



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

MECÁNICA II

Apuntes Mecánica II

Alumno:

Navarro Bonanad, Rubén

Profesor:

López Pavón, Jacobo

Grupo BL3

Curso 2024 - 2025

Índice

1 Principio de Hamilton y ecuaciones de Euler-Lagrange	4
1.1 Ligaduras	4
1.2 Coordenadas y cantidades generalizadas	4
1.3 Trabajo y desplazamientos virtuales	6
1.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange	7
1.5 Principio de Hamilton	10
1.6 Fuerzas de ligadura	12
2 Simetrías y constantes del movimiento	15
2.1 Teorema de Noether	15
2.2 Teorema de Euler	21
2.3 Fuerzas no conservativas	21
2.4 Lagrangiano partícula en campo electromagnético	23
2.5 El problema de Kepler y el vector de Runge-Lenz	24
3 Formulación Hamiltoniana	25
3.1 Idea de la mecánica Hamiltoniana	25
3.2 Transformadas de Legendre	26
3.3 Aplicación al formalismo Hamiltoniano: ecuaciones de Hamilton	27
3.4 Espacio de fases	28
3.5 Paréntesis de Poisson	32
4 Transformaciones canónicas	37
4.1 Principio de Hamilton modificado	37
4.2 Transformaciones canónicas	37
4.3 Función generatriz	39
4.4 Transformaciones canónicas y paréntesis de Poisson	42
4.5 Teorema de Liouville	44
4.6 Simetrías en el formalismo Hamiltoniano	44
4.7 Variables de ángulo acción	46
4.8 Sistemas integrables	48
4.9 Teoría de Hamilton-Jacobi	49
5 Relatividad especial	52
5.1 Principio de la relatividad de Galileo: leyes de la mecánica las mismas en cualquier sistema de referencia inercial	52
5.2 Postulados de la Relatividad Especial y transformaciones de Lorentz	53
5.3 Composición de velocidades	54
5.4 Simultaneidad, contracción espacial y dilatación temporal	55
5.5 Principio de causalidad	56
5.6 Intervalo invariante, espacio de Minkowski y diagramas espacio-tiempo	56
5.7 Mecánica relativista	58

Bibliografía

- Goldstein. Classical Mechanics \rightsquigarrow Lagrange y Hamilton
 - Hand and Finch. Analytical Mechanics \rightsquigarrow Lagrange y Hamilton; Relatividad especial
 - Landau and Lifshitz. Course in Theoretical Physics vol I.
 - Taylor Classical Mechanics \rightsquigarrow + introductorio
 - José y Saletan Classical Mechanics \rightsquigarrow Tma de Noether
 - Arnold Mathematical Methods of classical mechanics \rightsquigarrow avanzado
 - Rindler
 - D.W. Hogg
- } Relatividad especial

1 Principio de Hamilton y ecuaciones de Euler-Lagrange

1. Ligaduras	4
2. Coordenadas y cantidades generalizadas	4
3. Trabajo y desplazamientos virtuales	6
4. Ecuaciones de Euler-Lagrange	7
5. Principio de Hamilton	10
6. Fuerzas de ligadura	12

1.1 Ligaduras

Considérese una partícula puntual de masa m con vector posición $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ con respecto al origen de un sistema inercial (SI). $\vec{r}(t)$ es la solución de la ecuación diferencial dada por la 2ª ley de Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{TOTAL}} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{donde } \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t, \lambda) \equiv \text{eq. mvmt. part.} \quad (1.1.1)$$

- Espacio de configuración Q : conjunto de puntos en el espacio (\mathbb{R}^3) dónde puede encontrarse a la partícula.

→ Si no hay ligaduras $Q = \mathbb{R}^3$

→ Ligaduras: condición de contorno o restricción de los posibles caminos en el mvmt. de un stma. en un campo de fzas o potencial.

Por ejemplo: plano inclinado, péndulo, poleas, interior de un edificio, sólido rígido (stmas. de N partículas con ligaduras $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{cte.}$)

Pueden expresarse como relaciones matemáticas entre las coordenadas las velocidades y el tiempo

– ligaduras holónomas: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$

– ligaduras no holónomas: pueden depender de velocidades o ser desigualdades.

Si se tiene un stma. de N partículas con k **ligaduras holónomas independientes** se tendrán $3N - k$ grados de libertad.

1.2 Coordenadas y cantidades generalizadas

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

donde las coordenadas generalizadas q_j son un conjunto de cantidades que dejan completamente definido el estado del stma.

Véanse algunos ejemplos de esto:

1. Péndulo simple: dado que se encuentra en un plano, $z = 0$. Además, se sabe que la longitud de la cuerda es constante, $\sqrt{x^2 + y^2} = l$. Pasando a polares,

$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta$$

$3 - 2 = 1$ grado de libertad $\Leftrightarrow \theta \equiv \text{coord. generalizada}$

y su espacio de configuración será $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0, x^2 + y^2 = l^2\}$

2. Péndulo doble: Dado que se encuentra en un plano, se sabe automáticamente que $z_1 = z_2 = 0$. Además, las longitudes de las cuerdas deben ser constantes.

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = l_1 \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l_2$$

por lo que hay 2 grados de libertad: $6 - 4 = 2$ correspondientes a las variables generalizadas θ_1 y θ_2

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1, & y_1 = l_1 \cos \theta_1, & z_1 = 0 \\ x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, & y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, & z_2 = 0 \end{cases}$$

3. Pequeña esfera moviéndose enhebrada a un alambre circular de radio r , despreciando la fricción y considerando que es una partícula puntual

$$\left\{ \begin{array}{lll} m\ddot{x} = N_x & \rightsquigarrow & m\ddot{x}\dot{x} = N_x \cdot \dot{x} \\ m\ddot{y} = N_y - mg & \rightsquigarrow & m\ddot{y}\dot{y} = N_y \cdot \dot{y} - mg\dot{y} \\ N_x\dot{x} + N_y\dot{y} = 0 & \leftarrow & \vec{N} \perp \vec{v} \ (\vec{N} \cdot \vec{v} = 0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \leftarrow \text{ec. ligadura holónoma}$$

Sumando las primeras dos ecuaciones y teniendo en cuenta la condición de perpendicularidad entre \vec{N} y $\dot{\vec{x}}$

$$m\ddot{x}\dot{x} + m\ddot{y}\dot{y} = \underbrace{N_x\dot{x} + N_y\dot{y}}_0 - mg\dot{y} \Rightarrow \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + g\dot{y} = 0,$$

pasando a polares y teniendo en cuenta que $\dot{r} = 0$, pues $r = l = \text{cte}$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta & \leftrightarrow & \dot{x} = -r\dot{\theta} \sin \theta & \leftrightarrow & x = r \cos \theta \\ \ddot{y} &= r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta & \leftrightarrow & \dot{y} = r\dot{\theta} \cos \theta & \leftrightarrow & y = r \sin \theta \end{aligned}$$

que, sustituyendo en la ecuación obtenida

$$r\ddot{\theta} \sin \theta (\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + r\ddot{\theta} \cos \theta (\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + g\dot{\theta} \cos \theta = 0 \Rightarrow r\ddot{\theta} + g \cos \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \cos \theta$$

Por lo que se ha obtenido una sola ecuación diferencial para la variable relevante θ .

Formulación Lagrangiana de la mecánica

→ Primer objetivo: escribir ecs. de mvmt. en coords. generalizadas de modo que la “forma” cada ec. sea la misma para cada coordenada. Se comenzará considerando el caso conservativo sin ligaduras

- Coordenadas cartesianas de N partículas:

$$(\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \dots, \vec{r}^{(N)}) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}) = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}) \quad (1.2.1)$$

- Coordenadas generalizadas: $q_1, q_2, \dots, q_{3N} \rightsquigarrow x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), k = 1, \dots, 3N$

$$\frac{dx_k}{dt} = \dot{x}_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}. \quad (1.2.2)$$

Donde se ha aplicado la regla de la cadena a la hora de tomar la derivada total de x_k con respecto al tiempo t . La segunda igualdad se demuestra

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial x_k}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial \dot{q}_l} + \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_k}{\partial q_l} \quad (1.2.3)$$

donde las cancelaciones ocurren porque x_k no depende de las \dot{q}_l

- Momentos generalizados:

- Energía cinética: $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha i}^2$, donde α es el índice de partícula. Calculando $\dot{x}_{\alpha i}^2$:

$$\dot{x}_{\alpha i}^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 \quad (1.2.4)$$

donde, si t no aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación $\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} = 0$, con lo que

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \sum_{\alpha=1}^{3N} \underbrace{\sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k}}_{a_{jk}(q)} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

A partir de la energía cinética pueden definirse los **momentos generalizados**

$$\Pi_j = \frac{\partial T(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.2.5)$$

que, por ejemplo, en cartesianas, es el momento lineal

$$p_{\alpha j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{\alpha j}} = m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha j} \quad (1.2.6)$$

- Fuerzas generalizadas conservativas:

En cartesianas, las fuerzas conservativas cumplen que

$$F_k = -\frac{\partial V(x_k)}{\partial x_k} \leftrightarrow V(x_k) = V(x_{\alpha 1}, \dots)$$

por lo que, con coordenadas generalizadas, se tiene que

$$V(q_j, t) = V(x_k(q_j, t)) \longrightarrow \text{fuerza generalizada} \equiv Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j} \quad (1.2.7)$$

Q_j puede reescribirse como

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{\alpha,k} -\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha k}} \frac{\partial x_{\alpha k}}{\partial q_j} = \sum_{\alpha} \vec{F}^{(\alpha)} \frac{\partial \vec{r}^{(\alpha)}}{\partial q_j} \quad (1.2.8)$$

por lo que puede interpretarse como la suma de las proyecciones de $\vec{F}^{(\alpha)}$ en las direcciones $\partial \vec{r}^{(\alpha)} / \partial q_j$

1.3 Trabajo y desplazamientos virtuales

- Trabajo virtual (a tiempo congelado)

$$\delta W = \sum_k F_k \cdot \delta x_k = - \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (1.3.1)$$

donde la última igualdad se cumple porque

$$\sum_k \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \delta_{ij}$$

Nota: el desplazamiento real es el cambio de las coordenadas en un cierto intervalo $\Delta t \leftrightarrow \Delta x$ (para $dt : dx$)

El desplazamiento virtual es la variación de las coordenadas (compatible con las ligaduras) en un instante fijo $\leftrightarrow \delta x_k$

1.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange

- Ecuaciones de Newton

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k} \xrightarrow[\text{y sumando en } k]{\times \partial x_k / \partial q_j} \sum_k \dot{p}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k p_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) - \sum_k p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right)$$

teniendo en cuenta que

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \quad \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) = \left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} \right)$$

se tiene que

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

Donde el término T en la parcial con respecto a \dot{q}_j puede sustituirse por \mathcal{L} dado que V no depende de las \dot{q}_j , por lo que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0} \quad (1.4.1)$$

Si hubiesen fuerzas no conservativas aparece un nuevo término del lado del potencial que es F_k^{NC} , que al tomar su producto con $\partial x_k / \partial q_j$

$$\sum_k F_k^{\text{NC}} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = Q_j^{\text{NC}} \quad (1.4.2)$$

y desarrollando, se llega a la siguiente expresión más general

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{NC}}} \quad (1.4.3)$$

Ejemplos:

- Partícula libre: $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2$

$$\text{Ecuaciones transformación} : \begin{cases} q_1 = x_1 \\ q_2 = x_2 \\ q_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = 0$$

por lo que

$$\dot{x}_i = v_i = \text{cte.} \Rightarrow x_i = x_{i0} + v_i \Delta t$$

- Partícula libre sujeta a $V(x_1, x_2, x_3)$:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - V(x_i) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{xi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= m\ddot{x}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i$$

3. Oscilador armónico:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2}kq^2 \\ T &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \end{aligned} \right\} \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m\dot{q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= -kq \end{aligned} \right\} m\ddot{q} = -kq \rightsquigarrow \ddot{q} + \frac{k}{m}q = \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

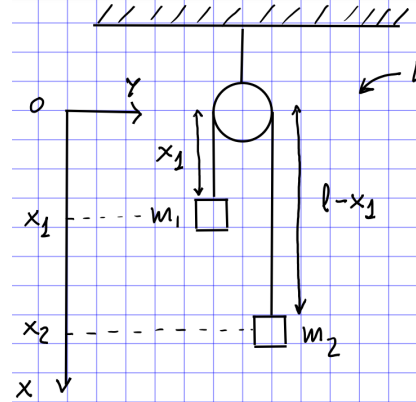
$$q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

4. Máquina de Atwood La ligadura de este sistema es $x_1 + x_2 = l$ por lo que

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 \\ V &= -m_1gx_1 - m_2g(l - x_1) \end{aligned} \right.$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \underbrace{m_1gx_1 - m_2gx_1}_{(m_1 - m_2)gx_1} + m_2gl$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} &= (m_1 + m_2)\dot{x}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= (m_1 - m_2)g \end{aligned} \right. \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$



Como ejercicio resolver con origen de potencial a una altura h bajo la máquina de Atwood

5. Partícula sujeta a un potencial en un plano $V(r, \theta)$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= 0 \end{aligned} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \right. \rightsquigarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \end{aligned} \right. \rightsquigarrow m\ddot{r} - \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{F_{\text{centr}}} = -\frac{\partial V}{\partial r} = F_r \equiv \text{fza. radial}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial r} r (-\sin \theta, \cos \theta) = r \cdot \vec{F} \hat{u}_\theta = rF_\theta$$

$$\frac{d\Pi_\theta}{dt} = r\vec{F} \hat{u}_\theta$$

donde Π_θ es el momento angular. Recuérdese que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{\tau}$ y se tiene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = mr^2\dot{\theta}\hat{u}_z \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F_r\hat{u}_r + F_\theta\hat{u}_\theta) = \begin{vmatrix} \hat{u}_r & \hat{u}_\theta & \hat{u}_z \\ r & 0 & 0 \\ F_r & F_\theta & 0 \end{vmatrix} = rF_\theta\hat{u}_z$$

Pueden calcularse las F 's generalizadas:

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \hat{u}_r = F_r = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} r \cdot \hat{u}_\theta = rF_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Coordenadas cíclicas

Para $\{q_j\}$ se dirá que q_c es cíclica si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} = 0 \quad (1.4.4)$$

lo que implica el **T^{ma} de conservación**, que dice que si q_c es cíclica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} \right) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} = p_c = \text{cte.}} \quad (1.4.5)$$

es decir, que p_c es una cte. de movimiento.

En el caso de una partícula sujeta a un potencial central $V(r)$ en un plano implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \Pi_\theta = mr^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (1.4.6)$$

o sea, la conservación del momento angular.

- Potencial central (3D): $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta. \end{array} \right. \quad \text{contenidos...} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / z \\ \tan \phi = y/x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} = \hat{u}_r \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r(\cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) = r \hat{u}_\theta \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) = r \sin \theta \hat{u}_\phi \end{array} \right. \quad (1.4.7)$$

y puede escribirse

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \dot{\phi} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{u}_\phi \rightsquigarrow \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (1.4.8)$$

por lo que el lagrangiano queda

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)} \quad (1.4.9)$$

y puede verse que $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\phi)$, lo que implica que la coordenada ϕ es cíclica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \rightsquigarrow p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{cte.} \quad (1.4.10)$$

Ahora se escoge un sistema coordenado en que $\vec{L} = \text{cte.}$, el eje $y \parallel \vec{L} \rightsquigarrow$ mvmt. en plano (x, z) ($\phi = 0$) \Rightarrow

$$\dot{\phi} = 0 \leftrightarrow p_\phi = 0 \quad (1.4.11)$$

Ahora, sabiendo que $\phi = 0$, puede escribirse un nuevo lagrangiano

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\phi=0} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad (1.4.12)$$

de donde puede verse, mediante las ecs. E-L:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} \right) \rightsquigarrow p_\theta = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (1.4.13)$$

y en r

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial r} = mr \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{E-L}} \boxed{m \ddot{r} = mr \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}}. \quad (1.4.14)$$

En general

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \overbrace{mr^2\dot{\theta}}^{p_\theta} \hat{u}_\theta - \overbrace{mr^2\sin\theta\dot{\phi}}^0 \hat{u}_\phi = \text{cte.} \quad (1.4.15)$$

$\sin\theta = 0$ por el sistema de referencia escogido

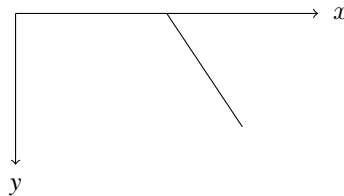
$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \text{cte.} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{\text{eff}}} \quad (1.4.16)$$

por lo que puede escribirse un lagrangiano efectivo

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V_{\text{eff}} = T - V_{\text{eff}} \quad (1.4.17)$$

con $V_{\text{eff}} = V + p_\theta^2/2mr^2$

Ejercicio: péndulo enhebrado a un carril (origen de potencial en el carril)



$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \\ y_1 = z_1 = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 = x + l \sin \theta \\ y_2 = l \cos \theta \\ z_2 = 0 \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_2 = -l \sin \theta \dot{\theta} \end{array} \right\}; \quad V = m_1 g y_1 + \overbrace{m_2 g l \cos \theta}^0$$

y el lagrangiano quedaría

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\underbrace{\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta}_{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}) + m_2gl\cos\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2\dot{x} + m_2l\dot{\theta}\cos\theta \end{array} \right\} \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2gl\sin\theta\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m_2gl\sin\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_2(l^2\dot{\theta}) = m_2(l^2\dot{\theta} + \dot{x}l\cos\theta) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{E-L}} \boxed{\ddot{x}\cos\theta + \ddot{\theta}l = -g\sin\theta}$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow$$

1.5 Principio de Hamilton

De todas las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras) que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un tiempo determinado, la trayectoria que elige el sistema es aquella que hace mínima la integral temporal de $\mathcal{L} = T - V$. Para una trayectoria $\{q_j(t)\}$:

$$S = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \equiv \text{acción}$$

Se verá que si la S se minimiza, se recuperan las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las posibles curvas vienen dadas por

$$(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

$$t = t_0 \leftrightarrow p \leftrightarrow (q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}) \quad t = t_f \leftrightarrow p' \leftrightarrow (q_1^{(f)}, \dots, q_n^{(f)})$$

y se tendrá que la acción

$$S \text{ mínimo} \leftrightarrow \delta S = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S(q(t) + \delta q(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) dt \stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_{t_0}^{t_f} \overbrace{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}^{S(q(t))} dt + \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \\ &= S + \delta S = \int_{t_0}^{t_f} [\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}] dt \end{aligned}$$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_f} dt \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] = \int_{t_0}^{t_f} \sum_j \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right] dt - \int \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] dt = 0.$$

Utilizando ahora la derivada temporal de la parcial del Lagrangiano con respecto a \dot{q}_j por la variación de q_j , δq_j , puede reescribirse dicho término

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right]$$

Por lo que ahora, teniendo en cuenta que $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_f) = 0$, se tiene que

$$(\circledast) \int_{t_0}^{t_f} \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{q(t_f)} \xrightarrow{\delta q_j(t_f) \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \bigg|_{q(t_0)} \xrightarrow{\delta q_j(t_0) \rightarrow 0} \int \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] dt = 0$$

por lo que si q_j son independientes

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0}$$

- Conexión con la mecánica cuántica:

Path integral: $Z = \int \mathcal{D}x e^{iS(x)/\hbar}$ con $S = \int \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt$

- Camino más corto entre dos puntos en el plano

$$I = \int_1^2 dS = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y^2}}_f$$

$$I \leftrightarrow S \quad f \leftrightarrow \mathcal{L} \quad y \leftrightarrow q \quad x \leftrightarrow t$$

y sabemos que esto se minimiza cuando se cumple su E-L

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c \rightsquigarrow \dot{y}^2 = c(1 + \dot{y}^2) \rightsquigarrow \dot{y}^2 = (1 - c) = c \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = a \rightarrow y = ax + b$$

- Problema de cálculo variacional y geometría

$$S = \int dA = \int 2\pi x ds = 2\pi \int \underbrace{x\sqrt{1+\dot{y}^2}}_f dx$$

$$f \leftrightarrow \mathcal{L} \quad y \leftrightarrow q \quad x \leftrightarrow t$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} &= \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c \rightsquigarrow x^2\dot{y}^2 = c^2 + c^2\dot{y}^2 \rightsquigarrow \dot{y}^2(x^2 - c^2) = c^2$$

$$\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y = \int \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} dx = c \cdot \operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{c} \right) + b \Rightarrow \boxed{x = c \cdot \cosh \left(\frac{y-b}{c} \right)}$$

1.6 Fuerzas de ligadura

¿Qué pasa con el ppio. de Hamilton si se tienen ligaduras?

Las δq_j ya no serán independientes, pero puede utilizarse el T^{ma} de los multiplicadores de Lagrange:

Hallar extremos de f_α sujeto a	\longleftrightarrow equivale	Hallar extremos
$f_\alpha(x) = 0$		$\tilde{g}(x, \lambda_\alpha) = g(x) + \sum_{\alpha=1}^c \lambda_\alpha f_\alpha(x)$

c ligaduras holónomas: $f_\alpha(q_j, t) = 0$; $\alpha = 1, \dots, c$

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_f} \left[\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_{\alpha=1}^c \lambda_\alpha f_\alpha(q_j, t) \right] dt \Rightarrow \delta \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{\alpha} f_\alpha(q_j, t) \delta \lambda_\alpha + \sum_{\alpha, j} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j \right] dt$$

$$\Rightarrow \delta \tilde{S} = \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \sum_{\alpha} f_\alpha \delta \lambda_\alpha + \sum_j \left[- \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \right] \delta q_j \right\} = 0$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \lambda_\alpha &: f_\alpha(q_j, t) = 0 \\ \delta q_j &: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} = Q_j^l \end{aligned}}$$

donde Q_j^l es la fuerza generalizada de ligadura

Nótese que

$$\delta W_{\text{ligadura}} = \sum_j Q_j^l \delta q_j = \sum_{\alpha, j} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \delta f_\alpha = 0$$

Las fuerzas de ligadura no ejercen trabajo. Por eso es posible resolver el problema obviando las F 's de ligadura.

Solución problema con multiplicadores (N partículas)

- $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, t)$

$$c \text{ ligaduras } \begin{cases} \text{a) } q_\alpha = q_\alpha(c+1, \dots, q_{3N}, t) & \alpha = 1, \dots, c \\ \text{b) } f_\alpha(q, \dots, t) = 0 \end{cases}$$

- Sol. en “coordenadas libres” (independientes).

$$\begin{aligned} q_\alpha, \alpha = 1, \dots, c &\leftrightarrow \text{coords. ligadas} \\ q_\beta, \beta = c + 1, \dots, 3N &\leftrightarrow \text{coords. libres} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

\mathcal{L} libre: $\tilde{\mathcal{L}}(q_\beta, \dot{q}_\beta, t) = \tilde{\mathcal{L}}(q_\alpha(q_\beta), \dot{q}_\alpha(q_\beta, \dot{q}_\beta); q_\beta, \dot{q}_\beta)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_\beta} \right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_\beta} = 0 \quad \beta = c + 1, \dots, 3N$$

- F ligadura

$$Q_j^l = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right]_{\substack{q_j = q_j(t) \\ f_\alpha(q_j, t) = 0}}$$

① Plano inclinado

Solución con coordenadas libres:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ \tan \alpha &= \frac{h-y}{x} \rightsquigarrow y = h - \tan \alpha \end{aligned} \right\} \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + \tan^2 \alpha) + mgx \tan \alpha - mgh$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}(1 + \tan^2 \alpha) \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial x} &= mg \tan \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\ddot{x} = m\ddot{x} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = mg \tan \alpha \rightsquigarrow \ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow x = g \sin \alpha \cos \alpha \frac{t^2}{2}$$

$$\text{ligadura} \Rightarrow y = h - g \sin^2 \alpha t^2 / 2 \rightsquigarrow l = \sqrt{x^2 + y^2} = g \sin \alpha t^2 / 2$$

Para hallar las fzas. de ligadura se deberá usar el Lagrangiano sin ligaduras:

$$Q_x^l = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right]_{\substack{x(t) \\ y(t)}} = m\ddot{x}]_{x(t)} = mg \sin \alpha \cos \alpha$$

$$Q_y^l = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right]_{\substack{x(t) \\ y(t)}} = -mg \sin^2 \alpha + mg = mg \cos^2 \alpha$$

por lo que

$$|Q^l| = mg \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = mg \sin \alpha$$

La solución con multiplicadores de Lagrange es la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{y}} &= -mg \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \tan \alpha = Q_x^l \\ m\ddot{y} + mg &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = Q_y^l \end{aligned} \right\} \lambda \rightsquigarrow x, y$$

$$y + \tan \alpha \cdot x - h = 0$$

② Péndulo simple

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - \sin \theta r \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{array} \right\} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

El Lagrangiano libre sería

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \end{array} \right\} m l^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \rightsquigarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

y la fuerza de ligadura en r es

$$Q_r^l = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right]_{\substack{r(t) \\ \theta(t)}} = [-m l \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta]_{\theta(t)} = -T Q_\theta^l = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right]_{\substack{r=l \\ \theta(t)}} = 0 \quad (1.6.2)$$

2 Simetrías y constantes del movimiento

1. Teorema de Noether.....	15
2. Teorema de Euler	21
3. Fuerzas no conservativas.....	21
4. Lagrangiano partícula en campo electromagnético	23
5. El problema de Kepler y el vector de Runge-Lenz	24

Hasta ahora $\mathcal{L} = T - V$ y $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$

Pero también pueden usarse ctes. de movimiento. Ej. con un g.d.l.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \Rightarrow m \ddot{q} = - \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$\rightarrow E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V \leftrightarrow \frac{dE}{dt} = m \dot{q} \ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} = \dot{q} \left(m \ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} \right) \stackrel{0}{=} 0 \leftrightarrow E = \text{cte.}$$

despejando \dot{q} en E :

$$\dot{q} = s \dot{q} = s \sqrt{\frac{E - V}{m/2}} \Rightarrow \frac{dt}{dq} = \frac{s}{\sqrt{2(E - V(q))/m}} \rightsquigarrow t = t_0 + s \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2(E - V(q))/2}}$$

donde s denota el signo \pm de la velocidad, que depende del sistema de referencia.

También se habló de las coordenadas cíclicas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} = 0 \Rightarrow p_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} = \text{cte}$$

2.1 Teorema de Noether

Ejercicio: Sea $F(q, t)$, $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ y $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{dF}{dt}$: demostrar que ambos Lagrangianos dan lugar a las mismas ecs. de movimiento. Por el principio de Hamilton:

$$S' = \int_{t_0}^{t_f} dt \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt}_S + \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{dF}{dt}$$

donde S

$$S = \int \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + \underbrace{\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt}_{\delta S}$$

por lo que

$$\delta S' = \delta S + \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{d}{dt} (\delta F) = \delta S + \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \delta q_j \right]_{t_0}^{t_f}}_0 = \delta S = 0$$

por lo que si se hace la siguiente transformación al Lagrangiano

$$\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

las ecuaciones de movimiento resultantes son las mismas. A este tipo de transformación se las denomina transformaciones de simetría.

Teorema de Noether: Simetrías \leftrightarrow cantidades conservadas

Considérese la variación infinitesimal: $q_i \rightarrow q_i + \delta_\varepsilon q_i = q_i + \varepsilon f_i(q, \dot{q}, t)$ tal que

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}(q, \delta_\varepsilon q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta_\varepsilon q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon \dot{q}_i = \varepsilon \frac{dF}{dt} \quad (2.1.1)$$

donde se ha usado que

$$\mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

y en la ecuación (2.1.1) puede utilizarse que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta_\varepsilon q_i$$

por lo que

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]}_0 \delta_\varepsilon q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon q_i \right) = \varepsilon \frac{dF}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon q_i - \varepsilon F \right] = 0$$

es decir

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i(q, \dot{q}, t) - F \right] = 0 \rightsquigarrow \underbrace{J(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i(q, \dot{q}, t) - F}_{\text{Corriente de Noether}} = \text{cte.}$$

Teorema de Noether: Si la transformación $q_i \rightarrow q_i + \delta_\varepsilon q_i = q_i + \varepsilon f_i(q, \dot{q}, t)$ es una simetría

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \varepsilon \frac{dF}{dt} \text{ entonces } J(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i(q, \dot{q}, t) - F = \text{cte.}$$

Las coordenadas cíclicas desde el punto de vista del T^{ma} de Noether

$$\rightarrow q_c \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} = 0 \xrightarrow{\text{E-L}} p_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} = \text{cte}$$

Entonces

$$\text{Se transforma } q_i \rightarrow q_i + \varepsilon \delta_{ic} \begin{cases} q_i \rightarrow q_i & \forall i \neq c \\ q_c \rightarrow q_c + \varepsilon & i = c \end{cases} \quad \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_i$$

por lo que la variación del \mathcal{L} es

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \underbrace{\delta q_i}_{\varepsilon \delta_{ic}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_\varepsilon \dot{q}_i \overset{0}{=} \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} = 0 = \frac{dF}{dt} \Rightarrow F = \text{cte.}$$

y por tanto, según el T^{ma} de Noether:

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta_{ic} - \text{cte} = \text{cte} \Rightarrow p_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} = \text{cte.}$$

• Rotaciones

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} z = r \cos \theta \\ x = r \sin \theta \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} z' = r \cos(\theta + \varepsilon) = \overbrace{r \cos \theta}^z \cos \varepsilon - \overbrace{r \sin \theta}^x \sin \varepsilon \\ x' = r \sin(\theta + \varepsilon) = \overbrace{r \cos \theta}^z \sin \varepsilon + \overbrace{r \sin \theta}^x \cos \varepsilon \end{cases}$$

que, haciendo una expansión en serie de orden dominante

$$\begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - \varepsilon x \\ x + \varepsilon z \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \delta_\varepsilon z = -\varepsilon x \leftrightarrow f_z = -x \\ \delta_\varepsilon x = \varepsilon z \leftrightarrow f_x = z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \delta_\varepsilon \dot{z} = -\varepsilon \dot{x} \\ \delta_\varepsilon \dot{x} = \varepsilon \dot{z} \end{array}$$

Considérese el Lagrangiano \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(y, r) \rightarrow \delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \overbrace{\delta_\varepsilon x}^{\varepsilon z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \overbrace{\delta_\varepsilon z}^{-\varepsilon x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta_\varepsilon y + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}} \overbrace{\delta_\varepsilon \dot{x}}^{\varepsilon \dot{z}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta_\varepsilon \dot{y} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}}_{m\dot{z}} \overbrace{\delta_\varepsilon \dot{z}}^{-\varepsilon \dot{x}} = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{x}{r} \varepsilon z + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{z}{r} \varepsilon x + m \dot{x} \varepsilon \dot{z} - m \dot{z} \varepsilon \dot{x} = 0 = \frac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = \text{cte} \end{aligned}$$

Por Noether

$$J = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}_{m\dot{x}} f_x + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}}_{-m\dot{z}} f_z - F = \text{cte} \rightsquigarrow \tilde{J} = m(z\dot{x} - \dot{z}x) = m(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}})_y = L_y$$

• Rotaciones en torno a un eje cualquiera

$$\delta_\varepsilon^k x_i = -\varepsilon \sum_{j=1}^3 \varepsilon^{kij} x_j$$

donde ε^{kij} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita y $\varepsilon^{123} = 1$. Si $k = i$, $k = j$ o $i = j$, entonces $\varepsilon^{kij} = 0$.

Ejercicio: téngase un potencial dependiente únicamente del módulo $V(|\vec{x}|) \leftrightarrow |\vec{x}| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. Hállese el Lagrangiano $\mathcal{L} = T - V(|\vec{x}|)$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_\varepsilon^k x_i = -\varepsilon \varepsilon^{kij} x_j \\ \delta_\varepsilon^k \dot{x}_i = -\varepsilon \varepsilon^{kij} \dot{x}_j \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta_\varepsilon x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta_\varepsilon \dot{x}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \varepsilon \varepsilon^{kij} x_j - m \dot{x}_i \varepsilon \varepsilon^{kij} \dot{x}_j = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial r} \underbrace{\frac{x_i x_j}{r} \varepsilon^{kij}}_0 - \cancel{\varepsilon m \dot{x}_i \dot{x}_j \varepsilon^{kij}}_0$$

la cancelación del tensor simétrico con el antisimétrico explícitamente es

$$\frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r} \varepsilon^{kij} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r} \underbrace{\varepsilon^{kji}}_{-\varepsilon^{kij}} = \frac{1}{2} \cancel{\frac{x_i x_j}{r} \varepsilon^{kij}} - \frac{1}{2} \cancel{\frac{x_j x_i}{r} \varepsilon^{kij}}$$

por lo que

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \varepsilon \frac{dF}{dt} = 0 \rightsquigarrow F = \text{cte.}$$

y, aplicando el T^{ma} de Noether

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\delta_\varepsilon x_i}{\varepsilon} - F = -m \dot{x}_i \varepsilon^{kij} x_j - \text{cte} = \text{cte} \rightarrow \tilde{J} = -m \varepsilon^{kij} x_j \dot{x}_i = \varepsilon^{kji} x_j m \dot{x}_i = (\vec{x} \times (m\dot{\vec{x}}))_k = L_k = \text{cte}$$

por lo que se conserva cualquier componente k del momento angular o

$$\vec{L} = \text{cte}$$

• Transformaciones de Galileo

$$\boxed{\begin{array}{l} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} \Delta t \end{array}} \leftrightarrow \begin{array}{l} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} \Delta t \end{array} = \begin{array}{l} t \\ [\vec{v} = \varepsilon \vec{u}] = \vec{x} - \varepsilon \vec{u} \Delta t \end{array} \leftrightarrow \delta_\varepsilon x_i = 0 - \varepsilon u_i \Delta t$$

y las velocidades se transformarán

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}} - \varepsilon \vec{u} \rightarrow \delta_\varepsilon \dot{x}_i = -\varepsilon u_i$$

Considérese $\mathcal{L} = 1/2 m \dot{\vec{x}}^2$:

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} \delta_\varepsilon x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta_\varepsilon \dot{x}_i = -\varepsilon m u_i \dot{x}_i = \frac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = -m u_i x_i = -m \vec{u} \vec{x}$$

y, utilizando el T^{ma} de Noether

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} f_i - F = -m \underbrace{\dot{x}_i u_i}_{\vec{x} \vec{u}} \Delta t + m \vec{u} \vec{x} = \text{cte} = m \vec{u} (\vec{x} - \dot{\vec{x}} \Delta t) = \text{cte.}$$

que es equivalente a

$$\vec{x} = \dot{\vec{x}} \Delta t = 0 \vec{x}_0 \rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \dot{\vec{x}} \Delta t$$

es decir, el MRU. Otro modo de escribir la variación del Lagrangiano es:

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{x}} - \varepsilon \vec{u})^2 - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = -m \varepsilon \dot{\vec{x}} \vec{u} + \cancel{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta_\varepsilon x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta_\varepsilon \dot{x}_i$$

• Traslaciones temporales

Piénsese en un \mathcal{L} con $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ (que no depende explícitamente de t). Entonces la siguiente transformación le dejará invariante.

$$\begin{cases} t \rightarrow t + \varepsilon \\ q_i(t) \rightarrow q_i(t + \varepsilon) = q_i(t) + \delta_\varepsilon q_i \Rightarrow \delta_\varepsilon q_i = \varepsilon \dot{q}_i \rightsquigarrow f_i = \dot{q}_i \\ \dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t + \varepsilon) = \dot{q}_i(t) + \delta_\varepsilon \dot{q}_i \Rightarrow \delta_\varepsilon \dot{q}_i = \varepsilon \ddot{q}_i \end{cases}$$

por lo que la variación infinitesimal del Lagrangiano queda

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \underbrace{\delta_\varepsilon q_i}_{\varepsilon \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\delta_\varepsilon \dot{q}_i}_{\varepsilon \ddot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = \varepsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] = \varepsilon \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

por lo que, aplicando el T^{ma} de Noether

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \text{cte.} \equiv \mathcal{H}$$

que en este caso es la función energía.

→ Caso de partícula en un sistema conservativo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x_i) \rightsquigarrow \mathcal{H} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}}_{m \dot{x}_i} \dot{x}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 + V = T + V \quad (2.1.2)$$

En general, si $V \neq V(\dot{q}, t) \rightsquigarrow \mathcal{H} = T + V = E$

Ahora se tomará la derivada total con respecto al tiempo del Hamiltoniano

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i}$$

donde la cancelación azul ocurre por las ecuaciones de E-L y por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

por lo que, cuando el Lagrangiano no depende explícitamente de T , \mathcal{H} es una cantidad conservada

• **Traslaciones espaciales**

Considérese \mathcal{L} de una partícula libre:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{x}_i^2$$

ahora se demostrará que \mathcal{L} es invariante bajo $x_i \rightarrow x_i + \varepsilon, \forall i \rightarrow \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i$:

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}_0 \underbrace{\delta_\varepsilon x_i}_\varepsilon + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}}_0 \delta_\varepsilon \dot{x}_i = 0 = \frac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = \text{cte}$$

por lo que, aplicando el T^{ma} de Noether

$$\varepsilon J = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}}_{m\dot{x}_i} \underbrace{\delta_\varepsilon \dot{x}_i}_\varepsilon - \varepsilon F = \text{cte} \Rightarrow \varepsilon m \dot{x}_i = \text{cte} \rightsquigarrow p_i = m \dot{x}_i = \text{cte} \rightarrow \vec{p} = \text{cte}$$

Ejercicios:

1

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{C}{z} + ae^{-b(x^2+y^2)}$$

La primera es el Hamiltoniano, pues el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo: $\mathcal{H} = T + V = E = \text{cte.}$

La segunda consiste en transformar el Lagrangiano a cilíndricas y realizar una rotación en torno al eje z :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{C}{z} + ae^{-br^2}$$

como puede verse, el Lagrangiano no depende de θ , por lo que la transformación es la siguiente

$$\left. \begin{array}{l} r \rightarrow r \\ \theta \rightarrow \theta + \varepsilon \\ z \rightarrow z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{r} \rightarrow \dot{r} \\ \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} \\ \dot{z} \rightarrow \dot{z} \end{array}$$

y por lo tanto la variación infinitesimal del Lagrangiano será

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \mathcal{L}(r, z, \theta + \varepsilon, \dots) - \mathcal{L}(r, z, \theta, \dots, t) = \delta \mathcal{L} = 0 = \varepsilon \frac{dF}{dt} \rightarrow F = \text{cte} \quad (2.1.3)$$

por lo que la cantidad conservada es

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - F = \text{cte} \rightarrow mr^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

2

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

hallar 3 cantidades conservadas

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow t + \varepsilon \\ \mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = T + V \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x + \varepsilon \\ y \rightarrow y \\ z \rightarrow z \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \dot{x} \rightarrow \dot{x} \\ \dot{y} \rightarrow \dot{y} \\ \dot{z} \rightarrow \dot{z} \end{array} \right\} \delta_\varepsilon \mathcal{L} = \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}^0 \delta_\varepsilon x + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}}^0 \delta_\varepsilon y + \dots = 0 = \varepsilon \frac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = \text{cte}$$

y

$$f_x = 1, f_y = f_z = 0 \quad J_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} f_x - F = \text{cte} \rightarrow J_a = m\dot{x} = p_x$$

Para y es análogo: $J_b = p_y = m\dot{y}$

Para z:

$$\left. \begin{array}{l} z \rightarrow z + \varepsilon \\ x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \end{array} \right\} \leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{z} \rightarrow \dot{z} \\ \dot{x} \rightarrow \dot{x} \\ \dot{y} \rightarrow \dot{y} \end{array} \right\} \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = -mg\varepsilon = \varepsilon \frac{dF}{dt} \rightarrow F = -mgt$$

por lo que la cantidad conservada según el T^{ma} de Noether

$$J_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \overset{1}{\cancel{\dot{z}}} - F = m\dot{z} + mgt = \text{cte.} \rightarrow m(\dot{z} + gt) = \text{cte.} \rightarrow \ddot{z} = -g = \text{cte}$$

3

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(5\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}) + Ce^{2x-y}$$

hallar 2 cantidades conservadas.

La primera es el Hamiltoniano, pues el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo: $\mathcal{H} = T + V = E = \text{cte.}$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x + \delta_\varepsilon x \\ y \rightarrow y + \delta_\varepsilon y \end{array} \right\} \rightsquigarrow V(2x - y) \rightarrow V(2x + 2\delta x - (y - \delta y)) = V(2x - y)$$

por lo que las transformaciones serán las siguientes

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x + \varepsilon \\ y \rightarrow y + 2\varepsilon \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} \rightarrow \dot{x} \\ \dot{y} \rightarrow \dot{y} \end{array} \right\} \leftrightarrow \delta \dot{x} = \delta \dot{y} = 0$$

por lo que

$$\delta_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \dots = 2Ce^{(2x-y)}\varepsilon - Ce^{(2x-y)}2\varepsilon = 0 = \varepsilon \frac{dF}{dt} \rightarrow F = \text{cte}$$

por lo que la cantidad conservada es

$$J = \overset{p_x}{\widehat{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}}} f_x + \overset{p_y}{\widehat{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}}} f_y - F = (5m\dot{x} - m\dot{y}) \cdot 1 + (2m\dot{y} - m\dot{x}) \cdot 2 - F = \text{cte} \Rightarrow p_x + 2p_y = 3m(\dot{x} + \dot{y}) = \text{cte.}$$

4

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ay\dot{x} - \frac{1}{2}b \log(x^2/c) \quad (2.1.4)$$

La primera es el Hamiltoniano, pues el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo: $\mathcal{H} = T + V = E = \text{cte.}$

Ahora puede probar a hacerse una variación en y

$$\left. \begin{array}{l} y \rightarrow y + \varepsilon \\ x \rightarrow x \end{array} \right\} \mathcal{L}(x, y + \varepsilon, \dot{x}, \dot{y}) - \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \delta_\varepsilon \mathcal{L} = -a\varepsilon \dot{x} = \varepsilon \frac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = -ax + \text{cte.}$$

y, aplicando el T^{ma} de Noether

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} f_y - F = m\dot{y} + ax = \text{cte}$$

2.2 Teorema de Euler

Definición: $f(y_1, \dots, y_s)$ es homogénea de grado n si $f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_s) = \lambda^n f(y_1, \dots, y_s)$

Tma de Euler: Sea f homogénea de grado n , entonces

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n f(y_1, \dots, y_s)$$

dem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= n \lambda^{n-1} f(y_1, \dots, y_s) \stackrel{1}{=} \frac{n}{\lambda} f(z_1, \dots, z_s) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{z_i}{\lambda} \end{aligned} \right\} n f(z_1, \dots, z_s) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{z_i}{\lambda}$$

En 1: $z_i = \lambda y_i$

En general: $T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \sum_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j T_{ij}$ (es homogénea de grado 2):

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

por lo que el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}_{2T} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - V) = T + V - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

en el caso en que $V = V(q, \dot{q})$.

Por tanto, en caso que $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$ y $V = V(q, \dot{q})$

$$\mathcal{H} = T + V - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{cte.} \quad V \neq V(\dot{q}) \rightsquigarrow \mathcal{H} = T + V = \text{cte.}$$

Potenciales dependientes de la velocidad

Sea $\mathcal{L} = T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$. Por Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}} \right)}_{m\ddot{\vec{r}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = 0$$

por lo que la ecuación de movimiento resultante es la siguiente

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) = \vec{F}$$

y, en coordenadas cartesianas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.1)$$

2.3 Fuerzas no conservativas

$$\vec{F} = \underbrace{-\vec{\nabla} V}_{\text{conservativa}} + \vec{F}_{\text{NC}}$$

Ya se vio anteriormente que las fuerzas generalizadas

$$Q_j = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = -\vec{\nabla} V \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} + \vec{F}_{\text{NC}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\text{NC}}$$

y que las ecuaciones de Euler-Lagrange en presencia de dichas F 's no conservativas son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{\text{NC}}$$

Estúdiese cómo varía el Hamiltoniano con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} &\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + Q_j^{\text{NC}} \right) \dot{q}_j - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) &\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = Q_j^{\text{NC}} \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \end{aligned}$$

Ahora, si $\vec{F}_{\text{NC}} \perp \text{mov}$, entonces

$$dW = \vec{F}_{\text{NC}} d\vec{r} = 0 = Q_j dq_j \Rightarrow Q_j^{\text{NC}} \overbrace{\frac{dq_j}{dt}}^{\dot{q}_j} = 0$$

por lo que si $\vec{F}^{\text{NC}} \perp \text{mov}$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Téngase una fuerza no conservativa como sigue

$$\vec{F} = -mk\vec{v} = -mk \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \dot{\theta} = -mkR\dot{\theta} \hat{u}_\theta$$

por lo que

$$Q_\theta^{\text{NC}} = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -mkR^2 \dot{\theta}$$

y se obtienen T y V

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \\ V &= -mgR \cos \theta \end{aligned} \right\} \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta$$

por lo que tomando sus derivadas y hallando las ecuaciones E-L

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mgR \sin \theta \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{E-L}} mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta = -mkR^2 \dot{\theta} \rightsquigarrow \ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Ahora, para resolver la ED para oscilaciones pequeñas. Hay que darse cuenta de que es la ED de un oscilador armónico amortiguado

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega^2} \theta = 0$$

y su cantidad conservada es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = \mathcal{L} \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= Q_\theta^{\text{NC}} \dot{\theta} = -mkR^2 \dot{\theta}^2 < 0 \\ &= \dot{\theta} (mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta) \end{aligned}$$

2.4 Lagrangiano partícula en campo electromagnético

[Apéndice “Classical Electrodynamics” Jackson]

$$V = V(q, \dot{q}, t) \quad m\ddot{\vec{r}} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

esto está en sistema Gaussiano (normalización de la velocidad con la velocidad de la luz). Su Lagrangiano es el siguiente

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q \left(\phi - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \vec{A} \right)}_V \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right.$$

Las leyes de Maxwell son las siguientes

$$1^a) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$2^a) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$3^a) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \rightsquigarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{-\vec{\nabla}\phi} = 0$$

$$4^a) \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Tomando E-L sobre el Lagrangiano:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \end{array} \right\}$$

$$m\ddot{x} = -q \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)}_{-E_x} + \frac{q}{c} \dot{y} \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}_{B_z} + \dot{z} \frac{q}{c} \underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)}_{-B_y} = qE_x + \frac{q}{c} (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = qE_x + \frac{q}{c} (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x$$

que es la fuerza de Lorentz.

Por otro lado

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \underbrace{\frac{q}{c} A_x}_{\text{contr. mag.}} \quad (2.4.1)$$

y el Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \dot{\vec{r}} - \mathcal{L} = m\dot{\vec{r}}^2 + \cancel{\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\phi - \cancel{\frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\phi = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t)$$

mientras que en cuántica el operador Hamiltoniano es

$$\hat{\mathcal{H}} = \left[\underbrace{-i\hbar \vec{\nabla}}_{\vec{p}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}} \right]^2 + q\hat{\phi}$$

Ahora, si \vec{E}, \vec{B} no dependen de t , es decir, se tienen campos electrostáticos, $\mathcal{H} = \text{cte}$

Ejercicios: Hallar la ec. del mvmt. con

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} \right)$$

Sea

$$\vec{A} = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0)$$

Hallar \vec{B} y \mathcal{H}

2.5 El problema de Kepler y el vector de Runge-Lenz

El Lagrangiano de una partícula sometida al potencial de Kepler o electrostático

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{k}{|\vec{x}|}, \quad k = \text{cte} > 0$$

Si se realiza la siguiente variación

$$\delta_\varepsilon^k x_i = \varepsilon(x_i \dot{x}_k - 2\dot{x}_i x_k + (\vec{x}\dot{\vec{x}})\delta_{ik}) \rightarrow x_i \rightarrow x_i + \delta_\varepsilon^k x_i$$

puede hallarse una simetría y, utilizando el T^{ma} de Noether

$$\vec{J} = [\vec{p} \times \vec{L}] - \frac{km}{|\vec{x}|} \vec{x} = \text{cte.}$$

3 Formulación Hamiltoniana

1. Idea de la mecánica Hamiltoniana	25
2. Transformadas de Legendre.....	26
3. Aplicación al formalismo Hamiltoniano: ecuaciones de Hamilton	27
4. Espacio de fases	28
5. Paréntesis de Poisson.....	32

3.1 Idea de la mecánica Hamiltoniana

Se verá que aumenta el conjunto de transformaciones que dejan el formalismo invariante

Lagrangiano	\leftrightarrow	cambios de coordenadas = transf. puntuales
Hamiltoniano	\leftrightarrow	Transformaciones canónicas

A la hora de tener un Lagrangiano se tienen las ecs. E-L

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

y se tienen N grados de libertad, N ecs. de 2º grado y $2N$ conds. iniciales.

Mientras tanto, en el formalismo Hamiltoniano se tendrán N coordenadas generalizadas, \dot{q}_j , $j = 1, \dots, N$ y N momentos conjugados $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$, $j = 1, \dots, N$, por lo que habrán $2N$ variables independientes, que nos otorgarán $2N$ ecuaciones de mvmt. de primer orden.

En el formalismo Hamiltoniano, la función relevante será el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \dot{q}_j(p, q) p_j - \mathcal{L}(q, p, t)$$

en las variables q_j y p_j .

Dado que la descripción en ambas formas debe dar las mismas ecuaciones de movimiento, pues son descripciones equivalentes, debe haber un modo de pasar de una descripción a la otra.

Se sabe que

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j = p_j(q, \dot{q}, t) \xRightarrow{?} \dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$$

para que esto último sea posible se tienen que cumplir las condiciones del T^{ma} de la función inversa. Sean los coeficientes del Hessiano

$$G_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \rightarrow G = [G_{ij}]$$

entonces, si $\det(G) \neq 0$, puede despejarse \dot{q}_j como función de q y p como se deseaba. Ahora se desea llegar a las sigs. ecs.

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \dot{p}_j = f_j(q, p, t) \\ \textcircled{2} \quad \dot{q}_j = h_j(q, p, t) \end{array} \right\}$$

Llegar a 1 es sencillo con las ecs. E-L:

$$\textcircled{1} \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

$\textcircled{2}$ ¿Puede hacerse...

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \leftrightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial \textcircled{?}}{\partial p_j}?$$

Generalmente, téngase

$$u = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \longrightarrow x = \frac{\partial g(u, y)}{\partial u} \quad \text{donde} \quad \left. \begin{matrix} f(x, y) \\ (x, y) \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} g(u, y) \\ (u, y) \end{matrix} \right.$$

donde $f \leftrightarrow \mathcal{L}, p \leftrightarrow u, x \leftrightarrow \dot{q}, y \leftrightarrow q$

3.2 Transformadas de Legendre

Considérese una función de dos variables $f(x, y)$, entonces

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_u dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_v dy$$

Ahora se desea pasar de una descripción en (x, y) a una en (u, y) , expresando las cantidades diferenciales en términos de du y dy . Sea g la función de u e y dada por

$$g = ux - f$$

si ahora se toma su diferencial

$$dg = u dx + x du - df = u dx + x du - (u dx + v dy) = x du - v dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy \rightarrow \boxed{x = \frac{\partial g}{\partial u}, v = -\frac{\partial g}{\partial y}}$$

por lo que x tiene que poder despejarse en términos de u e y

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(u, y) \rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x} \rightsquigarrow x = X(u, y) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$$

por lo que en nuestro caso se tendría el siguiente mapping:

$$\begin{aligned} y &\leftrightarrow q & f &\leftrightarrow \mathcal{L} & x &\leftrightarrow \dot{q} & u = \frac{\partial f}{\partial x} &\leftrightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\ q = ux - f &\leftrightarrow \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} & x = \frac{\partial g}{\partial u} &\leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} & v = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} &\leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \dot{p} \end{aligned}$$

La condición del T^{ma} de la función inversa es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0 \Leftrightarrow G = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \dot{q}} \neq 0$$

Aplicación en termodinámica:

1ª Ley en termodinámica: $dU = dQ - dW = T dS + p dV$. Donde

$$U(S, V) \text{ con } T = \frac{\partial U}{\partial S} \text{ y } p = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

- La entalpía $H(S, p)$ se genera con la transformada de Legendre

$$H(S, p) = U + pV \Rightarrow dH = dU + p dV + V dp = T dS + V dp \quad \text{con } T = \frac{\partial H}{\partial S}, V = \frac{\partial H}{\partial p}$$

por lo que lo que se ha conseguido es

$$U(S, V), \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V} \xrightarrow{\text{Transf. Leg.}} H(S, p), \quad T = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Ejemplos para hacer:

Energía libre de Gibbs: $G(T, p) = H - TS \Rightarrow dG = V dp - S dT$

Energía libre de Helmholtz: $F(T, V) = U - TS \Rightarrow dF = -p dV - S dT$.

3.3 Aplicación al formalismo Hamiltoniano: ecuaciones de Hamilton

Ahora se hará algo análogo para \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \Rightarrow d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \text{pues } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{p}_j$$

y la transformada de Legendre quedará como:

$$\mathcal{H} = \dot{q}_j p_j - \mathcal{L} \Rightarrow d\mathcal{H} = \cancel{p_j d\dot{q}_j} + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

por lo que las ecuaciones de Hamilton son las siguientes

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \quad (3.3.1)$$

También resulta útil tomar la derivada temporal del Hamiltoniano

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \underbrace{\dot{q}_j}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

también puede obtenerse la siguiente relación

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

La estrategia a la hora de abordar los problemas será la siguiente

- 1) g.d.l $\rightarrow \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V$
- 2) $p_j(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$
- 3) $\mathcal{H} = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$
- 4) $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$
- 5) Sustituir 4) en 3) y obtener $\mathcal{H}(q, p, t)$

Ejemplos sencillo: Partícula libre en 1D

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{2m} \rightarrow p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

por lo que el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = p_x \dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{2m} = T + \cancel{V}^0$$

y aplicando las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \rightarrow p_x = \text{cte.} \\ \dot{x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow x(t) = \frac{p_x}{m} t + x_0 \end{cases}$$

② Muelle:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow \mathcal{H} = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

por lo que

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{x} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

que es la ED de un movimiento armónico simple de toda la vida.

③ Hamiltoniano de una partícula en campo EM

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi - \frac{\dot{\vec{r}}}{c}\vec{A}) \\ \vec{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \mathcal{H} = \vec{p}\dot{\vec{r}} - \mathcal{L} = \dots = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$$

④ Máquina de Atwood:

$$\begin{aligned} V &= -m_1gx_1 - m_2g(l - x_1) \Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2)gx_1 + m_2gl \\ p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_1 = p/(m_1 + m_2) \end{aligned}$$

por lo que el Hamiltoniano queda como sigue

$$\mathcal{H} = p\dot{x}_1 - \mathcal{L} = T + V = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx_1 - m_2gl \quad (3.3.2)$$

y con las ecuaciones de Hamilton se llega a

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{(m_1 + m_2)} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 \end{aligned} \right. \quad (3.3.3)$$

3.4 Espacio de fases

→ q_i, p_i independientes

→ (q_i, p_i) coordenadas en un espacio de $2N - D$ llamado espacio de fases (ε_F)

→ ε_F espacio de los puntos $(q_i, p_i) \in \mathbb{R}^{2N}$ en el que el sistema puede estar ↔ espacio de posibles trayectorias físicas $(q_i(t), p_i(t))$, solución de las ecs. de Hamilton ↔ espacio de posibles condiciones iniciales $\mathcal{H}(p_0, q_0) = \text{cte.}$

Las ecuaciones de Hamilton con 1 grado de libertad

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

son análogas a las ecuaciones de un fluido bidimensional incompresible con Ψ la función corriente

El volumen dentro de una zona delimitada por una trayectoria del espacio de fases es

$$\left. \begin{aligned} t_0 &\rightarrow t \\ R &\rightarrow R' \\ V(R) &\rightarrow V(R') \end{aligned} \right\} V(t) = \int \underbrace{\prod_i dq_i dp_i}_{\text{elem. de vol. de } \varepsilon_F} \leftrightarrow V(t_1) = V(t_2)$$

Las líneas en el espacio de fases no se cruzan

$$(\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) = (f(q, p, t), h(q, p, t)) \rightarrow (\dot{q}, \dot{p})|_{(q_0, p_0)} = (f(q_0, p_0), h(q_0, p_0)).$$

En analogía con la corriente de un fluido, esto quiere decir que en un mismo punto, el campo de velocidades no puede tener dos valores distintos.

- Caso de 1 grado de libertad: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \Rightarrow \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} + V = \frac{p^2}{2m} + V = E = \text{cte}$$

Desarrollando en torno a puntos de equilibrio

$$E = \mathcal{H}(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q_{\text{eq}}) + \frac{\partial V}{\partial q} \Big|_{q_{\text{eq}}} (q - q_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q_{\text{eq}}} (q - q_{\text{eq}})^2 + \dots \Rightarrow E - V_{\text{eq}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{V''(q_{\text{eq}})}{2} (q - q_{\text{eq}})^2$$

$$\frac{p^2}{2m(E - V_{\text{eq}})} + \frac{(q - q_{\text{eq}})^2}{2(E - V_{\text{eq}})/V''(q_{\text{eq}})} = 1$$

recuérdese que las ecuaciones cónicas de la elipse y de la hipérbola son, respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

por lo que en torno al punto de equilibrio se tendrá una elipse o una hipérbola en función de los signos resultantes de $E - V_{\text{eq}} \Rightarrow E = T + V \rightarrow E - V = T \geq 0$.

$$\rightarrow \text{Si } q_{\text{eq}} \text{ es mínimo} \longleftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q_{\text{eq}}} > 0 \Rightarrow \text{elipse en } \varepsilon_F \text{ (eq. estable)}$$

$$\rightarrow \text{Si } q_{\text{eq}} \text{ es máximo} \longleftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q_{\text{eq}}} < 0 \Rightarrow \text{hipérbola en } \varepsilon_F \text{ (eq. inestable)}$$

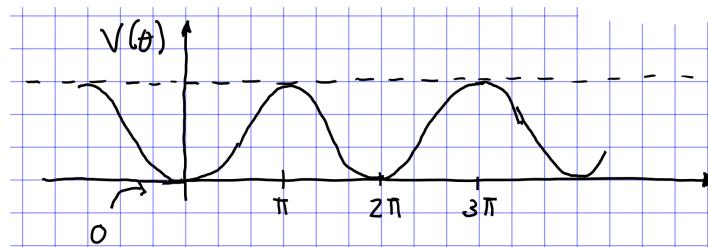
Tómese como ejemplo el **péndulo simple**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$$

por lo que el Hamiltoniano será

$$\mathcal{H} = T + V = \frac{p^2}{2ml^2} + \overbrace{mgl(1 - \cos \theta)}^{V(\theta)} \xrightarrow{\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2} \mathcal{H} = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{1}{2}ml\theta^2 = E \rightarrow \frac{p^2}{2ml^2E} + \frac{\theta^2}{2E/mgl} = 1$$

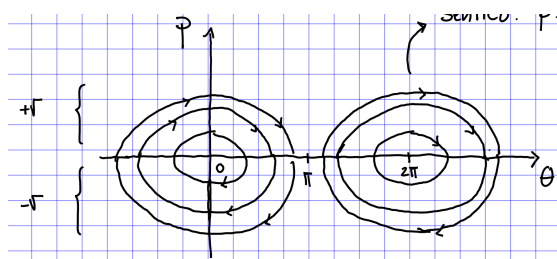
el potencial puede representarse y se tiene la siguiente función sinusoidal despejando del Hamiltoniano el mo-



mento, se tiene

$$p(\theta) = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl(\cos \theta - 1))} = \pm \sqrt{2m^2l^3g \left[\frac{E}{mgl} - \sin^2 \theta/2 \right]}$$

- (1) Si $0 < E < 2mgl$: E es menor que la barrera de potencial, por lo que el movimiento es acotado



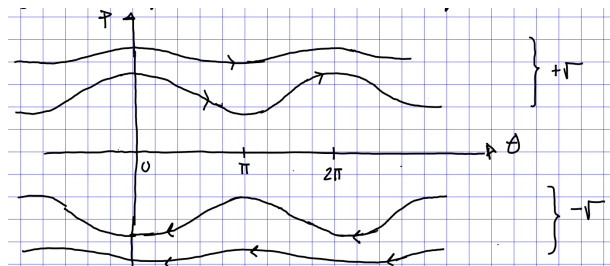
Para conocer el sentido basta con mirar

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$$

y darse cuenta de

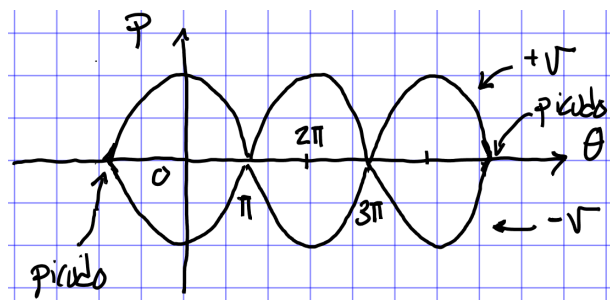
$$\begin{aligned} p > 0 &\rightsquigarrow \dot{\theta} > 0 \rightarrow \theta \uparrow \\ p < 0 &\rightsquigarrow \dot{\theta} < 0 \rightarrow \theta \downarrow \end{aligned}$$

(2) Si $E > 2mgl$: E mayor que la barrera de potencial y movimiento no acotado

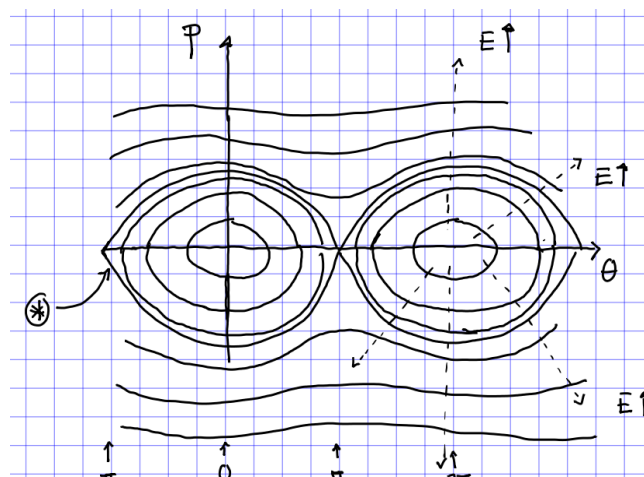


(*) **Curva separatriz** (curva que separa (1) de (2)) $E = 2mgl$

$$p = \pm \sqrt{2m^2 l^3 g (1 + \cos \theta)} = \pm 2ml \sqrt{gl} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$



Juntando las tres “zonas” del espacio de fases se tiene el siguiente diagrama de este



donde todas las curvas son curvas de nivel con $\mathcal{H} = E = \text{cte}$ para distintos valores de E .

La resolución de las ecs. de mvmt. es

$$\left. \begin{matrix} p(t) \\ q(t) \end{matrix} \right\} (p(t), q(t)) \Rightarrow (\dot{q}, \dot{p}) = (p/ml^2, -mgl \sin \theta)$$

Ejercicio: cambiar la referencia a $\pi/2$. Mirar para dónde van las flechas en un diagrama fásico de 1 g.d.l. $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V(q)$ por lo que

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2a}$$

Coordenadas cíclicas para un Hamiltoniano

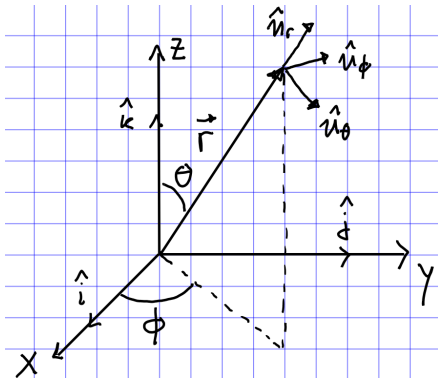
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

por lo que si una coordenada es cíclica en \mathcal{L} ($\partial \mathcal{L} / \partial q_i = 0$), también lo es en \mathcal{H} ($\partial \mathcal{H} / \partial q_i = 0$).

Se ve por tanto a partir de las ecs. de Euler-Lag. como de Hamilton que esto implica

$$\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(q_c) \Rightarrow p_c = \text{cte} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} \quad \mathcal{L} \neq \mathcal{L}(q_c) \Rightarrow p_c = \text{cte}$$

Ejemplo: potencial central: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V(r)$



$$\left. \begin{matrix} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / z \\ \tan \phi = y / x \end{matrix} \right\}$$

y los vectores unitarios son

$$\left. \begin{matrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} = \hat{u}_r \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r(\cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) = r \cdot \hat{u}_\theta \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta(-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) = r \sin \theta \hat{u}_\phi \end{matrix} \right\}$$

Así puede escribirse $\dot{\vec{r}}$ como

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{u}_\phi \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - V(r)$$

Los momentos conjugados son

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \leftrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

por tanto

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r) .$$

Dado que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = \text{cte}$$

puede elegirse un stma. de referencia tal que $p_\phi = 0$ (como ya se vio en el primer capítulo, puede elegirse $\hat{j} \parallel \vec{L}$, con lo que se tiene un movimiento en el plano $xz \rightarrow \phi = 0 \Leftrightarrow p_\phi = 0$). Ahora se escribe el nuevo \mathcal{H} (con un grado de libertad menos)

$$\mathcal{H}(p, q)|_{p_\phi=0} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) + V(r) ,$$

pero nuevamente θ es una coordenada cíclica, por lo que $p_\theta = \text{cte} \equiv L$, por lo que se reduce el problema a un sistema Hamiltoniano con las variables canónicas p_r y r

$$\mathcal{H}(q, p)|_{p_\phi=0, p_\theta=L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) + V(r) ,$$

y las ecuaciones de Hamilton quedan como sigue

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \end{cases} .$$

despejando p_r en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene la ecuación de movimiento obtenida mediante las ecs. de E-L

$$\boxed{m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}}$$

3.5 Paréntesis de Poisson

Evolución temporal de cantidades físicas y el paréntesis de Poisson

Se verá que los paréntesis de Poisson permiten un estudio sencillo de las cantidades conservadas o **integrales primeras**, más allá de las asociadas a variables cíclicas.

Considérese la magnitud física $f(q, p, t)$, su derivada total será

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \xrightarrow{\text{ecs. Ham.}} \frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} ,$$

pues a lo largo de una trayectoria física obedece las ecs. de Hamilton. De este modo puede definirse el paréntesis de Poisson como sigue

$$\{f, \mathcal{H}\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

por lo tanto, puede verse que si $\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow f = \text{cte.}$

Esto puede simplificar los cálculos pues si se tiene que $\partial f / \partial t = 0$, para saber si f es una cantidad conservada basta con calcular los paréntesis de Poisson. A continuación se verá una serie de propiedades útiles que cumplen éstos.

Primero véanse algunos ejemplos sencillos:

$$(1) \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \underbrace{\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}}_0 + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \text{ por lo que si } \mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t) \Rightarrow \mathcal{H} = \text{cte}$$

(2) Partícula libre: $\mathcal{H} = p^2/2m$. Ni p ni x dependen explícitamente del tiempo

$$\{p, \mathcal{H}\} = \frac{\overset{0}{\cancel{\partial p}} \overset{0}{\cancel{\partial \mathcal{H}}}}{\cancel{\partial x} \cancel{\partial p}} - \frac{\overset{0}{\cancel{\partial p}} \overset{0}{\cancel{\partial \mathcal{H}}}}{\cancel{\partial p} \cancel{\partial x}} = 0 \Rightarrow p = \text{cte (integral primera)}$$

$$\{x, \mathcal{H}\} = \frac{\overset{1}{\cancel{\partial x}} \overset{0}{\cancel{\partial \mathcal{H}}}}{\cancel{\partial x} \cancel{\partial p}} - \frac{\overset{0}{\cancel{\partial x}} \overset{0}{\cancel{\partial \mathcal{H}}}}{\cancel{\partial p} \cancel{\partial x}} = \frac{p}{m} \Rightarrow x \neq \text{cte}$$

Propiedades de los paréntesis de Poisson

En general se definen los paréntesis de Poisson de dos funciones A, B como una nueva función dada por:

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

y cumplen las siguientes propiedades

(i) Bilineal:

$$\begin{aligned} \{\lambda_1 A + \lambda_2 B, C\} &= \frac{\partial(\lambda_1 A + \lambda_2 B)}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial(\lambda_1 A + \lambda_2 B)}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} = \left(\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \frac{\partial C}{\partial p_i} - \left(\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial p_i} + \lambda_2 \frac{\partial B}{\partial p_i} \right) \frac{\partial C}{\partial q_i} \\ &= \lambda_1 \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right] + \lambda_2 \left[\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right] = \lambda_1 \{A, C\} + \lambda_2 \{B, C\} \end{aligned}$$

(ii) Antisimetría: $\{A, B\} = -\{B, A\}$

(iii) Identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right\} + \dots \\ &= \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right)}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right)}{\partial q_i} \right] + \dots = \\ &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial p_i^2} \frac{\partial C}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_i} \right) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q_i^2} \frac{\partial C}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i^2} \right) \end{aligned}$$

El resultado final es:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

(iv) Regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \{A \cdot B, C\} &= \frac{\partial(A \cdot B)}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial(A \cdot B)}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} = \left(A \frac{\partial B}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} B \right) \frac{\partial C}{\partial p_i} - \left(A \frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} B \right) \frac{\partial C}{\partial q_i} = \\ &= A \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) + B \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) = A \cdot \{B, C\} + B \{A, C\} \end{aligned}$$

Nota: Un conjunto \mathcal{A} que es espacio vectorial dotado de una operación $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con las tres primeras propiedades se llama **álgebra de Lie**. Cuando además se cumple (iv) se habla de álgebra de Poisson.

Otras propiedades que resultan útiles son

(v) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \{A, \lambda\} = 0$

(vi) Derivada temporal:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{A, B\} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial p_i} - \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial q_i} = \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial q_i \partial t} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_i \partial t} \frac{\partial B}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial t} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial t} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\}\end{aligned}$$

$$(vii) \{q_i, A\} = \frac{\partial A}{\partial p_i}$$

$$(viii) \{p_i, A\} = -\frac{\partial A}{\partial q_i}$$

(ix)

$$\{f(A), B\} = \frac{\partial[f(A)]}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial[f(A)]}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial A} \{A, B\}$$

Ahora se ve que se pueden expresar las ecuaciones de Hamilton en términos de paréntesis de Poisson. Simplemente teniendo en cuenta (vii) y (viii):

$$\left. \begin{aligned} \{q_i, \mathcal{H}\} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \{p_i, \mathcal{H}\} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

y también se ve que se cumplen las relaciones canónicas:

$$\left. \begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \end{aligned} \right\}$$

Relación entre formalismo Hamiltoniano clásico y cuántico

Mecánica clásica		Mecánica cuántica
A (variable dinámica)	\longrightarrow	\hat{A} (operador hermítico)
$\{A, B\}$	\longrightarrow	$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \leftrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
q_i	\longrightarrow	\hat{Q}_i
p_i	\longrightarrow	\hat{P}_i
$\left\{ \begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \right.$	\longrightarrow	

• **Teorema de Poisson:** Si A y B son ctes. (integrales primeras), entonces $\{A, B\} = \text{cte}$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, \mathcal{H}\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = -\{A, \mathcal{H}\} \leftrightarrow \text{idem con } B$$

tomando ahora la derivada temporal total del paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{A, B\} &= \{\{A, B\}, \mathcal{H}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{A, B\} = -\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} = \\ &= -\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} - \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{\mathcal{H}, A\}\} = 0\end{aligned}$$

$$3 \text{ g.d.l.} \leftrightarrow 3 \text{ int. primeras} \Rightarrow J_1, J_2, J_3 \Rightarrow \{J_1, J_2\} = J_3$$

Ahora se comprobará que las cantidades conservadas asociadas a ciertas simetrías en una partícula libre efectivamente lo son. Primero el propio Hamiltoniano:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

Ahora el momento lineal en k :

$$\frac{dp_k}{dt} = \cancel{\frac{\partial p_k}{\partial t}} + \{p_k, \mathcal{H}\} = \cancel{\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}} - \cancel{\frac{\partial p_k}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}} = 0$$

y ahora un boost en k , $\vec{B} = \vec{x} - \frac{\vec{p}}{m}t$, $B_k = x_k - \frac{p_k}{m}t$:

$$\frac{dB_k}{dt} = \frac{\partial B_k}{\partial t} + \{B_k, \mathcal{H}\} = -\frac{p_k}{m} + \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \cancel{\frac{\partial B_k}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}} = -\frac{p_k}{m} + \delta_{ki} \frac{p_i}{m} = 0.$$

Finalmente el momento angular $L_k = \varepsilon_{kmn} x_m p_n$

$$\begin{aligned} \frac{dL_k}{dt} &= \cancel{\frac{\partial L_k}{\partial t}} + \{L_k, \mathcal{H}\} = \frac{\partial(\varepsilon_{kmn} x_m p_n)}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \cancel{\frac{\partial(\varepsilon_{kmn} x_m p_n)}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}} = \frac{1}{m} \varepsilon_{kmn} \delta_{mi} p_n p_i = \frac{1}{m} (\vec{p} \times \vec{p})_k = 0 \\ \left\{ \varepsilon_{kmn} x_m p_n, \sum p_i^2/2m \right\} &= \varepsilon_{kmn} \left\{ x_m p_n, \sum p_i^2/2m \right\} = \varepsilon_{kmn} x_m \left\{ p_n, \sum p_i^2/2m \right\} + \varepsilon_{kmn} p_n \left\{ x_m, \sum p_i^2/2m \right\} \end{aligned}$$

Otros ejercicios: $\{L_j, p_k\}, \{B_j, p_k\}, \{B_j, L_k\}$

Ahora se demostrará: $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$ y se puede intentar $\{L_1, L_2\}$

Téngase en cuenta que $L_i = \varepsilon_{imn} x_m p_n$, $L_j = \varepsilon_{jkh} x_k p_h$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_s} = \varepsilon_{imn} p_n \delta_{ms}, \quad \frac{\partial L_j}{\partial x_s} = \varepsilon_{jkh} p_h \delta_{ks}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial p_s} = \varepsilon_{imn} x_m \delta_{ns}, \quad \frac{\partial L_j}{\partial p_s} = \varepsilon_{jkh} x_k \delta_{hs}$$

$$\{L_i, L_j\} = \frac{\partial L_i}{\partial x_s} \frac{\partial L_j}{\partial p_s} - \frac{\partial L_i}{\partial p_s} \frac{\partial L_j}{\partial x_s} = \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jkh} p_n x_k \delta_{ms} \delta_{hs} - \varepsilon_{jkh} \varepsilon_{imn} x_m p_h \delta_{ns} \delta_{ks} = \varepsilon_{isn} \varepsilon_{jks} p_n x_k - \varepsilon_{jsh} \varepsilon_{ims} x_m p_h$$

y aplicando $\varepsilon_{imn} \varepsilon_{ijk} = \delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}$

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_{sin} \varepsilon_{sjk} p_n x_k + \varepsilon_{sjh} \varepsilon_{sim} = -(\delta_{ij} \delta_{nk} - \delta_{ik} \delta_{nj}) p_n x_k + (\delta_{ji} \delta_{hm} - \delta_{jm} \delta_{hi}) \\ & = -(\delta_{ij} \underbrace{\delta_{nk} p_n x_k}_{\vec{p} \cdot \vec{x}} - \delta_{ik} \delta_{nj} p_n x_k) + \cancel{\delta_{ij} \vec{x} \cdot \vec{p}} - x_j p_i = x_i p_j - x_j p_i = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) x_m p_n = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} x_m p_n \\ & = \varepsilon_{ijk} L_k \end{aligned}$$

Otro ejercicio:

$$\begin{aligned} \{L_j, p_k\} &= \varepsilon_{jkn} p_n \\ \{\varepsilon_{jln} x_l p_n, p_k\} &= \varepsilon_{jln} \{x_l p_n, p_k\} = \varepsilon_{jln} [x_l \underbrace{\{p_n, p_k\}}_0 + p_n \underbrace{\{x_l, p_k\}}_{\delta_{lk}}] = \varepsilon_{jkn} p_n \varepsilon_{jln} \end{aligned}$$

$\{B_j, p_k\} = \delta_{jk}$, $\{B_j, L_k\} = \varepsilon_{klj} B_l$. Agarrar el potencial central $V = -k/r$ y comprobar que las cantidades $\mathcal{H} = \vec{p}^2/2m - k/r$, L_k y $A_k = \varepsilon_{klm} p_l - km \frac{x_k}{r}$ son cantidades conservadas.

Ejercicio: Téngase un sistema de N partículas puntuales $\{\vec{r}_\alpha\}$ con $V = V(\{\vec{r}_\alpha\})$

$$\vec{f} = \vec{R} - \frac{\vec{P}}{M}t \text{ con } \begin{cases} M = \sum_\alpha m_\alpha \\ \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \\ \vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \end{cases}$$

El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V(\{\vec{r}_\alpha\})$$

Comprobar lo siguiente

$$\frac{df_k}{dt} + \frac{\partial f_k}{\partial t} \stackrel{?}{=} 0; \quad \frac{\partial f_k}{\partial t} = -\frac{P_k}{M}$$

$$\{f_k, \mathcal{H}\} = \{R_k, \mathcal{H}\} - \left\{ \frac{p_k t}{M}, \mathcal{H} \right\} = \frac{1}{M} \underbrace{\{m_\alpha x_\alpha^k\}}_{(a)} - \underbrace{\frac{t}{M} \{p_k, \mathcal{H}\}}_{(b)}$$

(a)

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha^k, \sum_\beta \frac{\vec{p}_\beta^2}{2m_\beta} + V \right\} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{m_\alpha}{2m_\beta} \{x_\alpha^k, \vec{p}_\beta^2\} + \sum_\alpha m_\alpha \{x_\alpha^k, \underbrace{V}_{V(x_\alpha^k)}\} \stackrel{0}{=} \sum_j \{x_\alpha^k, p_j^\beta p_j^\beta\} = \\ &= \sum_j 2\{x_\alpha^k, p_j^\beta\} p_j^\beta = \sum_j 2\delta_{kj} \delta_{\alpha\beta} p_j^\beta = 2\delta_{\alpha\beta} p_j^\beta = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha} p_\alpha^k = P_k \end{aligned}$$

(b)

con lo que

$$\frac{df_k}{dt} = -\frac{P_k}{M} + \frac{P_k}{M} + \frac{t}{M} \sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial x_k^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial x_k^\alpha} = \sum_\alpha F_k^\alpha = 0$$

por lo que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = 0 \Rightarrow M\dot{\vec{R}} = \text{cte}$$

4 Transformaciones canónicas

1. Principio de Hamilton modificado	37
2. Transformaciones canónicas	37
3. Función generatriz	39
4. Transformaciones canónicas y paréntesis de Poisson	42
5. Teorema de Liouville	44
6. Simetrías en el formalismo Hamiltoniano	44
7. Variables de ángulo acción	46
8. Sistemas integrables	48
9. Teoría de Hamilton-Jacobi	49

4.1 Principio de Hamilton modificado

Se vio que $S = \int dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ y $\delta S = \int dt \delta \mathcal{L} = 0 \rightsquigarrow$ ecs. E-L

Aplicando la transformada de Legendre

$$S = \int dt (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p, t)) \leftrightarrow \delta S = \delta \left[\int dt (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p, q, t)) \right] = 0 \quad (4.1.1)$$

Recuérdese que en el formalismo Lagrangiano las variaciones de q y \dot{q} estaban acopladas

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$$

Considérese ahora en (4.1.1) las variaciones independientes en q y p :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i \right] \xrightarrow{p_i \delta \dot{q}_i = d/dt [p_i \delta q_i] - \dot{p}_i \delta q_i} \\ &= \left[p_i \delta q_i \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \left[\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right] \delta p_i - \left[\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} = 0 \end{aligned}$$

y dado que q y p son independientes, los corchetes deben anularse por separado, resultando en

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases},$$

que son las ecuaciones de Hamilton

4.2 Transformaciones canónicas

En el formalismo Lagrangiano las transformaciones que se realizaban sobre las variables eran puntuales

$$q_i \rightarrow Q_i(q_i) \dot{q}_i \rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \left. \vphantom{\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_i \rightarrow q_i(Q) \\ \dot{Q}_i \rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \end{cases}$$

por lo que el Lagrangiano se transformaba como

$$\begin{aligned} q, \dot{q} &\rightarrow Q, \dot{Q} \\ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &\rightarrow \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L}(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t)) \end{aligned}$$

y por lo tanto las E-L se ven transformadas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i}$$

Mientras tanto, en el formalismo Hamiltoniano, las transformaciones de q y p son independientes

$$\left. \begin{array}{l} q_i \rightarrow Q_i(q, p, t) \\ p_i \rightarrow P_i(q, p, t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

donde q_i, p_i, Q_i y P_i son las variables canónicas y $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t)$.

Más adelante se verá que esto es equivalente a que cumplan las relaciones canónicas $\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$ y $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$.

¿Son las transformaciones puntuales transformaciones canónicas?

$$\mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{son las coordenadas originales.}$$

Las nuevas coordenadas serán

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) &= \mathcal{L}(q(Q), \dot{q}(Q, \dot{Q}), t) & P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} \\ P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \\ &\rightarrow Q_i(q) \end{aligned}$$

Aplicando ahora la transformada de Legendre a \mathcal{L}' :

$$\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) \rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \wedge \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$$

La relación entre \mathcal{H} y $\tilde{\mathcal{H}}$ será

$$\tilde{\mathcal{H}} = P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}'(Q, P, t) = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \dot{Q}_i - \mathcal{L}' = p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q, p, t) \Rightarrow \boxed{\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q(Q), p(Q, P), t)}$$

pues

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \leftrightarrow \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} \leftrightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \dot{Q}_i = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

Por lo tanto las transformaciones canónicas tienen el siguiente diagrama

(q_i, p_i)	\rightarrow	$(Q(q, p, t), P(q, p, t))$
$\mathcal{H}(q, p, t)$		$\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t)$
$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$		$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} = \{Q_i, \tilde{\mathcal{H}}\}$
$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$		$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} = \{P_i, \tilde{\mathcal{H}}\}$

4.3 Función generatriz

El ppio. de Hamilton se cumple en ambas bases (canónicas):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta S_q = \delta \left\{ \int_{t_0}^{t_f} dt [p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p, q, t)] \right\} = 0 \\ \delta S_p = \delta \left\{ \int_{t_0}^{t_f} dt [-\dot{p}_i q_i - \mathcal{H}(q, p, t)] \right\} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta S_Q = \delta \left\{ \int_{t_0}^{t_f} dt [P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}(P, Q, t)] \right\} = 0 \\ \delta S_P = \delta \left\{ \int_{t_0}^{t_f} dt [-\dot{P}_i Q_i - \mathcal{H}(Q, P, t)] \right\} = 0 \end{array} \right.$$

donde en el paso de $\delta S_{q(Q)}$ a $\delta S_{p(P)}$ se ha hecho utilizando que $p_i \dot{q}_i = d/dt(p_i q_i) - \dot{p}_i q_i$

Lo que se desea ahora es llegar a $P = P(p, q, t)$ y $Q = Q(q, p, t)$ usando el ppio. de Hamilton

$$\textcircled{1} \delta(S_q - S_Q) = 0 \Rightarrow S_q - S_Q = \int_{t_0}^{t_f} dt \frac{dF_1}{dt} = F_1|_{t_0}^{t_f} \Leftrightarrow \boxed{p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}(p, q, t) + \tilde{H}(Q, P, t) = \frac{dF_1}{dt}}.$$

Las transformaciones que satisfacen esta condición son canónicas. F_1 es una función de las coordenadas originales y las nuevas que se llama **FUNCIÓN GENERATRIZ**.

$\textcircled{1}$ Función generatriz $F_1(q, Q, t)$

$$p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i + (\tilde{H} - \mathcal{H}) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial p_i} \dot{p}_i}_0 + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial P_i} \dot{P}_i}_0 + \frac{\partial F_1}{\partial t} \Rightarrow F_1 = F_1(q, Q, t)$$

y se tienen las siguientes relaciones

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_i} = \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = 0 \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad \tilde{H} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

La primera relación no nula dice que $p_i = p_i(q, Q, t)$ Para que Q pueda despejarse, el determinante del Jacobiano debe ser no nulo

$$\det \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} \right) = \det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial P_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial Q_2} \end{array} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j} \right) \neq 0 \rightsquigarrow Q_i(q, p, t)$$

La segunda relación no nula da que $P_i = P_i(q, Q, t)$ que con lo visto puede ponerse en función de (q, p, t) , $P_i = P_i(q, Q(q, p, t), t) = P_i(q, p, t)$.

Finalmente, de la tercera relación

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(Q, p, t), Q)$$

Ejemplo: propóngase la siguiente función generatriz $F_1 = q_l Q_l$.

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = \delta_{il} \delta_{jl} = \delta_{ij} = A_{ij} \rightsquigarrow A = [\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| \neq 0$$

y ahora, pueden hallarse las nuevas coordenadas

$$\left. \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \delta_{il} Q_l = Q_i \rightarrow Q_i = p_i \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_l \delta_{il} = -q_i \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Q_i = p_i \\ P_i = -q_i \end{array}}$$

y de la relación del Hamiltoniano, dado que $F_1 \neq F_1(t)$, se ve que $\tilde{H} = \mathcal{H}(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) = \mathcal{H}(-P, Q, t)$.

Puede hacerse lo mismo con las distintas combinaciones de δS_q , δS_p , $\delta S'_Q$, $\delta S'_P$:

$$\left. \begin{aligned} \delta S_q - \delta S_Q &\Rightarrow F_1(q, Q, t) \\ \delta S_q - \delta S_P &\Rightarrow F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + Q_i P_i \\ \delta S_p - \delta S_Q &\Rightarrow F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - q_i p_i \\ \delta S_p - \delta S_P &\Rightarrow F_4(p, P, t) = F_1(p, P, t) - p_i Q_i + P_i Q_i \end{aligned} \right\}$$

Explícitamente para F_2

$$S_q - S_P = \int dt \frac{F_2}{dt} = \int dt \left(\underbrace{-Q_i \dot{P}_i}_{\dot{Q}_i P_i - d/dt(Q_i P_i)} - \tilde{\mathcal{H}} \right) = S_q - S_Q + \int dt \frac{d}{dt}(Q_i P_i) = \int dt \frac{d}{dt}(F_1 + Q_i P_i) ,$$

por lo que $F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + Q_i P_i$ y se tienen las siguientes relaciones

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad \tilde{H} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

En el caso de F_3

$$\delta S_p - \delta S_Q = 0 \Leftrightarrow S_p - S_Q = \int dt \frac{dF_3}{dt} = \int dt [-p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}] - S_Q = \int dt \left[- \left(q_i p_i - \frac{d}{dt}(p_i q_i) \right) - \mathcal{H} \right] - S_Q ,$$

por lo que

$$S_p - S_Q = S_q - S_Q - \int dt (q_i p_i) = \int dt \frac{d}{dt} [F_1 - q_i p_i] .$$

Y también puede verse que

$$-q_i \dot{p}_i - \mathcal{H} + P_i \dot{Q}_i + \tilde{\mathcal{H}} = \frac{dF_3}{dt} = \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial q_i} \dot{q}_i} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial P_i} \dot{P}_i} + \frac{\partial F_3}{\partial t} ,$$

de lo que se concluye

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t} .$$

Téngase una $F_3(p, Q, t)$. Se tendrán unas $q_i(p, Q, t)$ y, si se cumple que

$$\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) = -\det \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial Q_j} \right) \neq 0$$

podrá despejarse $Q(q, P, t)$. Con esto, a partir de $P_i(p, Q, t)$, puede hallarse $P_i(p, q, t)$. Finalmente $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, (Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$

Ejemplo: $F_2 = q_l P_l$

En primer lugar

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j} \right) = \det(\delta_{ij}) \neq 0$$

por lo que p_i podrá despejarse (y por consecuencia Q_i también).

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \delta_{il} P_l = P_i \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \delta_{il} q_l = q_i \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(Q_i, P_i, t) .$$

Variación del ejemplo: obténgase la F_2 asociada a la transf. identidad

$$\left. \begin{aligned} Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i &\Rightarrow F_2 = q_i P_i + f(q_i, t) \\ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i &\Rightarrow F_2 = q_i P_i + g(P_i, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_2(q, P, t) = q_i P_i + h(t)$$

Ejemplo de examen: Sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p) - \varepsilon q \sin(\omega t)$. Ver como se transforman las ecs. de Hamilton y hallar una tr. canónica que cumpla que $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = \mathcal{H}_0(q, p)$.

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} \quad \wedge \quad \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q} + \varepsilon \sin(\omega t)$$

Para hallar la transformación canónica se debe tener en cuenta que

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \rightsquigarrow \frac{\partial F_2}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}_0 + \varepsilon q \sin(\omega t) \Rightarrow F_2(q, P, t) = \int \varepsilon q \sin(\omega t) dt + g(q, P) = -\frac{\varepsilon q}{\omega} \cos(\omega t) + g(q, P)$$

considerando que $q = Q$ (lo da el ejercicio), se tiene que

$$\left. \begin{aligned} Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\partial g}{\partial P} = q &\rightsquigarrow g = qP + h(q) \\ p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \cos(\omega t) + P + h'(q) &\end{aligned} \right\} \Rightarrow F_2 = -\frac{\varepsilon q}{\omega} \cos(\omega t) + qP + h(q) \Rightarrow \begin{cases} Q = q \\ P = p + \frac{\varepsilon}{\omega} \cos(\omega t) + h(q) \end{cases}$$

Una transformación canónica es aquella que cumple las relaciones canónicas, es decir, si

$$\begin{aligned} (q_i, p_i) &\longrightarrow (Q_i, P_i) \\ \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 &\wedge \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \wedge \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Ejemplo: Oscilador amortiguado $\mathcal{L} = e^{bt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right)$ pues

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= e^{bt/m} m \dot{q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= -e^{bt/m} k q \end{aligned} \right\} m \ddot{q} e^{bt/m} + \frac{b}{m} e^{bt/m} m \dot{q} + e^{bt/m} k q = 0 \rightarrow m \ddot{q} + b \dot{q} + k q = 0$$

por lo que

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} e^{bt/m} \rightsquigarrow \dot{q} = \frac{p}{m} e^{-bt/m} \rightarrow \mathcal{H} = p \dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} e^{-bt/m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} e^{-bt/m} + \frac{1}{2} k q^2 e^{bt/m}$$

y por tanto

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} e^{-bt/m} + \frac{1}{2} k q^2 e^{bt/m} \stackrel{?}{=} \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k Q^2$$

Se propone entonces la siguiente transformación:

$$\left. \begin{aligned} Q &= q e^{bt/2m} \\ P &= p e^{bt/2m} \end{aligned} \right\} \{Q, Q\} = \{P, P\} = 0 \wedge \{Q, P\} = \{q e^{bt/2m}, p e^{-bt/2m}\} = \underbrace{\frac{\partial(e^{bt/2m} q)}{\partial q}}_1 \underbrace{\frac{\partial(e^{-bt/2m} p)}{\partial p}}_1 - \underbrace{\frac{\partial(e^{bt/2m} q)}{\partial p}}_0 \underbrace{\frac{\partial(e^{-bt/2m} p)}{\partial q}}_0 = 1$$

Pero el Hamiltoniano nuevo

$$\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k Q^2 + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Ahora se plantea $F_2(q, P, t)$

$$\left. \begin{aligned} p = \frac{\partial F_2}{\partial q} &= P e^{bt/2m} \rightarrow F_2 = P q e^{bt/2m} + f(P, t) \\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} &= q e^{bt/2m} \rightarrow F_2 = e^{bt/2m} P q + g(q, t) \end{aligned} \right\} F_2 = P q e^{bt/2m} + h(t)$$

por lo que

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k Q^2 + \frac{b}{2m} P \overbrace{e^{bt/2m} q}^Q$$

El nuevo Hamiltoniano es una cte. del movimiento pues $\tilde{\mathcal{H}}$ cumple que

$$\frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dt} = \{\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}\}_{Q,P} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0$$

y puede comprobarse que

$$\frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dt} = \{\tilde{\mathcal{H}}(q, p, t), \mathcal{H}\}_{q,p} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}(q, p, t)}{\partial t} = 0$$

Ejercicio de examen: Téngase la transformación $Q = \arctan(\lambda q/p)$. Cómo se transformará P ?

Se tendrá que

$$q = \frac{p}{\lambda} \tan Q = q(p, Q) \rightarrow F_3(p, Q) \quad p = \frac{\lambda q}{\tan Q} = p(q, Q) \rightarrow F_1(q, Q)$$

Para F_1

$$\begin{cases} P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\lambda}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q} - \frac{\partial h}{\partial Q} \\ p = -\frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{\lambda q}{\tan Q} \rightarrow F_1 = \frac{\lambda}{2} \frac{q^2}{\tan Q} + \overbrace{h(Q)}^0 \end{cases}$$

por lo que

$$P = \frac{\lambda}{2} \frac{q^2}{\sin^2[\arctan(\lambda q/p)]} = \frac{p^2}{2\lambda} \left(1 + \left(\frac{\lambda q}{p} \right)^2 \right)$$

Hacerlo con $F_3(p, Q)$, teniendo en cuenta $\sin[\arctan(x)] = x/(\sqrt{1+x^2})$, $\cos[\arctan(x)] = 1/(\sqrt{1+x^2})$ y $D[\arctan(x)] = 1/(1+x^2)$.

4.4 Transformaciones canónicas y paréntesis de Poisson

Ténganse N g.d.l. y

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_\alpha &= (q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N), \quad \alpha = 1, \dots, 2N \\ \tilde{Q}_\alpha &= (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N) \end{aligned} \right\}$$

Entonces

$$\{\tilde{q}_\alpha, \tilde{q}_\beta\} = \left(\begin{array}{c|c} O & \mathbb{I} \\ \hline -\mathbb{I} & O \end{array} \right)_{\alpha\beta} \equiv J_{\alpha\beta}$$

donde cada bloque es $N \times N$.

Con esta notación puede agruparse toda la información de los paréntesis de Poisson en una transformación canónica como

$$\{\tilde{q}_\alpha, \tilde{q}_\beta\} = \{\tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}_\beta\} = J_{\alpha\beta} \quad (4.4.1)$$

Por otro lado, la matriz jacobiana de la transformación es

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \tilde{q}_\beta} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array} \right)_{\alpha\beta} \leftrightarrow \det(\mathcal{M}) \neq 0.$$

Utilizando esta notación y recordando las propiedades de los paréntesis de Poisson ($\{f(A_i), B\} = \sum_i \partial f / \partial A_i \{A_i, B\}$)

$$\begin{aligned} \{\tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}_\beta\} &= \sum_i \left(\frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{Q}_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{Q}_\beta}{\partial q_i} \right) = \sum_\delta \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \tilde{q}_\delta} \{\tilde{q}_\delta, \tilde{Q}_\beta\} = \sum_{\delta, \gamma} \underbrace{\frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \tilde{q}_\delta}}_{\mathcal{M}_{\alpha\delta}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{Q}_\beta}{\partial \tilde{q}_\gamma}}_{\mathcal{M}_{\beta\gamma}} \overbrace{\{\tilde{q}_\delta, \tilde{q}_\gamma\}}^{J_{\delta\gamma}} = \\ &= J_{\alpha\beta} = \sum_{\delta, \gamma} \mathcal{M}_{\alpha\delta} J_{\delta\gamma} (\mathcal{M}^T)_{\gamma\beta} = (\mathcal{M} J \mathcal{M}^T)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una T.C. es aquella cuya matriz Jacobiana \mathcal{M} cumple

$$\boxed{\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = J} \quad (4.4.2)$$

y a las matrices \mathcal{M} se las llama matrices simplécticas. Estas matrices son elementos de un grupo, el grupo simpléctico, $S_p(2N)$.

Si $\mathcal{M} \in S_p(2N)$, entonces $\mathcal{M}^{-1} \in S_p(2N)$, pues

$$\mathcal{M}J\mathcal{M}^T = J \Rightarrow J = \mathcal{M}^{-1}J(\mathcal{M}^T)^{-1} = \mathcal{M}^{-1}J(\mathcal{M}^{-1})^T \checkmark \quad (4.4.3)$$

$\det(\mathcal{M}) = \pm 1$ pues

$$\det(\mathcal{M}J\mathcal{M}^T) = \det(J) = (\det(\mathcal{M}))^2 \det(I) \rightsquigarrow \det(\mathcal{M}) = \pm 1 \checkmark \quad (4.4.4)$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} Q = aq + bp \\ P = cq + dp \end{array} \right\} a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Un modo de hacerlo sería comprobando $\{Q, P\} = 1$ y $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$. También se puede hacer con el formalismo que acabamos de ver

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \mathcal{M}J\mathcal{M}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = J \Leftrightarrow \boxed{ad - bc = 1}$$

Ejercicio para mañana coger el caso $Q = q + bp$ y $P = p$ y calcular las funciones generatrices

Con el análisis de funciones generatrices se tiene:

1. $F_1 : p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \rightsquigarrow \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$
2. $F_2 : p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \rightsquigarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
3. $F_3 : q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \rightsquigarrow \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$
4. $F_4 : q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \rightsquigarrow \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$

Para la relación simpléctica $J = \mathcal{M}J\mathcal{M}^T \Leftrightarrow J\mathcal{M}^T = \mathcal{M}^{-1}J$, se tiene

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \tilde{q}_\beta}, \quad \mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{pmatrix} \leftrightarrow (\mathcal{M}^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{q}_\alpha}{\partial \tilde{Q}_\beta}$$

por lo que

$$J\mathcal{M}^T = \left(\begin{array}{c|c} O & \mathbb{I} \\ \hline -\mathbb{I} & O \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{-1}J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} O & \mathbb{I} \\ \hline -\mathbb{I} & O \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial q_i}{\partial P_j} & \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \\ -\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} & \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \end{pmatrix}$$

que es equivalente a las relaciones anteriores de las funciones generatrices.

Las T.C. conservan los paréntesis de Poisson.

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\alpha = (q, p) &\rightarrow \tilde{Q}_\alpha = (Q, P) \\ \begin{cases} f(q, p) \\ g(q, p) \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f'(Q, P) = f(q(Q, P), p(Q, P)) \\ g'(Q, P) = g(q(Q, P), p(Q, P)) \end{cases} \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{\{f, g\}_{q,p} = \{f', g'\}_{Q,P}} \Rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial f'}{\partial Q} \frac{\partial g'}{\partial P_i} - \frac{\partial f'}{\partial P_i} \frac{\partial g'}{\partial Q_i} \right)$$

por lo que

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \leftarrow q, p \quad \frac{df'}{dt} = \{f', \tilde{\mathcal{H}}\}_{Q,P} + \frac{\partial f'}{\partial t} \leftarrow Q, P$$

Para demostrarlo se usará la propiedad $\{f(A_i), g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial A_i} \{A_i, g\}$:

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{\gamma, \delta} \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}_\delta} \frac{\partial g}{\partial \tilde{q}_\gamma} \underbrace{\{\tilde{q}_\delta, \tilde{q}_\gamma\}}_{J_{\delta\gamma}} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial f'}{\partial \tilde{Q}_\alpha} \frac{\partial g'}{\partial \tilde{Q}_\beta} \sum_{\delta, \gamma} \underbrace{\mathcal{M}_{\alpha\delta} J_{\delta\gamma} (\mathcal{M}^T)_{\gamma\beta}}_{J_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial f'}{\partial \tilde{Q}_\alpha} \frac{\partial g'}{\partial \tilde{Q}_\beta} J_{\alpha\beta} = \{f', g'\}$$

4.5 Teorema de Liouville

Al aplicar una T.C. a una región R de ε_F se transforma en R' del ε_F se cumple

$$\boxed{V(R) = V(R')}$$

Téngase $\tilde{q}_\alpha \rightarrow \tilde{Q}_\alpha$, $R \rightarrow R'$, entonces $V(R) = V(R')$

$$V(R') = \int_{R'} \prod_\alpha d\tilde{Q}_\alpha = \int_R \prod_\alpha d\tilde{q}_\alpha \underbrace{|\det(\mathcal{M})|}_1 = V(R)$$

Esto es relevante porque suelen calcularse cosas del tipo

$$\int_R \prod_\alpha d\tilde{q}_\alpha f(\vec{q}_\alpha) = \int_R dq_1 dq_2 \dots dp_1 dp_2 \dots f(p, q)$$

4.6 Simetrías en el formalismo Hamiltoniano

T.C. infinitesimales

Téngase una T.C. del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon \delta q_i(q, p, t) \\ P_i &= p_i + \varepsilon \delta p_i(q, p, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \varepsilon S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \delta p_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \delta p_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

Recuérdese que una transformación canónica cumple que $J = \mathcal{M}J\mathcal{M}^T \Leftrightarrow J\mathcal{M}^T = \mathcal{M}^{-1}J$. A orden lineal $\mathcal{M}^{-1} = \mathbb{I} - \varepsilon S$, por lo que

$$J(\mathbb{K} + \varepsilon S^T) = (\mathbb{K} - \varepsilon S)J \Rightarrow JS^T = -SJ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \delta p_j}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \delta q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \delta p_j}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \delta p_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \delta p_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \delta p_j}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \delta q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \delta p_j}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_j} & -\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \delta p_i}{\partial p_j} & -\frac{\partial \delta p_i}{\partial q_j} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\delta q_j)}{\partial p_i} &= \frac{\partial(\delta q_i)}{\partial p_j} \\ \frac{\partial(\delta p_j)}{\partial p_i} &= -\frac{\partial(\delta q_i)}{\partial q_j} \\ \frac{\partial(\delta q_j)}{\partial q_i} &= -\frac{\partial(\delta p_i)}{\partial p_j} \\ \frac{\partial(\delta p_j)}{\partial q_i} &= \frac{\partial(\delta p_i)}{\partial q_j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta q_k &= \frac{\partial G}{\partial p_k} \\ \delta p_k &= -\frac{\partial G}{\partial q_k} \end{aligned}}$$

donde G es una función generatriz de T.C. infinitesimal. De este modo la T.C. queda como

$$\left. \begin{aligned} q_i \\ p_i \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} Q_i = q_i + \varepsilon \delta q_i(q, p, t) = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ P_i = p_i + \varepsilon \delta p_i(q, p, t) = p_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

$$f(q, p, t) \longrightarrow f(q, p, t) + \varepsilon \delta f = f(q, p, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) = f + \varepsilon \{f, G\}$$

Aplicación al T^{ma} de Liouville

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_0, p_0) &= E = \mathcal{H}(q, p) \\ (q(t), p(t)) &\rightarrow (Q(t), P(t)) = (q(t + \varepsilon), p(t + \varepsilon)) = (q(t) + \varepsilon \dot{q}, p(t) + \varepsilon \dot{p}) \end{aligned}$$

por lo que la T.C. queda como sigue

$$\left. \begin{aligned} q_i \\ p_i \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} Q &= q + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ P &= p + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{aligned}$$

por lo que \mathcal{H} es la función generatriz de la evolución temporal.

Otro ejemplo de las T.C. infinitesimales

$$\varepsilon \delta q_i = \varepsilon \{q_i, G\} = \varepsilon \left(\overbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}^{\delta_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \overbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_j}}^0 \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \varepsilon = \frac{\partial G}{\partial p_i} \varepsilon$$

Una transformación es una simetría del sistema si

$$S = \int_{t_0}^{t_f} dt (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p, t))$$

es cuasi-invariante, es decir

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon S &= \int dt \frac{d\Lambda}{dt} = \int dt \delta_\varepsilon [p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}] = \int dt \left(\underbrace{\delta_\varepsilon p_i}_{-\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}} \dot{q}_i + \underbrace{p_i \delta_\varepsilon \dot{q}_i}_{\frac{d}{dt}(p_i \delta_\varepsilon q_i) - \dot{p}_i \delta_\varepsilon q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta_\varepsilon q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta_\varepsilon p_i \right) dt \\ &= \int dt \left[-\varepsilon \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)}_{\frac{dG}{dt}} - \frac{\partial G}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) + \varepsilon \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)}_{\{G, \mathcal{H}\}} \right] \\ &= \int dt \left[\varepsilon \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, \mathcal{H}\} \right) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} - G \right) \right] \Leftrightarrow \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \text{ T.C. de simetría.}\end{aligned}$$

pues

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, \mathcal{H}\} = f(q, p, t) \Rightarrow \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

que no es posible.

Por tanto

$$\{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 = \frac{\partial G}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dG}{dt} \Rightarrow G \text{ es la cantidad conservada a la T.C. de simetría}$$

T^{ma} de Noether inverso: Si G es una constante de movimiento, la siguiente T.C. es una transformación de simetría

$$\left. \begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ p_i &\rightarrow P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ f &\rightarrow f + \varepsilon \delta f = f + \varepsilon \{f, G\} \end{aligned} \right\}$$

Un ejemplo de esto son las transformaciones temporales inducidas

$$\left. \begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i = q_i(t + \varepsilon) = q_i + \varepsilon \dot{q}_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ p_i &\rightarrow P_i = p_i(t, \varepsilon) = p_i + \varepsilon \dot{p}_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow G = \mathcal{H}$$

este sistema es invariante bajo traslaciones temporales, es decir, $G = \mathcal{H}$.

4.7 Variables de ángulo acción

Téngase el Hamiltoniano de un oscilador armónico

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_k q^2$$

Una función generatriz para simplificarlo sería

$$F_1 = F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot(Q) ,$$

que proviene de pensar en que el Hamiltoniano se simplificaría si

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}^2(P)}{2m}$$

Para que puedan despejarse las coordenadas, el determinante siguiente debe ser no nulo

$$\det \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \right) = m\omega q \left(\frac{\cos(Q)}{\sin(Q)} \right)' = m\omega q \frac{-\sin^2(Q) - \cos^2(Q)}{\sin^2(Q)} = -\frac{m\omega q}{\sin^2(Q)} \neq 0.$$

Por lo tanto

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q / \tan(Q) \rightsquigarrow Q = \arctan \left(\frac{m\omega q}{p} \right)$$

y

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2\omega^2 q^2} \right) = \left(\frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{p^2}{2m} \right) \frac{1}{\omega} = \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{E}{\omega},$$

dado que

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \frac{1}{\sin^2(\arctan(x))} = \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

El nuevo Hamiltoniano es

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} = P\omega \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \rightarrow Q = \omega t + \varphi_0 \equiv \varphi \equiv \text{ángulo} \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \rightarrow P = \alpha = \text{cte} = \frac{E}{\omega} \equiv I \equiv \text{acción} \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} P &= \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q} \rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \varphi_0) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m\omega^2} \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)} = A \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

y que

$$p = \omega q \frac{1}{\tan(Q)} = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \frac{\cos(\omega t + \varphi_0)}{\sin(\omega t + \varphi_0)} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Para dibujar el espacio de fases hay que mirar

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{p^2}{2m} = 0 \rightarrow p = \pm \sqrt{(E - \frac{1}{2}kq^2)2m} = \pm m\omega \sqrt{A^2 - q^2}$$

que puede pensarse como

$$\frac{q^2}{2E/m\omega^2} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$

que genera elipses en sentido horario.

Es decir, esta transformación hace lo siguiente:

$$(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$$

donde I cumple

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq$$

donde la integral corresponde al área de una órbita en ε_F . Y sus ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial I} = \omega \\ \dot{I} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \leftrightarrow \omega = \frac{\partial E}{\partial I}.$$

Demostración para I :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \frac{1}{2\pi} \int dp \, dq \stackrel{\text{T}^{ma} \text{ Liouville}}{=} \frac{1}{2\pi} \int dI \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint I \, d\varphi = \frac{I}{2\pi} \oint d\varphi = I .$$

Si en lugar de 1 g.d.l se tuvieran más, se tendría que

$$I_i = \oint_{\gamma_i} \sum_k p_k \, dq_k$$

4.8 Sistemas integrables

Sistema integrable: Un sistema con n g.d.l. es **INTEGRABLE** si \exists al menos n integrales primeras $I_i(q, p, t) = \alpha_i$ tales que

1. Son independientes entre sí.
2. Aislantes \leftrightarrow invertibles $I_i(q, p, t) = \alpha_i \rightarrow p_i = p_i(q, \alpha, t)$
3. $\{I_i, I_j\} = 0$

Ejemplos:

1. Téngase los una partícula colisionando de modo elástico contra dos paredes

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \pm \sqrt{2mE}$$

lo que da una trayectoria cerrada en el espacio de fases en forma de cuadrado con discontinuidades en los laterales izquierdo y derecho que se recorre en sentido horario.

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^L \sqrt{2mE} \, dx - \int_L^0 \sqrt{2mE} \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \sqrt{2mE} L$$

de donde se tiene

$$E = \frac{\pi^2 I^2}{2mL^2}$$

y

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{\pi^2 I}{mL^2} = \frac{\pi^2}{mL^2} \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} L = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{|v|}{L}$$

2. Partiendo del siguiente potencial central $\mathcal{H} = p^2/(2m) + k|x|$, $k > 0 \rightarrow \mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t) \rightarrow \mathcal{H} = E = \text{cte.}$

Los $x_{\text{máx}, \text{mín}}$ se hallan como sigue

$$\mathcal{H}(p=0) = k|x| = E \rightarrow x_{\text{máx}} = E/k \equiv L, \quad x_{\text{mín}} = -E/k \equiv -L$$

y se tiene que

$$p = \pm \sqrt{(E - k|x|) \cdot 2m} = \pm \sqrt{2mk(L - |x|)}$$

Para hallar la acción

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^L \sqrt{2mk(L-x)} \, dx + \int_L^0 \cdots dx + \int_0^{-L} \cdots dx + \int_{-L}^0 \cdots dx \right] = \frac{4}{2\pi} \int_0^L \sqrt{2mk(L-x)} \, dx$$

$$\xrightarrow[y=-kx]{y=E-kx} I = \frac{4\sqrt{2mE}^3/2}{3\pi k} \rightarrow E = \left(\frac{3\pi k}{4\sqrt{2m}} I \right)^{2/3}$$

por lo que la frecuencia es

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi k}{2\sqrt{2m}} \right)^{2/3} I^{-1/3} = \frac{2}{3} \left(\frac{3\pi k}{2\sqrt{2m}} \right)^{2/3} \left(\frac{3\pi k}{4\sqrt{2m}} \right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\pi k}{2} \frac{1}{\sqrt{2mE}}$$

4.9 Teoría de Hamilton-Jacobi

Es un ejemplo de $F_2(q, P, t)$: se tienen las siguientes ecuaciones de Hamilton

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

puede plantearse la siguiente transformación

$$\begin{aligned} (q_i, p_i) &\rightarrow (Q_i, P_i) \\ \mathcal{H} &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} = 0 &\rightarrow Q_i = \beta_i = \text{cte} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} = 0 &\rightarrow P_i = \alpha_i = \text{cte} \end{cases}$$

por lo que hay $2n$ ctes. de movimiento.

La F_2 que cumple esto se denomina función principal de Hamilton (Φ o S). Tiene que cumplir

$$\boxed{\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad \text{Ec. Hamilton-Jacobi.} \quad (4.9.1)$$

Se trata de una ecuación en derivadas parciales que no depende de p_i ni $\partial/\partial p_i$ y que tiene $n+1$ (n q_i 's + $1S$) variables, es decir, que se requerirán $n+1$ ctes. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, de las cuales una no es física: $S \rightarrow S + C$, por lo que se requieren n ctes. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Por tanto, la solución será

$$S = S(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, t)$$

donde puede elegirse $P_i = \alpha_i$, por lo que

$$\boxed{S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t)}. \quad (4.9.2)$$

Una vez hallada S ,

$$\left. \begin{aligned} S &\checkmark \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} = f(q_i, \alpha_i, t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i} = q(q_i, \alpha_i, t) = \beta_i = \text{cte} \\ \tilde{\mathcal{H}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} q_i &(\alpha, \beta, t) \\ p_i &(\alpha, \beta, t) \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Cuando se tiene que la energía total, E , se conserva, puede simplificarse el problema como sigue:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et$$

donde $W(q, \alpha)$ es la función característica de Hamilton. Entonces

$$\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) + \cancel{\frac{\partial W}{\partial t}} - E = 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E}, \quad (4.9.4)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo.

W es la función generatriz con:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \\ P_i &= \alpha_i \end{aligned} \right\} \tilde{\mathcal{H}}(Q, \alpha_1) = \alpha_1 = E, \text{ y por tanto } \left\{ \begin{aligned} P_i &= \alpha_i \\ \dot{Q}_1 &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \alpha_1} = 1 \rightarrow Q_1 = t + \beta_1 \\ \dot{Q}_i &= 0 \rightarrow Q_i = \beta_i = \text{cte} \quad \forall i \neq 1 \end{aligned} \right.$$

- Partícula libre 1D

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = E = \alpha_1 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha_1} \rightarrow W = q\sqrt{2m\alpha_1}$$

por lo tanto

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha_1} \rightarrow \alpha_1 = p^2/2m = E$$

$$Q = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{q\sqrt{2m}}{2\sqrt{\alpha_1}} = q\sqrt{\frac{m}{2\alpha_1}} = \frac{m}{p}q = t + \beta_1 \rightarrow q(t) = \frac{p}{m}t + \tilde{\beta}_1$$

donde se ha utilizado

$$\tilde{\mathcal{H}} = \alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_i = 0 \leftrightarrow P = \alpha_1 \\ \dot{Q}_i = \partial \tilde{\mathcal{H}} / \partial \alpha_1 = 1 \end{array} \right.$$

- Partícula sometida a un potencial 1D

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q) = E \Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = E \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(E - V(q))}$$

por lo que la función característica es

$$W(q, E = \alpha_1) = \int dq \sqrt{2m(E - V(q))}$$

y por tanto

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}.$$

En primer lugar deberá hallarse $W(q, E = \alpha_1)$. Seguidamente, para $i \neq 1$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{cte } i = 2, \dots, n.$$

Finalmente

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial E} = t + \beta_1.$$

- Oscilador 1D

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow W = \int dq \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kq^2\right)}.$$

Por lo tanto, ahora

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial E} = t + \beta_1 = \sqrt{2m} \int \frac{dq}{2\sqrt{E - \frac{1}{2}kq^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{kq^2}{2E}}}$$

si ahora se efectúa el cambio de variable $kq^2/2E = \cos^2 \omega$, $q = \sqrt{2E/k} \cos \omega \rightarrow dq = -\sqrt{2E/k} \sin \omega d\omega$:

$$Q_1 = t + \beta_1 = -\sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int \frac{\sin \omega d\omega}{\sqrt{1 - \cos^2 \omega}} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \int d\omega = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} \cdot q \right)$$

por lo que

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \tilde{\beta}_1 \right).$$

Ahora se halla p :

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kq^2\right)} = \sqrt{2m(E - E \cos^2(\dots))} = \sqrt{2mE \sin^2(\dots)} = \sqrt{2mE} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \tilde{\beta}_1 \right)$$

Ejercicios de funciones generatrices: Téngase la siguiente T.C.

$$\begin{aligned} Q &= q + bp \\ P &= p \end{aligned}$$

Hállese $F_1(q, Q)$. En primer lugar

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = p(q, Q) = \frac{Q - q}{b} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{b} \left(Qq - \frac{q^2}{2} \right) + f(Q) .$$

Similarmente

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P(q, Q) = \frac{Q - q}{b} \Rightarrow F_1 = -\frac{Q^2}{2b} + \frac{Qq}{b} + g(q) ,$$

con lo que

$$\boxed{F_1(q, Q) = \frac{Qq}{b} - \frac{Q^2}{2b} - \frac{q^2}{2b}} \quad (4.9.5)$$

Hállese ahora $F_2(q, P)$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = p(q, P) = P \Rightarrow F_2 = Pq + f(P) \\ Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q(q, P) = q + bP \Rightarrow F_2 = qP + b\frac{P^2}{2} + g(q) \end{aligned} \right\} F_2 = qP + b\frac{P^2}{2}$$

También se podría transformar $F_1(q, Q)$ en $F_2(q, P)$ como sigue

$$F_2(q, P) = F_1 + QP = (q + bP)P + \frac{Q + bP}{b} \cdot q + \dots = qP + b\frac{P^2}{2} \quad (4.9.6)$$

5 Relatividad especial

1. Principio de la relatividad de Galileo: leyes de la mecánica las mismas en cualquier sistema de referencia inercial	52
2. Postulados de la Relatividad Especial y transformaciones de Lorentz	53
3. Composición de velocidades	54
4. Simultaneidad, contracción espacial y dilatación temporal	55
5. Principio de causalidad	56
6. Intervalo invariante, espacio de Minkowski y diagramas espacio-tiempo	56
7. Mecánica relativista	58
7.1 Tiempo propio, 4-velocidad, 4-momento y Energía	58
7.2 Efecto Doppler relativista	61
7.3 Dinámica relativista y movimiento partícula cargada relativista en campo EM	62
7.4 Colisiones de partículas $a + b \rightarrow 1 + 2$ y relación masa-energía	62
7.5 Dinámica relativista	65
7.6 Lagrangiano relativista y acción relativista	67

5.1 Principio de la relatividad de Galileo: leyes de la mecánica las mismas en cualquier sistema de referencia inercial

Piénsese en las transformaciones de Galileo entre dos sistemas de referencia S y S'

$$\left. \begin{aligned} t &= t' = 0 \\ O &= O' \\ x &\parallel x', y \parallel y', z \parallel z' \end{aligned} \right\}$$

Sea A un punto arbitrario, en el espacio. Se encuentra localizado por \vec{r} en S y por \vec{r}' en S' . La distancia entre O y O' será \vec{R} y su relación será $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$. Teniendo en cuenta que S' se aleja con una velocidad \vec{v} de S , se tiene que $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$. En el caso en que el sistema se aleja en dirección x con velocidad v se tiene que

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t &= t' \end{aligned}} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v'_x &= v_x - v \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a'_x &= a_x \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z \end{aligned}}$$

Pártase de las Leyes de Maxwell para hallar la ecuación de ondas electromagnéticas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\vec{\nabla} \times} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{para la 4ª ec. de Mx} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

El frente de ondas de una onda electromagnética en S viene definido por $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. Realizando una transformación de Galileo pasará a tenerse

$$[(x' + vt)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2] \neq [x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2]$$

Es decir, que la velocidad de la luz es distinta en distintos sistemas de referencia.

El experimento de Michelson-Morley

Para determinar el movimiento de una partícula cargada positivamente con respecto al éter, téngase dicha partícula moviéndose en un tren de un punto a la izquierda A a otro a la derecha B con una velocidad v

Con respecto a S :

$$\left. \begin{array}{l} (1) (c-v)t_1 = d \\ (2) (c+v)t_2 = d \end{array} \right\} d = (c-v)t_1 = (c+v)t_2 \Rightarrow t_H = t_1 + t_2 = \underbrace{\left(1 + \frac{c-v}{c+v}\right)}_{2c} t_1 = \frac{2cd}{c^2 - v^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Si ahora se lanza el rayo de luz en vertical, el recorrido de ida será

$$(ct)^2 = d^2 + (vt)^2 \rightsquigarrow t = \frac{d}{c^2 - v^2}$$

y teniendo en cuenta que el recorrido de ida y el de vuelta es el mismo, $t_{1v} = t_{2v}$, se tiene que

$$t_V = t_{1v} + t_{2v} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

por lo que $t_V \neq t_H$. Cosa que no se medía experimentalmente.

Sin embargo, si se hiciese la transformación $d \rightarrow d\sqrt{1 - v^2/c^2}$, se cumpliría que $t_V = t_H$

En 1900 Lorentz propuso unas transformaciones (las transformaciones de Lorentz, T.L.)

5.2 Postulados de la Relatividad Especial y transformaciones de Lorentz

- 1) Las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales (\mathcal{A} éter).
- 2) El módulo de la velocidad de la luz es el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales (c). Este postulado viene a decir que

$$\left. \begin{array}{l} (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t)^2 \\ (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t')^2 \end{array} \right\}$$

Por lo que si

$$\left. \begin{array}{l} O = O' \text{ para } t_0 = t'_0 = 0 \\ x_0 = x'_0 = 0 \end{array} \right\} \text{ entonces } \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{array} \right\} \quad (5.2.1)$$

lo que lleva a hacer la siguiente hipótesis

$$\left. \begin{array}{l} x' = Ax + Bct \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = Cx + Dct \end{array} \right\}$$

Ahora, pensando en la posición de O' con respecto a S

$$x = vt \Rightarrow x' = Ax + Bct = Avt + Bct = 0 \rightsquigarrow B = -\frac{v}{c}A$$

y la posición de O ($x = 0$) con respecto a S' con $-v$

$$x' = -vt' \xrightarrow{ct' = Dct} Bct = -vDt \rightsquigarrow \boxed{B = -\frac{v}{c}D = -\frac{v}{c}A \rightsquigarrow A = B}.$$

Además, se sabe que

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (Cx + Dct)^2 - (Ax + Bct)^2 = c^2(D^2 - B^2)t^2 + (c^2 - A^2)x^2 + 2cxt(CD - AB).$$

Se tiene entonces

$$\left. \begin{aligned} D^2 - B^2 = 1 &\rightarrow D^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = A^2 \\ CD = BA &\rightarrow C = B = -\frac{v}{c}A = -\frac{v}{c}D \\ c^2 - A^2 = 1 &\rightarrow A^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \right\} A^2 \geq 0 \rightarrow v < c$$

Por lo que se tiene que

$$\left. \begin{aligned} A = D &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma \\ B = C &= \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv -\beta\gamma \end{aligned} \right\}$$

y las T.L. quedan como

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned} \right.$$

Puede verse que en el **límite de velocidades bajas**, es decir, $v/c \ll 1$, se tiene que $\gamma \approx 1 + \mathcal{O}(v^2/c^2)$, por lo que **se recuperan las T.G.** Además el **tiempo es relativo** y pasa a cobrar sentido el concepto de **espacio-tiempo**.

Si se pasa $S \rightarrow S'$ y $S' \rightarrow S$, $v \rightarrow -v$. y se tiene

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ ct &= \gamma(ct' + \beta x') \end{aligned} \right\}$$

5.3 Composición de velocidades

cómo se transforman las velocidades? primero se debe tener en cuenta que en S , $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = d\vec{r}/dt$ y que en S' , $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = d\vec{r}'/dt'$

$$\left\{ \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - \beta c dt) = \gamma dt(u_x - \beta c) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ c dt' &= \gamma(c dt - \beta dx) = \gamma dt(c - \beta u_x) = \gamma c dt \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \end{aligned} \right\}$$

por lo que

$$\left\{ \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{dt} \frac{1}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \end{aligned} \right.$$

Un tren en S' se mueve con v y observa un rayo de luz en el sentido del tren.

$$u'_x = c \quad (u'_y = u'_z = 0) \xrightarrow{S \text{ (externo)}} u_x = \frac{c + c}{1 + c^2/c^2} = c.$$

Si se mueve con $c/2$ el rayo se tendrá

$$u'_x = c/2 \quad (u'_y = u'_z = 0) \xrightarrow{S \text{ (externo)}} u_x = \frac{c/2 + c/2}{1 + c^2/4c^2} = \frac{c}{5/4} = \frac{4}{5}c$$

5.4 Simultaneidad, contracción espacial y dilatación temporal

En S'

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } x'_1 \text{ ocurre un suceso a } t'_1 \\ \text{En } x'_2 \text{ ocurre otro suceso a } t'_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Procesos simultáneos en } S' \\ \text{si } t'_1 = t'_2 \quad (\Delta t = 0). \end{array}$$

Mientras tanto, en S

$$\left. \begin{array}{l} t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2 \right) \\ t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 \right) \end{array} \right\} \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \neq 0.$$

Similarmente, en un proceso simultáneo en S

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x_1 \text{ suceso } t_1 \\ \bullet x_2 \text{ suceso } t_2 \end{array} \right\} \text{Simultáneos } (t_2 = t_1, \Delta t = 0)$$

mientras que en S'

$$\left. \begin{array}{l} t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) \\ t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) \end{array} \right\} \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = 0$$

Contracción espacial

En S' , $x'_2 - x'_1 = L_0$. Para medir la longitud en S se debe hacer de manera simultánea, es decir, para tomar $x_2 - x_1$, $t_1 = t_2$.

$$\text{T.L.} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \end{array} \right\} \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1 - \beta c(t_2 - t_1)) \stackrel{0}{=} \gamma(x_2 - x_1) \rightarrow L = L_0/\gamma \Rightarrow \boxed{L \leq L_0}.$$

Si ahora la distancia propia se halla en S en lugar de en S' , $x_2 - x_1 = L_0$, si se desea medir en S' :

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma[x'_2 - x'_1 + \beta c(t'_2 - t'_1)] \stackrel{0}{=} \gamma L' \Rightarrow L' = L_0/\gamma \Rightarrow \boxed{L' \geq L_0}. \quad (5.4.1)$$

Dilatación temporal

Téngase que en un punto P de S'

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se enciende la luz en } t'_1 \\ \text{Se apaga la luz en } t'_2 \\ x'_1 = x'_2 \text{ ocurre en un mismo punto espacial de } S' \end{array} \right.$$

donde el tiempo transcurrido en S' es el tiempo propio, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Entonces, para medir el tiempo en el sistema de referencia S , $\Delta t = t_2 - t_1$, se tiene

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left[t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) \right] \stackrel{0}{=} \gamma \Delta t' \Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'} \Rightarrow \Delta t \geq \Delta t'. \quad (5.4.2)$$

Si el tiempo propio esta vez está en S , $\Delta t = t_2 - t_1$ con $x_2 = x_1$ y se desease medir en S' , se tendría

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1) \right) \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \Rightarrow \Delta t' > \Delta t. \quad (5.4.3)$$

Si un tren se desplaza a velocidad v en x :

$$S' : h' = c\Delta t', \quad S : (c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + h^2 = (c\Delta t')^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\Delta t'$$

5.5 Principio de causalidad

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ En S , es decir, el efecto va tras la causa. Es $\Delta t' > 0$ en S' ? Tómese el caso más desfavorable, es decir, $x_2 - x_1 = c\Delta t$

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(ct - \beta x) \end{array} \right\} \text{T.L.} \Rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left[\Delta t - \frac{v}{c^2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{c\Delta t} \right] = \gamma\Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \right) > 0$$

5.6 Intervalo invariante, espacio de Minkowski y diagramas espacio-tiempo

$$S : \left\{ \begin{array}{ll} P_1 : (ct_1, x_1, y_1, z_1) & \text{separación } \Delta t \\ P_2 : (ct_2, x_2, y_2, z_2) & \text{separación en el espacio } \Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \end{array} \right.$$

Se define el intervalo invariante:

$$\begin{aligned} S : \Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ S' : \Delta s'^2 &= c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= c^2\gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 = \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_1 c^2\Delta t^2 - \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_1 \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2 \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

El espacio invariante es, por tanto,

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 \quad \text{que tiene su versión infinitesimal } ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

El cuadrivector espacio Minkowski: $X^\mu = (ct, x, y, z)$. En el espacio euclídeo se tiene que

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.6.2)$$

mientras tanto, en el **espacio de Minkowski**

$$s^2 = X \cdot X = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^T \eta X = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu = X^\mu X_\mu$$

donde el modo de interpretar X_μ es

$$X_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (5.6.3)$$

Por tanto, las T.L. quedan como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(ct - \beta x) \end{array} \right\} \text{T.L.} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda X \quad (5.6.4)$$

y la transformación inversa es

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} X' \quad (5.6.5)$$

Para una transformación arbitraria, donde $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \vec{v}/c$, la matriz de transformación es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_y\beta_z/\beta^2 \\ -\gamma\beta_z/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_x\beta_z/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_y\beta_z/\beta^2 & 1 + (\gamma - 1)\beta_z^2/\beta^2 \end{pmatrix} \quad (5.6.6)$$

En un espacio de Minkowski

$$\left. \begin{array}{l} X = (ct_x, x_1, x_2, x_3) \\ Y = (ct_y, y_1, y_2, y_3) \end{array} \right\} X \cdot Y = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = X^T \eta Y = X^\mu Y_\mu = X' \cdot Y' \quad (5.6.7)$$

demostración: $X'Y' = X'^T \eta Y' = X^T \Lambda^T \eta \Lambda Y \stackrel{?}{=} X^T \eta Y = XY$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1 - \beta^2) & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta$$

por lo que

$$X \cdot Y = (X' \cdot Y') = \begin{pmatrix} ct_x & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_y \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = X^\mu Y_\mu = \begin{pmatrix} ct_x & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_y \\ -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix}$$

o que

$$X^\mu Y_\mu = x^0 y^0 - \sum_i x^i y^i \quad (5.6.8)$$

Es importante saber que

$$X \cdot Y = X^\mu Y_\mu = X_\mu Y^\mu \begin{cases} X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu \\ Y^\mu = \eta^{\mu\nu} Y_\nu \end{cases} \quad (5.6.9)$$

y que

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \Rightarrow \eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu = \text{diag}(1, 1, 1, 1) . \quad (5.6.10)$$

En resumen

$$\Delta s^2 = \quad (5.6.11)$$

Por otro lado el intervalo invariante permite caracterizar la distancia entre dos puntos de manera independiente del observador:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{r}'^2 \quad (5.6.12)$$

Existen dos tipos de sucesos

- **Sucesos tipo luz:** $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 = \Delta \vec{r}^2 \Rightarrow c^2 = \Delta \vec{r}^2 / \Delta t^2$, por lo que los sucesos están conectados por luz.

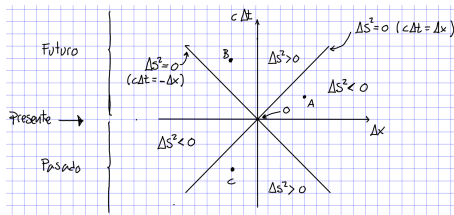
- **Sucesos tipo temporal:** $\Delta s^2 > 0 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta \vec{r}^2 \Rightarrow \Delta t^2 / \Delta \vec{r}^2 < c^2$ por lo que los sucesos se conectan mediante señales más lentas que la luz. $\Delta \vec{r} = 0$ es posible, pero $\Delta t \neq 0$.

Es siempre posible encontrar s' con $\Delta \vec{r}' = 0$.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = 0 \rightarrow \beta = \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t} < 1$$

Sucesos tipo espacial: $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta \vec{r}^2 \Rightarrow c^2 < \Delta \vec{r}^2 / \Delta t^2$ por lo que los sucesos no están conectados causalmente. $\Delta t' = 0$ es posible pero $\Delta \vec{r}' \neq 0$

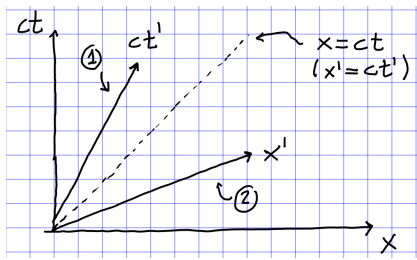
Todo esto puede visualizarse mediante el cono de luz



Si un punto está dentro del cono de luz, entonces está causalmente ligado con otro dentro del mismo. Si $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ dos sucesos están causalmente conectados en un sistema de referencia y lo estarán también en cualquier otro.

En la figura si A no puede ser efecto de la causa O, mientras que B sí. También puede darse que C sea la causa y O el efecto.

Más sobre diagramas espacio-temporales En S



$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta(ct)) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned} \right\}$$

Trácese los ejes correspondientes a S' dentro del diagrama espacio temporal en (ct, x) .

$$\begin{aligned} \text{El eje } ct', (x' = 0) &\Rightarrow \gamma(x - \beta ct) = 0 \Rightarrow ct = \frac{1}{\beta} x \\ \text{El eje } x', (ct' = 0) &\Rightarrow \gamma(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow ct = \beta x \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Ejemplo: Causalidad

5.7 Mecánica relativista

5.7.1 Tiempo propio, 4-velocidad, 4momento y Energía

Tiempo propio: Se considera la partícula en origen S' , $\vec{r}' = 0$. En S' $\Delta s'$ entre dos puntos de trayectoria

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 = \Delta s^2 \Rightarrow \Delta \tau = \frac{\Delta s}{c} \quad (5.7.1)$$

Por lo que una trayectoria genérica tiene el aspecto $X^\mu(\tau) = (ct(\tau), \vec{r}(\tau))$.

Para calcular el tiempo propio de la partícula a lo largo de una trayectoria genérica, puede considerarse un segmento infinitesimal en el que el movimiento puede considerarse uniforme

$$\begin{aligned} c^2 dt'^2 = ds'^2 = ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 &\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}} \frac{dt}{\gamma(u)} \\ d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma(u)} = \frac{dt''}{\gamma(u'')} &\quad (5.7.2) \end{aligned}$$

Si $u = v = \text{cte}$, entonces

$$\Delta \tau = \int d\tau = \int \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{\Delta t}{\gamma(v)} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta \tau} \quad (5.7.3)$$

Cuadrivector velocidad o cuadri-velocidad:

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = (c\gamma(u), \gamma(u)\vec{u}) \quad (5.7.4)$$

Si $u \ll c \rightarrow \gamma(u) \approx 1 \Rightarrow U^\mu = (c, \vec{u})$

En el sistema S'

$$U'^\mu = \frac{dX'^\mu}{d\tau} \rightarrow U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu \quad (U' = \Lambda U \rightarrow U = \Lambda^{-1}U') \quad (5.7.5)$$

Compruébese que el producto de Minkowski es invariante

$$U^\mu U_\mu = (UU) = c^2\gamma^2(u) - \gamma^2(u)\vec{u}^2 = c^2\gamma^2(u) \underbrace{(1 - \vec{u}^2/c^2)}_{1/\gamma^2(u)} = c^2 \quad (5.7.6)$$

Se tiene que, en componentes

$$U^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu U'^\nu \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)u_x \\ \gamma(u)u_y \\ \gamma(u)u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ \beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u')c \\ \gamma(u')u'_x \\ \gamma(u')u'_y \\ \gamma(u')u'_z \end{pmatrix} \quad (5.7.7)$$

De la tercera fila se tiene

$$\left. \begin{aligned} \gamma(u)u_y &= \gamma(u')u'_y \rightsquigarrow \frac{u_y}{u'_y} = \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} \\ d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)} = \frac{dt'}{\gamma(u')} &\Rightarrow \frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \frac{dt}{dt'} = \gamma(v) \left(1 + \frac{\beta}{c} u'_x \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c dt = \gamma(v)(c dt' + \beta dx') \quad (5.7.8)$$

Y similarmente, de la cuarta

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(v)(1 + \frac{\beta}{c} u'_x)} \quad (5.7.9)$$

De la segunda puede concluirse

$$\gamma(u)u_x = \gamma\beta(u')c + \gamma\gamma(u')u'_x = \gamma\gamma(u')(v + u'_x) \quad (5.7.10)$$

por lo que

$$u_x = \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} \gamma(v + u'_x) = \frac{\text{buscare los apuntes}}{\quad} \quad (5.7.11)$$

Cuadrivector aceleración o cuadri-aceleración:

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma(u) \frac{d}{dt} (\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u}) = \left(\gamma(u)^4 \frac{\vec{u}\vec{a}}{c^2}, \gamma(u)^2 \vec{a} + \gamma(u)^4 \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{u} \right) \quad (5.7.12)$$

pues, tomando la derivada temporal de $\gamma(u)$

$$\frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}} \right) = \frac{+\cancel{2}\vec{u} \cdot \vec{a}}{\cancel{2}(\sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2})^3} = \gamma(u)^3 \vec{u} \cdot \vec{a} / c^2 \xrightarrow{|\vec{u}| \rightarrow 0} (0, \vec{a}) \quad (5.7.13)$$

y, por componentes

$$a' = \Lambda a \quad (a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu) \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (5.7.14)$$

Y se tiene que

$$U^\mu U_\mu = c^2 \rightarrow \frac{d}{d\tau}(U^\mu U_\mu) = 0 = \frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu + U^\mu \frac{dU_\mu}{d\tau} = 2U_\mu a^\mu = 0 = 2(ua) \quad (5.7.15)$$

Cuadrivector energía-momento, cuadri-momento:

$$P^\mu = mU^\mu = (m\gamma(u)c, m\gamma(u)\vec{u}) \leftrightarrow P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu \quad (5.7.16)$$

Ahora, si se tiene

$$P^\mu_{\text{in}} = P^\mu_{\text{fin}} \Rightarrow P'^\mu_{\text{in}} = P'^\mu_{\text{fin}} \quad (5.7.17)$$

pues

$$\left. \begin{aligned} P'^\mu_{\text{in}} &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu_{\text{in}} \\ P'^\mu_{\text{fin}} &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu_{\text{fin}} \end{aligned} \right\} \quad (5.7.18)$$

La componente espacial es una generalización del trimomento clásico:

$$\begin{array}{l} \text{Trimomento} \\ \text{relativista} \end{array} \equiv \vec{p} = m\gamma(u)\vec{u} \rightarrow m\vec{u} . \quad (5.7.19)$$

Mientras que la componente temporal p^0 es

$$p^0 = \frac{E}{c} = m\gamma(u)c \rightarrow E = m\gamma(u)c^2 \quad (5.7.20)$$

en el límite en que $u^2/c^2 \ll 1$

$$\gamma(u) = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathcal{O}\left(\frac{u^4}{c^4}\right) \Rightarrow \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 \quad (5.7.21)$$

de la cual mc^2 es la E intrínseca en reposo y la $T_{\text{NR}} = \frac{1}{2}mu^2$

La energía cinética relativista T_{R} y el producto (PP) son

$$T_{\text{R}} = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

$$(PP) = P^\nu = P^\mu P_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2\gamma^2(u)c^2 - m^2\gamma^2(u)\vec{u}^2 = m^2c^2\gamma^2(u) \overbrace{(1 - \vec{u}^2/c^2)}^{1/\gamma^2} = m^2c^2$$

de este segundo puede extraerse que

$$m^2c^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \quad (5.7.22)$$

También se tiene que

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{m\gamma\vec{u}}{m\gamma c^2} = \frac{\vec{u}}{c^2} \rightarrow \beta = \frac{|\vec{u}|}{c} = \frac{|\vec{p}|c}{E} \quad (5.7.23)$$

Las partículas sin masa ($m = 0$):

$$p^2 = 0 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \rightarrow \boxed{E = |\vec{p}|c} \rightarrow \frac{\vec{u}}{c} = \frac{|\vec{p}|c}{E} = 1 \Rightarrow |\vec{u}| = c \quad \wedge \quad P^\mu = \frac{E}{c}(1, \hat{p}) \quad (5.7.24)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}c^2}{E} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}}c \begin{cases} \vec{u} = \hat{p}c & \text{si } m = 0 \\ |\vec{u}| < c & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (5.7.25)$$

En la mecánica cuántica la E de una partícula con $m = 0$ es

$$\boxed{E = \hbar\omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda}} \quad (5.7.26)$$

5.7.2 Efecto Doppler relativista

Se emite un pulso EM de S' con ν' que se propaga en el plano $z' = 0$

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (5.7.27)$$

En el sistema S'

$$P'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}' \right) = \frac{E'}{c} (1, \hat{p}') = \frac{E'}{c} (1, -\cos \theta', -\sin \theta', 0) \quad (5.7.28)$$

y en S

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, -|\vec{p}| \cos \theta, -|\vec{p}| \sin \theta, 0 \right) = \frac{E}{c} (1, -\cos \theta, -\sin \theta, 0) \quad (5.7.29)$$

por lo que (5.7.27) queda

$$\frac{E'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos \theta' \\ -\sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7.30)$$

Entonces, de la primera fila se extrae

$$\frac{E'}{c} = \gamma \frac{E}{c} + \gamma\beta \frac{E}{c} \cos \theta = \frac{E}{c} \gamma (1 + \beta \cos \theta) \Rightarrow \boxed{\frac{E'}{E} = \frac{\nu'_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \gamma (1 + \beta \cos \theta)} \quad (5.7.31)$$

Si la emisión es paralela al eje x , $\theta = 0$ por lo que

$$\boxed{\frac{\nu'_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = 1 + z} \quad (5.7.32)$$

donde z se denomina **corrimiento al rojo**. De la segunda y tercera fila **mirar las diapos**

$$\left. \begin{aligned} -\frac{E'}{c} \cos \theta' &= \frac{E}{c} \gamma \\ -\frac{E'}{c} \sin \theta' &= \frac{E}{c} \gamma \sin \theta \end{aligned} \right\} \tan \theta' = \quad (5.7.33)$$

En (5.7.32) si $\beta > 0$, es decir, que se alejan, $\nu_{\text{rec}} < \nu'_{\text{em}}$, mientras que si $\beta < 0$, es decir, que se acercan, $\nu_{\text{rec}} > \nu'_{\text{em}}$

Ejemplo: Se tiene una nave que va a en dirección a un semáforo (también puede ponerse la referencia S en la nave, por lo que el semáforo se acercaría a la nave, es decir, S' tiene $v < 0$ desde S). La policía dice que van a multar a la persona por saltarse un semáforo en rojo. El conductor alega haberlo visto en verde. ¿Quién tiene razón? Para comprobarlo, se verá si existe alguna velocidad que cumpla esto

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\text{rec}}}{\lambda'_{\text{em}}} &= \frac{\lambda_{\text{verde}}}{\lambda_{\text{rojo}}} = \sqrt{\frac{1 - |\beta|}{1 + |\beta|}} \Rightarrow (1 + |\beta|) \left(\frac{\lambda_{\text{verde}}}{\lambda_{\text{rojo}}} \right)^2 = 1 - |\beta| \\ |\beta| &= \frac{1 - \left(\frac{\lambda_{\text{verde}}}{\lambda_{\text{rojo}}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_{\text{verde}}}{\lambda_{\text{rojo}}} \right)^2} = 0.2 \end{aligned}$$

todos tienen razón, pero la nave iba a una superior a la permitida.

La derivación clásica del efecto Doppler relativista se hace con un tren: el pasajero de un tren envía dos pulsos de luz:

$$\begin{array}{ccc} & S' & S \\ \hline \text{Primer pulso:} & s'_1 = (0, 0) & s_1 = (0, 0) \\ \text{Segundo pulso:} & s'_2 = (t'_2, 0) & s_2 = (t_2, vt_2) \end{array} \quad (5.7.34)$$

En S' los sucesos ocurren en la misma posición espacial:

$$(x'_1 = x'_2) \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t' = \gamma(t'_2 - t'_1) \quad (5.7.35)$$

donde t' es el tiempo propio.

Por tanto, la frecuencia de emisión es

$$\left. \begin{array}{l} \nu'_{\text{em}} = \frac{1}{t'_2} \\ \nu_{\text{em}} = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{\gamma t'_2} \end{array} \right\} \nu'_{\text{em}} = \gamma \nu_{\text{em}} \quad (5.7.36)$$

La recepción de pulsos es

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recep. 1 pulso: } s_3 = (0, 0) = (t_3, 0) = s_1 \\ \text{Recep. 2 pulso: } s_4 = \left(t_2 + \frac{vt_2}{c}, 0\right) = (t_4, 0) \end{array} \right\} \nu_{\text{rec}} = \frac{1}{\Delta t_{43}} = \frac{1}{t_2 \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \quad (5.7.37)$$

por lo que

$$\nu_{\text{rec}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \gamma t'_2} = \frac{\nu'_{\text{em}}}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{\nu'_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}} = \frac{\lambda_{\text{rec}}}{\lambda'_{\text{em}}} \equiv 1 + Z \quad (5.7.38)$$

donde Z se denomina corrimiento al rojo, pues si $v > 0$, $\lambda_{\text{rec}} > \lambda'_{\text{em}}$.

Si observador-fuente se alejan ($v > 0$): $\nu_{\text{rec}} < \nu'_{\text{em}}$. Mientras tanto, si el observador-fuente se acercan ($v < 0$): $\nu_{\text{rec}} > \nu'_{\text{em}}$.

5.7.3 Dinámica relativista y movimiento partícula cargada relativista en campo EM

5.7.4 Colisiones de partículas $a + b \rightarrow 1 + 2$ y relación masa-energía

Considérese la colisión $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots$.

En ausencia de fuerzas externas, el cuadrimomento es una cantidad conservada (se demostrará más adelante).

$$\left. \begin{array}{l} p_0^\mu = p_f^\mu \\ p_{\text{partícula}}^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, m\gamma\vec{u}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_a + E_b = E_1 + E_2 + \dots \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \end{array} \right. \quad (5.7.39)$$

donde se sabe además que, para cada E se cumple que $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$.

La conservación masa-energía permite tratar del mismo modo colisiones elásticas e inelásticas. Esta es la solución al “oscuro” planteamiento no relativista de las colisiones inelásticas (donde había que introducir Q).

Considérense dos partículas de masa m y velocidad opuestas con módulo v que chocan de forma completamente inelástica dando lugar a una masa M en reposo.

Clásicamente $Q = \Delta T = T_i - T_f = mv^2$.

Mientras tanto, con un tratamiento relativista, se tiene que, si $v \ll c$

$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{in}} = 2m\gamma c^2 \approx 2\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) \\ E_{\text{fin}} = Mc^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_{\text{fin}} = E_{\text{in}} \Rightarrow Mc^2 = 2mc^2 + \overbrace{Q}^{\Delta T} mv^2 \quad (5.7.40)$$

por lo que la energía no desaparece, sino que se ha convertido en masa, es decir

$$Q = \Delta T = (M - 2m)c^2 \quad (5.7.41)$$

como se ve, la energía cinética se ha convertido en masa, es decir, esa energía interna Q , es la que se ha convertido en masa.

Ejemplo, fusión nuclear: Téngase la reacción ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n$. Es decir, que un núcleo de tritio reaccione con uno de tritio para producir un núcleo de Helio-4 y un neutrón sobrante.

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 + T_R \xrightarrow{E_f=E_i} \Delta T_R = T_R^f - T_R^i = (m_{{}^2\text{H}} + m_{{}^3\text{H}} - m_{{}^4\text{He}} - m_n)c^2$$

El término mc^2 es el de la energía intrínseca. La diferencia de E cinética relativista da la energía que se generará.

$$\Delta T_R = c^2(2 + 2.99 - 3.97 - 1)m_p \approx 0.02m_p c^2$$

por lo tanto, la energía producida pr nucleón inicial será

$$E/\text{nucleón}_i = 0.02m_p c^2/5$$

Una buena duda ahora sería cuánta energía se genera a partir de 2 g de ${}^2\text{H}$ y 3 g de ${}^3\text{H}$:

$$\text{nucleones por gramo} = 1 \text{ g} \frac{\text{nucleón}}{1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}} = 6 \cdot 10^{23} \text{ nucleones}$$

por lo que

$$2 \text{ g } {}^2\text{H} + 3 \text{ g } {}^3\text{H} = 5 \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ nucleones} \Rightarrow \Delta E = 5 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 0.02m_p c^2/5 \approx 1.8 \cdot 10^{12} \text{ J} = 5 \cdot 10^5 \text{ kWh}$$

y, el consumo medio anual por hogar en España es de unos $3 \cdot 10^3$ kWh, por lo que ΔE equivale al consumo medio de unas 150 familias en 1 año.

Sistema de unidades naturales (NU)

Este sistema establece que $\hbar = c = 1$. Es el sistema más común cuando se estudian efectos relativistas o cuánticos. Se sabe que estos efectos son relevantes cuando aparecen las constantes \hbar (cuántica) y c (relatividad).

$$\left[\begin{array}{l} c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1 \\ \hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 1 \end{array} \right] \Bigg\} \hbar c = 0.197 \text{ GeV fm} = 1 \quad (5.7.42)$$

de modo que $[T] = [L] = 1/[E]$ y típicamente se utiliza el GeV.

Magnitud	SI	NU
Masa	kg	E
Longitud	m	1/E
Tiempo	s	1/E
Momento	kg m/s	E
Energía	J	E
Momento angular	kg m/s ²	-
Velocidad	m/s	-
Fuerza	kg m/s ²	E ²

Para pasar de NU a SI

$$\hbar c = 0.197 \text{ GeV fm} = 1 \Rightarrow 1 \text{ GeV} = \frac{1}{1.97 \cdot 10^{-16} \text{ m}} \quad (5.7.43)$$

Se cumple que

$$p_a^\mu + p_b^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \left\{ \begin{array}{l} E_a + E_b = E_1 + E_2 \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{array} \right\} \quad (5.7.44)$$

y, recuérdese que utilizando el SNU $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

En el sistema centro de masas (CM)

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{in}} = \vec{p}_a + \vec{p}_b = 0 &\rightsquigarrow \vec{p}_a = -\vec{p}_b \equiv \vec{p} \\ \vec{p}_{\text{fin}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 &\rightsquigarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}' \\ E_{\text{tot}} = \text{cte} &\rightarrow \sqrt{\vec{p}^2 + m_a^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_b^2} = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}'^2} = \sqrt{m_2^2 + \vec{p}'^2} \end{aligned}$$

Mientras tanto en el LAB, se tiene que se lanza una partícula, a, a una partícula blanco, b. El blanco, b, está en reposo.

$$\vec{p}_b = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_a = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ E_a + m_a = E_1 + E_2 \end{array} \right\}. \text{ Se requiere saber } |\vec{p}_1|, |\vec{p}_2|, \theta_1, \theta_2 \quad (5.7.45)$$

Conociendo $|\vec{p}_a|$, $|\vec{p}_1|$ y las m 's.

$$\sqrt{m_a^2 + |\vec{p}_a|^2} + m_b = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2} \Rightarrow |\vec{p}_2| \quad (5.7.46)$$

y de $\vec{p}_a = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, se tiene

$$(\vec{p}_a - \vec{p}_1)^2 = \vec{p}_2^2 = \vec{p}_a^2 + \vec{p}_1^2 - 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta_1 \rightarrow \theta_2 \quad (5.7.47)$$

$$(\vec{p}_a - \vec{p}_2)^2 = \vec{p}_1^2 = \vec{p}_a^2 + \vec{p}_2^2 - 2|\vec{p}_a||\vec{p}_2|\cos\theta_2 \rightarrow \theta_2 \quad (5.7.48)$$

Paso de CM a LAB:

$$P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu \Rightarrow \begin{pmatrix} p'_0 \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (5.7.49)$$

Se tiene que

$$\vec{v}_b^{\text{CM}} = \frac{\vec{p}_b^{\text{CM}}}{E_b^{\text{CM}}} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_b^{\text{CM}} \\ \vec{p}_b^{\text{CM}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{|\vec{v}_b^{\text{CM}}|}{c} \quad (5.7.50)$$

Este tipo de problemas también puede verse desde la perspectiva de los invariantes

$$\left. \begin{array}{l} p_a^\mu = (E_a^{\text{CM}}, \vec{p}) \quad p_1^\mu = (E_1^{\text{CM}}, \vec{p}') \\ p_b^\mu = (E_b^{\text{CM}}, -\vec{p}) \quad p_2^\mu = (E_2^{\text{CM}}, -\vec{p}') \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = (p_a + p_b)^2 = (p_a^\mu + p_b^\mu)(p_{a\mu} + p_{b\mu}) = (E_a^{\text{CM}} + E_b^{\text{CM}})^2 \\ = (p_1 + p_2)^2 \end{array} \quad (5.7.51)$$

$$\left. \begin{array}{l} E_a^{\text{CM}2} = m_a^2 + |\vec{p}|^2 \\ E_b^{\text{CM}2} = m_b^2 + |\vec{p}|^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_a - E_b^{\text{CM}2} = m_a^2 - m_b^2 \\ (E_a^{\text{CM}} - E_b^{\text{CM}})(E_a^{\text{CM}} + E_b^{\text{CM}}) = (2E_a^{\text{CM}} - \sqrt{s})\sqrt{s} = 2\sqrt{s}E_a^{\text{CM}} - s \end{array} \left\} E_a^{\text{CM}} = \frac{s - m_b^2 + m_a^2}{2\sqrt{s}}$$

y

$$|\vec{p}| = \sqrt{E_a^{\text{CM}2} - m_a^2} = \sqrt{E_b^{\text{CM}2} - m_b^2}, \quad E_b^{\text{CM}} = \sqrt{s} - E_a^{\text{CM}} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2\sqrt{s}} \quad (5.7.52)$$

y con lo que se tenía antes

$$\boxed{\begin{array}{l} E_1^{\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \\ E_2^{\text{CM}} = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}} \end{array}} \rightarrow |\vec{p}'| = \sqrt{E_1^{\text{CM}2} - m_1^2} \quad (5.7.53)$$

Estados iniciales

Ejemplo 1: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $T_\pi|_{\text{LAB}} = m_\pi$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{m_\pi^2}{4E_{\gamma_1}(2m_\pi - E_{\gamma_1})}$$

1. θ_{\min} , por lo que se maximizará $4E_{\gamma_1}(2m_\pi - E_{\gamma_1}) = f(E_{\gamma_1})$

$$\frac{df}{dE_{\gamma_1}} = 8m_\pi - 8E_{\gamma_1} = 0 \Rightarrow E_{\gamma_1} = m_\pi \Rightarrow \sin^2 \theta_{\min} = \frac{1}{4} \rightarrow \theta = 60^\circ \quad (5.7.54)$$

- 2.

$$s = p \quad (5.7.55)$$

Ejemplo 2: Colisión de un positrón e^+ con un electrón e^- en reposo en el sistema LAB $\vec{p}_{e^-, \text{LAB}} = 0$ para dar un par protón y su antipartícula: $e^+e^- \rightarrow p^-p^+$. ¿Cuál es la energía umbral?

La energía mínima requerida se da cuando las partículas resultantes se hallan en reposo en el CM

$$\begin{aligned} p_{e^+}^\mu &= (E_{e^+}^L, \vec{p}_{e^+}^L), \quad p_{p^+}^\mu = (E_{p^+}^L, \vec{p}_{p^+}^L) \\ p_{e^-}^\mu &= (E_{e^-}^L, 0), \quad p_{p^-}^\mu = (E_{p^-}^L, \vec{p}_{p^-}^L) \end{aligned} \quad (5.7.56)$$

$$E_{e^+}^L + m_{e^-} = E_{p^+}^L + E_{p^-}^L = m_p(\gamma_{p^+} + \gamma_{p^-}) \Rightarrow E_{\text{in}}^L \geq 2m_p \quad (5.7.57)$$

que no puede darse en el LAB, por lo que en el CM

$$\begin{aligned} p_{e^+}^\mu &= (E_{e^+}^{\text{CM}}, \vec{p}_{e^+}^{\text{CM}}), \quad p_{p^+}^\mu = (E_{p^+}^{\text{CM}}, \vec{p}_{p^+}^{\text{CM}}) \\ p_{e^-}^\mu &= (E_{e^-}^{\text{CM}}, \vec{p}_{e^-}^{\text{CM}}), \quad p_{p^-}^\mu = (E_{p^-}^{\text{CM}}, \vec{p}_{p^-}^{\text{CM}}) \\ E_{\text{in}}^{\text{CM}} &= E_{e^-}^{\text{CM}} + E_{e^+}^{\text{CM}} = E_{p^+}^{\text{CM}} + E_{p^-}^{\text{CM}} = m_p(\gamma_{p^+}^{\text{CM}} + \gamma_{p^-}^{\text{CM}}) \rightarrow E_{\text{in}}^{\text{CM}} \geq 2m_p \rightarrow E_{\text{in}}^{\text{CM}} = 2m_p \Leftrightarrow \vec{p}_{p^+}^{\text{CM}} = \vec{p}_{p^-}^{\text{CM}} = 0 \end{aligned}$$

que hace que se cumpla

$$\vec{p}_{e^+}^{\text{CM}} + \vec{p}_{e^-}^{\text{CM}} = \vec{p}_{\text{in}}^{\text{CM}} = \vec{p}_{p^+} + \vec{p}_{p^-} = 0$$

pues en CM p^+ y p^- pueden estar en reposo.

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} p_{p^+}^\mu &= (m_p, 0) \\ p_{p^-}^\mu &= (m_p, 0) \end{aligned} \right\}$$

$$E_{e^+}^{\text{CM}} = m_p \frac{\sqrt{s}}{2} = \sqrt{|\vec{p}_{e^+}^{\text{CM}}|^2 + m_e^2} \rightarrow |\vec{p}_{e^+}^{\text{CM}}| = \sqrt{m_p^2 - m_e^2} \quad (5.7.58)$$

y

$$|\vec{v}_{e^+}^{\text{CM}}| = \frac{|\vec{p}_{e^+}^{\text{CM}}|}{E_{e^+}^{\text{CM}}} = \frac{\sqrt{m_p^2 - m_e^2}}{m_p} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{m_p^2}} \lesssim 1 (c \text{ en SI}) \quad (5.7.59)$$

5.7.5 Dinámica relativista

Clásico Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

y se desea

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = f^\mu = m \frac{dU^\mu}{d\tau} \quad (5.7.60)$$

- La componente espacial

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{f}}{\gamma} = \vec{F} \rightarrow f_i = F_i \gamma \quad (5.7.61)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{u})} \xrightarrow{u \ll c} \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.7.62)$$

- Componente temporal ($p^0 = m\gamma c$)

$$\frac{dP^0}{d\tau} = \gamma \frac{dP^0}{dt} = f^0 = m\gamma \frac{d}{dt}(\gamma c) \rightarrow \frac{dp^0}{dt} = \frac{f^0}{t} = \frac{f^0}{\gamma} = m \frac{d}{dt}(\gamma c)$$

Se tiene que

$$U^\mu U_\mu = c^2 = (\gamma c)^2 - (\gamma \vec{u})^2 \rightarrow 2 \frac{d}{dt}(\gamma c) = 2 \frac{d}{dt}(\gamma \vec{u}) \quad (5.7.63)$$

por lo que

$$\frac{dP^0}{dt} = \frac{f^0}{\gamma} = m \frac{d}{dt}(\gamma c) = \frac{\vec{u}}{c} \frac{d}{dt}(m\gamma \vec{u}) = \frac{\vec{u}}{c} \vec{F} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \quad (5.7.64)$$

Se obtiene

$$f^0 = \gamma \frac{u\vec{F}}{c}, \quad \frac{dE}{dt} = \vec{u}\vec{F} = \frac{dT_R}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (5.7.65)$$

f^μ recibe el nombre de cuadvivector fuerza de Minkowski.

En un sistema de referencia S la fuerza debida a un CEM es

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.7.66)$$

mientras que en el sistema de referencia S' , que es el que está en movimiento es

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = e\vec{E}' \quad (5.7.67)$$

donde para pasar de una descripción a la otra se utilizan las transformaciones de Lorentz.

Ejemplo: Partículas sometida a $\vec{F} = \text{cte}$ (partícula cargada en un CE cte). $\vec{E} = (E, 0, 0)$ y $\vec{B} = (0, 0, 0)$, donde $E = \text{cte}$ y $\vec{r}(0) = \dot{\vec{r}}(0) = 0$.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{y}) = 0 \Rightarrow m\gamma\dot{y} = \text{cte} = m \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{c^2}}} = 0 \Rightarrow \dot{y} = u_y(t) = \dot{y}_0 = 0 \quad (5.7.68)$$

similarmente, se cumple lo mismo para $\dot{z} = 0$ y por lo tanto

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \quad (5.7.69)$$

Para la componente x

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{x}) = qE \Rightarrow m\gamma\dot{x} = qEt = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2}} \cdot c \quad (5.7.70)$$

por lo que

$$x(t) = \int_0^t \frac{qE}{m} \frac{t dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2}} = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2} - 1 \right) \quad (5.7.71)$$

como puede verse, en el caso en que $\frac{qEt}{mc} \ll 1$, se tendrá la aproximación clásica

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{qE} \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2 \frac{1}{2} = \frac{qE}{m} t^2 \quad (5.7.72)$$

mientras que para el caso hiper-relativista, $\frac{qEt}{mc} \gg 1$, se tendrá un MRU con velocidad c .

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{qE} \frac{qE}{mc} t = ct \quad (5.7.73)$$

Un caso interesante es aquel en que sólo $\dot{z} = 0$.

5.7.6 Lagrangiano relativista y acción relativista

En el principio de la asignatura, partiendo de las ecuaciones de Newton, se llegó a la formulación Lagrangiana

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_j} = F_j \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \mathcal{L} = T - V \quad (5.7.74)$$

donde se utilizó que

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \leftrightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (5.7.75)$$

Ahora, partiendo del mismo punto

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad \text{donde } p_j = m\gamma \dot{x}_j = \frac{m\dot{x}_j}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \\ T_R &= E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \end{aligned} \right\} p_j \neq \frac{\partial T_R}{\partial \dot{x}_j} \quad (5.7.76)$$

por lo que podemos redefinir el Lagrangiano del siguiente modo

$$p_j = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \rightsquigarrow \tilde{T} = \int \frac{m\dot{x}_j}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}} d\dot{x}_j = -mc^2 \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \quad (5.7.77)$$

y ahora

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma \dot{x}_j) = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \tilde{T} - V = -mc^2 \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x_j) = -\frac{mc^2}{\gamma} - V(x_j)}. \quad (5.7.78)$$

Ahora, puede comprobarse que usando las E-L se recuperan la ecuación de Newton.

Ahora, debe cumplirse que el principio de mínima acción (S invariante bajo T.L.)

$$S = \int dt \mathcal{L}(x_j, \dot{x}_j) = \int \mathcal{L}_R d\tau = \int \frac{\mathcal{L}_R}{\gamma} dt \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_R = \gamma \mathcal{L} = -mc^2 - \frac{U^\mu A_\mu}{c}} \quad (5.7.79)$$

donde $U^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{u})$ y $A_\mu = (V(x), 0)$, que es el cuadripotencial. Se cumple que $U^\mu A_\mu = \gamma V c$.

Si se tiene un CEM:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \text{ con } \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (5.7.80)$$

entonces

$$\mathcal{L}_R = -\left(mc^2 + \frac{q}{c} U^\mu A_\mu \right) = \gamma \mathcal{L} \leftrightarrow S = \int \mathcal{L}_R d\tau \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_{\text{CEM}} = -mc^2 \sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - q\phi + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}} \quad (5.7.81)$$

donde se ve que

$$\frac{1}{\gamma} \frac{q}{c} U^\mu A_\mu = \frac{q}{c} \frac{1}{\gamma} (\gamma c \phi - \gamma \vec{u} \cdot \vec{A}) = -q\phi + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} \quad (5.7.82)$$

Ahora se comprobará que al utilizar las E-L se obtiene lo esperado:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{u}} &= -\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A} \equiv \text{mom. gen.} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} &= -q\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c} \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{A}) \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{u}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\frac{q}{c} \frac{\vec{A}}{t} - q\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c} \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{A}) = -\frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} - q\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \\ &= -\frac{q}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) - q\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} + \vec{u} \times \vec{B} \right) = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \\ &= q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (5.7.83)$$

La definición del Hamiltoniano es, por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = m\gamma \dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) + \frac{mc^2}{\gamma} + q\phi - \frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} = m\gamma c^2 \left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + q\phi \\ &= m\gamma c^2 + q\phi \underset{u^2/c^2 \ll 1}{\approx} mc^2 + \frac{1}{2} m\vec{u}^2 + q\phi \end{aligned} \quad (5.7.84)$$

que como puede verse tiene una E libre relativista y una E potencial eléctrica [no hay una E potencial magnética: tiene que ver con el trabajo (pues \vec{B} es perpendicular)].

Por tanto

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - V(x_j) \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\vec{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = m\gamma \vec{u} = \vec{p} \Rightarrow \mathcal{H} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{x}} - \mathcal{L} = m\gamma c^2 + V \quad (5.7.85)$$

Ejemplos de colisiones relativistas

Un núcleo pesado de masa M porta una $T_R|_{\text{LAB}} = 5M$ que en un momento se fisiona, dando lugar a dos partículas de masa m con una energía E_m^L y formando un ángulo θ .

a) Para hallar p_m^L , se tiene en cuenta que

$$E_M^L = M + T_M^L = 6M = \sqrt{(\vec{p}_M^L)^2 + M^2} \rightarrow |\vec{p}_M^L|^2 = 35M^2$$

por lo que

$$p_M^\mu = (E_M^L, \vec{p}_M^L) = (6M, \sqrt{35}M\hat{p})$$

b) para hallar θ

$$\begin{aligned} \vec{p}_M^L &= \vec{p}_m^L + \vec{p}_m^L \Rightarrow (\vec{p}_M^L)^2 = 2\vec{p}_m^2 + 2(\vec{p}_m^L)^2 \cos \theta = 2(|\vec{p}_m^L|)^2 \overbrace{(1 + \cos \theta)}^{2 \cos^2 \theta / 2} \rightarrow |\vec{p}_M^L| = 2|\vec{p}_m^L| \cos \theta / 2 \\ \cos \theta / 2 &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}_M^L|}{|\vec{p}_m^L|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{35M^2}{9M^2 - m^2}} \end{aligned}$$

c) Para hallar E_m^{CM}

$$s = p_M^2 = (p_m + p'_m)^2 = (2E_m^{\text{CM}})^2 - (\vec{p} - \vec{p})^2 = 4E_m^{\text{CM}}$$

Téngase un campo electromagnético en que $\vec{E} = \vec{0}$ y $\vec{B} = (0, 0, B)$ donde B es constante y $\vec{r}(0) = (x_0, 0, 0)$ y $\dot{\vec{r}}(0) = (0, \dot{y}_0, 0)$. Recordando que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

por lo que \vec{A} y ϕ dependen de t y, por tanto $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$, es decir, que $\mathcal{H} = m\gamma c^2 + q\phi = \text{cte}$, por lo que $\gamma = \text{cte}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{u}) = \frac{q}{c}(\vec{u} \times \vec{B}) = \frac{q}{c}(\dot{y}B, -\dot{x}B, 0) \\ \frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z}) &= m\gamma \frac{d\dot{z}}{dt} = 0 \rightarrow \dot{z} = \text{cte} = 0 \Rightarrow z = z_0 = 0 \end{aligned}$$

por lo que ahora se tienen un par de ecuaciones acopladas:

$$\left. \begin{aligned} m\gamma \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{q}{c} \dot{x}B \\ m\gamma \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{q}{c} \dot{y}B \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} m\gamma \frac{d^2\dot{y}}{dt^2} &= -\frac{q}{c} \frac{d\dot{x}}{dt} B \\ m\gamma \frac{d^2\dot{x}}{dt^2} &= \frac{q}{c} \frac{d\dot{y}}{dt} B \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\dot{y}}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m\gamma c}\right)^2 \dot{y} = 0 \\ \frac{d^2\dot{x}}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m\gamma c}\right)^2 \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (5.7.86)$$

donde $\omega = qB/m\gamma c$ es la frecuencia sincrotrón.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ \dot{y}(t) &= d \sin(\omega t) + e \cos(\omega t) \\ \dot{x}(0) &= 0 \rightarrow b = 0 \\ \dot{y}(0) &= e = \dot{y}_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = a \sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) = d \sin(\omega t) + \dot{y}_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (5.7.87)$$

Sustituyendo \dot{y} y \dot{x} en las ecuaciones originales y evaluando en $t = 0$ se obtiene

$$\left. \begin{aligned} am\gamma\omega &= \frac{q}{c}B(d \sin \omega t + \dot{y}_0 \cos \omega t) \\ m\gamma\omega(d \cos \omega t - \dot{y}_0 \sin \omega t) &= -\frac{qB}{c}a \sin \omega t \end{aligned} \right\}_{t=0} \rightarrow \begin{cases} am\gamma\omega = \frac{qB\dot{y}_0}{c} \rightarrow a = \frac{qB}{m\gamma c} \frac{1}{\omega} \dot{y}_0 = \dot{y}_0 \\ m\gamma d\omega = 0 \rightarrow d = 0 \end{cases} \quad (5.7.88)$$

por lo que

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{y}_0 \sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) &= \dot{y}_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t)A - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases} \quad (5.7.89)$$

que es la ecuación de una circunferencia centra en $(x, y) = (A, 0)$ con $R = \dot{y}_0/\omega$.

$$(x(t) - A)^2 + y^2(t) = \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} x(t) - A &= -\frac{\dot{y}_0 \cos(\omega t)}{\omega} \\ y(t) &= \frac{\dot{y}_0}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (5.7.90)$$

Se va hablar sobre el efecto Compton: Téngase un electrón e^- en reposo sobre el que incide un fotón γ . El fotón se dispersa con un ángulo θ y el electrón con otro. Hallar $\lambda_f - \lambda_0 (= h/m_e c(1 - \cos \theta))$.