

# Cálculo II

Apuntes de Rubén Navarro Bonanad basados en las transparencias y clases  
de cálculo II de la UV realizadas por Domingo Martínez García

## Índice

<b>1 Complementos de cálculo diferencial en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>2</b>
1.1 Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena. . . . .	2
1.2 Derivadas direccionales y gradiente. . . . .	3
1.3 $T^{\underline{mas}}$ de la función implícita e inversa. . . . .	4
<b>2 Derivadas de orden superior. Extremos</b>	<b>6</b>
2.1 Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
2.2 Valores extremos y puntos de silla. Matriz Hessiana. . . . .	7
2.3 Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange. . . . .	9
<b>3 Integrales múltiples</b>	<b>11</b>
3.1 Integrales dobles sobre un rectángulo. . . . .	11
3.2 Integrales dobles sobre regiones elementales. . . . .	13
3.3 Cambio de variable en la integral doble. Coordenadas polares. . . . .	14
3.4 Integrales triples. . . . .	15
3.5 Cambio de variable en la integral triple. Coordenadas cilíndricas y esféricas. . . . .	17
3.6 Aplicaciones de las integrales múltiples. . . . .	19
<b>4 Campos vectoriales. Cálculo vectorial</b>	<b>21</b>
4.1 Campos vectoriales. . . . .	21
4.2 Operadores diferenciales. . . . .	22
4.3 Coordenadas curvilineas. Vectores y operadores. . . . .	25
<b>5 Integrales curvilíneas y de superficie</b>	<b>29</b>
5.1 Integrales de línea. . . . .	29
5.2 Integrales de superficie. . . . .	32
5.3 $T^{\underline{ma}}$ de Green en el plano. . . . .	35
5.4 $T^{\underline{ma}}$ de Stokes . . . . .	36
5.5 $T^{\underline{ma}}$ de Gauss-Ostrogradski. . . . .	37

# 1 Complementos de cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena.

Trayectoria en  $\mathbb{R}^n$ : aplicación  $\vec{r}(t) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La colección  $C$  de punto  $\vec{r}(t)$  cuando t recorre  $[a, b]$  se llama curva, y  $\vec{r}(a)$  y  $\vec{r}(b)$  son sus extremos

$$\begin{aligned} \text{En } \mathbb{R}^3 : \vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 & \quad \text{donde } x(t), y(t) \text{ y } z(t) \text{ son funciones componentes} \\ t \mapsto \vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ \vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \end{aligned}$$

velocidad: Si  $\vec{r}(t)$  es diferenciable, su velocidad es:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Éste es un vector tangente a la trayectoria  $\vec{r}(t)$  y por tanto la curva  $C$ .

$\vec{r}(t)$  es diferenciable si cada una de sus componentes lo es.

$$\text{Como } \vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, D\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Composición de funciones de una variable; Supóngase:  $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge f : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = f \circ g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Composición de funciones de varias variables; Suponer:  $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \wedge f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\Rightarrow h = f \circ g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p; h(x_1, \dots, x_n) = (f \circ g)(x_1, \dots, x_n) = f(g(x_1, \dots, x_n))$$

Regla de la cadena para funciones de una variable:

$$\left. \begin{array}{l} w = f(x) \text{ diferenciable respecto de } x \\ x = g(t) \text{ diferenciable respecto de } t \end{array} \right\} \Rightarrow w(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(x(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}$$

Regla de la cadena para funciones de varias variables:

Caso en que  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \wedge f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Sea  $w(x_1, \dots, x_n)$  una función diferenciable de n variables  $x_j$  y cada  $x_j(t_1, \dots, t_m)$  una función diferenciable de m variables  $t_j$ , entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}} \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m$$

**Regla de la cadena caso general:** Sean las funciones  $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \wedge f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Supóngase que  $g$  es diferenciable en  $\vec{x}_0 \equiv \mathbf{x}_0$  y que  $f$  es diferenciable en  $g(\mathbf{x}_0)$ . Entonces  $f \circ g$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$  y se cumple:

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$$

## 1.2 Derivadas direccionales y gradiente.

Sea  $f(x, y)$  definida en  $R$ . La recta que pasa por  $P_0(x_0, y_0)$  en dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$ :

$$\vec{P_0 P} = s\vec{u} \Rightarrow (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = s(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + su_1 \\ y = y_0 + su_2 \end{cases} s \in (-\infty, \infty)$$

Estas son las ecs. paramétricas de la recta, donde  $s$  (parámetro)  $\equiv$  distancia/longitud de "arco" desde  $P_0$  en dirección de  $\mathbf{u}$ .

**Derivada direccional:** La derivada de  $f$  en un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  en la dirección del vector unidad  $\mathbf{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$  es:

$$\left( \frac{df}{ds} \right)_{\mathbf{u}, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \equiv (D_{\vec{u}}f)_{P_0} \equiv D_{\vec{u}}f(P_0)$$

Dado que el límite exista.

Esta derivada direccional da la razón o tasa de cambio de  $f$  en  $P_0$  en la dirección de  $\mathbf{u}$ . Su **interpretación geométrica** es la pendiente de la recta tangente a  $C$  en  $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{i} \implies (D_{\vec{i}}f)_{P_0} = f_x(P_0); \text{ Si } \vec{u} = \vec{j} \implies (D_{\vec{j}}f)_{P_0} = f_y(P_0)$$

**Generalización:** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + s\vec{u} - f(\vec{x}_0))}{s} \in \mathbb{R}^m \quad \text{con } \vec{u}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n; s \in \mathbb{R}$$

**Derivada direccional y vector gradiente:**

**Tma 1.1:** Si  $f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **diferenciable** en una región abierta que contiene a  $P_0(x_0, y_0)$ , entonces existen todas las derivadas direccionales y se cumple:

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = (\vec{\nabla}f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}$$

**Tma 1.2:** Sea  $f$  diferenciable en  $\mathbf{x}_0$  y  $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) \neq 0$  se cumple:

1.-  $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)$  apunta en la dirección de máximo crecimiento de  $f$ . La derivada en esa dirección es  $\|\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)\|$ .

2.- La función no varía en una dirección perpendicular a  $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)$

**Tma 1.3:** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y sea  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  un punto de la **superficie de nivel**  $S$ , definida por  $f(x, y, z) = c \Rightarrow (\vec{\nabla}f)_{P_0} \perp S$

Si  $\vec{r}(t)$  es una trayectoria sobre  $S$  que pasa por  $P_0$ :

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}f(P_0) \perp \vec{r}' \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}f(P_0) \perp \text{plano tgte. en } P_0} \quad (\vec{\nabla}f \perp S \text{ en } P_0)$$

Ecuación del plano tgte. a  $S$ :  $\vec{\nabla}f(P_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ :

$$\boxed{f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0}$$

Si  $f(x, y) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^1$  entonces  $(\vec{\nabla}f)_{P_0} \perp$  curva de nivel en  $P_0$

Ec. de la recta tgte. a la curva de nivel en  $(x_0, y_0) : \vec{\nabla}f(P_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$

$$\boxed{f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = 0}$$

### 1.3 T<sup>mas</sup> de la función implícita e inversa.

**Definición:** Sea la ecuación  $F(x, y) = 0$ ,  $F$  definida en  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si en un entorno de  $x_0$ ,  $\exists y = f(x)/F(x, f(x)) = 0$ , entonces se dice que  $F(x, y) = 0$  define a  $y$  como una **función implícita** de  $x$ .

**Definición:** Sea la ec.  $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$ ,  $F$  definida en  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Si en un entorno de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\exists z = f(\mathbf{x}_0)/F(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)) = 0$ , entonces se dice que  $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$  define a  $z_0$  como una **función implícita** de  $\mathbf{x}_0$

**Tma de la función implícita para  $n+1$  variables:** Sea  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se denotarán los puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $(\mathbf{x}, z)$  donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge z \in \mathbb{R}$ . Si  $(\mathbf{x}_0, z_0)$  es un punto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en el que se cumplen las condiciones suficientes:

- 1)  $F(\mathbf{x}, z)$  está definida y es de clase  $C^1$  en un entorno de  $(\mathbf{x}_0, z_0)$
- 2)  $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \wedge F_z(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$

Entonces  $F(\mathbf{x}, z) = 0$  define una única función implícita  $z = f(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x}$  en entorno de  $x_0$  y  $z$  en un entorno de  $z_0$ . Además,  $z = f(\mathbf{x})$  es de clase  $C^1$  en un entorno de  $\mathbf{x}_0$  y se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

**Función implícita para un sistema:** Para despejar  $m$  variables  $\mathbf{z}$  de  $m$  ecs  $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{array}{l} F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1) \text{ Sea: } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix} \quad \text{Evaluado en } (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0), \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$$

**T<sup>ma</sup> general de la función implícita:** Si  $\Delta \neq 0$ , entonces las ecs. (1) definen de manera única las funciones implícitas de clase  $C^1$ :

$$z_i = f_i(\mathbf{x}) \text{ para } i = 1, \dots, m$$

cerca de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ . Sus derivadas se pueden calcular por derivación implícita.

**T<sup>ma</sup> de la función inversa:** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  siendo  $A$  un conjunto abierto y  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Si  $f$  es de clase  $C^1$  y el jacobiano  $J(f)(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , entonces:

- 1)  $f$  tiene inversa  $f^{-1} = g/\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$  para  $\mathbf{x}$  en un entorno de  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{y}$  en un entorno de  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ .
- 2)  $g$  es de clase  $C^1$  en un entorno de  $f(\mathbf{x}_0)$  y  $Dg(f(\mathbf{x}_0)) = [Df(\mathbf{x}_0)]^{-1}$

## 2 Derivadas de orden superior. Extremos

### 2.1 Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor en $\mathbb{R}^n$ .

Para  $f(x, y)$  se definen las derivadas parciales de segundo orden:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{derivadas parciales} \\ \text{iteradas} \end{array}$$

De manera análoga pueden definirse derivadas parciales de órdenes superiores y puede extenderse a funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \equiv f_{yyx}; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \equiv f_{yyxx} \quad \dots$$

**Clase  $C^n$ :** Una función es de clase  $C^n$  en un abierto  $D$  si **todas sus derivadas parciales hasta orden  $n$  existen** y son **continuas en  $D$** .

**Fórmula de Taylor para 2 variables:** Sea  $f(x, y)$  una función de clase  $C^{n+1}$  en una región abierta centrada en  $(x_0, y_0)$ , entonces en esta región se cumple:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) + \dots + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f + R_n(x, y)$$

$$\text{donde } h = (x - x_0); k = (y - y_0) \wedge R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \Big|_{(x_0 + ch, y_0 + ck)}$$

con  $c \in [0, 1]$

La extensión a tres variables es inmediata.

**Fórmula de Taylor para m variables:** Sea  $f(x, y)$  una función de clase  $C^{n+1}$  en una región abierta centrada en  $(\vec{x}_0), \vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$  y  $h_i = (x - x_i)$  entonces en esta región se cumple:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n + R_n(\vec{x}); \quad R_n(\vec{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \left( \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n+1} f \Big|_{(\vec{x}_0 + c\vec{h})} \quad \text{con } c \in [0, 1]$$

**Fórmula de Taylor hasta orden 2 para funciones de n variables:**

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \frac{1}{2!} \Delta \vec{x}^T \cdot H f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \dots$$

Se debe tener en cuenta que  $\Delta \vec{x} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \equiv$  matriz columna  $(n \times 1)$ ,  $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \equiv$  matriz fila  $(1 \times n)$

$$\text{La matriz Hessiana: } Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

## 2.2 Valores extremos y puntos de silla. Matriz Hessiana.

### Funciones de dos variables. Extremos locales

**Definiciones:** Esté  $f(x, y)$  definida en una región  $A$  que contenga el punto  $(a, b)$ :

1.  $f(a, b)$  es un **máximo local** de  $f$  si  $f(a, b) \geq f(x, y)$  para todos los puntos del dominio  $(x, y)$  en un disco abierto centrado en  $(a, b) \Rightarrow \forall B((a, b), r) \in A, f(a, b) \geq f(x, y)$
2.  $f(a, b)$  es un **mínimo local** de  $f$  si  $f(a, b) \leq f(x, y)$  para todos los puntos del dominio  $(x, y)$  en un disco abierto centrado en  $(a, b) \Rightarrow \forall B((a, b), r) \in A, f(a, b) \leq f(x, y)$

**Punto crítico:** Punto interior del dominio de  $f(x, y)$  donde  $f_x = f_y = 0 \vee \nexists f_x \vee \nexists f_y$   
 La noción de punto crítico es extensible a  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**Tma 2.2 - Test de la primera derivada para extremos locales:** Si  $f(x, y)$  tiene un mínimo o máximo local en un punto interior  $(a, b)$  de su dominio y si sus primeras derivadas parciales existen, entonces  $f(a, b) = f_y(a, b) = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} f)_{\vec{x}} = 0$ .

La superficie  $z = f(x, y)$  tiene un plano tgte. en un extremo local, siempre que exista dicho plano.

Sin embargo existen limitaciones a esto, pues  $\vec{\nabla} f = 0 \not\Rightarrow$  **extremo local**. Esto se debe a que si  $(\vec{\nabla} f)_{\vec{x}} = 0$  puede ser un punto de silla (puntos críticos que no son extremos). Además, los extremos se localizan en puntos críticos (incluye puntos en los que la derivada no existe) y en puntos frontera.

**Punto de silla:** Una función diferenciable  $f(x, y)$  tiene un **punto de silla** en  $(a, b)$  si para todo disco abierto centrado en  $(a, b)$  hay puntos del dominio  $(x, y)$  donde  $f(x, y) > f(a, b)$  y puntos del dominio  $(x, y)$  donde  $f(x, y) < f(a, b) \Rightarrow f(a, b)$  punto de silla si  $\forall B((a, b), r), r > 0, \exists f(x, y) > f(a, b) \wedge \exists f(x, y) < f(a, b)$

Sea  $f(x, y)$  de clase  $C^2$ . Considérese su matriz Hessiana:  $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ , cuyo determinante es el Hessiano:

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

**Tma 2.3** Test de la segunda derivada: Supóngase que las primeras y segundas derivadas  $f(x, y)$  son continuas en un disco centrado en  $(a, b)$  y  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  [ $f$  es de clase  $C^2$  en un entorno de  $(a, b)$ , que es pto. crítico]. Entonces:

- i)  $f$  tiene un **máximo local** en  $(a, b)$  si  $H_2 > 0$  en  $(a, b) \wedge f_{xx} < 0$ .
- ii)  $f$  tiene un **mínimo local** en  $(a, b)$  si  $H_2 > 0$  en  $(a, b) \wedge f_{xx} > 0$ .
- iii)  $f$  tiene un **punto de silla** en  $(a, b)$  si  $H_2 < 0$ .
- iv) el test es **inconclusivo** en  $(a, b)$  si  $H_2 = 0$ . En este caso uno debe de **buscarse la vida**. Estos puntos se denominan **degenerados**.

### Funciones de tres variables. Extremos locales

Sean  $H_1 = f_{xx}$ ,  $H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ ,  $H_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$   
 los menores principales. de la **matriz Hessiana**:  $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$

Supóngase que en  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  se cumple  $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) = 0$  y ningún  $H_k = 0$ . Entonces:

- 1) Si  $H_1 > 0, H_2 > 0 \wedge H_3 > 0$ ,  $f$  tiene un **mínimo local** en  $\mathbf{x}_0$ .
- 2) Si  $H_1 < 0, H_2 > 0 \wedge H_3 < 0$ ,  $f$  tiene un **máximo local** en  $\mathbf{x}_0$ .
- 3)  $f$  tiene un **punto de silla** en el resto de casos. Si  $\det(H)(\mathbf{x}_0) = 0$ , el test no es concluyente;  $\mathbf{x}_0$  es degenerado.

### Funciones de n variables. Extremos locales

**Tma 2.4** Test de la segunda derivada para extremos locales: Sea  $f$  una función de clase  $C^2$  en un entorno de un punto crítico  $\mathbf{x}_0$  ( $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) = 0 \wedge Df(\mathbf{x}_0) = 0$ ). Sea  $Hf(\mathbf{x}_0)$  la matriz Hessiana de  $f$  evaluada en  $\mathbf{x}_0$  y  $H_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ , la secuencia de menores principales de  $Hf(\mathbf{x}_0)$ . Supóngase que  $H_n = \det Hf(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Entonces:

- 1) Si  $H_k > 0, \forall k$ ,  $f$  tiene un **mínimo local** en  $\mathbf{x}_0$ .
- 2) Si  $H_k < 0$  para  $k$  impar y  $H_k > 0$  para  $k$  par,  $f$  tiene un **máximo local** en  $\mathbf{x}_0$ .
- 3) Si no se cumplen ni 1) ni 2),  $f$  tiene un **punto de silla** en  $\mathbf{x}_0$   
 Si  $\det Hf(\mathbf{x}_0) = 0$ , el test no es concluyente ( $\mathbf{x}_0$  degenerado).

### Elementos de topología en $\mathbb{R}^n$

**Definiciones:** Un punto  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  es un *punto interior* de  $D$  si  $\exists r > 0 / B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$ . El conjunto de todos los puntos interiores forman el *interior* de  $D$ . Se dirá que  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  es un *punto frontera* de  $D$  si toda bola  $B(\mathbf{x}_0, r)$  contiene tanto puntos dentro de  $D$  como fuera de  $D$ . El conjunto de todos los puntos frontera se denomina *frontera* o *borde* de  $D$  y se denota  $\partial D$ . Un conjunto es *abierto* si sólo contiene puntos interiores. Un conjunto es *cerrado* si contiene su frontera.

Se dice que un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es *acotado* si  $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \|\mathbf{x}\| < M, \forall \mathbf{x} \in D$ . Un conjunto  $D$  es *no acotado* si no  $\exists$  una bola de radio finito que lo contiene. Un conjunto  $D$  es *compacto* si es cerrado y acotado.

### Funciones de dos variables. Extremos absolutos.

**Definiciones:** Supóngase  $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que un punto  $(a, b) \in D$  es un **máximo (mínimo) absoluto** de  $f$  si  $f(x, y) \leq f(a, b) (f(x, y) \geq f(a, b)), \forall (x, y) \in D$ .

**Tma 2.5 (Tma de Weierstrass):** Sea  $D$  compacto (cerrado y acotado) en  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces  $f$  alcanza en  $\bar{D}$  sus valores máximo y mínimo absolutos ( $f$  está acotada en  $D$ .)

**Estrategia para hallar extremos absolutos en conjuntos compactos:** Sea  $f(x, y)$  una función continua definida en  $D$  compacto en  $\mathbb{R}^2$ , limitado por una curva cerrada suave. Para hallar los extremos absolutos:

- 1) Hallar los puntos críticos de  $f$  en el interior de  $D$ .
- 2) Hallar los puntos críticos de  $f$  en la frontera de  $D$ .
- 3) Calcular el valor de  $f$  en todos los puntos críticos y seleccionar el mayor (o mayores) y menor (o menores) de ellos.

### **2.3 Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.**

Desea obtenerse los extremos de una función de varias variables, por ejemplo,  $f(x, y)$ , cuando  $x$  e  $y$  no son independientes. Es decir, están relacionadas por la ecuación  $g(x, y) = k$  (**ligadura o restricción**).

Maximizar (o minimizar)  $f \Rightarrow$  encontrar el mayor (menor) valor de  $c/f(x, y) = c$  intersecta a  $g(x, y) = k$ . En ese punto (o puntos) las curvas de nivel de  $f$  y  $g$  tienen la misma tangente/normal

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g \Rightarrow \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

**Tma 2.6. Multiplicadores de Lagrange:**

Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$ . Sea  $\mathbf{x}_0 \in A, g(\mathbf{x}_0) = k$  y  $S$  el conjunto de nivel  $g(\mathbf{x}) = k$ . Supóngase que  $\vec{\nabla}(\mathbf{x}_0) \neq \vec{0}$ .

Si  $f|_S$  ( $f$  restringida a  $S$ ) alcanza un máximo o mínimo local de  $S$  en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $\exists \lambda$  tal que:

$$\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) = \lambda \vec{\nabla}g(\mathbf{x}_0)$$

$\lambda \equiv$  multiplicador de Lagrange. La condición  $\vec{\nabla}f = \lambda \vec{\nabla}g$  es necesaria pero no suficiente.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla}f(\vec{x}) = \lambda \vec{\nabla}g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = k \end{array} \right\} n+1 \text{ ecs.} \Rightarrow \lambda \text{ y } \vec{x}_0(\vec{x}_0 \text{ pto. crítico de } f|_S)$$

**Multiplicadores de Lagrange con una restricción**

**El método de los multiplicadores de Lagrange (2 vars.):**

Sean  $f(x, y) \wedge g(x, y)$  diferenciables con  $\vec{\nabla} \neq \vec{0}$  en el conjunto de nivel  $g(x, y) = k$ .

Para determinar los valores extremos locales de  $f$  sujeta a la restricción  $g(x, y) = k$ , si existen:

- (a) Hallar todos los valores de  $x, y \wedge \lambda / \vec{\nabla}f(x, y) = \lambda \vec{\nabla}g(x, y) \wedge g(x, y) = k$
- (b) Evaluar  $f$  en todos los puntos del apartado (a). El mayor/menor valor sera el máximo/mínimo de  $f$ .

**El método de los multiplicadores de Lagrange (n vars., n-1 restricciones):**

Si se desea obtener los extremos de  $f(\vec{x})$  si las variables están sujetas a n-1 restricciones:

$$g_i(\vec{x}) = k_i, i = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$f, g_i$  son funciones  $C^1$ ,  $\vec{\nabla}g_i \nparallel \vec{\nabla}g_j, i \neq j$  ( $\vec{\nabla}g_i$  son linealmente independientes)

$$\Rightarrow \vec{\nabla}f = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{\nabla}g_i \text{ que junto con las ecs. (1) determinan el sistema}$$

### 3 Integrales múltiples

#### 3.1 Integrales dobles sobre un rectángulo.

**Partición de un intervalo:** Sea el intervalo cerrado  $[a,b]$ . El conjunto de puntos  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}/a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  se llama partición de  $[a,b]$ .

La partición  $P$  divide  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos cerrados.

Selección de puntos en  $P : S = \{c_k/c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n\}$

Esté  $f(x)$  definida en  $[a, b] \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$  Esto es la *Suma de Riemann* para  $f$  en  $[a, b]$

**Norma de una partición:** La norma de una partición  $P$  de un intervalo  $[a, b]$ , denotada  $\|P\|$ , es la anchura máxima de todos los subintervalos:  $\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

Sea  $f(x, y) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Y sea el rectángulo  $R \subset A : R \equiv [a, b] \times [c, d] : R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Se realizará una partición de  $R$  en  $n$  partes rectangulares y se seleccionará un punto  $(x_k, y_k)$  en el  $k$ -ésimo sub-rectángulo:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Esto es la *Suma doble de Riemann* de  $f$  en  $R$ .  $\{S_n\} \equiv$  sucesión de sumas de Riemann.

Si la norma de la partición  $\|P\| = \max\{\Delta x_k, \Delta y_k; k = 1, \dots, n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Si el límite no depende de la partición y la selección de puntos  $\rightarrow f$  es **integrable** en  $R$ .

**Integral doble:** Si la sucesión de sumas de Riemann de una función  $f(x, y)$  en  $R$ ,  $\{S_n\}$ , converge a un límite  $S$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $S$  es independiente de la partición de  $R$  y de la selección de puntos de la partición, entonces  $f$  es **integrable** en  $R$  y  $S$  es la **integral doble** en  $R$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

**Volumen como integral doble:** La integral doble de una función  $f(x, y) \geq 0$  en  $R$  es el volumen,  $V_R$ , de la región que está sobre  $R$  y bajo la gráfica de  $f$ :

$$V_R = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

$$\text{Si } f(x, y) = 1 \Rightarrow \iint_R dx dy \equiv A(R) = (b - a)(d - c)$$

**Tma 3.1. Existencia de integrales dobles:** Cualquier función  $f(x, y)$  continua en una región rectangular  $R \equiv [a, b] \times [c, d]$  es integrable en  $R$ .

**Tma 3.2. Integrabilidad de funciones acotadas:** Si  $f(x, y)$  es una función acotada sobre un rectángulo  $R$  y el conjunto de puntos donde es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

**Definición:** Una función  $f(x, y)$  está acotada en  $A \subset \mathbb{R}^2$  si  $\exists M \in \mathbb{R}^+ / |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in A$

**Tma 3.3.:** Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  integrables en  $R$ , se cumple:

- 1) Linealidad:  $\iint_R (f \pm g) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy \pm \iint_R g(x, y) dx dy$
- 2) Homogeneidad:  $\iint_R cf(x, y) dx dy = c \iint_R f(x, y) dx dy \quad c \in R$
- 3) Dominación:  $\iint_R f(x, y) dx dy \geq \iint_R g(x, y) dx dy$  si  $f \geq g \quad \forall (x, y) \in R$   
en particular:  $\iint_R f(x, y) dx dy \geq 0$  si  $f(x, y) \geq 0$  en  $R$
- 4) Aditividad:  $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$
- 5) Desigualdad min-max:  $m \cdot A(R) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq M \cdot A(R)$   
si  $m \leq f(x, y) \leq M$  en  $R$  con  $A(R) = (b - a)(d - c) \equiv$  área de  $R$

**Tma 3.4. Tma de Fubini (1ª forma):** Si  $f(x, y)$  es continua en la región rectangular  $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Caso particular: Si  $f(x, y) = g(x)h(y) \Rightarrow \iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$

### 3.2 Integrales dobles sobre regiones elementales.

Regiones elementales en  $\mathbb{R}^2$ :

- a) **Tipo I:**  $D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x); g_1, g_2$  continuas  $\wedge g_1 \leq g_2$  en  $[a, b]$ .
- b) **Tipo II:**  $D : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y); h_1, h_2$  continuas  $\wedge h_1 \leq h_2$  en  $[c, d]$ .
- c) **Tipo III:** Simultáneamente de los dos tipos o una combinación de ambos.

Sea  $D$  una región acotada en  $\mathbb{R}^2 \wedge f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $D$ . Se define:

$$f^* : R \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$f^*$  es continua en  $R$ , excepto quizás en  $\partial D$ , que es un dominio de medida nula (en  $\mathbb{R}^2$ ).

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f^*(x, y)dxdy \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_R f(x, y)dxdy \equiv V \\ \text{Si } f(x, y) = 1 \Rightarrow \iint_R f(x, y)dxdy \equiv A(D) \end{cases}$$

**Tma 3.5. Tma de Fubini (2ª forma)(integrales iteradas):** Si  $f(x, y)$  es continua en una región  $D$ , entonces:

- 1) Si  $D$  es de **tipo I**:  $D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

- 2) Si  $D$  es de **tipo II**:  $D : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

#### Orden de integración

Si la región es de tipo III (simultáneamente tipo I y II)  $\Rightarrow$  puede integrarse primero en  $y$  y luego en  $x$ , o viceversa. Pero el orden de integración puede hacer la integral más o menos sencilla.

### 3.3 Cambio de variable en la integral doble. Coordenadas polares.

#### Cambio de variable

Es, en general, una función de clase  $C^1$  e inyectiva (invertible):

$$\begin{aligned} T : D^* &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

Una aplicación  $T$  es inyectiva en  $D^*$  si para  $(u, v), (u', v') \in D^*, T(u, v) = T(u', v')$  implica:  
 $u = u' \wedge v = v'$

$$\text{Jacobiano : } J(T) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(D(T)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

#### Tma 3.6: Cambio de variable para integrales dobles

Sean  $D$  y  $D^*$  regiones elementales en  $\mathbb{R}^2$  y  $T : D^* \rightarrow D$  una función de clase  $C^1$  e inyectiva en  $D^*$  (salvo quizás en un subdominio de medida cero) y tal que  $D = T(D^*)$ . Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $D$ , entonces:

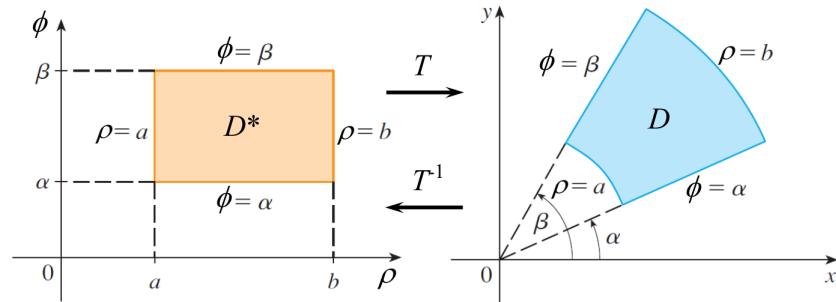
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{D^*} (f \circ T)(u, v) dA'$$

#### Coordenadas polares

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \phi) &\rightarrow (x, y) \end{aligned} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho > 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi$$

#### geometría de la transformación



### 3.4 Integrales triples.

#### Integral triple de una caja (paralelepípedo rectangular)

Sea  $f(x, y, z) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Y sea la caja  $B \subset A : B \equiv [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$   
 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$

Partición de  $B$  en  $n$  sub-cajas y se selecciona un punto  $(x_k, y_k, z_k)$  en la  $k$ -ésima sub-caja:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$

#### Propiedades de la integral triple en ua caja

- Las funciones continuas en  $B$  son integrables.
- Las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en funciones continuas son integrables.
- Se cumplen todas las propiedades básicas (T<sup>ma</sup> 3.3).

**T<sup>ma</sup> 3.7. T<sup>ma</sup> de Fubini (reducción a integrales iteradas):** Si  $f(x, y, z)$  es continua en  $B : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q$  entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz = \dots$$

#### Integrales triples en regiones elementales

Sea  $E$  una región acotada en  $\mathbb{R}^3$  y  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Se define  $f^* : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B$  una caja cualquiera /  $E \subset B \Rightarrow f^*(x, y, z) \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in E \\ 0 & (x, y, z) \notin E \end{cases}$   
 $f^*$  es continua en  $B$ , salvo quizá en  $\partial E$ , que es un dominio de medida nula en  $\mathbb{R}^3$ .

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz$$

Si  $f(x, y, z) \geq 0 \Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow$  volumen en  $\mathbb{R}^4$

Si  $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \iiint_E dx dy dz \equiv V(E)$

### Regiones elementales en $\mathbb{R}^3$

- a) **Tipo I**:  $E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ , es decir :
- $$E = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$
- o bien
- $$E = \{E = (x, y, z) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$
- b) **Tipo II** : como las de tipo I, pero intercambiando  $x \leftrightarrow z$
- c) **Tipo III** : como las de tipo I, pero intercambiando  $y \leftrightarrow z$
- d) **Tipo IV** : simultáneamente de tipo I,II y III (o combinaciones)

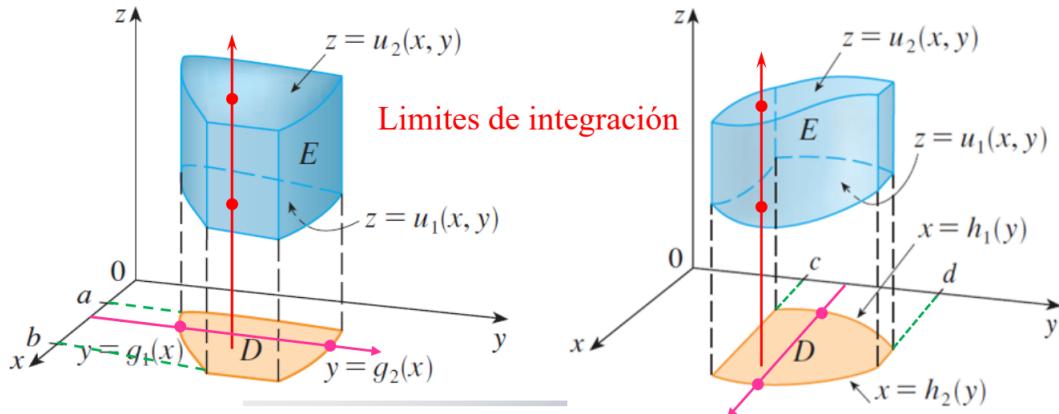
### Integrales triples sobre regiones elementales

**Tma 3.8: Tma de Fubini (integrales iteradas):** Si  $f(x, y, z)$  es continua en una región  $E$  de tipo I, entonces:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

o bien:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$



### 3.5 Cambio de variable en la integral triple. Coordenadas cilíndricas y esféricas.

#### Cambio de variable en $\mathbb{R}^3$

$T$  es una función de clase  $C^1$  e inyectiva (invertible):

$$T : E^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

$T$  es invertible si  $J(T) \neq 0$  ( $T^{ma}$  de la función inversa)

$$J(T) \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det(D(T)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

#### T<sup>ma</sup> 3.9: Cambio de variable para integrales triples

Sean  $E$  y  $E^*$  regiones elementales en  $\mathbb{R}^3$  y  $T : E^* \rightarrow E$  una función de clase  $C^1$  e inyectiva en  $E^*$  (salvo quizás en un subdominio de medida cero) y tal que  $E = T(E^*)$ . Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $E$ , entonces:

$$\iiint_E f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{E^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

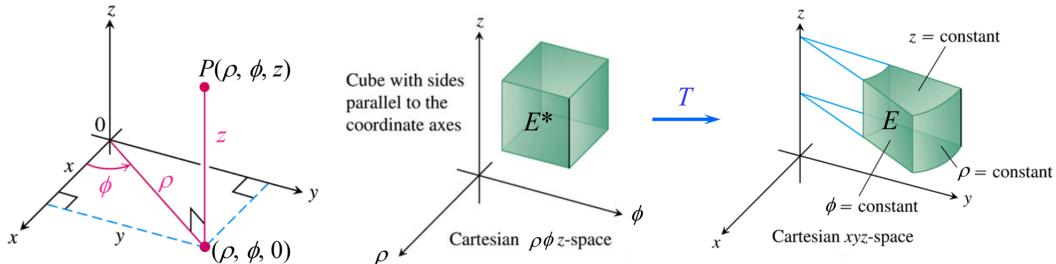
#### Coordenadas cilíndricas

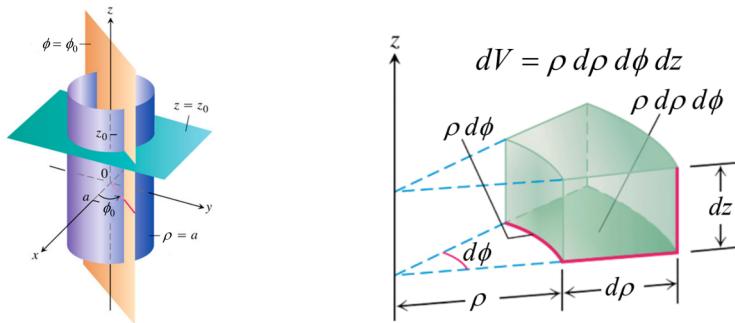
$$T : E^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow E \subset \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \phi, z) \rightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho > 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Jacobiano:  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho \Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{E^*} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho d\rho d\phi dz$

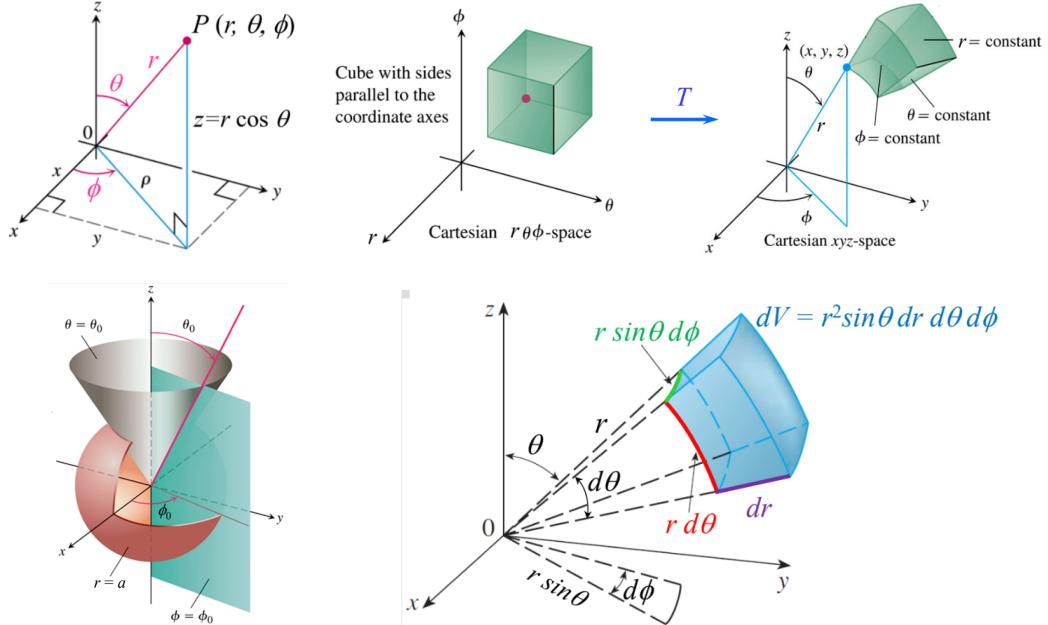




## Coordenadas esféricicas

$$T : E^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow E \subset \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & r \geq 0 \\ y = r \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi] \\ z = r \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

Jacobiano:  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta \Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E^*} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$



**3.6 Aplicaciones de las integrales múltiples.****Valor promedio de funciones**

$$f(x) : [a, b] \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}$$

$$f(x, y, z) : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E dx dy dz}$$

**Centros de masas****Figuras planas**

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x dm \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y dm \quad \text{con } M = \iint_D dm \quad , \quad dm = \sigma(x, y) dx dy$$

donde  $\sigma(x, y) \equiv$  densidad superficial de masa**Figuras tridimensionales**

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E x dm \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E y dm \quad ; \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E z dm \quad ; \quad M = \iiint_E dm$$

donde  $dm = \delta(x, y, z) dx dy dz$  y  $\delta(x, y, z) \equiv$  densidad volumétrica de masa**Momentos de inercia****Figuras planas**

$$I_x = \iint_D y^2 dm = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dx dy \quad ; \quad I_y = \iint_D x^2 dm = \iint_D x^2 \sigma(x, y) dx dy$$

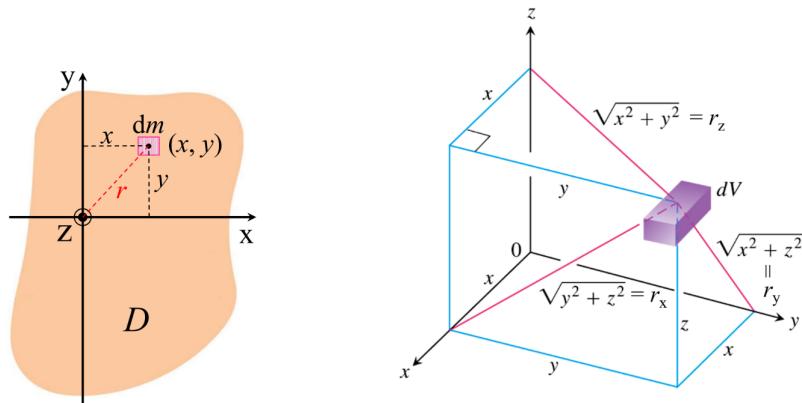
$$I_z = \iint_D (x^2 + y^2) dm = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy = I_x + I_y$$

**Figuras tridimensionales**

$$I_x = \iiint_E r_x^2 dm = \iiint_E (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_y = \iiint_E r_y^2 = \iiint_E (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_z = \iiint_E r_z^2 = \iiint_E (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$



## 4 Campos vectoriales. Cálculo vectorial

### 4.1 Campos vectoriales.

**Campo vectorial:** Un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $\tilde{\mathbf{F}} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada punto  $\mathbf{x} \in A$  un vector  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$

$n = 2 \Rightarrow$  Campo vectorial en el plano:  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$

$n = 3 \Rightarrow$  Campo vectorial en el espacio:  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

Un campo vectorial es de clase  $C^k$  si cada componente es una función de clase  $C^k$  ( $\exists$  todas sus derivadas parciales hasta orden  $k$  y son continuas).

De aquí en adelante, todos los campos vects. son de al menos clase  $C^1$ .

#### Campos vectoriales gradiente:

Aquellos que pueden expresarse como el gradiente de una función escalar de clase  $C^1$  (diferenciable)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . En el caso tridimensional:

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = \vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$f \equiv$  función potencial de  $\tilde{\mathbf{F}}$  o potencial escalar

$\tilde{\mathbf{F}}$  tiene en cada punto la dirección de máximo crecimiento de  $f$  y magnitud la derivada direccional de  $f$  en esa dirección (Tma 1.2)

$\tilde{\mathbf{F}} \perp$  en cada punto a los conjuntos de nivel (sup. en  $\mathbb{R}^3$ ) de  $f$  (Tma 1.3).  $\tilde{\mathbf{F}}$  es  $\perp$  a las supers. equipotenciales ( $f = \text{cte}$ ).

**Líneas de campo (flujo):** Si  $\tilde{\mathbf{F}}$  es un campo vectorial, una línea de campo (flujo) es una trayectoria  $\tilde{\mathbf{r}}(t)/\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}(t))$ . Es decir,  $\tilde{\mathbf{F}}$  da el campo de velocidades de la trayectoria  $\mathbf{r}(t)$ .

Son soluciones de un **sistema de ecs. difs.:**

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k} ; \quad \text{si } \tilde{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ es línea de campo}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{r}}'(t) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = M(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = N(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = P(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

## 4.2 Operadores diferenciales.

### Operador nabla

Se define como el operador vectorial en  $\mathbb{R}^3$  : 
$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

El gradiente es el operador nabla actuando sobre una función escalar  $f$  y que da como resultado un vector:

$$\Rightarrow \text{en } \mathbb{R}^3 : \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

#### Divergencia de un campo vectorial:

Si  $\tilde{\mathbf{F}} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = M \vec{i} + N \vec{j} + P \vec{k}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , la divergencia de  $\tilde{\mathbf{F}}$  es el campo escalar:

$$\text{div} \tilde{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Es decir, la divergencia de  $\tilde{\mathbf{F}}$  es el producto escalar del operador nabla por  $\tilde{\mathbf{F}}$ .

Si un campo tiene **divergencia nula**, como el CM, se denomina *solenoidal*.

**Interpretación:** Si  $\tilde{\mathbf{F}}$  es el campo de velocidades de un fluido,  $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}$  representa la razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del fluido (en el plano, razón de expansión del área). Si  $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} < 0$ , el fluido se está comprimiendo.

#### Rotacional de un campo vectorial:

Si  $\tilde{\mathbf{F}} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = M \vec{i} + N \vec{j} + P \vec{k}$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , el rotacional de  $\tilde{\mathbf{F}}$  es el campo vectorial:

$$\begin{aligned} \text{rot} \tilde{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Si un campo tiene **rotacional nulo**, como el CE, se denomina *irrotacional*

**Rotacional escalar:** Si  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$

**Interpretación del rotacional:**

**El rotacional y las rotaciones:** Sea un sólido rígido  $B$  que gira en torno al eje z:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} = -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} = 2\tilde{\omega}$$

El rotacional del campo de velocidades es un campo vectorial con dirección el eje de rotación y magnitud el doble de la velocidad angular.

**El rotacional y las rotaciones en un flujo de un fluido:** Si un campo vectorial representa el flujo de un fluido,  $\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}$  en  $P$  es el doble de  $\omega$  de un pequeño sólido que rota como el fluido en  $P$ . Si  $\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$  en  $P$ , el fluido está libre de rotaciones en  $P$  (no tiene remolinos). El campo es **irrotacional**.

**Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (vacío)**

**Campos variables con el tiempo**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

**Campos estáticos (no dependientes del tiempo)**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

**Operador laplaciano**

Es un operador de segundo orden, definido como:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Puede actuar sobre funciones escalares o vectoriales (clase  $C^2$ ):

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ; \quad \Delta \tilde{\mathbf{F}} = \nabla^2 \tilde{\mathbf{F}} = \Delta F_x \hat{i} + \Delta F_y \hat{j} + \Delta F_z \hat{k}$$

**Tma 4.1: Los campos gradiente son irrotacionales:**

Sea  $f$  una función escalar de clase  $C^2$ , entonces:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

**Tma 4.2: Los rotacionales tienen divergencia nula (son solenoides):**

Sea  $\tilde{\mathbf{F}}$  un campo vectorial de clase  $C^2$ , entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = 0$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

**Propiedades de los operadores diferenciales:**

1.  $\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.  $\vec{\nabla}(cf) = c\vec{\nabla}f, \quad c = \text{cte}$
3.  $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
4.  $\vec{\nabla}(f/g) = (g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g)/g^2, \quad \forall \mathbf{x}/g(\mathbf{x}) \neq 0$
5.  $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{G}}) = \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$
6.  $\vec{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{G}}) = \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} + \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{G}}$
7.  $\vec{\nabla} \cdot (f\tilde{\mathbf{F}}) = f(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nabla}f$
8.  $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{F}} \times \tilde{\mathbf{G}})$
9.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = 0$
10.  $\vec{\nabla} \times (f\tilde{\mathbf{F}}) = f(\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) + (\vec{\nabla}f) \times \tilde{\mathbf{F}}$
11.  $\vec{\nabla}(\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}) = (\tilde{\mathbf{F}}\vec{\nabla})\tilde{\mathbf{G}} + (\tilde{\mathbf{G}}\vec{\nabla})\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{\mathbf{G}} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}})$
12.  $\vec{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{F}} \times \tilde{\mathbf{G}}) = \tilde{\mathbf{F}}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{G}}) - \tilde{\mathbf{G}}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + (\tilde{\mathbf{G}} \cdot \vec{\nabla})\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} - (\tilde{\mathbf{F}} \times \vec{\nabla})\tilde{\mathbf{G}}$
13.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) - \nabla'' \tilde{\mathbf{F}}$
14.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) = \vec{0}$
15.  $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\vec{\nabla}f\vec{\nabla}g$
16.  $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) = f\nabla^2g - g\nabla^2f$

Siendo  $\tilde{\mathbf{F}}$  y  $\tilde{\mathbf{G}}$  funciones vectoriales,  $f$  y  $g$  funciones escalares (todas de clase  $C^1$  o  $C^2$ ) y  $\vec{\nabla}$  el operador nabla.

### 4.3 Coordenadas curvilíneas. Vectores y operadores.

#### Vectores: coordenadas polares

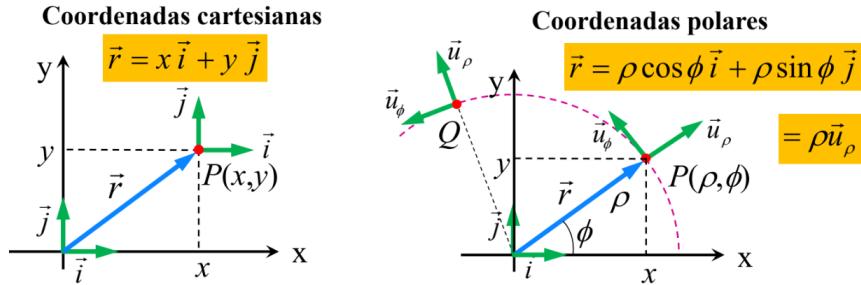
##### Coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(x+h, y) - \vec{r}(x, y)}{h} \Rightarrow \vec{i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} ; \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$$

$\vec{i}$   $\perp$  líneas  $x = \text{cte}$ , sentido: incremento de  $x$  ;  $\vec{j} \perp$  líneas  $y = \text{cte}$ , sentido: incremento de  $y$

##### Coordenadas polares

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} = \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{u}_\rho = \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} ; \quad \vec{u}_\phi = \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$



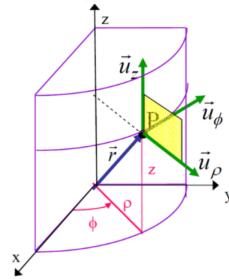
Si se desea representar un vector  $\vec{A}$  en coords. cartesianas,  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ ,  $A_x$  y  $A_y$  no dependen del punto  $P(x, y)$  en el que el vector se halle, mientras que en coords. polares  $\vec{A} = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\phi \vec{u}_\phi$ , donde  $A_\rho$  y  $A_\phi$  si dependen del punto  $P(\rho, \phi)$ .

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \\ \vec{u}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \cos \phi \vec{u}_\rho - \sin \phi \vec{u}_\phi \\ \vec{j} = \sin \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{pol} = M \vec{A}_{car} \\ \vec{A}_{car} = M^{-1} \vec{A}_{pol} \end{cases}$$

### Vectores: coordenadas cilíndricas



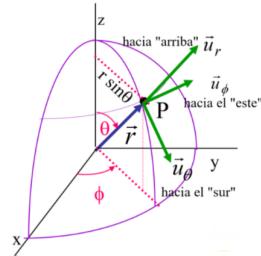
$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi) \\ z = z & z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} + z \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\phi = \rho \\ h_z = 1 \end{cases}$$

Vectores unitarios:  $\vec{u}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$  ;  $\vec{u}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$  ;  $\vec{u}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$

$$\vec{i} = \cos \phi \vec{u}_\rho \vec{h}_o - \sin \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{j} = \sin \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{k} = \vec{u}_z$$

Vector de pos. en cilíndricas:  $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$  ; Tranf. vects:  $\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

### Vectores: coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & r \geq 0 \\ y = r \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi] \\ z = r \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{z}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} h_r = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_\phi = r \sin \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Vectores unitarios: } \vec{u}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} ; \quad \vec{u}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

$$\vec{i} = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{u}_\theta - \sin \phi \vec{u}_\phi ; \quad \vec{j} = \sin \theta \sin \phi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{u}_\theta + \cos \phi \vec{u}_\phi ; \quad \vec{k} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{Vector de pos. en esféricas: } \vec{r} = r \vec{u}_r ; \quad \text{Tranf. vects: } \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

### Operadores diferenciales: coords. cartesianas

A partir de ahora,  $\Psi \equiv$  campo escalar,  $\vec{A} \equiv$  campo vectorial, ambos de clase  $C^1$  o  $C^2$ .  
 $\Psi = \Psi(x, y, z) ; \quad \vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{k} ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

### Operadores diferenciales: coords. cilíndricas

$$\Psi = \Psi(\rho, \phi, z) ; \quad \vec{A} = A_\rho(\rho, \phi, z)\vec{u}_\rho + A_\phi(\rho, \phi, z)\vec{u}_\phi + A_z(\rho, \phi, z)\vec{u}_z$$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{u}_z ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho \vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

**Operadores diferenciales: coords. esféricas**

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \phi) ; \quad \vec{A} = A_r(r, \theta, \phi) \vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \vec{u}_\theta + A_\phi(\rho, \phi, z) \vec{u}_\phi$$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & r \sin \theta \vec{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

## 5 Integrales curvilíneas y de superficie

### 5.1 Integrales de línea.

**Definición 5.1.1:** Una trayectoria  $\vec{r}(t)$  en  $\mathbb{R}^n$  es de **clase  $C^1$**  si es continua  $\forall t \in [a, b]$ . Es de **clase  $C^1$  a trozos** si  $[a, b]$  se puede dividir en subintervalos, en cada uno de los cuales  $\vec{r}(t)$  es de clase  $C^1$ .

**Definición 5.1.2:** Si  $C$  es una curva parametrizada por  $\vec{r}(t)$ , es una **curva suave** si  $\vec{r}(t)$  es de clase  $C^1$  y  $\vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ . Una curva formada por curvas suaves unidas de manera continua se llama **curva suave a trozos**.

$C$  es suave si  $x(t), y(t), z(t)$  tienen primeras derivadas continuas que no se anulan simultáneamente.

**Definición 5.1.3:** Un desplazamiento infinitesimal o **elemento de línea** a lo largo de una trayectoria  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  de clase  $C^1$  es:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \left( \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) dt = \vec{r}'(t)dt$$

y su longitud

$$ds = \|d\vec{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \|\vec{r}'(t)\|dt$$

#### Elementos de línea en cartesianas, cilíndricas y esféricas

$$\text{cartesianas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\text{cilíndricas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz = h_\rho d\rho \vec{u}_\rho + h_\phi d\phi \vec{u}_\phi + h_z dz \vec{u}_z = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z$$

$$\text{esféricas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}d\phi = h_r dr \vec{u}_r + h_\theta d\theta \vec{u}_\theta + h_\phi d\phi \vec{u}_\phi = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi$$

#### Integral de línea de una función escalar

**Definición 5.1.4:** Sea  $C$  una curva suave, parametrizada por la trayectoria  $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $f(x, y, z)$  una función escalar en  $\mathbb{R}^3$  continua /  $f(\vec{r}(t))$  es continua en  $[a, b]$ . La **integral de  $f$  a lo largo de  $C$**  es:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

La integral de línea de una función **no depende de la parametrización**, sólo de la curva  $C$

Si  $C$  es una **curva suave a trozos** con  $n$  trozos:  $\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$

Si  $f = 1 \Rightarrow$  **longitud de  $C$** :  $L = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$

Si  $f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \int_C f(x, y) ds \equiv$  Área de la valla de altura  $f(x, y)$  y perfil dado por  $C$ .

### Masa, centro de masas y momentos de inercia de figuras filiformes

Masa:  $M = \int_C dm$  ,  $dm = \lambda ds$  ,  $\lambda(x, y, z) \equiv$  densidad lineal de masa.

Centro de masa:  $x_{CM} = \frac{1}{M} \int_C x \lambda ds$  ;  $y_{CM} = \frac{1}{M} \int_C y \lambda ds$  ;  $z_{CM} = \frac{1}{M} \int_C z \lambda ds$

Momentos de inercia:  $I_x = \int_C (y^2 + z^2) \lambda ds$  ;  $I_y = \int_C (x^2 + z^2) \lambda ds$  ;  $I_z = \int_C (x^2 + y^2) \lambda ds$

### Integral de línea de un campo vectorial

**Definición 5.1.5:** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ , con componentes continuas definidas a lo largo de una curva suave  $C$ , parametrizada por la trayectoria  $\vec{r}: t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ . La **integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$**  es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Sea  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \equiv$  vec. uni. tgte. a la trayec:  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

O en función de los componentes:  $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

Si  $C$  es **cerrada** ( $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ ):  $\int_C \vec{F} dr \equiv \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

**Definición 5.1.6:** Una curva simple  $C$  es una curva parametrizada por una trayectoria  $\vec{r}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$  de clase  $C^1$  a trozos e **inyectiva** en  $[a, b]$ , es decir, la curva **no se corta a sí misma**. Si los extremos coinciden ( $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ ) y es inyectiva en  $(a, b)$ , es una **curva cerrada simple**.

**curva simple orientada** (abierta o cerrada)  $\Rightarrow \int_{-C} \vec{F} dr = - \int_C \vec{F} dr$ .

La integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva simple  $C$  **no depende de la parametrización**, sólo de la **orientación** (signo)

**T<sup>ma</sup> 5.1.1: T<sup>ma</sup> fundamental de las integrales de línea:** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar de clase  $C^1$ , definida sobre una curva suave (a trozos)  $C$ , imagen de una trayectoria  $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se cumple:

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Si  $\vec{F}$  es un **campo gradiente**,  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$  ( $f \equiv$  función potencial)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

es **independiente del camino**  $\Rightarrow \vec{F}$  conservativo

### Campos conservativos

**T<sup>ma</sup> 5.1.2:** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ , excepto tal vez en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) Para cualquier curva orientada cerrada y simple:  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .
- ii) Para dos curvas orientadas simples cualesquiera  $C_1 \wedge C_2$  con los mismos extremos:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

iii)  $\vec{F}$  es un campo gradiente,  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ .

iv)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ .

Un campo vectorial que satisface una de (y por tanto, todas) las condiciones anteriores se denomina **campo conservativo**.

**Corolario T<sup>ma</sup> 5.1.2:** Si  $\vec{F} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  es un campo vectorial  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ , si y sólo si se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Este Corolario puede ser falso incluso si  $\vec{F}$  no es  $C^1$  en un único punto.

**T<sup>ma</sup> 5.1.3:** Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ , entonces  $\exists$  campo vectorial  $\vec{G}$  de clase  $C^1$  de modo que  $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$

En este caso el campo  $\vec{F}$  no puede tener puntos excepcionales, a diferencia de como sí está permitido en el T<sup>ma</sup> 5.1.2

**Forma diferencial exacta:**

**Definición:** Cualquier expresión del tipo  $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$  se denomina *forma diferencial*. Una forma diferencial es *exacta* en una región  $D$  si:

$$Mdx + Ndy + Pdz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

para alguna función escalar  $f$ , de clase  $C^1$  en  $D$ .

$$Mdx + Ndy + Pdz = df \iff \vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k} \text{ es conservativo} \iff \vec{F} = \vec{\nabla}f$$

## 5.2 Integrales de superficie.

**Parametrización de superficies:**

Una *parametrización de una superficie* es una función vectorial continua  $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida como:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

cuya imagen es la *superficie*  $S: S = \vec{r}(D)$ . Las variables  $u$  y  $v$  son los parámetros y  $D$  su dominio de variación. Si  $\vec{r}$  es de clase  $C^1$  (diferenciable) se dice que  $S$  es una *superficie de clase  $C^1$  (diferenciable)*.

Las ecuaciones:  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$  con  $(u, v) \in D \Rightarrow$  se denominan **ecuaciones paramétricas de  $S$** .

**Vectores tangentes a una superficie parametrizada:**

Sea  $S$  de clase  $C^1$  parametrizada por  $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$  y sean  $C_1 : \vec{r}(u, v_0)$ ,  $C_2 : \vec{r}(u, v)$  y  $P_0 = (u_0, v_0)$

$$\vec{r}_u = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial u} \right|_{u=u_0} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{k} \quad \text{tangente a } C_1 \text{ en } P_0$$

$$\vec{r}_v = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial v} \right|_{v=v_0} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{k} \quad \text{tangente a } C_2 \text{ en } P_0$$

$S$  es *suave* en  $P_0$  si  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$  en  $P_0$ , de modo que se *puede definir el plano tangente* a  $S$  en  $P_0$ . Se dice que  $S$  es suave si lo es en todos sus puntos

**Área de una superficie parametrizada:** Sea una superficie suave  $S$ , parametrizada por

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad ; \quad (u, v) \in D$$

de clase  $C^1$  e inyectiva en  $D$ , entonces el área de  $S$  se define como:

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv$$

**Área de una superficie dada como gráfica de  $f(x, y)$ :**

Sea  $f(x, y)$  diferenciable,  $x$  e  $y$  parámetros:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k} \quad ; \quad (x, y) \in D \implies \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \neq 0$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

**Integrales de funciones escalares sobre funciones:** Si  $f(x, y, z)$  es una función escalar ( $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ) continua, definida sobre una superficie suave  $S$ , parametrizada por  $\vec{r}(u, v)$ , se define la **integral de  $f$  sobre  $S$**  como:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv$$

**Masa, centro de masas y momentos de inercia de figuras superficiales (no planas)**

$$M = \iint_S dm, \quad dm = \sigma dS \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S x \sigma dS \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S y \sigma dS \quad ; \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S z \sigma dS$$

$$\text{Momentos de Inercia: } I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dS \quad ; \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \sigma dS \quad ; \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma dS$$

**Superficies orientadas:** Una superficie suave  $S$  es **orientable** (o de **dos lados**) si es posible definir un campo de vectores unitarios normales  $\vec{n}$  en  $S$  que varía continuamente con la posición.

$$\text{Si } S \text{ está parametrizada por } \vec{r}(u, v) \Rightarrow \vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

$$\text{Si } S \text{ viene dada por } z = f(x, y) \Rightarrow \vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}}$$

**Integrales de campos vectoriales sobre superficies:** Sea  $\vec{F}(x, y, z)$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , con componentes continuas definidas sobre una superficie suave  $S$ , parametrizada por  $\vec{r}(u, v)$ . La **integral de superficie de  $\vec{F}$  sobre  $S$ :**

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

También se le llama **flujo** de  $S$ .

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie  $S$  no depende de la parametrización, sólo de la orientación (signo de  $\vec{n}$ ).

#### Elementos de superficie en cartesianas, cilíndricas y esféricas:

$$\text{Cartesianas: } d\vec{S} = d\vec{S}_{yz} + d\vec{S}_{xz} + d\vec{S}_{xy} = dydz\vec{i} + dxdz\vec{j} + dxdy\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Cilíndricas: } d\vec{S} &= d\vec{S}_{\phi z} + d\vec{S}_{\rho z} + d\vec{S}_{\rho\phi} = h_\phi h_z d\phi dz \vec{u}_\rho + h_\rho h_z d\rho dz \vec{u}_\phi + h_\rho h_\phi d\rho d\phi \vec{u}_z \\ &= \rho d\phi dz \vec{u}_\rho + d\rho dz \vec{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esféricas: } d\vec{S} &= d\vec{S}_{\theta\phi} + d\vec{S}_{r\phi} + d\vec{S}_{r\theta} = h_\theta h_\phi d\theta d\phi \vec{u}_r + h_r h_\phi dr d\phi \vec{u}_\theta + h_r h_\theta dr d\theta \vec{u}_\phi \\ &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r + r \sin \theta dr d\phi \vec{u}_\theta + r dr d\theta \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

**Interpretación física del flujo de un campo vectorial:** Si  $\vec{F} \equiv \vec{v}$  es un campo de velocidades de un fluido y  $S$  una superficie imaginaria que atraviesa dicho fluido:

En un tiempo  $dt$  el volumen de fluido que atraviesa  $dS$  es:  $dV = h d\vec{S} = \vec{v} \cdot \vec{n} dt dS$

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \vec{v} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{volumen de fluido que atraviesa } dS \text{ por unidad de tiempo}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \equiv \text{tasa neta de fluido que atraviesa } S \text{ (caudal)}$$

En otros casos, como campos eléctricos o magnéticos, el flujo del campo a través de una superficie puede interpretarse como la densidad de líneas de campo que atraviesan dicha superficie.

### 5.3 T<sup>ma</sup> de Green en el plano.

**T<sup>ma</sup> 5.3.1, T<sup>ma</sup> de Green:** Sea  $D$  una región simple del plano y  $C$  la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región  $D$ . Si  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $D$ , se cumple:

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \oint_C M dx + N dy = \iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

Si  $\tilde{\mathbf{F}}$  conservativo  $\Rightarrow$  el T<sup>ma</sup> de Green implica  $\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = 0$

Si  $C$  es una curva cerrada simple que acota una región  $D$  en el plano, en la que es aplicable el T<sup>ma</sup> de Green, el área de  $D$  es:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

**T<sup>ma</sup> 5.3.2, T<sup>ma</sup> de Green (forma tangencial):** Sea  $D$  una región simple del plano y  $C$  la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región  $D$ .

Si  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $D$ :

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \vec{k} dA$$

La circulación de  $\tilde{\mathbf{F}}$  a lo largo de  $C$  es igual al flujo del rotacional de  $\tilde{\mathbf{F}}$  a través de la superficie plana  $D$ , delimitada por  $C$ .

**T<sup>ma</sup> 5.3.3, T<sup>ma</sup> de Green (forma normal):** Sea  $D$  una región simple del plano y  $C$  la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región  $D$ .

Si  $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en  $D$  y  $\vec{n}$  la normal unitaria externa a  $C$ :

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds = \iint_D (\vec{\nabla} \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \vec{k} dA$$

La circulación de la componente normal de  $\tilde{\mathbf{F}}$  a lo largo de  $C$  es igual a la integral doble de la divergencia de  $\tilde{\mathbf{F}}$  en la región plana  $D$ , delimitada por  $C$ .

## 5.4 T<sup>ma</sup> de Stokes

### Orientación de una curva frontera de una superficie orientada:

Sea  $S$  una superficie orientada con vectores unitarios normales  $\tilde{\mathbf{n}}$ . La orientación de  $S$  induce una **orientación positiva de la curva frontera  $C$** : si una persona recorre la curva  $C$  en sentido positivo de manera que el vector normal señala hacia arriba (de pies a cabeza), entonces la superficie quedará siempre a la izquierda.

**T<sup>ma</sup> de Stokes:** Sea  $S$  una superficie orientada (suave a trozos) cuya frontera es una curva cerrada simple  $C$  (suave a trozos) con orientación positiva. Sea  $\tilde{\mathbf{F}}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en una región abierta en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $S$ . Se cumple:

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$$

Esta es la forma tangencial del T<sup>ma</sup> de Green, el caso particular del T<sup>ma</sup> de Stokes en  $\mathbb{R}^2$

$$\text{Si } \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = 0$$

La circulación de  $\tilde{\mathbf{F}}$  a lo largo de  $C$  es igual al flujo del rotacional de  $\tilde{\mathbf{F}}$  a través de cualquier superficie  $S$  cuya frontera es  $C$  (siempre que  $\tilde{\mathbf{F}}$  esté bien definido sobre  $S$ ).

### Ejemplos en física: Campo Magnético, Leyes de Ampère y Faraday:

Campo magnetostático (en el vacío) creado por una densidad de corriente  $\vec{J}$ :  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Si se aplica el **T<sup>ma</sup> de Stokes**:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}$

Por otra parte para campos variables con el tiempo:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Si se aplica el **T<sup>ma</sup> de Stokes**:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

## 5.5 T<sup>ma</sup> de Gauss-Ostrogradski.

**Frontera:** superficie cerrada unión finita de superficies (máximo 6, mínimo 2) descritas por gráficas de funciones de 2 variables.

**T<sup>ma</sup> de Gauss-Ostrogradski (T<sup>ma</sup> de la divergencia):**

Sea  $E$  una región elemental (simple) en  $\mathbb{R}^3$  cuya frontera es una superficie  $S$  cerrada (suave a trozos) y orientada (orientación positiva hacia fuera). Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en una región abierta en  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $E$ . Se cumple:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} dV$$

El flujo de un campo vectorial  $\vec{F}$  a través de una superficie  $S$  es igual a la integral de la divergencia de  $\vec{F}$  en el volumen encerrado por  $S$ .

$$\text{Si } \nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

Campo **solenoidal**  $\Rightarrow$  flujo nulo a través de cualquier superficie cerrada.

**Ejemplos en física:**

$\Rightarrow$  Líneas de campo cerradas: **Campo magnético:**  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

**Campo eléctrico. Ley de Gauss:**

Campo eléctrico (en el vacío) creado por una densidad de carga  $\rho$ :  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$   
 Si se aplica el **T<sup>ma</sup> de Gauss-Ostrogradski**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dV = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$