

Cálculo II

Apuntes de Rubén Navarro Bonanad basados en las transparencias y clases
de cálculo II de la UV realizadas por Domingo Martínez García

Índice

1	Complementos de cálculo diferencial en \mathbb{R}^n	2
1.1	Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena.	2
1.2	Derivadas direccionales y gradiente.	3
1.3	T^{mas} de la función implícita e inversa.	4
2	Derivadas de orden superior. Extremos	6
2.1	Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor en \mathbb{R}^n	6
2.2	Valores extremos y puntos de silla. Matriz Hessiana.	7
2.3	Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.	9
3	Integrales múltiples	11
3.1	Integrales dobles sobre un rectángulo.	11
3.2	Integrales dobles sobre regiones elementales.	13
3.3	Cambio de variable en la integral doble. Coordenadas polares.	14
3.4	Integrales triples.	15
3.5	Cambio de variable en la integral triple. Coordenadas cilíndricas y esféricas.	17
3.6	Aplicaciones de las integrales múltiples.	19
4	Campos vectoriales. Cálculo vectorial	21
4.1	Campos vectoriales.	21
4.2	Operadores diferenciales.	22
4.3	Coordenadas curvilíneas. Vectores y operadores.	25
5	Integrales curvilíneas y de superficie	29
5.1	Integrales de línea.	29
5.2	Integrales de superficie.	32
5.3	T^{ma} de Green en el plano.	35
5.4	T^{ma} de Stokes	36
5.5	T^{ma} de Gauss-Ostrogradski.	37

1 Complementos de cálculo diferencial en \mathbb{R}^n

1.1 Derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena.

Trayectoria en \mathbb{R}^n : aplicación $\vec{r}(t) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La colección C de punto $\vec{r}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama curva, y $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$ son sus extremos

En $\mathbb{R}^3 : \vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son **funciones componentes**

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

velocidad: Si $\vec{r}(t)$ es diferenciable, su velocidad es:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Éste es un vector tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$ y por tanto la curva C .

$\vec{r}(t)$ es diferenciable si cada una de sus componentes lo es.

Como $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

Composición de funciones de una variable; Supóngase: $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \wedge f : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = f \circ g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Composición de funciones de varias variables; Suponer: $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \wedge f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\Rightarrow h = f \circ g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p; h(x_1, \dots, x_n) = (f \circ g)(x_1, \dots, x_n) = f(g(x_1, \dots, x_n))$$

Regla de la cadena para funciones de una variable:

$$\left. \begin{array}{l} w = f(x) \text{ diferenciable respecto de } x \\ x = g(t) \text{ diferenciable respecto de } t \end{array} \right\} \Rightarrow w(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(x(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}$$

Regla de la cadena para funciones de varias variables:

Caso en que $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \wedge f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Sea $w(x_1, \dots, x_n)$ una función diferenciable de n variables x_j y cada $x_j(t_1, \dots, t_m)$ una función diferenciable de m variables t_j , entonces se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}} \text{ para cada } i = 1, \dots, m$$

Regla de la cadena caso general: Sean las funciones $g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Supóngase que g es diferenciable en $\vec{x}_0 \equiv \mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y se cumple:

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$$

1.2 Derivadas direccionales y gradiente.

Sea $f(x, y)$ definida en R . La recta que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ en dirección del vector unitario \mathbf{u} :

$$P_0\vec{P} = s\vec{u} \Rightarrow (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = s(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + su_1 \\ y = y_0 + su_2 \end{cases} s \in (-\infty, \infty)$$

Estas son las ecs. paramétricas de la recta, donde s (parámetro) \equiv distancia/longitud de "arco" desde P_0 en dirección de \mathbf{u} .

Derivada direccional: La derivada de f en un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector unidad $\mathbf{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ es:

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{\mathbf{u}, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \equiv (D_{\vec{u}}f)_{P_0} \equiv D_{\vec{u}}f(P_0)$$

Dado que el límite exista.

Esta derivada direccional da la razón o tasa de cambio de f en P_0 en la dirección de \mathbf{u} . Su **interpretación geométrica** es la pendiente de la recta tangente a C en $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{i} \Rightarrow (D_{\vec{i}}f)_{P_0} = f_x(P_0); \text{ Si } \vec{u} = \vec{j} \Rightarrow (D_{\vec{j}}f)_{P_0} = f_y(P_0)$$

Generalización: Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + s\vec{u}) - f(\vec{x}_0)}{s} \in \mathbb{R}^m \text{ con } \vec{u}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n; s \in \mathbb{R}$$

Derivada direccional y vector gradiente:

Tma 1.1: Si $f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** en una región abierta que contiene a $P_0(x_0, y_0)$, entonces existen todas las derivadas direccionales y se cumple:

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = (\vec{\nabla}f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}$$

Tma 1.2: Sea f diferenciable en \mathbf{x}_0 y $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ se cumple:

- 1.- $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f . La derivada en esa dirección es $\|\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)\|$.
- 2.- La función no varía en una dirección perpendicular a $\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0)$

T^{ma} 1.3: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la **superficie de nivel** S , definida por $f(x, y, z) = c \Rightarrow (\vec{\nabla} f)_{P_0} \perp S$

Si $\vec{r}(t)$ es una trayectoria sobre S que pasa por P_0 :

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f(P_0) \perp \vec{r}' \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(P_0) \perp \text{plano tgte. en } P_0} \quad (\vec{\nabla} f \perp S \text{ en } P_0)$$

Ecuación del plano tgte. a S : $\vec{\nabla} f(P_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$:

$$\boxed{f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0}$$

Si $f(x, y) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 entonces $(\vec{\nabla} f)_{P_0} \perp$ curva de nivel en P_0

Ec. de la recta tgte. a la curva de nivel en (x_0, y_0) : $\vec{\nabla} f(P_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$

$$\boxed{f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) = 0}$$

1.3 T^{mas} de la función implícita e inversa.

Definición: Sea la ecuación $F(x, y) = 0$, F definida en $D \subset \mathbb{R}^2$. Si en un entorno de $x_0, \exists y = f(x)/F(x, f(x)) = 0$, entonces se dice que $F(x, y) = 0$ define a y como una **función implícita** de x .

Definición: Sea la ec. $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$, F definida en $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Si en un entorno de $\mathbf{x}_0, \exists z = f(\mathbf{x}_0)/F(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)) = 0$, entonces se dice que $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$ define a z_0 como una **función implícita** de \mathbf{x}_0

T^{ma} de la función implícita para $n + 1$ variables: Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Se denotarán los puntos de \mathbb{R}^{n+1} por (\mathbf{x}, z) donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge z \in \mathbb{R}$. Si (\mathbf{x}_0, z_0) es un punto de \mathbb{R}^{n+1} en el que se cumplen las condiciones suficientes:

- 1) $F(\mathbf{x}, z)$ está definida y es de clase C^1 en un entorno de (\mathbf{x}_0, z_0)
- 2) $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \wedge F_z(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$

Entonces $F(\mathbf{x}, z) = 0$ define una única función implícita $z = f(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en entorno de x_0 y z en un entorno de z_0 . Además, $z = f(\mathbf{x})$ es de clase C^1 en un entorno de \mathbf{x}_0 y se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Función implícita para un sistema: Para despejar m variables \mathbf{z} de m ecs $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \\ F_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \end{array} \right\} (1) \text{ Sea: } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix} \text{ Evaluado en } (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0), \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^m$$

T^{ma} general de la función implícita: Si $\Delta \neq 0$, entonces las ecs. (1) definen de manera única las funciones implícitas de clase C^1 :

$$z_i = f_i(\mathbf{x}) \text{ para } i = 1, \dots, m$$

cerca de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Sus derivadas se pueden calcular por derivación implícita.

T^{ma} de la función inversa: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ siendo A un conjunto abierto y $\mathbf{x}_0 \in A$. Si f es de clase C^1 y el jacobiano $J(f)(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces:

1) f tiene inversa $f^{-1} = g/\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ para \mathbf{x} en un entorno de \mathbf{x}_0 e \mathbf{y} en un entorno de $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

2) g es de clase C^1 en un entorno de $f(\mathbf{x}_0)$ y $Dg(f(\mathbf{x}_0)) = [Df(\mathbf{x}_0)]^{-1}$

2 Derivadas de orden superior. Extremos

2.1 Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor en \mathbb{R}^n .

Para $f(x, y)$ se definen las derivadas parciales de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{derivadas parciales} \\ \text{iteradas} \end{array}$$

De manera análoga pueden definirse derivadas parciales de órdenes superiores y puede extenderse a funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \equiv f_{yyx}; \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \equiv f_{yyxx} \dots$$

Clase C^n : Una función es de clase C^n en un abierto D si **todas sus derivadas parciales hasta orden n existen** y son **continuas en D** .

Fórmula de Taylor para 2 variables: Sea $f(x, y)$ una función de clase C^{n+1} en una región abierta centrada en (x_0, y_0) , entonces en esta región se cumple:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f + R_n(x, y)$$

$$\text{donde } h = (x - x_0); k = (y - y_0) \wedge R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f \Big|_{(x_0+ch, y_0+ck)}$$

con $c \in [0, 1]$

La extensión a tres variables es inmediata.

Fórmula de Taylor para m variables: Sea $f(x, y)$ una función de clase C^{n+1} en una región abierta centrada en $(\vec{x}_0), \vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ y $h_i = (x - x_i)$ entonces en esta región se cumple:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k + R_n(\vec{x}); R_n(\vec{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n+1} f \Big|_{(\vec{x}_0+c\vec{h})} \quad \text{con } c \in [0, 1]$$

Fórmula de Taylor hasta orden 2 para funciones de n variables:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \frac{1}{2!} \Delta \vec{x}^T \cdot H f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \dots$$

Se debe tener en cuenta que $\Delta \vec{x} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \equiv$ matriz columna $(n \times 1)$, $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \equiv$ matriz fila $(1 \times n)$

La matriz Hessiana: $Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

2.2 Valores extremos y puntos de silla. Matriz Hessiana.

Funciones de dos variables. Extremos locales

Definiciones: Esté $f(x, y)$ definida en una región A que contenga el punto (a, b) :

1. $f(a, b)$ es un **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos del dominio (x, y) en un disco abierto centrado en $(a, b) \Rightarrow \forall B((a, b), r) \in A, f(a, b) \geq f(x, y)$
2. $f(a, b)$ es un **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos del dominio (x, y) en un disco abierto centrado en $(a, b) \Rightarrow \forall B((a, b), r) \in A, f(a, b) \leq f(x, y)$

Punto crítico: Punto interior del dominio de $f(x, y)$ donde $f_x = f_y = 0 \vee \nexists f_x \vee \nexists f_y$

La noción de punto crítico es extensible a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

T^{ma} 2.2 - Test de la primera derivada para extremos locales: Si $f(x, y)$ tiene un mínimo o máximo local en un punto interior (a, b) de su dominio y si sus primeras derivadas parciales existen, entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} f)_{\vec{x}} = 0$.

La superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tgte. en un extremo local, siempre que exista dicho plano.

Sin embargo existen limitaciones a esto, pues $\vec{\nabla} f = 0 \nRightarrow$ **extremo local**. Esto se debe a que si $(\vec{\nabla} f)_{\vec{x}} = 0$ puede ser un punto de silla (puntos críticos que no son extremos). Además, los extremos se localizan en puntos críticos (incluye puntos en los que la derivada no existe) y en puntos frontera.

Punto de silla: Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene un **punto de silla** en (a, b) si para todo disco abierto centrado en (a, b) hay puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) > f(a, b)$ y puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) < f(a, b) \Rightarrow$ **$f(a, b)$ punto de silla si $\forall B((a, b), r), r > 0, \exists f(x, y) > f(a, b) \wedge \exists f(x, y) < f(a, b)$**

Sea $f(x, y)$ de clase C^2 . Considérese su matriz Hessiana: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$, cuyo determinante es el Hessiano:

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

T^{ma} 2.3 Test de la segunda derivada: Supóngase que las primeras y segundas derivadas $f(x, y)$ son continuas en un disco centrado en (a, b) y $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ [f es de clase C^2 en un entorno de (a, b) , que es pto. crítico]. Entonces:

- i) f tiene un **máximo local** en (a, b) si $H_2 > 0$ en $(a, b) \wedge f_{xx} < 0$.
- ii) f tiene un **mínimo local** en (a, b) si $H_2 > 0$ en $(a, b) \wedge f_{xx} > 0$.
- iii) f tiene un **punto de silla** en (a, b) si $H_2 < 0$.
- iv) el test es **inconclusivo** en (a, b) si $H_2 = 0$. En este caso uno debe de **buscarse la vida**. Estos puntos se denominan **degenerados**.

Funciones de tres variables. Extremos locales

Sean $H_1 = f_{xx}$, $H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$, $H_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$

los menores principales. de la **matriz Hessiana**: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$

Supóngase que en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ se cumple $\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = 0$ y ningún $H_k = 0$. Entonces:

- 1) Si $H_1 > 0, H_2 > 0 \wedge H_3 > 0$, f tiene un **mínimo local** en \mathbf{x}_0 .
- 2) Si $H_1 < 0, H_2 > 0 \wedge H_3 < 0$, f tiene un **máximo local** en \mathbf{x}_0 .
- 3) f tiene un **punto de silla** en el resto de casos. Si $\det(H)(\mathbf{x}_0) = 0$, el test no es concluyente; \mathbf{x}_0 es degenerado.

Funciones de n variables. Extremos locales

T^{ma} 2.4 Test de la segunda derivada para extremos locales: Sea f una función de clase C^2 en un entorno de un punto crítico \mathbf{x}_0 ($\vec{\nabla} f(\mathbf{x}_0) = 0$ o $Df(\mathbf{x}_0) = 0$). Sea $Hf(\mathbf{x}_0)$ la matriz Hessiana de f evaluada en \mathbf{x}_0 y H_k , con $k = 1, 2, \dots, n$, la secuencia de menores principales de $Hf(\mathbf{x}_0)$. Supóngase que $H_n = \det Hf(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Entonces:

- 1) Si $H_k > 0, \forall k$, f tiene un **mínimo local** en \mathbf{x}_0 .
- 2) Si $H_k < 0$ para k impar y $H_k > 0$ para k par, f tiene un **máximo local** en \mathbf{x}_0 .
- 3) Si no se cumplen ni 1) ni 2), f tiene un **punto de silla** en \mathbf{x}_0
 Si $\det Hf(\mathbf{x}_0) = 0$, el test no es concluyente (\mathbf{x}_0 degenerado).

Elementos de topología en \mathbb{R}^n

Definiciones: Un punto $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ es un *punto interior* de D si $\exists r > 0 / B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$. El conjunto de todos los puntos interiores forman el *interior* de D . Se dirá que $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ es un *punto frontera* de D si toda bola $B(\mathbf{x}_0, r)$ contiene tanto puntos dentro de D como fuera de D . El conjunto de todos los puntos frontera se denomina *frontera* o *borde* de D y se denota ∂D . Un conjunto es *abierto* si sólo contiene puntos interiores. Un conjunto es *cerrado* si contiene su frontera.

Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es *acotado* si $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \|\mathbf{x}\| < M, \forall \mathbf{x} \in D$. Un conjunto D es *no acotado* si no \exists una bola de radio finit que lo contiene. Un conjunto D es *compacto* si es cerrado y acotado.

Funciones de dos variables. Extremos absolutos.

Definiciones: Supóngase $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que un punto $(a, b) \in D$ es un **máximo (mínimo) absoluto** de f si $f(x, y) \leq f(a, b) (f(x, y) \geq f(a, b)), \forall (x, y) \in D$.

T^{ma} 2.5 (T^{ma} de Weierstrass): Sea D compacto (cerrado y acotado) en \mathbb{R}^n , y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza en D sus valores máximo y mínimo absolutos (f está acotada en D .)

Estrategia para hallar extremos absolutos en conjuntos compactos: Sea $f(x, y)$ una función contiua definida en D compacto en \mathbb{R}^2 , limitado por una curva cerrada suave. Para hallar los ectremos absolutos:

- 1) Hallar los puntos críticos de f en el interior de D .
- 2) Hallar los puntos críticos de f en la frontera de D .
- 2) Calcular el valor de f en todos los puntos críticos y seleccionar el mayor (o mayores) y menor (o menores) de ellos.

2.3 Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Desea obetenerse los extremos de una función de varias variables, por ejemplo, $f(x, y)$, cuando x e y no son independientes. Es decir, están relacionadas por la ecuación $g(x, y) = k$ (**ligadura** o **restricción**).

Maximizar (o minimizar) $f \Rightarrow$ encontrar el mayor (menor) valor de $c / f(x, y) = c$ intersecta a $g(x, y) = k$. En ese punto (o puntos) las curvas de nivel de f y g tienen la misma tangente/normal

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{\nabla} g \Rightarrow \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

T^{ma} 2.6. Multiplicadores de Lagrange:

Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Sea $\mathbf{x}_0 \in A, g(\mathbf{x}_0) = k$ y S el conjunto de nivel $g(\mathbf{x}) = k$. Supóngase que $\vec{\nabla}g(\mathbf{x}_0) \neq \vec{0}$.

Si $f|_S$ (f restringida a S) alcanza un máximo o mínimo local de S en \mathbf{x}_0 , entonces $\exists \lambda$ tal que:

$$\vec{\nabla}f(\mathbf{x}_0) = \lambda \vec{\nabla}g(\mathbf{x}_0)$$

$\lambda \equiv$ multiplicador de Lagrange. La condición $\vec{\nabla}f = \lambda \vec{\nabla}g$ es necesaria pero no suficiente.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla}f(\vec{x}) = \lambda \vec{\nabla}g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = k \end{array} \right\} n + 1 \text{ ecs.} \Rightarrow \lambda \text{ y } \vec{x}_0(\vec{x}_0 \text{ pto. crítico de } f|_S)$$

Multiplicadores de Lagrange con una restricción

El método de los multiplicadores de Lagrange (2 vars.):

Sean $f(x, y) \wedge g(x, y)$ diferenciables con $\vec{\nabla} \neq \vec{0}$ en el conjunto de nivel $g(x, y) = k$.

Para determinar los valores extremos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y) = k$, si existen:

- (a) Hallar todos los valores de $x, y \wedge \lambda / \vec{\nabla}f(x, y) = \lambda \vec{\nabla}g(x, y) \wedge g(x, y) = k$
- (b) Evaluar f en todos los puntos del apartado (a). El mayor/menor valor sera el máximo/mínimo de f .

El método de los multiplicadores de Lagrange (n vars., n-1 restricciones):

Si se desea obtener los extremos de $f(\vec{x})$ si las variables están sujetas a n-1 restricciones:

$$\boxed{g_i(\vec{x}) = k_i, i = 1, \dots, n - 1} \quad (1)$$

f, g_i son funciones C^1 , $\vec{\nabla}g_i \nparallel \vec{\nabla}g_j, i \neq j$ ($\vec{\nabla}g_i$ son linealmente independientes)

$\Rightarrow \vec{\nabla}f = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{\nabla}g_i$ que junto con las ecs. (1) determinan el sistema

3 Integrales múltiples

3.1 Integrales dobles sobre un rectángulo.

Partición de un intervalo: Sea el intervalo cerrado $[a, b]$. El conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} / a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ se llama partición de $[a, b]$.

La partición P divide $[a, b]$ en n subintervalos cerrados.

Selección de puntos en $P : \mathcal{S} = \{c_k / c_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n\}$

Esté $f(x)$ definida en $[a, b] \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ Esto es la *Suma de Riemann* para f en $[a, b]$

Norma de una partición: La norma de una partición P de un intervalo $[a, b]$, denotada $\|P\|$, es la anchura máxima de todos los subintervalos: $\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

Sea $f(x, y) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Y sea el rectángulo $R \subset A : R \equiv [a, b] \times [c, d] :$
 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Se realizará una partición de R en n partes rectangulares y se seleccionará un punto (x_k, y_k) en el k -ésimo sub-rectángulo:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Esto es la *Suma doble de Riemann* de f en R . $\{S_n\} \equiv$ sucesión de sumas de Riemann.

Si la norma de la partición $\|P\| = \max\{\Delta x_k, \Delta y_k; k = 1, \dots, n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Si el límite no depende de la partición y la selección de puntos $\rightarrow f$ es **integrable** en R .

Integral doble: Si la sucesión de sumas de Riemann de una función $f(x, y)$ en R , $\{S_n\}$, converge a un límite S cuando $n \rightarrow \infty$ y S es independiente de la partición de R y de la selección de puntos de la partición, entonces f es **integrable** en R y S es la **integral doble** en R :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Volumen como integral doble: La integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$ en R es el volumen, V_R , de la región que está sobre R y bajo la gráfica de f :

$$V_R = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Si $f(x, y) = 1 \Rightarrow \iint_R dx dy \equiv A(R) = (b - a)(d - c)$

T^{ma} 3.1. Existencia de integrales dobles: Cualquier función $f(x, y)$ **continua** en una región rectangular $R \equiv [a, b] \times [c, d]$ es integrable en R .

T^{ma} 3.2. Integrabilidad de funciones acotadas: Si $f(x, y)$ es una función acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de puntos donde es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R .

Definición: Una función $f(x, y)$ está acotada en $A \subset \mathbb{R}^2$ si $\exists M \in \mathbb{R}^+ / |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in A$

T^{ma} 3.3.: Dadas dos funciones f y g integrables en R , se cumple:

- 1) Linealidad: $\iint_R (f \pm g) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy \pm \iint_R g(x, y) dx dy$
- 2) Homogeneidad: $\iint_R c f(x, y) dx dy = c \iint_R f(x, y) dx dy \quad c \in \mathbb{R}$
- 3) Dominación: $\iint_R f(x, y) dx dy \geq \iint_R g(x, y) dx dy$ si $f \geq g \quad \forall (x, y) \in R$
en particular: $\iint_R f(x, y) dx dy \geq 0$ si $f(x, y) \geq 0$ en R
- 4) Aditividad: $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$
- 5) Desigualdad min-max: $m \cdot A(R) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq M \cdot A(R)$
si $m \leq f(x, y) \leq M$ en R con $A(R) = (b - a)(d - c) \equiv \text{área de } R$

T^{ma} 3.4. T^{ma} de Fubini (1^a forma): Si $f(x, y)$ es continua en la región rectangular $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, entonces:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

$$\text{Caso particular: Si } f(x, y) = g(x)h(y) \Rightarrow \boxed{\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy}$$

3.2 Integrales dobles sobre regiones elementales.

Regiones elementales en \mathbb{R}^2 :

- a) **Tipo I:** $D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x); g_1, g_2$ continuas $\wedge g_1 \leq g_2$ en $[a, b]$.
- b) **Tipo II:** $D : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y); h_1, h_2$ continuas $\wedge h_1 \leq h_2$ en $[c, d]$.
- c) **Tipo III:** Simultáneamente de los dos tipos o una combinación de ambos.

Sea D una región acotada en $\mathbb{R}^2 \wedge f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D . Se define:

$$f^* : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

f^* es continua en R , excepto quizás en ∂D , que es un dominio de medida nula (en \mathbb{R}^2).

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy \equiv V \\ \text{Si } f(x, y) = 1 \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy \equiv A(D) \end{cases}$$

T^{ma} 3.5. T^{ma} de Fubini (2ª forma)(integrales iteradas): Si $f(x, y)$ es continua en una región D , entonces:

- 1) Si D es de **tipo I**: $D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- 2) Si D es de **tipo II**: $D : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Orden de integración

Si la región es de tipo III (simultáneamente tipo I y II) \Rightarrow puede integrarse primero en y y luego en x , o viceversa. Pero el orden de integración puede hacer la integral más o menos sencilla.

3.3 Cambio de variable en la integral doble. Coordenadas polares.

Cambio de variable

Es, en general, una función de clase C^1 e inyectiva (invertible):

$$T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$$

Una aplicación T es inyectiva en D^* si para $(u, v), (u', v') \in D^*, T(u, v) = T(u', v')$ implica:
 $u = u' \wedge v = v'$

$$\text{Jacobiano : } J(T) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(D(T)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

T^{ma} 3.6: Cambio de variable para integrales dobles

Sean D y D^* regiones elementales en \mathbb{R}^2 y $T : D^* \rightarrow D$ una función de clase C^1 e inyectiva en D^* (salvo quizás en un subdominio de medida cero) y tal que $D = T(D^*)$. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable e D , entonces:

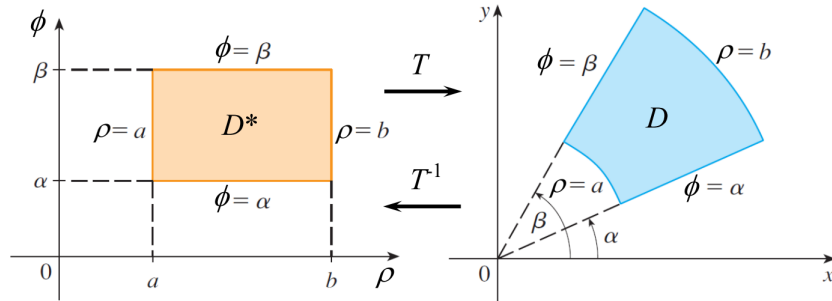
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{D^*} (f \circ T)(u, v) dA'$$

Coordenadas polares

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho > 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi$$

geometría de la transformación



3.4 Integrales triples.

Integral triple de una caja (paralelepípedo rectangular)

Sea $f(x, y, z) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Y sea la caja $B \subset A : B \equiv [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$
 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$

Partición de B en n sub-cajas y se selecciona un punto (x_k, y_k, z_k) en la k -ésima sub-caja:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$$

Propiedades de la integral triple en ua caja

- Las funciones continuas en B son integrables.
- Las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en funciones continuas son integrables.
- Se cuplen todas las propiedades básicas (T^{ma} 3.3).

T^{ma} 3.7. T^{ma} de Fubini (reducción a integrales iteradas): Si $f(x, y, z)$ es continua en $B : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q$ entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz = \dots$$

Integrales triples en regiones elementales

Sea E una región acotada en \mathbb{R}^3 y $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Se define $f^* : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, B una caja cualquiera $/ E \subset B \Rightarrow f^*(x, y, z) \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in E \\ 0 & (x, y, z) \notin E \end{cases}$
 f^* es continua en B , salvo quizá en ∂E , que es un dominio de medida nula en \mathbb{R}^3 .

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz$$

Si $f(x, y, z) \geq 0 \Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \text{volumen en } \mathbb{R}^4$

Si $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \iiint_E dx dy dz \equiv V(E)$

Regiones elementales en \mathbb{R}^3

a) Tipo I: $E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$, es decir :

$$E = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

o bien

$$E = \{(x, y, z) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

b) Tipo II: como las de tipo I, pero intercambiando $x \leftrightarrow z$

c) Tipo III: como las de tipo I, pero intercambiando $y \leftrightarrow z$

d) Tipo IV: simultáneamente de tipo I, II y III (o combinaciones)

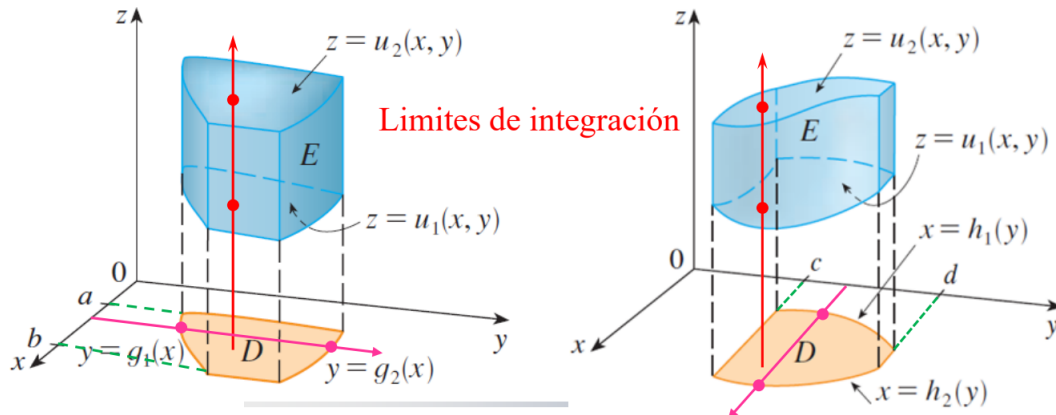
Integrales triples sobre regiones elementales

T^{ma} 3.8: T^{ma} de Fubini (integrales iteradas): Si $f(x, y, z)$ es continua en una región E de tipo I, entonces:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

o bien:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$



3.5 Cambio de variable en la integral triple. Coordenadas cilíndricas y esféricas.

Cambio de variable en \mathbb{R}^3

T es una función de clase C^1 e inyectiva (invertible):

$$T : E^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

T es invertible si $J(T) \neq 0$ (T^{ma} de la función inversa)

$$J(T) \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det(D(T)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

T^{ma} 3.9: Cambio de variable para integrales triples

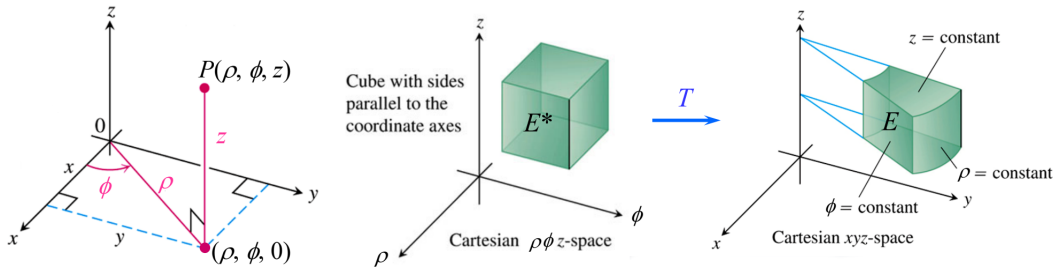
Sean E y E^* regiones elementales en \mathbb{R}^3 y $T : E^* \rightarrow E$ una función de clase C^1 e inyectiva en E^* (salvo quizá en un subdominio de medida cero) y tal que $E = T(E^*)$. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en E , entonces:

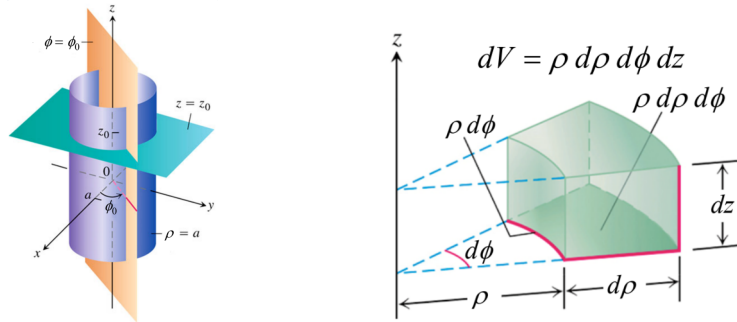
$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Coordenadas cilíndricas

$$T : E^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow E \subset \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho > 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Jacobiano: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho \Rightarrow \boxed{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E^*} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho d\rho d\phi dz}$

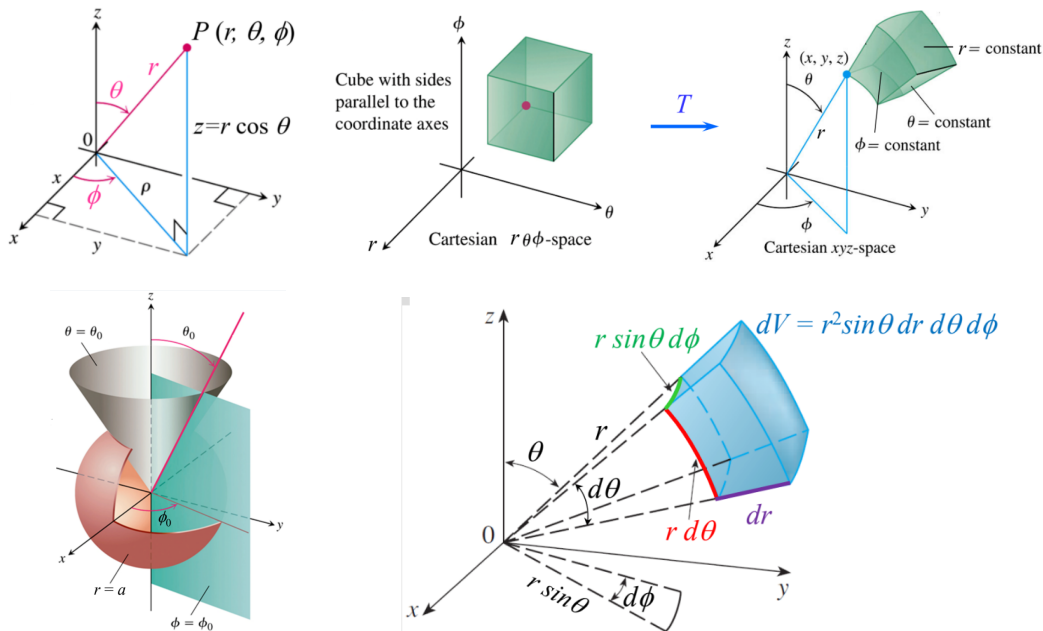




Coordenadas esféricas

$$T: E^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow E \subset \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & r \geq 0 \\ y = r \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi] \\ z = r \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

Jacobiano: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta \Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E^*} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$



3.6 Aplicaciones de las integrales múltiples.

Valor promedio de funciones

$$f(x) : [a, b] \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy} \quad \begin{array}{c} \nearrow A(D) \end{array}$$

$$f(x, y, z) : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{f} \equiv av(f) = \frac{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E dx dy dz} \quad \begin{array}{c} \nearrow V(E) \end{array}$$

Centros de masas

Figuras planas

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D x dm \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_D y dm \quad \text{con } M = \iint_D dm \quad , \quad dm = \sigma(x, y) dx dy$$

donde $\sigma(x, y) \equiv$ densidad superficial de masa

Figuras tridimensionales

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E x dm \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E y dm \quad ; \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_E z dm \quad ; \quad M = \iiint_E dm$$

donde $dm = \delta(x, y, z) dx dy dz$ y $\delta(x, y, z) \equiv$ densidad volumétrica de masa

Momentos de inercia

Figuras planas

$$I_x = \iint_D y^2 dm = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dx dy \quad ; \quad I_y = \iint_D x^2 dm = \iint_D x^2 \sigma(x, y) dx dy$$

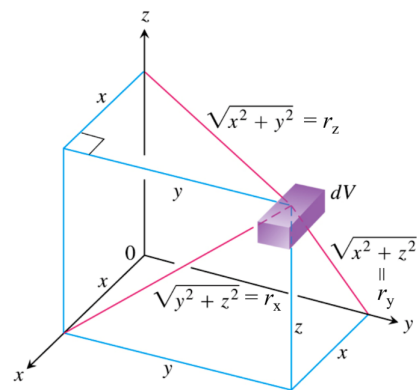
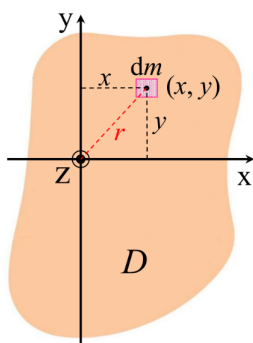
$$I_z = \iint_D (x^2 + y^2) dm = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy = I_x + I_y$$

Figuras tridimensionales

$$I_x = \iiint_E r_x^2 dm = \iiint_E (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_y = \iiint_E r_y^2 = \iiint_E (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_z = \iiint_E r_z^2 = \iiint_E (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz$$



4 Campos vectoriales. Cálculo vectorial

4.1 Campos vectoriales.

Campo vectorial: Un campo vectorial en \mathbb{R}^n es una función $\tilde{\mathbf{F}} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$

$n = 2 \Rightarrow$ Campo vectorial en el plano: $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$

$n = 3 \Rightarrow$ Campo vectorial en el espacio: $\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

Un campo vectorial es de clase C^k si cada componente es una función de clase C^k (\exists todas sus derivadas parciales hasta orden k y son continuas).

De aquí en adelante, todos los campos vects. son de al menos clase C^1 .

Campos vectoriales gradiente:

Aquellos que pueden expresarse como el gradiente de una función escalar de clase C^1 (diferenciable) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En el caso tridimensional:

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$f \equiv$ función potencial de $\tilde{\mathbf{F}}$ o potencial escalar

$\tilde{\mathbf{F}}$ tiene en cada punto la dirección de máximo crecimiento de f y magnitud la derivada direccional de f en esa dirección (T^{ma} 1.2)

$\tilde{\mathbf{F}} \perp$ en cada punto a los conjuntos de nivel (sup. en \mathbb{R}^3) de f (T^{ma} 1.3). $\tilde{\mathbf{F}}$ es \perp a las sups. equipotenciales ($f = \text{cte}$).

Líneas de campo (flujo): Si $\tilde{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial, una línea de campo (flujo) es una trayectoria $\tilde{\mathbf{r}}(t)/\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}(t))$. Es decir, $\tilde{\mathbf{F}}$ da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$.

Son soluciones de un **sistema de ecs. difs.**:

$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$; si $\tilde{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ es línea de campo

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{r}}'(t) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = M(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = N(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = P(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

4.2 Operadores diferenciales.

Operador nabla

Se define como el operador vectorial en \mathbb{R}^3 : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$

El gradiente es el operador nabla actuando sobre una función escalar f y que da como resultado un vector:

$$\Rightarrow \text{ en } \mathbb{R}^3 : \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Divergencia de un campo vectorial:

Si $\tilde{\mathbf{F}} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = M \vec{i} + N \vec{j} + P \vec{k}$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , la divergencia de $\tilde{\mathbf{F}}$ es el campo escalar:

$$\text{div} \tilde{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Es decir, la divergencia de $\tilde{\mathbf{F}}$ es el producto escalar del operador nabla por $\tilde{\mathbf{F}}$.

Si un campo tiene **divergencia nula**, como el CM, se denomina **solenoidal**.

Interpretación: Si $\tilde{\mathbf{F}}$ es el campo de velocidades de un fluido, $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}$ representa la razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del fluido (en el plano, razón de expansión del área). Si $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} < 0$, el fluido se está comprimiendo.

Rotacional de un campo vectorial:

Si $\tilde{\mathbf{F}} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = M \vec{i} + N \vec{j} + P \vec{k}$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , el rotacional de $\tilde{\mathbf{F}}$ es el campo vectorial:

$$\begin{aligned} \text{rot} \tilde{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Si un campo tiene **rotacional nulo**, como el CE, se denomina **irrotacional**

Rotacional escalar: Si $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$

Interpretación del rotacional:

El rotacional y las rotaciones: Sea un sólido rígido B que gira en torno al eje z :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} = 2\tilde{\omega}$$

El rotacional del campo de velocidades es un campo vectorial con dirección el eje de rotación y magnitud el doble de la velocidad angular.

El rotacional y las rotaciones en un flujo de un fluido: Si un campo vectorial representa el flujo de un fluido, $\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}$ en P es el doble de ω de un pequeño sólido que rota como el fluido en P . Si $\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ en P , el fluido está libre de rotaciones en P (no tiene remolinos). El campo es **irrotacional**.

Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (vacío)

Campos variables con el tiempo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Campos estáticos (no dependientes del tiempo)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Operador laplaciano

Es un operador de segundo orden, definido como: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv \nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Puede actuar sobre funciones escalares o vectoriales (clase C^2):

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad ; \quad \Delta \tilde{\mathbf{F}} \equiv \nabla^2 \tilde{\mathbf{F}} = \Delta F_x \vec{i} + \Delta F_y \vec{j} + \Delta F_z \vec{k}$$

T^{ma} 4.1: Los campos gradiente son irrotacionales:

Sea f una función escalar de clase C^2 , entonces:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

T^{ma} 4.2: Los rotacionales tienen divergencia nula (son solenoides):

Sea $\tilde{\mathbf{F}}$ un campo vectorial de clase C^2 , entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = 0$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Propiedades de los operadores diferenciales:

1. $\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2. $\vec{\nabla}(cf) = c\vec{\nabla}f, \quad c = \text{cte}$
3. $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
4. $\vec{\nabla}(f/g) = (g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g)/g^2, \quad \forall \mathbf{x}/g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{G}}) = \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$
6. $\vec{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{G}}) = \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} + \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{G}}$
7. $\vec{\nabla} \cdot (f\tilde{\mathbf{F}}) = f(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nabla}f$
8. $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{F}} \times \tilde{\mathbf{G}})$
9. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = 0$
10. $\vec{\nabla} \times (f\tilde{\mathbf{F}}) = f(\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) + (\vec{\nabla}f) \times \tilde{\mathbf{F}}$
11. $\vec{\nabla}(\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{G}}) = (\tilde{\mathbf{F}}\vec{\nabla})\tilde{\mathbf{G}} + (\tilde{\mathbf{G}}\vec{\nabla})\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{G}}) + \tilde{\mathbf{G}} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}})$
12. $\vec{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{F}} \times \tilde{\mathbf{G}}) = \tilde{\mathbf{F}}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{G}}) - \tilde{\mathbf{G}}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) + (\tilde{\mathbf{G}} \cdot \vec{\nabla})\tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{G}})$
13. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{F}}$
14. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) = \vec{0}$
15. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g$
16. $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) = f\nabla^2g - g\nabla^2f$

Siendo $\tilde{\mathbf{F}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$ funciones vectoriales, f y g funciones escalares (todas de clase C^1 o C^2) y $\vec{\nabla}$ el operador nabla.

4.3 Coordenadas curvilíneas. Vectores y operadores.

Vectores: coordenadas polares

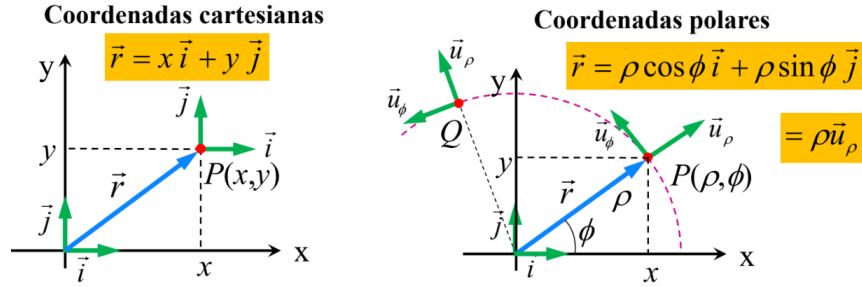
Coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(x+h, y) - \vec{r}(x, y)}{h} \Rightarrow \vec{i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \quad ; \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$$

$\vec{i} \perp$ líneas $x = \text{cte}$, sentido: incremento de x ; $\vec{j} \perp$ líneas $y = \text{cte}$, sentido: incremento de y

Coordenadas polares

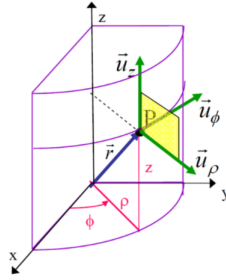
$$\vec{r} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} = \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{u}_\rho = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} ; \vec{u}_\phi = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$



Si se desea representar un vector \vec{A} en coords. cartesianas, $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$, A_x y A_y no dependen del punto $P(x, y)$ en el que el vector se halle, mientras que en coords. polares $\vec{A} = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\phi \vec{u}_\phi$, donde A_ρ y A_ϕ si dependen del punto $P(\rho, \phi)$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \\ \vec{u}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \cos \phi \vec{u}_\rho - \sin \phi \vec{u}_\phi \\ \vec{j} = \sin \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi \end{cases} \\ \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{pol} = M \vec{A}_{car} \\ \vec{A}_{car} = M^{-1} \vec{A}_{pol} \end{cases} \end{aligned}$$

Vectores: coordenadas cilíndricas



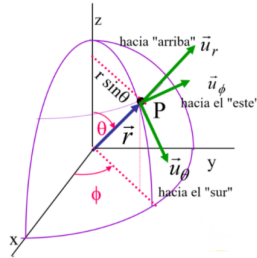
$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi) \\ z = z & z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} + z \vec{k} \Rightarrow \begin{bmatrix} h_\rho = 1 \\ h_\phi = \rho \\ h_z = 1 \end{bmatrix}$$

Vectores unitarios: $\vec{u}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$; $\vec{u}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$; $\vec{u}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$

$$\vec{i} = \cos \phi \vec{u}_\rho - \sin \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{j} = \sin \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{k} = \vec{u}_z$$

Vector de pos. en cilíndricas: $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$; Tranf. vects: $\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Vectores: coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & r \geq 0 \\ y = r \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi] \\ z = r \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} h_r = 1 \\ h_\theta = \rho \\ h_\phi = r \sin \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Vectores unitarios: } \vec{u}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad ; \quad \vec{u}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$$

$$\vec{i} = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{u}_\theta - \sin \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{j} = \sin \theta \sin \phi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{u}_\theta + \cos \phi \vec{u}_\phi \quad ; \quad \vec{k} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Vector de pos. en esféricas: $\vec{r} = r \vec{u}_r$; Tranf. vects: $\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Operadores diferenciales: coords. cartesianas

A partir de ahora, $\Psi \equiv$ campo esclar, $\vec{A} \equiv$ campo vectorial, ambos de clase C^1 o C^2 .
 $\Psi = \Psi(x, y, z)$; $\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k}$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{k} \quad ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Operadores diferenciales: coords. cilíndricas

$$\Psi = \Psi(\rho, \phi, z) \quad ; \quad \vec{A} = A_\rho(\rho, \phi, z) \vec{u}_\rho + A_\phi(\rho, \phi, z) \vec{\phi} + A_z(\rho, \phi, z) \vec{u}_z$$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{u}_z \quad ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho \vec{u}_\phi & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

Operadores diferenciales: coords. esféricas

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \phi) \quad ; \quad \vec{A} = A_r(r, \theta, \phi)\vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, \phi)\vec{\theta} + A_\phi(r, \theta, \phi)\vec{u}_\phi$$

$$\text{Gradiente: } \vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\vec{u}_\phi \quad ; \quad \text{Divergencia: } \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\begin{aligned} \text{Rotacional: } \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin\theta \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

$$\text{Laplaciano: } \Delta\Psi = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

5 Integrales curvilíneas y de superficie

5.1 Integrales de línea.

Definición 5.1.1: Una trayectoria $\vec{r}(t)$ en \mathbb{R}^n es de **clase C^1** si es continua $\forall t \in [a, b]$. Es de **clase C^1 a trozos** si $[a, b]$ se puede dividir en subintervalos, en cada uno de los cuales $\vec{r}(t)$ es de clase C^1 .

Definición 5.1.2: Si C es una curva parametrizada por $\vec{r}(t)$, es una **curva suave** si $\vec{r}'(t)$ es de clase C^1 y $\vec{r}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Una curva formada por curvas suaves unidas de manera continua se llama **curva suave a trozos**.

C es suave si $x(t), y(t), z(t)$ tienen primeras derivadas continuas que no se anulan simultáneamente.

Definición 5.1.3: Un desplazamiento infinitesimal o **elemento de línea** a lo largo de una trayectoria $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ de clase C^1 es:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) dt = \vec{r}'(t)dt$$

y su longitud

$$ds = ||d\vec{r}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = ||\vec{r}'(t)||dt$$

Elementos de línea en cartesianas, cilíndricas y esféricas

$$\text{cartesianas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\text{cilíndricas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz = h_\rho d\rho\vec{u}_\rho + h_\phi d\phi\vec{u}_\phi + h_z dz\vec{u}_z = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\phi\vec{u}_\phi + dz\vec{u}_z$$

$$\text{esféricas: } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}d\phi = h_r dr\vec{u}_r + h_\theta d\theta\vec{u}_\theta + h_\phi d\phi\vec{u}_\phi = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{u}_\phi$$

Integral de línea de una función escalar

Definición 5.1.4: Sea C una curva suave, parametrizada por la trayectoria $\vec{r}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f(x, y, z)$ una función escalar en \mathbb{R}^3 continua / $f(\vec{r}(t))$ es continua en $[a, b]$. La **integral de f a lo largo de C** es:

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))||\vec{r}'(t)||dt$$

La integral de línea de una función **no depende de la parametrización**, sólo de la curva C

Si C es una **curva suave a trozos** con n trozos: $\int_C f ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f ds$

Si $f = 1 \Rightarrow$ **longitud de C** : $L = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$

Si $f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \int_C f(x, y) ds \equiv$ Área de la valla de altura $f(x, y)$ y perfil dado por C .

Masa, centro de masas y momentos de inercia de figuras filiformes

Masa: $M = \int_C dm$, $dm = \lambda ds$, $\lambda(x, y, z) \equiv$ densidad lineal de masa.

Centro de masa: $x_{CM} = \frac{1}{M} \int_C x \lambda ds$; $y_{CM} = \frac{1}{M} \int_C y \lambda ds$; $z_{CM} = \frac{1}{M} \int_C z \lambda ds$

Momentos de inercia: $I_x = \int_C (y^2 + z^2) \lambda ds$; $I_y = \int_C (x^2 + z^2) \lambda ds$; $I_z = \int_C (x^2 + y^2) \lambda ds$

Integral de línea de un campo vectorial

Definición 5.1.5: Sea \vec{F} un campo vectorial en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$, con componentes continuas definidas a lo largo de una curva suave C , parametrizada por la trayectoria $\vec{r}: t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$. La **integral de línea de \vec{F} a lo largo de C** es:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Sea $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \equiv$ vec. uni. tgte. a la trayec: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

O en función de los componentes: $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

Si C es **cerrada** ($\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$): $\int_C \vec{F} d\vec{r} \equiv \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Definición 5.1.6: Una curva simple C es una curva parametrizada por una trayectoria $\vec{r}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ de clase C^1 a trozos e **inyectiva** en $[a, b]$, es decir, la curva **no se corta a sí misma**. Si los extremos coinciden ($\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$) y es inyectiva en (a, b) , es una **curva cerrada simple**.

curva simple orientada (abierta o cerrada) $\Rightarrow \int_{-C} \vec{F} d\vec{r} = - \int_C \vec{F} d\vec{r}$.

La integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva simple C **no depende de la parametrización**, sólo de la **orientación** (signo)

T^{ma} 5.1.1: T^{ma} fundamental de las integrales de línea: Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de clase C^1 , definida sobre una curva suave (a trozos) C , imagen de una trayectoria $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se cumple:

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Si \vec{F} es un **campo gradiente**, $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ ($f \equiv$ función potencial)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

es **independiente del camino** $\Rightarrow \vec{F}$ conservativo

Campos conservativos

T^{ma} 5.1.2: Sea \vec{F} un campo vectorial C^1 en \mathbb{R}^3 , excepto tal vez en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) Para cualquier curva orientada cerrada y simple: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
- ii) Para dos curvas orientadas simples cualesquiera $C_1 \wedge C_2$ con los mismos extremos:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- iii) \vec{F} es un campo gradiente, $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.
- iv) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Un campo vectorial que satisface una de (y por tanto, todas) las condiciones anteriores se denomina **campo conservativo**.

Corolario T^{ma} 5.1.2: Si $\vec{F} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial C^1 en \mathbb{R}^2 , si y sólo si se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Este Corolario puede ser falso incluso si \vec{F} no es C^1 en un único punto.

T^{ma} 5.1.3: Si \vec{F} es un campo vectorial C^1 en \mathbb{R}^3 tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$, entonces \exists campo vectorial \vec{G} de clase C^1 de modo que $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$
 En este caso el campo \vec{F} no puede tener puntos excepcionales, a diferencia de como sí está permitido en el T^{ma} 5.1.2

Forma diferencial exacta:

Definición: Cualquier expresión del tipo $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$ se denomina **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en una región D si:

$$Mdx + Ndy + Pdz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

para alguna función escalar f , de clase C^1 en D .

$$Mdx + Ndy + Pdz = df \iff \vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k} \text{ es conservativo } \iff \vec{F} = \vec{\nabla} f$$

5.2 Integrales de superficie.

Parametrización de superficies:

Una **parametrización de una superficie** es una función vectorial continua $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida como:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

cuya imagen es la **superficie** S : $S = \vec{r}(D)$. Las variables u y v son los parámetros y D su dominio de variación. Si \vec{r} es de clase C^1 (diferenciable) se dice que S es una **superficie de clase C^1 (diferenciable)**.

Las ecuaciones:
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{con } (u, v) \in D \Rightarrow \text{se denominan ecuaciones paramétricas de } S.$$

Vectores tangentes a una superficie parametrizada:

Sea S de clase C^1 parametrizada por $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ y sean $C_1 : \vec{r}(u, v_0)$, $C_2 : \vec{r}(u, v)$ y $P_0 = (u_0, v_0)$

$$\vec{r}_u = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial u} \right|_{u=u_0} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{k} \quad \text{tangente a } C_1 \text{ en } P_0$$

$$\vec{r}_v = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v_0)}{\partial v} \right|_{v=v_0} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{k} \quad \text{tangente a } C_2 \text{ en } P_0$$

S es **suave** en P_0 si $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ en P_0 , de modo que se **puede definir el plano tangente** a S en P_0 . Se dice que S es suave si lo es en todos sus puntos

Área de una superficie parametrizada: Sea una superficie suave S , parametrizada por

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad ; \quad (u, v) \in D$$

de clase C^1 e inyectiva en D , entonces el área de S se define como:

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Área de una superficie dada como gráfica de $f(x, y)$:

Sea $f(x, y)$ diferenciable, x e y parámetros:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k} \quad ; \quad (x, y) \in D \implies \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq 0$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Integrales de funciones escalares sobre funciones: Si $f(x, y, z)$ es una función escalar ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) continua, definida sobre una superficie suave S , parametrizada por $\vec{r}(u, v)$, se define la **integral de f sobre S** como:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Masa, centro de masas y momentos de inercia de figuras superficiales (no planas)

$$M = \iint_S dm, \quad dm = \sigma dS \implies x_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S x \sigma dS \quad ; \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S y \sigma dS \quad ; \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \iint_S z \sigma dS$$

$$\text{Momentos de Inercia: } I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dS \quad ; \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \sigma dS \quad ; \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma dS$$

Superficies orientadas: Una superficie suave S es **orientable** (o de **dos lados**) si es posible definir un campo de vectores unitarios normales \vec{n} en S que varía continuamente con la posición.

$$\text{Si } S \text{ está parametrizada por } \vec{r}(u, v) \implies \vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

$$\text{Si } S \text{ viene dada por } z = f(x, y) \implies \vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Integrales de campos vectoriales sobre superficies: Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , con componentes continuas definidas sobre una superficie suave S , parametrizada por $\vec{r}(u, v)$. La **integral de superficie de \vec{F} sobre S :**

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

También se le llama **flujo** de S .

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie S no depende de la parametrización, sólo de la orientación (signo de \vec{n}).

Elementos de superficie en cartesianas, cilíndricas y esféricas:

Cartesianas: $d\vec{S} = d\vec{S}_{yz} + d\vec{S}_{xz} + d\vec{S}_{xy} = dydz\vec{i} + dx dz\vec{j} + dx dy\vec{k}$

Cilíndricas: $d\vec{S} = d\vec{S}_{\phi z} + d\vec{S}_{\rho z} + d\vec{S}_{\rho\phi} = h_\phi h_z d\phi dz \vec{u}_\rho + h_\rho h_z d\rho dz \vec{u}_\phi + h_\rho h_\phi d\rho d\phi \vec{u}_z$
 $= \rho d\phi dz \vec{u}_\rho + d\rho dz \vec{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \vec{u}_z$

Esféricas: $d\vec{S} = d\vec{S}_{\theta\phi} + d\vec{S}_{r\phi} + d\vec{S}_{r\theta} = h_\theta h_\phi d\theta d\phi \vec{u}_r + h_r h_\phi dr d\phi \vec{u}_\theta + h_r h_\theta dr d\theta \vec{u}_\phi$
 $= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r + r \sin \theta dr d\phi \vec{u}_\theta + r dr d\theta \vec{u}_\phi$

Interpretación física del flujo de un campo vectorial: Si $\vec{F} \equiv \vec{v}$ es un campo de velocidades de un fluido y S una superficie imaginaria que atraviesa dicho fluido:

En un tiempo dt el volumen de fluido que atraviesa dS es: $dV = h d\vec{S} = \vec{v} \cdot \vec{n} dt dS$

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \vec{v} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{volumen de fluido que atraviesa } dS \text{ por unidad de tiempo}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \equiv \text{tasa neta de fluido que atraviesa } S \text{ (caudal)}$$

En otros casos, como campos eléctricos o magnéticos, el flujo del campo a través de una superficie puede interpretarse como la densidad de líneas de campo que atraviesan dicha superficie.

5.3 T^{ma} de Green en el plano.

T^{ma} 5.3.1, T^{ma} de Green: Sea D una región simple del plano y C la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región D . Si $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en D , se cumple:

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

Si $\tilde{\mathbf{F}}$ conservativo \Rightarrow el T^{ma} de Green implica $\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = 0$

Si C es una curva cerrada simple que acota una región D en el plano, en la que es aplicable el T^{ma} de Green, el área de D es:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

T^{ma} 5.3.2, T^{ma} de Green (forma tangencial): Sea D una región simple del plano y C la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región D .

Si $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en D :

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \vec{k} dA$$

La circulación de $\tilde{\mathbf{F}}$ a lo largo de C es igual al flujo del rotacional de $\tilde{\mathbf{F}}$ a través de la superficie plana D , delimitada por C .

T^{ma} 5.3.3, T^{ma} de Green (forma normal): Sea D una región simple del plano y C la curva cerrada simple (suave a trozos) con orientación positiva que limita la región D .

Si $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial de clase C^1 definido en D y \vec{n} la normal unitaria externa a C :

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds = \iint_D (\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}}) dA$$

La circulación de la componente normal de $\tilde{\mathbf{F}}$ a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de $\tilde{\mathbf{F}}$ en la región plana D , delimitada por C .

5.4 T^{ma} de Stokes

Orientación de una curva frontera de una superficie orientada:

Sea S una superficie orientada con vectores unitarios normales $\tilde{\mathbf{n}}$. La orientación de S induce una **orientación positiva de la curva frontera** C : si una persona recorre la curva C en sentido positivo de manera que el vector normal señala hacia arriba (de pies a cabeza), entonces la superficie quedará siempre a la izquierda.

T^{ma} de Stokes: Sea S una superficie orientada (suave a trozos) cuya frontera es una curva cerrada simple C (suave a trozos) con orientación positiva. Sea $\tilde{\mathbf{F}}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en una región abierta en \mathbb{R}^3 que contiene a S . Se cumple:

$$\oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$$

Esta es la forma tangencial del T^{ma} de Green, el caso particular del T^{ma} de Stokes en \mathbb{R}^2

$$\text{Si } \vec{\nabla} \times \tilde{\mathbf{F}} = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = 0$$

La circulación de $\tilde{\mathbf{F}}$ a lo largo de C es igual al flujo del rotacional de $\tilde{\mathbf{F}}$ a través de cualquier superficie S cuya frontera es C (siempre que $\tilde{\mathbf{F}}$ esté bien definido sobre S).

Ejemplos en física: Campo Magnético, Leyes de Ampère y Faraday:

Campo magnetostático (en el vacío) creado por una densidad de corriente \vec{J} : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Si se aplica el **T^{ma} de Stokes**: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}$

Por otra parte para campos variables con el tiempo: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Si se aplica el **T^{ma} de Stokes**:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

5.5 T^{ma} de Gauss-Ostrogradski.

Frontera: **superficie cerrada** unión finita de superficies (máximo 6, mínimo 2) descritas por gráficas de funciones de 2 variables.

T^{ma} de Gauss-Ostrogradski (T^{ma} de la divergencia):

Sea E una región elemental (simple) en \mathbb{R}^3 cuya frontera es una superficie S cerrada (suave a trozos) y orientada (orientación positiva hacia fuera). Sea \vec{F} un campo vectorial de clase C^1 definido en una región abierta en \mathbb{R}^3 que contiene a E . Se cumple:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

El flujo de un campo vectorial \vec{F} a través de una superficie S es igual a la integral de la divergencia de \vec{F} en el volumen encerrado por S .

$$\text{Si } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

Campo **solenoidal** \Rightarrow flujo nulo a través de cualquier superficie cerrada.

Ejemplos en física:

$$\Rightarrow \text{Líneas de campo cerradas: Campo magnético: } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Campo eléctrico. Ley de Gauss:

$$\text{Campo eléctrico (en el vacío) creado por una densidad de carga } \rho: \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si se aplica el **T^{ma} de Gauss-Ostrogradski:**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dV = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}$$