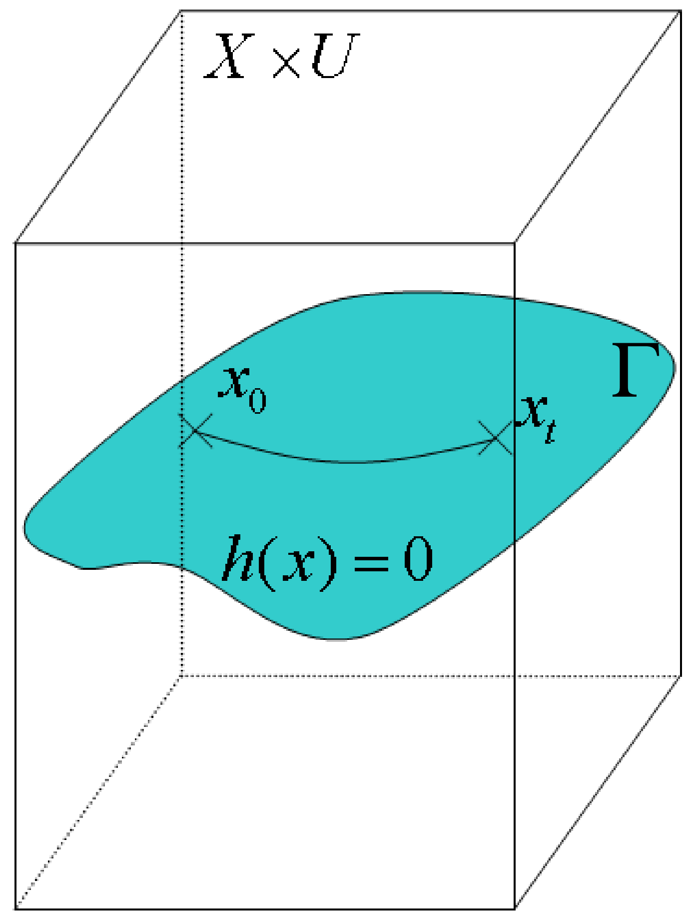
CELSO BERNARDO NÓBREGA FREITAS

Integração numérica de sistemas não lineares semi-implícitos via teoria de controle geométrico

Definição do Problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \\ y(t) = h\left(x(t)\right) = 0 \end{cases}$$

- DAE (Equações Diferenciais Algébricas)
- Semi-implícitos
- Conjunto Γ
- Sistemas Completamente Determinados $\dim u = \dim y$



Idéia para Obtenção da Solução

Sistema Original

Semi-Implícito

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \\ y(t) = h\left(x(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Sistema Modificado

Explícito

$$\left\{ \dot{z}(t) = \tau\left(z(t)\right) \right.$$

Técnicas Tradicionais
de Integração Numérica

Estratégias Obtenção dos Sistemas Explícitos

Método I

Transformação de Coordenadas $(x) \mapsto \psi(x) \doteq z$

Realimentação de Estado $\tilde{u}(x)$

Sistema Explícito $\dot{z} = \tau(z, \tilde{u}) \Rightarrow \dot{z} = \tau(x)$

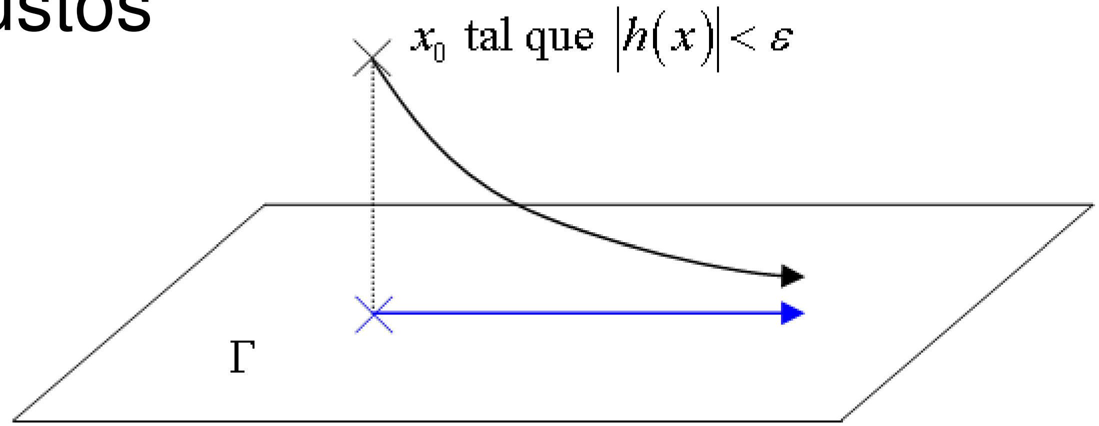
Método II

Transformação de Coordenadas $(x, u) \mapsto \Psi(x, u) \doteq z$

Sistema Explícito $\dot{z} = \tau(x, u)$

Requisitos

- Obter as transformações $\psi(x)$ e $\Psi(x,u)$
- Obter a realimentação de estado $\tilde{u}(x)$
- Os estados respeitem as restrições $h(x) \equiv 0$
- As soluções sistema modificado sigam as soluções do sistema original
- Métodos Robustos



Estrutura da Apresentação

- Introdução
- Método I
  - Teoria, Algoritmo, Simulação (MatLab)
- Método II
  - Teoria, Algoritmo, Simulação (MatLab)
- Principais resultados das simulações

Teoria do Desacoplamento

Por enquanto, vamos considerar sistemas afins e explícitos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) + \sum_{i=1}^{m} g_i\left(x(t)\right)u_i(t) \\ y(t) = h\left(x(t)\right) \end{cases}$$

<u>Invariância</u> uma saída y_i é invariante em relação à u_j se

$$y_i(t_0, x_0, t, u) = y_i(t_0, x_0, t, w),\ \forall (x_0, t, u, w) \in (X_0, I, U, U)$$

$$u = \left(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_m\right) \quad w = \left(u_1, \ldots, \tilde{u}_j, \ldots, u_m\right)$$

<u>Desacoplado</u>, um sistema é desacoplado se cada uma das saídas é invariante por uma e apenas uma entrada

Teoria do Desacoplamento

Números Característicos

$$\begin{cases} y_i = h_i(x) \doteq y_i^{(0)}(x) \\ \dot{y}_i^{(0)} = \dfrac{\partial y_i^{(0)}}{\partial x}\dot{x} = \dfrac{\partial y_i^{(0)}}{\partial x} f + \underbrace{\dfrac{\partial y_i^{(0)}}{\partial x}\sum_{i=1}^{m} g_i u_i}_{0} \doteq y_i^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = \dfrac{\partial y_i^{(\rho_i-1)}}{\partial x}\dot{x} = \underbrace{\dfrac{\partial y_i^{(\rho_i-1)}}{\partial x} f}_{a_i(x)} + \overbrace{\underbrace{\dfrac{\partial y_i^{(\rho_i-1)}}{\partial x}\sum_{i=1}^{m} g_i}_{b_i(x)}}^{\neq 0} u_i \doteq y_i^{(\rho_i)}(x,u) \end{cases}$$

Matriz de Desacoplamento

$$y^{(\rho)} = a(x) + b(x)u$$

Teoria do Desacoplamento

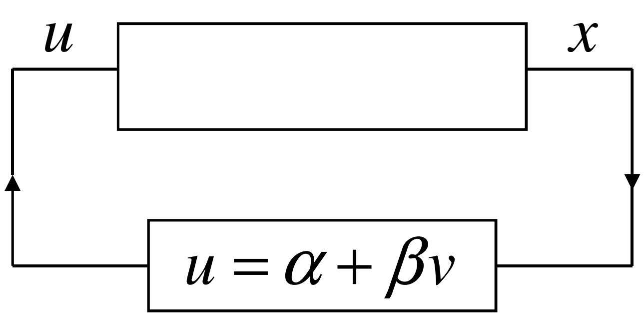
- <u>Realimentação de Estado Estática</u> $\tilde{u}(x)$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\det(\beta(x)) \neq 0$$

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i$$

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_i(x)v_i$$



Teoria do Desacoplamento

O **Problema de Desacoplamento** consiste na obtenção de uma realimentação de estado e estática tal que o sistema modificado resultante seja desacoplado

Teorema: O Problema de Desacoplamento é solúvel sse:

$$\text{posto } b(x) = m, \text{ onde } m = \dim U$$

$(\Leftarrow)$

posto $b(x) = m \Rightarrow$ Problema de Desacoplamento é solúvel

Escolhendo $\alpha(x) = b^{-1}a, \beta(x) = b^{-1}$

$$y^{(\rho)} = a(x) + b(x)u$$

$$y^{(\rho)} = a(x) + b(x)(\alpha + \beta v)$$

$$y^{(\rho)} = a(x) + b(x)\left(b^{-1}a + b^{-1}v\right) = v$$

Teoria do Desacoplamento

Seja a aplicação

$$Y^{(\rho-1)}(x)=\left(y_1^{(0)}(x),\ldots,y_1^{(\rho_1-1)}(x),\ldots,y_m^{(0)}(x),\ldots,y_m^{(\rho_m-1)}(x)\right)$$

$$\rho \doteq \sum_{i=1}^{m}\rho_i$$

Teorema: A aplicação $Y^{(\rho-1)}: X \to \mathbb{R}^{\rho}$ possui posto ρ quando a matriz de desacoplamento possui posto pleno

Teoria do Desacoplamento

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi : x \mapsto z \\ \text{posto}\left(Y^{(\rho-1)}\right) = \rho \end{array}}$$

$$\psi = \left(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}\right), \quad \dim(\hat{x}) = n - \rho$$

<u>Coordenadas Complementares</u>
(Independentes)

Teorema: O campo τ possui propriedades que não dependem da escolha de $\hat{x}(x)$

$$T(x) \doteq \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix}\right|_{x=\bar{x}} = \begin{pmatrix} R \\ \left.\dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \end{pmatrix}, \; R \in M_{n-\rho,n}$$

Estrutura do Método I

$$\begin{cases} \dot{y}_i^{(k)} = y_i^{(k+1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = a_i + b_i u \end{cases} + \left\{ u = \alpha(x) + \beta(x) v \right. + \left\{ \dot{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \left(f + \sum_{i=1}^{m} g_i u_i(t) \right) \right.$$

$$\boxed{z \doteq \psi(x) = \left(\hat{x}, Y^{(p-1)}\right)}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \eta\left(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, v\right) \\ \left.\begin{aligned} \dot{y}_i^{(k)} &= y_i^{(k+1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} &= v_i \left(\doteq y_i^{(\rho_i)}\right) \end{aligned}\right\} \forall (i,k) \in \left(\{1,..,m\},\{0,..,\rho_i\}\right) \end{cases}$$

$$\dot{z} = \tau(x), \text{ onde } \tau(x) \doteq \begin{pmatrix} R\dot{x} \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} \end{pmatrix}$$

Sistemas Implícitos x Explícitos

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + \sum_{i=1}^{m} g_i\big(x(t)\big)u_i(t) \\ y(t) = h\big(x(t)\big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \eta\left(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, v\right) \\ \dot{y}_i^{(k)} = y_i^{(k+1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = v_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + \sum_{i=1}^{m} g_i\big(x(t)\big)u_i(t) \\ y(t) = h\big(x(t)\big) \boxed{= 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \eta\left(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, 0\right) \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} = 0 \end{cases}$$

Verdadeiro Estado

Realimentação Estabilizante

$$\Gamma = \left\{ (x,u) \in X \times U \mid Y^{(\rho)}(x,u) = 0 \right\}$$

$$\left(Y^{(\rho-1)}, y^{(\rho)} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} &x_0 \text{ tal que } \left| h(x) \right| < \varepsilon \\ &u_0 \text{ tal que } \left| u_0 \right| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y^{(\rho)}(x,u) \neq 0$$

$$v_i = -\sum_{j=0}^{\rho_i - 1} \alpha_{ij} y_i^{(j)}, \ \forall i = \{1,..,m\}$$

Fator de Convergência

$$\pi_i(s) = (s + \gamma)^{\rho_i} = s^{\rho_i} + \sum_{j=0}^{\rho_i - 1} \alpha_{ij} s^j, \ \gamma > 0$$

$$\lim_{t \to \infty} y_i = 0 \ \forall i \in \{1,..,m\}$$

Construindo Simulação Método I

Computação Simbólica

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right) \\ y(t) = h\left(x(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Função ConstróiImplementaçãoI(γ, f, h, x, u), Devolve (Implementação)

$$\left(Y^{(\rho-1)}, y^{(\rho)}, \tilde{\rho}\right) \leftarrow \text{TransformaCoordenadas}(f, h, x, u)$$

$$a \leftarrow y^{(\rho)}\Big|_{u=0}, \quad b \leftarrow \left(y^{(\rho)} - a\right)\Big|_{u=1}$$

$$\alpha \leftarrow -b^{-1}a, \quad \beta \leftarrow -b^{-1}$$

$$v_{\text{i}} \leftarrow -\sum_{k=0}^{\rho_i} \text{CoeficientesPolinômio}(j, \rho_i, \gamma) y_i^{(k)} \ \forall i \in \rho$$

$$u_{\text{realimentação}} \leftarrow \alpha + \beta v$$

Para cada $i \in \{1, .., m\}$

$$\dot{y}_i^{(k)} \leftarrow y_i^{(k+1)} \ \forall k \in \{0, .., \rho_i - 2\}$$

$$\dot{y}_i^{(\rho_i - 1)} \leftarrow a_i + b_i u_i$$

Fim do Para cada

Construindo Simulação Método I

$$\dot{z} = \tau(x),\ \dot{x} = ?$$

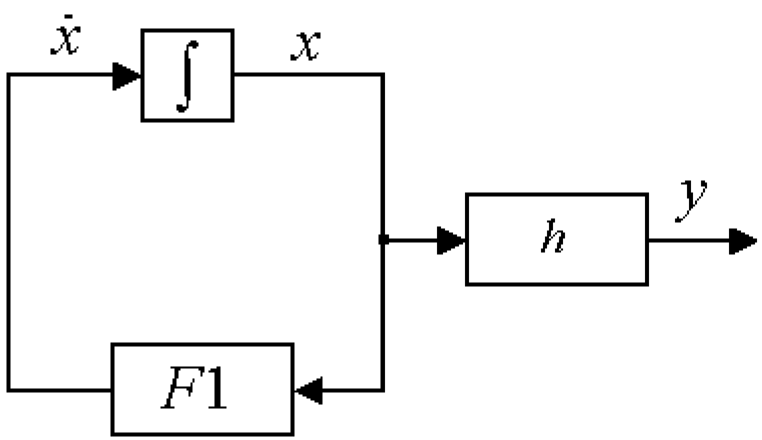
$$\boxed{z \doteq \psi(x) = \left(\hat{x}, Y^{(p-1)}\right)}$$

$$z \doteq \psi(x)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\right)^{-1} \dot{z}$$

Difeomorfismo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} R \\ \\ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R\dot{x} \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} \end{pmatrix}$$



Computação Numérica

Simulação T1

Teoria do Desacoplamento
Método II

$$\boxed{\Psi(x,u) = \left(Y^{(\rho)}, \hat{x}\right) \doteq z}$$

$$T(x,u) \doteq \frac{\partial \Psi(x,u)}{\partial (x,u)}$$

$$T(x,u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & \dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y^{\rho}}{\partial x} & \dfrac{\partial y^{\rho}}{\partial u} \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{\dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}}}_{n} \; \underbrace{\hphantom{\dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial u}}}_{m} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x}}\right\} n-\rho \\ \left.\vphantom{\dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}}\right\} \rho \\ \left.\vphantom{\dfrac{\partial y^{\rho}}{\partial x}}\right\} m \\ \vphantom{x} \end{array}$$

Estrutura Método II

$$\begin{cases} \dot{y}_1^{(0)} = -\gamma y_1^{(0)} \\ \vdots \\ \dot{y}_1^{(\rho_1)} = -\gamma y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_m^{(0)} = -\gamma y_m^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_m^{(\rho_m)} = -\gamma y_m^{(\rho_m)} \\ \dot{\hat{x}} = \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x}\left(f\left(x,u\right)\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)} \\ \dot{\hat{x}} = \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x}\left(f\left(x,u\right)\right) \end{cases}$$

Fator de Convergência

$$Y^{(\rho)}\left(t\right) = Y^{(\rho)}\left(t_0\right) e^{-\gamma\left(t-t_0\right)}$$

$$\lim_{t\to\infty} Y^{(\rho)} = 0$$

Construção Simulação Método II

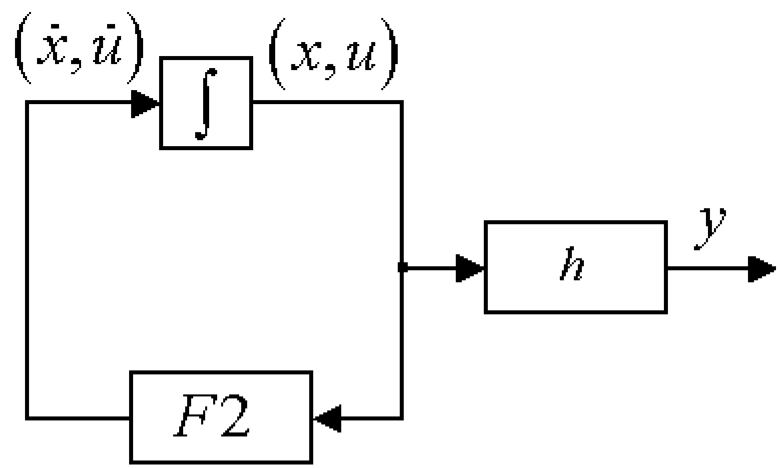
$$\text{Função } F2\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{u}\end{pmatrix}, \text{ Devolve } \begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}\\ \dot{\bar{u}}\end{pmatrix}$$

$$R \leftarrow \text{CoordenadasComplementares}\left(\left(\left.\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}\right|_{\bar{x}}\right)^{T}\right)$$

$$\bar{T} \leftarrow \left.\begin{pmatrix} R & 0 \\ \dfrac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \dfrac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} \end{pmatrix}\right|_{\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{u}\end{pmatrix}}$$

$$\bar{\tau} \leftarrow \left.\begin{pmatrix} Rf \\ -\gamma Y^{(\rho)} \end{pmatrix}\right|_{\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{u}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}\\ \dot{\bar{u}}\end{pmatrix} \leftarrow \bar{T}^{-1}\bar{\tau}$$



Simulação e Exemplo Pêndulo

Escolha Numérica das Coordenadas Complementares

- Propriedades independentes da escolha
- Decomposição QR

$$\text{Função CoordenadasComplementares}(H),\ \text{Devolve}\ (R)$$

$$(\rho, n) \leftarrow \dim(R)$$

$$(q, r) \leftarrow \text{DecomposiçãoQR}(H)$$

$$R \leftarrow \begin{pmatrix} q_{1,\rho+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n,\rho+1} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix}^T$$