UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Por:

Facultad de Ciencias
Medellín

2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

(a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas $x1$, $x2$ antes de t años como

$$_tq_{\overline{x_1x_2}} := {_tq_{x_1}} \cdot {_tq_{x_2}}$$

Encuentre $_tq_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Observe que $_tq_{\overline{x_1x_2}} \neq 1 - {_tp_{x_1x_2}}$.

(b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \mathring{e}x_1^s$. Encuentre $1 - \frac{\mathring{e}x_1^s}{e_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}

(c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

(d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x. Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
{_tq_{\overline{x_1x_2}}} &= {_tq_{x_1}} \cdot {_tq_{x_2}} \\
\mu_{x+t}^s &= \theta\mu_{x+t}, && \theta > 1 \\
{_tp_{\overline{x_1x_2}}} &= \mathbb{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)) \\
&= {_tp_{x_1}} + {_tp_{x_2}} - {_tp_{x_1}}\,{_tp_{x_2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
{_tq_{\overline{x_1x_2}}} = {_tq_{x_1}} \cdot {_tq_{x_2}} &= (1 - {_tp_{x_1}})(1 - {_tp_{x_2}}) \\
&= 1 - {_tp_{x_1}} - {_tp_{x_2}} + {_tp_{x_1}}\,{_tp_{x_2}} \\
\therefore {_tq_{\overline{x_1x_2}}} &= 1 - {_tp_{\overline{x_1x_2}}}
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
{_tq_{\overline{x_1x_1^s}}} &= 1 - {_tp_{\overline{x_1x_1^s}}} \\
&= 1 - {_tp_{x_1}} - {_tp_{x_1^s}} + {_tp_{x_1}}\,{_tp_{x_1^s}} \\
&= 1 - {_tp_{x_1}} - {_tp_{x_1^\theta}} + {_tp_{x_1}}\,{_tp_{x_1^\theta}} && \text{Por el modelo multiplicativo} \\
&= (1 - {_tp_{x_1}})(1 - {_tp_{x_1^\theta}})
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \mathring{e}x_1^s \\
\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(X_1^s) > t)dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_{x_1^s}dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_{x_1}e^{-\theta t}dt \\
&= \int_0^{\omega - x_1} \left(1 - \frac{t}{\omega - x_1}\right) e^{-\theta t}dt \\
&= \frac{1 - e^{-\theta(\omega - x_1)}}{\theta} + \frac{\theta e^{-\theta(\omega - x_1)}(\theta - x_1) + e^{-\theta(\omega - x_1)} + 1}{\theta^2(\omega - x_1)}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega - x} P(T(x_1) < T(x_1^s)|T(x_1) = t)\, {}_tp_{x_1}\mu_{x_1+t}dt \\
&= \int_0^{\omega - x} P(t < T(x_1^s))\, {}_tp_{x_1}\mu_{x_1+t}dt \\
&= \int_0^{\omega - x} e^{-\theta t}({}_tp_{x_1})^2\mu_{x_1+t}dt
\end{aligned}$$