



UNIVERSITAT DE VALÉNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

MECÁNICA I

---

## Apuntes Mecánica I

---

Alumno:  
Navarro Bonanad, Rubén

Profesor:  
Campanario Fallas, Francisco

**Grupo B**

Curso 2024 - 2025

# Índice

<b>A. Vectores y rotaciones</b>	<b>4</b>
A.1. Definiciones . . . . .	4
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	4
A.3. Identidades vectoriales . . . . .	5
A.4. Matrices de rotación . . . . .	6
A.5. Propiedades bajo rotaciones . . . . .	8
A.6. Reflexión espacial: pseudoscalares y pseudovectores . . . . .	9
A.7. Rotación eje-ángulo (rotación cónica) . . . . .	9
<b>1. Coordenadas curvilíneas</b>	<b>13</b>
1.1. Definiciones . . . . .	13
1.2. Elementos diferenciales . . . . .	13
1.3. Campos escalares y vectoriales . . . . .	14
1.4. Operadores diferenciales . . . . .	14
1.5. Teorema de Gauss y Stokes . . . . .	17
1.6. Coordenadas cartesianas . . . . .	19
1.7. Coordenadas cilíndricas . . . . .	19
1.8. Coordenadas esféricas . . . . .	20
<b>2. Cinemática del punto</b>	<b>22</b>
2.1. Definiciones . . . . .	22
2.2. Trayectoria y espacio recorrido . . . . .	22
2.3. Velocidad . . . . .	23
2.4. Aceleración . . . . .	24
2.5. Movimiento circular . . . . .	25
2.6. Triedro de Frenet . . . . .	26
2.7. Transformaciones de Galileo . . . . .	27
<b>3. Dinámica del punto</b>	<b>28</b>
3.1. Interacciones fundamentales . . . . .	28
3.2. Fuerzas macroscópicas . . . . .	28
3.3. Fuerzas de fricción . . . . .	29
3.4. Leyes de Newton . . . . .	29
3.5. Ecuaciones de movimiento . . . . .	31
3.6. Resolución por integración . . . . .	31
3.7. Ejemplos . . . . .	32
3.8. Trabajo y Energía . . . . .	34
3.9. Momento lineal y momento angular . . . . .	35
3.10. Fuerzas centrales . . . . .	36
3.11. Potencial unidimensional. Pequeñas oscilaciones . . . . .	37
3.12. Boletín 3 . . . . .	39
<b>4. Sistemas de partículas</b>	<b>40</b>
4.1. Sistema de N partículas . . . . .	40
4.2. Simetrías y leyes de conservación . . . . .	43
4.3. Teorema del Virial . . . . .	45
4.4. Sistema de dos cuerpos . . . . .	46
4.5. Sistema de masa variable . . . . .	49
4.6. Boletín 4 . . . . .	53

<b>5. Campos y movimiento en campos centrales</b>	<b>54</b>
5.1. Potencial gravitatorio de una distribución de masas . . . . .	54
5.2. Teorema de Gauss . . . . .	57
5.3. Desarrollos multipolares: las mareas ( <b>importante</b> ) . . . . .	60
5.4. Movimiento en un potencial central . . . . .	63
5.5. Órbitas en un potencial central . . . . .	66
5.6. Potencial de Kepler . . . . .	68
5.7. Órbitas de Kepler . . . . .	69
5.8. Leyes de Kepler . . . . .	73
5.9. Satélites terrestres . . . . .	74
5.10. Boletín 5. Parte 1 . . . . .	75
<b>6. Colisiones y dispersión</b>	<b>76</b>
6.1. Colisiones elásticas . . . . .	76
6.2. Colisiones inelásticas . . . . .	79
6.3. El problema de la dispersión . . . . .	81
6.4. Dispersión por una esfera dura . . . . .	83
6.5. Dispersión por un potencial central . . . . .	84
6.6. Fórmula de Rutherford . . . . .	85
<b>7. Sistemas no inerciales</b>	<b>86</b>
7.1. Conceptos matemáticos previos . . . . .	86
7.2. Velocidad angular instantánea . . . . .	87
7.3. Teorema de Coriolis . . . . .	89
7.4. Movimiento en la Superficie Terrestre . . . . .	91
7.5. Caída libre. Desviación hacia el Este. . . . .	92
7.6. Péndulo de Foucault . . . . .	93
7.7. Boletín 7 . . . . .	95
<b>8. Cinemática y dinámica del sólido rígido</b>	<b>96</b>
8.1. Definición y grados de libertad . . . . .	96
8.2. Rotación y velocidad angular del sólido . . . . .	96
8.3. Rotación y ángulos de Euler . . . . .	98
8.4. Velocidad angular y ángulos de Euler . . . . .	99
8.5. Energía cinética y momento angular. Tensor de inercia . . . . .	100
8.6. Estudio del Tensor de inercia. . . . .	102
8.7. Ecuaciones de Euler . . . . .	104
8.8. Soluciones estables del sólido libre . . . . .	105
8.9. Movimiento general del sólido libre . . . . .	107
8.10. Peonza simétrica libre . . . . .	108
8.11. Peonza simétrica pesada . . . . .	110
8.12. Boletín 8 . . . . .	113
<b>B. Cálculo explícito de momentos de inercia</b>	<b>114</b>
B.1. Momento de inercia de un cilindro hueco . . . . .	114
B.2. Momento de inercia de un prisma rectangular . . . . .	115
B.3. Momento de inercia de una esfera hueca y origen en el CM . . . . .	117
B.4. Ejemplos . . . . .	117

## A. Vectores y rotaciones

A.1. Definiciones . . . . .	4
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	4
A.3. Identidades vectoriales . . . . .	5
A.4. Matrices de rotación . . . . .	6
A.5. Propiedades bajo rotaciones . . . . .	8
A.6. Reflexión espacial: pseudoescalares y pseudovectores . . . . .	9
A.7. Rotación eje-ángulo (rotación cónica) . . . . .	9

### A.1. Definiciones

A.1.1 Sistema de referencia ortogonal a derechas:  $OXYZ$

A.1.2 Coordenadas cartesianas  $\{x, y, z\}$  de un punto  $P(x, y, z)$  son las proyecciones a los ejes coordenados  $OX, OY, OZ$

A.1.3 Base de vectores

$$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \equiv \{\vec{e}_i; i = 1, 2, 3\}$$

Son vectores de origen  $O$  y de longitud unidad a lo largo de los ejes coordenados

A.1.4 Vector libre:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = (v_x, v_y, v_z) = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i = v_i \vec{e}_i \quad \text{índices repetidos}$$

A.1.5 Módulo de un vector:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

A.1.6 Cosenos directores: son los cosenos de los ángulos que forma  $\vec{v}$  con los ejes

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad \vec{v} = (v \cos \alpha, v \cos \beta, v \cos \gamma)$$

Se tiene la propiedad:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

A.1.7 Operaciones básicas: Sean  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \wedge \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

### A.2. Producto escalar y vectorial

A.2.1 Se define el **producto escalar** entre dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i$$

El producto escalar es **comunitativo** y **distributivo**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \vec{a}(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \mu(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

A.2.2 Definición alternativa: el T<sup>ma</sup> del coseno dice:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Teniendo en cuenta el desarrollo

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Se llega a la conclusión de que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  con  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Como consecuencia se tiene que si el producto escalar de dos vectores es nulo entonces estos son perpendiculares entre sí.

A.2.3 **Cosenos directores:** para los vectores base se tiene

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Para un vector  $\vec{a}$  los cosenos directores serán

$$\cos \alpha_i = \vec{e}_i \cdot \frac{\vec{a}}{a}$$

A.2.4 Relación trigonométrica del ángulo  $\theta$  con los cosenos directores de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . De la definición de producto escalar, se obtiene la siguiente relación para el ángulo entre dos vectores

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3$$

A.2.5 Se define el producto vectorial entre dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \cdots$$

Utilizando el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$  puede escribirse:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

El producto vectorial es anticomutativo.

A.2.6 Para los vectores base se tiene

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

En efecto, de su definición

$$(\vec{e}_i)_p = \delta_{ip}, \quad (\vec{e}_j)_q = \delta_{jq}$$

por lo que

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)_m = \epsilon_{mpq} \delta_{ip} \delta_{jq} = \epsilon_{mij} = \epsilon_{kij} \delta_{km} = \epsilon_{ijk} (\vec{e}_k)_m = (\epsilon_{ijk} \vec{e}_k)_m$$

es decir,

$$* \vec{e}_i \times \vec{e}_j = 0, \quad i = j \quad * \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k, \quad (i \neq j \neq k \text{ cíclicos})$$

### A.3. Identidades vectoriales

A.3.1 Producto mixto

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

A.3.2 Producto vectorial triple

$$* (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad * \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

A.3.3 Producto escalar cuádruple

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

A.3.4 Para demostrar las identidades, tanto la del producto vectorial triple como la del producto escalar cuádruple, hay que hacer uso de la siguiente propiedad del tensor Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Para cada valor del subíndice  $i$ , los subíndices  $j, k$  así como los  $m, n$  han de ser diferentes a  $i$  y diferentes entre sí para que el término correspondiente en el sumatorio de  $i$  no se anule.

A.3.5 Propiedades del producto vectorial. Sea  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Entonces

1)  $\vec{c}$  es perpendicular a  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

2) El módulo de  $\vec{c}$  es el producto de los módulos de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  por el seno del ángulo entre ellos.

$$c^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta$$

3) El sentido de  $\vec{c}$  es a derechas desde  $\vec{a}$  hacia  $\vec{b}$  por el camino más corto ( $\sin \theta > 0$ ). Para comprobar lo último puede considerarse el caso particular en que  $\vec{a}$  está alineado con el eje  $OX$ , por tanto  $\vec{a} = a\hat{i}$ , y  $\vec{b}$  contenido en el plano  $(x, y)$ , es decir,  $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$ . Esta situación siempre es posible rotando adecuadamente el SR. En ese caso:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a\hat{i} \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = ab_y\hat{k}$$

Con  $a > 0$ , la componente de  $\hat{k}$  tiene el signo de  $b_y$  (orientación a derechas). De forma más general puede probarse que la proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{c} \times \vec{a}$  es positiva.

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}] \cdot \vec{b} = [(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{a}] \times \vec{b} = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta > 0$$

## A.4. Matrices de rotación

A.4.1 **Matriz de Rotación:** Sean dos SR ortogonales  $OXYZ$  y  $OX'Y'Z'$  con la misma orientación, dígase a derechas, y vectores base  $\{\vec{e}_i\}$  y  $\{\vec{e}'_i\}$

$$* \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} \quad * \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k, \quad (i, j, k \text{ cílicos}) \quad * \vec{e}'_i \times \vec{e}'_j = \vec{e}'_k, \quad (i, j, k \text{ cílicos})$$

Se define la rotación  $\mathbf{R}$  a la aplicación que transforma una base ortonormal  $\{\vec{e}_i\}$  en otra,  $\{\vec{e}'_i\}$ , conservando la orientación. Explícitamente se define

$$\vec{e}'_i = R_{ij}\vec{e}_j$$

En función de los elementos de matriz  $R_{ij}$  se define la *matriz de transformación*  $\mathbf{R}$  entre ambas bases como

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

De modo que poniendo los vectores base en columna se tiene

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_i \\ \vec{e}'_j \\ \vec{e}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

**NOTA.** Con esta convención la matriz de transformación  $\mathbf{R}$  actúa sobre los índices de los vectores base y no, como es usual en matemáticas, sobre sus componentes. Se verá que las componentes de un vector columna se transforman con  $\mathbf{R}^T$

Se tendrán las siguientes propiedades:

a) Las componentes de  $\vec{e}'_i$  en  $OXYZ$  son las filas de  $\mathbf{R}$ .

$$(\vec{e}'_i)_k = R_{ij}(\vec{e}_j)_k = R_{ij}\delta_{jk} = R_{ik}$$

Por tanto

$$\vec{e}'_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})$$

b) Los elementos de matriz  $R_{ij}$  son los cosenos directores de  $\vec{e}'_j$  respecto del sistema  $OXYZ$ .

$$\cos \alpha_{ji} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i = (\vec{e}_j)_k R_{im} (\vec{e}_m)_k = \delta_{kj} R_{im} \delta_{mk} = R_{ij}$$

A.4.2 Propiedades de las matrices de rotación: Por un lado, de la ortonormalidad de  $\{\vec{e}_i\}$  se obtiene:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = R_{ik}R_{jl}\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = R_{ik}R_{jk} = R_{ik}R_{kj}^T = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}}$$

Por otro lado, como se conserva la orientación, del producto mixto se obtiene:

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = +1 \Rightarrow \det \mathbf{R} = +1$$

A.4.3 **Rotación activa:** Sea  $\vec{a}'$  el resultado de “girar”

veca bajo una rotación  $\mathcal{R}$  (rotación activa),  $\vec{a}' = \mathcal{R}\vec{a}$ , y sean  $a'_i$  y  $a_i$  sus respectivas componentes en la base  $\{\vec{e}_i\}$ . Se define ahora el vector girado  $\vec{a}'$  como aquel las mismas componentes en la base girada  $\{\vec{e}'_i\}$  que el vector  $\vec{a}$  en la base original  $\{\vec{e}_i\}$ . Es decir,

$$\vec{a}' = a'_i \vec{e}_i = a_i \vec{e}'_i$$

Por otro lado, dado que  $\mathcal{R}$  es una aplicación lineal, se tiene

$$\vec{a}' = \mathcal{R}\vec{a} = a_i \mathcal{R}\vec{e}_i$$

Así que, comparando

$$\vec{e}'_i = \mathcal{R}\vec{e}_i$$

es decir,  $\vec{e}'_i$  es el vector girado de  $\vec{e}_i$

A.4.4 **Forma matricial de una rotación activa:** Téngase en cuenta el siguiente desarrollo

$$\vec{a}' = a'_j \vec{e}_j = \mathcal{R}\vec{a} = a_i \mathcal{R}\vec{e}_i = a_i R_{ij} \vec{e}_j$$

Por tanto

$$a'_j = a_i R_{ij} = R_{ji}^T a_i$$

Matricialmente se tiene pues, dos posibilidades para la rotación de  $\vec{a}$

1. Como vector fila

$$(a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3) = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

2. Como vector columna

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Notar, pues, que las componentes de  $\vec{a}'$ , como vector columna se transforman con la matriz transpuesta, tal y como se había adelantado.

En notación vectorial, el vector fila puede escribirse como  $\vec{a}^T$ , donde las componentes de  $\vec{a}^T$  son las mismas que las de  $\vec{a}$ , puestas en fila. Con esta notación matricial de vectores fila y columna, el producto escalar de dos vectores puede expresarse como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a}$$

donde  $\vec{a}^T$  y  $\vec{b}^T$  son vectores fila con las mismas componentes que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Para la base canónica se tiene, por ejemplo, que el vector girado de  $\vec{e}_1^T = (1, 0, 0)$  es

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix}$$

Es decir, las componentes de  $\vec{e}'_1$  son la fila correspondiente de la matriz de transformación.

**Resumen:** Transformación vectores vs componentes (columna)

$$*\vec{e}'_i = R_{ij}\vec{e}_j \quad *(\vec{e}'_i)_k = R_{ik} = R_{qk}\delta_{iq} = R_{qk}(\vec{e}_i)_q = R_{kq}^T(\vec{e}_i)_q$$

Las componentes de los vectores (columna) se transforman con  $\mathbf{R}^T$

Nótese:

$$\vec{a}' = \mathcal{R}\vec{a} \quad (\vec{e}'_i = \mathcal{R}\vec{e}_i) : \text{ donde } \mathcal{R} \text{ denota que es una aplicación}$$

$$\vec{a}' = \mathbf{R}^T \vec{a} \quad (\vec{e}'_i = \mathbf{R}^T \vec{e}_i) : \text{ donde } \mathbf{R} \text{ denota que es una matriz}$$

$$a'_i = R_{ij}^T a_j : \text{ donde } R_{ij} \text{ denota elementos de matriz}$$

$$(\vec{e}'_l)_i = R_{lj}^T (\vec{e}_l)_j, \text{ pero } \vec{e}'_i = R_{ij} \vec{e}_j$$

**A.4.5 Rotación pasiva:** se definen las componentes  $a_i^{\text{pas}}$  de un vector  $\vec{a} = a_j \vec{e}_j$  como sus componentes en la base girada (rotación pasiva). Invirtiendo la relación  $\vec{e}'_i = R_{ij} \vec{e}_j$  se tiene  $\vec{e}_i = R_{ij}^T \vec{e}'_j$  (la matriz inversa es la transpuesta). Por tanto:

$$\vec{a} = a_j^{\text{pas}} \vec{e}'_j = a_i \vec{e}_i = a_i R_{ij}^T \vec{e}'_j$$

de donde

$$a_j^{\text{pas}} = a_i R_{ij}^T = R_{ji} a_i$$

En notación matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} a_1^{\text{pas}} \\ a_2^{\text{pas}} \\ a_3^{\text{pas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

En este caso las componentes pasivas (columna) se obtienen con la misma matriz de transformación que la de los vectores base (columna). Nótese que para los vectores fila se habrá de utilizar la transpuesta.

$$(a_1^{\text{pas}} \quad a_2^{\text{pas}} \quad a_3^{\text{pas}}) = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}^T$$

## A.5. Propiedades bajo rotaciones

### A.5.1 Conservación del producto escalar

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = a'_i b'_i = R_{im}^T R_{in} a_m b_n = R_{mi} R_{in}^T a_m b_n = \delta_{mn} a_m b_n = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Puede hacerse la demostración en notación matricial:

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\vec{a}^T)(\mathbf{R}^T \vec{b}) = ((\mathbf{R}^T \vec{a})^T)(\mathbf{R}^T \vec{b}) = (\vec{a}^T \mathbf{R})(\mathbf{R}^T \vec{b}) = \vec{a}^T \mathbf{I} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Y también utilizando la aplicación lineal:

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\mathcal{R}\vec{a})(\mathcal{R}\vec{b}) = a_i b_j (\mathcal{R}\vec{e}_i)(\mathcal{R}\vec{e}_j) = a_i b_j \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = a_i b_j \delta_{ij} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

En particular, se conserva el módulo de un vector

$$(\vec{a}')^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

### A.5.2 Conservación del ángulo:

Dado dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  la cantidad escalar

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

es invariante bajo rotaciones. Es decir, las rotaciones conservan el ángulo entre dos vectores.

### A.5.3 Transformación del producto vectorial:

El producto vectorial se transforma como un vector bajo rotaciones. Es decir,, si  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , entonces  $\mathcal{R}\vec{c} = \mathcal{R}\vec{a} \times \mathcal{R}\vec{b}$ . Demostración:

$$\mathcal{R}\vec{a} \times \mathcal{R}\vec{b} = \mathcal{R}(a_i \vec{e}_i) \times \mathcal{R}(b_j \vec{e}_j) = (a_i \vec{e}'_i) \times (b_j \vec{e}'_j) = \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}'_k = (\vec{a} \times \vec{b})_k \mathcal{R}\vec{e}_k$$

$$\mathcal{R}((\vec{a} \times \vec{b})_k \mathcal{R}\vec{e}_k) = \mathcal{R}(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ Q.E.D.}$$

## A.6. Reflexión espacial: pseudoescalares y pseudovectores

A.6.1 Se define la **reflexión espacial  $\mathbf{P}$**  a la operación que cambia el sentido de los ejes del sistema de referencia  $OXYZ \rightarrow OX_P Y_P Z_P$ . Es decir, dada la base

$$\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\} = \{\vec{e}_i^P ; i = 1, 2, 3\}$$

en el sistema reflejado, se tiene que cumplir

$$\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\} = \{-\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{k}\}$$

La operación  $\mathbf{P}$  cambia además la orientación del SR:  $\hat{i}_P \times \hat{j}_P = -\hat{k}_P$

A.6.2 La matriz cambio de base es pues

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con  $P_{ij} = P_{ji} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Además,  $\det \mathbf{P} = -1$ , por lo que no es una rotación

A.6.3 Se llama **vector  $\vec{a}$** , propiamente dicho, al que cambia de signo sus componentes bajo  $\mathbf{P}$

$$\vec{a}^P = (\mathbf{P} \vec{a}) = -\vec{a}$$

A.6.4 Se llama **pseudovector** si el vector no cambia sus componentes bajo  $\mathbf{P}$ . El producto vectorial de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es un pseudovector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}^P \times \vec{b}^P$$

A.6.5 Se llamará **escalar** al que no cambia su valor bajo rotaciones y tampoco bajo reflexión espacial.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^P \cdot \vec{b}^P$$

A.6.6 Se llamará **pseudoescalar** si no cambia su valor bajo rotaciones pero cambia de signo bajo reflexión espacial

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a}^P \times \vec{b}^P) \cdot \vec{c}^P$$

## A.7. Rotación eje-ángulo (rotación cónica)

### A.7.1. Descripción

Objetivo 1:  $\vec{a}' = f(\phi, \vec{u}, \vec{a})$

Objetivo 2:  $\vec{a}' = \mathbf{R}_{\hat{u}, \phi} \vec{a}$

Sea un cono con vértice  $O$ , altura  $h = |\vec{h}|$ , radio de base  $r = |\vec{r}|$  y eje definido por el vector unitario  $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , con origen  $O$  y sentido hacia la base del cono. Sea el vector  $\vec{a}$  una arista del cono con origen  $O$  y afijo a la base del cono, tal que:

$$\vec{a} = \vec{h} + \vec{r}$$

donde  $\vec{h}$  es el vector con origen  $O$  y afijo en el centro de la base del cono y  $\vec{r}$  es el radio vector que va del centro de la base hasta  $\vec{a}$ .

Una rotación  $\mathbf{R}_{\hat{u}, \phi}$  de ángulo  $\phi$  alrededor de  $\hat{u}$  transforma  $\vec{a}$  en  $\vec{a}'$  tal que

$$\vec{a}' = \vec{h} + \vec{r}'$$

siendo  $\vec{r}'$  el radio que forma un ángulo  $\phi$  con  $\vec{r}$ .

### A.7.2. Relación vectorial de la rotación cónica

El vector  $\vec{h}$  puede escribirse en función de  $\hat{u}$  y  $\vec{a}$  como

$$\vec{h} = (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u}$$

con lo que

$$\vec{r} = \vec{a} - (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u}$$

Considérese la base de vectores ortonormales  $\vec{r}/r$  y  $\hat{u} \times \vec{r}/r$ , ambos en la base del cono. Se expresará  $\vec{r}'$  en función de esta base

$$\vec{r}' = (r' \cos \phi) \frac{\vec{r}}{r} + (r' \sin \phi) \frac{\hat{u} \times \vec{r}}{r}$$

y como  $r = r'$ , se obtiene

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \phi + \hat{u} \times \vec{r} \sin \phi$$

por tanto

$$\vec{a}' = \vec{h} + \vec{r}' = (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u} + \vec{r} \cos \phi + \hat{u} \times \vec{r} \sin \phi = (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u} + [\vec{a} - (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u}] \cos \phi + \hat{u} \times [veca - (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u}] \sin \phi$$

Finalmente, como  $\hat{u} \times \hat{u} = 0$ , se obtiene

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} \cos \phi + (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u}(1 - \cos \phi) + \hat{u} \times \vec{a} \sin \phi}$$

### A.7.3. Matriz antisimétrica asociada al producto vectorial

Escríbase explícitamente el producto vectorial  $\hat{u} \times \vec{a}$

$$\hat{u} \times \vec{a} = (u_2 a_3 - u_3 a_2) \hat{i} + (u_3 a_1 - u_1 a_3) \hat{j} + (u_1 a_2 - u_2 a_1) \hat{k}$$

Este resultado puede expresarse matricialmente como sigue

$$\begin{pmatrix} (\hat{u} \times \vec{a})_1 \\ (\hat{u} \times \vec{a})_2 \\ (\hat{u} \times \vec{a})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Se define la siguiente matriz antisimétrica asociada al vector unitario  $\hat{u}$

$$\mathbf{A}_{\hat{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que con  $\vec{a}$  como vector columna

$$\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a} = \hat{u} \times \vec{a}$$

Resulta de interés calcular también

$$\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a} = \mathbf{A}_{\hat{u}}(\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a}) = \hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{a}) = (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u} - \vec{a}$$

de donde

$$\vec{h} = (\hat{u} \cdot \vec{a})\hat{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2) \vec{a}$$

#### A.7.4. Parametrización matricial de la rotación

A.7.1 **Parametrización matricial de la rotación:** Se desea obtener una matriz  $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}$  tal que

$$\vec{a}' = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \vec{a}$$

con  $\vec{a}$  un vector columna.

Considerando la parametrización vectorial de la rotación y las expresiones anteriores del producto vectorial y escalar se obtiene la forma matricial

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \phi + (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} (1 - \cos \phi) + \hat{u} \times \vec{a} \sin \phi = \mathbf{I} \vec{a} \cos \phi + (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2) \vec{a} (1 - \cos \phi) + \mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a} \sin \phi$$

**Fórmula de rotación de Rodrigues:**

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 (1 - \cos \phi)$$

donde

$$\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 = \begin{pmatrix} -1 + u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & -1 + u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & -1 + u_3^2 \end{pmatrix}$$

En función de las componentes de  $\vec{a}$ , para una rotación activa,

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}_{OXYZ} = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{OXYZ}$$

La matriz de transformación entre las bases inicial y girada será en este caso  $\vec{e}_i' = R_{ij}^T \vec{e}_j$

A.7.2 El eje de rotación se obtendrá partiendo de la dirección determinada por  $\hat{u}$  invariante bajo la rotación:

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \hat{u} = \hat{u} \implies (\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} - \mathbf{I}) \hat{u} = 0$$

Es necesario que  $\det(\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} - \mathbf{I}) = 0$  para que el sistema sea compatible indeterminado con solución trivial. De aquí se determina  $\hat{u}$  salvo una constante y un signo  $\pm$ . Nótese que una rotación  $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}$  y su inversa  $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}^T$  tienen el mismo eje de rotación

A.7.3 Determinación del ángulo girado por una rotación. Conociendo el eje de rotación, es directo obtener el ángulo a partir de la expresión matricial

$$\text{Tr } \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = 1 + 2 \cos \phi \quad (\text{Tr } \mathbf{I} = 3, \text{ Tr } \mathbf{A}_{\hat{u}} = 0, \text{ Tr } \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 = 0)$$

Se tomará  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Para ello hay que determinar el sentido (signo) del eje  $\hat{u}$ . Esto se consigue eligiendo un vector arbitrario  $\vec{r} \perp \hat{u}$  y exigiendo que  $(\mathbf{R}\vec{r}) \cdot (\hat{u} \times \vec{r}) \geq 0$

A.7.4 Rotación alrededor de ejes coordenados:

Fórmula de Rodrigues:  $\mathbf{I} + \mathbf{R}_{\hat{u}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 (1 - \cos \phi)$

$$\mathbf{A}_{\hat{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 = \begin{pmatrix} -1 + u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & -1 + u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & -1 + u_3^2 \end{pmatrix}$$

Eje  $OX$   $\hat{u} = \hat{i} = (u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0)$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{R}_{i,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Análogamente, para los ejes  $OY$  y  $OZ$

$$\mathbf{R}_{\hat{j},\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{\hat{k},\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ha tomado respectivamente  $\hat{u} = \hat{j} = (u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0)$  y  $\hat{u} = \hat{k} = (u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1)$  y sustituido en la Fórmula de Rodrigues

#### A.7.5. Forma exponencial de la rotación

- Calcúlense las potencias sucesivas de  $\mathbf{A}_{\hat{u}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\hat{u}}^3 &= (\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a}) = \mathbf{A}_{\hat{u}}((\hat{u} \cdot \vec{a}) - \vec{a}) = -\hat{u} \times \vec{a} = -\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a} \\ \mathbf{A}_{\hat{u}}^4 \vec{a} &= -\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a} \\ \mathbf{A}_{\hat{u}}^5 \vec{a} &= \mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a}, \dots \end{aligned}$$

- Se utilizan ahora los desarrollos de Taylor de  $\sin \phi$  y  $\cos \phi$  en la expresión de la rotación

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)} \phi^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\hat{u}} \phi)^n}{n!}$$

**Fórmula exponencial de rotación:**

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}} \phi)$$

- Nótese que con la fórmula exponencial, es fácil demostrar que:

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi+\phi'} = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \mathbf{R}_{\hat{u},\phi'}$$

Demostración:

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi+\phi'} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}(\phi + \phi')) = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}\phi) \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}\phi') = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \mathbf{R}_{\hat{u},\phi'}$$

# 1. Coordenadas curvilíneas

1.1. Definiciones . . . . .	13
1.2. Elementos diferenciales . . . . .	13
1.3. Campos escalares y vectoriales . . . . .	14
1.4. Operadores diferenciales . . . . .	14
1.5. Teorema de Gauss y Stokes . . . . .	17
1.6. Coordenadas cartesianas . . . . .	19
1.7. Coordenadas cilíndricas . . . . .	19
1.8. Coordenadas esféricas . . . . .	20

## 1.1. Definiciones

1.1.1 **Coordenadas curvilíneas**  $\alpha, \beta, \gamma$ : Conjunto de parámetros en correspondencia biunívoca con las coordenadas cartesianas  $x, y, z$ :

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

1.1.2 **Punto**:  $P(x, y, z) \equiv P(\alpha, \beta, \gamma)$

1.1.3 **Vector de posición**:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

1.1.4 **Líneas coordenadas**  $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$  en  $P$ : Son las curvas que pasan por  $P$  y se obtienen variando  $\alpha, \beta, \gamma$ , respectivamente, en la correspondencia biunívoca.

1.1.5 **Superficies coordenadas**  $a_{\beta\gamma}, s_{\alpha\gamma}, s_{\alpha\beta}$ : Son las superficies que contienen a  $P$  y se obtienen con  $\alpha, \beta, \gamma$  ctes., respectivamente, en la correspondencia biunívoca

1.1.6 Referencia local en  $P$ : vectores unitarios tangentes a líneas coordenadas:

$$\hat{u}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{\partial \alpha} \quad h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2}$$

$\hat{u}_\beta$  y  $\hat{u}_\gamma$  se obtienen de modo análogo.

1.1.7 **Referencia dual en  $P$** : vectores unitarios ortogonales a planos coordinados

$$\tilde{e}^\gamma = \frac{1}{|\hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta|} \hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta$$

1.1.8 **Coordenadas curvilíneas ortogonales**:

$$\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta = \hat{u}_\beta \cdot \hat{u}_\gamma = \hat{u}_\gamma \cdot \hat{u}_\alpha = 0$$

**Corolario**: Si las coordenadas curvilíneas son ortogonales  $\Rightarrow$  referencia dual = referencia local

## 1.2. Elementos diferenciales

1.2.1 **Diferencial de la posición**:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \hat{k} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} d\gamma$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta  $\hat{u}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ :

$$d\vec{r} = (h_\alpha d\alpha)\hat{u}_\alpha + (h_\beta d\beta)\hat{u}_\beta + (h_\gamma d\gamma)\hat{u}_\gamma$$

### 1.2.2 Elementos de línea:

$$d\vec{l}_\alpha = (h_\alpha d\alpha) \hat{u}_\alpha \quad |d\vec{l}_\alpha| = h_\alpha d\alpha$$

Se definen de modo análogo para  $d\vec{l}_\beta$  y  $d\vec{l}_\gamma$ .

### 1.2.3 Elementos de superficie:

$$d\vec{s}_{\alpha\beta} = d\vec{l}_\alpha \times d\vec{l}_\beta = (h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta) \hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta \quad |d\vec{s}_{\alpha\beta}| = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta \sqrt{1 - (\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta)^2} = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta$$

Esto se debe a que son coords. ortogonales y, por tanto:

$$1 = |\hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta| = \sqrt{(\hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta) \cdot (\hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta)} = \sqrt{|\hat{u}_\alpha|^2 |\hat{u}_\beta|^2 - (\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta)^2} = \sqrt{1 - (\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta)^2}$$

Se definen de modo análogo para  $d\vec{l}_\beta$  y  $d\vec{l}_\gamma$ .

### 1.2.4 Elemento de volumen:

$$dv = d\vec{l}_\alpha \cdot (d\vec{l}_\beta \times d\vec{l}_\gamma) = h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma \hat{u}_\alpha \cdot (\hat{u}_\beta \times \hat{u}_\gamma) = h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma \quad (\text{c. ortogonales})$$

## 1.3. Campos escalares y vectoriales

### 1.3.1 Campo escalar $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ :

es una función de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

1.3.2 Superficie de nivel: Son superficies donde el campo escalar es cte.

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{cte.}$$

### 1.3.3 Campo vectorial:

$$\vec{A}(\alpha, \beta, \gamma) = A_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) \hat{u}_\alpha + A_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \hat{u}_\beta + A_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) \hat{u}_\gamma$$

es una función de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Las componentes  $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$  son campos escalares.

### 1.3.4 Flujo $\mathcal{F}$ de un campo vectorial $\vec{A}$ a través de una superficie $S$ :

cantidad de campo que pasa a través de la superficie

$$\mathcal{F} = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Si el campo es perpendicular al vector superficie del plano,  $\vec{a} \perp d\vec{s} \Rightarrow$  flujo nulo.

### 1.3.5 Circulación $\mathcal{C}$ de un campo vectorial $\vec{A}$ a lo largo de un camino $\Gamma$ :

cantidad neta de campo que va en la dirección del camino:

$$\mathcal{C} = \int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$  es lo mismo que  $d\vec{r}$ . Si el campo es perpendicular al camino,  $\vec{A} \perp d\vec{l}$ , entonces la circulación es nula.

## 1.4. Operadores diferenciales

### 1.4.1 Gradiente de un campo escalar $\vec{\text{grad}}\Phi$ :

Sea  $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$  un campo escalar. El gradiente de  $\Phi$  es un campo vectorial, tal que:

$$d\Phi = \vec{\text{grad}}\Phi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r}$$

Por un lado se tiene

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} d\gamma$$

Por otro lado

$$d\vec{r} = (h_\alpha d\alpha)\hat{u}_\alpha + (h_\beta d\beta)\hat{u}_\beta + (h_\gamma d\gamma)\hat{u}_\gamma$$

Comparando se llega a la expresión se llega a la expresión en coordenadas ortogonales

$$\vec{\nabla}\Phi = (\vec{\nabla}\Phi)_i \hat{u}_i = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \hat{u}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \hat{u}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \hat{u}_\gamma$$

Demostración:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_l} d\alpha_l, \quad \vec{\nabla}\Phi = (\vec{\nabla}\Phi)_{\alpha_m} \hat{u}_{\alpha_m}, \quad d\vec{r} = (h_{\alpha_l} d\alpha_l) \hat{u}_{\alpha_l}, \quad \alpha_m, \alpha_l = \alpha, \beta, \gamma$$

de la definición de gradiente y por ser las coord. ortogonales ( $\hat{u}_{\alpha_l} \cdot \hat{u}_{\alpha_m} = \delta_{lm}$ )

$$d\phi = \vec{\nabla}\Phi d\vec{r} = (\vec{\nabla}\Phi)_{\alpha_m} h_{\alpha_l} d\alpha_l (\hat{u}_{\alpha_m} \cdot \hat{u}_{\alpha_l}) = (\vec{\nabla}\Phi)_{\alpha_l} h_{\alpha_l} d\alpha_l$$

Comparando términos proporcionales a  $d\alpha_l$  a derecha e izquierda:

$$(\vec{\nabla}\Phi)_{\alpha_m} h_{\alpha_m} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_m} \implies (\vec{\nabla}\Phi)_{\alpha_m} = \frac{1}{h_{\alpha_m}} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_m}$$

1) Propiedad:  $\vec{\nabla}\Phi \perp \Phi = \text{cte.}$  (superficie de nivel).

Nótese que  $\Phi = \text{cte.} \Rightarrow d\Phi = 0$ , por lo que de  $d\Phi = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r}$  se concluye que  $\vec{\nabla}\Phi \perp d\vec{r}$

2) Propiedad:  $\vec{\nabla}\Phi$  da la dirección de máximo cambio del campo escalar

$$\frac{d\Phi}{dr} = \vec{\nabla}\Phi \frac{d\vec{r}}{dr} = |\vec{\nabla}\Phi| |\vec{n}| \cdot \cos \theta \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{\nabla}\Phi \rightarrow \left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{\max}$$

**1.4.2 Divergencia de un campo vectorial,  $\text{div}\vec{A}$ :** Sea  $\vec{A} = A_\alpha \hat{u}_\alpha + A_\beta \hat{u}_\beta + A_\gamma \hat{u}_\gamma$ . La divergencia de  $\vec{A}$  en un punto  $P$  es un campo escalar que representa el flujo por unidad de volumen a través de las caras  $\partial c$ , del volumen elemental  $dv$  en un punto.

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{dv} = \int_{\partial c} \vec{A} \cdot d\vec{s} \equiv \frac{1}{dv} \sum_{\text{caras}} \vec{A}_c \cdot d\vec{s}_c$$

■ Expresión en coordenadas ortogonales:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma} [d_\alpha (A_\alpha h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma) + d_\beta (A_\beta h_\alpha h_\gamma d\alpha d\beta) + d_\gamma (A_\gamma h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta)]$$

donde  $d_\alpha B(\alpha) = \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha = B(\alpha + d\alpha) - B(\alpha)$ , con lo que se llega:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\alpha h_\beta h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\beta h_\alpha h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (A_\gamma h_\alpha h_\beta) \right]$$

**Propiedad:**  $\text{div}\vec{A} = 0 \Rightarrow$  No hay fuentes ni sumideros en el punto considerado (Campo solenoide).

**1.4.3 Laplaciano de un campo escalar:**  $\Delta\Phi = \text{div}(\vec{\nabla}\Phi)$ . Explícitamente se tiene:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) \right]$$

1.4.4 **Rotacional de un campo vectorial:**  $\text{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Sea  $\vec{A} = A_\alpha \hat{u}_\alpha + A_\beta \hat{u}_\beta + A_\gamma \hat{u}_\gamma$ . El rotacional de  $\vec{A}$  en un punto es un campo vectorial,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ , tal que cada componente,  $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i$ , representa la circulación a lo largo de los lados  $\partial l$  de la superficie elemental  $ds_{\beta\gamma}$  en  $P$ , según la dirección  $\alpha$ , por unidad de superficie, es decir:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\alpha = \frac{1}{ds_{\beta\gamma}} \int_{\partial l} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{ds_{\beta\gamma}} \sum_{\text{lados } \beta, \gamma} \vec{A}_l \cdot d\vec{l}$$

para las otras componentes es análogo

- Expresión en coordenadas ortogonales. Circulando a derechas con respecto a  $\hat{u}_\alpha$  se tiene:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\alpha = \frac{1}{h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma} [d_\beta (A_\gamma h_\gamma d\gamma) - d_\gamma (A_\beta h_\beta d\beta)] = \frac{1}{h_\beta h_\gamma} \left[ \frac{\partial (A_\gamma h_\gamma)}{\partial \beta} - \frac{\partial (A_\beta h_\beta)}{\partial \gamma} \right]$$

- De modo compacto para las tres componentes se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \hat{u}_\alpha & h_\beta \hat{u}_\beta & h_\gamma \hat{u}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha A_\alpha & h_\beta A_\beta & h_\gamma A_\gamma \end{vmatrix} = \eta_{ijk} \partial_j (h_k A_k) h_i \hat{u}_i, \quad i, j, k = \alpha, \beta, \gamma$$

donde  $\eta_{ijk} \equiv \epsilon_{ijk}/(h_\alpha h_\beta h_\gamma)$ , y  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $x_j = \alpha, \beta, \gamma$

- **Propiedad:**  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow$  Circulación nula alrededor del punto considerado (Campo irrotacional).

1.4.5 Demostración de  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \hat{u}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \hat{u}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \hat{u}_\gamma \right) = \begin{vmatrix} h_\alpha \hat{u}_\alpha & h_\beta \hat{u}_\beta & h_\gamma \hat{u}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} & h_\beta \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} & h_\gamma \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} h_\alpha \hat{u}_\alpha & h_\beta \hat{u}_\beta & h_\gamma \hat{u}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} & \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = h_\alpha \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial \gamma} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \beta} \right) \hat{u}_\alpha + h_\beta \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \alpha} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \hat{u}_\beta + h_\gamma \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial \alpha} \right) \hat{u}_\gamma$$

Debido a la igualdad de derivadas cruzadas (para funciones bien comportadas), se tiene que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{0}$

También puede demostrarse trabajando las componentes:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \hat{u}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \hat{u}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \hat{u}_\gamma \right) = \frac{\epsilon_{ijk}}{h_i h_j h_k} \partial_j (h_k A_k) h_i \hat{u}_i = \frac{\epsilon_{ijk}}{h_j h_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial j \partial k} \hat{u}_i = \frac{\epsilon_{ijk}}{h_j h_k} \partial_j \partial_k \Phi \hat{u}_i$$

Llámese al resultado ahora  $B$  y téngase en cuenta que  $\epsilon_{ijk}$  es un tensor antisimétrico y  $\partial_j \partial_k$  es un tensor simétrico

$$B = \frac{\epsilon}{h_j h_k} \partial_j \partial_k \Phi \hat{u}_i \xrightarrow[\text{índices } j \text{ y } k]{\text{permítense los}} B = -\frac{\epsilon_{ikj}}{h_k h_j} \partial_k \partial_j \Phi \hat{u}_i \xrightarrow[\text{mudos } j \longleftrightarrow k]{\text{por ser los índices}} B = -\frac{\epsilon_{ijk}}{h_j h_k} \partial_j \partial_k \Phi \hat{u}_i = -B$$

El único vector que cumple esta condición,  $B = -B$  es el vector nulo,  $\vec{0}$ .

Esta demostración puede hacerse incluso más compacta manteniendo  $\eta_{ijk}$  sin expandir, ya que también es un tensor antisimétrico.

#### 1.4.6 Demostración de $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \begin{vmatrix} h_\alpha \hat{u}_\alpha & h_\beta \hat{u}_\beta & h_\gamma \hat{u}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha A_\alpha & h_\beta A_\beta & h_\gamma A_\gamma \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left\{ h_\alpha \left[ \frac{\partial(h_\gamma A_\gamma)}{\partial \beta} - \frac{\partial(h_\beta A_\beta)}{\partial \gamma} \right] \hat{u}_\alpha + h_\beta \left[ \frac{\partial(h_\alpha A_\alpha)}{\partial \gamma} - \frac{\partial(h_\gamma A_\gamma)}{\partial \alpha} \right] \hat{u}_\beta + h_\gamma \left[ \frac{\partial(h_\beta A_\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(h_\alpha A_\alpha)}{\partial \beta} \right] \hat{u}_\gamma \right\}$$

También puede demostrarse mediante componentes

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\eta_{ijk} \partial_j (h_k A_k) h_i \hat{u}_i) = (\partial_l \hat{u}_l) \cdot (\eta_{ijk} \partial_j (h_k A_k) h_i) \hat{u}_i$$

Donde  $\hat{u}_l \cdot \hat{u}_l = \delta_{il}$ . Cabe tener en cuenta que  $\eta_{ijk}$  es un tensor antisimétrico y  $\partial_l \partial_j$  es un tensor simétrico:

$$\eta_{ljk} \partial_l \partial_j (h_k A_k) h_i \xrightarrow[\text{índices } l \text{ y } k]{\text{permítense los}} -\eta_{jlk} \partial_j \partial_l (h_k A_k) h_i \xrightarrow[\text{mudos } l \leftrightarrow k]{\text{por ser índices}} B = -\epsilon_{ljk} \partial_l \partial_j (h_k A_k) h_i = -B \Rightarrow B = 0$$

### 1.5. Teorema de Gauss y Stokes

#### 1.5.1. Teorema de la divergencia (Gauss)

1.5.1 **T<sup>ma</sup> de la divergencia (Gauss):** Sea  $S$  una superficie cerrada que encierra  $V$ . Entonces

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Demostración: Sea  $\{dv_n\}$  una partición de  $V$  formada por volúmenes elementales  $dv_n$ . Teniendo en cuenta que  $\vec{A} \cdot d\vec{s}$  se va cancelando en cara contiguas de los volúmenes elementales, de modo que se tiene:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dv = \sum_n (\operatorname{div} \vec{A})_n dv_n = \sum_n \int_{\partial c_n} \frac{\vec{A} \cdot d\vec{s}}{dv_n} = \sum_{\partial c_{\text{ext}}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_{\text{ext}} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

donde  $d\vec{s}_{\text{ext}}$  son los vectores superficie de las caras eternas  $\partial c_{\text{ext}}$  del conjunto de los volúmenes elementales  $dv_n$  de la partición de  $V$ .

#### 1.5.2. T<sup>ma</sup> de Stokes

1.5.2 **T<sup>ma</sup> de Stokes:** Sea  $\Gamma$  un circuito frontera de la superficie  $S$ .

$$\int_S \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Demostración: Sea  $\{ds_n\}$  una partición de  $S$ :

$$\int_S \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \sum_n (\vec{\operatorname{rot}} \vec{A})_n ds_n = \sum_n \int_{\partial l_n} \frac{\vec{A} \cdot d\vec{l}}{ds_n} ds_n = \sum_{\partial l_{\text{ext}}} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\text{ext}} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

donde  $d\vec{l}_{\text{ext}}$  son los vectores de los lados externos  $\partial l_{\text{ext}}$  del conjunto de las superficies elementales  $ds_n$  de la partición de  $S$

1.5.3 **Independencia de camino:** El T<sup>ma</sup> de Stokes puede enunciarse también como sigue: si  $\vec{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0}$ , entonces la circulación de  $\vec{A}$  a lo largo de una curva  $\Gamma_{PQ}$ , que une los puntos  $P$  y  $Q$  es independiente del camino, es decir, si  $\Gamma_{PQ}$  y  $\Gamma'_{PQ}$  son dos caminos distintos que van de  $P$  a  $Q$ , entonces

$$\int_{\Gamma_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Demostración: En efecto, sea  $S$  una superficie, cuyo borde es el camino cerrado  $\Gamma_{PQ} - \Gamma'_{PQ}$ , por el T<sup>ma</sup> de Stokes se tiene:

$$\int_{\Gamma_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_{PQ} - \Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\text{rot}}\vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

1.5.4 La independencia de camino es equivalente a la existencia de un campo escalar  $\Phi$  tal que  $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \Phi$ . En efecto, a causa de la independencia de camino, puede definirse el campo escalar

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \int^{P(\alpha, \beta, \gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Este campo  $\Phi$  verifica pues, que

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Por tanto, de la definición de gradiente se sigue el resultado. La implicación inversa es también correcta. Si  $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \Phi$ , entonces

$$\int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_P^Q d\Phi = \Phi_Q - \Phi_P$$

es decir, la circulación sólo depende de los puntos inicial y final, pero no del camino que los une.

Además, la independencia de camino lleva al hecho que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \Phi) = \vec{0}$ . Se tiene así la equivalencia entre las tres propiedades:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0} \quad \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \Phi \quad \text{e} \quad \text{Independencia de camino}$$

1.5.5 Un modo de hallar la función  $\Phi(x, y, z)$  cuando hay dependencia de camino para  $\vec{A}$  es elegir un camino poligonal paralelo a los ejes coordenados desde el origen  $O$  a un punto arbitrario  $P(x, y, z)$ . Explícitamente:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^x A_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y A_y(x, t, 0) dt + \int_0^z A_z(x, y, t) dt$$

A comparar con la expresión general de la circulación:

$$\Phi(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{P(x,y,z)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0,0)}^{(P(x,y,z))} A_x(x', y', z') dx' + A_y(x', y', z') dy' + A_z(x', y', z') dz'$$

con  $\Phi(0, 0, 0) = 0$ , suponiendo origen de potencial.

Si se considera como camino el segmento  $\overrightarrow{OP}$  que une los ptos., puede escribirse  $x'_i = O_i + \overrightarrow{OP}_i t$  con  $t \in (0, 1)$  y  $x_i \in (x, y, z)$ . La circulación se calcula:

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^1 dt \left( A_x(x'(t), y'(t), z'(t)) \frac{dx'}{dt} + A_y(x'(t), y'(t), z'(t)) \frac{dy'}{dt} + A_z(x'(t), y'(t), z'(t)) \frac{dz'}{dt} \right)$$

Si el campo  $\vec{A}$  no es conservativo los dos caminos darán valores distintos.

## 1.6. Coordenadas cartesianas

### 1.6.1 Definición:

$$x = x \quad y = y \quad z = z$$

### 1.6.2 Referencia local:

$$\hat{u}_x = (1, 0, 0) = \hat{i} \quad \hat{u}_y = (0, 1, 0) = \hat{j} \quad \hat{u}_z = (0, 0, 1) = \hat{k}$$

### 1.6.3 Elementos de línea:

$$dl_x = dx, \quad dl_y = dy, \quad dl_z = dz \Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

### 1.6.4 Elementos de superficie:

$$ds_{yz} = dydz, \quad ds_{xz} = dxdz, \quad ds_{xy} = dxdy \Rightarrow d\vec{s} = dydz\hat{i} + dxdz\hat{j} + dxdy\hat{k}$$

### 1.6.5 Elemento de volumen:

$$dv = dxdydz$$

### 1.6.6 Gradiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{k}$$

### 1.6.7 Divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### 1.6.8 Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

### Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \Phi) = \vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

## 1.7. Coordenadas cilíndricas

### 1.7.1 Definición:

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad z = z \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

### 1.7.2 Referencia local:

$$\hat{u}_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad \hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad \hat{u}_z = (0, 0, 1) \quad h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1$$

### 1.7.3 Matriz cambio de base:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

### 1.7.4 Vector posición $\vec{r}$ :

Teniendo en cuenta que la rotación pasiva se transforma como el cambio de base, se tiene:

$$\begin{pmatrix} r_\rho \\ r_\phi \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \cos \phi + y \sin \phi)\hat{u}_\rho + (-x \sin \phi + y \cos \phi)\hat{u}_\phi + (z)\hat{u}_z = \rho\hat{u}_\rho + z\hat{u}_z$$

1.7.5 Elementos de línea:

$$d\vec{r} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\phi \hat{u}_\phi + dz \hat{u}_z$$

1.7.6 Elementos de superficie:

$$d\vec{s} = \rho dz d\phi \hat{u}_\rho + d\rho dz \hat{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \hat{u}_z$$

1.7.7 Elemento de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

1.7.8 Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{u}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{u}_z$$

1.7.9 Divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.7.10 Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_\rho & \hat{u}_\phi & \hat{u}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{u}_z$$

1.7.11 Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

## 1.8. Coordenadas esféricas

1.8.1 Definición:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$$

1.8.2 Referencia local:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) & \hat{u}_\theta &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta, -\sin \phi) & \hat{u}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \\ h_r &= 1 & h_\theta &= r & h_\phi &= r \sin \theta \end{aligned}$$

1.8.3 Matriz cambio de base:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

1.8.4 Vector posición  $\vec{r}$ : de la definición de coords. esf.

$$\vec{r} = r \hat{u}_r$$

1.8.5 Elementos de línea:

$$d\vec{r} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{u}_\phi$$

1.8.6 Elementos de superficie:

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{u}_r + r \sin \theta dr d\theta \hat{u}_\theta + r dr d\phi \hat{u}_\phi$$

1.8.7 Elemento de volumen:

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

1.8.8 Ángulo sólido:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

El ángulo total de una superficie esférica será

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi$$

Los ángulos esféricicos se miden en estereoradianes.

1.8.9 Gradiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{u}_\phi$$

1.8.10 Divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

1.8.11 Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r \hat{u}_\theta & r \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \partial / \partial r & \partial / \partial \theta & \partial / \partial \phi \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

Desarrollando

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{u}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(A_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\phi$$

1.8.12 Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

## 2. Cinemática del punto

2.1. Definiciones . . . . .	22
2.2. Trayectoria y espacio recorrido . . . . .	22
2.3. Velocidad . . . . .	23
2.4. Aceleración . . . . .	24
2.5. Movimiento circular . . . . .	25
2.6. Triedro de Frenet . . . . .	26
2.7. Transformaciones de Galileo . . . . .	27

### 2.1. Definiciones

2.1.1 **Unidad de espacio(metro)**:  $1\text{ m} \equiv$  distancia que viaja la luz en  $1/299\,792\,458$  segundos.

2.1.2 **Unidad de tiempo (segundo)**:  $1\text{ s} \equiv$  periodos de transición hiperfina del estado fund. del Cesio 133.

2.1.3 **Sistema de referencia  $S(O; X, Y, Z)$** : Cada punto  $P$  del espacio queda caracterizado por tres coordenadas  $x, y, z$  en un sistema de ejes ortogonales  $OX, OY, OZ$  con origen  $O$

2.1.4 **Vector posición**: Sea  $P(x, y, z)$ , entonces el vector posición se define como

$$\vec{r}_p = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

### 2.2. Trayectoria y espacio recorrido

2.2.1 **Trayectoria**: Es una función  $\vec{r}(t)$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$  que da la posición en el transcurso del tiempo

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

2.2.2 **Elemento de trayectoria**: Es la distancia entre dos puntos próximos,  $\vec{r}$  y  $d\vec{r}$ , de una trayectoria:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

2.2.3 El **espacio recorrido** entre dos puntos de la trayectoria es la suma de distancias elementales recorridas entre los puntos intermedios

$$s = \int_{\Gamma} ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

donde  $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ ;  $\alpha = x, y, z$

2.2.4 **Vector  $\vec{\tau}$  tangente a la trayectoria**: es el vector unitario

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

2.2.5 **Radio de curvatura  $R$** : Es la relación entre el “arco”  $ds$  y el ángulo  $d\varphi$  entre los “radios” perpendiculares a la trayectoria en las posiciones  $\vec{r}$  y  $\vec{r} + d\vec{r}$ . El ángulo entre los radios es igual que el ángulo entre las tangentes, por tanto

$$\sin d\varphi \underset{\text{S. Taylor}}{\approx} d\varphi = \frac{|d\vec{\tau}|}{\cancel{|d\vec{r}|}} = |d\vec{\tau}|$$

El radio de curvatura es pues

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{|d\vec{\tau}|}$$

que también puede escribirse como:

$$R = \frac{1}{|d^2\vec{r}/ds^2|}$$

**2.2.6 Vector normal a la trayectoria  $\vec{n}$ :** Para construirlo se nota que  $\vec{\tau}$  es un vector módulo constante y, por tanto, se cumple que  $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ :

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1 \xrightarrow{\text{derivando}} \vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} + d\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 2\vec{\tau} \cdot d\vec{\tau} = 0$$

Con esto puede construirse el vector unitario

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{|d\vec{\tau}|} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{|d\vec{\tau}|} = R \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

pudiéndose escribir como

$$\vec{n} = R \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

Que será perpendicular a  $\vec{\tau}$  por construcción

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$$

**2.2.7 Centro de curvatura:** Es el punto  $C$  que coincide con el centro de la circunferencia que aproxima la trayectoria en cada punto de esta. Es decir:

$$\overrightarrow{OC}(t) = \vec{r}(t) + R\vec{n}(t)$$

que también puede escribirse como

$$\overrightarrow{OC}(t) = \vec{r}(t) + R^2 \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

La “trayectoria” (lugar geométrico) que describe el centro de curvatura se llama *evoluta*

## 2.3. Velocidad

**2.3.1 Velocidad:** Es la variación del vector posición respecto al tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k}$$

**2.3.2 Celeridad:** Es el módulo de la velocidad

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \frac{ds}{dt}$$

El espacio recorrido puede expresarse como

$$s = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

El vector velocidad puede expresarse como  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$  donde  $\vec{\tau} = \vec{v}(t)/v(t)$  es el vector unitario tgte. a la trayectoria.

**2.3.3 Velocidad en cilíndricas:** En la base local de coordenadas cilíndricas se tendrá (nótese que los vectores de la base no son ctes. a diferencia de en el caso cartesiano):

$$\begin{cases} \hat{u}_{\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0) & \dot{\hat{u}}_{\rho} = (-\dot{\phi} \sin \phi, \dot{\phi} \cos \phi, 0) = \dot{\phi}\hat{u}_{\phi} \\ \hat{u}_{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) & \dot{\hat{u}}_{\phi} = (-\dot{\phi} \cos \phi, -\dot{\phi} \sin \phi, 0)\hat{u}_{\rho} \\ \hat{u}_z = (0, 0, 1) & \dot{\hat{u}}_z = (0, 0, 0) = \vec{0} \end{cases}$$

Como

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{u}_{\rho} + z(t)\hat{u}_z$$

por tanto

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}\hat{u}_{\rho} + \rho\dot{\hat{u}}_{\rho} + \dot{z}\hat{u}_z = \dot{\rho}\hat{u}_{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{u}_{\phi} + \dot{z}\hat{u}_z$$

**2.3.4 Velocidad en coordenadas esféricas:** En la base local de coordenadas esféricas se tendrá (vect. de la base no ctes.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \hat{u}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \phi) \\ \hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \theta, 0) \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta} \hat{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{u}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{u}_\phi \\ \dot{\hat{u}}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{u}_\theta \end{array}$$

Como

$$\vec{r}(t) = r \hat{u}_r$$

por tanto

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\hat{u}}_r = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_\phi$$

## 2.4. Aceleración

**2.4.1 Aceleración:** Variación de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\text{En cartesianas: } \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

**2.4.2 Componentes tangencial y normal de la aceleración:** Derivando  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{r}$  y usando las definiciones del radio de curvatura y vector normal se obtiene:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{r} + v(t) \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{r} + v^2(t) \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{r} + \frac{v^2(t)}{R} \vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Se tienen pues las componentes de la aceleración:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \quad a_n = \frac{v^2}{R} = (\vec{a} \cdot \vec{n}) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

**2.4.3 Cálculo explícito del radio de curvatura y del vector normal:** de la expresión de la aceleración se tiene:

$$R = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - (dv/dt)^2}} \quad \vec{n} = \frac{R}{v^2} \left( \vec{a} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \vec{v} \right)$$

Estas expresiones pueden obtenerse también a partir de las correspondientes con respecto al parámetro  $S$ , teniendo en cuenta que

$$d/ds \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{v}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

**2.4.4 Aceleración en coordenadas cilíndricas:** Derivando la velocidad en cilíndricas ( $v(t) = \rho \hat{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \dot{z} \hat{u}_z$ ) se obtiene

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho} \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{u}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{u}}_\phi + \ddot{z} \hat{u}_z = \ddot{\rho} \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{u}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{u}_\rho + \ddot{z} \hat{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{u}_\phi + \ddot{z} \hat{u}_z$$

**2.4.5 Aceleración en coordenadas esféricas:** Derivando la velocidad en esféricas ( $v(t) = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_\phi$ ):

$$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{u}_\theta + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) \hat{u}_\phi$$

## 2.5. Movimiento circular

2.5.1 **Movimiento circular (MC)**: Movimiento en el plano  $XY$ , describiendo una circunferencia de centro  $(0, 0, 0)$  y radio  $R$ . Inicialmente en  $(R, 0, 0)$  y tomando ángulos  $\theta(t)$  a partir del eje  $OX$

$$x(t) = R \cos \theta(t), \quad y(t) = R \sin \theta(t), \quad z(t) = 0$$

Se supone  $\theta(t)$  una función creciente, lo que implica recorrido antihorario de la circunferencia

2.5.2 **Vector posición**:  $\vec{r}(t) = (R \cos(\theta(t)), R \sin(\theta(t)), 0)$

2.5.3 **Velocidad**:  $\vec{v}(t) = R w(t) (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0)$  con  $\dot{\theta}(t) = w(t) > 0$

2.5.4 **Celeridad**:  $v(t) = R \dot{\theta}(t) = R w(t)$

2.5.5 **Vector tangente**:  $\vec{r} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0)$

2.5.6 **Vector normal**:  $\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}|/st} = \frac{w(t)(-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0)}{|d\vec{r}/dt|} = (-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0) = -\frac{\vec{r}}{R}$

2.5.7 **Radio de curvatura**:  $R^{\text{curvatura}} = (|d\vec{r}/ds|)^{-1} = (|1/v(t)| |d\vec{r}/dt|)^{-1} = (|\dot{\theta}\vec{n}|/v(t))^{-1} = R$

2.5.8 **Aceleración**:  $\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{r} + R w^2 \vec{n} = R \dot{w}(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) + R w^2(-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0)$

2.5.9 **Centro de curvatura (evoluta)**:  $\overrightarrow{OC}(t) = \vec{r}(t) + R\vec{n}(t) = (0, 0, 0)$

2.5.10 Si  $v(t) = v_0 = \text{cte.}$  [**MC uniforme**; (MCU)], entonces se infiere  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 = \text{cte.}$  y  $w(t) = w_0 = \text{cte.}$ , por tanto

$$v(t) = v_0 = R \dot{\theta}_0 = R w_0$$

y de  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0$  se llega a  $\dot{\theta}(t) = R w_0$

En este caso el mov. sólo tiene aceleración normal

$$a_t = dv(t)/dt = 0, \quad a_n = R w_0^2 \quad \wedge \quad (\vec{a} \cdot \vec{v}) = 0$$

2.5.11 Utilizando **coordenadas cilíndricas**/polares se tiene

$$\rho = R, \quad \phi = \theta(t), \quad z = 0$$

Recordando

$$\begin{aligned} \hat{u}_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) & \dot{\hat{u}}_\rho &= \dot{\phi} \hat{u}_\phi \\ \hat{u}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) & \dot{\hat{u}}_\phi &= -\dot{\phi} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_z &= (0, 0, 1) & \dot{\hat{u}}_z &= \vec{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_\rho(t), \quad \vec{v}(t) = R w(t) \hat{u}_\phi(t), \quad \vec{a}(t) = -R x^2(t) \hat{u}_\rho(t)$$

Además

$$\vec{n} = -\hat{u}_\rho, \quad \tau(t) = \hat{u}_\phi$$

## 2.6. Triedro de Frenet

2.6.1 **Triedro de Frenet:** Se define como la siguiente b.o.n. “a derechas”

$$\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}\}$$

El vector  $\vec{b}$  se llama vector binormal. El plano que contiene a los vectores  $\vec{\tau}$  y  $\vec{n}$  (y del que  $\vec{b}$  es el vector unitario normal) se llama **plano oscilante**. Se tiene por tanto que

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{\tau} = \vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{b} \quad |\vec{\tau}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$$

2.6.2 **Fórmulas de Frenet:**

**1<sup>a</sup> F. de Frenet:**

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{n}$$

El parámetro  $R$  es el radio de curvatura.

**2<sup>a</sup> F. de Frenet:**

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi \vec{n} = -\frac{1}{\sigma} \vec{n}$$

$\sigma$  es el **radio de torsión** y  $\chi = 1/\sigma$  la **torsión**. La torsión puede interpretarse como la velocidad de cambio del plano oscilante de la curva.

Dem: Si  $d\vec{b}/ds = \alpha \vec{\tau} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}$  entonces

$$\gamma = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} \stackrel{(1)}{=} 0, \quad \alpha = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} \stackrel{(2)}{=} -\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{b} \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{R} \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

Por lo que  $d\vec{b}/ds \parallel \vec{n}$ , y se tiene que

$$\beta = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} \Rightarrow \sigma = -\left(\frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n}\right)^{-1}$$

$$(1) (\vec{b} \cdot \vec{b}) = 1 \xrightarrow{d/dt} \vec{b} \cdot d\vec{b} = 0 \quad (2) \vec{\tau} \cdot \vec{b} = 0 \xrightarrow{d/dt} \vec{\tau} \cdot d\vec{b} + d\vec{\tau} \cdot \vec{b} = 0$$

(3) usando la 1<sup>a</sup> F. de Frenet

**3<sup>a</sup> F. de Frenet**

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \vec{n} - \frac{1}{R} \vec{\tau}$$

Dem: Si  $d\vec{n}/ds = \alpha \vec{\tau} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{n}$ , entonces

$$\gamma = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = 0 \quad \alpha = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \stackrel{(2)}{=} -\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{n} \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{R} \vec{n} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R} \quad \beta = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \stackrel{(4)}{=} -\frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sigma}$$

$$(1) (\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1 \xrightarrow{d/dt} \vec{n} \cdot d\vec{n} = 0 \quad (2) \vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0 \xrightarrow{d/dt} \vec{\tau} \cdot d\vec{n} + d\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$$

(3) usando la 1<sup>a</sup> F. de Frenet      (4)  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \xrightarrow{d/dt} \vec{b} \cdot d\vec{n} + d\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$       (5) usando la 2<sup>a</sup> F. de Frenet

**Fórmulas de Frenet**

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{n} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi \vec{n} = -\frac{1}{\sigma} \vec{n} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \vec{b} - \frac{1}{R} \vec{\tau}$$

## 2.7. Transformaciones de Galileo

**2.7.1 Principio de Relatividad de Galileo:** Las leyes de la física son las mismas en sistemas de referencia que se mueven relativamente entre ellos con MRU. Esto define una clase de sistemas de referencia llamados **sistemas de referencia iniciales**.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \quad \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \xrightarrow{\text{S.I.: } d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2} \vec{a} = \vec{a}' \implies \vec{F} = \vec{F}'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{V}t + \vec{R}_0 \text{ (M.R.U.)} \implies \vec{f} = \vec{r}' + \vec{V}t + \vec{R}_0 \implies \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

**Transformaciones de Galileo:** Cambio de coordenadas entre dos sists. iniciales  $S_I$  y  $S'_I$  con orígenes iguales en  $t = 0$  ( $\vec{R}_0 = 0$ ). ( $S'_I$  se mueve con velocidad  $\vec{V}$  respecto de  $S_I$  sin cambiar su orientación):

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de posición  $\overrightarrow{OP}$  visto desde  $S_I$  y  $\vec{r}'$  es el vector posición  $\overrightarrow{O'P}$  “visto desde”  $S'_I$

2.7.2 Si inicialmente  $S_I$  y  $S'_I$  tienen ejes paralelos, se tendrá la siguiente transformación de coordenadas:

$$x' = x - V_x t \quad y' = y - V_y t \quad z' = z - V_z t$$

Si inicialmente los ejes  $S'_I$  están girados, entonces se debe aplicar una rotación pasiva a la transformación anterior, es decir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{S'_I, \text{pasivo}} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x - V_x t \\ y - V_y t \\ z - V_z t \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{R}$  es la matriz cambio de base, con los vectores base puestos en fila. Nótese que  $\mathbf{R}$  corresponde a la matriz de rotación, las filas son precisamente las componentes de la base girada respecto a la base inicial.

2.7.3 **Nota:** La transformación de coordenadas entre sistemas iniciales forman un grupo (llamado grupo de Lorentz), siguiendo sus axiomas se llega a:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + kv^2}} \begin{pmatrix} 1 & kv \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

### 3. Dinámica del punto

3.1. Interacciones fundamentales . . . . .	28
3.2. Fuerzas macroscópicas . . . . .	28
3.3. Fuerzas de fricción . . . . .	29
3.4. Leyes de Newton . . . . .	29
3.5. Ecuaciones de movimiento . . . . .	31
3.6. Resolución por integración . . . . .	31
3.7. Ejemplos . . . . .	32
3.8. Trabajo y Energía . . . . .	34
3.9. Momento lineal y momento angular . . . . .	35
3.10. Fuerzas centrales . . . . .	36
3.11. Potencial unidimensional. Pequeñas oscilaciones . . . . .	37
3.12. Boletín 3 . . . . .	39

#### 3.1. Interacciones fundamentales

- 3.1.1 **Interacción fundamental:** Tienen su origen en la materia elemental y son las últimas responsables de todas las fuerzas de la Naturaleza.
- 3.1.2 **Interacción electromagnética (EM):** es de largo alcance. Sus efectos son macroscópicos y microscópicos. Se mezcla con la interacción débil a nivel microscópico. Mediada via el bosón  $\gamma$  (fotón) a nivel fundamental.
- 3.1.3 **Interacción débil:** es de corto alcance. Es responsable de la transmutación beta de los núcleos. Mediada via bosones  $W^\pm, Z$  a nivel fundamental. Única fuente de violación  $CP$  conocida y confirmada (pero no explica la diferencia entre materia y antimateria observada en el Universo).
- 3.1.4 **Interacción fuerte:** es de corto alcance. Sólo se detecta a nivel elemental. Transmutación alfa nuclear y transmutación hadrónica. Mediada via gluones (bosones) a nivel fundamental.
- 3.1.5 **Interacción gravitatoria:** es de largo alcance, de efectos macroscópicos. Se postula la existencia del gravitón a nivel fundamental como mediador de la interacción pero no se ha detectado.

#### 3.2. Fuerzas macroscópicas

- 3.2.1 **Fuerza de Coulomb:** fuerza de la carga  $q_2$  sobre  $q_1$

$$\vec{F}_{1(2)} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

donde

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$$

y además

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 = 8,988 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} = 2,307 \times 10^{-28} \text{ Nm}^2e^{-2}$$

donde  $\epsilon_0$  es la permisividad eléctrica del vacío y  $e$  la la carga del electrón

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

C es la unidad de carga macroscópica (Coulomb). Las **limitaciones** de esto es que sólo es aplicable a cargas puntuales estacionarias. A nivel atómico la fuerza electrostática efectiva debe ser corregida por factores cuánticos.

### 3.2.2 Fuerza gravitatoria:

Fuerza de la carga gravitatoria  $n_2$  sobre  $n_1$

$$\vec{F}_{1(2)} = -G \frac{n_1 n_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Esta fuerza es siempre atractiva pues  $n_1 n_2 > 0$ .

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Si se comparan las fuerzas eléctrica y gravitatoria para un protón de masa  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ :

$$\frac{G m_p^2}{k e^2} \simeq 8 \times 10^{-37} \ll 1$$

Su **limitación** se halla a la hora de calcular la precesión del perihelio de los planetas interiores (efectos gravitatorios de cuerpos en movimiento) y en el efecto que la gravedad tiene sobre la luz, pues el fotón tiene masa nula.

## 3.3. Fuerzas de fricción

Las fuerzas de fricción impiden o amortiguan el movimiento, son manifestaciones macroscópicas de las fuerzas intermoleculares de origen electromagnético.

### 3.3.1 Movimiento sobre una superficie:

$$|\vec{F}| \leq \mu_e |\vec{N}|, \quad \vec{N} \equiv \text{normal a la superficie}, \quad \mu_e \equiv \text{coeficiente est\'atico}$$

### 3.3.2 Movimiento en un fluido viscoso:

$$\vec{F} = -b \vec{v}, \quad b = 6\pi a \eta, \quad \eta \equiv \text{coeficiente de viscosidad del fluido}$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza de arrastre lineal y  $b$  es el coeficiente de arrastre para una esfera de radio  $a$ .

En caída libre hay que considerar, además, el empuje hacia arriba. El movimiento del cuerpo se supone sin turbulencias en el fluido (régimen laminar para velocidades pequeñas).

### 3.3.3 Movimiento en un gas (a vels. mayores que en un fluido viscoso pero subsónicas):

$$\vec{F} = -cv^2 \vec{v}, \quad (\text{Fuerza de arrastre cuadrática})$$

donde

$$c = \frac{1}{2} C_a S \rho, \quad C_a \equiv \text{coeficiente aerodin\'amico (depende de la geometr\'ia del cuero)},$$

$S \equiv$  sección transversal,  $\rho \equiv$  densidad del gas

	disco	esfera	avión
$C_a$	1.2	0.4	0.06

## 3.4. Leyes de Newton

### 3.4.1 Primera Ley:

Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme a menos que actúe una fuerza  $\vec{F}$  sobre el mismo.

### 3.4.2 Segunda Ley:

La variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo de un objeto es igual a la resultante de la fuerza que actúa sobre dicho objeto.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad m \equiv \text{mas inercial}, \quad m\vec{v} \equiv \text{cantidad de movimiento}$$

**3.4.3 Tercera Ley:** Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, éstas son de intensidades iguales y sentidos opuestos.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Esta tercera Ley no se cumple cuando la interacción entre partículas es electromagnética, pues el campo EM se lleva parte del momento.

La Tercera Ley únicamente se aplica cuando la fuerza ejercida por un objeto sobre otro (ambos puntos) e dirige a lo largo de la línea que conecta ambos puntos; dichas fuerzas se llaman **fuerzas centrales**. La Tercera Ley se aplica tanto si la fuerza es atractiva como si es repulsiva.

Algunos ejemplos de fuerzas centrales son las fuerzas gravitacionales y electrostáticas, en ciertos casos las fuerzas elásticas y los objetos de dos puntos conectados por un muelle recto o una cuerda elástica.

Cualquier fuerza que dependa de las velocidades de los cuerpos en interacción, como las fuerzas entre cargas eléctricas en movimiento o la fuerza gravitatoria entre cuerpos móviles (aunque el efecto es pequeño y débil), es no central, por lo que es posible que la Tercera Ley no se aplique.

La Tercera Ley permite deducir el principio de conservación del momento.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cte.}$$

**3.4.4 Sistema de referencia inercial (SRI):** Es aquel en que se verifican las Leyes de Newton.

**3.4.5 Equivalencia de la carga gravitatoria  $n$  y la masa inercial  $m$ .**

i) En caída libre desde una altura  $h$  se tiene que

$$m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = F \Rightarrow \int_0^v m v dv = - \int_h^0 mg dx \Rightarrow v = \sqrt{2ghn/m}$$

independientemente del cuerpo, con lo que  $n/m$  es una cte. universal, lo que permite hacer la identificación  $n = m$ .

ii) También podría comprobarse con un oscilador simple en presencia de gravedad,  $F = ng - kx$ , comparando el punto de equilibrio ( $F = 0$ ),  $x_{\text{eq}} = ng/k$ , con el periodo del movimiento oscilatorio  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$\text{cte.} = \frac{x_{\text{eq}}}{T^2} = \frac{gn}{4\pi^2 m}$$

iii) La comprobación más precisa se realiza con una balanza de torsión. Considerando la aceleración centrífuga de la masa inercial, causada por la rotación de la Tierra, se obtiene

$$\vec{F} = n g \hat{r} + m \vec{a}_{\text{cent}}$$

Para dos cuerpos diferentes con la masa carga gravitacional  $n$ , la balanza de torsión giraría con masas iniciales diferentes y no lo hace

**3.4.6 Principio de equivalencia:** Un SR  $S$ , ligado a un objeto que cae libremente en un CG (con aceleración  $a = g$  a la Tierra) es equivalente a un verdadero SRI  $S_I$  sin gravedad. Los experimentos que se realizan en  $S$ , darán resultados idénticos a los que se obtendrían en un  $S_I$  sin gravedad.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}, \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{g} \xrightarrow{n=m} \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}_g \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F} - \vec{F}_g$$

### 3.5. Ecuaciones de movimiento

Para una partícula de masa  $m$ , la 2<sup>a</sup> Ley de Newton para una fuerza  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  genérica define las *ecuaciones de movimiento* de la partícula, cuya solución proporciona la trayectoria de la misma  $\vec{r}(t)$ :

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \rightarrow \quad \text{EC. movimiento} \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t)$$

En una base curvilínea genérica, los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{F}$  se escriben

$$m\vec{a} = ma_\alpha \hat{u}_\alpha + ma_\beta \hat{u}_\beta + ma_\gamma \hat{u}_\gamma, \quad \vec{F} = F_\alpha \hat{u}_\alpha + F_\beta \hat{u}_\beta + F_\gamma \hat{u}_\gamma$$

siendo  $F_{\alpha_i}$  y  $a_{\alpha_i}$  las proyecciones sobre los vectores unitarios correspondientes:

$$F_{\alpha_i} = \left( \hat{u}_{\alpha_i} \cdot \vec{F} \right), \quad a_{\alpha_i} = \left( \hat{u}_{\alpha_i} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)$$

Lo que lleva a tres ecs. de mov.

$$F_{\alpha_i} = ma_{\alpha_i}, \quad \alpha_i = \alpha, \beta, \gamma$$

- **Coordenadas cilíndricas:**

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{u}_\rho + (2\dot{\rho} + \rho\ddot{\phi})\hat{u}_\phi + \ddot{z}\hat{u}_z$$

Las ecs. de movimiento para una fuerza  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  vienen dadas por

$$F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2), \quad F_\phi = m(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}), \quad F_z = m\ddot{z}$$

- **Coordenadas esféricas:**

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta)\hat{u}_\theta + (r\ddot{\phi}\sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta)\hat{u}_\phi$$

Las ecs. de mvmt. para una fza.  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  vienen dadas por

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), \quad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta), \quad F_\phi = m(r\ddot{\phi}\sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta)$$

### 3.6. Resolución por integración

- Para una partícula de masa  $m$  en 1D en cartesianas se tiene

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, v, t) \quad \rightarrow \quad x(t)$$

Resolver el caso general en que la fza. depende de la posición, la velocidad y el tiempo suele ser complicado. Por esto se consideran los casos en que la fza. sólo depende de alguna de dichas magnitudes, resolviéndose mediante integraciones sucesivas.

3.6.1  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$ . Se tiene de la Ley de Newton que

$$F(x) = m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = mv \frac{dv}{dx} \Rightarrow m \int v dv = \int F(x) dx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \int F(x) dx + K_1}$$

Teniendo en cuenta que  $v(t) = dx/dt$ , se despeja  $dt$  y se vuelve a integrar.

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F(x) dx + K_1}} + K_2$$

De este resultado puede obtenerse la trayectoria  $x(t)$

3.6.2  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(v)$ . Ahora  $F(v) = m^{dv}/dt$ . Puede despejarse  $dt$  de la ec. de Newton y se integra

$$t = m \int \frac{dv}{F(v)} + K_1$$

Si se despeja  $v(t)$  e integra respecto al tiempo ( $dx = v(t)dt$ ) se tendrá directamente la trayectoria  $x(t)$

3.6.3  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ . Aquí una primera integración de  $F(t) = m^{dv}/dt$  resuelve  $v(t)$ :

$$mv = \int F(t)dt + K_1$$

y volviendo a integrar ( $v(t) = dx/dt$ ) se tiene la trayectoria

$$mx(t) = \int \left[ \int F(t)dt + K_1 \right] dt + K_2$$

Las ctes. de integración se determina a partir de las condiciones iniciales  $x(t = 0)$  y  $v(t = 0)$  o de dos condiciones en cualquier otro instante.

3.6.4 Método numérico para  $\mathbf{F}(x, v, t)$ . Con condiciones iniciales  $x_0$  y  $v_0$  en  $t_0$ , la aceleración inicial será

$$a_0 = \frac{1}{m}F(x_0, v_0, t_0)$$

Después de un tiempo  $\Delta t$  se tendrá

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t \\ x_1 = x_0 + v_0 \Delta t &\Leftarrow x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ v_1 = v_0 + a_0 \Delta t &\Leftarrow v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

y por tanto

$$a_1 = \frac{1}{m}F(x_1, v_1, t_1)$$

así sucesivamente hasta  $t_n = t_0 + \Delta t$ .

Debe notarse que este método de integración numérica es de primer orden en  $\Delta t$  y por tanto poco preciso.

## 3.7. Ejemplos

### 3.7.1 Tiro con arco

- i) Fuerza durante el tiempo en el que la cuerda del arco está en contacto con la flecha [1D; con el eje  $x$  hacia la derecha (dirección en que se dispara la flecha); condiciones iniciales (CI)  $v_0 = 0, x_0 = -A < 0$ ]

$$\mathbf{F} = -kx$$

- ii) integral primera ( $F = F(x)$ ; tipo 1 de la anterior sección:  $m \int v dv = \int F(x)dx$ )

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C_1 \quad \left( x_0 = -A, v = 0 \rightarrow C_1 = k\frac{A^2}{2} \right)$$

Por lo que

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

iii)  $v = dx/dt \rightarrow dt = dx/v$

$$t = \sqrt{\frac{k}{m}} \int \frac{1}{A} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/A)^2}} + C_2 = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{A} + C_2$$

Para  $t = 0, x = -A$  con  $\sin^{-1}(-1) = -\pi/2 \rightarrow C_2 = (\pi/2)\sqrt{m/k}$

iv) La trayectoria es pues

$$x(t) = A \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

La flecha abandona el arco cuando  $x(t_f) = 0$  ( $\sin() = 0$ ). Eso pasa transcurrido un tiempo

$$\left( \sqrt{\frac{k}{m}} t_f - \frac{\pi}{2} \right)$$

La velocidad de salida de la flecha será  $\dot{x}(t_f) = A\sqrt{k/m}$

Desde el punto de salida de la flecha, la trayectoria será rectilínea y uniforme en ausencia de gravedad.

### 3.7.2 Paracaidismo:

i) Fuerza durante el tiempo tras salir del avión (1D). Nótese que hay dos fzas. opuestas, la de la gravedad y la de viscosidad de fricción ( $F = F(v)$ )

$$F = -mg + cv^2$$

Eje hacia arriba y gravedad hacia abajo. La cte. de rozamiento  $c$  está relacionada con la aerodinámica del cuerpo y con la densidad del aire:  $c = 1/2C_a S \rho$

ii) **Velocidad límite,  $v_l$ :** Al comenzar el mvmto. sólo actúa la gravedad. La vel. aumenta hasta que se cancelan las fzas.  $F = 0$ . Entonces se llega a  $v_l$ :

$$0 = -mg + cv^2 \rightarrow v_l = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

Con  $C_a = 0,48$ ,  $S \approx 1 \text{ m}^2$  y  $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$ , se tiene una  $c = 1/2 \cdot 0,48 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ kg/m}^3 = 0,24 \text{ kg/m}$ . Considerando  $m = 70\text{kg}$  se obtiene:

$$v_l \simeq 54 \text{ ms}^{-1} (\simeq 193 \text{ kmh}^{-1})$$

iii) **Ec. mvmto.:** La 2<sup>a</sup> Ley de Newton es

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + cv^2 \underset{c=m g/v_l}{=} -mg \frac{v_l^2}{v_l^2} + mg \frac{v^2}{v_l^2} = -mg \left( \frac{v_l^2 - v^2}{v_l^2} \right)$$

Reagrupando variables ( $F = F(v)$ ) se obtiene

$$\frac{dv}{v_l^2 - v^2} = \frac{dv}{2v_l} \left( \frac{1}{v_l + v} + \frac{1}{v_l - v} \right) = -\frac{gdt}{v_l^2}$$

iv) **Solución:** velocidad de caída al integrar

$$C_1 + \frac{1}{2v_l} \ln \frac{v_l + v}{v_l - v} = -\frac{gt}{v_l^2}$$

Teniendo en cuenta las CI  $t = 0$  y  $v = 0 \rightarrow C_1 = 0$ . Despejando el logaritmo y exponenciando se llega a

$$\frac{v_l + v}{v_l - v} = e^{-2gt/v_l}$$

Por último, despejando  $v(t)$

$$v_l + v = (v_l - v)e^{-2gt/v_l} \rightarrow v(t) = -v_l \frac{1 - e^{-2gt/v_l}}{1 + e^{-2gt/v_l}}$$

Nótese que  $v = -v_l$  se alcanza asintóticamente para  $t \gg \tau \equiv v_l/2g (\simeq 2,7 \text{ s})$ . El signo menos es consistente con la elección del eje. Para  $t = \tau$  se alcanza el 46 % de la  $v_l$ . Para  $t = 4\tau$  se alcanza el 96 % de  $v_l$ .

- v) Con el origen en la superficie de la Tierra y el eje  $x$  hacia arriba, para una altura  $h$  inicial se obtiene ( $v(t) = dx/dt$ )

$$\int_h^x dx = x(t) - h; \quad \int_0^t v(t) dt = -v_l \int_0^t \left( 1 - \frac{2e^{-2gt/v_l}}{1 + e^{-2gt/v_l}} \right) dt = -v_l \left( t + \frac{v_l}{g} \ln \frac{1 + e^{-2gt/v_l}}{2} \right)$$

Igualando los segundos miembros, se obtiene la distancia recorrida en el tiempo  $t$ :

$$h - x(t) = v_l \left( t + \frac{v_l}{g} \ln \frac{2}{1 + e^{-2gt/v_l}} \right)$$

- Para  $v_l \simeq 54 \text{ ms}^{-1}$  y  $t = 4\tau = 2v_l/g (\simeq 11 \text{ s})$ , entonces  $h - x(4\tau) \simeq 400 \text{ m}$ . Esta es la distancia que debe recorrer el paracaidista para alcanzar prácticamente  $v_l$  con el paracaídas cerrado.
- La distancia que queda hasta la tierra es  $x(t)$ . Esta distancia debe ser tal que se pueda alcanzar  $v_l$  con el paracaídas abierto. En una competición, dado  $h$ , se habrá de calcular el  $t_{\max}$  que el paracaidista puede volar con el paracaídas cerrado, llegando así al suelo lo más rápido posible.

## 3.8. Trabajo y Energía

### 3.8.1 Trabajo dinámico de un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t)$

$$W_{\text{din}}(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot d\vec{r}(t)$$

con la trayectoria obtenida de la Ley de Newton:  $\frac{d(m\dot{\vec{r}})}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \rightarrow \vec{r}(t)$

### 3.8.2 Energía cinética (dinámica): Considerando el siguiente desarrollo, en el que se utiliza la 2<sup>a</sup> Ley de Newton

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = d\left(\frac{m(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) dT$$

donde se define  $T$  como la energía cinética del sistema

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

entonces

$$W_{\text{din}}(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1$$

Esto se conoce como **Tma Trabajo-Energía**, según el que el trabajo hecho por la fza. actuando sobre  $m$  es igual al cambio de energía cinética.

### 3.8.3 Trabajo virtual contra el campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , con el tiempo congelado en $t_0$ , a lo largo de una camino $\Gamma$ :

$$W_{\text{virt}}^{\text{contra}}(\Gamma, t_0) = - \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha)$$

siendo  $\alpha$  un parámetro que describe el camino  $\Gamma$ . El signo menos e la integral se debe a que se realiza el trabajo en contra del campo de fuerzas.

**3.8.4 Energía potencial:** Sea  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  un campo conservativo ( $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \forall t$ ). Puede definirse un campo  $V(\vec{r}, t)$  tal que  $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t)$ . Entonces el trabajo virtual  $W_{\text{virt}}^{\text{contra}}(1 \rightarrow 2)$  a lo largo de un camino  $\Gamma(1 \rightarrow 2)$  contra el campo de fuerzas vale ( $dV(\vec{r}, t_0) = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}$ )

$$W_{\text{virt}}^{\text{contra}}(1 \rightarrow 2, t_0) = - \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha) = V(\vec{r}_2, t_0) - V(\vec{r}_1, t_0)$$

independiente del camino elegido en  $t_0$ . Se llamará energía potencial a la función  $V(\vec{r}, t)$

**3.8.5 Energía total:** Se define la energía total del sistema  $E(\vec{r}, t)$  como

$$E(\vec{r}, \vec{v}; t) = T(v) + V(\vec{r}, t)$$

Diferenciando se tiene

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \Rightarrow \quad dE = (\vec{F} + \vec{\nabla}V) \cdot d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

Dado que la fza. es conservativa,  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$$dE = \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

**3.8.6 Conservación de la energía total:** Si el campo de fuerzas conservativo no depende del tiempo, entonces  $V(t)$  no depende explícitamente del tiempo  $\partial V / \partial t$  y

$$E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{cte.}$$

**Nota:** Si  $V(\vec{r}, t)$  depende del tiempo es porque el sistema de fzas. no es aislado y existirá una energía adicional externa que modifica la fuerza con  $t$ .

Otro modo de llegar a la conservación de la energía es teniendo en cuenta estas condiciones (Fuerza conservativa y  $F \neq f(t)$ )

$$W_{\text{virt}}^{\text{contra}}(2 \rightarrow 1) = - \int_2^1 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W_{\text{din}}(1 \rightarrow 2)$$

es decir

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \quad \Rightarrow \quad -\Delta V = \Delta T$$

El trabajo que realiza el campo de fzas. conservativo entre dos ptos. 1 y 2 de la trayectoria es igual al trabajo virtual desde hasta 1 por un camino arbitrario.

## 3.9. Momento lineal y momento angular

**3.9.1 Momento lineal o cantidad de movimiento:**

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

**3.9.2 Conservación del momento:** La 2<sup>a</sup> Ley de Newton puede escribirse como  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Si  $F_i = 0, \forall i (i = x, y, z)$ , entonces

$$p_i = \text{cte.}$$

es decir, se conserva la componente correspondiente del momento lineal.

**3.9.3 Momento de una fuerza (respecto al origen  $O$ ):**

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

### 3.9.4 Momento angular (respecto del origen $O$ ):

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

3.9.5 Conservación del momento angular: Diferenciando  $\vec{L}$  se obtiene

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

Si la componente  $N_i = 0, \forall i (i = x, y, z)$ , entonces:

$$L_i = \text{cte.}$$

es decir, se conserva la componente correspondiente del momento angular.

## 3.10. Fuerzas centrales

### 3.10.1 Fuerza central:

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}; \quad \hat{r} = \vec{r}/r$$

En esta definición se ha tomado el centro en  $r = 0$  pero podría haberse tomado en cualquier otro punto  $\vec{r}_0$ . Las expresiones se modificarían, pues en lugar de la dependencia con  $r$  se tendría dependencia con  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ .

Si  $f(r) > 0$  se tiene una fza. repulsiva, mientras que si  $f(r) < 0$ , la fza. es atractiva.

3.10.2 Propiedad: Toda fuerza central es conservativa. En efecto, tomando el rotacional en esféricas,  $\hat{u}_r = \hat{r}$ , se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_\theta & r \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Como la fza. es conservativa, puede definirse una energía potencial de la que deriva.

3.10.3 Energía potencial: El Teorema de Stokes garantiza la independencia del camino. Equivalentemente,  $\exists V(\vec{r})$  tal que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

Se tiene ahora, por un lado, de la def. de gradiente ( $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}$ )

$$\int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \int^{\vec{r}} \vec{\nabla}V(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \int^{\vec{r}} dV = -V(\vec{r})$$

Por otro lado

$$\int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \int^{\vec{r}} f(r') \underbrace{\hat{r}' \cdot d\vec{r}'}_{\hat{u}_{r'} \cdot \hat{u}_{r'} dr' + 0 + 0} = \int^{\vec{r}} f(r') dr'$$

por tanto  $V(\vec{r})$  sólo depende de  $r$  (ec. dif. del módulo de  $\vec{r}$ ).

$$V(r) = - \int^r f(r') dr' + \text{cte} \quad \text{y} \quad \vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{r}$$

■ Ejemplo: Para  $\vec{F}(\vec{r}) = a\hat{r}/r^2$  (es cómo depende la distancia tanto de la  $F_g$  y como la Coulombiana):

$$V(r) = - \int^r a \frac{dr}{r^2} = \frac{a}{r} + \text{cte}$$

3.10.4 **Conservación del momento angular:** Para una partícula de masa  $m$  sometida a una fuerza central  $f(r)\hat{r}$  se obtiene

$$\vec{N} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = \vec{0}$$

por lo que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{0}$$

y por tanto

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{cte}$$

- **Consecuencia 1:** El mvmt. tiene lugar en el plano  $\vec{r} \times \vec{v}$  que pasa por el origen de fzas.
- **Consecuencia 2:** Para una fza. central la *velocidad areolar* es cte.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{cte}$$

Estos resultados son válidos, en general para  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r} = \vec{0})$ , es decir, para  $\vec{r} \parallel \vec{F}(\vec{r})$  (fza. central en sentido amplio).

### 3.11. Potencial unidimensional. Pequeñas oscilaciones

3.11.1 Sea una partícula de masa  $m$  en un campo de fzas.  $F(x)$ . Todas las fzas.  $F(x)$  en 1D son conservativas pues entre dos puntos sólo hay un camino. Sea  $V(x)$  la correspondiente energía potencial.

3.11.2 **Energía total:**

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

3.11.3 **Rango de velocidades:** Dada una  $E$ , se obtiene:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2[E - V(x)]}{m}}$$

3.11.4 **Rango de movimiento:**  $\forall x$  tal que

$$V(x) \leq E$$

de otro modo la velocidad sería imaginaria.

3.11.5 **Tipo de movimiento:**

**acotado** si  $\exists[x_1, x_2]$  donde la partícula puede moverse, tal que  $\forall E < \infty$  (energía finita).

$$\forall E < E_{\max} : \quad x_1(E), x_2(E) < \infty$$

**no acotado** si para alguna energía finita  $E$ , existe un rango  $[x_1, x_2]$  tal que

$$\exists E_0 < \infty : \quad \lim_{E \rightarrow E_0} x_1(E) \rightarrow \infty \quad \vee \quad \lim_{E \rightarrow E_0} x_2(E) \rightarrow \infty \quad \vee \equiv o$$

3.11.6 **Puntos de retorno:**  $x_R$  tal que

$$V(x_R) = E$$

es decir, en  $x_R$  se anula la velocidad ( $\dot{x}_R = 0$ ) y cambia de signo. Todavía puede haber mvmt. en función del valor de  $\ddot{x}_R$

3.11.7 **Puntos de equilibrio:**  $x_e$  tal que

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x_e} \equiv V'(x_e) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_e = 0$$

Puede haber mvmt. en función de  $\dot{x}_e$ . La  $V$  tiene un máximo o mínimo local. El equilibrio es estable/inestable según

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} \Big|_{x_e} \equiv V''(x_e) \gtrless 0$$

3.11.8 **Pequeñas oscilaciones en torno a un punto  $x_e$  de equilibrio estable:** Desarrollo del potencial

$$V(x) = V(x_e) + V'(x_e)(x - x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2 + \mathcal{O}[(x - x_e)^3]$$

y su derivada cerca de un punto de equilibrio estable es, aproximadamente

$$\frac{dV(x)}{dx} \simeq V''(x_e)(x - x_e)$$

i) **Ecuación de movimiento:**

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_e) \Rightarrow k \equiv V''(x_e) > 0$$

ii) **Solución armónica en torno a  $x_e$**

$$x(t) = x_e + A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta \right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_e)}{m}}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular. La solución se obtiene por doble integración, como en el tiro con arco, o por métodos clásicos de resolución de ecs. difs.

3.11.9 **Perturbaciones (no entra):** En general, si un potencial  $V(x)$  depende de un parámetro,  $\alpha$ , con un valor numérico pequeño, puede realizarse una expansión en torno al mismo.

$$V(x) = 1 - e^{-\alpha x^2} = 1 - (1 - \alpha x^2 + \mathcal{O}(\alpha^2)) = \alpha x^2 + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -2\alpha x$$

### 3.12. Boletín 3

## 4. Sistemas de partículas

4.1. Sistema de N partículas . . . . .	40
4.2. Simetrías y leyes de conservación . . . . .	43
4.3. Teorema del Virial . . . . .	45
4.4. Sistema de dos cuerpos . . . . .	46
4.5. Sistema de masa variable . . . . .	49
4.6. Boletín 4 . . . . .	53

### 4.1. Sistema de N partículas

#### 4.1.1 Fuerzas del sistema

i) **Fuerza externa** sobre la partícula  $\alpha = 1, 2, \dots, N$

$$\vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

ii) **Fuerza interna** de  $\beta$  sobre  $\alpha$

$$\vec{f}_{\alpha\beta} \Rightarrow \vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$$

iii) **Fuerza interna central:**

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = f(r_{\alpha\beta})\hat{r}_{\alpha\beta}; \quad \vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta, \quad r_{\alpha\beta} = |\vec{r}_{\alpha\beta}|, \quad \hat{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta}/r_{\alpha\beta}$$

iv) **Fuerza total** sobre  $\alpha$ :

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}$$

v) **Fuerza total interna del sistema:**

$$\sum_{\alpha, \beta} \vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{0}$$

vi) **Fuerza total del sistema:**

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ (\beta \neq \alpha)}} \vec{f}_{\alpha\beta}^0 = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}}$$

La fuerza total sobre el sistema es la suma de las fuerzas externas sobre cada partícula.

#### 4.1.2 Centro de masas y coordenadas relativas:

- **Coordenadas del centro de masas (CM):**

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

donde

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \equiv \text{masa total}$$

Para  $N$  masas iguales

$$R_{\text{CM}} = \frac{m_{\alpha}}{Nm_{\alpha}} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

- Coordenadas relativas al centro de masas:

$$\vec{r}_\alpha^{\text{CM}} = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_{\text{CM}}$$

Se cumple que

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} = \sum_\alpha (m_\alpha \vec{r}_{\text{CM}} - m_\alpha \vec{R}_{\text{CM}}) = M \vec{R}_{\text{CM}} - M \vec{R}_{\text{CM}} = \vec{0}$$

Nótese que esta ecuación y sus derivadas temporales llevan a:

$$\vec{R}_{\text{CM}}^{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} = \vec{0}, \quad \vec{P}_T^{\text{CM}} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} = \vec{0}, \quad \vec{F}_T^{\text{CM}} = \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} = \vec{0}$$

#### 4.1.3 Momento total del sistema:

$$\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} + \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = M \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

El momento total del sistema es equivalente al de la masa total concentrado en el CM.

Velocidad centro de masa  $\vec{V}_{\text{CM}} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$

$$\vec{V}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\vec{P}}{M}$$

#### 4.1.4 Movimiento del CM:

Derivando respecto al tiempo y aplicando la 2<sup>a</sup> Ley de Newton ( $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ )

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \vec{F}^{\text{ext}}$$

Ec. dif., la ec. de mvmto. para  $\vec{P}$  sólo depende de las fzas. ext. Aceleración del CM:  $\vec{A}_{\text{CM}} = \dot{\vec{V}}_{\text{CM}} = \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}$

$$\vec{A}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\vec{F}^{\text{CM}}}{M}$$

Para  $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ , entonces

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

**Si no hay fuerzas externas, se conserva el momento lineal total,  $\vec{P}$ .**

#### 4.1.5 Momento angular total

(la posición de todas las partículas  $\vec{r}_\alpha$  está medida desde el mismo origen  $O$ ):

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{l}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

Recordando que  $\vec{R}_{\text{CM}}^{\text{CM}} = \vec{0}$  y  $\vec{P}_T^{\text{CM}} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_\alpha (\vec{r}_\alpha^{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}}) \times m_\alpha (\dot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} + \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}) = \\ &= \sum_\alpha \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} + \left( \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} \right) \times \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \left( \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\text{CM}} \right) + \vec{R}_{\text{CM}} \times \left( \sum_\alpha m_\alpha \right) \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \\ &= \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}$$

4.1.6 Movimiento del momento angular: Derivando el momento angular respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \cancel{\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \cancel{\dot{\vec{p}}_{\alpha}} = \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \left( \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \right) = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

El último sumatorio puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} &= \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{f}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{f}_{31} + \dots = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{f}_{13} + \dots = \\ &= \vec{r}_{12} \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_{13} \times \vec{f}_{13} + \dots = \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Nótese que se han utilizado la 2<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup> Ley de Newton, válida para SIs.

i) Para fzas. internas centrales se tendrá que  $\vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{f}_{\alpha\beta}$ , por tanto,  $\vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \vec{0} = \vec{N}_O^{\text{ext}}$$

En resumen, para fzas. internas centrales

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^{\text{ext}}$$

donde  $\vec{N}_O^{\text{ext}}$  es el momento ejercido por fuerzas externas (par, torque o esfuerzo de torsión). La ec. de mvmt. para  $\vec{L}_O$ , en un SI, sólo depende de los momentos de las fuerzas externas.

**Si no hay momentos de fuerzas externas,  $\vec{N}_O^{\text{ext}} = \vec{0}$ , el momento angular total  $\vec{L}_O$  se conserva.**

ii) Movimiento del momento angular respecto del CM: Si se deriva respecto al tiempo en la descomposición del momento angular se tiene:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} + \cancel{\frac{d\vec{R}_{\text{CM}}}{dt} \times \vec{P}} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} + \vec{R}_{\text{CM}} \times \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

Recordando que  $d\vec{L}_O/dt = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$

Igualando los dos resultados se llega al siguiente resultado no trivial:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{R}_{\text{CM}}) \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}}$$

Es decir, la ec. de mvmt. del momento angular, desde el CM sólo depende de los momentos de fuerzas externas, aunque el SR en el CM no sea inercial.

4.1.7 Energía cinética total:

$$T_O = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

Descomponiendo la energía cinética  $T_O$ :

$$T_O = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left( \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} \cdot \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} \right) \cdot \left( \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} \cdot \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} \right) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha}^{\text{CM}})^2 + \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2 + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} \right) \cdot \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

donde se han hecho los cambios  $\vec{V}_{\text{CM}} = \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$  y  $\vec{v}_{\alpha}^{\text{CM}} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}}$  y se ha tenido en cuenta que  $\vec{P}_{\text{T}}^{\text{CM}} = \vec{0}$ . Por tanto

$$T_O = T_{\text{CM}} + \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2$$

Es decir, la energía cinética total respecto de un SRI, puede descomponerse como la energía cinética total respecto de un sistema con origen en el CM más la energía cinética de toda la masa  $M$ , concentrada en el CM, moviéndose con  $\dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$

#### 4.1.8 Energía potencial y energía total:

i) **Energía potencial:** Para fzas. externas **conservativas independientes del tiempo** y fzas. internas centrales:

$$\vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_{\alpha} V_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha}), \quad \vec{f}_{\alpha\beta} = -\frac{dV_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{dr_{\alpha\beta}} \hat{r}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$$

- Suponiendo que la presencia de otras fuerzas (tanto internas como externas) no cambia la fuerza entre las partículas  $\alpha$  y  $\beta$
- $\vec{\nabla}_{\alpha} \equiv$  diferenciación respecto a las coordenadas de la partícula  $\alpha$ . Se define:

$$V = \sum_{\alpha} V_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta > \alpha} V_{\alpha\beta}$$

ii) **Conservación de la energía:** Diferenciando la energía cinética:

$$dT_O = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot d\vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} dt = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_{\alpha\beta}$$

El primer sumatorio tiene el trabajo sobre  $\alpha$  efectuado por la fza. externa  $(-\vec{\nabla}_{\alpha} V_{\alpha} d\vec{r}_{\alpha}) = -dV_{\alpha}$ , mientras que el segundo sumatorio tiene el trabajo efectuado sobre  $\alpha$  por  $\beta$   $(-dV_{\alpha\beta}/dr_{\alpha\beta} \hat{r}_{\alpha\beta} dr_{\alpha\beta})$ , por lo que

$$dT_O = - \sum_{\alpha} dV_{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \frac{dV_{\alpha\beta}}{dr_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta}$$

Se obtiene que  $dT_O + dV = 0$ , es decir

**La energía total del sistema,  $E$ , se conserva (fuerzas internas centrales y externas conservativas independientes del tiempo)**

$$E = T_O + V = \text{cte}$$

## 4.2. Simetrías y leyes de conservación

### 4.2.1 Homogeneidad del tiempo (sistema aislado)

i) La homogeneidad del tiempo implica

$$0 = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t + \varepsilon) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \frac{\partial V}{\partial t} \varepsilon$$

o lo que es lo mismo,  $\partial V / \partial t = 0$

ii) Conservación de la energía. De un lado se tiene el sig. desarrollo de  $V$ .

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial t}$$

del otro (utilizando la def. de trabajo dinámico ( $W_{\text{din}} = T_2 - T_1$ ))

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z}_1 + \dots = -\vec{F}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 - \dots = -\frac{dT}{dt}$$

Por tanto ( $\vec{F}$  conservativa):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Si  $V$  no depende explícitamente del tiempo (homogeneidad del tiempo) la energía total se conserva.

#### 4.2.2 Homogeneidad del espacio (sistema aislado)

i) Para un desplazamiento según el eje  $OZ$ , la homogeneidad del espacio quiere decir

$$0 = V(\vec{r}_1 + \varepsilon \hat{k}, \vec{r}_2 + \varepsilon \hat{k}, \dots, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \frac{\partial V}{\partial z_1} \varepsilon + \frac{\partial V}{\partial z_2} \varepsilon + \dots \Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial z_{\alpha}} = 0$$

por otro lado

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{\partial V}{\partial z_2} + \dots = -F_{1z} - F_{2z} - \dots = -F_z = -\frac{dP_z}{dt}$$

por lo que

$$F_z = 0, \quad \frac{dP_z}{dt} = 0$$

Si  $V$  es invariante bajo una traslación espacial según el eje  $z$ ,  $P_z$  se conserva.

ii) Para dos partículas aisladas, la homogeneidad del espacio lleva a la tercera Ley de Newton

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

#### 4.2.3 Isotropía del espacio (sistema aislado)

i) Sea la rotación (activa)  $\mathcal{R}_z$  de ángulo  $\varepsilon \ll 1$  (arbitraria) alrededor del eje  $OZ$ : Para los vectores base se tiene (Rotación de Rodrigues con  $u_1 = u_2 = 0, u_3 = 1, \phi = \varepsilon$ )

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z^T(\varepsilon) \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Por tanto, para una rotación activa de  $\vec{r}$  se toma la matriz transpuesta

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{R}_z(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \varepsilon y \\ y + \varepsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

ii) Para una rotación en torno al eje  $OZ$ , la isotropía del espacio implica

$$\begin{aligned} 0 = V(\mathcal{R}_z \vec{r}_1, \mathcal{R}_z \vec{r}_2, \dots, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} (-\varepsilon y_1) + \frac{\partial V}{\partial y_1} (\varepsilon x_1) + \dots = (F_{1x} y_1 - F_{1y} x_1) \varepsilon + \dots = \\ &= -(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1)_z \varepsilon + \dots = -(N_{1z} + N_{2z} + \dots) \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que

$$N_{1z} + N_{2z} + \dots = \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Lo mismo para el resto de componentes.

Si el espacio es isótropo alrededor del eje  $O\Gamma$  entonces no hay momento total de fuerzas  $N_\Gamma = 0$ , y  $L_\Gamma$  se conserva.

*iii)* Para dos partículas aisladas, la homogeneidad del espacio implica

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g(t)f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + g'(t) + \text{cte}$$

*iv)* Para dos partículas aisladas, la isotropía del espacio implica

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g(t)f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + g'(t) + \text{cte}$$

### 4.3. Teorema del Virial

4.3.1 Función  $G$ :

$$G = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}$$

diferenciando respecto a  $t$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{\alpha} (\dot{\vec{p}}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} + \vec{p}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} + 2T$$

donde  $T$  es la energía cinética.

4.3.2 **Enunciado:** Para movimientos periódicos de un stma. de parts. con periodo  $\tau$  o movimientos acotados con  $\tau$  suficientemente grande, se tiene que

$$\text{T}^{\text{ma}} \text{ del Virial: } \underbrace{\left\langle \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle}_{\text{virial (Clausius)}} + 2\langle T \rangle = 0$$

donde  $\langle \dots \rangle$  es el valor medio en un periodo  $\tau$

4.3.3 **Demostración:** Con las cond. del enunciado

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dG(t)}{dt} dt = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \rightarrow 0$$

Para un mvmt. periódico  $G(\tau) = G(0)$ , con  $\tau = nT$  (siendo  $T$  el periodo de  $G$ ) y para un mvmt. acotado  $|G|/\tau < M/\tau \rightarrow 0$ , con  $\tau \rightarrow \infty$

4.3.4 Caso partículas: **Potencial central**

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{r} = -r \frac{dV}{dr}$$

$$\text{T}^{\text{ma}} \text{ del Virial para pots. centrales: } \left\langle r \frac{dV}{dr} \right\rangle = 2\langle T \rangle$$

Para el potencial de Kepler:

$$V = -\frac{k}{r} \Rightarrow \langle V \rangle + 2\langle T \rangle = 0$$

4.3.5 Gas perfecto en un volumen  $V$  con presión  $p$  en la superficie entonces  $d\vec{F} = -Pd\vec{s}$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \equiv -\frac{p}{2} \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} \underset{\text{T}^{ma} \text{ Gauss}}{\equiv} -\frac{p}{2} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dv = -\frac{3}{2} pV$$

por tanto

$$\text{T}^{ma} \text{ del Virial para gases perfectos: } \langle T \rangle = \frac{3}{2} pV$$

Según el  $\text{T}^{ma}$  de equipartición, la energía promedio de cada átomo en un gas ideal es  $3k\zeta/2$  ( $\zeta = \text{temperatura}$ ). LA energía cinética promedio total

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} N k \zeta; \quad N \equiv \text{número de átomos/moléculas}, \quad k \equiv \text{cte. de Boltzmann}$$

## 4.4. Sistema de dos cuerpos

4.4.1 **Centro de masas y coordenadas relativas:** Sean dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , con coordenadas  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , respectivamente. Se define

- Coordenadas del CM:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- Coordenadas relativas (desde 1 hacia 2):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Análogamente, puede definirse la velocidad del  $\vec{V}_{CM}$  y la velocidad relativa  $\vec{v}$ .

4.4.2 **Relaciones inversas:**

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_1^{CM} = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_2^{CM} = \vec{R}_{CM} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Para obtener  $\vec{r}_i^{CM}$  se hace uso de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{CM} &= m_1 \vec{r}_1^{CM} + m_2 \vec{r}_2^{CM} = 0 & \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1^{CM} - \vec{r}_2^{CM} \\ \vec{r}_2^{CM} &\rightarrow m_1(\vec{r}_2^{CM}) + m_2 \vec{r}_2^{CM} \rightarrow \vec{r}_2^{CM} = -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_1^{CM} &\rightarrow m_1 \vec{r}_1^{CM} + m_2(\vec{r}_1^{CM} - \vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{r}_1^{CM} = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Análogamente, se obtienen relaciones para  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  a partir de la velocidad del CM  $\vec{V}_{CM}$  y de la velocidad relativa  $\vec{v}$

$$\vec{v}_2^{CM} = -\frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}; \quad \vec{v}_1^{CM} = \frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2}$$

4.4.3 **Masa total:**

$$M = m_1 + m_2$$

4.4.4 **Masa reducida:**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

#### 4.4.5 Descomposición de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2}m_\alpha(v_\alpha^{\text{CM}})^2 + \frac{1}{2}MC_{\text{CM}}^2$$

Trabajando el primer término:

$$\frac{1}{2}m_1(v_1^{\text{CM}})^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^{\text{CM}})^2 = \frac{1}{2}m_1 \frac{m_2^2 v^2}{M^2} + \frac{1}{2}m_2 \frac{m_1^2 v^2}{M^2} = \frac{1}{2}m_1 m_2 v^2 \frac{(m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

Definiendo

$$T_{\text{rel}} \equiv \frac{1}{2}\mu v^2, \quad T_M \equiv \frac{1}{2}MV_{\text{CM}}^2$$

se tiene

$$T = T_{\text{CM}} + T_M = T_{\text{rel}} + T_M$$

$T_{\text{rel}}$  es la energía cinética vista desde CM,  $T_{\text{rel}} = T_{\text{CM}}$ , mientras que  $T_M$  es la energía cinética de toda la masa  $M$  moviéndose con el CM.

#### 4.4.6 Descomposición del momento angular:

$$\vec{L}_O = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) = \sum_{\alpha=1,2} m_\alpha(\vec{r}_\alpha^{\text{CM}} \times \vec{v}_\alpha^{\text{CM}}) + M(\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}}) = \mu(\vec{r} \times \vec{v}) + M(\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}})$$

Se define

$$\vec{L}_{\text{rel}} \equiv \mu(\vec{r} \times \vec{v}), \quad \vec{L}_{\text{CM}} = M(\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}}) = \vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{CM}}$$

donde  $\vec{P}_{\text{CM}}$  es el momento lineal de toda la masa  $M$  moviéndose con el CM. Usando estas definiciones en el resultado de la descomposición se llega a un resultado análogo al de la energía cinética.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{\text{CM}} + \vec{L}_M = \vec{L}_{\text{rel}} + \vec{L}_M}$$

Nótese que  $\vec{L}_{\text{rel}} = \vec{L}_{\text{CM}}$ , mientras que  $\vec{L}_M$  es el momento angular de la masa  $M$  moviéndose con el CM.

#### 4.4.7 Fuerzas internas centrales y energía potencial:

Supóngase que no hay fuerzas externas y que hay homogeneidad e isotropía espacial. La energía potencial será de la forma  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  (potenciales centrales):

$$\begin{aligned} \vec{f}_1^{\text{int}} &= -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ \frac{\partial}{\partial x_{i,1}}(x_{i,1} - x_{i,1}) &= -\frac{\partial}{\partial x_{i,2}}(x_{i,1} - x_{i,2}) \end{aligned}$$

donde el subíndice de  $\vec{\nabla}$  indica la derivada respecto a la posición de la partícula 1 o 2, es decir:

$$\vec{\nabla}_\alpha = \hat{i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

#### 4.4.8 Ecuaciones de movimiento (sin fzas. externas):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_1^{\text{int}} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_2^{\text{int}} \end{cases}$$

pasando a coordenadas relativas se obtiene

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} &= \vec{0} ; \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_1^{\text{int}} + \vec{f}_2^{\text{int}} = \vec{f}_1^{\text{int}} - \vec{f}_1^{\text{int}} = \vec{0} ; \quad m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \vec{\nabla}_1 V, \quad m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_1 \vec{\nabla}_1 V \\ \mu \ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{\nabla} V(r) \end{aligned}$$

En la última ecuación, el potencial sólo depende del módulo de la coordenada relativa dada la isotropía espacial. Nótese que  $x = x_1 - x_2 \Rightarrow \partial/\partial x_1 = \partial/\partial x$ .

Se llega entonces a las siguientes conclusiones:

- 1) El CM se mueve con movimiento uniforme pues no hay fzas. externas.
- 2) El movimiento relativo equivale al de una partícula con la masa reducida  $\mu$  en un potencial central  $V(r)$  con origen de fzas. en la partícula 2.

4.4.9 **Leyes de conservación:** En el movimiento relativo de una partícula con masa reducida  $\mu$  en un potencial central  $V(r)$ , se conserva el momento angular:  $\vec{L}_O = \vec{L}_{\text{rel}} + \vec{L}_M^{\text{CM}}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \mu(\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = \vec{r} \times \vec{f}_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_{12} \parallel \vec{f}_{12} \\ \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = 0, \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^{\text{ext}} = 0, \quad \frac{d\vec{L}_M^{\text{CM}}}{dt} = 0 \end{aligned} \right\} \vec{l} = \vec{L}_{\text{rel}} = \mu(\vec{r} \times \vec{v})$$

En coordenadas polares  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 0$  ( $\equiv$  movimiento en el plano ecuatorial;  $\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta; v_z = 0$ ), para  $\vec{r} = r\hat{u}_r$  se tiene:

- 1) **Conservación de momento angular relativo:**  $\vec{l} = \mu(\vec{r} \times \vec{v}) = (\mu r^2 \dot{\theta})\hat{k}$ :

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$

El sentido del momento angular  $\vec{l}$ , en este caso según  $\pm\hat{k}$ , también se conserva.

- 2) **Conservación de la energía relativa:**

La energía total del sistema se conserva

$$E = T + V(r) = T_M + T_{\text{rel}} + V(r) = \text{cte.}$$

dado que  $V(r)$  no depende explícitamente del tiempo. Como  $\vec{F}^{\text{ext}} = 0, \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}^{\text{ext}}/M = 0$  lo que implica que

$$T_M = \frac{1}{2}MV_{\text{CM}}^2 = \text{cte.}$$

Además  $V(r)$  sólo depende de la coordenada relativa  $r$ , por lo que se define la energía relativa que se conserva:

$$E_{\text{rel}} = T_{\text{rel}} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{cte.}$$

donde se ha utilizado la conservación del momento relativo para escribir  $\dot{\theta} = l/\mu r^2$

4.4.10 Estas leyes de conservación pueden obtenerse directamente integrando una vez las ecs. del mvmt. relativo en coords. polares. En efecto, en el plano  $z = 0$  resulta

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

Las ecs. del mvmt. relativo serán ( $\mu\ddot{r} = -\nabla V(r)$ )

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr} \quad 2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

Multiplicando por  $r$  de la ec. anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

De aquí la conservación del momento angular relativo  $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ . Sustituyendo ahora  $\dot{\theta} = l/\mu r^2$  en  $\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -dV/dr$  y multiplicándola por  $\dot{r}$  obteniendo

$$\frac{d\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}{dt} = \dot{r}\frac{dV}{dr} = -\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\right)}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$$

De aquí la conservación de la energía relativa.

## 4.5. Sistema de masa variable

4.5.1 Se considera un sistema aislado con masa inicial  $m_0$  y velocidad  $v_0$ , que en  $t = 0$  comienza a perder masa, que expulsa con velocidad constante  $u$ , relativa a su sistema en reposo, a razón de  $\dot{m} \equiv dm/dt < 0$  (pérdida de masa). Se supone que en el instante  $t$  la masa restante es  $m(t)$  con velocidad  $v(t)$ . El momento lineal  $P$  del sistema aislado “masa restante” justo antes de expulsar  $dm$  (instante  $m$ ).

$$P(t) = m(t)v(t)$$

y después de expulsar  $dm$  (tras un instante  $dt$ )

$$\begin{aligned} P(t+dt) &= (m(t) + dm)(v(t) + dv) - dm(v(t) - u) = \\ &= m(t)v(t) + m(t)dv + dm dv + u dm \simeq m(t)v(t) + m(t)dv + u dm \end{aligned}$$

$dm dv$  puede despreciarse pues es de orden 2. Aquí  $dm < 0$ . Si no hay fzas. externas, el momento lineal se conserva:

$$P(t) = P(t+dt)$$

y llegamos a la ecuación

$$m(t)dv + u dm(t) = 0 \Rightarrow m(t)\dot{v} = -\dot{m}u$$

Integrando esta ecuación se obtiene la velocidad de la parte del sistema que pierde masa,

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

Una derivación alternativa es:

El momento total del sistema y la derivada son:

$$\vec{P}_{\text{total}} = M \vec{V}_{\text{CM}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{A}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

La derivada en términos de  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \vec{v}_1 \frac{dm_1}{dt} + \vec{v}_2 \frac{dm_2}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Como  $M = m_1 + m_2 = \text{cte.}$ , entonces  $dm_2 = -dm_1$  y se llega a

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_2 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \vec{u} \frac{dm_1}{dt}, \quad \vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Considerando que la fuerza externa actúa de forma independiente sobre los dos sistemas,  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext},1} + \vec{F}_{\text{ext},2}$ , se llega a dos ecuaciones de movimiento. Una para el cohete y la otra para el gas expulsado.

$$\vec{F}_{\text{ext},1} = m_1(t) \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \vec{u} \frac{dm_1}{dt}, \quad \vec{F}_{\text{ext},2} = m_2(t) \frac{d\vec{v}_1}{dt}$$

4.5.2 **Ejemplo 1: El cohete de dos fases.** Un cohete de dos fases consta de la cápsula de masa  $m$  más dos contenedores con combustible. Partiendo del reposo, el primer contenedor comienza a expulsar gases, a causa de la combustión, con velocidad constante  $u$  respecto de la cápsula. Cuando el combustible de esta fase se desprende del contenedor y comienza a actuar la segunda fase, se desprende el contenedor y comienza a actuar la segunda fase. Sabiendo que la masa de la cápsula más el segundo contenedor (combustible incluido) es de  $nm$ , que la masa total es, inicialmente  $Nm$  y que, para cada contenedor se tiene

$$r = \frac{\text{masa contenedor sin gas}}{\text{masa contenedor con gas}}$$

obtener en función de  $n, N, r$  y  $u$

- a) La velocidad del cohete al finalizar la primera fase.
- b) La velocidad del cohete al finalizar la segunda fase.
- c) La velocidad del cohete si sólo tuviese una fase formada por los dos contenedores, o lo que es lo mismo, si el cohete no se desprende del primer contenedor.
- d) La relación entre  $n$  y  $N$  para que la velocidad de escape después de la segunda fase sea máxima. Comprobar que, en este caso, la velocidad al final de la segunda fase es el doble que la velocidad al final de la primera fase.
- e) Hacer los cálculos de d) para  $mN = 1000$  T,  $u = 7000$  km h<sup>-1</sup>, teniendo en cuenta que la masa del combustible es de 90 T y que la masa de la cápsula es despreciable frente a la de los contenedores llenos de combustible.

#### 4.5.3 Solución:

- a) En la primera fase

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

La masa en la primera fase con gases es  $mN - mn$  y tras liberar los gases es de  $r(mN - mn)$

$$m_{1,\text{inicial}} = mN; \quad m_{1,\text{final}} = mn + (mN - mn)r; \quad v_0 = v_{1,\text{inicial}} = 0$$

por tanto

$$v_{1,\text{final}} = u \ln \frac{N}{n + rN - rn}$$

- b) En la segunda fase se tiene que la masa de la cápsula más la segunda fase con sus gases es  $mn$ , de la segunda fase con gases  $mn - m$  y de la segunda sin gases  $r(mn - m)$

$$m_{2,\text{inicial}} = nm, \quad m_{2,\text{final}} = m + (mn - m)r, \quad v_{2,i} = v_{1,f}$$

por tanto

$$v_{2,f} = u \ln \frac{m_{1,i}}{m_{1,f}} + u \ln \frac{m_{2,f}}{m_{1,f}} = u \ln \frac{nN}{(n + rn - rn)(1 + rn - r)}$$

- c) Si el cohete tuviese una sola fase

$$m_i = mN, \quad m_f = m + m(N - 1)r, \quad v_i = 0$$

por tanto

$$v_f = u \ln \frac{N}{1 + rN - r}$$

Nótese que para  $n = N$ ,  $v_f = v_{2,f}$ . Efectivamente, si  $n = N$  sólo hay una fase.

- d) Se ha de igualar a cero la derivada de  $v_{2,f}$  respecto a  $n$ :

$$= \frac{d}{dn} \{ \ln N + \ln n - \ln (n + rN - rn) - \ln (1 + rn - r) \}$$

de donde

$$\frac{1}{n} - \frac{1 - r}{n + rN - rn} = \frac{r}{1 + rn - r} = 0$$

Reagrupando fracciones e igualando el numerador a cero, se obtiene

$$r(r - 1)(n^2 - N) = 0 \rightarrow n = \sqrt{N}$$

Es inmediato comprobar que con esta condición

$$v_{2,f} = 2v_{1,f} = 2u \ln \frac{\sqrt{N}}{1 + r\sqrt{N} - r}$$

- e) Como dato no dan  $r$ , sino la masa del combustible total ( $c = c_1 + c_2 = 900$  T). Se debe hallar la relación de  $r$  con  $c$ , que es la misma para ambas fases:

$$\text{fase 1: } r = \frac{Nm - nm - c_1}{Nm - nm} = 1 - \frac{c_1}{Nm - nm}, \quad \text{fase 2: } r = \frac{nm - m - c_2}{nm - m} = 1 - \frac{c_2}{nm - m}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son las masas de los gases en cada una de las fases y  $c$  la masa total de combustible  $c = c_1 + c_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{Nm - nm} &= \frac{c_2}{nm - m} \text{ con } c_2 = c - c_1 \rightarrow c_1 = \frac{N-n}{N-1}c \simeq \frac{N-n}{N}c \\ c_2 &= \left(1 - \frac{N-n}{N-1}\right)c \simeq \frac{n}{N}c \end{aligned}$$

Ahora, utilizando que para el caso óptimo del apartado d), se cumple  $n = \sqrt{N}$ , se calcula el valor de  $r$  (por ejemplo sustituyendo la ec. anterior en  $r$  para la fase 1):

$$r = 1 - \frac{c}{Nm - m} \simeq 1 - \frac{c}{Nm}$$

Con los datos dado en el enunciado ( $c = 900$  T,  $Nm = 100$  T;  $m \simeq 10$  T  $\Rightarrow N \simeq 100$ ) se sustituye

$$r \simeq 1 - \frac{900}{1000} = 0,1$$

Utilizando nuevamente los datos del enunciado ( $u = 7000$  km h $^{-1}$ ) y sustituyendo para el caso  $n = \sqrt{N} \gg 1$  en la  $v_{2,f}$

$$v_{2,f} = 2v_{1,f} = 2u \ln \frac{\sqrt{N}}{1 + r\sqrt{N} - r} \simeq 23250 \text{ km h}^{-1} \simeq 6,5 \text{ km s}^{-1}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape de la Tierra es de 6,5 km s $^{-1}$ , el cohete no podrá escapar del campo de influencia de la atracción gravitatoria terrestre.

Nótese que, en el caso óptimo  $n = \sqrt{N}$ , la masa de la cápsula es despreciable frente a la de los contenedores (la aproximación  $\frac{\sqrt{N}}{1 + r\sqrt{N} - r} \simeq \frac{1}{r}$  sólo puede hacerse si  $r\sqrt{N} \gg 1$ ! en este caso  $r\sqrt{N} = 0,1\sqrt{100} = 1$  y no puede utilizarse el resultado aproximado), lo importante es que hayan dos fases, ya que se sigue cumpliendo

$$v_{2,f} = 2v_{1,f} \simeq -2u \ln r$$

mientras que para una sola fase

$$v_f = u \ln \frac{N}{1 + rN - r} \simeq -u \ln r$$

**4.5.4 Ejemplo 2: el problema de la cinta transportadora.** Una parte del sistema (la cinta transportadora) va incrementando su masa a razón de  $dm/dt > 0$  (se descarga arena desde una tolva) manteniendo cte. su velocidad  $v = \text{cte.}$  debido a una fuerza externa  $\vec{F}_{\text{ext}}$  (sistema no aislado). Por tanto  $P_{\text{antes}}(t) = m(t)v$ , después de la descarga  $P_{\text{des}}(t) = (m(t) + dm)v$ . La variación del momento de la cinta  $dP(t) = vdm$  será debida a una fuerza externa  $F^{\text{ext}}$ , por tanto

$$F^{\text{ext}} = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt}v$$

La potencia para mantener con velocidad cte. la cinta (trabajo por unidad de tiempo) es:

$$\frac{dW_{F^{\text{ext}}}}{dt} = F^{\text{ext}} \frac{dx}{dt} = F^{\text{ext}}v = \frac{dm}{dt}v^2$$

Resulta interesante compararlo con el cambio de energía cinética  $\Delta T$  del sistema

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 = \frac{1}{2} \frac{dW_{F^{\text{ext}}}}{dt}$$

Se pierde la mitad de la potencia a causa de la energía disipada por el rozamiento con la cinta transportadores. Esto se debe a que no se ha incluido la fza. de rozamiento para que la arena se mueva solidaria con la cinta

$$dW_T = dW_{F^{\text{ext}}} + dW_{\text{roz}} = dT = \frac{1}{2} dW_{F^{\text{ext}}} \rightarrow -\frac{1}{2} dW_{F^{\text{ext}}}$$

Demostración:

La fza. de rozamiento sobre la arena viene dada por

$$dF_{\text{roz}} = \mu(dm)g \rightarrow a = \frac{dF_{\text{roz}}}{dm} = \mu g$$

Distancia que tarde en adquirir velocidad  $v$  y moverse solidaria con la cinta:

$$v = at_d \quad \& \quad d = \frac{1}{2}at_d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu g}$$

La fza. de roz. que siente la cinta es ( $F_{\text{roz,cinta}} = -F_{\text{roz,arena}}$ )

$$dW_{\text{rox}} = dF_{\text{roz,cinta}}d = -\mu(dm)g \frac{v^2}{2\mu g} = -\frac{1}{2}(dm)v^2 = -\frac{1}{2}dW_{F^{\text{ext}}}$$

4.5.5 En general, para una parte del sistema que cambia la masa y la velocidad, y está sometida a una fza. externa  $\vec{F}^{\text{ext}}$ , se tiene

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{P} = \frac{d\vec{P}}{dt} m \vec{v} = \frac{dm}{dt} m v^2 + m^2 \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} m v^2 \frac{dm}{dt} + m \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 + m^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = T \frac{dm}{dt} + m \frac{dT}{dt} = \frac{d(mT)}{dt}$$

Por ejemplo, la cinta transportadores sin fza. externa  $\left( \frac{d(mT)}{dt} = 0 \Rightarrow mT = \text{cte.} \right)$  gana masa pero pierde energía.

#### 4.6. Boletín 4

## 5. Campos y movimiento en campos centrales

5.1. Potencial gravitatorio de una distribución de masas . . . . .	54
5.2. Teorema de Gauss . . . . .	57
5.3. Desarrollos multipolares: las mareas ( <b>importante</b> ) . . . . .	60
5.4. Movimiento en un potencial central . . . . .	63
5.5. Órbitas en un potencial central . . . . .	66
5.6. Potencial de Kepler . . . . .	68
5.7. Órbitas de Kepler . . . . .	69
5.8. Leyes de Kepler . . . . .	73
5.9. Satélites terrestres . . . . .	74
5.10. Boletín 5. Parte 1 . . . . .	75

### 5.1. Potencial gravitatorio de una distribución de masas

#### 5.1.1 Fuerza gravitatoria de $m_i$ sobre $m$ :

$$\vec{F}_G = (\vec{r}) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad G \equiv \text{cte. de gravedad}$$

Recuérdese que la fza. de Coulomb es análoga, sustituyendo la cte.  $-G$  por la cte. eléctrica en el vacío y las masas por cargas eléctricas. Esta fza. como función de  $\vec{r}$  **no** es central respecto del origen de coordenadas  $\vec{F}_G \neq f(r)\hat{u}_r$ . Es central respecto del origen de fzas. en  $m_i$  ( $\vec{F}_G(\vec{r}) = f(|\vec{r} - \vec{r}_i|)\hat{u}_{\vec{r} - \vec{r}_i}$ ) lo que quiere decir que el momento angular se conserva respecto al origen situado en  $m_i, O_{m_i}$ <sup>†</sup>.

$$\vec{N}_{O_{m_i}} = (\vec{r} - \vec{r}_i) \times \vec{F}_G(\vec{r}) = \vec{0}$$

Sí es conservativa respecto a  $O$  (y respecto al origen de fzas.  $O_{m_i}$ ).

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{F}_G(\vec{r}) = \vec{0}$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{F}_G(\vec{r}) &= -G m_i m \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial_x}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} & \frac{\partial_y}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} & \frac{\partial_z}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \\ (x - x_i) & (y - y_i) & (z - z_i) \end{array} \right| = -G m_i m \left( \partial_y \frac{(z - z_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} - \partial_z \frac{(y - y_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right) + \dots \\ &= 3 \frac{G m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^4} \hat{i} [(z - z_i) \partial_y |\vec{r} - \vec{r}_i| - (y - y_i) \partial_z |\vec{r} - \vec{r}_i|] + \dots \\ &= 3 \frac{G m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^5} \hat{i} [(z - z_i)(y - y_i) - (y - y_i)(z - z_i)] + \dots = \vec{0} \end{aligned}$$

con

$$\partial_{\alpha} |\vec{r} - \vec{r}_i| = \partial_{\alpha} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = \frac{\alpha - \alpha_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad \alpha = x, y, z$$

La demostración es más sencilla si se hace el cambio  $\vec{r}_{1i} = \vec{r} - \vec{r}_i$ , notando que  $\vec{\nabla}_{\vec{r}_{1i}} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ , ( $\partial_{x_{1i}} = \partial_x$ ) y usando coords. esféricas respecto a  $O_{m_i}$  (Este cambio equivale a identificar  $\hat{r}_{1i} \equiv \hat{r}$ ).

La fza. grav. es central respecto del origen de fzas. en  $m_i$  ( $\vec{F}_G = f(|\vec{r} - \vec{r}_i|)(\vec{r} - \vec{r}_i)$ ) lo que quiere decir que el momento angular se conserva respecto al origen situado en  $m_i$

$$(\vec{r} - \vec{r}_i) \times \vec{F}_G(\vec{r}) = \vec{0}$$

<sup>†</sup>Si  $\vec{r}_i = \vec{0}$ , entonces  $O = O_m$  y es central respecto a  $O$ .

5.1.2 **Energía potencial de  $m$  debida a la fuerza gravitatoria de  $m_i$ :** Teniendo en cuenta que, por ser  $\vec{F}_G$  conservativo,

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V_G(\vec{r})$$

siendo

$$V_G(\vec{r}) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad \left( \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}_i| = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)$$

donde se ha tomado el origen de potencial (potencial nulo) en  $\vec{r} \rightarrow \infty$

**Demostración**

$$-\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \vec{\nabla}_{\vec{r}} |\vec{r} - \vec{r}_i| = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

con

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} |\vec{r} - \vec{r}_i| = \partial_x |\vec{r} - \vec{r}_i| \hat{i} + \dots = \frac{x - x_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \hat{i} + \dots = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

en lo que sigue el subíndice en el gradiente será omitido  $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ . Puede obtenerse  $V_G(\vec{r})$  de la circulación, T3.10.3, eq. 61 identificando  $\vec{r}_{1i} \equiv \vec{r}$

5.1.3 **Campo gravitatorio generado por una masa  $m_i$ :** es la fuerza sobre la unidad de masa (es una aceleración).

$$\vec{c}_G(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

5.1.4 **Potencial gravitatorio generado por una masa  $m_i$ :** es la energía potencial  $V_G$  por unidad de masa

$$\Phi_G(\vec{r}) = \frac{V_G(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

El potencial gravitatorio tiene dimensiones de *fuerza por unidad de masa × distancia* (o energía por unidad de masa). Se cumple

$$\vec{c}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi_G(\vec{r})$$

5.1.5 **Potencial gravitatorio de un sistema de masas  $\{m_i\}$ :** como las fuerzas se suman y el operador gradiente es lineal, se tiene

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

5.1.6 **Potencial de una distribución de masa  $\rho(\vec{r})(dm = \rho dV)$ :**

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.1)$$

Para una distribución de masa en dos dims.  $\sigma(\vec{r}')$  o en una  $\lambda(\vec{r}')$  se usa  $dm' = \sigma dS'$  o  $dm' = \lambda dl'$ , respectivamente.

5.1.7 **Potencial de una distribución esférica de masa con  $\rho(r')$ , y radio  $R$ :** En coordenadas esféricas para  $\vec{r}'$ , con origen en el centro de la distribución de masa y la mas unidad situada en el eje  $z$ , se tiene

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2} \quad (5.2)$$

Integrando la parte angular de  $d^3 \vec{r}' = r'^2 \sin \theta d\theta d\phi$  se obtiene

$$\Phi_G(r) = -2\pi G \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' \times \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2}} = -2\pi G \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' \times \left[ \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2} \right]_0^\pi$$

$$= -2\pi G \int_0^R \rho(r') \frac{r'}{r} dr' \times [(r+r') - |r-r'|]$$

Finalmente se obtiene

$$\Phi_G(r) = -2\pi G \int_0^R \rho(r') \frac{r'}{r} dr' \begin{cases} 2r'^2/r, & r' \leq r \\ 2r' & r' \geq r \end{cases} = -G \int_0^M dm' \begin{cases} 1/r, & r' \leq r \\ 1/r' & r' \geq r \end{cases} \quad (5.3)$$

donde se define (integrando la parte angular de  $dm'(r', \theta, \phi) = \rho(r') d^3\vec{r}'$ )

$$dm' = 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

$dm'$  = masa de una capa esférica de radio  $r'$

#### 5.1.8 Potencial de una capa esférica de masa $dm'$

$$d\Phi_G(r, r') = -G dm' \begin{cases} 1/r, & r' \leq r \quad (\text{exterior de la capa}) \\ 1/r', & r' \geq r \quad (\text{interior de la capa}) \end{cases}$$

Consecuencias:

1. El potencial en el exterior de una capa esférica es **como si la masa estuviese en el centro**  $r' = 0$
2. potencial e el interior de una capa esférica es cte. (indep. de  $r$ )
3. El campo en el interior de una capa esférica es nulo

#### 5.1.9 Potencial de una distribución uniforme de radio $R$ y masa $M = 4/3\pi\rho R^3$

Nótese que se ha de hacer

$$\begin{aligned} r \leq R : \Phi_G(r) &= -4\pi\rho \int_0^r \frac{r'^2}{r} dr' - 4\pi G \rho \int_r^R r' dr' \\ r \geq R : \Phi_G(r) &= -4\pi G \int_0^R \frac{r'^2}{r} dr' \end{aligned}$$

$$r \geq R : \Phi_G(r) = -GM \begin{cases} 1/r, & r \geq R \\ 3/2R - r^2/2R^3, & r \leq R \end{cases}$$

- 1) Hay continuidad del potencial en  $r = R$ .
- 2) El potencial en el exterior de la distribución esférica de masa es **como si toda la masa estuviese en el centro**.

#### 5.1.10 Campo gravitatorio generado por una distribución de masa, $\rho(\vec{r}')$ :

$$\vec{C}_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (5.4)$$

#### 5.1.11 Campo gravitatorio de una distribución esférica **uniforme** de radio $R$ y de mas $M = 4/3\pi\rho R^3$ . Tomando el gradiente del potencial se obtiene

$$\vec{C}_G = -GM \begin{cases} \hat{r}/r^2, & r \geq R \\ (r^3/R^3)\hat{r}/r^2 & r \leq R \end{cases}$$

1. Hay continuidad del campo en  $r = R$ .

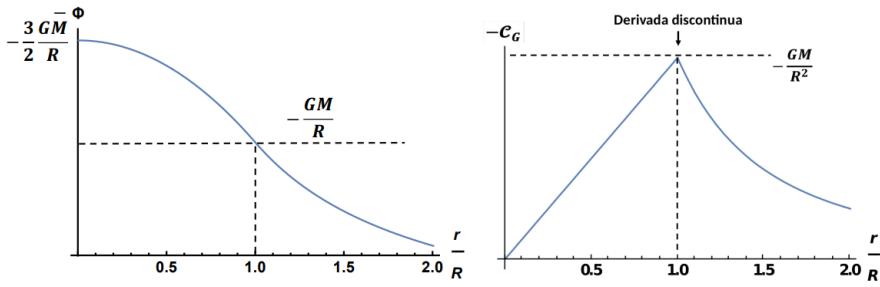


Figura 5.1: Distribución uniforme esférica de masa; izqda: potencial  $-\Phi_G$ ; derecha: campo  $\mathcal{C}_G$

2. El campo en el exterior de la distribución esférica de masas es **como si toda la masa estuviese en el centro**.
3. El campo en el interior de la distribución esférica a una distancia  $r < R$  se debe solo a la masa en  $r' < r$ .

5.1.12 **Nota:** Este resultado para el campo gravitatorio, podría obtenerse también integrando directamente el campo de una corteza esférica.

$$d\mathcal{C}_G(\vec{r}, r') = -\vec{\nabla} d\phi_G(r, r') = -Gdm' \begin{cases} \hat{r}/r'^2, & r \geq r' \\ 0, & r \leq r' \end{cases}$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} r \geq R : \vec{\mathcal{C}}_G(\vec{r}, r') &= -G \frac{\hat{r}}{r'} \int_0^M dm' = -G \frac{\hat{r}}{r'^2} M \\ r \leq R : \vec{\mathcal{C}}_G(\vec{r}, r') &= -G \frac{\hat{r}}{r'^2} \int_0^{M(r)} dm' = -G \frac{\hat{r}}{r'^2} M_r \quad \text{con } M_r = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3} \end{aligned}$$

## 5.2. Teorema de Gauss

5.2.1 **Enunciado:** Sea  $\vec{\mathcal{C}}_G(\vec{r})$  generado por una distribución de masa  $M_V$  distribuida espacialmente con densidad  $\rho(\vec{r}')$ . Sea  $S$  una superficie cerrada que envuelve un volumen  $V$ , entonces el flujo del campo gravitatorio cumple

$$\oint_S \vec{\mathcal{C}}_G \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3 r' = -4\pi GM_V \quad (5.5)$$

5.2.2 **Demostración:** para una masa puntual  $m_i$  situada en el origen de coords.  $\vec{r}_i = 0$ , se tiene ( $d\vec{s} = \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{u}_r}_{d\Omega} + r \sin \theta dr d\phi \hat{u}_\theta + r dr d\theta \hat{u}_\phi$ )

$$\vec{\mathcal{C}}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -G \frac{m_i}{r^2} (\hat{u}_r \cdot d\vec{s}) = -G \frac{m_i}{r^2} (r^2 d\Omega) = -G m_i d\Omega \quad (5.6)$$

$$d\Omega = \frac{\hat{u}_r d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cos \phi}{r^2}$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido del elemento de superficie visto desde la masa puntual y  $\psi$  es el ángulo que forman  $\hat{r}$  y  $d\vec{s}$ . Nótese que si la superficie  $S$  es esférica,  $\psi = 0$ .

$$d\vec{s}_{\text{esf}} = ds_{\theta\phi} \hat{u}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{u}_r = r^2 d\Omega \hat{u}_r \quad (5.7)$$

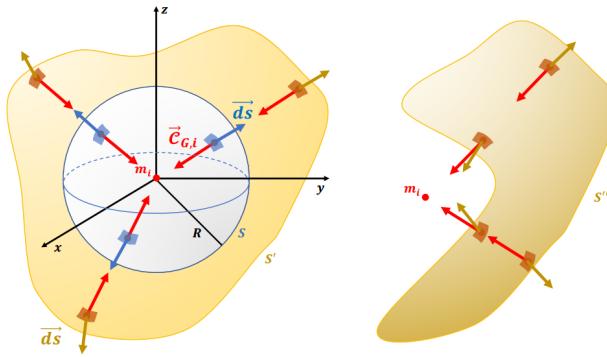
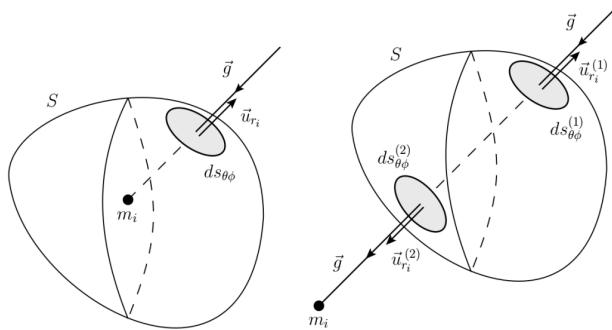


Figura 5.2: La figura de la izquierda representa una masa puntual,  $m_i$ , envuelta por una superficie esférica,  $S$ , y una superficie arbitraria,  $S'$ . El flujo de campo gravitatorio que atraviesa ambas superficies es el mismo. En la figura derecha, la masa puntual,  $m_i$ , se halla fuera de la superficie cerrada  $S''$ . El flujo de campo grav. que atraviesa  $S''$  es 0.

- Para una circunferencia de radio  $R$ , el arco  $dl$ , visto desde el centro con ángulo  $d\phi$ , es  $dl = R d\phi$ . El ángulo es, entonces,  $d\phi = dl/R$ . El ángulo total de la circunferencia vale  $2\pi$  (visto desde un punto interior a la circunferencia).
- Para una superficie esférica de radio  $R$ , el elemento de superficie  $ds$ , visto desde el centro es  $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . El ángulo sólido es  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = ds/R^2$ . El ángulo sólido total de la superficie esférica es de  $4\pi$  (visto desde un punto interior a la superficie).

Pero, dependiendo si la masa está fuera o dentro de la superficie cerrada  $S$ , se distinguen dos casos



$$\text{Dentro: } \iint_S \vec{c}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -Gm_i \int_{\Omega} d\Omega = -Gm_i \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -Gm_i 4\pi \quad (5.8)$$

$$\text{Fuera: } \iint_S \vec{c}_{G,i} \cdot (d\vec{s}^{(1)} + d\vec{s}^{(2)}) = -Gm_i \int_{\Omega} (\hat{u}_r \cdot (\hat{u}_r^{(1)} + \hat{u}_r^{(2)})) = 0$$

De aquí que haya que integrar las masas encerradas por  $S$ . Nótese que el flujo que atraviesa la superficie  $S$  es el mismo que el que atraviesa la superficie arbitraria cerrada  $S'$ . Por tanto, si la masa puntual está envuelta por una superficie cerrada, se cumple (combinando (5.6) y (5.8))

$$\iint_S \vec{c}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -4\pi G m_i. \quad (5.9)$$

Es evidente que este resultado puede extenderse a cualquier conjunto de partículas encerrado en  $S$ :

$$\iint_S \sum_i \vec{c}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \sum_i m_i, \quad (5.10)$$

o, introduciendo  $\vec{C}_G := \sum_i \vec{C}_{G,i}$  (campo grav. total en cada punto) y  $M = \sum_i m_i$  (masa total)

$$\oint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = -4\pi GM \quad (5.11)$$

Generalizar el resultado obtenido para un conjunto discreto de partículas al caso continuo es trivial.

**5.2.3 Demostración (caso continuo):** Resultados previos ( $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}'| &= \partial_x(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2})\hat{i} + \partial_y(\dots)\hat{j} + \partial_z(\dots)\hat{k} \\ &= \frac{x-x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\hat{i} + \frac{y-y'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\hat{j} + \frac{z-z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\hat{k} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \forall r \neq r'. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - 3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} = 0 \quad \forall r \neq r' \end{aligned} \quad (5.13)$$

Suponiendo que  $V'$  es el vol. que contiene la distribución de masa que crea el campo grav. Se comprobará que fuera ( $r > r'$ ) de este vol.  $\vec{\nabla} \vec{C}_G = 0$  ( $V'$  no depende de  $r$ ):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G = \vec{\nabla} \cdot \left( -G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \right) = -G \iiint_{V'} \vec{\nabla} \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)^0 \rho(\vec{r}') d^3 r' = 0. \quad \text{si } r > r'. \quad (5.14)$$

Utilizando la definición de campo grav. creado por una distribución continua de masa (5.4) y el vol.  $V'$  (donde está contenida la masa) se descompone como  $V' = (V' \cap V) \cup (V' - V)$ . Además,  $S_{\cap} = V' \cap V$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV = \iiint_{V \cap V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV + \iiint_{V - V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV = \oint_{S_{\cap}} \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = \\ &= \oint_{S_{\cap}} \left( -G \iiint_{V' \cap V} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot d\vec{s} = \left[ \begin{array}{l} \text{intercambiando integrales} \\ \text{de volumen y superficie} \end{array} \right] = \\ &= -G \iiint_{V \cap V'} \left( \oint_{S_{\cap}} \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{d\Omega(\vec{r})} \right) \rho(\vec{r}') d^3 r' = -G \iiint_{V \cap V'} \left( \oint_{S_{\cap}} d\Omega(\vec{r}) \right)^{4\pi} \rho(\vec{r}') d^3 r' = -4\pi G M_V. \end{aligned} \quad (5.15)$$

**5.2.4 Forma diferencial del T<sup>ma</sup> de Gauss:** Del T<sup>ma</sup> de Gauss (5.6) y del T<sup>ma</sup> de la divergencia se tiene

$$blue \oint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{\nabla} \vec{C}_G d^3 r' = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad (5.16)$$

$$blue \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})$$

En función de  $\Phi_G$ , como  $\vec{C}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi_G(\vec{r})$ , la ecuación anterior se convierte en

$$\boxed{\nabla^2 \Phi_G(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})} \quad (5.17)$$

**Ecuación de Poisson** del potencial gravitatorio generado por  $\rho(\vec{r})$

**5.2.5 Campo de una distribución esférica de masa  $\rho(\vec{r})$  centrada en el origen.** Sea  $\vec{C}_G(\vec{r}) = g(r)\hat{r}$  y  $S_r$  una superficie esférica centrada en el origen de radio  $r$ . Por un lado

$$\oint\int_{S_r} \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = \oint\int_{S_r} g(r)r^2 d\Omega = g(r)r^2 \oint\int_{S_r} d\Omega = 4\pi r^2 g(r) \quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta ahora el T<sup>ma</sup> de Gauss (5.6), de la anterior relación se llega a

$$g(r) = -\frac{G}{r^2} \iiint_{V_r} \rho(r') d^3 r' = -G \frac{M_r}{r^2}$$

Se obtiene así el campo  $g(r)$  de una distribución esférica de masa a una distancia  $r$ , donde  $V_r$  es el volumen de la esfera de radio  $r$  encerrada por  $S_r$  y  $M_r$ , es la masa encerrada por  $S_r$ . El campo es equivalente al de una masa puntual de valor igual a la masa total encerrada por  $S_r$ .

La dependencia con el módulo  $r'$  de  $\rho(r')$  garantiza que el campo resultante sea central. Si la distribución de masa depende de los ángulos  $(\theta, \phi)$  el campo resultante no tiene por qué ser central y el término  $\oint\int_{S_r} \vec{C}_G \cdot d\vec{s}$  no es trivial de calcular.

### 5.3. Desarrollos multipolares: las mareas (**importante**)

**5.3.1 Desarrollo de la fuente extensa de potencial:** Recuérdese que el potencial debido a una distribución de masa es (5.1)

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.1)_r$$

Considérese el origen de coordenadas en la zona de la distribución de masas y se supone que esta zona es pequeña comparada con la distancia al punto de influencia ( $r' \ll r$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( -\frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2} \right)}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &\stackrel{\text{Taylor}}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \left( \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8r} \left( \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}' - r'^2}{r^2} \right)^2 \mathcal{O}(r'^4) \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} \end{aligned}$$

**5.3.2 Términos multipolares del potencial:** puede escribirse

$$\Phi_G(\vec{r}) \approx \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) \quad (5.19)$$

donde los **términos multipolares del potencial** son

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}) &= -\frac{G}{r} \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3 r' = -\frac{MG}{r} \quad \text{monopolar} \\ \Phi_1(\vec{r}) &= -\frac{G}{r^3} \iiint_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{dipolar} \\ \Phi_2(\vec{r}) &= -\frac{G}{2r^5} \iiint_V [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{cuadrupolar} \end{aligned}$$

**5.3.3 Mareas:** Se desarrollará la zona de influencia en la Tierra del campo gravitatorio creado por la Luna, como fuente puntual. Considérese el origen de coordenadas en el centro de la Tierra y que el tamaño de la Tierra es pequeño comparado con la distancia a la Luna, situada en el eje  $OX$ . El potencial lunar, como fuente puntual o con simetría esférica, en un punto  $\vec{r}$  de la Tierra, será

$$\left. \Phi(\vec{r}) = -GM_L \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}_L|} \right\} \approx -GM_L \left[ \frac{1}{d_L} + \frac{\vec{d}_L \cdot \vec{r}}{d_L^3} + \frac{3(\vec{d}_L \cdot \vec{r})^2 - d_L^2 r^2}{2d_L^5} \right]$$

**5.3.4 Términos multipolares del potencial:** puede escribirse

$$\Phi(\vec{r}) \approx \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -G \frac{M_L}{d_L} \quad \text{monopolar} \\ \Phi_1(\vec{r}) &= -GM_L \frac{\vec{d}_L \cdot \vec{r}}{d_L^3} \quad \text{dipolar} \\ \Phi_2(\vec{r}) &= -GM_L \frac{3(\vec{d}_L \cdot \vec{r})^2 - d_L^2 r^2}{2d_L^5} \quad \text{cuadrupolar} \end{aligned}$$

Para  $\vec{d}_L = d_L \hat{i} \rightarrow \vec{d}_L \cdot \vec{r} = d_L \hat{i} \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) = d_L x = d_L r \sin \theta \cos \phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vec{r}) &= -G \frac{M_L}{d_L^2} \vec{r} = -G \frac{M_L}{d_L^2} r \sin \theta \cos \phi \\ \Phi_2(\vec{r}) &= -G \frac{M_L}{2d_L^3} (3\vec{r}^2 - 3) = -G \frac{M_L}{2d_L^3} r^2 (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \end{aligned}$$

**5.3.5 Términos multipolares del campo gravitatorio,  $\vec{c} = -\vec{\nabla}\Phi$ , de la Luna sobre la Tierra:**

El primer término del desarrollo se anulará (es independiente de  $r$ )

$$\vec{c}_G = \vec{0}$$

El segundo término dipolar

$$\vec{c}_1(\vec{r}) = G \frac{M_L}{d_L^2} \hat{i}$$

es cte. en toda la esfera terrestre, como si la Tierra fuera puntual, y origina el movimiento planetario. El término cuadrupolar (particularizado a  $\vec{d}_L = d_L \hat{i}$ )

$$\vec{c}_2(\vec{r}) = G \frac{M_L}{d_L^3} (3\vec{r} \hat{i} - \vec{r})$$

origina las mareas de la superficie terrestre.

**5.3.6 Movimiento de las mareas:** La Tierra gira sobre un eje aproximadamente perpendicular al eje Tierra-Luna, por ejemplo, el eje  $OZ$ , con el Ecuador en el plano  $XY$ . En las zonas del Ecuador en dirección de la Luna, es decir, con  $\vec{r} = \pm R_T \hat{i}$ ,  $\vec{x} = \pm R_T$ , el campo vale

$$\vec{c}_2(\pm R_T \hat{i}) = G \frac{M_L}{d_L^3} (3\vec{r} \hat{i} - \vec{r}) = \pm G \left( \frac{2M_L R_T}{d_L^3} \right) \hat{i}$$

y por tanto se dirige hacia fuera de la Tierra, mientras que para  $\vec{r} = \pm R_T \hat{j}$ ,  $x = 0$ , el campo vale

$$\vec{C}_2(\pm R_T \hat{j}) = \mp G \left( \frac{M_L R_T}{d_L^3} \right) \hat{j}$$

y se dirige hacia dentro. Por tanto, se producen dos pleamares y dos bajamares diarios en cada zona del Ecuador. En los demás paralelos el campo va cambiando progresivamente hasta llegar a los polos,  $\vec{r} = \pm R_T \hat{k}$  donde siempre actúa hacia dentro.

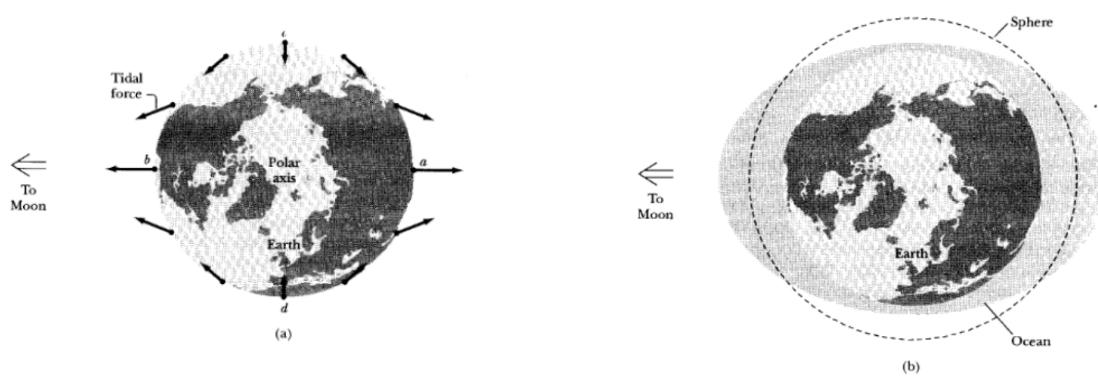


Figura 5.3: en (a) las fuerzas de marea se muestran en diversos sitios de la superficie terrestre. En (b) se ve de modo “exagerado” las mareas terrestres

**5.3.7 Intensidad de las mareas:** En el equilibrio, el cambio de potencial lunar causado por  $\Phi_2(\vec{r}) = -G \frac{M_L}{2d_L^3} r^2 (3\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1)$  se ha de compensar con el cambio de potencial terrestre causado por la altura  $h$  del agua:

$$\Phi_2^L(\vec{r}) + gh = \text{cte.} \quad (5.21)$$

con  $r = R_T$  y

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

lleva a

$$h = \frac{M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} (3\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) + \text{cte.}$$

En el ecuador el efecto se maximiza ( $\theta_{\max} = \pi/2, \sin \theta = 1$ ), y el efecto máximo  $\Delta h_{\max}(\theta_{\max}) = h_{\max}(\theta_{\max}, \phi_{\max}) - h_{\min}(\theta_{\max}, \phi_{\min})$  se obtienen para  $\phi_{\max} = \{0, \pi\}$  y  $\phi_{\min} = \{\pi/2, 3\pi/2\}$

$$\Delta h_{\max}(\theta_{\max}) = h_{\max} - h_{\min} = \frac{2M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} + \frac{M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} = \frac{3M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} \sim 72\text{cm}$$

### COMPLETAR ESTO DIAPO 32

( $R_L = 1738$  km,  $R_T = 6378$  km,  $R_S = 695000$  km,  $M_L/M_T = 1/81$ ,  $M_S/M_T = 333000$ ,  $d_{TL} = 348000$  km,  $d_{TS} = 150 \times 10^6$  km)

- Cuando el sistema Sol-Tierra-Luna están alineados (Luna llena o nueva) el efecto de las mareas se suma (balón de rugby en la misma dirección, siendo la magnitud del Sol 1/3 de la Luna).
- Cuando Luna  $\perp$  Sol (Luna Mengante o Creciente) los efectos de las mareas se restan (balón de rugby en direcciones perps. tendiendo a la esfera de la capa oceánica).

## 5.4. Movimiento en un potencial central

5.4.1 Considerando una partícula de masa  $m$  sometida a una fza. central

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

con  $\hat{r} = \vec{r}/r$ . Como toda fza. central es conservativa ( $E = \text{cte.}$ ), se tiene que

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{u}_r \quad (5.22)$$

donde  $V(r)$  es la energía potencial de la partícula de masa  $m$  en el campo central.

Además, como ya se ha visto, para una fza. central se conserva el momento angular  $\vec{L}_O = \text{cte.}$ , lo que exige que el mvmto. se desarrolle en un plano que pasa por el origen de fzas. ( $\vec{r}_i = \vec{0}$ ),  $Oxs$ .

$\Rightarrow$  Puede describirse el mvmto. en coords. polares (coordenadas cilíndricas eligiendo el plano con  $z = \text{cte.} = 0$ ).

5.4.2 **Coordenadas polares**  $(r, \theta)$ : Considérese el mvmto. en el plano  $XY$  tal que

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Se define de forma usual la referencia local  $\hat{u}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\hat{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , de modo que

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta$$

5.4.3 **Ecuaciones de movimiento:** Partiendo de la segunda ley de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = -dV(r)/dr \hat{u}_r \quad (5.23)$$

Igualando los coeficientes de  $\hat{u}_r$  y  $\hat{u}_\theta$  a los correspondientes de la fza.

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -dV/dr \quad (5.24)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (5.25)$$

5.4.4 **Leyes de conservación (integrales primeras):** Conservación del momento angular (demostrado en el tema anterior): La segunda ecuación puede reescribirse, multiplicando por  $mr$ , como

$$mr(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}) = d(mr^2\dot{\theta})/dt = 0$$

donde

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{cte.}$$

5.4.5 **Conservación de la energía (demostrado en el tema anterior):** Multiplicando por  $\dot{r}$  la primera ec. de Newton y teniendo en cuenta que  $\dot{r}dV(r)/dr = dV/dt$ , se obtiene

$$\dot{r} \left( m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} \right) + \frac{dV(r)}{dt} = 0$$

Por otro lado, la energía cinética  $T$  vale ( $\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$ ):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

de modo que, para la energía total  $E = T + V$ , se tiene que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \dot{r} \left( m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} \right) + \frac{dV(r)}{dt} = 0$$

es decir,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \text{cte.}$$

5.4.6 **Descomposición de la energía:** Definiendo la energía cinética radial  $T_{\text{rad}}$  como

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

y el potencial efectivo  $V_{\text{efec}}$  como

$$V_{\text{efec}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Pueden descomponerse  $E$  y  $T$  del siguiente modo

$$T = T_{\text{rad}} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad E = T + V = T_{\text{rad}} + V_{\text{efec}}(r) \quad (5.26)$$

El término  $l^2/2mr^2$  se llama **barrera centrífuga**

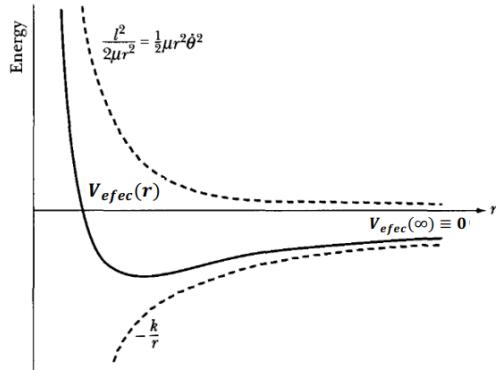


Figura 5.4: El potencial efectivo para la atracción gravitatoria  $V(r)$  está compuesto del término del potencial real  $-k/r$  y de la energía centrífuga potencial  $l^2/2\mu r^2$

**5.4.7 Ecuación de movimiento radial:** En términos del potencial efectivo, la ecuación del movimiento radial puede escribirse como ( $\dot{\theta} = l/(mr^2)$ )

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV(r)}{dr} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{dV_{\text{efec}}(r)}{dr}$$

que es, para  $r$ , como la ec. de Newton en una dim., pero ahora sólo está permitido  $r > 0$  (recuérdese el tema 3, pequeñas oscilaciones).

**5.4.8 Rango de velocidades:** Dada

$$E = T_{\text{rad}} + V_{\text{efec}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{efec}}(r)$$

se obtiene:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2[E - V_{\text{efec}}(r)]}{m}}$$

**5.4.9 Rango del movimiento radial:** Como  $T_{\text{red}} > 0$ ,  $r$  ha de satisfacer que

$$V_{\text{efec}}(r) \leq E$$

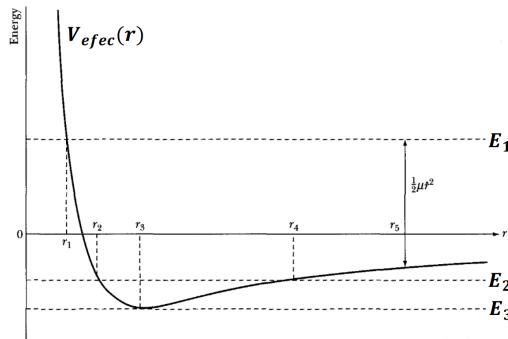


Figura 5.5: Cuando  $E = E_1$ , el movimiento de la partícula no está acotado, Si  $E = E_2$ , la partícula se mueve con  $r_1 \leq r \leq r_4$ , para  $E = E_3$  la partícula describe un movimiento circular con  $r = r_3$ .

En (Fig. 5.5) los rangos de movimiento para las energías  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son  $r \geq r_1$ ,  $r_2 \leq r \leq r_4$  y  $r = r_3$ , respectivamente.

5.4.10 **Puntos de retorno:**  $r_R/\dot{r} = 0$ , por tanto

$$V_{\text{efec}}(r_R) = E.$$

Los puntos de retorno también se llaman puntos apsidales (**pericentro**, el más cercano y **apocentro**, el más lejano). Si el apocentro está en el infinito el movimiento no está acotado. En (Fig. 5.5), los puntos de retorno para una partícula con  $E = E_2$  son  $r_R = r_2$  (pericentro) y  $r_R = r_4$  (apocentro).

5.4.11 **Movimiento circular estable:** Cuando  $E$  es igual a un mínimo del potencial efectivo ( $E = V_{\text{efec}}(r_C) \rightarrow \dot{r} = 0$ ) entonces el radio de movimiento  $r_C$  es cte. (sólo hay un punto apacial).

$$\left( \frac{dV_{\text{efec}}}{dr} \Big|_{r_C} = 0 \implies m\ddot{r} = 0 \text{ & } \dot{r} = 0 \right) \Rightarrow r = r_C \quad \frac{d^2V_{\text{efec}}}{dr^2} \Big|_{r_C} > 0 \Rightarrow r_C \text{ estable.}$$

En (Fig. 5.5), para  $E = E_3$ ,  $r_C = r_3$ .

**Nota:**  $\theta$  no es cte. Sólo se está analizando la componente  $r$ . Las coordenadas de un punto vienen determinadas en polares por  $P(r, \theta, z = \text{cte} = 0)$

### Ejercicio

## 5.5. Órbitas en un potencial central

5.5.1 **Ecuación integral de las órbitas:** Se desea obtener  $r(\theta)$ . En la definición de la energía  $E$  (5.26), se utiliza que  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}$  con lo que

$$E = \frac{l^2}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + V_{\text{efec}}(r).$$

Aislando  $dr/d\theta$  se llega a

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r^2}{l} \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}.$$

Nótese que  $l$  es constante y, por tanto,  $\dot{\theta}$  no puede cambiar de signo  $l = mr^2\dot{\theta}$ . Consecuentemente,  $\theta(t)$  es una función monótona en el tiempo (o crece o decrece).

El signo  $\pm$  debe tenerse en cuenta para hacer la integración. Si se inicia el recorrido de la órbita en  $r_0$  con ángulo  $\theta_0$  y recorren la órbita (con ángulos crecientes,  $d\theta > 0$ ) hacia el apocentro ( $dr > 0$ ), se tiene la **ecuación integral de las órbitas**

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{l}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}} dr \quad (5.27)$$

El signo negativo de la raíz cuadrada corresponde al recorrido de la órbita con ángulos  $\theta$  crecientes ( $d\theta > 0$ ) hacia el pericentro ( $dr < 0$ ).

5.5.2 **Simetría de las órbitas:** Las órbitas son simétricas respecto de los **ejes** que pasan por los puntos apsidales. En efecto, para radios  $r_{\pm} > r_p$  posteriores y anteriores a un pericentro, con ángulos  $\theta_- < \theta_p < \theta_+$ , se tendrá

$$\theta_+ = \theta_p + \int_{r_p}^{r_+} \frac{l}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}} dr \quad \text{de } r_+ \text{ hacia el apocentro}$$

$$\theta_p = \theta_- - \int_{r_-}^{r_p} \frac{l}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}} dr \quad \text{de } r_- \text{ hacia el pericentro}$$

Por tanto, exigiendo que las distancias angular  $\theta_+ - \theta_p$  y  $\theta_p - \theta_-$  sean iguales

$$\theta_+ - \theta_p = \theta_p - \theta_-$$

se llega a

$$\int_{r_p}^{r_+} \frac{l \ dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}} = - \int_{r_-}^{r_p} \frac{l \ dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}}.$$

Por tanto

$$r_+ = r_-$$

es decir, las órbitas son simétricas antes y después de un pericentro. Lo mismo sucede para un apocentro.

5.5.3 Si el movimiento de una partícula en el potencial  $V(r)$  es periódico, la órbita se cierra (órbita cerrada); es decir, después de un número finito de vueltas entre los límites radiales  $r_p$  (radio del pericentro), y  $r_a$  (radio del apocentro) el movimiento se repite exactamente. Pero si la órbita no se cierra sobre sí misma tras un nº finito de oscilaciones, se dice que la órbita es abierta.

De (5.27), puede calcularse el cambio en  $\theta$  que resulta de un tránsito completo de  $r$  de  $r_p$  a  $r_a$  y de vuelta a  $r_p$ ,  $(\Delta\theta)_r$ . Dado que el movimiento es simétrico en el tiempo, este cambio angular es el doble del que resultaría del paso de  $r_p$  a  $r_a$ ; Así

$$(\Delta\theta)_r \equiv 2(\theta(r_a) - \theta(r_p)) = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{l \ dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{efec}})}}. \quad (5.28)$$

5.5.4 Para una órbita acotada la condición de órbita cerrada es, pues

$$(\Delta\theta)_r b = 2\pi a = (\Delta\theta)_{\vec{r}(\theta, r)},$$

donde

$b \in \mathbb{N}$  = número de “pseudoperiodos” (periodos del módulo  $r$ ) ,

$a \in \mathbb{N}$  = número de vueltas (vector  $\vec{r}(\theta, r)$ ),

es decir, que la condición de órbita requiere que  $(\Delta\theta)_r$  sea una fracción racional de  $2\pi$  ( $(\Delta\theta)_r = 2\pi(a/b)$ ). En estas condiciones, después de  $b$  períodos ( $r$ ), el radio-vector ( $\vec{r}(\theta, r)$ ) de la partícula habrá hecho  $a$  revoluciones completas y habrá vuelto a su posición original. Si  $a = 1$  y  $\theta(t)$  es monótona creciente entonces la órbita cerrada es simple (no pasa dos veces por el mismo punto).

**Teorema de Bertrand:** Las únicas fuerzas centrales para las cuales todas las órbitas acotadas (estables) son cerradas corresponden al potencial del oscilador,  $V = kr^2/2$ , y al potencial de Kepler/Coulomb,  $V = -k/r$ , ambos con  $k > 0$ . Además, son órbitas simples y, más en concreto, órbitas elípticas.

5.5.5 Ecuación diferencial de las órbitas  $r(\theta)$ : En la ecuación radial

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{dV(r)}{dr}$$

se tiene, por un lado, que

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}$$

y haciendo el cambio de variables

$$w = 1/r \quad dw = -dr/r^2$$

se obtiene la ec. radial

$$-\frac{l^2 w^2}{m} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{l^2 w^3}{m} = w^2 \frac{dV(1/w)}{dw}$$

**Ecuación diferencial de la órbita:**

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(1/w)}{dw} \quad (5.29)$$

Nótese que la ec. diferencial de la órbita puede reescribirse  $\left(\frac{d}{dw} = \frac{dr}{dw} \frac{d}{dr} = -r^2 \frac{d}{dr} = -\frac{1}{w^2} \frac{d}{dr}\right)$  como

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{m}{l^2 w^2} F(1/w), \quad \text{Fórmula de Binet} \quad (5.30)$$

que es particularmente útil si lo que se quiere calcular es la fuerza  $F(r)$  que origina una órbita  $r(\theta)$  conocida.

## 5.6. Potencial de Kepler

5.6.1 El problema de Kepler es el que se plantea al calcular el movimiento de dos masas puntuales con interacción gravitatoria dada por la energía potencial

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

donde  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  y

$$k = Gm_1 m_2 > 0$$

$G$  es la cte. de gravitación universal.

5.6.2 **Ecuaciones de movimiento:** Utilizando coordenadas relativas y del centro de masas, la segunda Ley de Newton es, como se ha visto (T4),

$$\left. \begin{array}{l} M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{0} \\ \mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(r) = -kr/r^2 \end{array} \right\}$$

donde  $\mu = m_1 m_2 / M$  es la masa reducida y  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema de dos cuerpos. La primera ec. da el movimiento del CM y la segunda el movimiento relativo de la masa 1 respecto de la masa 2.

5.6.3 Como en potenciales centrales, el mvmt. relativo, con masa reducida  $\mu$ , puede expresarse en coords. polares  $(r, \theta)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 = -dV(r)/dr = -k/r^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{array} \right\}$$

5.6.4 **Leyes de conservación:** Las integrales primeras de las ecs. de mvmt., como en un potencial central, nos llevan a las leyes de conservación

$$\left. \begin{array}{l} \text{Conservación del momento angular relativo : } l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \\ \text{Conservación de la energía total relativa : } E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \text{cte.} \end{array} \right\}$$

5.6.5 **Potencial efectivo:**

$$V_{\text{efec}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

### 5.6.6 Radio de la órbita circular (dado $l$ ):

$$\frac{dV_{\text{efec}}(r)}{dr} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{-l^2}{\mu r} + k \right) = 0 \Rightarrow r_{\text{cir}} = \frac{l^2}{k\mu}$$

### 5.6.7 Energía de la órbita circular:

$$T_{\text{cir}} = \frac{l^2}{2\mu r_{\text{cir}}^2} = \frac{k^2\mu}{2l^2}, \quad V_{\text{cir}} = -\frac{k}{r_{\text{cir}}} = -\frac{k^2\mu}{l^2} \Rightarrow E_{\text{cir}} = T_{\text{cir}} + V_{\text{cir}} = -\frac{k^2\mu}{2l^2} = -\frac{k}{2r_{\text{cir}}}$$

Nótese que no hay energía cinética radial  $r_C = \text{cte.} \rightarrow \dot{r} = 0$ . Además,

$$2T_{\text{cir}} + V_{\text{cir}} = 0 \quad (\text{T}^{\text{ma}} \text{ del virial}).$$

### 5.6.8 Radios apsidales (pericentro y apocentro, dado $l$ y $E$ ):

$$E = V_{\text{efec}} \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} - E = 0$$

de donde

$$\frac{1}{r_{p/a}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}} = \frac{1}{r_{\text{cir}}} \pm \sqrt{\frac{1}{r_{\text{cir}}} + \frac{2\mu E}{l^2}} \quad (5.31)$$

Para  $E = 0, r_a = \infty$  y para  $E > 0$  no existe apocentro, por lo que se habla de un mvmt. radial no acotado  $\left( \frac{1}{r_a} < 0 \rightarrow r_a < 0, \text{ no tiene sentido pues } r \text{ por definición es positivo} \right)$ .

## 5.7. Órbitas de Kepler

### 5.7.1 Ecuación diferencial de las órbitas (5.30) con $V = -k/r = -kw$ :

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{\mu}{l^2} \frac{dV(1/w)}{dw} = \frac{\mu k}{l^2}, \quad (5.32)$$

donde  $w(\theta) = 1/r(\theta)$ . (5.32) es como la del oscilador con término cte.:

$$\ddot{x} + (k/m)x = \mu_d g; \quad m = \text{masa sujeta al muelle}, \quad k = \text{cte. del muelle}, \quad \mu_d = \text{coef. roz. din.}$$

### 5.7.2 Solución general:

$$w(\theta) = B \cos(\theta + \phi) + \frac{\mu k}{l^2}$$

donde  $B > 0$  y  $\phi$  son ctes. de integración. También podría llegarse al resultado a partir de la ec. integral de las órbitas.

### 5.7.3 Constantes de integración:

En el pericentro  $r_p, \omega$  toma el valor más grande, es decir ( $r_p$  calculado en (5.31))

$$\theta_p + \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_p} = \frac{\mu k}{l^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}} = B + \frac{\mu k}{l^2}$$

por lo tanto,

$$B = \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}.$$

Si se elige el pericentro como punto inicial con  $\theta_p = 0$ , se obtiene:  $\phi = 0$ . Resumiendo, la ec. de las órbitas es

$$\frac{1}{r} = C + B \cos \theta, \quad C = \frac{\mu k}{l^2}, \quad B = \sqrt{C^2 + \frac{2\mu E}{l^2}} \quad (5.33)$$

**5.7.4 Ecuación de las órbitas en coordenadas cartesianas:** Si en la ecuación en coords. pols. (5.33), se tiene en cuenta que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

se llega a

$$\frac{(x - x_{\text{cen}})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación usual de la cónica con centro desplazado.

Forma polar de la elipse relativa al foco:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

donde  $a$  = semieje mayor,  $b$  = semieje menor,  $f$  = distancia focal y

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \text{excentricidad} \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) = \text{semilactus rectum}$$

**Demostración:** La ec. de la órbita puede escribirse como

$$\frac{1}{r} = C + B \cos \theta \quad \rightarrow \quad Cr = 1 - Bx$$

elevando al cuadrado se tiene

$$C^2(x^2 + y^2) = 1 - 2Bx + B^2x^2.$$

Dividiendo por  $C^2 - B^2$  y completando el cuadrado en  $x$

$$\left( x + \frac{B}{C^2 - B^2} \right)^2 - \left( \frac{B}{C^2 - B^2} \right)^2 + \frac{C^2}{C^2 - B^2} y^2 = \frac{1}{C^2 - B^2},$$

$$(x - x_{\text{cen}})^2 + \frac{C^2}{C^2 - B^2} y^2 = \left( \frac{C}{C^2 - B^2} \right)^2.$$

De aquí se llega directamente al resultado:

$$\frac{(x - x_{\text{cen}})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$x_{\text{cen}} = \frac{B}{B^2 - C^2} = \frac{l^2}{2\mu E} \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

$$a^2 = \left( \frac{C}{B^2 - C^2} \right)^2 = \left( \frac{k}{2E} \right)^2 \quad \Leftarrow \text{ depende de } E, \text{ no de } l$$

$$b^2 = a^2 - f^2 = \frac{1}{C^2 - B^2} = -\frac{l^2}{2\mu E} \quad \Leftarrow \text{ depende de } E \text{ y de } l$$

Nótese que  $f^2 = c_{\text{cen}}^2$  y que  $b^2 \geqslant 0$  y  $x_{\text{cen}} \leqslant 0$  según la cónica sea una elipse o una hipérbola.

**5.7.5 Ecuación de las órbitas en coordenadas polares**  $\left( \frac{1}{r} = C + B \cos \theta \right)$ : Para interpretar la solución, se tiene que considerar que la ecuación de una sección cónica con un foco en el origen tiene la forma

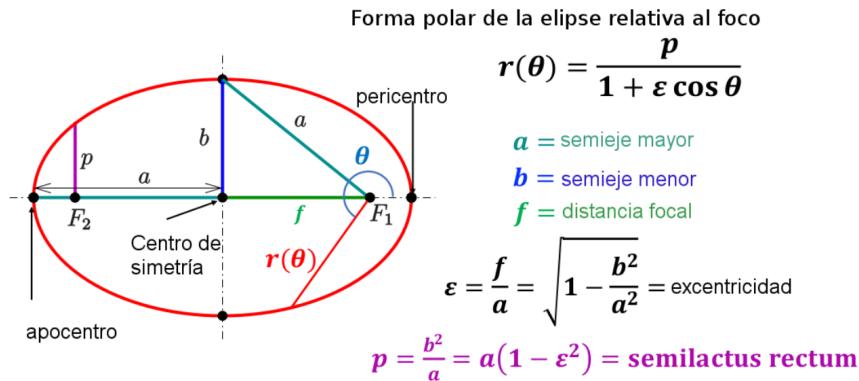
$$\frac{p}{r(\theta)} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (5.34)$$

siendo  $\varepsilon$  la excentricidad y  $p$  el semi-lactus rectum.

Las secciones cónicas se forman por la intersección de un plano y un cono. Concretamente, una sección cónica está formada por el lugar geométrico de los puntos en un plano, donde la razón de la distancia entre un punto fijo, el foco, a una línea fija, la directriz, es cte. (precisamente, la razón cte. es la excentricidad).

Puede reescribirse (5.33)  $\left(\frac{1}{r} = C + B \cos \theta\right)$  como

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad p = \frac{1}{C} = \frac{l^2}{\mu k}, \quad \varepsilon = \frac{B}{C} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \Rightarrow E = -\frac{k}{2p}(1 - \varepsilon^2) \quad (5.35)$$



#### 5.7.6 Órbita elíptica $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow C > B > 0 (E < 0, k > 0)$ .

- **Pericentro:** ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ )

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{C + B}, \quad (\theta = 0) \quad x_p = r_p, \quad y_p = 0$$

- **Apocentro:** ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ )

$$r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{C - B}, \quad (\theta = \pm\pi) \quad x_a = -r_a, \quad y_a = 0$$

- **Semieje mayor (semidistancia del pericentro al apocentro)**

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{C}{C^2 - B^2} \geq 0?$$

- **Posición del centro de simetría  $x_{cen}$  respecto al origen de fzas. (foco)**

$$x_{cen} = \frac{x_p + x_a}{2} = \frac{r_p - r_a}{2} = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{B}{B^2 - C^2} < 0 \quad (5.36)$$

Nótese que el centro se encuentra a la izquierda del foco, a causa de la elección del pericentro en  $\theta = 0$ .

- **Distancia focal:** Distancia del centro de simetría al foco

$$f = |x_{cen}| = \frac{B}{C^2 - B^2} > 0$$

- **Excentricidad:**

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{B}{C} < 1$$

- Energía:

$$E = -\frac{k}{2p}(1 - \varepsilon^2) = -\frac{k}{2a}$$

5.7.7 **Órbita circular:**  $\varepsilon = 0 \Rightarrow B = 0, C > 0 (E < 0, k > 0)$ :

$$\frac{1}{r_{\text{cir}}} = C, \quad r_{\text{cir}} = \frac{l^2}{\mu k}, \quad E_{\text{cir}} = \frac{l^2}{2\mu r_{\text{cir}}^2} - \frac{k}{r_{\text{cir}}} = -\frac{\mu k^2}{2l^2} = -\frac{k}{2r_{\text{cir}}}$$

5.7.8 **Órbita parabólica:**  $\varepsilon = 1 \Rightarrow C = B > 0, E = 0, k > 0$  con origen en el foco

- Pericentro

$$r_p = \frac{p}{2} = \frac{1}{2C} = \frac{r_{\text{cir}}}{2}, (\theta = 0), \quad x_p = r_p, y_p = 0$$

- Apocentro

$$r_a \rightarrow \infty, (\theta = \pm\pi, \text{ asíntota}), \quad x_a = -\infty, (y_a = \pm\infty)$$

Nótese que los puntos apsidales tiene que estar sobre la parábola, y  $y_a = 0$  (valor que se obtendría por continuidad del caso elíptico en el límite  $\varepsilon \rightarrow 1$ ) no lo está.

- Excentricidad

$$\varepsilon = 1$$

- Energía

$$E = -\frac{k}{2p}(1 - \varepsilon^2) = 0$$

5.7.9 **Órbita hiperbólica, rama izquierda:**  $\varepsilon > 1 \Rightarrow B > C > 0, E > 0, k > 0$  (fza. atractiva) con origen en el foco.

- Pericentro

$$r_p^{\text{izq}} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{C + B}, (\theta = 0), \quad x_p^{\text{izq}} = r_p^{\text{izq}}, \quad y_p = 0$$

- Apocentro:  $\cos \theta = -1/\varepsilon = -C/B < 0$  (hacia la izquierda):

$$r_a^{\text{izq}} \rightarrow +\infty, \left( \cos \theta = -\frac{C}{B}, \text{ asíntota} \right), \quad x_a^{\text{izq}} = -\infty, (y_a^{\text{izq}} = \pm\infty)$$

5.7.10 **Órbita hiperbólica, rama derecha:** La rama derecha de la hipérbola corresponde a un potencial de Kepler repulsivo  $V_{\text{rep}}(r) + k/r$ . La solución para la órbita es, en este caso

$$\frac{1}{r} = -C + B \cos \theta$$

con origen en el foco. Ahora, necesariamente se tiene que  $B > C > 0, E > 0$ :

- Pericentro:

$$r_p^{\text{der}} = \frac{1}{-C + B}, (\theta = 0), \quad x_p^{\text{der}}, \quad y_p^{\text{der}} = 0$$

- Apocentro:  $\cos \theta = C/B = 1/\varepsilon > 0$  (hacia la derecha)

$$r_a^{\text{der}} \rightarrow +\infty, \left( \cos \theta = \frac{C}{B}, \text{ asíntota} \right), \quad x_a^{\text{der}} = +\infty, y_a = \pm\infty$$

### 5.7.11 Órbita hiperbólica con ambas ramas

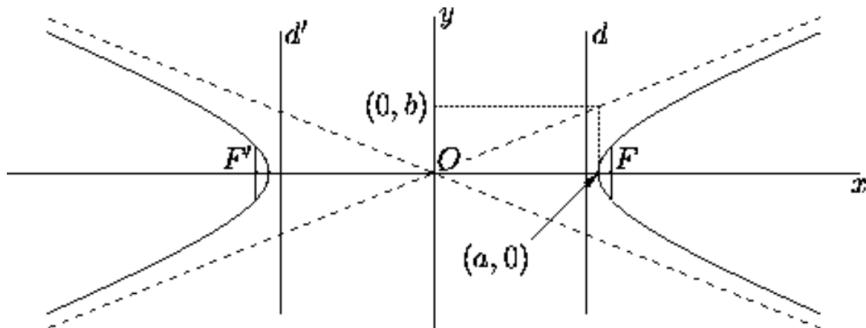


Figura 5.6: Hipérbola con semieje *transverso* (o mayor)  $a$  y semieje *conjugado* (o menor),  $b$ . Aquí  $b/a = 0,4$ . Nótese que  $a$  y  $b$  pueden tener longitudes arbitrarias ( $a < b$  es posible), por eso se utiliza la notación *transverso/conjugado* en lugar de mayor/menor.

- **Semieje *transverso*:** Semidistancia entre pericentros de ambas ramas

$$a = \frac{x_p^{\text{der}} - x_p^{\text{izq}}}{2} = \frac{r_p^{\text{der}} - r_p^{\text{izq}}}{2} = \frac{C}{B^2 - C^2} = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} > 0$$

- **Posición del centro de simetría  $x_{\text{cen}}$  respecto del origen de fuerzas**

$$x_{\text{cen}} = \frac{x_p^{\text{der}} + x_p^{\text{izq}}}{2} = \frac{r_p^{\text{der}} + r_p^{\text{izq}}}{2} = \frac{B}{B^2 - C^2} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} > 0 \quad (5.37)$$

Nótese que en este caso el centro se halla a la derecha del foco, pero formalmente, la expresión de  $c_{\text{cen}} = B/(B^2 - C^2)$  dada por (5.37) es la misma que en el caso elíptico (5.36).

- **Distancia focal:** Distancia del centro de simetría al foco (origen de fzas.)

$$f = |x_{\text{cen}}| = \frac{B}{B^2 - C^2} > 0$$

- **Excentricidad:**

$$\varepsilon \frac{f}{a} = \frac{B}{C} > 1$$

- **Energía**

$$E = \frac{k}{2a}$$

## 5.8. Leyes de Kepler

5.8.1 **Primera ley:** Los planetas se mueven en órbitas elípticas en las cuales el Sol ocupa uno de los focos.

5.8.2 **Segunda ley:** Las áreas barridas por el radio vector (relativo al foco, el cual se mueve en un sistema de referencia inercial) en tiempos iguales son iguales. Esto equivale a decir que la velocidad areolar es cte. (fza. central):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{l}{2\mu} = \text{cte.} \quad (5.38)$$

**5.8.3 Tercera ley:** El cuadrado del período de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor.

En efecto, por un lado, en un período  $\tau$ , integrando (5.38)

$$A = l \frac{\tau}{2\mu} \quad (5.39)$$

Por otro lado, el área de una elipse viene dada por la expresión

$$A = \pi ab \quad (5.40)$$

con

$$a = \frac{C}{C^2 - B^2} = -\frac{k}{2E} > 0, \quad E < 0, \quad b = \sqrt{-\frac{l^2}{2\mu E}} = \sqrt{\frac{al^2}{k\mu}} = \sqrt{ar_c}$$

por tanto, igualando (5.39) y (5.40)

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3$$

En el sistema solar ( $M_\odot$  = masa solar)

$$k = GmM_\odot \quad \mu = mM_\odot/(m + M_\odot)$$

así que el periodo de traslación alrededor del Sol puede calcularse como:

### Tercera ley de Kepler aplicada al sistema solar

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{G(m + M_\odot)} a^3 \quad (5.41)$$

## 5.9. Satélites terrestres

**5.9.1** Considérese que la Tierra es una distribución de masa esférica en la que, por el T<sup>ma</sup> de Gauss, puede considerarse como una masa puntual en el centro de la esfera.

**5.9.2 Período de un satélite de masa  $m_{\text{sat}} \ll M_t$  en órbitas circulares:** para órbitas circulares se tiene (3<sup>a</sup> Ley de Kepler)

$$\tau_t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_t}} (T_t + h)^{3/2} = 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \left(1 + \frac{h}{R_t}\right)^{3/2}$$

con  $g = GM_t/R_t^2$ . Para poca altura,  $h \ll R_t$ , se obtiene

$$\tau_t(\text{poca altura}) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \sim 1,4h$$

**5.9.3 Velocidad de un satélite en órbitas circulares de poca altura:** Para órbitas circulares

$$v_{\text{sat}} = \dot{\theta}r = \frac{2\pi(R_t + h)}{\tau_t}$$

Para poca altura,  $h \ll R_t$ ,

$$v_{\text{sat}}(\text{poca altura}) \simeq \sqrt{gR_t} \sim 7,9 \text{ km/s}$$

**5.9.4 Velocidad de escape de un satélite artificial:** Es la velocidad desde la Tierra correspondiente a una órbita parabólica ( $E = 0$ ):

$$0 = \frac{m}{2} v_{\text{esc}}^2 + V(R_t) = \frac{m}{2} v_{\text{esc}}^2 - mgR_t$$

Poniendo valores numéricos

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2gR_t} \sim 11,2 \text{ km/s}$$

## 5.10. Boletín 5. Parte 1

## 6. Colisiones y dispersión

6.1. Colisiones elásticas . . . . .	76
6.2. Colisiones inelásticas . . . . .	79
6.3. El problema de la dispersión . . . . .	81
6.4. Dispersión por una esfera dura . . . . .	83
6.5. Dispersión por un potencial central . . . . .	84
6.6. Fórmula de Rutherford . . . . .	85

### 6.1. Colisiones elásticas

Una colisión es **elástica** si no se produce ningún cambio en la energía interna de las partículas; por tanto, la conservación de energía puede aplicarse sin tener en cuenta la energía interna. Obsérvese que puede generarse calor cuando dos cuerpos mecánicos chocan **inelásticamente**. El calor es sólo una manifestación de la agitación de las partículas constituyentes del cuerpo y por tanto puede considerarse una parte de la energía interna.

6.1.1 **Planteamiento del problema:** considérese el proceso de colisión  $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$  con masas  $m_{1,2}$ .

i) Conservación del momento total (sin fuerzas externas):

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{\text{in}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{p}_1^{\text{fin}} + \vec{p}_2^{\text{fin}} = M \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \text{cte.}$$

ii) Conservación de la energía cinética (**condición elástica**):

$$R = T_1^{\text{in}} + T_2^{\text{in}} = T_1^{\text{fin}} + T_2^{\text{fin}} = \text{cte.} \quad (\Delta V = 0).$$

iii) Resolución de la colisión: Nótese que, en ausencia de fzas. externas, el momento angular relativo se conserva y, por tanto, el movimiento se desarrolla en un plano  $XY$  por lo que conociendo  $\vec{P}$  y  $T$  del estado inicial y una medida del estado final *en el plano final* de colisión (3 ecs. con 3 incógnitas) pueden determinarse los momentos  $\vec{p}_1^{\text{fin}}$  y  $\vec{p}_2^{\text{fin}}$ .

Alternativamente, también podría plantearse hacer medidas del estado final para determinar el estado inicial.

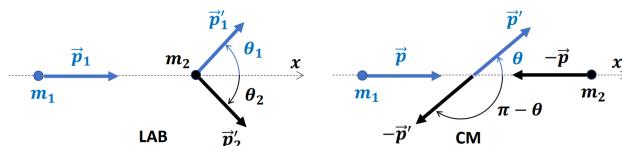


Figura 6.1: Esquema de una colisión elástica vista desde los sistemas LAB y CM. Se alinea el eje  $x$  para que el problema se reduzca a dos dimensiones en un plano.

6.1.2 **Sistema Laboratorio (LAB).** Definición:

$$\vec{p}_2^{\text{in}} := \vec{0}$$

Escribiendo  $\vec{p}_1^{\text{in}} := \vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_{1,2}^{\text{fin}} := \vec{p}'_{1,2}$ , entonces

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2, \quad \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}'_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2^2}{2m_2}.$$

Se definen los ángulos de colisión  $\theta_{1,2}$  de las partículas finales con respecto que las componentes  $y$  del momento en el sistema LAB después de la colisión son iguales y de signo contrario,

$$\vec{p}'_{1,y} = -\vec{p}_{2,y} \tag{6.1}$$

porque inicialmente no hay momento en esa dirección.

6.1.3 Sistema Centro de Masas (CM). Definición:

$$\vec{P}_T^{\text{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} = \vec{p}_1^{\text{in}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{0} \quad \vec{r}_{\alpha}^{\text{CM}} = \vec{r}_{\alpha}^{\text{LAB}} - \vec{R}_{\text{CM}}$$

Entonces

$$\vec{p}_1^{\text{in}} = -\vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{p}, \quad \vec{p}_1^{\text{fin}} = -\vec{p}_2^{\text{fin}} = \vec{p}'$$

De la conservación de la energía cinética se tiene

$$\frac{\vec{p}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'^2}{2m_2}$$

así, pues

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'|, \text{ o también, } p = p' \quad (6.2)$$

Como no cambian las masas de las partículas que colisionan, también las velocidades antes y después de la colisión son iguales ( $v = v'$ ). Sólo hay que determinar (medir) el ángulo de colisión  $\theta$  y el problema queda resuelto.

6.1.4 Paso de LAB a CM: Es equivalente a hacer una transformación galileana (“boost”) en la dirección de  $\vec{p}_1$  (o  $\vec{v}_1$ ) con velocidad  $\vec{v}_0 = \vec{R}_{\text{CM}} \parallel \vec{v}_1$ .

Empezando de la definición del momento total del sistema:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 = M \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1. \quad (6.3)$$

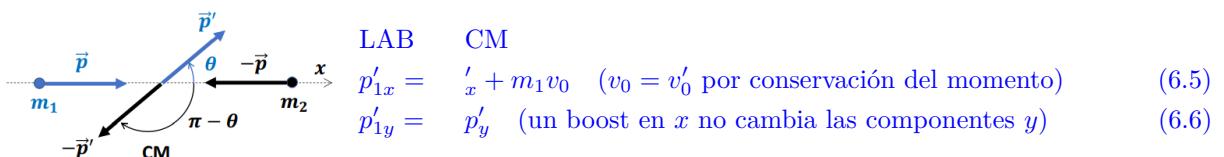
Ahora pueden escribirse los momentos de los estados iniciales en el CM en función de los correspondientes en LAB como ( $\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{LAB}} - \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ )

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_1 - m_1 \vec{v}_0 = m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \\ -\vec{p} &= \vec{p}_2 - m_2 \vec{v}_0 = -m_2 \vec{v}_0 \quad (\text{m}_2 \text{ inicialmente en reposo en el sistema LAB}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p \stackrel{(6.2)}{=} p' = m_2 v_0 \stackrel{(6.3)}{=} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1. \quad (6.4)$$

También pueden escribirse las relaciones entre los estados finales explícitamente ( $\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{LAB}} = \vec{r}_{\alpha}^{\text{CM}} + \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ )



6.1.5 Relación entre los ángulos de salida en el sistema CM ( $\theta$ ) y LAB ( $\theta_1$ ) (estados finales): Se elige el eje  $X$  como la dirección incidente de la colisión en el plano  $XY$ .

$$\tan \theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_{1x}} \stackrel{(6.6)}{=} \frac{p_y}{p_x + m_1 v_0} \stackrel{(6.4)}{=} \frac{p_y}{p_x + m_1 p/m_2}$$

Dividiendo numerador y denominador por  $p'$  ( $p = p'$ ) se llega a

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} \quad (6.7)$$

6.1.6 **Ángulo máximo en LAB,  $\theta_1^{\max}$ :** Derivando la expresión anterior respecto a  $\theta$  e igualando a cero se obtiene que

$$\frac{d \tan \theta_1}{d \theta} \Big|_{\theta_1=\theta_1^{\max}} = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{m_2}{m_1}$$

Sólo existirá el valor de  $\theta_1^{\max}$  si  $m_2 < m_1$ , con lo que

$$\tan \theta_1^{\max} = \frac{\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}{-m_2/m_1 + m_1/m_2} = \frac{\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}{m_1/m_2[1-(m_2/m_1)^2]} = \frac{m_2/m_1}{\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}} = \frac{\sin \theta_1^{\max}}{\cos \theta_1^{\max}}$$

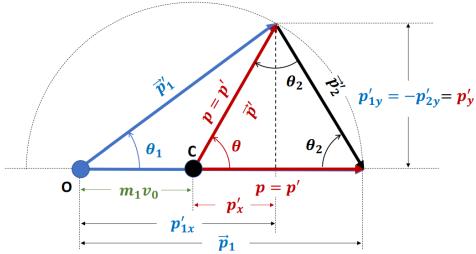
por tanto

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1}$$

El hecho que haya un ángulo máximo puede interpretarse físicamente como que si  $m_2 < m_1$ , la partícula 1 no puede rebotar.

6.1.7 **Lugar geométrico de  $\vec{p}'_1$  (LAB):** En el CM el módulo del momento final de cualquiera de las partículas es

$$p'^2 = p'^2_x + p'^2_y$$



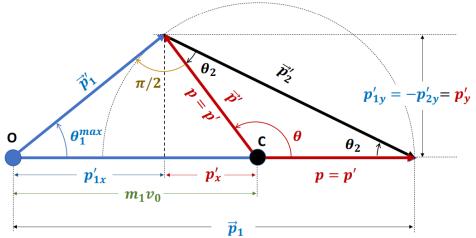
Sustituyendo por los valores en LAB, se obtiene la circunferencia de radio  $R$  y centro  $C$  desplazado en el plano  $(p'_{1x}, p'_{1y})$

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + p'_{1y}^2$$

donde

$$R = p' = p = m_2 v_0, \quad C = m_1 v_0$$

Figura 6.2: Esquema de una colisión elástica vista desde los sistemas LAB y CM.



Nótese que  $C < R$ , o lo que es lo mismo,  $m_1 < m_2$ , indica que el origen de momentos  $\vec{p}'_1$  ( $O$  en (Fig. 7)) está dentro de la circunferencia y, por tanto,  $\theta_1 \in [0, \pi]$ . Por el contrario, si  $C > R$ , o lo que es lo mismo,  $m_1 > m_2$ , indica que el origen de momentos  $\vec{p}'_1$  está fuera de la circunferencia (Fig. 7) y por tanto  $\theta_1 \in [0, \theta_1^{\max}]$ . Geométricamente, se obtiene, en este caso, que  $\sin \theta_1^{\max} = m_2/m_1$

Figura 6.3: Ángulo máximo en una colisión elástica vista desde los sistemas LAB y CM.

6.1.8 **Resolución de colisiones en LAB (conocido el estado inicial):** Dependiendo del dato del estado final, se utilizarán dos de las siguientes expresiones

$$(1) \quad T = \frac{p'_1^2}{2m_1} + \frac{p'_2^2}{2m_2}$$

$$(2) \quad p'_1^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta_2$$

$$(3) \quad p'_2^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta_1$$

$$(4) \quad p_1^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

6.1.9 **Diferentes casos:**

- i) Dato:  $p'_1/p'_2$ . De (1) se obtiene  $p'_2/p'_1$ . De (2) se obtiene  $\theta_2$ . De (3) se obtiene  $\theta_1$ .
- ii) Dato:  $\theta_1/\theta_2$ . De (1) y (3) [(2)] se obtienen  $p'_1$  y  $p'_2$ . De (2) [(3)] se obtiene  $\theta_2/\theta_1$ .
- iii) Dato:  $\theta_1 + \theta_2$ . De (1) y (4) se obtienen  $p'_1$  y  $p'_2$ . De (2) se obtiene  $\theta_2$  y de (3) se obtiene  $\theta_1$ .

## 6.2. Colisiones inelásticas

6.2.1 Considérese el proceso de colisión inelástico  $1+ \rightarrow 2 + 1$  con masas  $m_{1,2}$ . Las ecs. de conservación sin intercambio de masa (y sin fzas. externas) son

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{\text{in}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{p}_1^{\text{fin}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = M\dot{\vec{R}} = \text{cte.}$$

$$T = T_1^{\text{in}} + T_2^{\text{in}} = T_1^{\text{fin}} + T_2^{\text{fin}} + Q$$

con  $Q$  la energía disipada. Se conserva el momento, pero no  $T$ .

### 6.2.2 Propiedades:

- i)  $Q$ : Energía disipada en la colisión (deformación, calor).
- ii) Propiedad de la energía disipada  $Q$ : Es independiente del sistema de referencia donde se describe la colisión.
- iii) **Clasificación (procesos inelásticos)**: exotérmicos ( $Q > 0$ ) o endotérmicos ( $Q < 0$ ).
- iv) Relación con el centro de masas: Con la misma notación que en los procesos elásticos se llega a

$$\frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} + Q \Rightarrow \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p'^2}{2\mu} + Q \Rightarrow p^2 = p'^2 + 2\mu Q$$

donde  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2) \equiv$  masa reducida.

### 6.2.3 Relaciones entre el LAB y el CM ( $v_{\text{écr}}^{\text{CM}} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{LAB}} - \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ ):

$$p = m_2v_0 = \mu v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1, \quad \vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

$v_1$  es la velocidad de la partícula 1 en LAB. Pero ahora  $p \neq p'$

$$\tan \theta_1 = \frac{p'_y}{p'_x + m_1v_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{pm_1}{p'm_2}} \Rightarrow \sin \theta_1^{\text{máx}} = \frac{p'm_2}{pm_1}$$

### 6.2.4 Lugar geométrico de $\vec{p}_1'$ :

Como en el caso elástico se llega a

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + y'_{1y}$$

donde

$$R = p' = \sqrt{p^2 - 2\mu Q} \neq p \quad C = m_1v_o \text{ (igual que en el caso elástico)}$$

### 6.2.5 Coeficiente de restitución:

es el cociente entre la celeridad relativa del estado final respecto al inicial

$$e = \frac{u_{\text{fin}}(\text{celeridad final relativa})}{u_{\text{in}}(\text{celeridad relativa inicial})} = \frac{|\vec{v}_2^{\text{fin}} - \vec{v}_1^{\text{fin}}|}{|\vec{v}_2^{\text{in}} - \vec{v}_1^{\text{in}}|}$$

Como las velocidades en el sistema LAB y CM están conectadas con una transformación de Galileo, podemos escribir ( $\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{CM}} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\text{LAB}} - \dot{\vec{R}}_{\text{CM}}$ )

$$e = \frac{|\vec{v}_2^{\text{fin}} - \vec{v}_0 - (\vec{v}_1^{\text{fin}} - \vec{v}_0)|}{|\vec{v}_2^{\text{in}} - \vec{v}_0 - (\vec{v}_1^{\text{in}} - \vec{v}_0)|} = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} \quad (6.8)$$

por tanto, en el sistema CM se tiene ( $\vec{p}' = m_1\vec{v}'_1 = -m_2\vec{v}'_2; \vec{p}' = m_1\vec{v}'_1 = -m_2\vec{v}'_2$ )

$$e = \frac{|-\vec{p}'/m_2 - \vec{p}'/m_1|}{|-\vec{p}'/m_2 - \vec{p}'/m_1|} = \frac{p'}{p}$$

### 6.2.6 Propiedades:

- i) Los valores de  $u_{\text{in}/\text{fin}}$  son independientes del sistema de referencia y, por tanto, lo es el coeficiente de restitución  $e$ .
- ii) Relación de  $e$  con la energía de disipación:

$$Q = T^{\text{in}} - T^{\text{fin}} = \frac{1}{2}\mu u_{\text{in}}^2(1 - e^2)$$

**Demostración:** Mostrar previamente que, en general,<sup>†</sup>

$$P^2 + m_1 m_2 u_{\text{in}/\text{fin}} = 2(m_1 + m_2)T^{\text{in}/\text{fin}}$$

donde  $\vec{P}$  es el momento total. Entonces

$$Q = T^{\text{in}} - T^{\text{fin}} = \frac{1}{2}\mu(u_{\text{in}}^2 - u_{\text{fin}}^2)$$

También puede demostrarse la relación anterior calculando  $Q$  directamente en el CM <sup>††</sup>

$$Q = T^{\text{in}} - T^{\text{fin}} = \frac{1}{2\mu}(p^2 - p'^2)$$

### 6.2.7 Clasificación de colisiones según $e$

- |  |   |
|--|---|
| (1) $e = 1 \Rightarrow$ colisión elástica          | (2) $e = 0 \Rightarrow$ colisión completamente inelástica |
| (3) $0 \leq e < 1 \Rightarrow$ colisión exotérmica | (4) $e > 1 \Rightarrow$ colisión endotérmica              |

### 6.2.8 Colisión $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ con $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ (un cambio en la masa total sólo tiene explicación en el marco relativista). Las ecs. de conservación con intercambio de masa ( $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ ) son ahora

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{\text{in}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{p}_3^{\text{fin}} + \vec{p}_4^{\text{fin}} = M \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \text{cte.}$$

$$T = T_1^{\text{in}} + T_2^{\text{in}} = T_3^{\text{fin}} + T_4^{\text{fin}} + Q$$

Como en el caso sin intercambio de masa,  $Q$  es la energía disipada en el proceso. Ahora, en el centro de masas, se tiene <sup>†††</sup>

$$p^2 = \frac{m_1 m_2}{m_3 m_4} p'^2 + 2\mu_{12} Q$$

siendo  $\mu_{12}$  la masa reducida del estado inicial.

### 6.2.9 Ejemplo: Colisión totalmente inelástica. Considérese el proceso de colisión $1 + 2 \rightarrow 3$ en el sistema LAB, con $m_1 + m_2 = m_3$ . Se tienen las ecuaciones

$$p_1 = p_3; p_2 = 0; \quad \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_3} + Q$$

<sup>†</sup>Se verifica para uno de los dos casos, el otro es análogo

$$P^2 + m_1 m_2 u_{\text{in}}^2 = 2(m_1 + m_2)T^{\text{in}} \Rightarrow p_1^2 - m_1 m_2 (-v^{\text{in}})^2 = 2(m_1 + m_2) \frac{p_1^2}{2m_1} \Rightarrow p_1^2 + \frac{m_2}{m_1} p_1^2 = (m_1 + m_2) \frac{p_1^2}{m_1}$$

<sup>††</sup>

$$u_{\text{in}} = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \left| -\frac{\vec{p}}{m_2} - \frac{\vec{p}}{m_1} \right| = \frac{p}{\mu} \quad u_{\text{fin}} = |\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1| = \left| -\frac{\vec{p}'}{m_2} - \frac{\vec{p}'}{m_1} \right| = \frac{p'}{\mu}$$

<sup>†††</sup>en CM:

La energía disipada es, por tanto

$$Q = \left(1 - \frac{m_1}{m_3}\right) T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1$$

Para  $m_1 = m_2 = m$ , se obtiene que  $Q = T_1/2$ , es decir, la mitad de la energía inicial se disipa.

Puede compararse el resultado con el obtenido para la cinta transportadora en el T4. Identificando  $m_1 = M_{\text{cinta}} \gg dm = m_2$ , se obtiene  $dQ \simeq v^2 dm/2$ , lo que coincide con el trabajo que se perdía por rozamiento.

### 6.3. El problema de la dispersión

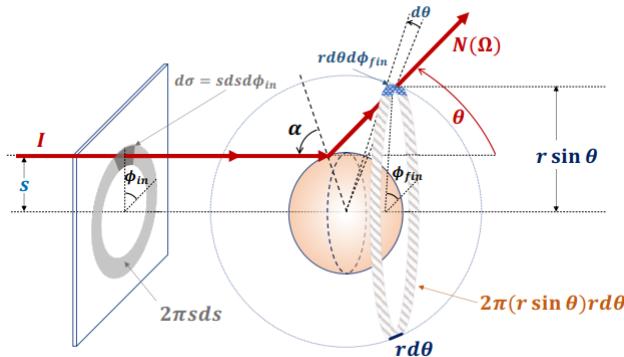


Figura 6.4: Dispersión; sección eficaz

**6.3.2 Parámetro de impacto  $s$ :** Es la distancia desde el proyectil inicial hasta el eje paralelo a su recorrido que pasa por el centro de dispersión (eje de la dispersión). En el proceso de dispersión, puede establecerse una relación  $s(\theta, \phi_{\text{fin}})$  entre el parámetro de impacto  $s$  de la partícula incidente y la dirección  $(\theta, \phi_{\text{fin}})$  en la cual es dispersada.

**6.3.3 Sección eficaz diferencial:** Considérese una sección diferencial  $d\sigma$  en el plano  $\perp$  al eje incidente

$$d\sigma = s \, ds \, d\phi_{\text{in}} \quad (\text{d}S_z \text{ en cilíndricas})$$

correspondiendo a los parámetros de impacto entre  $(s, s + ds)$  y  $(\phi_{\text{in}}, \phi_{\text{in}} + d\phi_{\text{in}})$ .

Sea  $d\Omega$  el diferencial de ángulo sólido

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi_{\text{fin}}$$

entre  $(\theta, \theta + d\theta)$  y  $(\phi_{\text{fin}}, \phi_{\text{fin}} + d\phi_{\text{fin}})$  en el que son dispersadas las partículas que atraviesan  $d\sigma$ . Se tiene por tanto que

$$I \, d\sigma = N(\Omega) \, d\Omega$$

Supóngase que hay simetría de revolución alrededor del eje de colisión, con lo que  $\phi_{\text{in}} = \phi_{\text{fin}} = \phi$ . La sección eficaz diferencial por unidad de ángulo sólido  $d\sigma/d\Omega$  es, entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{N(\Omega)}{I}}_{\text{experimental}} = \underbrace{\frac{s}{\sin \theta} \left| \frac{ds}{d\theta} \right|}_{\text{teórica}} > 0 \quad (6.9)$$

Para una esfera:  $a = 0 \rightarrow \theta = \pi, s > a \rightarrow \theta = 0$ .

La primera igualdad en (6.9) refleja la medida experimental de la sección eficaz. La segunda corresponde a la expresión teórica. El módulo se toma porque en el proceso de dispersión, el parámetro de impacto  $s(\theta)$  decrece con el ángulo y la sección eficaz diferencial debe ser positiva.

6.3.4 **Sección eficaz integrada:** Para todo  $\phi$ , en un intervalo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  es conveniente utilizar que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin \theta} = \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\cos \theta} > 0 \quad (6.10)$$

con lo que, siendo  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = (-d\cos \theta) d\phi$  se obtiene

$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = -\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds^2 = \pi[s^2(\theta_1) - s^2(\theta_2)]$$

6.3.5 **Sección eficaz en LAB:** Si el centro de dispersión retrocede con la dispersión (masa finita del blanco), la relación  $s(\theta, \phi)$  obtenida con blanco fijo, para un potencial central, sigue siendo válida para el sistema CM, pero no para el LAB; tener en cuenta que en CM, el ángulo  $\theta$  es el mismo que el del movimiento relativo (dos cuerpos) visto desde el blanco.

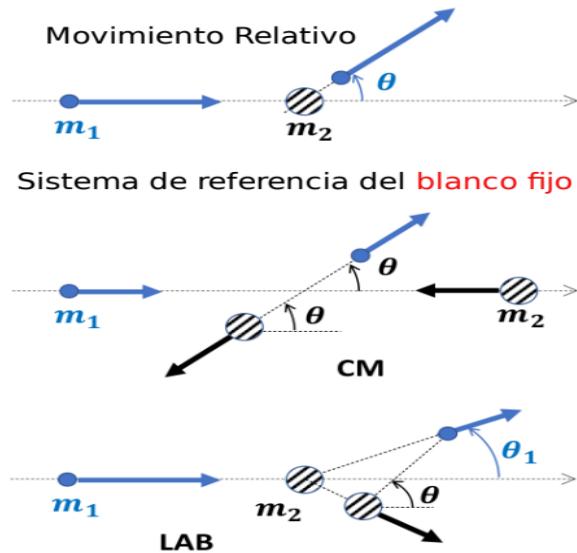


Figura 6.5: Colisión vista desde los sistemas fijado en el blanco (arriba), CM (medio) y LAB (abajo).

$$(\tan \theta_{CM} = \frac{v_y^{CM}}{v_x^{CM}} = \frac{ctev_y}{ctev_x} = \tan \theta, \text{ §4.4.2})$$

donde,

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega} = \frac{d\cos \theta_1}{d\cos \theta} = \frac{1 + \rho \cos \theta}{(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta)^{3/2}}$$

con lo que ( $I d\sigma^{LAB} = N(\Omega_1) d\Omega_1 = N(\Omega) d\Omega = d\sigma^{CM}$ )

$$\frac{d\sigma^{LAB}}{d\Omega_1} = \frac{d\sigma^{CM}}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\Omega_1} = \frac{(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta)^{3/2}}{1 + \rho \cos \theta} \frac{d\sigma^{CM}}{d\Omega}$$

6.3.6 **Relación explícita entre  $\theta$  y  $\theta_1$ :** La relación que pasa del CM al LAB, puede expresarse como (demostrar)

$$\rho \sin \theta_1 = \sin(\theta - \theta_1) \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(\rho \sin \theta_1) + \theta_1$$

Partiendo de (6.7)

$$\begin{aligned} (\cos \theta + \rho) \sin \theta_1 &= \sin \theta \cos \theta_1 \\ \rho \sin \theta_1 &= \sin \theta \cos \theta_1 - \cos \theta \sin \theta_1 \\ &= \sin(\theta - \theta_1) \end{aligned}$$

De aquí se obtiene (demonstrar)

$$\sin \theta = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \cos \theta_1 - \rho \sin \theta_1 \sin \theta_1$$

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1) + \theta_1) \\ &= \sin(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1)) \cos \theta_1 + \cos(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1)) \sin \theta_1 \\ &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1))} \sin \theta_1 \\ &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1\end{aligned}$$

Para  $\rho = 1 = m_1/m_2$

$$\cos \theta = \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 = \cos 2\theta_1 \implies \theta = 2\theta_1$$

## 6.4. Dispersión por una esfera dura

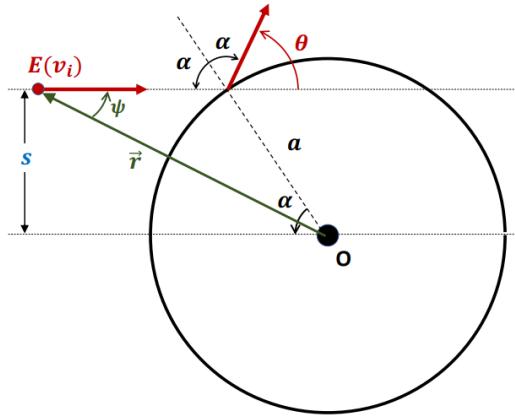


Figura 6.6: Dispersión por una esfera dura.

**6.4.3 Ángulo de dispersión  $\theta$ :** Es el ángulo que, con respecto a la dirección incidente, se desvía el proyectil después de colisionar con la esfera. La relación entre  $s$  y los ángulos de dispersión,  $\theta$ , y de incidencia,  $\alpha$ , es:

$$s = a \sin \alpha = a \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = a \cos \frac{\theta}{2} = a \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}, \quad (6.12)$$

donde se ha utilizado que  $2\alpha + \theta = \pi$  (Fig. 6.6), porque el ángulo de incidencia y reflexión son iguales. Claramente el parámetro de impacto no depende de  $\phi$  en este caso. Hay simetría rotacional de la dispersión alrededor del eje de incidencia.

**6.4.4 Relación entre el parámetro de impacto y la energía del proyectil (con momento angular  $l$  dado):**  $-\phi :=$  ángulo entre la posición del proyectil respecto del centro de la esfera y su velocidad

$$l = m|\vec{r} \times \vec{v}_{in}| = mr v_{in} \sin \phi = ms v_{in} \quad (6.13)$$

$$l^2 = m^2 v_{in}^2 s^2 = (2mE)s^2 \quad (6.14)$$

Condición de impacto con  $l$  fijo:  $s < a \Rightarrow E > E_0 := l^2/2ma^2$

**6.4.5 Sección eficaz diferencial de una esfera dura:** Utilizando (6.12) en la expresión de  $d\sigma/d\Omega$  (6.10) se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d \cos \theta} = \frac{a^2}{2} \frac{d(1 + \cos \theta)/2}{d \cos \theta} = \frac{a^2}{4} \quad (6.15)$$

∴ La sección eficaz diferencial es cte. para cualquier dirección de dispersión.

**6.4.6 Sección eficaz total  $\sigma$  de una esfera dura:** Se debe integrar para todo el ángulo sólido (6.15)

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{a^2}{4} \int d\Omega = \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi -d\cos\theta = \pi a^2$$

Que coincide con  $\sigma(\theta = 0, \theta = \pi) = \pi[s^2(0) - s^2(\pi)] = \pi a^2$

## 6.5. Dispersión por un potencial central

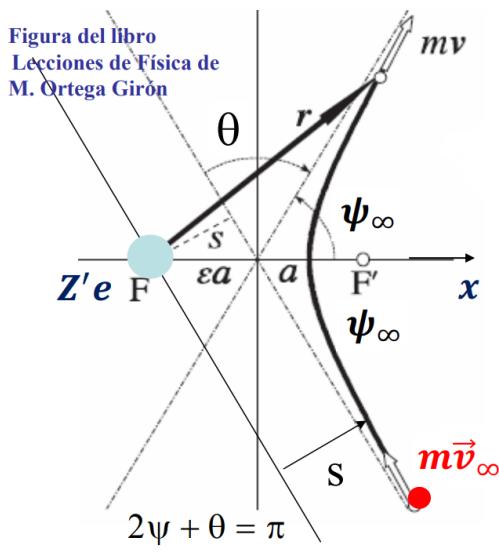


Figura 6.7: Dispersión por un potencial central.

**6.5.3** El ángulo de dispersión se obtiene de la relación

$$2\psi_{\text{asi}}(s, E) \pm \theta = \pi \quad (6.16)$$

según la dispersión sea repulsiva o atractiva, respectivamente.

**6.5.4 Caso Coulombiano:** Considérese la dispersión repulsiva de una carga eléctrica  $Z'e$  (y masa  $m$ ) por un núcleo pesado de carga  $Z'e$  ( $M = \infty$ , e.d., estática). El potencial es entonces  $V(r) = +k/r$  con  $k = ZZ'e^2 > 0$ . La ecuación de la órbita

$$\frac{1}{r} = -C + B \cos \psi; \quad C = \frac{km}{l^2} = \frac{ZZ'e2m}{l^2}, \quad B = \sqrt{C^2 + \frac{2mE}{l^2}}$$

La excentricidad  $\varepsilon$  de la hipérbola vale (relación con parámetro de impacto)

$$\varepsilon = \frac{B}{C} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{(2Es)^2}{k^2}} > 1 \quad (6.17)$$

Se ha utilizado que  $l^2 = 2mEs^2$ . Se tiene entonces (rama repulsiva)

$$\frac{1}{r} = C(-1 + \varepsilon \cos \psi)$$

Para  $r = \infty$  se obtiene (relación excentricidad con dirección asintótica)

$$\cos \psi_{\text{asi}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{C}{B}.$$

Por tanto, para el ángulo de dispersión  $\theta$ , con  $\pi = \theta + 2\psi_{\text{asi}}$ ,

$$\cos \psi_{\text{asi}} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}.$$

Consecuentemente,

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta/2} \xrightarrow{(6.17)} \frac{(2Es)^2}{k^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta/2} - 1 = \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

Despejando el parámetro de impacto  $s$  se obtiene, finalmente

$$s = \frac{k}{2E} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{k}{2E} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}. \quad (6.18)$$

Para la dispersión atractiva se obtiene el mismo resultado.

## 6.6. Fórmula de Rutherford

### 6.6.1 Sección eficaz diferencial para el potencial Coulombiano:

Usando (6.18)

$$\frac{ds^2}{d \cos \theta} = \left( \frac{k}{2E} \right) \frac{d}{d \cos \theta} \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = \left( \frac{k}{2E} \right)^2 \frac{2}{(1 - \cos \theta)^2}$$

En términos del ángulo mitad  $\theta/2$  con  $k = ZZ'e^2$  se obtiene, finalmente

**Fórmula de Rutherford:**

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth}} = \frac{1}{4} \left( \frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (6.19)$$

### 6.6.2 Observaciones:

- i) Esta fórmula sirve para núcleos sin retroceso o con retroceso en CM (en este caso la energía se refiere a la energía relativa en CM).
- ii) La fórmula fue obtenida por Rutherford para la dispersión de partículas  $\alpha$  por núcleos atómicos. Geiger y Marsden realizaron experiencias con partículas  $\alpha$  sobre láminas de oro. Las desviaciones de la fórmula a grandes valores de  $\theta$  (pequeños  $s$ ) permiten acotar el radio nuclear.
- iii) Para  $\theta = 0$  la fórmula de Rutherford presenta una singularidad. Eso indica que estamos delante de una interacción de largo alcance.

## 7. Sistemas no inerciales

7.1. Conceptos matemáticos previos . . . . .	86
7.2. Velocidad angular instantánea . . . . .	87
7.3. Teorema de Coriolis . . . . .	89
7.4. Movimiento en la Superficie Terrestre . . . . .	91
7.5. Caída libre. Desviación hacia el Este. . . . .	92
7.6. Péndulo de Foucault . . . . .	93
7.7. Boletín 7 . . . . .	95

### 7.1. Conceptos matemáticos previos

7.1.1 Una matriz antisimétrica de dimensión 3,  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = 0$ ) es de la forma genérica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de las matrices antisimétricas de dimensión 3,  $A_{3 \times 3}$ , forma un espacio vectorial de dimensión 3. Por tanto, puede construirse un isomorfismo  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow A_{3 \times 3}$  tal que a cada  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  le asocia la matriz  $\mathbf{A}_{\vec{w}}$ :

$$\mathbf{A}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

que tiene la siguiente propiedad  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_3 v_2 + w_2 v_3 \\ w_3 v_1 - w_1 v_3 \\ -w_2 v_1 + w_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{w} \times \vec{v})_1 \\ (\vec{w} \times \vec{v})_2 \\ (\vec{w} \times \vec{v})_3 \end{pmatrix}$$

es decir:  $\mathbf{A}_{\vec{w}} \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v}$

7.1.2 **Rotaciones cónicas:** La fórmula de Rodrigues (ver Apéndice) da la forma que tiene una matriz,  $\mathbf{R}_{\hat{w}, \phi}$ , que rota un vector,  $\vec{a}$ , por un ángulo arbitrario,  $\phi$ , alrededor de un eje en la dirección que viene dada por el vector unitario  $\hat{w}$ :

$$\mathbf{R}_{\hat{w}, \phi} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{w}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{w}}^2 (1 + \cos \phi)),$$

donde la matriz  $\mathbf{A}_{\hat{w}}$  es como la escrita en (7.1), pero sustituyendo  $\vec{w}$  por  $\hat{w}$ . Por tanto,

$$\vec{a}' = \mathbf{R}_{\hat{w}, \phi} \vec{a} = \vec{a} + \sin \phi \hat{w} \times \vec{a} + (1 - \cos \phi) \hat{w} \times (\hat{w} \times \vec{a}) \quad (7.2)$$

Si el ángulo de rotación es infinitesimal ( $d\phi$ ), se obtiene (reteniendo sólo términos de orden  $\mathcal{O}(d\phi)$ )

$$\vec{a}' = \vec{a} + d\phi \hat{w} \times \vec{a} \implies d\vec{a} := \vec{a}' - \vec{a} = \hat{w} \times \vec{a} d\phi \quad (7.3)$$

∴ puede escribirse cualquier variación infinitesimal  $d\vec{a}$  de un vector arbitrario,  $\vec{a}$ , como una rotación diferencial de ángulo  $d\phi$  alrededor de un eje con dirección  $\hat{w}$ , la cual será perpendicular tanto a  $\vec{a}$  como al eje ( $\hat{w}$ ).

## 7.2. Velocidad angular instantánea

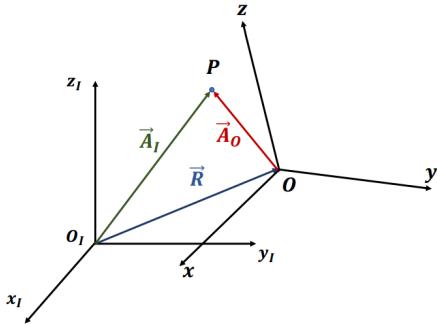


Figura 7.1: Sistema no inercial,  $\{O, x, y, z\}$ , moviéndose con respecto al sistema inercial  $\{O_I, x_I, y_I, z_I\}$

7.2.2 La posición del sistema  $S$  respecto a  $S_I$  viene dada por  $\overrightarrow{O_I O} = \vec{R}(t)$ . Se expresa la variación de los elementos de la base (ortonormal) del sistema móvil (respecto del sistema inercial) en términos de la propia referencia móvil

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}(t)}{dt} &= a_{11}\hat{i}(t) + a_{12}\hat{j}(t) + a_{13}\hat{k}(t) \\ \frac{d\hat{j}(t)}{dt} &= a_{21}\hat{i}(t) + a_{22}\hat{j}(t) + a_{23}\hat{k}(t) \\ \frac{d\hat{k}(t)}{dt} &= a_{31}\hat{i}(t) + a_{32}\hat{j}(t) + a_{33}\hat{k}(t)\end{aligned}\quad (7.4)$$

donde  $\hat{i}(t), \hat{j}(t), \hat{k}(t)$  son los vectores unitarios de la referencia móvil, que están variando respecto de la referencia inercial. Esta variación instantánea de los vectores  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  puede expresarse como la rotación de  $S$  respecto de  $S_I$ , como se verá en lo que sigue.

7.2.3 Diferenciando las condiciones  $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ , etc., se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{i} \cdot \hat{i})}{dt} &= 0 \Rightarrow 2\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{i} = 0 = a_{11}, \dots \\ \frac{d(\hat{i} \cdot \hat{j})}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{i} = a_{12} + a_{21} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21}, \dots\end{aligned}$$

lo que lleva a las siguientes condiciones

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{es decir, la matriz } \{a_{ij}\} \text{ es antisimétrica (y de traza nula).}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{j}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{k}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & a_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

7.2.4 Se define el vector velocidad angular instantánea  $\vec{\omega}(t)$  en la base móvil como

$$\vec{\omega} = w_1\hat{i} + w_2\hat{j} + w_3\hat{k} := a_{23}\hat{i} + a_{31}\hat{j} + a_{12}\hat{k}$$

de esta forma

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = a_{12}\hat{j} + a_{13}\hat{k} = w_3\hat{j} - w_2\hat{k} = \vec{w} \times \hat{i} \quad (7.6)$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = a_{21}\hat{i} + a_{23}\hat{k} = -w_3\hat{i} + w_1\hat{k} = \vec{w} \times \hat{j} \quad (7.7)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = a_{31}\hat{i} + a_{32}\hat{j} = w_2\hat{i} - w_1\hat{j} = \vec{w} \times \hat{k} \quad (7.8)$$

Nótese que, abusando de la notación matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{j}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{k}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \times \hat{i} \\ \vec{w} \times \hat{j} \\ \vec{w} \times \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\vec{w}}^T \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

donde  $\mathbf{A}_{\vec{w}}^T$  es la matriz traspuesta de  $\mathbf{A}_{\vec{w}}$  definida en (7.1).

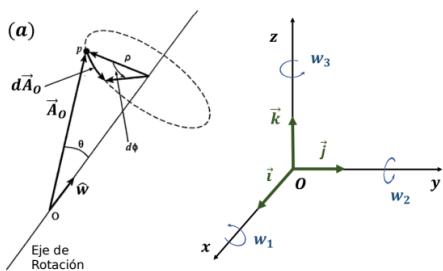


Figura 7.2: (a) Rotación infinitesimal en torno de un eje definido por el vector unitario  $\hat{w}$ . En una rotación infinitesimal,  $|\hat{w} \times \vec{A}_O| = A_O \sin \theta = \rho$  y  $|d\vec{A}_O| = \rho d\phi$ , la cantidad  $d\phi$  es el ángulo infinitesimal de rotación alrededor del eje  $\hat{w}$ . (b) Las componentes de la velocidad angular  $w_i$  rotan el sistema de los ejes  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , de manera que, p.e.,  $w_3$  hace rotar  $\hat{i}$  hacia la dirección  $+\hat{j}$ .

**7.2.5 Cambio respecto a sistema inercial de un vector “fijo” en  $S$ :** Sea  $\vec{A}_O(t) = A_{O1}\hat{i} + A_{O2}\hat{j} + A_{O3}\hat{k}$  con  $A_{O1}, A_{O2}, A_{O3}$  ctes. Derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}_O}{dt} &= A_{O1}\frac{d\hat{i}}{dt} + A_{O2}\frac{d\hat{j}}{dt} + A_{O3}\frac{d\hat{k}}{dt} = \\ &= A_{O1}\vec{w} \times \hat{i} + A_{O2}\vec{w} \times \hat{j} + A_{O3}\vec{w} \times \hat{k} \\ &= \vec{w} \times \vec{A}_O \end{aligned} \quad (7.10)$$

se concluye que  $d\vec{A}_O$  es ortogonal al plano descrito por  $\vec{w}$  y  $\vec{A}_O$  (Fig. 7.2). Además,  $dA_O$  corresponde a un arco de circunferencia de radio  $\rho = A_O \sin \theta$ , en el plano perpendicular a  $\vec{w}$ , que subtiende un ángulo  $d\phi$

$$dA_O = (A_O \sin \theta) d\phi$$

siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $\vec{A}_O$  y  $\vec{w}$ . Pero, de otro lado (7.10),

$$dA_O = (A_O \sin \theta) w dt$$

Es decir, en un determinado instante,  $\vec{A}_O$  gira un ángulo  $d\phi$  alrededor de la dirección de  $\vec{w}$  a razón de

$$d\phi/dt = w$$

de aquí el nombre de velocidad angular instantánea  $w$ . Alternativamente: comparando (7.10) y el resultado (7.3) aplicado a  $\vec{A}_O$  se tiene

$$\begin{aligned} d\vec{A}_O &= \vec{w} \times \vec{A}_O dt = \hat{w} \times \vec{A}_O w dt \\ d\vec{A}_O &= \hat{w} \times \vec{A}_O d\phi \end{aligned}$$

De donde,  $w dt = d\phi$  o  $w = d\phi/dt$ .

NOTA: Desarrollando por Taylor la matriz de rotación  $\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi}$  en su forma exponencial,  $\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{w}} d\phi)$ , siendo

$$\mathbf{A}_{\hat{w}} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{w}_3 & \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 & 0 & -\hat{w}_1 \\ -\hat{w}_2 & \hat{w}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{A}_{\hat{w}} \vec{a} = \hat{w} \times \vec{a}$$

se tiene que

$$\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi} (\vec{A}_O) = \vec{A}_O + \mathbf{A}_{\hat{w}} (\vec{A}_O) d\phi$$

por tanto,

$$d\vec{A}_O = \mathbf{A}_{\hat{w}} (\vec{A}_O) D\phi = \left( \frac{\vec{w}}{w} \times \vec{A}_O \right) d\phi$$

Por otro lado,

$$d\vec{A}_O = (\vec{w} \times \vec{A}_O) dt$$

donde se concluye, de nuevo, que  $d\phi = w dt$ .

**7.2.6 Cambio de un vector variable en  $S$ :** Sea  $\vec{A}(t) = A_1(t)\hat{i} + A_2(t)\hat{j} + A_3(t)\hat{k}$  con  $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$  variando con el tiempo  $t$ , entonces

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\hat{i} + \frac{dA_2}{dt}\hat{j} + \frac{dA_3}{dt}\hat{k} + A_1 \frac{d\hat{i}}{dt} + A_2 \frac{d\hat{j}}{dt} + A_3 \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{w} \times \vec{A}$$

donde

$$\frac{\delta\vec{A}}{t} := \frac{dA_1}{dt}\hat{i} + \frac{dA_2}{dt}\hat{j} + \frac{dA_3}{dt}\hat{k}$$

es decir,  $\delta\vec{A}/dt$  representa el cambio de  $\vec{A}$  “visto” desde el sistema móvil.

### 7.3. Teorema de Coriolis

**7.3.1** Sea un punto  $P$  que se mueve en el espacio con vector de posición  $\vec{r}_I$  respecto del sistema inercial y  $\vec{r}$  respecto del sistema móvil. Se tiene, entonces, que

$$\vec{r}_I(t) = \vec{r}(t) + \vec{R}(t)$$

Derivando respecto al tiempo se tiene

$$\vec{v}_I(t) = \vec{v}(t) + \vec{w} \times \vec{r} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

donde  $\vec{v}_I$  es la velocidad respecto al sistema inercial y  $\vec{v} = \delta\vec{r}/\delta t$  es la velocidad “vista” desde el sistema móvil.

Volviendo a derivar se tiene que (notando  $d/dt(\vec{w} \times \vec{r}) = \delta/\delta t(\vec{w} \times \vec{r}) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \dot{\vec{w}} \times \vec{r} + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$ )

$$\vec{a}_I = \vec{a} + 2\vec{w} \times \vec{v} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \quad (7.11)$$

siendo  $\vec{a} = \delta^2\vec{r}/\delta t^2$  la aceleración vista desde el sistema no inercial. Este resultado se conoce como **T<sup>ma</sup>** de Coriolis.

7.3.2 Nótese que

$$\vec{a}_I = \text{aceleración inercial}, \quad \vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2}, \text{ aceleración no inercial}, \quad \dot{\vec{w}} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\delta \vec{w}}{\delta t}, \text{ aceleración angular}$$

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{aceleración de arrastre o traslacional}, \quad 2\vec{w} \times \vec{v} = \text{aceleración de Coriolis}$$

La aceleración de Coriolis sólo se pone de manifiesto si el punto  $P$  mueve respecto del sistema móvil.

7.3.3 Segunda ley de Newton desde un sistema no inercial (móvil): Se considera un campo de fuerzas externo,  $\vec{F}$ , entonces, para un punto material de masa  $m$  se tendrá en el sistema móvil que

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}_{\text{efec}}$$

donde el término de la derecha es la fuerza efectiva

$$\vec{F}_{\text{efec}} = \vec{F} - 2m\vec{w} \times \vec{v} - m\dot{\vec{w}} \times \vec{r} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

7.3.4 Aparecen las siguientes fuerzas “ficticias” en el sistema de referencia móvil

$$\vec{F}_{\text{centr}} = -m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \text{fuerza centrífuga} \quad (7.12)$$

$$\vec{F}_{\text{azim}} = -m\dot{\vec{w}} \times \vec{r} = \text{fuerza azimutal} \quad (7.13)$$

$$\vec{F}_{\text{arras}} = -m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{fuerza de arrastre o traslacional} \quad (7.14)$$

$$\vec{F}_{\text{Coriol}} = -2m\vec{w} \times \vec{v} = \text{fuerza de Coriolis} \quad (7.15)$$

- a) La fuerza centrífuga (7.12) es debida al movimiento de rotación del sistema de coordenadas. Como  $\vec{w} \cdot \vec{F}_{\text{centr}} = 0$ ,  $\vec{F}_{\text{centr}}$  es perpendicular al eje de rotación  $\hat{w}$ . Puede verse que la fuerza centrífuga está dirigida en la dirección radial hacia fuera (en (Fig. 7.2) se reemplaza  $\vec{A}_O \rightarrow \vec{r}$  ya que

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{F}_{\text{centr}} &= -m\vec{r} \cdot \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = -m\vec{r} \cdot [(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{w} - \vec{w}^2 \vec{r}] = \\ &= -m[(\vec{w} \cdot \vec{r})^2 - \vec{w}^2 r^2] = mw^2 r^2 \sin^2 \theta = mw^2 \rho^2 > 0 \end{aligned}$$

- b) La fuerza azimutal aparece sólo si la velocidad angular cambia en el tiempo. Es perpendicular a  $\vec{r}$ . Si  $\vec{w}$  cambia de magnitud pero no de dirección,  $\vec{F}_{\text{azim}}$  actúa manteniendo la velocidad de rotación de la partícula.
- c) La fuerza de Coriolis (7.15) aparece si la partícula se mueve respecto al sistema móvil. Como  $\vec{w} \cdot \vec{F}_{\text{Coriol}} = \vec{v} \cdot \vec{F}_{\text{Coriol}} = 0$ ,  $\vec{F}_{\text{Coriol}}$  es perpendicular a  $\vec{w}$  y  $\vec{v}$ . Esta fuerza se ha de tener en cuenta en los cálculos de trayectorias balísticas de larga distancia o en la descripción de fenómenos atmosféricos de gran escala (también en la trayectoria de paracaidistas o en el cálculo de la vertical de altos edificios).
- d) La fuerza traslacional o de arrastre se debe a la aceleración del origen del sistema móvil relativa al sistema inercial. Si  $\vec{R}$  gira con velocidad angular  $\vec{\Omega}$  entonces  $d^2 \vec{R}/dt^2 = \vec{\Omega} \times \vec{R}$  y

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

## 7.4. Movimiento en la Superficie Terrestre

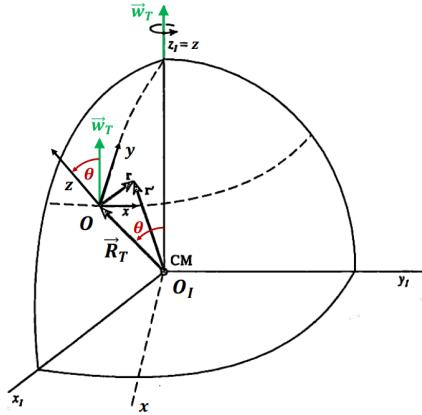


Figura 7.3: Sistema de referencia inercial  $S_I$  con origen al centro de la Tierra, y sistema de referencia no inercial fijado en la superficie terrestre (en  $O$ ). Adaptación de la Fig 7-6 de Olsson & Barger

7.4.1 Se elige el sistema inercial fijo  $S_I$  con origen  $O_I$  en el centro de la Tierra y el sistema móvil  $S$  con origen  $O$  en un punto de la superficie terrestre, girando con ella. Se eligen los ejes móviles tal que  $O_x$  apunta hacia el Este,  $O_y$  hacia el Norte y  $O_z$  hacia arriba (pasando por el centro de la Tierra, supuesta esférica). Tanto  $\vec{R}_T(t) = \overrightarrow{O_I O}$  como el sistema de referencia móvil giran con velocidad angular de rotación terrestre  $\vec{w}_T$ , alrededor del eje Norte-Sur, con magnitud (constante)

$$w_T = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 0,73 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

7.4.2 Considerando la gravedad  $g$  en la superficie y otras fuerzas externas  $\vec{F}'$ , la segunda ley de Newton para una masa  $m$  es

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' - mg\hat{k} - 2m\vec{w}_T \times \vec{v} - m\vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{r}) - m\vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{R}_T)$$

para  $r \ll R_T$ , puede despreciarse la fuerza centrífuga del  $T^{ma}$  de Coriolis frente a la fuerza (centrífuga) de arrastre.

7.4.3 Se define la **gravedad efectiva** como

$$\vec{g}_{efec} = -g\hat{k} - \vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{R}_T)$$

con lo que

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' + m\vec{g}_{efec} - 2m\vec{w}_T \times \vec{v}$$

A parte de las fuerzas externas y la gravedad efectiva queda, pues, la fza. de Coriolis.

Figura 7.4: Aceleración gravitatoria efectiva  $\vec{g}_{efec}$ . La magnitud de la aceleración centrífuga ( $\vec{g}_c$ ) se ha exagerado por claridad.

7.4.4 La corrección que introduce el término centrífugo en la gravedad efectiva es pequeño. Comparándola con  $g$  se tiene.

$$w_T^2 R_T / g \sim 0,003 \quad (7.16)$$

es decir, una corrección de alrededor de un tres por mil. Más en concreto, definiendo la **colatitud**  $\theta$  desde el polo norte como

$$\theta = \pi/2 - \text{lat N} = \pi/2 + \text{lat S}$$

se tiene que

$$\vec{R}_T = R_T \hat{k} \quad (7.17)$$

$$\vec{w}_T = w_T (\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \quad (7.18)$$

y, por tanto, puede calcularse la aceleración centrífuga vista desde el sistema sobre la superficie terrestre,  $\vec{a}_{centr}$ , como

$$\vec{a} = -\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{R}_T) = w_T^2 \vec{R}_T - \vec{w}_T \cdot \vec{R}_T \vec{w}_T = -w_T^2 R_T \sin \theta (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k})$$

$$a_{centr} = w_T^2 R_T \sin \theta \simeq 0,03 \sin \theta$$

lo que lleva finalmente a

$$\vec{g}_{\text{efec}} = -g\hat{k} + \vec{a}_{\text{centr}}$$

Usando esta expresión de la gravedad efectiva, puede obtenerse que<sup>(†)</sup>

$$g_{\text{efec}} \simeq g - w_T^2 R_T \sin^2 \theta$$

<sup>(†)</sup> De (7.16), es evidente que  $g \gg w_T^2 R_T$

$$\begin{aligned} g_{\text{efec}} &= \sqrt{w_T^4 R_T^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (w_T^2 R_T \sin^2 \theta - g)^2} \\ &\simeq \sqrt{g^2 - 2gw_T^2 R_T \sin^2 \theta} \simeq g(1 - w_T^2 R_T \sin^2 \theta/g) \end{aligned}$$

En los polos no hay cambio de gravedad, mientras que en el ecuador la corrección centrífuga es máxima.

#### 7.4.5 Observaciones:

- I) Con la definición de gravedad efectiva se puede cambiar ligeramente la orientación del sistema de referencia móvil de manera que el eje  $Oz$  coincida con la dirección de la gravedad efectiva. Esta dirección coincide con la de una plomada, que no se dirige hacia el centro de la Tierra, es decir, no coincide exactamente con la perpendicular a la superficie.
- II) En un punto de colatitud  $\theta$  la desviación de la plomada respecto de la normal de la superficie de la Tierra, subtendido un ángulo  $\alpha$  viene dado por (ejercicio)

$$\alpha \simeq \sin \alpha \simeq \frac{|\vec{g} \times \vec{g}_{\text{efec}}|}{g^2} = \frac{w_T^2 R_T \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Fíjese que tanto en los polos como en el ecuador no hay desviación de la plomada

#### 7.4.6 La velocidad angular terrestre puede escribirse como en (7.18) y, por tanto, la fuerza de Coriolis es

$$\vec{F}_{\text{Coriol}} = -2m\vec{w}_T \times \vec{v} = 2mw_T \left[ (v_y \cos \theta - v_z \sin \theta)\hat{i} - v_x \cos \theta \hat{j} + v_x \sin \theta \hat{k} \right]$$

Para un movimiento en la superficie terrestre, se tienen las siguientes desviaciones debidas a Coriolis (en el hemisferio Norte,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , y en el Sur,  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ )

Dirección $\vec{v}$	Hem N	Hem S
Norte ( $v_y > 0$ )	Este	Oeste
Este ( $v_x > 0$ )	Sur y arriba	Norte y arriba
Sur ( $v_y < 0$ )	Oeste	Este
Oeste ( $v_x < 0$ )	Norte y abajo	Sur y abajo
Arriba ( $v_z > 0$ )	Oeste	Oeste
Abajo ( $v_z < 0$ )	Este	Este

Se ve pues que las desviaciones son en el sentido de las agujas del reloj en el hemisferio norte y en sentido contrario en el sur.

## 7.5. Caída libre. Desviación hacia el Este.

### 7.5.1 Para la caída libre de un cuerpo con masa $m$ se tiene la siguiente ecuación de movimiento desde el sistema terrestre

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = -mg_{\text{efec}} \hat{k} - 2m\vec{w}_T \times \vec{v}$$

con condiciones iniciales  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ ,  $\vec{r}(0) = (0, 0, h)$ . En términos de las componentes vectoriales

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} = 2w_T(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta) \\ \ddot{y} = -2w_T \dot{x} \cos \theta \\ \ddot{z} = -g_{\text{efec}} + 2w_T \dot{x} \sin \theta \end{array} \right\}$$

Se ha utilizado la notación de derivación  $\delta x / \delta t \equiv \dot{x}$ , etc.

7.5.2 En aproximación a orden cero en  $w_T$  ( $\mathcal{O}(w_T^0)$ ), despreciando la rotación de la Tierra  $w_T$  se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}^{(0)} = 0 \\ \ddot{y}^{(0)} = 0 \\ \ddot{z}^{(0)} = -g_{\text{efec}} \end{array} \right\}$$

Integrando desde el reposo

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^{(0)} = 0 \\ \dot{y}^{(0)} = 0 \\ \dot{z}^{(0)} = -g_{\text{efec}} t \end{array} \right\}$$

7.5.3 Aproximación a orden uno: Substituyendo esta solución en los segundos miembros de las ecs. de mvmt.

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}^{(1)} = 2w_T g_{\text{efec}} \sin \theta \\ \ddot{y}^{(1)} = 0 \\ \ddot{z}^{(1)} = -g_{\text{efec}} \end{array} \right\}$$

Integrando dos veces, se tiene la solución de orden uno en  $w_T$  ( $\mathcal{O}(\exists \tau)$ )

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{w_T}{3} g_{\text{efec}} t^3 \sin \theta \\ y^{(1)} &= 0 \\ z^{(1)} &= -\frac{1}{2} g_{\text{efec}} t^2 + h \end{aligned}$$

donde  $h$  es la altura de caída.

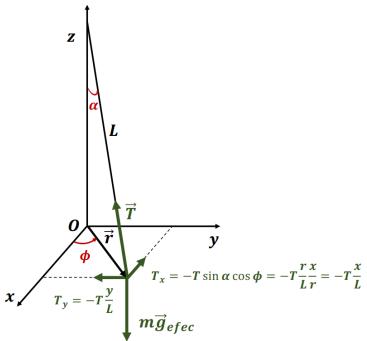
7.5.4 El tiempo de caída corresponde a  $z^{(1)} = 0$ , es decir,  $t_{\text{caída}} = \sqrt{2h/g_{\text{efec}}}$ , con lo que

$$x_{\text{caída}} = \frac{2hw_T}{3} \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{efec}}}} \sin \theta$$

Esta es la desviación hacia el este (tanto en el hemisferio norte como en el hemisferio sur). Por ejemplo, para una altura  $h = 1000$  m en el ecuador ( $\theta = \pi/2$ ), la desviación es de aproximadamente 70 cm. En los polos no hay desviación.

7.5.5 **Ejercicio.** En un tiro vertical hacia arriba, cual es la desviación al caer al suelo?

## 7.6. Péndulo de Foucault



7.6.1 La fuerza de Coriolis en la superficie terrestre hace que el plano de oscilaciones de un péndulo gire sobre su eje de oscilaciones a causa del movimiento de rotación de la Tierra. En el hemisferio Norte (HN), el péndulo gira en el sentido de las agujas del reloj, mientras que en el hemisferio Sur lo hace en sentido contrario.

7.6.2 Considérese el movimiento de la *lenteja* en el plano XY (plano horizontal). La fuerza que mueve el péndulo, despreciando el movimiento en OZ (ángulos pequeños implican movimientos horizontales.  $\ll L$  es la longitud del péndulo), es

$$\vec{F}' \approx -m(g_{\text{efec}} \sin \alpha) \hat{r} = -m \frac{g_{\text{efec}}}{L} \vec{r}, \quad \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j},$$

### 7.6.3 Considerando, además, la fuerza Coriolis en el plano XY

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' - 2m\vec{\omega}_T \times \vec{v}, \quad (T_z - mg_{\text{efec}} \approx 0),$$

se tiene entonces las siguientes ecuaciones de movimiento acopladas

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega_T \dot{y} \cos \theta + \frac{g_{\text{efec}}}{L} x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_T \dot{x} \cos \theta + \frac{g_{\text{efec}}}{L} y &= 0\end{aligned}$$

Definiendo ahora la variable compleja  $\zeta = x + iy$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden de una variable compleja

$$\ddot{\zeta} + i(2\omega_T \cos \theta) \dot{\zeta} + \frac{g_{\text{efec}}}{L} \zeta = 0 \quad (7.19)$$

### 7.6.4 La solución del movimiento se obtiene por los métodos usuales de resolución de ecuaciones diferenciales, resultando en

$$\zeta(t) = Ae^{-i(\omega_T \cos \theta)t} \cos \left( \sqrt{\frac{g_{\text{efec}}}{L}} t + \phi \right)$$

donde  $A$  y  $\phi$  son constantes de integración. En la raíz cuadrada del argumento del coseno se ha considerado la aproximación  $\omega_T \ll g_{\text{efec}}/L$  (la frecuencia de rotación terrestre,  $\omega_T$ , es mucho más lenta que la oscilación del péndulo,  $\omega_0 = \sqrt{g_{\text{efec}}/L}$ ).

Se obtiene la ecuación característica asociada a (7.19):

$$\lambda^2 + 2i\omega_z \lambda + \frac{g_{\text{efec}}}{L} = 0$$

donde  $\omega_z := \omega_T \cos \theta$ . Las soluciones son complejas

$$\lambda = -i\omega_z \pm \sqrt{-\omega_z^2 - \frac{g_{\text{efec}}}{L}} \approx -i \left( \omega_z \mp \sqrt{\frac{g_{\text{efec}}}{L}} \right).$$

Por tanto

$$\zeta(t) = C_1 e^{-i\omega_z t + i\sqrt{g_{\text{efec}}/L}t} + C_2 e^{-i\omega_z t - i\sqrt{g_{\text{efec}}/L}t}.$$

Los movimientos  $x(t)$  y  $y(t)$  son las partes real e imaginaria de  $\zeta(t)$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos[(\omega_T \cos \theta)t] \cos \left( \sqrt{\frac{g_{\text{efec}}}{L}} t + \phi \right) \\ y(t) &= -A \sin[(\omega_T \cos \theta)t] \cos \left( \sqrt{\frac{g_{\text{efec}}}{L}} t + \phi \right)\end{aligned}$$

### 7.6.5 El periodo usual de oscilación del péndulo es, pues

$$T = 2\pi \sqrt{L/g_{\text{efec}}},$$

mientras que la amplitud en los ejes  $x$  e  $y$  varía periódicamente con periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_T |\cos \theta|}$$

Este último es el período del giro del péndulo. En el ecuador no hay giro, mientras que en los polos el período de giro es el de rotación de la Tierra.

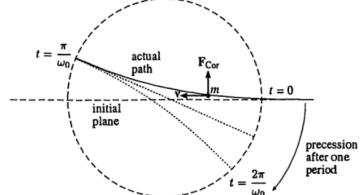


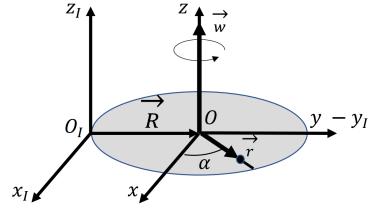
Figura 7.5: Deflexión de la lenteja del péndulo de Foucault por la fuerza de Coriolis vista desde arriba. El ángulo de precesión está exagerado

## 7.7. Boletín 7

- 7.8. Sea un disco que gira con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$ , perpendicular al plano del disco. En el instante  $t = 0$ , se lanza una bolita desde su centro con velocidad inicial  $\vec{v}(0) = v_x^0 \hat{i} + v_y^0 \hat{j}$ , respecto al sistema de referencia  $Oxyz$  ligado al disco

1. Escribir las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia ligado al disco (Coriolis + centrípeta)

- 7.9. **Bola en disco giratorio:** Desde el centro de un disco que gira con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  (perpendicular al plano que contiene al disco), se lanza una bola por una rendija rectilínea hecha en su superficie. En un sistema de referencia que rota con el disco,  $O'$ , la bola se mueve con velocidad constante  $\vec{v}$ , dirigida a lo largo de la rendija, la cual forma un ángulo  $\alpha$  respecto al eje  $x$  ligado al disco (véase la figura).



- 1) Calcular la velocidad de la bola en el sistema de referencia inercial  $O_I$  situado sobre el borde del disco, de manera que la posición de  $O$  respecto a  $O^I$  la da el vector  $\vec{R} = R \hat{j}_I$ .

En el sistema de referencia  $O$  y expresada en el sistema de ejes  $\{x, y, z\}$ , la velocidad angular instantánea (constante) es

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad (7.20)$$

la bola se mueve con velocidad constante

$$\vec{v} = v(\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}), \quad (7.21)$$

de modo que su posición (nuevamente, vista desde  $O$ ) será

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = vt(\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) + \vec{C}. \quad (7.22)$$

En el instante inicial, la bolita se sitúa en el centro del disco ( $\vec{r} = (0, 0, 0)$ ), lo que implica que  $\vec{C} = (0, 0, 0)$ . Por tanto,

$$\vec{r} = vt(\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}). \quad (7.23)$$

Se aplica la relación entre las velocidades de un sistema de referencia inercial ( $O^I$ ) respecto a uno no inercial ( $O$ ):

$$\vec{v}_I = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{R}} \quad (7.24)$$

Nótese que esta relación debe aplicarse cuidadosamente. Al lado izquierdo se tiene la velocidad vista desde el sistema de referencia inercial  $O^I$ . A la derecha se tiene una cantidad  $\{x_I, y_I, z_I\}$  ligado a  $O_I$  ya que, en este sistema,  $\vec{R} = R \hat{j}_I = \text{cte}$  (cosa que no ocurre en el sistema de ejes  $\{x, y, z\}$  ligado a  $O$ , donde se ve rotar a  $\vec{R}$ ). Además, a la derecha de esta última expresión también hay tres cantidades vectoriales,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{r}$  que se han expresado en el sistema no inercial de ejes  $\{x_I, y_I, z_I\}$  ligado a  $O_I$ . Si se quiere expresar  $\vec{v}_I$  en el sistema de ejes  $\{x_I, y_I, z_I\}$  ligado a  $O^I$ , será necesario realizar una rotación de ángulo  $\theta(t) = \omega t$  de estas tres cantidades vectoriales, es decir, se debe hacer una rotación pasiva:

## 8. Cinemática y dinámica del sólido rígido

8.1. Definición y grados de libertad . . . . .	96
8.2. Rotación y velocidad angular del sólido . . . . .	96
8.3. Rotación y ángulos de Euler . . . . .	98
8.4. Velocidad angular y ángulos de Euler . . . . .	99
8.5. Energía cinética y momento angular. Tensor de inercia . . . . .	100
8.6. Estudio del Tensor de inercia. . . . .	102
8.7. Ecuaciones de Euler . . . . .	104
8.8. Soluciones estables del sólido libre . . . . .	105
8.9. Movimiento general del sólido libre . . . . .	107
8.10. Peonza simétrica libre . . . . .	108
8.11. Peonza simétrica pesada . . . . .	110
8.12. Boletín 8 . . . . .	113

### 8.1. Definición y grados de libertad

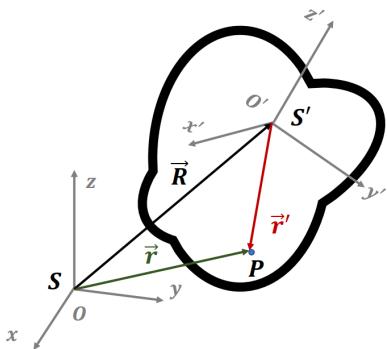


Figura 8.1: Relación entre sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ .  $P$  es un punto del sólido rígido.

8.1.1 Se define un **sólido rígido** como un sistema de puntos materiales (discreto o continuo) tal que la posición relativa entre ellos permanece invariable.

8.1.2 **Sistema de referencia ligado al sólido:** Sea  $S = OXYZ$  un sistema de referencia inercial. Se define el sistema de referencia  $S' = O'X'Y'Z'$ , tal que, los puntos del sólido, en su movimiento, mantiene sus coordenadas fijas en él. Es decir, este sistema de referencia se mueve con el sólido. En un determinado instante  $t$ , san  $\vec{r}(t)$  y  $\vec{r}'(t)$  los vectores de posición de un punto del sólido respecto del sistema inercial y del ligado al sólido, respectivamente. Entonces

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

donde  $\vec{R}(t) = \overrightarrow{OO'}$ . Nótese que las componentes del vector  $\vec{r}'(t)$  cambian respecto del sistema inercial.

8.1.1 **Descomposición del sólido (Euler-Chasles):** Considérese una rotación  $\mathbf{R}(t)$  que *gira* la orientación que el sistema  $S'$  tenía en  $t = 0$  a la orientación de  $S$  en  $t$ . De este modo, para cada punto del sólido puede escribirse

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \mathbf{R}(t) \{ \vec{r}'(t=0) \} \quad (8.1)$$

Es decir, el mvmt. del sólido puede descomponerse como una traslación (que no cambia la orientación) más una rotación. Según esta descomposición, el mvmt. de un sólido rígido tiene seis grados de libertad. Tres traslaciones y tres rotacionales.

8.1.2 Recuérdense las siguientes propiedades de una mat. de rotación.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \det \mathbf{R} = +1$$

con  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$

### 8.2. Rotación y velocidad angular del sólido

8.2.1 **Velocidad angular:** El cambio de los vectores unitarios del sistema de referencia ligado al sólido  $\vec{e}_i$  puede expresarse como (§7.2 (7.9))

$$\frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i = W_{ij}' \vec{r}_j'(t), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8.2)$$

con el índice  $i$  sumado (repetido en el mismo miembro de la igualdad),  $\vec{e}_i = \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ , y

$$\mathbf{W}' = \begin{pmatrix} 0 & w'_3 & -w'_2 \\ -w'_3 & 0 & w'_1 \\ w'_2 & -w'_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

siendo  $\vec{w} = (w'_1, w'_2, w'_3)$  la velocidad angular instantánea del sistema de referencia ligado al sólido y  $w'_i$  sus componentes en este sistema.

### 8.2.2 El carácter antisimétrico de $\mathbf{W}'$ permite escribir

$$w'_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W'_{jk} \quad (8.4)$$

### 8.2.3 Relación con matrices de rotación:

$$\vec{e}'_i(t) = R_{ij}(t)\vec{e}'_j(0) = R_{ij}(t)\vec{e}_j \quad (8.5)$$

donde  $R_{ij}$  son los elementos de matriz  $\mathbf{R}$  y eligiendo que  $\vec{e}'_i(0) = \vec{e}_i$  coincidan con los vectores unitarios del sistema de referencia inercial en  $t = 0$ . Nótese que se ha elegido la rotación de manera que los vectores base se relacionan con  $\mathbf{R}$ , por tanto, para  $\vec{r}'(t)$  (en columna),

$$\vec{r}'(t) = \mathbf{R}^T(t)\vec{r}'(0) \quad (\text{ver descomposición de Euler-Chasles}) \quad (8.1),$$

(†) Efectivamente, por un lado ( $\vec{r}'$ )

$$\vec{r}'(t) = x'_i(t)\vec{e}_i.$$

Por el otro (gira la base móvil  $\vec{e}'_i$ )

$$\vec{r}'(t) = x'_j(0)\vec{e}'_j(t) \stackrel{(8.5)}{=} x'_j(0)R_{ji}\vec{e}_i(t)$$

Derivando (8.5)

$$\frac{d\vec{e}'_i}{dt} = \dot{R}_{ij}(t)\vec{e}_j = \dot{R}_{ij}R_{jk}^T\vec{e}'_k(t) = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)_{ik}\vec{e}'_k(t) \quad (8.8)$$

con índices  $j, k$  sumados. Comparando (8.3) y (8.8) se deduce la siguiente relación entre la rotación del sólido y su velocidad angular instantánea

$$W'_{ij} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)_{ij} \quad (8.9)$$

La condición  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  asegura que  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  sea antisimétrica (demuéstrese).

**8.2.4 Propiedad fundamental:** En el movimiento del sólido, el vector velocidad angular instantánea es independiente del origen del sistema de coordenadas ligado al sólido. En efecto, se consideran dos sistemas de coordenadas ligados al sólido  $S' = O'X'Y'Z'$  y  $S'' = O''X''Y''Z''$  (Fig. 8.2). El vector  $\overrightarrow{O'O''}(t)$  es un vector fijo tanto para  $S'$  como para  $S''$ . Respecto a la derivada temporal desde ambos sistemas se tendrá

$$\frac{d\overrightarrow{O'O''}}{dt} = \vec{w}_{O'} \times \overrightarrow{O'O''}(t) = \vec{w}_{O''} \times \overrightarrow{O'O''}(t)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{w}_{O'} &= \vec{w}_{O''} \\ |\vec{w}_{O'}| &= |\vec{w}_{O''}| \\ w'_i &= w''_i \Leftrightarrow \vec{e}'_i = \vec{e}''_i \\ \Rightarrow W' &= W'' \end{aligned} \quad (8.10)$$

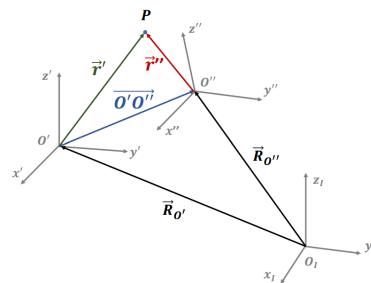


Figura 8.2: Dos sistemas de referencia ligados al sólido ( $O'$  y  $O''$ ) y un sistema de referencia inercial  $O_I$ .

### 8.3. Rotación y ángulos de Euler

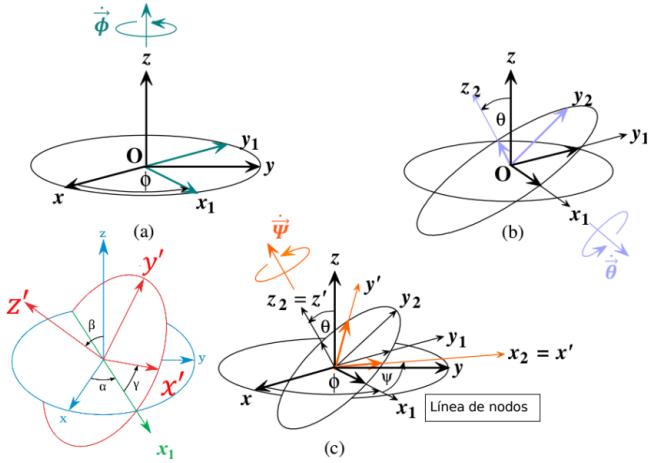


Figura 8.3: Ángulos de Euler

$\phi, \theta, \psi$  son los ángulos de Euler.

8.3.1 Se desea construir una rotación que lleve de la orientación del sistema  $S$  a la del sistema ligado al sólido  $S'$ . Se define la **línea de nodos**  $x_1$  como la intersección de los planos  $xy$  y  $x'y'$ . Ahora se consideran las siguientes rotaciones con ejes definidos como sigue:

	eje	cambio de ejes	rango	nombre
$\mathbf{R}_\phi$	$z$	$xyz \rightarrow x_1y_1z$	$\phi \in [0, 2\pi]$	precesión
$\mathbf{R}_\theta$	$x_1$	$x_1y_1 \rightarrow x_1y_2z'$	$\theta \in [0, \pi]$	nutación
$\mathbf{R}_\psi$	$z'$	$x_1y_2z' \rightarrow x'y'z'$	$\psi \in [0, 2\pi]$	espín

Explícitamente se obtiene

$$\mathbf{R}_\phi : S(x, y, z) \rightarrow S_1(x_1, y_1, z), \quad \mathbf{R}_\phi \equiv \mathbf{R}_{z, \phi}^T \text{ (Fórmula de Rodrigues:}$$

$$\mathbf{R}_{\hat{u}, \phi} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 (1 - \cos \phi) \text{ con } \hat{u} = \hat{k} = (u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

$$\mathbf{R}_\theta : S_1(x_1, y_1, z) \rightarrow S_2(x_1, y_2, z'), \quad \mathbf{R}_\theta \equiv \mathbf{R}_{x_1, \theta}^T \text{ Fórmula de Rodrigues con } \hat{u} = \hat{i}_1 = (u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

$$\mathbf{R}_\psi : S_2(x_1, y_2, z') \rightarrow S'(x', y', z'), \quad \mathbf{R}_\psi \equiv \mathbf{R}_{z', \psi}^T \text{ Fórmula de Rodrigues con } \hat{u} = \hat{k}' = (u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

8.3.2 La rotación  $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) : S \rightarrow S'$  es, entonces

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \quad (8.14)$$

con

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\theta s\psi \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)^T \begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

## 8.4. Velocidad angular y ángulos de Euler

8.4.1 **Matriz antisimétrica:** La relación (8.9) (recuérdese que la velocidad angular es la misma en cualquier sistema de referencia ligado al sólido (8.10)) es

$$\mathbf{W}'(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t) \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi \\ \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi + \mathbf{R}_\psi \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\phi + \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{R}}_\phi \\ \mathbf{R}^T &= \mathbf{R}_\phi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T \end{aligned}$$

Recordando que  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  se llega a

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \left( \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T \right) \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \left( \dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^T \right) \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T$$

8.4.2 **Cálculo explícito:** Calculando los términos de la derecha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\psi^T &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_\psi \left( \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T \right) \mathbf{R}_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \sin \psi \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi & -\dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \left( \dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^T \right) \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi} \cos \theta & -\dot{\phi} \sin \theta \\ -\dot{\phi} \cos \theta & 0 & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz completa es:

$$\mathbf{W}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi} c\theta + \dot{\psi} & \dot{\theta} s\phi - \dot{\phi} c\psi s\theta \\ -\dot{\phi} c\theta - \dot{\psi} & 0 & \dot{\theta} c\psi + \dot{\phi} s\theta s\psi \\ \dot{\phi} c\psi s\theta - \dot{\theta} s\phi & -\dot{\theta} c\psi - \dot{\phi} s\theta s\psi & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(8.3)}{=} \begin{pmatrix} 0 & w'_3 & -w'_2 \\ -w'_3 & 0 & w'_1 \\ w'_2 & -w'_1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.4.3 **Velocidad angular:** De estas expresiones se obtienen las componentes de la velocidad angular instantánea del sólido

$$w'_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (8.18)$$

$$w'_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta - \dot{\theta} \sin \psi \quad (8.19)$$

$$w'_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (8.20)$$

que son las componentes de  $\vec{w}$  en la base móvil ligada al sólido.

8.4.4 La velocidad angular instantánea del sólido puede descomponerse como suma de las tres velocidades angulares instantáneas: la de precesión, la de nutación y la de espín

$$\vec{w} = \dot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\psi}}$$

En efecto, usando las matrices de rotación asociadas a los ángulos de Euler se tiene

$$\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi} \hat{k} = \dot{\phi} (\sin \theta \sin \psi \hat{i}' + \sin \theta \cos \psi \hat{j}' + \cos \theta \hat{k}') \quad (8.17)$$

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta} \hat{i}_1 = \dot{\theta} (\cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}') \quad (8.13)$$

$$\dot{\vec{\psi}} = \dot{\psi} \hat{k}'$$

8.4.5 En la base inercial se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \dot{\phi}\hat{k} \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}\hat{i}_1 \quad (8.11) \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}\hat{k}' = \dot{\psi}(\sin\theta \sin\phi\hat{i} - \sin\theta \cos\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}) \quad (8.17)\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}w_1 &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ w_2 &= -\dot{\psi} \sin\theta \cos\phi + \dot{\theta} \sin\phi \\ w_3 &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}\end{aligned}$$

son las componentes de  $\vec{w}$  en la base inercial. Nótese que las componentes del vector velocidad angular (columna) cambian de base con la matriz inversa (traspuesta) de la usada para los vectores columna (ver (8.6) y (8.7))  $w_i(t) = R_{ij}^T(t)w'_j(t)$ . Esto es porque se está haciendo una rotación pasiva del vector (ver Apéndice A). Efectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{w} &= w'_j(t)\vec{e}_j(t) = w'_j(t)R_{ji}(t)\vec{e}_i \\ &= w_i(t)\vec{e}_i\end{aligned}$$

(compruébese explícitamente que  $w_i = R_{ij}^T w'_j$ ).

## 8.5. Energía cinética y momento angular. Tensor de inercia

8.5.1 **Energía cinética:** Considérese un sólido discreto con masas  $m_\alpha$  y posiciones  $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha$ . La energía cinética es entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_\alpha \right) \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_\alpha \right)$$

Se desarrolla los paréntesis, llegando a

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}} \left( \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha \right) + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha^2 \quad (8.21)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}'_{CM} + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha^2 \quad (8.22)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}'_{CM} + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) \quad (8.23)$$

8.5.2 **Energía cinética de rotación:** Para calcular el término de rotación, se utiliza el desarrollo del producto escalar cuádruple

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \cdot \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

con lo que se llega directamente a

$$(\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) = (\vec{r}'_\alpha \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) w'_i w'_j$$

⇒ Para llegar a este resultado también puede utilizarse la siguiente expresión matricial de producto vectorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{A}_{\vec{b}} \vec{a} \quad (8.24)$$

donde se define la matriz antisimétrica  $\mathbf{A}_{\vec{b}}$  con elementos de matriz

$$(\mathbf{A}_{\vec{b}})_{ij} = \varepsilon_{ijk} b_k \quad \text{equivalentemente} \quad b_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} (\mathbf{A}_{\vec{b}})_{mn}$$

Utilizando esta expresión matricial se tiene

$$(\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}'_\alpha) = (\mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha} \vec{w}) \cdot (\mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha} \vec{w}) = \vec{w}^T \mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha}^T \mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha} \vec{w} = - \left( \mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha}^2 \right) w'_i w'_j$$

Pero

$$-\left( \mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha}^2 \right)_{ij} = -(\mathbf{A}'_{\vec{r}'_\alpha})_{ik} (\mathbf{A}'_{\vec{r}'_\alpha})_{kj} = -\varepsilon_{ikm} r'_{\alpha m} \varepsilon_{kjn} r'_{\alpha n} = \vec{r}'_\alpha^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}$$

donde se ha utilizado la propiedad  $\varepsilon_{kim} \varepsilon_{kjn} = \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}$ .

La energía cinética de rotación del sólido rígido puede escribirse, entonces como sigue

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_\alpha^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) w'_i w'_j$$

con índices  $i, j$  sumados.

8.5.3 **Tensor de Inercia  $\mathbf{I}$** : es el que tiene como elementos de matriz, calculados en la base ligada al sólido,

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_\alpha^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j})$$

En notación matricial, la energía cinética de rotación es

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{w}^T \mathbf{I}_{O'} \vec{w}$$

donde las componentes de  $\vec{w}$  se expresan en la base ligada al sólido. Nótese que, en función de la matriz antisimétrica asociada a  $\vec{r}'_\alpha$ , puede escribirse

$$\mathbf{I}_{O'} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha}^2. \quad (8.25)$$

8.5.4 Para el momento total del sólido se obtiene:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_{\alpha} \right) = M \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}'_{\text{CM}} \right) \quad (8.26)$$

8.5.5 Para el momento angular total del sólido puede hacerse un desarrollo similar al de la energía cinética:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \vec{R} + \vec{r}'_{\alpha} \right) \times \left( \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \right) \\ &= M \left( \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}'_{\text{CM}} + \vec{R}'_{\text{CM}} \times \dot{\vec{R}} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo del producto vectorial triple

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

o la expresión matricial del producto vectorial (8.24), se encuentra

$$\vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) = -(\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \times \vec{r}'_{\alpha} = -\mathbf{A}_{\vec{r}'_\alpha}^2 \vec{w}$$

con lo que usando (8.25)

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= M \left( \vec{R} \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}'_{CM}) + \vec{R}'_{CM} + \dot{\vec{R}} \right) + \mathbf{I}_{O'} \vec{w} \\ &\stackrel{(8.26)}{=} \vec{R} \times \vec{P} - M \vec{R}'_{CM} \times \dot{\vec{R}} + \mathbf{I}_{O'} \vec{w}\end{aligned}\quad (8.27)$$

Si se hace  $\vec{R} = \vec{0}$  puede definirse el momento angular de rotación del sólido como

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w}$$

es decir, es el momento angular del sólido respecto a  $O'$ .

8.5.6 Se tienen los siguientes casos particulares de interés:

- a)  $O' = \text{CM}, \vec{R}'_{CM} = 0;$
- b)  $O'$  fijo,  $\dot{\vec{R}} = 0^{(1)}$ ;
- c)  $O' = \text{CM}$  fijo.

$$(1) \vec{R}_{CM} = \vec{R} + \vec{R}'_{CM} \rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{R}}'_{CM}$$

En la siguiente tabla se resumen las expresiones para la energía cinética y el momento angular.

$O'$	$\vec{P}$ (8.26)	$\vec{L}_O$ (8.27)	$T$ (8.23)
CM	$M \dot{\vec{R}}_{CM}$	$\vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \mathbf{I}_{CM} \vec{w}$	$\vec{P}^2 / 2M + 1/2 \vec{w}^T \mathbf{I}_{CM} \vec{w}$
fijo	$M \dot{\vec{R}}_{O'}$	$\vec{R}_{O'} \times \vec{P} + \mathbf{I}'_{O'} \vec{w}$	$1/2 \vec{w}^T \mathbf{I}_{CM} \vec{w}$
CM fijo	$\vec{0}$	$\mathbf{I}_{CM} \vec{w}$	$1/2 \vec{w}^T \mathbf{I}_{CM} \vec{w}$

8.5.7 Nótese: en los 3 casos anteriores, el momento lineal del sólido es  $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}_{CM}$ . Cuando  $O'$  está fijo puede elegirse  $O = O'$  con lo que  $\vec{R}_{O'}$  y, por tanto,

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_{O'} \vec{w}$$

que es el momento angular, producto exclusivamente por la rotación alrededor del origen.

## 8.6. Estudio del Tensor de inercia.

8.6.1 Explícitamente, los elementos de matriz del tensor de inercia  $I_{ij}$

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r'^2_{\alpha} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j})$$

pueden escribirse como

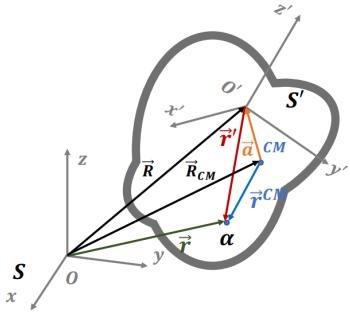
$$\begin{pmatrix} \sum m_{\alpha} (y'^2_{\alpha} + z'^2_{\alpha}) & -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} & -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha} \\ -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} & \sum m_{\alpha} (x'^2_{\alpha} + z'^2_{\alpha}) & -\sum m_{\alpha} y'_{\alpha} z'_{\alpha} \\ -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha} & -\sum m_{\alpha} y'_{\alpha} z'_{\alpha} & \sum m_{\alpha} (x'^2_{\alpha} + y'^2_{\alpha}) \end{pmatrix}$$

donde  $x'_{\alpha} = r'_{\alpha 1}$ , etc. Se ve que se trata de un tensor real simétrico y, por tanto, diagonalizable.

8.6.2 Para un sólido continuo

$$I_{ij} = \iiint \rho(\vec{r}') (r'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) dv'$$

donde  $\rho$  es la densidad en cada punto del sólido y  $dv'$  es el elemento de volumen. Se ha cambiado la notación  $r'_i$  por  $x'_i$ ,  $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ .



8.6.1 En la demostración basta considerar en el tensor de inercia que

$$\vec{r}'_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} - \vec{a}$$

y tener en consideración la propiedad

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} = \vec{0} \text{ (tema 4)}^{(\dagger)}$$

(†) Esta propiedad hace que los términos cruzados sean todos cero

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{a} \cdot \vec{r}_\alpha^{\text{CM}} = 0,$$

$$\sum_\alpha m_\alpha a_i r_{\alpha j}^{\text{CM}} = 0,$$

$$\sum_\alpha m_\alpha a_j r_{\alpha i}^{\text{CM}} = 0.$$

8.6.4 **Teorema de Steiner:** Para un elemento diagonal del tensor de inercia, por ejemplo,  $I_{33}$ , el teorema de los ejes desplazados se escribe

$$I_{33} = (I_{\text{CM}})_{33} + M(a_1^2 + a_2^2) = I_{\text{CM}} + M d^2$$

donde  $d$  es la distancia entre el correspondiente eje, en este caso  $\hat{k}'$ , y el eje desplazado que pasa por el CM.

8.6.5 **Ejes principales:** Si se diagonaliza el tensor de inercia, los autovectores determinan los ejes principales. Los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , se llaman **momentos principales de inercia**.

8.6.6 **Propiedad:** El valor de un momento principal de inercia es siempre menor o igual que la suma de los otros dos:

$$I_i \leq I_j + I_k, \quad i \neq j \neq k. \quad (8.28)$$

**Teorema de los ejes perpendiculares:** La igualdad se cumple sólo si el sólido es plano. En este caso el momento principal en la dirección perpendicular al plano es igual que la suma de los otros dos

$$I_3 = I_1 + I_2, \quad \text{sólido plano; eje 3 perp. al plano.} \quad (8.29)$$

Esta propiedad sirve también para los elementos diagonales del tensor de inercia en cualquier sistema de ejes ( $I_{33} = I_{111} + I_{22}$ ; eje perp. al plano).

8.6.7 **Clasificación del sólido:**

Peonza asimétrica: 3 momentos principales distintos

Peonza simétrica: 2 momentos principales iguales

Peonza esférica: 3 momentos principales iguales

Por ejemplo, un cubo es una peonza esférica respecto al sistema ligado al sólido situado en el CM.

8.6.8 En el sistema de eje principales  $\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\}$ , con  $\text{vec}w = w'_1 \hat{i}_P + w'_2 \hat{j}_P + w'_3 \hat{k}_P$  la energía cinética de rotación se escribe como sigue

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{w}^T \mathbf{I}_{O'} \vec{w} = \frac{1}{2} (w'_1 \quad w'_2 \quad w'_3) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I_1 w'^2_1 + I_2 w'^2_2 + I_3 w'^2_3)$$

y el momento angular de rotación como

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = I_1 w'_1 \hat{i}_P + I_2 w'_2 \hat{j}_P + I_3 w'_3 \hat{k}_P$$

8.6.9 En cualquier punto del sólido,  $O'$ , si la dirección de la velocidad angular es fija, puede elegirse  $\vec{w} = w'_3 \hat{k}'$ . La energía cinética de rotación es entonces

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{w}^T \mathbf{I}_{O'} \vec{w} = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ w'_3) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{33} w'^2_3$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'^2_{\alpha} + y'^2_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d'^2_{\alpha}$$

donde  $d'_{\alpha}$  es la distancia de la masa  $m_{\alpha}$  al eje de rotación. El momento angular de rotación será

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w} = w'_3 (I_{13} \hat{i}' + I_{23} \hat{j}' + I_{33} \hat{k}')$$

En un sistema de ejes principales con  $\hat{k}' = \hat{k}^P$ , la expresión del momento angular (con  $\vec{w} = w^P_3 \hat{k}^P$ ) se simplifica:

$$\vec{L}_{\text{rot}} = I_3 w^P_3 \hat{k}^P.$$

## 8.7. Ecuaciones de Euler

8.7.1 **Dinámica del sólido:** Se quiere resolver el movimiento del sólido en un sistema de fuerzas con determinadas condiciones iniciales. Se tiene que plantear las ecs. que llevan a conocer el mvmt. de traslación  $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$  y el de rotación  $\mathbf{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ . Como paso intermedio en el mvmt. de rotación (primera integración), se planteará la obtención de la velocidad angular (Ecuaciones de Euler)

$$\vec{w}(t) = \dot{\phi}(t) \hat{i} + \dot{\theta}(t) \hat{j} + \dot{\psi}(t) \hat{k}$$

8.7.2 **Ecuaciones de movimiento:** Dada la fza. total externa,  $\vec{F}^{\text{ext}}$ , se tienen las siguientes ecuaciones de mvmt. en el sistema inercial

$$M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^{\text{ext}}$$

La primera ec. (3 componentes) resuelve el mvmt. del CM y por tanto  $\vec{R}$ . Considérese, ahora, el sistema de referencia ligado al sólido, con origen  $O'$  = fijo ( $\vec{R}_{O'} = \vec{0}$ ) o CM ( $\vec{R}_{\text{CM}} = \vec{R}$ ). En la segunda, usando (8.27):

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{O'} \times \vec{P} + \vec{L}_{O'}$$

con  $\vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w}$ . La segunda ec. de mvmt. puede escribirse

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{R}_{O'} \times \vec{P})}{dt} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{R}_{O'} \times \vec{F}^{\text{ext}} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_O^{\text{ext}}$$

Es decir,

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_O^{\text{ext}} - \vec{R}_O \times \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{N}_O^{\text{ext}} \quad (8.30)$$

(se ve que, con  $O' = \text{CM}$ , esta ec. es válida incluso si el CM se mueve aceleradamente, como ya se demostró (T4), en general, para un sistema de parts.). Estas seis ecs. escalares, resuelven los seis grados de libertad del sólido. Nótese, sin embargo, que el momento de la fza. externa depende de la posición del sólido, de modo que la resolución del mvmt. es, en general, no trivial.

8.7.3 **Ecuaciones de Euler:** Se va a centrar en la ec. de mvmt.

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_{O'}^{\text{ext}}, \quad \text{donde} \quad \vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w}$$

Se expresa esta ec. en el sistema de referencia ligado al sólido. Recuérdese que,

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{\delta\vec{L}_{O'}}{\delta t} + \vec{w} \times \vec{L}_{O'}$$

Utilizando el sistema de ejes principales  $\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'} &= I_1 w_1^P \hat{i}_P + I_2 w_2^P \hat{j}_P + I_3 w_3^P \hat{k}_P \\ \frac{\delta\vec{L}_{O'}}{\delta t} &= I_1 \dot{w}_1^P \hat{i}_P + I_2 \dot{w}_2^P \hat{j}_P + I_3 \dot{w}_3^P \hat{k}_P \\ \vec{N}_{O'}^{\text{ext}} &= N_1^P \hat{i}_P + N_2^P \hat{j}_P + N_3^P \hat{k}_P\end{aligned}$$

Se omite, a partir de ahora, los índices  $P$  de las componentes. Las ecs. de mvmt. para  $\vec{L}_{O'}$  son, entonces

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}'_1 + (I_3 - I_2) w'_2 w'_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{w}'_2 + (I_1 - I_3) w'_1 w'_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{w}'_3 + (I_2 - I_1) w'_1 w'_2 &= N_3 \end{aligned} \right\}$$

Estas son las ecs. de Euler para la vel. angular instantánea en el sistema de ejes ppales. ligado al sólido.

8.7.4 Ya se ha comentado la dependencia del momento de las fzas. con la orientación al sólido, es decir con la rotación  $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ , por lo que la resolución de las ecs. de Euler no es trivial. En el caso de momento de fzas. nulo,  $\vec{N} = \vec{0}$ , la solución se obtiene en términos de integrales elípticas.

8.7.5 Soluciones con  $\vec{N} = \vec{0}$  y  $\vec{w} = \text{cte}$ . De las ecs. de Euler, con  $\dot{w}'_i = 0$ , se obtienen las siguientes igualdades

$$\left. \begin{aligned} (I_3 - I_2) w'_2 w'_3 &= 0 \\ (I_1 - I_3) w'_1 w'_3 &= 0 \\ (I_2 - I_1) w'_1 w'_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Por tanto, para que  $\vec{w}$  sea solución tiene que/puede ser paralelo a un eje principal del sólido. En efecto, se analizan los diferentes casos posibles:

- Si  $I_1, I_2, I_3$  son diferentes entre sí, entonces  $\vec{w}$  con dos componentes nulas es solución y, por tanto,  $\vec{w}$  será paralelo al eje de la componente no nula.
- Si  $I_1 = I_2 \neq I_3$  entonces  $w'_3 = 0$  o  $w'_1 = w'_2 = 0$ . En el primer caso ( $w'_3 = 0$ ) cualquier eje en el plano 12 es ppal. Por tanto, cualquier  $\vec{w}$  cte. en este plano es solución. En el segundo,  $w'_3$  cte. es la solución.
- Si  $I_1 = I_2 = I_3$  cualquier eje es ppal. y cualquier  $\vec{w}$  cte. es solución.

## 8.8. Soluciones estables del sólido libre

8.8.1 Considérese un sólido asimétrico  $I_1 < I_2 < I_3$ . Se ha analizado que en ausencia de fuerzas (o momentos e fuerza) hay soluciones del movimiento con velocidad angular  $\vec{\omega} = \text{cte}$  en torno a los ejes principales. Se demostrará que las soluciones alrededor de  $\hat{i}_P, \hat{k}_P$  son estables, mientras que la solución alrededor de  $\hat{j}_P$  es inestable (teorema de la raqueta de tenis)

8.8.2 Considérese una perturbación de la velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega'_1 \hat{i}_P + \varepsilon_2 \hat{j}_P + \varepsilon_3 \hat{k}_P$  (giro alrededor de  $\hat{i}_P$ ):

$$\vec{\omega} = \omega'_1 \hat{i}_P + \varepsilon_2 \hat{j}_P + \varepsilon_3 \hat{k}_P.$$

Las ecuaciones de Euler en ausencia de momentos son

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}'_1 + (I_3 - I_2) \varepsilon_2 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) \omega'_1 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) \omega'_1 \varepsilon_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la primera ecuación se obtiene la solución aproximada  $\omega'_1 \simeq \text{cte} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Derivando las otras dos ecuaciones se tiene

$$\left. \begin{array}{l} I_2\ddot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3)\omega'_1\dot{\varepsilon}_3 = 0 \\ I_3\ddot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1)\omega'_1\dot{\varepsilon}_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Sustituyendo en estas últimas los valores  $\dot{\varepsilon}_{2,3}$  aislados de las ecuaciones sin derivar, se obtienen las ecuaciones de la perturbación

$$\ddot{\varepsilon}_k + a^2\varepsilon_k = 0, \quad k = 2, 3$$

donde

$$a^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \omega'^2_1 > 0.$$

Debido al signo  $> 0$  las soluciones de la perturbación son del tipo oscilador (alrededor de la solución estable). Concretamente, se obtiene:

$$\varepsilon_2(t) = \frac{A}{\sqrt{I_2(I_2 - I_1)}} \cos(at + \phi) \quad (8.32)$$

$$\varepsilon_3(t) = \frac{I_2}{(I_3 - I_1)\omega'_1} \dot{\varepsilon}_2(t) = \frac{-A}{\sqrt{I_3(I_3 - I_1)}} \sin(at + \phi) \quad (8.33)$$

La velocidad angular  $\vec{\omega}$  hace una precesión elíptica alrededor del eje estable  $\hat{i}_P$  dibujando un cono (el cono polodio o del sólido).

$$\vec{\omega} = \omega'_1 \hat{i}_P + A \cos(at + \phi) \hat{j}_P + B \sin(at + \phi) \hat{k}_P.$$

#### 8.8.3 Para una perturbación del sólido girando alrededor de $\hat{k}_P$ :

$$\vec{\omega} = \varepsilon_1 \hat{i}_P + \varepsilon_2 \hat{j}_P + \omega'_3 \hat{k}_P.$$

De las ecuaciones de Euler

$$\left. \begin{array}{l} I_1\dot{\varepsilon}_1 + (I_3 - I_2)\omega'_3\varepsilon_1 = 0 \\ I_2\dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3)\omega'_3\varepsilon_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}'_3 + (I_2 + I_1)\varepsilon_2\varepsilon_1 = 0 \end{array} \right\}$$

se obtiene la solución aproximada  $\omega'_3 \simeq \text{cte} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Las ecuaciones de la perturbación son (intercambiéndose los índices 1 y 3 del anterior caso).

$$\ddot{\varepsilon}_k + b^2\varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 2$$

donde

$$b^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2} \omega'^2_3 > 0.$$

Otra vez, debido al signo  $> 0$ , las soluciones de la perturbación son tipo oscilador (solución estable). La velocidad angular  $\vec{\omega}$  realiza, de nuevo, una precesión elíptica alrededor del eje estable  $\hat{k}_P$ .

$$\vec{\omega} = A \cos(bt + \delta) \hat{i}_P + B \sin(bt + \delta) \hat{j}_P + \omega'_3 \hat{k}_P.$$

#### 8.8.4 Para una perturbación del sólido girando alrededor de $\hat{j}_P$ :

$$\vec{\omega} = \varepsilon_1 \hat{i}_P + \omega'_2 \hat{j}_P + \varepsilon_3 \hat{k}_P$$

se obtiene la solución aproximada  $\omega_2 \simeq \text{cte} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Las ecuaciones de la perturbación son (intercambiéndose índices 1 y 2 del primer caso)

$$\ddot{\varepsilon}_k + c^2\varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 3$$

donde

$$c^2 = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} \omega_2'^2 < 0.$$

Ahora, debido al signo  $< 0$ , las soluciones de la perturbación son:

$$\varepsilon_i = A_i e^{ct} + B_i e^{-ct} \stackrel{t \gg 1/c}{\sim} A_i e^{ct}.$$

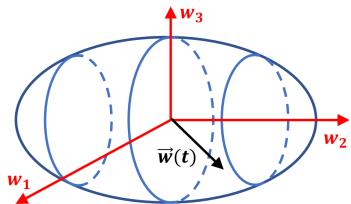
Tras  $t \sim 1/c$ , la perturbación se hace grande y la solución  $\omega'_2 \approx \text{cte}$  es, por tanto, inestable. Cuando eso pasa ya no hay precisión:

$$\vec{\omega} = A_1 e^{ct} \hat{i}_P + \omega'_2 \hat{j}_P + A_3 e^{ct} \hat{k}_P$$

con  $\omega'_i \leq \sqrt{2T/I_i}$ .

## 8.9. Movimiento general del sólido libre

- 8.9.1 Se describirá cualitativamente el movimiento general del sólido libre (sin resolver explícitamente las ecuaciones de Euler) mediante la llamada *imagen de Poinsot*, en la que se utiliza un nuevo concepto ligado al movimiento del sólido que es el *elipsoide de inercia*.
- 8.9.2 En el movimiento del sólido libre,  $\vec{T}$  y  $\vec{L}$  son constantes de movimiento. Como no hay fuerzas externas, puede elegirse  $O = O' = \text{CM}$  fijo. En el sistema de ejes principales ligados al sólido puede escribirse



$$\vec{L} = (I_1 \omega'_1, I_2 \omega'_2, I_3 \omega'_3) \quad (8.34)$$

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega'^2_1 + I_2 \omega'^2_2 + I_3 \omega'^2_3) = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (8.35)$$

La ecuación (8.35), respecto a las componentes de la velocidad angular, es un elipsoide de semiejes  $2T/I_k$  (elipsoide de inercia). Los puntos de su superficie constituyen el lugar geométrico de los posibles valores de  $\vec{\omega}$ . Esto es una primera restricción sobre los posibles valores de  $\vec{\omega}$ .

Nótese que

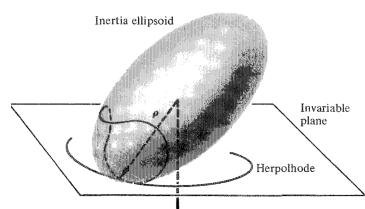
$$\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}, \quad (8.36)$$

por tanto, la proyección de  $\vec{\omega}$  sobre  $\vec{L} = \text{cte}$  es constante. Esta es una segunda restricción sobre los posibles valores de  $\vec{\omega}$ .

- 8.9.3 **Curva polodia:** La solución de las ecuaciones de Euler para  $\vec{\omega}$ , con determinadas condiciones iniciales, será una curva concreta sobre la superficie del elipsoide de inercia: La polodia.

- 8.9.4 **Curva herpolodia:** Obsérvese que el momento angular puede escribirse como el gradiente de la energía cinética con respecto a las componentes de la velocidad angular:

$$\vec{L} = \vec{\nabla}_{\vec{\omega}} T(\omega'_k).$$



Por un lado,  $\vec{L}$  es perpendicular en cada instante a la superficie del elipsoide de inercia en el punto correspondiente de la polodia ( $\vec{T} = \text{cte}$  superficie de nivel  $\rightarrow dT = 0 = \vec{\nabla}_{\vec{\omega}} T d\omega \rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{\omega}} T = \vec{L} \perp d\vec{\omega}$ ). Por otro lado  $\vec{L} = \text{cte}$  define un plano tangente al elipsoide, que permanece fijo con el tiempo. Por tanto, el elipsoide de inercia se mueve con el tiempo de modo que la polodia va contactando con el plano tangente a una altura  $h$  (del centro del elipsoide) constante  $h = \vec{L} \cdot \vec{\omega} = 2T$ . La curva que se va “gravando” en el plano tangente se llama herpolodia. El movimiento del elipsoide de inercia en este proceso de “gravado” es precisamente el movimiento del sólido.

## 8.10. Peonza simétrica libre

8.10.1 **Ecuaciones de movimiento:** se tiene un sólido simétrico con  $I = I_1 = I_2 \neq I_3$ , en ausencia de momentos externos,  $\vec{N} = 0$ . Las ecuaciones de Euler son

$$\left. \begin{array}{l} I\dot{\omega}_1' = (I - I_3)\omega_2'\omega_3' \\ I\dot{\omega}_2' = (I_3 - I)\omega_1'\omega_3' \\ I_3\dot{\omega}_3' = 0 \end{array} \right\}$$

8.10.2 **Solución del movimiento:** de la última ecuación se obtiene la solución  $\omega_3'(t) = \text{cte}$ . De las dos primeras ecuaciones, definiendo  $\eta = \omega_1' + i\omega_2'$ , se obtiene la ecuación ( $-1 = i \cdot i = i^2$ )

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0$$

con

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\omega_3'. \quad (8.37)$$

La solución es

$$\eta(t) = Ce^{i\Omega t}$$

con  $C = Ae^{i\delta}$  complejo, lo que corresponde a las soluciones oscilatorias

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1'(t) = A \cos(\Omega t + \delta) \\ \omega_2'(t) = A \sin(\Omega t + \delta) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\omega}'^2 = \omega_3'^2 + A^2 = \text{cte}. \quad (8.38)$$

Por tanto, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  realiza un movimiento de precesión alrededor del eje móvil  $\hat{k}_P$  con módulo constante (**cono polodio**).

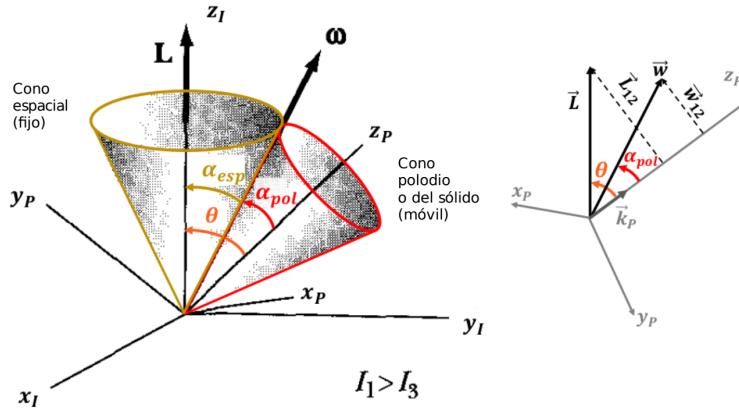


Figura 8.4: El momento angular  $\vec{L}$  se toma a lo largo del eje  $z_I$  fijo. La velocidad angular describe el cono del sólido a medida que precesa alrededor del eje  $z_P$  alrededor del eje  $z_I$  del sistema fijado en el espacio. Puede imaginarse el cono del cuerpo girando alrededor del cono espacial.

8.10.3 Para comprender el movimiento del sólido, e el de los ejes ligados a él, debe recordarse que para el movimiento libre  $\vec{L} = \text{cte}$ . Puede escribirse

$$\vec{L} = I(\omega_1' \hat{i}_P + \omega_2' \hat{j}_P) + I_3 \omega_3' \hat{k}_P = \begin{cases} \vec{L}_{12} + I_3 \omega_3' \hat{k}_P \\ I\vec{\omega} + (I_3 - I)\omega_3' \hat{k}_P, \end{cases} \quad (8.39)$$

con  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{12} + \omega_3' \hat{k}_P = \omega_1' \hat{i}_P + \omega_2' \hat{j}_P + \omega_3' \hat{k}_P$ , de donde  $\vec{\omega}_{12} = \omega_1' \hat{i}_P + \omega_2' \hat{j}_P$  y  $\vec{L}_{12} = I\vec{\omega}_{12}$ . De (8.39) se deduce que  $\vec{L}, \vec{\omega}$  y  $\hat{k}_P$  están en un mismo plano, que gira alrededor de  $\vec{L}$ , manteniendo fijas sus posiciones relativas en el plano. El cono fijo que describe  $\vec{\omega}$  alrededor de  $\vec{L}$  se llama **cono espacial**.

8.10.4 El movimiento del sólido se obtiene “rodando” sin deslizar el cono polodio sobre el cono espacial. Al ángulo del cono polodio viene dado por

$$\tan \alpha_{\text{pol}} = \frac{|\vec{\omega}|}{\omega'_3} = \frac{A}{\omega'_3}.$$

El ángulo del eje de la peonza respecto del eje fijo  $\vec{L} = \text{cte}$  viene dado por

$$\tan \theta = \frac{|\vec{L}_{12}|}{L_3} = \frac{IA}{I_3 \omega'_3} = \frac{I}{I_3} \tan \alpha_{\text{pol}} = \text{cte} \quad (8.40)$$

El ángulo del cono espacial es  $\alpha_{\text{esp}} = |\theta - \alpha_{\text{pol}}|$ .

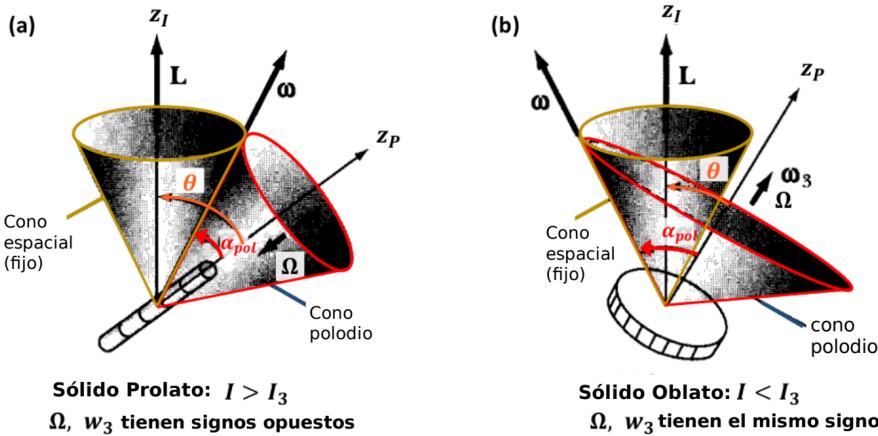


Figura 8.5: (a) **Sólido prolato**: el cono gira (precesa) alrededor de la superficie exterior del cono espacial ( $\theta > \alpha_{\text{pol}}$ ). (b) **Sólido oblat**: el cono polodio gira por dentro de la superficie del cono espacial ( $\theta < \alpha_{\text{pol}}$ ).

8.10.5 Partiendo de (8.39), puede escribirse la siguiente descomposición de  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{L}{I} \hat{k} - \frac{(I_3 - I)}{I} \omega'_3 \hat{k}_P.$$

Usando la relación (8.37) e introduciendo el vector unitario en la dirección de  $\vec{L} = L \vec{u}_L = L \hat{k}$ , se llega a

$$\vec{\omega} = \frac{L}{I} \hat{k} - \Omega \hat{k}_P \stackrel{\text{Euler Sec. 8.4.4}}{=} \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}_1 + \dot{\psi} \hat{k}_P. \quad (8.41)$$

Por lo que se identifica en términos de velocidades angulares de Euler:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{I} \text{ (Precesión)}, \quad \dot{\theta} = 0 \text{ (Nutación)}, \quad \dot{\psi} = -\Omega \text{ (Espín)}. \quad (8.42)$$

El movimiento de una peonza consta de una rotación alrededor de  $\vec{L}$  (precesión de todos los ejes móviles) con frecuencia  $L/I$  y una rotación alrededor del eje principal  $z_P$  de la peonza con frecuencia

$$\dot{\psi} = -\Omega = \frac{(I - I_3)\omega'_3}{I}. \quad (8.43)$$

$\omega > 0$  ( $\Omega < 0$ ) si  $I < I_3$  ( $I > I_3$ ), es decir, si el sólido es *oblat* (*prolato*).

8.10.6 **Movimiento de la peonza libre en función de los ángulos de Euler (con  $\vec{u}_L = \hat{k}$ )**: Nótese que el ángulo  $\widehat{z_I z_P}$  es directamente el segundo de los ángulos de Euler. Usando (8.40),  $\tan \theta = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ . Utilizando las relaciones (8.18)-(8.20) con  $\dot{\theta} = 0$ .

$$\omega'_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad (8.44)$$

$$\omega'_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (8.45)$$

$$\omega'_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (8.46)$$

$$\omega_{12} = \sqrt{\omega'_1^2 + \omega'_2^2} = \dot{\phi} \sin \theta \quad (8.47)$$

Recuérdese que se ha dejado de escribir el índice  $P$  para referirse a las cantidades medidas en el sistema de ejes principales ligado al sólido.

De la figura 8.4 se obtiene  $\sin \theta = L_{12}/L$  (y  $\cos \theta = L_3/L$ ). Como  $\omega_{12} = L_{12}/I$ , de (8.47) se obtiene

$$\frac{L_{12}}{I} = \dot{\phi} \frac{L_{12}}{L} \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{I} = \text{cte}} \quad (8.48)$$

$$\omega'_3 \stackrel{(8.42)}{=} \frac{L_3}{I} - \Omega \stackrel{(8.46)}{=} \dot{\phi} \frac{L_3}{L} + \dot{\psi} \Rightarrow \cancel{\frac{L_3}{I}} - \Omega \stackrel{(8.48)}{=} \cancel{\frac{L_3}{L}} + \dot{\psi} \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = -\Omega}$$

En definitiva, se llega a

$$\dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = -\Omega, \text{ y } \dot{\phi} = \frac{L}{I}. \quad (8.49)$$

Integración segunda

$$\theta = \theta_0, \psi = -\Omega t, \text{ y } \phi = \frac{L}{I}t. \quad (8.50)$$

La posición de un punto de la peonza en el tiempo vendrá dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + R(\phi(t), \theta, \psi(t))^T \vec{r}(0) \quad (8.51)$$

donde  $R(\phi(t), \theta, \psi(t))$  es la matriz de rotación y  $\vec{R}(t) = 0$  para  $O = O'$  (fijo).

**Nota:** Si no hay precesión alrededor de  $\hat{k}_P$ , se tiene que  $A = 0$  en la solución del movimiento y, también que  $\omega'_1 = \omega'_2 = 0$ . Por tanto,  $\vec{L} = I_3 \omega'_3 \hat{k}_P$  y  $\vec{\omega} = \omega'_3 \hat{k}_P$ . Es decir, en términos de ángulos de Euler  $\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}$ .

8.10.7 La Tierra puede aproximarse como un sólido simétrico oblat (  $I_3 > I$  ), en el que  $I/(I_3 - I) \simeq 300$ . Como el período de rotación terrestre es  $2\pi/\omega_3^T \simeq 1$  día, el período de rotación de la velocidad angular (espín) terrestre alrededor del eje de rotación (precesión) será ( $\Omega_T = \omega_3^T (I_3 - I)/I$ ; (8.38)),

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega_T} = \frac{I}{I_3 - I} \frac{2\pi}{\omega_3^T} \simeq 300 \text{ días.}$$

Esta rotación de  $\vec{\omega}^T$  se llama *precesión de Chandler* (experimentalmente es de 433 días y la discrepancia es debida a que la Tierra es un sólido elástico, no exactamente rígido).

**Precesión del Equinoccio** (alrededor de  $\vec{L}$ ): 26000 años con  $\theta = 23,27^\circ$  de periodo 18 años con una amplitud de segundos de arco.

## 8.11. Peonza simétrica pesada

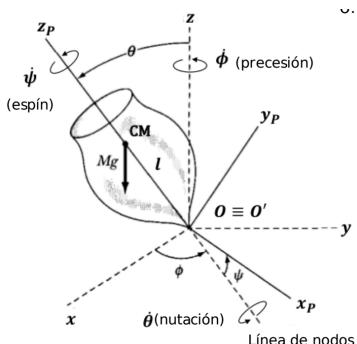


Figura 8.6: Esquema de una peonza simétrica pesada

8.11.1 Considérese una peonza en un campo gravitatorio, manteniendo un punto fijo  $O = O'$  (el vértice de la peonza). La fuerza total externa sobre la peonza, con el eje  $\hat{k}$  hacia arriba, será

$$\vec{F}^{\text{ext}} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} g \hat{k} = -Mg \hat{k}.$$

La energía potencial de la peonza es

$$V = g \sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} = Mgl \cos \theta$$

donde  $M \equiv$  masa total,  $l \equiv$  distancia desde el origen  $O$  al centro de masas CM y  $\theta \equiv$  ángulo entre los ejes  $\hat{k}$  y  $\hat{k}_P$ .

8.11.2 **Momento angular:** la peonza simétrica, por definición, verifica que  $I_1 = I_2 = I$ . Además, como la fuerza de la gravedad es uniforme en la dirección  $\hat{k}$ , el momento total de las fuerzas externas es

$$\vec{N}^{\text{ext}} = \left( - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) \times g \hat{k} = -Mgl (\hat{k}_P \times \hat{k}).$$

Por tanto,  $\vec{N}^{\text{ext}}$  tiene la dirección de la línea de nodos ya que es perpendicular a  $\hat{k}$  y  $\hat{k}_P$ . Consecuentemente, la componente  $N_z^{\text{ext}}$  en el sistema inercial es nula, de modo que  $L_z$  es una constante del movimiento. A partir de  $\vec{L}_{O'} = (I\omega'_1, I\omega'_2, I\omega'_3)$  en el sistema ligado al sólido, puede obtenerse  $L_O$  del sistema inercial utilizando la matriz transpuesta de ángulos de Euler (8.15), e.d.  $\vec{L}_O = \mathbf{R}^T(\phi, \theta, \psi)\vec{L}_{O'}$ , de donde la componente  $L_z$  resulta:

$$L_z = I\omega'_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \omega'_3 \cos \theta = I \sin \theta (\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi) + I_3 \omega'_3 \cos \theta.$$

Ahora sustituyendo las expresiones de  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  por (8.18) y (8.19), respectivamente. Se obtiene

$$L_z = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \omega'_3 \cos \theta = \text{cte.}$$

$L_3$  es la segunda constante del movimiento,

$$L_3 = I_3 \omega'_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{cte.} \quad (8.52)$$

$L_3$  se conserva dado que  $I_1 = i_2 = I$ , en este caso, en la tercera ecuación de Euler (8.31) se cumple  $I_3 \dot{\omega}'_3 = N_3^{\text{ext}}$ . Con  $N_3^{\text{ext}} = 0$  dado que  $\vec{N}^{\text{ext}}$  es  $\perp$  a  $\hat{k}$  y  $\hat{k}_P$ . En general,  $N_3^{\text{ext}} = 0$  no garantiza la conservación de  $L_3$  ya que el sistema ligado no es inercial.

Definiendo las constantes de movimiento  $a$  y  $b$  como

$$a = \frac{I_3 \omega'_3}{I}, \quad b = \frac{L_z}{I} \quad (8.53)$$

se obtiene

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (8.54)$$

8.11.3 **Energía total:** la tercera constante de movimiento que se tiene es la energía total del sistema

$$E = T + V$$

La energía cinética de rotación con  $O' = O$  dijo es

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{2}(\omega'_1'^2 + \omega'_2'^2) + \frac{I_3}{2}\omega'_3'^2 = \frac{I}{2}((\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2) + \frac{I_3}{2}\omega'_3'^2 \\ &= \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}\omega'_3'^2. \end{aligned}$$

En esta expresión puede eliminarse la variable  $\dot{\phi}$  utilizando la relación obtenida de la conservación de  $L_z$  (8.54)

8.11.4 **Ecuación de movimiento:** finalmente, la conservación de la energía puede escribirse como

$$E - \frac{I_3}{2}\omega'_3'^2 = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I}{2}\frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta. \quad (8.55)$$

que resuelve el movimiento  $\theta(t)$ . Para analizar las soluciones se definirá una nueva variable  $u$

$$-1 \leq u = \cos \theta \leq 1 \Rightarrow \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta, \quad (8.56)$$

y unas nuevas constantes

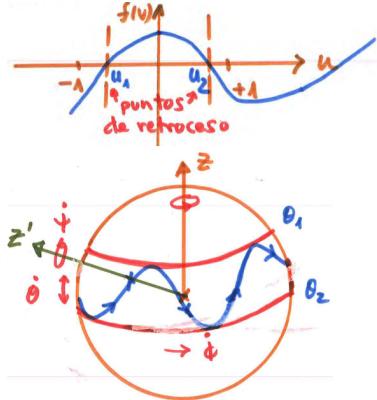
$$E' = E - \frac{I_3}{2}\omega'_3'^2 \quad \alpha = \frac{2E'}{I} \quad \beta = \frac{2Mgl}{I}. \quad (8.57)$$

La ecuación de movimiento es ahora

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \equiv f(u) \geq 0 \quad (8.58)$$

Esta ecuación diferencial resuelve el movimiento de nutación  $\theta(t)$ , pero en términos de integrales elípticas, que son difíciles de interpretar. En la peonza simétrica pesada hay un par de fuerzas originadas por la gravedad y la fuerza de reacción en el vértice, por lo que el momento angular  $\vec{L}$  no es constante (aunque  $L_z = \text{cte.}$ ) y, por tanto, se espera que  $\theta$  cambie con el tiempo.

Puede intentarse analizar las soluciones partiendo de la relación (8.58). Se tiene que  $f(u)$  es una función cúbica que satisface las condiciones siguientes



- 1)  $f(u \rightarrow \pm\infty) \sim \beta u^3 \geq 0$
- 2)  $f(u \rightarrow \pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$
- 3)  $f(u) \geq 0$  para  $u \in [u_1, u_2] \subset [-1, +1]$   
 (condición física de existencia de soluciones).

Con estas condiciones, el movimiento estará acotado en  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ . Analizando  $b - a \cos \theta$  se podrá saber si hay cambio de signo en la precesión  $\dot{\phi}$  para algún valor de  $\theta$ .

8.11.5 Finalmente, a partir de  $\theta(t)$  puede integrarse  $\dot{\phi}(t)$  utilizando (8.54) con lo que se obtendría la precesión  $\phi(t)$ . Para obtener  $\dot{\psi}$  se utilizará que, de (8.53), se obtiene  $L_3 = I_3 \omega'_3 = Ia$ , y ahora usando (8.52) para escribir

$$L_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = Ia \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{Ia}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta. \quad (8.59)$$

Integrando esta ecuación se obtiene el movimiento de espín  $\psi(t)$ .

8.11.6 Si se prescinde de la gravedad, sustituyendo la solución del movimiento libre (8.49),  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\psi} = -\Omega$ ,  $\dot{\phi} = L/I$ , en (8.59) lleva a  $\cos \theta = I_3 \omega'_3 / L$ . Este valor de  $\cos \theta$  satisface la ecuación diferencial de  $\theta$  (compruébese).

## 8.12. Boletín 8

8.9. Considérese una peonza cónica de masa  $M$ , radio  $R$  y altura  $h$  que se mueve en un campo gravitatorio, manteniendo el vértice fijo.

- a) ¿Cuánto vale el momento de inercia alrededor del eje de revolución?

Utilizando coordenadas cilíndricas tal que un diferencial de volumen viene dado por  $dV = s \, ds \, d\phi \, dz$ . Para calcular el volumen se tiene en cuenta que para cada  $z$  el radio del disco  $r$  es diferente. Se tiene la condición:

$$r = z \tan \alpha = z \frac{R}{h}$$

Efectivamente  $r = 0$  y  $r = R$  para  $z = 0$  y  $z = h$ , respectivamente. Con lo que el volumen viene dado por:

$$V = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r ds = \int_0^h 2\pi \frac{r^2}{2} dz = \pi \int_0^h \left( z \frac{R}{h} \right)^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

La densidad uniforme del cono con masa  $m$  es:

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

por lo que el diferencial de masa en función de  $z$  vendrá dado por:

$$dm(z) = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r ds = \rho \pi r^2 dz = \left( \frac{3M}{\pi h R^2} \right) \pi z^2 dz = \frac{3M}{h^3} z^2 dz$$

El momento de inercia

$$I_{zz, \text{cono}} = \int_0^h dz \left( \frac{3M}{h^3} z^2 dz \right) \frac{r^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{MR^2}{h^5} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{10} MR^2$$

- b) ¿Cuánto vale la distancia del vértice al centro de masas?

$$z_{\text{CM}} = \frac{\int_0^h z dm(z)}{M} = \frac{1}{M} \left[ \frac{3M}{h^3} \frac{z^4}{4} \right]_0^h = \frac{3}{4} h$$

- c) Escribir la energía potencial para una determinada inclinación  $\theta$  de la peonza.

$$V = \frac{3}{4} mgh \cos \theta$$

## B. Cálculo explícito de momentos de inercia

B.1. Momento de inercia de un cilindro hueco . . . . .	114
B.2. Momento de inercia de un prisma rectangular . . . . .	115
B.3. Momento de inercia de una esfera hueca y origen en el CM . . . . .	117
B.4. Ejemplos . . . . .	117

### B.1. Momento de inercia de un cilindro hueco

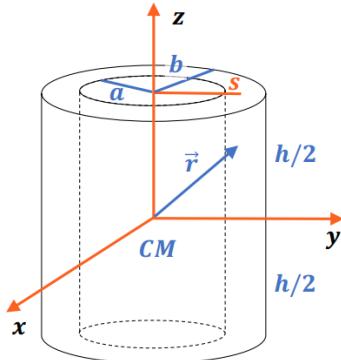


Figura 2.1: Cilindro hueco

- Se considera un cilindro hueco de altura  $h$ , radios  $a < b$ , densidad  $\rho$  cte. y una masa  $M$

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & \text{para } a \leq s \leq b \\ 0 & \text{para } 0 \leq s < a \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde  $s$  es la distancia de un punto del cilindro al eje del mismo. Nótese que

$$M = \pi \rho h (b^2 - a^2). \quad (\text{B.2})$$

Situando el cilindro en un sistema de coordenadas ligado al sólido con su eje a lo largo de  $OZ$  y su CM en el origen de coordenadas. Claramente estos ejes son principales debido a la simetría del sistema.

- Calcúlense los elementos del tensor de inercia

$$I_{ij} = \iiint \rho(\vec{r}') (r'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) dv'. \quad (\text{B.3})$$

En coordenadas cilíndricas con el ángulo azimutal  $\phi$

$$x = s \cos \phi \quad y = s \sin \phi$$

i)  $I_{xy}$ :

$$I_{xy} = -\rho \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} (s^2 \cos \phi \sin \phi)(s ds d\phi dz) = -\rho \int_a^b s^3 ds \int_{-h/2}^{+h/2} dz \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi = 0,$$

ya que la integral en  $d\phi$  es nula.

ii) Por simetría,  $I_{xz} = I_{yz}$ :

$$I_{xz} = -\rho \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} (zs \cos \phi)(s ds d\phi dz) = -\rho \int_a^b s^2 ds \int_{-h/2}^{+h/2} z dz \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0,$$

iii) Es fácil ver que, por simetría,  $I_{xx} = I_{yy}$ :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} (s^2 \sin^2 \phi + z^2)(s ds d\phi dz) \\ &= \rho \int_a^b s^3 ds \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_{-h/2}^{+h/2} dz + \rho \int_a^b s ds \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \\ &= \rho \left( \frac{b^4 - a^4}{4} \right) \pi h + \rho \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) 2\pi \frac{h^3}{12} = \pi \rho h ((b^2 - a^2) \left( \frac{b^2 + a^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \stackrel{(\text{B.2})}{=} \frac{M}{12} (3b^2 + 3a^2 + h^2) \end{aligned}$$

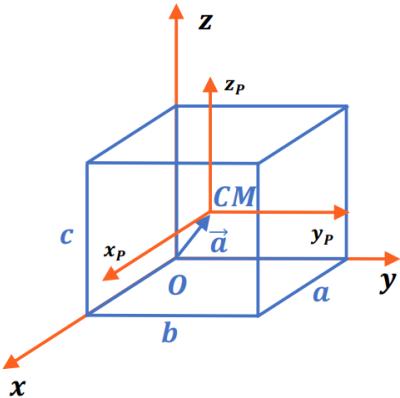
IV)  $I_{zz}$ :

$$I_{zz} = \rho \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} s^2 (s ds d\phi dz) = 2\pi h \rho \left( \frac{b^4 - a^4}{4} \right) = \frac{M}{2} (b^2 + a^2)$$

Por tanto,

$$I_{CM}^{\text{cil}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3b^2 + 3a^2 + h & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2 + 3a^2 + h & 0 \\ 0 & 0 & 6b^2 + 6a^2 \end{pmatrix}$$

## B.2. Momento de inercia de un prisma rectangular



- Se considera un prisma rectangular de masa  $M$  y densidad  $\rho$  cte., con vértice en el origen de coordenadas y lados  $a, b$  y  $c$  en los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Calcúlense los momentos de inercia en coords. cartesianas. Respecto al sistema  $O$ , el  $CM$  se encuentra en la posición  $\frac{1}{2}(a, b, c)$ , y  $M = abc\rho$ .

Figura 2.2: Prisma rectangular

I)  $I_{xx}, I_{yy}$  e  $I_{zz}$

$$I_{xx} = \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_0^a d \int_0^b y^2 dy \int_0^c dz + \rho \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c z^2 dz \\ \rho \left( a \frac{b^3}{3} c + ab \frac{c^3}{3} \right) = abc\rho \left( \frac{b^2 + c^2}{3} \right) = \frac{M}{3} (b^2 + c^2)$$

Análogamente

$$I_{yy} = \frac{M}{3} (a^2 + c^2) \quad I_{zz} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$

II)  $I_{xy}, I_{yz}$  e  $I_{xz}$

$$I_{xy} = -\rho \int_0^a d dx \int_0^b y dy \int_0^c dz = -\rho \frac{a^2 b^2 c}{4},$$

Por tanto,

$$I_{xy} = -\frac{M}{4} ab, \quad I_{yz} = -\frac{M}{4} bc, \quad I_{xz} = \frac{M}{4} ac.$$

Nota: Los ejes elegidos en el sólido no son principales.

$$I_O^{\text{pris}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 4(b^2 + c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2 + c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

En este caso, los ejes con origen en CM y paralelos a los lados **son** ejes principales.

El tensor de inercia es (cálculo inmediato)

$$\mathbf{I}_{CM}^{\text{prisma}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

Utilizando el  $T^{ma}$  de ejes paralelos, puede pasarse del CM al origen  $O$ , con el vector  $\vec{a} = \frac{1}{2}(a, b, c)$ ; p.e.,

$$I_{xx,O}^{\text{prisma}} = I_{xx,CM}^{\text{prisma}} + Md_x^2 = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) + M\frac{b^2 + c^2}{4} = \frac{M}{3}(b^2 + c^2) \checkmark$$

$$I_{xy,O}^{\text{prisma}} = I_{xy,CM}^{\text{prisma}} - Ma_x a_y = 0 - M\frac{a}{2}\frac{b}{2} = -\frac{Mab}{4} \checkmark$$

[Compruébese que el resto de elementos del tensor de inercia son los obtenidos antes. (aunque puede verse por simetría)]

### B.2.1. Casos particulares

Particularizando el resultado del prisma (B.4) con  $a = b = c$  se encuentra

$$I_O^{\text{cubo}} = Ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \quad (B.6)$$

- **Ejes principales y momentos principales del cubo con origen en un vértice:** Se tiene que diagonalizar (B.6). Los valores propios son los momentos principales de inercia. Resolviendo la ec. del siguiente determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 2/3 - \lambda & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 - \lambda & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} \stackrel{f_1=f_2}{=} \det \begin{pmatrix} 11/12 - \lambda & -(11/12 - \lambda) & 0 \\ -1/4 & 2/3 - \lambda & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\stackrel{f_2=f_3}{=} \det \begin{pmatrix} 11/12 - \lambda & -(11/12 - \lambda) & 0 \\ 0 & 11/12 - \lambda & -(11/12 - \lambda) \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{12} - \lambda\right)^2 \left(\frac{2}{3} - \lambda - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{11}{12} - \lambda\right)^2 \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) = 0$$

- Los momentos de inercia principales serán, por tanto,

$$I_x^P = \frac{Ma^2}{6}, \quad I_y^P = I_z^P = \frac{11M}{12}a^2 \text{ (doble)}$$

$$I_O^{\text{cubo}} = Ma^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix} \quad (B.7)$$

Para obtener los ejes principales hay que calcular los vectores propios. Se obtiene que el vector propio asociado a  $I_x^P$  es

$$\vec{v}^P = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Los otros dos vectores propios son cualquiera ortogonales entre sí e el plano perpendicular a  $\vec{v}^P$ . En este sistema de referencia el cubo es un sólido simétrico.

En el caso del cubo, los momentos de inercia respecto del CM están totalmente degenerados. Cualquier sistema de ejes en el CM son un sistema de ejes principales. Con respecto a este sistema de referencia el cubo es un sólido esférico.

### B.3. Momento de inercia de una esfera hueca y origen en el CM

- Considérese una esfera hueca de masa  $M$ , densidad cte.  $\rho$  y radios  $a < b$  y un sistema de ejes ligado a la esfera con origen en el CM. Claramente, estos ejes serán principales y, además, por simetría  $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ . En coords. esféricas se tiene

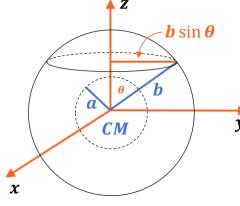


Figura 2.3: Esfera hueca

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta (r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi) \\ &= 2\pi\rho \left( \frac{b^5 - a^5}{5} \right) \int_0^\pi 1 - \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = 2\pi\rho \left( \frac{b^5 - a^5}{5} \right) \left( -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)_0^\pi \\ &= \frac{8\pi\rho}{3} \left( \frac{b^5 - a^5}{5} \right) = \frac{2}{5} M \left( \frac{b^5 - a^5}{b^3 - a^3} \right) \end{aligned}$$

En el último resultado se divide numerador y denominador por  $b - a$ , resultando,

$$I_{zz} = \frac{2}{5} M \left( \frac{b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4}{b^2 + ba + a^2} \right),$$

Análogamente para  $I_{xx}$  e  $I_{yy}$ .

Dos casos particulares:

- i) **Esfera maciza**,  $a = 0, b = R$ :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} MR^2.$$

- ii) **Superficie esférica**,  $a = b = R$ :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} MR^2.$$

### B.4. Ejemplos