



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

GRADO EN FÍSICA

FÍSICA GENERAL III

---

## Apuntes Física General III

---

*Alumno:*

Navarro Bonanad, Rubén

*Profesor:*

Jose Carlos Guirado

**Grupo BL3**

Curso 2023-2024

# Índice

<b>1 Campo Eléctrico</b>	<b>4</b>
1.1 Fuerza entre cargas. Ley de Coulomb . . . . .	4
1.2 Campo eléctrico (CE). Líneas de campo . . . . .	4
1.3 El dipolo eléctrico . . . . .	5
1.4 Distribuciones continuas de carga . . . . .	6
1.5 Flujo de campo eléctrico. Ley de Gauss . . . . .	8
1.6 Potencial electrostático. Superficies equipotenciales . . . . .	11
1.7 Conductores y sus propiedades . . . . .	14
1.8 Capacidad. Condensadores . . . . .	16
1.9 Energía electrostática . . . . .	17
1.10 Dieléctricos . . . . .	17
<b>2 Corriente Continua</b>	<b>20</b>
2.1 Corriente y resistencias eléctricas . . . . .	20
2.2 Ley de Ohm . . . . .	20
2.3 Energía en los circuitos. Potencia . . . . .	21
2.4 Combinaciones de resistencias . . . . .	21
2.5 Leyes de Kirchoff . . . . .	22
2.6 Circuitos RC: carga y descarga de un condensador . . . . .	22
2.7 Balance de potencias . . . . .	23
<b>3 Magnetismo</b>	<b>24</b>
3.1 Fuerza ejercida por un campo magnético (CM) . . . . .	24
3.2 Movimiento de cargas en un CM. Ejemplos . . . . .	24
3.3 Acción de un CM sobre una espira . . . . .	26
3.4 Fuentes del campo: Ley de Biot y Savart . . . . .	27
3.5 Fuerza entre hilos: definición de Amperio . . . . .	29
3.6 Flujo magnético: Ley de Gauss en magnetismo . . . . .	29
3.7 Ley de Ampère . . . . .	30
3.8 Magnetismo en la materia: di-, para- y ferromagnetismo . . . . .	31
<b>4 Inducción electromagnética</b>	<b>32</b>
4.1 Inducción electromagnética (EM) . . . . .	32
4.2 Ley de Faraday-Lenz . . . . .	32
4.3 Autoinducción e inducción mutua en espiras y solenoides . . . . .	33
4.4 Energía magnética . . . . .	34
4.5 Circuitos RL . . . . .	35
<b>5 Corriente Alterna</b>	<b>37</b>
5.1 Introducción . . . . .	37
5.2 Transformadores . . . . .	37
5.3 Circuitos de CA . . . . .	38
5.A Trato de CA en complejos . . . . .	44
<b>6 Ondas Electromagnéticas (OEM)</b>	<b>47</b>
6.1 Hacia las ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento de Maxwell . . . . .	47
6.2 Las ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial . . . . .	48
6.3 Obtención de la ecuación de onda . . . . .	49
6.4 Conceptos relacionados con la energía de una OEM . . . . .	51
6.5 Propagación en medios dieléctricos (índice de refracción) . . . . .	53
6.6 La luz como OEM . . . . .	54
<b>7 Polarización</b>	<b>55</b>
7.1 Elipse de polarización . . . . .	55

7.2	Métodos de polarización . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Óptica geométrica</b>	<b>60</b>
8.1	Leyes básicas de reflexión y refracción . . . . .	60
8.2	Fenómenos ópticos . . . . .	60
8.3	Reflexión total interna . . . . .	61
8.4	Sistemas ópticos. Convenio de signos y elementos cardinales . . . . .	62
8.5	Dioptrio esférico . . . . .	64
8.6	Espejos . . . . .	65
8.7	Lentes: tipos y formación de imágenes . . . . .	67
8.8	Instrumentos ópticos . . . . .	68
<b>9</b>	<b>Interferencia y difracción</b>	<b>72</b>
9.1	Principio de superposición de OEMs . . . . .	72
9.2	Condiciones de interferencia. Visibilidad . . . . .	73
9.3	Franjas de Young . . . . .	73
9.4	Interferencias en películas delgadas . . . . .	74
9.5	Difracción. Poder de resolución . . . . .	75

# 1 Campo Eléctrico

1. Fuerza entre cargas. Ley de Coulomb.....	4
2. Campo eléctrico (CE). Líneas de campo .....	4
3. El dipolo eléctrico .....	5
4. Distribuciones continuas de carga.....	6
5. Flujo de campo eléctrico. Ley de Gauss.....	8
6. Potencial electrostático. Superficies equipotenciales.....	11
7. Conductores y sus propiedades .....	14
8. Capacidad. Condensadores .....	16
9. Energía electrostática .....	17
10. Dieléctricos .....	17

## 1.1 Fuerza entre cargas. Ley de Coulomb

- La fuerza entre dos cargas,  $Q_1, Q_2$ , del mismo tipo es repulsiva mientras entre dos cargas de distinto tipo es atractiva:

$$\text{repulsiva: } \frac{Q_1}{|Q_1|} = \frac{Q_2}{|Q_2|} \quad \text{attractiva: } \frac{Q_1}{|Q_1|} \neq \frac{Q_2}{|Q_2|}$$

- La magnitud de la fuerza es proporcional al producto de las dos cargas.
- La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las dos cargas.
- La dirección de la fuerza coincide con la línea que une las dos cargas.

$$\vec{F} = k \frac{qq'}{r^2} \hat{r} = k \frac{qq'}{r^3} \vec{r} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad \epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

Donde  $q, q'$  es el valor de la carga de las partículas puntuales,  $r$  la distancia entre las partículas,  $k$  la cte. de Coulomb,  $\epsilon_0$  la permitividad en el vacío y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

Robert Millikan estableció que la carga estaba cuantizada:  $e = 1.6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Es decir  $q = ke$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Fuerza ejercida por un sistema de cargas. Principio de superposición:** La fuerza eléctrica total (neta),  $\vec{F}$ , que actúa sobre una partícula cargada de carga  $q$  es la suma de todas las fuerzas eléctricas de las  $n$  partículas con carga  $q_i, i = 1, \dots, n$  que actúan sobre ella:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

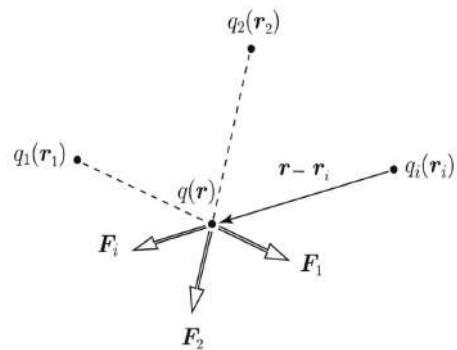


Fig 1.1.1: Principio de superposición aplicado sobre una carga  $q(r)$

## 1.2 Campo eléctrico (CE). Líneas de campo

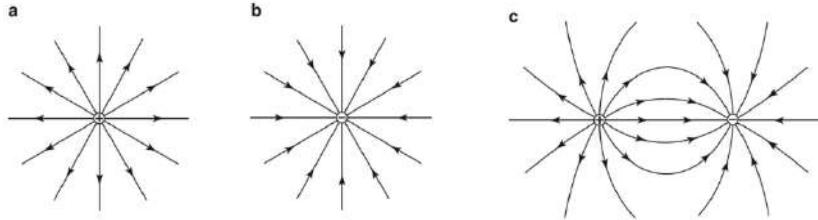
- Un campo eléctrico (CE),  $\vec{E}$ , es una propiedad del espacio (o una acción a distancia) que se define del siguiente modo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

- El campo eléctrico neto, en el caso de un sistema de  $n$  cargas, se define de manera análoga al caso de la fuerza de diversas cargas aplicando el principio de superposición:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

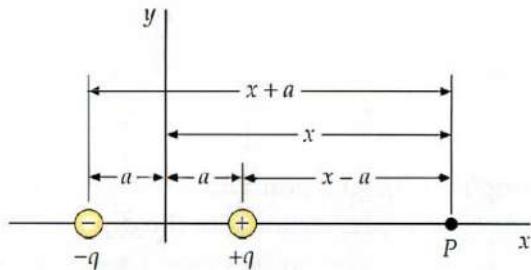
El CE puede visualizarse mediante **líneas de campo**, que son líneas tangentes al campo a la fuerza del CE en cada punto, del siguiente modo:



- Las líneas de campo siempre parten de cargas positivas (o del infinito) y mueren en cargas negativas (o en el infinito).
- La densidad de líneas de fuerza es proporcional al módulo (intensidad) del CE.
- Las líneas de campo no se cruzan (ley de Coulomb).

### 1.3 El dipolo eléctrico

Téngase el sistema de cargas de la siguiente figura:



Para  $x > a$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{kq}{(x-a)^2} \hat{i} + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \hat{i} = kq \left[ \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \hat{i} \\ &= kq \left[ \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right] \hat{i} = \boxed{kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i}} \end{aligned}$$

Fig 1.3.1: Dipolo eléctrico

Este resultado puede representarse gráficamente del siguiente modo:

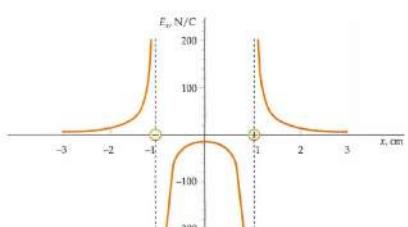


Fig 1.3.2: Intensidad del campo en dirección  $x$  ( $E_x$  N/C) frente a la distancia  $x$  cm

En caso que  $x \gg a$ :

$$\vec{E} = kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \hat{i} \approx kq \frac{4ax}{x^4} \hat{i} = \frac{4kqa}{x^3} \hat{i}$$

La expresión generalizada del campo de un dipolo  $\forall x$  en el eje de abscisas:

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2} \left[ \frac{(x-a)\hat{i}}{|x-a|} \right] + \frac{k(-q)}{(x+a)^2} \left[ \frac{(x+a)\hat{i}}{|x+a|} \right]$$

### Momento dipolar

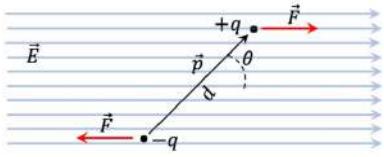
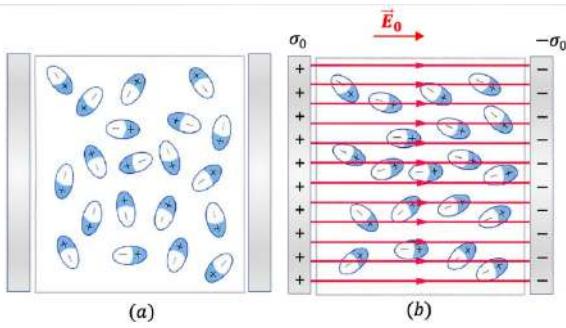


Fig 1.3.3: Representación del momento dipolar

- Sea  $d$  la distancia entre dos partículas cargadas y  $q$  la carga de ambas, entonces el momento dipolar,  $\vec{p}$  se define del siguiente modo:

$$\vec{p} = dq\hat{i}$$



Puede observarse que en la figura en (a) las partículas polares en un recipiente se orientan aleatoriamente mientras que en (b), al aplicar un campo entre las placas, las partículas se orientan según el campo (la parte electronegativa de las partículas se orienta hacia la placa positiva y la electropositiva hacia la negativa) por lo que

- Un dipolo inmerso en un CE sufre un momento de fuerzas:  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$
- El cambio de energía potencial es:

$$dU = \tau d\theta = pE \sin \theta d\theta \Rightarrow U = -pE \cos \theta + U_{\text{ref}}$$

$$U = 0 \text{ para } \theta = 90^\circ \rightarrow U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

## 1.4 Distribuciones continuas de carga

$$\text{Densidad lineal de carga} \equiv \lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

$$\text{Densidad superficial de carga} \equiv \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

$$\text{Densidad volumétrica de carga} \equiv \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Por tanto:

$$dq = \lambda dx \quad dq = \sigma dA \quad dq = \rho dV$$

Haciendo que:

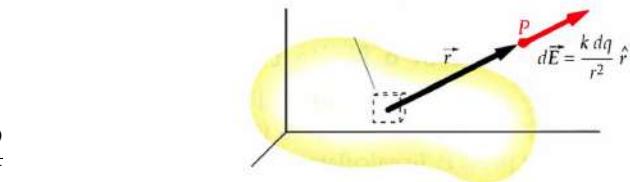


Fig 1.4.1: representación gráfica de la diferencial de campo producido por un diferencial de volumen

### CE en el eje de una línea de carga finita

Se analizará el CE generado por un elemento filiforme en el eje en que está dispuesto (eje paralelo). En este caso se analizará el eje x:  $\vec{E} = E\hat{i}$ . Para resolver este tipo de ejercicio se hace lo siguiente:

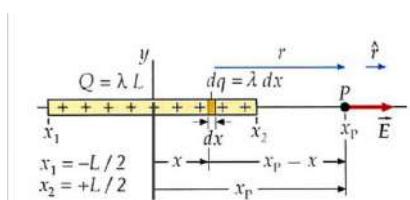


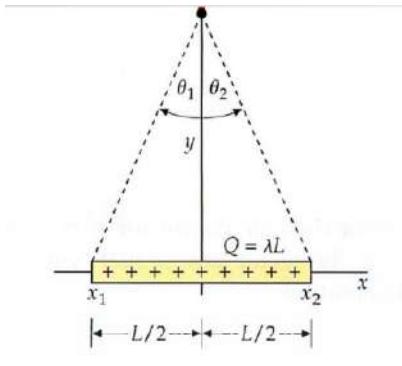
Fig 1.4.2: figura filiforme y campo generado en su eje.

- Se define un infinitesimal en la distribución.
- Se determina la dirección del campo diferencial.
- Se calcula el módulo del campo diferencial componente a componente.
- Se integra para toda la distribución.

$$dE = k \frac{dq}{(x_p - x)^2} = k \frac{\lambda dx}{(x_p - x)^2} \Rightarrow E = \int_{-L/2}^{L/2} k \frac{\lambda dx}{(x_p - x)^2} = k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_p - x)^2} = k\lambda \left[ \frac{1}{x_p - x} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$\boxed{E = k\lambda \left( \frac{1}{x_p - L/2} - \frac{1}{x_p + L/2} \right) = \frac{k\lambda L}{x_p^2 - (L/2)^2} = \frac{kQ}{x_p^2 - (L/2)^2}}$$

### CE en la bisectriz perpendicular a una línea de carga finita



Realizando un desarrollo análogo al anterior y teniendo en cuenta la simetría, se llega a

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{y} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}} \hat{j}$$

y, en el caso de un hilo de longitud infinita ( $L \rightarrow \infty$ ):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda}{y} \hat{j}}$$

Fig 1.4.3: CE generado en un punto a distancia y sobre la bisectriz de un línea de carga finita

### CE en el eje de un anillo

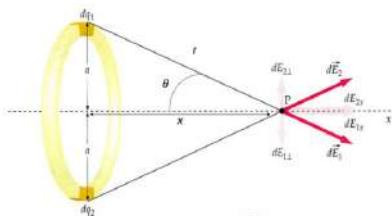


Fig 1.4.4: CE generado en el eje de un anillo

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E \hat{i} \\ dE &= k \frac{dq}{r^2} \cos \theta = k \frac{dq}{r^2} \frac{x}{r} \\ E &= \int \frac{kx}{r^3} dq = \frac{kx}{r^3} \int dq = \frac{kQx}{r^3} \\ \boxed{E = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}} \end{aligned}$$

### CE en el eje de un disco (bidimensional)

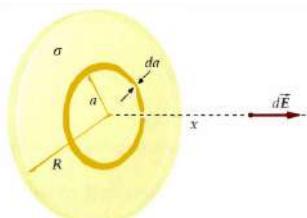


Fig 1.4.5: CE generado por un disco en un punto a distancia x de su eje.

$$dq = 2\pi\sigma \cdot a \cdot da \quad dE_{||} = \frac{kx2\pi\sigma a}{(x^2 + a^2)^{3/2} da}$$

$$E_{||} = kx2\pi\sigma \int_0^R \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} da = 2\pi k\sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

### CE generado por un plano infinito

Ahora se calculará el CE generado por un plano en un punto P a distancia x de su eje.

Si para el disco se toma  $R \rightarrow \infty$ , se tiene un plano infinito de carga  $\sigma$  y

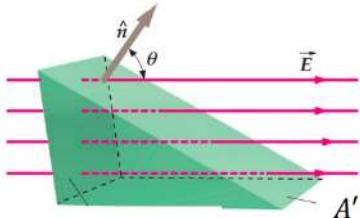
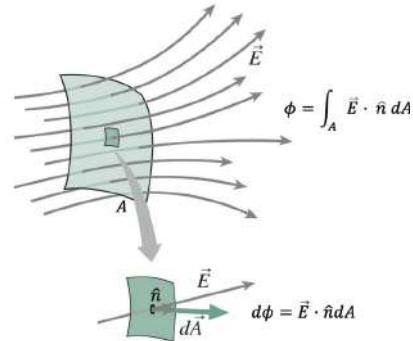
$$E_{||} = 2\pi k\sigma$$

## 1.5 Flujo de campo eléctrico. Ley de Gauss

La figura de la derecha ilustra la definición de flujo y diferencial de flujo a través de una superficie y un elemento diferencial de superficie, respectivamente.

$$\phi = \int_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

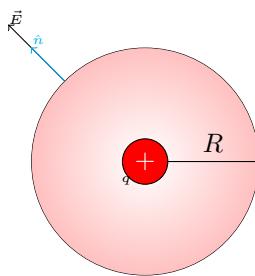
- Unidades: N·m<sup>2</sup>/C
- Puede entenderse como el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie  $A$ .



Se cumple que el flujo a través de una superficie cerrada  $A$  es igual al flujo a través de una superficie  $A'$ :  $\phi_A = \phi_{A'}$

$$\phi_{A'} = \vec{E} \cdot \vec{A}' = EA' \cos \theta = EA = \phi_A$$

### Ley de Gauss en el caso de una esfera con carga $q$ en el centro



$$\begin{aligned}\phi &= \int_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_A k \frac{q}{r^2} dA = k \frac{q}{R^2} \int_A dA = k \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 \\ \phi &= 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

### Ley de Gauss para cualquier superficie

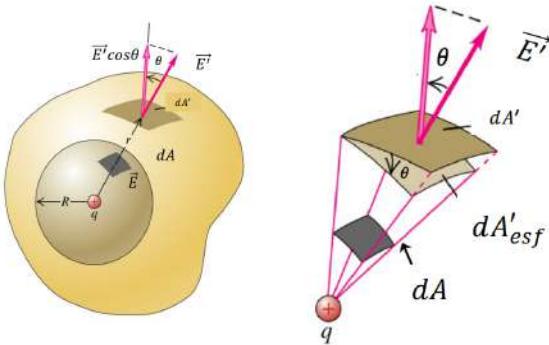


Fig 1.5.1: Flujo que atraviesa una superficie arbitraria  $A'$  y visualización de su diferencial de área.

Se intentará demostrar que  $d\phi_{dA'} = d\phi_{dA}$

$$(1) \text{ Se tiene: } \frac{kq}{r^2} = \frac{kq}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = E \frac{R^2}{r^2}$$

$$(2) \text{ Además: } dA'_{\text{esf}} = dA' \cos \theta$$

(3) Siendo  $A'_{\text{esf}}$  y  $A$  superficies esféricas:

$$dA'_{\text{esf}} = dA \frac{r^2}{R^2}$$

Usando (1), (2) y (3):

$$\begin{aligned}d\phi_{dA'} &= \vec{E}' \cdot \vec{dA}' = E' dA' \cos \theta = E \frac{R^2}{r^2} dA'_{\text{esf}} \\ &= E \frac{R^2}{r^2} dA \frac{r^2}{R^2} = E dA = d\phi_{dA}\end{aligned}$$

Es decir, el flujo sobre una superficie diferencial de la esfera es el mismo que el flujo sobre una superficie arbitraria. Esto generaliza la ley de Gauss para cualquier superficie cerrada  $A$ :

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.5.1)$$

**Opcional:** Puede demostrarse también la ley de Gauss usando el concepto de ángulo sólido

- \* El flujo de una carga puntual a través de una superficie esférica (no necesariamente cerrada) sólo depende del ángulo sólido  $\Omega$  subtendido por la superficie visto desde la carga.

$$\Omega = \frac{A}{R^2} \text{ (estereoradianes, sr)}$$

- \* El campo disminuye como  $r^2$  mientras que la superficie aumenta igualmente como  $r^2$ .

$$\begin{aligned} (d\phi)_dA &= \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \cos \theta dA = E dA_{\text{esf}} \\ &= \frac{kQ}{r^2} r^2 d\Omega = kQ d\Omega \end{aligned}$$

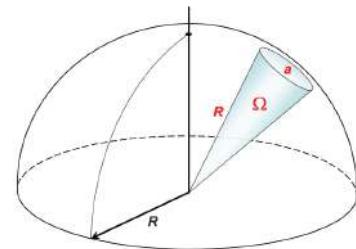
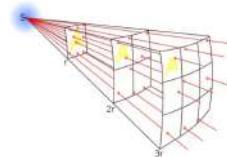


Fig 1.5.2: Visualización de un ángulo sólido.



Integrando para toda la superficie  $A$ :

$$\phi = \oint_A kQ d\Omega = kQ \oint_A d\Omega = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por el principio de superposición este resultado puede extenderse para cualquier distribución de carga:

$$\phi = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Se ha obtenido la 1<sup>a</sup> ecuación de Maxwell, válida para cualquier distribución de cargas a través de cualquier superficie cerrada.

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Debe tenerse en cuenta que

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = 0 \quad \phi = 0 \not\Rightarrow \vec{E} = 0$$

Puede visualizarse por qué las cargas externas no producen flujo neto y sólo “cuentan” las internas:

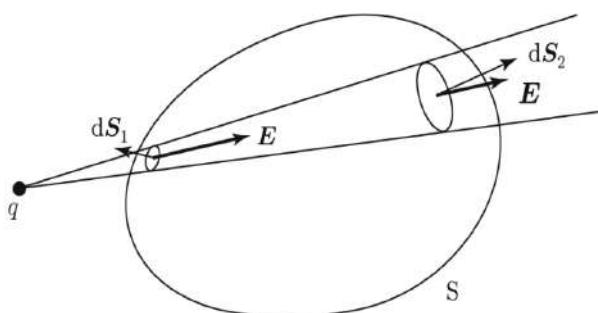


Fig 1.5.3

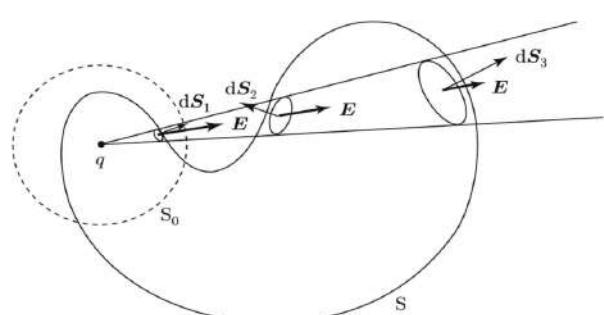


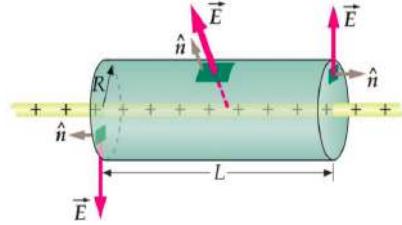
Fig 1.5.4

### Ejemplos muy relevantes de aplicación de Gauss - hilo infinito

La superficie gaussiana escogida para encerrar el hilo es un cilindro paralelo a este cuyos ejes coinciden. El flujo que atraviesa las “tapas” es nulo pues su normal es perpendicular a  $\vec{E}$ .

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0} = \frac{2k\lambda}{R}$$

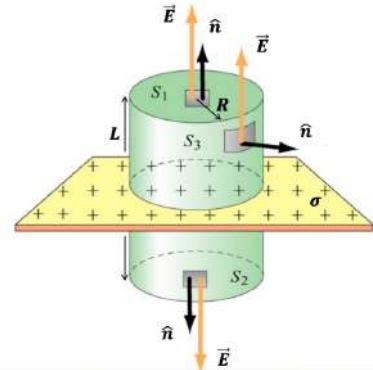


### Ejemplos muy relevantes de aplicación de Gauss - plano infinito

La superficie gaussiana escogida para encerrar el plano infinito es un cilindro. El flujo que atraviesa los laterales del cilindro es nulo, pues  $\vec{E}_{\text{lat}} \perp \vec{E}$ .

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 2 \cdot E \cdot \pi R^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

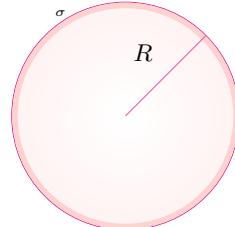
$$E = \frac{\sigma \pi R^2}{2\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon} = 2\pi k\sigma$$



### Ejemplos muy relevantes de aplicación de Gauss - esfera conductora

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

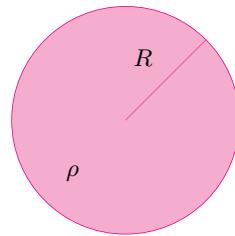
$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$



### Ejemplos muy relevantes de aplicación de Gauss - distribución esférica de carga

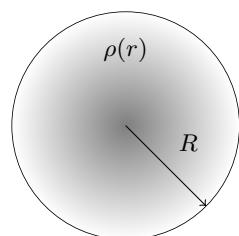
$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$



### Ejemplos muy relevantes de aplicación de Gauss - densidad variable

$$\phi = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



## 1.6 Potencial electrostático. Superficies equipotenciales

- Trabajo que realiza el campo para trasladar una carga de A hasta B

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F dr = -\Delta U$$

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{ext}} (= -W_{A \rightarrow B})$$

- Incremento de energía potencial:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Potencial electrostático**, o potencial,  $V$  (unidad: voltio  $\equiv V = J/C$ ):

$$dV = \frac{dU}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_B - V_{\text{ref}} = - \int_{\text{ref}}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para una carga puntual, su potencial electrostático es

$$V = \frac{kQ}{r}$$

y, para un conjunto de  $n$  cargas  $q_i$  en posiciones  $\vec{r}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por el principio de superposición:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{kq}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

**Continuidad del potencial:** El potencial  $V$  de un campo eléctrico  $\vec{E}$  es una función escalar que resulta ser continua siempre que  $|\vec{E}|$  tenga un valor finito:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_{\parallel} dl \quad (1.6.1)$$

### Superficies equipotenciales

- El campo eléctrico es perpendicular en cada punto de una superficie equipotencial: Si  $d\vec{l}$  transcurre sobre una superficie equipotencial:

$$dV = 0 = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l} \quad (1.6.2)$$

(ls líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales)

- Las superficies equipotenciales no se cortan entre sí. Si lo hacen se tendría lugares del espacio donde el campo eléctrico tendría más de una dirección.

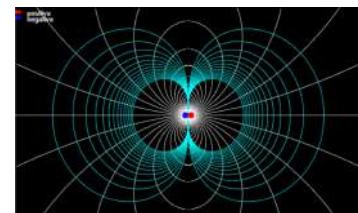
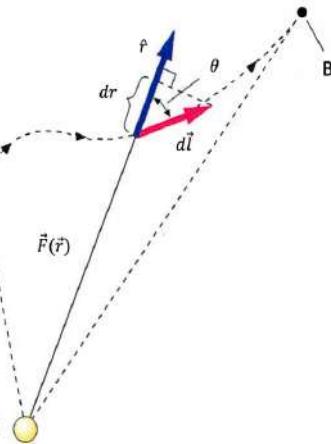
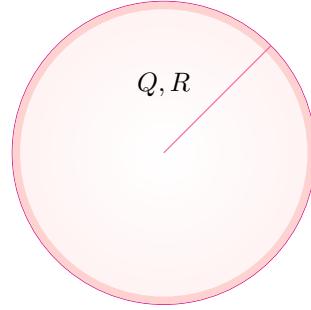


Fig 1.6.1: Representación gráfica de superficies equipotenciales del CE.

**Ejemplo: potencial de una esfera conductora de carga  $Q$  y radio  $R$**

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

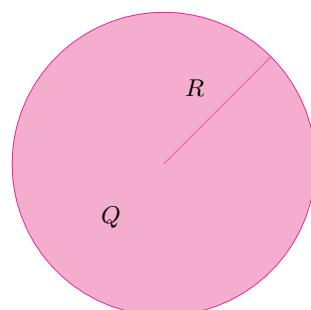


Se calcula el potencial:

$$\begin{aligned} r \geq R \rightarrow V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r} \\ r < R \rightarrow V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^R \frac{kQ}{r^2} dr - \int_R^r 0 \cdot dr = \frac{kQ}{R} \end{aligned}$$

**Ejemplo: potencial de una distribución esférica de carga  $Q$  y radio  $R$**

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}, & r < R \\ \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$



Se calcula el potencial:

$$\begin{aligned} r \geq R \rightarrow V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r} \\ r < R \rightarrow V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^R \frac{kQ}{r^2} dr - \int_R^r \frac{kQr}{R^3} dr = \frac{kQ}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

Si se grafica este potencial puede observarse como es continuo:

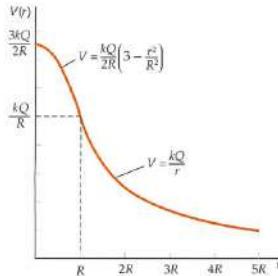


Fig 1.6.2: Puede observarse que en  $r = R$  la derivada del potencial  $V$  es continua, a diferencia de la de  $E$  (pues la segunda contiene un pico anguloso).

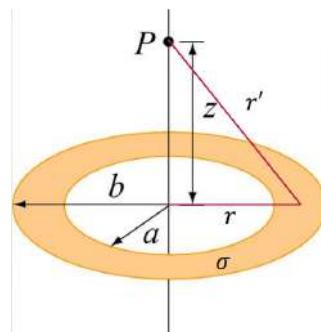
Otro modo de comprobar esto es sustituir  $r = R$  en las ambas expresiones de  $V$  ( $r < R$  y  $r \geq R$ ), lo es equivalente a tomar los límites laterales  $\lim_{r \rightarrow R^-}$  y  $\lim_{r \rightarrow R^+}$  para comprobar la continuidad

#### Cálculo del potencial de un anillo a lo largo de su eje

$$dV = k \frac{dq}{r'} \quad dq = \sigma 2\pi r dr$$

Se coloca el origen de potencial en  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} V(z) &= \int k \frac{dq}{r'} = \int_a^b k \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi\sigma k [\sqrt{r^2 + z^2}]_a^b \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$



Su campo puede calcularse a partir del potencial:  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \quad \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2} - \frac{1}{a^2 + z^2}} \right) \hat{k}$$

Figura	Varilla	Anillo	Disco
Expresar $dq$ en términos de la densidad de carga	$dq = \lambda dx'$	$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dA$
Sustituir $dq$ en la expresión de $dV$	$dV = k_e \frac{\lambda dx'}{r}$	$dV = k_e \frac{\lambda dl}{r}$	$dV = k_e \frac{\sigma dA}{r}$
Reescribir $r$ y su diferencial	$r = \sqrt{x'^2 + y^2}$	$dl = R d\phi' \quad r = \sqrt{R^2 + z^2}$	$dA = 2\pi r' dr' \quad r = \sqrt{r'^2 + z^2}$
Reescribir $dV$	$dV = k_e \frac{\lambda dx'}{(x'^2 + y^2)^{1/2}}$	$dV = k_e \frac{\lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$	$dV = k_e \frac{2\pi\sigma r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{1/2}}$
Integrar para obtener $V$	$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[ \frac{(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-(\ell/2) + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}} \right]$	$V = k_e \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$	$V = \frac{2k_e Q}{R^2} (\sqrt{z^2 + R^2} -  z )$
Derivar $E$ desde $V$	$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}$	$E_z = \frac{k_e Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	$E_z = \frac{2k_e Q}{R^2} \left( \frac{z}{ z } - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$
Límite de carga puntual	$E_y \approx \frac{k_e Q}{y^2} \quad y \gg \ell$	$E_y \approx \frac{k_e Q}{z^2} \quad z \gg R$	$E_y \approx \frac{k_e Q}{z^2} \quad z \gg R$

### Energía electrostática de un sistema de cargas

Ténganse dos cargas  $q_1, q_2$  con potenciales  $V_1, V_2$ , consecuencia de que se afectan la una a la otra:

$$q_1 V_1 = q_2 V_2 \implies q_1 \frac{kq_2}{r_{12}} = q_2 \frac{kq_1}{r_{21}}$$

Y la energía que debe aportarse para crear esta disposición de cargas es:

$$U_{\text{sys}} = q_2 V_2 = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

Si ahora se añade otra carga  $q_3$  con potencial  $V'_3$ , resultado de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , los potenciales de  $q_1$  y  $q_2$  se ven modificados a  $V'_1$  y  $V'_2$ , respectivamente. La nueva energía de formación de la disposición es:

$$\begin{aligned} U_{\text{sys}} &= \frac{1}{2}q_1 \frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}q_2 \frac{kq_2}{r_{21}} + q_3 V'_3 = \frac{1}{2}q_1 \frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}q_2 \frac{kq_2}{r_{21}} + q_3 \left( \frac{kq_2}{r_{23}} + \frac{kq_1}{r_{23}} + \frac{kq_1}{r_{13}} \right) \\ &= \frac{1}{2}q_1 \left( \frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}} \right) + \frac{1}{2}q_2 \left( \frac{kq_1}{r_{21}} + \frac{kq_3}{r_{23}} \right) + \frac{1}{2}q_3 \left( \frac{kq_2}{r_{23}} + \frac{kq_1}{r_{13}} \right) = \frac{1}{2}(q_1 V'_1 + q_2 V'_2 + q_3 V'_3) \end{aligned}$$

Si este procedimiento se itera, la energía de formación de una disposición de  $n$  cargas es

$$U_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V'_i$$

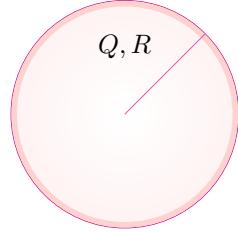
Siendo  $V'_i$  el potencial creado por las  $q_j$  cargas (por el principio de superposición), donde  $j \neq i$ .

Y, si se desea extender a sistemas continuos, es tan sencillo como integrar sobre el volumen donde se halla la carga:

$$U_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \int_l \lambda V(r') dl \quad U_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \int_S \sigma V(r') dS \quad U_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \int_{V'} \rho V(r') dV'$$

### Energía electrostática de una esfera conductora

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}} &= \frac{1}{2} \int_S \sigma V(S) dS = \frac{1}{2} \sigma V(S) \int_S dS = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot V \cdot 4\pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} QV = \frac{kQ^2}{2R} \end{aligned}$$



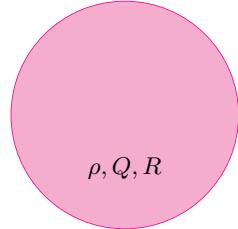
En este resultado puede apreciarse algo que es válido para todo conductor

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} QV$$

### Energía electrostática de una distribución esférica de carga

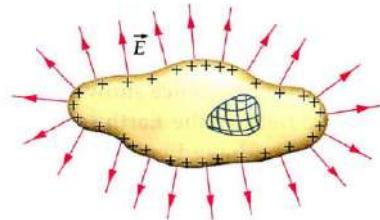
$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_S \rho V(r') dV' = \frac{3kQ^2}{5R} \neq \frac{1}{2} QV$$

por lo que una distribución esférica de carga **NO ES UN CONDUCTOR**



## 1.7 Conductores y sus propiedades

- Un material *conductor* permiten la movilidad total de sus cargas.
- En un material *aislantes* o *dieléctrico* la movilidad de los electrones está limitada por la estructura atómica particular del material.
- **CONDUCTOR ESTÁTICO:** *conductor con cargas en reposo y en equilibrio.*
- Si un conductor está en condición estática  $\Rightarrow \vec{E} = 0$ .
- Si el campo es nulo en el interior, la ley de Gauss dice que:

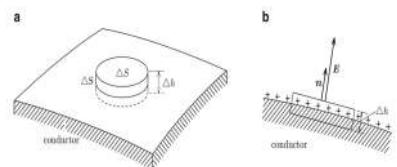


$$\vec{E} = 0 \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

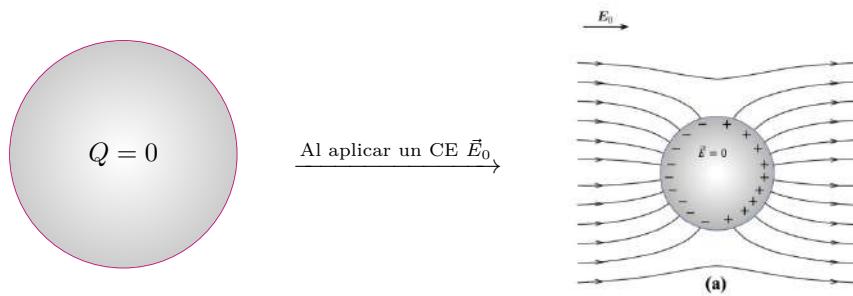
Puesto que la superficie Gaussiana puede ser arbitrariamente pequeña, la conclusión es que no hay cargas en el interior de un conductor estático.

1. La superficie de un conductor es equipotencial. En caso contrario el conductor no sería estático.
2. El CE en la cercanía de un conductor es perpendicular a su superficie.
3. El CE en la cercanía de una superficie cerrada conductora con densidad de carga  $\sigma$  equivale  $\sigma/\epsilon_0$ .

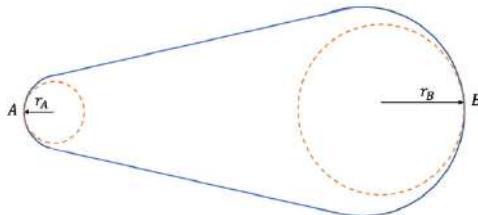
$$\int_{\Delta S} \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} = E \Delta S = Q_{\text{int}}/\epsilon_0 = \sigma \Delta S / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



4. **Inducción electromagnética:** reorganización de cargas en presencia de un CE.



5. **Efecto punta** (funcionamiento pararrayos):



$$V_A = V_B, \text{ pero } \sigma_A \neq \sigma_B$$

$$V_A = k \frac{Q_A}{r_A} = k \frac{Q_B}{r_B} = V_B \Rightarrow k \frac{\sigma_A 4\pi r_A^2}{r_A} = k \frac{\sigma_B 4\pi r_B^2}{r_B} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_B \frac{r_B}{r_A}$$

El CE y la densidad de carga son mayores en zonas con menor radio de curvatura ( $\sigma_A < \sigma_B; E_A > E_B$ ).

### Ejemplo

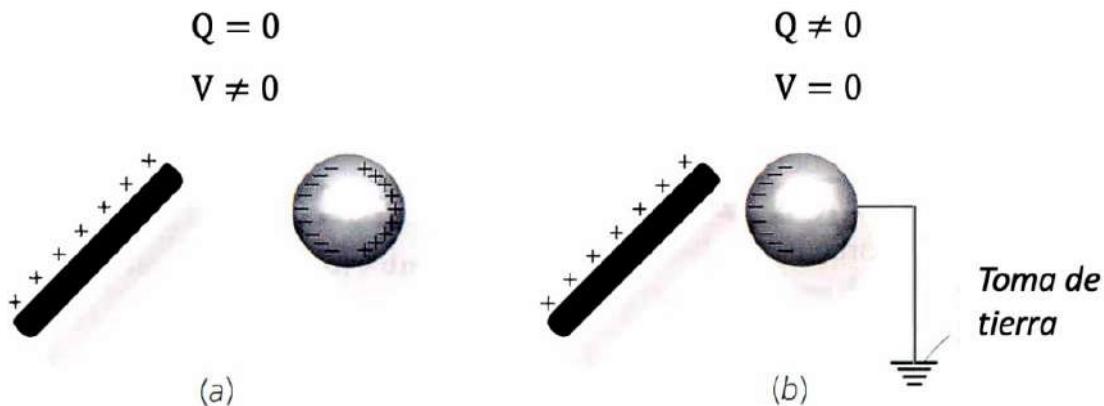
Se tiene dos esferas con carga inicial  $Q_1$  y  $Q_2$ ; calcúlese la carga final  $Q'_1$  y  $Q'_2$  en cada esfera conductora cuando se unen por un cable (considerar que las esferas están suficientemente lejos)



$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2)$$

$$Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (Q_1 + Q_2)$$

6. Conductor descargado vs conductor conectado a tierra



## 1.8 Capacidad. Condensadores

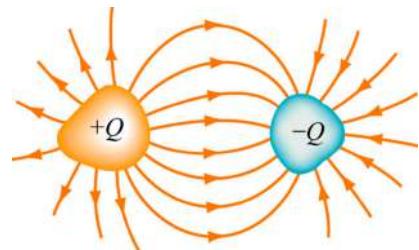
¿Cómo puede caracterizarse la energía almacenada en un conductor?

$$\text{En una esfera conductora} \rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

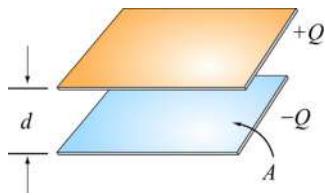
- El cociente  $Q/V$  indica la carga (por voltio) que una esfera es capaz de acumular
- El cociente  $Q/V$  sólo depende de elementos geométricos del conductor ( $R$ ).
- Esta propiedad puede extenderse a cualquier conductor (recordar que  $V = \text{cte.}$ )

$$C = \frac{Q}{V}$$

- La unidad de capacidad es el faradio [ $\mathbf{F}$ ] = [ $\mathbf{C}/\mathbf{V}$ ]
- Un condensador es un sistema de conductores capaz de acumular carga

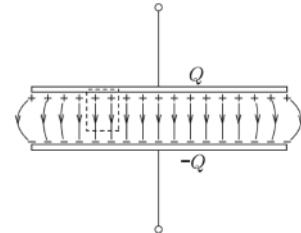


Condensador de placas plano-paralelas



Campo entre placas

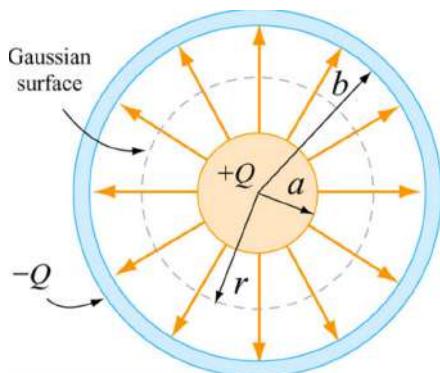
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



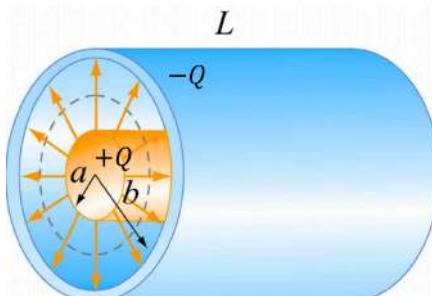
Cálculo de la capacidad  $C$ :

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{A} \cdot \frac{d}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q}{V} = C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

- Esfera conductora de  $R = 1$  m  $\rightarrow C = 56$  pF
- Placas  $A = 10 \times 10$  cm,  $d = 0.2$  mm  $\rightarrow C = 440$  pF

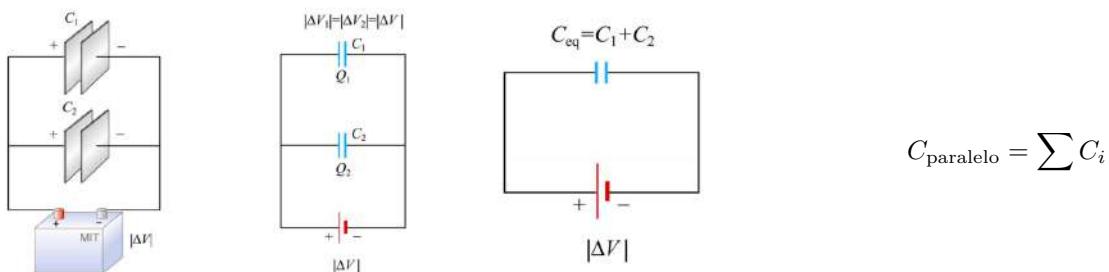
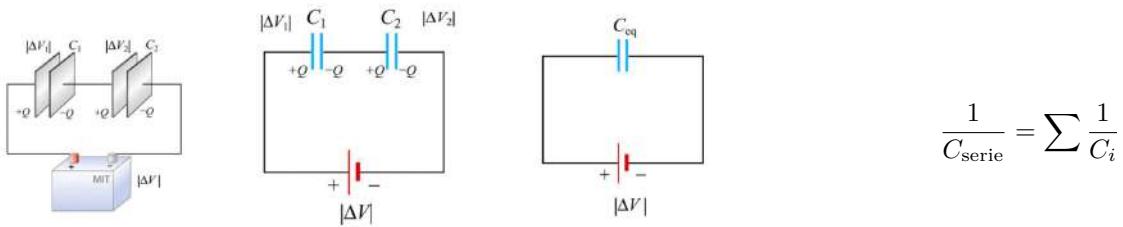


$$C = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{ab}{b-a} \right)$$



$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(a/b)}$$

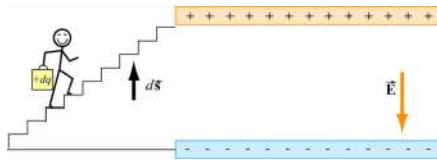
### Asociación de condensadores



## 1.9 Energía electrostática

$$dU = V dq = \frac{q}{C} dq$$

$$U = \int_0^q dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$



Densidad de energía:  $U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad) \implies \frac{\Delta U}{\Delta V'} = \boxed{u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$

## 1.10 Dieléctricos

En un material aislante o dieléctrico la movilidad de los electrones ( $e^-$ ) está limitada por la estructura atómica particular del material.

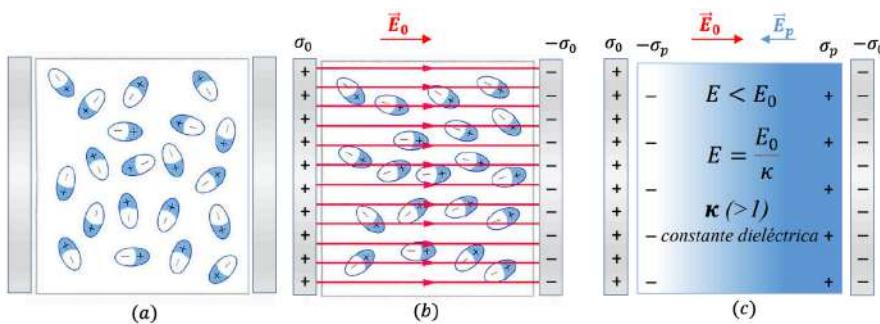
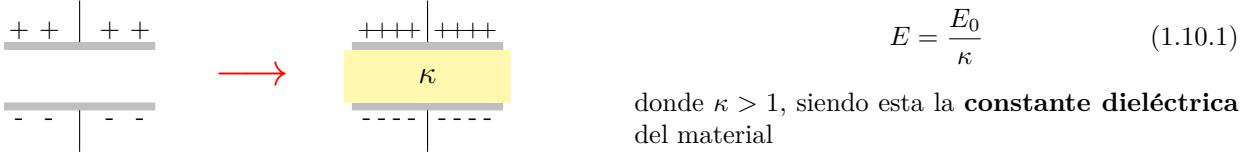


Fig 1.10.1: Se aplica un campo eléctrico  $\vec{E}_0$  (mediante las placas laterales) que induce en las moléculas de la placa del medio una orientación, generando un campo en ella de sentido opuesto,  $\vec{E}_p$

¿Son los dieléctricos “buenos” para construir condensadores? Es decir, ¿Aumenta su capacidad?

**Caso 1. Se introduce un dieléctrico en un condensador AISLADO ( $Q = \text{cte.}$ )**



Puede calcularse la nueva diferencia de potencial  $V$ :

$$V = Ed = \frac{E_0}{\kappa}d = \frac{V_0}{\kappa} < V_0, \quad (1.10.2)$$

por lo que la nueva capacidad  $C$  será:

$$C = \frac{Q}{V} = \kappa \frac{Q}{V_0} = \kappa C_0 > C_0. \quad (1.10.3)$$

Se define entonces  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$  como la *permitividad del dieléctrico*:

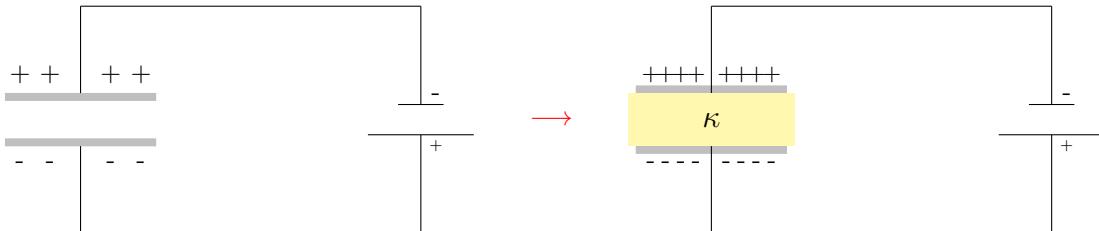
$$C = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}. \quad (1.10.4)$$

Y su energía electrostática  $U_0$  se ve modificada

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \quad ; \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa} \quad \Rightarrow \quad U_0 > U. \quad (1.10.5)$$

Es decir, la introducción de un dieléctrico en un condensador produce una disipación de energía (en forma de calor).

**Caso 2. Se introduce un dieléctrico en un condensador conectado a batería ( $V = \text{cte.}$ )**



Se calcula la nueva diferencia de potencial  $V$ :

$$V = V_0 \Rightarrow Ed = E_0 d \Rightarrow E = E_0!! \quad (1.10.6)$$

Sin embargo, la carga tiene que aumentar:

$$E = E_0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \kappa \sigma_0 \Rightarrow Q = \kappa Q_0, \quad (1.10.7)$$

Y la nueva capacidad  $C$ :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa Q_0}{V_0} = \kappa C_0 \quad (1.10.8)$$

Por lo que la energía electrostática  $U_0$  se ve modificada

$$U_0 = \frac{1}{2} Q_0 V_0; \quad U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \kappa Q_0 V_0 = \kappa U_0 \quad \Rightarrow \quad U_0 < U \quad (1.10.9)$$

Y el trabajo realizado por la batería es

$$W = V_0(Q - Q_0) = 2 \left( \frac{1}{2} Q V_0 - \frac{1}{2} Q_0 V_0 \right) = 2(U - U_0) \quad (1.10.10)$$

**Problema 1.** Calcular la capacidad de un condensador al que se le ha introducido un dieléctrico en la mitad izquierda (o derecha)



$$V_{12} = \frac{E_0}{\kappa} \frac{d}{2}; \quad V_{23} = E_0 \frac{d}{2}, \quad V_{12} + V_{23} \neq V_0$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q_0}{V_{12} + V_{23}} = \frac{Q_0}{\frac{E_0}{\kappa} \frac{d}{2} + E_0 \frac{d}{2}}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{V_0/2\kappa}{Q_0} + \frac{V_0/2}{Q_0} = \frac{1}{2\kappa C_0} + \frac{1}{2C_0}$$

Es decir, un condensador con un dieléctrico que ocupa la mitad de la distancia de este,  $d/2$ , es equivalente a dos condensadores de esta misma distancia,  $d/2$ , en el que uno de ellos contiene el mismo material dieléctrico (es decir, con igual cte. dieléctrica  $\kappa$ ).

**Problema 2.** Calcular la capacidad de un condensador al que se le ha introducido un dieléctrico en la mitad superior (o inferior)

$$V_1 = E_1 d = E_2 d = V_2; \quad V_0 \neq V_1 = V_2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\epsilon} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \kappa \sigma_2 \Rightarrow Q_1 = \kappa Q_2; \quad Q_0 = Q_1 + Q_2$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\kappa}{1+\kappa} Q_0 \\ Q_2 = \frac{1}{1+\kappa} Q_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \frac{A}{2} = \frac{\kappa \sigma_0 A}{1+\kappa} \\ \sigma_2 \frac{A}{2} = \frac{\sigma_0 A}{1+\kappa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2\kappa \sigma_0}{1+\kappa} \\ \sigma_2 = \frac{2\sigma_0}{1+\kappa} \end{cases}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q_0}{V_2} = \frac{Q_0}{E_2 d} = \frac{Q_0}{\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d} = \frac{Q_0}{\frac{2\sigma_0}{1+\kappa} \frac{d}{\epsilon_0}} = \frac{\frac{1+\kappa}{2} Q_0}{E_0 d} = \frac{\frac{1}{2} Q_0}{V_0} + \frac{\frac{\kappa}{2} Q_0}{V_0} = \frac{1}{2} C_0 + \frac{\kappa}{2} C_0 = C_{\text{eq,paralelo}}$$

Por lo que la capacidad de un condensador que contiene la mitad superior un dieléctrico es equivalente a la capacidad de dos condensadores en paralelo de los cuales uno tiene el mismo material dieléctrico

## 2 Corriente Continua

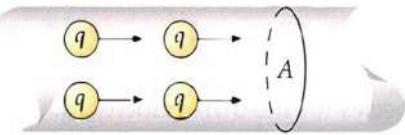
1. Corriente y resistencias eléctricas .....	20
2. Ley de Ohm .....	20
3. Energía en los circuitos. Potencia .....	21
4. Combinaciones de resistencias .....	21
4.1 Asociación de resistencias en serie .....	21
4.2 Asociación de resistencias en paralelo .....	21
5. Leyes de Kirchoff .....	22
6. Circuitos RC: carga y descarga de un condensador .....	22
6.1 Descarga de un condensador .....	22
6.2 Carga de un condensador .....	23
7. Balance de potencias .....	23

### 2.1 Corriente y resistencias eléctricas

- Intensidad de corriente  $I$

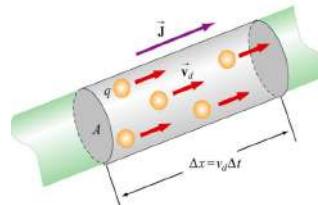
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

cuya unidad es el amperio A (=C/s)

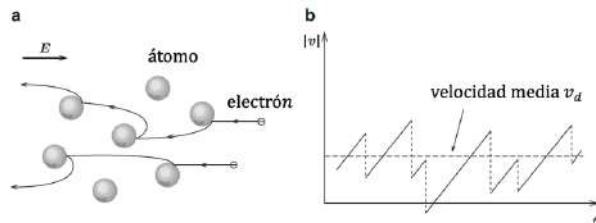


La carga depende del número de electrones  $n$  con carga elemental  $e$  que atraviesan un volumen  $\Delta V' = A\Delta x = Av_d\Delta t$ , donde  $v_d$  es la velocidad media de desplazamiento de los electrones, por lo que

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{neAv_d\Delta t}{\Delta t} = neAv_d$$



la velocidad de desplazamiento media de los electrones es de  $v_d \sim \text{mm/s}$



### 2.2 Ley de Ohm

Analícese el movimiento de una carga: supóngase que el electrón está sometido a una fuerza de carácter viscoso, es decir, proporcional a la velocidad,  $\eta v$ .

$$m \frac{dv}{dt} = eE - \eta v,$$

de modo que

$$v = \frac{eE}{\eta} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\eta t}{m} \right) \right] \xrightarrow[t \gg t \sim 10^{-10} \text{ s}]{t \gg} v = \frac{eE}{\eta}.$$

Por tanto

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = neAv_d \rightarrow \frac{I}{A} = \frac{ne^2}{\eta} E = \sigma E$$

que es la Ley de Ohm en su versión microscópica donde  $\sigma$  es la conductividad del material.

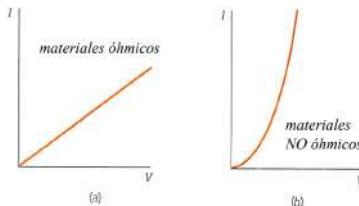
Ahora, la diferencia de tensión  $\Delta V$  es

$$\Delta V = E\dot{L} = \frac{I}{\sigma A} L = \left( \frac{L}{\sigma A} \right) I = RI$$

donde  $R$  es la resistencia del conductor, cuya unidad es el ohmio,  $\Omega = V/A$ . Por lo tanto se tiene la Ley de Ohm macroscópica.

$$\boxed{\Delta V = RI}$$

que se cumple en los materiales óhmicos.

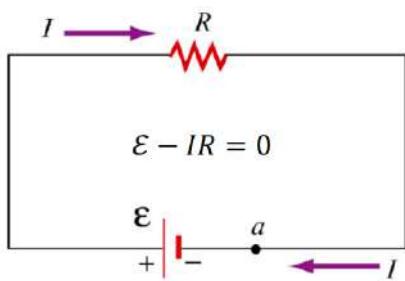


## 2.3 Energía en los circuitos. Potencia

$$\Delta U = \Delta Q \cdot \Delta V$$

El **calor de Joule** es la energía que se pierde en colisione. Esta contribuye al aumento de energía térmico. Debido al calor de Joule las resistencias disipan una potencia, que es

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \cdot \Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta V = I \cdot \Delta V = I^2 R$$



Téngase el circuito de la figura, en un caso ideal, la potencia suministrada por la batería es

$$P = I \cdot \varepsilon = I \cdot \Delta V$$

La fuerza electromotriz (f.e.m.) tiene que hacer que en el circuito la diferencia de potencial sea nula. Si se tiene en cuenta que la resistencia interna de la batería es  $r$ :

$$\varepsilon - Ir - IR = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

*Ejercicio:* Demostrar que si se tiene una batería con *fem*  $\varepsilon$  y resistencia interna  $r$  conectada a una resistencia  $R$ , la potencia máxima ocurre cuando  $r = R$

$$\begin{aligned} \varepsilon - Ir - IR = 0 &\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + R} & P_R = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2} \\ \frac{dP_R}{dR} = 0 &\Rightarrow \frac{\varepsilon^2(r + R)^2 - \varepsilon^2 R \cdot 2(r + R)}{(r + R)^4} = 0 \Rightarrow (r + R)^2 - 2R(r + R) = 0 \\ R^2 + 2rR + r^2 - 2R^2 - 2rR = 0 &\Rightarrow \boxed{R = r} \end{aligned}$$

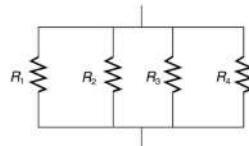
## 2.4 Combinaciones de resistencias

### 2.4.1 Asociación de resistencias en serie

$$\text{Diagrama: } R_1 - \text{---} R_2 - \text{---} R_3 - \text{---} R_4 - \text{---}$$

$$R_{\text{serie}} = \sum R_i \quad (2.4.1)$$

### 2.4.2 Asociación de resistencias en paralelo



$$\frac{1}{R_{\text{paralelo}}} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (2.4.2)$$

## 2.5 Leyes de Kirchoff

### 1<sup>a</sup> Ley de Kirchhoff. Ley de las mallas.

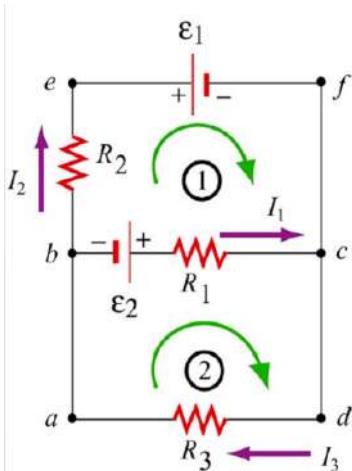
La suma de las diferencias de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado o malla en un circuito es cero. Esta ley es consecuencia del carácter conservativo del campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \sum_{\text{cerrado}} V_i = 0$$

### 2<sup>a</sup> Ley de Kirchhoff. Ley de los nodos.

La suma de las intensidades de corriente entrantes a cualquier nodo del circuito debe ser igual a la suma de las intensidades salientes de dicho nodo. Se define *nodo* como el punto de confluencia de tres o más ramas del circuito. Esta ley es consecuencia necesaria de la conservación de la carga.

$$\sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$$



Calcular la intensidad que circula por cada resistencia del circuito:

- Se aplica la ley de los nodos al nodo b:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

- Malla 1 (efcbe):  $-\varepsilon_1 - (-I_1)R_1 - \varepsilon_2 - I_2R_2 = 0$
- Malla 2 (bcdab):  $\varepsilon_2 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_2 R_3 + \varepsilon_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{-\varepsilon_2 R_3 - \varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{-\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_2 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

## 2.6 Circuitos RC: carga y descarga de un condensador

### 2.6.1 Descarga de un condensador

1) En  $t = 0$

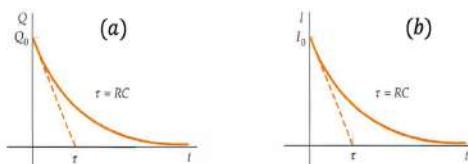
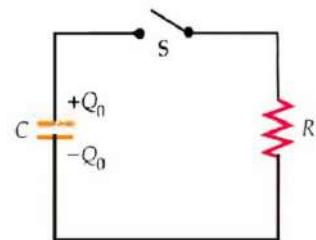
$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

2) Redefiniendo  $I$ :

$$I = -\frac{dQ}{dt} \rightarrow \frac{Q(t)}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

3) Solución:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau} \quad I = -\frac{dQ}{dt} = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau}$$



### 2.6.2 Carga de un condensador

1) Ley de las mallas:

$$\varepsilon - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

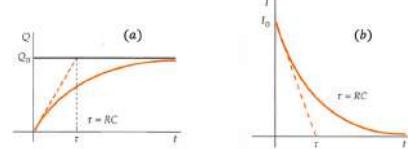
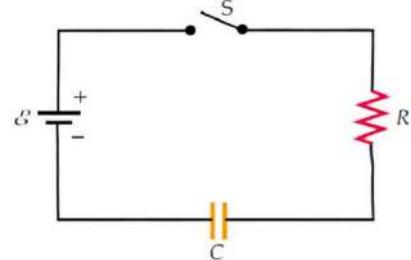
2) Se define  $I$ :

$$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \varepsilon - \frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0$$

3) Solución:

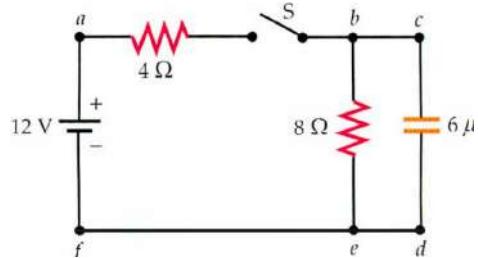
$$Q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_f \left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau} = I_0e^{-t/\tau}$$



Calcular la intensidad sobre cada resistencia cuando se cierra  $S$  ( $C$  inicialmente descargado):

- (a) Para  $t = 0$
- (b) Para  $t$  muy grande
- (c) Carga final del condensador



### 2.7 Balance de potencias

Durante la carga de un condensador, la batería con *fem*  $\varepsilon$  proporciona la energía necesaria para que la carga del condensador pase de  $Q_0 = 0$  a  $Q_f = C\varepsilon$ . Por tanto, el trabajo desarrollado por la batería es:

$$W_{fem} = Q_f \varepsilon = \varepsilon^2 C$$

Por otra parte, la energía acumulada en el condensador será:

$$U_C = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} Q_f \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^2 C$$

¿Dónde está la otra mitad de la energía proporcionada por la batería?

#### Calor de Joule

$$P_R = \frac{dW_R}{dt} = I^2 R = [I_0 e^{-t/RC}]^2 R = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC} \quad (I_0 = \varepsilon/R)$$

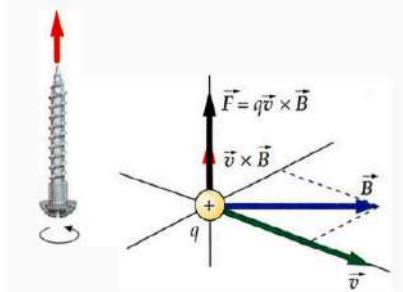
$$W_R = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} \varepsilon^2 C$$

### 3 Magnetismo

1. Fuerza ejercida por un campo magnético (CM) .....	24
2. Movimiento de cargas en un CM. Ejemplos .....	24
3. Acción de un CM sobre una espira .....	26
4. Fuentes del campo: Ley de Biot y Savart .....	27
5. Fuerza entre hilos: definición de Amperio .....	29
6. Flujo magnético: Ley de Gauss en magnetismo .....	29
7. Ley de Ampère .....	30
8. Magnetismo en la materia: di-, para- y ferromagnetismo .....	31

#### 3.1 Fuerza ejercida por un campo magnético (CM)

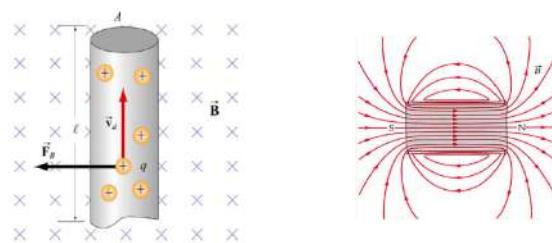
- La magnitud de la fuerza es proporcional a la magnitud de la carga.
- La magnitud fuerza es proporcional a la magnitud de la velocidad de la carga.
- La fuerza es perpendicular a la dirección de la velocidad.
- La fuerza es perpendicular a la dirección del campo magnético.
- La fuerza desaparece si la velocidad es paralela al campo magnético y su magnitud aumenta proporcionalmente con el seno del ángulo  $\theta$  que forman la velocidad y el campo.
- El sentido de la fuerza cambia (se invierte) si se invierte el signo de la carga.



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1.1)$$

#### Fuerza sobre un hilo de corriente

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (A\ell) \cdot n \\ \vec{F}_B &= nqA\ell(\vec{v} \times \vec{B}) = nqAv(\vec{l} \times \vec{B}) = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \\ d\vec{F}_B &= I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = I \int d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.1.2) \end{aligned}$$



#### 3.2 Movimiento de cargas en un CM. Ejemplos

En caso de que  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  sean perpendiculares, como en un ciclotrón

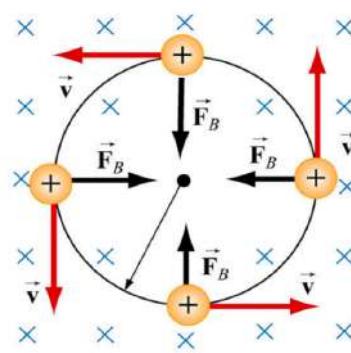
$$qvB = ma_n = m\frac{v^2}{r}, \quad (3.2.1)$$

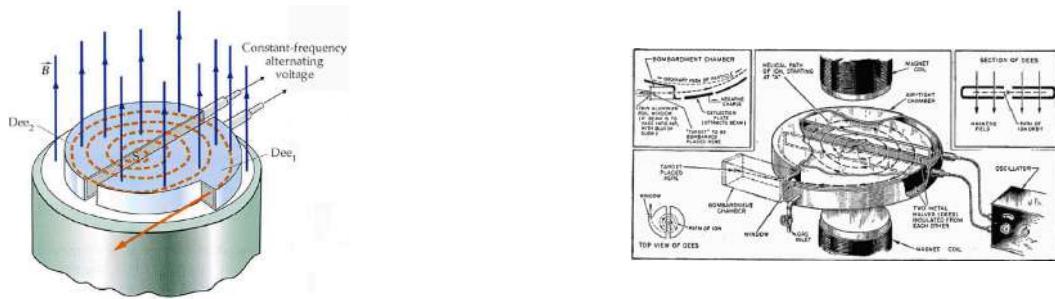
por lo que el radio de la órbita de la partícula es:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (3.2.2)$$

y el periodo  $T$  (o frecuencia  $f$ ) es:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (3.2.3)$$





De aquí pueden extraerse la velocidad a la que se hallan las partículas en el ciclotrón despejando  $v$  en lugar de  $r$  y se ve que  $v \propto r$ . También puede conocerse el ritmo de cambio de polaridad de las D's y (con la medida de la velocidad) la energía cinética:

$$v = \frac{qBr}{m} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBr}{m}\right)^2 \quad (3.2.4)$$

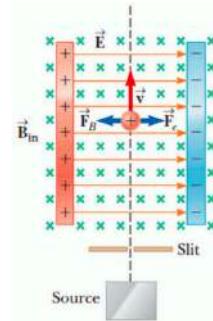
### Selector de velocidades

Para crear un selector de velocidades de partículas, puede crearse un espacio entre dos placas cargadas eléctricamente con cargas opuestas (que crearán un campo eléctrico  $\vec{E}$ ) en el que haya también un campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular al movimiento de la partícula. En esta zona del espacio la fuerza sobre la carga será

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = qE - qvB. \quad (3.2.5)$$

Para que la partícula pase a través del selector  $F = 0$  de modo que

$$qE = qvB \rightarrow v = \frac{E}{B} \quad (3.2.6)$$



### movimiento helicoidal, confinamiento magnético y auroras

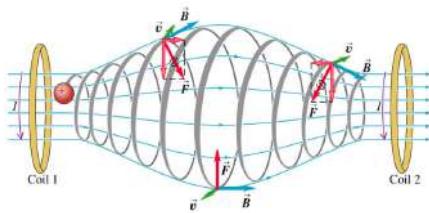


Fig 3.2.1: Confinamiento magnético de cargas.

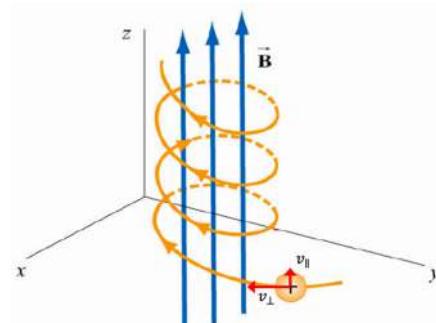
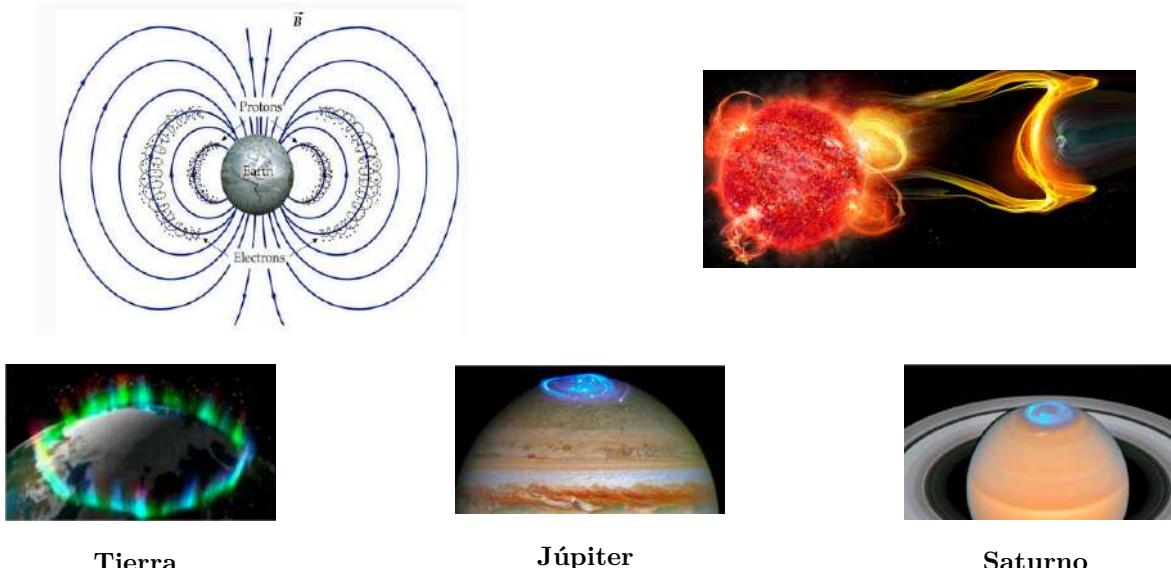


Fig 3.2.2: Movimiento helicoidal de una carga en torno a las líneas de campo magnético.

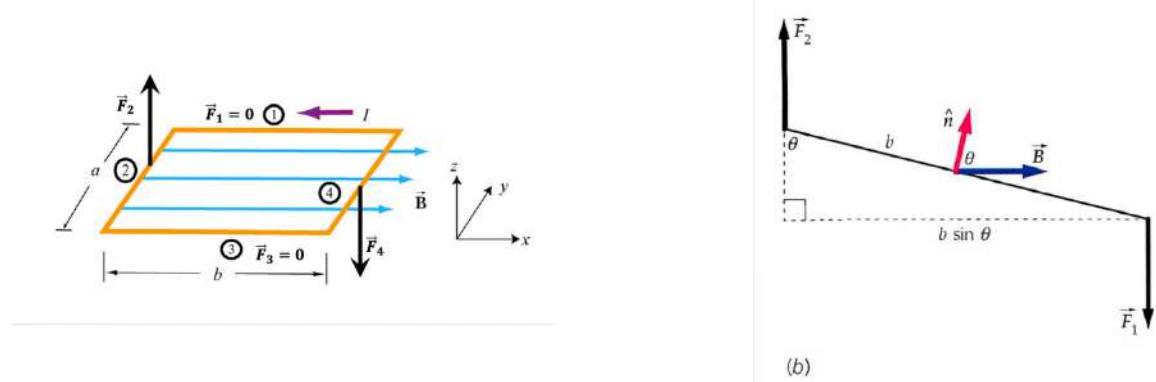


Tierra

Júpiter

Saturno

### 3.3 Acción de un CM sobre una espira



Como bien puede verse en la espira cuadrada de la figura de la izquierda la fuerzas sobre las secciones 1 y 3 de la espira son nulas,  $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = \vec{0}$ , pues mientras que en la sección 2 y 4 el módulo de las fuerzas es proporcional a la intensidad de corriente,  $I$ , que las recorre, su longitud,  $a$  y al módulo del campo magnético que las atraviesa,  $B$ , pues el campo magnético,  $\vec{B}$ , es perpendicular a la dirección de movimiento de las cargas (que es en el sentido que circula la intensidad de corriente,  $\vec{I}$ ), de modo que el módulo es máximo:

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = IaB. \quad (3.3.1)$$

El módulo del momento de fuerzas magnético (o torque magnético),  $|\vec{\tau}|$  es

$$|\vec{\tau}| = F_2 b \sin \theta = IabB \sin \theta = IBA \sin \theta, \quad (3.3.2)$$

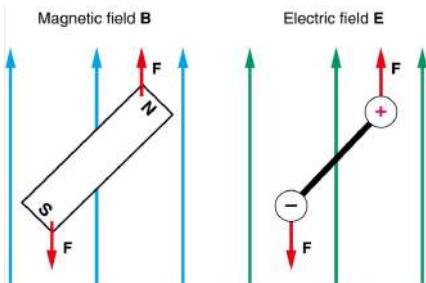
con lo que puede verse que la conclusión directa es que

$$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B} \xrightarrow{\text{en el caso de } N \text{ espiras}} \vec{\tau} = NIA\hat{n} \times \vec{B}. \quad (3.3.3)$$

Otro modo de expresar el torque magnético es

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\mu} = NIA\hat{n}, \quad (3.3.4)$$

donde  $\vec{\mu}$  es el momento magnético de una espira de  $N$  vueltas y superficie  $A$  por la que circula una intensidad  $I$ .



En la figura adyacente puede observarse la similitud entre un dipolo magnético y uno eléctrico donde

$$\vec{\tau}_m = \vec{p} \times \vec{B} \quad \vec{\tau}_e = \vec{p} \times \vec{E} \quad (3.3.5)$$

son los respectivos momentos de fuerzas.

Puede recordarse que la energía potencial del dipolo eléctrico era  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  con lo que, análogamente, puede hallarse el potencial del dipolo magnético intercambiando  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$  y  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$

$$U = -\vec{\mu} \times \vec{B} \quad (3.3.6)$$

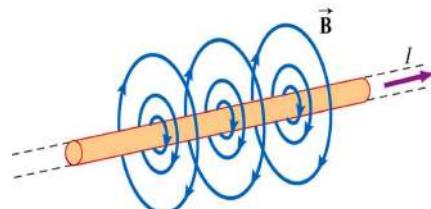
### 3.4 Fuentes del campo: Ley de Biot y Savart

Téngase un hilo infinito de corriente por el que circula una intensidad de corriente  $I$ , entonces, el campo magnético,  $\vec{B}$ , que se genera en torno a este varía con la inversa de la distancia al hilo en cilíndricas,  $r$ . Recuérdese que el campo eléctrico también variaba con la misma dependencia:

$$B \propto \frac{1}{r}, \quad \vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}. \quad (3.4.1)$$

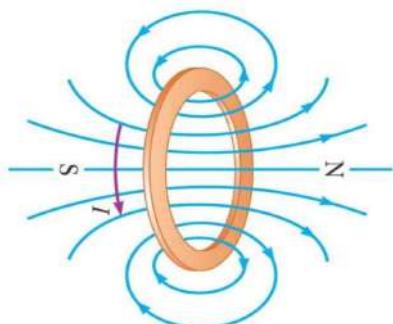
¿Es esta similitud una mera coincidencia?

Como bien puede imaginarse, no, no se trata de una coincidencia, sino que la ley (empírica) que cumple el campo magnético es similar en forma a la forma diferencial del campo eléctrico



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (3.4.2)$$

siendo la ecuación diferencial recuadrada la conocida como Ley de Biot-Savart y la forma integrada de la derecha el caso del hilo infinito.



Para hallar el CM en el centro de una espira de radio  $R$  por la que circula una intensidad de corriente  $I$  puede aplicarse Biot-Savart como sigue

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{R^2} \Rightarrow \\ B &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Ahora se analizará el caso del CM en el eje de una espira

Puede observarse que las componentes  $dB_z = 0$  y que, por simetría, cada elemento  $d\vec{\ell}_1$  que genera un diferencial de campo en dirección  $y$ ,  $dB_y$ , se ve anulado por el diferencial de campo que genera  $d\vec{\ell}_2 = -d\vec{\ell}_1$ , que es  $-dB_y$ , de modo que

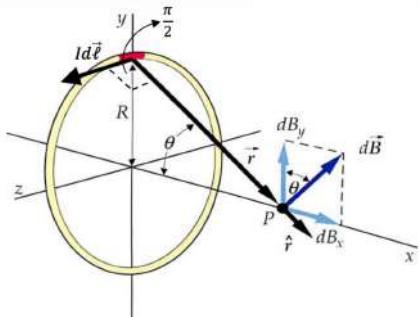
$$B_y = \int dB_y = 0. \quad (3.4.4)$$

Con un poco de trigonometría puede verse que la componente  $x$  es

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin(\pi/2)}{r^2} \sin \theta \quad (3.4.5)$$

De modo que, integrando

$$\begin{aligned} B_x &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int d\ell = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$



De modo que para un punto a distancia  $x$  del centro de la espira en su eje perpendicular el campo magnético es

$$\boxed{\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i}} \quad (3.4.7)$$

y para distancias muy lejanas, es decir,  $x \gg R$

$$\boxed{\vec{B}(x \gg R, 0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{|x|^3} \hat{i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} \hat{i}} \quad (3.4.8)$$

### CM de un hilo de corriente

La de Biot Savart aplicada a un hilo de corriente queda (en módulo) queda como sigue

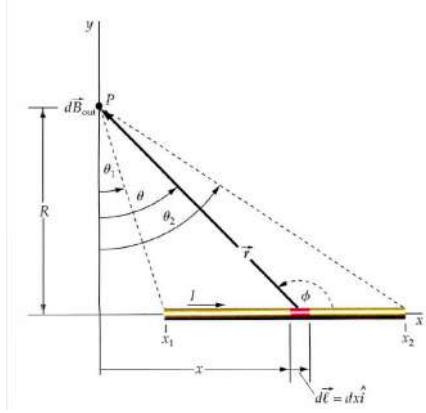
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \sin \phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta \quad (3.4.9)$$

de modo que, integrando en un hilo finito de corriente queda

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1). \quad (3.4.10)$$

En caso de que el hilo fuera infinito  $\theta_1 = -\pi/2$  y  $\theta_2 = \pi/2$ , de modo que:

$$B(\text{hilo infinito}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3.4.11)$$

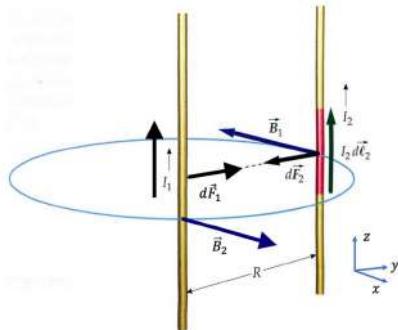


### 3.5 Fuerza entre hilos: definición de Amperio

Téngase dos hilos infinitos a una distancia  $R$  por los que circula una intensidad de corriente  $I_1$  e  $I_2$  paralelas, respectivamente, como en la figura. El primer hilo generará un campo magnético

$$\vec{B}_1 = - \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R} \right) \hat{i}, \quad (3.5.1)$$

mientras que el segundo generará un campo  $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$ . Ambos generarán una fuerza magnética debida al desplazamiento de los electrones



La fuerza que se ejerce sobre el primer hilo debido al segundo será

$$dF_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 = I_1 d\vec{l}_1 \hat{k} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{R} \right) \hat{i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} d\vec{l}_1 \hat{j}. \quad (3.5.2)$$

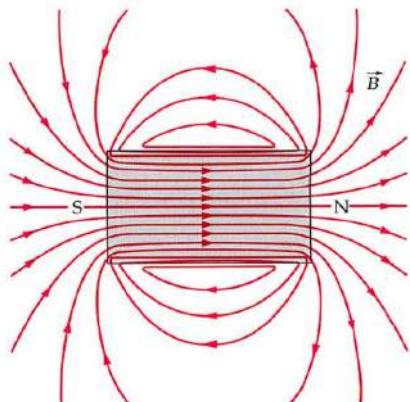
La fuerza del primero sobre el segundo tiene la misma dirección pero sentido opuesto y  $d\vec{l}_1 \rightarrow d\vec{l}_2$ :

$$d\vec{F}_2 = -d\vec{F}_1 \frac{d\vec{l}_2}{d\vec{l}_1} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} d\vec{l}_2 \hat{j} \quad (3.5.3)$$

Se define la unidad de corriente, el **Amperio**, como sigue: dados dos cables de corriente de longitud infinita y sección despreciable separados por 1 m por los que circula la misma intensidad tal que produce una fuerza entre los hilos por unidad de longitud igual a  $2 \times 10^{-7}$  N m<sup>-1</sup>.

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} d\vec{l}_1 \Rightarrow \frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2}{R} \Rightarrow 2 \times 10^{-7} \text{ N m}^{-1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}}{4\pi} \frac{2I^2}{1 \text{ m}} \Rightarrow I = 1 \text{ A.} \quad (3.5.4)$$

### 3.6 Flujo magnético: Ley de Gauss en magnetismo



Mientras que para el campo magnético la Ley de Gauss resulta útil para calcular campos eléctricos, en el magnetismo esto no se traslada exactamente pues

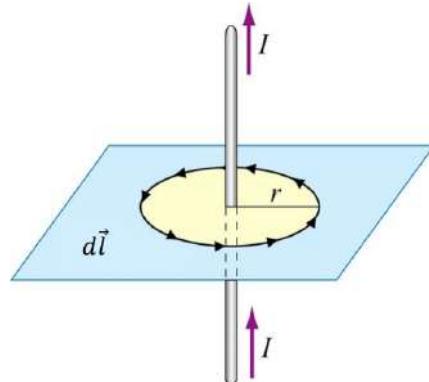
$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0. \quad (3.6.1)$$

Esto viene a comunicar que las líneas de campo magnético se cierran sobre sí mismas y que no existen los monopolos magnéticos en la naturaleza

### 3.7 Ley de Ampère

La ley de Ampère dice que la integral de camino cerrado (a lo largo de un circuito cuyo punto inicial es el final) del producto escalar entre el campo magnético  $\vec{B}$  y un elemento de línea del camino  $d\vec{l}$  es el producto de la permitividad eléctrica del vacío por la corriente,  $I_C$ , que circula por una zona

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad (3.7.1)$$

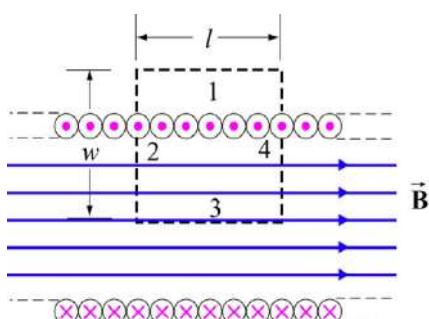
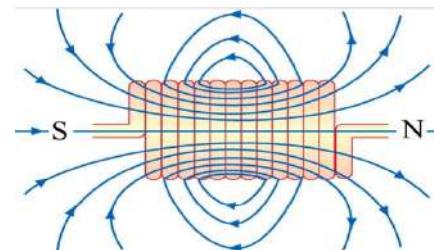
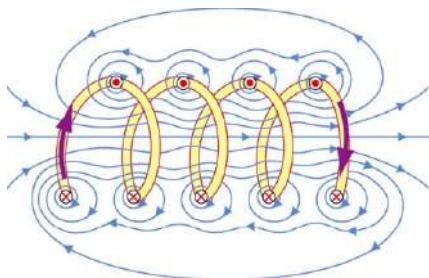


Que, aplicada a una distancia  $R$  de un hilo infinito por el que circula una corriente  $I$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cdot dl = B \oint dl = B 2\pi R = \mu_0 I_C \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \quad (3.7.2)$$

Se ha podido extraer el campo  $B$  debido que para una distancia  $R = \text{cte}$ , es también es constante.

#### CM en el eje de un solenoide ideal



Se escogerá un camino rectangular que atravesará las paredes del solenoide de lado  $w$  y longitud  $l$  como el de la figura, por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n l \cdot I, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

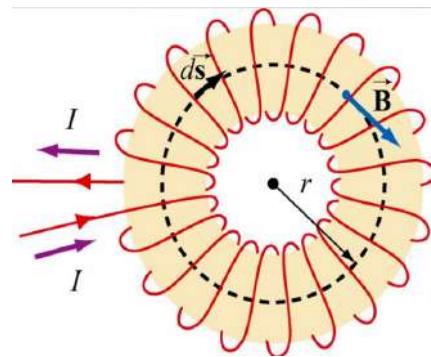
de modo que

$$B = \mu_0 n I. \quad (3.7.4)$$

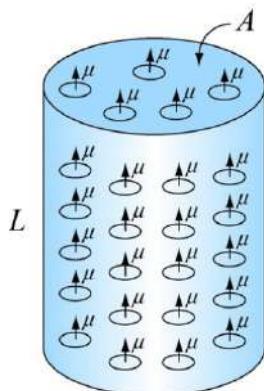
Las integral en 1 se anula puesto que no hay campo magnético,  $\vec{B} = \vec{0}$ , mientras que las de 2 y 4 lo hacen porque  $d\vec{l} \perp \vec{B}$ .

#### CM en el isobaricentro un toroide

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (3.7.5)$$



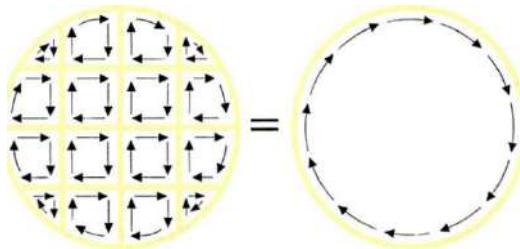
### 3.8 Magnetismo en la materia: di-, para- y ferromagnetismo



**Materiales diamagnéticos:** el campo  $B$  dentro del material es menor que el campo aplicado  $B_0$ .

**Materiales paramagnéticos:** El campo  $B$  dentro del material es tan solo ligeramente superior al campo aplicado  $B_0$ .

**Materiales ferromagnéticos:** el campo  $B$  dentro del material es muy superior al campo aplicado  $B_0$ .



En primer lugar puede definirse el **campo dentro del material** de modo similar a como se hace en un solenoide

$$\vec{B}_M = \mu_0 n I_A. \quad (3.8.1)$$

Puede definirse entonces la **magnetización o imanación** del material:

$$\vec{M} = n I_A \quad (3.8.2)$$

de modo que

$$\boxed{\vec{B}_M = \mu_0 n I_A = \mu_0 \vec{M}}. \quad (3.8.3)$$

Finalmente se van a definir algunos conceptos como la **susceptibilidad magnética**  $\chi_m$

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (3.8.4)$$

la **permeabilidad magnética** del material  $\mu_m$

$$\mu_m = (1 + \chi_m) \mu_0 \quad (3.8.5)$$

y el campo total del material

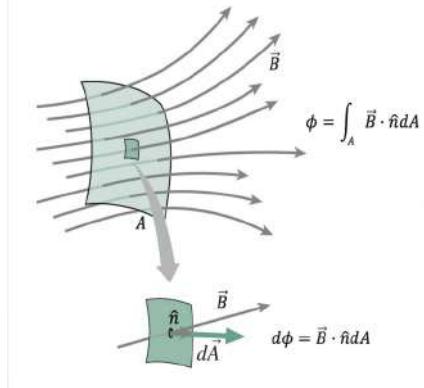
$$\vec{B}_{\text{Total}} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \vec{B}_0 (1 + \chi_m). \quad (3.8.6)$$

Los materiales paramagnéticos cumplen que  $\chi_m > 0$  y  $\mu_m > 0$ , mientras que los diamagnéticos cumplen que  $\chi_m < 0$  y  $\mu_m < 0$ .

## 4 Inducción electromagnética

1. Inducción electromagnética (EM) .....	32
2. Ley de Faraday-Lenz .....	32
3. Autoinducción e inducción mutua en espiras y solenoides .....	33
4. Energía magnética.....	34
5. Circuitos RL .....	35

### 4.1 Inducción electromagnética (EM)



Michael Faraday y Joseph Henry estudiaron y formalizaron la inducción electromagnética en 1830.

El **flujo magnético**  $\phi$  se define como la cantidad de campo magnético que atraviesa una superficie

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (4.1.1)$$

y su unidad es el Weber,  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$ .

### 4.2 Ley de Faraday-Lenz

La ley de Faraday-Lenz viene a decir que el sentido de la corriente inducida,  $\varepsilon_{\text{in}}$ , es tal que se opone al cambio de flujo magnético que genera dicha corriente

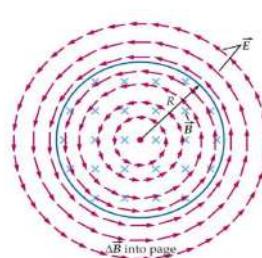
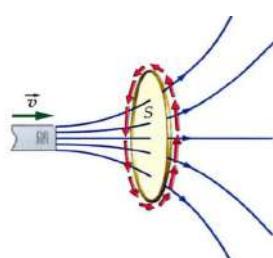
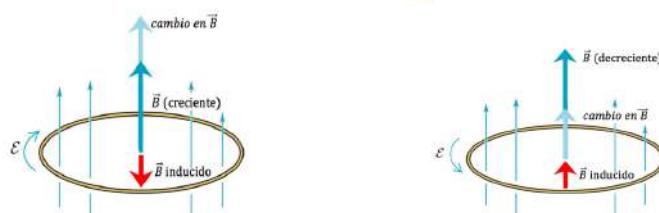
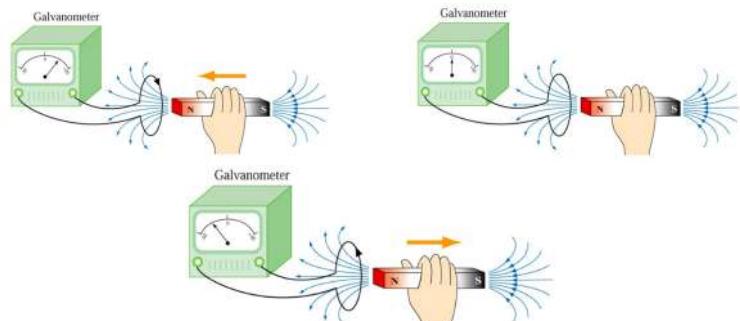
$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad (4.2.1)$$

Esta ley nace de la tercera ecuación de Maxwell

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA \\ &= -\frac{d\phi_m}{dt} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

lo que implica que el CE,  $\vec{E}$  generado por CMs variables **no es conservativo**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.2.3)$$



Como consecuencia de la tercera ley de Maxwell el motivo por el que aparece una f.e.m. inducida puede ser uno de los siguientes (o una combinación):

1. variación del vector campo magnético,  $\vec{B}$ , en el tiempo, bien porque este crece o decrece en módulo o porque su dirección varía.
2. variación del vector superficie  $d\vec{A}$ , nuevamente bien por una variación en su módulo o en su dirección.

Si se tiene un hilo inmerso en un campo magnético y este se mueve con una velocidad  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , se generará lo que se conoce como f.e.m. de movimiento. El hilo sufrirá una fuerza magnética y una eléctrica que se verán compensadas

$$F_m = F_e \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow E = vB \quad (4.2.4)$$

y el potencial, la f.e.m- inducida será

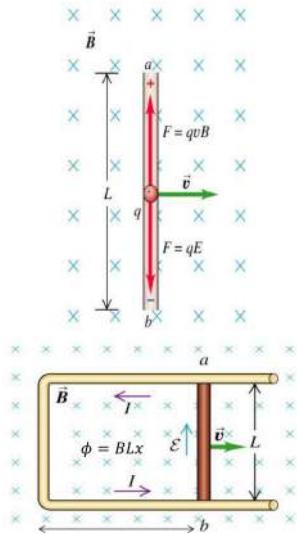
$$V = EL = vBL \quad (4.2.5)$$

Mientras tanto, si se desplaza un hilo móvil conectado con otro hilo de modo que forman un circuito cerrado constantemente (como en la figura de la derecha), se tendrá una f.e.m. inducida de la siguiente forma

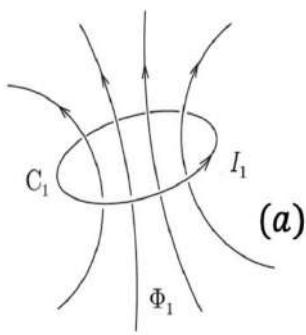
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv \quad (4.2.6)$$

La forma general de la f.e.m. de movimiento es

$$\varepsilon_{in} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad (4.2.7)$$



### 4.3 Autoinducción e inducción mutua en espiras y solenoides



El módulo del campo magnético,  $B$ , es proporcional a  $I$ , por tanto  $\phi$  es proporcional a  $I$  de modo que

$$\phi_1 = L_1 I_1 \quad (4.3.1)$$

donde  $L$  se denomina **autoinducción de la espira**, cuya unidad es el **henrio** (H),  $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb A}^{-1} = 1 \text{ T m}^2 \text{ A}^{-1}$ .

La *fem autoinducida*, según la ley de Faraday, resulta ser

$$\varepsilon_{in} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (4.3.2)$$

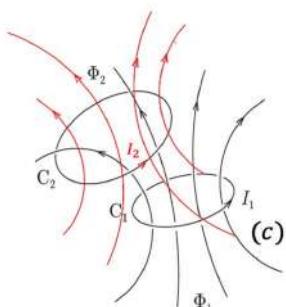
Si se tienen dos espiras, ambas se inducen mutuamente una fem, de modo que la fem inducida sobre la segunda espira por la primera es

$$\phi_{2,mut} = M_{12} I_1 \quad (4.3.3)$$

donde  $M_{12}$  es la **inducción mutua**.

De este modo la fem inducida total de cada espira es

$$\begin{aligned} \phi_1 &= L_1 I_1 + M_{21} I_2 \\ \phi_2 &= L_2 I_2 + M_{12} I_1 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$



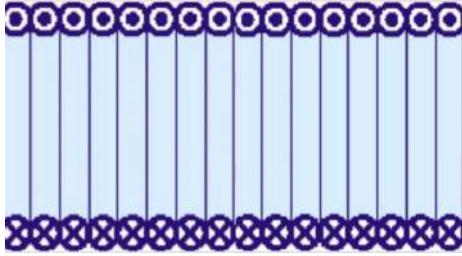
De este modo, la *fem autoinducida*, según la ley de Faraday es

$$-\varepsilon_{\text{in}}(1) = \left( L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(L_1 I_1 + M I_2), \quad -\varepsilon_{\text{in}}(2) = \left( L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(L_2 I_2 + M I_1) \quad (4.3.5)$$

donde en la última igualdad se asume  $L_i \neq L_i(t)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  y  $M \neq M(t)$ , es decir, que la autoinducción y la inducción mutua no dependen del tiempo. Además puede verse que  $M = M_{21} = M_{12}$ .

### Autoinducción e inducción mutua de solenoides

Téngase un solenoide de radio  $r$ , área  $A$ , longitud  $\ell$  y  $N$  vueltas (densidad  $n = N/\ell$ ) por el que circula una intensidad  $I$ . Como ya se concluyó en el anterior tema



$$B = \mu_0 n I \quad (4.3.6)$$

y su fem autoinducida es

$$\phi = N \cdot BA = N \mu_0 n I \cdot (\pi r^2) \quad (4.3.7)$$

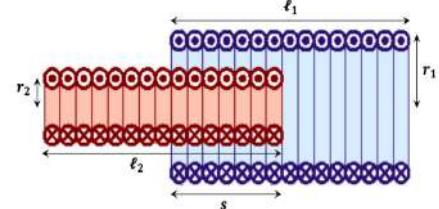
recordando que la fem se expresa con el coeficiente de autoinducción como  $\phi = LI$ , puede despejarse éste, obteniendo

$$\phi = LI = N \mu_0 n I \cdot (\pi r^2) \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \pi r^2 \ell \quad (4.3.8)$$

Ahora se calculará la inducción mutua entre solenoides, estando el eje del solenoide 2 inmerso en el eje del solenoide 1, siendo  $s$  la distancia inmersa del segundo solenoide en el primero, los radios de los solenoides  $r_i$ , sus longitudes  $l_i$  y sus densidades de espiras  $n_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Las fems  $\phi_i$  inducidas por el otro solenoide son

$$\phi_2 = M_{12} I_1 = (n_2 s) \cdot B_1 A_2 = (n_2 s) \cdot (\mu_0 n_1 I_1) \cdot (\pi r_2^2), \quad (4.3.9)$$

$$\phi_1 = M_{21} I_2 = (n_1 s) \cdot B_2 A_1 = (n_1 s) \cdot (\mu_0 n_2 I_2) \cdot (\pi r_1^2), \quad (4.3.10)$$



de modo que

$$M_{12} = M_{21} = M = \mu_0 n_1 n_2 s \pi r_2^2 \quad (4.3.11)$$

### 4.4 Energía magnética

La potencia de un solenoide (o inductancia, a la que se designará con una  $L$ ) es

$$P_L = \frac{dW}{dt} = I \varepsilon_{\text{in}} = IL \frac{dI}{dt}. \quad (4.4.1)$$

Si  $dI/dt > 0$ ,  $P_L > 0$  el inductor sufre una ganancia de energía, es decir, la energía fluye del circuito al inductor, mientras que si  $dI/dt < 0$ ,  $P_L < 0$ , el inductor sufre una pérdida de energía, es decir, la energía fluye del inductor al circuito.

$$W = \int_0^I IL \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow U_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.4.2)$$

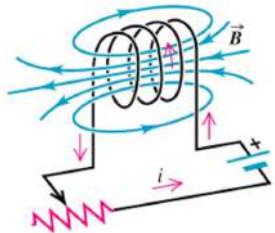
De modo que

$$U_L = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \pi r^2 \ell) \cdot I^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} (\mu_0^2 n^2 I^2) \cdot (\pi r^2 \ell) = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot (\pi r^2 \ell) \quad (4.4.3)$$

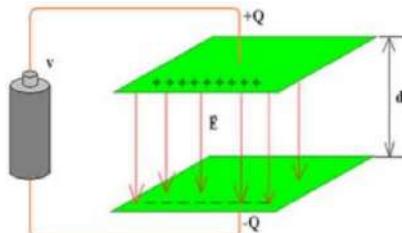
por lo que puede definirse una densidad de energía magnética

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.4.4)$$

Con lo que puede verse el símil entre la densidad de energía magnética en una inductancia y la densidad de energía eléctrica en un condensador

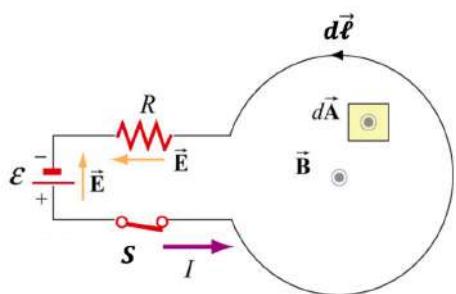


$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.4.5)$$



$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad (4.4.6)$$

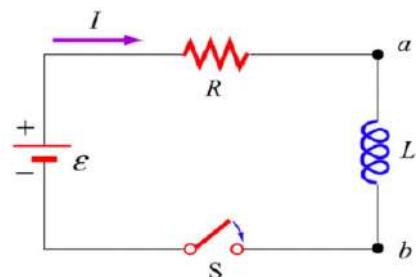
## 4.5 Circuitos RL



Téngase un circuito con una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  de resistencia  $R$  y coeficiente de autoinducción  $L$ , respectivamente (circuito RL), con generador de corriente continua, entonces la fem del generador y la autoinducida deben suministrar la caída de potencial en la resistencia:

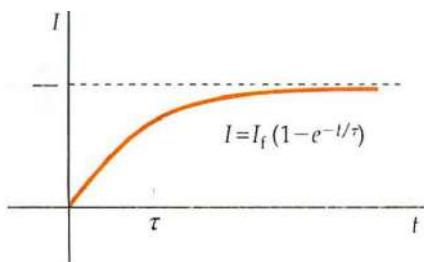
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon_{in} &= IR \\ -\varepsilon_{in} &= \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt} \end{aligned} \right] \Rightarrow \varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} \quad (4.5.1)$$

donde puede interpretarse  $-L(dI/dt)$  como una caída de potencial a causa de la espira



Como bien puede verse resulta una ecuación diferencial de variables separables (se verán más a fondo en la asignatura de métodos matemáticos I) de modo que, reorganizando y pasando todos los términos dependientes de  $t$  a un lado y los que dependen de  $I$  al otro se tiene

$$\frac{dI}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = \frac{dt}{\frac{R}{L}} \quad (4.5.2)$$

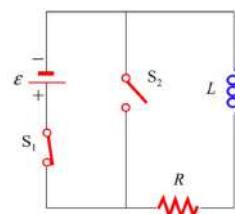


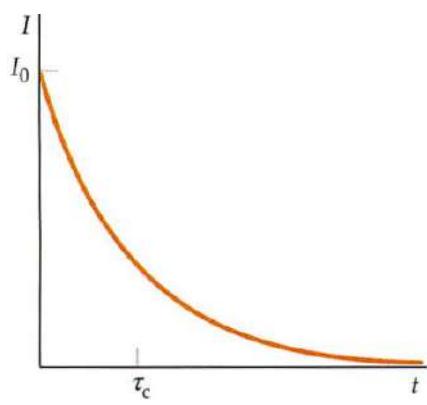
El circuito de la figura de la derecha ha estado con el interruptor  $S_1$  cerrado y  $S_2$  abierto durante largo tiempo. En  $t = 0$  se abre  $S_1$  y se cierra  $S_2$ . Se deducirá ahora la evolución temporal de la intensidad a partir de ese momento.

Por lo que integrando se obtiene

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (4.5.3)$$

de modo que la inductancia almacena corriente eléctrica  $I$  tendiendo a una intensidad máxima  $I_{\max} = \varepsilon/R$  en  $t \gg$ , pues la exponencial negativa se anula.





Similarmente se planteará la ecuación diferencial, en este caso sin la fem,  $\varepsilon$ , del generador

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (4.5.4)$$

Ahora se separarán variables reagrupando términos y se integrará a ambos lados de la ecuación teniendo en cuenta los límites de integración

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L} dt' \Rightarrow \int_0^t \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt' \\ \ln \frac{I(t)}{I_0} &= -\frac{R}{L} t \Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}} \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

## 5 Corriente Alterna

1. Introducción .....	37
2. Transformadores .....	37
3. Circuitos de CA .....	38
3.1 Circuito de CA con resistencia.....	38
3.2 Circuito de CA con inductor.....	39
3.3 Circuito de CA con condensador.....	40
3.4 Elementos de circuitos CA.....	40
3.5 Circuito LC .....	41
3.6 Circuito LRC sin generador.....	41
3.7 Circuito LRC con generador .....	42
4. Trato de CA en complejos.....	44

### 5.1 Introducción

La primera pregunta que debe hacerse uno es, ¿qué ventaja otorga la corriente alterna (CA/AC) frente a la CC?

Primero planteese la siguiente pregunta: Usando CC, ¿qué cantidad de potencia se pierde al trasladar 1 MW a 200 V desde un centro generador a una ciudad? Suponiendo una resistencia del cable de  $R = 0.1 \Omega$  y una intensidad de corriente de  $I = 5000 \text{ A}$  se tiene que la caída de potencial entre el centro emisor y receptor de

$$\Delta V = 0.1 \Omega \times 1000 \text{ A} = 500 \text{ V} \quad (5.1.1)$$

y que la pérdida de potencia entre el centro emisor y receptor es de

$$P = RI^2 = 0.1 \Omega \times (5000 \text{ A})^2 = 2.5 \text{ MW} \quad (5.1.2)$$

por lo que necesitaría generar un potencial de 700 V y suministrar una potencia de 3.5 MW.

Se presenta entonces la siguiente alternativa: Transpórtense la energía a 500 kW; ¿Qué potencia se pierde con este potencial?

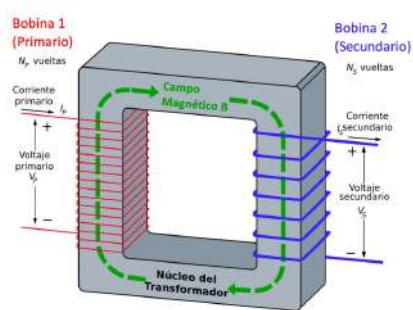
$$P = IV \rightarrow I = 2 \text{ A} \quad (5.1.3)$$

Suponiendo nuevamente  $R = 0.1 \Omega$  se tienen

$$\Delta V = 0.1 \Omega \times 2 \text{ A} = 0.2 \text{ V}, \quad P = 0.1 \Omega \times (2 \text{ A})^2 = 0.4 \text{ W} \quad (5.1.4)$$

Pero el problema que se tiene ahora es que el potencial en el receptor es  $\sim 500 \text{ kW}$ . Esto se solucionará con un transformador.

### 5.2 Transformadores



Debido a la pérdida (o disipación) de potencia en un cable, resulta conveniente realizar su transporte a  $V$  alta e  $I$  baja para que la potencia suministrada sea la necesaria de modo que se usa un transformador en el lugar receptor para disminuir el potencial, aumentando en el proceso la intensidad de corriente. Un transformador posee un núcleo metálico que porta el campo magnético generado por un cable de corriente (cable primario) de  $N_p$  espiras en su interior para inducir una fem en otro cable de corriente distinto (cable secundario) con una cantidad  $N_s$  de espiras.

El potencial en las espiras es

$$V_i = -\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{d(N_i BA)}{dt} = -N_i A \frac{dB}{dt}, \quad i = \{P, S\}, \quad (5.2.1)$$

donde  $P$  hace referencia a la espira primaria y  $S$  a la secundaria. Aislando  $A(dB/dt)$  en ambas ecuaciones e igualándolas se llega a que la relación entre potenciales es

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} \quad (5.2.2)$$

Además, puede observarse que no hay pérdida de potencia en el proceso

$$P_P = P_S = I_P V_P = I_S V_S \rightarrow \frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} = \frac{I_S}{I_P} \quad (5.2.3)$$

Pero para que esto sea posible se requiere una fem principal variable con el tiempo, es decir, alterna.

### 5.3 Circuitos de CA

Un generador de corriente alterna suministra una fem de la siguiente forma

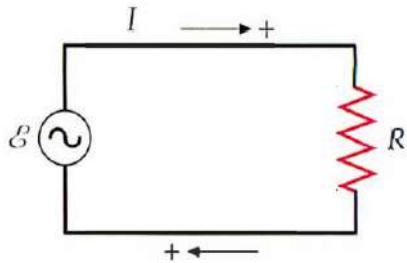
$$\begin{aligned} \xi(t) &= -\frac{d\phi_m}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} \cos \theta = \omega NBA \sin(\omega t + \delta) \\ &= \xi_{\max} \sin(\omega t + \delta). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Como bien puede verse en la figura de la derecha la velocidad angular de la espira generadora de fem,  $\omega$ , es constante, de modo que  $\omega = \text{cte}$  y  $\theta = \omega t + \delta$ , donde se supondrá que  $\delta = \pi/2$ , de modo que

$$\xi(t) = \varepsilon_{\max} \cos \omega t. \quad (5.3.2)$$

El símbolo del generador de alterna es el periodo de una onda sinusoidal inscrito en un círculo

#### 5.3.1 Circuito de CA con resistencia



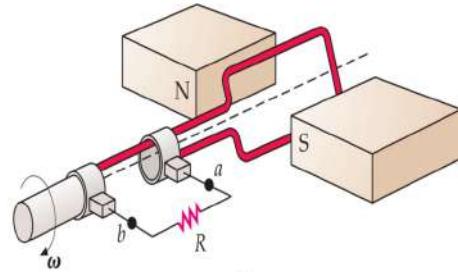
Como puede verse,  $V$  e  $I$  tienen desfase nulo,  $\delta = 0$ .

La potencia disipada por la resistencia es

$$P_R(t) = I^2(t)R = I_{\max}^2 R \cos^2 \omega t \quad (5.3.5)$$

de modo que lo más útil a conocer es la potencia disipada media

$$\langle P_R \rangle = I_{\max}^2 R \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R \quad (5.3.6)$$

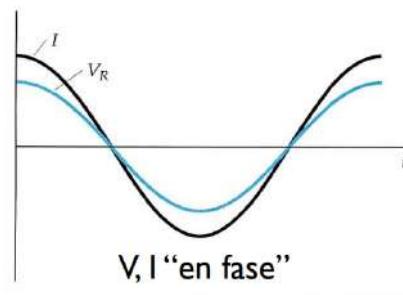


A este circuito se puede aplicar la ley de las mallas instantáneamente:

$$V_R = \xi(t) = \xi_{\max} \cos \omega t = V_{R,\max} \quad (5.3.3)$$

Aplicando la ley de Ohm

$$I(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R,\max}}{R} \cos \omega t = I_{\max} \cos \omega t \quad (5.3.4)$$



Se puede definir la intensidad efectiva mediante la raíz cuadrática media:

$$I_{\text{ef}} = I_{\text{RMS}} = \sqrt{(A^2)_{\text{av}}} \quad (5.3.7)$$

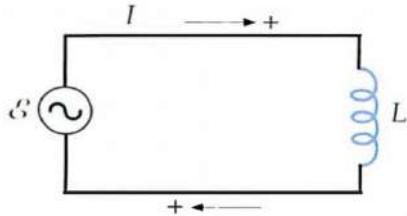
y similarmente para la tensión, cuyo cálculo da

$$I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{máx}}, \quad V_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\text{máx}} \quad (5.3.8)$$

de modo que

$$\langle P_R(t) \rangle = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R = \frac{1}{2} I_{\text{máx}} V_{\text{máx}} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \quad (5.3.9)$$

### 5.3.2 Circuito de CA con inductor

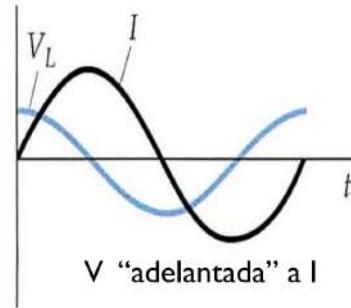


Aplicando la ley de las mallas instantáneamente:

$$\begin{aligned} V_L &= \xi(t) = \xi_{\text{máx}} \cos \omega t = \\ &= V_{L,\text{máx}} \cos \omega t = L \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Reordenando e integrando

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_{L,\text{máx}}}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{V_{L,\text{máx}}}{\omega L} \sin \omega t + C \\ &= \frac{V_{L,\text{máx}}}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_{\text{máx}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$



En la representación de  $V_L$  e  $I$  frente a  $t$  puede verse como éstas se encuentran desfasadas, de modo que  $V$  se halla “adelantada” a  $I$ .

Por lo que puede definirse  $I_{\text{máx}}$  será

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{L,\text{máx}}}{\omega L} = \frac{V_{L,\text{máx}}}{\chi_L}, \quad (5.3.12)$$

donde se ha definido la reactancia inductiva  $\chi_L$  como

$$\boxed{\chi_L = \omega L}. \quad (5.3.13)$$

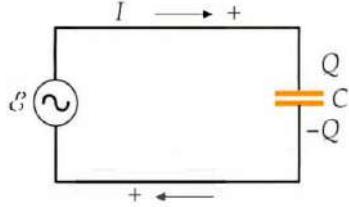
Ahora, la potencia disipada por el inductor en función del tiempo en el circuito será:

$$P_L(t) = IV_L I_{\text{máx}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) V_{L,\text{máx}} \cos \omega t = I_{\text{máx}} V_{L,\text{máx}} \sin \omega t \cos \omega t \quad (5.3.14)$$

de modo que la potencia media disipada será

$$\boxed{\langle P_L(t) \rangle = I_{\text{máx}} V_{L,\text{máx}} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0} \quad (5.3.15)$$

### 5.3.3 Circuito de CA con condensador

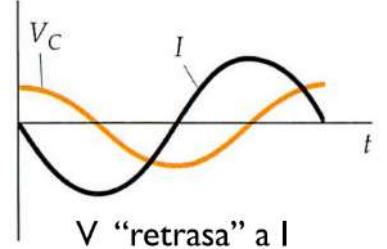


Aplicando la ley de las mallas instantáneamente

$$V_C(t) = \xi(t) = \xi_{\max} \cos \omega t \\ = V_{C,\max} \cos \omega t = \frac{Q}{C} \quad (5.3.16)$$

Recordando la definición de  $I = dQ/dt$  se obtiene

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C V_{C,\max} \sin \omega t = \omega C V_{C,\max} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ = I_{\max} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.3.17)$$



En la representación de  $V_C$  e  $I$  frente a  $t$  en este caso puede verse que  $V_C$  se halla “retrasada” respecto a  $I$ .

En este caso  $I_{\max}$  es

$$I_{\max} = \omega C V_{C,\max} = \frac{V_{C,\max}}{\chi_C}, \quad (5.3.18)$$

donde se ha definido la reactancia capacitiva  $\chi_C$  como

$$\boxed{\chi_C = \frac{1}{\omega C}} \quad (5.3.19)$$

La potencia disipada por este elemento en función del tiempo es

$$P_C(t) = IV_C = I_{\max} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) V_{C,\max} \cos \omega t = -I_{\max} V_{C,\max} \sin \omega t \cos \omega t \quad (5.3.20)$$

de modo que la potencia media disipada es

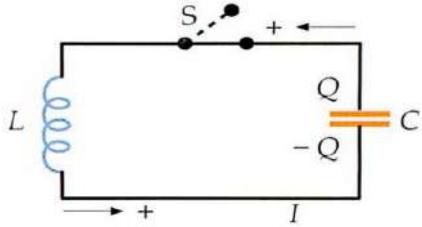
$$\boxed{\langle P_C(t) \rangle = I_{\max} V_{C,\max} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0} \quad (5.3.21)$$

### 5.3.4 Elementos de circuitos CA

Los elementos de un circuito tienen las siguientes reactancias, voltajes y potencias medias disipadas

Elemento	Reactancia	Voltaje	$\langle P \rangle$
Resistencia	$R$	$V_{\max} = I_{\max} R$	$I_{\max}^2 R / 2$
Inductor	$\chi_L = \omega L$	$V_{\max} = I_{\max} \chi_L$	0
Condensador	$\chi_C = \frac{1}{\omega C}$	$V_{\max} = I_{\max} \chi_C$	0

### 5.3.5 Circuito LC



Aplicando la ley de las mallas de forma instantánea:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (5.3.22)$$

que es idéntica a la ecuación de un movimiento armónico simple (m.a.s.)!

Comparando con la ecuación del m.a.s.:

$$m \frac{d^2x}{dx^2} t + kx = 0 \quad (5.3.23)$$

puede verse que

$$x \leftrightarrow Q \quad m \leftrightarrow L \quad k \leftrightarrow \frac{1}{C} \quad v = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow I = \frac{dQ}{dt} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.3.24)$$

de modo que la solución, análogamente, es

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \leftrightarrow Q = A \cos(\omega t - \delta) \quad Q(t) = Q_{\max} \cos(\omega t - \delta) = Q_{\max} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t - \delta\right) \quad (5.3.25)$$

y, tomando su derivada con respecto al tiempo, puede hallarse la intensidad

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{\max} \sin(\omega t - \delta) = \omega Q_{\max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \delta\right) \quad (5.3.26)$$

Puede ahora realizarse el balance de potencia en este circuito. Se conocen las energías potenciales de ambos elementos

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2 \omega t, \quad U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2 \omega t \quad (5.3.27)$$

por lo que la energía total del sistema será la suma de ambas contribuciones

$$U = U_L + U_C = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad (5.3.28)$$

donde los valores máximos de  $U_C$  y  $U_L$  oscilan entre el mismo valor

$$U_{C,\max} = U_{L,\max} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad (5.3.29)$$

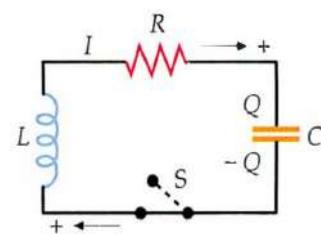
### 5.3.6 Circuito LRC sin generador

Aplicando directamente la ley de las mallas:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (5.3.30)$$

cuya forma es análoga a la de un oscilador armónico amortiguado:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5.3.31)$$



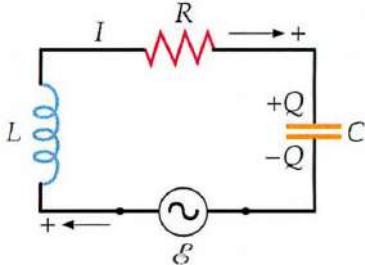
por lo que la frecuencia del circuito adopta la siguiente forma:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left( \frac{R}{2L\omega_0} \right)^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.3.32)$$

El balance energético de cada elemento es el visto anteriormente en la tabla:

$$\langle P_L \rangle = 0 \quad \langle P_C \rangle = 0 \quad \langle P_R \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R \quad (5.3.33)$$

### 5.3.7 Circuito LRC con generador



Aplicando la ley de las mallas inmediatamente:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = L \frac{d^2Q}{dt^2} + r \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \xi_{\max} \cos \omega t \quad (5.3.34)$$

que es una ED análoga a la del m.a.s. amortiguado forzado:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (5.3.35)$$

“transformando” la solución del m.a.s. forzado a las magnitudes análogas de nuestro caso se tiene:

$$Q = A \cos(\omega t - \delta'), \quad A = \frac{\xi_{\max}}{\omega \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}}, \quad \tan \delta' = \frac{R}{\chi_C - \chi_L} \quad (5.3.36)$$

de modo que la intensidad se obtiene derivando la carga con respecto al tiempo:

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta) \quad I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}}, \quad \delta = \delta' - \frac{\pi}{2}, \quad \tan \delta = \frac{\chi_L - \chi_C}{R} \quad (5.3.37)$$

Se define entonces la impedancia como el denominador de la  $I_{\max}$ , es decir:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \quad (5.3.38)$$

de modo que

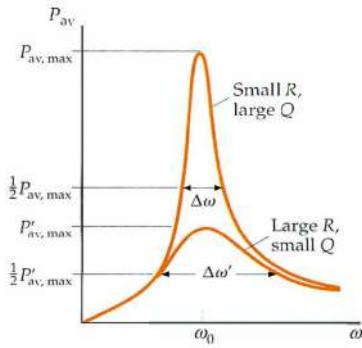
$$I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{Z} \quad (5.3.39)$$

se dice entonces que si la impedancia  $Z$  es mínima, por lo que la frecuencia del generador coincide con la natural del circuito, el circuito se halla en resonancia. Esto ocurre cuando

$$\chi_L = \chi_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0. \quad (5.3.40)$$

¿Por qué se desearía un circuito en resonancia? El motivo es que la potencia disipada por la resistencia es máxima:

$$\langle P_R \rangle = \langle I^2 R \rangle = I_{\max}^2 R \langle \cos^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R = \frac{1}{2} I_{\max} \frac{\xi_{\max}}{Z} R = \frac{1}{2} I_{\max} \xi_{\max} \cos \delta \quad (5.3.41)$$



Otro modo de verlo es

$$\begin{aligned}\langle P_R \rangle &= \frac{1}{2} I_{\max}^2 R = I_{\text{ef}}^2 R = \xi_{\text{ef}}^2 \frac{R}{Z^2} = \xi_{\text{ef}}^2 \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} \\ &= \frac{\xi_{\text{ef}}^2 R \omega^2}{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad (5.3.42)\end{aligned}$$

La figura de arriba a la izquierda es lo que se conoce como curva de resonancia y muestra la potencia disipada frente a la frecuencia natural del circuito. Su máximo se halla cuando la frecuencia natural del circuito coincide con la del generador. La curva que se encuentra más disipada o dispersada, más “abierta” (por así decirlo) es una en que el efecto de resonancia es pequeño (es decir, se trata de  $R$  grandes o de  $Z$  pequeñas), mientras que aquella que muestra un pico alto y cuya anchura de dispersión  $\Delta\omega$  es menor corresponde a  $R$  pequeñas o  $Z$  grandes. Para caracterizar el comportamiento deseado, que es el de pico alto, se define un factor de calidad  $Q$ , de modo que un mayor factor de calidad es deseable:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (5.3.43)$$

## 5.A Trato de CA en complejos

Dada la expresión armónica de la f.e.m. y la intensidad en un circuito de corriente alterna, puede trabajarse con expresiones equivalentes en complejos, siendo su parte real la que tiene sentido físico, de este modo se tienen expresiones semejantes a las correspondientes en corriente continua:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta_V) = \operatorname{Re} [\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \delta_V)}] = \operatorname{Re} [\varepsilon_0 e^{i(\omega t)} e^{i(\delta_V)}] = \operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}] \quad (5.A.1)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta_I) = \operatorname{Re} [I_0 e^{i(\omega t + \delta_I)}] = \operatorname{Re} [I_0 e^{i(\omega t)} e^{i(\delta_I)}] = \operatorname{Re} [\tilde{I}] \quad (5.A.2)$$

Puede definirse también una impedancia compleja  $\tilde{Z}$  de modo que se cumpla la ley de Ohm compleja y las expresiones de las equivalentes impedancias en paralelo o serie:

$$\boxed{\tilde{\varepsilon} = \tilde{Z}\tilde{I}; \quad \frac{1}{\tilde{Z}_{\text{par}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{Z}_i}; \quad \tilde{Z}_{\text{serie}} = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i} \quad (5.A.3)$$

De este modo se tendrán 3 tipos básicos de impedancias: **resistiva**, **capacitiva** y **autoinductiva**. Del mismo modo que se calcula el desfase y la reactancia para la f.e.m. real y la intensidad real, pueden calcularse para las magnitudes complejas

Para una resistencia cuyo voltaje entre bornes es  $\tilde{V}$  y la intensidad de corriente que circula por ella es  $\tilde{I}$  puede calcularse como un circuito con f.e.m.  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{V}$  e intensidad  $\tilde{I}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{V} = V_0 e^{i(\omega t)} \\ \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \tilde{V} = \tilde{Z}_R \tilde{I} \rightarrow V_0 = \tilde{Z}_R I_0 e^{i(-\delta)}. \quad (5.A.4)$$

Dado que  $V_0 = RI_0$

$$\boxed{\tilde{Z}_R = R \quad \delta = 0} \quad (5.A.5)$$

Para un condensador con voltaje entre bornes  $\tilde{V}$  e intensidad  $\tilde{I}$  puede calcularse como un circuito con f.e.m.  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{V}$  e intensidad  $\tilde{I}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{V} = V_0 e^{i(\omega t)} \\ \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \tilde{V} = \tilde{Z}_C \tilde{I} \rightarrow V_0 = \tilde{Z}_C I_0 e^{i(-\delta)}. \quad (5.A.6)$$

Dado que  $Q_0 = CV_0$ , puede definirse  $\tilde{Q} = C\tilde{V}$  así que

$$\tilde{I} = \frac{d\tilde{Q}}{dt} = C \frac{d\tilde{V}}{dt} = iC\omega_0 V_0 e^{i(\omega t)} = C\omega V_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \quad (5.A.7)$$

y comparando puede verse que

$$\boxed{\tilde{Z}_C = \frac{1}{iC\omega} = -iX_C, \quad \delta = -\frac{\pi}{2}} \quad (5.A.8)$$

Para una inducción con voltaje entre bornes  $\tilde{V}$  e intensidad  $\tilde{I}$  que pasa por ella puede calcularse como un circuito con f.e.m.  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{V}$  e intensidad  $\tilde{I}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{V} = V_0 e^{i(\omega t)} \\ \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \tilde{V} = \tilde{Z}_L \tilde{I} \rightarrow V_0 = \tilde{Z}_L I_0 e^{i(-\delta)} \quad (5.A.9)$$

Se tiene que

$$\tilde{V} = L \frac{d\tilde{I}}{dt} = iL\omega I_0 e^{i(\omega t - \delta)} = L\omega I_0 e^{i(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2})} = V_0 e^{i(\omega t)}, \quad (5.A.10)$$

comparando

$$\boxed{\tilde{Z}_L = iL\omega = iX_L, \quad \delta = \frac{\pi}{2}} \quad (5.A.11)$$

Para un circuito RCL simple en serie se tiene

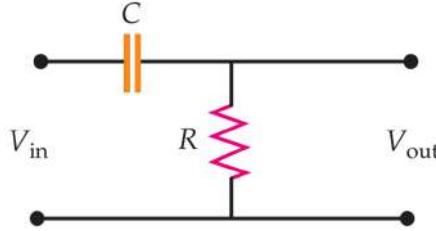
$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t)} \\ \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \tilde{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z e^{i\delta} \rightarrow Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}; \tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Para un circuito RCL simple en paralelo:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i(\omega t)} \\ \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{R} - i \left( \frac{1}{\omega L} + \frac{1}{\omega C} \right) = Z e^{i\delta} \rightarrow \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2 \quad (5.A.12)$$

### Ejemplos:

Téngase el circuito de la siguiente figura:



Se tiene en este que  $\varepsilon = V_{\text{in}} e^{i(\omega t)}$  y que la resistencia y el condensador están serie. Se desea medir el potencial  $V$  entre los bornes de la resistencia. En primera instancia se calculará la intensidad que pasan por C y R:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = V_{\text{in}} e^{i(\omega t)} \\ I = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} V_{\text{in}} = Z_C I_0 e^{i(-\delta)} = |Z_C| e^{i\delta} I_0 e^{i(-\delta)} = |Z_C| I_0 \quad (5.A.13)$$

donde el módulo de la impedancia del condensador es

$$Z_C = R - iX_C = R - \frac{i}{C\omega} \rightarrow |Z_C| = R\sqrt{1 + (C\omega R)^{-2}} \quad (5.A.14)$$

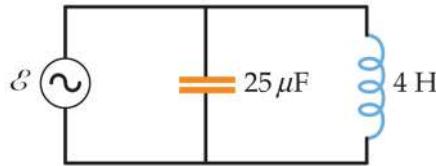
Así que

$$V_{\text{out}} = RI_0 = R \frac{V_0}{|Z_C|} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (C\omega R)^{-2}}} \quad (5.A.15)$$

con el mismo factor de fase  $e^{i(-\delta)}$  que la intensidad.

Si  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $V_{\text{out}} = V_0$  mientras que si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $V_{\text{out}} \rightarrow 0$ , lo que constituye un filtro de pase alto

Téngase el circuito de la siguiente figura:



La intensidad que pasa por el circuito principal que contiene la f.e.m. se divide entre la rama del condensador y la de la inducción. Condensador e inducción se hallan en paralelo

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t)} \\ I = I_0 e^{i(\omega t - \delta)} \end{array} \right\} \varepsilon_0 = Z I_0 e^{i(-\delta)} = |Z| e^{i\delta} I_0 e^{i(-\delta)} = |Z| I_0 \quad (5.A.16)$$

La impedancia equivalente y su módulo serán

$$Z = -i \left( \frac{1}{L\omega} - \frac{1}{C\omega} \right)^{-1} \rightarrow |Z| = \left| \frac{1}{L\omega} - C\omega \right|^{-1}; \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (5.A.17)$$

Para calcular la intensidad en cada rama se utiliza que la diferencia de potencial es la misma i equivale a la f.e.m.:

$$I_C = \frac{\varepsilon_0 e^{i(\omega t)}}{-iX_C} = C\omega\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}; \quad I_L = \frac{\varepsilon_0 e^{i(\omega t)}}{iX_L} = \frac{\varepsilon_0}{L\omega} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (5.A.18)$$

de modo que si  $1/(L\omega) = C\omega \rightarrow \omega = (\sqrt{LC})^{-1} = \omega_0 \Rightarrow Z \rightarrow \infty$  y por tanto la intensidad en la f.e.m. es nula. Las intensidades en C y L son las mismas pero desfasadas  $\pi$ , es decir, una va en sentido contrario a la otra. La f.e.m. ha puesto en marcha el circuito LC y luego de la fase transitoria solamente queda este circuito.

## 6 Ondas Electromagnéticas (OEM)

1. Hacia las ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento de Maxwell.....	<a href="#">47</a>
2. Las ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial .....	<a href="#">48</a>
3. Obtención de la ecuación de onda .....	<a href="#">49</a>
4. Conceptos relacionados con la energía de una OEM.....	<a href="#">51</a>
5. Propagación en medios dieléctricos (índice de refracción) .....	<a href="#">53</a>
6. La luz como OEM .....	<a href="#">54</a>

### 6.1 Hacia las ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento de Maxwell

#### Hacia las ecuaciones de Maxwell

Hasta el momento se han visto cuatro leyes relevantes en electromagnetismo: las primeras dos relacionan el campo eléctrico y magnético que atraviesa una superficie cerrada con su respectivo flujo y permiten un modo sencillo de calcularlos (demostrado mediante el teorema de la divergencia), siendo las leyes de Gauss magnética y eléctrica:

$$\Phi_{e,\text{net}} = \iint_A \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad \Phi_{m,\text{net}} = \iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0. \quad (6.1.1)$$

La tercera ley, siendo ésta la de Faraday-Lenz, relaciona la tasa de cambio (variación) con respecto al tiempo del flujo de campo magnético con la integral de línea de campo eléctrico en una curva cerrada (circulación del campo eléctrico):

$$\xi = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA. \quad (6.1.2)$$

Finalmente, la cuarta ley, la de Ampère, relaciona la intensidad de corriente por un hilo con la circulación de campo magnético:

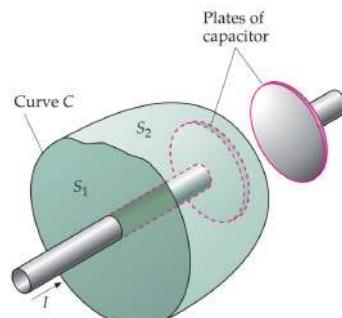
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad (6.1.3)$$

sin embargo, resulta curioso el hecho de que, a diferencia de las dos primeras leyes en las que se ve un claro paralelismo, en ésta el paralelismo no se disciernen tan claramente: esto se debe a que esta cuarta ley está “incompleta” y no describe todos los casos, es decir, su validez no es general a todos los cuerpos: véase esto en el siguiente subapartado

#### Corriente de desplazamiento de Maxwell

La ley de Ampère dice que la circulación del campo magnético es el producto de la permitividad magnética del vacío por la corriente que circula por el hilo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad (6.1.4)$$



Pueden escogerse superficies de integración distintas y ver si el cálculo es equivalente, sin embargo, puede verse que para las superficies  $S_1$  y  $S_2$  de la figura

$$S_1 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad S_2 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6.1.5)$$

por lo que se tiene un claro problema, ya que no coinciden. Esto Maxwell lo solucionó añadiendo un término a la ley correspondiente a lo que llamo corriente de desplazamiento,  $I_D$ , modificando la ley del siguiente modo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_C + I_D) = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (6.1.6)$$

de lo que puede extraerse la definición de  $I_D$ :

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{e,\text{net}}}{dt} \quad (6.1.7)$$

Aplicando la ley modificada a ambas superficies:

$$S_1 : \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_D \quad (6.1.8)$$

donde

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{e,\text{net}}}{dt} = \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = I_C \quad (6.1.9)$$

por lo que, ahora sí, la ley modificada de Ampère, es general para todos los cuerpos y puede verse el paralelismo con la ley de Faraday-Lenz, pues ésta nueva ley relaciona la variación del campo eléctrico con respecto al tiempo (en este caso con un factor de la permeabilidad eléctrica del vacío).

## 6.2 Las ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial

De este modo las ecuaciones de Maxwell del EM en forma integral son

- 1. Ley de Gauss:  $\iint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ .
- 2. Ley de Gauss del magnetismo:  $\iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$
- 3. Ley de Faraday-Lenz:  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA$ .
- 4. Ley de Ampère-Maxwell:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA$

Ahora, de modo **opcional**, se hallarán las formas diferenciales de estas leyes, para cuyas demostraciones se requerirá del teorema de la divergencia y el de Stokes:

$$\text{Divergencia: } \oint_A \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV', \quad \text{Stokes: } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA \quad (6.2.1)$$

de modo que para el campo eléctrico y magnético:

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV', \quad \oint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV' \quad (6.2.2)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dA \quad (6.2.3)$$

Ahora pues, la Ley de Gauss electrostática, utilizando el teorema de la divergencia:

$$\oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} &= \oint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV' \\ \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_{V'} \rho dV' \end{aligned} \right\} \oint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV' = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{V'} \rho dV' \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}, \quad (6.2.4)$$

similarmente, mediante el mismo procedimiento, para la del magnetismo, se tiene

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}. \quad (6.2.5)$$

Para la Ley de Faraday-Lenz (y para la de Ampère-Maxwell), proporcionados del Teorema de Stokes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dA \\ \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \iint_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} dA \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}} \quad (6.2.6)$$

análogamente, para Ampère-Maxwell, se obtiene:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}} \quad (6.2.7)$$

por lo que las leyes de Maxwell en forma diferencial quedan como

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \xrightarrow{\text{En el vacío}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 I_C + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array} \quad (6.2.8)$$

por lo que, como puede verse, en el vacío son simétricas.

### 6.3 Obtención de la ecuación de onda

De las ecuaciones de Maxwell en el vacío se obtiene que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se comportan como una onda sinusoidal, una onda electromagnética (OEM):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6.3.1)$$

esto se deduce como sigue:

Se parte de la ley de Faraday-Lenz, a la que se aplica el rotacional a ambos miembros de la ecuación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \xrightarrow{\vec{\nabla} \times} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{\nabla} \times \vec{B}}{dt}, \quad (6.3.2)$$

por propiedades de operadores:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \{\text{ley de Gauss}\} = -\nabla^2 \vec{E}, \quad (6.3.3)$$

aplicando a la parte derecha la ley de Ampère:

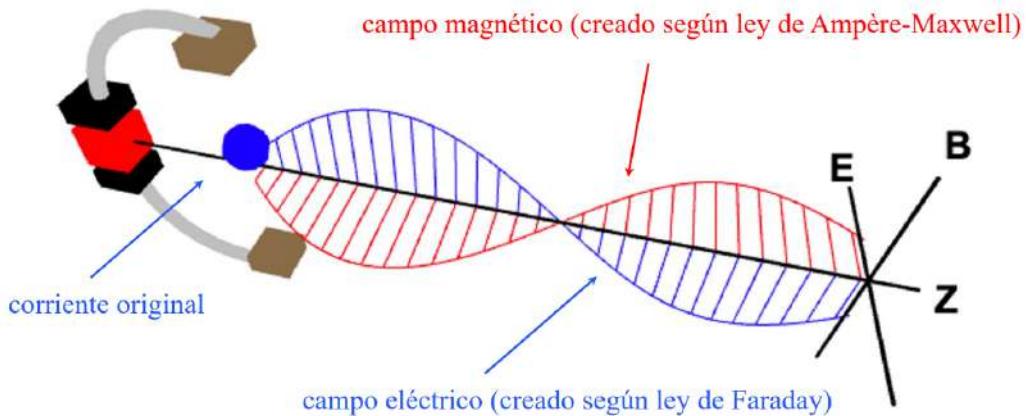
$$-\frac{d\vec{\nabla} \times \vec{B}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}. \quad (6.3.4)$$

Finalmente, igualando ambos pasos anteriores:

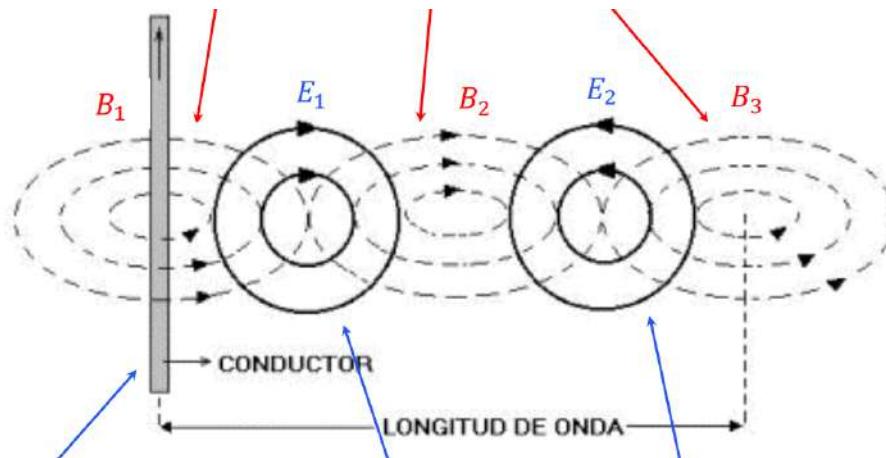
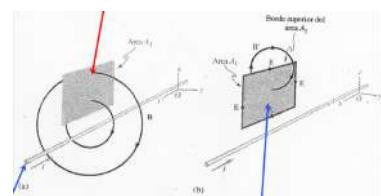
$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} \quad (6.3.5)$$

Para obtener la ecuación del campo magnético el procedimiento es análogo y se obtiene

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \quad (6.3.6)$$



Si se tiene una corriente original que varía con el tiempo, ésta creará un campo magnético  $\vec{B}$  debido a la ley de Ampère-Maxwell, que también será variable con el tiempo. Esta variación de  $\vec{B}$  crea a su vez un campo eléctrico  $\vec{E}$  perpendicular al campo magnético por la ley de Faraday, volviendo a inducir un  $\vec{B}$  perpendicular al eléctrico y a la dirección de la perturbación



La imagen superior muestra la forma de entender la OEM y puede verse que la longitud de onda es la distancia de frente de onda a frente de onda idéntico. Las flechas rojas indican los campos magnéticos  $B_i$  creados según la ley de Ampère-Maxwell y las azules a los campos eléctricos creados según la ley de Faraday-Lenz (salvo la primera, de izquierda a derecha, que es la corriente original).

La solución a las ecuaciones de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz). \quad (6.3.7)$$

Se cumplen entonces las siguientes relaciones

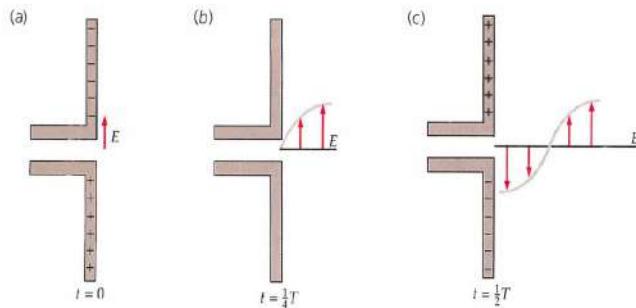
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad E_0 = cB_0 \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \quad (6.3.8)$$

Las OEM tienen entonces las siguientes propiedades

- El campo eléctrico  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se encuentran en fase:  $\phi_E = \phi_B = 0$

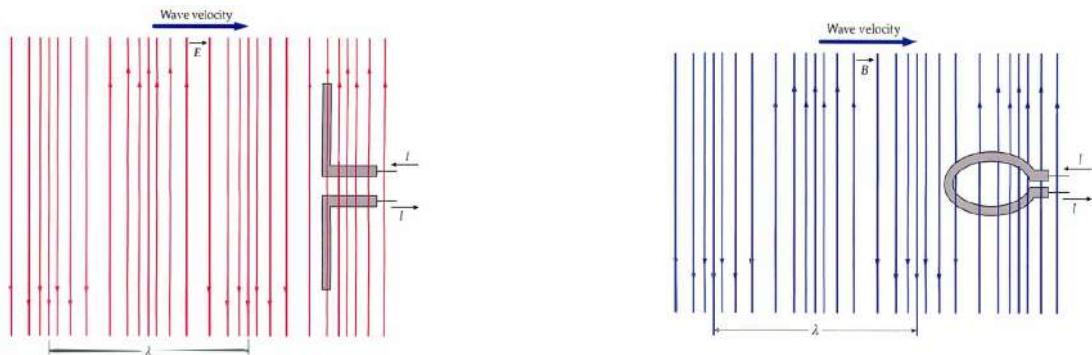
- El módulo de los campo  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están relacionados por  $E = cB$
- Las OEM son transversales, verificándose que los dos campos vibran en direcciones perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.
- La velocidad de la onda EM coincide con la velocidad de la luz.
- La luz es una onda EM
- Las ondas EM transportan energía.

La emisión de OEMs se hace mediante antenas planas como la de la siguiente figura



pues, como bien puede verse, hay un campo eléctrico variable que induce un campo magnético variable y así sucesivamente

La recepción de ondas de carácter eléctrico y magnético sí que se hace con antenas diferentes: las primeras se reciben con antenas planas, mientras que las segundas se reciben con antenas circulares. Véanse las siguientes figuras



En función de la longitud de onda de la OEM se tiene un tipo de ondas u otras: esta longitud de onda permite caracterizar el **espectro electromagnético**.

## 6.4 Conceptos relacionados con la energía de una OEM

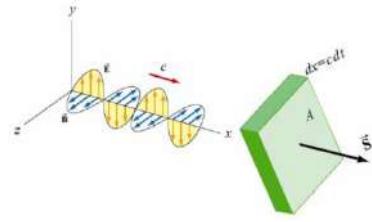
**Densidad de energía  $\mathbf{u}$ :** usando las expresiones deducidas para un inductor y un condensador

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \Rightarrow \{E = cB\} \Rightarrow \mathbf{u} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} = \frac{\mathbf{EB}}{\mathbf{c}\mu_0} \quad (6.4.1)$$

**Vector de Poynting  $\tilde{\mathbf{S}}$ :** éste se relaciona con la energía por unidad de tiempo y área.

Téngase un volumen de grosor infinitesimal  $dx = c dt$  en la dirección de propagación de la onda, se tiene entonces que el diferencial de energía de la onda en función de  $u$  es:

$$dU = u(A dx) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) A c dt \quad (6.4.2)$$



dividiendo por unidad de área y tomando su variación con el tiempo, se tiene la potencia por unidad de área:

$$S \equiv \frac{dU}{A dt} = \frac{c}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{EB}{\mu_0} \quad (6.4.3)$$

Se define entonces el vector de Poynting:

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (6.4.4)$$

de modo que su módulo, cuando  $\vec{E} \perp \vec{B}$  es

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{EB}{\mu_0} \quad (6.4.5)$$

de modo que la dirección de  $\vec{S}$  es la dirección de propagación de la onda.

**Intensidad I:** la intensidad es la cantidad medible y ésta se define como el promedio de la potencia por área en el tiempo:

$$I := \langle S \rangle. \quad (6.4.6)$$

El desarrollo completo del vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{i}) \times (B_0 \cos(\omega t - kz) \hat{j}) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \hat{k} \quad (6.4.7)$$

de modo que

$$I := \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_{\text{ef}} B_{\text{ef}}}{\mu_0}. \quad (6.4.8)$$

Recuérdese que la densidad de energía de la onda es

$$u = \frac{EB}{c\mu_0} \Rightarrow I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle = \frac{\langle P \rangle}{A} \quad (6.4.9)$$

Entre otras, pueden tenerse bien ondas planas o esféricas



como bien puede observarse la onda plana no sufre una expansión, de modo que no hay una “expansión” de la energía, sino sólo transporte.

Mientras tanto, la intensidad de la onda esférica es

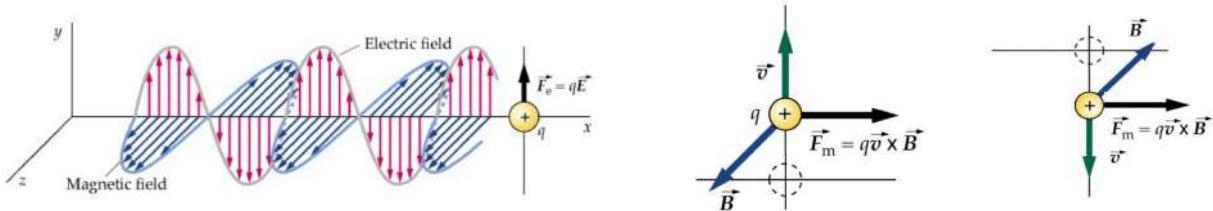
$$I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}, \quad (6.4.10)$$

por lo que la intensidad depende de la distancia y puede hablarse de una “expansión” o “dissipación” de la energía.

**Presión de radiación  $P$ :** es la fuerza ejercida por la onda por unidad de área

$$P := \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{1}{A} \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle \quad (6.4.11)$$

donde  $p$  es el momento de la onda. Esto se debe a la fuerza magnética que ejerce la OEM sobre una partícula cargada como puede verse en las siguientes figuras



Ahora, no se demostrará, pero para las OEM pueden relacionarse  $p$  y  $\Delta U$

$$\Delta p_{\text{abs}} = \frac{\Delta U}{c}, \quad \Delta p_{\text{ref}} = \frac{2\Delta U}{c}, \quad (6.4.12)$$

donde  $\Delta p_{\text{abs}}$  es la variación de momento cuando hay una absorción total de la OEM y  $\Delta p_{\text{ref}}$  es la variación de momento cuando hay reflexión total de la OEM.

Con estas expresiones puede escribirse la presión de radiación  $P$  como sigue para los dos casos:

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{Ac} \left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle, \quad P_{\text{ref}} = \frac{2}{Ac} \left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle \quad (6.4.13)$$

y, recordando la definición del módulo del vector de Poynting,  $S = dU/(A dt)$

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{Ac} A \langle S \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}, \quad P_{\text{ref}} = \frac{2}{Ac} A \langle S \rangle = \frac{2\langle S \rangle}{c} = \frac{2I}{c} \quad (6.4.14)$$

que son las relaciones entre la presión de radiación y la intensidad una OEM.

## 6.5 Propagación en medios dieléctricos (índice de refracción)

Dado que la velocidad de la luz relaciona frecuencia y longitud de onda, el cambio de velocidad ( $c \rightarrow v$ ) al cambiar de medio, implica un cambio en la longitud de onda ( $\lambda_0 \rightarrow \lambda'$ ), manteniéndose constante la frecuencia  $\omega$ :

$$\lambda' = 2\pi \frac{v}{\omega} = 2\pi \frac{c}{n\omega} = \frac{\lambda_0}{n} < \lambda_0 \quad (6.5.1)$$

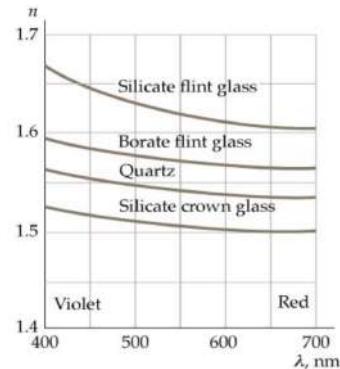
donde se ha introducido el concepto de **índice de refracción  $n$**  definido como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la velocidad de la luz en el medio en cuestión  $v$ :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1 \quad (6.5.2)$$

Se caracterizan entonces los medios materiales según su índice de refracción en:

- medios homogéneos y inhomogéneos.
- medios isótropos y anisótropos.

Se tiene también que el índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz, originando el fenómeno de dispersión cromática, y de la temperatura: por ejemplo, para una longitud de onda de 580 nm, el índice de refracción del agua es de 1.3334 a 15 °C, de 1.3312 a 35 °C y de 1.3289 a 50 °C.



## 6.6 La luz como OEM

A la teoría óptica desarrollada en los ss. XVI y XVII por Snell, Descartes, Kepler y Fermat, entre otros, es la que se denomina **Óptica Geométrica**. En esta óptica no se hace ninguna hipótesis sobre la naturaleza de la luz, es decir, sobre qué es. El único principio que es necesario admitir es el **Principio de Fermat**:

**Principio de Fermat:** La luz viaja de un punto a otro siguiendo un camino en el que el tiempo invertido sea extremo.

Se tiene entonces que

- La luz se caracteriza mediante el concepto de **rayo óptico**.
- El medio material por el que la luz se propaga es caracterizado mediante una única cantidad, el índice de refracción.

En el s. XVII Huygens plantea la Teoría Ondulatoria de la luz que mucho más tarde, en el primer cuarto del s. XIX, fue desarrollada principalmente por Fresnel. El principio de Huygens es el siguiente

**Principio de Huygens:** Cada punto de un frente de ondas *primario* sirve como foco de ondas elementales *secundarias* que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de ondas primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.



La Óptica fue unificada con el electromagnetismo hacia finales del XIX gracias a la teoría de Maxwell. Según la teoría electromagnética, la luz es una onda electromagnética que puede propagarse por el vacío. Se trata, por lo tanto, de una perturbación (es una onda) pero que **no requiere un apoyo material**. Esto no pudo ser comprendido ni siquiera por Maxwell y es por esto comprensible que el concepto de éter perviviera como una “necesidad” conceptual (si bien no matemática, pues nada relativo al éter aparece en la teoría electromagnética) hasta que Einstein mostró en la teoría especial de la relatividad que se trataba de un concepto prescindible.

El electromagnetismo unifica la óptica ondulatoria con la electricidad y el magnetismo, es decir, la **óptica electromagnética**, que contiene, como caso límite, la óptica geométrica.

## 7 Polarización

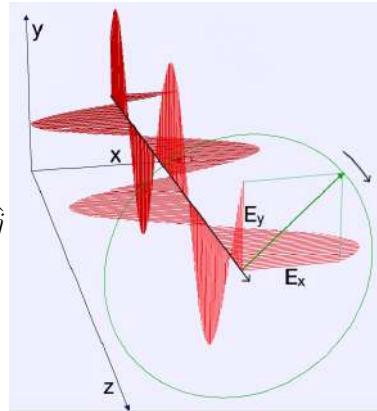
1. Elipse de polarización .....	55
2. Métodos de polarización .....	56
2.1 Polarización por refracción. Dicroísmo y Ley de Malus.....	56
2.2 Polarización por reflexión. Ángulo de Brewster .....	57
2.3 Polarización por scattering/dispersión .....	58
2.4 Polarización por birrefringencia.....	59

### 7.1 Elipse de polarización

Téngase un campo eléctrico variable en las direcciones  $x$  e  $y$  (por lo que se propagará en dirección  $z$ ) y variable con el tiempo, de modo que sus frecuencias angulares,  $\omega$ , y número de onda,  $k$ , sean idénticos

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_x + \vec{E}_y = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \hat{i} + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi) \hat{j} \quad (7.1.1)$$

de modo que si  $\phi = \text{cte}$  se tiene **luz polarizada** mientras que si  $\phi$  es aleatoria se tiene **luz natural**. Para  $z = \text{cte}$  se tiene el plano de polarización



de modo que, situando el plano de polarización en  $z = 0$  se tiene

$$E_x = E_{0x} \cos \omega t \quad E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \phi) = E_{0y} (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \quad (7.1.2)$$

por lo que

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \right) \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (7.1.3)$$

Se tiene entonces la ecuación de una elipse cuyo eje mayor forma un ángulo  $\chi$  con el eje de abscisas, siendo  $\chi$ :

$$\tan^2 \chi = 2E_{0x} E_{0y} \frac{\cos \phi}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (7.1.4)$$

Se tiene **polarización lineal** si  $\phi = 0, \pi$ . Se particulariza para  $\phi = 0$ :

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \right) \cos \phi = 0 \Rightarrow \left( \frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0 \Rightarrow E_x = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} E_y \quad (7.1.5)$$

lo que quiere decir que el campo eléctrico *vibra* en un plano que forma un ángulo

$$\varphi = \arctan \left( \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) \quad (7.1.6)$$

con la horizontal.

Se tiene **polarización elíptica** si  $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ , esto quiere decir que el campo eléctrico describe una elipse girando hacia la derecha (polarización o luz dextrógira) o hacia la izquierda (polarización o luz levógira).

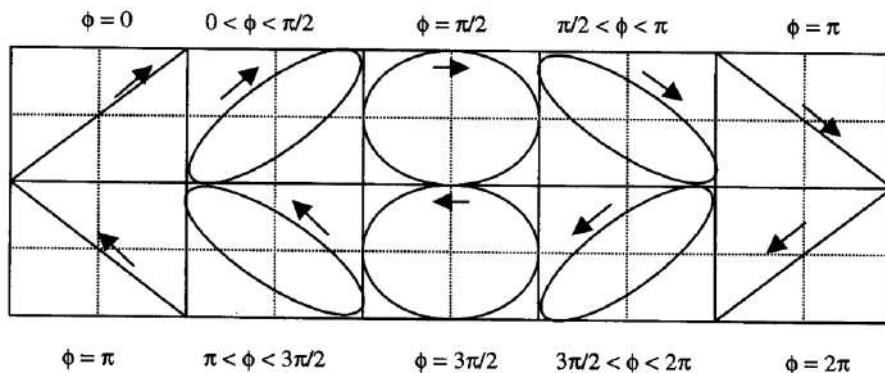
Un caso concreto de la polarización elíptica es la polarización circular, que ocurre cuando  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ , de modo que la ecuación de la elipse queda

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 1 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2. \quad (7.1.7)$$

Visualícese la polarización circular:



y en general se tiene para ángulos cualesquiera  $\phi \in [0, 2\pi[$  la siguiente figura:



**estilo no está en las diapositivas:** para aquellos curiosos de saber qué pasa en el caso en que las frecuencias son distintas investigad las llamadas **Figuras de Lissajous**. Esto se verá más adelante en la asignatura de Oscilaciones y Ondas (2º cuatrimestre de 2º curso).

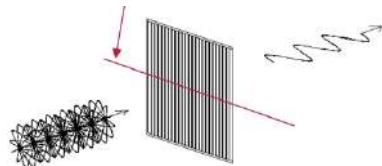
## 7.2 Métodos de polarización

La luz puede polarizarse de diversas formas:

- **por refracción** (dicroísmo, ley de Malus).
- **por scattering.**
- **por reflexión** (ángulo de Brewster)
- **por birrefringencia.**

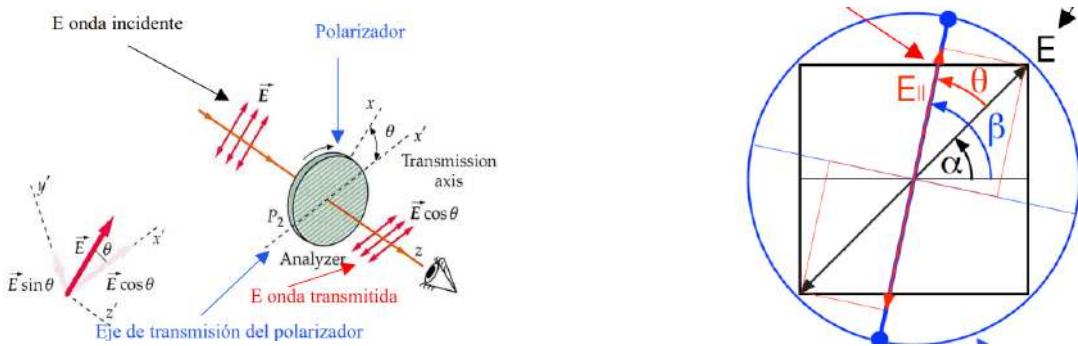
### 7.2.1 Polarización por refracción. Dicroísmo y Ley de Malus

Un polarizador lineal es un objeto/superficie/material que únicamente permite el paso de una OEM en una dirección como puede verse en la siguiente figura



de modo que la recta roja es el eje de transmisión de la luz.

Si se dispone un polarizador frente a un campo ya polarizado se tiene la situación dispuesta en las siguientes figuras



en la figura derecha el  $E$  negro es el  $E$  de la onda incidente, mientras que el rojo es el  $E$  de la onda transmitida ( $E_{||}$ ). La circunferencia azul es el segundo polarizador (pues más adelante se colocará otro anterior) y la recta azul es el eje de transmisión del polarizador 2.

Se conoce que la intensidad final  $I_f$  es proporcional al cuadrado de la  $E$  de la onda transmitida  $E_{||}$ :

$$I_f \propto E_{||}^2 \Rightarrow E_0^2 \cos^2 \theta \Rightarrow I_f = I_0 \cos^2 \theta \quad (7.2.1)$$

pues  $I_0 \propto E_0^2$ .

Ahora se añade otro polarizador antes sobre el que incide luz natural



Ahora, para finalmente obtener la **Ley de Malus**, se promedia la intensidad de la luz natural sobre todas las direcciones, es decir,  $\langle \cos^2 \theta' \rangle = 1/2$ , donde  $\theta'$  es el ángulo de los rayos incidentes sobre el primer polarizador, de modo que

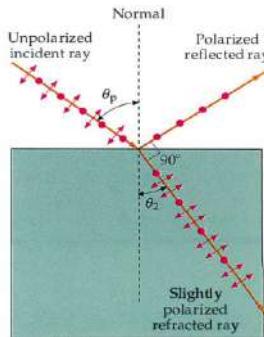
$$I_f = I_0 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} I_N \cos^2 \theta \quad (7.2.2)$$

## 7.2.2 Polarización por reflexión. Ángulo de Brewster

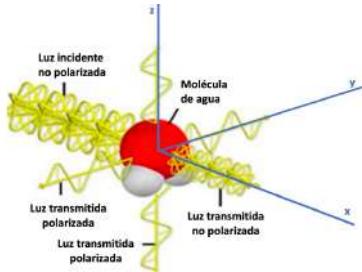
Téngase un rayo en un medio con índice de refracción  $n_1$  incidente sobre un material cuyo índice de refracción es  $n_2$ . Cuando el rayo impacte con la superficie separadora éste sufrirá una reflexión y una refracción. Si el ángulo entre el rayo refractado y el reflejado es de  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), se tendrá que el rayo reflejado estará completamente polarizado. El ángulo de incidencia que proporciona esta condición se conoce como ángulo de Brewster y se halla del siguiente modo: aplicando la ley de Snell se tiene

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \left\{ \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_B \right\} \Rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (7.2.3)$$

donde se ha utilizado que  $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$ .

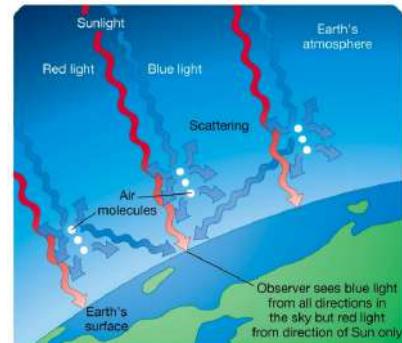
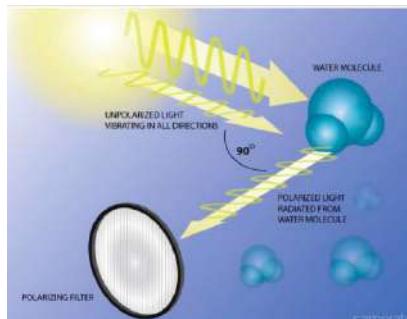


### 7.2.3 Polarización por scattering/dispersión



La polarización por dispersión se debe a que las moléculas actúan como antenas (dipolos) y reemiten las OEM generando (dado el triedro EM) ciertas polarizaciones que dependen de la estructura molecular y del ángulo de visión.

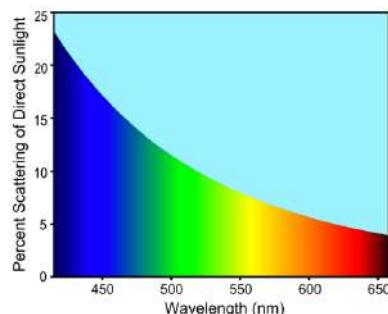
El cielo de la atmósfera es azul a causa de este efecto de scattering.



El scattering que principalmente se origina en la atmósfera es el **Scattering de Rayleigh** con partículas del orden de  $\lambda$  y la intensidad es proporcional a su cuarta potencia  $I \propto \lambda^4$ :

$$I_0 I_0 \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2R^2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left( \frac{d}{2} \right)^2 \quad (7.2.4)$$

donde  $R$  es la distancia a la partícula,  $d$  el diámetro de ésta y  $\theta$  el ángulo de dispersión.

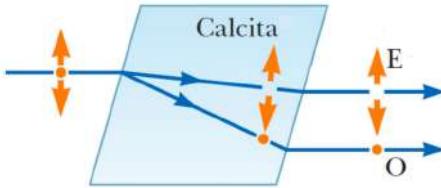


El scattering tiene lugar en la parte alta de la atmósfera (donde hay interferencias).

La resonancia entre frecuencia angular de la luz y modos de vibración de la molécula y modos de vibración de la molécula es lo que da lugar al scattering.

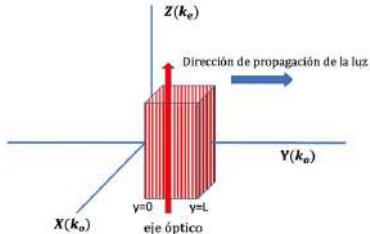
### 7.2.4 Polarización por birrefringencia

El significado de birrefringencia es “doble refracción”. Por ejemplo, un material birrefringente es la calcita



donde en la figura O es el rayo ordinario resultado del índice de refracción  $n_o$  y E es el rayo extraordinario, consecuencia de la existencia de un segundo índice de refracción  $n_e$ . El eje óptico es el correspondiente a la refracción habitual.

### Láminas retardadoras



Téngase un prisma de material birrefringente con eje óptico perpendicular a la dirección de propagación de la luz. Téngase que se propaga en dirección del eje y, de modo que la OEM tiene componentes  $\hat{i}$  y  $\hat{k}$ :

$$\vec{E}_{\text{in}} = E_{x,\text{in}} \hat{i} + E_{z,\text{in}} \hat{k} \\ = E_{0x} \cos(\omega t - k_o y) \hat{i} + E_{0z} \cos(\omega t - k_e y + \phi) \hat{k} \quad (7.2.5)$$

modo que los números de onda son

$$k_o = \frac{2\pi v}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda} n_o, \quad k_e = \frac{2\pi v}{\lambda_e} = \frac{2\pi}{\lambda} n_e \quad (7.2.6)$$

y se sabe que las condiciones de contorno son

$$\vec{E}_{\text{in}}(y=0) E_{0x} \cos(\omega t) \hat{i} + E_{0z} \cos(\omega t + \phi) \hat{k} \quad (7.2.7)$$

$$\vec{E}_{\text{in}}(y=L) E_{0x} \cos(\omega t - k_o L) \hat{i} + E_{0z} \cos(\omega t - k_e L + \phi) \hat{k} \quad (7.2.8)$$

de modo que el desfase  $\phi'$  en  $y = L$  es

$$\phi'(y=L) = \phi + (k_o - k_e)L = \phi + \frac{2\pi}{n_o - n_e} L = \phi + \frac{2\pi}{\lambda} \delta n \cdot L \quad (7.2.9)$$

De este modo se presentan dos láminas retardadoras relevantes que son

- **Lámina de media onda:** material de índices  $\delta n$  con espesor  $L$  que cumple  $\delta n L = \lambda/2$ , de modo que introduce un desfase adicional de  $\pi$ .
- **Lámina de cuarto de onda:** material de índices  $\delta n$  con espesor  $L$  que cumple  $\delta n L = \lambda/4$ , introduciendo un desfase adicional de  $\pi/2$ .

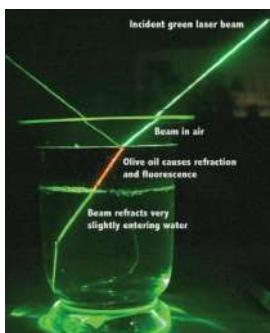
Por ejemplo, si sobre una lámina de media onda incide luz circularmente polarizada a derechas ( $\phi = \pi/2$ ), el desfase de la luz saliente será  $\phi' = \phi + \pi = 3\pi/2$ , es decir, luz circularmente polarizada a izquierdas o, dicho de otro modo, si la luz incidente es circular, invierte la dirección de la polarización de la luz.

Si por otro lado incidiese luz linealmente polarizada sobre una lámina de cuarto de onda, la luz saliente tendría  $\phi' = \phi + \pi/2 = 0 + \pi/2 = \pi/2$ , de modo que la luz saliente se hallará circularmente polarizada a derechas

## 8 Óptica geométrica

1. Leyes básicas de reflexión y refracción .....	60
2. Fenómenos ópticos .....	60
3. Reflexión total interna.....	61
4. Sistemas ópticos. Convenio de signos y elementos cardinales .....	62
5. Dioptrio esférico.....	64
6. Espejos.....	65
7. Lentes: tipos y formación de imágenes.....	67
8. Instrumentos ópticos .....	68

### 8.1 Leyes básicas de reflexión y refracción



Para comprender el comportamiento de la luz, debe entenderse que ésta se propaga libremente, salvo por cambios de medio. Por tanto, basta considerar la **dirección de propagación** y el **ángulo de incidencia** para entender su comportamiento lo que da lugar a la **Teoría de RAYOS**, cuyos fenómenos básicos son la **reflexión** y **refracción**.

La ley básica que gobierna la reflexión es

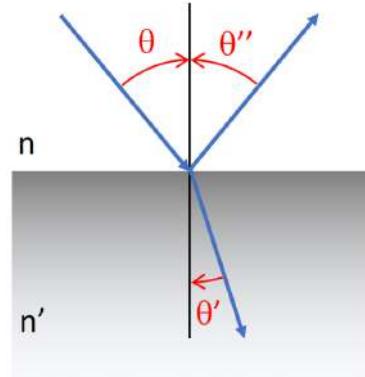
$$\theta = \theta'', \quad (8.1.1)$$

es decir, que el ángulo de incidencia de un rayo con respecto a la normal de la superficie separadora es idéntico al ángulo de reflexión con respecto a la misma normal.

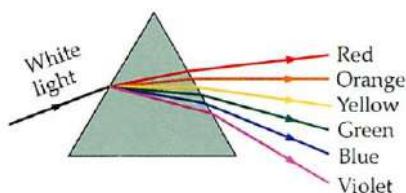
Por otro lado, la ley básica de la refracción es

$$n \sin \theta = n' \sin \theta', \quad (8.1.2)$$

conocida como la ley de Snell, donde  $n$  y  $n'$  son los índices de refracción de los medios y  $\theta$  y  $\theta'$  los ángulos de incidencia y de refracción, respectivamente.



### 8.2 Fenómenos ópticos

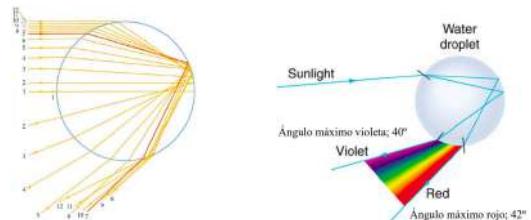


Fenómenos ópticos como el del arco iris se explican mediante la dispersión de la luz blanca en un medio en que los índices de refracción para distintas longitudes de onda (o frecuencias) son distintos, es decir

$$n = n(\lambda) = n(\nu). \quad (8.2.1)$$

En las gotas de lluvia se da una primera refracción al entrar los rayos de luz y una posterior reflexión antes de salir el rayo al exterior. De esta combinación de fenómenos "nace" el arco iris primario. Dentro de las gotas puede darse más de una reflexión (dos, tres, cuatro,...) lo que da lugar a arco iris secundarios, terciarios,...

Como bien puede verse en las figuras de la derecha, la luz solar incidente en las gotas, en el rango de frecuencias de la luz visible, sufren una reflexión que dispersa (desdobra) la luz entre los ángulos de 40° (violeta) y 42° (rojo)



Otros fenómenos ópticos interesantes son los halos solares, la corona de difracción lunar o las "glorias" (véanse las siguientes figuras)

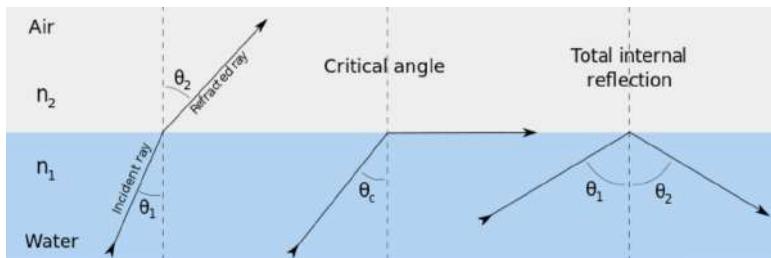


### 8.3 Reflexión total interna

La **reflexión interna total** es un fenómeno que se da cuando un rayo de luz pasa de un medio (1) con mayor índice de refracción a otro con menor (2):

$$\left. \begin{array}{l} n_1 > n_2 \\ n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_2 > \theta_1 \quad (8.3.1)$$

de modo que si  $\theta_2 = 90^\circ = \pi/2$ , el rayo se quedará en el mismo medio.



El ángulo de incidencia  $\theta_1$  para el que  $\theta_2 = \pi/2$  recibe el nombre de ángulo crítico,  $\theta_1(\theta_2 = \pi/2) = \theta_c$  y es

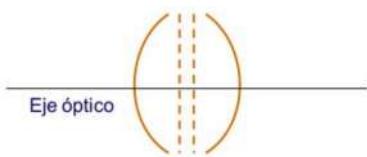
$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.3.2)$$

Cuando esto ocurre se da la reflexión interna total, es decir, el rayo se refleja completamente al incidir sobre la superficie separadora con un ángulo igual al de incidencia.

El funcionamiento de la fibra óptica o el brillo de un diamante son consecuencia de éste fenómeno



## 8.4 Sistemas ópticos. Convenio de signos y elementos cardinales



Un **sistema óptico** es un conjunto de superficies que separan medios con índice de refracción diferente. Las superficies son lentes y/o espejos.

Un **sistema óptico de revolución** es un sistema óptico con elementos de revolución con respecto a una línea denominada eje óptico.

Un sistema óptico divide el espacio en dos partes: por una parte el **espacio objeto**, que es donde se halla el *objeto* y es de donde proceden los rayos y por otro el **espacio imagen**.

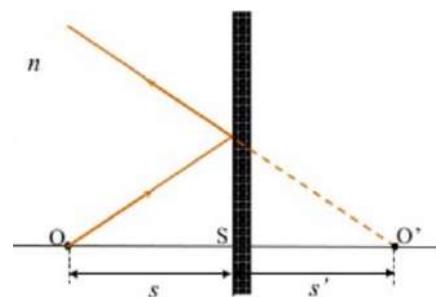
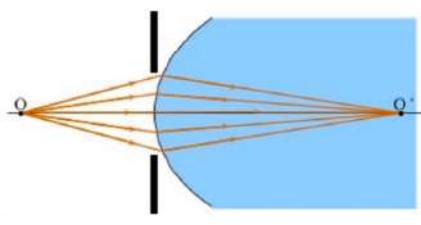
El sistema óptico formará una **imagen real** cuando ésta se forme por la intersección de los rayos del objeto: estas imágenes pueden verse cuando se proyectan sobre pantallas.

Mientras tanto el sistema óptico formará una **imagen virtual** cuando ésta se forme por la intersección de la prolongación de los rayos: estas imágenes son las que se ven a simple vista.

Un sistema óptico es **perfecto** cuando se establece una relación de semejanza entre el espacio objeto e imagen. Esto resulta difícil.

Las **condiciones de Maxwell** son

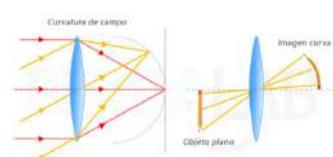
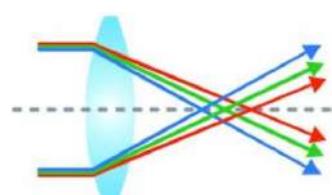
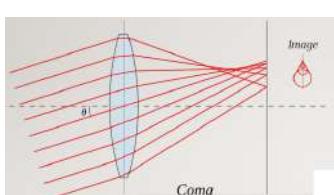
1. **Relación de conjugación:** La imagen objeto puntual  $O$  es un único punto  $O'$  (real o virtual).
2. La imagen de un plano normal en el eje óptico es otro plano normal al eje óptico.
3. La imagen de una figura contenida en un plano es una figura semejante contenida también en otro plano.



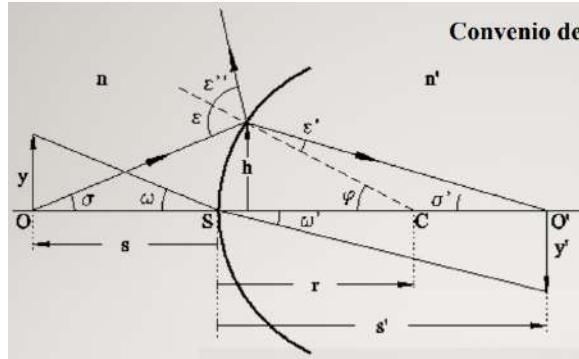
En este curso se tomará la **aproximación paraxial**, que implica que los rayos forman ángulos "muy pequeños" con el eje óptico.

Los sistemas ópticos de revolución esférica en aproximación paraxial son perfectos.

Las siguientes figuras presentan y ponen de manifiesto casos de sistemas ópticos no perfectos



Téngase ahora un sistema óptico como el de la siguiente figura

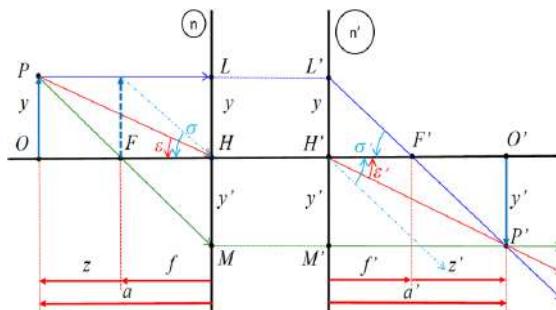


el convenio de signos es entonces

	En la figura	positivo	negativo
Distancias en el eje óptico	$s, s'$	Hacia la derecha	Hacia la izquierda
Radios de curvatura	$r$	Distancia (centro a la derecha de la superficie)	Distancia (centro a la izquierda de la superficie)
Distancias normales al eje	$y, y', h$	Sobre el eje óptico	Bajo el eje óptico
Ángulos con eje óptico	$\sigma, \sigma', \varphi$	Sentido antihorario (cierra hacia el eje óptico)	Sentido horario (cierra hacia el eje óptico)
Ángulos de incidencia, refracción y reflexión	$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \omega, \omega'$	Sentido horario (cierra hacia la normal)	Sentido antihorario (cierra hacia la normal)

De modo que en la figura  $s', r, y, h, \sigma', \varphi, \varepsilon$  y  $\varepsilon'$  son positivos y  $s, y', \sigma, \varepsilon'', \omega$  y  $\omega'$  son negativos.

Los elementos cardinales, es decir, los elementos relevantes en un sistema óptico, se ven dispuestos en la siguiente figura.



donde  $O$  y  $O'$  son el objetos y la imagen, respectivamente,  $P$  y  $P'$  el punto objeto y el punto imagen,  $F$  y  $F'$  la focal objeto y la focal imagen,  $L$  y  $M$ , y  $L'$  y  $M'$  son puntos a los que llegan rayos del punto objeto y de los que salen rayos hacia el punto imagen, respectivamente. Finalmente  $H$  y  $H'$  son los planos principales y son aquellos planos conjugados entre los que el aumento lateral es  $\beta = +1$  ( $\beta$  se definirá más adelante)

Estos puntos cardinales son útiles y válidos para sistemas simples y compuestos.

Se definen entonces con estos puntos cardinales las siguientes distancias:

$$a = HO, \quad a' = H'O'; \quad f = HF, \quad f' = H'F'; \quad z = FO, \quad z' = F'O' \quad (8.4.1)$$

Entonces, en aproximación paraxial, se cumple la ley de Snell

$$n\sigma = n'\sigma'; \quad n\varepsilon = n'\varepsilon' \quad (8.4.2)$$

de modo que, usando trigonometría (y recordando que realmente en las anteriores expresiones se tiene  $\sin \sigma = \sigma$ ,  $\sin \sigma' = \sigma'$ , ...).

$$n\sigma = n'\sigma' \rightarrow n\frac{y}{f} = n'\frac{-y}{f'} \rightarrow f = -\frac{n}{n'}f'; \quad n\varepsilon = n'\varepsilon' \rightarrow n\frac{y}{a} = n'\frac{y'}{a'} \rightarrow \beta = \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a} \quad (8.4.3)$$

$$\frac{y}{z} = -\frac{y'}{f} \rightarrow \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = \frac{f}{f-a}; \quad \frac{y'}{z'} = -\frac{y}{f'} \rightarrow \beta = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{f'} = \frac{f'-a'}{f'} \quad (8.4.4)$$

de donde, a partir de la igualdad a la izquierda de la flecha de las últimas dos ecuaciones se pueden concluir la **Ecuación de Newton**

$$zz' = ff' \quad (8.4.5)$$

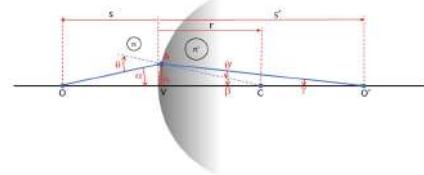
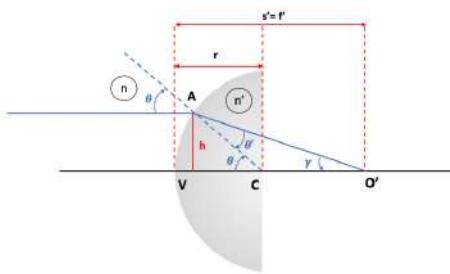
y a partir de las igualdades a la derecha de la flecha puede obtenerse la **ecuación de Gauss**

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \rightarrow \text{a partir de la primera ec. } (n\sigma = n'\sigma') - \frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \quad (8.4.6)$$

## 8.5 Dioptrio esférico

En dioptrios esféricos de deseará hallar la relación de conjugación en función de la posición del objeto  $s$ , la imagen  $s'$ , el radio del dioptrio  $r$ , y los índices de refracción  $n$  y  $n'$ . Se parte entonces de la ecuación de Gauss

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{s'} \quad (8.5.1)$$



Partiendo del triángulo ACO' de la figura izquierda se tiene

$$\theta' + (\pi - \theta) + \gamma = \pi \rightarrow \gamma = \theta - \theta', \quad (8.5.2)$$

además se tiene

$$\theta \sim \frac{h}{r}; \quad \gamma \sim \frac{h}{f'} \quad (8.5.3)$$

y puesto que se cumple la aproximación paraxial

$$n\theta = n'\theta' \quad (8.5.4)$$

de modo que se tiene que

$$\theta r = \gamma f' = (\theta - \theta')f' \rightarrow f' = \frac{\theta}{\theta - \theta'}r = \frac{n'}{n' - n}r \quad (8.5.5)$$

por lo que la relación de conjugación quedará

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} \rightarrow \boxed{-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}} \quad (8.5.6)$$

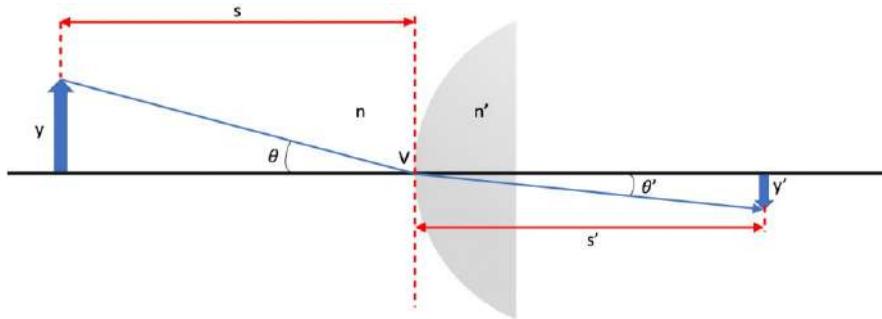
Teniendo en cuenta la relación de conjugación hallada puede analizarse que pasa con la focal en los límites en que el objeto se halla muy lejos del dioptrio ( $s \rightarrow \infty$ ) y en que la formación de la imagen es muy lejana

$(s' \rightarrow \infty)$ :

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow -\frac{n}{f} + 0 = \frac{n'n}{r} \rightarrow f = -\frac{n}{n'-n}r \quad (8.5.7)$$

$$s' \rightarrow \infty \Rightarrow 0 + \frac{n'}{f'} + 0 = \frac{n'-n}{r} \rightarrow f' = \frac{n'}{n'-n}r \quad (8.5.8)$$

Finalmente, como se ha mencionado anteriormente, se definirá el aumento lateral y se verá su expresión para un dioptrio esférico.

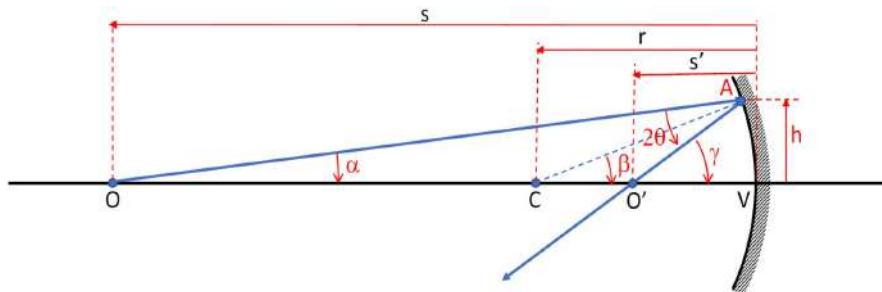


El **aumento lateral** no es más que la razón entre el tamaño  $y'$  de la imagen y el tamaño  $y$  del objeto, esto matemáticamente quiere decir

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'\theta'}{s\theta} = \frac{s'\theta'}{s \left( \frac{n'\theta'}{n} \right)} = \frac{ns'}{n's} \quad (8.5.9)$$

de modo que si el aumento lateral es positivo y mayor a la unidad,  $\beta > 1$ , la imagen estará derecha y será de mayor tamaño que el objeto, si el aumento lateral es positivo pero menor que la unidad,  $0 < \beta < 1$ , la imagen estará derecha pero será de menor tamaño que el objeto. Finalmente, si el aumento lateral es negativo,  $\beta < 0$ , la imagen se verá invertida respecto al objeto.

## 8.6 Espejos



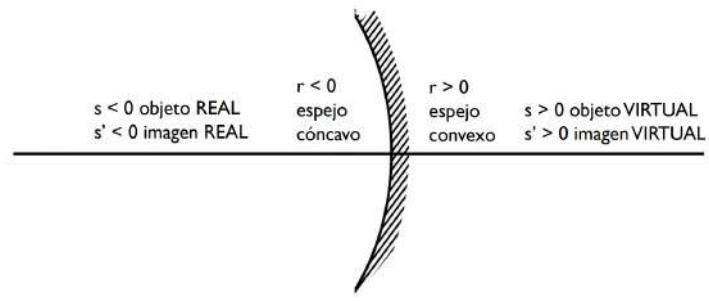
En la imagen superior pueden verse todos los elementos cardinales, ángulos y distancias de un espejo. Para espejos se cumple la misma relación de conjugación que para dioptrios esféricos:

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r} \quad (8.6.1)$$

que puede simplificarse aún más puesto que  $n' = -n$ , de modo que

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}} \quad (8.6.2)$$

Se tiene entonces que si  $r \leq 0$  tanto  $s, s' \leq 0$ , respectivamente, de modo que para **espejos cóncavos** ( $r < 0$ ) tanto objeto como imagen son reales, mientras que si el espejo es **convexo** ( $r > 0$ ) tanto objeto como imagen son virtuales. Véase la siguiente figura



En lo relativo al foco imagen  $F'$  y a la distancia focal imagen  $f'$ , téngase la definición de  $F'$ : es el punto donde se forma la imagen de un punto en  $s \rightarrow \infty$ . Según la relación de conjugación:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 + \frac{1}{f'} = \frac{2}{r} \rightarrow f' = \frac{r}{2} \quad (8.6.3)$$

Véanse en las siguientes figuras el trazado/dibujo del rayo paralelo y del rayo focal

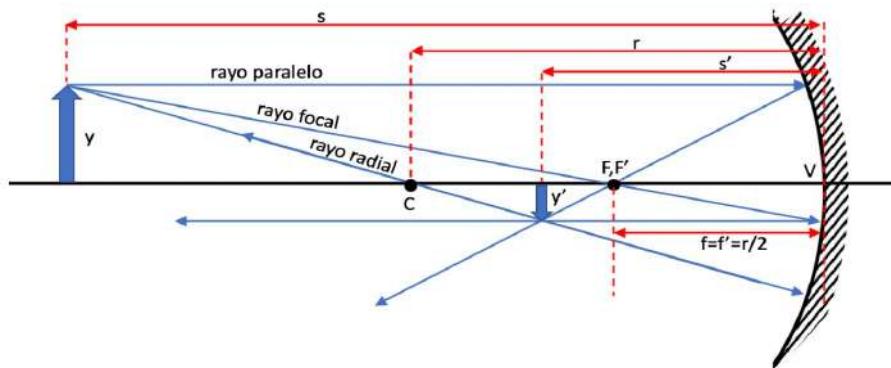


De modo que el **rayo paralelo** sale del objeto paralelo al eje óptico y, tras la reflexión pasa por  $F'$ .

El **rayo focal** sale del objeto apuntando a  $F$  y, tras la reflexión sale paralelo al eje óptico.

Finalmente el **rayo radial** sale del objeto apuntando al centro de curvatura del espejo, incide *normalmente* y se refleja en la misma dirección y distinto sentido.

El siguiente trazado de rayos dispone todos los elementos cardinales, distancias y ángulos en el análisis de un espejo



finalmente, en un espejo, el aumento lateral  $\beta$  es

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'\theta'}{s\theta} \xrightarrow{\theta = -\theta'} \beta = -\frac{s'}{s} \quad (8.6.4)$$

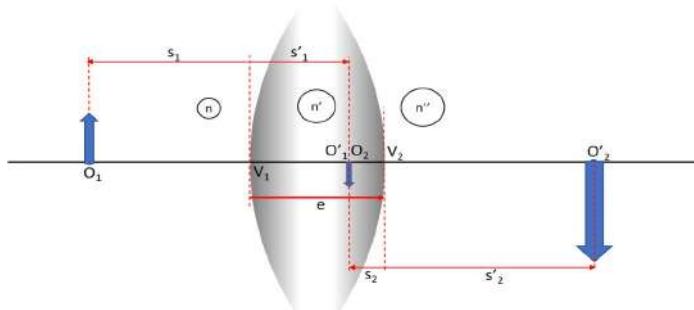


Fig 8.7.1

## 8.7 Lentes: tipos y formación de imágenes

Una lente (como la de la figura superior) es un sistema óptico compuesto por dos dioptrios situados a una distancia  $e :=$  espesor de la lente, de modo que la luz sufre dos refracciones:

$$-\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s'_1} = \frac{n' - n}{r_1} \quad -\frac{n'}{s_2} + \frac{n''}{s'_2} = \frac{n'' - n'}{r_2} \quad (8.7.1)$$

donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a las distancias y los radios del primer y segundo dioptrio, respectivamente y los índices de refracción  $n, n'$  y  $n''$  hacen referencia al índice de refracción en el medio previo a la lente, dentro de la lente y al salir de la lente, respectivamente.

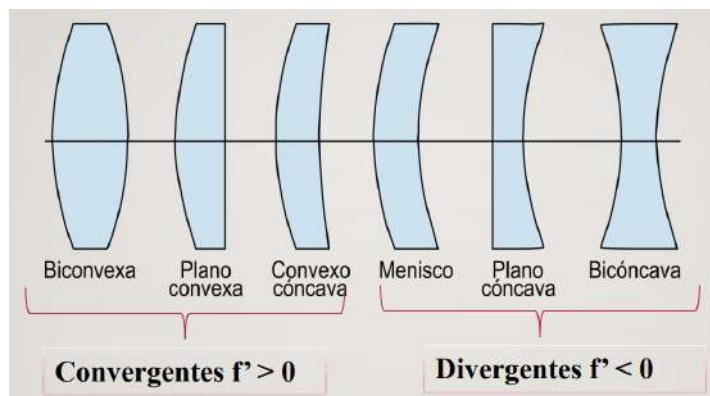
En la aproximación de lente delgada,  $e \approx 0$  se cumple que  $s'_1 \approx s_2$ , de modo que, combinando ambas refracciones

$$-\frac{n}{s_1} + \frac{n''}{s'_2} = \frac{n' - n}{r_1} - \frac{n'' - n}{r_2} \xrightarrow[n=n'']{\text{mismo medio}} -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} = \frac{n' - n}{n} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (8.7.2)$$

que es la fórmula del constructor de lentes. En el vacío

$$\frac{1}{f'} = \frac{n' - 1}{1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8.7.3)$$

Se pueden clasificar entonces en base a su distancia focal las distintas lentes en convergentes, cuya distancia focal será positiva,  $f' > 0$ , y en divergentes, cuya focal será negativa,  $f' < 0$



Se define entonces la potencia de una lente como la inversa de la distancia focal de la imagen

$$P = \frac{1}{f'} \quad (8.7.4)$$

cuya unidad es  $\text{m}^{-1}$  o la dioptría D.

De este modo, como se verá en las siguientes figuras, mientras que el foco objeto se halla a la izquierda para una lente convergente, para una lente divergente se hallará a la derecha y viceversa para el foco imagen.



El trazado de rayos en este caso es muy similar al de un espejo, en este caso:

El **rayo paralelo** sale del objeto paralelo al eje óptico y, tras refractarse, pasa por  $F'$ .

El **rayo focal** sale del objeto apuntando a  $F$  y, tras refractarse, sale paralelo al eje óptico.

Finalmente el **rayo radial** sale del objeto apuntando al centro de curvatura de la lente delgada y *no se desvía*.



Como puede observarse las lentes convergentes pueden formar imágenes tanto reales como virtuales según si la posición del objeto es mayor o menor a la distancia focal, respectivamente. En caso de colocar el objeto encima del foco, no se generará una imagen.

En el segundo caso es importante trazar las prolongaciones de los rayos para hallar dónde se forma la imagen.

Ahora se verá qué forma tiene el trazado de rayos de una lente divergente



Los rayos se trazan nuevamente como sigue:

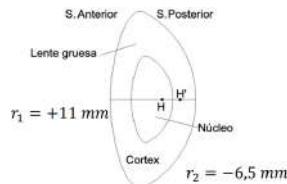
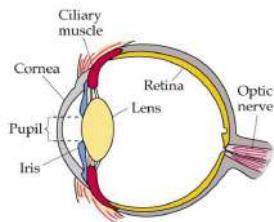
El **rayo paralelo** sale del objeto paralelo al eje óptico y, tras refracción, pasa por  $F'$ .

El **rayo focal** sale del objeto apuntando a  $F$  y, tras refracción, sale paralelo al eje óptico.

El **rayo radial** sale del objeto apuntando al centro de curvatura de la lente delgada y *no se desvía*.

## 8.8 Instrumentos ópticos

El primer instrumento óptico que se tratará es el cristalino del **ojo humano**



El cristalino es una lente cuya primera lente tiene un radio de curvatura de unos 11 mm y el radio de curvatura de la segunda lente es de unos -6,5 mm. En este caso la aproximación de lente delgada no es válida pues  $e \approx 3,7$  mm. Además, los índices de refracción son distintos en los tres medios, siendo  $n = 1$ ,  $n' = 1.422$  y  $n'' = 1.336$  por lo que deben utilizarse ambas relaciones de conjugación:

$$-\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s'_1} = \frac{n' - n}{r_1}, \quad -\frac{n'}{s_2} + \frac{n''}{s'_2} = \frac{n'' - n'}{r_2} \quad (8.8.1)$$

Se tiene que las distancias focales son:

$$HF = f = -16.67 \text{ mm}, \quad H'F' = f' = +22.27 \text{ mm}. \quad (8.8.2)$$

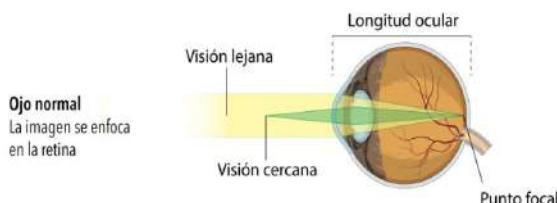
El ojo relajado, en reposo, tiene 58 D, sin embargo, el cristalino del ojo puede “acomodarse”. La amplitud de acomodación,  $A_m$ , “normal” es de 4 D.  $A_m$  iría desde el “punto próximo”  $p$  hasta el “punto remoto”  $r$ . Esto se concluye como sigue

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{r} + \frac{1}{s'} &= \frac{1}{f'} \\ -\frac{1}{p} + \frac{1}{s'} &= \frac{1}{f'} + A_m \end{aligned} \right\} \rightarrow -\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = A_m \quad (8.8.3)$$

Un ojo emétrope tiene  $r$  en el infinito y  $p$  en 25 cm, de modo que  $A_m = 4$  D.

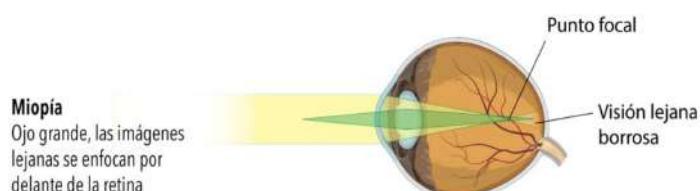
La amplitud de acomodación cambia con la edad, siendo

- Niño: 14 D
- 36 años: 7 D
- 45 años: 4 D (canónico)
- 60 años: 1 D (presbicia)



Ahora se tratarán las ametropías, que son las enfermedades que hacen que el cristalino no tenga las dioptrías “normales”, bien porque el ojo relajado no tiene las dioptrías habituales o porque el cristalino no puede acomodarse de manera adecuada.

Se tiene entonces, en primer lugar, la **miopía**

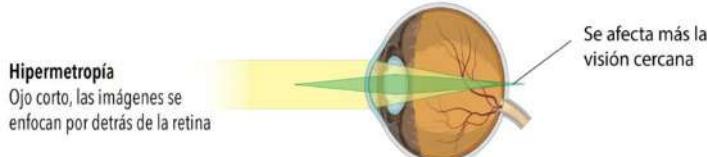


Para corregir esta ametropía se requieren lentes correctoras con potencia  $\varphi > 0$ .

Se habla de un ojo miope cuando el punto remoto  $r$  se encuentra en una distancia finita y es real ( $r < 0$ ). Este exceso de potencia (exceso de convergencia) se corrige con lentes *divergentes* de potencia  $\varphi = 1/r < 0$ . Esta lente divergente correctora coloca la imagen del objeto en el punto remoto  $r$  del miope ( $s \rightarrow \infty$ ;  $s' = r$ ), de modo que

$$0 + \frac{1}{r} = \varphi \quad (8.8.4)$$

Por otro lado se tiene la **hipermetropía**



Para la corrección de esta ametropía se utilizan lentes correctoras con potencia  $\varphi > 0$ .

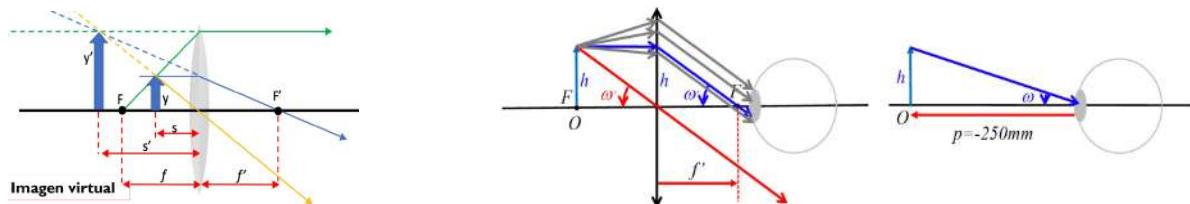
Se habla de un ojo **hipermétrope** si el error de refracción consiste en un defecto de potencia y los rayos paralelos de luz convergen en un punto situado *detrás* de la retina, es decir, el foco imagen  $f'$  es superior a la longitud del ojo  $s'$ . El punto remoto pasa a ser virtual y está *detrás* del ojo

$$f' > s' \Rightarrow r > 0 : 0 + \frac{1}{r} = \varphi. \quad (8.8.5)$$

Dicho defecto se corrige con lentes *convergentes* de potencia positiva  $\varphi = 1/r > 0$ . Esta lente convergente correctora debe colocar la imagen del objeto en el infinito en el punto remoto  $r$  del hipermétrope

$$s \rightarrow \infty; s' = r : 0 + \frac{1}{r} = \varphi \quad (8.8.6)$$

Una **lupa** no es más que una lente convergente



El objeto debe colocarse en el foco de la lupa de modo que la imagen se forme en el infinito, es decir, en el punto remoto de un observador emétrope.

Al hablar de lupas se habla de aumento angular, denotado como  $\Gamma$  y definido como la razón entre el ángulo que ocupa un objeto bajo la acción de la lupa y el visto sin la lupa:

$$\Gamma = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{h/f'}{h/250 \text{ mm}} = \frac{250 \text{ mm}}{f'}, \quad (8.8.7)$$

donde se ha utilizado la aproximación paraxial, de modo que  $\omega = \tan \omega$  y  $\omega' = \tan \omega'$ .

El siguiente instrumento óptico es el **microscopio**, consistente en dos lentes divergentes: la primera recibe el nombre de objetivo y la segunda se denomina ocular.

En este caso las magnitudes relevantes son el aumento lateral que provoca el objetivo y el aumento angular del ocular:

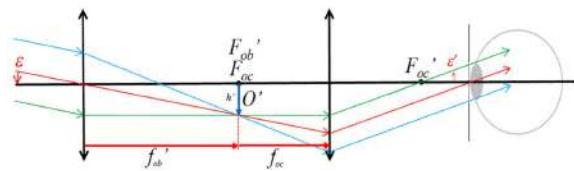
$$\frac{y}{f'_{\text{ob}}} = \frac{-y'}{t} \Rightarrow \beta_{\text{ob}} = \frac{y'}{y} = -\frac{t}{f'_{\text{ob}}}; \quad \Gamma_{\text{oc}} = \frac{250 \text{ mm}}{f'_{\text{eo}}} \quad (8.8.8)$$

y cumplen la siguiente relación con el aumento angular total del instrumento

$$\Gamma = \beta_{\text{ob}} \Gamma_{\text{oc}} = \frac{-t}{f'_{\text{ob}}} \frac{250 \text{ mm}}{f'_{\text{oc}}} \quad (8.8.9)$$

es decir, que el aumento angular total es producto del aumento lateral del objetivo y el aumento angular del ocular.

Finalmente se hablará de **telescopios**, siendo el primero que se tratará el **anteojo de Kepler**: se trata de un sistema óptico compuesto de naturaleza afocal compuesto de dos lentes divergentes, como el microscopio, sin embargo, a diferencia de éste, el foco imagen del objetivo y el foco objeto del ocular se hallan en el mismo punto del espacio como puede verse en la siguiente figura

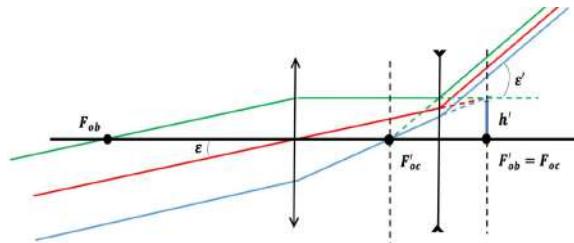


de modo que el aumento lateral de este sistema óptico es

$$\Gamma = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon'}{\tan \varepsilon} = \frac{h'/f'_{\text{oc}}}{-h'/f'_{\text{ob}}} = -\frac{f'_{\text{ob}}}{f'_{\text{oc}}} < 0 \quad (8.8.10)$$

de modo que resulta deseable que la distancia focal de la imagen del objetivo sea máxima y la distancia focal de la imagen del ocular sea mínima para maximizar el aumento total del telescopio.

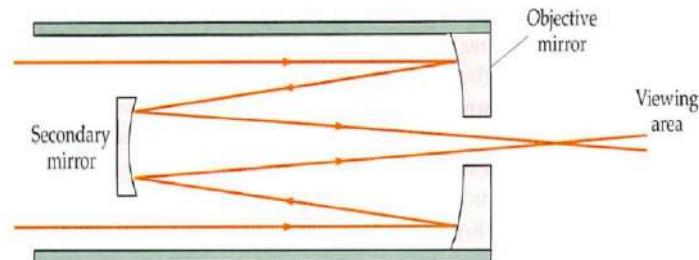
Luego se tiene también el **anteojo de Galileo**, que es otro sistema afocal, pero en este caso se halla compuesto por una lente convergente y otra divergente como se muestra en la siguiente figura



en este caso el aumento angular total del sistema es

$$\Gamma = -\frac{f'_{\text{ob}}}{f'_{\text{oc}}} > 0 \quad (8.8.11)$$

Ambos telescopios son lo que se denominan telescopios refractores, pues se basan en la refracción gracias a lentes, sin embargo, los telescopios modernos son **telescopios reflectores**, basados en espejos como el de la siguiente imagen



## 9 Interferencia y difracción

1. Principio de superposición de OEMs.....	<b>72</b>
2. Condiciones de interferencia. Visibilidad.....	<b>73</b>
3. Franjas de Young.....	<b>73</b>
4. Interferencias en películas delgadas.....	<b>74</b>
5. Difracción. Poder de resolución.....	<b>75</b>

### 9.1 Principio de superposición de OEMs

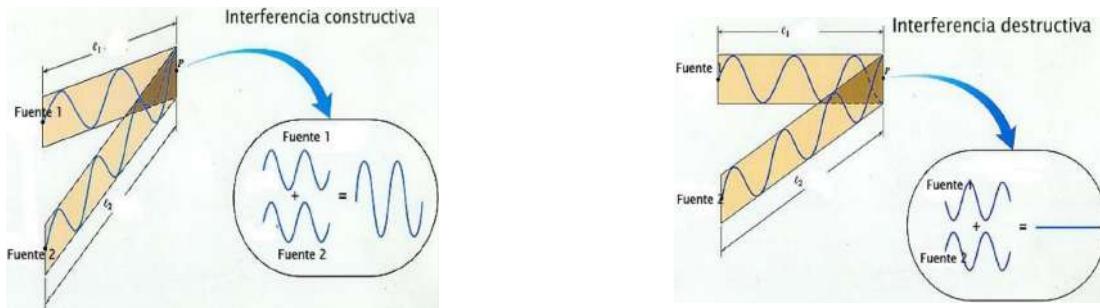
El principio de superposición para las OEMs no es más que, si se tienen dos ondas de campo eléctrico

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad E_2 = E_{20} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (9.1.1)$$

la onda resultante es simplemente su suma

$$E = E_1 + E_2 = E_{10} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + E_{20} \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (9.1.2)$$

De este modo pueden tenerse interferencias tanto constructivas como destructivas:



Se tiene entonces que la intensidad de la onda resultante es el cuadrado del módulo del campo eléctrico

$$\begin{aligned} I(t) &= E^2(t) = [E_1(t) + E_2(t)]^2 \\ &= E_{10}^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + E_{20}^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) + 2E_{10}E_{20} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

utilizando ahora la siguiente identidad,  $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned} I(t) &= E_{10}^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + E_{20}^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) \\ &\quad + E_{10}E_{20} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] + E_{10}E_{20} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

De modo que la intensidad medida es el promedio y, por tanto

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2}E_{10}^2 + \frac{1}{2}E_{20}^2 + 0 + E_{10}E_{20} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \rangle \quad (9.1.5)$$

De este modo, si las velocidades angular de ambas ondas son distintas, se tiene

$$\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow E_{10}E_{20} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \rangle = 0 \Rightarrow I(t) = \frac{1}{2}E_{10}^2 + E_{20}^2 \quad (9.1.6)$$

Es decir, no hay interferencias, solo aumento de intensidad.

Mientras tanto, si ambas velocidades angular son similares se tendrá que

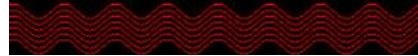
$$\omega_1 \approx \omega_2 \rightarrow E_{10}E_{20} \cos(\phi_1 - \phi_2) \Rightarrow \langle I \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.1.7)$$

de modo que se producen interferencias. Se denomina a la luz que tiene un desfase constante **luz coherente**.

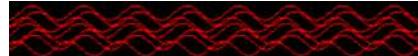
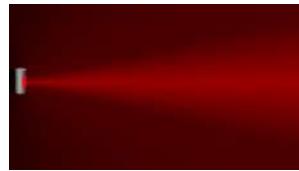
## 9.2 Condiciones de interferencia. Visibilidad

Las **condiciones de interferencia** son dos:

- 1)  $\omega_1 \approx \omega_2$ , es decir, las ondas han de ser de la misma frecuencia. A esto se le denomina **coherencia temporal**.



- 2) La diferencia de fase entre ambas ondas  $\phi_1 - \phi_2$  debe permanecer constante. Esto recibe el nombre de **coherencia espacial**.



Se define entonces la visibilidad de una onda como

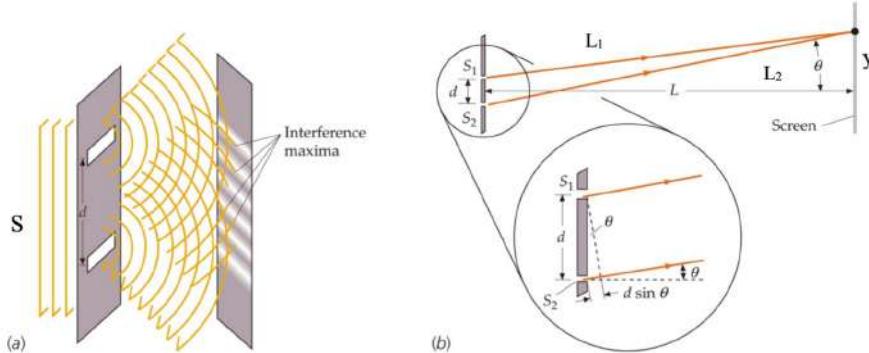
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}} + I_{\min} \quad (9.2.1)$$

donde

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2, \quad \text{cuando } \cos(\phi_1 - \phi_2) = 1 \quad (\Delta\phi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}) \quad (9.2.2)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2, \quad \text{cuando } \cos(\phi_1 - \phi_2) = -1 \quad (\Delta\phi = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}) \quad (9.2.3)$$

## 9.3 Franjas de Young



De este modo, como bien puede verse, cuando se tiene una doble rendija sobre la que incide la misma onda plana, se generan dos frente de onda esféricos que interfieren. Esta interferencia puede verse reflejada en la pantalla en la que incide la onda resultante con intensidad

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (|\vec{L}_2| - |\vec{L}_1|) \quad (9.3.1)$$

donde  $\Delta\phi$  es el desfase, mientras que  $2\pi/\lambda$  es la diferencia de camino óptico.

Se tiene entonces que el desfase es

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} (|\vec{L}_2| - |\vec{L}_1|) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \sqrt{L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} L \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{y + d/2}{L}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{y - d/2}{L}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Suponiendo que  $L \gg d$  puede utilizarse la aproximación  $\sqrt{1+x} \approx 1 + (1/2)x$  que se obtiene mediante el desarrollo de Taylor, de modo que

$$\Delta\phi \approx \frac{2\pi}{\lambda} L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y + d/2}{L} \right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - d/2}{L} \right)^2 \right] \approx \frac{2\pi}{\lambda} L \frac{2dy}{2L^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dy}{L} \quad (9.3.3)$$

En conclusión

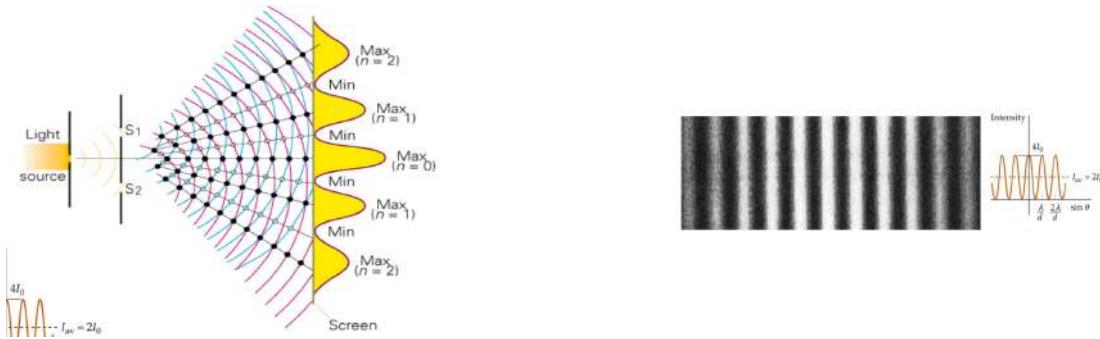
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (|\vec{L}_1| - |\vec{L}_2|) = \{L \gg d\} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dy}{L}, \quad (9.3.4)$$

de modo que los máximos y mínimos ocurren cuando...

$$I_{\max} \Rightarrow \cos \Delta\phi = +1 \Rightarrow \Delta\phi = 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dy_{\max}}{L} \Rightarrow y_{\max} = m \frac{\lambda L}{d}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9.3.5)$$

$$I_{\min} \Rightarrow \cos \Delta\phi = -1 \Rightarrow \Delta\phi = (2m+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dy_{\min}}{L} \Rightarrow y_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9.3.6)$$

por tanto se tiene un patrón de interferencia como en las siguientes figuras



## 9.4 Interferencias en películas delgadas

Los colores de las películas delgadas se deben a las interferencias entre la luz reflejada por la superficie inferior y superior.

La diferencia de caminos ópticos para ángulos pequeños es de  $2d$ , donde  $d$  es el espesor de la película, de modo que el desfase es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n 2d + \pi \quad (9.4.1)$$

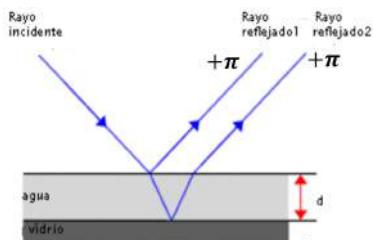
de modo que las interferencias constructivas y destructivas se dan para

$$\delta = 2m\pi \Rightarrow 4nd = (2m-1)\lambda, \quad (9.4.2)$$

$$\delta = (2m+1)\pi \Rightarrow 4nd = 2m\lambda, \quad (9.4.3)$$

respectivamente.

El rayo 1 tiene una desfase de  $\pi$  respecto al incidente (pasa a un medio con un índice de refracción mayor) mientras el rayo 2 tiene la misma fase (va de agua a aire, de mayor a menor índice de refracción).



Si la película delgada de índice  $n$  se halla sobre otro soporte, ambos rayos tienen un desfase de  $\pi$ , de modo que

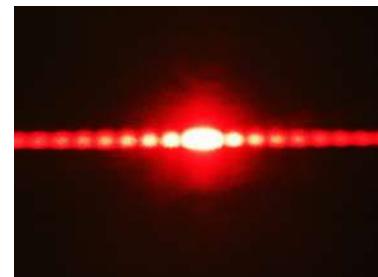
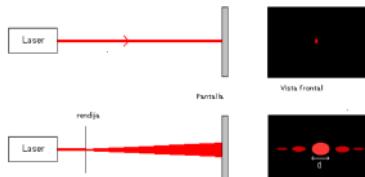
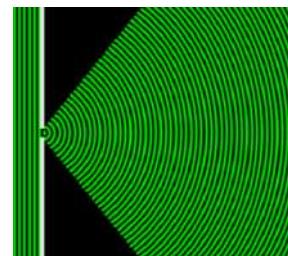
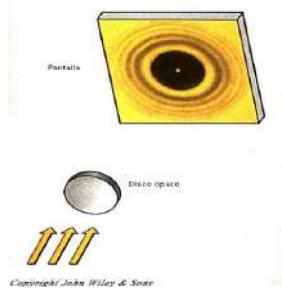
$$\delta = 2m\pi \Rightarrow \lambda = 2dn/m, \quad (9.4.4)$$

$$\delta = (2m+1)\pi \Rightarrow \lambda = 4dn(2m+1) \quad (9.4.5)$$

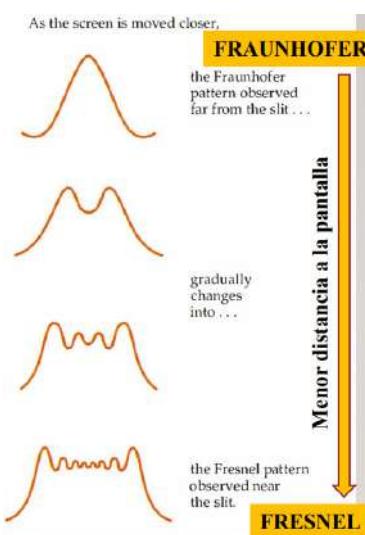
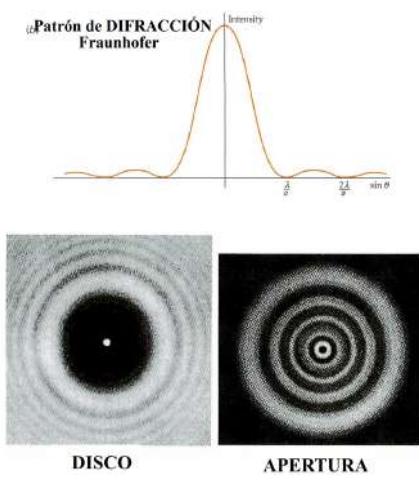
para interferencias constructivas y destructivas, respectivamente.

## 9.5 Difracción. Poder de resolución

La difracción es un fenómeno que aparece en la interacción de una onda con obstáculo cuyas dimensiones son comparables a su longitud de onda, manifestándose como se ve en las siguientes figuras



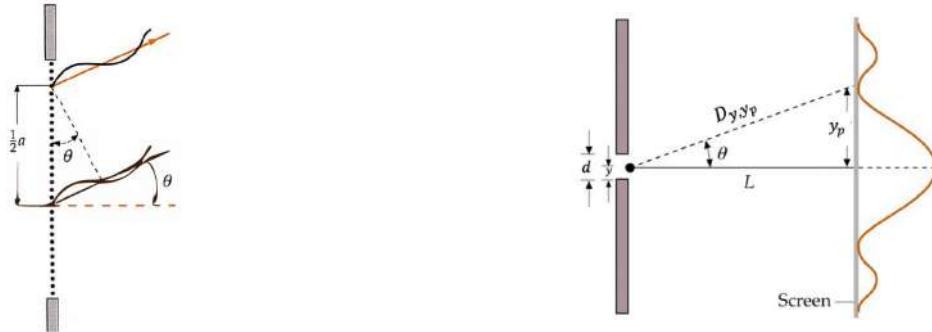
Según la distancia de la rendija a la pantalla, el patrón que se observará en la pantalla será el de Fraunhofer o el de Fresnel, según si están lejos o cerca, respectivamente.



Los patrones inferiores izquierdos son patrones de difracción de Fresnel

Ahora, el principio de Huygens implica que cada punto de la rendija es un emisor de ondas secundarias, de

modo que pasa como se verá en las siguientes figuras (en las que se pueden ver las definiciones de magnitudes que se utilizarán)



Siendo el campo eléctrico en la pantalla

$$E(L, y_p) = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} E[(0, y) \rightarrow (L, y_p)] dy = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} E_0 \cos(\omega t - kD_{y,y_p}) dy \quad (9.5.1)$$

donde  $D_{y,y_p}$ , por Pitágoras y realizando la aproximación de que  $L \gg 2y_p$  es

$$D_{y,y_p} = \sqrt{(y_p - y)^2 + L^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{y_p - y}{L}\right)^2} \approx L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_p - y}{L}\right)^2\right] = L + \frac{1}{2L} (y_p^2 - 2yy_p + y^2) \quad (9.5.2)$$

Si ahora se hace la aproximación de campo lejano,  $y^2 \approx 0$ :

$$D_{y,y_p} = L + \frac{y_p^2}{2L} - \frac{yy_p}{L} = A - \frac{yy_p}{L}, \quad A = L + \frac{y_p^2}{2L} \quad (9.5.3)$$

de modo que

$$\begin{aligned} E(L, y_p) &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} E_0 \cos \left( \omega t - kA + k \frac{yy_p}{L} \right) dy = \frac{E_0}{d} \frac{L}{ky_p} \left[ \sin \left( \omega t - kA + k \frac{dy_p}{2L} \right) - \sin \left( \omega t - kA - k \frac{dy_p}{2L} \right) \right] \\ E(L, y_p) &= E_0 \cos(\omega t - kA) - \frac{\sin \left( \frac{kd}{2L} y_p \right)}{\frac{kd}{2L} y_p}. \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

Ahora únicamente falta obtener la intensidad de la onda en el punto P, para lo que se tendrá que tomar el promedio del cuadrado del campo  $E(L, y_p)$ :

$$I(L, y_p) = \langle E(L, y_p) \rangle = I_0 \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi d}{\lambda L} y_p \right)}{\frac{\pi d}{\lambda L} y_p} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda L} y_p \right) \quad (9.5.5)$$

de modo que la condición de mínimo es

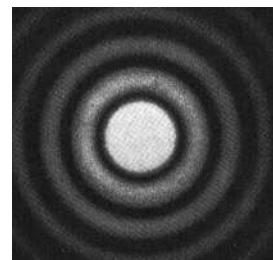
$$\frac{\pi d}{\lambda L} y_p = m\pi \Rightarrow y_p = m \frac{\lambda L}{d}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (9.5.6)$$

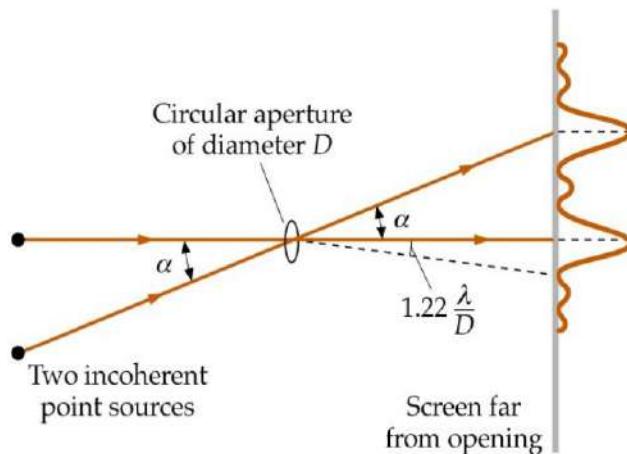
Se tiene que

$$\sin \theta = \frac{y_p}{L} = \frac{\lambda}{d} \quad (9.5.7)$$

de modo que, la condición de mínimo en 2D es

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (9.5.8)$$





Se tiene entonces un patrón como el de la siguiente figura

De modo que, en aproximación paraxial

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \rightarrow \theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (9.5.9)$$

La cuestión ahora es, ¿cuándo pueden distinguirse los dos puntos?

El criterio de Rayleigh dice que

$$\alpha \geq 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (9.5.10)$$

