



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

## Parcial 2

**Modelos multiestados, matemática financiera, seguros  
de vida & atención médica**

Por:  
Jefferson Gamboa Betancur  
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias  
Medellín  
2021

## Problema 1

Problema sobre seguros médicos y seguros de vida.

### Hipótesis para el problema:

- La fuerza de mortalidad estándar  $\mu_{x+t}$  dada por la ley de mortalidad asignada. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos para la Ley escogida (vea las secciones §2.5 y §2.6).
- Una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa:  $\mu_{x+t}^s = k\mu_{x+t}$ , con  $k = 1.02$ .
- La intensidad de transición  $\mu_x^{ai}$  según el modelo Weibull dado en la sección §7.6.4, pag. 248, con los valores de los parámetros para mujeres especificados en el ejemplo 7.6.1, pag. 251.
- Utilice una tasa  $i = 0.06$  y una tasa para incremento de costo de vida de  $iq = 0.025$ , ambas efectivas anuales. Calcule para la edad:  $x = 40$ . Use  $n = 110 - x$  de manera que es un seguro de vida entera. Valor asegurado inicial  $C = 100$  unidades.

### Puntos:

- Calcule la prima neta  $\bar{A}_{x:\bar{n}}^{ai}$ , definida en (7.51), pag. 251, para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnóstico de cirugía arterial. Ayuda: ver el Ejemplo 7.6.1, pag. 251.
- Repita el cálculo del punto anterior cambiando la intensidad de transición  $\mu_x^{ai}$  por  $0.01 + \mu_x^{ai}$ . ¿Qué significa este cambio? ¿Cómo afecta las primas  $\bar{A}_{x:\bar{n}}^{ai}$ ?
- Calcule la prima neta del seguro vida temporal,  $\bar{A}_{x:\bar{n}}^1$ , definida en (7.3), pag. 220 y la correspondiente para el seguro de vida que paga al final del mes,  $\bar{A}_{x:\bar{n}}^{1(m)}$  (ver (7.38), pag. 239), usando la relación

$$A_{x:\bar{n}}^{1(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{A}_{x:\bar{n}}$$

Ayuda: recordar que  $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1)$ , es la tasa nominal a  $m$  períodos, ver (5.2), pag. 141.

## Solución

Wilfred Perks propuso dos leyes de mortalidad en 1932, este trabajo se solucionó usando la primera de sus leyes. Definida a continuación:

**Primera ley de mortalidad Perks.** Utilizando la parametrización de la librería R *MortalityLaws*, por

$$\mu_{x+t} = \frac{a_1 e^{a_3(x+t)} + a_2}{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1}. \quad (1)$$

para  $x \in \{0, 1, \dots, \omega\}$ , con  $a_1, a_2, a_3, a_4$  parámetros positivos y la probabilidad de supervivencia como:

$$tp_x = e^{-a_1 t} \left( \frac{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1}{a_4 e^{a_3 x} + 1} \right)^g, \quad \text{con } g = \frac{a_1 a_4 - a_2}{a_3 a_4} \quad (2)$$

Los parámetros  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  dados en el ejemplo 2.6.2 son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 7.130052 \times 10^{-7}, \\ a_2 &= 2.005330 \times 10^{-5}, \\ a_3 &= 1.123180 \times 10^{-1}, \\ a_4 &= 1.982141 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

## Definición en R

```
#-----Ley Perks 1
#-----Definir la fuerza de mortalidad
muxt.perk1 <- function(t, x, pars){
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  a4 <- pars[4]
  m <- (a1 + a2*exp(a3*(x + t)))/(a4*exp(a3*(x + t)) + 1)
  return(m)
}

#-----Definir tpx
tpx.perks1 <- function(t, x, pars){
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  a4 <- pars[4]
  g <- (a1*a4 - a2)/(a3*a4)
  v <- exp(- a1*t)*((a4*exp(a3*(x + t)) + 1)/(a4*exp(a3*x) + 1))^g
  return(v)
}

#-----Tasas y beneficio
i <- 0.06
iq <- 0.025
bt <- function(t) 100*(1+iq)^(floor(t))

#-----Edades y periodo temporal en años
x <- 40
n <- 110 - x

#-----muxai Weibull
require(eha)
muxai <- function(t) hweibull(x + t, shape = aw, scale = bw)

#-----txai Weibull
txai <- function(t) pweibull(x + t, shape = aw, scale = bw, lower.tail = FALSE)

#-----Parámetros modelo Weibull
#-----a = shape, b = scale
#-----Mujeres
mu <- 3.615433E-09
tau <- 3.284108255
aw <- tau+1
bw <- ((tau+1)/mu)^(1/(tau+1))

#-----Parámetros Perks 1
pars <- c(7.130052*10^(-7), 2.005330*10^(-5), 1.123180*10^(-01), 1.982141*10^(-05))
```

- (a) Para calcular la prima neta para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnóstico de la cirugía arterial, para la vida de una mujer de edad  $x = 40$  y el temporal es  $n = 110 - x$  con un costo inicial de  $C = 100$  unidades monetarias y una tasa inflación de  $i_q = 2.5\%$  efectivo anual. Utilizando una tasa técnica  $i = 0.06$  efectivo anual.

Para el modelo, la intensidad  $\mu_x^{ai}$  se calculará como una Weibull especificada con los parámetros de las mujeres del ejemplo 7.6.1, donde  $a = 4.284108$  y  $b = 131.2171$

Luego la intensidad de pasar de sano a enfermo es:

$$\mu_x^{ai} = \frac{a}{b} \left( \frac{x}{b} \right)^{a-1}$$

Ahora se calcula  $\mu_x^{ad}$  que es la fuerza de mortalidad de la Perks 1.

$$\begin{aligned}\mu_x^{ad} &= \mu_{x+t} = \frac{a_1 e^{a_3(x+t)} + a_2}{a_4 e^{a_3(x+t)} + 1} \\ \mu_{40}^{ad} &= \mu_{40+t} = \frac{7.130052 \times 10^{-7} e^{a_3(x+t)} + 2.005330 \times 10^{-5}}{1.982141 \times 10^{-5} e^{1.123180 \times 10^{-1}(x+t)} + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}}^{ai} &= \int_0^{110-x} v^t b(t) \mu_{x+t}^{ai} p_x^{aa} dt \\ &= \int_0^{110-x} v^t b(t) \mu_{x+t}^{ai} \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} + \mu_{x+u}^{ad} \right\} dt \\ &= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} t p_x \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\} \mu_{x+t}^{ai} dt\end{aligned}$$

Para desarrollar en cálculo de la integral se utilizará el siguiente código y así obtener el resultado.

### Desarrollo en R

```
# Función de la prima neta
fn <- function(t) bt(t) * (1+i)^(-t) * muxai(t) * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars)

# Prima neta
require(rmutil)
int(fn, 0, n)
```

[1] 3.680344

Por tanto la prima neta para un seguro médico continuo que paga al momento del diagnóstico de la cirugía arterial es:  $\bar{A}_{x:\overline{n}}^{ai} = 3.680344$  unidades monetarias.

- (b) Para este literal, partiendo desde la última ecuación para reemplazar la intensidad  $\mu_x^{ai}$  por  $0.01 + \mu_x^{ai}$  nos da que:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n}}^{ai} &= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\} \mu_{x+t}^{ai} dt \\
&= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \exp \left\{ - \int_0^t (0.01 + \mu_{x+u}^{ai}) du \right\} (0.01 + \mu_{x+u}^{ai}) dt \\
&= 100 \times \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \frac{\exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\}}{\exp(0.01t)} (0.01 + \mu_{x+u}^{ai}) dt \\
&= 100 \left( \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\} \frac{0.01}{\exp(0.01t)} dt \right) \\
&\quad + 100 \left( \int_0^{110-x} v^t (1+i_q)^{\lfloor t \rfloor} {}_t p_x \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u}^{ai} du \right\} \frac{1}{\exp(0.01t)} \mu_{x+u}^{ai} dt \right)
\end{aligned}$$

Luego al integrar con  $R$  el resultado es el siguiente.

### Desarrollo en R

```
#Prima neta con intensidad 0.01 + mu_{x+t}^{ai}
fn2 <- function(t){
  bt(t) * (1+i)^{-t} * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars) * 0.01/exp(0.01*t) +
  bt(t) * (1+i)^{-t} * muxai(t) * tpxai(t) * tpx.perks1(t, x, pars) * 1/exp(0.01*t)
}

int(fn2, 0, n)

[1] 19.18331
```

Esto quiere decir que al sumar 0.01 a la intensidad, aumenta la tendencia en 19.18331 unidades monetarias para el diagnostico de cirugía arterial en aproximadamente 5 unidades monetarias  $\left(\frac{19.18331}{3.680344} = 5.212369\right)$  para el pago de la prima neta.

- (c) Para el cálculo de la vida ( $x = 40$ ) de la prima neta temporal a ( $n = 110 - x$ ) años, en tiempo continuo, por un valor asegurado de 100 unidades monetarias, usando una tasa tecnica  $i = 0.05$  efectiva anual para el seguro de vida que paga al final del mes esta dada por:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Para las funciones  ${}_t p_x$  y  $\mu_{x+t}$  de la *Perks 1* ya se tiene el código en el primer literal por ello para la integral se obtiene en  $R$  que:

### Desarrollo en R

```
# Parámetros
x = 40; i = 0.05; C = 100; n = 110-x; v = 1/(1+i)

# Función a integrar
ft = function(t) v^(t) * tpx.perks1(t, x, pars) * muxt.perk1(t, x, pars)
#Integral
C*integrate(ft, 0, n)$value
```

[1] 23.29044

Por lo tanto la prima neta temporal en años en tiempo continuo es de 23.29044 unidades monetarias. Y para el cálculo de la del seguro de vida que paga al final del mes se tiene qué:

$$A_{x:\bar{n}}^{1(m)} = \int_0^n \frac{\delta}{i^m} A_{x:\bar{n}}$$

donde  $i^{(m)} = m[(1+i)^m - 1]$ ,  $\delta = \ln(1+i)$ , y  $m = 12$ .

### Desarrollo en R

```
#Parámetros
m = 12; i = 0.05;
delta <- log(1+i); im <- m*((1 + i)^m - 1)
v <- delta/im
#vida entera pago en la m fracción del año

fn = function(t){v * tpx.perks1(t, x, pars) * muxt.perk1(t, x, pars)}

C*integrate(fn,0, n)$value
```

[1] 0.5108769

Por tanto el seguro de vida que paga a final de mes es de 0.5108769 unidades monetarias.