



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Parcial 1

Distribuciones de Supervivencia & Tablas de vida

Por:

Jefferson Gamboa Betancur
Luis Felipe Bedoya Martínez

Facultad de Ciencias
Medellín
2021

Problema 1

Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} según el modelo asignado. Utilice los parámetros que aparecen en los ejemplos de las Notas de Clase, vea las secciones §2.5 y §2.6.

Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.27), para una vida (x), dada por

$$\mu_{x+t}^s = \theta \mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$.

- (a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas x_1, x_2 antes de t años como

$${}_t q_{\overline{x_1 x_2}} := {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_2}$$

Encuentre ${}_t q_{\overline{x_1, x_1^s}}$. Observe que ${}_t q_{\overline{x_1 x_2}} \neq 1 - {}_t p_{x_1 x_2}$.

- (b) Encuentre $\mathbb{E}(T(x_1^s)) = \hat{e}x_1^s$. Encuentre $1 - \frac{\hat{e}x_1^s}{e_{x_1}}$, el porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x_1^s) con respecto a otra vida (x_1) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}
- (c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.
- (d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad de (30) fallecer antes de cumplir 50 con esta Tabla.

Definición de funciones

```
muxt.gm <- function(t,x,pars){  
  a <- pars[1]  
  b <- pars[2]  
  C <- pars[3]  
  mx <- a + b*C^(x+t)  
  return(mx)  
}  
tpx.gm <- function(t,x,pars){  
  a <- pars[1]  
  b <- pars[2]  
  C <- pars[3]  
  p <- exp(-a*t - b*C^x*(C^t-1)/log(C))  
  return(p)  
}
```

Definición de parámetros

```
### parámetros GM  
a <- 0.0005  
b <- 10^(-4.12)  
C <- 10^(0.038)  
pars <- c(a,b,C)  
### parámetros del problema  
x1 <- 30  
t <- 20  
theta <- 1.2  
w <- 110
```

Solución

(a)

Con la información en el enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{x_1 x_2}} &= {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_2} = (1 - {}_t p_{x_1}) (1 - {}_t p_{x_2}) \\ &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p_{x_2} + {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \\ \therefore {}_t q_{\overline{x_1 x_2}} &= 1 - {}_t p_{\overline{x_1 x_2}} \end{aligned}$$

Donde

$${}_t p_{\overline{x_1 x_2}} = {}_t p_{x_1} + {}_t p_{x_2} - {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{x_1 x_1^s}} &= {}_t q_{x_1} \cdot {}_t q_{x_1^s} \\ &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p_{x_1^s} + {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_1^s} \\ \text{Por el modelo multiplicativo:} \\ &= 1 - {}_t p_{x_1} - {}_t p^{\theta}_{x_1} + {}_t p_{x_1} {}_t p^{\theta}_{x_1} \\ \text{Finalmente se tiene que:} \\ {}_t q_{\overline{x_1 x_1^s}} &= (1 - {}_t p_{x_1}) (1 - {}_t p^{\theta}_{x_1}) \end{aligned}$$

Calculando la probabilidad de que una vida sana de (30) sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1 <- tpx.gm(t,x1,pars)
```

```
[1] 0.9352907
```

$${}_t p_{x_1} = 0.9353$$

Suponiendo que (x_1^s) sufre de insuficiencia cardíaca. La probabilidad de que una vida de (30) con IC sobreviva la vida de (50) por lo menos en 20 años es:

```
pt.x1^theta
```

```
[1] 0.9228602
```

$${}_t p_{x_1^s} = 0.9229$$

Por ende, dos vidas de la misma edad (30), la primera en condición sana y la segunda con IC la probabilidad de que ambas fallezcan antes de cumplir 50 años es:

```
(1-pt.x1)*(1-(pt.x1)^theta)
```

```
[1] 0.004991664
```

$${}_t q_{\overline{x_1 x_1^s}} = 0.0049$$

(b)

Se conoce que:

$$\mathbb{E}[T(x_1^s)] = \hat{e}x_1^s$$

Ahora, por definición, la vida media remanente se escribe como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(x_1^s)] &= \int_0^\infty P(T(x_1^s) > t)dt \\ &= \int_0^\infty t p_{x_1^s} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty t p_{x_1}^\theta dt \\ &= \int_0^{\omega-x_1} \left(e^{-at - \frac{bc}{ln(c)}(c^t - 1)} \right)^\theta dt\end{aligned}$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars) ^ theta
e.x1s <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

[1] 42.07763

Es decir, la esperanza de vida de (30) con IC es de $\hat{e}x_1^s = 42.0776$ años.

Recíprocamente, se calcula la vida remanente de (30) siendo sano:

```
--- Uso de integración numérica
f <- function(t) tpx.gm(t,x1,pars)
e.x1 <- integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

[1] 44.11117

Es decir, la esperanza de vida de (30) es de $\hat{e}x_1 = 44.1112$ años.

Por lo tanto,

```
1 - (e.x1s / e.x1)
```

[1] 0.04610038

la disminución de la esperanza de vida para 30^s es del 4.61 %.

(c)

Aplicando el teorema de probabilidad total se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{\omega-x} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} P(t < T(x_1^s)) {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1^s} {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt\end{aligned}$$

Por el modelo multiplicativo:

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^\theta {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_{x_1}^{\theta+1} {}_t p_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x_1} \left(e^{-at - \frac{bc^{x_1}}{\ln(c)}(c^t - 1)} \right)^{\theta+1} (a + bc^{x_1+t}) dt\end{aligned}$$

La anterior integral se calcula numéricamente así:

```
#--- Uso de integración numérica
f <- function(t) (tpx.gm(t,x1,pars)^(theta+1)) * muxt.gm(t,x1,pars)
integrate(f,lower=0,upper=w-x1)$value
```

[1] 0.4545455

Luego $\mathbb{P}(T(x_1) < T(x_1^s)) = 0.4545$ o también $\mathbb{P}(T(x_1^s) < T(x_1)) = 0.5455$, es decir, una persona de 30 años, con IC tiene un 54.55 % de probabilidades de fallecer antes que otra de la misma edad pero en condición sana, si la supervivencia estuviera descrita por la función Gompertz-Makeham con los parámetros especificados.

(d)

```
#-----generar tablas de vida con base
# en la fuerza de mortalidad estimada
require(lifecontingencies)
x = seq(0,109)
probs = tpx.gm(1,x,pars)
D = probs2lifetable(probs, radix = 100000, type = "px", name = "TablaVidaGM")
```

head(D)		tail(D)	
x	lx	x	lx
1 0	100000.00	106 105	19.8658931
2 1	99942.09	107 106	9.1503806
3 2	99883.49	108 107	3.9264942
4 3	99824.13	109 108	1.5595249
5 4	99763.95	110 109	0.5692864
6 5	99702.86	111 110	0.1895262

```
TVH <- new("lifetable", x=D@x, lx=D@lx, name="tablas.GM")
```

```
#-----probabilidad de fallecer
qxt(TVH, x=x1, t=t)
```

```
[1] 0.06470933
```

Con las tablas de vida la probabilidad de que (30) fallezca antes de cumplir 50 es de 6.47 % aproximadamente.

El anterior resultado se puede verificar, puesto que coincide exactamente con el complemento de la probabilidad de sobrevivir la vida de (30) de Gompertz-Makeham calculada en (a), como se muestra a continuación:

```
1 - pt.x1
```

```
[1] 0.06470933
```