



UNIVERSITAT DE VALÉNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

OSCILACIONES Y ONDAS

---

## Apuntes Oscilaciones y Ondas

---

*Alumno:*

Navarro Bonanad, Rubén

*Profesor:*

Martín Lozano, Víctor

**Grupo BL3**

Curso 2024 - 2025

# Índice

<b>1. Oscilaciones simples</b>	<b>3</b>
1.1. Movimiento armónico simple . . . . .	3
1.2. Oscilador armónico en 2-Dimensiones . . . . .	5
1.3. Oscilaciones amortiguadas . . . . .	7
1.4. Formulación Lagrangiana O.A. . . . .	9
<b>2. Oscilaciones forzadas</b>	<b>11</b>
2.1. Fuerza sinusoidal . . . . .	11
2.2. Fuerza periódica . . . . .	15
2.3. Fuerza no periódica . . . . .	19
<b>3. Oscilaciones acopladas</b>	<b>28</b>
3.1. Acoplamiento de dos osciladores . . . . .	28
3.2. Acoplamiento débil entre masas . . . . .	30
3.3. Sistema de infinitos osciladores . . . . .	34
<b>4. Ecuación de ondas</b>	<b>38</b>
4.1. Ondas estacionarias en una dimensión . . . . .	38
4.2. Instrumentos de viento . . . . .	40
4.3. Ondas progresivas. Reflexión y transmisión . . . . .	42
4.4. Energía . . . . .	48
4.5. Amortiguamiento . . . . .	49
<b>5. Ondas progresivas</b>	<b>53</b>
5.1. . . . .	53

# 1. Oscilaciones simples

1. Movimiento armónico simple .....	3
2. Oscilador armónico en 2-Dimensiones .....	5
3. Oscilaciones amortiguadas .....	7
3.1 Solución a la ecuación de movimiento .....	8
4. Formulación Lagrangiana O.A.....	9

Motivación para estudiar ondas: Puede definirse una onda como una colección de oscilaciones correlacionadas

## 1.1. Movimiento armónico simple

Todo movimiento se ve caracterizado por un potencial, que puede desarrollarse en series de Taylor

$$V(x) = V(x_0) + V'(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}[(x - x_0)^3].$$

Por lo que, en torno al punto de equilibrio  $[V'(x_0) = 0]$  puede hacerse la siguiente aproximación

$$V(x) \simeq \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

que, tomando su derivada, se halla la fuerza. Se podrá ver entonces que la fuerza se asemeja a la de la ley de Hooke:

$$F = -kx$$

Ahora, utilizando la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

cuya solución más general es

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (1.1.1)$$

y cuya segunda derivada (su aceleración) es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{(a \cos \omega t + b \sin \omega t)}_x,$$

donde  $\omega$  denota a la frecuencia angular y, observando la ecuación de Newton se llega a que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Otro modo de expresar la solución es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi); \quad a = A \cos \phi, b = -A \sin \phi, \quad (1.1.2)$$

donde  $\phi \equiv$  fase y  $A \equiv$  amplitud. Derivando dos veces se hallan su velocidad y aceleración

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1.3)$$

que también son movimientos armónicos simples.

El **periodo** de un movimiento armónico simple puede hallarse teniendo en cuenta que  $x(t) = x(t + 2\pi/\omega)$ :

$$x(t) = x \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.1.4)$$

donde se ha utilizado la definición previa de frecuencia angular. Recuérdese que la **frecuencia** (oscilaciones por segundo) son la inversa del periodo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

También se define la fase inicial,  $\phi_0$ , que es la fase en  $t = 0$

$$x(0) = A \cos \phi_0$$

En conclusión, generalmente, la solución de un oscilador armónico simple

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi') = a \cos \omega t + b \sin(\omega t) = Ce^{i\omega t} + C^*e^{-i\omega t} = \operatorname{Re}(De^{i\omega t}) \quad (1.1.5)$$

donde las ctes. cumplen las siguientes relaciones

$$\left. \begin{array}{l} a = A \cos \phi = 2\operatorname{Re}(C) = \operatorname{Re}(D) \\ b = -A \sin \phi = -2\operatorname{Im}(C) = -\operatorname{Im}(D) \end{array} \right\} C, D \in \mathbb{C}, \quad \phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$$

Ejemplos de MAS

- Movimiento en torno a un punto de equilibrio estable: considerando una partícula bajo los efectos de un potencial  $V(x)$ . Puede considerarse un punto de equilibrio si cumple

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (1.1.6)$$

Esto garantiza que el se tiene un extremo, pero para garantizar que sea un punto de equilibrio estable debe exigirse

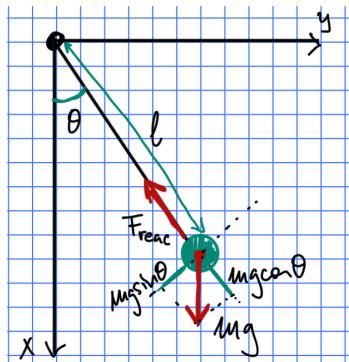
$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=X_0} > 0 \quad (1.1.7)$$

Puede expandirse el potencial en el punto de equilibrio  $x_0$  como serie de Taylor. Esto tiene sentido cuando pueda despreciarse los términos de orden  $\mathcal{O}(x^3)$ . En términos de la expansión de Taylor puede escribirse

$$x - x_0 \ll \frac{V''(x_0)}{V'''(x_0)} \Rightarrow \frac{1}{2!} V''(x_0)(x - x_0)^2 \gg \frac{1}{3!} V'''(x_0)(x - x_0)^3 \quad (1.1.8)$$

Un punto de equilibrio estable tiene  $V''(x_0) > 0$ , mientras que uno inestable tiene  $V''(x_0) < 0$ .

- Péndulo simple



$$x = l \cos \theta \quad y = l \sin \theta$$

$$\hat{u}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \hat{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad \dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta} \hat{u}_\theta \quad \dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{u}_r$$

por tanto

$$\vec{r} = l \hat{u}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = l \dot{\theta} \hat{u}_\theta \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \underbrace{l \ddot{\theta} \hat{u}_\theta}_{\text{ac. tangencial}} - \underbrace{l \dot{\theta}^2 \hat{u}_r}_{\text{ac. centrípeta}}$$

y la fuerza gravitatoria

$$\vec{F}_g = -mg \sin \theta \hat{u}_\theta + mg \cos \theta \hat{u}_r \quad (1.1.9)$$

y la ec. de Newton será

$$m(l\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\hat{u}_r) = -mg \sin \theta \hat{u}_\theta + mg \cos \theta \hat{u}_r - F_{\text{reac}}\hat{u}_r \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_r : F_{\text{reac}} = mg \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \\ \hat{u}_\theta : l\ddot{\theta} = -g \sin \theta \end{cases}$$

se tiene que  $\sin \theta \simeq \theta$  (en radianes) y por tanto

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0} \quad (1.1.10)$$

Esta ecuación es la de un MAS con  $\omega = \sqrt{g/l}$  con solución

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1.11)$$

En este caso el movimiento armónico ocurre para  $\theta \ll 1$ , que en términos de arco de curva descrito por el péndulo  $m s = l\theta$ , se tiene que  $s \ll l$ .

## 1.2. Oscilador armónico en 2-Dimensiones

### Oscilador isótropo

Suponiendo una partícula sometida a una fuerza central

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x, y) \quad (1.2.1)$$

su potencial viene dado por

$$V = \frac{1}{2}kr^2 \quad (1.2.2)$$

Las soluciones son:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \alpha); \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \Rightarrow y(t) = B \cos(\omega t + \beta)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ahora puede definirse  $\delta = \beta - \alpha$ , con lo que la ecuación de la trayectoria en  $(x, y)$  sería

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta - \sin(\omega t + \alpha) \sin \delta, \quad (1.2.3)$$

que si se eleva al cuadrado se tiene

$$\boxed{\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \delta = \sin^2 \delta}, \quad (1.2.4)$$

eliminando en el proceso la dependencia temporal.

Puede verse que esta es la trayectoria de una elipse centrada en  $(0, 0)$  con los ejes girados con respecto a  $(x, y)$  en la que se tendrán los siguientes casos

a)  $\delta = 0$

$$y = \frac{B}{A}x \Rightarrow \text{mvmto. rect. de pendiente } B/A \quad (1.2.5)$$

b)  $\delta = \pi/2$

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad y(t) = B \cos(\omega t + \pi/2) = -B \sin \omega t; \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

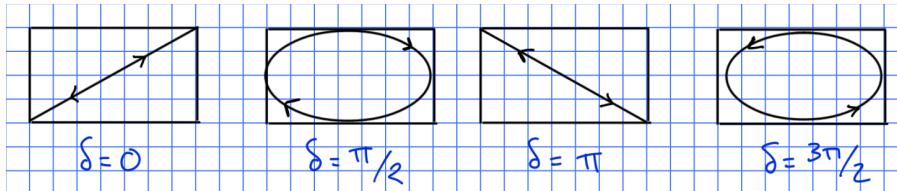
Elipse centrada en  $(0, 0)$  que se recorre en sentido horario pues, al fijarse en las ecuaciones de mvmto., cuando  $x$  crece,  $y$  decrece.

c)  $\delta = \pi$ 

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (1.2.6)$$

d)  $\delta = 3\pi/2$ 

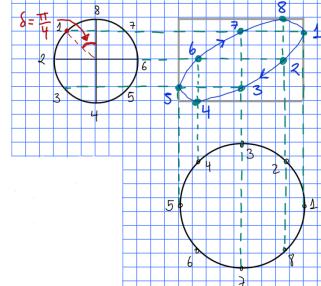
$$x(t) = A \cos \omega t, \quad y(t) = B \cos(\omega t + 3\pi/2) = B \sin \omega t; \quad \frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{B^2} = 1 \quad (1.2.7)$$

Elipse centrada en  $(0, 0)$  recorrida en sentido antihorario.Las diferentes trayectorias para los casos  $\delta = 0, \pi/2, \pi$  y  $3\pi/2$  serán

Estas figuras obtenidas de las ecuaciones paramétricas que describen la superposición de dos osciladores perpendiculares son conocidas como **figuras o curvas de Lissajous**, a veces también curvas de Bowditch.

Hasta ahora se han visto sólo los casos sencillos con  $\delta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Ahora se verá cómo obtener la curva de Lissajous para otras fases  $\delta$ .

Pruébese con una fase de  $\delta = \pi/4$ . Cada MAS es representado como una circunferencia de radio  $A$  y  $B$  respectivamente. En cada uno de ellos los números del 1 al 8 son puntos de referencia por los que pasan  $x$  e  $y$  en un tiempo  $t$  hasta completar una oscilación en  $T$ . Como se ve, la segunda circunferencia está girada de tal modo que su movimiento quede proyectado sobre el eje  $x$ . Dado que hay una fase  $\delta = \pi/4$  entre los dos movimientos el punto 1 de la circunferencia que describe el movimiento en  $y$  se desplaza  $\pi/4$ . A continuación se va proyectando todos los puntos de las dos circunferencias hasta que se cruzan, obteniendo así la curva de Lissajous para estos movimientos.



### Oscilador anisótropo

Hasta ahora se ha tratado el caso en que ambos osciladores comparten la misma frecuencia de oscilación,  $\omega$ . Sin embargo, en una situación general, esto no tiene por qué ser cierto, pudiendo ser las frecuencias diferentes,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Para un caso general se tendría

$$\vec{F} = (-k_1 x, -k_2 y); \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2). \quad (1.2.8)$$

Ahora se tienen  $k_1$  y  $k_2$ , pero como ambos movimientos están desacoplados puede resolverse cada ecuación

$$x : m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega_1 t + \alpha); \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

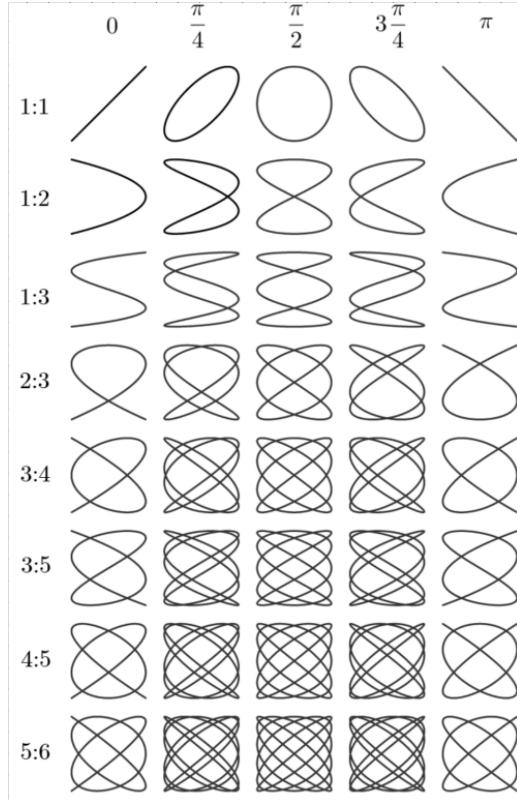
$$y : m \frac{d^2y}{dt^2} = -k_2 y \Rightarrow y(t) = B \cos(\omega_2 t + \beta); \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Como tienen dos frecuencias distintas, sólo cuando el cociente entre ellos es un racional,  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ , se tendrá una trayectoria cerrada. Esto puede verse si se escriben las ecuaciones paramétricas, usando el hecho de que  $\omega_1/\omega_2 = p/q$ :

$$x(t) = A \cos \left( \omega_2 \frac{p}{q} t + \alpha \right), \quad y(t) = B \cos (\omega_2 t + \beta)$$

Pasado un tiempo  $t = 2\pi q/\omega_2$ , la variable  $x$  habrá completado  $p$  oscilaciones, mientras que la variable  $y$  habrá completado  $q$  oscilaciones.

En este caso general las figuras de Lissajous son un poco más complejas que para el caso isótropo. Un ejemplo de figura de Lissajous para varios cocientes entre frecuencias y fases en la siguiente figura:



### 1.3. Oscilaciones amortiguadas

En lo visto hasta ahora los stmas. tratados han sido ideales. Sin embargo, se sabe de la observación de la naturaleza que las vibraciones de un stma. físico real desaparecen a lo largo del tiempo. La energía mecánica de la vibración se va perdiendo por procesos disipativos. Los procesos disipativos pueden parametrizarse como una fuerza proporcional a la velocidad

$$F_d = -b\dot{x} \quad (1.3.1)$$

Las ecuaciones del movimiento entonces es la siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta \equiv \frac{b}{2m}, \quad (1.3.2)$$

y sus soluciones son del tipo

$$x(t) = C(t)e^{\omega t}, \omega \in \mathbb{C}. \quad (1.3.3)$$

Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial se tiene

$$\omega^2 x + 2\beta\omega x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \omega = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.3.4)$$

donde  $\beta$  es el factor disipativo.

Puede verse la diferencia entre  $\omega$  y  $\omega_0$ .  $\omega_0$  es la frecuencia que tendrá el stma. si no hubiese amortiguación y  $\omega$  es la frecuencia del movimiento amortiguado. Puede verse que si  $\beta \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow 0$ ) entonces  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Puede definirse otra cantidad,  $Q$ , el factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad (1.3.5)$$

que indica el grado de disipación de un sistema., es decir, si hay poca amortiguación  $\uparrow Q$  y si hay mucho amortiguamiento  $\downarrow Q$ .

### 1.3.1. Solución a la ecuación de movimiento

$$\omega^2 + 2\beta\omega x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \omega_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \omega_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (1.3.6)$$

que, en función de los valores de  $\beta$  y  $\omega_0$  se hallan tres casos:

$$\begin{array}{lll} \beta > \omega_0 & \beta = \omega_0 & \beta < \omega_0 \\ \text{sobreamortiguado} & \text{crítico} & \text{subamortiguado} \end{array}$$

#### 1. caso sobreamortiguado ( $\beta > \omega_0$ )

Para este caso las soluciones  $\omega_{1,2}$  son reales y negativas

$$\omega_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \omega_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (1.3.7)$$

con lo que la solución será

$$x(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \quad (1.3.8)$$

en este caso, ya que  $|\omega_2| > |\omega_1|$  dominará el decrecimiento del movimiento

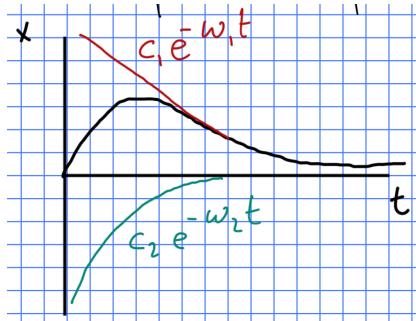


Fig 1.3.1.1: En este caso puede observarse que la curva con  $\omega_2$  es la que rápidamente decae a cero. Aquí, el movimiento parte de una posición en la que estaba en reposo ( $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ ), de ahí la tangente horizontal en  $t = 0$ ) y el resorte tiende a la posición de equilibrio.

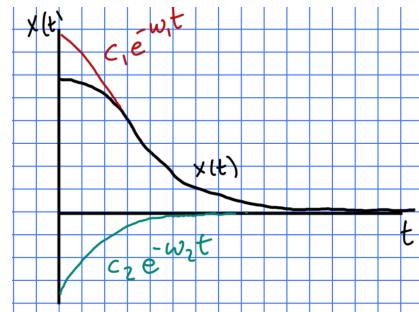


Fig 1.3.1.2: En este caso se tiene que el oscilador parte del punto de equilibrio con una velocidad distinta de cero. La masa se aleja al principio de la posición de equilibrio para retornar a ella.

#### 2. Caso subamortiguado ( $\beta < \omega_0, Q > 1/2$ )

Si se define  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , las soluciones que se obtienen son

$$\omega_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega \quad (1.3.9)$$

y su solución es

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{amortiguación}} \underbrace{(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})}_{\text{osc. arm.}} = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \phi)$$

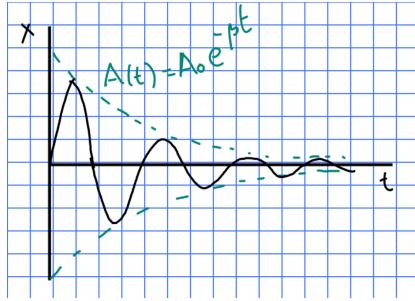


Fig 1.3.1.3

Puede verse que este sistema describe un movimiento oscilatorio con frecuencia  $\omega_0$ . La amplitud de este movimiento decae exponencialmente con el tiempo,  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ . La rapidez con la que decae la amplitud está relacionada con el valor de  $\beta$ .

### 3. Caso amortiguamiento crítico ( $\beta = \omega_0, Q = 1/2$ )

$$b = 2\sqrt{km} \quad \beta = \frac{b}{2m}.$$

En este caso la solución es

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \quad (1.3.10)$$

#### Energía de un oscilador amortiguado

La energía potencial de un oscilador armónico viene dada por  $V = 1/2kx^2$ . En los extremos del movimiento se tiene  $x = |A|$  y  $v = \dot{x} = 0$  por lo que la energía total del sistema es

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.3.11)$$

y en el caso de un oscilador amortiguado  $A = A(t)$ , por lo que

$$E = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t} \quad (1.3.12)$$

Con lo que la energía decae exponencialmente pero con un factor 2 de diferencia con la amplitud. Como se ve el factor  $\beta$  influye directamente en lo rápido que decae la amplitud (o la energía). Por ello, a su inversa,  $1/\beta = t_r$ , se le conoce como *tiempo de relajación*, y es el tiempo que se necesita para que la amplitud disminuya  $1/e$  de su valor inicial. También se le conoce como *vida media*.

### 1.4. Formulación Lagrangiana O.A.

Dado un sistema físico en el que la energía cinética está definida y vale  $T$  y en la que la energía potencial está definida y vale  $V$ , puede definirse el Lagrangiano del sistema como

$$\mathcal{L} = T - V \quad (1.4.1)$$

Para hallar las ecuaciones del movimiento basta con aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (1.4.2)$$

si el sistema estudiado tiene  $i = 1, \dots, N$  coordenadas generalizadas, entonces se tendrán  $N$  ecuaciones de E-L

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, \dots, N \quad (1.4.3)$$

En esta formulación puede definirse el **momento canónico, generalizado o conjugado** asociado a la coordenada  $q_i$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.4.4)$$

Si además el Lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada  $q_i$ , se tiene que  $p_i = \text{cte.}$ , por lo que se conserva.

La energía se define como

$$E = T + V \quad (1.4.5)$$

que, si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, se conserva.

Para el oscilador armónico simple

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \\ V = \frac{1}{2}kq^2 \end{array} \right\} \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \end{array} \right\} m\ddot{q} = -kq \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow q = A \sin(\omega t + \phi)$$

Para el péndulo simple

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{array} \right\} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (1.4.6)$$

y recordando el potencial  $V = -mgy = -mgr \cos \theta$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \end{array} \right\} \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \xrightarrow[\sin \theta \approx \theta]{\theta \ll 1} \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \theta = A \sin(\omega t + \phi), \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.4.7)$$

## 2. Oscilaciones forzadas

<b>1. Fuerza sinusoidal .....</b>	<b>11</b>
1.1 Frecuencia externa baja ( $\omega \ll \omega_0$ ) ( $\beta/\omega_0 < 1$ ).....	13
1.2 Frecuencia externa alta ( $\omega \gg \omega_0$ ) ( $\beta < \omega_0$ ) .....	13
1.3 Resonancia ( $\omega \simeq \omega_0$ ) .....	13
<b>2. Fuerza periódica.....</b>	<b>15</b>
<b>3. Fuerza no periódica .....</b>	<b>19</b>

### 2.1. Fuerza sinusoidal

Téngase un MAS en que la fuerza externa que actúa sobre este es no nula y tiene una forma senoidal:

$$m\ddot{x} - kx = f \cos \omega t \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega t .$$

donde  $f$  es constante y  $\omega$  es la amplitud de la fza. externa. En esta situación la fza. externa tratará de imponer su propia frecuencia en detrimento de la del oscilador. Así pues, se esperará que la frecuencia final sea una superposición de oscilaciones correspondientes a  $\omega$  y  $\omega_0$ .

Se supondrá que la solución es un movimiento oscilatorio del siguiente tipo:

$$x(t) = C \cos \omega t \quad (2.1.1)$$

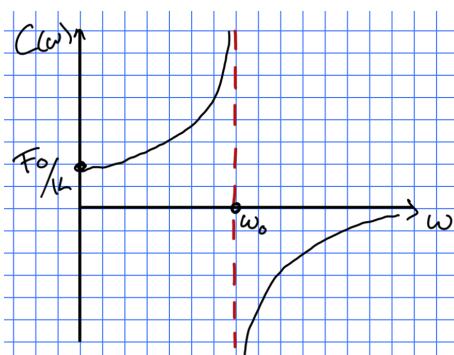
donde se asume que, además de que el mvmt. es armónico, tiene la misma frecuencia y fase que la fuerza externa. Esto no es necesariamente así, simplemente se está probando la solución. Si ahora se introduce la solución en la ED original resulta

$$-m\omega^2 C \cos \omega t + kC \cos \omega t = f \cos \omega t \quad (2.1.2)$$

de donde puede hallarse el valor de  $C$ , la amplitud:

$$C = \frac{f}{k - m\omega^2} = \frac{f/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.1.3)$$

donde se ve que esta solución satisface la ecuación original y es válida. De este resultado puede estudiarse el fenómeno de resonancia.



Como puede observarse en la figura, la amplitud  $C$  aumenta rápidamente cuando la frecuencia de la fuerza externa tiende a la frecuencia propia (original) del sistema,  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Los sistemas reales tienen amortiguamiento, por lo que ahora se estudiará el caso en que además se tiene una fuerza disipativa. Se añadirá un término disipativo a la ec. de movimiento del oscilador:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (2.1.4)$$

donde

$$\omega_0 : \text{frecuencia natural MAS } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_1 : \text{frecuencia oscilador amortiguado } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega : \text{frecuencia externa}$$

Por lo que su solución general será suma de una particular y una parte homogénea. Esta segunda, en el régimen subamortiguado es

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi); \quad \beta < \omega_0 \quad (2.1.5)$$

Para hallar la solución particular se pasará la ecuación diferencial original a variable compleja

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t} \quad (2.1.6)$$

donde la solución particular será

$$x_p(t) = \operatorname{Re}[z(t)]. \quad (2.1.7)$$

Puede probarse una solución exponencial del tipo  $z = Ce^{i\omega t}$  que, sustituyendo en la ecuación diferencial inicial para  $t = 0$

$$-\omega^2 C + i2\beta\omega C + \omega_0^2 C = f \quad (2.1.8)$$

por lo que

$$C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} \quad (2.1.9)$$

definiendo las siguientes variables

$$r^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2, \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.1.10)$$

que permiten reescribir  $C$  del siguiente modo

$$C = \frac{f}{re^{i\delta}} \Rightarrow z(t) = \frac{f}{r} e^{-i(\omega t - \delta)} \quad (2.1.11)$$

por lo que la solución particular al final queda como

$$x_p(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = \frac{f}{r} \cos(\omega t - \delta). \quad (2.1.12)$$

Y por tanto la solución general al movimiento será

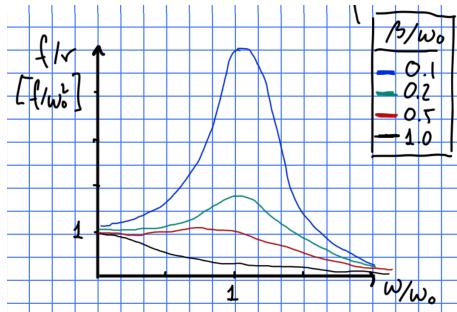
$$x = x_H + x_p = \underbrace{Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)}_{\text{sol. transitoria}} + \underbrace{\frac{f}{r} \cos(\omega t - \delta)}_{\text{sol. estacionaria}} \quad (2.1.13)$$

por lo que, cuando  $t$  se haga grande (tomando el tiempo de relajación como referencia), la solución estacionaria dominará el movimiento

$$x(t) \xrightarrow{t \gg 1/\beta} x = \frac{f}{r} \cos(\omega t - \delta) \quad (2.1.14)$$

Lo más relevante aquí es ver que la solución estacionaria es independiente de la transitoria, es decir, que no se ve alterada por esta.

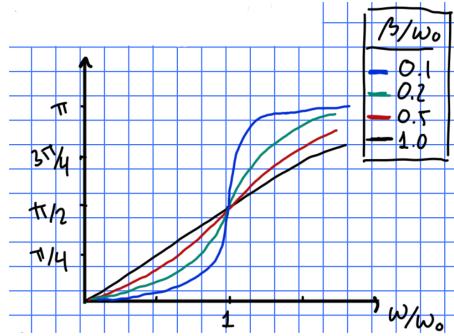
### Variación de la frecuencia frente a la fuerza externa y el desfase



Si se analiza cómo varía la amplitud con respecto a  $\omega/\omega_0$  puede verse que para todo valor de  $\beta/\omega_0$  tiende a  $f/\omega_0^2$  para  $\omega = 0$  y  $f/r$  para  $\omega \rightarrow 0$ .

En el caso en que  $\omega = \omega_0$ , se tiene una resonancia pero está sólo será relevante para  $\beta < \omega_0$

Si ahora se observa cómo varía  $\delta$ , cuando se tiene  $\omega = 0$ ,  $\delta = 0$ , para  $\omega = \omega_0$  en todos los casos es  $\delta = \pi/2$  y  $\delta \rightarrow \pi$  para  $\omega \rightarrow \infty$ . Estudiense ahora los distintos casos



### 2.1.1. Frecuencia externa baja ( $\omega \ll \omega_0$ ) ( $\beta/\omega_0 < 1$ )

$$r = [(\omega_0 - \omega)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2} \xrightarrow{\omega \ll \omega_0} \omega_0^2 \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \xrightarrow{\omega \ll \omega_0} 0^+$$

$$x(t) = \frac{f}{\omega_0^2} \cos \omega t; \quad t \gg 1/\beta$$

$$F_{\text{muelle}} + F_{\text{dis}} + F_{\text{ext}} = -m\omega_0^2 x - 2m\beta\dot{x} + m f \cos \omega t = \rightsquigarrow -m\omega_0^2 + m f \cos \omega t \simeq 0 \rightarrow x(t) = \frac{f}{\omega_0^2} \cos(\omega t) \xrightarrow{0}$$

### 2.1.2. Frecuencia externa alta ( $\omega \gg \omega_0$ ) ( $\beta < \omega_0$ )

$$r = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2} \rightarrow \omega^2 \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow 0^-$$

$$x(t) = \frac{f}{\omega^2} \cos(\omega t + \pi) = -\frac{f}{\omega^2} \cos \omega t; \quad t \gg 1/\beta$$

Por lo que, funcionalmente, ambos casos (frecuencia externa alta y baja) son muy similares:

$$x(t) = \frac{f}{\omega_0^2} \cos \omega t \quad (\omega_0 \gg \omega) \quad x(t) = -\frac{f}{\omega^2} \cos \omega t \quad (\omega \gg \omega_0) \quad (2.1.15)$$

### 2.1.3. Resonancia ( $\omega \simeq \omega_0$ )

$$x(t) = \frac{f}{r} \cos(\omega t - \delta); \quad t \gg 1/\beta$$

$$\frac{dr^2}{d\omega^2} = 0 \Rightarrow -2(\omega_0^2 - \omega_R^2) + 4\beta^2 = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \equiv \text{frecuencia resonante}$$

$$\frac{f}{r} = \frac{f}{2\beta\omega_1} \quad \tan \delta = \frac{\omega_R}{\beta}$$

Si  $\omega_0 < \sqrt{2}\beta$  entonces no hay una frecuencia de resonancia, pues no hay un máximo en  $f/r$ , dado que la disipación es grande y se "come" el movimiento.

Mientras tanto, si  $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$  hay una frecuencia de resonancia que es  $\omega_R$ , en la que  $f/r$  tiene un máximo.

Si  $\beta \ll \omega_0, \omega_R \sim \omega_0$  y  $\delta \simeq \pi/2$ :

$$x(t) = \frac{f}{2\beta\omega_1} \cos(\omega t - \delta) \sim \frac{f}{2\beta\omega_0} \sin \omega t \quad (2.1.16)$$

Puede definirse la **anchura de la resonancia** como el intervalo en valores de  $\omega$  donde  $A^2(\omega)$  se ve reducido a la mitad respecto del máximo, donde  $A(\omega) = f/r$

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- \quad (\omega_+ > \omega_R > \omega_-) \quad A(\omega_+) = A(\omega_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}A(\omega_R)$$

$$r^2 = (\omega_0^2 - \omega_\pm^2)^2 + 4\beta^2\omega_\pm^2 = 2(2\beta\omega_1)^2 \quad \omega_\pm^2 = \omega_R^2 \pm 2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega_R^2}$$

dado que el fenómeno de la resonancia ocurre para  $\beta \ll \omega_0 \simeq \omega_R$ , se tiene:

$$\omega_\pm^2 \sim \omega_R^2 \pm 2\beta\omega_R \rightarrow \omega_\pm \sim \omega_R \pm \beta \quad \boxed{\Delta\omega = 2\beta} \quad (2.1.17)$$

y la fase se obtiene para  $\beta \ll \omega_0$

$$\tan \delta_\pm = \frac{2\beta\omega_\pm}{\omega_0^2 - \omega_\pm^2} \sim \frac{2\beta\omega_0}{\mp 2\beta\omega_0} = \mp 1 \quad \left. \begin{array}{l} \delta_+ = \frac{3\pi}{4} \\ \delta_- = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Fase } \Delta\omega \\ \pi/2 \end{array} \quad (2.1.18)$$

Se ve que en el intervalo de  $\omega_-$  a  $\omega_+$  la fase sufre un cambio de  $\pi/2$

### Balance energético y potencia

Puede hacerse un estudio de las energías presentes en el oscilador armónico forzado amortiguado. Para ello se asumirá la solución para tiempos grandes .

La energía cinética en este caso es  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\frac{\omega^2f^2}{r^2}\sin^2(\omega t - \delta)$

Si se promedia  $T$  sobre un ciclo completo se obtendrá la energía cinética media

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{2}m\frac{\omega^2f^2}{r^2}\sin^2(\omega t - \delta) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{2}m\frac{\omega''f^2}{r^2} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t - 2\delta)]$$

$$= \frac{1}{4}m\frac{\omega^2f^2}{r^2} = \frac{mf^2}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \quad (2.1.19)$$

donde se ha utilizado la identidad  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$  y se ha tenido en cuenta que el coseno en un periodo tiene integral nula.

Puede verse que ocurre como en el caso en que se tiene  $\beta \ll \omega_0$  y por tanto  $\omega_0 \sim \omega_R$ ,  $\langle T \rangle$  tendrá un máximo para  $\omega = \omega_0 = \omega_R$ . En el caso en el que aparece una resonancia la energía cinética se hace muy grande. La anchura puede obtener de la energía cinética media

$$\langle T \rangle_{\omega-} = \langle T \rangle_{\omega+} = \frac{1}{2}\langle T \rangle_{\omega_R} \quad (2.1.20)$$

puede verse que en la región resonante  $\langle T \rangle$  depende del valor de  $\beta$ , de hecho en la región resonante,  $\omega_- \lesssim \omega \lesssim \omega_+$  la energía cinética media tiene la siguiente expresión,

$$\langle T \rangle_{\omega=\omega_R} = \frac{mf^2}{16\beta^2} \quad (2.1.21)$$

Por tanto pequeños cambios en la frecuencia  $\omega$  pueden inducir cambios muy altos en la energía del sistema.

Se estudiará ahora todas las contribuciones de las fuerzas para hacer un balance energético. Para ello se calculará el trabajo de cada una de ellas en un periodo  $T = 2\pi/\omega$

$$W_{\text{muelle}} = \int F_{\text{muelle}} dx = \int_{x(0)}^{x(T)} (-m\omega_0^2 x) dx = -\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \Big|_{x(0)}^{x(T)} = 0 \quad (2.1.22)$$

Este resultado era de esperarse dado que la fuerza del muelle es una fuerza conservativa, por lo que su integral tiene independencia del camino y la integral a lo largo de un camino cerrado es nula.

Para el caso de la fuerza disipativa se tiene

$$W_{\text{dis}} = \int F_{\text{dis}} dx = \int_0^T (-2m\beta\dot{x})(\dot{x} dt) = \frac{2\pi}{\omega}(-4\beta)\langle T \rangle \quad (2.1.23)$$

y para la fuerza externa

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \int F_{\text{ext}} dx = \int_0^T mf \cos \omega t (\dot{x} dt) = \int_0^T mf \cos \omega t \left( -\frac{f\omega}{r} \sin(\omega t - \delta) dt \right) = \\ &= -\frac{mf^2\omega}{2r} \int_0^T [\sin(2\omega t - \delta) - \sin \delta] dt = \frac{mf^2}{2r} \omega \frac{2\pi}{\omega} \sin \delta = \frac{2\pi mf^2 \beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\beta^2 \omega^2} = \frac{2\pi}{\omega} (4\beta) \langle T \rangle \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Si se comparan  $W_{\text{dis}}$  y  $W_{\text{ext}}$  se ve que la energía perdida por dissipación es la que aporta la fuerza externa, por lo que el movimiento se mantiene.

Un dato importante y curioso es que la frecuencia de oscilación del sistema no tiene información del oscilador sin la fza. externa, sin embargo sí que puede sacarse esa información de la resonancia.

La potencia media puede obtenerse con los valores enteriores divididos por el periodo

$$\langle P_{\text{dis}} \rangle = -4\beta \langle T \rangle, \quad \langle P_{\text{ext}} \rangle = 4\beta \langle T \rangle \quad (2.1.25)$$

## 2.2. Fuerza periódica

$$F(t) = mf(t) \quad \text{donde } f(t) \text{ es una función periódica, } T, \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2.1)$$

por lo que su ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = f(t) \quad \text{donde } \beta = \frac{b}{2m}, \omega_0'' = k/m \quad (2.2.2)$$

**Teorema de Fourier:** Dada una función periódica,  $f(t)$ , puede descomponerse en una serie de senos y cosenos con ciertos coeficientes. A dicha serie se le conoce como serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (2.2.3)$$

los coeficientes se obtiene como sigue

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos(n\omega t) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin(n\omega t) \quad (2.2.4)$$

donde para obtenerlos se usan las relaciones de ortogonalidad siguientes

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{T} \int_0^T dt \cos(m\omega t) \cdot \cos(n\omega t) = \delta_{m,n} \\ \frac{2}{T} \int_0^T dt \sin(m\omega t) \cdot \sin(n\omega t) = \delta_{m,n} \\ \frac{2}{T} \int_0^T dt \cos(m\omega t) \cdot \sin(n\omega t) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall m \geq 0 \\ \forall n > 0 \end{array} \quad (2.2.5)$$

y además

$$\frac{2}{T} \int_0^T dt 1^2 = 2 \quad (2.2.6)$$

Las relaciones obtenidas son las relaciones de definición de un producto escalar, sin embargo en este caso, en lugar de vectores se tienen funciones y el espacio vectorial tiene dimensión infinita. El modo de entenderlo es que la función se representa mediante el vector  $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ .

El espacio sobre el que está definido es un Espacio de Hilbert, que es un espacio vectorial real o complejo con un producto euclídeo o hermítico definido para sus elementos. El espacio de funciones es de cuadrado integrable,  $L^2(a, b)$  si en un intervalo  $(a, b)$  sus elementos son las funciones  $f(x)$  que cumplen

$$L^2(a, b) \Rightarrow \int_a^b dx |f(x)|^2 < \infty \quad (2.2.7)$$

es decir, las funciones cuya integral del módulo cuadrado en  $(a, b)$  tiene un resultado finito.

Dado un espacio de Hilbert y sus elementos pueden definir un producto escalar de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  como

$$\langle f, g \rangle = A \int_a^b dx (f(x))^* g(x), \quad (2.2.8)$$

donde  $A$  es una cte. de normalización, y por tanto el caso  $\langle f, f \rangle$  es el cuadrado de la norma de la función.

Puede aplicarse ahora esto al conjunto de fueras externas ya que estas tendrán un valor finito a cada instante, y así la integral de  $[F(t)]^2$  será finita en un tiempo  $(0, T)$ . Por tanto, este conjunto forma un espacio de Hilbert de funciones reales de cuadrado integrable,  $L^2(0, T)$  con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int dt f(t)g(t), \quad f(t), g(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.2.9)$$

A la hora de trabajar con espacios siempre es bueno hallar una base ortogonal, que en este caso es  $\{1, \cos n\omega t, \sin n\omega t\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y por tanto cualquier  $f(t)$  admite un desarrollo en series de Fourier.

Lo mismo puede hacerse si se tienen funciones complejas de variable real. Su desarrollo, en este caso, viene dado por,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}, \quad \text{con } \alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-in\omega t} f(t) \quad (2.2.10)$$

donde  $e^{in\omega t}$  forman una base ortogonal del espacio de funciones complejas de cuadrado integrable  $L^2(0, T)$  donde la relación de ortogonalidad es

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t} = \delta_{nm} \quad (2.2.11)$$

Así una función  $f(t)$  admite un desarrollo tanto en la base de funciones reales como en el de funciones complejas, donde los coeficiente se relacionan,

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \alpha_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2}, \quad \alpha_{-n} = \alpha_n^* = \frac{(a_n + ib_n)}{2} \quad (2.2.12)$$

La norma de la función puede escribirse como

$$\langle f, f \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] = 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad (2.2.13)$$

## Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado sometido a una fuerza externa,  $F(t) = mf(t)$ , con periodo  $T$  y frecuencia  $\omega = 2\pi/T$  viene dada por,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad \beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (2.2.14)$$

Si ahora se expresa  $f(t)$  en su desarrollo en series de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t) + b_n \sin n\omega t \quad (2.2.15)$$

puede buscarse una solución particular para la ecuación del movimiento que sea de la forma

$$x_p(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos n\omega t + D_n \sin n\omega t] \quad (2.2.16)$$

puede sustituirse en la ecuación del movimiento y usando las relaciones de ortogonalidad se tiene

$$\omega_0^2 C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad -n^2 \omega^2 C_n + 2\beta n\omega D_n + \omega_0^2 C_n = a_n, \quad -n^2 \omega^2 D_n - 2\beta n\omega C_n + \omega_0^2 D_n = b_n \quad (2.2.17)$$

y el problema queda en resolver un sistema algebraico de ecuaciones lineales. Sin embargo, este método se hace tedioso de resolver cuanto mayor es el  $n$  considerado. Para facilitarse (?) la vida, se resolverá el problema con las funciones complejas

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}, \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t} \quad (2.2.18)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento

$$\sum_{-\infty}^{\infty} -n^2 \omega^2 \xi_n e^{in\omega t} + 2\beta \sum_{-\infty}^{\infty} i n \omega \xi_n e^{in\omega t} + \omega_0^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t} \quad (2.2.19)$$

por lo que cada componente

$$-n^2 \omega^2 \xi_n + 2\beta i n \omega \xi_n + \omega_0^2 \xi_n = \alpha_n \quad (2.2.20)$$

de aquí pueden sacarse los coeficiente  $s\xi_n$ ,

$$\xi_n = \frac{\alpha}{-n^2 \omega^2 + 2\beta i n \omega + \omega_0^2} = \frac{\alpha_n}{r_n e^{i\delta_n}} = \xi_n^* \quad (2.2.21)$$

donde

$$r_n^2 = (\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega^2 \quad \text{y} \quad \tan \delta = \frac{2\beta n \omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}. \quad (2.2.22)$$

Dado que esta es la solución particular, se debe sumar la homogénea para obtener la solución general

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_n}{r_n} e^{i(n\omega t - \delta_n)} + \frac{\alpha_n^*}{r_n} e^{-i(n\omega t - \delta_n)} \right] \\ &= A e^{-i\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{r_n} \cos(n\omega t - \delta_n) + \frac{b_n}{r_n} \sin(n\omega t - \delta_n) \right] \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

con lo que se obtiene un método sencillo de obtener la solución.

### Ejemplo

Téngase un oscilador amortiguado cuya masa está inicialmente en reposo al que se le aplica una fuerza externa  $F(t) = mf \sin^3 \omega t$ . Asumiendo  $\beta < \omega_0$  y  $f = \text{cte}$

Se va a obtener  $x(t)$  por el método de series de Fourier. Se tiene la ecuación de movimiento.

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = s \sin^2 \omega t$$

Ahora se sacan los coeficientes de la serie para el periodo de tiempo  $t \in [0, T]$  con  $T = 2\pi/\omega$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) = \frac{2}{T} dt \sin^3(\omega t) = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos n\omega t = \frac{2}{T} \int_0^T dt \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(n2\pi\frac{t}{T}\right) = 0 \end{aligned}$$

Para calcular  $b_n$  se usará el hecho de que  $T = 2\pi$  y la forma exponencial de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f \sin^3 \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt f \sin^3(t) \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt f \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \left( \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \frac{f}{(2i)^4} (e^{i3t} - 3e^{it} + 3 + 3e^{-it} - e^{-i3t}) (e^{int} - e^{-int}) = \\ &= \frac{f}{16\pi} \int_0^{2\pi} dt \left\{ e^{it(3+n)} - e^{-it(3-n)} - e^{it(3-n)} + e^{-it(3+n)} - 3 (e^{it(n+1)} - e^{it(n+1)} - e^{it(1-n)+e^{-it(n+1)}}) \right\} \end{aligned}$$

Ahora, usando la propiedad de que la integral sobre un periodo completo es cero

$$\int_0^{2\pi} dt e^{imt} = 0$$

para un entero salvo  $m = 0$ . Como puede verse en la integral resultante, los únicos valores en los que  $m = 0$  son  $n = 1$  y  $n = 3$ .  $\forall n \neq 1, 3$  la integral se anula.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin(\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T dt f \sin^3 \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) = \frac{3}{4} f \\ b_3 &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f \sin^3 \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) \sin \left( 3 \cdot 2\pi \frac{t}{T} \right) = -\frac{f}{4} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin n\omega t = 0 \quad \forall n \neq 1, 3 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{f}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

por lo que la solución particular viene dada por

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{r_n} \cos(n\omega t - \delta_n) + \frac{b_n}{r_n} \sin(n\omega t - \delta_n) \right] = \frac{f}{4} \left( \frac{3}{r_1} \sin \omega t - \delta_1 - \frac{1}{r_3} \sin(3\omega t) \right)$$

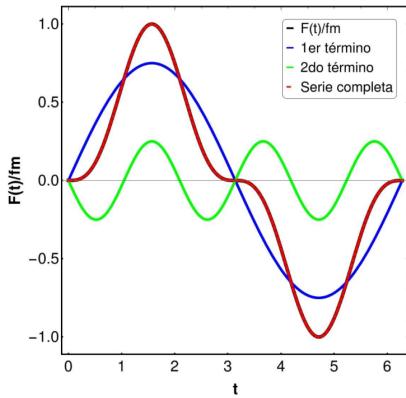
donde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2; & \tan \delta_1 &= \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ r_3^2 &= (\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\beta^2\omega^2; & \tan \delta_3 &= \frac{6\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

y habrán estructuras resonantes para  $\omega = \omega_0$  y para  $\omega = 3\omega_0$ .

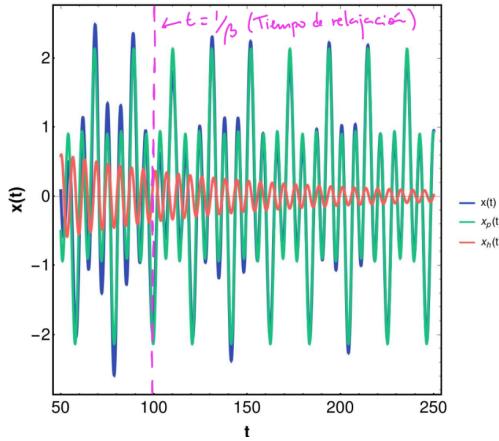
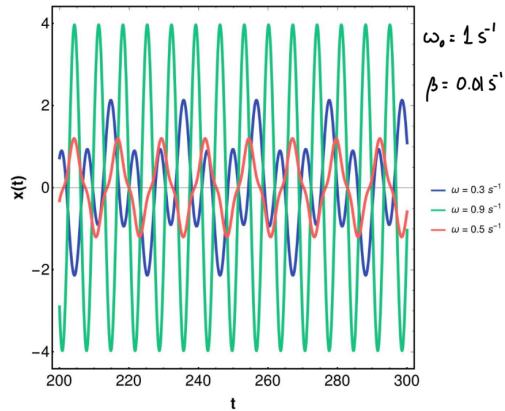
La solución general viene dada por la combinación lineal de la homogénea y la particular:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{f}{4} \left( \frac{3}{r_1} \sin(\omega t - \delta_1) - \frac{1}{r_3} \sin(3\omega t - \delta_3) \right)$$



Aquí puede verse la representación de  $F(t)/fm$ . La línea de color negro es la función analítica. En color azul está representado el primer término de la serie de Fourier,  $b_1$ , y verde el segundo término  $b_3$ . En rojo se tiene la serie completa de Fourier para la función  $F(t)/fm$  que es la suma de los dos términos anteriores. Como puede verse, dado que esta suma es finita la función analítica y su serie de Fourier coinciden exactamente.

En esta imagen pueden verse distintas soluciones para  $x_p(t)$  para  $\omega$  diferentes con  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  y  $\beta = 0,01 \text{ s}^{-1}$ . Puede verse que para  $\omega = 0,9 \text{ s}^{-1}$  (verde) al ser una frecuencia cercana a  $\omega_0$  la amplitud cree debido a que entran en régimen de resonancia



Finalmente, se verá el caso de la solución completa  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  y el comportamiento de la solución transitoria. En la figura se ven representadas las funciones  $x(t)$  (azul),  $x_p(t)$  (verde) y  $x_h(t)$  (rojo). Se ve que  $x_h(t)$  a pesar de tener un comportamiento oscilatorio la envolvente de su amplitud es una exponencial negativa. Además se ve que a partir de  $t = 1/\beta$ , el tiempo de relajación, la solución total es prácticamente la solución particular  $x(t) \approx x_p(t)$  ya que la solución transitoria decrece.

de cara al examen PONER la ecuación de movimiento es importante

### 2.3. Fuerza no periódica

En el anterior apartado se llegó a la siguiente expresión para una fza. periódica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\frac{2\pi t}{T}}; \quad \alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i2\pi n \frac{t}{T}}$$

donde se ha reescrito los límites de integración de  $-T/2$  a  $T/2$  (Esto es irrelevante pues al final se integra en un periodo entero).

Si se define  $\omega_n = 2\pi n/T$  puede verse que la sucesión de dos valores de  $\omega_n$  en  $d\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$   $dn = \frac{2\pi}{T}$ ,

pues  $dn = (n + 1) - n = 1$ . Con esto puede reescribirse las dos relaciones de la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in2\pi t/T} dn = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \alpha_n \frac{T}{2\pi} \right) e^{in\omega_n t} d\omega_n = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(\omega_n) e^{i\omega_n t} d\omega_n \quad (2.3.1)$$

por lo que

$$\alpha(\omega_n) = \alpha_n \frac{T}{2\pi N} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_n t} f(t) \quad (2.3.2)$$

siendo  $N$  una cte. de normalización. Ahora cada término de la suma viene identificado por un  $\omega_n$ . Si se pasa al límite continuo y se toman los límites  $T \rightarrow +\infty$  el sumatorio se convierte en la siguiente integral

$$f(t) = N \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) e^{i\omega t}; \quad \alpha(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

donde se han escogido  $N = 1/\sqrt{2\pi}$  como valor de la cte. de normalización (puede haber otros valores, pero se escogerá éste).

Con lo que ahora cualquier función,  $f(t)$ , de cuadrado integrable puede expresarse como combinación de exponentiales,  $e^{i\omega t}$ , donde  $\omega$  es real y arbitrario,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) e^{i\omega t}, \quad \alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

Puede decirse que  $\alpha(\omega)$  es la **transformada de Fourier** de  $f(t)$  y viceversa. Lo que acaba de obtenerse es la generalización de la serie de Fourier extendida a un periodo infinito. Puede observarse, con respecto a las series de Fourier se pasa de  $e^{in\omega t}$  con  $\omega$  fijo y  $n$  entero a  $e^{i\omega t}$  donde  $\omega$  es una variable continua.

$$f(t) \in \mathbb{R}; \quad \alpha(\omega) = (\alpha(\omega))^*$$

Dado que en esta representación se tienen las funciones  $e^{i\omega t}$  puede estudiarse sus relaciones de ortogonalidad

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \alpha(\omega') e^{i\omega' t} e^{-i\omega t} \quad (2.3.3)$$

donde se ha introducido la expresión de  $f(t)$ . Así pues, la relación de ortogonalidad pueden expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (2.3.4)$$

Esta función  $\delta(\omega - \omega')$  debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \alpha(\omega') \delta(\omega - \omega') = \alpha(\omega) \quad (2.3.5)$$

Esta función se conoce como **delta de Dirac** y se define como una función que vale 0 para cualquier valor de  $x$  excepto en el origen y es tal que su área vale 1,

$$\delta(x) = 0 \quad \text{para } x \neq 0 \text{ y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (2.3.6)$$

Si la función delta de Dirac se encuentra en un integrando con otra función tiene la siguiente propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad \forall f(x) \quad (2.3.7)$$

Las dimensiones de  $\delta(x - x_0)$  son  $[x]^{-1}$ . La función  $\delta(x - x_0)$  sólo tiene sentido dentro de una integral y su valor en  $x_0$  es un infinito indeterminado

Las propiedades de la delta son

$$\begin{aligned}\delta(x - x_0) &= \delta(x_0 - x) & \delta(g(x)) &= \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} ; \quad \text{con } g(x_0) = 0 \\ \delta(a(x - x_0)) &= \frac{1}{|a|} \delta(x - x_0) & \int_a^b \delta'(x) f(x) dx &= -f'(0); \quad a < 0 < b\end{aligned}$$

- Representación de la función delta de Dirac

Una representación de la delta de Dirac es una función dependiente de un parámetro que para un cierto valor de éste tiende a la delta de Dirac. Se van a estudiar varias de ellas.

- Representación escalón de la delta de Dirac

Dada una función escalón  $\delta_{t',\varepsilon}(t)$  que depende de los parámetros  $t'$ , centro, y  $\varepsilon'$ , anchura e inverso de altura,

$$\delta_{t',\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \left[ t' - \frac{\varepsilon}{2}, t' + \frac{\varepsilon}{2} \right], \\ \frac{1}{\varepsilon} & t \in \left[ t' - \frac{\varepsilon}{2}, t' + \frac{\varepsilon}{2} \right]. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

La representación de la delta de Dirac puede escribirse como,

$$\delta(t - t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{t',\varepsilon}. \quad (2.3.9)$$

Esta representación cumple todas las propiedades de la delta de Dirac.

$$\begin{aligned}\delta(t - t') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{t',\varepsilon} = \begin{cases} 0 & t \neq t' \\ \infty & t = t' \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t - t') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t' - \frac{\varepsilon}{2}}^{t' + \frac{\varepsilon}{2}} dt \delta_{t',\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t - t') f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t' - \frac{\varepsilon}{2}}^{t' + \frac{\varepsilon}{2}} dt \delta_{t',\varepsilon}(t) f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} f(t') = f(t') .\end{aligned}$$

Una propiedad importante de la función delta es que, siendo  $\theta(t - a)$  la función de Heaviside

$$\frac{d\theta(t - a)}{dt} = \delta(t - a) \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\theta\left(t - \left(a - \frac{\delta t}{2}\right)\right) - \theta\left(t - \left(a + \frac{\delta t}{2}\right)\right)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \delta_{0,\delta t}(t) = \delta(t - a) \quad (2.3.10)$$

• Otras representaciones de la delta de Dirac

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Gaussiana} \quad \delta(x - x_0) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} & \rightarrow \text{Lorentziana} \quad \delta(x - x_0) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{\pi(b^2 + (x - x_0)^2)} \\ \rightarrow \text{Seno} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\sin(c(x - x_0))}{\pi(x - x_0)} & & \rightarrow \text{Coseno} \quad \delta(x - x_0) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(d(x - x_0))}{\pi(x - x_0)^2 d}. \end{aligned}$$

Resulta importante recalcar que la función delta de Dirac ha de estar dentro de un integrando. Por ejemplo, así sólo tiene sentido en las dos últimas representaciones. En las zonas alejadas de  $x_0$  dado que  $c$  y  $d$  tienden al infinito, la función se vuelve altamente oscilante y por tanto su integral es cero. En el caso de estar en la cercanía de  $x_0$ , puede desarrollarse la función en torno a  $x_0$ , con lo que se obtiene  $c/\pi$  para el seno y  $d/2\pi$  para el coseno, por lo que la función diverge.

• Representación integral de la función delta de Dirac

La delta de Dirac también puede expresarse en forma integral

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon|x|} \quad (2.3.11)$$

Esta integral puede desarrollarse del siguiente modo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon|x|} = \int_0^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon x} + \int_{-\infty}^0 dx e^{ikx + \varepsilon x} = \left. \frac{e^{ikx - \varepsilon x}}{ikx - \varepsilon} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{ik + \varepsilon x}}{ik + \varepsilon} \right|_{\infty}^0 = -\frac{1}{ik - \varepsilon} + \frac{1}{ik + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2}$$

que tiene la forma de una Lorentziana.

La primera propiedad de la delta

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2} = 0, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty, & k = 0 \end{cases}$$

La segunda propiedad es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \varepsilon|x|} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{2\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2} = \left. \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

### Solución mediante transformada de Fourier

Sea un oscilador amortiguado en presencia de una fuerza externa,  $F(t) = mf(t)$ , con  $f(t)$  una función arbitraria en el régimen subamortiguado  $\beta < \omega_0$ . Su ec. de mov. es

$$\ddot{x}_p + 2\beta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = f(t), \quad t \gg \frac{1}{\beta} \quad (2.3.12)$$

Si se define la transformada de Fourier de  $x_p(t)$

$$x_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \xi(\omega) e^{i\omega t} \quad \xi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt x_p(t) e^{-i\omega t} \quad (2.3.13)$$

Sustituyendo en la ED, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [-\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2] \xi(\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow \xi(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} \quad (2.3.14)$$

por lo que la solución completa (asumiendo la transitoria como oscilante,  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ ) es

$$x(t) = A e^{-i\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\alpha(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} e^{i\omega t}$$

Ejemplo: Téngase  $F(t) = mf_0e^{-b|t|}$

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 dt e^{bt} e^{-i\omega t} + \int_0^{\infty} dt e^{-bt} e^{-i\omega t} \right] \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-b-i\omega} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{b-i\omega} - \frac{1}{-b-i\omega} \right] = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{2b}{b^2 + \omega^2} \right]\end{aligned}$$

por lo que

$$x_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \xi(\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\alpha(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} e^{i\omega t} = \frac{f_0 b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} \frac{1}{(b^2 + \omega^2)} e^{i\omega t}$$

Esta integral se resuelve pasando  $\omega$  al plano complejo y usando el Tma de Cauchy

$$\text{Im}[x_p(t)] = \frac{f_0 b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)i \sin \omega t - 2\beta i\omega \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2} \frac{1}{(b^2 + \omega^2)} = 0$$

dado que el integrando es impar en  $\omega$ .

### Solución mediante la función de Green

#### Pulso o percusión

Un pulso o percusión es una fuerza externa  $F_{t'}(t)$  aplicada durante un intervalo infinitesimal de tiempo en un instante  $t'$  sobre una masa  $m$  confiriéndole cierta cantidad de movimiento. Dado que la fuerza actúa en un instante  $t'$  puede usarse la delta de Dirac para escribir

$$F_{t'}(t) = mv_0\delta(t - t')$$

donde  $v_0$  es una cte.. La razón de llamarla  $v_0$  es siguiente. Dado que  $F = \frac{dP}{dt} = mv_0\delta(t - t')$  si se integra en un intervalo de tiempo que incluya a  $t'$ ,  $F_{t'}(t)$  conferirá a la masa  $m$  una cantidad de movimiento  $p = mv_0$ .

Si se aplica un pulso a un movimiento oscilatorio amortiguado se tiene

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{t'}(t)}{m} = v_0\delta(t - t')$$

debido a la presencia de  $\delta(t - t')$  puede dividirse el movimiento en dos regiones temporales,  $t < t'$  y  $t > t'$ .

$$\begin{aligned}x(t) &= A_- e^{-\beta(t-t')} \cos(\omega_1(t-t') + \phi_-) & t < t' \\ x(t) &= A_+ e^{-\beta(t-t')} \cos(\omega_1(t-t') + \phi_+) & t > t'\end{aligned}$$

Ahora se encuentra que hay 4 ctes. a determinar,  $A_{\pm}$  y  $\phi_{\pm}$ . Para ello, uno se fijará en la ecuación de movimiento de segundo orden y cuya solución quedaría fijada con dos condiciones de contorno. Supóngase que se determina la solución con las condiciones de contorno para  $t < t'$ , puede entonces conectarse dicha solución con la región  $t > t'$ . Debido a la delta la solución será continua en  $x(t)$  pero discontinua en su primera derivada, y con esto la segunda derivada tendrá una función delta [ $\frac{d}{dt}\Theta(t-a) = \delta(t-a)$ ].

En el entorno de  $t'$  la ecuación del movimiento puede aproximarse por

$$\ddot{x} \simeq v_0\delta(t - t') \Rightarrow \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \ddot{x} dt = \dot{x}|_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} = v_0$$

lo que da la segunda condición de contorno. En el punto  $t = t'$  se tendrán las condiciones

$$\begin{aligned}x(t'_{+\varepsilon}) &= x(t'_{-\varepsilon}) & (\text{continuidad de la función}) \\ \dot{x}(t'_{+\varepsilon}) &= \dot{x}(t'_{-\varepsilon}) + v_0 & (\text{discontinuidad de la derivada})\end{aligned}$$

Para ver esto más claro se hará un ejemplo sencillo. Se considerará que  $m$  está en reposo y recibe un pulso en  $t = t'$  que provoca un movimiento oscilatorio. En  $t' - \varepsilon = t'_{-\varepsilon}$ ,  $\dot{x}(t'_{-\varepsilon}) = 0$  y  $x(t'_{-\varepsilon}) = 0$ , con lo que  $A_- = 0$ . En  $t' + \varepsilon = t'_{+\varepsilon}$  como la fuerza ya ha actuado se tendrá movimiento y para conocer la solución se utilizan las condiciones de contorno que se obtuvieron:

$$\left. \begin{array}{l} A_+ \cos \phi_+ = 0 \\ -\beta A_+ \cos \phi_+ - A_+ \omega_1 \sin \phi_+ = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_+ = v_0 / \omega_1 \\ \phi_+ = -\pi/2 \end{array}$$

Así pues la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 & (t < t') \\ x(t) &= \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') & (t > t') \end{aligned}$$

### Función de Green

La función de Green define un método de resolución de EDs no homogéneas con condiciones de contorno especificadas, sabiendo la solución de la ecuación homogénea. Para cada conjunto de condiciones iniciales existe una función de Green.

Se define la función de Green,  $G(t - t')$ , como la solución de la ecuación de movimiento para un término inhomogéneo de la forma  $\delta(t - t')$

$$\ddot{G} + 2\beta \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t') \quad (2.3.15)$$

Esta ecuación es como la que se tenía en el caso del pulso,  $F_{t'} = m\delta(t - t')$  con  $v_0 = 1$ . Por lo que se toma la solución que se obtuvo

$$\begin{aligned} G(t - t') &= 0; & t < t' \\ G(t - t') &= \frac{1}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t'); & t > t' \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

En este método se requieren las condiciones de contorno, en este caso de tendrá  $G(t - t') = 0$  y  $\dot{G}(t - t') = 0$  para  $t < t'$ .

### Aplicación para el movimiento amortiguado con una fuerza externa arbitraria

Si se tiene  $F(t) = mf(t)$  puede escribirse la ED como

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t') \delta(t - t') \quad (2.3.17)$$

si ahora se mira la ecuación con la función de Green:

$$\ddot{G} + 2\beta \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t') \quad (2.3.18)$$

puede verse que si se multiplica por  $f(t')$  y se integra para todo  $t'$ , se tendrá la solución

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t') G(t - t') = \int_{-\infty}^t dt' f(t') G(t - t') \quad (2.3.19)$$

Esta solución puede verse como el resultado de la actuación de un continuo de fuerzas-pulso que han actuado desde un tiempo  $-\infty$  hasta el instante  $t$  y cada una de ellas actúa en  $t = t'$  provocando el incremento de velocidad de  $f(t') dt'$ .

De este modo se ha llegado a la solución completa del problema ya que se están incluyendo las condiciones iniciales implícitas en la función de Green (en este caso  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) = 0$ )

En el caso en que las condiciones iniciales sean otras, se ha de aplicar el mismo sistema, se le suma la solución homogénea

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t') G(t - t') \quad (2.3.20)$$

y se ajustarán  $A$  y  $\phi$  a las nuevas condiciones iniciales.

### Ejemplo

#### - Fuerza escalón

Se supondrá un oscilador amortiguado inicialmente en reposo sometido a la fuerza externa

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ F; & t > 0 \end{cases}$$

con  $F = \text{cte}$  y asumiendo  $\beta < \omega_0$ . Para obtener  $x(t)$  para  $t > 0$  se usarán tres métodos: a) Resolución directa de la ecuación inhomogénea, b) método de la función de Green y c) método de la transformada de Fourier.

#### a) Resolución directa de la ecuación inhomogénea

Para este método se requiere saber la solución particular de la ecuación

$$\ddot{x}_p + 2\beta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F}{m} \Rightarrow x_p = \frac{F}{m\omega_0^2}$$

con lo que puede escribirse la solución general siguiente

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

con  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Imponiendo las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right\} x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \right]; \quad t > 0$$

#### b) Función de Green

Para construir la solución particular se usa la función de Green y la solución obtenida anteriormente,

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' f(t') G(t - t') = \frac{F}{m} \int_0^t dt \frac{1}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t - t')$$

para resolver la integral se hace el cambio  $x = t - t'$ ,  $dx = -dt'$  y los límites de integración  $\Rightarrow \int_0^t dt' = \int_t^0 (-dx) = \int_0^t dx$  y se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{m} \int_0^t dx \frac{1}{\omega_1} e^{-\beta x} \sin \omega_1 x = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_1} \frac{\omega_1 - e^{-\beta t} (\omega_1 \cos \omega_1 t + \beta \sin \omega_1 t)}{\omega_1^2 + \beta^2} = \\ &= \frac{F}{m\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \right], \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Como se ve, por la definición del método de la función de Green, la solución ya lleva implícitas las condiciones de contorno.

#### c) Transformada de Fourier

Para resolver la ecuación con este método se usa la transformada de Fourier,

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F}{m} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F}{m} \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

Sin embargo, se encuentra un problema,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-i\omega t}$  no está bien definido. Aquí es donde se encuentra el choque entre la matemática y el mundo real. La transformada de Fourier modeliza un problema físico definido en un intervalo de tiempo finito, sin embargo, ésta está definida entre  $-\infty < t < \infty$ . Para el

sistema físico real la fuerza,  $F$  aparece en  $t = 0$  y durante un tiempo suficientemente largo se mantiene, pero sin llegar a  $t \rightarrow \infty$ . Una manera de hacerlo es sustituir  $F$  por  $Fe^{-\varepsilon t}$ , donde  $\varepsilon > 0$ , resolver el problema y al final tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Al hacer la sustitución en  $\alpha(\omega)$  se tiene que  $\omega \rightarrow \omega - i\varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  e infinitesimal, por lo tanto

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F}{m} \frac{1}{\omega - i\varepsilon} e^{-i(\omega - i\varepsilon)t} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F}{m} \frac{i}{\omega - i\varepsilon}$$

y la solución particular queda

$$x_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\alpha(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} e^{i\omega t} = -\frac{i}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega - i\varepsilon} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}$$

El modo de resolver esta integral es hacer que  $\omega$  sea compleja,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  y considerar la integral que sigue los puntos de la línea  $\omega_r \in (-\infty, \infty)$  y  $\omega_i = 0$ . Para hacer esto se considera una integral cerrada para poder aplicar el teorema de los residuos de Cauchy

### Teorema de los residuos de Cauchy

Sea  $C$  una curva cerrada en el plano complejo y  $f(z)$  definida en dicho plano una función analítica ( $\equiv$  desarrollable en serie de potencias) en la región encerrada por  $C$ , excepto en un número finito de puntos  $z_k$  que son singularidades aisladas de  $f(z)$ , entonces

$$\oint_C f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

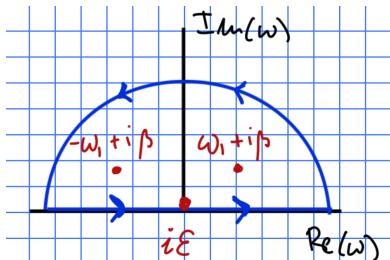
donde el signo es negativo si se recorre horariamente el camino y positivo si se recorre antihorariamente. Si el polo es de orden 1 (simple), entonces

$$\frac{1}{(z - z_k)^n} \implies \text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z)$$

La solución que se tenía era

$$x_p(t) = -\frac{i}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega - i\varepsilon} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}$$

Con el teorema de Cauchy puede cambiarse esta integral por un camino cerrado si al cerrarlo se crea una semicircunferencia que vaya desde  $\omega = (+\infty, 0)$  a  $\omega = (-\infty, 0)$  con  $|\omega| \rightarrow 0$  y el ángulo  $\phi$  variando de 0 a  $\pi$  (cerrado por arriba) y de 0 a  $-\pi$  (cerrado por abajo).



El camino cerrado viene dado por

$$C = C_1 + C_2 \begin{cases} C_1 & \omega_r \in (-\infty, +\infty); \omega_i = 0 \\ C_2 & |\omega| = \infty; \phi \in (0, \pi) \\ & |\omega| = \infty; \phi \in (0, -\pi) \end{cases}$$

Por lo que la integral queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \dots = \oint_C d\omega \dots - \int_{C_2} d\omega \dots$$

con

$$\int_{C_2} d\omega \dots = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^{\pm pi} |\omega| d\phi \dots$$

En el integrando se tiene el término  $e^{i\omega t}$  para  $t > 0$  por lo que se debe cerrar el circuito de integración en  $\omega$  por arriba. Con ello el integrando contendrá  $e^{-\text{Im}(\omega)t} = e^{-|\omega| \sin(\phi)t}$ , que debido al exponente negativo anulará la contribución de toda esa parte del camino cuando se tiene  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

Con ello se tiene  $\int_{C_2} d\omega \dots = 0$  y la solución

$$x_p(t) = -\frac{i}{2\pi} \frac{F}{m} \oint_C d\omega \frac{1}{\omega - i\varepsilon} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

resulta ahora sencillo ver que el integrando tiene polos en  $\omega = i\varepsilon$  y  $\omega = \pm\omega_1 + i\beta$  y, aplicando el teorema de los residuos se tiene Ahora, tomando el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F}{m} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2} + e^{-\beta t} \left[ \frac{1}{\omega_1 + i\beta} \frac{-1}{2\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{-\omega_1 + i\beta} \frac{-1}{-2\omega_1} e^{-i\omega_1 t} \right] \right\} \\ &= \frac{F}{m\omega_0} \left[ 1 - e^{-\beta t} \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \left( \frac{e^{i\omega_1 t}}{\omega_1 + i\beta} + \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\omega_1 - i\beta} \right) \right] \end{aligned}$$

A esta solución se debe incorporar la homogénea y las condiciones iniciales. Como se ve, el segundo término de la solución particular es de la forma de la solución homogénea, por lo que puede ignorarse, incorporar la solución homogénea e imponer las condiciones iniciales,

$$x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \right], \quad t > 0$$

### 3. Oscilaciones acopladas

1. Acoplamiento de dos osciladores .....	28
2. Acoplamiento débil entre masas .....	30
3. Sistema de infinitos osciladores .....	34
3.1 Ondas transversales .....	35
3.2 Resolución de la ecuación de ondas .....	36

#### 3.1. Acoplamiento de dos osciladores

Téngase entre dos muelles una masa  $m$ . Las ctes. de recuperación son distintas,  $k_1, k_2$  y sus elongaciones son  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente. Sea  $L = l_1 + l_2$  y  $k = k_1 = k_2$ . Por la ley de Hooke

$$F = -k(x - l_1) - k(x - L + l_2) \quad (3.1.1)$$

La fuerza se anulará en  $x_{\text{eq}} = l_1$ :  $F(x_{\text{eq}}) = 0$  y el potencial es

$$V = \frac{1}{2}k(x - l_1)^2 + \frac{1}{2}(x - L + l_2)^2 \quad (3.1.2)$$

Ahora se hará el siguiente cambio de variable

$$\eta = x - l_1 \Rightarrow F = -2k\eta \Rightarrow V = 2k\frac{\eta^2}{2}$$

Por lo que es como si se tuviese un oscilador armónico simple con cte. recuperador  $2k$

$$\eta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow x(t) = l_1 + A \cos(\omega t + \phi), \omega^2 = \frac{2k}{m} \quad (3.1.3)$$

Se tratará ahora de realizar la misma estrategia para resolver el caso de 3 muelles de ctes.  $k_1, k_{12}, k_2$  y 2 masas  $m_1, m_2$ .  $L = l_1 + l_2 + l_3$ , por lo que el potencial quedará como:

$$V(x_1, x_2) = \frac{k_1}{2}(l_1 - x_1)^2 + \frac{k_{12}}{2}(x_2 - x_1 - l_2)^2 + \frac{k_2}{2}(L - x_2 - l_3)^2. \quad (3.1.4)$$

Ahora se toman sus parciales con respecto a las posiciones hasta  $x_{n-1}$  y se iguala a cero, por lo que queda

$$x_1 = l_1, \quad x_2 = l_1 + l_2 \Rightarrow \eta_i : \eta_1 = x_1 - l_1, \eta_2 = x_2 - (l_1 + l_2) \quad (3.1.5)$$

y ahora se sustituye en el potencial

$$V(\eta_1, \eta_2) = \frac{k_1}{2}\eta_1^2 + \frac{k_{12}}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k_2}{2}\eta_2^2 \quad (3.1.6)$$

lo que resulta en el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}k_1\eta_1^2 - \frac{1}{2}k_{12}(\eta_2 - \eta_1)^2 - \frac{1}{2}k_2\eta_2^2 \quad (3.1.7)$$

y, resolviendo las ecs. de E-L

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{\eta}_1 - k_1\eta_1 - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) = 0 \\ m_2\ddot{\eta}_2 + k_2\eta_2 + k_{12}(\eta_2 - \eta_1) = 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Ahora se definen las siguientes matrices que permiten reescribir el sistema

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{T}\ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{V}\vec{\eta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{W}\vec{\eta} = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

Ahora,  $\mathbb{W}$  podrá diagonalizarse

$$\mathbb{S}^{-1}\mathbb{W}\mathbb{S} = \mathbb{W}_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{W} \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2} \text{ valores propios}$$

Entonces se define  $\vec{\mathbb{Q}}$  tal que

$$\vec{\eta} = \mathbb{S}\vec{\mathbb{Q}}, \quad \vec{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{S}^{-1}(\ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{W}\vec{\eta}) = 0 = \mathbb{S}^{-1}(\ddot{\vec{\mathbb{Q}}} + \mathbb{W}\mathbb{S}\vec{\mathbb{Q}}) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{\mathbb{Q}}} + \mathbb{W}_D\vec{\mathbb{Q}} = 0}. \quad (3.1.11)$$

Por lo que

$$\ddot{\vec{\mathbb{Q}}} + \mathbb{W}_D\vec{\mathbb{Q}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Los **modos normales de vibración** dependen de  $\omega_{1,2}$  que son las frecuencias normales. Para obtener  $\omega_{1,2}$  a partir de  $\mathbb{S}$

$$\det(\mathbb{W} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \lambda & -\frac{k_{12}}{m_1} \\ -\frac{k_{12}}{m_2} & \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} - \lambda \end{vmatrix} = \left( \frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \lambda \right) \left( \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} - \lambda \right) - \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (3.1.13)$$

Si se toma que  $m_1 = m_2 = m$  y  $k_1 = k_2 = k$ , entonces

$$\left( \frac{k + k_{12}}{m} - \lambda \right) = \pm \frac{k_{12}}{m} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{k + 2k_{12}}{m} \\ \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{k}{m} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

y los autovectores serán

$$(\mathbb{W} - \lambda\mathbb{I})\vec{v}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & -k_{12} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

y, dado que  $\mathbb{W}\mathbb{S} = \mathbb{S}\mathbb{W}_D$

$$\mathbb{W}\mathbb{S} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_1^2 \mathbb{S} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbb{W}\mathbb{S} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_2^2 \mathbb{S} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \mathbb{S} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \mathbb{S} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.16)$$

por lo que

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{S}^T \mathbb{S} = \mathbb{S} \mathbb{S}^T = \mathbb{I} \quad (3.1.17)$$

pues  $\vec{v}_i$  forman una base ortonormal.

Dado que  $\vec{\eta} = \mathbb{S}\vec{\mathbb{Q}}$ ,  $Q_i = A_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[Q_1(t) + Q_2(t)], \quad \eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-Q_1(t) + Q_2(t)] \quad (3.1.18)$$

y  $A_i$ ,  $\phi_i$  se hallan con las condiciones iniciales  $\eta_i(0)$  y  $\dot{\eta}_i(0)$

## Modos normales

Sean  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t) \Rightarrow Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$ , entonces

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\Rightarrow$  Modo antisimétrico de oscilación

$$Q_1(t) \neq 0, Q_2(t) = 0 \Rightarrow [\eta_1(t) = -\eta_2(t)] ; \omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \quad (3.1.19)$$

$\Rightarrow$  Modo simétrico

$$Q_2(t) \neq 0, Q_1(t) = 0 \Rightarrow [\eta_1(t) = \eta_2(t)] ; \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.20)$$

Si se mantiene una masa inmóvil, la vibración de la otra masa tendrá una frecuencia de

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}} \quad (3.1.21)$$

## 3.2. Acoplamiento débil entre masas

### Batimiento

Defínase la siguiente variable y téngase el caso en que es mucho menor a la unidad:

$$\varepsilon = \frac{k_{12}}{2k} \ll 1 \quad (3.2.1)$$

por lo que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}(1 + 2\varepsilon)} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}(1 + \varepsilon)} \quad (3.2.2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}(1 + 4\varepsilon)} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}(1 + 2\varepsilon)} \simeq \omega_0(1 + \varepsilon); \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq \omega_0(1 - \varepsilon) \quad (3.2.3)$$

Supónganse más condiciones iniciales

$$\eta_1(0) = D, \eta_2(0) = 0, \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_2 = 0, \quad (3.2.4)$$

entonces

$$Q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_1(t) - \eta_2(t)], \quad Q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta_1(t) + \eta_2(t)], \quad Q_1(0) = Q_2(0) = D/\sqrt{2}, \quad \dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = 0 \quad (3.2.5)$$

y por tanto

$$Q_1(t) = \frac{D}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + \varepsilon\omega_0 t), \quad Q_2(t) = \frac{D}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - \varepsilon\omega_0 t) \quad (3.2.6)$$

$$\eta_1(t) = D \cos(\varepsilon\omega_0 t) \cos(\omega_0 t), \quad \eta_2(t) = D \sin(\varepsilon\omega_0 t) \sin(\omega_0 t). \quad (3.2.7)$$

Dado que  $\varepsilon\omega_0 \ll \omega_0$ , puede considerarse que la parte dependiente del primero es parte de la amplitud del desplazamiento y la parte dependiente del segundo será la oscilación de  $\eta_i$

$$\eta_1(t) = \underbrace{D \cos(\varepsilon\omega_0 t)}_{\text{oscilación de } \eta_1} \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{amplitud de } \eta_1}, \quad \eta_2(t) = \underbrace{D \sin(\varepsilon\omega_0 t)}_{\text{oscilación de } \eta_2} \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{amplitud de } \eta_2}$$

En el caso de  $\eta_1, \pm \cos(\varepsilon\omega_0 t)$  determina la envolvente de la oscilación y, similarmente, en el caso de  $\eta_2, \pm \sin(\varepsilon\omega_0 t)$  determina la envolvente de su oscilación.

La energía del sistema y la suma de las envolventes son ctes. en estos casos.

## Generalización del procedimiento

Ahora se generalizará el procedimiento que se ha visto para un número arbitrario pero finito de osciladores acoplados.

- Las variables que se utilizarán serán **separaciones de la posición de equilibrio**, no las posiciones de las masas

$$\eta_i = x_i - x_i^{\text{eq}} .$$

Si se generalizase la variable sería  $q_i$  y  $q_i^{\text{eq}}$  ya que el movimiento armónico simple puede ser otra variable otra variable que no sea  $x_i$ .

- Se desarrollarán la energía cinética y potencial en torno al punto de equilibrio.

$$T = \frac{1}{2} \sum_k^N m_k \dot{x}_k^2 \simeq \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (3.2.8)$$

$$V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \simeq V_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{eq}}} \overset{0}{\nearrow} \eta_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{eq}}} \eta_i \eta_j + G(\eta^3) = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j \quad (3.2.9)$$

Téngase en cuenta que se está utilizando la notación de Einstein.

- Pasando a notación matricial

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{12} & \cdots \\ V_{21} & V_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots \\ T_{21} & T_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

con lo que se tendrá un sistema de ecuaciones acopladas para las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{\mathbb{T}\eta} + \mathbb{V}\vec{\eta} = 0 \rightarrow \ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{W}\vec{\eta} = 0 , \quad \text{con } \mathbb{W} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{V} \quad (3.2.10)$$

- Se diagonalizará  $\mathbb{W}$

$$\det(\mathbb{W} - \omega^2 \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) = 0$$

- Los modos normales de oscilación,  $Q_i(t)$  asociados a las frecuencias normales,  $\omega_i$ , son

$$Q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (3.2.11)$$

- Los vectores propios de  $\mathbb{W}$  son

$$\mathbb{W}\vec{v}_i = \omega_i^2 \vec{v}_i \Rightarrow \mathbb{V}\vec{v}_i = \omega_i^2 \mathbb{T}\vec{v}_i \quad (3.2.12)$$

que se normalizarán utilizando

$$\vec{v}_i^T \mathbb{T} \vec{v}_j = \delta_{ij} \quad (3.2.13)$$

- La matriz de diagonalización de  $\mathbb{W}$  se construirá a partir de sus vectores propios

$$\mathbb{S}^{-1} \mathbb{W} \mathbb{S} = \mathbb{W}_D \quad (3.2.14)$$

donde

$$\mathbb{S} = \left( \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_N \end{bmatrix} \right) ; \quad \mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{S}^T = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{T}^{-1} \quad (3.2.15)$$

8. Los movimientos del sistema son combinaciones lineales de los modos normales. Cada coordenada  $x_i$  se separa de su posición de equilibrio,

$$\vec{\eta} = \mathbb{S}\vec{Q} \Rightarrow \eta_i(t) = x_i(t) - x_i^0 = S_{i1}Q_1(t) + S_{i2}Q_2(t) + \dots \quad (3.2.16)$$

Si lo que se quiere es poner en función de los vectores  $\vec{v}_i = ((v_i)^1, (v_i)^2, \dots)$

$$\eta_1(t) = (v_1)_1 Q_1(t) + (v_2)_1 Q_2(t) + \dots; \quad \eta_2(t) = (v_1)_2 Q_1(t) + (v_2)_2 Q_2(t) + \dots \quad (3.2.17)$$

con  $Q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$

9. La energía del sistema es (con la condición  $\vec{v}_i^T \mathbb{T} \vec{v}_j = \delta_{ij}$ )

$$E = \sum_i \frac{1}{2} \omega_i^2 C_i^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} (\dot{\vec{\eta}}^T \mathbb{T} \dot{\vec{\eta}} + \vec{\eta}^T \mathbb{V} \vec{\eta}) \quad (3.2.18)$$

que en función de los modos normales queda

$$E = \frac{1}{2} (\dot{\vec{Q}}^T \underbrace{\mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S}^T}_{\mathbb{1}} + \vec{Q}^T \underbrace{\mathbb{S}^T \mathbb{V} \mathbb{S}}_{\mathbb{S}^{-1}(\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}) \mathbb{S} = \mathbb{W}_D} \vec{Q}) = \frac{1}{2} (\dot{\vec{Q}}^T \vec{Q} + \vec{Q}^T \mathbb{W}_D \vec{Q}). \quad (3.2.19)$$

Resulta **importante** puntualizar que los  $C_i$  tienen unidades  $LM^{1/2}$  y son las amplitudes de los movimientos.

El desplazamiento de el muelle 2 es  $\Delta x_{21} = x_2 - x_1$ . y su energía potencial será

$$E_2^P = \frac{k}{2} (\Delta x_{21} - x_{21}^0)^2 = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 \quad (3.2.20)$$

por lo que la energía potencial del sistema es

$$V = \frac{k}{2} [(\eta_1 - \eta_0)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \dots + (\eta_n - \eta_{n-1})^2 + (\eta_{n+1} - \eta_n)^2] \quad (3.2.21)$$

donde  $\eta_0 = \eta_{n+1} = 0$ . Su energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dots + \dot{\eta}_n^2), \quad (3.2.22)$$

por lo que las ecuaciones E-L quedarán

$$m\ddot{\eta}_i + k(2\eta_i - \eta_{i-1} - \eta_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \eta_0 = \eta_{n+1} = 0 \quad (3.2.23)$$

por lo que se tiene un polinomio característico de la forma  $a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega^1 + a_0 = 0$ . Pero este polinomio sólo tiene expresión analítica para  $n \leq 4$ .

Una masa  $i$  que oscila, el modo normal  $p$  de ese sistema

$$\eta_{ip}(t) = a_{ip} \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad (3.2.24)$$

y su vector propio es

$$(a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{np}). \quad (3.2.25)$$

Pruébese para  $n = 1$ . Una masa y un modo normal

$$\eta_{11}(t) = a_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1); \quad \omega_1^2 = \frac{2k}{m}, \quad \eta_{01} = \eta_{21} = 0 \Rightarrow a_{01} = a_{21} = 0. \quad (3.2.26)$$

Por lo que se tiene

$$a_{11} = c_1 \sin\left(\frac{1 \cdot \pi}{2}\right) \quad (3.2.27)$$

Para el caso  $n = 2$ , modos  $p_1$  y  $p_2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se tienen el caso simétrico,  $p = 1$

$$\eta_{i2}(t) = a_{i1} \cos(\omega_1 t + \phi_1); \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad (3.2.28)$$

y el antisimétrico,  $p = 2$

$$\eta_{i2}(t) = a_{i2} \cos(\omega_2 t + \phi_2); \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \quad (3.2.29)$$

Generalizando para  $n$  osciladores apoyándose de los casos anteriores. Las soluciones serán del tipo

$$\eta_{ip}(t) = a_{ip} \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad \text{con amplitudes, } a_{ip} = c_p \sin\left(p\pi \frac{i}{n+1}\right), \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.2.30)$$

Los vectores propios son

$$\vec{v}_p = N \cdot (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{np}) \quad (3.2.31)$$

donde la  $N$  es una constante de normalización y

$$\sum_{i=1}^n a_{ip} a_{ip'} \propto \sum_{i=1}^n \sin\left(p\pi \frac{i}{n+1}\right) \sin\left(p'\pi \frac{i}{n+1}\right) = 0. \quad (3.2.32)$$

Por lo tanto ahora puede relacionarse  $m\ddot{\eta}_i + k(2\eta_i - \eta_{i-1} - \eta_{i+1}) = 0$  con sus modos normales  $\eta_{ip}(t) = a_p \cos(\omega_p t + \phi_p)$ , obteniendo

$$-\omega_p^2 m a_{ip} + k(2a_{(i-1)p} - a_{(i+1)p}) = 0. \quad (3.2.33)$$

Dado que  $m = k/\omega_0^2$

$$\frac{2\omega_0^2 - \omega_p^2}{\omega_0^2} = \frac{a_{(i-1)p} + a_{(i+1)p}}{a_{ip}}. \quad (3.2.34)$$

Ahora puede usarse la expresión de  $a_{ip}$  (3.2.30) para obtener

$$\frac{2\omega_0^2 - \omega_p^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \frac{p\pi}{n+1}, \quad (3.2.35)$$

de donde puede despejarse  $\omega_p$ ,

$$\omega_p = 2\omega_0 \sin \frac{p\pi}{2(n+1)}. \quad (3.2.36)$$

Recapitulando y poniéndolo todo junto se tiene que para el modo normal  $p$ ,

$$\eta_{ip}(t) = c_p \sin\left(p\pi \frac{i}{n+1}\right) \cos(\omega_p t + \phi_p). \quad (3.2.37)$$

Además se sabe que el movimiento será una combinación lineal de modos normales pesados por ciertos coeficientes  $A_p$ ,

$$\eta_i(t) = \sum_{p=1}^n A_p \eta_{ip}(t) = \sum_{p=1}^n c'_p \sin\left(p\pi \frac{1}{n+1}\right) \cos(\omega_p t + \phi_p). \quad (3.2.38)$$

Cuando  $n$  tiende a valores muy grandes identificar una masa  $i$  puede ser muy difícil y para ello puede considerarse su posición en equilibrio ( $\Delta x$  es igual entre todos los osciladores),

$$p\pi \frac{i}{n+1} = p\pi \frac{i\Delta x}{(n+1)\Delta x} = p\pi \frac{x}{L}. \quad (3.2.39)$$

pues  $i\Delta x = x$ , es decir, la posición del muelle en cuestión y  $\Delta x(n+1) = L$ , que es la longitud completa del sistema (pues hay  $n+1$  muelles de distancia  $\Delta x$ ).

Identificar el modo de oscilación también es complicado, sin embargo, si se coge la distancia entre dos puntos consecutivos donde las amplitudes de oscilación son máximas (locales)

$$\sin\left(p\pi \frac{x + \lambda_p}{L}\right) = \sin\left(p\pi \frac{x}{L} + 2\pi\right). \quad (3.2.40)$$

A esta distancia  $\lambda_p = 2L/p$  se la llama **longitud de onda**. Pueden ahora expresarse los desplazamientos en los modos normales en función de la longitud de onda,

$$\eta_p(x, t) = c_p \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_p}\right) \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad (3.2.41)$$

donde  $x$  no es la posición de la partícula en el instante  $t$ , sino la posición en el equilibrio de la partícula.

Una ventaja que presenta  $\lambda_p$  es que, aunque se tenga una para cada modo normal, es fácilmente medible como cantidad macroscópica, sin necesidad de conocer  $p$ , solamente la distancia entre dos puntos consecutivos donde las amplitudes de oscilación son máximas. De igual modo, puede hacerse con la frecuencia  $\omega_p = 2\omega_0 \sin(p\pi/2n + 1)$  sustituyendo  $2\pi/T_p$ , don lo que se pueden poner los modos normales como

$$\eta_p(x, t) = c_p \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_p}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T_p} + \phi_p\right). \quad (3.2.42)$$

La posición fuera del equilibrio sería  $x + \eta_p(x, t)$ .

### 3.3. Sistema de infinitos osciladores

En la anterior sección se vio qué ocurre cuando se tiene un sistema de  $n$  osciladores. Si ahora se tom el límite de un número infinito de osciladores se estará tomando el paso al continuo, es decir, se podrán estudiar medios continuos.

Si se tiene un medio elástico en una dimensión, por ejemplo una cuerda, y se quiere estudiar su comportamiento en la dirección longitudinal puede imaginarse como un conjunto de infinitas masas diferenciales,  $dm$ , separadas cada una de ellas por una distancia  $dx = L/(n+1)$ . Se usarán los resultados de la anterior sección con una ligera modificación. Ya que se pasa al continuo se pasará de identificar las masas de  $i = 1, \dots, n$  por su posición de equilibrio  $x$ . Por tanto,  $\eta(x, t)$  dará ahora la separación respecto de su posición de equilibrio. La oscilación por tanto está descrita por la función  $\eta(x, t)$ , así que respecto del sistema de  $n$  masas oscilando dado por

$$m_i \ddot{\eta}_i + k(2\eta_i - \eta_{i-1} - \eta_{i+1}) = 0 \quad (3.3.1)$$

al hacer el límite  $n \rightarrow \infty$  puede hacerse la siguiente sustitución

$$m_i \rightarrow dm(x) \quad \eta_i(t) \rightarrow \eta(x, t), \quad (3.3.2)$$

por lo que

$$(\eta_i - \eta_{i-1}) - (\eta_{i+1} - \eta_i) \rightarrow (\eta(x, t) - \eta(x - dx, t)) - (\eta(x + dx, t) - \eta(x +, t)) = \left[ \frac{\partial \eta(x - dx, t)}{\partial t} - \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right] dx \quad (3.3.3)$$

$$= -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} (dx)^2, \quad (3.3.4)$$

y por tanto la ecuación de las deformaciones en el medio elástico es entonces

$$\frac{dm}{dt} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = 0 \quad (3.3.5)$$

El medio elástico tendrá una sección transversal  $S$  y una densidad  $\rho$ , por lo que  $\rho = dm/dV = dm/S dx$  y puede expresarse la ecuación anterior (dividiendo todo por  $S$ ) como

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{k dx}{S} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.6)$$

Si se aplica una fuerza y se hace una deformación sobre el material elástico, ésta dependerá de la fuerza y de la sección transversal. Puede definirse la tensión como la fuerza aplicada por unidad de superficie. Con esta definición, puede definirse un **material elástico lineal** como aquel en el que las deformaciones producidas son reversibles y además son proporcionales a la tensión aplicada.

El módulo de elasticidad longitudinal o **módulo de Young**,  $E$ , se define como la constante de proporcionalidad entre la tensión aplicada y la elongación por unidad de distancia, es decir, la deformación. Para un elemento  $dx$  y una elongación  $d\eta$ , se tiene

$$\text{Tensión} = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} = E \frac{d\eta}{dx}, \quad (3.3.7)$$

dado que la fuerza obedece a la ley de Hooke  $F = k d\eta$  puede expresarse

$$\frac{k dx}{S} = \frac{F dx}{S d\eta} = E \quad (3.3.8)$$

y de ahí se tiene

$$\rho \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.9)$$

que se corresponde con la ecuación de propagación de ondas longitudinales en un medio elástico. Otra manera de expresarlo es

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{con} \quad v^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.3.10)$$

con soluciones  $\eta(x, t) = \eta(x \mp vt)$  y se ve que  $v$  tiene unidades de velocidad.  $v = (E/\rho)^{1/2}$  es la velocidad de una onda longitudinal en este medio (velocidad de propagación de una perturbación en el medio). Como se ve la velocidad sólo depende del medio, y se refiere a ello como **velocidad del sonido** en ese medio. Estas ondas se conocen también como **ondas de presión** ya que la propagación de estas ondas longitudinales puede implicar una variación de la presión en el medio.

Las unidades de la tensión son fuerza por unidad de superficie,  $\text{N/m}^2$  en SI, el Pascal. El módulo de Young tiene las mismas unidades  $[E] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ .

Si se ve la ecuación  $\eta(x, t)$  se puede relacionar con un campo, el campo de deformaciones. Sería el campo de perturbaciones sobre el objeto en el que se está aplicando la fuerza.

### 3.3.1. Ondas transversales

Supóngase que se tiene una cuerda sujetada en ambos extremos y sometida a una tensión  $T$  (por ejemplo, las cuerdas de un violín) pueden estudiarse sus vibraciones normales. Para ello la cuerda se aproximará por un conjunto de  $n$  puntos materiales de masa  $dm$  situadas a una distancia  $dx = L/(n+1)$  en reposo. Si un punto  $x$ , de la cuerda se separase una distancia  $u_i$  de su posición de equilibrio, la tensión de la cuerda actúa como una fuerza de restauración. Las fuerzas actuantes sobre la masa  $i$  será

$$dF_x = T \cos(\theta + d\theta) - T \cos \theta = T(d \cos \theta) = T(-\sin \theta d\theta) \sim -T\theta d\theta + \mathcal{O}(\theta^3) d\theta. \quad (3.3.11)$$

$$dF_y = T \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta = T(d \sin \theta) = T(\cos \theta d\theta) \sim T d\theta + \mathcal{O}(\theta^2) d\theta \quad (3.3.12)$$

Si se va al límite en que las diferencias entre las  $u_i$  vecinas son pequeñas ( $|u_{i+1} - u_i| \ll dx$ ), puede considerarse que  $\theta$  es pequeño. En este caso se puede despreciar la fuerza horizontal y quedarse sólo con la fuerza vertical como causante del movimiento de la cuerda. Entonces, la componente  $\hat{y}$  de la fuerza que la masa que está en  $u_{i+1}$  ejerce sobre  $u_i$  es

$$F_y^{(i,1,i)} = T \sin(\theta + d\theta) = T(u_{i+1} - u_i)/dx \quad (3.3.13)$$

y la que está en  $u_{i-1}$ ,

$$F_y^{(i-1,i)} = T \sin \theta = T(u_i - u_{i-1})/dx. \quad (3.3.14)$$

Realmente se está en una situación análoga a la que se tiene si un muelle tiene ligado el desplazamiento en la dirección transversal a la cuerda de las masas  $i$  e  $i+1$  y otro muelle ligando las masas  $i-1$  e  $i$ , ambos con una cte. recuperadora  $k = T/dx$ . Así pues, puede escribirse el potencial como

$$T = \frac{1}{2} \frac{T}{dx} \sum_i = 0 (u_{i+1} - u_i)^2 \quad (3.3.15)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda, con energía cinética

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} dm \dot{u}_i^2 . \quad (3.3.16)$$

Las ecuaciones E-L son

$$dm \ddot{u}_i + \frac{T}{dx} (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = 0 \quad (3.3.17)$$

que puede expresarse como

$$dm \ddot{u}_i + \frac{T}{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 = 0 . \quad (3.3.18)$$

Si ahora se define  $\mu = dm/dx$  (densidad de masa de la cuerda)

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.19)$$

y se obtiene la **ecuación de ondas transversales** de la cuerda vibrante, con velocidad de propagación de la perturbación  $u(x, t)$  es  $v = \sqrt{T/\mu}$ .

Esta ecuación está considerando la cuerda como unidimensional. Considerando que la cuerda no es lineal y que tiene una sección  $S$ , se tendría

$$v = \sqrt{\frac{T/S}{\mu/S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} , \quad (3.3.20)$$

siendo  $\sigma$  la tensión ejercida sobre la cuerda

### 3.3.2. Resolución de la ecuación de ondas

Si se tiene la ecuación asociada a  $n$  osciladores

$$\eta_p(x, t) = c_p \sin \left( 2\pi \frac{x}{\lambda_p} \right) \cos \left( 2\pi \frac{t}{T_p} + \phi_p \right) . \quad (3.3.21)$$

Se definirá ahora el **número de ondas**  $k = 2\pi/\lambda$  y la **frecuencia angular**  $\omega = 2\pi/T$ , se tiene:

$$\eta_k(x, t) = \alpha_k \left( e^{i(kx+\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)} \right) + \alpha_k^* \left( e^{-i(kx+\omega t)} - e^{i(kx-\omega t)} \right) , \quad \alpha_k = -\frac{b_k + ia_k}{4} . \quad (3.3.22)$$

Como se sabe la solución con  $n$  osciladores determinará  $\lambda$  y  $T$  por el número  $p$  asociado al modo normal. Por tanto, aquí habrá una relación entre  $\omega$  y  $k$ . Para encontrar esta relación se sustituye la solución de  $\eta$  en la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.23)$$

y con ello  $\left( e^{i(\pm kx \pm \omega t)} \right)$

$$\frac{\partial^2 e^{i(\pm kx \pm \omega t)}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 e^{i(\pm kx \pm \omega t)}}{\partial x^2} = -\omega^2 e^{i(\pm kx \pm \omega t)} - v^2 (-k^2) e^{i(\pm kx \pm \omega t)} = 0 , \quad (3.3.24)$$

de ahí se obtiene

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} , \quad \omega = \omega_R = kv, \quad k \equiv \text{número de ondas .} \quad (3.3.25)$$

La solución más general para los modos normales es

$$\eta_k(x, t) = \alpha_{1k} e^{i(kx + \omega t)} + \alpha_{2k} e^{i(kx - \omega t)} + \alpha_{3k} e^{-i(kx - \omega t)} + \alpha_{4k} e^{-i(kx + \omega t)} \quad (3.3.26)$$

donde  $\alpha_{ik}$  son números complejos arbitrarios, así pues se tienen ocho parámetros reales que definen la solución. Si se impone que la solución sea real entonces,

$$\eta_k(x, t) = \alpha_{1k} e^{i(kx + \omega t)} + \alpha_{2k} e^{i(kx - \omega t)} + \alpha_{2k}^* e^{-i(kx - \omega t)} + \alpha_{1k}^* e^{-i(kx + \omega t)} \quad (3.3.27)$$

reduciendo en cuatro el número de parámetros reales.

Esta solución puede escribirse también como

$$\begin{aligned} \eta_k(x, t) &= B_{ik} \cos(kx + \omega t + \phi_{1k}) + D_{2k} \cos(kx - \omega t + \phi_{2k}) \\ &= C_{1k} \cos(kx + \omega t) + C_{2k} \sin(kx + \omega t) + C_{3k} \cos(kx - \omega t) + C_{4k} \sin(kx - \omega t) \\ &= D_{1k} \cos(kx) \cos(\omega t) + D_{2k} \sin(kx) \sin(\omega t) + D_{3k} \sin(kx) \cos(\omega t) + D_{4k} \cos(kx) \sin(\omega t) \\ &= E_{1k} \cos(kx + \beta_{1k}) \cos \omega t + E_{2k} \cos(kx + \beta_{2k}) \sin \omega t \\ &= F_{1k} \cos(kx) \cos(\omega t + \gamma_{1k}) + F_{2k} \sin(kx) \cos(\omega t + \gamma_{2k}) \end{aligned}$$

con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \alpha_{1k} &= \frac{B_{1k}}{2} e^{i\phi_{1k}}, \quad \alpha_{2k} = \frac{B_{2k}}{2} e^{i\phi_{2k}}; \quad C_{1k} = B_{1k} \cos \phi_{1k}; \quad C_{2k} = B_{2k} \cos \phi_{2k}; \dots; \quad D_{1k} = C_{1k} + C_{3k}; \\ D_{2k} &= -C_{1k} + C_{2k}; \quad D_{3k} = C_{2k} + C_{4k}; \quad D_{4k} = C_{2k} - C_{4k} \\ E_{1k} \cos \beta_{1k} &= D_{1k}, \quad E_{2k} \cos \beta_{2k} = D_{2k}, \dots, \quad F_{1k} \cos \gamma_{1k} = D_{1k}, \quad F_{2k} \cos \gamma_{2k} = D_{2k} \end{aligned}$$

Este tipo de ondas se conoce como **ondas viajeras** que depende de  $kx + \omega t = k(x + vt)$  o  $kx - \omega t = k(x - vt)$ . Una onda que se mueve a la izquierda se representa con  $\alpha_{2k} = B_{2k} = C_{3k} = C_{4k} = 0$ , o a la derecha  $\alpha_{1k} = B_{1k} = C_{1k} = C_{2k} = 0$ .

Si uno se da cuenta las ondas viajeras se expresan en función de ondas estacionarias. Esto puede entenderse como la superposición de una onda que viaja hacia la derecha con otra que viaja hacia la izquierda con la misma amplitud.

A las soluciones de onda estacionaria se les puede poner condiciones de contorno en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$ . Esto puede hacerse tomando  $D_{1k} = D_{4k} = 0$ , o tomar  $F_{1k} = 0$  y  $\sin(kL) = 0$ , haciendo que ambos extremos de la cuerda están fijos. Con ello se podrá tener valores discretos e  $k_n$ :

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L} v$$

Si se hace  $L$  infinitamente grande,  $k$  pasa a ser una variable continua. Así pues la solución más general posible de

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.28)$$

sería

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_{1n} e^{i(k_n x + \omega_n t)} + \alpha_{2n} e^{i(k_n x - \omega_n t)} + \text{C.C.} \right) \quad (3.3.29)$$

o bien

$$\eta(x, t) = \int dk (\alpha_1(k) e^{i(kx + \omega_k t)} + \alpha_2(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{C.C.}) \quad (3.3.30)$$

dependiendo si  $k$  es discreto o continuo.

## 4. Ecuación de ondas

<b>1. Ondas estacionarias en una dimensión . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2. Instrumentos de viento . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>3. Ondas progresivas. Reflexión y transmisión . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>4. Energía . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>5. Amortiguamiento . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.1 Medios dispersivos . . . . .</b>	<b>50</b>

Una onda es una perturbación dinámica que se propaga sobre un medio en equilibrio de una o más magnitudes físicas. Las ondas se producen en el medio sin importar su naturaleza. Estos medios pueden ser diversos, tales como el aire o un metal para el caso del sonido, el vacío en el caso de las OEM o un campo de espines alineados. Otra cualidad importante es que la perturbación es dinámica propagándose en el espacio-tiempo de acuerdo a la ecuación de ondas.

Hay dos comportamientos básicos en las ondas, las **ondas progresivas** (viajan en el espacio) y las **ondas estacionarias** (su movimiento se repite en la misma región del espacio). Las ondas progresivas pueden formar sistemas dispersivos y no dispersivos.

- **Sistemas no dispersivos:** Todas las ondas viajan con la misma velocidad independiente de la longitud de onda y su frecuencia. Éstas son las ondas que se han visto hasta ahora en dónde la velocidad de propagación de la onda depende del medio y no de las características de la onda.
- **Sistemas dispersivos:** En estos sistemas la velocidad de una onda depende de su longitud de onda. De aquí surge un nuevo concepto que es la **velocidad de grupo**.

### 4.1. Ondas estacionarias en una dimensión

La forma genérica de la ecuación de ondas es:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (4.1.1)$$

donde  $\Psi(x, t)$  es una onda ya sea transversal o longitudinal o cualquier perturbación en un medio de una dimensión.

Ya se vio que la solución a la ecuación de ondas es

$$\Psi_k(x, t) = \alpha_{1k} e^{i(kx + \omega t)} + \alpha_{2k} e^{i(kx - \omega t)} + \alpha_{2k}^* e^{-i(kx - \omega t)} + \alpha_{1k}^* e^{-i(kx + \omega t)} \quad (4.1.2)$$

donde  $\lambda = 2\pi/k$ ,  $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$ ,  $v = \omega/k = \lambda/T$ ,  $\omega = \omega_k = kv_0$ . Ya se vio que las ondas que depende de  $kx + \omega t$  viajan a la izquierda y las que son proporcionales a  $kx - \omega t$  viajan a la derecha. También se vio que las ondas estacionarias son una combinación de ambas y la mejor forma de describirla son

$$\Psi_k(x, t) = F_{1k} \cos(kx) \cos(\omega t + \gamma_{1k}) + F_{2k} \sin(kx) \cos(\omega t + \gamma_{2k})$$

donde la velocidad de propagación es

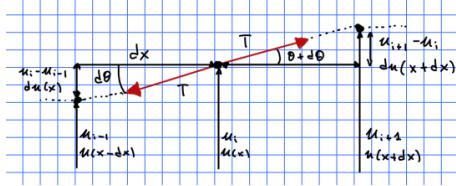
$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \text{ondas longitudinales}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \text{ondas transversales}.$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\rho$  la densidad,  $T$  la tensión a la que está sometida la cuerda y  $\mu$  su densidad lineal.

Para esta sección se utilizarán ondas transversales, pero todos los resultados se aplican de igual modo a las ondas longitudinales.

### Cuerdas semi-infinitas

Se va a considerar una cuerda en la que uno de sus extremos está a una distancia infinita. En este sistema se tendrán oscilaciones transversales y el comportamiento en el que se centrará la descripción es aquel que tiene lugar en el otro extremo, que por conveniencia se situará en  $x = 0$ .



En el anterior tema se vio una configuración de ondas como la que aparece en la figura. Si uno se fija en el elemento que se encuentra en  $x = 0$ , se tiene que la tensión generada por la parte de la derecha de la cuerda debe ser compensada por algún mecanismo impuesto tal que

$$\begin{aligned} F_x &= T \cos \theta - F_x^{\text{ext}} = 0 \\ F_y &= T \sin \theta - F_y^{\text{ext}} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

- a) Extremo fijo,  $x = 0$ .

Condición de contorno:  $\Psi(0, t) = 0, \forall t$

$$F_{1k} = 0 \Rightarrow \Psi_k(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi).$$

Si se representa la función para  $x$  estacionaria la amplitud será  $A \cos(\omega t + \phi)$ ,  $\lambda = 2\pi/k$

Nodos:  $xk = \pm n\pi$ ; anti-nodos:  $xk = \pi/2 \pm n\pi$

Para las ondas estacionarias todos los puntos poseen la misma fase temporal, estarán en su desplazamiento máximo con respecto posición de equilibrio al mismo tiempo y pasarán por el origen al mismo tiempo.

- b) Extremo libre,  $\partial\Psi/\partial x|_{x=0} = 0, \forall t$

$$F_{2k} = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t + \phi)$$

Para la onda estacionaria

$$\Psi(x, t) = \int_0^\infty dk A_k \left\{ \begin{array}{l} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{array} \right\} \cos(\omega t + \phi), \left\{ \begin{array}{l} \text{fijo} \\ \text{libre} \end{array} \right\}$$

Ahora, en **cuerdas finitas** de  $x = 0$  a  $x = L$

- a) Dos extremos fijos      b) Un extremo fijo y otro libre      c) Dos extremos libres

donde  $k_n$  es el  $n$ -ésimo modo de vibración de la cuerda. El estado de menor energía es el modo fundamental de vibración.

Para el caso a) se tiene  $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$  y  $\Psi(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi)$  donde  $\sin(kL) = 0$ , por lo que

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = vk_n = \frac{n\pi v}{L}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2L}{nv}, \quad \nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{nv}{2L}. \quad (4.1.4)$$

donde  $n = 1$  es su modo fundamental de vibración

$$\lambda_1 = 2L, \quad \nu_1 = v/2L \quad (4.1.5)$$

y

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (4.1.6)$$

Para el caso b) se tiene que  $x = 0$  fijo y  $x = L$  es libre,  $\Psi(0, t) = 0$  y  $\partial\Psi(x, t)/\partial x|_{x=L} = 0$  y

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.1.7)$$

donde  $\cos(kL) = 0$  por lo que

$$k_n = \frac{n + 1/2}{L}\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.8)$$

y

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n + 1/2}, \quad \omega_n = vk_n = \frac{(n + 1/2)\pi v}{L}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2L}{(n + 1/2)v}, \quad \nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{(n + 1/2)v}{2L}. \quad (4.1.9)$$

donde  $n = 0$  es el modo fundamental, por lo que su longitud de onda fundamental y su frecuencia fta. son

$$\lambda_0 = 4L, \quad \nu_0 = v/4L \quad (4.1.10)$$

y su ecuación de onda

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n); \quad k_n = \frac{(n + 1/2)\pi}{L} \quad (4.1.11)$$

Finalmente, para c) se tienen las condiciones  $\partial\Psi(x, t)/\partial x|_{x=0} = 0$  y  $\partial\Psi(x, t)/\partial x|_{x=L} = 0$  y la ecuación de onda es  $\Psi(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t + \phi)$ , por lo que las C.C. implican

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.12)$$

por lo que el modo fundamental es  $n = 0$ , por lo que

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (4.1.13)$$

y

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.1.14)$$

## 4.2. Instrumentos de viento

Los instrumentos de viento pueden aproximarse como tubos de diferentes tipos en los que se mueven ondas sonoras longitudinales. Las ondas sonoras en el tubo producen un desplazamiento en cada punto,  $\Psi(x, t)$ , el cual puede asociarse a variaciones que se producen en la densidad de aire encerrado. Si se considera un intervalo  $x, dx$  en el cual hay una cantidad de aire  $dm$ , al pasar la perturbación de la onda sonora a los puntos se desplazarán,  $x + \Psi(x, t)$  y  $x + dx + \Psi(x, t)$ . El espacio ocupado por  $dm$  ahora será  $dx + \Psi(x + dx, t) - \Psi(x, t) = dx + d\Psi$ . Si el tubo tiene una sección  $S$  y densidad del aire en equilibrio  $\rho_0$ , entonces el cambio de densidad del medio interno del instrumento viene dado por

$$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\frac{dm}{S(dx + \Psi(x, t))} - \frac{dm}{S dx}}{\frac{dm}{S dx}} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (4.2.1)$$

Además, en el interior del instrumento los cambios de presión son tan rápidos que no hay transferencia de energía por medios térmicos, es decir, no hay trabajo en forma de calor, por lo que se trata de un proceso adiabático que cumple

$$pV^\gamma = C \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^\gamma \quad (4.2.2)$$

por lo que se tiene una onda de presión  $\Psi_p(x, t)$  y

$$p = p_0 + \Psi_p(x, t) \simeq \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} (\rho_0^\gamma + \gamma\rho_0^{\gamma-1}\Delta\rho) \quad (4.2.3)$$

Así, las variaciones de presión pueden relacionarse con el desplazamiento como:

$$\Psi_p(x, t) = -p_0 \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -Q \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = p_0 \gamma \quad (4.2.4)$$

donde  $Q$  es el coeficiente de compresibilidad del aire.

De la anterior ecuación podrá calcularse la velocidad de propagación del sonido. Ya se vio que en ondas longitudinales la tensión se relaciona con el desplazamiento a través del módulo de Young,  $F/S = E^{d\eta/dx}$ . En este caso la ecuación que se ha obtenido es su equivalente para el aire. La velocidad de propagación sería

$$v = \sqrt{\frac{Q}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}} \quad (4.2.5)$$

Tomando los valores  $p_{\text{atm}} = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_{\text{atm}} = 1,293 \text{ kg/m}^3$  y  $\gamma_{\text{atm}} = 1,4$  (diatómico), se obtiene que  $v = 331 \text{ m/s}$ .

Se estudiará ahora lo que ocurre en los instrumentos.

Comiéncese con el caso en que se tiene un tubo con un extremo cerrado en  $x = 0$ . En ese extremo las moléculas de aire no pueden moverse y atravesar la pared, como tampoco pueden desplazarse en el tubo, ya que crearía vacío en el extremo que las succionaría. Por tanto, en ese extremo se tendrá un nodo y la onda estacionaria es de la forma

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \phi), \quad (4.2.6)$$

y la onda de presión,

$$\Psi_p(t) = -Q A k \cos(kx) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.2.7)$$

haciendo que los nodos de  $\Psi(x, t)$  coinciden con los antinodos de  $\Psi_p(x, t)$  y viceversa.

Si ahora en  $x = 0$  se tiene un extremo abierto las moléculas de aire se desplazan una cantidad máxima y se tiene un antinodo. Esto puede verse mejor analizando las presiones del tubo. Dado que en el exterior sólo hay presión atmosférica puede considerarse que no hay onda de presión fuera del tubo,  $\Psi_p = 0$ . Como la presión ha de ser continua, la condición en el extremo abierto es  $\Psi_p = 0$  en  $x = 0$ , teniendo un nodo y por tanto viene dada por

$$\Psi_p(x, t) = B \sin(kx) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.2.8)$$

con lo que la onda sonora es

$$\Psi(x, t) = \frac{B}{kQ} \cos(kx) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.2.9)$$

y por tanto,  $\Psi(x, t)$  tiene un antinodo en  $x = 0$ . En la realidad el sistema es un poco más complejo pues el aire que se encuentra justo fuera del tubo vibra un poco, haciendo que el antinodo esté ligeramente fuera de éste.

Como ejemplo de instrumento con los dos extremos abiertos tenemos a la flauta traversa y como uno con un extremo abierto el clarinete.

Puede verse que en el caso de la flauta en los extremos se tiene mayor desplazamiento y por tanto menor presión. Sin embargo, en el clarinete, en el extremo cerrado se tiene un desplazamiento nulo,  $\Psi \sim 0$ , pero las ondas de presión,  $\Psi_p$ , es máxima.

Viendo cómo se comportan las ondas dentro de los tubos puede verse que la longitud de onda para el clarinete es mayor que en el caso de la flauta. Si se compara con el tubo, la longitud de onda de un clarinete es cuatro veces su longitud, mientras que la de la flauta es sólo el doble. Así pues, el clarinete puede tocar una octava más baja que la flauta ya que su longitud de onda es el doble y su frecuencia es la mitad.

### 4.3. Ondas progresivas. Reflexión y transmisión

#### Ondas progresivas en un medio homogéneo

Ya se vieron anteriormente las soluciones de ondas progresivas o viajeras. Se vio también que su dependencia en los parámetros  $\omega$  y  $k$  indicaban hacia dónde viajaban

$$kx + \omega t \propto x + vt \text{ (izquierda)} \quad kx - \omega t \propto x - vt \text{ (derecha)} \quad (4.3.1)$$

Si se tiene un problema con condiciones iniciales de tipo  $\Psi(x, 0) = f(x)$  y  $\dot{\Psi}(x, 0) = g(x)$ , interesa saber cómo puede obtenerse  $\Psi(x, t)$ .

#### Método general:

En el método general se usarán los modos normales como base en la expansión de la función de ondas,  $\Psi(x, t)$ , ya que se sabe que estos son una base del espacio de funciones:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} [\alpha_1 e^{i(kx - \omega_k t)} + \alpha_2(k) e^{i(kx + \omega_k t)} + \alpha_2^*(k) e^{-i(kx + \omega_k t)} + \alpha_1^*(k) e^{-i(kx - \omega_k t)}] \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [\alpha_1(k) e^{i(kx - \omega_k t)} + \alpha_1^*(k) e^{-i(kx - \omega_k t)}] \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

ya que  $\alpha_2(k) = \alpha_1^*(-k)$  y  $\omega_k = |k|v$ . Si se tienen condiciones iniciales  $\Psi(x, 0) = f(x)$  y  $\dot{\Psi}(x, 0) = g(x)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [\alpha_1(k) e^{ikx} + \alpha_1^*(k) e^{-ikx}] &= f(x) \\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [-i\omega_k \alpha_1(k) e^{ikx} + i\omega_k \alpha_1^*(k) e^{-ikx}] &= g(x). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Para obtener los  $\alpha_1(k)$  puede multiplicarse por  $e^{ik'x}$  e integrar sobre  $x$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ik'x} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [\alpha_1(k) e^{ikx} + \alpha_1^*(k) e^{-ikx}] &= \alpha_1(k') + \alpha_1(-k') = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ik'x} f(x) \\ \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ik'x} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [-i\omega_k \alpha_1(k) e^{ikx} + i\omega_k \alpha_1^*(k) e^{-ikx}] &= -i\omega_k [\alpha_1(k') - \alpha_1^*(k')] = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ik'x} g(x) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

por lo que

$$\alpha_1(k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} \left[ f(x) + \frac{i}{\omega_k} g(x) \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-ikx} [\Psi(x, 0) - \dot{\Psi}(x, 0)] \quad (4.3.5)$$

que se usará en la expresión de  $\Psi(x, t)$  para conocer la función de onda.

Este método es válido para cualquier condición de contorno y se basa en usar el desarrollo en modos normales de dichas condiciones de contorno. Puede verse que se ha resuelto de modo general sin usar la relación entre  $\omega$  y  $k$ . En particular este método puede usarse para aquellos sistemas en los que la velocidad de propagación de las ondas depende del número de onda. A este subconjunto se le conoce como sistemas dispersivos.

#### Método para sistemas no dispersivos

En un sistema no dispersivo no existen condiciones de contorno que restrinjan el movimiento por lo que la onda podrá viajar indefinidamente hacia la izquierda o derecha. En estos sistemas se tiene que  $\omega = v|k|$ . En este caso puede resolverse  $\Psi(x, t)$  de un modo sencillo.

Se tiene que  $\omega = v|k|$  y además se carece de condiciones de contorno. Dividiendo la onda en la componente que va a la izquierda y la que va a la derecha

$$\Psi(x, t) = \Psi_{\text{der}}(x - vt) + \Psi_{\text{izq}}(x + vt), \quad \dot{\Psi}(x, t) = -v \frac{d\Psi_{\text{der}}}{dx}(x - vt) + v \frac{d\Psi_{\text{izq}}}{dx}(x + vt). \quad (4.3.6)$$

Para  $t = 0$

$$\Psi_{\text{der}}(x) + \Psi_{\text{izq}}(x) = f(x), \quad -v\Psi'_{\text{der}}(x) + v\Psi'_{\text{izq}}(x) = g(x). \quad (4.3.7)$$

Integrando la segunda ecuación

$$-v\Psi_{\text{der}}(x) + v\Psi_{\text{izq}}(x) = \int dx g(x) + vC, \quad (4.3.8)$$

donde  $C$  es una cte., por lo que se llega a

$$\Psi_{\text{izq}}(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{v} \int dx g(x) + C \right], \quad \Psi_{\text{der}}(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{v} \int dx g(x) - C \right] \text{ y} \quad (4.3.9)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[ f(x - vt) - \frac{1}{v} \int dx g(x) \Big|_{x=x-vt} + f(x + vt) + \frac{1}{v} \int dx g(x) \Big|_{x=x+vt} \right] \quad (4.3.10)$$

### Pulsos viajeros

$$g(x) = \mp v f'(x)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[ f(x - vt) - \frac{1}{v} (\mp v) f(x - vt) + f(x + vt) + \frac{1}{v} (\mp v) f(x + vt) \right] = f(x \mp vt) \quad (4.3.11)$$

### Reflexión y transmisión I: ondas en dos medios

Téngase dos medios con índices de refracción  $\mu_1$  y  $\mu_2$  con densidades distintas  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Recuérdese que las velocidades para las ondas transversales y longitudinales vienen dadas, respectivamente, por

$$v_{\text{tr}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad v_{\text{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.3.12)$$

Suponiendo ahora que la densidad lineal de una cuerda de  $-\infty$  a  $0$  es  $\mu_1$  y es homogénea, y de  $0$  a  $\infty$  es  $\mu_2$ , también homogénea. Se aproxima una onda desde  $-\infty$  a la derecha (es decir, se desplaza con  $v$  positiva) con

$$\Psi_i(x, t) = f_i \left( t - \frac{x}{v_1} \right), \quad v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad (4.3.13)$$

$$\Psi_r(x, t) = f_r \left( t + \frac{x}{v_1} \right), \quad \Psi_t = f_t \left( t - \frac{x}{v_2} \right), \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (4.3.14)$$

por lo que la onda en el primer segmento de cuerda o segmento izquierdo y en el segundo segmento o segmento derecho serán, respectivamente,

$$\Psi_L(x, t) = \Psi_i(x, t) + \Psi_r(x, t) = f_i \left( t - \frac{x}{v_1} \right) + f_r \left( t + \frac{x}{v_1} \right), \quad \Psi_R(x, t) = \Psi_t(x, t) = f_t \left( t - \frac{x}{v_1} \right) \quad (4.3.15)$$

Dada la onda incidente,  $\Psi_i(x, t)$ , pueden determinarse las ondas reflejadas y transmitidas. Para ello es importante fijar las condiciones de contorno para  $\Psi_L(x, t)$  y  $\Psi_R(x, t)$ . Las dos condiciones son

- Continuidad de la cuerda:  $\Psi_L(0, t) = \Psi_R(0, t) \Rightarrow f_i(t) + f_r(t) = f_t(t)$ .
- Continuidad de la derivada:  $\frac{\partial \Psi_L(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \Psi_R(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{v_1} f_i'(t) + \frac{1}{v_1} f_r'(t) = -\frac{1}{v_2} f_t'(t)$ .

Si se integra y se multiplica por las velocidades se tiene

$$v_2 f_i(t) - v_2 f_r(t) = v_1 f_t(t) \quad (4.3.16)$$

por lo que

$$f_r(t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_i(t), \quad f_t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_i(t) \quad (4.3.17)$$

Si se pone en función de  $\Psi$ :

$$\Psi_r(x, t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_i \left( t + \frac{x}{v_1} \right); \quad \Psi_t(x, t) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_i \left( t - \frac{x}{v_2} \right) \quad (4.3.18)$$

con esto pueden definirse los coeficientes de reflexión y de refracción como

$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}; \quad T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \quad (4.3.19)$$

de modo que

$$\Psi_r(x, t) = R f_i \left( t + \frac{x}{v_1} \right) = R \Psi_i(-x, t), \quad \Psi_t = T f_i \left( t - \frac{x}{v_2} \right) = T \Psi_i \left( \frac{v_1}{v_2} x, t \right). \quad (4.3.20)$$

Pueden verse los coeficientes  $R$  y  $T$  como las amplitudes de  $\Psi_r$  y  $\Psi_t$  con respecto a  $\Psi_i$ . Además se cumple que

$$1 + R = T \quad (4.3.21)$$

a partir de exigir la continuidad:  $f_i + f_r = f_t$ .

Dado que este proceso viene dado por el cambio de velocidades debido al cambio de densidad en los medios,  $R$  y  $T$  pueden expresarse como

$$R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}; \quad T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \quad (4.3.22)$$

### Pared rígida a la derecha

$$\mu_2 \rightarrow \infty (v_2 = 0) \Rightarrow R = -1, T = 0. \quad (4.3.23)$$

Toda la onda se ve reflejada y no hay transmisión. La onda reflejada es del mismo tamaño que la incidente pero se ve invertida debido a  $R = -1$ .

### Cuerda ligera a la izquierda, cuerda pesada a la derecha

$$\mu_1 < \mu_2 < \infty (v_2 < v_1) \Rightarrow -1 < R < 0; \quad 0 < T < 1. \quad (4.3.24)$$

En este caso hay una reflexión parcial (invertida) y una transmisión parcial. Para el caso de la imagen se ha escogido  $v_2 = v_1/2 \Rightarrow R = -1/3, T = 2/3$

### Cuerda uniforme

$$\mu_1 = \mu_2 (v_2 = v_1) \Rightarrow R = 0, T = 1 \quad (4.3.25)$$

Al no haber diferencia de medios entre los dos lados del punto crítico, toda la perturbación se transmite y nada se refleja

### Cuerda pesada a la izquierda, cuerda ligera a la derecha

$$\mu_2 < \mu_1 < \infty (v_2 > v_1) \Rightarrow 0 < R < 1, \quad 1 < T < 2 \quad (4.3.26)$$

Aquí se tiene una reflexión y transmisión parcial. En la imagen se tiene el caso  $v_2 = 2v_1$  y  $R = 1/3, T = 4/3$

## Cuerda de masa cero a la derecha

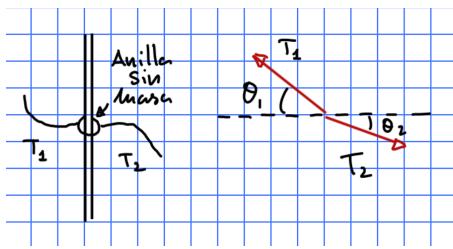
$$\mu_2 = 0 \quad (v_2 = \infty) \Rightarrow R = 1, \quad T = 2 \quad (4.3.27)$$

En este caso se tiene una reflexión completa y no cambia de signo. El lado derecho de la cuerda se comporta del siguiente modo: dado que la cuerda no tiene masa no transporta energía, por lo que toda la energía de la onda incidente está contenida en la onda reflejada: reflexión total. El movimiento que sufre la parte derecha de la cuerda no es ondulatorio, simplemente se tendrá una línea horizontal recta que sube y baja. Un ejemplo de esto es la onda estacionaria con extremo libre.

## Reflexión y transmisión II: Impedancia

- **Impedancia:** Ondas transversales

Hasta ahora se ha estudiado cómo se comporta una onda cuando cambia de un material a otro al pasar por  $x = 0$ . Sin embargo, en todos los casos se ha supuesto que la tensión era la misma. Ahora se estudiará qué ocurre si la tensión es diferente a ambos lados de  $x = 0$ .



Supóngase, como en la figura, que en  $x = 0$  se tiene una barra fija sobre la que se desplaza una anilla sin masa y sin rozamiento. A la anilla se tienen enganchadas dos cuerdas, a la izquierda una con densidad de masa  $\mu_1$  y tensión  $T_1$  y a la derecha otra con densidad de masa  $\mu_2$  y tensión  $T_2$ . La barra se encarga de equilibrar cualquier tensión longitudinal por lo que la anilla sólo puede moverse en la dirección transversal.

$$T_1 \sin \theta_1 = T_2 \sin \theta_2 \quad (4.3.28)$$

$$T_1 \left. \frac{\partial \Psi_T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = T_2 \left. \frac{\partial \Psi_R(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.3.29)$$

$$\frac{T_1}{v_1} f'_i(t) - \frac{T_1}{v_1} f'_r(t) = \frac{T_2}{v_2} f'_t(t) . \quad (4.3.30)$$

Para este caso la condición sobre la continuidad de las funciones no cambia, simplemente donde se tuviera  $v_i$  se tiene que  $v_i/T_i$ . La cantidad  $v/T$  puede escribirse.

$$\frac{v}{T} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{T} = \frac{1}{\sqrt{T\mu}} \equiv \frac{1}{Z} \Rightarrow Z = \frac{T}{v} \equiv \sqrt{T\mu} \quad (4.3.31)$$

donde  $Z$  es la **impedancia**.

Los coeficientes de reflexión y transmisión pueden escribirse

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} ; \quad T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} . \quad (4.3.32)$$

La impedancia,  $Z = T/v = \sqrt{T\mu}$  es una propiedad de la cuerda, es decir, del medio en que se propaga la onda. La impedancia crece tanto con  $T$  como con  $\mu$ .

Si se tiene  $Z_1 = Z_2$ , entonces  $R = 0$  y  $T = 1$ , habiendo transmisión total. En este caso se dice que las cuerdas tienen **coincidencia de impedancia, composición de impedancia o acoplamiento de impedancia**. El escenario más sencillo donde ocurre esto es simplemente tener cuerdas idénticas  $T_1 = T_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$ . Sin embargo, esto ocurre también para los casos en que  $T_2 = aT_1$ ,  $\mu_2 = \mu_1/a$ . Las dimensiones de la impedancia son  $MT^{-1}$  con unidades  $[Z] = N/(m/s)$ .

### significado físico de la impedancia

En la anterior situación se vio que las tensiones entre las cuerdas de la derecha y la izquierda se han de equilibrar, esto dice que las fuerzas de ambos lados también han de estar equilibradas.

La onda de la izquierda DIAPO 29

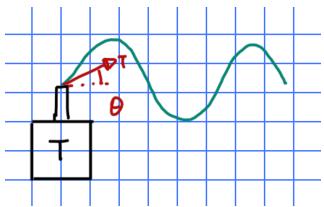
$$F_y = T_2 \frac{\partial \Psi_R(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (4.3.33)$$

Si se usa que  $\Psi_R(x, t) = \Psi_R(t - x/v_2)$  se obtiene

$$F_y = -\frac{T_2}{v_2} \frac{\partial \Psi_R(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=0} = -\frac{T_2}{v_2} v_y = -b v_y \quad (4.3.34)$$

donde  $v_y = \partial \Psi_R / \partial t$  es la velocidad transversal del anillo en  $x = 0$  y  $b = T_2/v_2$ .

La fuerza es, por tanto, proporcional la velocidad transversal con un signo menos, por tanto, puede verse que se está ante una fuerza amortiguada. De este modo puede asemejarse el sistema a uno en que se reemplace la cuerda de la izquierda y la anilla por un pistón con coeficiente de amortiguación  $b$ .



Cuando el pistón se mueve genera un movimiento oscilatorio transmitiendo este movimiento a la cuerda a través de su conexión, que se llamará L. La cuerda se conecta al transmisor a través de su anclaje R. La fuerza de la cuerda ejercida sobre el terminal de salida del transmisor se llamará  $F_y$ , R sobre L, y se escribe

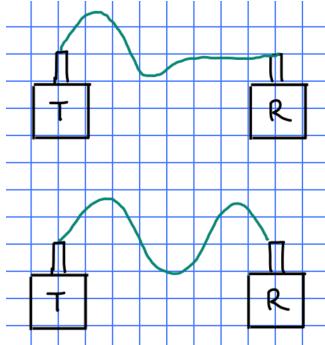
$$F_y(R \text{ sobre } L) = T \sin \theta = T \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.3.35)$$

Si el transmisor emite de modo continuo,  $\Psi(x, t) = A \cos(vt - x + \phi)$ , por lo que

$$F_y(R \text{ sobre } L) = -\frac{T}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -Z \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (4.3.36)$$

Entonces cuando el transmisor emite ondas, la fuerza de reacción ejercida por el medio (R) sobre el terminal de salida (L) es una fuerza de amortiguamiento. Puede decirse que la cuerda se opone al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad transversal, donde la constante de proporcionalidad es la impedancia,  $Z$ .

Como se sabe, una fuerza de amortiguamiento disipa/absorbe energía. Entonces, ¿qué está pasando aquí? En este caso es la cuerda la que está absorbiendo dicha energía emitida por el transmisor. La emisión de energía a través de ondas se le conoce como **radiación**. Puede decirse que la pérdida de energía del transmisor ha sido irradiada sobre la cuerda, que a su vez puede transportarla a un receptor distante.



En este caso se tiene un transmisor que irradia ondas a un receptor situado a una distancia  $l$ . Al llegar la onda al receptor, su terminal de entrada, tomará una velocidad  $u(t)$ , y el receptor reaccionará con una fuerza opuesta y proporcional a la velocidad

$$F(R \text{ sobre } L) = -Z_R u(t) \quad (4.3.37)$$

donde  $Z_R$  es la impedancia del receptor.

A su vez la cuerda vibrante deberá compensar dicha fuerza a través de la tensión

$$F(L \text{ sobre } R) = T \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -Z \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l}. \quad (4.3.38)$$

Pueden encontrarse entonces dos casos

a)  $Z = Z_R$ :

$$u(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (4.3.39)$$

y por tanto la cuerda de la izquierda se comporta como si en lugar de receptor hubiese una cuerda infinita.

b)  $Z \neq Z_R$ : Al igualar  $F(L)$  sobre  $R$  y  $F(R)$  sobre  $L$  se obtiene

$$T_1 \frac{\partial \Psi_L}{\partial x} \Big|_{x=l} = T_2 \frac{\partial \Psi_R}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad \text{y con ello } \frac{T_1}{v_1} f'_i(t) - \frac{T_1}{v_1} f'_r(t) = \frac{T_2}{v_2} f'_t(t) \quad (4.3.40)$$

es decir, una onda transmitida y otra reflejada. En este caso se tiene que

$$R = \frac{Z - Z_R}{Z + Z_R} \quad (4.3.41)$$

lo que viene a decir que si  $Z \neq Z_R$  se tendrá una pérdida de energía en el receptor debido a la onda reflejada.

### Potencia de emisión

La potencia de emisión de una onda viene dada por

$$P(x, t) = \frac{dW}{dt} = F \frac{d\Psi}{dt} = Z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3.42)$$

$Z$  depende de la representación que se tenga de  $\Psi$ .

### Potencia e intensidad sonora

Dada la potencia como

$$P = Z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3.43)$$

la impedancia tiene dimensiones de fuerza/velocidad. Si se considera una onda sonora, puede definirse la intensidad sonora como

$$I = \frac{P}{S} \quad (4.3.44)$$

la impedancia vista anteriormente tiene dimensiones de fuerza/velocidad y se corresponde a  $SQ/V$ . Así pues, puede definirse,

$$I = Z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3.45)$$

con  $Z = \sqrt{Q}\rho$ , donde  $Q$  es el coeficiente de compresibilidad del fluido. Se tiene que

$$\Psi_p(x, t) = -Q \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4.3.46)$$

por lo que, si  $p_1 = p_2$

$$-Q_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = -Q_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (4.3.47)$$

Para el aire, por ser  $Q = \gamma p_0$ , se tiene  $Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho} = \rho v$ , donde  $p_0$  es la presión atmosférica y  $\rho$  la densidad del fluido. Ahora, usando que  $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho} = \gamma p_0 / Z$  se obtiene

$$I = Z \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = Z \left( v \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{Z} \left( \gamma p_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3.48)$$

y recordando que  $\Psi_p = -\gamma p_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , se tiene que

$$ZI = (\Psi_p)^2 \quad (4.3.49)$$

con la intensidad sonora dependiente del valor de la variación de la presión. Es importante que en este caso la impedancia tiene unidades de presión/velocidad.

#### 4.4. Energía

Considérese una vibración transversal en una cuerda, cada elemento de cuerda  $dm$  contribuye a la energía cinética como

$$T_{\text{cin}} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} (\mu dx) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2. \quad (4.4.1)$$

Del mismo modo su contribución a la energía potencial será (considerando cada  $dm$  como un oscilador)

$$V = \frac{1}{2} k (\Psi(x + dx, t) - \Psi(x, t))^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 dx^2 \quad (4.4.2)$$

Dado que la tensión de la cuerda puede escribirse como  $T = k dx$ , entonces la densidad de energía por unidad de longitud es

$$\varepsilon(x, t) = \frac{T_{\text{cin}} + V}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.4.3)$$

donde se ha tenido en cuenta  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Si la onda es transversal  $\mu \rightarrow S\rho$ , mientras que si es longitudinal  $T \rightarrow ES$ .

Si ahora se divide esto por la sección de la cuerda, se obtiene la densidad de energía por unidad de volumen,

$$\varepsilon_V(x, t) = \frac{T + V}{S dx} = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4.4.4)$$

En el caso de ondas viajeras,  $\Psi(x, t) = f(x \pm vt)$ , puede usarse el hecho que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon(x, t) = \mu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = \mu v^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{ondas viajeras}) \quad (4.4.5)$$

usando que  $Z = \sqrt{T/\mu}$  y que  $v = \sqrt{T/\mu}$  entonces,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{Z}{v} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 = Zv \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{ondas viajeras}). \quad (4.4.6)$$

Ahora que ya se conoce la energía asociada a una onda, puede estudiarse cómo se distribuye dicha energía cuando una onda pasa de un medio a otro. Es decir, la densidad de energía e las ondas reflejadas y transmitidas en función de la densidad de energía de la onda incidente. Se considerará el flujo de energía de la onda incidente. Se considerará el flujo de energía en  $x = 0$  y se asume que toda la energía que llega a él es la misma que la que sale. En un tiempo  $dt$  llegará una energía,

$$dE_i = \varepsilon_i(0, t) dx_1 = \varepsilon_i(0, t) v_2 dt \quad (4.4.7)$$

que se repartirá entre onda reflejada y transmitida. Con esto se podrán definir los coeficientes  $R_E$  y  $T_E$  como,

$$dE_r = R_E dE_i, \quad dE_t = T_E dE_i. \quad (4.4.8)$$

La conservación de la energía debe cumplirse,

$$dE_i = dE_r + dE_t = R_E dE_i + T_E dE_i. \quad (4.4.9)$$

Así, en un tiempo  $dt$

$$dE_r = \varepsilon_r(0, t) dx_1 = \varepsilon_r(0, t) v_1 dt = R_E \varepsilon_i(0, t) v_1 dt \quad (4.4.10)$$

$$dE_t = \varepsilon_t(0, t) dx_2 = \varepsilon_t(0, t) v_2 dt = \varepsilon_t(0, t) \frac{v_2}{v_1} v_1 dt = T_E \varepsilon_i(0, t) v_1 dt \quad (4.4.11)$$

dado que todas las ondas son viajeras,

$$\varepsilon_r(0, t) = \frac{Z_1}{v_1} \left( \frac{\partial \Psi_r}{\partial t}(0, t) \right)^2 = \frac{Z_1}{v_1} \left( R \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(0, t) \right)^2 = R^2 \varepsilon_i(0, t) = R_E \varepsilon_i(0, t) \quad (4.4.12)$$

$$\varepsilon_t(0, t) \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_2}{v_2} \left( \frac{\partial \Psi_t}{\partial t}(0, t) \right)^2 \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_2}{v_2} \left( T \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \right)^2 \frac{v_2}{v_1} = \frac{Z_2}{v_2} T^2 \frac{v_1}{Z_1} \varepsilon_i(0, t) \frac{v_2}{v_1} = T_E \varepsilon_i(0, t) \quad (4.4.13)$$

donde

$$R_E = R^2 = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2, \quad T_E = \frac{Z_1}{Z_2} T^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}; \quad R_E + T_E = 1 \quad (4.4.14)$$

Como caso particular considérese el caso en que la tensión es igual a ambos lados de  $x = 0$  y cambia la densidad de la cuerda. En este caso, los coeficientes  $R_E$  y  $T_E$  podrán expresarse a través de las velocidades,

$$R_E = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right)^2, \quad T_E = \frac{4v_1 v_2}{(v_2 + v_1)^2}. \quad (4.4.15)$$

Pueden reunirse todos los casos en la siguiente tabla

Caso	$R$	$T$	$R_E$	$T_E$
Pared rígida a la derecha: $\mu_2 = \infty$ ( $v_2 = 0$ )	-1	0	1	0
De ligera (izq) a pesada (dcha): $\mu_1 < \mu_2 < \infty$ ( $v_2 < v_1$ )	(-1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)
Uniforme: $\mu_1 = \mu_2$ ( $v_1 = v_2$ )	0	1	0	1
De pesada (izq) a ligera (dcha): $\mu_2 < \mu_1 < \infty$ ( $v_2 > v_1$ )	(0, 1)	(1, 2)	(0, 1)	(1, 0)
Masa cero en la derecha: $\mu_2 = 0$ ( $v_2 = \infty$ )	1	2	1	0

## 4.5. Amortiguamiento

En esta sección se estudiará qué ocurre si se añade el efecto de amortiguación en la ecuación de ondas. El origen de dicha amortiguación puede deberse a múltiples factores. Para ello la cuerda ha de tener grosor (anteriormente considerado como despreciable) que produzca una fuerza de amortiguamiento  $-\beta dx v_y$  sobre una longitud  $dx$  de la cuerda. Con esto se ve que cuanto más larga la cuerda, mayor la fuerza de frenado.

La ecuación del movimiento de un elemento de cuerda es

$$(\mu dx) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (4.5.1)$$

Esta ecuación puede interpretarse del siguiente modo. El término de la izquierda es masa por aceleración, mientras que el de la derecha es la fuerza de recuperación que actúa sobre ese elemento de masa. Por tanto, si se quiere añadir amortiguación, puede añadirse al término de la derecha como,  $-\beta dx v_y$  (donde  $v_y = \partial \Psi / \partial t$ ),

$$(\mu dx) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \beta dx \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.5.2)$$

con  $\Gamma = \beta/\mu$  y  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Se usará como función prueba  $\Psi(x, t) = e^{i(\pm \omega t - kx)}$ , que da

$$-\omega^2 \pm i\omega\Gamma + v^2 k^2 = 0. \quad (4.5.3)$$

Dicha ecuación relaciona  $\omega$  y  $k$  pero para saber cómo es el movimiento se han de estudiar las condiciones de contorno.

Considérese una onda estacionaria,

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) = \frac{A_n}{4i} \left( e^{i(k_n x + \omega_n t)} + e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)} \right) \quad (4.5.4)$$

Metiéndola en la ecuación de ondas,

$$-\omega^2 + i\omega\Gamma + v^2\Gamma^2 = 0 \Rightarrow \omega_n = \omega_r + i\omega_i = \frac{i\Gamma + \sqrt{4v^2k_n^2 - \Gamma^2}}{2} \quad (4.5.5)$$

con lo que,

$$e^{i\omega t} \Rightarrow e^{i\omega_r t} e^{-\omega_i t} \quad (4.5.6)$$

y, por tanto,

$$\Psi_n(x, t) = \frac{A_n}{4i} e^{-\omega_i t} \left( e^{i(kx+\omega t)} + e^{i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx-\omega t)} - e^{-i(kx+\omega t)} \right) = A_n e^{-\omega_i t} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) \quad (4.5.7)$$

Si  $\Gamma$  es pequeño,  $\omega \simeq vk + i\Gamma/2$ , y como  $\Gamma$  es independiente de  $n$

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_i t} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.5.8)$$

Si por el contrario  $\Gamma$  no es pequeño,  $\omega_i$  depende de  $n$  y por tanto cada frecuencia se amortigua a una velocidad diferente con frecuencias sobreamortiguadas.

$$\Psi_n(x, t) = \alpha_{1k} e^{i(kx+\omega_r t)} e^{-\omega_i t} + \alpha_{2k} e^{i(kx-\omega_r t)} e^{-\omega_i t} + \text{c.c.} \quad (4.5.9)$$

#### 4.5.1. Medios dispersivos

##### Velocidad de fase

En todos los casos que se han visto, ondas en medios no dispersivos, su velocidad es independiente de  $\omega$  y  $k$ . Véase ahora qué ocurre cuando se tiene la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (4.5.10)$$

y se le aplica una solución genérica  $\Psi(x, t) = A e^{i(kx-\omega t)}$ . La solución obtenida es

$$\omega^2 = v^2 k^2 \Rightarrow \omega(k) = \pm v k, \quad (4.5.11)$$

a esta relación se la conoce como **relación de dispersión**, y la velocidad de la onda es  $\omega/k = \pm v$ . A este cociente se le conoce como, **velocidad de fase**:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (4.5.12)$$

Si se tiene una onda con fase  $\phi(x, t) = (kx - \omega t)$ , puede calcularse la velocidad de un punto de la onda que siempre tenga el mismo valor para la fase,  $\phi(x, t) = \text{cte}$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 = \frac{d(kx - \omega t)}{dt} = k \frac{dx}{dt} = \omega \Rightarrow v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (4.5.13)$$

Los sistemas que se han estudiado hasta ahora tenían velocidad de fase constante, una onda progresiva  $f(x - vt) \Rightarrow v = V_f$ . En estos sistemas las ondas progresivas viajan sin deformarse. Sin embargo, cuando un sistema tiene una velocidad de fase dependiente de  $k$ , entonces cada componente  $e^{i(kx-\omega t)}$  de la onda progresiva viajará a una velocidad distinta. Estos sistemas se les conoce como **sistemas dispersivos**. Dado que las componentes tendrán distintas velocidades las ondas progresivas sufrirán diferentes efectos, tales como la deformación.

##### Velocidad de grupo

Supóngase que se tiene un grupo de ondas que se desplazan hacia la derecha y que para cierto instante  $t = 0$  viene dado por  $f(x)$ . Si el sistema fuera no dispersivo se sabría que la perturbación para cada  $t$  en  $f(x - vt)$ . Sin embargo, si se tiene un sistema dispersivo se debe

1. Descomponer la función  $f(x)$  en componentes de Fourier.
2. Cada componente evolucionará con respecto a su velocidad que será diferente para cada  $k$ .

Por tanto, primero se descompondrá en Fourier

$$1. f(x) = \int dk [\alpha(k)e^{ikx} + c.c.] = \int dk [A(k) \cos kx + B(k) \sin kx]$$

y se evolucionará  $f(x)$  en el tiempo

$$2.- \int dk [\alpha(k)e^{ik(x-v_ft)} + c.c.] = \int dk [A(k) \cos k(x - v_ft) + B(k) \sin k(x - v_ft)]$$

Como  $v_f$  depende de  $k$ , cada onda viajará a una velocidad distinta y ya no se recuperará la forma funcional original  $f(x - vt)$ .

Se considerarán dos ondas cercanas con la misma amplitud. Si se definen como  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  su contribución a  $f(x, t)$  será

$$\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (4.5.14)$$

Si se define

$$k_{\pm} = \frac{k_1 \pm k_2}{2} ; \quad \omega_{\pm} = \frac{\omega_1 \pm \omega_2}{2} \quad (4.5.15)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) &= A \cos((k_+ k_-)x - (\omega_+ + \omega_-)t) + A \cos((k_+ - k_-)x - (\omega_+ - \omega_-)t) \\ &= 2A \cos(k_+ x + \omega_+ t) \cos(k_- x - \omega_- t) \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

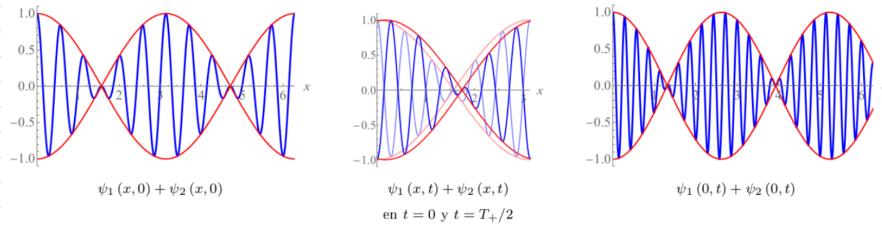
Aquí se ve que la suma de dos ondas viajeras pueden descomponerse en el producto de dos ondas viajeras. Este resultado es válido en general, pero en nuestro caso se tiene que los valores de  $k$  y  $\omega$  de las dos ondas son muy cercanos. Esto implica que  $k_- \ll k_+$  y  $\omega_- \ll \omega_+$ , por tanto la suma de las dos componentes será igual al producto de una onda que varía rápidamente,  $\cos(k_+ x - \omega_+ t)$  y otra que varía más lentamente. Ya se vio un comportamiento similar en el caso del batimiento. Allí se vio que la parte que varía lentamente actúa como una **envolvente** de la amplitud del paquete de onda. La velocidad de fase corresponde a la velocidad de la onda global y vale  $v_f = \omega_+ / k_+ \sim \omega_1 / k_1 \sim \omega_2 / k_2$ . La velocidad de grupo corresponde a la velocidad de la envolvente

$$v_g = \frac{\omega_-}{k_-} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.5.17)$$

Por tanto, puede definirse la **velocidad de grupo** como la **velocidad con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda (envolvente) se propagan en el espacio**.

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dt} \quad v_f = \frac{\omega(k)}{k} \quad (4.5.18)$$

De aquí puede verse que si  $\omega(k)$  es lineal en  $k$  (como es el caso de los sistemas no dispersivos) las velocidades de grupo y fase coinciden.



Puede ahora definirse un **paquete de ondas** como el conjunto de ondas en la descomposición en Fourier en la cual sólo contribuyen amplitudes con un valor de  $k$  cercano a cierto  $k_0$ . Cada semilongitud de onda envolvente constituye **paquete de ondas**, mientras que al conjunto de estos paquetes se llama **tren de ondas**.

Se estudiará ahora una forma general de la definición de la velocidad de grupo.

### Ejemplos de medios dispersivos

**Mecánica cuántica:** En mecánica cuántica las partículas son descritas como ondas de probabilidad. Estas ondas describen la probabilidad de la presencia de las partículas para un cierto conjunto  $(x, t)$ . La función  $|\Psi(x, t)|^2$  es una densidad de probabilidad, así si se quiere saber la probabilidad de encontrar una partícula en la región  $(a, b)$  en un instante  $t$  se calcula haciendo

$$\int dx |\Psi(x, t)|^2 \quad (4.5.19)$$

$$p = \hbar k$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} ; \quad \Psi = e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.5.20)$$

$$E = \hbar \omega$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi = -i \frac{E}{\hbar} \Psi \quad (4.5.21)$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (4.5.22)$$

### Ecuación de Klein-Gordon

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + m^2 c^4 \Psi = 0 \quad (4.5.23)$$

proponiendo soluciones del tipo  $\Psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ , se hallan relaciones de dispersión del tipo

$$-\hbar^2 \omega^2 + c^2 \hbar^2 k^2 + m^2 c^4 = 0 \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \Rightarrow E^2 p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.5.24)$$

y sus velocidades son

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 k^2}} = \frac{E}{p}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{c^2 k}{\left(c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^{1/2}} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 p}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} = \frac{p}{m} + \mathcal{O}() \quad (4.5.25)$$

### Ondas en la superficie del agua

→ Olas pequeñas: Sólo los efectos de tensión superficial del agua son relevantes

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}} \quad (4.5.26)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial y  $\rho$  la densidad. Esto es válido cuando  $\lambda = 2$  cm y las velocidades son

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} ; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \frac{3}{2} v_f \quad (4.5.27)$$

→ Para la longitud de onda larga en aguas profundas  $> 2$  cm

$$\omega = \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{g}{k}} ; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f \quad (4.5.28)$$

→ Longitudes de onda mayores que la profundidad

$$\omega = \sqrt{gH}k, \quad H \equiv \text{profundidad} \Rightarrow v_f = v_g = \sqrt{gH} \quad (4.5.29)$$

---

## 5. Ondas progresivas

---

1. ....	53
---------	----

---

### 5.1.