UNIVERSITAT DE VALÉNCIA

FACULTAD DE FÍSICA

CÁLCULO I

Apuntes Cálculo I

Alumno:
Navarro Bonanad, Rubén

Profesor:
Morais de Lima Marqués, Mauricio

Grupo BL3

Curso 2023 - 2024

Índice

1. Funciones, límites y continuidad

1.1. Nociones fundamentales

Conjuntos numéricos y números reales

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ el de los enteros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Q}$ el de los racionales: $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge p \text{ y } q \text{ son coprimos}\right\}$, $\mathbb{R}$ el conjunto unión de los racionales y los irracionales y $\mathbb{C}$ el conjunto de números complejos definidos como el par ordenado de reales $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z = (a, b) \in \mathbb{C}$; $\omega = (c, d) \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot \omega = (ac - bd, ad + bc)$. Dos números son coprimos si su único divisor en común es el 1.

Los números reales cumplen ciertas propiedades algebraicas, están ordenados y son un conjunto completo.

Intervalos

Los tipos de intervalo existentes son los siguientes:

- $(a, b) = \{x|a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x|a < x \leq b\}$
- $(a, \infty) = \{x|x > a\}$
- $[a, \infty] = \{x|x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x|x \leq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Desigualdades: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen entonces las siguientes reglas:

1. $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$
2. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
3. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$
4. $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
5. $a, b > 0 \vee a, b < 0 \ (ab > 0) \Rightarrow a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

Valor absoluto: El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, denotado como $|x|$, se define: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad |x| = \sqrt{x^2}$

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

1. $|x| = a \Longleftrightarrow x = \pm a$
2. $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$
3. $|x| > a \Longleftrightarrow x > a \vee x < -a$
4. $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
5. $|x| \geq a \Longleftrightarrow x \geq a \vee x \geq -a$

1.2. Funciones

Definición 1.2.1: Una **función** f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna un elemento único $f(x) \in Y$ para cada elemento $x \in D$

$$\begin{aligned} f : D &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Una función puede hallarse definida por partes para distintos valores del dominio:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \leq x_0 \\ f_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots \\ f_n(x), & x \geq x_{n-1} \end{cases}$$

El rango de una función se refiere a la imagen de ésta, es decir, el conjunto de todos los resultados (es decir, la actuación de la función sobre el dominio, D):

$$R \equiv f(D) = \{y \in Y \mid \exists x \in D,\ f(x) = y\}$$

Definición: Una gráfica es el siguiente conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$

Definición 1.2.2: Sea f una función definida en un intervalo I y sean $x_1, x_2 \in I$, entonces:

1. Si $f(x_2) > f(x_1), \quad \forall x_1 < x_2$, entonces, f es **creciente** en I.
2. Si $f(x_2) < f(x_1), \quad \forall x_1 < x_2$, entonces, f es **decreciente** en I.

Paridad: La función $y = f(x)$ es función $\begin{cases} \text{par de x} & \text{si f(-x)=f(x)} \\ \text{impar de x} & \text{si f(-x)=-f(x)} \end{cases} \quad \forall x \in D$

Funciones hiperbólicas: Las funciones del seno, coseno y tangente hiperbólicos se definen del siguiente modo:

seno hiperbólico: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

coseno hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

tangente hiperbólica: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Operaciones algebraicas con funciones: Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ para $x \in D(f) \cap D(g)$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (cf)(x) = cf(x)$$

Composición de funciones: Sean $f \wedge g$ funciones. La función composición $f \circ g$, f compuesta con g, está definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Donde $f : A \to B \wedge g : B \to C \Rightarrow f \circ g : A \to C$

Inyectividad: Una función $f(x)$ es inyectiva en un dominio D si $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2, \forall x_1, x_2 \in D$

Función inversa: Supóngase que f es una función inyectiva en un dominio D y con rango R. La función inversa f^{-1} se define

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b \qquad \forall b \in R, a \in D$$

El dominio de f^{-1} es R y su rango es D

1.3. Límites de funciones

Definición formal de límite: Sea I un intervalo abierto; $x_0 \in I$; $\exists f(x), \forall x \in I - \{x_0\}$. El límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ es L y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Esta definición viene a expresar que $f(x)$ vale L cuando x tiende al valor x_0 si se puede hallar una variación δ de x que haga que la función se aproxime arbitrariamente cerca al valor L, $L \pm \epsilon$.

Se ha de conseguir encontrar la relación entre delta y épsilon para que la desigualdad se mantenga.

Definición formal de límites laterales: Se dice que $f(x)$ tiene **límite lateral derecho** L^+ **en** c, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L^+$ si:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L^+ \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x, c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \epsilon$$

Se dice que $f(x)$ tiene **límite lateral izquierdo** L^- **en** c, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L^-$ si:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L^- \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x, c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L^-| < \epsilon$$

T$^{\underline{\textbf{ma}}}$: Una función $f(x)$ tiene límite L cuando $x \to c$ si y sólo si existen los límites laterales izquierdo y derecho y estos son iguales:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Límites al infinito:

1. Se dice que $f(x)$ tiene **límite** L **cuando** x **tiende a infinito** si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M \ / \ \forall x, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

2. Se dice que $f(x)$ tiene **límite** L **cuando** x **tiende a menos infinito** si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \ / \ \forall x, x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Asíntota horizontal: Una recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Asíntota oblicua: Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \wedge \text{grado}(P(x)) + 1 = \text{grado}(Q(x))$. Entonces la gráfica tiene una asíntota oblicua o inclinada, cuya ecuación se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador, pues $f(x)$ se verá expresada como una función lineal más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{c}{R(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax + b + \frac{c}{R(x)} \text{''} = \text{''}\ ax + b$$

límites infinitos:

1. Se dice que $f(x)$ **tiende a infinito cuando** x **se aproxima a c**, y se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ si:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \forall B, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > B$$

2. Se dice que $f(x)$ **tiende a menos infinito cuando** x **se aproxima a c**, y se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ si:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \forall - B, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$$

Asíntota vertical: Una recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

1.4. Cálculo de límites

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.1 Leyes de los límites: Si $L, M, c, k \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x\to c} f(x) = L, \lim_{x\to c} g(x) = M$, entonces

1	Regla de la suma:	$\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
2	Regla del múltiplo constante:	$\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L, \quad L \in \mathbb{R}$
3	Regla del producto:	$\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4	Regla del cociente:	$\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0$
5	Regla de la potencia:	$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n, \quad n \in \mathbb{N}$
6	Regla de la raíz:	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}$
		(n par $\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L \geq 0$)

Todas las leyes de límites de este T$^{\underline{\text{ma}}}$ son verdaderos cuando se sustituye $\lim_{x\to c}$ por $\lim_{x\to\infty} \vee \lim_{x\to-\infty}$. Es decir, la variable x puede aproximarse a un número finito c o tender a $\pm\infty$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.2 límites de funciones polinómicas: Si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces:

$$\lim_{x\to c} = P(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.3 límites de funciones racionales: Si $P(x) \wedge Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Sean $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i = a_p x^p + \cdots + a_0 \wedge Q(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i x^i = b_q x^q + \cdots + b_0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ 0 \text{ si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} \text{ si } p = q \end{cases} \qquad \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \text{directo si } Q(a) \neq 0 \\ \text{si } P(a) = Q(a) = 0, \text{simplificar por } (x-a) \end{cases}$$

Si se tiene una función del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x) \vee Q(x)$ no racionales, es decir, funciones radicales, y al resolver el límite se halla una indeterminación del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, la forma de resolverla es multiplicando y dividiendo por el conjugado de la función radical.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.4 T$^{\underline{\text{ma}}}$ del sándwich: Supóngase que $c \in I = (a,b)$; $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in I - \{c\}$. Supóngase también que:

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L, \quad \text{entonces:}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.5: Si $c \in I = (a,b)$; $f(x) \leq g(x), \forall x \in I - \{c\} \wedge \exists \lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x)$, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Cálculo de indeterminaciones del tipo 1^∞: Sea $\lim_{x\to a} f(x) = 1 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^\lambda, \qquad \lambda \equiv \lim_{x\to a} [f(x) - 1] g(x)$$

1.5. Continuidad

Definiciones: Sea $c \in \mathbb{R}$, f es continua

1 en c si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

2 por la izquierda en c si $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

3 por la derecha en c si $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

$$f \text{ es continua en } c \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

Prueba de continuidad: Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = c$ si y sólo si:

1 $\exists f(c)$ 2 $\exists \lim_{x \to c} f(x)$ 3 $\lim_{x \to c} = f(c)$

Se dice que una función $f(x)$ es continua si lo es $\forall x \in D$.

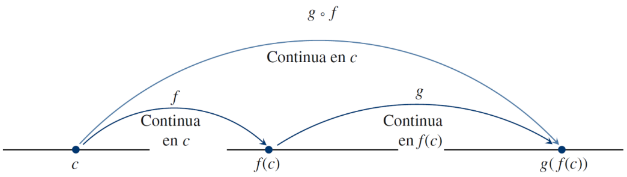
Las discontinuidades de una función pueden clasificarse según la condición que no cumplan:

1. Si no se cumple la condición 1 o la 3, se trata de una discontinuidad evitable.
2. Si no se cumple la condición 2, pueden tenerse uno de los siguientes casos:
   2.1 $\lim_{x \to c^+} f(x) = L^+, \lim_{x \to c^-} f(x) = L^-;\ L^+ \neq L^-$. En este caso se tiene una discontinuidad de salto.
   2.2 $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty \vee \nexists \lim_{x \to c} f(x)$. Esto es una discontinuidad esencial

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.6 Propiedades de las funciones continuas: Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces, las siguientes combinaciones algebraicas son continuas en $x = c$:

1 Sumas: $f \pm g$
2 Múltiplos constantes: $k \cdot g$
3 Productos: $f \cdot g$
1 Cocientes: f/g
2 Potencias: f^n
3 Raíces: $\sqrt[n]{f}$

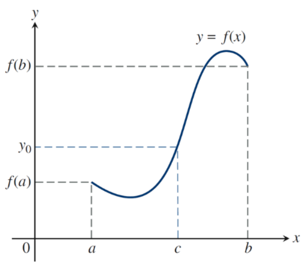
T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.7 Composición de funciones continuas: Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces, la composición $f \circ g$ es continua en c.



T$^{\underline{\text{ma}}}$ 1.8 Límites de funciones continuas: Si g es continua en b y $\lim_{x \to c} f(x) = b$, entonces,

$$\lim_{x \to c} g[f(x)] = g(b) = g[\lim_{x \to c} f(x)]$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Bolzano o T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor intermedio para funciones continuas: Si f es continua en $[a, b]$ e $y_0 \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists c \in [a, b]\ /\ f(c) = y_0$



2. Diferenciación

2.1. La derivada y su interpretación

Razón promedio de cambio y rectas secantes: Dada una función $y = f(x)$, se calcula la razón promedio de cambio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ dividiendo el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, entre las longitud $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ del intervalo donde ocurre el cambio. La **razón promedio de cambio** de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$

La ecuación de la recta secante a estos dos puntos, x_1, x_2 es: $y = f(x_1) + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_1)$

Derivada en un punto: La derivada de una función f en el punto x_0, denotada con $f'(x_0)$ es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dado que el límite exista.

Las siguientes son todas interpretaciones de la derivada en un punto (o cociente diferencial):

1. La pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en $x = x_0$
2. La pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$
3. La razón de cambio de $f(x)$ con respecto a x en $x = x_0$
4. La derivada $f'(x_0)$ en el punto x_0

Función derivada: La derivada de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en x es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siempre y cuando el límite exista.

Una fórmula alternativa para hallar la función derivada es:

$$f'(x) = \lim_{z\to} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Se tienen las siguientes notaciones para denotar la derivada de una función en un punto:

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Las notaciones para la función derivada son las siguientes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

Diferenciabilidad: Una función $y = f(x)$ es diferenciable en un intervalo abierto, finito o infinito, si tiene una derivada en cada punto del intervalo. Es diferenciable en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es diferenciable en el intervalo (a, b) y si los siguientes límites existen:

Derivada en a por la derecha: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada en a por la izquierda: $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Funciones que no tienen derivada en un punto: Los casos en los que no existe $f(a)$ son los siguientes:

1 Una esquina, donde las derivadas laterales son diferentes

2 Una cúspide, donde la pendiente se aproxima a ∞ por un lado y a $-\infty$ por el otro

3 Una tangente vertical se aproxima por ambos lados a $\pm\infty$

4 Una discontinuidad (séase evitable o de salto finito)

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 2.1 Diferenciabilidad implica continuidad: Si $\exists f'(c) \Rightarrow f$ es continua en $x = c$.

Demostración: Dado que $\exists f'(c)$, se debe demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ o, equivalentemente, que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Si $h \neq 0$, entonces:

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h$$

Tomando el límite cuando $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c) \qquad \text{Q.E.D.}$$

2.2. Reglas de derivación

Sean $c \in \mathbb{R},\ f(x),\ g(x) \wedge \exists f'(x),\ g'(x)$:

1 Derivada de una función constante: si $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2 Derivada de una potencia (versión general): $\forall x / \exists\ x^n, x^{n-1} \Longrightarrow \dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

3 Derivada del múltiplo constante: $\dfrac{d}{dx}(cf) = cf'$

4 Derivada de una suma: $\dfrac{d}{dx}(f \pm g) = f' \pm g'$

5 Derivada de un producto: $\dfrac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$

6 Derivada de un cociente: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{g}\right) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Derivadas de orden superior:

$$2^{\text{a}}\text{ derivada: } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

$$\text{Derivada n-ésima: } y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

Derivadas de funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$$

Demostración de $\frac{d}{dx}\tan(x)$:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

Otras derivadas fundamentales:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \Longrightarrow \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \\ \dfrac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \\ \dfrac{d}{dx}\coth x = \operatorname{sech}^2 x \\ \dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \\ \dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \coth x \end{cases}$$

La regla de la cadena: Si $f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$ y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces, la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \vee \quad \frac{dy}{dx} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=g(x)} \frac{du}{dx}$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ 2.2 derivada de la función inversa: Si f tiene un intervalo I como dominio y $\exists f'(x) \neq 0$ en I, entonces, f^{-1} es diferenciable en cada punto de su dominio (rango de f). El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b del dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \quad \vee \quad \left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Demostración de la derivada de la función inversa:

$$f(f^{-1}(x)) = x \xrightarrow{d/dx} \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1 \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Otras derivadas de funciones inversas:

$$\frac{d(\operatorname{sen}^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \qquad \frac{d(\cos^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

$$\frac{d(\tan^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d(\cot^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d(\sec^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\csc^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d(\cosh^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1 \qquad \frac{d(\coth^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

$$\frac{d(\ \operatorname{sech}^{-1}\ (u))}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad 0 < u < 1 \qquad \frac{d(\ \operatorname{sech}^{-1}\ (u))}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad u \neq 0$$

Curvas paramétricas: Si x e y están expresadas como funciones de t, $x(t), y(t)$, en un intervalo I de valores t, entonces, el conjunto de puntos $(x, y) = (x(t), y(t))$, definido por estas ecuaciones es una curva paramétrica. Las ecuaciones son ecuaciones paramétricas de la curva

Diferenciación implícita: Hasta ahora se ha trabajado con funciones del tipo $y = f(x)$, donde $f(x)$ expresa y explícitamente en términos de x, sin embargo, hay situaciones, como en las ecs. $x^3 + y^3 - 9xy = 0 \vee y^2 - x = 0$ en las que la relación entre y y x es implícita. En los casos en los que se escribe $F(x, y) = 0$ aún es posible encontrar la función $\dfrac{dy}{dx}$ utilizando la técnica de diferenciación implícita:

1. Se diferencian ambos lados con respecto a x, tratando a y como una función diferencibale de x.
2. Se agrupa en un lado de la ecuación los términos que contengan $\dfrac{dy}{dx}$, y se despeja $\dfrac{dy}{dx}$

2.3. Extremos de una función

Extremos absolutos: Sea f una función con dominio D y c un punto al que pertenece, decimos que f tiene:

1 un valor **máximo absoluto** en c si $\forall x \in D\ f(x) \leq f(c)$

2 un valor **mínimo absoluto** en c si $\forall x \in D\ f(x) \geq f(c)$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Weierstrass; T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor extremo: Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, f alcanza tanto un valor máximo absoluto, M, como un valor mínimo absoluto, m, en $[a, b]$. Es decir, $\exists x_1, x_2 \in [a, b] / f(x_1) = m, f(x_2) = M \wedge m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Extremos locales:

1. Una función f tiene un **máximo local** en $c \in D$ si $f(x) \leq f(c), \forall x \in D$ que se encuentra en algún intervalo abierto que contiene a c: $c \in I \subset D$
2. Una función f tiene un **mínimo local** en $c \in D$ si $f(x) \geq f(c), \forall x \in D$ que se encuentra en algún intervalo abierto que contiene a c: $c \in I \subset D$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de la primera derivada para valores extremos locales: Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto c de su dominio, $c \in D$, y si $\exists f'(c)$, entonces: $f'(c) = 0$

$$\text{máximo o mínimo} \Rightarrow f'(c) = 0$$

Punto crítico: Un punto interior del dominio de una función f donde $f'(c) = 0 \vee \nexists f'(c)$ es un punto crítico de f.

$$\text{extremo de la función} \Rightarrow \text{punto crítico de } f(x)$$
$$\not\Leftarrow$$

Obtención de extremos absolutos: Cómo obtener los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado

1. Evaluar f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo (o intervalos) dominio.
2. Tomar el mayor y el menor de estos valores.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Rolle: Suponer que $y = f(x)$ es continua $\forall x \in [a, b]$ y diferenciable $\forall x \in (a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces, $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor medio (Lagrange): Suponer que $y = f(x)$ es continua $\forall x \in [a, b]$ y diferenciable $\forall x \in (a, b)$. Entonces, $\exists c \in (a, b)$ en el cual:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Una interpretación física

Puede visualizarse el número $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ como el cambio promedio en f en el intervalo $[a, b]$, y $f'(c)$ como el cambio instantáneo. Entonces, el T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor medio afirma que, en algún punto interior, el cambio instantáneo debe ser igual al cambio promedio en todo el intervalo.

Corolario 1: Si $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = C, \forall x \in (a, b), C \in R$

Corolario 2: Si $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists C \in R \ / \ f(x) = g(x) + C, \forall x \in (a, b)$; es decir, $f - g$ es una función cte. en (a, b).

Corolario 3: Suponer que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b):

1. Si $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$
2. Si $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$

Criterio de la primera derivada para los extremos locales: Suponer que c es un punto crítico de una función continua f y que f es diferenciable $\forall x \in (a, b) - \{c\}, c \in (a, b)$. Al moverse a lo largo de este intervalo, de izquierda a derecha:

1. Si para $x < c,\ f'(x) < 0 \wedge x > c,\ f'(x) > 0$, entonces, f tiene un mínimo local en c;
2. Si para $x < c,\ f'(x) > 0 \wedge x > c,\ f'(x) < 0$, entonces, f tiene un máximo local en c;
3. Si para $x < c \wedge x > c,\ f(x) > 0 \vee x < c \wedge x > c,\ f(x) > 0$, entonces, f no tiene un extremo local en c.

Concavidad: La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ es:

1. Cóncava hacia arriba (o cóncava) en un intervalo abierto I si f' es creciente en I;
2. Cóncava hacia abajo (o convexa) en un intervalo abierto I si f' es decreciente en I.

Prueba de la segunda derivada para la concavidad: Sea $y = f(x)$ dos veces diferenciable en I:

1. Si $f''(x) > 0$ en I, la gráfica de f sobre I es cóncava hacia arriba;
2. Si $f''(x) < 0$ en I, la gráfica de f sobre I es cóncava hacia abajo.

Punto de inflexión: Un punto $(c, f(c))$, donde la gráfica de una función tiene una recta tangente y donde cambia la concavidad, es un punto de inflexión. En un punto de inflexión $f''(c) = 0 \vee \nexists f''(c)$.

Prueba de la segunda derivada para extremos locales: Suponer que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$:

1. Si $f'(c) = 0 \wedge f''(c) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo local en $x = c$;
2. Si $f'(c) = 0 \wedge f''(c) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $x = c$;
3. Si $f'(c) = 0 \wedge f''(c) = 0 \Rightarrow$ la prueba falla y no puede concluirse nada sobre f en c.

Procedimiento para graficar $y = f(x)$:

1. Identificar el dominio de f y cualquier simetría que pueda tener la curva (paridad).
2. Obtener las derivadas $f' \wedge f''$.
3. Obtener los puntos críticos de f, si existen, e identificar el comportamiento de la función en ellos.
4. Identificar dónde la curva es creciente y dónde decreciente.
5. Obtener los puntos de inflexión y determinar la concavidad de la curva.
6. Identificar las asíntotas que puedan existir.
7. Trazar puntos clave, como intersecciones con los ejes y los puntos obtenidos en 3-5, dibujando la curva junto con sus asíntotas.

2.4. Regla de l'Hôpital

Regla de L'Hôpital: Supóngase que $f(a) = g(a) = 0$, que $f \wedge g$ son diferenciables en un intervalo abierto I, $a \in I$, y que $g'(x) \neq= 0$ en I si $x \neq a$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que existe el límite de la derecha. También es válido cuando $x \to \infty \wedge \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor medio de Cauchy: Supóngase que las funciones $f \wedge g$ son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b); suponer también que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces, $\exists c \in (a, b)$ en el que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

2.5. Aproximación polinómica de funciones

Series de Taylor y MacLaurin: Sea f una función con derivadas de todos los órdenes (es decir, f es de clase C^{∞}, por lo que existe su derivada enésima y es continua, $\forall n$) en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. De este modo, la serie de Taylor generada por f en $x=a$ es:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

La serie de Maclaurin de f es la serie de Taylor generada por f en $x=0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Polinomio de Taylor: Sea f una función con derivadas de orden k, $k=1,2,\ldots,N$ (f es C^N) en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. Entonces, $\forall n\in\mathbb{N}, n\in[0,N]$, el polinomio de Taylor de orden n generado por f en $x=a$ es el polinomio:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Demostración del polinomio de Taylor de orden n, bajo los supuestos vistos en la definición:

$$f(x)\approx P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$$

Evaluando el polinomio $P_n(x)$ en $x=a$, se observa que $P_n(a)=a_0$

Derivando $P_n(x)$ y sustituyendo $x=a$, se tiene que:

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-a)+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}\Rightarrow P_n'(a)=a_1$$

Derivando $P_n'(x)$ y sustituyendo $x=a$ se tiene que:

$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}\Rightarrow P_n''(a)=2a_2\Rightarrow a_2=\frac{P_n''(a)}{2}$$

Derivando y sustituyendo sucesivamente se obtiene que:

$$P_n^{(n)}(a)=n(n-1)\cdots 2a_n=n!a_n\Longrightarrow a_n=\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}$$

Por tanto puede escribirse:

$$P_n(x)=P_n(a)+\frac{P_n'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad \text{Q.E.D.}$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Taylor: Si f y sus primera n derivadas son continuas en el intervalo $[a,b]$ y si $f^{(n)}$ es diferenciable en el intervalo (a,b), entonces, $\exists c\in(a,b)$ tal que:

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^{+}\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Fórmula de Taylor: Si f tiene derivadas de todos órdenes en un intervalo abierto I que contiene un punto a, entonces, $\forall n \in \mathbb{R}, x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de estimación del residuo: Si existe una constante positiva $M \,/\, |f^{n+1}(t)| \leq M \; \forall t \in [x, a]$, entonces, $R_n(x)$, el término residual del T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Taylor, satisface la desigualdad:

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si esta desigualdad se cumple para toda n, y f satisface todas las demás condiciones del T$^{\underline{\text{ma}}}$ de Taylor, entonces, la serie converge a $f(x)$.

3. Integración

3.1. La integral indefinida

Función primitiva o antiderivada: Una función F es una antiderivada de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

T$\underline{\text{ma}}$ 3.1.1: Si F es una antiderivada de f en un intervalo I y $C \in \mathbb{R}$, la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C$$

Integral indefinida: El conjunto de todas las antiderivadas de f es la integral indefinida de f con respecto a x, y se denota de la siguiente forma:

$$\int f(x)dx$$

El símbolo $\int$ representa la integral. La función f es el integrando y x es la variable de integración.
Algunas propiedades fundamentales son las siguientes: $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \quad \wedge \quad \int f'(x)dx = f(x) + C$

Fórmulas básicas de integración y reglas de linealidad: Sea $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

1. $\displaystyle\int k dx = kx + C, \quad k \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
7. $\displaystyle\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kx + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2 kx dx = \frac{1}{k}\tan kx + C$
9. $\displaystyle\int \csc^2 kx dx = -\frac{1}{k}\cot kx + C$
10. $\displaystyle\int \sec kx \tan kx dx = \frac{1}{k}\sec kx + C$
11. $\displaystyle\int \csc kx \cot kx dx = -\frac{1}{k}\csc kx + C$
12. $\displaystyle\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\displaystyle\int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
14. $\displaystyle\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\displaystyle\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C$
17. $\displaystyle\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$
22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x > a > 0$

Reglas de linealidad:

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C \qquad \wedge \qquad \int f(x) \pm g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$$

3.2. Técnicas de integración

Sustitución: Sea $u = g(x)$ una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, y f es continua en I, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Demostración:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du = \int f(u)du$$

Integración por partes: Ténganse dos funciones $f(x) = u, g(x) = v$ y sus derivadas, $f'(x), g'(x)$:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)dx] = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Reordenando:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \xRightarrow[g'(x)dx=dv]{f'(x)dx=du} \int udv = uv - \int vdu}$$

Se puede iterar varias veces la integración por partes y, en el caso de obtener nuevamente la integral original en la derecha multiplicada por algún escalar, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$, puede reorganizarse los términos para obtener el valor de la integral original. Estos casos se denominan integrales cíclicas:

$$\int udv = \cdots = A + k \int udv \Rightarrow (1-k) \int udv = A \Rightarrow \int udv = \frac{A}{1-k} + C$$

Integrales con un trinomio cuadrado:

$$I_{\text{T1}} = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \xRightarrow[l=c-ak^2]{k={}^b/_{2a}} I_{\text{T1}} = \int \frac{1}{a(x+k)^2 + l} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x+k)^2 + \frac{l}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + d}$$

Caso 1, $d > 0,\ d = \alpha^2$:

$$I_{\text{T1}} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{al}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{l}}(x+k)\right) + C$$

Caso 2, $d < 0,\ d = -\alpha^2$:

$$I_{\text{T1}} = -\frac{1}{a} \int \frac{du}{\alpha^2 - u^2} = -\frac{1}{2a\alpha} \ln\left|\frac{u+\alpha}{u-\alpha}\right| + C$$

Método de fracciones parciales cuando ${}^{f(x)}/_{g(x)}$ es propia (irreducible):

1. Sea $x-r$ un factor lineal de $g(x)$. Suponer que $(x-r)^m$ es la potencia más grande de $x-r$ que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asignar la suma de las m fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x-r)}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{(x-r)^i}$$

   Hacer lo mismo con cada factor lineal distinto de $g(x)$.

2. Sea x^2+px+q un factor cuadrático irreducible de $g(x)$, de modo que $\nexists x\in\mathbb{R}/x^2+px+q=0$, es decir, no tiene raíces reales. Suponer que $(x^2+px+q)^n$ es la potencia más grande de este factor que divide a $g(x)$. Entonces, para ese factor, asignar la suma de n fracciones parciales:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}$$

   Hacer lo mismo con cada factor cuadrático distinto de $g(x)$

3. Igualar la fracción original ${}^{f(x)}/_{g(x)}$ a la suma de todas las fracciones parciales. Eliminar las fracciones de la ecuación resultante y reordenar los términos en potencias decrecientes de x.

4. Igualar los coeficientes de potencias correspondientes de x y resolver las ecuaciones resultantes para obtener los coeficientes indeterminados.

Funciones trigonométricas: Téngase la integral $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x dx$:

Caso 1 Si **m es impar**, se escribe $m=2k+1$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$ para obtener:

$$\operatorname{sen}^m x=\operatorname{sen}^{2k+1}x=(\operatorname{sen}^2 x)^k\operatorname{sen}x=(1-\cos^2 x)^k\operatorname{sen}x$$

Después se combina en la integral el $\operatorname{sen}x$ individual con el dx y se iguala $\operatorname{sen}x dx$ con $-d(\cos x)$.

Caso 2 Si **m es par y n impar**, se escribe $n=2k+1$ y se utiliza la identidad $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ para obtener:

$$\cos^n x=\cos^{2k+1}x=(\cos^2 x)^k\cos x=(1-\sin^2 x)^k\cos x$$

Después se combina el $\cos x$ individual con el dx y se iguala $\cos x dx=d(\operatorname{sen}x)$.

Caso 3 Si **m y n son pares** se sustituye

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

para reducir el integrando a uno con potencias menores de $\cos 2x$

Identidades trigonométricas relevantes:

$$\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\qquad \operatorname{sen}mx\cos nx=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x+\operatorname{sen}(m+n)x]$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]$$

Sustituciones trigonométricas:

$$x = a\tan\theta \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = a|\sec\theta| \qquad x = a\tan\theta \text{ requiere } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta \qquad x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ requiere } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = a\sec\theta \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = a|\tan\theta| \qquad x = a\sec\theta \text{ requiere } \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{x}{a} \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi & \text{si } \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$$

Procedimiento para una sustitución trigonométrica:

1. Escribir la sustitución para x, calcular la diferencial dx y especificar los valores seleccionados de θ para la sustitución.
2. Sustituir la expresión trigonométrica y la diferencial calculada en el integrando, y después simplificar algebraicamente los resultados.
3. Resolver la integral trigonométrica, teniendo en cuenta las restricciones del ángulo θ para la reversibilidad.
4. Dibujar un triángulo de referencia adecuado para revertir la sustitución en el resultado de la integración y regresar a la variable original, x.

3.3. La integral definida

Notación sigma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

En esta notación, el subíndice (aquello bajo de sigma) denota en qué número inicia k, el superíndice (aquello encima de sigma) denota en que número finaliza la k y a_k es la fórmula para el k-ésimo término

Sumas de Riemann: Sea $a < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
Se llama partición de $[a,b]$ al conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, que divide $[a,b]$ en n subintervalos cerrados:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [a_{n-1}, x_n]$$

La **norma de una partición** P, denotada $||P||$, se define como la mayor de las longitudes de todos los subintervalos.

La **suma de Riemann** se define entonces del siguiente modo:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

donde $f(c_k)$ es el valor de la función en el punto c_k y Δx_k es la anchura del k-ésimo subintervalo de la partición en que se ha dividido el intervalo $[a,b]$. Es decir $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
Un caso particular es aquel en que todos los intervalos tienen la misma anchura. Si $[a,b]$ se divide en n intervalos regulares, la anchura de cada intervalo será $\dfrac{b-a}{n}$, por lo que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Integral definida: Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$. Se dice que un número J es la **integral definida de f en** $[a, b]$ y que J es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k$ si se satisface la siguiente condición:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a, b] \text{ con } ||P|| < \delta \text{ y } \forall c_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| < \epsilon$$

Dicho de otro modo

$$\boxed{J = \lim_{|P|| \to 0|} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k}$$

Cuando la condición de la definición se satisface, se dice que las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ convergen a la integral definida $J = \int_a^b f(x)dx$ y que f es integrable en $[a, b]$.

Tomando el caso particular en que las normas de la partición del intervalo son iguales:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right), \qquad \Delta x_k = \Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right), \forall k$$

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right), \qquad ||P|| \to 0 \Rightarrow n \to \infty$$

Si se elige el punto c_k como el extremo de la derecha del k-ésimo subintervalo, entonces $c_k = a + k\Delta x = a + k\frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$, integrabilidad de funciones continuas: Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, o si tiene a lo más un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo, entonces, $\exists \int_a^b f(x)dx$ y f es integrable en $[a, b]$.

T$^{\underline{\text{ma}}}$: Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces la integral definida satisface las siguientes propiedades:

1. Orden de integración: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. Intervalo de longitud cero: $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. Múltiplo cte.: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ \forall k \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. Aditividad: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
6. Desigualdad máx-mín: $\text{mín}\,(f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \text{máx}\,(f) \cdot (b-a)$
7. Dominación: $f(x) \geq g(x) \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Área bajo una curva: Si $y = f(x)$ es no negativa e integrable en $[a, b]$, entonces, el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es la integral de f de a a b

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplos: $\int_0^b xdx = b^2/2$

$$\int_a^b xdx = \int_a^0 xdx + \int_0^b xdx = -\int_0^a xdx \int_0^b xdx = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Valor promedio de una función: Si f es integrable en $[a, b]$, entonces, su valor promedio en $[a, b]$ también llamado media, es:

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

3.4. El $T^{\underline{ma}}$ fundamental del cálculo

$T^{\underline{ma}}$ del valor medio para integrales definidas: Di f es continua en $[a, b] \Longrightarrow \exists c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$T^{\underline{ma}}$ fundamental del cálculo, parte 1: Si f es continua en $[a, b]$, entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$T^{\underline{ma}}$ fundamental del cálculo, parte 2: Si f es continua en $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$T^{\underline{ma}}$ del cambio neto: El cambio neto en una función diferenciable $F(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$ es la integral de su razón de cambio:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

Si un objeto con función de posición $s(t)$ se mueve a lo largo de una recta coordenada, su velocidad es $v(t) = s'(t)$. El $T^{\underline{ma}}$ del cambio neto afirma que

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s_(t_2) - s(t_1)$$

,
de modo que la integral de la velocidad es el desplazamiento en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$

Sustitución en integrales definidas: Si g' es continua en el intervalo $[a, b]$ y f es continua en el rango de $g(x) = u$, entonces,

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Resumen: Para obtener el área entre entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$:

1. Se divide $[a, b]$ con los ceros de f.

2. Se integra f en cada subintervalo.

3. Se suman los valores absolutos de las integrales

Respecto a la simetría: Sea f continua en el intervalo $[-a, a]$:

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

b) Si f es impar, entonces, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Área entre dos curvas: Sean f y g funciones continuas con $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$ entonces, el área de la región entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de $[a, b]$ es la integral de $(f - g)$ de a a b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

3.5. Integrales impropias

Integrales impropias de tipo I: Las integrales con límites de integración infinitos son integrales impropias de tipo I

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

   donde $c \in \mathbb{R}$.

En todos los casos, si el límite es finito, se dice que la integral impropia converge y que el límite es el valor de la integral impropia. Si $\nexists \lim$, la integral impropia diverge.

Integrales impropias de tipo II: Las integrales de funciones que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración son integrales impropias de tipo II.:

1. Si $f(x)$ es continua en $(a,b]$ y discontinua en a, o continua en $[a,b)$ y discontinua en b, entonces, respectivamente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

2. Si $f(x)$ es discontinua en $c \in [a,b]$ y discontinua en $[a,c)\cup(c,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{d\to c^-}\int_a^d f(x)dx + \lim_{d\to c^+}\int_d^b f(x)dx$$

En todos los casos, si el límite es finito, se dice que la integral impropia converge y que el límite es el valor de la integral impropia. Si el $\nexists$ lím, la integral diverge.

Prueba de comparación directa: Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ con $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \ge a$. Entonces:

1. Si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ converge **2.** Si $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ diverge

Prueba de comparación asintótica: Si las funciones positivas f y g so continua en $[a,\infty)$ y si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^\infty f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^\infty g(x)dx,$$

o bien ambas convergen, o bien ambas divergen.

3.6. Aplicaciones de la integral definida

Longitud de una curva: Según el T$^{\underline{\text{ma}}}$ del valor medio, $\exists c_k, x_{k-1} < c_< x_k$ tal que

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\Delta x_k$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n L_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Si f' es continua en $[a,b]$, entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ del punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$ es el valor de la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Si g' es continua en $[c,d]$, la longitud de la curva $x = g(y)$ de $A = (g(c), c)$ a $B = (g(d), d)$ es

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}dy$$

Áreas de superficies de revolución: El área de la superficie de una sección generada al rotar una función en torno al eje x es el Área de la superficie de un cono truncado:

$$A_S = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Por tanto, la superficie de toda la superficie de revolución puede aproximarse como dichas secciones:

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k$$

Para tener ls superficie total de revolución se tendrá que tomar el límite cuando el número de secciones se aproxima a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x_k))^2}dx$$

En resumen, si la función $f(x) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$, el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Área superficial para rotaciones en torno al eje y: Si $x = g(y) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica $x = g(y)$ en torno al eje y es:

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

Volúmenes a través de secciones transversales: Si el volumen de la k-ésima rebanada es $V_k = A(x_k)\Delta x_k$, entonces el volumen total puede aproximarse mediante la suma de las n rebanadas:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$$

Al tomar el límite cuando el número de rebanadas se vuelve infinito, el Volumen aproximado converge al valor real del volumen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx$$

Cálculo del volumen de un sólido:

1. Dibujar el sólido y una sección transversal típica.
2. Obtener una fórmula para $A(x)$, el área de la sección transversal típica.
3. Determinar los límites de integración.
4. Integrar $A(x)$ para obtener el volumen.

Volumen por discos para rotaciones en torno al eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

Volumen por discos para rotaciones en torno al eje y:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

Volumen por arandelas para rotaciones en torno al eje x:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)dx$$

Volumen de los casquillos cilíndricos para rotaciones alrededor de una recta vertical: El volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la gráfica de una función continua $y = f(x) \geq 0,\ L \leq a \leq x \leq b$, en torno de la recta vertical $x = L$ es

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx$$

Volumen para rotaciones alrededor de una recta horizontal L:

$$V = \int_a^b 2\pi(x-L)f(x)dx$$

Trabajo de una fuerza variable:

$$\text{Trabajo} \equiv W \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \xrightarrow[\text{al resultado real } n\to\infty]{\text{Para que converga}} W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

Ejemplo:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = m\int_{x_1}^{x_2} v\frac{dv}{dx}dx = m\int_{x_1}^{x_2} vdv = \frac{1}{2}m([v(x_2)]^2 - [v(x_1)]^2)$$

$$W = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

Cálculo de centros de masas:

$$x_{CM} = \bar{x} = \frac{M_y}{M} \approx \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\int xdm}{\int dm} \left[= \frac{\int x\lambda(x)dx}{\int dm}\right]$$

$$y_{CM} = \bar{y} = \frac{M_x}{M} \approx \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \Rightarrow y_{CM} = \frac{\int ydm}{\int dm} \left[= \frac{\int y\lambda(y)dy}{\int dm}\right]$$

Donde $\lambda(x)$ representa la densidad lineal de materia.

4. Sucesiones y series infinitas

4.1. Introducción

Sumas infinitas que convergen:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \qquad \text{converge}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3} \qquad \text{converge}$$

Parece ser que la suma de las potencias del recíproco de un número convergen del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^n}=\frac{1}{1-c},\ \forall c>1$$

La serie armónica: En base a lo que se ha visto hasta ahora, parece ser que las sumas infinitas de números cada vez más pequeños converge. Va a presentarse un contraejemplo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

La suma de los recíprocos de todos los naturales recibe el nombre de serie armónica, procederá a probarse que su suma diverge:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty\Rightarrow \text{diverge}$$

4.2. Sucesiones

Sucesión: Una sucesión es una lista ordenada de números reales. Puede ser entendida como una función que lleva un número natural a un número real:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \to & a_n \end{array}$$

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio dominio es el conjunto de los naturales.

Una sucesión puede describirse a través de la regla que especifica el n-ésimo término, por ejemplo:

$$a_n = \sqrt{n}, \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{n-1}{n}$$

o mediante el listado de sus términos:

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}, \qquad \{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots\right\},$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}$$

Definición formal de convergencia y divergencia de sucesiones: Una sucesión $\{a_n\}$ converge al número L si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Si $\nexists L$ se dice que la serie diverge.
Si $\{a_n\}$ converge a L se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ o, simplemente, $a_n \to L$ y se llama L al límite de la sucesión.
Ejemplos:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},\ n \to \infty \Rightarrow a_n \to 0, \qquad \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\},\ n \to \infty \Rightarrow a_n \to 1,$$

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\},\ n \to \infty \Rightarrow a_n \to \infty, \qquad \{1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}\},\ \text{oscila entre 1 y -1}$$

Definición formal de divergencia al infinito: La sucesión $\{a_n\}$ diverge a infinito si:

$$\forall M, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N \Rightarrow a_n > M$$

Si se cumple esta condición, se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to \infty$$

De modo análogo si

$$\forall m, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N \Rightarrow a_n < m$$

entonces se dice que $\{a_n\}$ diverge a menos infinito y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{o } a_n \to -\infty$$

T$\underline{\text{ma}}$ 1: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, y sean $A, B \in \mathbb{R}$. Las siguientes reglas se cumplen si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ y $k \in \mathbb{R}$:

1. *Regla de la suma y diferencia*: $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

2. *Regla del múltiplo cte.*: $\lim_{n\to\infty} k \cdot b_n = k \cdot B$

3. *Regla del producto*: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a_n \cdot B$

4. *Regla del cociente*: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \qquad B \neq 0$

T$\underline{\text{ma}}$ del sándwich para sucesiones: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple $\forall n > N$, siendo $N \in \mathbb{N}$ un índice arbitrario, y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces, también

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

T$\underline{\text{ma}}$ de la función continua para sucesiones: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $a_n \to L$ y si f es una función continua en L y está definida $\forall a_n$, entonces

$$f(a_n) \to f(L)$$

T$\underline{\text{ma}}$: Suponer que $f(x)$ es una función definida $\forall x \geq n_0$ y que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq n_0$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

T$\underline{\text{ma}}$: Las seis sucesiones siguientes convergen a los límites que se listan:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ **2.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ **3.** $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$ **5.** $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\forall x)$ **6.** $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x)$

Definición recursiva de series: En ocasiones las sucesiones se definen de modo recursivo, lo cual da

1. El valor (o valores) del término (o de los términos) inicial(es)
2. Una regla denominada fórmula recursiva, para calcular cualquier término posterior a partir de los términos que la anteceden.

Algunos ejemplos de esto son:

- $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 1,\ n > 1$, que define la sucesión $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$
- $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+a} = a_n + a_{n-1},\ n > 2$ define la sucesión de Fibonacci.

Sucesión acotada:

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada superiormente** si $\exists M \in \mathbb{R}/a_n \leq M \forall n$. M es una **cota superior** para $\{a_n\}$. Se define el supremo y se denota $\sup\{a_n\}$ a la mínima cota superior para $\{a_n\}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ está a**acotada inferiormente** si $\exists m \in \mathbb{R}/a_n \geq m \forall n$. m es una **cota inferior** para $\{a_n\}$. Se define el ínfimo y se denota $\inf\{a_n\}$ a la máxima cota inferior para $\{a_n\}$.

$\{a_n\}$ está **acotada** si está acotada superior e inferiormente.

Definiciones: Una sucesión $\{a_n\}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ $(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots)$. La sucesión es **no creciente** si $a_n \geq a_{n+a}$ $\forall n$. La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si es no decreciente o no creciente.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de la sucesión monótona: Si una sucesión $\{a_n\}$ está acotada y es monótona, entonces, la sucesión converge

4.3. Series

Series infinitas y sumas parciales: Dada una sucesión $\{a_n\}$, una expresión de la forma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es una serie infinita. El número a_n es el n-ésimo término de la serie. La sucesión $\{s_n\}$, definida como

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2 \qquad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \sum_{k=1}^{n} a_k$$

es la sucesión de sumas parciales de la serie, donde el número s_n es la n-ésima suma parcial. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, se dice que la serie converge y que su suma es L. En este caso también se escribe:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Si la sucesión de sumas parciales de la serie no converge, se dice que la serie diverge.
A partir de ahora, ya que las series que se verán serán infinitas, cuando se diga simplemente **serie** se referirá a una serie infinita a menos de que se indique lo contrario.

Series geométricas: Una sucesión geométrica es aquella cuyo término $a_n = ra_{n-1}$, donde r recibe el nombre de **razón**, ya que, para hallar el siguiente término de la sucesión, hemos de multiplicar el previo por dicha razón.

Una serie geométrica tendría la siguiente forma:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Resuélvase el caso general de una serie geométrica, restándole a la serie original, la misma multiplicada por la razón:

$$\begin{array}{rlcll} & s_n & = & a+ & ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ - \ (& rs_n & = & & ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n) \\ \hline \\ & s_n - rs_n & = & a - ar^n & \end{array}$$

Por lo que, reordenando:

$$s_n(1-r) = a(1-r^n) \Rightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1)$$

Si $|r| < 1$, entonces $r^n \to 0$, por lo que $S_n \to \dfrac{a}{1-r}$, mientras que si $|r| > 1$, $|r^n| \to \infty$, por lo que S_n diverge.

Series telescópicas: Sea $\{a_n\}$ una sucesión, entonces

$$\sum_{n=1}^{N} a_n - a_{n+1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{N-1} - a_N) = a_1 - a_N$$

Entonces, siempre y cuando $a_N \to 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1$$

T$\underline{\text{ma}}$: Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$

Criterio del n-ésimo término para la divergencia: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n \ \vee \ \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

T$\underline{\text{ma}}$: En primer lugar, si no se escribe un subíndice ni un superíndice en la sumatoria, se sobreentenderá que el término en que comienza es $n = 1$ y en el que finaliza es $n = \infty$. Sean $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ series convergentes, entonces:

1. Regla de la suma y diferencia: $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = A \pm B$
2. Regla del múltiplo constante: $\sum ka_n = k \sum a_n = kA \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Cabe tener en cuenta también lo siguiente:

1 Todo múltiplo cte. distinto de 0 de una serie, diverge.

2 Si bien $\sum a_n$ o bien $\sum b_n$ (sólo 1 de las 2) diverge, $\sum (a_n \pm b_n)$ diverge.

Corolario del T$\underline{\text{ma}}$ de la sucesión monótona: Una serie $\sum a_n$ de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas superiormente.

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de la integral: Se $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos ($a_n > 0, \forall n$). Suponer que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua de x $\forall x \geq N, N \in \mathbb{N}$. Entonces, tanto $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ como la integral $\int_N^\infty f(x)dx$ convergen, o bien, ambas divergen.

Ejemplo: Demostrar que la p-serie ($p \in \mathbb{R}$) converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$
Si $p > 1$, entonces $f(x) = {}^1\!/x^p$ es una fción. positiva decreciente de x, ya que:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}-1}\right) = \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$$

$b^{p-1} \to \infty$ cuando$b \to \infty$ pues $p - 1 > 0$

Si $p \leq 0$ la serie diverge por el criterio del n-ésimo término.

Si $0 < p < 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p} - 1) = \infty$

En el caso en que $p = 1$ se tiene la serie armónica que ya se ha demostrado que diverge.

Cotas para el residuo en el criterio de la integral: Supóngase que $\{a_k\}$ es una sucesión de términos positivos con $a_k = f(k)$, donde f es una función positiva, decreciente y continua de $x, \forall x \geq n$ y que $\sum a_n$ converge a S. Entonces, el residuo $R_n = S - s_n$ satisface las desigualdades:

$$\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)dx$$

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de comparación: Sean $\sum a_n, \sum c_n$ y $\sum d_n$ series con términos no negativos. Suponer que para algún entero N

$$d_n \leq a_n \leq c_n \qquad \forall n > N$$

a) $\sum c_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge. **b)** $\sum d_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de comparación del límite: Suponer que $a_n > 0$ y $b_n > 0, \forall n \geq N \in \mathbb{N}$

1) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces, tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ convergen, o bien ambas divergen

2) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge

3) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Convergencia absoluta: Una serie $\sum a_n$ converge absolutamente si la correspondiente serie de valores absolutos, $\sum |a_n|$, converge.

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de l convergencia absoluta: Si $\sum |a_n|$ converge, entonces, $\sum a_n$, converge.

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de la razón: Sea $\sum a_n$ una serie y suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

Entonces la serie converge absolutamente si $\rho < 1$, diverge si $\rho > 1$ o ρ es infinito y no es concluyente si $\rho = 1$

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de la raíz: Sea $\sum a_n$ una serie y suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

Entonces la serie converge absolutamente si $\rho < 1$, diverge si $\rho > 1$ o es infinito y el criterio no es concluyente si $\rho = 1$

T$^{\underline{\text{ma}}}$; Criterio de la serie alternante: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

converge si se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $u_n > 0, \forall n$

2) $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$

3) $u_n \to 0$

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de la estimación para series alternas: Si la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ satisface las condiciones del anterior T$^{\underline{\text{ma}}}$, entonces para $n \geq N$

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n$$

se aproxima a la suma L de la serie con un error cuyo valor absoluto es menor que u_{n+1}, el valor absoluto del primer término que no se utiliza. Además, la suma L se encuentra entre cualesquiera dos sumas parciales, s_n y s_{n+1}, mientras que el residuo, $L - s_n$, tiene el mismo signo que el primer término que no se utiliza.

Convergencia condicional: Una serie convergente que no es absolutamente convergente es condicionalmente convergente.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de reordenamiento para series absolutamente convergentes: Si $\sum a_n$ converge absolutamente a L y sea $\{b_n\}$ un reordenamiento arbitrario de la sucesión $\{a_n\}$, entonces $\sum b_n$ converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L$$

Resumen

1. **Criterio del n-ésimo término**: Si $a_n \not\to 0$, entonces la serie diverge.
2. **Serie geométrica**: La serie $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$: de otra forma diverge.
3. **p serie**: $\sum {}^1/_{n^p}$ converge si $p > 1$, de otro modo, diverge.
4. **Series con términos no negativos**: Probar con el criterio de la integral, comparar con una serie conocida mediante el criterio de comparación o el criterio de comparación del límite. Probar con el criterio de la razón o el criterio de la raíz.
5. **Series con algunos términos negativos**: Si la serie $\sum a_n$ converge de acuerdo a algún criterio, entonces la serie con algunos términos negativos también lo hace. Convergencia absoluta implica convergencia condicional.
6. **Series alternantes**: $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.

4.4. Series de potencias

Serie de potencias: Una serie de potencias alrededor o en torno a $x = 0$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Una serie de potencias en torno a $x = a$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

en el que el centro, a, y los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son ctes.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de convergencia para series de potencias: Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = c \neq 0$, entonces, tiene convergencia absoluta $\forall x / |x| < |c|$. Si la serie diverge para $x = d$, entonces diverge $\forall x / |x| > |d|$.

Corolario: La convergencia de la serie $\sum c_n(x-a)^n$ se describe por medio de una de las siguientes posibilidades:

1. $\exists R > 0/$ la serie diverge par x, con $|x-a| > R$, pero converge absolutamente para x con $|x-a| < R$. La serie puede converger o no en cualquiera de los extremos $x = a - R$ y $x = a + R$.
2. La serie converge absolutamente $\forall x$ $(R = \infty)$
3. La serie converge a $x = a$ y diverge en cualquier otro lugar $(R = 0)$

Cómo demostrar si una serie de potencias converge:

1. Utilizar el criterio de la razón (o de la raíz) para determinar el intervalo donde la serie converge absolutamente. Comúnmente s un intervalo abierto.

$$|x-a| < R \qquad \vee\, a - R < x < a + R$$

2. Si el intervalo de convergencia absoluta es finito, probar la convergencia o divergencia en cada punto extremo. Utilizar un criterio de comparación, el criterio de la integral o el de la serie alternante.
3. Si el intervalo de convergencia absoluta es $a - R < x < a + R$, la serie diverge para $|x - a| > R$; ni siquiera tiene convergencia condicional; ya que el n-ésimo término no se aproxima a 0 para esos valores de x.

$\mathbf{T^{\underline{ma}}}$: Si $\sum a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < R$, entonces, $\sum a_n(f(x))^n$ converge absolutamente para cualquier función continua F en $|f(x)| < R$.

$\mathbf{T^{\underline{ma}}}$ **de la diferenciación término a término**: Si $\sum c_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces, define una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad \text{en el intervalo} \qquad a - R < x < a + R$$

Esta función f tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo, por lo que es posible obtener las derivadas si se diferencia la serie original término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \qquad \cdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)c_n(x-a)^{n-m}$$

Cada una de estas series derivadas converge a todos los puntos del intervalo $a - R < x < a + R$

$\mathbf{T^{\underline{ma}}}$ **de integración término a término**: Suponer que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

converge para $a - R < x < a + R$ ($R > 0$). De este modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converge para $a - R < x < a + R$ y

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

para $a - R < x < a + R$

Series de Taylor:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n}$$

Evaluando la función y sus derivadas: $f(a)=a_0, f'(a)=a_1, f''(a)=2!a_2, f'''(a)=3!a_3,\ldots,f^{(n)}(a)=n!a_n$

Por lo que, despejando, puede concluirse que $a_n=\dfrac{f^{(n)(a)}}{n!}$ y por lo tanto se tiene que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es la serie de Taylor.

Series de Taylor relevantes:

1) $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad |x|<1$

2) $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\qquad |x|<1$

3) $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad |x|<\infty$

4) $\operatorname{sen}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad |x|<\infty$

5) $\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\qquad |x|<\infty$

6) $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\qquad -1<|x|\le 1$

7) $\tan^{-1}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\qquad |x|\le 1$

Residuos de series de Taylor relevantes:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\Longrightarrow R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Se tienen dos casos:

1) $|R_n(x)|\le\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ cuando $x\le 0,\quad e^c<1$

2) $|R_n(x)|<e^x\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ cuando $x>0,\quad e^c<e^x$

También se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=0,\quad\forall x$

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2k+1}(x)\Longrightarrow|R_{2k+1}(x)|\le 1\cdot\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k}(x)\Longrightarrow|R_{2k}(x)|\le 1\cdot\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Identidad de Euler: Partiendo de que $i=\sqrt{-1}, i^2=-1, i^3=i^2i=-i, i^4=i^2i^2=1, i^5=i^4i=i, \ldots$ y haciendo la sustitución en la serie de Taylor de e^x por $=i\theta$

$$e^{i\theta}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{i^2\theta^2}{2!}+\frac{i^3\theta^3}{3!}+\frac{i^4\theta^4}{4!}+\cdots=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots\right)=\cos\theta+i\sin\theta$$

Por lo que, para $\theta=\pi$, se tiene que $e^{i\pi}=-1$, sumando 1 a ambos aldos, se obtiene la identidad de Euler

$$\boxed{\boxed{e^{i\pi}+1=0}}$$

Además se obtiene que $\forall\theta\in\mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

5. Introducción al cálculo en varias variables

5.1. Elementos de topología en $\mathbb{R}^n$

Espacio real n-dimensional:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2) \qquad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n veces}} \Longrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, entonces la suma y el producto escalar se definen:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad \alpha \boldsymbol{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

Norma: La norma de un elemento n-dimensional, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se define

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Distancia: Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, la distancia entre ellos se define:

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Bola: Sea $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0 \in \mathbb{R}$

$$B(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) < r\} \qquad \bar{B}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \leq r\}$$

Tipos de puntos y conjuntos

Un punto $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ es un **punto interior** de A si $\exists r > 0 / B(\boldsymbol{x}_0, r) \in A$. El conjunto de todos los puntos interiores forman el **interior de $\boldsymbol{A}$**.

Se dirá que $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de A si toda bola $B(\boldsymbol{x}_0, r)$ contiene tanto puntos interiores de A como puntos fuera de A. El conjunto de todos los puntos frontera se denomina **frontera** de A y se denota $\boldsymbol{\partial A}$.

Un conjunto A es **abierto** si sólo contiene puntos interiores. Un conjunto es **cerrado** si contiene su frontera. Un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado.

Conjunto acotado: Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si $\exists M \in \mathbb{R}^+ / ||\boldsymbol{x}|| < M, \forall \boldsymbol{x} \in D$. Es decir, D es acotado si existe una bola de radio finito que lo contiene. Un conjunto D es **compacto** si es cerrado y acotado.

5.2. Funciones de varias variables

Función de valores reales: Suponer que D es un conjunto de n-adas de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. una **función de valores reales** f en D es una regla que asigna un único número real

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a cada elemento en D. El conjunto D es el **dominio** de la función. El conjunto de valores w asignados por f es el **rango** de la función. El símbolo w es la **variable dependiente** de f, y se dice que f es una función de n **variables independientes** x_1 a x_n. También llamamos a las x_j **variables de entrada** de la función y a w la variable de **salida de la función**.

Función: Una **función** de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ en un conjunto $I \subset \mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ un único elemento $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in I$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{variables independientes}}) & \mapsto & \mathbf{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_m}_{\text{variables dependientes}}) \in I \end{array}$$

donde $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ y las $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llaman **funciones componentes**.

Si $m = 1$ se habla de una función (o campo) **escalar**, mientras que si $m > 1$ se habla de un función (o campo) **vectorial**.

Gráficas en $\mathbb{R}^2$

El conjunto de puntos en el plano donde la función $f(x, y)$ tiene un valor constante $f(x, y) = c$ se llama **curva de nivel** de f. El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$ en el espacio, para $(x, y) \in D$ de f, se llama **gráfica** de f. La gráfica de f también se llama **superficie $z = f(x, y)$**

Gráficas en $\mathbb{R}^3$

El conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio, donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$, es una **superficie de nivel** de f.

Gráficas en $\mathbb{R}^n$

Sea f una función real de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define la **gráfica** de f como el conjunto de todos los puntos

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(a_2, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

con $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Sea f una función real de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, el conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)/f(x) = c$ se denomina **conjunto de nivel** de valor c.

5.3. Límites y diferenciación

Límite en $\mathbb{R}^n$

Sea f una función real de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ o $\boldsymbol{x}_0 \in \partial D_f$, se dice que el límite de $f(\boldsymbol{x})$ cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ es $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ y se escribe

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

Si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 / 0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}|| < \epsilon$$

Límite de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Se dice que una función $f(x, y)$ tiende al límite L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) y se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x, y) \in D_f, 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Propiedades de límites de funciones de dos variables: Las siguientes reglas se cumplen si $L, M, k \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$$

1. *Reglas de la suma y resta* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = L \pm M$
2. *Regla del múltiplo cte.* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x, y) = kL \quad \forall k$
3. *Regla del producto* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = L \cdot M$
4. *Regla del cociente* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
5. *Regla de la potencia* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y)]^n = L^n, \quad n \in \mathbb{N}$
6. *Regla de la raíz* : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \wedge$ si n es par,$L > 0$

Como consecuencia de este T$^{\underline{\text{ma}}}$, para polinomios y funciones racionales el límite se calcula evaluando la función en (x_0, y_0).

Este T$^{\underline{\text{ma}}}$ puede generalizarse para funciones escalares. Sin embargo, para funciones vectoriales sólo se cumplen las tres primeras.

T$^{\underline{\text{ma}}}$ de unicidad del límite: El límite, si existe, es único:

$$\text{Si} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \ \wedge \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (g(x, y) = M \Longrightarrow L = M$$

Como consecuencia el límite, si existe, debe ser independiente del modo en que (x, y) se acerca (x_0, y_0).

Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un límite:
Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ es distinto a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de f, entonces

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

Continuidad: Una función $f(x,y)$ es **continua en** $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ si

1. f está definida en (x_0,y_0) **2.** $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ **3.** $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Una función es **continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

T$^{\underline{\text{ma}}}$: Sean f y g funciones definidas en $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuas en $\boldsymbol{x_0} = (x_0,y_0) \in D$. Son también continuas en $\boldsymbol{x_0}$ las combinaciones:

1. $f \pm g$ **2.** $kf,\ \forall k \in \mathbb{R}$ **3.** $f \cdot g$ **4.** $f/g,\ g(x_0,y_0) \neq 0$

Como consecuencia de esto las funciones polinómicas y racionales son continuas en todos los puntos de su dominio ($\forall (x_0,y_0) \in D$). En las racionales siempre que se cumpla la condición 4.

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Continuidad de composiciones: Si f es continua en (x_0,y_0) y g es una función de una variable continua en $f(x_0,y_0)$, entonces la composición $h = \mathrm{g} \circ f$ definida por $h(x,y) = \mathrm{g}[f(x,y)]$ es continua en (x_0,y_0).

Esto es generalizable a dos funciones vectoriales $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathrm{g} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. La función composición $h = \mathrm{g} \circ f$ actúa de modo que $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

T$^{\underline{\text{ma}}}$, límites de funciones compuestas: Sea $f(x,y)$ continua en (x_0,y_0), $\mathrm{g}(x)$ continua en $f(x_0,y_0)$ y $h(x,y) = \mathrm{g}[f(x,y)]$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{g}[f(x,y)] = \mathrm{g}\left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]$$

5.4. Derivadas

Derivada parcial: Se define la derivada parcial (o parcial) de f con respecto a x en el punto (x_0,y_0) como la derivada ordinaria de $f(x,y_0)$ con respecto a x en el punto $x = x_0$. Para distinguir las derivadas parciales de las ordinarias se usa el símbolo ∂ en lugar de d. En la definición $h \in \mathbb{R} - \{0\}$. Matemáticamente, la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a x en (x_0,y_0) es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

si el límite existe.
Se utilizan las siguientes notaciones para denotar la parcial de f con respecto a x:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \equiv f_x(x_0,y_0) \equiv D_1 f(x_0,y_0) \equiv D_x f(x_0,y_0)$$

o bien sustituyendo f por z, según se nombre la función.
Se tiene entonces que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \in \mathbb{R},$$

es decir, que la parcial evaluada en un punto es un número real.
Si ahora, en lugar de un punto concreto (x_0,y_0) se considera un punto arbitrario cualquiera (x,y), se obtienen funciones de dos variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y).$$

Derivada parcial de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivada parcial de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto de la variable x_j en el punto $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0j} + h, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0j}, \dots, x_{0n})}{h}.$$

Se tiene entonces que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{(x_{01},\dots,x_{0n})} \in \mathbb{R},$$

de modo que la parcial de f con respecto a x_j en el punto $(x_{01}, \dots, x_{0n})$ pertenece a los reales.
Hay por lo tanto n derivadas parciales y, si se evalúan en un punto arbitrario $(x_1, \dots, x_n)$, son funciones escalares de n variables.

Derivada parcial de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de modo que $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, entonces, la parcial de la componente m-ésima respecto de la variable n-ésima x_n se denota como

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_n},$$

de modo que hay $m \times n$ derivadas parciales. Se puede construir entonces la **matriz jacobiana**, que es la matriz que tiene por componentes las parciales del componente m (fila) con respecto a la variable n (columna):

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

que es una matriz $m \times n$ (con m filas y n columnas).
Si las derivadas se evalúan todas en $\mathbf{x}_0$ se tiene una matriz numérica, mientras que si se evalúa en x se tiene una matriz de funciones.

Gradiente: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en este caso la matriz jacobiana de derivadas $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$, o un vector fila:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Se define entonces el **vector gradiente** en $\mathbf{x}$ como el vector cuyas componentes son las derivadas parciales:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i.$$

De este modo, si se tiene una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se tiene, respectivamente

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}, \qquad \vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Propiedadesdel gradiente:

a) **Regla de la suma**: $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla} f \pm \vec{\nabla} g$.

b) **Múltiplo constante**: $\vec{\nabla}(kf) = k\vec{\nabla} f$.

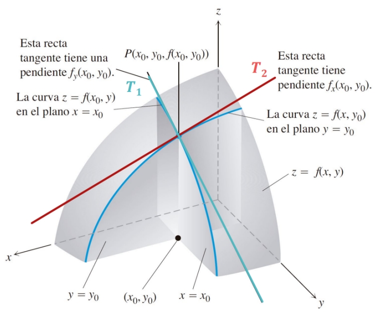
c) **Regla del producto**: $\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}(f)g + f\vec{\nabla} g$.

d) **Regla del cociente**: $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g}{g^2}$

Sea S la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con derivadas parciales continuas y $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. El **plano tangente** a S en P es el plano que contiene las dos líneas tangentes resultantes de la ecuación punto pendiente de las parciales respecto a x e y en P, T_1 y T_2, de modo que:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

donde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Este es el plano que mejor aproxima S en P.



Aproximación lineal: La **linealización** de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) es la función

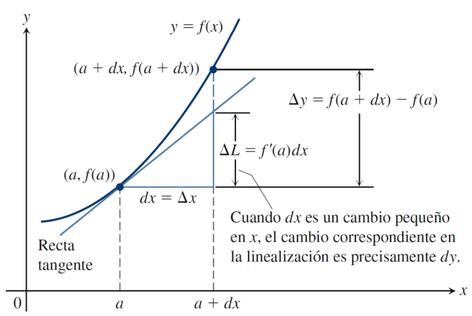
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

de modo que la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ es la **aproximación lineal estándar** de f en (x_0, y_0). Esto quiere decir que, en puntos próximos a (x_0, y_0), puede aproximarse $f(x, y)$ por el **plano tangente** a la superficie en ese punto.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces la mejor aproximación lineal de $f(\vec{x})$ en un punto $\vec{x}_0$ es

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) = Df(\vec{x} - \vec{x}_0)(x - \vec{x}_0).$$

donde el término $\mathbf{D}f(\vec{x}_0)$ es la matriz jacobiana de dimensión $m \times n$ y $(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es una matriz $n \times 1$, es decir, un vector columna con n entradas. Cabe destacar que $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $L(\vec{x}), f(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^m$



Incremento de funciones: el incremento dy de una función de una variable es

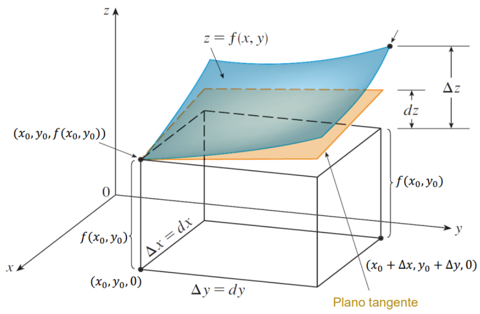
$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Es decir, que un cambio en $y = f(x)$, Δy, cerca de $x = a$, en caso de que $f(x)$ sea diferenciable en $x = a$, con x variando de a a $a + \Delta x$, se obtiene mediante la ecuación

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

donde el primer término, $f'(a)\Delta x$, es la parte lineal y $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

Mientras tanto, para **funciones de dos variables** se tiene el siguiente teorema: supóngase que las primeras parciales de $f(x,y)$ están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0), que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces el cambio



$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

en el valor de f que resulta del movimiento de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface la ecuación de la forma

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \vec{\nabla} f \cdot \Delta \vec{x} + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

de modo que el término $\vec{\nabla} f \cdot \Delta \vec{x}$ es la parte lineal y de modo que $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$, por lo que

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Incremento de funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Se tiene entonces que, para una función escalar genérica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el incremento es

$$\mathrm{d}f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

Incremento de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: para funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se tiene que el incremento tiene la siguiente forma vectorial:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{DF} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}\vec{F} = \mathbf{D}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

De modo más explícito

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1 \cdot \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m \cdot \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}$$

Diferenciabilidad de una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Una función de $z = f(x,y)$ es **diferenciable en** (x_0, y_0) si f_x y f_y existen y si Δz satisface la ecuación de la forma

$$\Delta = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

es decir, que el plano tangente está bien definido, en la cual cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Se dice que f es **diferenciable** si es derivable en todos los puntos de su dominio y se dice que su gráfica es una superficie suave.

Corolario del teorema de incremento de funciones de dos variables: Si las derivadas parciales f_x y f_y de una función $f(x,y)$ son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en cada punto de R. Esto es una condición suficiente (pero no necesaria) de diferenciabilidad.

T$^{\underline{\text{ma}}}$, diferenciabilidad implica continuidad: Si una función $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0), entonces f es continua en (x_0,y_0).

Diferenciabilidad de una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Se dice que f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in A$ si existen todas las derivadas parciales de f en $\vec{x}_0$ y, además:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}(\vec{x})||}{||\vec{x}-\vec{x}_0||} = 0, \quad \vec{L}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \overrightarrow{Df}(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0).$$

Tómese, por ejemplo, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = m = 1)$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow\; f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xRightarrow{x=x_0+h} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

que es la definición ordinaria de derivada. Por tanto, una función escalar de una variable es diferenciable en un punto si existe la derivada en ese punto y está bien definida la recta tangente en ese punto.

Diferenciabilidad y continuidad

Una función es de clase C^1 en un abierto D si todas sus derivadas parciales de primer orden existen y son continuas en D. Matemáticamente

$$f = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_i),\; i \in \{1,\dots,n\},\; \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}\; \forall j,\; j \in \{1,\dots,n\} \;\Rightarrow\; f \subset C^1$$

Esta definición hace que toda función C^1 sea diferenciable.

Diferencial total de funciones escalares: téngase una función escalar de dos variables, $f(x,y)$, entonces su diferencial total $\mathrm{d}f$ es

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Análogamente, para funciones de tres variables $f(x,y,z)$, se tiene

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial d}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Generalizando esto a funciones $f(x_1,\dots,x_n)$ de n variables se tiene

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \tag{3}$$

que también puede escribirse utilizando el gradiente o vectores filas y columna como

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{4}$$

donde

$$\vec{\nabla} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\hat{e}_i, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \mathrm{d}x_i \hat{e}_i, \tag{5}$$

siendo $\hat{e}_i$ los vectores de la base canónica.