



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

ELECTROMAGNETISMO I

---

# Apuntes Electromagnetismo I

---

*Alumno:*

Navarro Bonanad, Rubén

*Profesor:*

, Martina

**Grupo BL3**

Curso 2025 - 2026

# Índice

<b>1. Las fuentes del campo electromagnético</b>	<b>4</b>
1.1. Introducción . . . . .	4
1.2. Las fuentes del campo electromagnético: cargas y corrientes . . . . .	4
1.3. Densidades singulares . . . . .	5
1.4. La conservación de la carga: la ecuación de continuidad . . . . .	6
1.5. Determinación unívoca de un campo vectorial: el teorema de Helmholtz* . . . . .	7
1.6. Boletín 1 . . . . .	8
<b>2. El campo electrostático</b>	<b>9</b>
2.1. Ley de Coulomb . . . . .	9
2.2. El campo eléctrico (electrostático) . . . . .	10
2.3. El teorema de Gauss . . . . .	12
2.4. El potencial electrostático . . . . .	13
2.5. Boletín 2 . . . . .	18
<b>3. El dipolo eléctrico. Desarrollo multipolar del potencial electrostático</b>	<b>24</b>
3.1. El dipolo eléctrico . . . . .	24
3.2. Desarrollo multipolar del potencial electrostático . . . . .	27
3.3. Distribuciones de dipolos eléctricos . . . . .	31
3.4. Ejercicios de Boletín . . . . .	33
<b>4. Teoría del potencial electrostático</b>	<b>37</b>
4.1. Conductores en electrostática . . . . .	37
4.2. El método de separación de variables . . . . .	43
4.3. Promedio de potencial . . . . .	47
4.4. Método de las imágenes . . . . .	49
<b>5. El campo magnetostático</b>	<b>53</b>
5.1. Introducción . . . . .	53
5.2. La ley de Ampère . . . . .	53
5.3. El campo magnético (magnetostático) . . . . .	55
5.4. El teorema de Ampère . . . . .	57
5.5. El potencial vector magnético . . . . .	57
5.6. La fuerza de Lorentz . . . . .	59
5.7. Solenoide “finito” . . . . .	63
5.8. Solenoide “infinito” . . . . .	64
<b>6. Desarrollo multipolar del potencial vector magnético</b>	<b>67</b>
6.1. El dipolo magnético . . . . .	67
6.2. Desarrollo multipolar del potencial vector magnético . . . . .	69
6.3. El potencial escalar magnético . . . . .	72
6.4. Distribuciones de dipolos magnéticos . . . . .	72
<b>7. Inducción electromagnética</b>	<b>74</b>
7.1. Introducción . . . . .	74
7.2. Fuerza electromotriz: generadores . . . . .	74
7.3. El concepto de fem. generadores . . . . .	75
7.4. La ley de inducción de Faraday-Lenz . . . . .	76
7.5. Inducción electromagnética en un circuito móvil . . . . .	76
7.6. Inducción electromagnética en un circuito inmóvil . . . . .	77
7.7. Ley de inducción de Faraday-Lenz en forma diferencial . . . . .	78
7.8. Coeficientes de inducción y autoinducción . . . . .	83
<b>8. Ecuaciones de Maxwell en el vacío. Ondas electromagnéticas (EM)</b>	<b>86</b>

8.1. Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias: la corriente de desplazamiento. . . . . 86

8.2. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío . . . . . 88

# 1. Las fuentes del campo electromagnético

1. Introducción.....	4
2. Las fuentes del campo electromagnético: cargas y corrientes.....	4
2.1 Cargas .....	4
2.2 Corrientes .....	4
3. Densidades singulares .....	5
3.1 Densidades singulares de carga.....	5
3.2 Densidades singulares de corriente .....	6
4. La conservación de la carga: la ecuación de continuidad .....	6
5. Determinación unívoca de un campo vectorial: el teorema de Helmholtz* .....	7
6. Boletín 1 .....	8

## 1.1. Introducción

## 1.2. Las fuentes del campo electromagnético: cargas y corrientes

### 1.2.1. Cargas

las **cargas eléctricas** son partículas que presentan interacción electromagnética

la unidad elemental es  $1e^- = -1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$  y  $1p^+ = -1e^-$

La materia normalmente es eléctricamente neutra, es decir, el número de  $e^-$  y  $p^+$  es la misma pero se supondrán cuerpos con cierta carga que forman la materia cuya carga total es

$$Q_T = \pm |e^-| n, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2.1.1)$$

es decir, que la carga está cuantizada.

El radio del  $e^-$  es  $r_{e^-} \approx 2,817910 \times 10^{-15} \text{ m}$ , por lo que su volumen es

$$\frac{4}{3} \pi r_{e^-}^3 = 9,373 \times 10^{-44} \text{ m}^3 \quad (1.2.1.2)$$

y su masa es  $m_{e^-}$

Puede asumirse que la materia está formada por un fluido continuo de  $e^-$ , pues el nº de  $e^-$  es muy grande.

Se supondrá en general que en un cuerpo cargado, en un diferencial de volumen,  $dV$ , habrá un diferencial de carga  $dq = \pm |e^-| dn$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Esto puede asumirse dado que, por ejemplo, en  $1 \text{ cm}^3$  hay

$$\frac{10^{23} \text{ portadores}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{10^{11} \text{ portadores}}{1 \mu\text{m}^3} \quad (1.2.1.3)$$

Se define la densidad de carga (volumétrica)  $\rho$  del siguiente modo

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) = \frac{dq}{dV} \left( \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right) \quad (1.2.1.4)$$

por lo que la carga total,  $Q_T$ , será

$$Q_T = \int_V dq = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (1.2.1.5)$$

### 1.2.2. Corrientes

Se define una corriente (eléctrica) como carga en movimiento. Los electrones libres en un metal generan una corriente. La densidad de corriente  $\vec{J}$  se define como

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t) \equiv \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (1.2.2.1)$$

donde  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  es la velocidad de arrastre (aquella que tienen los  $e^-$ ). Sus unidades son  $[\vec{J}] = C/(m^2 s) = A/m^2$ .

A pesar de la corriente, los conductores no están cargados.

Ahora se verá cómo se relaciona  $\vec{J}$  con la corriente eléctrica que atraviesan un diferencial de superficie,  $d\vec{S} = dS\hat{n}$ , donde  $||\hat{n}|| = 1$ . Sólo es de relevancia la corriente que atraviesa la superficie perpendicular a la normal de esta. Sea  $\theta \equiv \angle \vec{J} d\vec{S}$  y atraviere un  $dq$  dicha superficie

$$\vec{J} \cdot d\vec{S} = \vec{J} dS\hat{n} = \rho \vec{v} dS\hat{n} = \frac{dq}{dV} dS\vec{v} \cdot \hat{n} = \frac{dq}{dV} dS \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \hat{n} = \frac{dq}{dS dt} dS \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad (1.2.2.2)$$

por lo que

$$\int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \left. \frac{dq}{dt} \right|_S = I \left( \frac{C}{s} = A \right) \quad (1.2.2.3)$$

Si  $q > 0$  y  $\vec{v} > 0$ ,  $I > 0$  y si  $q < 0$  pero  $\vec{v} < 0$ , entonces  $I > 0$

## 1.3. Densidades singulares

### 1.3.1. Densidades singulares de carga

- (I) **Carga puntual:** ya se sabe que  $e^-$  tiene tamaño finito, sin embargo, debido a lo pequeño que es, puede entenderse como un único punto de carga  $q$ . Entonces

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow Q_T = \int_{\mathbb{R}^3} \rho dV = \int_{\mathbb{R}^3} q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = q \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV}_1 = q \quad (1.3.1.1)$$

otro modo de verlo es como

$$\lim_{\substack{|\rho| \rightarrow \infty \\ V \rightarrow 0 \\ \rho V = \text{cte}}} \rho V = \frac{q}{V} V = q \quad (1.3.1.2)$$

- (II) **Densidad superficial de carga:**  $dV = h dS$ ,  $h = \text{cte}$ , donde  $h$  es el espesor de la superficie cargada

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ |\rho| \rightarrow \infty \\ \rho h = \text{cte}}} h\rho = h \frac{dq}{dV} = \cancel{h} \frac{dq}{\cancel{h} dS} = \frac{dq}{dS} \equiv \sigma(\vec{r}) \left( \frac{C}{m^2} \right) \quad (1.3.1.3)$$

donde  $h \ll \sqrt{S}$ . Se tendrá entonces que  $Q_T$  es

$$Q_T = \int_S dq = \int_S \sigma dS \quad (1.3.1.4)$$

- (III) **Densidad lineal de carga:**  $dV = S dl$ ,  $S = \text{cte}$ , donde  $S$  es la sección transversal de un material filiforme

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ |\rho| \rightarrow \infty \\ S\rho = \text{cte}}} S\rho = S \frac{dq}{dV} = \cancel{S} \frac{dq}{\cancel{S} dl} = \frac{dq}{dl} \equiv \lambda(\vec{r}) \left( \frac{C}{m} \right) \quad (1.3.1.5)$$

donde  $S \ll \sqrt{l}$ . Se tendrá entonces que  $Q_T$  es

$$\int_L dq = \int_L \lambda dl \quad (1.3.1.6)$$

## 1.3.2. Densidades singulares de corriente

- (i) **Corriente superficial:** En general la corriente eléctrica se propaga en las 3 dimensiones. En este caso se supondrá el grosor/altura  $h$  mucho menor que el resto de dimensiones, por lo que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ ||\vec{J}|| \rightarrow \infty \\ h||\vec{J}|| = \text{cte}}} \vec{J}h = \rho \vec{v}h = \frac{dq}{dV} \vec{v}h = \frac{dq}{h dS_v} \vec{v}h = \frac{dq}{dS_v} = \frac{dq}{dS_v} \vec{v} = \sigma \vec{v} \equiv \vec{K} \left( \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = \text{densidad sup. corriente} \quad (1.3.2.1)$$

por lo que

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\vec{K}}{h} (h d\vec{L}) = \int_L \vec{K} d\vec{L} \quad (1.3.2.2)$$

- (ii) **Corriente filiforme:** Téngase un hilo de sección  $S$ , entonces,  $dV = S dl$  y por tanto

$$\lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ ||\vec{J}|| \rightarrow \infty \\ S||\vec{J}|| = \text{cte}}} \vec{J}S = \rho \vec{v}S = \frac{dq}{dV} \vec{v}S = \frac{dq}{S dl} \vec{v}S = \lambda \vec{v} \equiv \vec{J}_I(A) = \text{dens. corr. filiforme} \quad (1.3.2.3)$$

por tanto

$$\vec{J}_I = \lambda \vec{v} = \frac{dq}{dl} \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{d\vec{l}}{dl} = I \hat{u}, \quad \hat{u} \equiv \frac{d\vec{l}}{dl}, \quad ||\hat{u}|| = 1 \quad (1.3.2.4)$$

## 1.4. La conservación de la carga: la ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad representa el ppio. de conservación de la carga que obedece a un ppio. físico experimental, la carga ni se crea ni se destruye, sólo se mueve.

Téngase un cuerpo con volumen  $V$  y  $\rho(\vec{r}, t = 0)$ , entonces

$$Q_T(0) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \equiv Q_0 \quad (1.4.1)$$

y para un  $t > 0$  la carga se mueve, bien entrando o saliendo de  $V$ , entonces, la carga para un  $t$  arbitrario es

$$Q_0 = Q_T(t) + Q_{\text{ext}}(t) \quad (1.4.2)$$

tomando la derivada temporal a ambos lados se tiene

$$\frac{dQ_0}{dt} = 0 = \frac{dQ_T(t)}{dt} + \frac{dQ_{\text{ext}}(t)}{dt} \quad \frac{dQ_T(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = \frac{dQ_{\text{ext}}(t)}{dt} \Big|_S = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.4.3)$$

por lo que

$$0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = \int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV, \quad \forall V \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.4.4)$$

es decir

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (1.4.5)$$

que se conoce con el nombre de **ecuación de continuidad**.

Una corriente estacionaria es aquella para la que  $\partial \rho / \partial t = 0$

Benito va a hacer el 1.3, 1.5 y 1.9 y Simone el 1.2, 1.8 y 1.10

## 1.5. Determinación unívoca de un campo vectorial: el teorema de Helmholtz\*

Teorema de Helmholtz: supóngase que se tiene un campo vectorial que asigna a cada punto del espacio

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} &\rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Ahora se definen:

$$D = D(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rightarrow \text{divergencia}, \quad \vec{C} = \vec{C}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} \rightarrow \text{rotor} \quad (1.5.2)$$

de modo que

$$U(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{D(\vec{r}')}{R} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{D(\vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||} dV', \quad \vec{W}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{R} dV' \quad (1.5.3)$$

y el T<sup>ma</sup> de Helmholtz concluye que

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{W}} \quad (1.5.4)$$

es decir

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{R} dV' \right) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{R} dV' \right) \quad (1.5.5)$$

## 1.6. Boletín 1

1.3  $\lambda = \lambda_0 x^2$  por lo que

$$Q_T = \int \lambda dl = \int_0^d \lambda dx = \int_0^d \lambda_0 x^2 dx = \lambda_0 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^d = \lambda_0 \frac{d^3}{3} = q \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{3q}{\lambda^3}} \quad (1.6.1)$$

1.5 Téngase un cilindro de altura  $h$  y radio  $a$  con densidad volumétrica de carga  $\rho = \rho_0 r^2 (\cos^4 \varphi) z^2$ . Sea la carga total del cilindro  $q$ , calcúlese el valor de  $\rho_0$ .

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_V \rho dV = \int_V \rho_0 r^2 (\cos^4 \varphi) z^2 r dr d\varphi dz = \rho_0 \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= \rho_0 \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a + \left[ \frac{3}{8} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \rho_0 \frac{a^4 h^3 \pi}{64} = q \Rightarrow \rho_0 = \frac{64q}{a^4 h^3 \pi} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

1.9 Téngase la corriente  $\vec{J}$  inmersa en una esfera de radio  $a$

$$\vec{J} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-t/\tau}}{r} \hat{r}, & r < a \\ \vec{0}, & r \geq a \end{cases} \quad (1.6.3)$$

se sabe que  $\vec{J} = J_r(r) \hat{r}$ . Utilizando la ec. de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{q}{4\pi a^2} \frac{e^{-t/\tau}}{r} \right) = \frac{2q}{4\pi \tau a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} \quad (1.6.4)$$

por lo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{2q}{4\pi \tau a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} \Rightarrow \rho = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + f(r) = \int \frac{-2q}{4\pi \tau a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} dt + f(r) \quad (1.6.5)$$

entonces

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(r, \theta, \varphi, t) = \frac{2q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} + f(r) \quad (1.6.6)$$

aplicando las condiciones iniciales

$$\rho(r, t \gg \tau) = 0, \quad r \in [0, a] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{2q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \frac{1}{e^{t/\tau}} + f(r) \right) = 0 \Rightarrow f(r) = 0 \quad (1.6.7)$$

y por tanto

$$\rho(r, t) = \frac{q}{2\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} \quad (1.6.8)$$

Ahora, la carga cuando  $R < a$

$$Q_T(r = R) = \int_0^R \rho(r, t) dV = \int_0^R \frac{q}{2\pi a^2} \frac{1}{r} e^{-t/\tau} 4\pi r dr = q \frac{e^{-t/\tau}}{a^2} R^2, \quad 0 < R < a \quad (1.6.9)$$

de modo que cuando  $R = a$ , se obtiene la carga total de la esfera

$$Q_T(r = a) \equiv q e^{-t/\tau} \quad (1.6.10)$$

Esto quiere decir que la carga sufre un decaimiento en el interior de la esfera, provocando que la carga se desplace hacia la superficie de la esfera. Puede calcularse la carga superficial de la esfera en  $t \gg \tau$

$$Q_{\text{sup}} = q - q e^{-t/\tau} = q(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \sigma = \frac{Q_{\text{sup}}}{4\pi a^2} = \frac{q}{4\pi a^2} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.6.11)$$



## 2. El campo electrostático

1. Ley de Coulomb .....	9
2. El campo eléctrico (electrostático) .....	10
2.1 Campo eléctrico de una carga puntual .....	10
2.2 Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales .....	11
2.3 El campo eléctrico de una distribución continua de carga .....	11
2.4 Propiedades vectoriales del campo eléctrico: divergencia y rotor .....	11
3. El teorema de Gauss .....	12
4. El potencial electrostático .....	13
5. Boletín 2 .....	18

### 2.1. Ley de Coulomb

Charles de Coulomb entre 1785 y 1796 determinó experimentalmente la ley de fuerzas entre cargas: la fuerza que una carga puntual ejerce sobre otra tiene la dirección definida por las posiciones de ambas cargas. Es repulsiva o atractiva según las cargas tengan el mismo signo o diferente y su valor es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Henry Cavendish realizó lo mismo 13 años antes (y con mayor precisión), en 1772, pero no publicó sus descubrimientos.

En la actualidad se sabe que es proporcional a

$$\frac{1}{d^{2+\delta}}, \quad |\delta| < 10^{-16} \quad (2.1.1)$$

Cuantitativamente es

$$\vec{F}_{q_2, q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{21}, \quad \|\vec{u}_{21}\| = 1 \quad (2.1.2)$$

Ahora, ¿cuánto es  $1/4\pi\epsilon_0$ ? Resulta hallarse en base a  $c$  y  $\mu_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} c = 299792458 \text{ m/s} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \end{array} \right\} c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad (2.1.3)$$

por lo que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,987551787 \cdot 10^9 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (2.1.4)$$

Además se cumple que

$$\vec{F}_{q_1, q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{d^2} \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{q_2, q_1} \quad (2.1.5)$$

que es el principio de acción-reacción o la tercera Ley de Newton:  $\vec{u}_{12} = \vec{u}_{21}$ .

Se utilizará la notación  $\{\vec{r}, \vec{r}', \vec{R}\}$ , donde

1.  $\vec{r}$  hace referencia al punto campo
2.  $\vec{r}'$  hace referencia al punto fuente
3.  $\vec{R}$  hace referencia a la posición relativa:  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $R = \|\vec{R}\|$

mediante esta notación la ley de Coulomb queda como sigue:

$$\vec{F}_{q, q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \vec{u}_R, \quad \vec{u}_R \equiv \frac{\vec{R}}{R}, \quad \|\vec{u}_R\| = 1 \quad (2.1.6)$$

Aunque suele escribirse utilizando  $\vec{R} = R\vec{u}_R$  como

$$\vec{F}_{q,q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \vec{R}}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11'}{R^3} \vec{R} \quad (2.1.7)$$

En cartesianas se tiene entonces

$$q' \rightarrow \vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}, \quad q \rightarrow x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \Rightarrow \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \quad (2.1.8)$$

por tanto el módulo es

$$R = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{1/2} \quad (2.1.9)$$

y la fuerza

$$\vec{F}_{q,q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} ((x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}) \quad (2.1.10)$$

**Principio de superposición:** La interacción entre dos cargas es completamente independiente de la presencia de otras cargas. Por tanto, la fuerza total sobre una carga será

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{q,q_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{R_i^3} \vec{R}_i \quad (2.1.11)$$

donde  $\vec{R}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}_i$  y  $R_i = ||\vec{R}_i||$ , donde  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

La Ley de Coulomb es **lineal**.

## 2.2. El campo eléctrico (electrostático)

### 2.2.1. Campo eléctrico de una carga puntual

$$\vec{F}_{q,q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^3} \vec{R} \quad (2.2.1.1)$$

Se trata de una acción instantánea, por lo que se inventa el concepto de campo. El campo eléctrico que crea la carga  $q'$  es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{q,q'}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R^3} \vec{R} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) = \left( \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} \quad (2.2.1.2)$$

En cartesianas  $q' \rightarrow \vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} ((x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}) \quad (2.2.1.3)$$

Si se pone  $q'$  en  $\vec{r}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r} - \vec{0} = \vec{r} = r\hat{r}$  en esféricas, por lo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.2.1.4)$$

De esto puede observarse que el campo de una carga puntual son esferas concéntricas de radio  $R$ . Si  $q' > 0$  el campo eléctrico (las líneas de campo) salen hacia afuera de la carga, mientras que, si  $q' < 0$ , las líneas de campo entrarían.

Se tiene que

$$||\vec{E}|| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q'|}{r^2} \quad (2.2.1.5)$$

Debido a la dependencia con la inversa al cuadrado de  $r$ , se tiene que cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $||\vec{E}|| \rightarrow 0$ , mientras que cuando  $r \rightarrow 0$ ,  $||\vec{E}|| \rightarrow \infty$ .

### 2.2.2. Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{q,q'_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'_i}{R_i^3} \vec{R}_i \Rightarrow \vec{E}_q = \frac{\vec{F}_q}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i}{R_i^3} \vec{R}_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (2.2.2.1)$$

donde

$$\vec{E}_i \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i}{R_i^3} \vec{R}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.2.2.2)$$

Ejemplo: Sea  $\vec{r}'_1 = a\hat{x}$ ,  $q'_1 = q'$ ,  $q' > 0$  y  $\vec{r}'_2 = -a\hat{x}$ ,  $q'_2 = -q'$  donde  $a > 0$ .

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^2 \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ((x-a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \quad (2.2.2.3)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q'}{((x+a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ((x+a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \quad (2.2.2.4)$$

### 2.2.3. El campo eléctrico de una distribución continua de carga

Supóngase que se tiene una distribución  $\rho(\vec{r}')$  que ocupa un volumen  $V'$  que crea en el punto  $\vec{r}$ . En base al principio de superposición se podrá suponer que en cada punto  $\vec{r}'$  hay un elemento diferencial de volumen  $dV'$  con lo que

$$\rho(\vec{r}') \equiv \frac{dq'}{dV'} \left( \frac{C}{m^3} \right) \quad (2.2.3.1)$$

donde

$$dq' \rightarrow dV' \rightarrow d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^3} \hat{R} \quad (2.2.3.2)$$

con lo que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{dq'}{R^3} \hat{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') \hat{R}}{R^3} dV' \quad (2.2.3.3)$$

En el caso de una distribución superficial de carga se tendría que

$$\sigma(\vec{r}') = \frac{dq'}{dS'} \Rightarrow dq' = \sigma(\vec{r}') dS' \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R^3} \hat{R} dS' \quad (2.2.3.4)$$

En el caso de una distribución lineal se tendrá

$$\lambda(\vec{r}') = \frac{dq'}{dl'} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R^3} \hat{R} dl' \quad (2.2.3.5)$$

El campo total será la suma de aquel generado por cargas puntuales

$$\vec{E} = \vec{E}_{q'_i} + \vec{E}_\rho + \vec{E}_\sigma + \vec{E}_\lambda \quad (2.2.3.6)$$

### 2.2.4. Propiedades vectoriales del campo eléctrico: divergencia y rotor

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} \hat{R} dV' \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \left( \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} \hat{R} dV' \right) = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV' = \left[ \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi\delta(\vec{R}) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \begin{cases} \vec{r} \in V' & \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \\ \vec{r} \notin V' & \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} 0 = 0 \end{cases} \quad (2.2.4.1) \end{aligned}$$

por lo que

$$\rho(\vec{r}') \equiv \frac{dq'}{dV'}, \vec{r}' \in V' \Rightarrow \rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{dq'}{dV'}, & \vec{r}' \in V' \\ 0, & \vec{r}' \notin V' \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (2.2.4.2)$$

La primera ecuación, es decir, la de la divergencia, implica que  $\vec{E}(\vec{r})$  varía con la inversa del cuadrado de la distancia.

### 2.3. El teorema de Gauss

Téngase una distribución de carga con volumen  $V'$  y densidad de carga  $\rho(\vec{r}')$ . Entonces se sabe que el campo en un punto  $\vec{r}$  es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dV'. \quad (2.3.0.1)$$

Además se sabe por propiedades vectoriales que

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}.} \quad (2.3.0.2)$$

Se conoce que  $V' \subset \mathbb{R}^3$ . Ahora un nuevo volumen al que se llamará volumen de Gauss,  $V_g \subset \mathbb{R}^3$ , un volumen cerrado con superficie,  $S_g$ . Entonces

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g \rightarrow \text{flujo de } \vec{E} \text{ a través de } S_g \quad (2.3.0.3)$$

y, por el Teorema de la divergencia

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \int_{V_g} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_{V_g} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_{V_g} \rho(\vec{r}) dV}_{q_{\text{enc}}(V_g)} \quad (2.3.0.4)$$

por lo que, el Teorema de Gauss dice que

$$\boxed{\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{q_{\text{enc}}(V_g)}{\varepsilon_0}} \quad (2.3.0.5)$$

Téngase un hilo infinitamente largo filiforme de espesor 0 que tiene una densidad lineal de carga uniforme. Calcúlese de forma integral y con el T<sup>ma</sup> de Gauss. No se sabe  $\vec{E}(r, \varphi, z)$  pero, por simetría, se sabe que no puede depender de  $\varphi$  y dado que el hilo es infinitamente largo en  $z$ , tampoco puede depender de ésta, pues  $\vec{E}$  es invariante bajo traslaciones en  $z$ . Es decir,  $\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi, z) = E_r(r)\hat{r}$ .

Realícese primero mediante cálculo integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} d\vec{l}'. \quad (2.3.0.6)$$

El vector fuente será

$$\vec{r}' = z'\hat{z}, \quad z' \in ]-\infty, +\infty[ \quad (2.3.0.7)$$

por lo que

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = r\hat{r} - z'\hat{z}, \quad R = (r^2 + z'^2)^{1/2} \quad (2.3.0.8)$$

y la integral

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r} = r\hat{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(r\hat{r} - z'\hat{z})}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} r\hat{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} - \frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'}{r^2 + z'^2} dz' \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} r\hat{r} \left[ \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2} r^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} r\hat{r} \left[ \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} - \lim_{z' \rightarrow -\infty} \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} \right] - \frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} - \lim_{z' \rightarrow -\infty} \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} \right] = \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{r} \left[ \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{(r^2 + t^2)^{1/2}} \right] + \frac{\lambda\hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \left[ 0 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(r^2 + t^2)^{1/2}} \right] = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{z'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \lim_{z' \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{r^2}{z'^2} + 1\right)^{1/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r}
 \end{aligned} \tag{2.3.0.9}$$

Por otro lado, la resolución de Gauss parte del hecho de que se sabe que hay simetría cilíndrica y que el campo es  $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$ , por lo que la superficie de Gauss que se escogerá es un cilindro.

El cilindro se divide en tres superficies, la “tapa superior”, la “tapa inferior” y la superficie lateral por lo que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \int_{S_1} E_r(r)\hat{r} \cdot dS_1\hat{z} + \int_{S_2} E_r(r)\hat{r} \cdot dS_2(-\hat{z}) + \int_{S_L} E_r(r)\hat{r} dS_L\hat{r} = \\
 &= \int_{S_L} E_r(r) dS_L = E_r(r) \int_{S_L} dS_L = E_r(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

En cilíndricas  $\rho = \rho(r', \varphi, z')$  implica que  $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$ , es decir

$$\begin{array}{c} \rho = \rho(r, \varphi, z) \\ + \\ \text{cilíndricas} \end{array} \Rightarrow \vec{E} = E_r(r)\hat{r} \tag{2.3.0.10}$$

## 2.4. El potencial electrostático

Téngase una distribución de carga en volumen  $V'$  con una densidad de carga volumétrica  $\rho(\vec{r}')$ , recordando que  $\vec{r}'$  designa los puntos fuente,  $\vec{r}$  el punto campo y  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$  (siendo su módulo  $||\vec{R}|| = ||\vec{r} - \vec{r}'|| = R$ ) la posición relativa entonces, como ya se ha visto, el vector campo eléctrico será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dV' \tag{2.4.0.1}$$

y cumple las propiedades

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}. \tag{2.4.0.2}$$

Recordando de cálculo II (cálculo en varias variables y vectorial en la UV a fecha del curso académico 2025-2026) que el rotacional del gradiente de una función escalar cumple que es el vector nulo y multiplicando por un factor -1 a ambos lados de la ecuación se tiene que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi) = \vec{0} \tag{2.4.0.3}$$

añadiendo esto con la segunda propiedad del campo eléctrico puede verse que

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi) = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{2.4.0.4}$$

donde el campo escalar  $\phi \equiv \phi(\vec{r})$  recibe el nombre de potencial electrostático.

Recuérdese que el hecho de que un campo vectorial como el eléctrico,  $\vec{E}$ , tenga un rotacional nulo es equivalente a decir que es irrotacional, conservativo, que proviene de un potencial o que el trabajo (bien contra el campo o a su favor) tiene independencia del camino, dicho de otro modo, el trabajo en un camino cerrado es nulo.

Otra forma de ver esto es la siguiente: téngase un camino arbitrario  $\gamma_1$  que va de  $a$  a  $b$  y otro camino arbitrario  $\gamma_2$  que va de  $b$  a  $a$ , entonces, si se designa como  $d\vec{l}$  a un elemento diferencial del camino/trayectoria

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{l} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.4.0.5)$$

Ahora, recordando el T<sup>ma</sup> de Gauss se tiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.4.0.6)$$

por lo que

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.4.0.7)$$

o, dicho de otro modo, la integral no depende del camino de integración.

Debido a que el campo eléctrico puede escribirse como el gradiente del potencial,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  esto también puede demostrarse como sigue:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint -\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = - \oint \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = [d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l}] = - \oint d\phi = 0 \quad (2.4.0.8)$$

pues

$$\oint d\phi = \int_a^b d\phi + \int_b^a d\phi = (\phi(b) - \phi(a)) - (\phi(a) - \phi(b)) \quad (2.4.0.9)$$

Ahora, ¿Qué pasará si se modifica el potencial añadiendo una constante? Sea  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  donde  $\phi = \phi(\vec{r})$ , si ahora se modifica el potencial añadiendo una constante,  $K \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi, \quad \phi = \phi(\vec{r}) \Rightarrow \phi' = \phi + K, \quad K \in \mathbb{R} \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}(\phi') = -\vec{\nabla}(\phi + K) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}K = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.4.0.10)$$

Es decir, el campo electrostático se ve inalterado (o es invariante) bajo la suma de una constante al potencial electrostático.

Para una carga puntual  $q'$  en un punto  $\vec{r}'$  de  $\mathbb{R}^3$ , si se halla el campo,  $\vec{E}(\vec{r})$  en un punto campo  $\vec{r}$ , se tendrá que es

$$11,7 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R} = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right] = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) = -\vec{\nabla} \left( \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.4.0.11)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

a la que, como ya se ha visto, se le puede sumar una constante,  $K \in \mathbb{R}$ , que el campo se mantendrá invariante

$$\phi' = \phi + K = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + K, \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E} \quad (2.4.0.12)$$

Ahora, ¿cómo se decide el origen de potencial? La mejor decisión como origen de potencial, es decir, donde se tiene un potencial de 0 V, es  $\infty$  (pero sólo para distribuciones **FINITAS** de carga), pues esto hará que  $K = 0$  como se ve en la siguiente línea

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi' = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + K \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r}'||} + K \right) = 0 + K = 0 \text{ V} \Rightarrow K = 0 \quad (2.4.0.13)$$

de modo que el potencial queda simplemente como

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.4.0.14)$$

Téngase ahora una distribución finita de  $N$  cargas,  $q'_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  cuyos vectores de posición fuente son  $\vec{r}'_i$  y sus vectores de posición relativa son  $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$ . Entonces, por el principio de superposición se tiene que

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \vec{R}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{4\pi\epsilon_0} \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{R_i} \right) = -\vec{\nabla} \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} = -\vec{\nabla} \sum_{i=1}^N \phi_i = -\vec{\nabla} \phi, \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i$$

como bien puede observarse, el principio de superposición es válido también para el potencial electrostático.

Ahora se verá cómo hallar el potencial de una distribución volumétrica de carga y se dará también el potencial de distribuciones de cargas superficiales y filiformes (o lineales); dado que sus deducciones son análogas (cambiando diferenciales de volumen por diferenciales de superficie y línea, los volúmenes de integración por superficies o caminos y las densidades volumétricas por densidades superficiales o lineales), no se harán explícitamente pero se dejan como ejercicio para el lector.

Téngase una distribución de carga en un volumen  $V'$  con densidad de carga  $\rho(\vec{r}')$  y el punto campo con campo electrostático  $\vec{E}(\vec{r})$ , entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) dV' = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \right) \quad (2.4.0.15)$$

de modo que el potencial es

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} dV' + K \equiv \text{potencial de distribución continua de carga}}, \quad K = 0, \quad \rho = \frac{dq'}{dV'} \quad (2.4.0.16)$$

se puede ver que, diferencialmente

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R} \Rightarrow \phi = \int_{V'} d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (2.4.0.17)$$

Para el caso superficial y lineal se tiene

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS'} \quad \boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dl'} \quad (2.4.0.18)$$

**Ejemplo de cálculo de potencial electrostático:** Téngase una esfera de radio  $a$  uniformemente cargada con carga  $Q_0$ . Calcúlese el campo eléctrico generado y el potencial electrostático en el espacio.

En primer lugar, téngase en cuenta que la densidad de carga de la esfera es

$$\rho = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (2.4.0.19)$$

En coordenadas esféricas se tiene que la distribución de carga tiene la siguiente forma

$$\rho = \rho(r', \theta', \phi') \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r); E_\theta = 0, E_\phi = 0, E_r \neq E_r(\theta, \phi) \quad (2.4.0.20)$$

Analícese ahora por regiones, siendo la primera en la zona interna o “dentro” de la esfera, es decir,  $0 \leq r \leq a$ :

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_g} E_r(r) \hat{r} \cdot dS_r \hat{r} = \int_{S_g} E_r(r) S_g = E_r(r) \int_{S_g} dS_g = E_r(r) 4\pi r^2 \quad (2.4.0.21)$$

donde el término  $E_r(r)$  ha podido salir fuera de la integral dado que para un cascarón de  $r$  cte éste es constante. Aplicando ahora el T<sup>ma</sup> de Gauss

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{enc}}(V_g)}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r \hat{r}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.4.0.22)$$

La segunda región es la que se halla “fuera” de la esfera cargada,  $r \geq a$

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot dS_g = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{enc}}(V_g)}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r \geq a \quad (2.4.0.23)$$

Por lo tanto el campo electrostático  $\vec{E}$  es

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r \hat{r}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r}, & r \geq a \end{cases} \quad (2.4.0.24)$$

Si se grafica  $E_r$  frente  $r$  se puede ver gráficamente que en  $r = a$  el campo eléctrico es continuo pero no derivable (pico anguloso) y que en  $0 \leq r \leq a$  sigue una dependencia lineal con  $r$  mientras que en  $r > a$  tiene una dependencia inversa con el cuadrado de  $r$ .

Ahora, para calcular el potencial electrostático puede aplicarse directamente la definición

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \quad (2.4.0.25)$$

pero es más sencillo hacerlo a partir de la relación entre campo y potencial:

$$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\text{por ser } \vec{E} = E_r(r) \hat{r}} \phi_i = - \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r} + K_i, \quad i \in \{1, 2\} \quad (2.4.0.26)$$

Ahora, dado que se establece que  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$  V, el análisis se hará de “fuera” hacia dentro de la esfera para simplificar hallar las constantes  $K_i$ , por lo que se empezará con la región 2,  $i = 2$ :

$$\phi_2 = - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + K_2 = - \int \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r} + K_2 \quad (2.4.0.27)$$

como se ha dicho antes, imponiendo el potencial en el infinito nulo:

$$\phi(r \rightarrow \infty) \Rightarrow \phi_2(r \rightarrow \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r} + K_2 \right) = K_2 = 0 \text{ V} \rightarrow \boxed{K_2 = 0} \quad (2.4.0.28)$$

de modo que  $\phi_2$  queda como sigue

$$\boxed{\phi_2 = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r}} \quad (2.4.0.29)$$



Ahora, en la región 1:

$$\phi_1 = - \int \vec{E}_1 d\vec{r} + K_1 = - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \hat{r} dr \hat{r} + K_1 = - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a^3} \frac{r^2}{2} + K_1 = - \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 a^3} r^2 + K_1 \quad (2.4.0.30)$$

Imponiendo continuidad del potencial en  $r = a$  se tiene que

$$\phi_1(r = a) = \phi_2(r = a) \rightarrow - \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 a^3} a^2 + K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a} \rightarrow K_1 = \frac{3}{8} \frac{Q_0}{\pi\epsilon_0 a} \quad (2.4.0.31)$$

por lo que  $\phi_1$  queda del siguiente modo

$$\phi_1 = - \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 a^3} r^2 + \frac{3}{8} \frac{Q_0}{\pi\epsilon_0 a} \quad (2.4.0.32)$$

## 2.5. Boletín 2

2,6,8,12 por Simone

- 2.1.  $\sigma = \sigma(\vec{r}') = \text{cte}$ , por la simetría del problema conviene trabajar en coordenadas cilíndricas,  $(r, \varphi, z)$ , aunque se sabe que no dependerá de  $\varphi$  por la simetría radial del problema.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} \vec{R} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R^3} \vec{R} dS' \quad (2.5.1)$$

donde  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$  y el vector posición en cilíndricas se escribe como  $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$  por lo que, en nuestro problema, se tendrá que  $\vec{r} = z\hat{z}, z \in ]-\infty, \infty[$ , pues en el eje  $z$   $r = 0$ .

Los puntos fuente del disco vienen caracterizados por  $\vec{r}' = r'\hat{r}' + z'\hat{z}$  donde  $r' \in [0, a]$  y  $\varphi' \in [0, 2\pi[$ . El vector  $\hat{r}' = \cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}$ .

Ahora se tiene que

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - r'\hat{r}' = z\hat{z}' - r'\hat{r}' \Rightarrow R \equiv ||\vec{R}|| = (z^2 + r'^2)^{1/2} \quad (2.5.2)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r} = z\hat{z}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \int_{S'} \frac{z\hat{z}' - r'\hat{r}'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} z\hat{z} \int_{S'} \frac{r' dr' d\varphi'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{r'^2 dr' d\varphi'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \hat{r}' = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} z\hat{z} \int_0^a \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \oint_0^{2\pi} d\varphi' + \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r'^2 dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \oint_0^{2\pi} \hat{r}' d\varphi' = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} z\hat{z} \left[ \frac{-1}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^a \cdot 2\pi + \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

donde se ha utilizado que  $|z| = \sqrt{z^2}$  y el siguiente resultado

$$\oint_0^{2\pi} \hat{r}' d\varphi' = \oint_0^{2\pi} (\cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}) d\varphi' = \hat{x} \underbrace{\oint_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi'}_0 + \hat{y} \underbrace{\oint_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi'}_0 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad (2.5.4)$$

Puede observarse que el campo tiene simetría impar, es decir

$$\vec{E} = E_z(0, 0, z)\hat{z}, \quad \vec{E} = E_z(0, 0, z)\hat{z} = -E_z(0, 0, z)\hat{z} \quad (2.5.5)$$

.

Además, si  $a \rightarrow +\infty$  implica un plano infinito y da el campo de un plano infinito

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z} \quad (2.5.6)$$

- 2.7. Téngase una esfera de radio  $a$  y densidad volumétrica de carga de la forma  $\rho = \rho(r', \theta', \varphi') = A(a - r')$  en coordenadas esféricas.

En primer lugar se calculará el valor de  $A$ . Para esto se calculará la carga total de la esfera

$$\begin{aligned} Q_T \equiv Q &= \int_{V'} \rho(r') dV' = \int_0^a \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int_0^a A(a - r') r'^2 dr' = 4\pi A \int_0^a (a - r') r'^2 dr' \\ &= 4\pi A \left( a \frac{r'^3}{3} - \frac{r'^4}{4} \right) \Big|_0^a \Rightarrow \boxed{A = \frac{3Q}{\pi a^4}} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Dado que  $\rho = \rho(r')$  en coordenadas esféricas se tiene que  $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$ , por lo que puede emplearse el T<sup>ma</sup> de Gauss. En la región 1,  $0 \leq r \leq a$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_S E_r(r)\hat{r} \cdot dS_r\hat{r} = \int_S E_r(r) \cdot dS_r = E_r(r)4\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{\text{enc}} \quad (2.5.8)$$

por lo que se tiene que la carga encerrada es

$$q_{\text{enc}} = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \int_0^r A(a-r')4\pi r'^2 dr' \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{3Q}{\pi\varepsilon_0 a^4} \left( \frac{a}{3}r - \frac{r^2}{4} \right) \hat{r}, \quad r \in [0, a] \quad (2.5.9)$$

En la región 2  $r \geq a$ :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r \geq a \quad (2.5.10)$$

Ahora, para calcular el potencial electrostático

$$\phi_2 = - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + K_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_2 \quad (2.5.11)$$

tomando el potencial nulo en el infinito

$$\phi(\infty) = 0 \text{ V} \Rightarrow \phi_2(r \rightarrow \infty) = 0 \text{ V} \quad (2.5.12)$$

y

$$\phi_1 = -\frac{3Q}{\pi\varepsilon_0 a^4} \left( \frac{ar^2}{6} - \frac{r^3}{12} \right) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.5.13)$$

Otro ejemplo : téngase el caso del hilo infinito con densidad lineal  $\lambda$  para el cuál ya se ha calculado anteriormente el campo electrostático

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{r} \quad (2.5.14)$$

donde  $\vec{E}$  está en cilíndricas, por lo que  $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ .

El potencial electrostático será

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dl' \quad (2.5.15)$$

Aquí  $\vec{r}' = z'\hat{z}$ ,  $\vec{r} = r\hat{r}$ ,  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = r\hat{r} - z'\hat{z}$ ,  $R = (r^2 + z'^2)^{1/2}$ ,  $dl' = dz'$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} [\ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2})]_{-\infty}^{\infty} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \lim_{z' \rightarrow \infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) - \lim_{z' \rightarrow -\infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) \right] = [2^\circ \text{ lim: } z' = -z'] = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \lim_{z' \rightarrow \infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) - \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(-t + \sqrt{r^2 + (-t)^2}) \right] = [1^\circ \text{ lim: } z' = t] = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t + \sqrt{r^2 + t^2}) - \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(-t + \sqrt{r^2 + t^2}) \right] = \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln()) - \ln() \right] = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{t + \sqrt{r^2 + t^2}}{-t + \sqrt{r^2 + t^2}} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{r^2}{t^2} + 1}}{-1 + \sqrt{\frac{r^2}{t^2} + 1}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2}{0} = +\infty \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Esto está mal, pues asume que en el infinito no existe carga, esto se soluciona tomando una nueva referencia de potencial  $\phi(r = r_0) = \phi_0$ :

$$\phi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + k = - \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} + k = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + k \quad (2.5.17)$$

y teniendo en cuenta la referencia de potencial

$$\phi(r = r_0) = \phi_0 \Rightarrow \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 + k = \phi_0 \Rightarrow k = \phi_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \quad (2.5.18)$$

Ej : superficie plana e infinita de espesor nulo,  $\sigma = \text{cte} = dq/ds$ : En primer lugar se calculará el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\vec{R}}{R^3} dS' \quad (2.5.19)$$

que hay que hacerlo en cilíndricas

$$dS' = r' dr' d\varphi', \quad \vec{r} = z\hat{z}, \quad \vec{r}' = r'\hat{r}', \quad r' \in [0, +\infty[, \quad \hat{r}' = \cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y}, \quad \varphi' \in [0, 2\pi[ \quad (2.5.20)$$

Pero esto se puede hacer de otro modo; viendo la simetría del problema en cartesianas se ve que  $\sigma = \sigma(x', y', z') = \sigma(z')$  por lo que  $\vec{E} = E_z(z)\hat{z}$ . Como superficie de Gauss se escogerá un cilindro de radio  $a$  y altura  $h$  que es perpendicular al plano por lo que se tendrán integrales en las tapas I y II y en el lateral L:

$$\begin{aligned} \int \vec{S} \cdot d\vec{S}_{\text{gg}} &= \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \int_{S_I} \vec{E} \cdot \vec{S}_I + \int_{S_{II}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{II} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = \\ &= \int_{S_I} E_z \left( \frac{h}{2} \right) \hat{z} \cdot S_I \hat{z} + \int_{S_{II}} E_z \left( -\frac{h}{2} \right) (-\hat{z}) \cdot dS_{II} (-\hat{z}) + 0 = \\ &= E_z \left( \frac{h}{2} \right) \cdot S_I + E_z \left( -\frac{h}{2} \right) (S_{II}) = E_z \left( \frac{h}{2} \right) S_I + E_z \left( \frac{h}{2} \right) S_I = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S_I \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

de modo que

$$2E_z \frac{h}{2} S_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S_I \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z \geq 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{z}), & z < 0 \end{cases} \quad (2.5.22)$$

y, al igual que en el anterior ejercicio, para hallar  $\phi$ , se toma  $\phi(z = z_0) = \phi_0$ , por lo que

$$\phi = - \int E_z(z) dz + k = - \int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz + k = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + k \quad (2.5.23)$$

entonces

$$\phi(z_0) = \phi_0 \Rightarrow -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_0 + k = \phi_0 \Rightarrow k = \phi_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z_0 \quad (2.5.24)$$

2.5 Se tienen dos zonas entre dos placas, de espesor  $e_1$  y  $e_2$  respectivamente que se encuentran a una distancia  $d$  con densidades superficiales de carga  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente.

En las caras externa e interna se tienen las densidades de carga  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{12}$ , mientras que en la otra placa se tienen también densidades de carga  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{21}$ .  $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$  y  $\sigma_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22}$ .

Se tendrán 5 regiones, siendo la 1 la que se halla a la izquierda de la primera placa, la 2 la que se halla entre las primeras dos placas, la 3 la que hay entre ambos pares de placas, la 4 la interna entre la tercera y cuarta placa y la 5 a la derecha de la cuarta placa.

En la región 3:

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \int_{S_I} \vec{E} \cdot d\vec{S}_I + \int_{S_{II}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{II} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = 0 + 0 + 0 = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon} \Rightarrow q_{\text{enc}} = 0$$

$$\sigma_{12}S_{II} + \sigma_{21}S_I = S_I(\sigma_{12} + \sigma_{21}) = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = -\sigma_{21} \equiv \sigma_i \quad (2.5.25)$$

mientras que en la región 2

$$\vec{E}_2 = \vec{0} = \frac{\sigma_{11}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{22}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = \vec{0} \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} \equiv \sigma_e \quad (2.5.26)$$

Ahora se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} = \sigma_e + \sigma_i \\ \sigma_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22} = \sigma_e + \sigma_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \equiv \sigma_{11} = \sigma_{22} \\ \sigma_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \equiv \sigma_{12} = -\sigma_{21} \end{array} \right. \quad (2.5.27)$$

En la región 1

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_{11}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{22}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = \dots = -\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad (2.5.28)$$

En la región 2 y 3

$$\vec{E}_2 = \dots = \vec{0}; \quad \vec{E}_3 = \frac{\sigma_{11}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) + \frac{\sigma_{22}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad (2.5.29)$$

En la región 4

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{11}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma_{22}}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = \vec{0} \quad (2.5.30)$$

Y en la región 5

$$\vec{E}_5 = \dots = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\hat{z} \quad (2.5.31)$$

Comprobar placas plano-paralelas:

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \Rightarrow \sigma_e = 0, \quad \sigma_i = 0 \quad (2.5.32)$$

2.9. Se realizará en cilíndricas:  $\phi = \phi(r, \varphi, z)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dV' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L'} \frac{dl'}{R} \quad (2.5.33)$$

donde  $\vec{r} = z\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = a\hat{r}'$ ,  $\hat{r}' = \cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y}$ ,  $\varphi' \in [0, 2\pi[$ ,  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{r}' = z\hat{z}' - a\hat{r}' \rightarrow R = (z^2 + a^2)^{1/2}$  y  $dl' = a d\varphi'$ , por lo que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \oint_0^{2\pi} \frac{a d\varphi'}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{(z^2 + a^2)} \overbrace{\oint_0^{2\pi} d\varphi'}^{2\pi} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0(z^2 + a^2)^{1/2}} = \phi(0, 0, z) \quad (2.5.34)$$

El campo eléctrico tendrá la siguiente forma

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}(r, z) = E_r(r, z)\hat{r} + E_z(r, z)\hat{z} \quad (2.5.35)$$

A lo que no podrá aplicarse Gauss, por lo que se tratará de hacer por integración directa

$$\begin{aligned}\vec{E}(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\lambda(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dl' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{(z\hat{z} - a\hat{r}')}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\varphi' = \\ &= \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{z\hat{z}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi' - \frac{\lambda a^2}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^{2\pi} \frac{\hat{r}'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi' \\ &= \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\hat{z}2\pi}{(z^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{\lambda a^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \oint_0^{2\pi} (\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y}) d\varphi' = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}\end{aligned}$$

Esto también podría haberse deducido del potencial hallado para los puntos sobre el eje  $z$  dado que sabemos que, por simetría,  $\vec{E}(0,0,z) = E_z(z)\hat{z}$ , por lo que

$$E_z(0,0,z) = -\frac{d\phi(0,0,z)}{dz} = -\frac{d}{dz} \left( \frac{\lambda a}{2\epsilon_0(z^2 + a^2)^{1/2}} \right) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.5.36)$$

No ex: Ahora se calculará para cualquier punto del espacio,  $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = a\hat{r}'$ , por lo que  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = r\hat{r} + z\hat{z} + a\hat{r}'$ :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dl' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^{2\pi} \frac{a d\varphi'}{R} \quad (2.5.37)$$

Ahora se escribirá todo en cartesianas

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} + z\hat{z} = r(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}) + z\hat{z}, \quad \vec{r}' = a\hat{r}' = a(\cos\varphi'\hat{x} + \sin\varphi'\hat{y}), \quad \varphi' \in [0, 2\pi[ \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = (r\cos\varphi - a\cos\varphi')\hat{x} + (r\sin\varphi - a\sin\varphi')\hat{y} + z\hat{z} \\ R &= ((r\cos\varphi - a\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi - a\sin\varphi')^2 + z^2)^{1/2}\end{aligned}$$

ahora se toma  $\varphi = 0$  porque el problema es invariante frente a rotaciones de  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned}R &= ((r - a\cos\varphi')^2 + (-a\sin\varphi')^2 + z^2)^{1/2} = (r^2 + a^2\cos\varphi' - 2ra\cos\varphi' + a^2\sin^2\varphi' + z^2)^{1/2} \\ &= (r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi' + z^2)^{1/2}\end{aligned}$$

y ahora la integral quedará como sigue

$$\begin{aligned}\phi(r, \varphi = 0, z) &= \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{(r^2 + a^2 + z^2 - 2ar\cos\varphi')^{1/2}} = \left[ \frac{\theta = \varphi'/2}{d\theta = 1/2 d\varphi'} \right] = \\ &= \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{2 d\theta}{(r^2 + a^2 + z^2 - 2ar\cos(2\theta))^{1/2}} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(r^2 + a^2 + z^2 - 2ar(2\cos^2\theta - 1))^{1/2}} = \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(r^2 + a^2 + z^2 + 2ra - 4ra\cos^2\theta)^{1/2}} = \left[ \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{2} - u, \quad d\theta = du \\ \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u \end{array} \right] \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{-du}{(a^2 + r^2 + z^2 + 2ra)^{1/2}} = \text{MEFALTA} \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{(a^2 + r^2 + z^2 + 2ra)^{1/2} \left(1 - \frac{4ra\sin^2 u}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon} (a^2 + r^2 + z^2 + 2ra)^{-1/2} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\left(1 - \frac{4ra\sin^2 u}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra}\right)^{1/2}}}_I \quad (2.5.38)\end{aligned}$$

$I$  se resuelve como sigue

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\left(1 - \frac{4ra \sin^2 u}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra}\right)^{1/2}} = \int_{-\pi/2}^0 + \int_0^{\pi/2} = [\text{primera integral: } u=-t, \, u=t] \\ &= \int_{\pi/2}^0 \frac{-dt}{\left(1 - \frac{4ra \sin^2 t}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra}\right)^{1/2}} + \int_0^{\pi/2} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\left(1 - \frac{4ra \sin^2 u}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra}\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

Que es una integral elíptica de primera especie

$$K(\alpha) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 s}} \quad (2.5.40)$$

De modo que  $\phi(r, 0, z)$  es

$$\phi(r, 0, z) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} (a^2 + r^2 + z^2 + 2ra)^{-1/2} K \left( \left( \frac{4ra}{a^2 + r^2 + z^2 + 2ra} \right)^{1/2} \right) \quad (2.5.41)$$

de modo que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (2.5.42)$$

En el eje  $z$ ,  $r = 0$  se tiene

$$\phi(0, 0, z) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} (a^2 + z^2)^{-1/2} K(0) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.5.43)$$

En el plano  $z = 0$

$$\phi(r, 0, z = 0) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} (a^2 + r^2 + 2ra)^{-1/2} K \left( \left( \frac{4ra}{a^2 + r^2 + 2ra} \right)^{1/2} \right) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a + r} K \left( \frac{2\sqrt{ra}}{a + r} \right) \quad (2.5.44)$$

cuando  $r \rightarrow \infty$  (o, dicho de otro modo  $r \gg a$ )

$$\phi(r, 0, 0) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a + r} K(0) = \frac{\lambda a}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a + r} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \frac{1}{a + r} \xrightarrow{r \gg a} \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0 r} \quad (2.5.45)$$

### 3. El dipolo eléctrico. Desarrollo multipolar del potencial electrostático

1. El dipolo eléctrico .....	24
2. Desarrollo multipolar del potencial electrostático .....	27
2.1 Propiedades del tensor cuadrupolar .....	28
2.2 Efectos en la elección de origen en el momento dipolar eléctrico .....	28
2.3 Estudio particular de distribuciones de carga con $Q_T = 0$ .....	29
3. Distribuciones de dipolos eléctricos .....	31
4. Ejercicios de Boletín .....	33

#### 3.1. El dipolo eléctrico

Téngase un sistema de referencia tal que las cargas  $q'_1 = q'$ ,  $q'_2 = -q'$ ,  $q' > 0$ , con vectores posición  $\vec{r}'_1$  y  $\vec{r}'_2$ , respectivamente, se hallen ambas a una distancia  $d/2$  del origen de modo que en coordenadas esféricas

$$\vec{r}'_1 = \frac{d}{2} \vec{u}'_1, \quad \vec{r}'_2 = \frac{d}{2} \vec{u}'_2, \quad \|\vec{u}'_1\| = \|\vec{u}'_2\| = 1, \quad \vec{u}'_2 = -\vec{u}'_1 \quad (3.1.1)$$

Se desea hallar el potencial  $\phi(\vec{r})$  creado a una distancia  $\vec{r}$  del origen, de modo que los vectores posición relativa son

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{quad} \vec{r} = r \hat{r} \quad (3.1.2)$$

de modo que su módulo es

$$\begin{aligned} R_i = \|\vec{R}_i\| &= \|\vec{r} - \vec{r}'_i\| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}'_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_i)} = (\vec{r} \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{r}'_i - \vec{r}'_i \cdot \vec{r} + \vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i)^{1/2} = \\ &= (r^2 + r'^2_i - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_i)^{1/2} = \left( r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_i \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

El potencial será

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \phi_1 + \phi_2 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\left( r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_1 \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left( r^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_2 \right)^{1/2}} \right) \\ &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{d/2}{r} \right)^2 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'_1}{r^2} \right)^{1/2}} - \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{d/2}{r} \right)^2 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'_2}{r^2} \right)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

los denominadores del paréntesis tienen la forma de  $\sqrt{1 + \alpha}$ .

El siguiente desarrollo de MacLaurin permitirá hallar una aproximación del potencial

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} \underset{\alpha \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \ll 1, \quad (3.1.5)$$



Analícese qué pasa cuando  $\alpha \rightarrow 0$  en el potencial (es decir  $r \gg d$ )

$$r \gg d \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d/2}{r} \ll 1 \\ \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_i}{r^2} = \frac{\vec{r} \cdot (d/2) \cdot \vec{u}'_i}{r^2} = \frac{\vec{r} \cdot (d/2) \hat{r} \cdot \vec{u}'_i}{r^2} = \frac{(d/2) \hat{r} \cdot \vec{u}'_i}{r} \ll 1 \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

de modo que la aproximación es válida y

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &\approx_{r \gg d} \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( \lambda - \frac{1}{2} \frac{(d/2)^2}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_1}{r^2} \right) - \left( \lambda - \frac{1}{2} \frac{(d/2)^2}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_2}{r^2} \right) \right] = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_1 - \vec{r} \cdot \vec{r}'_2}{r^2} \right) \\ &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{r^2} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

teniendo en cuenta que

$$\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \frac{d}{2} \vec{u}'_1 - \frac{d}{2} \vec{u}'_2 = \frac{d}{2} (\vec{u}'_1 - (-\vec{u}'_1)) = d \vec{u}'_1 \equiv \vec{d}, \quad (3.1.8)$$

de modo que  $\vec{d}$  es el vector que une  $q'_2$  con  $q'_1$  (es decir la partícula con carga negativa con la de carga positiva), se tiene que

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3}, \quad r \gg d. \quad (3.1.9)$$

Se define entonces el dipolo eléctrico  $\vec{p}$  como

$$\vec{p} \equiv \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ q' \cdot d = \text{cte}}} q' \cdot \vec{d} = q' \vec{d} \text{ (C} \cdot \text{m)}, \quad (3.1.10)$$

de modo que el potencial de un dipolo  $\phi_p$  es

$$\phi_p(\vec{r}) \equiv \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ q' \cdot d = \text{cte}}} \phi \equiv \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (3.1.11)$$

Pueden compararse el potencial de una carga puntual  $q'$  con el de un dipolo  $p$  y observarse que

$$\phi_{q'} \propto \frac{1}{r} \quad \phi_p \propto \frac{1}{r^2}. \quad (3.1.12)$$

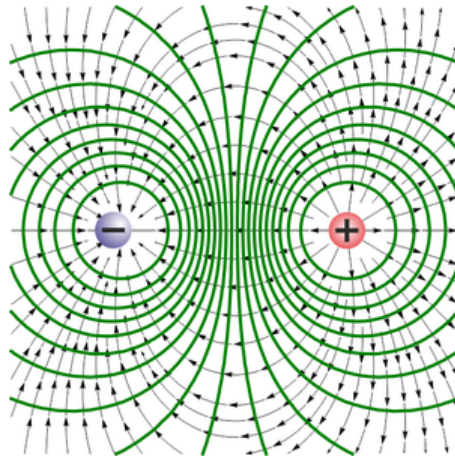
Si se desea conocer el potencial de un dipolo posicionado en un lugar arbitrario del espacio simplemente se debe hacer la sustitución  $\vec{r} \rightarrow \vec{R}$ :

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (3.1.13)$$

Sea  $\vec{p} = p\hat{x}$ , las líneas equipotenciales son las de la siguiente figura

Se hallará ahora  $\vec{E}_p$ , para lo que se supondrá que el dipolo se halla en  $O$   $\vec{r}' = O$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= -\vec{\nabla} \phi_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\vec{\nabla} \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{\nabla} \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$



Ahora, la parcial respecto de una componente  $\alpha = \{x, y, z\}$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) &= \frac{p_\alpha (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - (p_x x + p_y y + p_z z) 3r\alpha}{r^6} = \frac{p_\alpha r^3 - (\vec{p} \cdot \vec{r}) 3r\alpha}{r^6} \\ &= \frac{p_\alpha r^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r}) 3r\alpha}{r^5} \\ \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{\partial \alpha} &= \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2\alpha = 3r\alpha \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

de modo que

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \hat{x} \frac{p_x r^2 - 3x(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} + \hat{y} \frac{p_y r^2 - 3y(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} + \hat{z} \frac{p_z r^2 - 3z(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \right) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (3.1.16)$$

Nuevamente, si en lugar de estar en O el dipolo está desplazado a una posición arbitraria  $\vec{r}'$ :

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^5} \quad (3.1.17)$$

Dado que esto es poco intuitivo, se verá el caso de un dipolo orientado en el eje z:  $\vec{p} = p\hat{z}$  en esféricas.

$$\phi_p = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p_z r \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p_z \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.1.18)$$

de modo que el campo será

$$\vec{E}_p = -\vec{\nabla} \left( \frac{p_z \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{\nabla} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) = E_{pr} \hat{r} + E_{p\theta} \hat{\theta} \quad (3.1.19)$$

recordando la forma del gradiente en esféricas

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \Rightarrow E_{pr} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad E_{p\theta} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (3.1.20)$$

se tiene que

$$\vec{E}_p = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta} \quad (3.1.21)$$

Para una distribución de  $N$  dipolos:

$$\vec{E}_p \quad (3.1.22)$$

### 3.2. Desarrollo multipolar del potencial electrostático

Téngase una distribución de carga  $\rho(\vec{r}')$  en un volumen  $V'$  siendo los puntos fuente  $\vec{r}'$ . Como ya se sabe el potencial  $\phi(\vec{r})$  en un punto campo  $\vec{r}$  con posición relativa  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \quad (3.2.1)$$

de modo que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (3.2.2)$$

Para un punto distante de la distribución de carga, es decir,  $R \gg r$ , el término  $1/R$  puede expandirse en serie de MacLaurin (Taylor en  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ )

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (3.2.3)$$

de modo que, en coordenadas esféricas,  $\vec{r} = r\hat{r}$ ,  $\vec{r}' = r'\hat{r}'$  se tiene

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \right] dV' \\ &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV'}_{\phi^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} dV'}_{\phi^{(2)}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} dV'}_{\phi^{(3)}} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde el término  $\phi^{(1)}$  es el término monopolar,  $\phi^{(2)}$  el término dipolar,  $\phi^{(3)}$  el momento cuadrupolar...

De este modo el término monopolar es

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.2.5)$$

y como puede verse está relacionado con la carga total del dipolo.

El término dipolar del potencial es

$$\phi^{(2)} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' = \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.2.6)$$

donde  $\vec{m}_p$  es el momento dipolar eléctrico, cuya unidad es C·m y definición es

$$\vec{m}_p \equiv \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (3.2.7)$$

El término cuadrupolar es

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \int_{V'} [3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2] \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j \in \{1,2,3\}} \frac{x_i x_j}{2} \int_{V'} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \{1,2,3\}} Q_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ ,  $x'_1 \equiv x'$ ,  $x'_2 \equiv y'$ ,  $x'_3 \equiv z'$ ,  $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $r' \equiv (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$  y  $Q_{ij}$  es el tensor cuadrupolar que se define como

$$Q_{ij} \equiv \int_{V'} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV'. \quad (3.2.9)$$

De este modo el término monopolar hace referencia a la carga total y es proporcional a  $1/r$ , el dipolar hace referencia al momento dipolar y es proporcional a  $1/r^2$  y el cuadrupolar hace referencia al tensor cuadrupolar, siendo proporcional a  $1/r^3$ .

Ahora se verá el campo eléctrico  $\vec{E}$  generado:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(3)} + \dots \quad (3.2.10)$$

donde

$$\vec{E}^{(1)} = -\vec{\nabla}\phi^{(1)} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r} \quad (3.2.11)$$

$$\vec{E}^{(2)} = -\vec{\nabla}\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{m}_p \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}_p r^2}{r^5} \quad (3.2.12)$$

### 3.2.1. Propiedades del tensor cuadrupolar

El tensor cuadrupolar se define como

$$Q_{ij} = \int_{V'} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV' ; \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.2.1)$$

de modo que

$$[Q_{ij}] = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Su traza es

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q) &= Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = \int_{V'} (3x'_1 x'_1 - r'^2 \delta_{11}) \rho dV' + \int_{V'} (3x'_2 x'_2 - r'^2 \delta_{22}) \rho dV' + \int_{V'} (3x'_3 x'_3 - r'^2 \delta_{33}) \rho dV' \\ &= \int_{V'} (3x'^2 - r'^2) \rho dV' + \int_{V'} (3y'^2 - r'^2) \rho dV' + \int_{V'} (3z'^2 - r'^2) \rho dV' \\ &= \int_{V'} [3(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 3r'^2] \rho dV' = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

también se verifica que es antisimétrica

$$Q_{ij} = \int_{V'} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho dV' = \int_{V'} (3x'_j x'_i - r'^2 \delta_{ji}) \rho dV' = Q_{ji} \Rightarrow Q_{ij} = Q_{ji} \quad (3.2.4)$$

De modo que sólo hay 5 elementos independientes y la matriz puede escribirse como

$$[Q_{ij}] = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & -Q_{11} - Q_{22} \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2. Efectos en la elección de origen en el momento dipolar eléctrico

Se conoce que el potencial de una distribución de carga  $\rho(\vec{r}')$  a grandes distancias es

$$\phi(\vec{r}) \approx \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \dots \quad (3.2.1)$$

donde en  $\phi^{(2)}$  interviene  $\vec{m}_p$ :

$$\vec{m}_p \equiv \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (3.2.2)$$

¿Qué ocurrirá si se realiza una traslación de ejes? Ténganse dos SRs  $S$  y  $\tilde{S}$  con ejes perpendiculares  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  y  $O\tilde{X}$ ,  $O\tilde{Y}$  y  $O\tilde{Z}$ , respectivamente, sin rotar. Se tendrá entonces  $\tilde{\mathbf{r}}'$  que se relaciona con  $\mathbf{r}'$  con:

$$\tilde{\mathbf{r}}' = \overline{O\tilde{O}} + \mathbf{r}' \quad (3.2.3)$$

de modo que en  $\tilde{S}$  se tiene que el momento dipolar es

$$\begin{aligned} \vec{m}_p &= \int_{V'} \tilde{\mathbf{r}}' \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' = \int_{V'} (\mathbf{r}' - \overline{O\tilde{O}}) \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' - \int_{V'} \overline{O\tilde{O}} \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' \\ &= \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' - \overline{O\tilde{O}} \int_{V'} \rho(\tilde{\mathbf{r}}') dV' = \vec{m}_p - \overline{O\tilde{O}} Q_T \Rightarrow \tilde{\vec{m}}_p = \vec{m}_p - \overline{O\tilde{O}} Q_T \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Se tiene por tanto que, si  $Q_T = 0$ :

$$\tilde{\vec{m}}_p = \vec{m}_p \Rightarrow \exists \text{SR}, Q_{ij} = 0 \forall i, j, \quad (3.2.5)$$

sin embargo, si  $Q_T \neq 0$

$$\tilde{\vec{m}}_p = \vec{m}_p - \overline{O\tilde{O}} Q_T = \vec{0} \Rightarrow \vec{m}_p = \overline{O\tilde{O}} Q_T \Rightarrow \overline{O\tilde{O}} = \frac{\vec{m}_p}{Q_T} \quad (3.2.6)$$

donde  $\overline{O\tilde{O}}$  es el **centro de carga**

### 3.2.3. Estudio particular de distribuciones de carga con $Q_T = 0$

Si  $Q_T = 0$ ,  $\vec{m}_p$  no depende del sistema de referencia (bajo traslación)

Se definirá ahora una densidad de carga:

$$\rho(\mathbf{r}') \equiv \frac{dq'}{dV'} \left\{ \begin{array}{l} \rho_+(\mathbf{r}') \equiv \begin{cases} \frac{dq'}{dV'}, & \text{si } dq' > 0 \text{ en } \mathbf{r}' \in V' \\ 0, & \text{si } dq' < 0 \text{ en } \mathbf{r}' \in V' \end{cases} \\ \rho_-(\mathbf{r}') \equiv \begin{cases} 0, & \text{si } dq' > 0 \text{ en } \mathbf{r}' \in V' \\ \frac{dq'}{dV'}, & \text{si } dq' < 0 \text{ en } \mathbf{r}' \in V' \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

de modo que

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho_+(\mathbf{r}') + \rho_-(\mathbf{r}'). \quad (3.2.2)$$

por lo que

$$Q_T = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dV' = 0 \Rightarrow \int_{V'} (\rho_+(\mathbf{r}') + \rho_-(\mathbf{r}')) dV' = 0 \quad (3.2.3)$$

definiendo entonces  $Q_{T+}$  y  $Q_{T-}$  se tiene

$$\left. \begin{array}{l} Q_{T+} \equiv \int_{V'} \rho_+(\mathbf{r}') dV' \\ Q_{T-} \equiv \int_{V'} \rho_-(\mathbf{r}') dV' \end{array} \right\} Q_{T+} + Q_{T-} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_{T+} = -Q_{T-}} \quad (3.2.4)$$

se tiene entonces que se pueden definir centros de carga positivos y negativos

$$c dq'_+ \equiv \vec{r}_+ = \frac{\int_{V'} \mathbf{r}' \rho_+(\mathbf{r}') dV'}{Q_{T+}} \quad (3.2.5)$$

$$c dq'_- \equiv \vec{r}_- = \frac{\int_{V'} \mathbf{r}' \rho_-(\mathbf{r}') dV'}{Q_{T-}} \quad (3.2.6)$$

de modo que el momento dipolar puede escribirse cuando  $Q_T = 0$  como

$$\begin{aligned}\vec{m}_p &= \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \int_{V'} \vec{r}' (\rho_+(\vec{r}') + \rho_-(\vec{r}')) dV' = \int_{V'} \vec{r}' \rho_+(\vec{r}') dV' + \int_{V'} \vec{r}' \rho_-(\vec{r}') dV' = \\ &= \vec{r}_+ Q_{T+} + \vec{r}_- Q_{T-} = \vec{r}_+ Q_{T+} - \vec{r}_- Q_{T+} = Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)\end{aligned}\quad (3.2.7)$$

**Ejercicio 1:** Ténganse dos cargas, una en  $(0, 0, d)$ ,  $q' > 0$  y otra en el origen,  $(0, 0, 0)$ ,  $-q'$ , de modo que  $\vec{r}'_1 = d\hat{z}$  y  $\vec{r}'_2 = \vec{0}$ , de modo que

$$Q_T = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^2 q'_i = q'_1 + q'_2 = q' - q' = 0 \quad (3.2.8)$$

El momento dipolar por su definición es

$$\vec{m}_p = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^2 q'_i \vec{r}'_i = q'_1 \vec{r}'_1 + q'_2 \vec{r}'_2 = q' d\hat{z} + (-q')\vec{0} \Rightarrow \vec{m}_p = q' d\hat{z} \quad (3.2.9)$$

de modo que  $\vec{m}_p \approx \vec{p}$  a distancias muy grandes.

Otro modo de calcular  $\vec{m}_p$  teniendo en cuenta que  $Q_T = 0$  es mediante los centros de carga positivo y negativo:

$$\vec{m}_p = Q_T(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q'(d\hat{z} - \vec{0}) = q'd\hat{z} \quad (3.2.10)$$

**Ejercicio 2:** Téngase un rectángulo de grosor 0 con altura  $b$  y separado por la mitad en la anchura en mitades de longitud  $a/2$ . La mitad izquierda tiene una carga  $+q$  y la derecha una carga  $-q$  distribuidas de forma homogénea. Colocando el origen en el centro de la placa/rectángulo se tiene

$$\sigma_+ = \frac{q}{\frac{a}{2}b}, \quad \sigma_- = \frac{-q}{\frac{a}{2}b} \quad (3.2.11)$$

La carga total es

$$Q_T = +q - q = 0 \quad (3.2.12)$$

El momento dipolar puede calcularse mediante su definición:

$$\vec{m}_p = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \int_{S'} \vec{r}' \sigma(\vec{r}') dS'. \quad (3.2.13)$$

Sin embargo es más sencillo hacerlo mediante los centros de carga positivo y negativo, de modo que

$$\vec{m}_p = Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\left(\left(-\frac{a}{4}\hat{x}\right) - \left(\frac{a}{4}\hat{x}\right)\right) \Rightarrow \boxed{\vec{m}_p = -q\frac{a}{2}\hat{x}}. \quad (3.2.14)$$

De este modo, a grandes distancias:

$$\phi(\vec{r}) \approx 0 + \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} + \dots = \frac{-q\frac{a}{2}x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.2.15)$$

**Ejercicio 3 (examen):**  $\rho = \text{cte}$ . Calcular  $\vec{m}_p$ .

(a) respecto a su centro:

$$Q_T = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \neq 0 \quad (3.2.16)$$

$$\vec{m}_p = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \rho \int_{V'} \vec{r}' dV' = \vec{0} \quad (3.2.17)$$

realizando el desarrollo:

$$\begin{aligned} \int_{V'} \vec{r}' dV' &= \int_{V'} r' \hat{r}' r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' = \int_0^a r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \hat{r}' \sin \theta' d\theta' \\ &= \left[ \frac{r'^4}{4} \right]_0^a \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi (\sin \theta' \cos \varphi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}) \sin \theta' d\theta' = \dots = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

(b) Con respecto a la superficie de la esfera

$$\tilde{m}_p = \vec{m}_p - \overline{OO}Q_T = \vec{0} - \rho \frac{4}{3} \pi a^3 a \hat{y} = -\rho \frac{4}{3} \pi a^4 \hat{y} \quad (3.2.19)$$

**Ejercicio 4:** Se tiene un hilo de longitud  $2l$  que tiene una distribución en la primera mitad (de izquierda a derecha) de  $+\lambda$  y en la segunda mitad de  $-\lambda$

(a) Calcular  $\vec{m}_p$  en el centro

$$Q_T = \lambda l + (-\lambda)l = 0 \Rightarrow \vec{m}_p \text{ no depende del sistema de referencia} \quad (3.2.20)$$

de modo que mediante la definición

$$\vec{m}_p = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dl' = \dots \quad (3.2.21)$$

pero, utilizando la siguiente fórmula es más sencillo

$$\vec{m}_p = Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \lambda l \left( \left( -\frac{l}{2} \hat{x} \right) - \left( \frac{l}{2} \hat{x} \right) \right) = -\lambda l^2 \hat{x} \quad (3.2.22)$$

(b) Calcular  $\vec{m}_p$  en uno de los extremos: pero éste es el mismo pues por ser  $Q_T = 0$ ,  $\vec{m}_p = \text{cte}$

(c) Aproximar el potencial a grandes distancias:

$$\phi \approx 0 + \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-\lambda l^2 x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.2.23)$$

### 3.3. Distribuciones de dipolos eléctricos

$$\rho(\vec{r}') \equiv \frac{dq'}{dV'} \quad (3.3.1)$$

Se tiene un cuerpo polarizado que ocupa un volumen  $V'$  que tiene una densidad de dipolos  $d\vec{p}$  en un diferencial de volumen  $dV'$ . La densidad de dipolo eléctrico se define del siguiente modo

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}) \equiv \frac{d\vec{p}}{dV'}. \quad (3.3.2)$$

Esto es la definición de densidad volumétrica de dipolo eléctrico o vector polarización y su unidad es  $\text{Cm/m}^3 = \text{C}/^2$ .

Se tiene un cuerpo polarizado que ocupa un volumen  $V'$  con densidad de dipolo  $d\vec{p} = \vec{P} dV'$ . Se desea conocer el potencial  $\phi(\vec{r})$  a grandes distancias de modo que

$$d\phi = \frac{\vec{R} \cdot d\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (3.3.3)$$

por lo que, integrando

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_{V'} d\phi = \int_{V'} \frac{\vec{R} \cdot d\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{R} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{R^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \vec{P}(\vec{r}') dV' = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{R} = \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{P}(\vec{r}') dV'\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

se tiene que el gradiente del producto de un vector por un campo escalar es

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \Psi) = \Psi \vec{\nabla} \vec{a} + \vec{a} \vec{\nabla} \Psi \Rightarrow \Phi = \frac{1}{R}, \quad \vec{a} = \vec{P} \quad (3.3.5)$$

de modo que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left[ \vec{\nabla}' \cdot \left( \vec{P} \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P} \right] dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{P}}{R} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} -\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{R} dV' \quad (3.3.6)$$

Se tiene que, por el teorema de la divergencia

$$\int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{P}}{R} \right) dV' = \int_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{R} dS' = \int_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{R} dS' \quad (3.3.7)$$

de modo que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{R} dV' \quad (3.3.8)$$

se definen ahora las siguientes densidades

$$\sigma_p(\vec{r}') \equiv \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}'), \quad \rho_p \equiv -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad (3.3.9)$$

que son las densidades equivalentes de polarización superficial y volumétrica, respectivamente, de modo que el potencial queda como

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma_p(\vec{r}')}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_p(\vec{r}')}{R} dV' \quad (3.3.10)$$

La carga total del cuerpo es

$$Q_T = \int_{S'} \sigma_p dS' + \int_{V'} \rho_p dV' = \int_{S'} \vec{P} \cdot \vec{n} dS' + \int_{V'} -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P} dV' = \int_{S'} \vec{P} \cdot \vec{n} dS' + \int_{S'} -\vec{P} \cdot d\vec{S}' = 0. \quad (3.3.11)$$

**Ejercicio 1:** Se tiene un cilindro de altura  $h$  y radio  $a$  con densidad de dipolo eléctrico  $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ ,  $P_0 = \text{cte}$ . La densidad equivalente de polarización es

$$\rho_p = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') = -\vec{\nabla}' \cdot (P_0 \hat{z}) = -\frac{\partial z}{\partial P_0} = 0 \quad (3.3.12)$$

y la densidad superficial equivalente tiene tres regiones, la de la tapa superior (I), la de la inferior (II) y la lateral (L):

$$\sigma_p = \begin{cases} \text{arriba} \rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_I = P_0 \hat{z} \cdot \hat{z} = P_0 \\ \text{abajo} \rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_{II} = P_0 \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = -P_0 \\ \text{lateral} \rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_L = P_0 \hat{z} \cdot \hat{r} = 0 \end{cases} \quad (3.3.13)$$

por lo que sólo son relevantes las tapas: esto puede entenderse como que los dipolos orientados interiores se cancelan todos salvo los de las tapas. Se utilizará ahora un resultado obtenido anteriormente para el potencial en el eje  $z$  de un disco con densidad de carga  $\sigma$ :

$$\phi(0, 0, z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} ((z^2 + a^2)^{1/2} - |z|) \quad (3.3.14)$$

de modo que la superposición de ambos discos dará

$$\phi(0, 0, z) = \frac{-P_0}{2\epsilon_0} ((z^2 + a^2)^{1/2} - |z|) + \frac{P_0}{2\epsilon_0} (((z-h)^2 + a^2)^{1/2} - |z-h|) \quad (3.3.15)$$



### 3.4. Ejercicios de Boletín

3.1. Se tienen tres cargas  $q, q, -2q$  en un triángulo equilátero de lado  $a$ , donde  $q > 0$ .

(a)

$$Q_T = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \sum_{i=1}^3 q'_i = q'_1 + q'_2 + q'_3 = q + q + (-2q) = 0 \quad (3.4.1)$$

de modo que  $\vec{m}_p$  no depende del sistema de referencia.

Tómese como origen de coordenadas la carga  $q'_1$  en el extremo inferior izquierdo, de modo que

$$\vec{r}'_1 = \vec{0}, \quad r'_1 = \|\vec{r}'_1\| = 0; \quad \vec{r}'_2 = a\hat{x}, \quad \|\vec{r}'_2\| = a; \quad \vec{r}'_3 = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \quad (3.4.2)$$

$$r'_3 = \|\vec{r}'_3\| = \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 \right)^{1/2} = a \quad (3.4.3)$$

por lo que  $\vec{m}_p$  es

$$\vec{m}_p = \sum_{i=1}^3 q'_i \vec{r}'_i = q'_1 \vec{r}'_1 + q'_2 \vec{r}'_2 + q'_3 \vec{r}'_3 = q\vec{0} + qa\hat{x} + (-2q) \left( \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right) = -\sqrt{3}qa\hat{y} \quad (3.4.4)$$

que también puede calcularse con los centros de carga positivo y negativo

$$\vec{m}_p = Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = 2q \left( \frac{a}{2}\hat{x} - \vec{r}'_3 \right) = -\sqrt{3}qa\hat{y} \quad (3.4.5)$$

Un elemento del momento cuadrupolar será

$$Q_{jk} = \sum_{m=1}^3 (3x'_m x'_{k_m} - r'^2_m \delta_{jk}) q'_m \quad (3.4.6)$$

por lo que  $Q_{11}$  será

$$\begin{aligned} Q_{11} &\equiv Q_{xx} = (3x'_1 x'_1 - r'^2_1) q'_1 + (3x'_2 x'_2 - r'^2_2) q'_2 + (3x'_3 x'_3 - r'^2_3) q'_3 \\ &= (3 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 1) q + (3 \cdot a \cdot a - a^2 \cdot 1) q + \left( 3 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - a^2 \cdot 1 \right) (-2q) = \frac{5}{2} q^2 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$Q_{22}$  será:

$$\begin{aligned} Q_{22} &\equiv Q_{yy} = \sum_{m=1}^3 (3y'_m y'_m - r'^2_m \delta_{jk}) q'_m \\ &= (3 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 1) q + (3 \cdot 0 \cdot 0 - a^2 \cdot 1) q + \left( 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a^2 \cdot 1 \right) (-2q) = -\frac{7}{2} q a^2 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

y  $Q_{33}$ :

$$\begin{aligned} Q_{33} &\equiv Q_{zz} = \sum_{m=1}^3 (3z'_m z'_m - r'^2_m \delta_{jk}) q'_m \\ &= (3 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 1) q + (3 \cdot 0 \cdot 0 - a^2 \cdot 1) q + (3 \cdot 0 \cdot 0 - a^2) (-2q) = qa^2 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

de modo que

$$\text{tr}[Q_{jk}] = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = \frac{5}{2} qa^2 - \frac{7}{2} qa^2 + qa^2 = 0 \quad (3.4.10)$$

por lo que, en principio, nuestros cálculos son correctos

Ahora, los elementos de fuera de la diagonal:

$$\begin{aligned} Q_{12} \equiv Q_{xy} &= \sum_{m=1}^3 (3x'_m y'_m r_m'^2 \delta_{12}) q'_m \\ &= (3 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 \cdot 0)q + (3 \cdot a \cdot 0 - a^2 \cdot 0) + \left(3 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a - a^2 \cdot 0\right)(-2q) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}qa^2 = Q_{21} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$Q_{13} \equiv Q_{xz} = \sum_{m=1}^3 (3x'_m z'_m r_m'^2 \delta_{13}) q'_m = 0 = Q_{31} \quad (3.4.12)$$

$$Q_{23} = \sum_{m=1}^3 (3y'_m z'_m r_m'^2 \delta_{23}) q'_m = 0 = Q_{32} \quad (3.4.13)$$

De modo que el tensor cuadrupolar es

$$[Q_{jk}] = qa^2 \begin{pmatrix} 5/2 & -3\sqrt{3}/2 & 0 \\ -3\sqrt{3}/2 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.14)$$

y el potencial:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \dots = 0 + \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j + \dots \\ &= \frac{-\sqrt{3}qay}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \frac{1}{2} [Q_{11}xx + Q_{12}xy + Q_{13}xz + Q_{21}yx + \dots] \\ &= \frac{-\sqrt{3}qay}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2}qa^2x^2 + \left(-\frac{7}{2}qa^2\right)y^2 + (qa^2)z^2 + 2\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}qa^2\right)xy \right] \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

aunque ya se sabía que

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 R_3}, \quad \vec{R}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}_i \quad (3.4.16)$$

- (b) Téngase un cuadrado de lado  $a$  que tiene en las esquinas diamétricamente opuestas cargas iguales, en dos positivas y en dos negativas, siendo la de la esquina inferior izquierda la primera,  $i = 1$ , y en sentido antihorario aumenta  $i$ .

Su carga total será  $Q_T$ :

$$Q_T = \sum_{i=1}^4 q'_i = q - q + q - q = 0 \quad (3.4.17)$$

Las posiciones eligiendo el centro del cuadrado como el origen son

$$\begin{aligned} q'_1 \rightarrow \vec{r}'_1 &= -\frac{a}{2}\hat{x} - \frac{a}{2}\hat{y}, \quad r_1'^2 = \frac{a^2}{2}; \quad q'_2 \rightarrow \vec{r}'_2 = \frac{a}{2}\hat{x} - \frac{a}{2}\hat{y}, \quad r_2'^2 = \frac{a^2}{2} \\ q'_3 \rightarrow \vec{r}'_3 &= \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}, \quad r_3'^2 = \frac{a^2}{2}; \quad q'_4 \rightarrow \vec{r}'_4 = -\frac{a}{2}\hat{x} + \frac{a}{2}\hat{y}, \quad r_4'^2 = \frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

de modo que el momento dipolar es

$$\vec{m}_p = \sum_{i=1}^4 q'_i \vec{r}'_i = \cdots = \vec{0} \quad (3.4.19)$$

que, con los centros de carga también resulta idéntico:

$$Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = 2q(\vec{0} - \vec{0}) = \vec{0} \quad (3.4.20)$$

Para el momento cuadrupolar se tiene

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 0 \quad (3.4.21)$$

y fuera de la diagonal

$$Q_{12} \equiv Q_{xy} = 3qa^2 = Q_{21}, \quad Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0 \quad (3.4.22)$$

de modo que el tensor cuadrupolar

$$[Q_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 3qa^2 & 0 \\ 3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.23)$$

Y el potencial es

$$\phi(\vec{r}) = 0 + 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \frac{1}{2} [3qa^2xy + 3qa^2yx] \quad (3.4.24)$$

- (c) Se tiene la misma figura que en (a) salvo que la tercera carga tiene una carga de  $-q$ . Su carga total será:

$$Q_T = \sum_{i=1}^3 q'_i = q + q - q = q \neq 0 \quad (3.4.25)$$

por lo que  $\vec{m}_p$  depende del sistema de referencia

Tomando un sistema de referencia S centrado en la carga 1:

$$\vec{m}_p = \sum_{i=1}^3 q'_i \vec{r}'_i = \cdots = q \left( \frac{a}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \hat{y} \right) \quad (3.4.26)$$

y  $\vec{m}_p \neq Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$

$$\frac{\vec{m}_p}{Q_T} = \frac{q \left( \frac{a}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \hat{y} \right)}{q} = \frac{a}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} a \hat{y} \quad (3.4.27)$$

En el nuevo sistema de referencia tendrá  $\vec{m}_p$  y las posiciones serán

$$\begin{aligned} q'_1 \rightarrow \vec{r}'_1 &= -\frac{a}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} a \hat{y}, & q'_2 \rightarrow \vec{r}'_2 &= \frac{a}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} a \hat{y} \\ q'_3 \rightarrow \vec{r}'_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot 2 \hat{y} = \sqrt{3} a \hat{y} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

por lo que

$$\vec{m}_p = \sum_{i=1}^3 q'_i \vec{r}'_i = \cdots = \vec{0} \quad (3.4.29)$$

y el tensor cuadrupolar

$$[\tilde{Q}_{ij}] = qa^2 \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.30)$$

por lo que

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\tilde{r}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\tilde{r}^5} \frac{1}{2} qa^2 \left( \frac{5}{2} \tilde{x}^2 + \left(-\frac{7}{2}\right) \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \right) \quad (3.4.31)$$

donde  $\tilde{r} = (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)^{1/2}$

- 3.7. Ténganse dos láminas de grosor  $d$  y lados  $a$  y  $b$ , teniendo la superior una densidad de carga  $-\rho$  y la inferior una carga  $\rho$ . Por lo tanto la carga total de la distribución será

$$Q_T = (\rho abd) + (-\rho abd) = 0 \Rightarrow \vec{m}_p \text{ no depende del sistema de referencia} \quad (3.4.32)$$

por lo que puede calcularse como

$$\vec{m}_p = Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = (\rho abd) \left( \left(-\frac{d}{2}\right) \hat{z} - \left(\frac{d}{2}\right) \hat{z} \right) = -\rho abd \hat{z} \quad (3.4.33)$$

de modo que el potencial es

$$\phi(\vec{r}) \approx 0 + \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-\rho abd^2 z}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.4.34)$$

y su campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{0} + \frac{3(\vec{m}_p \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}_p}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{3(-\rho abd^2)z\vec{r} - r^2(-abd^2)\hat{z}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (3.4.35)$$

## 4. Teoría del potencial electrostático

1. Conductores en electrostática.....	37
1.1 Propiedades básicas .....	37
1.2 Cargas inducidas .....	38
2. El método de separación de variables .....	43
2.1 Coordenadas cartesianas.....	43
2.2 Coordenadas cilíndricas .....	45
2.3 Coordenadas esféricas .....	47
3. Promedio de potencial.....	47
3.1 Teorema de Earnshaw .....	47
3.2 Teoremas de unicidad del potencial electrostático .....	48
4. Método de las imágenes .....	49
4.1 Carga puntual frente a plano conductor infinito.....	49
4.2 Carga frente a esfera conductora.....	50

Téngase una esfera metálica conductora de radio  $a$  asilada y neutra, por lo que  $Q_T = 0$  y  $\sigma = 0$ . Supóngase ahora que se le acerca una carga  $q > 0$ , entonces las carga se reorganizan haciendo que  $\sigma \neq 0$  de modo que, a pesar de que

$$\phi = \phi_q + \phi_\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS' \quad (4.0.1)$$

pero no se conoce  $\sigma(\vec{r}')$ .

La electrostática se sustenta en

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (4.0.2)$$

conocida como la ecuación de Poisson. Si  $\rho = 0$  se tiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (4.0.3)$$

### 4.1. Conductores en electrostática

#### 4.1.1. Propiedades básicas

La materia se divide en dos tipos básicos: los dieléctricos o aislantes y los conductores como los metales o las disoluciones

##### Propiedades de conductores

- (I) Dentro de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico,  $\vec{E}$  es nulo, esto se debe a que dentro del conductor los electrones se dispersan a las superficies, de modo que  $\rho = 0$  (por lo que  $\vec{E} = \vec{0}$ ), cumpliéndose  $\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$ , donde  $\sigma_e$  es la conductividad eléctrica.

**Ejemplo:** Introdúzcase un bloque de material conductor neutro ( $Q_T = 0$ ) en un condensador de placas plano-paralelas. El campo dentro del bloque será  $\vec{E}_1$  y el que hay entre las placas será  $\vec{E}_1$ . El campo total debe ser  $\vec{E} = \vec{0}$ . Recuérdese que  $\vec{J} = \sigma_e \vec{E} = \vec{0}$ .

- (II)  $\rho = 0$  pues

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad (4.1.1)$$

- (III) la carga se va a la superficie

- (IV) un conductor en equilibrio es una superficie equipotencial y un volumen equipotencial: en el interior del volumen  $\vec{E} = 0$  y  $\rho = 0$ . Téngase en el interior dos puntos A y B y en la superficie otros dos, C y D:

$$\phi_B - \phi_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{0} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \phi_B = \phi_A \quad (4.1.2)$$

de modo que el volumen es un volumen equipotencial. Se cumple también  $\phi_C = \phi_A$

- (v) El campo es perpendicular a la superficie equipotencial, de modo que:

$$\phi_D - \phi_C = - \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_C^D (\cancel{\vec{E}_{\parallel}} + \vec{E}_{\perp}) \cdot d\vec{l} = - \int_C^D \overbrace{\vec{E}_{\perp}}^0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.1.3)$$

pues  $d\vec{l}$  es tangente a la superficie.

#### 4.1.2. Cargas inducidas

- (1) Téngase un conductor, cargada o descargado. Si se aproxima una carga  $q > 0$  la densidad de carga se va a distribuir de tal forma que el campo eléctrico  $\vec{E}$  en su interior será 0. Fuera se tendrá que  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{e}_{\sigma}$ .
- (2) Si se tiene un conductor con un agujero en el que hay una carga  $q > 0$ , se tendrá que la parte cercana al agujero se quedará cargada negativamente y la superficie exterior se quedará cargada positivamente. En el hueco  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{\sigma_-}$ . Dentro del conductor, nuevamente  $\vec{E}_{\text{conductor}} = \vec{0}$ .

Si ahora se escoge una superficie de Gauss dentro del conductor, se tiene que

$$\int_{S_g} \vec{E}_{\text{cond}} \cdot d\vec{S}_g = 0 \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{\text{enc}} = 0 \Rightarrow q + \overbrace{\int_{S_{\text{interna}}} \sigma_+ \cdot dS}^{q_i} = 0 \Rightarrow q + q_i = 0 \Rightarrow q_i = -q < 0 \quad (4.1.1)$$

donde  $q_i$  es la carga inducida.

En la región exterior se tendrá un campo

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{\text{exterior}}} \frac{\sigma_+ \vec{R}}{R^3} dS' \quad (4.1.2)$$

y  $\sigma_+$  crea dentro un campo cero. Si ahora se toma una superficie de Gauss que envuelve a todo el conductor se tendrá

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.1.3)$$

Se tiene que

$$\int_{S_{\text{externo}}} \sigma_+ dS = -q_i = -(-q) = q \quad (4.1.4)$$

- (3) Se tiene ahora el mismo conductor hueco y neutro (o descargado,  $Q_T = 0$ ) del anterior punto pero sin la carga  $q$  en el centro. Ténganse dos puntos A y B sobre la superficie interna (la del hueco). Téngase un camino que va por dentro del hueco de A a B por el hueco y otro que vaya de A a B por dentro del conductor de modo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \overbrace{\int_B^A \vec{E}_{\text{conductor}} \cdot d\vec{l}}^0 + \int_A^B \vec{E}_{\text{hueco}} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{hueco}} = \vec{0}} \quad (4.1.5)$$

de modo que el hueco actúa como una jaula de Faraday.

(4) ¿Cuánto es  $\vec{E}$  en la superficie de un conductor?  $\vec{E} = \vec{E}_\perp$ . Por el Teorema de Gauss

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{dq_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \quad (4.1.6)$$

de modo que

$$\vec{E} \parallel d\vec{S}_g = dS_g \hat{n}, \quad \|\hat{n}\| = 1 \quad (4.1.7)$$

y por tanto

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_g = E dS_g = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\sigma dS_g}_{dq_{\text{enc}}} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}} \quad (4.1.8)$$

**Ej.9:** Se tiene una esfera conductora descargada de radio  $a$ ,  $Q_T = 0$ , que contiene un hueco arbitrario en el que se halla una carga  $q > 0$ . Escójase una superficie de Gauss interna en el conductor que envuelva al hueco, se tendrá que:

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = 0 = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{\text{enc}} = 0 = q + q_i \Rightarrow \boxed{q_i = -q} \quad (4.1.9)$$

pues  $\vec{E}_{\text{conductor}} = \vec{0}$ . Se tiene entonces que

$$\int_{S_{\text{int}}} \sigma_- dS \equiv q_i = -q \quad (4.1.10)$$

Se tiene que

$$\vec{E}_{\text{conductor}} = \vec{E}_q + \vec{E}_{\sigma_-} = \vec{0}, \quad \vec{E}_{\text{hueco}} = \vec{E}_q + \vec{E}_{\sigma_-} \neq \vec{0}, \quad (4.1.11)$$

mientras tanto, fuera del conductor neutro:

$$\int_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \frac{q_{\text{enx}}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (4.1.12)$$

por lo que

$$\int_{S_{\text{ext}}} dS = -q_i = -(-q) = q \quad (4.1.13)$$

donde  $S_{\text{ext}} = S_{\text{esfera}}(r = a)$ .

En una esfera  $\sigma_+$  se distribuye de forma uniforme en la esfera, por lo que

$$\sigma_+ = \frac{q}{4\pi a^2} \quad (4.1.14)$$

Por el Teorema de Gauss, fuera de la esfera,  $r \geq a$

$$\int_{S_g(r \geq a)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_g = \int_{S_g(r \geq a)} E_r(r) \hat{r} \cdot dS_r \hat{r} = \int E_r(r) dS_r = E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (4.1.15)$$

de modo que

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r \geq a \xrightarrow{r=a} \vec{E}(r=a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \hat{r} = \frac{\sigma_+}{\varepsilon} \hat{n}, \quad \hat{n} \equiv \hat{r}, \quad \sigma_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \quad (4.1.16)$$

**Ej.2:** Téngase una esfera metálica conductora con un hueco esférico en el que se coloca otra esfera de metal conductora. La esfera externa es neutra, mientras que la interna tiene una carga  $q > 0$  con carga superficial  $\sigma_1$ , siendo el radio de la esfera interior  $a$ , el radio menor de la exterior  $b$  y el radio mayor  $c$ , de modo que  $a < b < c$ . Se tiene entonces que

$$\sigma_1 = \frac{q}{4\pi a^2}. \quad (4.1.17)$$

(a) Hallar el campo eléctrico y el potencial en el espacio. Si se divide el espacio en cuatro zonas, de dentro para afuera, siendo la 1 y la 3 la que se hallan dentro de los conductores, se sabe que

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = \vec{0}. \quad (4.1.18)$$

Aplicando ahora el  $T^{ma}$  de Gauss a 3, se tiene que

$$\int_{S_{g3}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_{g3} = 0 = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow q + q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = -q \quad (4.1.19)$$

dónde  $q_2$  es la carga que induce la densidad de carga superficial  $\sigma_1$  sobre la cara(/superficie) interna de la esfera externa, de modo que aparece una  $\sigma_2$  en la cara interna de la esfera externa:

$$\sigma_2 = \frac{-q}{4\pi b^2}; \sigma_2 \neq \sigma_1 \quad (4.1.20)$$

Dado que el conductor externo es neutro, se sabe que

$$q_2 + q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = -q_2 = -(-q) = q \Rightarrow \sigma_3 = \frac{q}{4\pi c^2} \quad (4.1.21)$$

donde  $q_3$  es la carga en la superficie externa del conductor, que da una densidad superficial de carga en la respectiva superficie de  $\sigma_3$ .

Aplicando Gauss a 2 y 4 se tiene que

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad a < r < b; \quad \vec{E}_4 = \frac{q + (-q + q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r > c \quad (4.1.22)$$

En las superficies  $r = a$ ,  $r = b$  y  $r = c$ , pueden conocerse también los campos mediante

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(r = a) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \hat{r} = \frac{q/4\pi a^2}{\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r}; \quad \vec{E}_2(r = b) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{r} = \frac{-q/4\pi b^2}{\epsilon_0} (-\hat{r}) = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \hat{r} \\ \vec{E}_4(r = c) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{q/4\pi c^2}{\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

que es lo que cabía esperar.

Ahora se desea hallar el potencial en las distintas zonas. Para esto se irá de fuera hacia dentro dado que el potencial de referencia se halla en el infinito y es  $V(\infty) = 0$  V. Para esto se ocupará que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi_i = -\int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + K_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (4.1.24)$$

Se tiene entonces que para la zona 4

$$\phi_4 = -\int \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} + K_4 = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} + K_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K_4 \quad (4.1.25)$$

aplicando ahora la condición inicial del potencial en el infinito

$$\phi(\infty) = 0 \text{ V} \Rightarrow \phi_4(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K_4 \right) = K_4 = 0 \Rightarrow \phi_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq c. \quad (4.1.26)$$

Repetiendo este proceso para  $\phi_3$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_1$  e imponiendo continuidad se tiene

$$\phi_3 = -\int \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} + K_3 = K_3 \rightarrow \phi_3(r = c) = \phi_4(r = c) \Rightarrow K_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \Rightarrow \phi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}, \quad b \leq r \leq c \quad (4.1.27)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= -\int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + K_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K_2 \rightarrow \phi_2(r = b) = \phi_3(r = b) \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + K_2 \\ K_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \Rightarrow \phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right), \quad a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

$$\phi_1 = -\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + K_1 = K_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) = \phi_1, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4.1.29)$$



(b) Si la esfera externa se conecta a tierra, calcular nuevamente todo. Esto significa que  $\sigma_3$  pasa a ser nulo, pero  $\sigma_2$  se mantiene pues está ligada (o inducida). Nuevamente,

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = \vec{0}. \quad (4.1.30)$$

y, por el Teorema de Gauss:

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \text{ pero, al desaparecer } \sigma_3 \Rightarrow \vec{E}_4 = \frac{q-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \vec{0}. \quad (4.1.31)$$

De este modo, los nuevos potenciales son

$$\phi_4 = - \int \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} + K_4 = K_4; \phi(\infty) = 0 \text{ V} = K_4 \Rightarrow \phi_4 = 0 \quad (4.1.32)$$

$$\phi_3 = - \int \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} + K_3 = K_3; \phi_3(r=c) = \phi_4(r=c) = 0 \Rightarrow \phi_3 = 0 \quad (4.1.33)$$

$$\phi_2 = - \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + K_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K_2; \phi_2(r=b) = \phi_3(r=b) = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + K_2 = 0$$

$$\phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad (4.1.34)$$

$$\phi_1 = K_1 \Rightarrow \phi_1(r=a) = \phi_2(r=a) \Rightarrow \phi_1 = K_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (4.1.35)$$

**Ej.3:** Téngase una esfera conductora neutra de radio  $c$  con dos huecos esféricos en el centro de radio  $a < c$  y  $b < c$  de modo que ambos se hallen inscritos en la esfera sin solapar. En ambos huecos hay una carga en el centro,  $q_a$  y  $q_b$ , respectivamente. Se pondrá un sistema cartesiano centrado en el centro de la esfera conductora. Al hueco de radio  $a$  se le atribuirá la zona 1, al de radio  $b$  la zona 2, al interior de la esfera conductora la zona 3 y al exterior la zona 4. Se sabe entonces que

$$\vec{E}_3 = \vec{0}. \quad (4.1.36)$$

Además, ambas cargas inducirán una carga superficial homogénea en la superficie externa de los huecos (la de dentro del conductor),  $q'_a$  y  $q'_b$ , respectivamente, de modo que, por el  $T^{ma}$  de Gauss

$$q'_a = -q_a \quad q'_b = -q_b \quad (4.1.37)$$

y por tanto, las densidades superficiales de carga (dado que son esferas y la carga está repartida homogéneamente) serán:

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2} \quad \sigma_b = \frac{-q_b}{4\pi b^2}. \quad (4.1.38)$$

A su vez, estas cargas  $q'_a$  y  $q'_b$  harán que las cargas positivas internas del conductor se redistribuyan a la superficie de éste, de modo que habrá una carga positiva  $q'_c$  y, dado que el conductor es neutro, se tendrá que la carga y la densidad de carga superficial,  $\sigma_c$ , son

$$q'_a + q'_b + q'_c = 0 \Rightarrow q'_c = -(q'_a + q'_b) = q_a + q_b \Rightarrow \sigma_c = \frac{q_c}{4\pi c^2} = \frac{q_a + q_b}{4\pi c^2}. \quad (4.1.39)$$

Por lo que, el campo eléctrico  $\vec{E}_4$  es

$$\vec{E}_4 = \frac{q_a + q_b + (q'_a + q'_b + q'_c)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad r \geq c. \quad (4.1.40)$$

Aplicando Gauss y poniendo un sistema de coordenadas cartesiano centrado en  $q_a$  y  $q_b$ , respectivamente, pueden hallarse  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , que son

$$\vec{E}_1 = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} \hat{r}_a, \quad 0 \leq r_a \leq a \quad \vec{E}_2 = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} \hat{r}_b, \quad 0 \leq r_b \leq b. \quad (4.1.41)$$

Cabe destacar que una carga externa  $Q$  únicamente afectaría a  $\sigma_c$ .

### Ej 4.2:

(c) Conéctese ahora la esfera interna a tierra, de modo que ahora se quedará  $q_1''$  en la esfera, haciendo que  $-q_1$  se distribuya en  $-q_1''$  y en la parte externa de la esfera exterior habrá  $-q_1'''$ . Se deberá comprobar que  $|-q_1''| < |-q_1|$ . Se cumple entonces que

$$-q_1 = -q_1'' - q_1''' \Rightarrow q_1''' = q_1'' - q_1. \quad (4.1.42)$$

Por ser la esfera interna un conductor perfecto

$$\vec{E}_1 = \vec{0}, \quad (4.1.43)$$

y por Gauss, en 2 se tendrá

$$\vec{E}_2 = \frac{q_1''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.1.44)$$

Similarmente, en 3 y 4

$$\vec{E}_3 = \vec{0} \quad \vec{E}_4 = \frac{q_1'' + (-q_1)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (4.1.45)$$

Respecto a los potenciales se tendrá

$$\phi_i = - \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r} + K_i \Rightarrow \phi_4 = \frac{q_1'' + (-q_1)}{4\pi\epsilon_0 r} + K_4 \quad (4.1.46)$$

aplicando condiciones de contorno (referencia de potencial)

$$\phi(\infty) = 0 \Rightarrow \phi_4(\infty) = 0 \Rightarrow K_4 = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_4 = \frac{q_1'' - q_1}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (4.1.47)$$

y por continuidad

$$\phi_3(c) = \phi_4(c) \Rightarrow \boxed{\phi_3 = \frac{q_1'' - q_1}{4\pi\epsilon_0 c} = K_3}. \quad (4.1.48)$$

En la región 2

$$\phi_2 = \frac{q_1''}{4\pi\epsilon_0 r} + K_2 \rightarrow \phi_2(b) = \phi_3(b) \Rightarrow \frac{q_1''}{4\pi\epsilon_0 b} + K_2 = \frac{q_1'' - q_1}{4\pi\epsilon_0 c} \quad (4.1.49)$$

de modo que

$$\boxed{\phi_2 = \frac{q_1''}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1'' - q_1}{c} - \frac{q_1''}{b} \right)} \quad (4.1.50)$$

y en la región 1

$$\phi_1(r = a) = K_1 = \phi_2(r = a) \Rightarrow \phi_1 = K_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1''}{a} + \frac{q_1'' - q_1}{c} - \frac{q_1''}{b} \right) \quad (4.1.51)$$

y, dado que la esfera está conectada a tierra

$$\phi_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1''}{a} + \frac{q_1'' - q_1}{c} - \frac{q_1''}{b} \right) \Rightarrow \boxed{q_1'' = \frac{q_1}{1 + \frac{c}{a} - \frac{c}{b}}} \quad (4.1.52)$$

Conocida  $q_1''$

$$\boxed{\phi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{cb - ca + ab} \left( \frac{a}{r} - 1 \right)} \quad (4.1.53)$$

y en las otras zonas

$$\boxed{\phi_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{1 + c \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}} \quad \boxed{\phi_4 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{(1/b) - (1/a)}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}} \quad (4.1.54)$$

## 4.2. El método de separación de variables

### 4.2.1. Coordenadas cartesianas

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi = \phi(x, y, z) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

En el caso bidimensional, se tiene  $z = 0$ , de modo que  $\phi = \phi(x, y)$  de modo que la ecuación de Laplace queda como

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0}. \quad (4.2.2)$$

Se supone ahora que

$$\phi = X(x) \cdot Y(y) \quad (4.2.3)$$

de modo que

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{1/(XY)} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2.4)$$

nombrando al primer sumando  $-k_x^2$  y al segundo  $-k_y^2$ , de modo que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \\ -k_x^2 - k_y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = 0 \\ k_x^2 + k_y^2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2.5)$$

**Ej 4.8:** Ténganse dos paredes a una distancia  $a$  conectadas a Tierra que se extienden de  $y = 0$  a  $y = +\infty$  y un suelo que va de  $x = -a/2$  a  $x = a/2$  conectado a una pila a  $V_0$ . Se tienen entonces las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \phi(x, y = 0) = V_0, \quad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \quad \phi\left(x = \pm \frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad y \in [0, +\infty[ \\ \phi(x, y \rightarrow +\infty) = 0, \quad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \quad \phi(x, y) = \phi(-x, y), \text{ es decir, es par en } x \end{aligned}$$

dado que la geometría es simétrica en  $x$ , la excitación también lo es, se tiene entonces

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \rightarrow k_x \in \mathbb{R} \Rightarrow X = X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) = a e^{j k_x x} + b e^{-j k_x x} \quad (4.2.6)$$

por lo que, debido a la paridad,  $B = 0$ , de modo que  $X = A \cos(k_x x)$ .

Debido a la segunda condición,  $\phi(x = \pm a/2, y) = 0$ , se sabe que

$$A \cos\left(k_x \left(\pm \frac{a}{2}\right)\right) = 0 \quad (4.2.7)$$

como  $A \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(k_x \frac{a}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(k_x \left(-\frac{a}{2}\right)\right) \end{array} \right. \Rightarrow k_x \frac{a}{2} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad (4.2.8)$$

donde  $m \in \mathbb{N} + \{0\}$ , de modo que  $k_x$  está cuantizado

$$k_x = k_{x_m} \equiv \frac{(2m+1)\pi}{a}, \quad m \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (4.2.9)$$

de modo que

$$X = A_m \cos(k_{x_m} x). \quad (4.2.10)$$

Ahora se tiene que  $k_x^2 + k_y = 0$ , de modo que  $k_y^2 = -k_x^2 = -k_{x_m}^2$ , por lo que  $k_y \in \mathbb{C}$  imaginario puro e

$$Y = Y(y) = C \cosh(k_{x_m} y) + D \sinh(k_{x_m} y) = ce^{k_{x_m} y} + de^{-k_{x_m} y} \quad (4.2.11)$$

por lo que, debido a la tercera condición

$$c = 0 \rightarrow Y = d_m e^{-k_{x_m} y} \quad (4.2.12)$$

Se tiene entonces que el potencial es

$$\phi = XY = (A_m \cos(k_{x_m} x)) \cdot (d_m e^{-k_{x_m} y}) \xrightarrow{F_m \equiv A_m \cdot d_m} \phi = \phi(x, y) = \sum_{m=0}^{+a} F_m \cos(k_{x_m} x) e^{-k_{x_m} y} \quad (4.2.13)$$

donde

$$k_{x_m} = \frac{(2m+1)\pi}{a}; \quad m \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (4.2.14)$$

Mediante la primera condición,  $\phi(x, y=0) = V_0$  para  $x \in [-a/2, a/2]$ , se tiene

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(k_{x_m} x) \cdot 1 \quad (4.2.15)$$

y la condición de ortogonalidad

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_{x_m} x) \cos(k_{x_n} x) dx = \frac{a}{2} \delta_{mn}, \quad (4.2.16)$$

además

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} V_0 \cos(k_{x_n} x) dx &= V_0 \frac{1}{k_{x_n}} [\sin(k_{x_n} x)]_{-a/2}^{a/2} = \frac{V_0}{k_{x_n}} \left[ \sin \left( (2n+1) \frac{\pi}{a} \frac{a}{2} \right) - \sin \left( (2n+1) \frac{\pi}{a} \left( -\frac{a}{2} \right) \right) \right] \\ &= \frac{2V_0}{k_{x_n}} \sin \left( (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2V_0}{k_{x_n}} (-1)^n \end{aligned}$$

otro modo de realizar la integral es

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} V_0 \cos(k_{x_n} x) dx &= \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(k_{x_m} x) \cos(k_{x_n} x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_{x_m} x) \cos(k_{x_n} x) dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m \frac{a}{2} \delta_{mn} = \frac{a}{2} F_n \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{2V_0}{k_{x_n}} \quad (4.2.17)$$

Se tiene que

$$\phi(0, 0) = V_0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \quad (4.2.18)$$

Para hallar el campo  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi \\ E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V_0}{a} (-1)^m \sin(k_{x_m} x) \cdot e^{-k_{x_m} y}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V_0}{a} (-1)^m \cos(k_{x_m} x) \cdot e^{-k_{x_m} y} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

### 4.2.2. Coordenadas cilíndricas

$$\phi = \phi(r, \varphi, z) \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

Pero se estudiarán sólo problemas en 2D sin dependencia en  $z$

$$\phi = \phi(r, \varphi), \phi \neq \phi(z) \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.2.2)$$

de modo que

$$\phi = R \cdot \Phi \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R = R(r) \\ \Phi = \Phi(\varphi) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial(R \cdot \Phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(R \cdot \Phi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.2.3)$$

de modo que

$$\frac{1}{r} \Phi \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \xrightarrow{r \neq 0} r \Phi \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R \cdot \Phi} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}} \quad (4.2.4)$$

Nuevamente

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{-\nu^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\nu^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0} \quad (4.2.5)$$

dónde únicamente interesa que  $\Phi$  es univaluada, es decir

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi m); m \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (4.2.6)$$

de modo que

$$\Phi = \Phi(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) = A_n e^{jn\varphi} + B_n e^{-jn\varphi}, n \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (4.2.7)$$

para la parte de  $R$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 = 0; n \in \mathbb{N} + \{0\} \quad (4.2.8)$$

de modo que

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0 \quad (4.2.9)$$

donde para  $n = 0$

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = 0 &\xrightarrow{r \neq 0} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dR}{dr} = a = \text{cte} \\ \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{a}{r} &\Rightarrow \boxed{R = b + a \ln r, n = 0} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Para  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0 &\Rightarrow r \left( \frac{dR}{dr} + r \frac{d^2 R}{dr^2} \right) - n^2 R = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} - r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0 \\ R &= C_n r^n + D_n r^{-n} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

de modo que

$$\boxed{\phi = \phi(r, \varphi) = (b + a \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))} \quad (4.2.12)$$

**Problema 4.9:** Se tiene un cilindro conductor de radio  $a$  cuya parte superior está a potencial  $V_0$  y parte inferior está a potencial  $-V_0$ . Asumir que el espesor del cilindro es despreciable.

Se toma un sistema de referencia cartesiana en el dentro del cilindro y se fija uno en las condiciones de contorno

(I)

$$\phi(r = a, \varphi) = \begin{cases} V_0, & \varphi \in [0, \pi[ \\ -V_0, & \varphi \in [\pi, 2\pi[ \end{cases} \quad (4.2.13)$$

(II) por ser la geometría par y la excitación impar

$$\phi(r, \varphi) = -\phi(r, -\varphi) \quad (4.2.14)$$

La solución tiene la forma general

$$\phi(r, \varphi) = (B + A \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \quad (4.2.15)$$

De momento se eliminan la constante  $B$  (por comodidad),  $A$  (pues no hay una singularidad en  $r = 0$ ) y las  $D_n$  (nuevamente, por no haber singularidad en  $r = 0$ ). [En el problema exterior sería al revés, no habrían términos  $C_n$ ].

Tampoco habrán términos  $a_n$  por ser el potencial impar (sólo habrá  $b_n$ ), de modo que la solución, nombrando  $F_n = C_n b_n$ , queda como

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} F_n r^n \sin(n\varphi) \quad (4.2.16)$$

por la primera condición se tiene que

$$\phi(r = a, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n a^n \sin(n\varphi) \quad (4.2.17)$$

Se cumple la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \pi \delta_{mn}; \quad m, n \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (4.2.18)$$

tomando el producto de ambos lados de la igualdad por  $\sin(m\varphi)$  e integrando en  $\varphi$ , se tendrá

$$\int_0^{2\pi} \phi(r = a, \varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n a^n \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi \quad (4.2.19)$$

Integrando la parte izquierda de la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} V_0 \sin(m\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} -V_0 \sin(m\varphi) d\varphi &= V_0 \frac{-1}{m} [\cos(m\varphi)]_0^{\pi} + (-V_0) \left( -\frac{1}{m} \right) [\cos(m\varphi)]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \frac{-V_0}{m} [\cos(m\pi) - \cos 0] + \frac{V_0}{m} [\cos(2\pi m) - \cos(\pi m)] = -\frac{V_0}{m} [(-1)^m - 1] + \frac{V_0}{m} [1 - (-1)^m] = \frac{2V_0}{m} (1 - (-1)^m) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$(4.2.21)$$

y ahora la derecha

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n a^n \int_0^{2\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} F_n a^n \pi \delta_{mn} = F_m a^m \pi \quad (4.2.22)$$

igualando ambos resultados se llega a que

$$\frac{2V_0}{m}(1 - (-1)^m) = F_m a^m \pi \Rightarrow F_m = \frac{2V_0}{\pi m a^m}(1 - (-1)^m) \quad (4.2.23)$$

pero puede verse que

$$1 - (-1)^m = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ 2, & m = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (-1)^m = 2, \quad m \text{ es impar} \quad (4.2.24)$$

de modo que si  $m \equiv 2k + 1$ ;  $k \in \mathbb{N} + \{0\}$  se tiene que

$$F_m \rightarrow F_k = \frac{4V_0}{\pi(2k + 1)a^{2k+1}} \quad (4.2.25)$$

por lo que

$$\phi = \phi(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi(2k + 1)a^{2k+1}} r^{2k+1} \sin((2k + 1)\varphi); \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.2.26)$$

Además sabemos que

$$\phi = \phi\left(r = a, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) = V_0 \Rightarrow V_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi(2k + 1)a^{2k+1}} \underbrace{a^{2k+1} \sin\left((2k + 1)\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1)^k} \quad (4.2.27)$$

y, por cálculo, se sabe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1} \quad (4.2.28)$$

por lo que puede sumarse la serie infinita y se tiene que

$$\phi = \phi(r, \varphi) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan\left(\frac{2ar \sin \varphi}{a^2 - r^2}\right), \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.2.29)$$

### 4.2.3. Coordenadas esféricas

Explicado por Simone.

## 4.3. Promedio de potencial

### 4.3.1. Teorema de Earnshaw

El promedio espacial del potencial electrostático en torno a un punto es idéntico al valor del potencial electrostático en ese punto, es decir

$$\langle \phi \rangle(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \quad (4.3.1)$$

La demostración es la siguiente: Téngase una carga  $q'$  en el punto  $(0, 0, h)$  con respecto a un origen de coordenadas en que  $\vec{r} = a\hat{r}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ . Su potencial en el origen será por tanto

$$\phi(0, 0, 0) = \frac{q'}{4\pi\epsilon h} \quad (4.3.2)$$

El promedio espacial en torno a una esfera de radio  $a$  es:

$$\langle \phi \rangle(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_{\text{esf}}(r=a)} \phi(\vec{r}) dS \quad (4.3.3)$$

por lo que en el origen será

$$\begin{aligned}\langle \phi \rangle(0,0,0) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_{\text{esf}}} \phi(\vec{r}) dS = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_{\text{esf}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R} dS_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{a^2 \sin\theta d\varphi d\theta}{(a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta)} \\ &= \frac{q'}{4\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta)^{1/2}} = \frac{q'}{4\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \frac{2a}{h} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 h} = \phi(0,0,0)\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

donde se ha utilizado el teorema del coseno para  $R = (a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta)^{1/2}$ .

Este resultado implica que el potencial electrostático no puede tener máximos ni mínimos pues, al hallar el promedio en torno a uno, será menor (máximo) o mayor (mínimo) en un entorno  $B$  de este:

$$\langle \phi_{\text{máx}} \rangle < \phi(B); \quad \langle \phi_{\text{mín}} \rangle > \phi(B) \quad (4.3.5)$$

Para una sola dimensión se tiene entonces que

$$\phi = \phi(x) \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (4.3.6)$$

aplicando el resultado anterior

$$\langle \phi \rangle(x = x_0) = \frac{1}{2} [\phi(x_0 - a) + \phi(x_0 + a)] \quad (4.3.7)$$

Resolviendo la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = a = \text{cte} \Rightarrow \phi = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.3.8)$$

es decir, que en una dimensión el potencial electrostático debe ser una recta.

Si se conoce el potencial en dos puntos (condiciones iniciales), puede determinarse entonces el potencial electrostático en todo el espacio  $\mathbb{R}$ ; por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x=1) &= 4 \text{ V} \\ \phi(x=5) &= 0 \text{ V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \phi(1) &= 1a + b = 4 \\ \phi(5) &= 5a + b = 0 \end{aligned} \right\} \phi(x) = -x + 5 \quad (4.3.9)$$

En el caso de dos dimensiones se tiene algo más complicado, pues bien el problema puede resolverse en cartesianas o en polares

$$\nabla^2 \phi = 0 \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \phi &= \phi(x, y) \\ \phi &= \phi(r, \theta) \end{aligned} \right. ; \quad \langle \phi \rangle(\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_0^{2\pi} \phi(x, y) dl \quad (4.3.10)$$

Se tiene entonces el **teorema de Earnshaw**, que afirma que no existen puntos de equilibrio estable del campo electrostático. Según wikipedia:

El **teorema de Earnshaw** establece que un conjunto de cargas puntuales no se puede mantener en un estado de equilibrio mecánico estacionario exclusivamente mediante la interacción electrostática de las cargas.

#### 4.3.2. Teoremas de unicidad del potencial electrostático

Recuérdese que el potencial en un punto  $\vec{r}$  es la superposición (suma) de todos los potenciales creados por densidades de cargas volumétricas, superficiales y filiformes y cargas puntuales en dicho punto:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dl' + \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{R} dS' + \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{R} dl' + \sum_{i=1}^N \frac{q'_i}{R} \right]\end{aligned}\quad (4.3.1)$$



**Primer teorema de unicidad: condición de contorno de Dirichlet:** La solución del potencial de la ecuación de Laplace en un volumen  $V$  cerrado queda unívocamente determinada si se conoce el potencial en todos los puntos de la superficie. La demostración es la siguiente:

Ténganse dos potenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que cumplen la ecuación de Laplace en un volumen  $V$ , es decir

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = 0 \\ \nabla^2 \phi_2 = 0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

y que cumplen que en la superficie son idénticos, es decir

$$\phi_1|_S = \phi_2|_S \equiv \phi_S(\vec{r}). \quad (4.3.3)$$

Constrúyase ahora un potencial que es la diferencia de ambos,  $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ , entonces se tendrá que este potencial también cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi_3 = \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (4.3.4)$$

y, recordando las condiciones de contorno para evaluar  $\phi_3$  en la superficie

$$\phi_3|_S = (\phi_1 - \phi_2)|_S = \phi_S - \phi_S = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_3 = 0 \quad \forall \vec{r} \in V} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2. \quad (4.3.5)$$

Se tiene entonces el siguiente corolario: Téngase una superficie conductora sometida a un potencial  $V_0$ , se tiene entonces

$$\phi|_S = V_0, \quad \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi = V_0 \quad \forall \vec{r} \in V. \quad (4.3.6)$$

**Primer teorema de unicidad de la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de Dirichlet:** La solución de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.3.7)$$

queda unívocamente determinada en un volumen  $V$  cerrado si se conoce el potencial en los puntos de la superficie. La demostración es la siguiente:

Ténganse  $N$  densidades volumétricas dentro de un volumen  $V$  con superficie  $S$  y dos potenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que satisfagan la ecuación de Poisson, es decir, similarmente a la anterior demostración:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \phi_1 = \phi_S \\ \nabla^2 \phi_2 &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \phi_2 = \phi_S \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

Constrúyase ahora el potencial diferencia  $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$  y se comprobará que su Laplaciano es nulo

$$\nabla^2 \phi_3 = \nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (4.3.9)$$

y que en la superficie también lo es

$$\phi_3|_S = \phi_1|_S - \phi_2|_S = \phi_S - \phi_S = 0 \quad (4.3.10)$$

de modo que  $\phi_3 = 0 \quad \forall \vec{r} \in V$  y por tanto se tiene nuevamente que

$$\boxed{\phi_1 = \phi_2 \quad \forall \vec{r} \in V} \quad (4.3.11)$$

## 4.4. Método de las imágenes

### 4.4.1. Carga puntual frente a plano conductor infinito

$$\phi = \begin{cases} \phi + \phi_{q_i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{1/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{1/2}} + V_0, & z \geq 0 \\ V_0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde  $V_0$  es la carga del plano, en este caso  $V_0$ .

Ahora el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \quad (4.4.2)$$

y la densidad superficial de carga

$$\sigma = \varepsilon_0 \hat{n} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \hat{z} \cdot \vec{E}|_{z=0} = \varepsilon_0 E_z|_{z=0} = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \dots = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (4.4.3)$$

de modo que  $\sigma < 0$ .

Integrando la densidad superficial de carga para toda la superficie (el plano en  $z = 0$ ) se hallará la carga inducida sobre el plano:

$$\begin{aligned} \int_{S(z=0)} \sigma dS &= \int \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\varphi = \frac{-qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= \left[ \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \right]_0^{+\infty} = -q \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Y resulta de interés ver la densidad superficial de carga en el infinito que es

$$\sigma = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (4.4.5)$$

La fuerza sobre  $q$  es

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_\sigma = q \int_{S'} \frac{\sigma \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dS' \quad (4.4.6)$$

donde  $\vec{r} = d\hat{z}$ ,  $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} = (r'\hat{r})$  de modo que

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = d\hat{z} - x'\hat{x} - y'\hat{y}; \quad R^2 = (x'^2 + y'^2 + d^2) = (r'^2 + d^2) \quad (4.4.7)$$

y por tanto la fuerza resultante será

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{-qd}{2\pi(r'^2 + d^2)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R^3} r' dr' d\varphi' = \frac{-q^2 d}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S(z'=0)} \frac{d\hat{z} - r'\hat{r}'}{(r'^2 + d^2)^3} r' dr' d\varphi' \\ &= \frac{-q^2 d}{8\pi^2\varepsilon_0} \left[ \int \frac{d\hat{z}}{(r'^2 + d^2)^3} r' dr' d\varphi' - \int \frac{r'^2 \hat{r}'}{(r'^2 + d^2)^3} r' dr' d\varphi' \right] \\ &= \frac{-q^2 d^2 \hat{z}}{8\pi^2\varepsilon_0} \left[ \oint_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{+\infty} \frac{r' dr'}{(r'^2 + d^2)^3} - \int_0^{2\pi} \oint_{\hat{r}'} \frac{r'^3 dr'}{(r'^2 + d^2)^3} \right] = \frac{-q^2 d^2 \hat{z}}{8\pi^2\varepsilon_0} 2\pi \left[ \frac{-1}{4(d^2 + r'^2)^2} \right]_0^{+\infty} = \text{PEDIR} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

#### 4.4.2. Carga frente a esfera conductora

Supóngase una esfera conductora de radio  $a$  a potencial 0. Poniendo el origen en el centro de la esfera, el eje  $z$  hacia la derecha, el  $x$  hacia arriba y el  $y$  hacia afuera. Se pone entonces una carga  $q$  en el eje  $z$  en  $(0, 0, d)$ ,  $d > a$ , por lo que la carga imagen  $q_i$  estará en  $(0, 0, h)$ , donde  $|h| < a$ , de modo que el potencial será

$$\phi = \begin{cases} \phi_q + \phi_{q_i} & , r \geq a \\ 0 & , r \leq a \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde

$$\phi_q + \phi_{q_i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i} \quad (4.4.2)$$

y los vectores posición serán

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad r \geq a, \quad \vec{r}' = d\hat{z}, \quad \vec{r}'_i = h\hat{z} \\ \vec{R} &\equiv \vec{r} - \vec{r}' = r\hat{r} - d\hat{z} = r(\sin\theta \cos\varphi\hat{x} + \sin\theta \sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) - d\hat{z} \Rightarrow R = (r^2 + d^2 - 2dr \cos\theta)^{1/2} \\ \vec{R}_i &= \vec{r} - \vec{r}'_i = r\hat{r} - h\hat{z} \dots \rightarrow R_i = (r^2 + d^2 - 2hr \cos\theta)^{1/2},\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

por lo que, teniendo en cuenta la simetría del problema:

$$\phi = \phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r, \theta) \quad (4.4.4)$$

que cumple la condición

$$\phi(r = a, \theta) = 0 \text{ V}, \quad \forall \theta[0, \pi[ \quad (4.4.5)$$

y

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos\theta)^{1/2}} + \frac{q_i}{(r^2 + h^2 - 2hr \cos\theta)^{1/2}} \right) \quad (4.4.6)$$

donde se tienen de incógnitas a  $q_i$  y  $h$ , por lo que se evaluará  $\phi(r = a, \theta = 0^\circ)$ :

$$\phi(r = a, \theta = 0^\circ) \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad)^{1/2}} + \frac{q_i}{(a^2 + h^2 - 2ah)^{1/2}} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{q}{|a - d|} + \frac{q_i}{|a - h|} = 0} \quad (4.4.7)$$

y  $\phi(r = a, \theta = \pi)$ :

$$\phi(r = a, \theta = \pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad)^{1/2}} + \frac{q_i}{(a^2 + h^2 - 2ah)^{1/2}} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{q}{|a + d|} + \frac{q_i}{|a + h|} = 0} \quad (4.4.8)$$

Debido a que  $d > a$  y  $|h| < a$ :

$$|a - d| = d - a, \quad |a + d| = a + d, \quad |a - h| = a - h, \quad |a + h| = a + h \quad (4.4.9)$$

de modo que

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{d - a} + \frac{q_i}{a - h} &= 0 \\ \frac{q}{a + d} + \frac{q_i}{a + h} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{a^2}{d} \xrightarrow{d > a} h < a \\ q_i = -q \frac{a}{d} \end{cases} \quad (4.4.10)$$

y por tanto

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos\theta)^{1/2}} + \frac{-a/d}{(r^2 + h^2 - 2hr \cos\theta)^{1/2}} \right) & , \quad r \geq a \\ 0 & , \quad r \leq a \end{cases} \quad (4.4.11)$$

de modo que  $\phi(r = a, \theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi[$ .

Si se tiene que la esfera está a  $V_0$ , se ha de añadir una carga  $q'_i$  en el origen que será

$$q'_i = V_0 4\pi\epsilon_0 a. \quad (4.4.12)$$

Ahora se calculará la densidad superficial de carga  $\sigma$

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{r}|_{r=a} = -\epsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{-q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta)^{3/2}}. \quad (4.4.13)$$

Integrando en la superficie se tiene que la carga total es

$$\int_{S(r=a)} \sigma \, dS = \dots = q_i. \quad (4.4.14)$$

Y las fuerzas

$$\vec{F} = q\vec{E}_\sigma = \dots = \vec{F}_{q,q_i} \quad (4.4.15)$$

**Ej 4.4 boletín:** Se tiene un plano infinito en  $x = 0$ ,  $yz$ , y un dipolo  $\vec{p}$  en  $(0, 0, a)$  que puede entenderse como una carga positiva  $q > 0$  en  $(0, d/2, a)$  y otra negativa  $-q$  en  $(0, -d/2, a)$ . Se generarán entonces dos cargas imagen en  $z < 0$  de carga contraria en las posiciones  $(0, d/2, -a)$  y  $(0, -d/2, -a)$ , respectivamente, de modo que habrá un dipolo imagen,  $-\vec{p}$ .

Recuérdese que

$$\vec{p} = q\vec{d}, \quad \phi_p = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (4.4.16)$$

por lo que

$$\phi_{\vec{p}} + \phi_{\vec{p}_i} = \frac{py}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} + \frac{-py}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \rightarrow \phi(x, y, z=0) = 0 \quad (4.4.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{r}' = a\hat{z} \end{array} \right\} \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + (z-a)\hat{z} \\ \vec{p}_i &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \\ \vec{r}'_i = -a\hat{z} \end{array} \right\} \vec{R}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}'_i = x\hat{x} + y\hat{y} + (z+a)\hat{z} \end{aligned}$$

Si el dipolo está orientado en la dirección del eje  $z$ , se tiene que la carga positiva  $q > 0$  estará en  $(0, 0, a+d/2)$  y la negativa  $-q$  en  $(0, 0, a-d/2)$  y las cargas imagen positiva y negativa están en  $(0, 0, -a+d/2)$  y  $(0, 0, -a-d/2)$ , respectivamente, de modo que en este caso

$$\vec{p}_i = \vec{p} = p\hat{z} \quad (4.4.18)$$

y por tanto el potencial es

$$\phi = \begin{cases} \phi_{\vec{p}} + \phi_{\vec{p}_i} = \frac{p(z-a)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}}, & z \geq 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (4.4.19)$$

por lo que

$$\phi(x, y, z=0) = \frac{-pa}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{pa}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = 0 \quad (4.4.20)$$

## 5. El campo magnetostático

1. Introducción .....	53
2. La ley de Ampère .....	53
3. El campo magnético (magnetostático) .....	55
4. El teorema de Ampère .....	57
5. El potencial vector magnético .....	57
6. La fuerza de Lorentz .....	59
7. Solenoide “finito” .....	63
8. Solenoide “infinito” .....	64

### 5.1. Introducción

El magnetismo en principio no tenía nada que ver con la electricidad y se descubrió con en la Grecia Clásica con la magnetita.

La brújula se descubrió en China y llegó a Europa en torno al s. XII y Marco Polo la introdujo en el s.XIV.

En 1819 Oersted, un físico Danés, descubrió que los circuitos eléctricos generaban campos magnéticos.

Biot-Savart desarrollaron varios experimentos en 1820 ~ 1825 para comprender los fenómenos magnéticos y, más adelante Ampère desarrollo también este campo.

### 5.2. La ley de Ampère

La magnetostática se basa en corrientes estacionarias, que son aquellas en que

$$\vec{J} \neq \vec{J}(t), \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{r}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \rho \neq \rho(t) \quad (5.2.1)$$

En un  $d\vec{l}$  la carga se conserva, de modo que la carga total es 0 y  $\rho = 0$ , de modo que  $\vec{E} = \vec{0}$ , pero  $\vec{J} = \rho \vec{v}$  donde esta  $\rho$  es la de las partículas en movimiento.

La **ley de Ampère** supone dos circuitos  $C_1$  y  $C_2$  por los que circulan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  correspondientemente. Se dispone un sistema cartesiano de modo que los puntos del circuito 1 a distancia  $\vec{r}_1$  se recorren con  $d\vec{l}_1$  y los del circuito 2 a distancia  $\vec{r}_2$  con  $d\vec{l}_2$ , de modo que  $\vec{R}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  y

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} \quad (5.2.2)$$

que es la Ley de Ampère y donde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 = \text{H/m}$  es la permitividad magnética del vacío. Dicha ley cumple la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2} \quad (5.2.3)$$

y

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad (5.2.4)$$

Ahora

$$\frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} \neq \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \quad (5.2.5)$$

pues

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (5.2.6)$$

por lo que

$$\begin{aligned} d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21}) &= (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{R}_{21} \\ d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12}) &= (d\vec{l}_1 \cdot \vec{R}_{12}) d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{R}_{12} \end{aligned}$$

Sin embargo, puede demostrarse del siguiente modo

$$d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21}) = d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21}) - \vec{R}_{21} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \quad (5.2.7)$$

de modo que

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \left[ \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} - \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{R}_{21} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R_{21}^3} \right] \quad (5.2.8)$$

donde

$$\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}^3} \quad (5.2.9)$$

donde la segunda integral puede reescribirse como

$$\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}^3} = - \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R_{21}} \right) = - \oint_{C_2} d \left( \frac{1}{R_{21}} \right) = 0 \quad (5.2.10)$$

de modo que la primera integral de (5.2.8) se cancela y para la fuerza del segundo circuito sobre el primero

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[ \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \cdot \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} - \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{R}_{12} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R_{12}^3} \right] \quad (5.2.11)$$

1 amperio es la intensidad que circulando por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos situados en el vacío a una distancia de un metro se produce en cada metro de uno de ellos una fuerza de  $2 \cdot 10^{-7}$  N/m.

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} \quad (5.2.12)$$

en  $C_i$  se tiene  $I_i$  y  $\vec{r}_i = z_i \hat{z}$ ,  $z_i \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $d\vec{l}_i = dz_i \hat{z}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , de modo que

$$\vec{R}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (z_2 - z_1) \hat{z} + a \hat{y} \Rightarrow R_{21} = ((z_1 - z_2)^2 + a^2)^{1/2} \quad (5.2.13)$$

y por tanto

$$d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz_1 \\ 0 & a & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = -a dz_1 \hat{x} \Rightarrow d\vec{l}_2 \times (-a dz_1 \hat{x}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz_2 \\ -a dz_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a dz_1 dz_2 \hat{y} \quad (5.2.14)$$

y se tiene que

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{-a dz_1 dz_2 \hat{y}}{((z_2 - z_1)^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 a \hat{y} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_2}{((z_2 - z_1)^2 + a^2)^{3/2}} \quad (5.2.15)$$

donde se hará la sustitución  $t = z_2 - z_1$ , de modo que  $-dz_1 = dt$

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 a \hat{y} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-dt}{(t^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 a \hat{y} \frac{2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \quad (5.2.16)$$

y, tomando el cociente de la fuerza entre la longitud del segundo circuito (pues si no la integral que queda evalúa a infinito)

$$\boxed{\vec{f}_{21} \equiv \frac{\vec{F}_{21}}{L_2} = \frac{-\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \hat{y}} \quad (5.2.17)$$

### 5.3. El campo magnético (magnetostático)

Ténganse dos circuitos, C y C', se tendrá que

$$\vec{F}_{C,C'} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{l} \times (d\vec{l}' \times \vec{R})}{R^3} \quad (5.3.1)$$

que es la ley de Ampère y puede definirse entonces el campo magnético

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad (5.3.2)$$

que es el campo magnético creado por el circuito C' con intensidad I'. De modo que

$$\vec{F}_C = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (5.3.3)$$

El campo magnético cumple el principio de superposición:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (5.3.4)$$

La magnetostática se basa en corrientes que cumplen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0; \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{r}), \quad \vec{J} \neq \vec{J}(t) \quad (5.3.5)$$

¶

Téngase una corriente  $\vec{J}$  que circula por un circuito. La sección del cable es  $S$ , a la que se halla asociado un  $d\vec{S} \propto \hat{n}$  de la superficie. El cable tiene una longitud  $d\vec{l} = d\vec{l}\vec{u}$ ,  $||\vec{u}|| = 1$ . Si la sección  $S$  es lo suficientemente pequeña para que  $\vec{J} = \text{cte}$

$$I d\vec{L} = \vec{J} \cdot \vec{S} d\vec{l} = JS d\vec{l}\vec{u} = J\vec{u}(dV) = \vec{J} dV \quad (5.3.6)$$

pues

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S}. \quad (5.3.7)$$

Se tiene la siguiente equivalencia

$$I d\vec{l} \leftrightarrow \vec{J}(\vec{r}') dV'. \quad (5.3.8)$$

Si se tiene un volumen  $V'$  en que hay una distribución de corriente  $\vec{J}(\vec{r}')$ , se tiene que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \quad (5.3.9)$$

por lo que la fuerza en un volumen  $V$  con corrientes  $\vec{J}(\vec{r})$

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV. \quad (5.3.10)$$

Ahora se calculará la divergencia de  $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV' \\ &= [\vec{\nabla}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')) - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right] dV' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

de modo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.3.12)$$

lo que implica que no pueden existir los monopolos magnéticos.

Esto da el Teorema de Gauss del magnetismo

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (5.3.13)$$

Calcúlese ahora el rotor

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \times \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV' = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \times \left( \vec{J} \times \left( -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \right) dV' \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Ahora, para reescribir este rotor

$$\vec{\nabla} \times (\Psi \vec{a}) = (\vec{\nabla} \Psi) \times \vec{a} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{a} \rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (5.3.15)$$

de modo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{\nabla} \times \left( \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right) dV' \quad (5.3.16)$$

ahora

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}] \rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) \right) = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}}{R} \right) - \nabla^2 \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}}{R} \right) - \vec{J} \nabla^2 \frac{1}{R}$$

donde el segundo término es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\vec{J}}{R} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{J_x(\vec{r}')}{R} \hat{x} + \frac{J_y(\vec{r}')}{R} \hat{y} + \frac{J_z(\vec{r}')}{R} \hat{z} \right) \\ &= J_x \hat{x} \nabla^2 \frac{1}{R} + J_y \hat{y} \nabla^2 \frac{1}{R} + J_z \hat{z} \nabla^2 \frac{1}{R} = \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

por lo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}}{R} \right) - \vec{J} \nabla^2 \frac{1}{R} \right] dV' \quad (5.3.18)$$

donde la primera integral es

$$\begin{aligned} \int_{V'} \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dV' &= \vec{\nabla} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = [\vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \Psi \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \Psi = R^{-1}] = \\ &= \vec{\nabla} \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} dV' + \vec{\nabla} \int_{V'} \frac{1}{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' = \vec{\nabla} \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} dV' = \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right] = -\vec{\nabla} \int_{V'} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} dV' = \\ &= \left[ \vec{\nabla}' \frac{\vec{J}}{R} = \vec{J} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right] = -\vec{\nabla} \int_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) dV' = -\vec{\nabla} \int_{S'} \frac{\vec{J}}{R} \cdot d\vec{S}' = 0 \end{aligned} \quad (5.3.19)$$



donde se ha utilizado el teorema de Gauss y  $\vec{J} \perp d\vec{S}'$ . De este modo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= 0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\vec{J}) \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = \left[ \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV'\end{aligned}$$

por lo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (5.3.20)$$

En magnetostática, entonces

$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \begin{cases} \vec{J}(\vec{r}') \equiv \rho \vec{v}, & \vec{r} \in V' \\ \vec{0}, & \vec{r} \notin V' \end{cases} \quad (5.3.21)$$

donde  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  implica que las líneas son cerradas.

Además  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implica que las líneas de  $\vec{B}$  son cerradas,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  implica que las líneas de  $\vec{B}$  se enroscan alrededor de  $\vec{J}$

## 5.4. El teorema de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

de modo que

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enc}}(L) \quad (5.4.2)$$

este resultado recibe el nombre de Teorema de Ampère:

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}(L)} \quad (5.4.3)$$

## 5.5. El potencial vector magnético

Se sabe que las ecuaciones que rigen la magnetostática son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.5.1)$$

dado que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  y  $\vec{J} \neq \vec{J}(t)$ .

De la primera ecuación se concluye que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (5.5.2)$$

de modo que se define el potencial vector

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{A} \text{ es el potencial vector magnético (Tm)} \quad (5.5.3)$$

de modo que  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ .

Se sabe lo que vale el rotor de  $\vec{A}$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ , pero no lo que vale la divergencia, de modo que ahora se calcula:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{A} = ? \quad (5.5.4)$$

se tiene que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad (5.5.5)$$

pero ahora sabemos que

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} = [\vec{\nabla} \times (\Psi \vec{a}) = (\vec{\nabla} \Psi) \times \vec{a} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{a}, \Psi = R^{-1}] = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{J} + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (5.5.6)$$

por lo que  $\vec{B}$  será

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \right) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.5.7)$$

por lo que  $\vec{A}$  será

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \quad (5.5.8)$$

Recuérdese que en caso de tener distribuciones de corrientes filiformes o superficiales, se hace la siguiente equivalencia:

$$\vec{J}(\vec{r}') dV' \leftrightarrow I' d\vec{l}' \leftrightarrow \vec{K}(\vec{r}') dS'. \quad (5.5.9)$$

Se tiene que la segunda ecuación de la magnetostática para el potencial vector es

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}} \quad (5.5.10)$$

¿Cuál es la divergencia de  $\vec{A}$ ?

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{J}}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\vec{S}' = 0 \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

donde se ha utilizado que  $\vec{J} \perp d\vec{S}'$ . Se tiene entonces que la divergencia del potencial vector es nula:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}} \Rightarrow \nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i, i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.5.12)$$

de modo que

$$\nabla^2 \vec{A} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = \hat{x} \nabla^2 A_x + \hat{y} \nabla^2 A_y + \hat{z} \nabla^2 A_z \quad (5.5.13)$$

De modo que, de forma similar a en electrostática, se tiene ecuaciones de la forma de ecuaciones de Poisson:

$$\left[ \begin{aligned} \nabla^2 A_i &= -\mu_0 J_i \text{ (3 ecs. escalares de Poisson)} \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ donde } \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \end{aligned} \right] A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_i(\vec{r}')}{R} dV' \quad (5.5.14)$$

de modo que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'. \quad (5.5.15)$$

Se tiene que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \Psi) \equiv 0 \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi \rightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Psi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) \stackrel{0}{=} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}. \quad (5.5.16)$$

de modo que el potencial vector está indeterminado en infinitas funciones

Se tiene entonces

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &\neq 0 \end{aligned} \right] \rightarrow \vec{A}' \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0 \quad (5.5.17)$$

De modo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Psi) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Psi = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Psi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}} \quad (5.5.18)$$

donde

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{R} dV'} \quad (5.5.19)$$

En cuanto a las líneas de campos y distribuciones se tiene lo siguiente

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned} \right] \quad \left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \end{aligned} \right] \quad (5.5.20)$$

de modo que las líneas de  $\vec{A}$  se enroscan como las de  $\vec{J}$  alrededor de  $\vec{B}$ ,  $\vec{A} \parallel \vec{J}$  y

$$\left. A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_i(\vec{r}')}{R} dV' \right]_{i \in \{x, y, z\}} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'} \quad (5.5.21)$$

pero debe tenerse en cuenta que se debe imponer la condición  $\vec{J}|_{\infty} = \vec{0}$

## 5.6. La fuerza de Lorentz

Si una partícula cargada se halla inmersa en un campo electromagnético en que

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \right] \quad (5.6.1)$$

y la partícula porta una velocidad  $\vec{v}$ , se verá sometida al **fuera de Lorentz**

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{p} = m\vec{v} \xrightarrow{\text{no relat.}} \vec{F} = m_0\vec{a} \quad (5.6.2)$$

donde  $m$  es la masa relativista

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.6.3)$$

El trabajo realizado por esta carga será

$$W = \int_1^2 \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (q\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} + q \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \stackrel{0}{=} W_1^2 = \int_1^2 q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.6.4)$$

Se tiene entonces que la ley de Ampère es

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B} dV \quad (5.6.5)$$

y la fuerza de  $\vec{B}$  sobre  $\vec{J}$  es

$$\vec{F} = \int_V (\rho \vec{v}) \times \vec{B} dV = \int_V \left( \frac{dq}{dV} \vec{v} \right) \times \vec{B} dV = \int_V dq \vec{v} \times \vec{B} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (5.6.6)$$

para una carga puntual. y la fuerza de  $\vec{E}$  sobre  $\rho$  es

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{E} dV = \int_V \frac{dq}{dV} \vec{E} dV = q \vec{E} \quad (5.6.7)$$

para una carga puntual

Se tiene entonces que puede llegarse a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \rho \vec{v} \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq}{dV} \vec{v} \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (5.6.8)$$

pero este último paso sólo es válido si  $v \ll c$ .

**Ej 5.1:** Téngase un hilo de corriente infinito por el que circula una intensidad de corriente  $I$ . Calcúlese su campo magnético a una distancia  $\vec{r}$  del hilo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad (5.6.9)$$

donde  $\vec{r}' = z' \hat{z}$ ,  $z' \in ]-\infty, +\infty[$ , de modo que  $d\vec{l}' = dz' \hat{z}$  y la posición  $\vec{r}$  del punto en que se calcula  $\vec{B}$  es  $\vec{r} = r \hat{r} + z \hat{z}|_{z=0} = r \hat{r}$  por lo que el vector posición relativa es  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = r \hat{r} - z' \hat{z}$  y su módulo  $R = (r^2 + z'^2)^{1/2}$ , de modo que

$$d\vec{l}' \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz' \\ r & 0 & -z' \end{vmatrix} = r dz' \hat{\varphi} \quad (5.6.10)$$

de modo que el campo  $\vec{B}$  es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (5.6.11)$$

Otro modo de hallar esta expresión es mediante el Teorema de Ampère puesto que

$$\text{c. cil.} \left\{ \begin{array}{l} \vec{J} = J_z(r) \hat{r}, \quad J_z \neq J_z(\varphi, z) \\ \text{es "infinita" en el eje } z \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = B_\varphi(r) \hat{\varphi}} \quad (5.6.12)$$

por lo que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (5.6.13)$$

y por tanto

$$\oint_{\text{circ. } r \text{ cte.}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\varphi(r) \hat{\varphi} d\varphi \hat{\varphi} = \oint_0^{2\pi} B_\varphi(r) r d\varphi = r B_\varphi(r) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 I \quad (5.6.14)$$

con lo que se llega a

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (5.6.15)$$

Se calculará ahora el potencial vector magnético. Se puede pensar en utilizar

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{R} \quad (5.6.16)$$

pero esto no será correcto dado que exige que no haya corriente en el infinito, pero se tratará de todos modos para ver que no es correcta su utilización:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz' \hat{z}}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2})]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \left[ \lim_{z' \rightarrow +\infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) - \lim_{z' \rightarrow -\infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) \right]\end{aligned}\quad (5.6.17)$$

para el segundo límite se hace la sustitución siguiente

$$\begin{aligned}\lim_{z' \rightarrow -\infty} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) &= [t = -z] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(-t + \sqrt{r^2 + t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{(-t + \sqrt{r^2 + t^2})(t + \sqrt{r^2 + t^2})}{t + \sqrt{r^2 + t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{(r^2 + t^2) - t^2}{t + \sqrt{r^2 + t^2}} = \ln 0 = -\infty.\end{aligned}\quad (5.6.18)$$

de modo que el límite será  $+\infty - (-\infty) = +\infty$ .

Recordando la definición del potencial vector se tiene que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = A_r(r, \varphi, z) \hat{r} + A_\varphi(r, \varphi, z) \hat{\varphi} + A_z(r, \varphi, z) \hat{z} = A_r(r) \hat{r} + A_\varphi(r) \hat{\varphi} + A_z(r) \hat{z} \quad (5.6.19)$$

por lo que

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{z} \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \Rightarrow \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\varphi = 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (5.6.20)$$

por lo que

$$\begin{aligned}A_z = A_z(r) \Rightarrow -\frac{dA_z}{dr} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow dA_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{dr}{r} \rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + K \\ \vec{A} &= \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r} \right) + K \right] \hat{z}\end{aligned}\quad (5.6.21)$$

de modo que su rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left[ \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r} \right) + K \right) \hat{z} \right] = \cdot = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} = \vec{B} \quad (5.6.22)$$

y su divergencia es nula

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \dots = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + K \right) = 0 \quad (5.6.23)$$

**Ej. 5.2:** Se tiene una espira por lo que circula una intensidad de corriente  $I$ . Calcúlese  $\vec{B}$  en los puntos del eje  $z$ : para esto se usarán coordenadas cilíndricas y  $\vec{B}(r, \varphi, z)$ . Los vectores posición serán los siguientes:

$$\vec{r} = z\hat{z}, \quad \vec{r}' = a\hat{r}' = \cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}, \quad d\vec{l}' = a d\varphi' \hat{\varphi}', \quad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = a\hat{z} - a\hat{r}', \quad R = (z^2 + a^2)^{1/2} \quad (5.6.24)$$

se tiene entonces

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad (5.6.25)$$

para lo que se calculará el producto vectorial (debe tenerse en cuenta las base primas pero, dado que  $\hat{z} = \hat{z}'$ ):

$$d\vec{l}' \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{r}' & \hat{\phi}' & \hat{z}' \\ 0 & a d\phi' & 0 \\ -a & 0 & z \end{vmatrix} = a^2 d\phi' \hat{z} + za d\phi' \hat{r}' \quad (5.6.26)$$

de modo que  $\vec{B}$  es

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi' \hat{z}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{za d\phi' \hat{r}'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \oint_0^{2\pi} d\phi' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{za}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \oint_0^{2\pi} \hat{r}' d\phi' \Rightarrow \vec{B}(\vec{r} = z\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

El potencial vector es

$$\vec{A}(\vec{r} = z\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{d\vec{l}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{a d\phi' \hat{\phi}'}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \oint_0^{2\pi} \hat{\phi}' d\phi' = \vec{0} \quad (5.6.28)$$

Ahora en el apartado (b) se pide hallar

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (5.6.29)$$

de modo que

$$\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z} \rightarrow B_r + r \frac{\partial B_r}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{B_r}{r} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (5.6.30)$$

Realizando un desarrollo en serie

$$B_r(r, z) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} B_r(r, z)|_{r=0} + \frac{1}{1!} r \left. \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} + \dots = 0 + r \left. \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} = r \left. \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial r} \right|_{r=0} \quad \star \star. \quad (5.6.31)$$

Partiendo ahora de ( $\star$ ) se tiene

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} = -\frac{B_r}{r} \Big|_{r=0} - \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r=0} \quad \star \star \Rightarrow \boxed{\left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r \rightarrow 0}} \quad \star \star \star \quad (5.6.32)$$

Partiendo de ( $\star \star$ )

$$\begin{aligned} B_r(r, z) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} \quad \star \star \star &= -\frac{r}{2} \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{r \rightarrow 0} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(r=0, z)}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right) \\ &= \mu_0 I \frac{3zra^2}{4(z^2 + a^2)^{5/2}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (5.6.33)$$

Se tiene que

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z} \Rightarrow \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r \rightarrow 0} = \left. \frac{\partial B_r}{\partial z} \right|_{r \rightarrow 0} = \frac{\partial 0}{\partial z} = 0. \quad (5.6.34)$$

por la siguiente relación

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (5.6.35)$$

de modo que

$$B_z(r, z) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} B_z(r, z)|_{r=0} + \frac{1}{1!} r \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r=0} + \dots = B_z(r=0, z) + 0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (5.6.36)$$

De este modo el potencial vector será

$$\vec{A} = \vec{A}(r, z) = A_r(r, z)\hat{r} + A_\varphi(r, z)\hat{\varphi} + A_z(r, z)\hat{z} \quad (5.6.37)$$

Calculando su flujo

$$\int_{S(r=\text{cte})} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{r=\text{cte}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{r=\text{cte}} \vec{A} \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = \oint_0^{2\pi} A_\varphi(r, z) r d\varphi = 2\pi r A_\varphi(r, z) \quad (5.6.38)$$

Ahora por otro camino

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot dS_z \hat{z} = \int_S B_z(r, z) dS_z \approx \int_S B_z(r=0, z) dS_z = B_z(r=0, z) \pi r^2 \quad (5.6.39)$$

por lo que

$$A_\varphi(r, z) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} \frac{\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad (5.6.40)$$

y por tanto el campo magnético será

$$\vec{\nabla} \times (A_\varphi \hat{\varphi})|_{r \rightarrow 0} = [B_r \hat{r} + B_z \hat{z}]|_{r \rightarrow 0} \begin{cases} B_r \underset{r \rightarrow 0}{\approx} \frac{\mu_0 I a^2 3}{4} \frac{r z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} \\ B_z \underset{r \rightarrow 0}{\approx} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (5.6.41)$$

## 5.7. Solenoide “finito”

Téngase un hilo “enroscado” en forma de solenoide cuya longitud (del conjunto senoidal) es de  $L$  y el radio de cada espira es  $a$ . En el solenoide hay  $N$  espiras y circula una corriente  $I$ . Se hablará de una densidad de espiras  $n$ :

$$n \equiv \frac{N}{L} \rightarrow \text{densidad de espiras por unidad de longitud} \quad (5.7.1)$$

Recuérdese que si se tiene una espira de radio  $a$  por la que circula una corriente  $I$  y se calcula el campo magnético en el eje  $z$ , su campo magnético es

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (5.7.2)$$

Se pone un sistema de coordenadas en la base de un cilindro con longitud  $L$ , radio  $a$  y densidad de espiras

$$n = \frac{N}{L} = \frac{dn}{dz'} \quad (5.7.3)$$

donde la segunda igualdad supone hilos con grosor despreciable. Se tiene entonces

$$dN = n dz' \quad (5.7.4)$$

que junto con  $dn$  espiras a  $dz'$  e integrando, se tiene

$$N = nL \quad (5.7.5)$$

Se tiene ahora en el eje  $z$  para la componente  $z$

$$dz' \rightarrow dN = n dz' \text{ espiras} \rightarrow B_z(0, 0, z) = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{((z - z')^2 + a^2)^{3/2}}}_{1 \text{ espira}} dN \quad (5.7.6)$$

de modo que

$$\begin{aligned} B_z(0, 0, z) &= \int_0^L dB_z(0, 0, z) = \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} n dz' \\ &= \frac{\nu_0 I a^2}{2} n \int_0^L \frac{dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{L - z}{(a^2 + (z - z')^2)^{1/2}} + \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

de modo que en  $z = L/2$  (en el centro del cilindro)

$$B_z \left( 0, 0, z = \frac{L}{2} \right) = \mu_0 n I \frac{L/2}{\left( a^2 + \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \mu_0 n I \frac{1}{\left( \frac{a^2}{(L/2)^2} + 1 \right)^{1/2}} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \mu_0 n I \quad (5.7.8)$$

## 5.8. Solenoide “infinito”

Las líneas de campo no pueden “escapar” del solenoide (es decir, no pueden salir), es decir

$$\vec{B}_{\text{fuera}} = \vec{0} \quad (5.8.1)$$

La densidad de espiras en un tramo  $L$  de este solenoide infinito será:

$$n = \frac{N}{L} \rightarrow N = nL. \quad (5.8.2)$$

En coordenadas cilíndricas se tendrá que

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \varphi, z) = B_r(r) \hat{r} + B_\varphi(r) \hat{\varphi} + B_z(r) \hat{z}. \quad (5.8.3)$$

En primera instancia se verá que  $B_r = 0$ . Plantee un cilindro de Gauss de radio  $r$  y altura  $h$ , de modo que se tendrán la tapa superior, I, la tapa inferior, II, y la lateral, L y el flujo de  $\vec{B}$  será

$$\begin{aligned} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_I} \vec{B} \cdot d\vec{S}_I + \int_{S_{II}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{II} + \int_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S}_L = \int_{S_I} B_z dS_I - \int_{S_{II}} B_z dS_{II} + \int_{S_L} B_r(r) dS_L = \\ &= \int_{S_L} B_r(r) dS_L = B_r(r) \int_{S_L} dS_L = B_r(r) 2\pi r h \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Ahora, por el teorema de la divergencia

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (5.8.5)$$

de modo que

$$B_r(r) 2\pi r h = 0 \Rightarrow \boxed{B_r(r) = 0}. \quad (5.8.6)$$

Ahora la componente  $B_\varphi$  también será nula pues

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_0^{2\pi} \vec{B}(r) \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = \oint_0^{2\pi} B_\varphi(r) r d\varphi = B_\varphi(r) 2\pi r \quad (5.8.7)$$

y, por el Teorema de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0 \quad (5.8.8)$$

por lo que

$$2\pi r B_\varphi(r) = 0 \Rightarrow \boxed{B_\varphi(r) = 0} \quad (5.8.9)$$



Finalmente se va a demostrar que  $B_z \neq B_z(r)$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (B_z(r)\hat{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{r} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{\varphi} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} \hat{\varphi} = \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dB_z}{dr} = 0 \Rightarrow B_z \neq B_z(r)$$

$B_z = \text{cte}$

(5.8.10)

pues dentro se tiene que  $\vec{J} = \vec{0}$ .

Ahora se hallará  $B_z$  usando el  $T^{ma}$  de Ampère y tomando como camino de integración un cuadrado (o rectángulo) de altura  $h$  recorrido en sentido horario que engloba una pared del cilindro (en la parte derecha del cilindro, al intensidad “entra” y en la izquierda “sale”):

$$\oint_{\square} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 IN = \mu_0 n h$$
(5.8.11)

pero también ( $b$  es la parte dentro del solenoide de la parte superior e inferior del cuadrado y  $c$  la exterior)

$$\int_b^0 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^0 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_h^0 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^0 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^0 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_h^{\text{dentro}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^h B_z \hat{z} \cdot d\hat{z} = B_z h$$
(5.8.12)

y por tanto

$$B_z h = \mu_0 n I h \Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z}, & \text{dentro} \\ \vec{0}, & \text{fuera} \end{cases}$$
(5.8.13)

**Ej. 5.10:** Téngase un campo uniforme  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ ,  $B_z = \text{cte}$ . Cuál será su potencial vector  $\vec{A}$ ? Se asumirá que

$$\vec{A} = \vec{A}(r, \varphi, z) = \vec{A}(r) = A_r(r)\hat{r} + A_\varphi(r)\hat{\varphi} + A_z(r)\hat{z}$$
(5.8.14)

por lo que su rotor será

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\varphi} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \hat{z} = B_0 \hat{z} \end{aligned}$$
(5.8.15)

de modo que

$$\begin{cases} -\frac{dA_z}{dr} = 0 \Rightarrow A_z = A_0 = \text{cte} \\ \frac{1}{r} \frac{d(r A_\varphi)}{dr} = B_0 \rightarrow \frac{d(r A_\varphi)}{dr} = r B_0 \rightarrow r A_\varphi = \frac{r^2}{2} B_0 + K; K \in \mathbb{R} \end{cases}$$
(5.8.16)

y por tanto

$$A_\varphi = \frac{r}{2} B_0 + \frac{K}{r} + C, C = \text{cte}$$
(5.8.17)

y el potencial vector completo es

$$\vec{A} = A_0 \hat{z} + \left( \frac{B_0}{2} r + \frac{K}{r} + C \right) \hat{\varphi} + (f + d) \hat{r}, d \in \mathbb{R}, f = f(r)$$
(5.8.18)

pues  $\vec{\nabla} \times f(r) = 0$ .

Si  $\vec{B}$  es uniforme en una dirección arbitraria

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$
(5.8.19)

pues

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \right) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} ((\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \vec{B} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} - \vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (5.8.20)$$

donde la primera cancelación ocurre porque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B \vec{u}) = 0. \quad (5.8.21)$$

para el segundo término no nulo se tiene en cuenta que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad (5.8.22)$$

y para el primero

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z = \vec{B} \quad (5.8.23)$$

de modo que al final todo queda

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} (0 - \vec{B} + 3\vec{B} - 0) = \frac{1}{2} 2\vec{B} = \vec{B} \quad (5.8.24)$$

Otro modo de hallar  $A_\varphi$  para el caso de  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  consiste en ver el flujo de  $\vec{B}$  a través de un diferencial de superficie circular:

$$\left[ \begin{aligned} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= B_0 \pi r^2 \\ \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi r A_\varphi(r) \end{aligned} \right] \quad \boxed{A_\varphi = \frac{B_0}{2} r} \quad (5.8.25)$$

## 6. Desarrollo multipolar del potencial vector magnético

1. El dipolo magnético .....	67
2. Desarrollo multipolar del potencial vector magnético .....	69
2.1 Efectos de la elección de origen en el término dipolar magnético.....	71
3. El potencial escalar magnético.....	72
4. Distribuciones de dipolos magnéticos .....	72

### 6.1. El dipolo magnético

$T^{ma}$  : Téngase un camino de integración descrito por un diferencial de  $l$ ,  $d\vec{l}$ , que lleva asociado un diferencial de  $s$ ,  $d\vec{s}$ , siendo la longitud del camino  $L$  y  $S$  la superficie que encierra el camino de integración

$$\int_S d\vec{s} \times \vec{\nabla} \Psi = \oint_L \Psi d\vec{l} \quad (6.1.1)$$

Demostración: Téngase un campo  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r})\vec{u}$ , donde  $||\vec{u}|| = 1$  y  $\vec{u}$  es un vector constante en módulo y dirección. Se tiene entonces que, por Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (6.1.2)$$

y también que

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\Psi \vec{u}) = (\vec{\nabla} \Psi) \times \vec{u} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (6.1.3)$$

por lo que

$$\int_S ((\vec{\nabla} \Psi) \times \vec{u}) \cdot d\vec{s} = \oint_S \Psi \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (6.1.4)$$

Utilizando ahora la siguiente identidad para el producto mixto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \int_S (d\vec{s} \times \vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{u} = \oint_L \Psi \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (6.1.5)$$

por lo que

$$\vec{u} \int_S (d\vec{s} \times \vec{\nabla} \Psi) = \vec{u} \oint_L \Psi d\vec{l} \forall \vec{u} \Rightarrow \int_S d\vec{s} \times \vec{\nabla} \Psi = \oint_L \Psi d\vec{l} \quad (6.1.6)$$

Téngase un circuito cerrado plano de longitud  $L'$ , cuyos puntos se hallen en  $\vec{r}'$  con diferenciales de línea  $d\vec{l}'$  y diferencial de superficie  $d\vec{s}'$  e intensidad  $I'$ . Su potencial vector es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l}'}{R} \quad (6.1.7)$$

y la superficie que encierra el circuito es

$$\int_S d\vec{s}' = \vec{S}'. \quad (6.1.8)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{1}{R} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{S'} d\vec{s}' \times \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) = \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{R} = \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right] = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{S'} d\vec{s}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \\ &\approx_{r \gg r'} \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \left( \int_{S'} d\vec{s}' \right) \times \frac{\vec{R}}{R^3} \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

se tiene ahora que

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} \quad (6.1.10)$$

por lo que, para grandes distancias  $r \gg r'$  se tiene que el potencial vector es

$$\vec{S}(\vec{r}) \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \vec{S}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (6.1.11)$$

Ahora se definirá el dipolo magnético  $\vec{m}$  como

$$\vec{m} \equiv \lim_{\substack{S' \rightarrow 0 \\ I' \rightarrow \infty \\ S'I' = \text{cte}}} I' \vec{S}' \quad (6.1.12)$$

cuya unidad es el amperio por metro cuadrado,  $[\vec{m}] = \text{A m}^2$ . De este modo el potencial vector de un dipolo magnético es

$$\vec{A}_m(\vec{r}) \equiv \lim_{\substack{S' \rightarrow 0 \\ I' \rightarrow \infty \\ S'I' = \text{cte}}} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (6.1.13)$$

La divergencia de dicho potencial vector debe ser nula, lo que se comprobará ahora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{m}) - \vec{m} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right] = 0 \quad (6.1.14)$$

Ahora se calculará el rotor del potencial vector del dipolo magnético, es decir, el campo magnetostático  $\vec{B}_m$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}_m &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_m = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{m} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{m}) \frac{\vec{R}}{R^3} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{R}}{R^3} + \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \right) \vec{m} \right] \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

donde se ha utilizado

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \vec{a} \quad (6.1.16)$$

Téngase ahora en cuenta que

$$\frac{\vec{R}}{R^3} \vec{\nabla} = \frac{R_x}{R^3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{R_y}{R^3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{R_z}{R^3} \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.1.17)$$

de modo que

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{0} - \vec{0} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{R}}{R^3} + 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{m} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{R}}{R^3} \right] \quad (6.1.18)$$

pues no se trabaja en el origen, es decir,  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ , de modo que  $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0$ . Ahora se tiene que el último corchete es

$$-(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{R}}{R^3} = - \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (6.1.19)$$

donde el primer término es

$$\begin{aligned} m_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\vec{R}}{R^3} &= m_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(x-x')\hat{x}}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y-y')\hat{y}}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} + \frac{(z-z')\hat{z}}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right) \\ &= m_x \left[ \frac{\hat{x}}{R^3} - \frac{3(x-x')^2\hat{x}}{R^5} - \frac{3(x-x')(y-y')\hat{y}}{R^5} - \frac{3(x-x')(z-z')\hat{z}}{R^5} \right] \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

el resto de términos son análogos, de modo que, combinándolos, se tiene que

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{R}}{R^3} &= m_x \left( \frac{\hat{x}}{R^3} - \frac{3(x-x')\hat{x}}{R^5} \right) + m_y \left( \frac{\hat{y}}{R^3} - \frac{3(y-y')\hat{y}}{R^5} \right) + m_z \left( \frac{\hat{z}}{R^3} - \frac{3(z-z')\hat{z}}{R^5} \right) \\ &\quad - 3m_x \left( \frac{(x-x')(y-y')\hat{y}}{R^5} + \frac{(x-x')(z-z')\hat{z}}{R^5} \right) - 3m_y \left( \frac{(y-y')(x-x')\hat{x}}{R^5} + \frac{(y-y')(z-z')\hat{z}}{R^5} \right) \\ &\quad - 3m_z \left( \frac{(z-z')(x-x')\hat{x}}{R^5} + \frac{(z-z')(y-y')\hat{y}}{R^5} \right) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2\vec{m}}{R^5} \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

y por tanto el campo resultante es

$$\boxed{\vec{B}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2\vec{m}}{R^5}} \quad (6.1.22)$$

téngase en cuenta que

$$\vec{m} \cdot \vec{R} = m_x(x-x') + m_y(y-y') + m_z(z-z') \quad (6.1.23)$$

**Ejemplo:** Téngase un dipolo magnético en  $\vec{r}' = \vec{0}$  orientado en el eje  $z$ , es decir,  $\vec{m} = m\hat{z}$ . Se tiene entonces que  $\vec{R} = \vec{r}$ , de modo que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5} = B_{m_r}\hat{r} + B_{m_\theta}\hat{\theta} \quad (6.1.24)$$

Realizando cálculos en esféricas,  $\vec{r} = r\hat{r}$ :

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = mz = mr \cos \theta \quad (6.1.25)$$

donde  $\vec{m} = m\hat{z} = m(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ , de modo que

$$B_{m_r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad B_{m_\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \quad (6.1.26)$$

## 6.2. Desarrollo multipolar del potencial vector magnético

Téngase un circuito eléctrico (no plano) con longitud  $L'$ , posiciones  $\vec{r}'$  e intensidad  $I'$ . El potencial vector magnético en un punto  $\vec{r}$  con vector posición relativa  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  será

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l}'}{R} \quad (6.2.1)$$

y a distancias muy grandes,  $r \gg r'$ , podrá utilizarse la siguiente expansión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \quad (6.2.2)$$

aunque también puede utilizarse el siguiente desarrollo con polinomios de Legendre

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^m P_m(\cos \theta'). \quad (6.2.3)$$

De este modo, con el desarrollo de Taylor se tendrá

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{1}{R} d\vec{l} \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \right] d\vec{l} = \vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)} + \vec{A}^{(3)} + \dots \quad (6.2.4)$$

de modo que el término monopolar es

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_{L'} d\vec{l} = \vec{0} \quad (6.2.5)$$

pues

$$\int_{L'} \Psi d\vec{l} = \int_S d\vec{s} \times \vec{\nabla} \Psi \xrightarrow{\Psi=1} \oint_{L'} 1 d\vec{l} = \int_{S'} d\vec{s}' \times (\vec{\nabla} 1) = \vec{0} \quad (6.2.6)$$

cosa lógica, pues no existen los monopolos magnéticos

El término dipolar magnético será

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{l} \quad (6.2.7)$$

De este modo el potencial vector queda como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{L'} \frac{d\vec{l}}{R} = [\Psi = R^{-1}] = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{S'} d\vec{s}' \times \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{S'} d\vec{s}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (6.2.8)$$

expandiendo este último término en serie

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{R}}{R^3} \Big|_{r'=0} + \dots = \frac{\vec{r}}{r^3} + \dots \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \underset{r \gg r'}{\approx} \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{S'} d\vec{s}' \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \left( \int_{S'} d\vec{s}' \right) \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (6.2.9)$$

se define entonces el momento dipolar magnético

$$\vec{m}_m \equiv I' \int_{S'} d\vec{s}' \quad (6.2.10)$$

de modo que

$$\vec{A}(\vec{r}) \underset{r \gg r'}{\approx} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m}_m \times \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)}_{\vec{A}^{(2)}} \quad (6.2.11)$$

En circuitos planos

$$\vec{m}_m \equiv I' \int_{S'} d\vec{s}' = I' \frac{1}{2} \oint_{S'} \vec{r}' \times d\vec{l}' = I' \vec{S}' \quad (6.2.12)$$

pero en el caso en que no sea plano,  $I' d\vec{l}' \leftrightarrow \vec{J}(\vec{r}') dV' \leftrightarrow \vec{K}(\vec{r}') ds'$ , de modo que

$$\vec{m}_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad \vec{m}_m = \frac{1}{2} \int_{S'} \vec{r}' \times \vec{K}(\vec{r}') ds' \quad (6.2.13)$$

**Ejercicio 6.1:** Hállese el momento dipolar magnético en el eje  $z$  generado por un circuito circular en el plano XY con centro en  $(0, 0, 0)$  de radio  $a$  por el que circula una corriente de intensidad  $I'$ . En cilíndricas

$$\vec{m}_m = I' \int_{S'} d\vec{s}' = I' \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \hat{z} = I' \pi a^2 \hat{z} = \pi a^2 I' (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \quad (6.2.14)$$

y el potencial vector es

$$\vec{A}(\vec{r}) \underset{r \gg a}{\approx} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_m \times \vec{r}}{r^3} \quad (6.2.15)$$

en c. esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $\vec{r} = r\hat{r}$

$$\vec{m}_m \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \pi a^2 I' \cos \theta & -\pi a^2 I' \sin \theta & 0 \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \pi a^2 I' r \sin \theta \hat{\varphi} \quad (6.2.16)$$

El rotor del potencial vector es

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}_m \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}_m}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\pi a^2 I' z)\vec{r} - r^2 \pi a^2 I' \hat{z}}{r^5} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \pi a^2 I' \frac{(3r \cos \theta) r \hat{r} - r^2 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi a^2 I' \frac{2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}}{r^3} \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

En los puntos del eje  $z$ ,  $(0, 0, z)$ , el campo magnético es

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi a^2 I' \frac{2 \cdot 1\hat{r} + 0\hat{\theta}}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} a^2 I' \frac{1}{|z|^3} \hat{z} \quad (6.2.18)$$

pues en el eje  $z$ ,  $\theta = 0$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = z^2$ . Este resultado es el mismo que se obtendría para  $z \gg a$  en el campo exacto

$$\vec{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{2} I' a^2 \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \underset{z \gg a}{\approx} \frac{\mu_0}{a} I' a^2 \frac{\hat{z}}{|z|^3} \quad (6.2.19)$$

### 6.2.1. Efectos de la elección de origen en el término dipolar magnético

Escójase un nuevo sistema de referencia  $\tilde{S} \equiv \tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ , de modo que se tenga  $\tilde{r}'$  relacionado con  $\vec{r}'$  como

$$\vec{r}' = \tilde{r}' + \overline{O\tilde{O}} \quad (6.2.1)$$

Originalmente  $\vec{m}_m$  era

$$\vec{m}_m \equiv \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \quad (6.2.2)$$

y ahora se tendrá que

$$\tilde{S} \rightarrow \tilde{m}_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \tilde{r}' \times \tilde{J}(\tilde{r}') d\tilde{V}' = \frac{1}{2} \int_{V'} (\vec{r}' - \overline{O\tilde{O}}) \times \tilde{J}(\tilde{r}') d\tilde{V}' = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV' - \frac{1}{2} \int_{V'} \overline{O\tilde{O}} \times \tilde{J}(\tilde{r}') d\tilde{V}' = \vec{m}_m - \vec{I} = \vec{m}_m \quad (6.2.3)$$

pues

$$\vec{I} \equiv \int_{V'} \overline{O\tilde{O}} \times \tilde{J}(\tilde{r}') d\tilde{V}' = \frac{1}{2} \overline{O\tilde{O}} \times \int_{V'} \tilde{J}(\tilde{r}') d\tilde{V}' = \vec{0} \quad (6.2.4)$$

dado que

$$\int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') dV' = I' \oint d\vec{l}' = \vec{0}. \quad (6.2.5)$$

**Ejemplo:** Ténganse un circuito rectangular que se halla en dos planos perpendiculares con lados  $b$  y lado en el “suelo”  $a$  y lado en la “pared” también  $a$ . Este circuito puede pensarse como dos circuitos rectangulares en planos perpendiculares el uno al otro, de modo que uno de los cables se superpone, de modo que en ambos circula la misma corriente  $I$  en el mismo sentido (provocando que la intensidad de corriente se anule en el cable superpuesto). Hállese el momento dipolar magnético.

$$\vec{m}_m = I' \vec{S}' = \frac{1}{2} I' \oint \vec{r}' \times d\vec{l}' \quad (6.2.6)$$

y es la superposición de los momentos dipolares creados por ambos circuitos:

$$\begin{aligned} \vec{m}_{m_1} &= abI\hat{z} & \vec{m}_{m_2} \\ \vec{m}_m &= \vec{m}_{m_1} + \vec{m}_{m_2} = abI(\hat{y} + \hat{z}) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

### 6.3. El potencial escalar magnético

Las siguientes ecuaciones determinan el campo magnético

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0, \quad \vec{J} \neq \vec{J}(t)\end{aligned}$$

Fuera de las fuentes se cumple que  $\vec{J} = \vec{0}$ , de modo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_m} \quad (6.3.1)$$

donde  $\phi_m = \phi_m(\vec{r})$  es el potencial escalar magnético. Sus unidades, mediante análisis dimensional, son

$$[\mu_0] = \frac{\text{T m}}{\text{A}} \rightarrow [\phi_m] = \cancel{\text{T m}} \frac{\text{A}}{\cancel{\text{T m}}} = \text{A} \quad (6.3.2)$$

Téngase un circuito por el que circula  $I$ , de modo que el camino de integración ABCDA no lo atraviesa, entonces

$$\oint_{\text{ABCD A}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = 0 \rightarrow \oint_{\text{ABCD A}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{ABCD A}} -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_m d\vec{l} = -\mu_0 \oint_{\text{ABCD A}} \vec{\nabla} \phi_m \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \oint_{\text{ABCD A}} d\phi_m$$

$$\boxed{\oint_{\text{ABCD A}} d\phi_m = 0} \quad (6.3.3)$$

Sin embargo, si el camino de integración enlaza al circuito, llámese AEBCDA, se tendrá que

$$\oint_{\text{AEBCDA}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \oint_{\text{AEBCDA}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \oint_{\text{AEBCDA}} d\phi_m \Rightarrow \boxed{\oint_{\text{AEBCDA}} d\phi_m = -I \neq 0} \quad (6.3.4)$$

### 6.4. Distribuciones de dipolos magnéticos

$\text{T}^{ma}$  :

$$\boxed{-\int_V \vec{\nabla} \times \vec{a} dV = \int_S \vec{a} \times d\vec{S}} \quad (6.4.1)$$

Demostración:  $\vec{v} \equiv \vec{a} \times \vec{u}$ ;  $||\vec{u}|| = 1$ ,  $\vec{u}$  es constante en dirección. Por el  $\text{T}^{ma}$  de Gauss:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{u}) dV = \int_S (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} \quad (6.4.2)$$

ahora, utilizando las siguientes identidades

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \stackrel{0}{=} \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \quad (\vec{a} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} = (d\vec{S} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} \quad (6.4.3)$$

se tiene

$$\int_V \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) dV = \int_S \vec{u} \cdot (d\vec{S} \times \vec{a}) \Rightarrow \vec{u} \cdot \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{a}) dV = \vec{u} \cdot \int_S d\vec{S} \times \vec{a} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \text{ cte} \quad (6.4.4)$$

de modo que

$$\boxed{-\int_V \vec{\nabla} \times \vec{a} dV = \int_S \vec{a} \times d\vec{S}} \quad (6.4.5)$$



Téngase un volumen  $V'$  que tiene momentos dipolares magnéticos dentro de él, e modo que su densidad de momento dipolar magnético o vector imanación es

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{r}) \equiv \frac{d\vec{m}}{dV'}, \quad ||\vec{M}|| \rightarrow \frac{m^2 \text{ A}}{m^3} = \frac{\text{A}}{m}. \quad (6.4.6)$$

de modo que su potencial vector será

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} d\vec{A} = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV'} \quad (6.4.7)$$

recuérdese que

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{R} = \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \quad (6.4.8)$$

por lo que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \times \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) dV' \quad (6.4.9)$$

y utilizando ahora

$$\vec{\nabla} \times (\Psi \vec{a}) = (\vec{\nabla} \Psi) \times \vec{a} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (6.4.10)$$

con  $\Psi = R^{-1}$

$$\vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) = \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) \times \vec{M} + \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \times \vec{M} \quad (6.4.11)$$

que puede escribirse como

$$\vec{M} \times \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} - \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) \quad (6.4.12)$$

y por tanto se concluye que

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} -\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}}{R} dV'} \quad (6.4.13)$$

y aplicando el  $T^{ma}$  demostrado anteriormente

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{M} \times \vec{n}'}{R} dS', \quad ||\vec{n}'|| = 1, \quad (6.4.14)$$

recordando

$$\vec{A}_{\text{vol}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV', \quad \vec{A}_{\text{sup}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{R} dS' \quad (6.4.15)$$

definiendo ahora

$$\vec{J}_m \equiv \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}') \rightarrow \text{densidad equivalente de corriente columétrica de magnetización} \quad (6.4.16)$$

$$\vec{K}_m \equiv \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}' \rightarrow \text{densidad equivalente de corriente superficial de magnetización} \quad (6.4.17)$$

se obtiene que

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K}_m(\vec{r}')}{R} dS'} \quad (6.4.18)$$

**Ejemplo:** imán cilíndrico de altura  $h$  y radio  $a$  con vector imanación  $\vec{M} = M\hat{z} = \text{cte}$  en su interior . Siendo  $S_I$  la tapa superior,  $S_{II}$  la inferior y  $S_L$  el lateral:

$$\vec{J}_m|_{S_I} = \vec{\nabla}' \vec{M}(\vec{r}') = \vec{\nabla}'(M\hat{z}) = \vec{0} \vec{K}_m|_{S_I} = \vec{M} \times (\vec{n}) = (M\hat{z}) \times \hat{z} = \vec{0} \vec{K}_m|_{S_{II}} = \vec{M} \times (-\vec{n}) = (M\hat{z}) \times (-\hat{z}) = \vec{0} \vec{K}_m|_{S_m} = \vec{M} \times \vec{n} = (M\hat{z}) \times \hat{n} = M\hat{\phi} \quad (6.4.19)$$

## 7. Inducción electromagnética

1. Introducción .....	74
2. Fuerza electromotriz: generadores .....	74
2.1 La ley de Ohm .....	74
3. El concepto de fem. generadores .....	75
4. La ley de inducción de Faraday-Lenz .....	76
4.1 Experimentos de Faraday .....	76
4.2 Formulación circuital de la ley de inducción de Faraday-Lenz-Henry .....	76
5. Inducción electromagnética en un circuito móvil .....	76
6. Inducción electromagnética en un circuito inmóvil .....	77
7. Ley de inducción de Faraday-Lenz en forma diferencial .....	78
8. Coeficientes de inducción y autoinducción .....	83
8.1 Coeficientes de inducción entre dos circuitos .....	83
8.2 Coeficiente de autoinducción de un circuito .....	84
8.3 Coeficientes de autoinducción y autoinducción para un conjunto de circuitos .....	84

### 7.1. Introducción

Hasta el momento se han estudiado electro- y magnetostática, descritas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{J} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}, & \vec{E} &= \vec{0}, & \rho &= 0 \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

de modo que ambos fenómenos se han tratado como independientes.  $\vec{J} \equiv \rho \vec{v} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ , de modo que  $\rho$  se mueve.

$$\text{Recuérdese que } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \equiv 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\mu_0 \vec{J}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}.$$

### 7.2. Fuerza electromotriz: generadores

#### 7.2.1. La ley de Ohm

modelo de Drude: Supóngase un conductor cilíndrico de un metal con una red de iones positivos, en la que hay un plasma de electrones. Al aplicar un campo eléctrico, estos electrones empiezan a moverse, pues la fuerza del campo eléctrico actúa sobre ellos,  $\vec{F}_E = q\vec{E} = -|q|\vec{E}$ . Si  $\vec{E}$  va en una dirección, el movimiento de  $e^-$  es antiparalelo. Al chocarse los electrones entre ellos y con los núcleos atómicos los  $e^-$  se frenan, de modo que aparece una especie de fuerza de frenado, de modo que la fuerza neta actuando sobre los  $e^-$

$$\sum \vec{F} = q\vec{E} + \vec{f}_r = \vec{0} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad (7.2.1)$$

de este modo se tiene que la corriente es

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E} \Rightarrow \sigma_e = \frac{J}{E} = \frac{\text{A/m}^2}{\text{V}} \text{m} = \frac{1}{\Omega \text{m}} \quad (7.2.2)$$

donde  $\sigma_e$  es la conductividad eléctrica. Dado que la intensidad de corriente es

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (7.2.3)$$

se tiene que la unidad  $\Omega = \text{V/A}$ . Su inversa, que antiguamente se llamaba mho, es el Siemen:

$$\frac{1}{\Omega} = \text{mho} \equiv \text{S (Siemen)} \quad (7.2.4)$$

de modo que

$$\sigma_e \rightarrow \frac{S}{m} \quad (7.2.5)$$

Si se tiene un hilo de longitud  $l$  y diferencial de longitud  $d\vec{l} = dl\vec{n}$ , con sección  $S$  y con vector normal a la sección  $d\vec{S} = dS\vec{n}$ ,  $||\vec{n}|| = 1$ , en el que actúa un campo  $\vec{E} = E\vec{n}$  y por el que pasa una corriente  $\vec{J} = J\vec{n}$ , se tiene que

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E} \rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J dS = JS \Rightarrow J = \frac{I}{S}. \quad (7.2.6)$$

La integral de camino de un punto A a otro B (de modo que  $d(A, B) = l$ ) del producto escalar del campo eléctrico  $\vec{E}$  con el diferencial de longitud es

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E\vec{n} \cdot dl\vec{n} = E \int_A^B dl = El = \frac{J}{\sigma_e} l = \frac{I}{S\sigma_e} l \quad (7.2.7)$$

pero también se conoce que

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l} = \int_B^A d\phi = \phi_A - \phi_B \quad (7.2.8)$$

de este modo se define la resistencia eléctrica del material

$$R \equiv \frac{l}{\sigma_e S} [\Omega] \quad (7.2.9)$$

de modo que

$$\boxed{\phi_A - \phi_B = RL} \quad (7.2.10)$$

que es la ley de Ohm.

Una resistencia además desprende energía por efecto Joule.

### 7.3. El concepto de fem. generadores

En un circuito cerrado se tiene

$$\oint_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^A -\vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l} = - \oint_A^A d\phi = -(\phi_A - \phi_A) = 0 \quad (7.3.1)$$

por tenerse que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ . El trabajo es

$$W = \oint_A^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_A^A q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \cdot 0 = 0 \quad (7.3.2)$$

de modo que se requiere de un generador que proporcione/suministre una f.e.m.

En primer lugar se estudiará la corriente continua (CC, en inglés DC, por *direct current*) generada por una pila. Esta pila tiene un campo electrostático denominado **campo eléctrico electromotor**,  $\vec{E}_{em}$ , de modo que no se recombinan los  $e^-$  en los bornes de la pila. El campo en el generador es combinación del campo electromotor y el generado por los  $e^-$

$$\vec{E}_{gen} = \vec{E} + \vec{E}_{em} \approx \vec{E}_{em}, \quad E_{em} \gg E. \quad (7.3.3)$$

Se tiene que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (7.3.4)$$

de modo que  $\vec{E}$  es electrostático. De este modo

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \vec{E}_{em} \begin{cases} \text{generador: } \vec{E}_{ef} \approx \vec{E}_{em} \\ \text{circuito: } \vec{E}_{ef} = \vec{E} \end{cases} \quad (7.3.5)$$

por lo tanto

$$\oint \vec{E}_{ef} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-}^{+} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} \equiv \varepsilon \equiv \phi_{+} - \phi_{-} \quad (7.3.6)$$

de modo que se concluye que  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{em} \neq \vec{0}$ , es decir, el campo electromotor no es estático.

## 7.4. La ley de inducción de Faraday-Lenz

### 7.4.1. Experimentos de Faraday

Ténganse dos circuitos cuadrados con dos partes paralelas. En el primero,  $C_1$ , hay una pila con fem  $\varepsilon$  y un interruptor abierto y en el segundo,  $C_2$ , únicamente hay un galvanómetro (G) (microamperímetro). Al cerrar el primer circuito se genera corriente eléctrica que mide (G) y también cuando se abre el interruptor. Si, con el interruptor cerrado,  $C_1$  se desplaza o si  $C_1$  no se mueve pero  $C_2$  sí, también. Estos dos últimos casos también se dan si  $C_1$  se cambia por un imán.

### 7.4.2. Formulación circuital de la ley de inducción de Faraday-Lenz-Henry

Téngase un circuito cerrado plano. Imagínese que este es atravesado por un campo magnético  $\vec{B}$ . El circuito tiene un diferencial de superficial  $d\vec{S}$ . El flujo magnético es por tanto

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.4.1)$$

y se mide en Webers, Wb, de modo que  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$ . Se tiene que  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ , pero  $\Phi = \Phi(t)$ , de modo que no depende de la posición, es decir,  $\Phi \neq \Phi(\vec{r})$ .

Ley de inducción de Faraday-Lenz(-Henry) en forma circuital: si el flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado constituido por un hilo conductor varía con el tiempo se induce en él una corriente eléctrica. La fem es proporcional a la variación de flujo respecto del tiempo

$$\boxed{\varepsilon = -k \frac{d\Phi}{dt}} \xrightarrow{\text{S.I., } k=1} \boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad (7.4.2)$$

**Ejemplo:** téngase un circuito rectangular de lados  $a$  y  $b$ , habiendo en  $a/4$  y  $3a/4$  campos magnéticos variables con el tiempo de modo que  $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$ , se tiene que

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0} \quad (7.4.3)$$

**Regla de Lenz:** El sentido de la corriente inducida es tal que el flujo de campo magnético asociado a la corriente inducida se opone a la variación de flujo que la originó.

Anteriormente se tenía que un campo  $\vec{E}$  generaba una  $\vec{J}$  y por consecuencia un  $\vec{B}$ , pues

$$\vec{E}_{\text{ef}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{em}} \rightarrow \vec{J} = \sigma_e \vec{E}_{\text{ef}} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.4.4)$$

y ahora se tiene el fenómeno análogo contrario, es decir, que un campo  $\vec{B}$  genera un campo  $\vec{E}$

$$\vec{B} \rightarrow \Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E}_{\text{ef}} \cdot d\vec{l} \quad (7.4.5)$$

## 7.5. Inducción electromagnética en un circuito móvil

Téngase en una región rectangular del espacio un campo  $\vec{B} = B\hat{z} = \text{cte}$  y un circuito rectangular en el plano XY de altura  $h$  en la dirección  $y$ . El circuito tiene una velocidad  $\vec{v} = v\hat{x} = \text{cte}$ . La región del espacio con campo mide  $a$  en dirección  $x$  y  $b$  en dirección  $y$  y se tiene que el circuito está inmerso a una distancia  $x$  del eje Y. Se tiene que  $x = x(t) = vt$ . Se define ahora un diferencial de superficie a la región del espacio con el campo,  $d\vec{S} = dx dy(-\hat{z})$ , de modo que

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (-B\hat{z}) \cdot (dx dy(-\hat{z})) = \int B dx dy = B \int_0^h dy \int_x^a dx = Bh(a - x) \quad (7.5.1)$$

de modo que

$$\Phi = \Phi(t) = Bh(a - vt) \quad (7.5.2)$$

Ahora le fem es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bh(a - vt)) = -Bh(-v) = Bhv \quad (7.5.3)$$

Por lo que el flujo disminuye.

La corriente inducida en el cable de resistencia  $r$  es

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{Bhv}{r} > 0 \rightarrow I_i \neq I(t). \quad (7.5.4)$$

El hecho de que  $I_i > 0$  se debe a la elección de orientación de  $d\vec{S}$ .

Mediante la fuerza de Lorentz se tiene que

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v\hat{x}) \times (-B\hat{z}) = qvB\hat{y} \quad (7.5.5)$$

y afectará únicamente a la parte vertical del circuito pues dicha fuerza no es lo suficientemente fuerte como para arrancar los  $e^-$ . Ahora la fem valdrá, entre A y C (que son el inicio y final del tramo vertical inmerso en el circuito).

$$\varepsilon \equiv \oint \vec{E}_{\text{ef}} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E}_{\text{em}} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \frac{\vec{F}_L}{q} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \frac{qvB}{q} \hat{y} \cdot d\hat{y} = vB \int_A^C dy = vBh \quad (7.5.6)$$

pero no se ha tenido en cuenta la velocidad de arrastre, de modo que realmente  $\vec{v}_{\text{total}} = \vec{v} + \vec{v}_{\text{arras}} = \vec{v} + \vec{w}$  y por tanto

$$\vec{F}_L = q(\vec{v}_{\text{tot}} \times \vec{B}) = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F}_{L, \text{arras}} = q\vec{w} \times \vec{B} \quad (7.5.7)$$

de modo que en los cables en horizontal AA' y CC' y en el cable vertical AC, se tiene la siguiente fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_{L_{AC}} = q\vec{w} \times \vec{B} = q(w\hat{y}) \times (-B\hat{z}) = -qwB\hat{x} \quad (7.5.8)$$

$$\vec{F}_{L_{AA'/CC'}} = q(\mp w\hat{x}) \times (B\hat{z}) = \mp wB\hat{y} \quad (7.5.9)$$

## 7.6. Inducción electromagnética en un circuito inmóvil

Téngase un circuito conductor quieto cuya superficie es atravesada por  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$  de modo que

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}. \quad (7.6.1)$$

En este caso se tiene que  $\vec{v} = \vec{0}$ , de modo que

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \equiv q\vec{E}_{\text{ef}} \rightarrow \vec{E}_{\text{ef}} \neq \vec{0} \quad (7.6.2)$$

donde

$$\vec{E}_{\text{ef}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{em}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{em}} \neq \vec{0} \quad (7.6.3)$$

de modo que la fem ahora es

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{ef}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (7.6.4)$$

Ahora se redefinirá  $\vec{E}$  como el campo total

$$\vec{E}_{\text{ef}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{em}} \rightarrow \vec{E}_{\text{ef}} \equiv \vec{E} = \vec{E}_{\text{el}} + \vec{E}_{\text{em}} \quad (7.6.5)$$

de modo que ahora los rotores son

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{el}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{em}} \neq 0 \quad (7.6.6)$$

y la fem

$$\varepsilon \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.6.7)$$

donde, aplicando Stokes

$$\varepsilon \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (7.6.8)$$

por lo que, reordenado

$$\int_S \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (7.6.9)$$

de lo que se concluye

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (7.6.10)$$

que es la ley de inducción circuital.

### 7.7. Ley de inducción de Faraday-Lenz en forma diferencial

La ley de Faraday-Lenz-Henry en forma circuital para un circuito arbitrario es

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}, \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.7.1)$$

de lo que pudo concluirse

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{em}} \cdot d\vec{l} \quad (7.7.2)$$

de modo que

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{el}} + \vec{E}_{\text{em}}. \quad (7.7.3)$$

Sin embargo, si se tiene un campo  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ , se cumple que

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (7.7.4)$$

aunque no exista circuito conductor y recibe el nombre de ley de inducción de Faraday-Lenz en forma diferencial. Recuérdese que el rotor de  $\vec{B}$  es

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.7.5)$$

**Ej 7.7:** Se tiene un hilo por el que circula corriente  $I$  y a una distancia  $x = x(t)$  se tiene una espira cuadrada paralela de lados  $a$  y  $b$  que se desplaza alejándose del hilo a una velocidad  $\vec{v} = v\hat{x}$ . Se tiene entonces que, si la espira parte con un hilo superpuesto sobre el hilo, se tendrá que  $x(t) = vt$ . Recuérdese que el campo magnético de un hilo, por la ley de Biot-Savart, en coordenadas cilíndricas, es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (7.7.6)$$

El campo magnético que atraviesa la espira es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{z}) \quad (7.7.7)$$

pues nos hallamos en el plano  $z = 0$ . El diferencial de superficie de la espira será  $d\vec{S} = dx dy(-\hat{z})$ , de modo que

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{z}) \cdot (dx dy(-\hat{z})) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b dy \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} [\ln x]_x^{x+a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{x+a}{x} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{x} \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{vt} \right)\end{aligned}\quad (7.7.8)$$

de modo que la fem inducida será

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{vt} \right) \right) = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{a}{vt}} \left( \frac{-av}{(vt)^2} \right) = \frac{\mu_0 I b a}{2\pi} \frac{1}{(a + vt)t} \quad (7.7.9)$$

de modo que la corriente inducida, teniendo en cuenta que el hilo tiene una resistencia  $r$ , será

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\mu_0 I b a}{r 2\pi} \frac{1}{(a + vt)t} > 0. \quad (7.7.10)$$

Como el flujo tiende a disminuir, por la ley de Lenz, el campo magnético inducido, que se opone a la variación de flujo, tiene la misma dirección que el campo magnético original, es decir

$$\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{B}_i}{|\vec{B}_i|} \quad (7.7.11)$$

La fuerza de Lorentz es

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}_t \times \vec{B}) = q\vec{v}_t \times \vec{B}, \quad q = -|e^-| \quad (7.7.12)$$

donde la velocidad total es  $\vec{v}_t = \vec{v}_m + \vec{v}_a$ ,  $\vec{v}_m \equiv \vec{v} = v\hat{x}$ , donde el subíndice  $a$  hace referencia a “arrastre”, de modo que

$$\vec{F}_{L_m} = q\vec{v}_m \times \vec{B} = q(v\hat{x}) \times (-B_z\hat{z}) = qvB_z\hat{y} = qv\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{y} \quad (7.7.13)$$

y

$$\vec{F}_{L_a} q\vec{v}_a \times \vec{B} \rightarrow \begin{cases} (1) \rightarrow q(v_a\hat{y}) \times (-B_z\hat{z}) = -qv_a B_z\hat{x} \\ (2) \rightarrow q(v_a\hat{x}) \times (-B_z\hat{z}) = qv_a B_z\hat{y} \\ (3) \\ (4) \end{cases} \quad (7.7.14)$$

y por tanto la fem inducida es

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \oint \frac{\vec{F}_{L_m}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \cdot dy\hat{y} + \int_{(2)} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \cdot dy\hat{y} + \int_{(3)} v \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \hat{y} \cdot (-dy\hat{y}) + \int_{(4)} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \cdot dx(-\hat{x}) \\ &= \frac{v\mu_0 I}{2\pi} b \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{\mu_0 q v I b}{2\pi} \left( \frac{1}{vt} - \frac{1}{vt+a} \right) = \dots = \frac{v\mu_0 I a b}{2\pi v t (vt+a)}\end{aligned}\quad (7.7.15)$$

**Ej 7.8:** Téngase la misma disposición que en el ejercicio anterior, pero por el cable que una intensidad  $I = I(t) = I_0 e^{-kt}$ , donde  $I_0$  y  $k$  son ctes., se tiene entonces (asumiendo que la variación de  $I$  es lenta, pues sino Biot-Savart no es válido)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (-\hat{z}) \cdot (dx dy(-\hat{z})) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^b dy \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right) \right] I_0 e^{-kt} \quad (7.7.16)$$

de modo que la fem será

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right) \right] e^{-kt} \right) = \frac{\mu_0 I_0 b k}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right) \right] e^{-kt} \quad (7.7.17)$$

y la intensidad inducida

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\mu_0 I_0 b k}{r 2\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{d} \right) \right] e^{-kt} > 0 \quad (7.7.18)$$

**Boletín 7.9:** Se tiene una barra de longitud  $L$  giratoria en el plano XY en un trayecto circular de modo que  $\omega = \text{cte}$ . La barra está inmersa en un campo  $\vec{B} = -B\hat{z}$ , donde  $B$  es cte. Se tiene que  $\vec{v} = v\hat{\phi} = \omega r\hat{\phi}$ ,  $v = 2\pi\omega$ , de modo que la fuerza de Lorentz sobre la barra es

$$\vec{F}_L = q\vec{B} \times \vec{v} = q(-B\hat{z}) \times (\omega r\hat{\phi}) = -q\omega r B\hat{r} \quad (7.7.19)$$

y por tanto, según el signo de  $q$  ocurrirá

$$\begin{cases} q > 0 \rightarrow \vec{F}_L = -|q|\omega r B\hat{r} \\ q < 0 \rightarrow \vec{F}_L = |q|\omega r B\hat{r} \end{cases} \quad (7.7.20)$$

de modo que las cargas negativas se acumularán lejos del centro y las positivas en el centro del giro, polarizando la barra y creando un campo eléctrico que afectará nuevamente a dichas cargas, provocando que la fuerza total sobre estas sea nula:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_L + q\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_L = -q\vec{E} \Rightarrow q\omega r B\hat{r} = -qE\hat{r} \Rightarrow \boxed{E = \omega r B} \quad (7.7.21)$$

y por tanto

$$\left[ \begin{aligned} \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_+^- \omega r B\hat{r} dr\hat{r} = \omega B \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} \omega B L^2 \\ \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_+^- -\vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = - \int_+^- d\phi = \phi_+ - \phi_- \end{aligned} \right] \Rightarrow \boxed{\phi_+ - \phi_- = \frac{1}{2} \omega B L^2} \quad (7.7.22)$$

de modo que se tiene un motor monopolar.

Para el próximo día: se tiene un circuito circular de radio  $a$  y resistencia  $r$  en el plano  $z = 0$  con  $\vec{B} = B_0 e^{-t/\tau} \hat{z}$ , donde  $B_0$  y  $\tau$  son ctes. Hallar  $I_i$ :

El diferencial de superficie de la espira es  $d\vec{S} = r dr d\varphi \hat{z}$ , de modo que el flujo de campo magnético a través de la espira es

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_z \hat{z} \cdot r dr d\varphi \hat{z} = B_z \int_S dr d\varphi = \pi a^2 B_0 e^{-t/\tau}, \quad (7.7.23)$$

por tanto la fem es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B_0 \pi a^2}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (7.7.24)$$

y la corriente inducida

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{B_0 \pi a^2}{\tau r} e^{-t/\tau} > 0 \quad (7.7.25)$$

Se ha asumido que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo principal:  $\|\vec{B}\| \gg \|\vec{B}_{\text{ind}}\|$ .

En caso de que  $\nexists$  espiras y el campo sea el mismo que el anterior  $\vec{B} = B_0 e^{-t/\tau}$  se toma un camino de integración en forma de circunferencia centrada en el eje  $z$  a una altura arbitraria con diferencial de superficie  $d\vec{S}$  y radio  $r$ . Se conoce que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.7.26)$$

de modo que integrando en una superficie, se tiene que por Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (7.7.27)$$



Recuérdese que en cilíndricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{J} = J_z(r') \hat{z} \Rightarrow \vec{B} = B_\varphi(r) \hat{\varphi} \quad (7.7.28)$$

de modo que

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_\varphi(r) \hat{\varphi}} \quad (7.7.29)$$

De modo que

$$\left[ \oint_{r=\text{cte}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{r=\text{cte}} E_\varphi(r) \hat{\varphi} \cdot r d\varphi \hat{\varphi} = E_\varphi(r) r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r E_\varphi(r) \right. \\ \left. \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \hat{z} \cdot dS \hat{z} = \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \pi r^2 \right] \Rightarrow E_\varphi(r) 2\pi r = \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \pi r^2 \\ \boxed{\vec{E} = \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{2\tau} r \hat{\varphi}} \quad (7.7.30)$$

que es consistente con

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{B_0 e^{-t/\tau}}{2\tau} r \hat{\varphi} \right) = \dots = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.7.31)$$

**Ej:** Téngase una espira rectangular de altura  $b$  y lado  $a$  perpendicular al eje  $z$  que gira con velocidad angular  $\omega = \text{cte}$ . Hay un campo magnético  $\vec{B} = B\hat{x}$ ,  $B = \text{cte}$ . El diferencial de superficie de la espira es  $d\vec{S} = dS\vec{u}$ ,  $||\vec{u}|| = 1$ ,  $\vec{u} = \hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$ , donde  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ . Se tiene entonces que el flujo de campo magnético es

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B\hat{x} \cdot dS\vec{u} = B \int_S \hat{x} \cdot \vec{u} dS = B(-\sin\varphi)ab = -abB \sin(\varphi_0 + \omega t) \quad (7.7.32)$$

por lo que la fem será

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = Bab\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.7.33)$$

si se define  $V_0 = abB\omega$ , se tiene que la fem es

$$\varepsilon = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.7.34)$$

y la intensidad inducida es

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{V_0}{r} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.7.35)$$

Véase ahora este problema con la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.7.36)$$

Ahora, para  $\vec{r} \in \text{espira} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ , se modo que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = x\omega\hat{y} - y\omega\hat{x} \Rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = -qB_x x\omega\hat{z} \quad (7.7.37)$$

de modo que, si (1) y (3) son los laterales de la espira:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(3)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} -B_x x\omega\hat{z} \cdot dz\hat{z} + \int_{(3)} -B_x x\omega\hat{z} \cdot dz\hat{z} = \\ = -Bx|_{(1)} \cdot \omega b + Bx|_{(3)} \omega b = -B\left(-\frac{a}{2} \cos(\omega t + \varphi_0)\right) + B\omega \frac{a}{2} \cos(\omega t + \varphi_0) = B\omega_0 b \cos(\omega t + \varphi_0) = \varepsilon$$

**Ej 7.5:** En un sistema de referencia cartesiano se tiene un dipolo magnético  $\vec{m} = m\hat{z}$  en el origen y a una altura inicial  $h$  se tiene una espira circular de radio  $a$  con masa  $M$  y resistencia  $r$ . El campo magnético por un dipolo en el origen de coordenadas viene dado por

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r} - r^2 \vec{m})}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mz\hat{r} - r^2 m\hat{z}}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mz(r\hat{r} + z\hat{z}) - (r^2 + z^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mzr\hat{r} + (2z^2 - r^2)m\hat{z}}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = B_r\hat{r} + B_z\hat{z}\end{aligned}$$

de modo que el flujo magnético a través de la espira es

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (B_r\hat{r} + B_z\hat{z}) \cdot dS\hat{z} = \int_z B_z dS = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2z^2 - r^2)m}{(r^2 + z^2)^{5/2}} r dr d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} m \oint_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{(2z^2 - r^2)r}{(r^2 + z^2)^{5/2}} dr = \frac{\mu_0}{4\pi} m 2\pi \left[ \frac{2z^2 - r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]_0^a \quad (7.7.38)$$

la fem inducida

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0}{2} \frac{ma^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \right) = -\frac{\mu_0 ma^2}{2} \left( -\frac{3}{2} \right) (a^2 + z^2)^{-5/2} 2z \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{3\mu_0 ma^2}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} v; \quad v = \frac{dz}{dt} < 0\end{aligned} \quad (7.7.39)$$

y la corriente inducida

$$I_i = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{3\mu_0 ma^2}{2r} \frac{zv}{(a^2 + z^2)^{5/2}} < 0 \quad (7.7.40)$$

La corriente inducida es negativa dado que el flujo magnético aumenta, de modo que el campo magnético inducido se opone al campo que origina dicha inducción.

Ahora se verá cuál es la fuerza debida al campo magnético:

$$\vec{F}_B = I_i \oint d\vec{l} \times \vec{B} \quad (7.7.41)$$

por lo que se debe hallar

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ 0 & a d\varphi & 0 \\ B_r & 0 & B_z \end{vmatrix} = aB_z d\varphi \hat{r} - aB_r d\varphi \hat{z} \quad (7.7.42)$$

de modo que

$$\vec{F}_B = I_i \oint_0^{2\pi} aB_z d\varphi \hat{r} - I_i \oint_0^{2\pi} aB_r d\varphi \hat{z} = I_i aB_z \oint_0^{2\pi} \hat{r} d\varphi - I_i aB_r \hat{z} \oint_0^{2\pi} d\varphi = -I_i a 2\pi B_r \hat{z} \rightarrow \vec{F}_B \uparrow \uparrow \quad (7.7.43)$$

Por tanto la fuerza neta sobre la espira es

$$\sum \vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_B = M \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow -Mg\hat{z} - I_i a 2\pi B_r \hat{z} = M \frac{dv}{dt} \hat{z}, \quad (7.7.44)$$

recordando la expresión de  $B_r$  e  $I_i$

$$-Mg - 2\pi a \frac{3\mu_0 ma^2}{2r} \frac{zv}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3mza}{(a^2 + z^2)^{5/2}} = M \frac{dv}{dt} \quad (7.7.45)$$

y se tiene la siguiente ecuación del movimiento

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{9\mu_0^2 m^2 a^4}{4r} \frac{z^2 \frac{dz}{dt}}{(a^2 + z^2)^5} + Mg = 0. \quad (7.7.46)$$

Otro modo de hallar la ecuación de movimiento es mediante el principio de conservación de la energía

$$Mgh = Mgz + \frac{1}{2}Mv^2 + \int_0^t \varepsilon I_i dt \quad (7.7.47)$$

donde el último término es el debido al efecto Joule. Derivando ambas partes de la igualdad respecto del tiempo

$$0 = Mg \frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}M \frac{dv^2}{dt} + \varepsilon I_i = Mg \frac{dz}{dt} + Mv \frac{dv}{dt} + \frac{3\mu_0 m a^2}{2} \frac{zv}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \frac{3\mu_0 m a^2}{2r} \frac{zv}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \quad (7.7.48)$$

de modo que se obtiene la misma ecuación

$$0 = Mg + M \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{9\mu_0^2 m^2 a^4}{4r} \frac{z^2 \frac{dz}{dt}}{(a^2 + z^2)^5} \quad (7.7.49)$$

## 7.8. Coeficientes de inducción y autoinducción

### 7.8.1. Coeficientes de inducción entre dos circuitos

Un circuito  $C_1$  por el que circula una corriente  $I_1$ , generando un campo magnético  $\vec{B}$  que provoca un flujo magnético  $\Phi_{21}$  que atraviesa un segundo circuito  $C_2$ . Los circuitos tienen vectores de posición para sus elementos  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y vector de posición relativa  $\vec{R}_{21}$ .  $\Phi_{21}$  es

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2, \quad (7.8.1)$$

donde se ha aplicado Stokes. Recuérdese que  $\vec{A}_1$  es

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{R_{21}} \quad (7.8.2)$$

y por tanto

$$\left[ \begin{aligned} \Phi_{21} &= \oint_{C_2} \left[ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{R_{21}} \right] \cdot d\vec{l}_2 = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R_{21}} \right] I_1 \\ M_{21} &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R_{21}} \equiv \text{coef. de inducción mutua de } C^1 \text{ sobre } C^2 \end{aligned} \right] \Rightarrow \boxed{\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1} \quad (7.8.3)$$

donde  $M_{12}$  no depende del sistema de referencia, pues  $d\vec{l}_1$  y  $d\vec{l}_2$  no dependen del sistema de referencia.

Se tiene que, por simetría

$$\boxed{\Phi_{12} = \dots = M_{12} I_2} \rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{R_{12}} \Rightarrow \boxed{M_{12} = M_{21}} \quad (7.8.4)$$

dado que  $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21} \Rightarrow R_{12} = R_{21}$ .

Si se tiene un problema de cuasimagnetostática, se tendrá que

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \oint \frac{d\vec{l}}{R} \quad (7.8.5)$$

que es válido para  $f \leq 1$  MHz

### 7.8.2. Coeficiente de autoinducción de un circuito

Ahora se desea conocer el flujo que crea  $C$  sobre  $C$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (7.8.1)$$

donde el potencial vector es

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{R}, \quad C \equiv C' \quad (7.8.2)$$

de modo que

$$\Phi = \oint_C \left[ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}'}{R} \right] d\vec{l} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{R} \right] \cdot I \quad (7.8.3)$$

donde puede definirse el coeficiente de autoinducción, medido en Henrios,  $H$ ,  $L$ :

$$L \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{R} \quad (7.8.4)$$

y se tiene que  $L > 0$ .

### 7.8.3. Coeficientes de autoinducción y autoinducción para un conjunto de circuitos

Ténganse  $Nk$  circuitos referidos a un único sistema de referencia. El flujo sobre el circuito  $k$  será

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N M_{ki} I_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k, \dots, N\} \quad (7.8.1)$$

donde  $M_{ii} \equiv L_i$  para  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . De este modo se tendrá que la fem del circuito  $k$ ,  $\varepsilon_k$ , será

$$\varepsilon_k(t) = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_{i=1}^N M_{ki} \frac{dI_i(t)}{dt} \quad (7.8.2)$$

**Ej 7.11:** Téngase un solenoide infinito con una densidad de espiras  $n = N(\text{espiras})/h$  en una altura  $h$  y con radio de espira  $a$ . Recuerdese que el campo magnético es  $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$ :

$$\Phi = LI \Rightarrow L = \frac{\Phi}{I}, \quad \text{donde } \Phi = N I_{\text{espira}} = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_{S(\text{espiras})} \mu_0 n I \hat{z} \cdot dS \hat{z} = N \mu_0 n I \pi a^2. \quad (7.8.3)$$

por lo tanto

$$\Phi = N \mu_0 n I \pi a^2 = \mu_0 n^2 I \pi a^2 h \quad (7.8.4)$$

por lo que la autoinducción es

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 n^2 I \pi a^2 h}{I} = \mu_0 n^2 \underbrace{\pi a^2 h}_{\text{volumen}} \quad (7.8.5)$$

y la autoinducción por unidad de longitud es

$$\frac{L}{h} = \mu_0 n^2 \pi a^2 \quad (7.8.6)$$

**Ej:** Téngase un solenoide de radio  $a$  y longitud  $l$  inmerso en el eje de otro solenoide de radio  $b > a$ , de modo que el solenoide grande, es el solenoide 1 y el pequeño es el 2. Las densidad de espiras  $n'$  corresponde al solenoide 1, de modo que  $n_1 \equiv n'$  y los solenoides tienen corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. El flujo que atraviesa el solenoide pequeño es  $\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1$ , de modo que

$$\Phi_{21} = N_2 \cdot \Phi_{1\text{espira}} = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = N_2 \mu_0 n_1 I_1 \pi a^2 \quad (7.8.7)$$

y

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \pi a^2 n_1 N_2 \quad (7.8.8)$$

**Ej 7.12:** Téngase una espira cuadrada toroidal de lado  $a$  y  $N$  vueltas, donde el radio interno del toroide es  $2a$  y el externo  $3a$  y el sistema de referencia se coloca en el centro del toroide. Se halló ya que el campo es

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\varphi}, & \text{dentro} \\ \vec{0}, & \text{fuera} \end{cases} \quad (7.8.9)$$

Ahora se calculará la autoinducción de la espira,  $\Phi = LI \Rightarrow L = \Phi/I$ , para esto en primer lugar se habrá de hallar el flujo  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= N \Phi_{\text{espira}} = N \int_{S_{\text{espira}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_{S_{\text{espira}}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \hat{\varphi} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \int_0^a dz \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} a [\ln r]_{2a}^{3a} = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \left( \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

de modo que

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left( \frac{3}{2} \right) \quad (7.8.10)$$

**Ej 7.10:** Ténganse dos espiras a una distancia  $h$ , una de radio menor,  $b$ , abajo,  $C_1$  con corriente  $I_1$  y momento dipolar magnético  $\vec{m}_1$  y otra de radio mayor,  $a$ , arriba,  $C^2$  con corriente  $I_2 = 0$ , de modo que  $b \ll a$  y  $b \ll h$ . De este modo  $C^1$  será un dipolo magnético:  $\vec{m}_1 = I\pi b^2 \hat{z}$  que genera un campo

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}_1}{r^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_1 z r \hat{r} + (2z^2 - r^2)m_1 \hat{z}}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (7.8.11)$$

pues en cilíndricas  $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ . De este modo, el flujo magnético sobre la espira 2 (la grande) generado por 1 es

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} (B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) \cdot dS_2 \hat{z} = \int_{S_2} B_z dS_2 = \int_{S_2} B_z r dr d\varphi = \int_{S_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2z^2 - r^2)m_1}{(r^2 + z^2)^{5/2}} r dr d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} r dr = [z = h] = \dots = \frac{\mu_0}{2} \pi b^2 I_1 \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (7.8.12)$$

de modo que la inducción de 1 sobre 2 es

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 \Rightarrow L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{2} \pi b^2 \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (7.8.13)$$

Se tiene que en el caso contrario, es decir, cuando  $I_2$  es distinto a 0 e  $I_1 = 0$ , para hallar la inducción de 2 sobre 1, en primer lugar se tendrá que el flujo es

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad (7.8.14)$$

que también es

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} B_{z2} r dr d\varphi \simeq B_{z2}(r=0, z=h) \pi a^2 \quad (7.8.15)$$

pero se tenía que cerca del eje

$$B_z(r, z) \approx B_z(0, z) + 0 + \dots \quad (7.8.16)$$

y por tanto

$$\Phi_{12} = \pi b^2 B_{z2} = \pi a^2 \frac{\mu_0 I_2}{2} \frac{a^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \Rightarrow M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0}{2} \pi b^2 a^2 \frac{1}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \quad (7.8.17)$$

## 8. Ecuaciones de Maxwell en el vacío. Ondas electromagnéticas (EM)

- 
- |  |    |
|--|----|
| 1. Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias: la corriente de desplazamiento. .... | 86 |
| 2. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío .....   | 88 |
- 

### 8.1. Generalización del teorema de Ampère para corrientes no estacionarias: la corriente de desplazamiento.

Se tiene que Maxwell conocía lo siguiente

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{F}_L &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\end{aligned}\quad (8.1.1)$$

Tomando la divergencia de los rotores:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \equiv 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (8.1.2)$$

sin embargo, para el del rotor de  $\vec{B}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) \Rightarrow \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (8.1.3)$$

pero esto sólo es válido para corrientes estacionarias. Se conoce de la ecuación de continuidad que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \rho = \rho(\vec{r}, t). \quad (8.1.4)$$

Se tiene entonces que para una corriente no estacionaria

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T \quad (8.1.5)$$

de modo que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \equiv 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0} \quad (8.1.6)$$

por lo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (8.1.7)$$

y por tanto

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \vec{J}_T = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} + \vec{J}_D \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_D) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.1.8)$$

Aplicando a esto la divergencia:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot \left( \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} \right) = \\ &= \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}\end{aligned} \quad (8.1.9)$$

De este modo las leyes de Maxwell en el vacío son

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (8.1.10)$$

donde la última se conoce como ley de Ampère generalizada.

Si se tiene un circuito de alterna con un condensador, se tiene que  $\varepsilon(t) = V_0 \cos(\omega t)$  y la capacidad del condensador es

$$C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow q = CV_C \quad (8.1.11)$$

y la corriente en este es

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_0 \cos(\omega t)) = -CV_0 \omega \sin(\omega t) \quad (8.1.12)$$

Denomínense región 1 y 3 a los cables anterior y posterior al condensador, respectivamente, se tiene entonces que, si el eje  $z$  es el paralelo al cable, en la primera

$$R = \frac{l}{\sigma_e S}, \quad \vec{J} = \frac{i(t)}{S} \hat{z} = \frac{-V_0 C \omega \sin(\omega t)}{S} \hat{z} \quad (8.1.13)$$

por lo que el campo eléctrico se halla

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma_e} = \frac{-V_0 C \omega \sin(\omega t)}{S \sigma_e} \hat{z} \quad (8.1.14)$$

y la corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{-V_0 C \omega^2 \varepsilon_0}{S \sigma_e} \cos(\omega t) \hat{z} \quad (8.1.15)$$

y la intensidad de corriente de desplazamiento

$$i_D = \int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = J_D S = \frac{-V_0 C \omega^2 \varepsilon_0}{\sigma_e} \cos(\omega t) \quad (8.1.16)$$

y el cociente entre esta y la de conducción

$$\frac{i_D}{i} = \frac{\omega \varepsilon_0 \cos(\omega t)}{\sigma_e \sin(\omega t)}, \quad (8.1.17)$$

dado que

$$\frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma_e} = 9,43 \cdot 10^{-16} \Rightarrow |i_D| \ll |i| \Rightarrow i + i_D \approx i \quad (8.1.18)$$

para  $f = 1 \text{ kHz}$  y  $\sigma_e = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ . Por ende se tiene que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_D \approx \mu_0 \vec{J} \quad (8.1.19)$$

y por el teorema de Ampère

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\phi} = \frac{-\mu_0 C V_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (8.1.20)$$

Sea la segunda región la correspondiente al aire que hay entre las placas del condensador, se tiene que  $\vec{J} = 0$ , ahora

$$v_c = \varepsilon(t) = V_0 \cos(\omega t) \quad (8.1.21)$$

y se tiene que

$$C = \frac{q}{v_c} \Rightarrow q = C v_c = C V_0 \cos(\omega t) \quad (8.1.22)$$

por lo que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{z} = \frac{CV_0}{\pi a^2 \varepsilon_0} \cos(\omega t) \hat{z} \quad (8.1.23)$$

pues

$$\sigma = \frac{q}{\pi a^2} = \frac{CV_0 \cos(\omega t)}{\pi a^2} \quad (8.1.24)$$

de este modo se obtiene la corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{-CV_0 \omega}{\pi a^2} \sin(\omega t) \hat{z} \quad (8.1.25)$$

y la intensidad de corriente

$$i_D = \int_{S_c} \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = \frac{-CV_0 \omega}{\pi a^2} (\sin(\omega t)) \pi a^2 = -V_0 C \omega \sin(\omega t) \quad (8.1.26)$$

de modo que  $i_D = i$  y por tanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_D = \mu_0 \vec{J}_D = \mu_0 \frac{-CV_0 \omega}{\pi a^2} \sin(\omega t) \hat{z} \Rightarrow \vec{B} = B_\varphi(r) \hat{\varphi} \quad (8.1.27)$$

e integrando respecto de la superficie

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{J}_D \cdot d\vec{S} \quad (8.1.28)$$

y por Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{r=\text{cte}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 \frac{-CV_0 \omega}{\pi a^2} \sin(\omega t) \pi r^2$$

$$\vec{B}_3 = \frac{-\mu_0 V_0 C \omega \sin(\omega t)}{2\pi a^2} r \hat{\varphi} \quad (8.1.29)$$

## 8.2. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{Ley de Coulomb} \rightarrow \text{Teorema de Gauss} \quad (8.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{sin nombre} \quad (8.2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de inducción de Faraday-Lenz-Henry} \quad (8.2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampère generalizada} \quad (8.2.4)$$

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.2.5)$$

Estas son las conocidas ecuaciones de Maxwell en el vacío de 1865. De éstas puede hallarse la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \equiv \vec{0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.2.6)$$

## 8.3. Ondas electromagnéticas

Halla un volumen  $V'$  con unas determinados  $\rho$  y  $\vec{J}$  y otro volumen  $V$  donde  $\rho = 0$  y  $\vec{J} = \vec{0}$ , de modo que en este volumen  $V$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.3.1)$$



Tomando el rotor de los rotos se obtiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (8.3.2)$$

tomando la identidad para el rotor del rotor

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (8.3.3)$$

de modo que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (8.3.4)$$

y, similarmente, para el campo magnético

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Por tanto

$$\left[ \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \nabla^2 \vec{f} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (8.3.6)$$

de modo que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv c \quad (8.3.7)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío:

$$\left[ \begin{aligned} c &= 299792458 \text{ m/s} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \end{aligned} \right] \rightarrow \varepsilon_0 \approx 8,8 \quad (8.3.8)$$

Ahora se tiene que el campo eléctrico tiene componentes  $x, y, z$ , de modo que

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \Rightarrow \nabla^2(\vec{E}) = \nabla^2(E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) = \hat{x} \nabla^2 E_x + \hat{y} \nabla^2 E_y + \hat{z} \nabla^2 E_z \quad (8.3.9)$$

y tomando la ecuación anteriormente obtenida

$$\hat{x} \nabla^2 E_x + \hat{y} \nabla^2 E_y + \hat{z} \nabla^2 E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) = \vec{0} \quad (8.3.10)$$

por lo que en dirección  $\hat{x}$

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (8.3.11)$$

y en el resto de direcciones es análogo, tanto para las componentes  $E_i$  como para las  $B_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$  y por tanto

$$\boxed{\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0} \quad (8.3.12)$$

que es la ecuación de ondas escalar