}
$$

*Y la prima neta, como el valor esperado de $Y$, está dada por*

$$
\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}}\, {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.45}
$$

Nótese que para obtener la anualidad vencida se elimina el primer pago en 0 y se añade un pago en n

$$
a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m}(1 - v^n\, {}_np_x). \tag{8.46}
$$

El siguiente programa R calcula la prima $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ utilizando directamente (**??**).

Código R 8.7: código para la renta temporal n años pagos mensuales

```
# Ejemplo axmn, relacion con renta continua, aproximacion
#------------- Gompertz-Makeham
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1];b = pars[2];C = pars[3];
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
#-------------parametros GM
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
#-----------
aaxmn = function(x,m,n,i,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1,1)
vkm = v^(k/m)
kmpx = tpx(k/m,x,pars)
a = sum(vkm*kmpx)/m
return(a)}
#-----------
x = 40; i = 0.07; m = 12; w = 110; n = 20;
#-------pagos de 1/12 cada mes anticipado, total 1 año = 1

#----------respuesta
(axmn = aaxmn(x,m,n,i,pars))
#-------------anualidad vida entera pago continuo
C = 1;
fn = function(t){(1+i)^(-t)*tpx(t,x,pars)}
(acxn = C*integrate(fn,0,n)$value)
#------aproximar con una anualidad en tiempo continuo
v=1/(1+i)
dm = m*(1-v^(1/m))
delta = log(1+i)
(acxn*delta/dm)
```

**Ejemplo 8.3.3.** *Con base en los datos del Ejemplo 8.3.2, asumiendo* $n = 30$. *Es decir, el valor de una anualidad de vida por 30 años.*

```
#---------
```

```
n = 20
(aaxmn(x,m,n,i,pars))
#-------respuesta
[1] 9.932878
```

## Relación con tiempo continuo

La relación entre $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ y $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, se establece a partir de los límites en (8.42a), (8.42b), tomando el límite

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\bar{a}_{\overline{T(x)\wedge n}|}\right) = \bar{a}_{x:\overline{n}|}.\end{aligned}$$

Entonces se puede usar la aproximación

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{8.47}$$

## Identidad de dualidad

Se tiene la identidad de dualidad, con las correspondientes rentas vitalicias, incluída en varios textos, ver [Bowers et al., 1997, Ej. 5.14, pag. 152] y [Gerber, 1994, Eq. 4.3.2, pag. 38],

$$A^{(m)}_x = 1 - d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_x. \tag{8.48}$$

## Diferidas n años con m pagos

Una anualidad de vida que empieza a pagar m pagos anticipados de $1/m$ al año, despúes de transcurridos $n$ años, y sólo en el caso de que la vida (x) sobreviva este lapso de tiempo tiene una prima neta definida por

$${}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}^{(m)}_x - \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}. \tag{8.49}$$

El caso de pagos vencidos es similar

$$_{n|}a_x^{(m)} = a_x^{(m)} - a_{x:\overline{n|}}^{(m)}. \tag{8.50}$$

Se puede comprobar la fórmula alterna

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}. \tag{8.51}$$

con lo que una fórmula alterna adicional para una anualidad temporal se puede obtener con base en (8.49) y (8.51)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - v^n {}_n p_x \, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}. \tag{8.52}$$

### 8.3.2. Pagos en progresión geométrica

La renta vitalicia en este caso consiste de $m$ pagos en el año, con pagos iniciales de $1/m$ que se incrementan $q = 1, 2, 4, 12$ veces a año, en un porcentaje $i_q$ cada $r$ períodos de forma que $m = rq$. Por ejemplo, $m = 12$ pagos que se incrementan $q = 4$ veces en el año, cada $r = 3$ meses.

La tasa $i_q$ es efectiva anual, y debe cumplir la condición

$$i_q < i. \tag{8.53}$$

La correspondiente anualidad cierta anticipada, a $n$ años, definida en (6.6), pag. 177, tiene un precio

$$(G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)} := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{k}{r} \rfloor},$$

y el caso pagos vencidos

$$(G^{(q)}a)_{\overline{n|}}^{(m)} = v^{1/m} (G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n|}}^{(m)}. \tag{8.54}$$

El valor presente de una renta vitalicia creciente en progresión geométrica a una tasa $i_q$, es la variable aleatoria $Y$ que se obtiene reemplazando el total de pagos $mn$ por $mK_m(x) + 1$ en la expresión anterior,

$$Y = (G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{K_m(x)+1/m|}}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mK_m(x)} (1+i)^{-\frac{k}{m}} (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{qk}{m} \rfloor}. \tag{8.55}$$

**Proposición 8.3.4.** *El valor esperado* $\mathbb{E}(Y)$ *que define el costo actuarial, está dado por*

$$(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.56}$$

La demostración es una aplicación directa del Lema 8.3.1, pag. 314.

**Ejemplo 8.3.4.** *El caso* $q = 1$*,* $m = 12$ *corresponde a una anualidad de vida entera, ó renta vitalicia, que paga 12 mesadas anticipadas, con incrementos anuales a la tasa* $i_q$*. Su prima neta es*

$$(G\ddot{a})_x^{(12)} := \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{12(\omega-x)-1}(1+i)^{-\frac{k}{12}}(1+i_q)^{\lfloor\frac{k}{12}\rfloor}\,{}_{\frac{k}{12}}p_x.$$

*El costo actuarial para, por ejemplo, mesadas de* $\$C$ *mensuales, el primer año, estaría dado por* $C_p = C(G\ddot{a})_x^{(12)}$*. El programa siguiente implementa (8.56) en el lenguaje R.*

Código R 8.8: código para la renta geométrica vida entera pagos mensuales

```
#------------- Gompertz-Makeham
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1];b = pars[2];C = pars[3];
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
#-------------parametros GM
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
#---------anualidad geometrica anticipada
Gaaqmx = function(x,i,iq,m,q,pars){
try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m %% q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = tpx(k/m,x,pars)
vkm = v^(k/m)
vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
```

```
a = sum(vkm*vqm*kmpx)/m
return(a)}
#-----------
x = 40; i = 0.07; m = 12; w = 110; q = 1; iq = 0.025;
#-------pagos de 1/12 cada mes anticipado, durante el primer año

#----------respuesta
(gaaxm = Gaaqmx(x,i,iq,m,q,pars))
```

### Relación con tiempo continuo

El límite de (8.56) cuando $m \to \infty$, es el límite de una suma de Riemann, que existe y es el valor de la anualidad continua en (8.14), pag. 304.

$$\lim_{m\to\infty}(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} = \int_0^{\omega-x} v^t(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt\rfloor}{}_tp_x dt = (G^{(q)}\bar{a})_x. \tag{8.57}$$

### Temporal a $n$ años

El valor presente de una anualidad de vida creciente geométricamente a una tasa $i_q$, efectiva anual, cada $q$ períodos en el año, con $m$ pagos anticipados en el año, para una vida (x), temporal a $n$ años, es la variable aleatoria

$$Y = (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}I(K(x)\le n-1) + (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}I(K(x)\ge n). \tag{8.58}$$

Entonces, usando el Lema 8.3.1, el valor esperado $\mathbb{E}(Y)$ que define la prima neta está dado por

$$(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.59}$$

**Ejercicio 8.3.1.** *El siguiente programa R calcula la prima* $(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *utilizando directamente (8.59), con base en los datos del Ejemplo 8.3.2, asumiendo* $n = 30$. *Es decir, el valor de una anualidad de vida por 30 años, pagos mes anticipado, con incrementos por costo de vida.*

Código R 8.9: código para la renta geométrica temporal n años pagos mensuales

```
#---------anualidad geometrica temporal
Gaaqmnx = function(x,i,iq,m,n,q,tpx,pars){
try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1)
kmpx = sapply(k,function(k)tpx(k/m,x,pars))
vkm = v^(k/m)
vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
a = sum(vkm*vqm*kmpx)
return(a)}
```

Las correspondientes anualidades con pagos vencidos tienen valor presente

$$\begin{aligned} Y &= (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|} I(K(x) \leq n-1) + (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \\ &= (G^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{(K_m(x)+1/m)\wedge n}|}. \end{aligned} \tag{8.60}$$

Y valor esperado $\mathbb{E}(Y)$ que define la prima neta

$$(G^{(q)}a)^{(m)}_{x:\overline{n}|} := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.61}$$

### 8.3.3. Pagos en progresión aritmética

Las anualidades ciertas con $m$ pagos al año, que se incrementan aditivamente en $1/qm$, en cada uno de los $r = m/q$ períodos, empezando con el valor $1/mq$, durante $n$ años, anticipadas y vencidas, se definieron en (6.25) y (6.26), ver pag. 188.

Un ejemplo simple es $m = 12$, con $q = 4$ incrementos en el año, de $1/mq$. Por tanto, los $r = 3$ primeros meses los pagos son $1/mq$, en los siguientes $r = 3$ el pago es de $2/mq$ y así sucesivamente hasta completar $q = 4$ pagos, en total en el primer años se pagan

$$r/qm + 2r/qm + \ldots + rq/mq.$$

El valor presente en el caso anticipado

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}}\left(1+\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right) = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|} - nv^n}{d^{(m)}}, \qquad (8.62)$$

con $d^{(m)} = m(1-v^{1/m})$, definida en (5.27), pag. 158.

Para el caso de una anualidad de vida anticipada, se reemplaza $nm = K_m(x)+1$ en (8.62) y se obtiene el valor presente

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}.$$

La prima neta es el valor esperado de esta variable

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_x = \mathbb{E}((I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}).$$

Desarrollando este valor esperado mediante el Lema (8.3.1), pag. 314, se llega a

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_x = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \qquad (8.63)$$

El siguiente programa en R calcular esta prima.

Código R 8.10: código para la renta progresion aritmetica vida entera m pagos

```
#--------------anualidad creciente lineal
# Ejemplo Iaaqmx, relacion con renta continua, aproximacion

#------------- Gompertz-Makeham
tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1];b = pars[2];C = pars[3];
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}
#------------parametros GM
pars = c(0.0014440776, 0.0001815122, 1.0940478946)
#---------anualidad geometrica anticipada
```

```
Iaaqmx = function(x,i,m,q,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*(110-x)-1)
kmpx = tpx(k/m,x,pars)
vkm = v^(k/m)
vqm = 1+floor(k*q/m)
a = sum(vqm*vkm*kmpx)/(q*m)
return(a)}
#-----------
x = 40; i = 0.07; m = 12; w = 110; q = 1;
#-------pagos de 1/12 cada mes anticipado, primer año
#----------respuesta
(iaaxm = Iaaqmx(x,i,m,q,pars))
```

## Relación con tiempo continuo

Nótese que tomando límite cuando $m \to \infty$ en (8.63), éste existe porque esta expresión es una suma de Riemman de la siguiente integral, que corresponde a la prima en tiempo continuo dada en (8.21), pag. 307.

$$\lim_{m\to\infty}(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt \rfloor)_t p_x dt = (I^{(q)}\bar{a})_x.$$

Se puede establecer una aproximación dada por

$$(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} \approx \frac{\delta}{d^{(m)}}(I^{(q)}\bar{a})_x. \tag{8.64}$$

Código R 8.11: código para la renta progresion aritmetica vida entera m pagos aprox continua

```
#------pago continuo
#----- vida entera aritmetica
v = (1+i)^(-1)
bt = function(t){1+floor(t*q)}
fn <- function(t){bt(t)*v^t*tpx(t,x,pars)}
require(rmutil)
(icaqx=int(fn, 0,110-x))
#------aproximar con una anualidad en tiempo continuo
```

```
dm = m*(1-v^(1/m))
delta = log(1+i)
(icaqx*delta/dm)
```

**Nota 8.3.1.** *Una identidad útil para expresar* $(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|}$ *en términos de* $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ *se introdujo en (6.28), pag. 189*

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{d^{(q)}}{q^2 d^{(m)}}(I\ddot{a})_{\overline{qn}|i_q}.$$

*Nótese además el caso más simple* $m = q = 1$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}(1+k)v^k{}_kp_x. \tag{8.65}$$

*Sería muy útil poder aproximar* $(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_x$ *en términos de* $(I\ddot{a})_x$ *ya que ésta puede evaluarse directamente con Tablas de Vida, colocando* ${}_kp_x = \ell_{x+k}/\ell_x$*, mientras que (8.63) debe evaluarse con una ley tipo Gompertz-Makeham.*

### 8.3.4. Temporal a n años

La anualidad (8.63) temporal a $n$ años tiene prima neta

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{mn-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}{}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.66}$$

El siguiente programa en R calcular esta prima.

Código R 8.12: código para la renta aritmetica temporal n años m pagos

```
#--------anualidad creciente aritmetica temporal
Iaaqmxn = function(x,i,m,n,q,pars){
v = 1/(1+i)
k = seq(0,m*n-1)
kmpx = tpx(k/m,x,pars)
vkm = v^(k/m)
vqm = 1+floor(k*q/m)
a = sum(vqm*vkm*kmpx)/(q*m)
```

```
return(a)}
#----------respuesta
n = 20
(iaaqmxn = Iaaqmxn(x,i,m,n,q,pars))
```

**Ejemplo 8.3.5.** *Para $q = 1$, con $m$ pagos en el año, anticipados, empieza con $m$ pagos de $1/m$, el primer año, incrementando en $1/m$ cada año. La prima neta es*

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.67}$$

La correspondiente anualidad temporal a $n$ años tiene prima neta

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x. \tag{8.68}$$

### 8.3.5. Pagos lineales

Las anualidades lineales se definen como combinaciones lineales de las anualidades $\ddot{a}_x^{(m)}$ y $(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$, y de sus variantes.

Para el caso de las anualidades ciertas, con $m$ pagos anticipados en el año, con $q$ incrementos en el año en una tasa $\rho \in (0, 1)$, de tal forma que en el primer período de duración $q$, en el primer año, paga $1$, en el seguno período paga $1 + \rho$, etc. que se pueden representar con función de pagos dada en (6.32), pag.191

$$1 + \rho \left\lfloor \frac{q(k-1)}{m} \right\rfloor, k = 1, 2, \ldots, mn. \tag{8.69}$$

Se definió la prima neta

$$(L^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = (1-\rho)m\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} + \rho\, m\, q(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

La variable aleatoria valor presente para la anualidad de vida lineal es

$$Y = (L^{(q)}\ddot{a})_{\overline{K_m(x)+1/m}|}^{(m)} \tag{8.70}$$

La prima neta para una vida (x), es, aplicando el Lema 8.3.1, pag. 314

$$\begin{aligned}(L^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}} \left(1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \\ &= (1-\rho)m\ddot{a}_x^{(m)} + \rho\, m\, q(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}. \end{aligned} \tag{8.71}$$

Y el caso temporal a $n$ años es

$$(L^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = (1-\rho)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} + \rho(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \tag{8.72}$$

La prima neta para la correspondiente anualidad de vida, temporal, vencida, para una vida (x), es

$$\begin{aligned}(L^{(q)}a)_x^{(m)} &= \sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} \left(1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)\,{}_{\frac{k}{m}}p_x. \\ &= (1-\rho)ma_x^{(m)} + \rho\, m\, q(I^{(q)}a)_x^{(m)}. \end{aligned} \tag{8.73}$$

Y en el caso temporal a $n$ años es

$$(L^{(q)}a)_{x:\overline{n}|}^{(m)} = (1-\rho)a_{x:\overline{n}|}^{(m)} + \rho(I^{(q)}a)_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \tag{8.74}$$

**Ejemplo 8.3.6.** *Para una vida (x), el costo de una anualidad de vida con pagos mensuales anticipados, que empieza pagando una cantidad $C$, con 2 incrementos en el año a una tasa $\rho$, está dado por $C(L^{(2)}\ddot{a})_x^{(12)}$*

$$(L^{(2)}\ddot{a})_x^{(12)} = (1-\rho)(12)\ddot{a}_x^{(12)} + \rho(12)(2)(I^{(2)}\ddot{a})_x^{(12)}.$$

*Si se toma, por ejemplo, $C = 2$ mill, y $\rho = 0.025C$, habrían dos incrementos de $2.5\,\%$ en el año (semestrales).*

El caso de una anualidad de vida temporal a $n$ años tiene prima neta

$$(L^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)} = (1-\rho)m\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} + \rho\, m\, q(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}. \tag{8.75}$$

Los casos siguientes se interpretan fácilmente.

**Ejemplo 8.3.7.** *Para $q = m = 1$, la prima neta está dada por:*

$$(L\ddot{a})_x = (1-\rho)\ddot{a}_x + \rho(I\ddot{a})_x, \tag{8.76}$$

*con pagos año anticipado iguales a: $(1 + \rho(k-1))$, en los años $k = 1, 2, \ldots$. Es una anualidad de vida temporal.*

$$(L\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = (1-\rho)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \rho(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \tag{8.77}$$

*paga año anticipado $1 + \rho(k-1))$, en los años $k = 1, 2, \ldots$, por máximo $n$ años.*

| | Símbolo | Tasa de Pago $b(t)$ | Fórmula | Pag. |
|---|---|---|---|---|
| 0.a | $\bar{a}_x$ | 1 | $\int_0^{\omega-x} v^t{}_tp_x dt$ | 8.2 |
| 0.b | $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ | 1 | $\int_0^{n} v^t{}_tp_x dt$ | 8.11 |
| 1.a | $(I^{(q)}\bar{a})_x$ | $(1+\lfloor qt \rfloor)$ | $\frac{1}{q}\int_0^{\omega-x} v^t(1+\lfloor qt \rfloor){}_tp_x dt$ | 8.21 |
| 1.b | $(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | $(1+\lfloor qt \rfloor)$ | $\frac{1}{q}\int_0^{n} v^t(1+\lfloor qt \rfloor){}_tp_x dt$ | 8.22 |
| 2.a | $(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | $n-t$ | $\int_0^{n}(n-t)v^t{}_tp_x dt$ | 8.27 |
| 2.b | $(D\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | $n-\lceil t \rceil$ | $\int_0^{n}(n-\lceil t \rceil)v^t{}_tp_x dt$ | 8.28 |
| 3.a | $(L^{(q)}\bar{a})_x$ | $1+\rho\lfloor qt \rfloor$ | $(1-\rho)\bar{a}_x + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_x$ | 8.29 |
| 3.b | $(L^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | $1+\rho\lfloor qt \rfloor$ | $(1-\rho)\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \rho q(I^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | 8.30 |
| 4.a | $(G^{(q)}\bar{a})_x$ | $(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}$ | $\int_0^{\omega-x} v^t(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}{}_tp_x dt$ | 8.14 |
| 4.b | $(G^{(q)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ | $(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}$ | $\int_0^{n} v^t(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}{}_tp_x dt$ | 8.15 |

Tabla 8.2: Anualidades Continuas Integradas - Fórmulas

### 8.3.6. Ejemplos de anualidad de vida con pagos variables

**Ejemplo 8.3.8.** *Considere la siguiente anualidad de vida lineal, temporal a $n = 10$ años, con $m = 12$ pagos al año, anticipados, financiada a una tasa $i = 0.07$, efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada semestre ($q = 2$), en una tasa de $\rho = 0.1$.*

| | Símbolo | Pago | Fórmula | Ecuación No |
|---|---|---|---|---|
| 1.a | $\ddot{a}_x^{(m)}$ | $1/m$ | $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$ | 8.38 |
| 1.b | $\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$ | $1/m$ | $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x$ | 8.45 |
| 2.a | $(G^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$ | $\frac{1}{m}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$ | $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$ | 8.56 |
| 2.b | $(G^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$ | $\frac{1}{m}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$ | $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mn-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$ | 8.59 |
| 3.a | $(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$ | $\frac{1}{mq}\left(1+\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)$ | $\frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x.$ | 8.67 |
| 3.b | $(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$ | $\frac{1}{mq}\left(1+\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor\right)$ | $\frac{1}{mq}\sum_{k=0}^{mn-1}(1+\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor)v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x.$ | 8.66 |
| 4.a | $(L^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$ | $1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$ | $m(1-\rho)\ddot{a}_x^{(m)}+qm\rho(I^{(q)}\ddot{a})_x^{(m)}$ | 8.71 |
| 4.b | $(L^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$ | $1+\rho\left\lfloor\frac{qk}{m}\right\rfloor$ | $m(1-\rho)\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}+qm\rho(I^{(q)}\ddot{a})_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$ | 8.74 |

Tabla 8.3: Anualidades de Vida Integradas - Fórmulas

*Además, se asume que el contrato es para una vida (48). Y la ley de mortalidad asumida es la Gompertz-Makeham .*

*Con la fórmula para anualidades de vida lineales, temporal, en (8.75), pag. 328, reemplazando los parámetros:*

$$(L^{(2)}\ddot{a})_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)} = (1-0.1)(12)\ddot{a}_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)} + 0.1(12)(2)(I^{(2)}\ddot{a})_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)}.$$

*Hay que evaluar $\ddot{a}_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)}$ y $(I^{(2)}\ddot{a})_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)}$. Utilizando (8.45), pag. 317.*

$$\ddot{a}_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)} = 7.189906.$$

*Para la segunda anualidad se utiliza la fórmula (8.66), pag. 326, utilizando el programa R en la pag. 326*

$$(I^{(2)}\ddot{a})_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)} = 33.54736.$$

*Por lo que, finalmente, la anualidad de vida temporal lineal en (8.75) vale:*

$$(L^{(2)}\ddot{a})_{48:\overline{10}\rceil}^{(12)} = 0.9(12)(7.189906) + 0.1(12)(2)(33.54736)$$

$$= 158.1646.$$

**Ejemplo 8.3.9.** *Considerando el caso de una anualidad geométrica, temporal a* $n = 10$ *años, con* $m = 12$ *pagos al año con valor* $1/m$ *cada uno, anticipado, financiada a la tasa* $i = 0.07$ *efectiva anual. Con crecimiento de pagos cada año (*$q = 1$*), a una tasa* $i_q = 0.03$*. Además, se asume que el contrato es para una vida (48). Y la ley de mortalidad asumida es la Gompertz-Makeham .*

*Entonces la anualidad geométrica tiene prima neta dada en (8.59), pag. 322, que se calcula con los programas R en la pag. 322*

$$(G^{(1)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} = 8.645777.$$

**Ejemplo 8.3.10.** *Considere el siguiente diseño de una anualidad de vida que consiste en las dos anualidades anteriores integradas. Cuál es el valor actuarial de esta anualidad agregada, asumiendo un pago de* $2$ *mill. cada mes. Además, se asume que el contrato es para una vida (48). Y la ley de mortalidad asumida es la Gompertz-Makeham .*

*Por tanto, la respuesta final es que esta anualidad agregada (lineal + geométrica) tiene un costo* $P$ *dado por*

$$\begin{aligned}
P &= 2[(L^{(2)}\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|} + (12)(G\ddot{a})^{(12)}_{48:\overline{10}|}] \\
&= (2)158.1646 + 2(12)8.645777 \\
&= \$\,523'827.800
\end{aligned}$$

*Ver un ejemplo similar con anualidades ciertas en el Ejemplo 6.5.1, en la sección §6.5, pag. 195.*

### 8.3.7. La hipótesis de linealidad

El cálculo de la esperanza (8.37) utilizando hipótesis de linealidad es un desarrollo de interés porque muestra cómo utilizar esta hipótesis en un caso importante.

En varios texto, por ejemplo, Bowers et al. [1997], ejercicio 5.44, pp. 158, 601) se demuestra que, si se asume la hipótesis de linealidad, dada por (ver (2.82), pag. 69)

$${}_{\frac{k}{m}}q_x = \left(\frac{k}{m}\right) q_x,$$

equivale a asumir $K(x)$ y $S_m(x)$ son variables independientes, y $S_m(x)$ distribuye como una discreta uniforme en el conjunto $\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}}\right) \\
&= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)}\right) \\
&= \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)}\right)\mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right) \qquad (8.78)
\end{aligned}$$

Utilizando la definición en (8.103):

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} := \sum_{k=0}^{K(x)} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d},$$

se puede obtener $\mathbb{E}\left(v^{K(x)}\right)$ en función de $\ddot{a}_x = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|})$.

Además como $S_m(x) \sim DU\{j/m : j = 1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que

$$\mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} v^{j/m} = \frac{d}{i^{(m)}}. \qquad (8.79)$$

donde $i^{(m)} = m(v^{-1/m} - 1)$. Entonces, después de reemplazar en (8.78) y simplificar se llega a

**Proposición 8.3.5.**

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m), \qquad (8.80)$$

$$\alpha(m) = \frac{di}{i^{(m)}d^{(m)}}, \qquad (8.81)$$

$$\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}. \qquad (8.82)$$

Si la tasa $i$ es pequeña (como es casi siempre el caso) se pueden utilizar las aproximaciones siguientes:

$$\alpha(m) \approx 1,$$

$$\beta(m) \approx \frac{m-1}{2m}$$

Por ejemplo, para $m = 12$, los valores de $\alpha(12)$ y $\beta(12)$ para dos valores de la tasa $i$ son:

$$i = 0.03,\ \alpha(12) = 1.0001, \beta(12) = 0.46333$$
$$i = 0.10,\ \alpha(12) = 1.0008, \beta(12) = 0.4745.$$

Utilizando estas aproximaciones

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}, \tag{8.83}$$
$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}. \tag{8.84}$$

Los programas en R siguientes implementan esta aproximación

```
aax = function(s,g,C,x,i){
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
t = seq(0,110-x-1,1)
px = tpx(s,g,C,x,t)
p = sum(v^t*px)
return(p)}
else{p=0
return(p)}
}

aaxm.a = function(s,g,C,x,i,m){
v = 1/(1+i)
d = 1 - v
dm = m * (1 - v ^ (1 / m))
im = m * (v ^ (-1 / m) - 1)
am = d*i/(dm*im)
bm = (i - im)/(dm*im)
a = am*aax(s,g,C,x,i)-bm
return(a)
}
```

Utilizando la hipótesis de linealidad se obtiene un resultado adicional a la prima (**??**) en pag.**??**

**Proposición 8.3.6.** *La prima (**??**) aplicando la hipótesis de linealidad está dada por*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n\, {}_np_x) \tag{8.85}$$

*utilizando $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ definidas en (8.81),(8.82).*

*Demostración.* La hipótesis de linealidad equivale a asumir $K(x)$ y $S_m(x)$ son variables independientes, y $S_m(x)$ distribuye como una discreta uniforme en el conjunto $\{j/m : j = 1, 2, \dots, m\}$. Para desarrollar $\mathbb{E}(Y)$ se empieza con la esperanza de la variable aleatoria:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|} I(K(x) \leq n-1) = \frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}} I(K(x) \leq n-1)$$

entonces

$$\mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K(x)+S_m(x)}|} I(K(x) \leq n-1)) = \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+S_m(x)}}{d^{(m)}} I(K(x) \leq n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(I(K(x) \leq n-1)\right) - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$
$$= \frac{1}{d^{(m)}}(1 - {}_np_x) - \frac{1}{d^{(m)}}\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$

aplicando la independencia entre $K(x)$ y $S_m(x)$

$$\mathbb{E}\left(v^{K(x)+S_m(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1)\right)\mathbb{E}\left(v^{S_m(x)}\right)$$

Como $S_m(x) \sim DU\{j/m : j = 1, 2, \dots, m\}$, se puede usar el resultado anterior en (8.79): $\mathbb{E}(v^{S_m(x)}) = d/i^{(m)}$. Además se puede obtener una expresión para $\mathbb{E}(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1))$ de la fórmula (8.116):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n))$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1-v^{K(x)+1}}{d} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n)\right)$$

para obtener

$$\mathbb{E}\left(v^{K(x)} I(K(x) \leq n-1)\right) = \frac{d}{v}(\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x + \frac{1}{d}(1 - {}_np_x) - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}) \quad (8.86)$$

Finalmente, reemplazando los resultados en (8.79) y (8.86) en la expresión para la esperanza de $Y$ en (**??**), se llega a través de simplificaciones algebráicas a:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{di}{i^{(m)}d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}(1 - v^n\,{}_np_x) \quad (8.87)$$

Utilizando las notaciones $\alpha$ y $\beta$ (definidas en (8.81),(8.82) )

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n\,{}_np_x) \quad (8.88)$$

□

**Ejemplo 8.3.11.** *Calcular el valor actuarial de una renta vitalicia, con 12 pagos mensuales vencidos al año, de 2 mill cada uno, para una vida (57) hombre, utilizando una tasa de descuento de la anualidad de $i = 0.09$ efectiva anual, utilizando una ley de supervivencia Gompertz-Makeham para la Tabla de Vida Colombiana 80-89.*

*Se calcula*

$$\ddot{a}^{(12)}_{57|i=0.09} \approx \ddot{a}_{57|i=0.09} - \frac{12-1}{2(12)} = 8.886745.$$

*Por tanto, la prima neta es*

$$Prima = 2(12)(8.886745) = \$213'282.000.$$

**Ejemplo 8.3.12.** *Asumiendo la ley de mortalidad DeMoivre, para un $m > 1$, comprobar que la distribución de $K_m(x)$ debe ser Uniforme Discreta en*

$$\left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m(\omega - x) - 1}{m}\right\}.$$

$$\mathbb{P}(K_m(x) = k) = {}_{\frac{k}{m}}p_x\;{}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{k}{m(\omega - x)}\right)\left(\frac{1}{m(\omega - x) - k}\right)\\
&= \frac{1}{m(\omega - x)}.
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 8.3.13.** *Asumiendo la ley de mortalidad DeMoivre, para un $m > 1$, calcular $\ddot{a}_x^{(m)}$.*

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right){}_{\frac{k}{m}}p_x\ {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}}\\
&= \frac{1}{m^2(\omega - x)}\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right)
\end{aligned}
$$

*La expresión anterior (doble sumatoria) se puede simplificar, por ejemplo, con Maxima; la sumatoria interna se calcula con la instrucción*

```
sum(v^(s/m),s,0,k),simpsum;
```

*produce*

$$
\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}} = \frac{v^{(k+1)/m} - 1}{v^{1/m} - 1}
$$

*y luego (colocando w por el momento en lugar de w-x)*

```
sum((v^((k+1)/m)-1)/(v^(1/m)-1),k,0,m*w-1),simpsum;
```

*produce la expresión final*

$$
\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{s=0}^{k} v^{\frac{s}{m}}\right) = \frac{m(\omega - x)(1 - v^{1/m}) - v^{1/m}(1 - v^{\omega-x})}{(1 - v^{1/m})^2}
$$

*Finalmente*

$$
\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{m(\omega - x)(1 - v^{1/m}) - v^{1/m}(1 - v^{\omega-x})}{m^2(\omega - x)(1 - v^{1/m})^2}
$$

**Ejemplo 8.3.14.** *Un ejemplo concreto. Si se asume* $\omega = 110$, $x = 57$, $i = 0.09$, $m = 12$*, se tiene el caso de una vida (57), que adquiere una anualidad vitalicia con pagos mes anticipado, a una tasa efectiva anual de* $9.0\,\%$*. Calcule* $\ddot{a}_x^{(m)}$*. El siguiente programa en R calcula este valor*

```
# ejemplo anualidad anticipada con 12 pagos
# utilizando ley DeMoivre
x = 57
w = 110
i = 0.09
m = 12
aax.u = function(i,x,w,m){
v = 1/(1+i)
f1 = m*(w-x)*(1-v^(1/m))-v^(1/m)*(1-v^(w-x))
f2 = m^2*(w-x)*(1-v^(1/m))^2
a = f1/f2
return(a)
}
(aa57.12 = aax.u(i,x,w,m))
#------respuesta
 9.131452
```

Utilizando la hipótesis de linealidad se obtiene la expresión equivalente para (8.67)

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = \alpha(m)(I\ddot{a})_x - \beta(m). \tag{8.89}$$

**Ejemplo 8.3.15.** *Retomamos el Ejemplo 8.3.10 anterior para mostrar cómo pueden realizarse los cálculos utilizando Tablas de Vida solamente. Sin embargo, se puede usar la alternativa usando (8.88), pag. 335:*

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - v^n\,{}_np_x),$$

*y se obtiene*

$$0.9(2)(12)\ddot{a}_{48:\overline{10}|}^{(12)} = 155'302.000.$$

*Esta alternativa permite también evaluar esta anualidad con Tablas de Vida, mientras que con la anterior no se podría ya que* ${}_{\frac{k}{12}}p_{48}$ *no pueden calcularse con éstas, porque no contienen edades fraccionales.*

## 8.4. Anualidades para servicios médicos

**Definición 8.4.1.** *El seguro de cuidados de larga duración CLD (en inglés: long term care insurance ó LTC) provee asistencia de enfermería y médica a personas que presentan una discapacidad permanente producto de un accidente, una enfermedad ó por senectud, ó combinaciones de éstas. El seguro CLD provee un pago periódico temporal o permanente para cubrir esta contingencia, en forma de una anualidad de vida.*

Ejemplos de servicios de atención médica.

1. Tratamiento con radioterapia y quimioterapia para el cáncer.
2. Diálisis para insuficiencia renal crónica, transplante renal, de corazón, de médula ósea y de córnea.
3. Tratamiento para el SIDA y sus complicaciones.
4. Tratamiento quirúrgico para enfermedades del corazón y del sistema nervioso central.
5. Tratamiento quirúrgico para enfermedades de origen genético o congénitas.
6. Tratamiento médico quirúrgico para el trauma mayor.
7. Terapia en unidad de cuidados intensivos.
8. Reemplazos articulares.

Por ejemplo, un pensionado que sufre una caída que le produce invalidez, requiere cuidados adicionales de enfermería, que tal vez no puede pagar con su mesada. También es posible reembolso de pagos por este tipo de cuidados ó garantizar el derecho a la asistencia, sin pago al asegurado.

El seguro CLD también se denomina una pensión de cuidados médicos, y se ofrece como un pago adicional a la pensión, en caso de una contingencia de discapacidad. Es decir, está incluída en una renta vitalicia pero no paga sino cuando se presenta la contingencia, ver Pla-Porcel et al. [2016], Pitacco [2016].

En varios países europeos, este seguro viene incorporado en el sistema de seguridad social, por ejemplo en Alemania, desde 1996, y en EUA. La Ley 100/93 en Colombia no cubre esta contingencia.

### 8.4.1. Modelos para el valor actuarial de Cuidados de Larga Duración

De acuerdo con Pitacco [2014], los modelos utilizados para definir el valor actuarial de una anualidad para discapacidad, mediante el principio de equivalencia, es decir, el valor de un seguro de cuidados de larga duración, se dividen en al menos tres tipos.

1. El sistema de salud alemán introdujo en 1995 un seguro obligatorio para coberturas de LTCI, para el cual los métodos de cálculo de primas en Pitacco [2014] son adecuados.

2. Los modelos utilizados en EUA, Alemania, Austria y Suiza se basan en las probabilidades de quedar discapacitado. Estas probabilidades se denominan probabilidades de incidencia (inception). En EUA se utilizan tablas para las probabilidades de discapacidad temporal denominadas tablas continuadas (continuance table). En Alemania, Austria y Suiza se basa en tablas de decrementos que tiene tablas de mortalidad y de recuperación. Los modelos para discapacidad temporal son diferentes a los de discapacidad permanente.

   Estas anualidades no deben confundirse con una pensión de invalidez, ya que pagan cuando a una persona no discapacitada (sea cotizante ó jubilada) la afecta una enfermedad ó accidente que puede afectar su capacidad de desempeño en las labores diarias, por ejemplo su movilidad, como el caso de una isquemia ó un accidente de tráfico.

3. Otro método se basan en la probabilidad de estar discapacitado. Se denominan tasas de prevalencia. Es el sistema que se aplica en Noruega.

### 8.4.2. Modelos con base en probabilidad de incidencia

En esta sección se basa en [Pitacco, 2014, sec. 6.4, pag. 105].

**Definición 8.4.2.** *Se define el valor de una anualidad que paga una unidad monetaria, año vencido, siempre y cuando (x), un afiliado de edad x, sin discapacidad, desarrolle una enfermedad ó patología que le produzca incapacidad para valerse en las tareas diarias, es decir, que requiera una asistencia en enfermería y médicos. Y hasta un período de $n$ años. La prima neta en tiempo continuo es*

$$\bar{a}^{ai}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp^{ai}_x dt. \tag{8.90}$$

El caso vitalicio se tiene colocando $n = \omega - x$ y en este caso se escribe $\bar{a}^{ai}_x$. La expresión (8.90) se evalúa utilizando (4.27c) ó (**??**).

$$ {}_tp^{ai}_x = \int_0^t {}_sp^{aa}_x \mu^{ai}_{x+s}\, {}_{t-s}p^{\underline{ii}}_{x+s} ds$$

Más adelante se muestra una versión en tiempo discreto.

**Ejercicio 8.4.1.** *Evaluar (8.90), para una vida (50), hombre, asumiendo las intensidades siguientes para el caso de una incapacidad permanente, tal que el pago sea 1.5x12 mill al final de primer año. Para el caso de la intensidad de fallecimiento se asume una ley Gompertz-Makeham ajustada a la Tabla Colombiana de Vida 80-89, hombres,*

$$\mu^{ad}_x = Ae^{Bx} + C,$$
$$A = 0.00005822631,\ B = 0.08840912138, C = 0.00005720806.$$

*La intensidad de fallecimiento para incapacitados se asume que es de la forma*

$$\mu^{id}_x = (1+\gamma)\mu^{ad}_x \tag{8.91}$$

*con $\gamma = 0.7$ (este valor es solamente por vía de ejemplo). Para la intensidad de inserción en la incapacidad se utilizará una función cuadrática ajustada a los datos de intensidades $\mu^{ai}_x$, por edades, en [Baione and Levantesi, 2014, pag. 182, Table 6.5, col 7], de la forma*

$$\mu^{ai}_x = 0.0098498490 - 0.0008284281x + 0.0000186779x^2. \tag{8.92}$$

**Solución.** Conformar primero la expresión

$$ {}_tp^{ai}_x = \int_0^t {}_sp^{aa}_x \mu^{ai}_{x+s}\, {}_{t-s}p^{\underline{ii}}_{x+s} ds$$

empezando con

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{aa} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai}+\mu_{x+s}^{ad} ds} \\
&= e^{-\int_0^t Ae^{B(x+s)}+Cds-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} ds} \\
&= {}_tp_x \, e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{ai} ds}
\end{aligned}
$$

donde ${}_tp_x$ es la función de supervivencia en un modelo Gomperz-Makeham. Además

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{ii} = {}_tp_{\overline{x}}^{\underline{ii}} &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{id} ds} \\
&= e^{-\int_0^t (1+\gamma)\mu_{x+s}^{ad} ds} \\
&= e^{-(1+\gamma)\int_0^t Ae^{B(x+s)}+Cds} \\
&= {}_tp_x^{1+\gamma}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{ai} &= \int_0^t {}_sp_x^{aa} \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s}p_{\overline{x+s}}^{\underline{ii}} ds \\
&= \int_0^t {}_sp_x \, e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} \cdot {}_{t-s}p_{x+s}^{1+\gamma} ds \\
&= {}_tp_x^{1+\gamma} \int_0^t {}_sp_x^{-\gamma} e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} ds
\end{aligned}
$$

Finalmente, reemplazando la expresión anterior en la anualidad (8.90)

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|}^{ai} &= \int_0^n v^t {}_tp_x^{ai} dt \\
&= \int_0^n v^t {}_tp_x^{1+\gamma} \int_0^t {}_sp_x^{-\gamma} e^{-\int_0^s \mu_{x+u}^{ai} du} \mu_{x+s}^{ai} ds dt
\end{aligned}
$$

Con base en el programa R siguiente se obtiene como prima neta (tasa por cada mill) $673,565.7$. El valor para una anualidad por 1.5x12 mill al final del primer año es $\$12'124.180$. ◀

```
#programa para anualidad asistencia
#médica para invalidez permanente
# construir tpx
tpx.gm = function(t,x,pars){
fn = function(s){makeham(s,pars)$hx}
a = ifelse(t==0,0,
integrate(Vectorize(fn),x,x+t)$value)
v = exp(-a)
return(v)}

#    intensidad de transicion a -> i
muxai = function(x){
0.0098498490 -0.0008284281*x +0.0000186779*x^2}

#   función auxiliar
Imuxai = function(t,x){
fn <- function(u) {muxai(x+u)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t,
subdivisions = 200)
p = muxai(x+t)*aax$value
return(p)}

#    funcion tpxai
tpxai.gm = function(t,x,pars,gamma){
fn <- function(u) {tpx.gm(u,x,pars)^(-gamma)*Imuxai(u,x)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t, subdivisions = 200)
p = tpx.gm(t,x,pars)^(1+gamma)*aax$value
return(p)}

#    funcion calcula anualidad
acxai = function(x,t,i,gamma,pars){
v = 1/(1+i)
fn <- function(u) {v^u*tpxai.gm(u,x,pars,gamma)}
aax=integrate(Vectorize(fn), lower = 0, upper = t, subdivisions = 200)
return(aax$value)}

#-----datos
x2 = 50
i = 0.06
gamma = 0.7
```

```
n = 30
(pr= acxai(x2,n,i,gamma,pars))
[1] 0.6735657
 (pr*1.5*12)
[1] 12.12418
```

La prima neta en tiempo discreto está dada por

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^j \, {}_jp^{ai}_x. \tag{8.93}$$

En [Pitacco, 2014, sec. 6.4] se desarrolla ${}_jp^{ai}_x$ mediante la ecuación de Chapman-Kolmogorov, como

$${}_jp^{ai}_x = \sum_{k=1}^{j} {}_{j-k}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+j-k} \, {}_{k-1}p^{\underline{ii}}_{x+j-k+1}, \tag{8.94}$$

que se interpreta de manera inmediata: es la suma de todas las probabilidades de las diferentes posibilidades para la transición $a \to i$ en $j$ años. Reemplazando en (8.93) se obtiene

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^j \left( \sum_{k=1}^{j} {}_{j-k}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+j-k} \, {}_{k-1}p^{\underline{ii}}_{x+j-k+1} \right).$$

Con el cambio de variable $r = j - k + 1$ se obtiene

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} {}_{r-1}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+r-1} \sum_{j=r}^{n} v^j \, {}_{j-r}p^{\underline{ii}}_{x+r}.$$

Se define la anualidad

$$\ddot{a}^{\underline{ii}}_{x+r:\overline{n-r+1}|} = \sum_{j=r}^{n} v^j \, {}_{j-r}p^{\underline{ii}}_{x+r}. \tag{8.95}$$

y se reemplaza en la expresión anterior para obtener

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} {}_{r-1}p^{aa}_x \, p^{ai}_{x+r-1} \, \ddot{a}^{\underline{ii}}_{x+r:\overline{n-r+1}|}. \tag{8.96}$$

**Ejercicio 8.4.2.** *Retomando el Ejercicio anterior 8.4.1, el objetivo de este ejercicio es evaluar (8.96), para una vida (50), hombre, asumiendo las mismas hipótesis y datos del Ejercicio anterior.*

**Solución.** Hay que desarrollar las expresiones para cada término de (8.96) utilizando la ley GM y los parámetros dados. Utilizando los resultados obtenidos

$$
\begin{aligned}
{}_{r-1}p_x^{aa} &= {}_{r-1}p_x^{2+\gamma},\\
p_{x+r-1}^{ai} &= p_{x+r-1}^{1+\gamma}\int_0^1 {}_sp_{x+r-1}\mu_{x+r+s-1}^{ai}ds\\
{}_{j-r}p_{x+r}^{\underline{ii}} &=?
\end{aligned}
$$

Para esta última probabilidad se retoma (4.18)

$$
{}_tp_x^{\underline{ii}} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}^{i}ds}
$$

donde

$$
\mu_{x+s}^{i} = \sum_{j\neq i}\mu_{x+s}^{ij} = \mu_{x+s}^{id} = (1+\gamma)\mu_{x+s}^{ad} = (1+\gamma)\mu_{x+s}.
$$

donde la última función de intensidad es la GM. Por tanto,

$$
{}_tp_x^{\underline{ii}} = {}_tp_x^{(1+\gamma)}.
$$

Y se desarrolla la anualidad

$$
\ddot{a}_{x+r:\overline{n-r+1}|}^{\underline{ii}} = \sum_{j=r}^{n} v^j\,{}_{j-r}p_{x+r}^{(1+\gamma)}.
$$

La solución numérica se realiza mediante un código en R en el cual se implementan estas funciones. Se deja como ejercicio. ◀

## 8.5. Anualidades con pagos anuales

**Definición 8.5.1.** *Una anualidad vitalicia, anual anticipada, es un contrato que le garantiza al tomador, de edad x, el pago año anticipado, de una unidad monetaria, hasta su último año de vida.*

*Los pagos se hacen en los tiempos $0, 1, \ldots, K(x)$, y el valor presente de los mismos está dado por la variable aleatoria $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$, dada por*

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} := \sum\nolimits_{k=0}^{K(x)} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}, \tag{8.97}$$

*donde $v = (1+i)^{-1}$ es el factor de descuento correpondiente a la tasa efectiva anual $i$, y $d = 1 - v$. La especificación del valor de la tasa $i$ es parte del contrato. Nótese que el valor presente (8.103) se basa en la fórmula de anualidades ciertas (5.19a), pag. 153.*

El precio de esta anualidad, sin recargos, se denomina prima neta ó costo actuarial.

**Proposición 8.5.1.** *El costo actuarial de una anualidad vitalicia se define como el valor esperado de la variable $\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$, denotado por $\ddot{a}_x$.*

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \, {}_k p_x. \tag{8.98}$$

La demostración está al final de esta sección. También, como la prima neta de un Seguro de Vida Total es $A_x = \mathbb{E}(v^{K(x)+1})$, se tiene, con $d = 1 - v$,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \mathbb{E}(a_{\overline{K(x)}|}) && (8.99)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}\right) = \frac{1 - \mathbb{E}(v^{K(x)+1})}{d} && (8.100)\\ &= \frac{1 - A_x}{d}, && (8.101) \end{aligned}$$

de donde se tiene la <u>relación dual</u> entre primas de seguros y anualidades

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x. \tag{8.102}$$

La correspondiente anualidad año vencido tiene valor presente

$$a_{\overline{K(x)+1}|} := \sum_{k=1}^{K(x)+1} v^k = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{i}, \tag{8.103}$$

y su costo actuarial está dado por

$$a_x = \mathbb{E}(a_{\overline{K(x)+1|}}) = \ddot{a}_x - 1. \tag{8.104}$$

Note las identidades siguientes:

$$\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k I(K(x) \geq k). \tag{8.105}$$

$$\ddot{a}_{x|i=0} = e_x. \tag{8.106}$$

**Nota 8.5.1.** *Nota sobre el uso de la ley de Gompertz-Makeham. Si se asume una ley de Gompertz-Makeham se tiene*

$$A_x = v - da_x.$$

*Demostración.* En los cálculos de las primas netas interviene el factor ${}_kp_xq_{x+k}$.

$$\begin{aligned} {}_kp_xq_{x+k} &= {}_kp_x(1 - p_{x+k}) \\ &= {}_kp_x - {}_kp_xp_{x+k} \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\ &= s^k g^{c^x(c^k-1)} - s^{k+1} g^{c^x(c^{k+1}-1)} \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}s^k g^{c^x(c^k-1)} - \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^{k+1}s^{k+1}g^{c^x(c^{k+1}-1)} \\ &= v\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k s^k g^{c^x(c^k-1)} - \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k s^k g^{c^x(c^k-1)} \\ &= v(1+U) - U = v - dU \end{aligned}$$

donde

$$U = \sum_{k=1}^{\omega-x}(vs)^k g^{c^x(c^k-1)} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k{}_kp_x = a_x$$

Por tanto

$$A_x = v - da_x.$$

$\square$

Si además se aplica la identidad $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$, se tiene otra fórmula de cálculo

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}(1 - d\ddot{a}_x). \tag{8.107}$$

**Ejercicio 8.5.1.** *Se cumple una relación de dualidad entre la prima de este seguro y la de una anualidad de vida anticipada temporal a $n$ años.*

$$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{8.108}$$

*Comprobar (8.108) escribiendo primero la relación que debe existir entre las variables valor presente.*

**Ejemplo 8.5.1.** *Suponga una vida de edad $x = 57$ años, mujer, que compra una anualidad de vida a una Compañía de Seguros, con pagos año anticipado por valor de 12 mill de pesos cada una. Calcule el costo neto de esta anualidad si la Compañía la ofrece a una tasa de $7.0\,\%$ efectiva anual, y utiliza la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con los parámetros especificados a continuación.*

```
# ejemplos de anualidad de vida anticipada
# comparando el costo neto con fórmula actuarial
# y con base en simulación Monte-Carlo
#---------datos de la anualidad de vida
x = 57
w = 110
i = 0.07
v = 1/(1+i)
d = 1-v
#---------programar la fórmula (5.6) Notas de Clase
tx = seq(0,w-x-1)
tpx = VGAM::pmakeham(tx,scale=log(C),shape=b*C^x,epsilon=a,
lower.tail = FALSE)
aax = sum(v^(tx)*tpx)
```

```
(aax)
[1] 8.208458
#---------simulacion Monte Carlo
n = 13000
Tx = VGAM::rmakeham(n,scale=log(C),shape=b*C^x,epsilon=a)
Kx = floor(Tx)
aaKx = (1-v^(Kx+1))/d
plot(density(aaKx))
(aax = mean(aaKx))
[1] 8.198365
#--------qué significa costo neto? R/ que existe
#--------el riesgo de extra-mortalidad en el titular,
#--------representado por la probabilidad
(Prob = sum(Tx > aax)/n)
[1] 0.6812308
```

Para la demostración de (8.98) se utiliza la fórmula de sumatoria por partes ó Lema de Abel, dada en (8.3.1), pag. 314.

**Lema 8.5.1.** *Suponga que* $(f_k), (g_k), k = 0, 1, 2, \dots$ *son dos sucesiones de reales, con sumas acumuladas* $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. *Entonces, dados* $0 \leq m < n$,

$$\sum_{k=m}^{n} g_k F_k = F_n G_n - F_{m-1} G_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} f_k G_{k-1} \tag{8.109}$$

*En el caso* $m = 0$ *se coloca* $G_{-1} = F_{-1} = 0$.

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \mathbb{E}(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K_m(x)+1/m}|}) = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{(k+1)/m}|}\, {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} \left( \sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}} \right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \; {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}},
\end{aligned} \tag{8.110}$$

se aplica el Lema 8.3.1, y se obtiene

$$\sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1}\left(\sum_{j=0}^{k} v^{\frac{j}{m}}\right) {}_{\frac{k}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{k}{m}} = \sum_{k=0}^{m(\omega-x)-1} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x,$$

□

## Flujo de caja de una anualidad

Si el valor de los pagos anuales es $P_a$ entonces el valor actuarial de la renta es $C = P_a\ddot{a}_x$. Este valor lo cancela (x) a una Compañía de Seguros, quien a cambio garantiza los pagos $P$ y la tasa $i$, utilizada para descontar los pagos (además de la estructura necesaria para financiar este producto).

Al invertir $C$ en un fondo que garantice una tasa efectiva anual $i$ se establece una cuenta de la cual se descuentan los pagos $P$. El saldo de esta cuenta al final del año k-ésimo se denota por $F(k)$. Entonces $F(k)$ cumple la siguiente ecuación recursiva.

$$F(k) = (1+i)[F(k-1) - PI(K(x) \geq k-1)], \tag{8.111}$$

tal que $k = 0, 1, 2, \ldots, K(x)$, $F(0) = C$, $I(A) \in \{0, 1\}$ es la indicadora de $A$, y la condición de cierre se establece como

$$\mathbb{E}(v^{K(x)} F(K(x)) = 0. \tag{8.112}$$

La solución de (8.111) está dada por

$$F(k) = v^{-k}[C - P\sum\nolimits_{j=0}^{k} v^j I(K(x) \geq k-1)]. \tag{8.113}$$

En $k = K(x)$ es

$$F(K(x)) = v^{-K(x)}\left(C - P\sum\nolimits_{j=0}^{K(x)} v^j\right).$$

y, aplicando (8.98) y la condición de cierre (8.112) se obtiene

$$\mathbb{E}(v^{K(x)}F(K(x))) = C - P\mathbb{E}(\sum\nolimits_{j=0}^{K(x)} v^j) = C - P\ddot{a}_x =$$

$$\therefore\; C = P\ddot{a}_x.$$

**Definición 8.5.2.** *El riesgo de extra mortalidad se define como el evento*

$$
\begin{aligned}
F(K(x)) < 0 \Leftrightarrow \ddot{a}_x < \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)}|} \\
= \sum_{j=0}^{K(x)} v^j = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}
\end{aligned}
$$

Cuantificarlo significa calcular la probabilidad

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\ddot{a}_x < \frac{1 - v^{K(x)+1}}{d}\right) = \alpha \\
&\Leftrightarrow \ \mathbb{P}(\log(1 - d\ddot{a}_x) > \log(v)(K(x) + 1) = \alpha \\
&\Leftrightarrow \ \mathbb{P}\left(\frac{\log(1 - d\ddot{a}_x)}{\log(v)} - 1 < K(x)\right) = \alpha.
\end{aligned} \tag{8.114}
$$

### 8.5.1. Temporales a n años

## Anualidad de Vida Temporal Anticipada a n años

**Definición 8.5.3.** *Se define como un contrato por el cual la vida (x) recibirá pagos anuales anticipados de una unidad, mientras sobreviva, máximo hasta n años, inclusive.*

El valor presente de los pagos es la variable aleatoria dada por

$$
Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|} \tag{8.115}
$$

donde $\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1-v^{k+1}}{d}$, (ver (5.19a), pag. 153). Usando las identidades

$$
\begin{aligned}
a \wedge b &:= min(a, b), \\
a &= a \wedge b + (a - b)_+, \\
f(x \wedge a) &= f(x)I(x \leq a) + f(a)I(x > a).
\end{aligned}
$$

se puede escribir

$$
Y = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n - 1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n) \tag{8.116}
$$

El costo actuarial ó prima neta es el valor esperado de $Y$ dado por

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} := \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x, \tag{8.117}$$

Pero se tiene un resultado más directo

**Proposición 8.5.2.** *Si la tasa de interés para descontar los pagos es $i$, con $v = 1/(1+i)$, entonces*

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x. \tag{8.118}$$

*Demostración.* Para demostrar (8.118) se calcula, a partir de (8.115):

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1)) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbb{P}(K(x) \geq n),$$

pero

$$\mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\mathbb{P}(K(x) = k)$$

En este punto se aplica el Lema 8.3.1, como se hizo en la demostración de (8.98), definiendo:

$$\begin{aligned} f_k &= v^k,\; F_k = \sum_{j=0}^{k} v^j = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \\ g_k &= {}_kp_x q_{x+k} = \mathbb{P}(K(x) = k), \\ {}_kp_x &= \mathbb{P}(K(x) \geq k). \end{aligned}$$

y cambiando $\omega - x - 1$ por $n - 1$, los pasos son iguales. $\square$

Además, como $v^k\,{}_kp_x = A_{\underset{x:\overline{k}|}{1}}$, se tiene la identidad siguiente con relación a la prima neta de una anualidad de vida entera

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} A_{\underset{x:\overline{k}|}{1}}. \tag{8.119}$$

**Ejemplo 8.5.2.** *Suponga que una vida* $(57)$*, mujer, compra una anualidad de vida, anual anticipada, por* $n = 15$ *años, como estrategia para complementar su pensión de jubilación, con una Aseguradora. Esta le ofrece el producto a una tasa efectiva anual de* $i = 0.08$*. Los pagos anuales son de COP* $12.5$ *mill. Encuentre el costo actuarial de esta anualidad, utilizando la ley Gompertz-Makeham ISS 00-05 y utilizando la Tabla de Vida ISS 00-05. Los siguientes comandos en R implementan una función para calcular*

```
#-------Ejemplo anualidad de vida temporal
x = 57
i = 0.08
n = 15
#-------parametros ley GM
m.par = matrix(c(
0.9984022, 0.9995144, 1.0968159,
0.9980725, 0.9997376, 1.1026006,
0.9975497, 0.9999949, 1.1412894,
0.9953583, 0.9999905, 1.1395016),4,3,byrow=TRUE)
colnames(m.par)=c("s","g","c")
rownames(m.par)=c("m80-89","h80-89","m00-05","h00-05")
#-------mujeres experiencia ISS 2005-2008
s3 = m.par[3,1]
g3 = m.par[3,2]
c3 = m.par[3,3]

pars = c(log(1/s3),log(1/g3)*log(c3),c3)

tpx = function(t,x,pars){
a = pars[1]
b = pars[2]
C = pars[3]
s = exp(-a)
g = exp(-b/log(C))
p = s^t*g^(C^x*(C^t-1))
return(p)}

aax = function(x,i,pars){
```

```
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
t = seq(0,110-x-1,1)
px = sapply(t,function(t)tpx(t,x,pars))
p = sum(v^t*px)
return(p)}
else{p=0
return(p)}
}

aax.57m = aax(x,i,pars)
(costo = 12.5*aax.57m)
#-------respuesta
116.0172
```

## Varianza del valor presente

**Proposición 8.5.3.** *Se define la variable valor presente* $Y$ *como*

$$Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} I(K(x) \leq n-1) + \ddot{a}_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n)$$

*Entonces se cumple*

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_k p_x q_{x+k} + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 \, {}_n p_x - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2. \tag{8.120}$$

*Demostración.* Para calcular la varianza $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, se calcula

$$Y^2 = \left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1) + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 I(K(x) \geq n)$$

Entonces

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1)\right] + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 \mathbb{P}(K(x) \geq n)$$

En este caso

$$\mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2 I(K(x) \leq n-1)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k}$$

por tanto

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} + (\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 {}_np_x - (\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2.$$

□

**Ejemplo 8.5.3.** *Con los datos del Ejemplo anterior 8.5.2, calcule la varianza*

$$Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)\wedge n}|}).$$

## Anualidad de Vida Temporal Vencida

En el caso de una renta ó anualidad temporal a $n$ años para una vida (x), el valor presente se define como la variable

$$a_{\overline{K(x)\wedge n}|} = a_{\overline{K(x)}|} I(K(x) \leq n-1) + a_{\overline{n}|} I(K(x) \geq n). \tag{8.121}$$

donde $a_{\overline{K(x)}|} = \frac{1-v^{K(x)}}{i}$, ver (**??**). El costo actuarial o prima media es la media $\mathbb{E}(a_{\overline{K(x)\wedge n}|})$, indicada por $a_{x:\overline{n}|}$.

La identidad siguiente permite calcular este valor, con base en $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dada en (8.118):

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + v^n \, {}_np_x. \tag{8.122}$$

**Ejercicio 8.5.2.** *Use (5.16)*

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) a_{\overline{n}|i}.$$

*para comprobar (8.122)*

### 8.5.2. Diferida $n$ años

Una anualidad de vida que paga año anticipado una unidad monetaria a (x) después de transcurridos $n$ años, y en caso de sobrevivir (x) este lapso de tiempo, tiene una prima neta dada por

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{8.123} $$

El caso vencido es similar

$$ {}_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n}|} \tag{8.124} $$

Se puede comprobar la fórmula alterna

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = v^n {}_np_x \, \ddot{a}_{x+n}. \tag{8.125} $$

con lo que una fórmula alterna a (8.118) para una anualidad temporal se puede obtener con base en (8.123) y (8.125)

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - v^n {}_np_x \, \ddot{a}_{x+n}. \tag{8.126} $$

**Ejemplo 8.5.4.** *Una anualidad diferida a $n$ años, que sea temporal por $m$ años más, tiene una prima neta dada por*

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = v^n {}_np_x \, \ddot{a}_{x+n:\overline{m}|}. \tag{8.127} $$

**Ejemplo 8.5.5.** *Fórmulas para anualidades en el caso de la ley DeMoivre. Para el caso en el que la probabilidad de supervivencia está dada por: ${}_kp_x = \frac{110-x-t}{110-x}$ para $0 \leq x < 110$ y $0 \leq t \leq 110 - x$, se cumplen las fórmulas:*

$$ \ddot{a}_x = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1 - v^{110-x}}{i(110-x)}\right) \tag{8.128} $$

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1 - v^n}{i(110-x)} - v^n \, {}_np_x\right) \tag{8.129} $$

$$ a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - v^n \, {}_np_x) \tag{8.130} $$

**Ejemplo 8.5.6.** *Una anualidad diferida a $n$ años, temporal a $m$ años, definida en (8.127) pag. 355, se puede ver como un seguro dotal que paga una anualidad anticipada con pagos de 1, temporal por $m$ años, para la vida (x+n),*

$$ \begin{aligned} {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} &= v^n {}_np_x \, \ddot{a}_{x+n:\overline{m}|} \\ &= A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \ddot{a}_{x+n:\overline{m}|} \end{aligned} $$

## 8.6. Temas adicionales

### Anualidades revertibles *

En preparación

### Hipotecas inversas *

En preparación

### 8.6.1. Desigualdad de Jensen

Una función $f(x)$ se dice convexa en $[a,b]$ si la línea que une los puntos $(a, f(a)),\ (b, f(b))$ está siempre por encima de la gráfica $(x, f(x))$. Una condición suficiente para que f sea convexa es que exista $f''(x)$ y cumpla $f''(x) > 0$ en ese intervalo. En este caso, si $X$ es una variable aleatoria, f es convexa en el rango de $X$, y $\mathbb{E}(f(X))$ existe, entonces se cumple:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Una función $f(x)$ se dice cóncava en $[a,b]$ si la línea que une los puntos $(a, f(a)),\ (b, f(b))$ está siempre por debajo de la gráfica $(x, f(x))$. Una condición suficiente para que f sea cóncava es que exista $f''(x)$ y cumpla $f''(x) < 0$ en un intervalo. En este caso, si $X$ es una variable aleatoria, f es cóncava y $\mathbb{E}(f(X))$ existe, entonces se cumple:

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X)).$$

**Ejemplo 8.6.1.**

1. *Si $f(x) = 1/x,\ x > 0$, entonces $f''(x) = 2/x^3 > 0$. Por tanto, f es convexa en $(0, \infty)$. Si $X$ es una variable aleatoria con valores en $(0, \infty)$ aplicando la desigualdad obtenemos $1/\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(1/X)$.*
2. *Si $f(x) = ln(x)$ entonces $f''(x) < 0, x > 0$. Por tanto, f es cóncava. Si $X$ es una variable aleatoria con valores en $(0, \infty)$ entonces se cumple $\mathbb{E}(ln(X)) \leq ln(\mathbb{E}(X))$.*

Una aplicación de la desigualdad de Jensen consiste en tomar $f(y) = \ddot{a}_{\overline{y+1}|}$ y como variable aleatoria $X = K(x)$. Entonce se cumple $f''(y) > 0$. Por tanto, $f(y)$ es cóncava y se cumple la desigualdad

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X)) \tag{8.131}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) \leq \ddot{a}_{\overline{\mathbb{E}(K(x))+1}|} = \ddot{a}_{\overline{e_x+1}|} \tag{8.132}$$

Pero en (2.89 ) se estableció

$$E(T(x)) = \mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2},$$

entonces

$$\ddot{a}_x \leq \ddot{a}_{\overline{e_x+1}|} \approx \ddot{a}_{\overline{\mathring{e}_x+1/2}|}. \tag{8.133}$$

**Ejemplo 8.6.2.** *Con base en el Ejemplo 8.5.1 anterior. Suponga una vida de edad $x = 57$ años, mujer, que compra una anualidad de vida a una Compañía de Seguros, a una tasa de $7.0\,\%$ efectiva anual, y utiliza la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con los parámetros especificados a continuación. Calcule su esperanza de vida y compare el valor de la anualidad cierta con duración $\mathring{e}_x + 1/2$ versus $a_x$.*

```
E = double(4)
E[1]=floor(aax(s1,g1,C1,x,i=0))
E[2]=floor(aax(s2,g2,C2,x,i=0))
E[3]=floor(aax(s3,g3,C3,x,i=0))
E[4]=floor(aax(s4,g4,C4,x,i=0))
names(E) = c("H-80-89","M-80-89","H-00-05","M-00-05")
(E)
#-----resultados
H-80-89 M-80-89 H-00-05 M-00-05
     23      22      25      23
#-----desigualdad Jensen
M1 = double(4)
for(j in 1:4)M1[j] = 12*aan(i,E[j])
pr=(M1-M)/M
A=cbind(M,M1,pr)
colnames(A)=c("E(a(K(x))","a(E(K(x))","%incremento")
(A)
#-----resultados
```

```
 E(a(K(x)) a(E(K(x)) %incremento
H-80-89  130.5975  144.7349  0.10825139
M-80-89  129.2846  142.0263  0.09855567
H-00-05  132.9347  149.6320  0.12560543
M-00-05  134.4366  144.7349  0.07660310
```

### 8.6.2. Varianza del valor presente

Si se define la variable $Y$ como el valor presente

$$Y = \ddot{a}_{\overline{(K(x)+1)}|}$$

Para calcular la varianza $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, se calcula

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}\left[\left(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \left(\frac{1-v^{k+1}}{d}\right)^2 \, {}_kp_x q_{x+k}
\end{aligned}$$

por tanto

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|})^2 \, {}_kp_x q_{x+k} - (\ddot{a}_x)^2. \tag{8.134}$$

**Ejemplo 8.6.3.** *Con los datos del Ejemplo anterior 8.5.1, escriba un programa R para calcular la varianza*

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}).$$

```
#---calcular varianza
var.aax = function(s,g,C,x,i){
```

```
v = 1/(1+i)
if(110-x-1 >= 0){
k = seq(0,110-x-1,1)
kpx.gm = tpx(s,g,C,x,k)
qxk.gm = 1-tpx(s,g,C,x+k,1)
aax2 = aan(i,k+1)^2
p = sum(aax2*kpx.gm*qxk.gm)-aax(s,g,C,x,i)^2
return(p)}
else{p=0
return(p)}
}
E[1]=var.aax(s1,g1,C1,x,i)
E[2]=var.aax(s2,g2,C2,x,i))
E[3]=var.aax(s3,g3,C3,x,i))
E[4]=var.aax(s4,g4,C4,x,i))
(E)
#----resultados
H-80-89  M-80-89  H-00-05  M-00-05
14.04844 13.52297 14.51402 11.29663
```

### 8.6.3. Cartera de pólizas de anualidades de vida

Si se asumen que una Aseguradora tiene $N$ anualidades de vida con costos

$$C_j = F_j \ddot{a}_{x_j},\ j = 1, 2, \ldots, N, \tag{8.135}$$

donde las edades son $x_j$. Una cuestión es si el valor adecuado de la prima global

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j \tag{8.136}$$

es suficiente para cubrir el valor presente de los costos, que es la variable

$$L = \sum_{j=1}^{N} F_j \ddot{a}_{\overline{(K(x_j)+1)}|} = \sum_{j=1}^{N} F_j Y_j. \tag{8.137}$$

Asumiendo las variables aleatorias $F_j Y_j$ independientes, aunque no idénticamente distribuídas, se puede aplicar el Teorema del Límite Central, para varianzas desiguales:

**Teorema 8.6.1.** *Sean* $\{X_k, k = 1, 2, \ldots\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= \mu_k \\ Var(X_k) &= \sigma_k^2\end{aligned}$$

*Si se define*

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

*y se cumple la condición ([2])*

$$\max_{k=1,\ldots,n} \left\{ \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \right\} \to 0,\ n \to \infty \tag{8.138}$$

*entonces se cumple que*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_k)}{s_n} \overset{a}{\sim} Z,\ n \to \infty \tag{8.139}$$

*donde* $Z \sim N(0, 1)$.

La aplicación del TLC se hace colocando $X_k = F_k Y_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) = \mu_k &= F_k \ddot{a}_x, \\ Var(X_k) = \sigma_k^2 &= F_k^2 Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x_k)+1)}|})\end{aligned}$$

se puede calcular la probabilidad

$$\mathbb{P}(L \leq C) = \mathbb{P}\left( Z \leq \frac{C - \mathbb{E}(L)}{\sqrt{Var(L)}} \right), \tag{8.140}$$

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{k=1}^{n} F_k \, \ddot{a}_{x_k}, \tag{8.141}$$

[2]Condición de Lindeberg

$$Var(L) = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 Var(\ddot{a}_{\overline{(K(x_k)+1)}|}) \tag{8.142}$$

Si $C = \mathbb{E}(L)$, esta probabilidad es simplemente 0.5, indicando que las primas netas requieren un recargo adicional para evitar un riesgo de insolvencia. Es decir, recargar la prima neta $\ddot{a}_{x_k}$ a $(1+\theta)\ddot{a}_{x_k}, \theta > 0$.

### 8.6.4. Renta vitalicia en el régimen de Prima Media

Una aplicación de las anualidades diferidas es el planteamiento de las pensiones de jubilación en el régimen de prima media. Se asumen las siguientes variables:

1) Se tienen $n$ vidas de edades $x_j, j = 1, \ldots, n$, con edad de jubilación $r$
2) con salarios $S_{x_j}$,
3) que esperan obtener una pensión mensual $R_j$,
4) la tasa $\theta_j$ como porcentaje del salario para definir el aporte mensual.

Entonces la tasa óptima $\theta_j$ está determinada por las ecuaciones

$$\theta_j S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|} = R_j {}_{r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}, \; j = 1, \ldots, n. \tag{8.143}$$

La prima media en el sistema de pensiones de Prima Media con Prestación Definida se define como un solo valor $\theta$ que cumple la ecuación de equilibrio

$$\theta \sum_{j=1}^{n} S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|} = \sum_{j=1}^{n} R_j {}_{r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}$$

es decir

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_j {}_{r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} S_{x_j} \ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j}|}} \tag{8.144}$$

Un problema estadístico asociado consiste en estimar los valores $S_x$ para un rango de edades $e \leq x \leq r$, donde $e$ es la edad de ingreso al sistema y $r$ la edad de jubilación. Estos valores se denominan “sendas salariales” y hay varias metodologías para su estimación, con base en regresión no lineal, regresión cuantil y regresión no paramétrica.

Más general, consiste en determinar un modelo para explicar el nivel de los salarios a partir de características del trabajador como educación, experiencia, tipo de empresa, edad, género, etc. Este es un problema clásico de econometría y economía laboral.

Un modelo alterno se basa en la escala salarial, $ES_x$, una función de la edad $x$ del trabajador. La escala salarial $ES_x$ permite estimar el salario futuro del trabajador de edad inicial $x$, $S_{x+t}$, $t$ años adelante, mediante la ecuación recursiva siguiente.

$$S_{x+t} = \frac{ES_{x+t}}{ES_x} S_x,\ t = 1, 2, ..., r - x. \tag{8.145}$$

Es decir, la función salarial permite proyectar los salarios futuros de un empleado a partir del salario en una edad inicial. Los salarios así proyectados se denominan una senda ó carrera salarial.

**Definición 8.6.1.** *La senda salarial para un empleado con edad inicial* $e$ *y edad de jubilación* $r$ *se define como la sucesión* $S_x, x = e, e+1, \ldots, r-1$ *calculada a partir de (8.145)* .

Se asume que $ES_x$ cambia debido al incremento del salario mínimo anual (que no siempre será igual a la inflación) y al incremento por mejoramiento profesional, debido a cualificación por estudios, experiencia, etc.

Utilizar los cocientes (incrementos salariales )

$$Y_{x_k} = \frac{S_{x_k+1}}{S_{x_k}}, k = 1, 2, \ldots, N$$

donde $N$ es el total de edades, y realizar una regresión $Y_{x_k}$ versus $x_k$ (lineal, polinómica, cuantil, no lineal, no paramétrica, cuantil no paramétrica, etc), para producir incrementos salariales por edad, de la forma

$$\widehat{S}_x = \prod_{y=e}^{x-1} \widehat{Y}_y S_e. \tag{8.146}$$

donde $\widehat{Y}_y$ es el valor estimado a la edad $y$, de $\frac{ES_y}{ES_e}$. Para cada edad $x_j$ se calcularían $\widehat{R}_j$ y $\widehat{S}_{x_j}$ y finalmente se reemplazarían para obtener la tasa

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \widehat{R}_{j\,r-x_j|}\ddot{a}^{(12)}_{x_j}}{\sum_{j=1}^{n} \widehat{S}_{x_j}\ddot{a}^{(12)}_{x_j:\overline{r-x_j|}}} \tag{8.147}$$

que podría revisarse periódicamente para tomar en cuenta las variaciones demográficas y salariales.

### 8.6.5. Anualidades con Tablas de Vida

Si se estima la probabilidad de supervivencia mediante la Tabla de Vida se reemplaza en (8.98)

$$ {}_k p_x = l_{x+k}/l_x, \tag{8.148} $$

para $k = 0, \ldots, \omega - x - 1$, ya que en la Tabla de Vida $l_\omega = 0$, con $\omega$ la edad a la que termina el ciclo vital de una vida. Luego

$$ \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}. \tag{8.149} $$

La librería `lifecontingencies` tiene funciones para calcular esta anualidad y otras con base en Tablas de Vida. Por ejemplo, la función `axn()`

> This function calculates actuarial value of annuities, given an actuarial table. Fractional and deferred annuities can be evaluated. Moreover it can be used to simulate the stochastic distribution of the annuity value.

```
Usage
axn(actuarialtable, x, n,
i = actuarialtable@interest, m,  k = 1, type = c("EV","ST"),
power=1,payment = c("advance","immediate"))
```

## 8.7. Problemas

1. Las hipótesis y datos sobre tasas, edades, etc. son las mismas que se dieron para este grupo en el Trabajo No 2. Los valores monetarios pueden tomarse en millones de pesos. Sugerencia: revisar los ejemplos en las secciones §8.2.7, pag. 311 y §8.3.6, pag. 329.

   Encuentre el valor de cada una de las anualidades de vida:

   *a*) $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}, m = 12$, ver 8.45, pag. 317,
   *b*) $\bar{a}_{x^s:\overline{n}|}$ , ver (8.11), pag. 303.

   Explique qué garantiza cada una y cuáles son sus diferencias.

2. Las hipótesis y datos sobre tasas, edades, etc. son las mismas que se dieron para este grupo en el Trabajo No 2. Los valores monetarios pueden tomarse en millones de pesos. Sugerencia: revisar los ejemplos en las secciones §8.2.7, pag. 311 y §8.3.6, pag. 329.

   Encuentre el valor de cada una de las anualidades de vida, con $m = 12, q = 2$, tasa inflación $i_q = 0.02$:

   *a*) $(G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, ver (8.45), pag. 317
   *b*) $(G^{(q)}\bar{a})_{x^s:\overline{n}|}$ , ver (8.15), pag. 304.

   Explique qué garantiza cada una y cuáles son sus diferencias.

3. Las hipótesis y datos sobre tasas, edades, etc. son las mismas que se dieron para este grupo en el Trabajo No 2. Los valores monetarios pueden tomarse en millones de pesos. Sugerencia: revisar los ejemplos en las secciones §8.2.7, pag. 311 y §8.3.6, pag. 329.

   Encuentre el valor de cada una de las anualidades de vida, con $m = 12, q = 2$, tasa lineal de inflación $\rho = 0.03$:

   *a*) $(L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}, m = 12$, ver (8.74), pag. 328
   *b*) $(L^{(q)}\bar{a})_{x^s:\overline{n}|}$, ver (8.30), pag. 309.

   Explique qué garantiza cada una y cuáles son sus diferencias.

4. Las hipótesis y datos sobre tasas, edades, etc. son las mismas que se dieron para este grupo en el Trabajo No 2. Los valores monetarios pueden tomarse en millones de pesos. Sugerencia: revisar los ejemplos en las secciones §8.2.7, pag. 311 y §8.3.6, pag. 329.

   Encuentre el valor $C_p$ de la anualidad continua de vida, agregada, con tasa inflación $i_q = 0.02$, y tasa lineal de inflación $\rho = 0.015$:

$$C_p = 12[(L^{(2)}\bar{a})_{x:\overline{n}|} + (G^{(1)}\bar{a})_{x:\overline{n}|}].$$

   Ver (8.30), pag. 309 y (8.15), pag. 304. Explique cómo es el funcionamiento de esta anualidad.

5. Las hipótesis y datos sobre tasas, edades, etc. son las mismas que se dieron para este grupo en el Trabajo No 2. Los valores monetarios pueden tomarse en millones de pesos. Sugerencia: revisar los ejemplos en las secciones §8.2.7, pag. 311 y §8.3.6, pag. 329.

   Encuentre el valor $C_p$ de la anualidad continua de vida, agregada, con $m = 12$, $q = 2$, con tasa inflación $i_q = 0.02$, y tasa lineal de inflación $\rho = 0.015$:

$$C_p = (L^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} + (G^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|}.$$

   Explique cómo es el funcionamiento de esta anualidad.

6. Considere la fuerza de mortalidad estándar $\mu_{x+t}$ dada por una ley de mortalidad. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.6 y §2.5).

   Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x) dada por

$$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{8.150}$$

   con $\theta = 1.7$. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual.

   Puntos:

   *a*) Un departamento rentas vitalicias en una Aseguradora diseña dos **anualidades ciertas**, para un vida (x), con $x_1 = 45$, a $n = \lfloor \mathring{e}_x \rfloor$ años, financiadas a una tasa efectiva anual de $i = 0.095$.