



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

## Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Por:  
Jefferson Gamboa Betancur  
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias  
Medellín  
2021

## Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar  $\mu_{x+t}$  según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu_{x+t}^s = \theta \mu_{x+t}$$

con  $\theta > 1$  dada. Denote por  $T(x^s)$  su vida media residual. Asuma  $x_1 = 30$ ,  $t = 20$ ,  $\theta = 1.2$ .

- (a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas  $x_1, x_2$  antes de  $t$  años como

$${}_tq_{\overline{x_1x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}$$

Encuentre  ${}_tq_{\overline{x_1, x_1^s}}$ . Observe que  ${}_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {}_tp_{x_1x_2}$ .

- (b) Encuentre  $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \hat{e}_{x_1^s}$ . Encuentre  $1 - \frac{\hat{e}_{x_1^s}}{\hat{e}_{x_1}}$ , el porcentaje se reduce la esperanza de vida de  $(x_1^s)$  con respecto a otra vida  $(x_1)$  con la fuerza de mortalidad  $\mu_{x+t}$
- (c) Encuentre  $P(T(x_1) < T(x_1^s))$ .
- (d) Genere una Tabla de Vida con los valores de  $\mu_x$ . Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

### Definición de funciones

```
muxt.gm <- function(t,x,parms){
  a <- parms[1]
  b <- parms[2]
  C <- parms[3]
  mx <- a + b*C^(x+t)
  return(mx)
}
tpx.gm <- function(t,x,parms){
  a <- parms[1]
  b <- parms[2]
  C <- parms[3]
  p <- exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))
  return(p)
}
```

### Definición de parámetros

```
#--- parámetros GM
a <- 0.0005
b <- 10^(-4.12)
C <- 10^(0.038)
parms <- c(a,b,C)
#--- parámetros del problema
x1 <- 30
t <- 20
theta <- 1.2
w <- 110
```

## Solución

(a)

Con la información en el enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2} = (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp_{x_2}) \\ &= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2} \\ \therefore {}_tq_{\overline{x_1x_2}} &= 1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2}} \\ \text{Donde} \\ {}_tp_{\overline{x_1x_2}} &= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} - {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} &= {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_1^s} \\ &= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1^s} + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_1^s} \end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$= 1 - {}_tp_{x_1} - {}_tp_{x_1}^\theta + {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_1}^\theta$$

Finalmente se tiene que:

$${}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} = (1 - {}_tp_{x_1})(1 - {}_tp_{x_1}^\theta)$$

Calculando la probabilidad de que una vida sana de (30) sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1 <- tpx.gm(t,x1,pars)
```

```
[1] 0.9352907
```

$${}_tp_{x_1} = 0.9353$$

Suponiendo que  $(x_1^s)$  sufre de insuficiencia cardíaca. La probabilidad de que una vida de (30) con IC sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1^theta
```

```
[1] 0.9228602
```

$${}_tp_{x_1^s} = 0.9229$$

Por ende, dos vidas de la misma edad (30), la primera en condición sana y la segunda con IC la probabilidad de que ambas fallezcan antes de cumplir 50 años es:

```
(1-pt.x1)*(1-(pt.x1)^theta)
```

```
[1] 0.004991664
```

$${}_tq_{\overline{x_1x_1^s}} = 0.0049$$

(b)

Se conoce que:

$$\mathbb{E}[T(x_1^s)] = \hat{e}x_1^s$$

Ahora, por definición, la vida media remanente se escribe como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(x_1^s) > t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_{x_1^s} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty {}_t p_{x_1}^\theta dt \\ &= \int_0^{\omega-x_1} \left( e^{-at - \frac{bcx_1}{\ln(c)}(c^t-1)} \right)^\theta dt\end{aligned}$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)^theta
e.x1s <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 42.07763
```

Es decir, la esperanza de vida de (30) con IC es de  $\hat{e}x_1^s = 42.0776$  años.

Recíprocamente, se calcula la vida remanente de (30) siendo sano:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)
e.x1 <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 44.11117
```

Es decir, la esperanza de vida de (30) es de  $\hat{e}x_1 = 44.1112$  años.

Por lo tanto,

```
1 - (e.x1s / e.x1)
```

```
[1] 0.04610038
```

la disminución de la esperanza de vida para  $30^s$  es del 4.61 %.

(c)

Aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega-x} P(T(x_1) < T(x_1^s)|T(x_1) = t) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} P(t < T(x_1^s)) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1^s} {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^{\theta} {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^{\theta+1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x_1} \left( e^{-at - \frac{bcx_1}{\ln(c)}(c^t-1)} \right)^{\theta+1} (a + bc^{x_1+t}) dt\end{aligned}$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) (tpx.gm(t,x1,pars)^(theta+1)) * muxt.gm(t,x1,pars)
integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

```
[1] 0.4545455
```

Luego  $\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) = 0.4545$  o también  $\mathbb{P}(T(x_1^s) < T(x_1)) = 0.5455$ , es decir, una persona de 30 años, con IC tiene un 54.55% de probabilidades de fallecer antes que otra de la misma edad pero en condición sana, si la supervivencia estuviera descrita por la función Gompertz-Makeham con los parámetros especificados.

(d)

```
#-----generar tablas de vida con base
# en la fuerza de mortalidad estimada
require(lifecontingencies)
x = seq(0,109)
probs = tpx.gm(1,x,pars)
D = probs2lifetable(probs, radix = 100000, type = "px", name = "TablaVidaGM")
```

head(D)		tail(D)	
x	lx	x	lx
1 0	100000.00	106 105	19.8658931
2 1	99942.09	107 106	9.1503806
3 2	99883.49	108 107	3.9264942
4 3	99824.13	109 108	1.5595249
5 4	99763.95	110 109	0.5692864
6 5	99702.86	111 110	0.1895262

```
TVH <- new("lifetable", x=D@x, lx=D@lx, name="tablas.GM")
```

```
#-----probabilidad de fallecer
qxt(TVH,x=x1,t=t)
```

```
[1] 0.06470933
```

Con las tablas de vida la probabilidad de que (30) fallezca antes de cumplir 50 es de 6.47% aproximadamente.

El anterior resultado se puede verificar, puesto que coincide exactamente con el complemento de la probabilidad de sobrevivir la vida de (30) de Gompertz-Makeham calculada en (a), como se muestra a continuación:

```
1 - pt.x1
```

```
[1] 0.06470933
```