UNIVERSITAT DE VALÉNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

MÉTODOS MATEMÁTICOS II

Apuntes Métodos Matemáticos II

Alumno:
Navarro Bonanad, Rubén

Profesor:
González Alonso, Martín

Grupo BL3

Curso 2024 - 2025

Índice

1 Números complejos

1.1 Motivación histórica/intuitiva

$$N+2=0? \;\rightarrow\; \mathbb{Z}; \quad 4N=3? \;\rightarrow\; \mathbb{Q}; \quad x^2=2? \;\rightarrow\; \mathbb{R}; \quad x^2+1=0?$$

- Pueden definirse unos nuevos números $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$

  donde i es una cantidad tal que $i^2 = -1$. Usando estos números puede demostrarse que $z^2+1=0$ sí tiene solución (y cualquier ec. polinómica con coeficientes complejos!)

- Históricamente, la ecuación de 3^{r} grado fue la que motivó la introducción de los complejos.

1.2 Definición matemática y propiedades

Se define el *conjunto de los números complejos* ($\mathbb{C}$) como el conjunto de pares ordenados de números reales $z = (x, y)$, sobre el cual se define:

Forma binómica:

$$\left.\begin{array}{l} e \equiv (1,0) = 1 \\ i \equiv (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \; z = (x,y) = ex + iy = x + iy$$

- En esta notación el producto de complejos se construye como el de los reales con la precaución de usar siempre $i^2 = -1$

  $$z_1 \cdot z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = \cdots = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \qquad z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

- $(\mathbb{C}, +)$ **forma una grupo abeliano**

  a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
  b) Prop. asociativa: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$
  c) Existe elemento neutro: $e_+ = (0,0) \equiv 0 : e_+ + z = z + e_+ = z$
  d) Existe elemento simétrico $\forall z : z + (-z) = (-z) + z = e_+ = 0$ (resta: $z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-z_2)$)
  e) Propiedad conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

- $(\mathbb{C} - \{0\}, +)$ **forma un grupo abeliano**. Todo igual que en el caso anterior salvo:

  - Elemento neutro: $e_. = (1,0) \equiv 1$
  - Elemento simétrico (o "inverso"): $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ (división: $z_1/z_2 \equiv z_1 \cdot (z_2)^{-1} (\forall z_2 \neq 0)$)

- **Propiedad distributiva del producto sobre la suma:** $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

Se concluye entonces que $(C, +, \cdot)$ cumple las propiedades de un cuerpo.

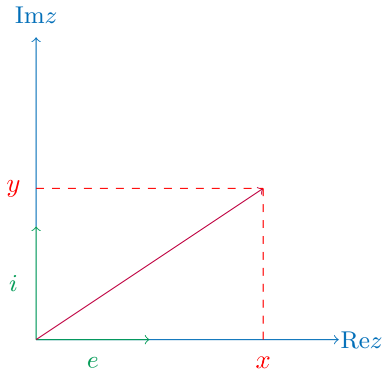
No existe forma de ordenar $\mathbb{C}$ compatible con la suma y producto: $3 \not< 290i$

1.3 Representación de los números complejos

$$z = x + iy = xe + yi = x(1,0) + y(0,1) \tag{1.3.1}$$

Puede representarse z por medio de un vector en un espacio vectorial de dim. 2 usando la b.o.n. $\{e, i\}$.

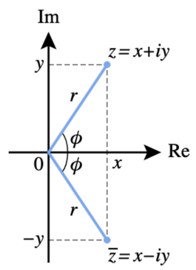
Las coordenadas en esta base son $z = (x, y) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$



- **Complejo conjugado**: dado $z = x + iy$

$$z^* \equiv x - iy \equiv \bar{z}$$

y sus propiedades son las siguientes:



- $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$
- $\mathrm{Re}(z) = x\dfrac{z+z^*}{2}, \mathrm{Im}(z) = y = \dfrac{z-z^*}{2i}$

- La definición de **módulo** del complejo $z = x + iy$ es

$$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \equiv r \equiv \rho$$

y sus propiedades son los siguientes

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 \pm z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$
- $z^{-1} = \dfrac{x - iy}{x^2+y^2} = \dfrac{z^*}{|z|^2}$

El **argumento** de un número complejo $z \neq 0$, $\arg(z) = \theta$, es el ángulo que forma su vector con el semieje real positivo. Éste tiene una **ambigüedad** de $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

El **argumento principal** es:

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \arg_p(z) \in [0, 2\pi) \tag{1.3.2}$$

pero existen otras convenciones.

Para hallar θ numéricamente debe tenerse en cuenta la periodicidad de la tangente

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{1.3.3}$$

por lo que hay que elegir a mano la solución correcta.

Conociendo el módulo y el argumento, puede reescribirse un complejo en su **forma polar** o trigonométrica:

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.3.4}$$

1.4 Fórmula de Euler

Se define $e^z = \sum z^n/n!$ y entonces:

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(i\theta)^n}{(2n)!} + \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta} \tag{1.4.1}$$

Pero aún no se han definido las series infinitas para números complejos, por lo que se definirá la exponencial del siguiente modo:

$$e^z \equiv e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy} \;\rightarrow\; e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta \tag{1.4.2}$$

que es una definición "razonable" (*extiende* e^x a los complejos) y más adelante se verá que en cierto sentido es única.

Como consecuencia la forma exponencial es $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Con lo que es fácil demostrar que

$$z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = \cdots = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.4.3}$$

Como consecuencia:

- $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
- $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

1.5 Potencias y raíces de números complejos

Teniendo en cuenta que $z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ se tiene que

$$z^n = r^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}, z \neq 0 \tag{1.5.1}$$

en el caso $r = 1$ se tiene la *fórmula de (De) Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.5.2}$$

Se tiene por la definición las siguientes propiedades:

- $|z^n| = |z|^n$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- $z^nz^m = z^{n+m}$
- $(z^n)^m = z^{nm}$

De modo similar pueden obtenerse las raíces n-ésimas de $z \neq 0$:

$$w^n = z \;\longrightarrow\; w = z^{1/n} = (re^{i(\theta+2\pi k)})^{1/n} = r^{1/n}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)} \tag{1.5.3}$$

por lo que hay n raíces diferentes, todas con módulo $r^{1/n}$ y argumentos principales:

$$\arg_p(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\arg_p(z) + 2\pi\frac{k}{n} \tag{1.5.4}$$

Ejemplos:

Sea $z = 1e^{i\pi/4}$, sus raíces cuadradas serán:

$$\sqrt{z} = \cancel{\sqrt{1}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+2\pi\frac{k}{2}\right)} = \left\{e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}\right\}$$

Sea $z = 1$, sus raíces cuartas serán

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}e^{i\left(\frac{0}{4}+2\pi\frac{k}{4}\right)} = \left\{e^{i0}, e^{i(0+\frac{\pi}{2})}, e^{i(0+\pi)}, e^{i\left(0+\frac{3\pi}{2}\right)}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

Sea $z = -3 + 4i$. Calcúlese su raíz cuadrada.

Por ser una raíz cuadrada se sabe que $z_2 = (x, y), z_1 = -z_2 = (-x, -y)$ por lo que

$$(z_2)^2 = -3 + 4i \;\to\; (x + iy)^2 = -2 + 4i \;\to\; (x^2 - y^2) + i(2xy) = -3 + 4i \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \;\to y = 2/x \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \to x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \;\to\; x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \to x_1 = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}, x_2 = \sqrt{2} = 1$$

por lo que $x = 1,\ y = 2$ y $z_2 = 1 + 2i,\ z_1 = -z_2 = -(1 + 2i)$

Proposición: La suma de las raíces n-ésimas de z es cero (para $n \geq 2$).

Demostración:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} r^{1/n}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)} = r^{1/n}e^{i\frac{\theta}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = r^{1/n}e^{i\frac{\theta}{n}}\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i2\pi/n}} = 0$$

donde en la última igualdad se ha usado

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$

2 Topología

2.1 Elementos y conjuntos

Es necesario definir una *distancia* para dar $\mathbb{C}$ estructura de espacio métrico, es decir, para hablar de proximidad y así poder definir límite, continuidad y diferenciabilidad.

- **Distancia** entre dos complejos:
$$d(z_1 z_2) = |z_1 - z_2| \tag{2.1.1}$$

- Propiedades
  - $|z_1 - z_2| \geq 0$
  - $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
  - $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$

- **Disco abierto** centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$:
$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| < r\} \tag{2.1.2}$$

- **Disco cerrado** centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$
$$\bar{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| \leq r\} \tag{2.1.3}$$

- **Disco perforado**:
$$B_p(z_0, r) = B(z_0, r) - \{z_0\} \tag{2.1.4}$$

Dado un conjunto $S \subset \mathbb{C}$:

- z_0 es **punto interior de** S si $\exists B(z_0, r) \subset S$.
- z_0 es un **punto frontera de** S si $\forall B(z_0, r)$ contiene puntos de S y $\mathbb{C} - S$.
- **Interior de** S = conjunto de todos los puntos interiores de S.
- **Exterior de** S = el interior de su complementario $(\mathbb{C} - S)$.
- **Frontera de** S (∂S) = conjunto de todos los puntos frontera de S
- S es un conjunto **abierto** si todos sus puntos son interiores
- S es un conjunto **cerrado** si su complementario $(\mathbb{C} - S)$ es abierto.

2.2 Caminos en $\mathbb{C}$

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos funciones reales, continuas y con derivadas continuas a trozos en $[a, b] \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} x : [a, b] \in \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

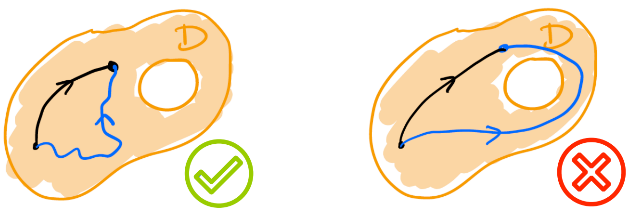
Se llama **camino** γ en el plano complejo a la aplicación:
$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] \in \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Definiciones:

- Camino cerrado: $\gamma(a) = \gamma(b)$
- z_0 punto múltiple de γ si $\exists t_1, t_2 \in (a, b)/z_0 = \gamma(t_1) = \gamma(t_2), t_1 \neq t_2$
- Camino sin puntos múltiples $\equiv$ Curva de Jordan
- **Circuito**: camino cerrado sin puntos múltiples
- Se dice que un conjunto es **conexo** (por caminos)* si todo par de puntos puede unirse por un camino contenido completamente en ese conjunto
- *Conexo y conexo por caminos son conceptos ligeramente distintos, pero para conjuntos abiertos son equivalentes.
- **Dominio** = conjunto abierto y conexo. importante no confundirlo con el dominio de definición de una función.

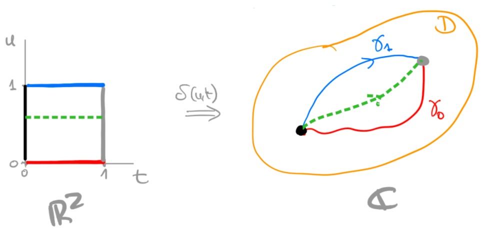
Caminos homotópicos en un dominio D

Informalmente: dos caminos son homotópicos si uno puede deformarse en el otro sin salir de D. Es decir, D no tiene "agujeros" entre los dos caminos.



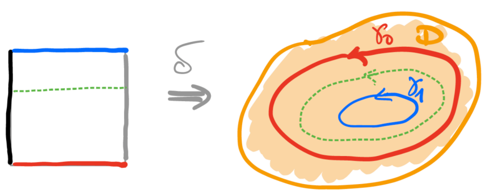
foralmente: dos caminos son homotópicos en D si $\exists\delta(t, u)$ una aplicación continua del cuadrado $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ en $D \subset \mathbb{C}$ tal que

- $\delta(t, 0) = \gamma_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\delta(t, 1) = \gamma_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\delta(0, u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad 0 \leq u \leq 1$
- $\delta(1, u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1), \quad 0 \leq u \leq 1$



Dos caminos cerrados γ_0 y γ_1 son homotópicos en un dominio D si $\exists\delta(t, u)$ continua del cuadrado $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ en $D \subset \mathbb{C}$ tal que:

- $\delta(t, 0) = \gamma_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\delta(t, 1) = \gamma_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\delta(0, u) = \delta(1, u), \quad 0 \leq u \leq 1$

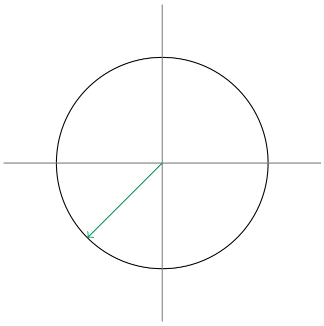


Un caso particular relevante es : $\gamma_0(t) = z_0 \ \forall t \in a, b(\rightarrow$ el camino es un punto). Entonces se dice que γ_1 es homotópico a un punto en D.

2.3 El punto del infinito

Informalmente, con $z \to \infty$ se quiere decir que se toma z con módulo cada vez mayor.

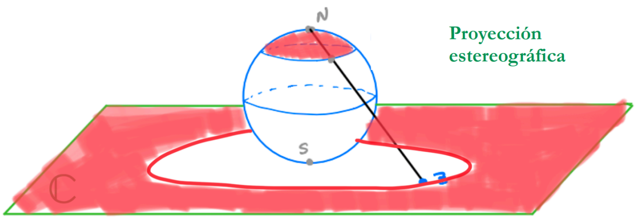
Entorno alrededor del infinito: $B(\infty, k) \equiv \{z \in \mathbb{C}, |z| > k, k \in \mathbb{R}^+\}$



En $\mathbb{C}$ no hay ningún punto que sea común a todos los entornos alrededor de ∞.

A veces resulta útil añadir a $\mathbb{C}$ un punto especial "$z = \infty$" que cumple esta propiedad. De este modo se amplia la estructura topológica de $\mathbb{C}$ a un nuevo conjunto

$$\boxed{\overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{z = \infty\}}$$



A cada punto de la esfera le corresponde un punto de $\mathbb{C}$ salvo al polo norte $\to z = \infty$

$\to$ Existe una biyección (la proyección estereográfica) entre la esfera ($\mathcal{S}^2$) y $\overline{\mathbb{C}}$. Por ello, a veces se refiere a $\overline{\mathbb{C}}$ como la **esfera de Riemann**.

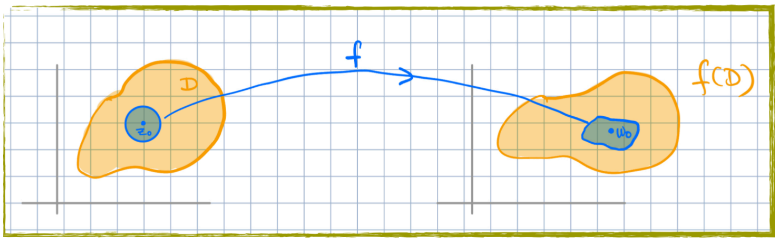
Un entorno del polo norte en la esfera $\to$ $B(\infty, k)$ en $\mathbb{C}$.

3 Funciones de variable compleja

3.1 Límites y continuidad

Función de variable compleja:

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \\ z = x + iy &\mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \end{aligned}$$

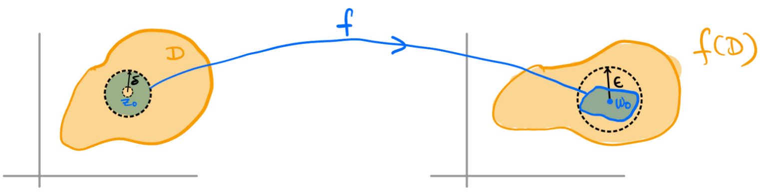


donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

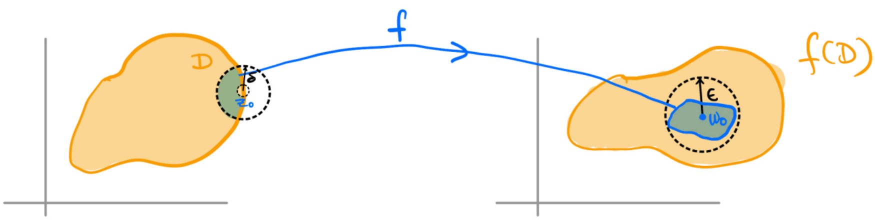
Es decir, por ejemplo, $f(z) = z^2 \longrightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, \; v(x, y) = 2xy$

Límite: Sea f una función de variable compleja definida en un entorno perforado de $z_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ si $\forall B(w_0, \epsilon)$ puede encontrarse un disco perforado $B_p(z_0, \delta)$ con imagen [por medio de $f(z)$] dentro del primer disco. Es decir

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - w_0| < \epsilon}$$



y es trivial generalizarlo a un punto de acumulación.



Propiedades: $(z_0, w_0 \in \mathbb{C})$

- $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \;\Rightarrow\; \lim_{z\to z_0} [f(z)^*] = w_0^*$

- $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$

- El límite, si existe, es único.

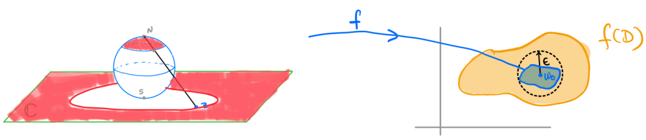
- $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow$ es independiente de la recta por la que se acerque a z_0 (si f no está definido $\forall B_p(z_0, r)$, entonces se deben mirar todos los caminos, no sólo rectas)

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = g_0 \\ f_0, g_0 \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z\to z_0} [f \pm g] = f_0 \pm g_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} [f \cdot g] = f_0 \cdot g_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f}{g} = \dfrac{f_0}{g_0}, g_0 \neq 0 \end{cases}$

Casos en que $z_0 = \infty, w_0 = \infty$

Se dice que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ cuando $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

De forma equivalente (y más intuitiva) puede definirse usando los entornos alrededor del infinito (con ε y δ).

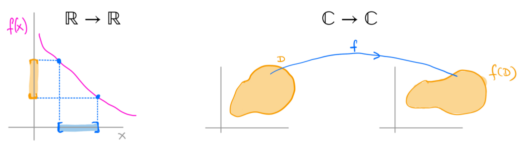


Continuidad: Una función $f(z)$ definida en $D \in \mathbb{C}$ es **continua en** $z_0 \in D$ si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \in \mathbb{C}$.

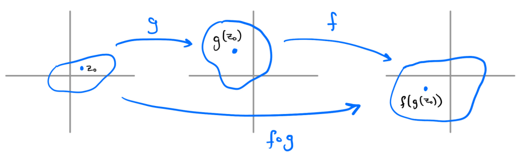
Una función $f(z)$ definida en $D \subset \mathbb{C}$ es **continua** si lo es $\forall z_0 \in D$.

Proposición: $f(z)$ es continua en $z_0 = (x_0, y_0) \;\Leftrightarrow\; u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0)

Proposición: La imagen de un conjunto cerrado y acotado (=compacto) bajo una función continua es un conjunto acotado.



Proposición: Si $g(z)$ es continua en z_0 y $f(z)$ es continua en $g(z_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en z_0



3.2 Diferenciabilidad

recordatorio $\mathbb{R}^n$

En el caso de 1 variable

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \Rightarrow f'(x_0) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y en el caso de una función vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

entonces f es diferenciable (real) en $\vec{x}_0$ si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0$$

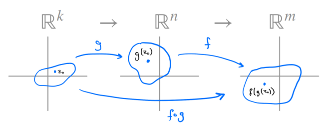
donde

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

es la derivada total o matriz jacobiana.

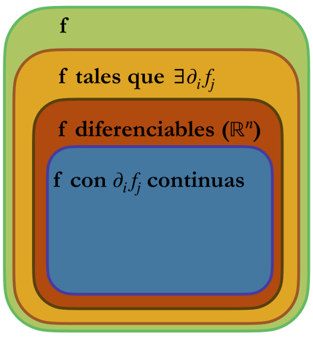
La regla de la cadena para funciones vectoriales es:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \vec{g} \text{ diferenciable en } \vec{x} \\ \bullet\ \vec{f} \text{ diferenciable en } \vec{g}(\vec{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{h} \equiv \vec{f} \circ \vec{g} \text{ diferenciable en } \vec{x} \\ Dh(\vec{x}) \equiv Df(\vec{g}(\vec{x})) \cdot Dg(\vec{x}) \end{array}$$



y se tienen los siguientes teoremas:

- f diferenciable (real) en $\vec{x} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \partial_i f_j$ en $\vec{x}$
- $\partial_i f_j$ continuas en $\vec{x} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ diferenciable (real) en $\vec{x}$



Diferenciabilidad en $\mathbb{C}$: Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$ (abierto). $f(z)$ es **diferenciable en** z_0 si existe el siguiente límite

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \longrightarrow \boxed{f'(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}} = \lim_{\Delta z} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Proposición: f diferenciable ($\mathbb{C}$) en $z \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ continua en z

Dem: $\lim_{z\to z_0} f(z) \overset{?}{=} f(z_0)$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)] = \left[\lim_{z\to z_0} f(z_0)\right] - f(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\cdot \Delta z\right] = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\underbrace{\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}}_{F(\Delta z)}\cdot \underbrace{\Delta z}_{G(\Delta z)}\right]$$

$$\underbrace{\left[\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right]}_{f'(z_0)}\underbrace{\left[\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\right]}_{0} = 0$$

∗ $f(z) = z^2$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0+\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-(z_0)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\cancel{(z_0)^2}+2z_0\Delta z+(\Delta z)^{\cancel{2}}-\cancel{(z_0)^2}}{\cancel{\Delta z}}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}(2z_0+\Delta z) = 2z_0$$

∗ $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

→ $f(z)$ es continua en $\mathbb{C}$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \ \to\ \lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0) \ \to\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

→

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z_0+\Delta z)-\mathrm{Re}(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\cancel{\mathrm{Re}z_0}+\mathrm{Re}(\Delta z)-\cancel{\mathrm{Re}z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eje x}: \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1\\ \text{Eje y}: \lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(i\Delta y)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\nexists f'(z) \to\ f \text{ no es diferenciable } \forall\mathbb{C}\\ f \text{ no es regular/holomorfa}\end{array}$$

∗ $f(z) = |z|^2$

$$L \equiv \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\cancel{|z_0|^2}+2\mathrm{Re}(z_0^*\Delta z)+|\Delta z|^2-\cancel{|z_0|^2}}{\Delta z}$$

$$\boxed{z_0 = 0}\ L = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta z)(\Delta z)^*}{\Delta z} = 0 \ \Rightarrow\ \exists f'(0) = 0$$

$$\boxed{z_0 \neq 0}\ L = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\mathrm{Re}[z_0^*\Delta x(1+mi)]+(\Delta x)^2|1+mi|^2}{\Delta x(1+mi)} = 2\frac{\mathrm{Re}(z_0(1+mi))}{1+mi} = 2\frac{x_0+my_0}{1+mi}$$

por lo que el límite depende de m salvo en $z_0 = 0 \ \Rightarrow\ \nexists f'(z) \in \mathbb{C}-\{0\}$

Función regular (holomorfa): $f(z): A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es **regular** u holomorfa en $z_0\in A$ si es diferenciable en todos los puntos de un cierto entorno de z_0.

→ $f(z)$ es diferenciable en $S\subset A$ si lo es $\forall z\in S$ (idem para regular u holomorfa).

→ Dominio de diferenciabilidad = puntos en lo que f es diferenciable (idem para continuidad/regularidad).

3.2.1 reglas de derivación

Si $\exists f'(z_0), g'(z_0)$, entonces:

- $(f\pm g)' = f'\pm g'$
- $(f\cdot g)' = f'g+fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f'g-fg'}{g^2},\ g\neq 0$

Regla de la cadena: $\exists f'(g(z_0)), g'(z_0) \;\Rightarrow\; [f(g(z_0))]' = f'(g(z_0))g'(z_0)$

Trivialmente: $f(z) = 1 \;\rightarrow\; f'(z) = 0 \qquad f(z) = z \;\rightarrow\; f'(z) = 1$ por lo que las reglas de derivación de polinomios, funciones racionales, etc. son idénticas a las reglas de variable real. Ejemplo $f(z) = z^n \;\rightarrow\; f'(z) = nz^{n-1}$.

Regla de L'Hôpital:
Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones regulares en $B(z_0, r)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = a \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = a$$

Ejemplo:

$$\lim_{z\to -i} \frac{z^4 - 1}{z + i} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{z\to -i} \frac{4z^3}{1} = 4(-i)^3 = 4i$$

De momento se ha hablado de f y f' sin hacer referencia a sus partes reales e imaginaria:

$$f = u(x,y) + iv(x,y) \qquad f' = a(x,y) + ib(x,y)$$

Es natural preguntarse cuál es la relación entre (u, v) y (a, b)

Discusión intuitiva:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &\mathrm{d}f = \mathrm{d}u + i\,\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\ &\mathrm{d}f = f'(z)\,\mathrm{d}z = (a + ib)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = (a\,\mathrm{d}x - b\,\mathrm{d}y) + i(a\,\mathrm{d}y + b\,\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

por lo que, por inspección se ve que

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv v_y \qquad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = -b = -\frac{\partial v}{\partial x} \equiv -v_x$$

Mientras que en el caso de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} & \mapsto & (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x})) \end{array}$$

se tiene que las derivadas no guardan ninguna relación entre ellas.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}F_1 \\ \mathrm{d}F_2 \end{pmatrix} = Df \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

<u>Teorema (condiciones de Cauchy-Riemann)</u>:

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} \rightarrow\; \exists u_x, u_y, v_x, v_y \text{ en } (x_0, y_0) \\ \text{Se cumple: } \partial_x u = \partial_y v \;\wedge \partial_y u = -\,\partial_x v \text{ en } (x_0, y_0) \end{array}\right.$$

Dem:

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$\to \ \Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}: \ f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y) + iv(x_0+\Delta x, y_0) - [u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + i \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$\to \ \Delta z = i \overbrace{\Delta y}^{\in\mathbb{R}} : f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) + iv(x_0, y_0+\Delta y) - [u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)]}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\Delta y} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta y} + \frac{i}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} - i \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

por lo que se concluyen las condiciones de Cauchy-Riemann

Ejemplo: $f(z) = z^* = x - iy = x + i(-y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y} \ \Rightarrow \ \text{CR} \times \ \Rightarrow \ \nexists f'(z), \forall \mathbb{C}$$

Proposición: Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si

$$\left.\begin{array}{l} \to \ u_x, u_y, u_z, v_y \text{ son continuas en } (x_0,y_0) \\ \to \ u_x = v_y \ \wedge \ u_y = -v_x \text{ en } (x_0,y_0) \end{array}\right] \ \Rightarrow \ \exists f'(z_0)$$

$$\text{T}^{\underline{ma}} : \exists f'(z_0) \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} u, v \text{ diferenciables } (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) \text{ en } (x_0,y_0) \\ CR \checkmark \text{ en } (x_0,y_0) \end{array}\right.$$

Ejemplo: $f(z) \left\{ \begin{array}{ll} |z|^{-2}(1+i)\text{Im}(z^2) & , z \neq 0 \\ 0 = 0 + i0 & , z = 0 \end{array}\right.$

La primera función es

$$\frac{1}{x^2+y^2}(1+i)\text{Im}[(x^2-y^2) + 2ixy] = \frac{1}{x^2+y^2}(1+i)2xy = \boxed{\frac{2xy}{x^2+y^2}} + i \boxed{\frac{2xy}{x^2+y^2}}$$

por lo que

$$\boxed{z=0} \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(0+\Delta x, 0) - \cancelto{0}{u(0,0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2(\Delta x)\cdot 0}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - \cancelto{0}{u(0,0)}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{2\cdot 0 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta y} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0 = 0$$

por lo que $u_x = v_y \ \wedge \ u_y = -v_x$, pero $\nexists f'(0)$

Dem: $\boxed{u \text{ y/o } v \text{ no son continuas en } (0,0)} \Rightarrow f$ no es continua en $z = 0 \ \Rightarrow \ \nexists f'(0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{\substack{(y=mx) \\ x\to 0}} \frac{2mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{2m}{1+m^2} \neq u(0,0) = 0$$

Ejemplo: $f(z)\left\{\begin{array}{ll} |z|^{-2}(1+i)\text{Im}(z^2) & , z\neq 0 \\ 0=0+i0 & , z=0 \end{array}\right] \Rightarrow u=v=\left\{\begin{array}{ll} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{array}\right\}$

$\boxed{\text{z=0}}$ CR ✓ $\rightarrow u_x=u_y=v_x=v_y=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0) u_x(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(m\cancel{x})(m^2-1)\cancel{x^2}}{x^{\cancel{4}}(1+m^2)^2} =$$

y, ahora, aplicando las conds. CR:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\cancel{2}y(y^2-x^2)}{\cancel{(x^2+y^2)^2}} = \frac{\cancel{2}x(x^2-y^2)}{\cancel{(x^2+y^2)^2}} \Rightarrow y(y^2-x^2)=-x(y^2-x^2) \Rightarrow (y+x)(y^2-x^2)=0$$

Otras formas de las condiciones CR:

1. Condiciones CR en polares:

$$(z\neq 0) \qquad \left.\begin{array}{l} v_r=-u_\theta/r \\ v_\theta = r\cdot u_r \end{array}\right\} \begin{array}{l} u(r,\theta) \\ v(r,\theta) \end{array}$$

2. "Dependencia en z^*"

Sea $f(z)$ una función polinómica en x e y. P.ej. $f(z)=\overbrace{4x+2y}^{u}+i\overbrace{4x}^{v}$, $\exists f'(z)$?

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{z+z^*}{2} \\ y=\dfrac{z-z^*}{2i} \end{array}} \Rightarrow f(z)=2\frac{z+z^*}{2}+2\frac{z-z^*}{2i}+i4\frac{z+z^*}{2}2=z(4-i)+iz^* \Rightarrow \nexists f'(z)$$

Suele decirse que:

$$\exists f'(z_0) \Leftrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial z^*}\right|_{(z,z^*)}=0$$

Esto implica

$$f \text{ es regular en } z_0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z^*}=0\ \forall z\in B(z_0,r)$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=|z|^2=z\cdot z^* \\ f(z)=3z^* \\ f(z)=(z^*)^2+5 \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ no es regular en ningún punto.}$$

"Dem":

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u\left(\frac{z+z^*}{2},\frac{z-z^*}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+z^*}{2},\frac{z-z^*}{2i}\right) \rightarrow f(z,z^*)\ \mathbb{C}^2\rightarrow\mathbb{C}$$

$f(z,z^*)$ es un polinomio en z y z^*

$$\frac{\partial f}{\partial z^*}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}=\frac{1}{2}\left[(u_x-v_y)+i(v_x+u_y)\right]$$

por lo que, para que las conds. de CR se cumplan, debe ser cero, pues $u_x=v_y$ y $v_x=-u_y$

3.2.2 Funciones multivaluadas

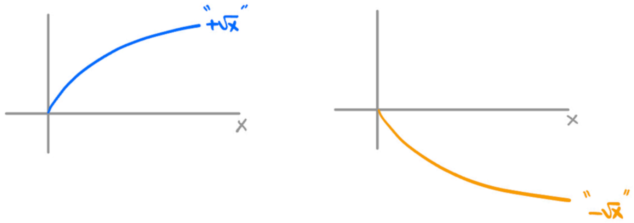
Una **función de variable compleja** es una aplicación:

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad\qquad z \mapsto w = f(z)$$

Por construcción estas funciones son univaluadas. Uno puede considerar correspondencias más generales, donde z tiene más de una imagen bajo $f(z)$, llamadas "**funciones multivaluadas**". Sea $z = re^{i\theta}, \theta = \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$, como ejemplo está $f(z) = \sqrt{z}$. Generalmente la raíz n está definida como $z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\dfrac{\theta + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$, por lo que $f(z)$ es

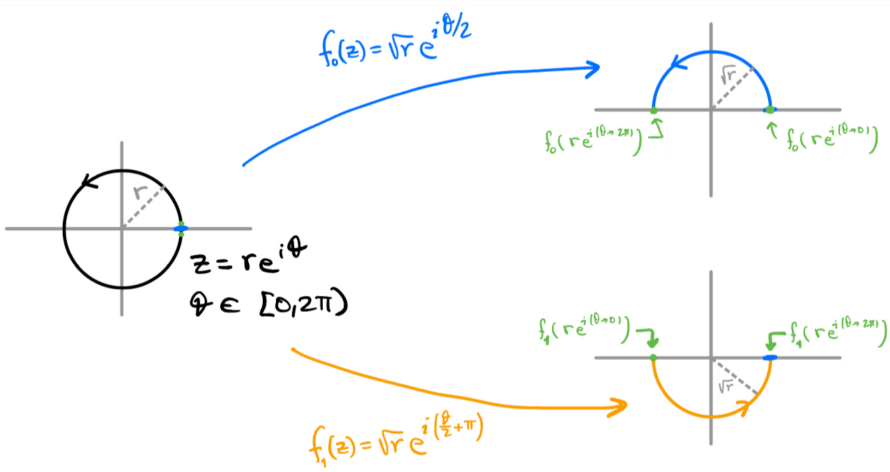
$$f(z) = \sqrt{z} = \{\underbrace{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}_{k=0, f_0(z)}, \underbrace{\sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}}_{k=1, f_1(z)}\}$$

En $\mathbb{R}$ también hay funciones multivaluadas: $f(x) = \sqrt{x}$



Claramente hay dos funciones "especiales" que maximizan el dominio de continuidad/diferenciabilidad de la función.

En $\mathbb{C}$ ocurre algo similar, pero más sutil. Se estudiarán las funciones $f_0(z)$ y $f_1(z)$ para el ejemplo $f(z) = \sqrt{z}$.



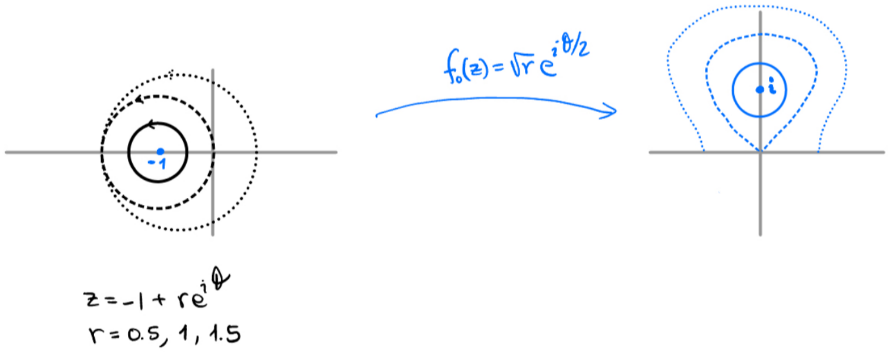
por lo que en $\mathbb{C}$ son continuas y diferenciables salvo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. A $f_0(z)$ se la denomina función principal $[\sqrt{z}]_p$ y su derivada es

$$[\sqrt{z}]_p' = \frac{1}{2[\sqrt{z}]_p} \quad \text{en } \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\right) \tag{3.2.1}$$

El origen es un punto "especial" al que se denomina punto de ramificación.

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}$, este par de funciones no es único, pues depende de la convención escogida para el argumento principal, $\mathrm{Arg}(z) = \theta$. Llámese $\widetilde{\mathrm{Arg}}(z) \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, por lo que

$$f(z) = \sqrt{z} = \{\underbrace{\sqrt{r}e^{i\frac{\widetilde{\mathrm{Arg}}(z)}{2}}}_{f_2(z)}, \underbrace{\sqrt{r}e^{i\left(\frac{\widetilde{\mathrm{Arg}}(z)}{2}+\pi\right)}}_{f_3(z)}\}$$



con lo que

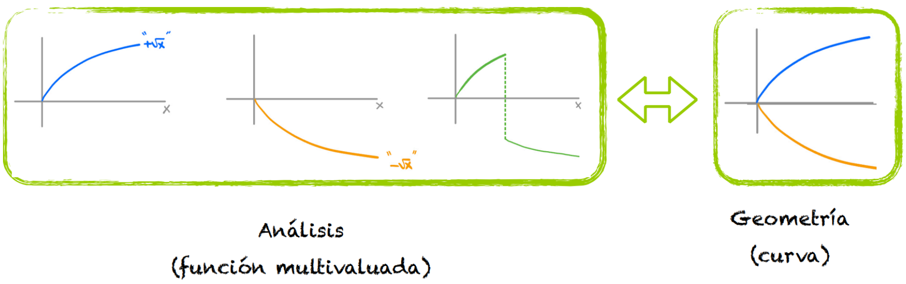
por lo que el corte cambia con la ramificación, pero el corte siempre empieza en $z = 0$ y acaba en $z = \infty$.

Se dice que $\{f_0, f_1\}$ y $\{f_2, f_3\}$ son dos ramificaciones distintas de $f(z)$.

Ahora se formalizarán un poco estas definiciones. Dada una función multivaluada:

- **Rama**: función de variable compleja, univaluada en un dominio D (y quizá en puntos frontera de D) y regular en D, construida a partir de una función multivaluada y que no puede ser extendida a un dominio de definición mayor (sin que deje de ser univaluada y regular)
- **Corte de rama**: frontera del dominio de regularidad de cada rama.
- **Ramificación**: cada una de las posibles descomposiciones en n ramas que puede hacerse.
- η es un **punto de ramificación** si $\forall$ rama $\exists B(\eta, r)$ tal que al recorrer cualquier curva cerrada alrededor de η contenida en dicho disco se pasa por un punto en el que la función (la rama) es discontinua.
  - Es decir, si al recorrer la curva uno elige la imagen (entre las n posibles) por continuidad necesariamente encontrará una discontinuidad.

Cada rama tiene una discontinuidad en un sitio ("corte"). Estos cortes no son algo intrínseco a la función multivaluada $\sqrt{z}$. Existe una forma geométrica de estudiar esta función sin dichos cortes arbitrarios



grafo de $f(x) = \sqrt{x} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x) = \sqrt{x}\}$

Considérese el *grafo* de $f : \{(z, w) \in \mathbb{C} / w = f(z)\}$

- 4 puntos y dos ligaduras ($\text{Re}w = \text{Re}f(z)$; $\quad \text{Im}w = \text{Im}f(z)$)

  $\Rightarrow$ Es una superficie (2D) en un espacio 4D ($\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$) ("Superficie de Riemann de $\sqrt{z}$")

  $\Rightarrow$ Su visualización puede hacerse con colores

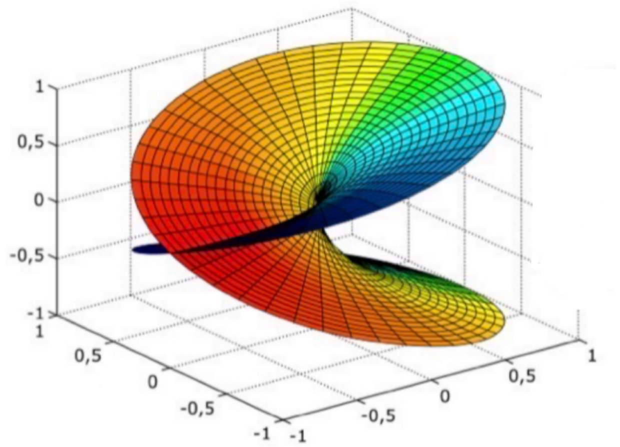
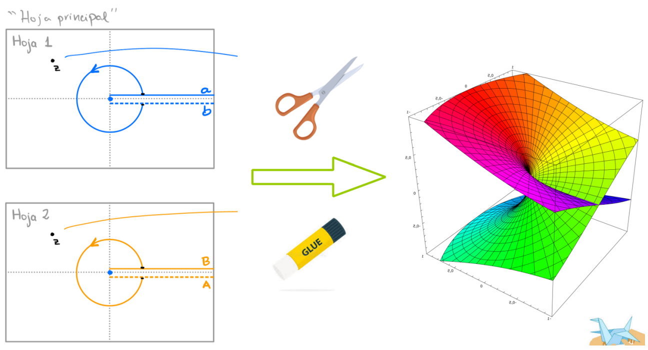


Fig 3.2.2.1: Aunque aparente que se corta, los colores de la función donde se “corta” son distintos, por lo que es como si se tuviese una cuerda que pasa por encima de si misma.

Otro modo de construir la superficie consiste en “desdoblar” el plano complejo en tantas copias como imágenes tiene $f(z)$, cortando y pegando las hojas de modo que $f(z)$ sea continua $b \leftrightarrow B, a \leftrightarrow A$



Los cortes han desaparecido. Cualquier superficie lleva a la misma superficie. Sobre la superficie S la función $f(z)$ es univaluada y continua. Los puntos de ramificación son aquellos que al rodearlos te llevan de una hoja a otra (independientemente de a los que hayas llamado hoja 1 y hoja 2).

4 Funciones elementales

4.1 Función exponencial

$$e^z \equiv e^x \underbrace{(\cos y + i\sin y)}_{e^y} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)} \tag{4.1.1}$$

Propiedades:

→ $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

Entiéndase la función exponencial como una función de los complejos a los complejos:

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

por lo que se verá si se cumplen las CR en su dominio:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \\ v_y &= e^x \cos y \end{aligned}\right\} \checkmark \qquad \left.\begin{aligned} u_y &= -e^x \sin y \\ -v_x &= -e^x \sin y \end{aligned}\right\} \checkmark \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \text{Las parciales de } u, v \text{ son cont. en } \mathbb{R}^2 \\ \text{Conds. CR } \checkmark \text{en } \mathbb{R}^2 \end{array}\right] \Rightarrow \exists f'(z) = u_x + i v_x$$

y la derivada, más explícitamente, es

$$[e^z]' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin) = e^x e^{iy} = e^z \tag{4.1.2}$$

La función es periódica:

$$e^{z+2\pi ki} = e^x[\cos(y + 2\pi k) + i\sin(y + 2\pi k)] = e^z \tag{4.1.3}$$

→ $(e^z)^{-1} = \dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ → $(e^z)^k = e^{kz},\ k \in \mathbb{Z}$ → $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$

Dem:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \ \Rightarrow\ e^z \neq 0$$

4.2 Funciones trigonométricas

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \ \rightsquigarrow \ \left.\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} \cos z &\equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &\equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned} \qquad \tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} \tag{4.2.1}$$

Propiedades:

→ $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

→ $|\cos z| \not< 1$

→ $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

→ $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \tag{4.2.2}$$

Propiedades:

→ $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$ → $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

→ $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Dem:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \left(\frac{e^z + e^-z}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(\cancel{e^{2z}} + 2\underbrace{e^z e^{-z}}_{1} + \cancel{e^{-2z}}) - (\cancel{e^{2z}} - 2\underbrace{e^z e^{-z}}_{1} + \cancel{e^{-2z}})\right] = 1$$

Relación entre funciones trigonométricas e hiperbólicas

$$\cos(iz) = \cosh(iz) \qquad \sin(iz) = i\sinh z \qquad \tan(iz) = i\tanh z \tag{4.2.3}$$

Tanto funciones trigonométricas como hiperbólicas son diferenciables en $\mathbb{C}$ al igual que en $\mathbb{R}$

4.3 Función logaritmo

Se define $\log z$ como el número complejo

$$\omega \in \mathbb{C}/e^\omega = z \ \rightarrow \ e^{\log z} = z$$

→ $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ \nexists \log(0)$

→ Parte real e imaginaria de $\log z$? $\log z = u + iv$ por lo que, aplicando la definición

$$e^{\log z} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = z = |z|e^{i\theta} \ \Rightarrow \ \begin{cases} u = \log|z| \\ v = \theta + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

por lo que

$$\boxed{\log z = \log|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z}} \tag{4.3.1}$$

donde el primer log es en el sentido complejo, mientras que el segundo hace referencia al log real. El logaritmo principal evidentemente se define como

$$\boxed{\text{Log} \equiv \log|z| + i\text{Arg}(z)} \tag{4.3.2}$$

Propiedad: si $z_1 z_2 \neq 0$

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \text{Log}(z_1 \cdot z_2) = \text{Log}\, z_1 + \text{Log}\, z_2 + 2\pi k i} \qquad \text{Log}(z_1 \cdot z_2) \neq \text{Log}(z_1) + \text{Log}\, z_2$$

Dem:

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \log|z_1 z_2| + i\,\text{Arg}(z_1 z_2) = \log(|z_1||z_2|) + i\,\text{Arg}(z_1 z_2) =$$
$$= \log|z_1| + \log z_2 + i\left(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2\pi k i\right) = \text{Log}\, z_1 + \text{Log}(z_2) + 2\pi k i$$

Ejemplo:

$$\mathrm{Log}\left(e^{i3\pi}\right) \neq i3\pi;\ \mathrm{Log}\left(e^{i3\pi}\right) = i\pi$$

Si $z_0 \equiv e^{3\pi} = e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$

$$\mathrm{Log}(z_0) = +i\pi$$

Propiedad: sean $z \neq 0, n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\boxed{\mathrm{Log}(z^n) = n\,\mathrm{Log}(z) + 2\pi k i}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} z = -i \\ n = 2 \end{array}\right] \Rightarrow\ \mathrm{Log}[(-i)^2] = \mathrm{Log}(-1) = i\pi; \qquad 2\,\mathrm{Log}(-i) = 2i\frac{3\pi}{2} = 3\pi i \neq i\pi$$

Por definición: $e^{\mathrm{Log}\, z} = z\ \forall z \in \mathbb{C}$; pero $\mathrm{Log}(e^z) \neq z$. Más formalmente

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \exists k \in \mathbb{C} / \mathrm{Log}(e^z) = z + 2\pi k i}$$

Ejemplo: $z = 3\pi i\ \Rightarrow\ \mathrm{Log}(e^{3\pi i}) = \pi i \neq 3\pi i = z$

Ahora se analizará la continuidad de la función $\mathrm{Log}(z)$:

$\mathrm{Log}(z)$ es continua salvo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
Para $a > 0, \varepsilon > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \mathrm{Log}(a + i\epsilon) = \log a \\ \lim\limits_{\epsilon\to 0} \mathrm{Log}(a - i\epsilon) = \log a + 2\pi i \end{array}}$$

contenidos...

A veces se escribe $\mathrm{Log}(a+i\epsilon)$ o $\mathrm{Log}(a-i0^+)$ y $\mathrm{Log}(a-i\epsilon)$, $\mathrm{Log}(a-i0^+)$ o $\mathrm{Log}(a+i0^-)$

cabe destacar que "$\log(z)$ es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$" (pues depende de cómo se "trocea" la función)

Ahora se estudiará la **derivabilidad** de $\mathrm{Log}(z)$

Se comprobarán las conds. de CR en polares: $u(r,\theta) = \log(r), v(r,\theta) = \theta$.

Sea $z \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{array}\right\} \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ \checkmark \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta} = 1 \end{array}\right\} \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r}\ \checkmark$$

Las condiciones de CR se cumplen y, además, las derivadas parciales son continuas por lo que

$$\exists f'(z) \equiv \exists [\mathrm{Log}(z)]'\ \forall z \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

para $z \in \mathbb{R}^+\ \Rightarrow\ \mathrm{Log}(z)$ no es continua $\Rightarrow \nexists [\mathrm{Log}\, z]', z \in \mathbb{R}^+$

$$f'(z) \overset{\text{Bol. 2}}{\underset{\text{ej. 8}}{=}} e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$$

otro modo de obtener la derivada de $\mathrm{Log}(z)$ es

$$g(z) = \mathrm{Log}(z),\ e^{g(z)} = z \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}z} e^{g(z)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = 1\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}[\mathrm{Log}(z)]}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}$$

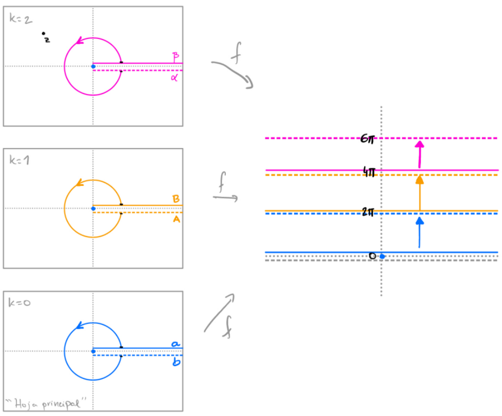
Ahora se verá cuál sería la superficie de Riemann de $\log z$.

Dado que $\log(z) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi k)$

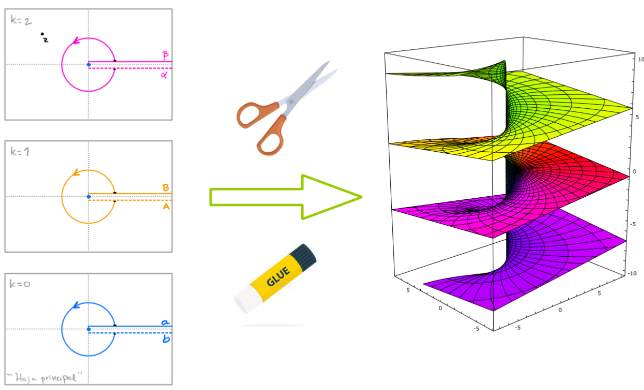
$$\left.\begin{array}{r} \vdots \\ f_{-1} = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z - 2\pi) \\ f_0 = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z) \\ f_1 = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi) \\ \vdots \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{una} \\ \text{ramificación} \\ \text{de } \log z \end{array}$$

pero la ramificación depende de la convención del ángulo salvo en $z = 0$ y $z = \infty$, que son los puntos de ramificación.

Los espacios de salida y de llegada del log en el espacio complejo se verían del siguiente modo y al pegar las



hojas se vería como sigue



Las inversas trigonométricas están relacionada con la función logaritmo (era de esperarse pues las funciones trigonométricas se definieron con la exponencial)

a) $\arcsin(z) = -i\log(iz + \sqrt{1-z^2})$ b) $\arccos(z) = -i\log(z + \sqrt{z^2-1})$ c) $\arctan(z) = -\dfrac{i}{2}\log\dfrac{1+iz}{1-iz}$

d) $\boxed{\operatorname{arsinh} = \log(z + \sqrt{z^2+1})}$ e) $\operatorname{arcosh} = \log(z + \sqrt{z^2 + -1})$ f) $\operatorname{artanh} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$

Dem:

$$\omega = \operatorname{arsinh} z \;\rightarrow\; \sinh\omega = z \;\rightarrow\; \frac{1}{2}(e^{\omega}-e^{-\omega}) = z \;\rightarrow\; e^{2\omega}-1 = 2ze^{\omega} \;\rightarrow\; (e^{\omega})^2 - 2z(e^{\omega}) - 1 = 0$$

$$e^{\omega} = \frac{2z+\sqrt{4^2+4}}{2} = z+\sqrt{z^2+1} \;\Rightarrow\; \operatorname{arsinh}(z) = \omega = \log(z+\sqrt{z^2+1})$$

4.4 Función potencia general

Se ha definido z^n y $z^{1/n}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Se definirá ahora $z_1^{z_2}$.

En $\mathbb{R}$, generalmente

$$x^a \equiv e^{a\log(x)}$$

por lo que, puede llegarse a la conclusión de que la definición de $z^a,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ a\in\mathbb{C}$ es

$$[z^a]_{\text{mv}} = e^{a\log z} = \exp(a\log z) = \exp\left\{[\alpha\ln r - \beta(\theta+2\pi k)] + i[\beta\ln r + \alpha(\theta+2\pi k)]\right\} =$$
$$= \underbrace{e^{\alpha\ln r-\beta(\theta+2\pi k)}}_{|z^a_{\text{mv}}|} e^{i[\beta\ln r+\alpha(\theta+2\pi k)]} = |z^a_{\text{mv}}|e^{i\arg(z^a_{\text{mv}})}$$

donde se ha tomado $a=\alpha+i\beta$ en forma binómica y $z=re^{i\theta}\;\rightarrow\;\log z = \ln r + i(\theta+2\pi k)$ en forma exponencial.

$$[z^a]_{\text{p}} \equiv e^{a\operatorname{Log} z},\;\; z\neq 0$$

Propiedades

$\rightarrow$ $\forall z,a\in\mathbb{C},\ \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ \operatorname{Log}[z^a] = a\operatorname{Log}(z)+2\pi k i\;\Rightarrow\;\operatorname{Log}([z^a_{\text{p}}])\neq a\operatorname{Log}(z)$

$\rightarrow$ $z^a_{\text{p}}a^b_{\text{p}} = z^{a\cdot b}_{\text{p}}$ $\qquad$ $\rightarrow$ $(z^a_{\text{p}})^b \neq (z^b_{\text{p}})^a_{\text{p}} \neq z^{a\cdot b}_{\text{p}}$ $\qquad$ $\rightarrow$ $z^a_{\text{p}}\omega^a_{\text{p}} \neq (z\omega)^a_{\text{p}}$

$\rightarrow$ $[e^z]_{\text{mv}} = e^{z\log z} = e^{z(1+2\pi k i)} = e^z\cdot e^{z\cdot 2\pi k i}\neq e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

La derivada de z^a_{p} es

$$\frac{\mathrm{d}[z^a_{\text{p}}]}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}[e^{a\operatorname{Log} z}]}{\mathrm{d}z} = f'(g)g'(z) = \overbrace{e^{a\operatorname{Log} z}}^{z^a_{\text{p}}}\frac{a}{z} = a\frac{z^a_{\text{p}}}{z} = az^{a-1}_{\text{p}} \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}^+\cup 0\}$$

donde $f(z)=e^z$ y $g = a\operatorname{Log} z$

Casos concretos

* $a = n\in\mathbb{Z}$:

$$z^n_{\text{mv}} = \underbrace{e^{n\log|z|}}_{e^{\log|z|^n}=|z|^n}\;\underbrace{e^{in(\theta+2\pi k)}}_{e^{in\theta}} = |z|^n e^{in\theta} = z^n$$

donde $e^{in(\theta+2\pi k)} = e^{in\theta}$ ya que al ser $n\in\mathbb{N}$, $e^{in2\pi k}=1$. Por lo tanto es una función univaluada

* $a = n/m\in\mathbb{Q}, n,m\in\mathbb{Z}$ coprimos (a irreducible)

$$z^{n/m}_{\text{mv}} = \underbrace{e^{\frac{n}{m}\log|z|}}_{|z|^{n/m}}\underbrace{e^{i\frac{n}{m}(\theta+2\pi k)}}_{\text{arg. mv}} = |z|^{n/m}e^{i\frac{n}{m}(\theta+2\pi k)}$$

por lo que es multivaluada con m soluciones distintas donde $k=0,1,\ldots,m-1$.

* a irracional

$$z^a_{\text{mv}} = a^{a\log|z|}e^{ia(\theta+2\pi k)}$$

por lo que habrán infinitas soluciones distintas.

* $a = i\beta$ $(\beta\in\mathbb{R})$

$$z^a_{\text{mv}} = e^{i\beta\log|z|}e^{-\beta(\theta+2\pi k)} = \underbrace{e^{-\beta(\theta+2\pi k)}}_{|z^a_{\text{mv}}|}e^{i\beta\log|z|}$$

5 Teorema de Cauchy

5.1 Integrales en $\mathbb{C}$

Sea γ un camino:

$$\begin{array}{rlcl} \gamma: & [a,b]\in\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & z(t)=x(t)+iy(t) \end{array}$$

Sea $f(z)$ una función continua en un dominio D que contiene a γ

$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma \mathrm{d}z f(z) = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$$

Esta es la definición de integral de contorno. Sea ahora $f=u+iv$ y $z'=x'+iy'$

$$\int_a^b [(ux'-vy')+i(uy'+vx')]\,\mathrm{d}t = \int_a^b (ux'-vy')\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (uy'+vx')\,\mathrm{d}t$$

NOTA: puede definirse $\int_\gamma f$ directamente en $\mathbb{C}$, de manera análoga a $\mathbb{R}$:

$$s_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}) \xrightarrow[\lambda\to 0]{\lim} \int_\gamma f$$

donde ξ_j es un punto de γ entre z_{j-1} y z_j y $\lambda = \max\{|z_1-z_0|,|z_2-z_1|,\ldots\}$, es decir, la norma de la partición ($\lambda = \max\{z_j - z_{j-1}, j=1,\ldots,n\}$)

$*$ Si f tiene una discontinuidad finita en $\gamma(t_0)\in\gamma$

$$\int_\gamma f = \int_a^{t_0} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ejemplo: $f(z)=2z, \gamma:[0,\pi/2]\to\mathbb{C}, t\mapsto z(t)=\cos t + i\sin t$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_0^{\pi/2} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 2(\cos t + i\sin t)(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\Big([-\cos\cdot\sin t - \sin t\cdot\cos t] + i[\cos^2 t - \sin^2 t]\Big)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} = 2\int_0^{\pi/2}[-\sin 2t]\,\mathrm{d}t + 2i\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,\mathrm{d}t \\ &= [\cos 2t]_0^{\pi/2} + i[\sin 2t]_0^{\pi/2} = (-1)-1+i(0-0) = -2\end{aligned}$$

Propiedades:

- Si f,g son continuas en D, $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ y $\gamma\subset D$ entonces

$$\int_\gamma [c_1 f + c_2 g] = c_1\int_\gamma f + c_2\int_\gamma g$$

- $\left|\int_\gamma g\right| \leq \int_a^b \mathrm{d}t|f(\gamma(t))||\gamma'(t)| \neq \int_\gamma |f|$

Demostración intuitiva:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \;\Rightarrow\; \left|\sum z_i\right| \leq \sum |z_i| \;\Rightarrow\; \left|\int f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Camino inverso: Dado un camino γ, se define el camino inverso $(-\gamma)$ como el mismo pero recorrido en sentido contrario. Es decir

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [a,b]\in\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rccc} (-\gamma): & [a,b]\in\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (-\gamma)(t)=\gamma(a+b-t) \end{array}$$

es importante no confundir el camino inverso $(-\gamma)$ con $-\gamma(t)$.

Ejemplo : $\gamma = e^{it}, 0/2$

$$(-\gamma)(t) = e^{i(\frac{\pi}{2}-t)} = \gamma(a+b-t), 0\pi 2$$

Propiedad: sea f continua en D y sea γ un camino en D:

$$\int_{(-\gamma)} f = -\int_\gamma f$$

Camino suma $(\gamma_1+\gamma_2)$: Dados $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ y $\gamma_2:[b,c]\to\mathbb{C}$ tales que $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$, se define el camino suma como

$$\begin{array}{rccc} (\gamma_1+\gamma_2): & [a,c]\in\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \gamma_1(t), & t\in[a,b] \\ \gamma_2(t), & t\in[b,c] \end{cases} \end{array}$$

Propiedad: Sea f continua en D y sean γ_1,γ_2 caminos en D:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Reparametrización: Un camino $\tilde{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una reparametrización de $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ si

$\exists\alpha:[a,b]\to[\tilde{a},\tilde{b}]$ continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), con $\alpha'(t)>0$ en (a,b) tal que

$$\tilde{\gamma}[\alpha(t)] = \gamma(t).\ \alpha(a)=\tilde{a}, \alpha(b)=\tilde{b}$$

Ejemplo : $\gamma(t)=\cos t + i\sin t = e^{it},\ t\in[0,\pi/2]$. Una reparametrización sería

$$\tilde{\gamma}(t) = \sqrt{1-t^2}+it,\ t\in[0,1],\ |\tilde{\gamma}|^2 = 1-t^2+t^2=1$$

pues

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & [0,\pi/2] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \alpha(t)=\sin t \;\to\; \alpha'(t)=\cos t \end{array}$$

Propiedad: Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ entonces:

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

Dem: Sabiendo que $\tilde{\gamma}(\alpha(t)) = \gamma(t)$

$$\int_\gamma f \equiv \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\alpha(t)))\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}\alpha}\alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t}))\tilde{\gamma}'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t} = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

donde se ha renombrado $\alpha(t) = \tilde{t}, \tilde{a} = \alpha(a), \tilde{b} = \alpha(b)$ y se ha utilizado la regla de la cadena diversas veces

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}(\alpha(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}\tilde{t}},\ \alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tilde{t}$$

Proposición: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en D, acotado en D por M ($|f(z)| \leq M,\ \forall z \in D$). Sea γ un camino en D, entonces

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq ML(\gamma) \qquad \text{donde} \quad L(\gamma) \equiv \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ (longitud de } \gamma)$$

Dem:

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

5.2 Primitivas

Primitiva: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se dice que $f(z)$ tiene primitiva en D si

$$\exists F(z)/F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$$

$\to$ Se dice que f tiene tiene primitiva local en D si $\forall z_0 \in D,\ \exists B(z_0, r)$ en el que f tiene primitiva

$$\exists\text{primitiva} \in D \ \Rightarrow\ \exists\text{primitiva local} \in D$$

Ejemplo: $f(z) = 1/z$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene primitiva local, pero no primitiva global.

Teorema fundamental del cálculo en $\mathbb{C}$: Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino contenido en un dominio $C \subset \mathbb{C}$. Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua y con primitiva $F(z)$ en D. Entonces

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{5.2.1}$$

Dem:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_A^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= [\alpha(t)]_a^b + i[\beta(t)]_a^b = [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

Corolario: si además γ es cerrado

$$\oint_\gamma f = 0 \tag{5.2.2}$$

$*$ Proposición (independencia de camino): Sea f continua en un dominio D, entonces:

$$\begin{array}{c} f(z) \text{ tiene} \\ \text{primitiva en } D \end{array} \iff \begin{array}{c} \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f \\ a \in \gamma_0 \equiv a \in \gamma_1, b \in \gamma_0 \equiv b \in \gamma_1 \end{array} \iff \oint_\gamma f = 0,\ \forall \gamma \subset D \tag{5.2.3}$$

Dem:

(1) $\Rightarrow$ (2) ✓

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$\oint_\gamma f = \int_{\gamma_0} f + \int_{-\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$F(z) \equiv \int_\gamma f$$

donde γ conecta un $z_0 \in D$ fijado con $z \in D$ y la integral es independiente de γ por (2)

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\tilde{\gamma}} f - \int_\gamma f\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\tilde{\gamma}-\gamma} f \overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\hat{\gamma}} f = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^1 f(\hat{\gamma}(t))\hat{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}}{\cancel{h}}\int_0^1 f(z+ht)\cancel{h}\,\mathrm{d}t \overset{f \text{ continua}}{=} \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z)$$

donde

$$\begin{array}{rlcl} \hat{\gamma}: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & z+ht \end{array}$$

que es el camino que conecta z con $z+h$ mediante una recta

Ejemplo: $f(z) = 1/z$, $\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{C}; t \mapsto e^{it}$, $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{1}{z} = \int_0^\pi \frac{1}{\cancel{e^{it}}} i\cancel{e^{it}}\,\mathrm{d}t = i\pi \\ \displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{1}{z} = \int_0^\pi \frac{1}{\cancel{e^{-it}}}(-i)\cancel{e^{-it}}\,\mathrm{d}t = -i\pi \end{array}\right\} \oint_\gamma g = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f = \pi i - (-\pi i) = 2\pi i \neq 0$$

5.3 Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy (1825): Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ regular en } D \\ f' \text{ continua en } D \end{array}\right] \Rightarrow \oint_\gamma f = 0, \forall\gamma \text{ circuito tal que } \gamma, \text{Int}\gamma \subset D \text{ (homotópico a un punto en } D)$$

Demostración:

Se parte del T$\underline{^{ma}}$ de Kelvin-Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\,\mathrm{d}\vec{s}$$

donde $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Siendo el T$\underline{^{ma}}$ de Green un caso particular de éste. Sea $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y), 0) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = (0,0,\partial_x Q - \partial_y P)$

Entonces, recordando que $f = u + iv, \gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a,b]$

$$\oint_\gamma f = \int_a^b \mathrm{d}t(ux' - vy') + i\int_a^b (vx' + uy')\,\mathrm{d}t = \oint_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_\gamma (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

Ahora, se aplica el T$\underline{^{ma}}$ de Green sobre la primera integral, donde $P(x,y) = u(x,y)$ y $Q(x,y) = -v(x,y)$

$$\oint_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\int_{\text{Int }\gamma} (\partial_x Q - \partial_y P)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

y $\partial_i u, \partial_i v$ son continuas en γ, Int γ pues $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

$$\oint_\gamma f = \iint_{Int\ \gamma} (-\partial_x v - \partial_y u)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + i \iint_{Int\ \gamma} (\partial_x u - \partial_y v)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 + i0 = 0$$

Dado que f es regular en D, se cumplen las condiciones de CR, $\partial_x u = \partial_y v$ y $\partial_y u = -\partial_x v$, por lo que los integrandos son nulos.

Nota: Ya se vio que

$$\exists F \in D \ \Leftrightarrow \ \oint_\gamma f = 0\ \forall\gamma \in D \ \Leftrightarrow \ \oint_{\gamma_1} f = \oint_{\gamma_2} f \forall \gamma 1, \gamma_2 \text{ con iguales extremos}$$

pero

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ regular en } D \\ f' \text{ continua en } D \end{array}\right] \not\Longrightarrow \exists F \in D$$

Si los caminos no son simples, pueden descomponerse en varios caminos simples

$$\oint_\gamma f = \sum_i \oint_{\gamma_i} f$$

Teorema de Cauchy-Goursat: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ regular en } D \\ \cancel{f' \text{ continua en } D} \end{array}\right] \Rightarrow \oint_\gamma f = 0, \forall \gamma \text{ circuito tal que } \gamma, \text{Int}\gamma \subset D \text{ (homotópico a un punto en } D)$$

Teorema de Cauchy-Goursat reforzado: Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ regular en } D \text{ salvo, quizá, un número finito de puntos en los que } f \text{ es continua} \\ \cancel{f' \text{ continua en } D} \end{array}\right] \Rightarrow \oint_\gamma f = 0,$$

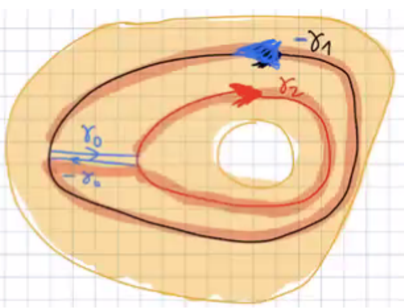
$\forall \gamma$ circuito tal que $\gamma, \text{Int}\gamma \subset D$ (homotópico a un punto en D)

Corolario: Sea f regular en D simplemente conexo, entonces

$$\oint_\gamma f = 0\ \forall \gamma \in D\ \exists F \in D \ \Leftrightarrow \ \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \subset D$$

T$^{\underline{ma}}$ de la deformación: Sea f regular en un dominio D, entonces

$$\oint_{\gamma_1} f = \oint_{\gamma_2} f\ \forall \gamma_1, \gamma_2 \text{ homotópico en } D \text{ (circuito)}$$

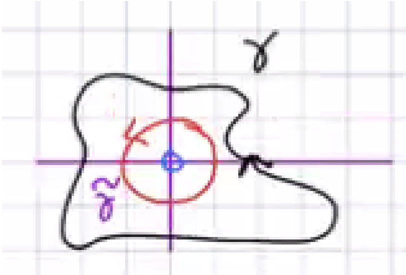


Demostración: Sea f regular en D y $\gamma \equiv \gamma_2 - \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_0$, por lo que es homotópico a un punto en D (γ, Int $\gamma \subset D$), por lo que puede aplicarse el T$^{\underline{ma}}$ de Cauchy

$$\oint_\gamma f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} f - \cancel{\int_{\gamma_0} f} - \int_{\gamma_1} f + \cancel{\int_{\gamma_1} f} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f$$

Un ejemplo de esto es el caso de $f = 1/z$

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} = \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} = 2\pi i$$



* f regular en $D \not\Rightarrow \exists F \in D$

* f regular en $D \Rightarrow \exists F$ local en D

Demostración: Partiendo de f regular en D: $\forall z_0 \in D, \exists f'(z)$ en $B(z_0, r)$. Dado que puede escogerse un $B(z_0, r)$ arbitrariamente pequeño, puede hacerse que éste sea simplemente conexo:

$$\left.\begin{array}{l} \forall z_0 \in D \\ \exists f'(z) \text{ en } B(z_0, r) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \forall z_0 \in D \\ \exists F(z) \text{ en } B(z_0, r) \end{array}$$

6 Fórmula integral de Cauchy

6.1 Índice de un camino cerrado

Índice de un camino cerrado: Sea γ un camino cerrado y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto no situado sobre γ. Se llama índice de γ con respecto a z_0 a:

$$n(\gamma, z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \tag{6.1.1}$$

Ejemplo: Sea γ un camino simple, $\gamma = |z| = 1$ en torno a 0 recorrido en sentido antihorario

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z - 0} = 1$$

y, si el camino es distinto, $\tilde{\gamma}$, pero es homotópico a γ, por el T$^{\underline{ma}}$ de la deformación

$$n(\tilde{\gamma}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z - 0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z - 0} = n(\gamma, 0) = 1$$

Téngase un camino más complicado como el siguiente

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2$$

6.2 Fórmula integral de Cauchy

Teorema: Sea f regular en un dominio D_f, γ un camino cerrado homotópico a $z_0 \in (D_f \setminus \gamma)$, entonces

$$\boxed{n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z} \tag{6.2.1}$$

Si z_0 se halla fuera de γ ($z_0 \notin \text{Int } \gamma$), entonces

$$n(\gamma, z_0 \notin \text{Int } \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z = 0$$

Demostración: defínase $g(z)$

$$g(z) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(z - f(z_0))}{z - z_0}, & z \neq z_0 \ (z \in D) \\ f'(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

por lo que $g(z)$ es regular en D salvo quizá en $z = z_0$. Sin embargo, la función es definitivamente continua pues

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{z \to z_0} g(z) \overset{?}{=} g(z_0) \\ \displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{?}{=} f'(z_0) \checkmark \end{array}\right] \Rightarrow \ g(z) \text{ es continua en } z_0 \ ,$$

dado que g es regular en D salvo quizá en $z = z_0$ y que γ es un camino cerrado homotópico a z_0 ($z_0 \notin \gamma$) en D, por el T$\underline{^{ma}}$ de Cauchy-Goursat reforzado

$$\boxed{\oint_\gamma g = 0} \rightsquigarrow \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - f(z_0) \underbrace{\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}_{2\pi i n(\gamma, z_0)} = 0$$

y despejando se obtiene

$$\boxed{n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

Ejemplo: (Potencia de la fórmula integral de Cauchy): $f(z) = e^z$

$$\oint_{\substack{|z|=1 \\ \text{antihorario}}} \frac{e^z}{z - 0} = 2\pi i f(0) = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

6.3 Derivadas sucesivas de una función regular

T$\underline{^{ma}}$: Sea $f(z)$ regular en un dominio D_f, entonces f tiene derivadas de cualquier orden en D_f, que cumplen

$$n(\gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z, \tag{6.3.1}$$

donde $k = 0, 1, \ldots$, γ es un camino cerrado homotópico a un punto en D_f ($\gamma, \operatorname{Int}\gamma \subset D_f$) y $z_0 \in (D_f \setminus \gamma)$ y se conoce como la **fórmula integral de Cauchy para las derivadas sucesivas**

Demostración:

$$n(\gamma, z_0) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega)}{(\omega - z)}\,\mathrm{d}\omega \quad \forall z \in D_f \setminus \gamma$$

derivando a la izquierda y derecha con respecto a z

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[n(\gamma, z) f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\oint_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega\right] \Rightarrow \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[n(\gamma, z)]} f(z) + n(\gamma, z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f(\omega)}{\omega - z}\right]\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\,\mathrm{d}\omega$$

El intercambio de la integral y la derivada puede demostrarse formalmente para f continua.

Ejemplo:

$$\oint_{\substack{|z|=1 \\ \text{antihorario}}} \frac{\overbrace{\sin z}^{f(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z = \cancelto{1}{n(\gamma, 0)} f'(0)\frac{2\pi i}{1!} = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$

Cabe recalcar que si f es **regular** en $D_f \Rightarrow \exists f^{(k)}$ en D_f. Por consecuencia $\exists f''$ en D, por lo que f' es continua en D, que es el motivo por el que el T$\underline{^{ma}}$ de Cauchy-Goursat es válido, pues que f sea regular implica automáticamente que su primera derivada es continua. Es decir, $\nexists f$ regular cuya primera derivada no sea continua, por lo que el T$\underline{^{ma}}$ de Cauchy-Goursat es, en cierto modo, ficticio, pues que la función sea regular implica automáticamente que su primera derivada sea continua.

6.4 Más consecuencias de las fórmulas integrales de Cauchy

T$\underline{^{ma}}$ de Morera ("inversa del T$\underline{^{ma}}$ de Cauchy"): Sea $\underline{f \text{ continua}}$ en un dominio D_f, entonces

$$\oint_\gamma f = 0 \quad \forall \gamma \text{ cerrado en } D \Rightarrow f \text{ regular en } D \tag{6.4.1}$$

Demostración: Utilizando el $T^{\underline{ma}}$ de la independencia del camino

$$\exists F \text{ en } D \;\Rightarrow\; F \text{ regular en } D \; (F' = f \text{ en } D) \;\Rightarrow\; \exists F^{k} \text{ en } D \;\Rightarrow\; \exists F''(z) = f'(z) \text{ en } D$$

Corolario: Sea f regular en un dominio D salvo quizá en un número finito de puntos en los que f es continua, entonces f es regular en todo D.

Esto implica el $T^{\underline{ma}}$ de Cauchy-Goursat reforzado

$$\oint_\gamma f = 0 \quad \forall \gamma,\ \cancel{\gamma, \text{Int}\,\gamma \subset D}\ \gamma \subset B(z_0, r) \;\Rightarrow\; f \text{ regular en } B(z, r)$$

$T^{\underline{ma}}$: Sea $f = u + iv$ regular en z_0, entonces todas las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en (x_0, y_0).

Demostración:

$$f \text{ regular} \;\Rightarrow\; f' \text{ continua} \;\wedge\; f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Desigualdad de Cuachy para $f^{(n)}(z)$: Sea f regular en un dominio D, sea $B(z_0, R) \subset D$, y γ la frontera de $B(z_0, R)$. Por continuidad, f está acotada en $\gamma : \exists M_R / |f(z)| \leq M_R \ \forall z \in \gamma$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M_R n!}{R^n}$$

Demostración:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \left| \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M_R n!}{R^n}$$

donde se ha utilizado

$$\left| \int_\gamma g \right| \leq M_g L(\gamma) \quad \text{donde } g = \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}},\ M_g = \frac{M_R}{R^{n+1}},\ \text{pues } |(\omega - z_0)^{n+1}| = |\omega - z_0|^{n+1} = R^{n+1}$$

$T^{\underline{ma}}$ de Liouville: f regular y acotada en $\mathbb{C} \;\Rightarrow\; f$ constante

Demostración: Que sea acotado implica que $\exists M / |f(z)| \leq M \ \forall z$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R \cdot 1!}{R^1} \leq \frac{M}{R} \ \forall R \;\Rightarrow\; f'(z_0) = 0 \;\Rightarrow\; f(z) = K$$

Dado que se puede tomar cualquier R (se cumple $\forall R$), esto implica que el módulo debe ser menor que cualquier real positivo.

$T^{\underline{ma}}$ fundamental del álgebra: Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $n \geq 1, a_n \neq 0$. Dado $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $\exists z_0 \in \mathbb{C} / p(z_0) = 0$.

Demostración: por reducción al absurdo, supóngase que

$$\nexists z_0 / p(z_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{p(z)} \text{ regular en } \mathbb{C} \xrightarrow[1/p(z)\to 0]{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} \text{ acotada en } \mathbb{C}$$

por lo que $1/p(z)$ sería constante, lo que es un absurdo.

6.A Ejemplos

Ejemplo 1:

$$f(z)=\frac{1}{z},\ \gamma_1(t)=e^{it},\ t\in[0,\pi],\ \gamma_2(t)=e^{-it},\ t\in[0,\pi]$$

$$1\quad \int_{\gamma_1}\frac{1}{z}=\int_0^\pi \frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,\mathrm{d}t=i\int_0^\pi \mathrm{d}t=i\pi \qquad \int_{\gamma_2}\frac{1}{z}=\int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}}(-i)e^{-it}\,\mathrm{d}t=-i\int_0^\pi \mathrm{d}t=-i\pi$$

por lo que

$$\oint_{\substack{|z|=1\\ \text{antihorario}}}\frac{1}{z}=2i\pi\ .$$

2 Otro modo de resolverlo es coger otra convención de argumento para cada integral para que el corte caiga fuera del dominio de integración y realizar las integrales en estos nuevos dominios

$$F(z)=\log|z|+i\widetilde{\mathrm{Arg}}\ \to\ \arg z\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}=F(-1)-F(1)=(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\widetilde{\mathrm{Arg}}(-1)}_{\pi})-(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\widetilde{\mathrm{Arg}}(+1)}_{0})=i\pi$$

$$\hat{F}(z)=\log|z|+i\widehat{\mathrm{Arg}}(z)\ \to\ \arg z\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}=\hat{F}(-1)-\hat{F}(1)=(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\widetilde{\mathrm{Arg}}(-1)}_{\pi})-(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\widetilde{\mathrm{Arg}}(+1)}_{2\pi})=-i\pi$$

3 Coger el camino desde $1+i\epsilon$, γ_1^ϵ, para que pueda utilizarse $\mathrm{Arg}(z)\in[0,2\pi]$:

$$\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_1^\epsilon}\frac{1}{z}=F(-1)-F(1+i\epsilon)=(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\mathrm{Arg}(-1)}_{\pi})-(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\mathrm{Arg}(1+i\epsilon)}_{0})=i\pi$$

y el camino γ_2^ϵ desde $1-i\epsilon$

$$\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_2^\epsilon}\frac{1}{z}=F(-1)-F(1-i\epsilon)=(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\mathrm{Arg}(-1)}_{\pi})-(\cancel{\log 1}^{\,0}+i\underbrace{\mathrm{Arg}(1ii\epsilon)}_{2\pi})=-i\pi$$

Ejemplo 2: Calcular $\oint_\gamma [z^{1/3}]_\mathrm{p}$ con γ una circunferencia centrada en $z=-1$ de radio $a\neq 1$ en sentido antihorario.

Si $a<1$

$$\oint_\gamma [z^{1/3}]_\mathrm{p}=0$$

bien por el $\mathrm{T}^{\underline{ma}}$ de Cauchy o porque existe primitiva local

Si $a>1$, γ pasa por el corte de rama de la función, por lo que puede volver a hacerse lo hecho en el apartado 3 del ejercicio anterior

$$\oint_\gamma [z^{1/3}]_\mathrm{p}=F(z_\mathrm{f})-F(z_\mathrm{i})=\frac{3}{4}[z_\mathrm{f}^{4/3}]_\mathrm{p}-\frac{3}{4}[z_\mathrm{i}^{4/3}]_\mathrm{p}=\frac{3}{4}\left\{(a-1)^{4/3}[e^{-i\epsilon}]_\mathrm{p}^{4/3}-(a-1)^{4/3}[e^{i\epsilon}]_\mathrm{p}^{4/3}\right\}=$$

$$=\frac{3}{4}(a-1)^{4/3}\left\{e^{\frac{4}{3}\mathrm{Log}(e^{-i\epsilon})}-e^{\frac{4}{3}\mathrm{Log}(e^{i\epsilon})}\right\}=\frac{3}{4}(a-1)^{4/3}\left\{e^{\frac{4}{3}2\pi i}-1\right\}=\frac{3}{8}(a-1)^{4/3}(-3+\sqrt{3}i)$$

Aunque puede hacerse con la definición de integral

$$\oint_\gamma [z^{1/3}]_\mathrm{p} = \int_0^{2\pi} [(a-1)e^{it}]_\mathrm{p}^{1/2}(a-1)ie^{it}\,\mathrm{d}t = (a-1)^{4/3}i\int_0^{2\pi}[e^{it}]_\mathrm{p}^{4/3}\,\mathrm{d}t = (a-1)^{4/3}i\int_0^{2\pi} e^{\frac{4}{3}\operatorname{Log} e^{it}}\mathrm{d}t$$

$$= (a-1)^{4/3}i\int_0^{2\pi} e^{\frac{4}{3}it}\,\mathrm{d}t = (a-1)^{4/3}\frac{3}{4}[e^{\frac{4}{3}it}]_0^{2\pi}$$

7 Series en $\mathbb{C}$

7.1 Sucesiones y series numéricas en $\mathbb{C}$

Sucesión: Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es una aplicación de los naturales a los complejos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & z_n \end{array}$$

Convergencia: Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ converge a $\omega \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ |z_n - \omega| < \epsilon \quad \forall n \geq N \ . \tag{7.1.1}$$

Su notación es $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \omega$ o $\{z_n\} \to \omega$.

Propiedades

* $z_n = a_n + ib_n \ \to \ \omega = a + ib \ \Leftrightarrow \ a_n \to a \ \wedge \ b_n \to b$
* El límite de $\{z_n\}$, si existe, es único.
* Si $z_n \to \alpha, \hat{z}_n \to \hat{\alpha}$ entonces
  - $z_n \pm \hat{z}_n \to \alpha \pm \hat{\alpha}$
  - $z_n \cdot \hat{z}_n \to \alpha \cdot \hat{\alpha}$
  - $z_n/\hat{z}_n \to \alpha/\hat{\alpha},\ \hat{\alpha}, \hat{z}_n \neq 0$

Proposición (sucesión/criterio de Cauchy): Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos:

$$\{z_n\} \text{ es convergente } \iff \{z_n\} \text{ es una sucesión de Cauchy, es decir} \tag{7.1.2}$$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ |z_n - z_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N \tag{7.1.3}$$

Proposición: Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos:

$$\{z_n\} \text{ es convergente } \Rightarrow \ \{z_n\} \text{ es acotada.} \tag{7.1.4}$$

Pero lo contrario no es cierto.

Serie: Dada una sucesión $\{z_n\}$ se define la sucesión de sumas parciales o serie como la sucesión $\{s_n\}$, donde

$$s_n \equiv \sum_{k=1}^{n} z_k \ . \tag{7.1.5}$$

Proposición: $\sum z_n$ converge $\Rightarrow \ z_n \to 0$. Lo contrario no es cierto.

Recordando algunas series de $\mathbb{R}$, se tienen:

- La serie armónica, $\sum 1/n$, es divergente
- La serie hiperarmónica, p-serie o serie de las p, $\sum 1/n^p$, diverge para $p \leq 1$ y converge para $p > 1$.
- La serie geométrica, $\sum \alpha^n$, diverge para $|\alpha| \geq 1$ y converge para $|\alpha| < 1$ a $1/(1-\alpha)$

Convergencia absoluta: Una serie $\sum z_n$ es absolutamente convergente si la serie real $\sum |z_n|$ converge

Proposición: $\sum z_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow$ $\sum z_n$ es convergente. Lo contrario no es cierto.

Recuérdense algunos resultados para series reales y extiéndanse algunos a series en $\mathbb{C}$:

* Criterio de la serie alternada (o de Leibniz):

$$\left.\begin{array}{c}\text{Sea } \{a_n \geq 0\} \text{ monótonamente decreciente}^* \ (a_{n+1} \leq a_n) \\ \text{con } a_n \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{la serie alternada} \\ \sum (-1)^n a_n \text{ converge.}\end{array}$$

[*] Sólo se requiere que decrezca a partir de un cierto N.

* Criterio de comparación: Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ dos series $\mathbb{R}$ con $0 \leq a_n \leq b_n$:
  - Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge,
  - Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge.

* Criterio de la raíz: Sea $\sum z_n$ una serie $\mathbb{C}$, para la que existe el límite $L \equiv \lim_{n\to\infty} |z_n|^{1/n}$.
  - $L < 1 \ \Rightarrow \ \sum z_n$ converge absolutamente,
  - $L > 1 \ \Rightarrow \ \sum z_n$ diverge.

  Esto permite demostrar que $\sum (z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$ diverge para $|z_0| > 1$ y converge para $|z_0| < 1$. Además converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_0)^n = \frac{1}{1 - z_0}$$

* Criterio del cociente: Sea $\sum z_n$ una serie $\mathbb{C}$, para la que existe el límite $L \equiv \lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n|$
  - $L < 1 \ \Rightarrow \ \sum z_n$ converge absolutamente,
  - $L > 1 \ \Rightarrow \ \sum z_n$ diverge.

7.2 Series de funciones

Sucesión de funciones: una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, es una aplicación que a cada número natural lo hace corresponder una función:

$$n \in \mathbb{N} \ \to f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{7.2.1}$$

Serie de funciones: Una serie de funciones es la sucesión de las sumas parciales:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \tag{7.2.2}$$

Hay dos tipos de convergencia

→ Convergencia puntual: $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $A \subset \mathbb{C}$ si $\{f_n(z_0)(z_0)\} \to f(z_0) \quad \forall z_0 \in A$:

$$\left.\begin{array}{l}\forall z_0 \in A \\ \forall \epsilon > 0\end{array}\right\} \exists N(z_0, \epsilon) \in \mathbb{N} \ / \ |f_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon \quad \forall n > N \tag{7.2.3}$$

→ **Convergencia uniforme**: $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $A \subset \mathbb{C}$ si

$$\left.\begin{array}{l}\forall z_0 \in A \\ \forall \epsilon > 0\end{array}\right\} \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ / \ |f_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon \quad \forall n > N \tag{7.2.4}$$

La convergencia uniforme en A implica convergencia puntual en A, y dado que las series son un tipo de sucesión, todo es igual para ellas.

Ejemplo: $\{x^n\} = \{x, x^2, x^3, \ldots\} \to f(x) = 0$ en $[0,1)$ puntualmente pero no uniformemente. Sin embargo sí converge uniformemente a $f(x) = 0$ en $[a,b] \subset (0,1)$. (Puede extenderse el intervalo de convergencia puntual a $(-1,1]$, pues se acercan a $f(x) = 0$ en $(-1,1)$ y a $f(x) = 1$ en $x = 1$).

Sea $\{f_n\} \to f$. Si f_n son continuas $\overset{?}{\Rightarrow}$ f continua. **NO necesariamente**:

Ejemplo:

$$f_n = \begin{cases} f(x) = -1, & x < -1/n \\ f(x) = nx - 1, & -1/n < x < 1/n \\ f(x) = 1, & x > 1/n \end{cases}$$

esta función tiende a la función escalón que salta de -1 a 1 en $x = 0$ y tiene valor 0 en $x = 0$.

Proposición:

$$\left.\begin{array}{l} \{f_n\} \text{ continuas en } A \subset \mathbb{C} \\ \{f_n\} \to f \text{ uniformemente en } A \subset \mathbb{C} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ continua en } A \\ \displaystyle\int_\gamma f_n = \int_\gamma f \quad \forall \gamma \subset A \end{array}\right.$$

Esto aplicado a series viene a decir que

$$\sum f_n \to S \Rightarrow \int_\gamma \sum_{k=1}^{n} f_k \to \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} f_k \qquad \forall \gamma \subset A \Rightarrow \boxed{\sum_k^\infty \int_\gamma f_k = \int_\gamma \sum_k^\infty f_k}$$

Teorema de la convergencia analítica (Weierstrass):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sean } \{f_n\} \text{ regulares en un abierto } A \subset \mathbb{C} \\ f_n \to f \text{ uniformemente \underline{en todo disco cerrado} en } A \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ es regular en } A \\ f_n' \to f' \text{ uniformemente en todo disco cerrado en} A \end{array}\right.$$

Aplicado a series: $S = \displaystyle\sum_n^\infty f_n \Rightarrow S' = \left(\sum_n^\infty f_n\right)' = \sum_n^\infty f_n'$

7.3 Series de potencias

Serie de potencias: serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(a-a_0)^2 + \cdots$, $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$.

Lema: (i) $\sum a_n z^n$ converge en $z_1 \neq 0 \Rightarrow \sum a_n z^n$ es absolutamente convergente $\forall z \ / \ |z| < |z_1|$

(ii) $\sum a_n z^n$ diverge en $z_2 \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge $\forall z \ / \ |z| > |z_2|$

Demostración:

(i)

$$\sum a_n(z_1)^n \text{ conv.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n(z_1)^n = 0 \Rightarrow \{a_n(z_1)^n\} \text{ acotada,}$$

$$|z| < |z_1| \Rightarrow \sum |a_n z^n| = \sum |a_n(z_1)^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \sum M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n = M\frac{1}{1 - |z/z_1|}.$$

(ii) Red. abs.: $\exists z \ / \ |z| > |z_0|$ con $\sum a_n z^n$ conv. $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n(z_1)^n$ conv $\times$

Teorema (radio de convergencia): Para toda serie de potencias $\sum a_n z^n$ (salvo quizá para aquellas que sólo convergen en $z = 0$ o que convergen en todo $\mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} \exists R \text{ (“radio de convergencia”) } / |z| < R \;\Rightarrow\; & \sum a_n z^n \text{ converge absolutamente} \\ |z| > R \;\Rightarrow\; & \sum a_n z^n \text{ diverge} \end{aligned}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \exists z_1 \neq 0 \;/\; \sum a_n (z_1)^n \text{ converge} \\ \exists z_2 \neq 0 \;/\; \sum a_n (z_2)^n \text{ diverge} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} |z_1| \leq |z_2|$$

R es el supremo de $G = \{z \;/\; \sum a_n z^n\}$
Lema $\Rightarrow$ conv. abs.

Teorema: Sea $\sum a_n z^n$ con $R \neq 0$ $\Rightarrow$ la convergencia es uniforme en $|z| \leq r < R$ $\Rightarrow$ puede derivarse término a término

Demostración: $\sum a_n z^n$ converge abs. en $B(0,R)$ $\Rightarrow$ $\sum |a_n z^n|$ converge en $B(0,R)$ $\xrightarrow{z=r>0}$ $\sum |a_n| r^n$ converge si $r < R$

$$\sum |a_n| r^n \;\Rightarrow\; \forall \epsilon > 0,\; \exists N \in \mathbb{N} \;/\; \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| r^k < \epsilon \text{ [Crit. Cauchy]} \quad \forall m > n \geq N(\epsilon)$$

además

$$\left| \sum_{k=n+1}^{a_k z^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k z^k| = \sum |a_k| |z|^k \overset{|z| \leq r}{\leq} \sum |a_k| r^k < \epsilon \text{ [Crit. Cauchy conv. unif.]} \quad \forall m > n \geq N(\epsilon)$$

por lo que $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en $|z| \leq r < R$

Cálculo del radio de convergencia

→ Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}$$

→ Criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \overset{?}{<} 1 \;\Rightarrow\; R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{si este límite } \exists$$

Ejemplo: $\sum z^n/n \to a_n = 1/n$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \;.$$

Llámese $S(z)$ a la suma a la suma infinita de los términos:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \;\Rightarrow\; S'(z) = \frac{1}{1-z} \text{ en } B(0,1)$$

y dado que $S(z)$ es regular en $B(0,1)$, se tiene que

$$S(z) = \int S'(z) = -\log(1-z) + K$$

o $f(z) = \widetilde{\text{Log}}(z) \quad \in [-\pi, \pi)$ y

$$S(z) = -\widetilde{\text{Log}}(1-z) + K$$

pero dado que $S(0) = 0$, $\widetilde{\text{Log}}(1-0) + K = 0 \;\Rightarrow\; K = 0$, por lo que $S(z) = -\widetilde{\text{Log}}(1-z)$.

Función analítica en z_0: Una función es analítica en z_0 si $\exists B(z_0, R')$ en el que $f(z)$ puede escribirse como una serie de potencias centrada en z_0:

$$\boxed{f(z) = \sum a_n (z - z_0)} \quad \forall z \in B(z_0, R')$$

poner definición de analítica en toda la función.

Teorema: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una función (analítica) definida en el disco de convergencia $B(z_0, R)$ de dicha serie de potencias. Entonces:

(i) f es regular en $B(z_0, R)$

(ii) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ con igual radio de convergencia, R.

(iii) $\exists! a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Demostración: $\sum a_n (z-z_0)^n$ converge uniformemente en $|z - z_0| \leq r < R$ por lo que, por el T$^{\underline{ma}}$ de la convergencia analítica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{es regular en } B(z_0, R) \;\Rightarrow\; f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \;\cdots$$

Por lo que f analítica en $z_0 \;\Rightarrow\; f$ regular en z_0.

$*$ Series de potencias inversas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n} = \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \ .$$

Renombrando $\omega = {}^1\!/_{z - z_0}$, se tiene una serie de potencias regular

$$\sum a_n \omega^n, \quad |\omega| < R$$

esto implica que

$$\frac{1}{|z-z_0|} < R \;\rightarrow\; |z - z_0| > \frac{1}{R} \ ,$$

por lo que este tipo de series tienen un anillo de convergencia. Un anillo de convergencia, genéricamente es $B(z_0, R_1, R_2) = \{z \ / \ R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ y, en este caso es $B(z_0, 1/R, \infty)$, es decir, que cubre todo el plano complejo salvo un disco abierto centrado en z_0 de radio $1/R$.

8 Desarrollos en serie de Taylor y Laurent

8.1 Serie de Taylor

Teorema de Taylor: Sea f regular en $B(z_0, r) \;\Rightarrow\; f$ admite expansión en serie de Taylor en $B(z_0, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r) \; . \tag{8.1.1}$$

Además: $r \leq R$ es el radio de convergencia de la serie, donde $R = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Como consecuencia de este Teorema se tiene que

$$f \text{ analítica en } z_0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ regular en } z_0 \; .$$

Que f sea regular en $\mathbb{R}$ no implica que f sea analítica en $\mathbb{R}$:

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

f es infinitamente diferenciable en $x = 0$ (y en todo $\mathbb{R}$). $f^{(n)}(0) = 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

...

Ejemplos:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \; |z| < 1 \;\Rightarrow\; a_n = 1 = \frac{f^{(n)}/(z_0)}{n!} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(0) = n!$$

Otro caso sería

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Su serie de Taylor en torno a $x = 0$ será

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \; , \; R = 1$$

La siguiente función

$$f(z) = \left\{ \begin{array}{ll} e^z & , \; \mathrm{Re}(z) < 1 \\ 0 & , \; \mathrm{Re}(z) \geq 1 \end{array} \right\}$$

tiene expansión en $B(0, 1)$.

Demostración del T$\underline{^{ma}}$ de Taylor:

f regular en $B(z_0, r)$ $\Rightarrow$ Fórmula integral de Cauchy: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\omega)\dfrac{1}{\omega - z}\,\mathrm{d}\omega,\ z \in B(z_0,\rho), \rho < r$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\omega)\frac{1}{\omega - z_0}\frac{1}{\dfrac{\omega - z}{\omega - z_0}}$$

donde

$$\frac{\omega - z}{\omega - z_0} = \frac{\omega - z_0 - (z - z_0)}{\omega - z_0} = 1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}$$

por lo que

$$\frac{1}{\omega - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\omega - z_0}} = \frac{1}{\omega - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0}\right)^n, \quad |z - z_0| < |\omega - z_0| \ \Rightarrow\ \left|\frac{z - z_0}{\omega - z_0}\right| < 1$$

y por tanto, $f(z)$ quedará como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\omega)\frac{1}{\omega - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0}\right)^n \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\omega)}{\omega - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0}\right)^n\right]\mathrm{d}\omega$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\left[\oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\omega\right]}_{a_n}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

8.2 Ceros de $f(z)$ analítica

cero de orden k: Sea f analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$. $f(z)$ tiene un cero de orden k en $z_0 \in A$ si

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ f''(z_0) = 0,\ \cdots,\ f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0\ . \tag{8.2.1}$$

Si se tiene un cero de orden $k = 4$, su desarrollo en serie de Taylor tendrá el siguiete aspecto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}(z - z - 0)^4 + \frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}(z - z_0)^5 + \cdots = (z - z_0)^4\left[\frac{f^{(4)}}{4!} + \frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}(z - z_0) + \cdots\right]\ .$$

Más genéricamente, si f tiene un cero de orden k en z_0

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) = (z - z_0)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}\ ,$$

$g(z)$ es regular y $g(z_0) \neq 0$. Esto quiere decir que los ceros de orden k finito de f analítica son aislados.

Ejemplo: $f(z) = (z - i)^3$. f tiene un orden de 3 en $z = i$ porque

$$f(i) = 0,\ f' = 3(z - i)^2\ \to\ f'(i) = 0,\ f'' = 6(z - i)\ \to\ f''(i) = 0,\ f''' = 6\ \to\ f'''(i) = 6 \neq 0\ .$$

Otro **ejemplo**: $f(z) = e^z - 1$. f tiene un cero de orden 1 en $z = 0$ porque

$$f(i) = 0,\ f' = e^z\ \to\ f'(0) = 1 \neq 0\ .$$

También podría hacerse uso de la expansión en serie de e^z:

$$e^z - 1 = \sum\frac{z^n}{n!} - 1 = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) - 1 = z\left(1 + \frac{z}{2!} + \cdots\right) = zg(z)$$

8.3 Teorema de unicidad y prolongación analítica

Teorema: Sean f y g funciones analíticas en $B(z_0, r)$. Sea $\gamma \subset B(z_0, r)$ un camino abierto, con $z_0 \in \gamma$. Entonces

$$f(z) = g(z)\ \forall z \in \gamma \implies f(z) = g(z)\ \forall z \in B(z_0, r) \tag{8.3.1}$$

Demostración:

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n\ \forall B(z_0, r), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{[f^{(n)}(z_0)]_\gamma}{n!}$$
$$g(z) = \sum \tilde{a}_n (z - z_0)^n\ \forall z \in B(z_0, r), \quad \tilde{a}_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{[g^{(n)}(z_0)]_\gamma}{n!}$$

por lo que son la misma función.

Teorema de unicidad de las funciones regulares: Sean f y g funciones analíticas en un dominio D. Sea $\gamma \subset D$ un camino. Entonces

$$f(z) = g(z)\ \forall z \in \gamma \implies f(z) = g(z)\ \forall z \in D$$

Ejemplo: e^z es la única función regular en todo $\mathbb{C}$ que coincide con e^x en $\mathbb{R}$.

Prolongación analítica

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } f_0(z) \text{ analítica en un dominio } D_0 \\ \text{Sea } f(z) \text{ analítica en un dominio } D \subset D_0\end{array}\right] \quad \text{con } f_0(z) = f(z) \text{ en } D_0 \subset D$$

Se dice entonces que f es la prolongación, continuación o extensión analítica de f_0 a D. Por el Teorema de unicidad esta extensión es única.

Ejemplo: $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad R = 1$ definida en $B(0,1)$. Su continuación analítica es $f(z) = {}^1\!/_{1-z}$ definida en $D = \mathbb{C} \setminus \{z = 1\}$.

Ejercicio 5 bol:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n^z]_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$$

8.4 Series de Laurent

Téngase, por ejemplo,

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}\ .$$

Esta función claramente no puede expandirse en Taylor en torno a $z = 0$, pues no es regular en este punto.

Serie de Laurent: Sea $f(z) : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en el anillo $B(z_0, r_1, r_2) \subset A$. Entonces

$$f(z) = \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}}_{\text{Parte regular}} + \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}}}_{\text{parte singular/principal } PP(f, z_0)} \qquad \forall z \in B(z_0, r_1, r_2) \tag{8.4.1}$$

donde la parte regular y la principal convergen absoluta y uniformemente en todo anillo cerrado contenido en $B(z_0, r_1, r_2)$ y

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)(z - z_0)^{n-1} \tag{8.4.2}$$

donde γ es una circunferencia centrada en z_0 y con radio $r \in (r_1, r_2)$.

Para el ejemplo puesto al inicio de la subsección, $f(z) = 1/[z(1-z)]$:

(a) $0 < |z| < 1,\ B(0,0,1)$. Reescribiendo $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum z^n = \frac{1}{z}\left(1 + z^2 + z^3 + \cdots\right) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots$$

(b) $1 < z < \infty,\ B(0,1,\infty)$

$$f(z) = \frac{1}{z^2\dfrac{1-z}{z}} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \cdots = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

Para las singularidades evitables se tiene que $\nexists p \ /\ b_n = 0\ \forall n > p$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{8.4.3}$$

8.5 Singularidades aisladas

Singularidad: Si $f(z)$ no es regular en z_0, se dice que z_0 es una singularidad de $f(z)$.

Singularidad aislada: z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ si existe un disco perforado centrado en z_0, $\exists B_{\text{p}}(z_0, r) = \{z/0 < |z - z_0| < R\}$, en el que $f(z)$ es regular.

El T$\underline{^{ma}}$ de expansión de Laurent garantiza que puede expandirse $f(z)$ en $B_{\text{p}}(z_0, R)$. Dependiendo de cómo sea la expansión, se clasifican las singularidades aisladas:

$\check{z}ast$ **Singularidad evitable**: $b_n = 0,\ \forall n$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\check{z}ast$ **Polo de orden** p: $b_p \neq 0,\ b_{n>p} = 0$.

$$f(z) = \frac{b_p}{(z-z_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-z-0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{p}\frac{b_1}{((z-z_0)^n)}$$

$\check{z}ast$ **Singularidad esencial**: $\nexists p \ /\ b_n = 0 \quad \forall n > p$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Función meromorfa: $f(z)$ es **meromorfa en** D si es regular en D salvo por singularidades evitables o polos.

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Puede demostrarse que

- z_0 es evitable $\Leftrightarrow\ \exists \lim_{z\to z_0} f(z)$ finito
- z_0 es evitable $\Leftrightarrow\ \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)] = 0$

Puede evitarse la singularidad se se define

$$\tilde{f}(z) = \left\{\begin{array}{ll} f(z), & z \neq z_0 \\ \lim_{z\to z_0} f(z), & z = z_0 \end{array}\right\}$$

Para un polo de orden p, se tiene que

$$f(z) = \underbrace{\frac{b_p}{(z-z_0)^p} + \overbrace{\frac{b_{p-1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0}}^{\text{puede ser 0}}}_{PP(f,z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_(z-z_0)^n$$

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Puede demostrarse que

* z_0 es un polo $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$
* z_0 es un polo de orden p $\Leftrightarrow$ p es el menor número natural para el que $\exists \underbrace{\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^p\right]}_{b_p} \neq 0$
* z_0 es un polo de orden p $\Leftrightarrow$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^p}$ en $B_p(z_0,R)$, donde $g(z)$ es regular en $B_p(z_0,R)$ y $g(z_0) \neq 0$
* z_0 es un polo de orden p $\Leftrightarrow$ z_0 es un cero de orden p de $1/f$

9 Teorema de los residuos

9.1 Definición y teorema

Definición: Sea z_0 una singularidad aislada (evitable, polo o esencial de $f(z)$, cuyo desarrollo en serie de Laurent en $0<|z-z_0|<R$ es

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

b_1 es el residuo de $f(z)$ en z_0: $\mathrm{Res}(f,z_0)$.

Como ya se vio

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)(z-z_0)^{n-1}\xRightarrow[n=1]{}b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\ ,$$

es decir, que el residuo da $\oint_\gamma f$. El teorema de los residuos generaliza este resultado.

Teorema de los residuos: Sea $f(z)$ una función regular en un conjunto D salvo quizá en un número finito de puntos (singularidades aisladas), $S=\{z_n\}$, $n=1,2\ldots,N$. Sea $\gamma\subset(D\setminus S)$ un camino cerrado y homotópico a un punto en D, entonces:

$$\boxed{\oint_\gamma f=2\pi i\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Res}(f,z_i)n(\gamma,z_i)}$$

Demostración:

$$\oint_\gamma f=\int_{\gamma'}f+\cancelto{0}{\int_{\uparrow\downarrow}f}+\sum_{i=1}^{N}n(\gamma,z_i)\int_{-\gamma_i}f=0\ \Rightarrow\ \oint_\gamma f=2\pi i\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Res}(f,z_i)n(\gamma,z_i)$$

9.2 Cálculo de residuos

Si un polo es simple, su expansión en torno a $B_\mathrm{p}(z_0,r)$

$$f(z)=\frac{b_1}{z-z_0}+\sum a_n(z-z_0)^n=\frac{1}{z-z_0}\underbrace{[b_1+a_0(z-z_1)+\cdots]}_{g(z)}$$

donde $g(z)$ es regular en $B(z_0,r)$, $g(z_0)\neq 0$ y

$$b_1\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] \tag{9.2.1}$$

Ejemplo: $\mathrm{Res}(^{e^z}/_z,0)$?

$$\lim_{z\to 0}\left[z\frac{e^z}{z}\right]=e^0=1$$

o

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots}{z}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\cdots\ \Rightarrow\ \mathrm{Res}(e^z/z,0)=1$$

En el caso de polo de orden p:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{1}{(p-1)!} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}} \left\{ (z - z_0)^p f(z) \right\} \right] \tag{9.2.2}$$

Ejemplo: $\operatorname{Res}(z/(1 - \cos z), 0)$

$$\lim \left[z \frac{z}{1 - \cos z} \right] = 2$$

o

$$\frac{z}{1 - \cos z} = \frac{z}{1 - (1 - \frac{z^2}{2} + \cdots)} = \frac{1}{\frac{z}{2} - \frac{z^3}{4!}} = \frac{2}{z} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z^2}{2} + \cdots}}_{h(z)}$$

si $h(z) = 1 + a_1 z + \cdots$

$$\frac{z}{1 - \cos z} = \frac{2}{z} + \frac{2a_1}{z} z + \cdots \Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 2 \tag{9.2.3}$$

Sea

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{h(z)}$$

con $\varphi,\ h$ regulares en z_0, $h(z_0) = 0$ donde h tiene un cero simple en z_0 $(h'(z_0) \neq 0)$. Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{\varphi(z)}{h(z)} \right] = \varphi(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} \overset{\text{L'H}}{=} \varphi(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{1}{h'(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{h'(z_0)} \tag{9.2.4}$$

Ejemplo: $f(z) = {}^{2z - +1}/_{z^4 - 1}$.

Esta función tiene singularidades cuando $z^4 - 1 = 0 \ \to z = \sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$, que son polos simples y

$$f(z) = \frac{2z + 1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \ ,$$

por lo que

$$\operatorname{Res}(f, z_i) = \frac{\varphi(z_i)}{h'(z_i)} = \frac{2z_i + 1}{4z_i^3}$$

y por tanto $\operatorname{Res}(f, 1) = 3/4,\ \operatorname{Res}(f, -1) = 1/4,\ \operatorname{Res}(f, i) = -1/2(1 + i),\ \operatorname{Res}(f, -i) = -1/2(1 - i)$

Sea γ la curva cerrada que rodea a los 4 puntos, entonces

$$\oint_\gamma f =$$

10 Aplicaciones del teorema de los residuos

10.1 Integrales de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} g\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\frac{1}{e^{it}}\underbrace{ie^{it}}_{\gamma'(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{g\left(\frac{\gamma(t)+\frac{1}{\gamma(t)}}{2}, \frac{\gamma(t)-\frac{1}{\gamma(t)}}{2i}\right)\frac{1}{i\gamma(t)}}_{f(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \oint_\gamma f = 2\pi i\sum_{i=1}^N \mathrm{Res}(f, z_i)n(\gamma, z_i)\end{aligned}$$

si f es regular en γ, Intγ salvo en $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$

Ejemplo de una g que cumple estas condiciones

$$g(t) = \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)},\ \ Q(t) \neq 0\ \forall t \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} = \int_0^{2\pi}\frac{2}{4+e^{ix}+e^{-ix}}\frac{1}{ie^{ix}}ie^{ix}\,\mathrm{d}x = -2i\oint_\gamma \frac{1}{4+z+\frac{1}{z}}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= -2i\oint \frac{1}{4z+z^2+1}\,\mathrm{d}z = -2i\oint_\gamma \frac{1}{[z-(-2+\sqrt{3})][(z-(-2-\sqrt{3})]} = 4\pi\mathrm{Res}(f, -2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

donde $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ y hay singularidades en $z^2+4z+1 = 0$, por lo que $z_\pm = -2 \pm \sqrt{3}$ de los cuales sólo z_+ cae dentro de γ.

$$\mathrm{Res}(f, -2+\sqrt{3}) = \lim_{z\to z_1}[(z-z_1)f(z)] = \lim\left[(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{(-2+\sqrt{3})-(-2-\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$

Otro modo de calcularlo es

$$\mathrm{Res}(f, z_1)\ \Rightarrow\ f(z) = \frac{1}{z-z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1/(z_1-z_2)}{z-z_1} + \cdots$$

10.2 Integrales impropias reales

Se dice que una integral es impropia cuando el integrando y/o el intervalo de integración no están acotados. En ese caso, se define la integral como un límite.

Si el integrando no está acotado en un punto $c \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\alpha\to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to c^+} \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{10.2.1}$$

Si el intervalo de integración es lo que no está acotado, la integral se define como

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\alpha\to\infty} \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to\infty} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{10.2.2}$$

Se dice que la integral impropia existe o converge si todos los límites existen separadamente y son finitos. Alternativamente la integral diverge o está indeterminada.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \lim_{\eta\to0^+} \int_\eta^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\epsilon\to0^+} \frac{1}{\epsilon} - 1 + \lim_{\eta\to0^+} -1 + \frac{1}{\eta} = +\infty \ .$$

Recuérdese el siguiente teorema de análisis real que puede servir para saber, por comparación, si una integral impropia existe:

Teorema: Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, b)$ (b puede ser ∞) y $|f(x)| \leq g(x)$

$$\exists \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow \ \exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{10.2.3}$$

Aplicación: f continua en $[a, \infty)$ y

$$\left.|f(x)| < \frac{M}{x^p} \ (p > 1) \quad \forall x > x_0 > 0\right] \ \Rightarrow \ \exists \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2.4}$$

Parte principal de Cauchy: para el intervalo no acotado

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x \ , \tag{10.2.5}$$

y para el integrando no acotado

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \ . \tag{10.2.6}$$

Si existe la integral impropia $\Rightarrow$ existe su parte principal de Cauchy y son iguales

10.3 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ con f continua en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.3.1}$$

Si uno se va los complejos, puede parametrizarse un camino a lo largo del eje real como $\gamma_0(t)=t,\ t\in[-R,R]$, por lo que

$$\int_\gamma f=\int_{-R}^{R} f(\underbrace{\gamma(x)}_{x})\cancel{\gamma'(x)}^{\,1}\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.3.2}$$

haciendo un camino que sea una semicircunferencia de radio R y tomando su límite cuando tienda infinito, se hallará la integral a lo largo de la recta real

$$\int_{\gamma_0} f=\oint_{\gamma_R} f-\int_{C_R} f \xRightarrow[\text{T}^{\underline{ma}}\text{ Residuos}]{R\to\infty} \int_{\gamma_0} f=2\pi i\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Res}(f,z_i)n(\gamma_R,z_i) \tag{10.3.3}$$

por lo tanto, siendo $H=\{z\ /\ \mathrm{Im}z>0\}$, es decir, el semiplano superior complejo.

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\equiv\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R} f-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f=2\pi i\sum_{z_i\in H}\mathrm{Res}(f,z_i)-0 \tag{10.3.4}$$

para que el primer termino sea cierto $f(z)$ debe ser regular en H salvo en $\{z_1,\dots,z_N\}\notin\mathbb{R}$ y para que el segundo sea 0 debe cumplirse el siguiente lema:

Lema 1: Sea $f(z)$ continua en el arco de circunferencia $C_R=\{z=Re^{i\theta},\theta\in(\theta_1,\theta_2)\subset[0,2\pi]\},\ \forall R>R_0$

$$\lim_{z\infty}(zf(z))=0\ \text{ en }\ \arg(z)\in(\theta_1,\theta_2)\subset[0,2\pi]\ \Rightarrow\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\ . \tag{10.3.5}$$

Demostración:

$$\left|\int_{C_R} f\right|\le M^f_{C_R}L_{C_R}=M^f_{C_R}(\theta_2-\theta_1)R \xRightarrow{R\to\infty} 0\cdot\infty \tag{10.3.6}$$

Si $z\cdot f(z)\xrightarrow{R\to\infty}0,\ RM_{C_R}\xrightarrow{R\to\infty}0.$

Finalmente, para que todo esto sea cierto, la parte principal de Cauchy debe coincidir con la integral, cosa que puede comprobarse utilizando el criterio de comparación

$$|f(x)|\le\frac{M}{x^p}\quad p>1,\ \forall|x|>R \tag{10.3.7}$$

Ejemplo: $f(x)={}^{Q(x)}/_{P(x)}$, $\deg(P)\ge\deg(Q)+2,\ P(x)\neq0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^6}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{x^6}\ \Rightarrow\ f(z)=\frac{1}{1+z^6}\xrightarrow{z\to\infty}\frac{1}{z^6}$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}=\frac{1}{2}2\pi i\sum_{z_i\in H_{\mathrm{up}}}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^6},z_i\right)\ \Rightarrow\ 1+z^6=0\ \to\ z=\sqrt[6]{-1}=\left\{e^{i\frac{(2n+1)\pi}{6}}\right\}_{n=0}^{5}$$

por lo que

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^6},z_i\right)=\lim_{z\to z_i}\left\{(z-z_i)\frac{1}{1+z^6}\right\}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{z\to z_i}\frac{1}{6z^5}=\frac{1}{6z_i^5}=\frac{z_i}{6z_i^6}=-\frac{1}{6}z_i$$

y por tanto, recordando que en el semiplano superior H_{up} los z_i son $\{e^{i\frac{(2n+1)\pi}{6}}\}_{n=0}^{2}$

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+x^6}=\frac{1}{2}2\pi i\frac{-1}{6}\left[e^{i\pi/6}+i+e^{i5\pi/6}\right]=\frac{1}{2}2\pi i\frac{-1}{6}\left\{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}+i-\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}$$

$$=\pi\frac{1}{6}\left[2\sin\frac{\pi}{6}+1\right]=\frac{\pi}{3}$$

10.4 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$ con f continua en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} e^{i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\oint_{\gamma_r} fe^{i\lambda z} - \lim_{r\to\infty}\int_{C_r} fe^{i\lambda z} \tag{10.4.1}$$

Lema 2: Sea $f(z)$ continua en el arco de circunferencia $C_R = \{z = Re^{i\theta},\ \theta \in (\theta_1,\theta_2) \subset [0,\pi]\},\ \forall R > R_0$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \text{ en } \arg(z) \in (\theta_1,\theta_2) \subset [0,\pi] \ \Rightarrow\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = 0 \ (\lambda > 0) \tag{10.4.2}$$

Ahora, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_i\in H_{\text{up}}} \operatorname{Res}(fe^{i\lambda z}, z_i) - \cancelto{0}{\lim_{z\to\infty}(f(z))} \tag{10.4.3}$$

Ejemplo: $\deg(P) \geq \deg(Q) + 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{i3x}\,\mathrm{d}x = \cdots$$

También pueden solucionarse integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}e^{ix}\,\mathrm{d}x\right] = \cdots$$

10.5 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, donde $f(z)$ tiene polos simples en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &\equiv \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{x_0-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \sum_{z_i\in H_{\text{up}}} \operatorname{Res}(f(z), z_i) + 0 + \pi i \operatorname{Res}(f(z), x_0)\end{aligned} \tag{10.5.1}$$

Para que esto se dé, para la primera integral (1) debe cumplirse que $f(z)$ es regular en H_{up} salvo en $\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$. Para la primera integral (2) debe cumplirse que $\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = 0$ en H_{up}.

Para la tercera integral debe cumplirse el **LEMA 3**:

$$f(z) \text{ tiene un polo simple en } z_0 \ \Rightarrow\ \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\theta_2-\theta_1)\operatorname{Res}(f, z_0) \tag{10.5.2}$$

donde $C_\epsilon : z_0 + \epsilon e^{i\theta},\ \theta \in [\theta_1,\theta_2] \subset [0, 2\pi]$

Demostración: En $B_p(z_0,\epsilon)$:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + h(z) \ \Rightarrow\ \int_{C_\epsilon} f &= b_1\int_{C_\epsilon}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{C_\epsilon} h(z)\,\mathrm{d}z = b_1[\operatorname{Log}(z+z_0)]_{z_0+\epsilon e^{i\theta_1}}^{z_0+\epsilon e^{i\theta_2}} \\ &= b_1\left\{\operatorname{Log}(\epsilon e^{i\theta_2}) - \operatorname{Log}(\epsilon e^{i\theta_1})\right\} = b_1 \operatorname{Log}\frac{\cancel{\epsilon}e^{i\theta_2}}{\cancel{\epsilon}e^{i\theta_1}} \\ &= b_1 \operatorname{Log}(e^{i(\theta_2-\theta_1)}) = b_1 i(\theta_2-\theta_1)\end{aligned}$$

10.6 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$, donde $f(z)$ tiene polos simples en $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x &\equiv \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{x_0-\epsilon} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^{R} f(x)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi i\sum_{z_i\in H_{\mathrm{up}}}\mathrm{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, z_i) + 0 + \pi i\,\mathrm{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, x_0)
\end{aligned}
\tag{10.6.1}
$$

Las condiciones se ven modificadas del siguiente modo: (2) $\lim_{z\to infty}[f(z)] = 0$ en $H_{\mathrm{up}},\ \lambda > 0$

Ejemplo V.14:

$$
\mathcal{P}\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\frac{\cos x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{\cos x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\boxed{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{e^{ix}}{x^2-a^2}}
$$

donde

$$
\frac{e^{ix}}{x^2-a^2}?\frac{1}{(x-a)(x+a)}e^{ix} \;\to\; \frac{1}{(z-a)(z+a)}e^{iz}
$$

por lo que

$$
\mathcal{P}\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\frac{\cos x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{i\pi\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z-a)(z+a)}, +a\right) + i\pi\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z-a)(z+a)}, -a\right)\right\}\ . \tag{10.6.2}
$$

10.7 $\int_0^{\infty} x^{\alpha}g(x)\,\mathrm{d}x$

$f(z) = [z^{\alpha}]_{\mathrm{p}}g(z)$, donde $g(z)$ es regular en $\mathbb{C}$ salvo en $\{z_1, z_2, \dots z_N\} \notin \mathbb{R}^+$

$$
2\pi i\sum_{z_i}\mathrm{Res}(f(z), z_i) = \int_0^{\infty} x^{\alpha}g(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\infty}^{0} f(xe^{(2\pi-\epsilon)i})\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(x) \tag{10.7.1}
$$

Deben cumplirse que la integral cuando $R\to\infty$ tienda a 0, $\lim_{z\to\infty}[zf(z)] = 0$, $\lim_{z\to 0}[zf(z)] = 0$ y un nuevo lema, el lema 4 que es que cuando $\epsilon\to 0$, la última integral tienda a 0, es decir:

Sea $f(z)$ continua en el arco de circunferencia $C_R = \{z = Re^{i\theta}, \theta\in(\theta_1,\theta_2)\},\ 0 < R < R_0$, entonces

$$
\lim_{z\to 0}[zf(z)] = 0 \text{ en } \arg(z)\in(\theta_1,\theta_2) \implies \lim_{R\to 0}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{10.7.2}
$$

Se tiene que

$$
I = \int_{\infty}^{0} f(e^{2\pi i}x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} f(r^{2\pi i}x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty}[e^{(2\pi-\epsilon)i}x]_{\mathrm{p}}^{\alpha}\overset{g(x)}{g(e^{(2\pi-\epsilon)i}x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} e^{2\pi\alpha i}x^{\alpha}g(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.7.3}
$$

y, tomando el límite cuando $\epsilon\to 0$

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\left[e^{(2\pi-\epsilon)i}x\right]_{\mathrm{p}}^{\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{e^{(2\pi-\epsilon)\alpha i}x^{\alpha}\right\} = e^{2\pi\alpha i}x^{\alpha}\ . \tag{10.7.4}
$$

Si, por ejemplo, $\alpha = 1/2$, se tiene

$$
\left[\sqrt{e^{(2\pi-\epsilon)i}x}\right]_{\mathrm{p}} \tag{10.7.5}
$$

por lo que la integral queda

$$\int_\infty^0 = -e^{2\pi\alpha i}\boxed{\int_0^\infty x^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x} - e^{2\pi\alpha i} I \tag{10.7.6}$$

y por tanto

$$2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_i) = I - e^{2\pi\alpha i} I = I(1 - e^{2\pi\alpha i}) \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{2 - e^{2\pi\alpha i}} 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res}(f, z_i) \tag{10.7.7}$$

Ejemplo V.13: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(2+x)}\,\mathrm{d}x$

$$zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} \cancel{z}\frac{1}{z_\mathrm{p}^{1/2}\cancel{z}} = 0, \qquad z \xrightarrow{z\to 0} z\frac{1}{z_\mathrm{p}^{1/2}2} \sim z_\mathrm{p}^{1/2} = 0 \tag{10.7.8}$$

por lo que la integral es

$$I = \frac{1}{\cancelto{1/2}{1 - e^{-\pi i}}} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{[\sqrt{z}]_\mathrm{p}} \frac{1}{z+2}, -2\right) \tag{10.7.9}$$

pero, razonando, el máximo b_i es b_1 que es, si se llama $h(z) = {}^1/_{[\sqrt{z}]_\mathrm{p}}$, $h(-2)$ (expandiendo en serie en torno a -2 puede verse).

Ejemplo:

10.8 $\int_0^\infty \log x g(x)\,\mathrm{d}x$ con $g(x)$ real, continua y par

Se dividirá la función en el semiplano superior, en su tramo real de $-\infty$ a 0, en su tramo real de 0 a ∞ y en la semicircunferencia en el plano complejo con $R \to \infty$, con lo que

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \log(z) g(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^\infty \log x g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \log x g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z \\ \operatorname{Re}(2\pi i \sum \operatorname{Res}) &= I + I + i\cancelto{0}{\kappa} + 0, \qquad \kappa \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{10.8.1}$$

10.9 $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

En primer lugar, se calculará la integral de $f(z)\operatorname{Log}(z)$. Como consecuencia, la integral cerrada de camino que evita el corte del eje real, es la suma de la integral de 0 a ∞, la integral de ∞ a 0, la circunferencia con $R \to \infty$ y la circunferencia en torno al punto de ramificación en 0 con $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z)\operatorname{Log}(z) &= \int_0^\infty f(z)\operatorname{Log}(z) + \int_\infty^0 f(z)\operatorname{Log}(z) + \int_{C_R} f(z)\operatorname{Log}(z) + \int_{C_\epsilon} f(z)\operatorname{Log}(z) \\ 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z)\operatorname{Log}(z), z_i) &= \int_0^\infty f(x)\operatorname{Log}(x)\,\mathrm{d}x + \int_\infty^0 f(xe^{(2\pi-\epsilon)i})\operatorname{Log}(xe^{(2\pi-\epsilon)i})\,\mathrm{d}x + 0 + 0 \\ &= \cancel{\int_0^\infty f(x)\operatorname{Log}(x)\,\mathrm{d}x} - \cancel{\int_0^\infty f(x)\operatorname{Log}(x)} - i2\pi \boxed{\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{10.9.1}$$

para lo que han de cumplirse que $f(z)$ sea regular en $\mathbb{C}$ salvo en $\{z_1, z_2 \ldots, z_N\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el lema 1, $\lim_{z\to\infty}[zf(z)\operatorname{Log}(z)] = 0$ y el lema 4, $\lim_{z\to 0}[zf(z)\operatorname{Log}(z)] = 0$.

Por tanto

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = -\sum \operatorname{Res}(f(z)\operatorname{Log}(z), z_i) \tag{10.9.2}$$

10.10 $\int_0^\infty R(x)(\log x)^m x^\alpha \,\mathrm{d}x$

Proposición: $\alpha \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} R(x) \text{ función rcional sin polos en } \mathbb{R}^+ \\ \lim\limits_{x\to\infty}\Big(x^{1+\alpha}R(x)\Big) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\Big(x^{1+\alpha}R(x)\Big) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^\infty R(x)(\log x)^m x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to\alpha}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\eta^m}\left[\int_0^\infty R(x)x^\eta \,\mathrm{d}x\right] \quad (10.10.1)$$

11 Análisis de Fourier

11.1 Series de Fourier

Serie de Fourier: Sea $f(x): A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Se define su serie de Fourier en $(c, c+2L) \subset A$ [a veces es en (a,b) con $a = c \ \wedge \ b = c+2L$, donde $L = (a+b)/2$] como

$$S(x) \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \qquad \text{donde } \alpha_n \equiv \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1.1}$$

(i) $\exists$ la serie de Fourier? $\exists \alpha_n$? (ii) $S(x)$ converge? (iii) $S(x)$ converge a f(x)?

(i) Existencia: $f \in \mathcal{L}^1(c, c+2L) \ \Rightarrow \ \exists \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Si f pertenece a $\mathcal{L}^1(c, c+2L)$ se dice que es **absolutamente integrable**, es decir

$$\int_c^{c+2L} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \tag{11.1.2}$$

Dem:

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2L}\left|\int_c^{c+2L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} \left|e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

(ii) Convergencia y representación: $S_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) \ \forall x \in (c, c+2L)$, entonces $S(x) = f(x)$. Téngase una función $\widetilde{f}(x)$ que sea igual en todo el intervalo $(c, c+2L)$ salvo en un punto x_0 en que $f(x) \neq f(x_0)$, entonces $S(x) = \widetilde{f}(x)$ a.e. (almost everywhere).

Es $f \in \mathcal{L}^1(c, c+2L)$ condición suficiente para que $S(x) = f(x)$ a.e.? NO

Teorema: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 a trozos en $[c, c+2L] \subset A$. Entonces $S(x)$ (la serie de Fourier de f en $(c, c+2L)$) converge a $f(x)$ en $[c, c+2L]$ salvo quizá en los bordes y en las discontinuidades de f:

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ es continua en } x \\ \dfrac{f(x+0^+) + f(x-0^+)}{2} & \text{si } f \text{ no es continua en } x \\ \dfrac{f(c+0^+) + f(c+2L-0^+)}{2} & \text{si } x = c \text{ o } x = c+2L \end{cases} \tag{11.1.3}$$

Que sea C^1 implica que f' es continua a trozos, es decir salvo, quizá, en un número finito de puntos $\{x_1, \ldots, x_N\}$ y $\exists f(x_n \pm 0^+)$ (finitos).

Si $S(x) \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \alpha_{-n} = \alpha_n^* \ \forall n$

Dem: $\Leftarrow$

$$S(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \ \Rightarrow \ S(x) \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$

$$\alpha_{-n} \equiv \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} e^{i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} \left(e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\right)^* = \alpha_n^*$$

Una condición suficiente para que la serie de Fourier converja y represente a la función f, $f \in \mathcal{L}^2(c, c+2L) \Rightarrow S(x) = f(x)$ a.e. en $(c, c+2L)$, es decir

$$\int_c^{c+2L} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \ . \tag{11.1.4}$$

Una condición necesaria y suficiente (si y sólo si) para que $S(x)$ converja a $f(x)$ es que $f(x)$ también sea periódica, es decir, $f(x) = f(x+2L)$ $\forall x$.

Sobre $\mathcal{L}^2(a,b)$: es un espacio vectorial con producto escalar y espacio métrico completo. El producto escalar se define como

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f^* \cdot g \, \mathrm{d}x \ . \tag{11.1.5}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{n\pi}{L}x} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{11.1.6}$$

es una base ortonormal, pues es base

$$f \in \mathcal{L}^2 \ \Rightarrow \ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \text{ (a.e.), donde } \widetilde{\alpha}_n \frac{1}{\sqrt{2L}} \ . \tag{11.1.7}$$

y es ortonormal

$$\frac{1}{2} \int_a^b e^{-i\frac{n\pi}{L}x} e^{i\frac{m\pi}{L}x} \, \mathrm{d}x = \delta_{nm} \ . \tag{11.1.8}$$

Además se tiene que

$$\alpha_n = \langle u_n, f(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_a^b e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x) \, \mathrm{d}x \ . \tag{11.1.9}$$

Se tiene la **identidad de Parseval**: Sea $f \in \mathcal{L}^2(c, c+2L)$

$$\frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \ . \tag{11.1.10}$$

La intuición para esto es que, en $\mathbb{R}^2$, se cumple Pitágoras: $\vec{c} = (a,b) = a\hat{u}_x + b\hat{u}_y$ y $|\vec{c}|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = a^2 + b^2$. Mientras tanto, en $\mathcal{L}^2(a,b)$ se tiene que $f = \sum \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum \sqrt{2L}\alpha_n \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{n\pi}{L}x}$ y se tiene que

$$\langle f, f \rangle \equiv \int_a^b |f|^2 \, \mathrm{d}x = \sum 2L|\alpha_n|^2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2L} \int_a^b |f|^2 \, \mathrm{d}x = \sum |\alpha_n|^2 \tag{11.1.11}$$

11.2 Forma trigonométrica de la serie de Fourier

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \tag{11.2.1}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \int_c^{c+2L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \cos\left(-\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) \, \mathrm{d}x + \frac{i}{L} \int_c^{c+2L} \sin\left(-\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) \, \mathrm{d}x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{L} \int \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) \, \mathrm{d}x - i \int \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) \, \mathrm{d}x \right\} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\left(\cos\frac{n\pi}{L}x + i\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&= \frac{1}{2}(a_0 - i\cancelto{0}{b_0})(1+i0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\left(\cos\frac{n\pi}{L}x + i\sin\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \cancelto{a_n}{a_{-n}} + i\cancelto{-b_n}{b_{-n}}\left(\cos\frac{n\pi}{L}x - i\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\} \qquad (11.2.3)
\end{aligned}$$

y si $f \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

La identidad de Parseval se transforma en

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\,. \qquad (11.2.4)$$

Teorema: Si $c = -L \;\Rightarrow\; (c, c+2L) = (-L, L)$

- f par: $f(-x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; b_n = 0\ \forall n \geq 1$.
- f impar: $f(-x) = -f(x) \;\Leftrightarrow\; a_n = 0\ \forall n \geq 0$.

Para desarrollar en serie de senos o cosenos una función $f(x)$ que no es par o impar, en primer lugar uno se construye una función par $\widetilde{f}(x)$ que coincida con $f(x)$ en $[0, L]$ y sea $f(-x)$ en $[-L, 0)$.

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en } [0, L] \\ f(-x) & \text{en } [-L, 0) \end{cases} \qquad (11.2.5)$$

por lo que

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}\widetilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\widetilde{a}_n + \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \cancelto{0}{\widetilde{b}_n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) \text{ en } (-L, +L) \qquad (11.2.6)$$

y

$$\widetilde{a}_n \equiv \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\widetilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cancelto{f(x)}{\widetilde{f}(x)}\,\mathrm{d}x \qquad (11.2.7)$$

por lo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ en } (0, L) \qquad (11.2.8)$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c_n =_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (11.2.9)$$

que permite desarrollar la serie de Fourier coseno de $f(x)$ en $(0, L)$.

Aplicación al cálculo de series numéricas

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) \quad \text{en } [c, c+2L] \qquad (11.2.10)$$

por lo que

$$f(0) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0) - \frac{1}{2}a_0 \qquad (11.2.11)$$

Ejemplo: $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$

$$a_n = 0, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)\overbrace{f(x)}^{x}\,\mathrm{d}x = \text{por partes} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

por lo que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n}\sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi,\pi) \xRightarrow{x=\pi/2} \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

11.3 Transformada de Fourier

¿Y si la función no es periódica pero quiere describirse en todo $\mathbb{R}$?

Téngase la función escalón con área unidad definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \tag{11.3.1}$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{\mathrm{L}} e^{ix\frac{n\pi}{L}}, \qquad \alpha_n^{\mathrm{L}} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-ix\frac{n\pi}{L}} f(x) \tag{11.3.2}$$

Si cada vez el intervalo de integración utilizado es mayor (por ejemplo, en cada iteración es el doble), la aproximación cada vez se acercará más a la función real.

Serie de Fourier de $f(x)$ en $(-L,+L)$:

$$f(x)\text{“=”}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \qquad \text{donde } \alpha_n = \frac{1}{2L}\alpha_n e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.3.3}$$

puede reescribirse α_n utilizando $k_n = {}^{n\pi}/_{L},\ n \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$k_n = \left\{\ldots, -\frac{2\pi}{L}, -\frac{\pi}{L}, 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \ldots\right\} \Rightarrow \Delta k = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \alpha_n = \frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta k}{2\pi}F_{k_n}^{\mathrm{L}} \tag{11.3.4}$$

por lo que

$$f(x)\text{“=”}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} e^{-ik_n x} f(x)\,\mathrm{d}x\right] e^{ik_n x}\Delta k \xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k \tag{11.3.5}$$

Por tanto, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y sea $k \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de $f(x)$ está dada por

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x \ \to\ \mathcal{F}\{f(x)\}(k) \tag{11.3.6}$$

y, la transformada inversa se define: Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y sea $x \in \mathbb{R}$, su transformada inversa está dada por

$$f(x) \equiv \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k)\frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \ \to\ \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x) \tag{11.3.7}$$

Puede uno realizarse las mismas preguntas que para las series.

- ∗ Existencia: $\exists F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall k?$
- ∗ Convergencia: $\exists \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} \equiv \mathcal{P}$
- ∗ Representación

Para la **existencia** se tiene que es condición suficiente que la función sea absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty,\infty)$, es decir, $\mathcal{L}^1(-\infty,\infty)$.

Nótese que:

- $f \in C^1(a,b) \ \Rightarrow\ \mathcal{L}^1(a,b)$
- $f \in C^1(a,b) \ \not\Rightarrow\ \mathcal{L}^1(-\infty,\infty)$

En el anterior tema se vieron ya las condiciones suficientes para que $\exists F(k)$. Estas condiciones hacen referencia a las propiedades de $f(x)$ al extenderla a $\mathbb{C}$:

(1) $f(z)$ es regular en el semiplano superior si $k<0$ (semiplano inferior si $k>0$) salvo en un número finito de singularidades que no caen sobre el eje real.

(2) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ en el semiplano superior si $k>0$ (semiplano inferior si $k>0$).

Estas condiciones no sólo permiten asegurar que $F(k)$ existe sino que además permiten calcularla en términos de unos pocos residuos

Convergencia y representación: $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = f(x)$? (a.e.)

Para series de Fourier se vio una condición suficiente: $f \in C^1(a,b)$, pero ahora se ha visto que ni siquiera garantiza la existencia de $F(k)$. Se requiere algo más:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1(-\infty,\infty) \text{ a trozos} \\ f \in \mathcal{L}^1(-\infty,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = f(x) \tag{11.3.8}$$

salvo en los **puntos de discontinuidad** de f, en los que

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = \frac{f(x_0-0^+)+f(x_0+0^+)}{2}\ . \tag{11.3.9}$$

Hay otras condiciones suficientes, por ejemplo, $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$.

Ejemplo: Transformada de Fourier de la distribución gaussiana $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{2}a^2k^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+iak\right)^2}\,\mathrm{d}x = ae^{-\frac{1}{2}a^2k^2}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+iak\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{a}$$

$$\xrightarrow[t\in(-R_1,R_2)]{\gamma(t)=\frac{t}{a}+iak} \mathcal{F}f = \int_\gamma e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2} f(\gamma(x))\gamma'(x)\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \mathcal{F}f = ae^{-\frac{1}{2}a^2k^2}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_\gamma f,\ f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\int_{-\frac{R_1}{a}}^{\frac{R_2}{a}} f(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{R_1}{a}}^{\frac{R_2}{a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{-\frac{R_1}{\sqrt{2}a}}^{\frac{R_2}{\sqrt{2}a}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

Para que las integrales por los caminos γ_1 y γ_2 sean nulas

$$|f(z)| = \left|e^{-\frac{z^2}{2}}\right| = \left|e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}}\right| = \left|e^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2+2ixy)}\right| = \left|e^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}e^{-ixy}\right| = e^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}\left|\cancelto{1}{e^{ixy}}\right| = e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}y^2}$$

Por lo que

$$\mathcal{F}f = a\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}a^2k^2} \tag{11.3.10}$$

Propiedades de la transformada de Fourier:

- Paridad: $\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-k)$
  - Esto implica que si $f(x)$ es par/impar $\Rightarrow$ $F(k)$ par/impar.
- Conjugación: $\mathcal{F}\{f(x)^*\} = F(-k)^*$
  - $f(x)$ real $\Rightarrow$ $F(k) = F(-k)^*$
  - $f(x)$ real y par $\Rightarrow$ $F(k)$ real y par
  - $f(x)$ imaginaria pura e impar $\Rightarrow$ $F(k)$ imaginaria pura e impar
- Traslación: $\mathcal{F}\{e^{iax}f(x)\} = F(k-a)$ y $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iak}F(k)$
- Dilatación: $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{k}{a}\right) \Rightarrow \sigma_x\sigma_k \geq 1$
- Derivación: $\mathcal{F}f'(x) = ikF(k)$ y $\mathcal{F}\{xf(x)\} = iF'(k)$ [condiciones suficientes: $f \in C^1$, $f, f', xf(x) \in \mathcal{L}^1$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$]
- Identidad de Parseval: $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$

Convolución: sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, su convolución, $(f*g)(x)$ es

$$(f*g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \tag{11.3.11}$$

Se trata de una operación no local, es decir, que su valor en x depende del valor de f y g en todo $\mathbb{R}$.

Propiedad: Para f_1 y f_2 bien comportadas:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(k)F_2(k) \qquad \mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = F_1(k) * F_2(k) \tag{11.3.12}$$

Es fácil ver que con la definición clásica de transformada $\nexists\mathcal{F}\{e^{iax}\}$, pues

$$\mathcal{F}f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}e^{iax}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-a)x}\,\mathrm{d}x \tag{11.3.13}$$

es decir, que una onda de frecuencia fija no puede descomponerse en frecuencias??

Sin embargo, $\mathcal{F}\{e^{iax}\} = 2\pi\delta(k-a)$