Universitat de Valéncia

Facultad de Física

MMI

Apuntes Métodos Matemáticos I

Alumno:
Navarro Bonanad, Rubén

Profesor:
Vicente Vacas, Manuel

Grupo B

Curso 2024 - 2025

Índice

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden

Introducción

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP \longrightarrow P(t) = P_0 e^{rt}$$

Reescríbase en términos de crecimientos finitos:

$$\Delta P = rP\Delta t$$

La única hipótesis usada para llegar a esta expresión parece ser que el incremento de la población es proporcional a la propia población -y parece lógico-

Si ahora se toma un Δt concreto puede *discretizarse* el problema resolviéndolo por iteración en un nº finito de pasos. Tras cada paso se tendrá:

$$P_{i+1} - P_i = rP_i\Delta t \quad \to \quad P_{i+1} = (1 + r\Delta t)P_i \Rightarrow P_k = (1 + r\Delta t)^k P_0$$

Por otro lado el nº de pasos que se tendrán que dar para llegar a un tiempo final t_f es:

$$N_p = \frac{t_f}{\Delta t} \quad \longrightarrow \quad P(t_f) = (1 + r\Delta t)^{({t_f}/{\Delta t})} P_0$$

Para que la aproximación numérica converja a la solución correcta hay que tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$

$$P(t_f) = \lim_{\Delta t \to 0} (1 + r\Delta t)^{({t_f}/{\Delta t})} P_0$$

Redefiniendo $\beta = r\Delta t$ se tiene que

$$P(t_f) = \lim_{\beta = 0} (1 + \beta)^{({rt_f}/{\beta})} P_0$$

1.1. Notación y definiciones

- Ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n

  $$0 = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)$$

  ordinaria $\overset{\text{def}}{=}$ solución es la ecuación $y(x)$

  Ejemplos:

  $$* \; 0 = f\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) \qquad * \; y'' \sin y = \frac{x}{y} \qquad * \; ay''' + by'' + cy' + dy = e^x$$

- ED lineal: de primer “grado” en y y en todas sus derivadas

  Ejemplos:

  $$* \; y''' + xy'' - y = e^x \;\; \checkmark \qquad * \; y'' \sin y = \frac{x}{y} \;\; \times \qquad * \; y'' + yy' = x \;\; \times$$

- Ecs en derivadas parciales (EDPs)

  $$0 = f\left(x, y, z, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \partial_y u, \partial_z u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}, \ldots\right)$$

- Sistema de EDs

$$\left.\begin{matrix} 0 = f_1(x, y, g, y', g', \dots) \\ 0 = f_2(x, y, g, y', g', \dots) \end{matrix}\right\} \quad \text{la sol. es} \begin{cases} y(x) \\ g(x) \end{cases}$$

$*$ Forma implícita: $0 = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ Forma normal: $y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

1.2. EDO de primer orden

$$0 = f(x, y, y') \Longrightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Ejemplo:

$$y' - y = x \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y \rightsquigarrow \mathrm{d}y = (x + y)dx \rightsquigarrow -(x + y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

1.2.1. EDO separadas: $\mathbf{P(x)dx + Q(y)dy = 0}$

$$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \boxed{\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C}$$

Ejemplos:

- $y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \Rightarrow -\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{2y} = 0 \Rightarrow -\log x + \frac{1}{2}\log y = C \Rightarrow \frac{1}{2}\log y = C + \log x \Rightarrow$

$$\log y = 2C + \log x^2 \Rightarrow y = e^{2C}e^{\log x^2} = Kx^2$$

- $y' = 2Dx \Rightarrow \mathrm{d}y = 2Dx\,\mathrm{d}x \Rightarrow y = Dx^2 + C$

1.2.2. EDO separables

Son ecuaciones del tipo: $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \Leftarrow \text{Separada}$$

Ejemplo:

$$\tan x \tan y dx + \frac{1}{\cos^2 x}dy = 0 \Rightarrow \tan x dx + \frac{1}{\tan x \cos^2 y}dy = 0 \Rightarrow \tan x dx + \frac{1}{\sin y \cos y} = 0 \Rightarrow -\log\cos x + \log\tan y = C$$

$*$ **Función homogénea de grado n**:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-1}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = \sum_{i=0}^{n} a_nx^{n-i}y^i \Rightarrow$$

$$f(x, y) = y^n\left(a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \cdots\right) = x^n\left(a_0 + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\right)$$

1.2.3. EDO homogéneas

EDO homogénea: P y Q son fciones. homogéneas del mismo grado

$$Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{P}{Q}dx \Rightarrow y' = f(y/x) \rightsquigarrow u \equiv \frac{y}{x} \rightarrow y = ux$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u) \rightsquigarrow xdu = (f(u) - u)dx \Rightarrow \boxed{\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}}$$

Ejemplo: $(x^2 + y^2)dx + (xy - y^2)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y^2 - xy} = \frac{x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}\right)} = \frac{1 + u^2}{u^2 - u} \equiv f(u) \Rightarrow \frac{du}{\frac{1 + u^2}{u^2 - u}} = \frac{dx}{x}$$

1.2.4. Reducibles a homogéneas o separables

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

i) $c = c' = 0 \rightarrow$ hom. $\Rightarrow u \equiv \dfrac{y}{x} \Rightarrow$ Sep.

ii)

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{aligned} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \exists!\text{sol.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{aligned} a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c = 0 \\ a'\cdot\alpha + b'\cdot\beta + c' = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow y' = f\left(\frac{ax + by + c - 0}{a'x + b'y + c' - 0}\right) = f\left(\frac{a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c - c}{a'(x-\alpha) + b'(y-\beta) + c' - c'}\right) = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + bY'}\right); \left\{\begin{aligned} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{aligned}\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$

También puede verse que, al poner el cambio de variable en el denominador original

$$ax + by + c = aX + bY + \cancelto{0}{a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c} = aX + bY$$

y de manera análoga para el denominador, lo que resultaría en la misma ED resuelta

iii)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Y = a'x + b'y \Longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda \rightarrow a = \lambda a'; b = \lambda b'$$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) = f\left(\frac{\lambda(a'x + b'y + c)}{Y + c'}\right) = f\left(\frac{\lambda Y + c}{Y + c'}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{\lambda Y + c}{Y + c'}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Y}{f\left(\frac{\lambda Y + c}{Y + c'}\right)} = \mathrm{d}x$$

Ejemplo: $(x-y+1)\,\mathrm{d}x+(x+y-1)\,\mathrm{d}y=0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x-1}{y+x-1}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} y-x-1=0\\ y+x-1=0\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} X=x\\ Y=y-1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(Y+1)-X-1}{(Y+1)-X-1}=\frac{Y-X}{Y+X}=\frac{u-1}{u+1}=f(u)$$

$$u\equiv\frac{Y}{X}\Rightarrow Y=uX\Rightarrow\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+u\Rightarrow u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{u-1}{u+1}\Rightarrow\frac{u-1}{u+1}-u=\frac{u-1-u^1-u}{u+1}=\frac{-1-u^2}{u+1}=X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{1+u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=0\Rightarrow\log(x)+\arctan u+\frac{1}{2}\log\left(1+u^2\right)=C\Rightarrow\log(x)+\arctan\frac{y-1}{x}+\frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{y-1}{x}\right)^2\right)=C$$

1.2.5. Exactas

$$Pdx+Qdy=0\text{ es exacta si }\exists M\text{ tal que }\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial x}=P\\[2mm] \dfrac{\partial M}{\partial y}=Q\end{array}\right.\Longrightarrow\text{Sol: }M(x,y)=C$$

- $\underline{\mathrm{T}^{ma}}$: Ecuación exacta $\Longleftrightarrow P_y=Q_x$

Demostración: $(\Rightarrow)$ Es exacta $\rightarrow\left\{\begin{array}{l} P=\partial_x M\\ Q=\partial_y M\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\partial_y P=\partial_y\,\partial_x M=\partial_{yx}M\\ \partial_x Q=\partial_x\,\partial_y M=\partial_{xy}M\end{array}\right\}$ iguales

$(\Leftarrow)$ $P_y=Q_x$; $M_H=\displaystyle\int P(x,y)dx+g(y)$

$$Q=\partial_y M_H=g'(y)+\partial_y\int Pdx\longrightarrow g'(y)=Q(x,y)-\partial_y\int P(x,y)dx$$

$$\partial_x\left\{Q-\partial_y\int Pdx\right\}=Q_x-\partial_x\,\partial_y\int Pdx=Q_x-\partial_y\,\partial_x\int Pdx=Q_x+P_y=0$$

Ejemplo: $2xdx+dy=0\Rightarrow P_y=\partial_y(2x)=0, Q_x=\partial_x(1)=0\Rightarrow$ exacta

$$M_H=\int Pdx+g(y)=\int 2xdx+g(y)=x^2+g(y)\rightarrow\partial_x M_H=P=2x$$

$$Q=\partial_y M_H=g'(y)\longrightarrow 1=g'(y)\longrightarrow g(y)=y\Longrightarrow M=x^2+y\ \Rightarrow\ \boxed{x^2+y=C}$$

1.2.6. Factor integrante

$\mu(x,y)$ es un factor integrante cuando $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ es exacta

$$(\mu P)_y=(\mu Q)_x=\mu_y P+\mu P_y=\mu_x Q+\mu Q_x$$

- Suponer $\mu=\mu(x)$ no depende de $y\Longrightarrow\mu_y=0\Rightarrow\mu P_y=\mu_x Q+\mu Q_x\rightarrow\mu(P_y-Q_x)=\mu' Q$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{Q}}$$

Si la parte derecha de la igualdad depende únicamente de x, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\log\mu=\int\frac{P_y-Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\boxed{\mu=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}\mathrm{d}x}}$$

- Suponer $\mu = \mu(y)$ no depende de $x \Longrightarrow \mu_x = 0 \Rightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu Q_x \to \mu(Q_x - P_y) = \mu_y P = \mu' P$

$$\boxed{\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}}$$

Si la parte derecha de la igualdad depende únicamente de y, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mathrm{d}y \Rightarrow \log\mu = \int \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mathrm{d}y \Rightarrow \boxed{\mu = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}\mathrm{d}y}}$$

1.2.7. EDO 1^r orden LINEALES: $y' + A(x)y = B(x)$

$$y' + A(x)y = B(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + A(x)y - B(x) = 0 \to \boxed{(A(x)y - B(x))\ dx + \mathrm{d}y = 0}$$

Tiene un factor integrante que depende de x, $\mu(x)$?

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{A(x) - 0}{1} = A(x) \to \boxed{\mu = e^{\int A(x)\mathrm{d}x}}$$

$$\mu(x)(Ay - B)\,\mathrm{d}x + \mu(x)\,\mathrm{d}y = 0;\ \text{Exacta} \Rightarrow M = \int \mu(x)\,\mathrm{d}y + C(x)$$

$$\partial_x M = \int \mu'(x)\,\mathrm{d}y + C'(x) = \mu'(x)y + C'(x) = \mu(x)A(x)y - \mu(x)B \begin{cases} \mu' = \mu A \to \dfrac{\mu'}{\mu} = A \\ C = -\int \mu B\,\mathrm{d}x \to \boxed{C = -\displaystyle\int e^{\int A\mathrm{d}x} B\,\mathrm{d}x} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{\int Adx}}\left\{\left(\int e^{\int Adx} Bdx\right) + K\right\}}$$

1.3. Otros casos

∗ Bernouilli: $y' + P(x)y = Q(x)y^n; v = y^{1-n}$

$$v' = (1-n)y^{-n}y' \to y' = \frac{v'}{(1-n)}y^n \Rightarrow \frac{v'\cancel{y^n}}{(1-n)} + P(x)y^{1-n}\cancel{y^n} = Q(x)\cancel{y^n}$$

$$\frac{v'}{(1-n)} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \to \boxed{v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x) \quad \text{ED lineal}}$$

∗ Ricatti: $y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$ Si se conoce una solución $y_1(x) \Rightarrow y \equiv y_1 + \dfrac{1}{v(x)} \Rightarrow y' = y_1' - \dfrac{v'}{v^2}$:

$$\cancel{y_1'} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{Ay_1^2} + \frac{A}{v^2} + 2A\frac{y_1}{v} + \cancel{By_1} + \frac{B}{v} + \cancel{C} \xrightarrow[\text{solución}]{\text{por ser } y_1} -\frac{v'}{v^2} = \frac{A}{v^2} + 2A\frac{y_1}{v} + \frac{B}{v}$$

Ahora, multiplicando en el resultado obtenido todos los términos por $(-v^2)$

$$v' = -A(x) - (B(x) + 2A(x)y_1)v$$

$$\boxed{v' + (B(x) + 2A(x)y_1)v + A(x) = v' + H(x)v + G(x) = 0 \quad \text{ED lineal}}$$

Ejercicios:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}; y(4) = 2$ (2) $y' = -6xy; y(0) = 7$ (3) $y' - 3y = e^{2x}$

(4) $y'\{2xy\} = 4x^2 + 3y^2$ (5) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$

Ejemplo Bernouilli: $y'+Ay=By^n$:

$* \ y'+\frac{1}{x}y=2x^3y^4; v\equiv y^{1-4}=\frac{1}{y^3}\to v'=-3\frac{y'}{y^4}\to y'=\frac{v'y^4}{-3}$, quedando en la ED original al sustituir:

$$\frac{v'}{-3}y^4+\frac{1}{x}y=2x^3y^4\to\frac{v'}{-3}+\frac{1}{x}y^{-3}=2x^3\to\frac{v'}{-3}+\frac{1}{x}v=2x^3\Rightarrow v'-\frac{3}{x}v+6x^3=0$$

- VIA 1

$$\left(6x^3-\frac{3}{x}\right)dx+dv=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P=\left(6x^3-\frac{3}{x}v\right)\\ Q=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P_y=-\frac{3}{x}\\ Q_x=0\end{array}\right.\Rightarrow\text{No exacta}$$

$$\xrightarrow{F.I.?}P(x)=\frac{P_v-Q_x}{Q}=\frac{-3/x-0}{1}=-3/x\Rightarrow\mu(x)=e^{\int P\mathrm{d}x}=e^{\int -3/x dx}=e^{\log 1/x^3}=\frac{1}{x^3}$$

$$\rightsquigarrow\left(6-\frac{3}{x^4}v\right)dx+\frac{1}{x^3}dv=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}P=6-\frac{3}{x^4}v\\ Q=\frac{1}{x^3}\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}P_v=-3/x^4\\ Q_x=-3/x^4\end{array}\right.\quad\checkmark$$

$$F=\int Qdv+g(x)=\frac{v}{x^3}+g(x)\Longrightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=-v\frac{3}{x^4}+g'(x)=6-v\frac{3}{x^4}\to g'=6\to g=6x$$

$$\text{Sol: }\boxed{\frac{v}{x^3}+6x=C\xrightarrow{v=1/y^3}\frac{1}{x^3y^3}+6x=C}$$

- VIA 2

$$\left.\begin{array}{l}A=-3/x\\ B=-6x^3\end{array}\right\}\int Adx=\log\frac{1}{x^3};e^{\int Adx}=\frac{1}{x^3}\Rightarrow v=x^3\left\{C+\int\frac{1}{x^3}(-6x^3)dx\right\}=x^3\{C-6x\}$$

Ejemplo Ricatti: $y'=Ay^2+By+C;\ y=y_1+1/v$

$$\left\{\begin{array}{l}x^2y'-xy-y^2+x^2=0\to y'-\frac{1}{x}y-\frac{1}{x^2}y^2+1=0\\ y=x\end{array}\right.$$

$$y=x+\frac{1}{v}\to y'=x+\frac{1}{v}\Rightarrow x^2\left(1-\frac{v'}{x^2}\right)-x\left(x+\frac{1}{v}\right)-\left(x+\frac{1}{v}\right)^2+x^2=0\Rightarrow\cancel{x^2}-\cancel{x^2}\frac{v'}{v^2}-\cancel{x^2}-\frac{x}{v}-x^2-\frac{1}{v^2}-\frac{2x}{v}-\cancel{x^2}=0$$

$$\left(-x^2\frac{v'}{v^2}-\frac{3x}{v}-\frac{1}{v^2}=0\right)\cdot\left(-\frac{v^2}{x^2}\right)\Rightarrow\boxed{v'+\frac{3}{x}v+\frac{1}{x^2}=0\qquad\text{Lineal}}$$

$$v'+\frac{3}{x}v=-\frac{1}{x^2}\longrightarrow v=\frac{C}{x^3}-\frac{1}{2x};v=\frac{1}{y-x}\Rightarrow\boxed{y=x+\frac{1}{v}=x+\frac{1}{\frac{C}{x^3}-\frac{1}{2x}}}$$

1.4. Reducibles de orden $f(x,y,y',y'')$

I) $f(x,y',y'')=0\xrightarrow{v\equiv y'}\left\{\begin{array}{l}f(x,v,v')=0\\ y'=v\end{array}\right.$

Ejemplo:

$$y'''=y''\rightsquigarrow v\equiv y''\Rightarrow v'=v\to v=\alpha e^x\Rightarrow y''=v=\alpha e^x\ ;\ y''=\alpha e^x$$

II) $f(y,y',y'')=0\xrightarrow{v\equiv y'}y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f\left(y,v,v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)=0\\ v=y'\end{array}\right.$

2. EDOs de orden superior

2.1. Definiciones y resultados generales

ED lineal: $P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = Q(x) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} P_i(x)y^{(n-i)} = Q(x)$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \qquad \text{(forma normal)}$$

Operador diferencial: $L = \left(\frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\right)$

Por lo que la ED lineal puede reescribirse como:

$$L(y) = q(x)$$

L es un operador lineal pues

1) $L(\alpha y) = \alpha L(y)$ 2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

En conclusión: $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$*$ $\boxed{L(y) = 0}$ ($q(x) = 0$) se denomina ecuación reducida u homogénea.

$*$ $*$ **Principio de superposición**: Sean y_1 e y_2 sols. de $L(y) = 0$; $L(y_1) = L(y_2) = 0 \Rightarrow C_1y_1 + C_2y_2$ es sol.

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = 0, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Demostración: $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1\cancelto{0}{L(y_1)} + C_2\cancelto{0}{L(y_2)} = 0$

Wrouskiano: Sean $\{y_i\}_{i=1}^n$ funciones

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$*$ **Dependencia lineal**: Se dice que un conjunto de funciones $\{y_i\}_{i=1}^n$ son linealmente dependientes(LD) en $I = [a, b]$ si $\exists\{c_i\}_{i=1}^n \neq \{0\}_{i=1}^n$

$$\sum c_i y_i(x) = 0 \qquad \forall x \in I \tag{A}$$

Por consecuencia $\{y_i\}$ son linealmente independientes (LI) si $(A) \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i$

$**$ $\text{T}^{\underline{ma}}$: Si $\{y_i\}$ LD en $I \to W(x) = 0 \quad \forall I$

Dem: $\{y_i\}$ LI $\to \exists\{c_i\}$ no todos nulos / Eq. (A)

$$\left.\begin{array}{c} c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0 \\ c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots + c_ny_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \\ W(x) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |W| = 0$$

$$\boxed{\text{LD} \Rightarrow W = 0 \qquad W \neq 0 \Rightarrow \text{LI}}$$

$**$ **T$\frac{ma}{}$ de existencia y unicidad (TEU)**: Sean $p_0, p_1, \ldots, p_n$ y q_n continuas en I entonces la ec.

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x)$$

tiene solución única

$$\left.\begin{array}{c} y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{donde } c_i \text{ son ctes. arbitrarias} \\ \text{y } x_0 \text{ es un punto dentro de } I \end{array}$$

Ej: $y''' + x^2y'' - \sin xy' + y = \log(x)$. Sea $x_0 = 3$

$$\left.\begin{array}{c} y(3) = 24 \\ y'(3) = 1407 \\ y''(3) = 7 \end{array}\right\}$$

Otro ejemplo: $y' - y = 0 \to y = \alpha e^x$

$$y(3) = 24 \Longrightarrow \alpha e^3 = 24 \to \alpha = \frac{24}{e^3} \longrightarrow \boxed{y = \frac{24}{e^3}e^x}$$

$**$ **T$\frac{ma}{}$** : $\{y_i\}_{i=1}^n$ sol. de $L(y) = 0$ ec. homogénea de orden n.

Dem: Si se supone $W = 0 \Rightarrow \{y_i\}$ son LD. Sea $W(a) = 0$ en $a \in I$

$$\begin{pmatrix} \\ W(a) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \exists \text{sol. } \{\alpha_i\} \neq \{0\}, \forall i$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1y_1(a) + \alpha_2y_2(a) + \cdots + \alpha_ny_n(a) = 0 \\ \alpha_1y_1'(a) + \alpha_2y_2'(a) + \cdots + \alpha_ny_n'(a) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1y_1^{(n-1)}(a) + \alpha_2y_n^{(n-1)}(a) + \cdots + \alpha_ny_n^{(n-1)}(a) = 0 \end{array}\right\}$$

Se toma $f(x) \equiv \sum \alpha_iy_i(x)$ es sol $\to L(f) = 0$

$$\left.\begin{array}{c} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) = 0 \end{array}\right\} \text{Sólo hay una sol. que cumple eso (TEU)} :\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum \alpha_iy_i(x) = 0}$$

** T$\underline{^{ma}}$: Sea $\{y_i\}_{i=1}^n$ sol LI de $L(y)=0$ de grado $n \Longrightarrow$ Toda sol. de $L(y)=0$ es comb. lin. de $\{y_i\}$

Dem: Sea $Y(x)$ sol. Tomando $a \in I \to Y(a), Y'(a), \dots, Y^{(n-1)}(a)$

$$\begin{pmatrix} & W(a) & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(a) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(a)\end{pmatrix} \xrightarrow[W\neq 0]{LI} \vec{\alpha} = W(a)^{-1}\begin{pmatrix} Y(a) \\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(a)\end{pmatrix}$$

Escribiendo $G(x) = \sum \alpha_i y_i(x)$ es sol

$$\left.\begin{array}{l} G(a) = Y(a) \\ G'(a) = Y'(a) \\ \vdots \\ G^{(n-1)} = Y^{(n-1)}(a) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{TEU}} Y(x) = G(x) = \sum \alpha_i y_i(x)$$

Lema: Sean y_1, y_2 sols. de la ec. general $L(y) = g \to y_1 - y_2$ es sol. de la homogénea.

$$\text{Dem:} \quad \left.\begin{array}{l} L(y_1) = g \\ L(y_2) = g \end{array}\right\} \to L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = 0$$

Por lo que la sol. general: $\boxed{y = y_P + y_H}$

Ej: $y' - y = x$

$$y' - y = 0 \to y_H = \alpha e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y_P = \alpha x + \beta \\ y_P' = \alpha \end{array}\right\} \alpha - \alpha x - \beta = x \\ \alpha = \beta \\ -\alpha = 1 \end{array}\right\} y_P = -x - 1$$

Por lo que $y = y_P + y_H = -1 - x + \alpha e^x$

2.2. EDL de coeficientes constantes

2.2.1. $L(y) = 0$; búsqueda de la solución a la homogénea

$$L = a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}; \{a_i\} \text{ son ctes.}$$

$L(y) = 0$ es la homogénea. $derx \equiv D$; $L = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n; P(D)$; $L(y) = P(D)y = P(y)$

Propiedades de $P(D)$:

* Lineal; $P(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha P(D) y_1 + \beta P(D) y_2$
* $(P_1P_2)y = P_1(y) + P_2(y)$
* $(h(x)P)y = h(x)P(y)$
* $(P_1P_2)y = P_1(P_2(y))$
* $P_1(P_2P_3) = (P_1P_2)P_3$
* $P_1(P_2 + P_3) = P_1P_2 + P_1P_3$
* $P_1P_2 = P_2P_1$; conmutativa

La propiedad roja sólo se cumple cuando P_1P_2 son de coeficientes ctes.

(1) $D^n(e^{\lambda x}y(x)) = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y; (D-\lambda)^n(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x}D^n(y)$

Dem:

$$n = 1; D(e^{\lambda x}y) = \lambda e^{\lambda x}y + e^{\lambda x}y' = e^{\lambda x}(y+\lambda y') = e^{\lambda x}(D+\lambda)y$$

$$n = 2; D^2(e^{\lambda x}y) = D(D(e^{\lambda x}y)) = D(e^{\lambda x}(D+\lambda)y) = e^{\lambda x}(D+\lambda)[(D+\lambda)y] = e^{\lambda x}(D+\lambda)^2 y$$

---

(2) $P(D)(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x}P(D+\lambda)y$

(3) $P(D)(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D+\lambda)(1) \Longrightarrow P(D)(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(\lambda)$

$*$ **Polinomio característico de $\boldsymbol{P(D)}$**: $P(\lambda)$

$\Rightarrow$ Ejemplo: $y''' - 3y'' + 4y' - 5y = 0 \to (D^3 - 3D^3 + 4D - 5)y = 0 \rightsquigarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 5$

$*$ Puede escribirse $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_1)^{m_i}; \lambda_i \equiv$ raíces y $m_i \equiv$ multiplicidades

$\to$ $P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots$

$**$ Si λ_i es raíz de $P(\lambda) \Rightarrow e^{\lambda_i x}$ es sol. de $P(D)(y) = 0$

Dem: $P(D)e^{\lambda_i x} = e^{\lambda_i x}P(\lambda_i) = 0$

$**$ Si hay n raíces distintas $\{e^{\lambda_i x}\}$ se tienen ya todas las sols.

$**$ si $\exists m_i > 1$

$$(D-a)^k y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\lambda-a)^k = 0 \to \lambda = a \ k \text{ veces} \to e^{ax} \text{ es sol.}$$

Suponer que $y \equiv v(x)e^{ax} \to (D-a)^k(ve^{ax}) = e^{ax}D^k(v) = 0$

$$D^k(v) = 0 \longrightarrow v = Q_{k-1}(x); \text{ pol. de grado } k-1$$

$$y = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{k-1}x^{k-1})e^{ax}$$

Por lo que las func. sols.: $e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^{k-1}e^{ax}$; mult. $k \to k$ sols.

$*$ λ_i raíz de $P(\lambda)$ con $m_i \to y = Q_{m_i-1}(x)e^{\lambda_i}x$

$*$ λ_i es complejo $\longrightarrow y = Q_{m_i-1}(x)e^{\lambda_i}x$

$\to$ Detalles $\lambda_i + i\beta \rightsquigarrow e^{\lambda_i x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin\beta x)$

$\to$ Si $P(\lambda)$ es de coefs. reales $\to \lambda_i$ compleja aparece también λ_i^*

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i = \alpha + \beta i\\ \lambda_i^* = \alpha - \beta i\end{array}\right\}(\lambda-\lambda_i)^m(\lambda-\lambda_i^*)^m$$

$$Q_{m-1}(x)e^{\lambda_i x} + R_{m-1}e^{\lambda_i^*} = T_{m-1}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + S_{m-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

2.2.2. $L(y) = G(x)$; búsqueda de la solución particular

$*$ Método de inspección (o coeficientes indeterminados)

Éste método puede utilizarse cuando $G(x)$ consiste de términos del tipo $Q_m(x)e^{\lambda x}$ (o $Q_m(x)\sin\beta x, Q_m(x)\cos\beta x$) donde Q_m es un polinomio de grado m.

Si $G(x) = g_1(x) + g_2(x) \to$ por separado $\left\{\begin{array}{l} y_{p_1} \text{ para } g_1\\ y_{p_2} \text{ para } g_2\end{array}\right\} y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

$G(x)$	y_p
$Q_m(x)$	$R_m(x)e^{\alpha x}$ si α no es raíz de $P(\lambda)$ $\mapsto$ $x^s R_m(x)e^{\alpha x}$ si α es raíz de $P(\lambda)$ con multiplicidad s
$Q_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ o $Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$x^s\{R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + T_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

2.3. Variación de parámetros

Este método permite encontrar y_P de $L(y) = f(x)$ si se conocen las $\{y_i\}$ sols. de la homogénea ($L(y) = 0$). Es válida aunque los coefs. no sean ctes.

---

* Sea la ec. $L(y) = f(x)$ y sean $\{y_i\}$ una col. de n sol. LI de $L(y) = 0 \Rightarrow y_P = \sum c_i(x)y_i(x)$ es una sol. part. de $L(y) = f(x)$; donde
$$c_i(x) = \int \frac{W_i}{W}dx$$

W_i es el Wronskiano donde la columna i se sustituye por la columna $\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & f(x)\end{bmatrix}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad W_i = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & 0 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k)} & \cdots & 0 & \cdots & y_n^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \underbrace{f(x)}_{\text{col. } i} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Dem ($n = 2$): $L(y) = f(x)$; $\{y_1, y_2\}/L(y_1) = L(y_2) = 0$

$$y_P = c_1y_1 + c_2y_2; \qquad c_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int -\frac{y_2 f}{W}dx, \qquad c_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{y_1 f}{W}dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f \qquad W_2 \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} = y_1 f$$

$$y'' + ay' + by = f$$
$$y_P' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2' = c_1y_1' + c_1y_2' + \frac{-y_2 f}{W}y_1 + \frac{y_1 f}{W}y_2 = c_1y_1' + c_2y_2'$$
$$y_P'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2'$$

Sustituyendo en la ecuación y recordando que y_1 e y_2 son sol. de la homogénea ($L(y_1) = L(y_2) = 0$)

$$c_1\cancelto{0}{\{y_1'' + ay_1' + by_1\}} + c_2\cancelto{0}{\{y_2'' + ay_2' + by_2\}} + c_1'y_1' + c_2'y_2' \stackrel{?}{=} f$$

$$\Longrightarrow f \stackrel{?}{=} c_1'y_1' + c_2'y_2' = -\frac{y_2 f}{W}y_1' + \frac{y_1 f}{W}y_2' = f\frac{\cancelto{W}{(y_1y_2' - y_1'y_2)}}{W} = f$$

2.4. Ecuación de Euler (Cauchy-Euler, equidimensional)

$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}x^{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0; \quad a_i$ ctes.

$*$ Sol $n=2$: F prueba

$$x^2y'' + axy' + by = 0; y \equiv x^m \to \left\{ \begin{array}{l} y' = mx^{m-1} \\ y'' = m(m-1)x^{m-2} \end{array} \right. \Rightarrow m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = 0$$

$$x^m\{m^2 - m + am + b\} = 0 \Rightarrow m^2 + (a-1)m + b = 0$$

CASOS

- $*$ dos raíces distintas m_1 y $m_2 \to y = \alpha x^{m_1} + \beta x^{m_2}$
- $*$ dos raíces complejas $\to y = \alpha x^{m_1} + \beta x^{m_2}$

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = \gamma + i\eta \\ m_2 = \gamma - i\eta \end{array} \right\} x^{\gamma \pm i\eta} = x^\gamma x^{\pm i\eta} = x^\gamma (e^{\log x})^{\pm i\eta} = x^\gamma e^{\pm i\eta \log x} = x^\gamma \{\cos(\eta \log x) \pm i \sin(\eta \log x)\}$$

$$y = \alpha x^\gamma \{\cos(\eta \log x) + i\sin(\eta\log x)\} + \beta x^\gamma\{\cos(\eta\log x) - i\sin(\eta\log x)\}$$

- $*$ Si $m_1 = m_2 \to y = \alpha x^m + \beta x^m \log x \quad \star$

$\star$ Dem:

$$m = \frac{(1-a)}{2} \pm \frac{\overset{0 \text{ si una sol.}}{\cancel{\sqrt{\ }}}}{\cancel{2}} = \frac{1-a}{2};\ x^m = y_1 \text{ es sol}$$

$$y \overset{?}{\equiv} y_1 v \to \left\{ \begin{array}{l} y' = y_1'v + y_1 v' \\ y'' = y_1''v + 2y_1'v' + y_1 v'' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sust.}} \left\{ \begin{array}{l} v(x^2y_1'' + axy_1' + by_1) \\ +v'(x^2 2y_1' + axy_1) \\ +v''(x^2y_1) \end{array} \right\}$$

$$= v''x^{m+2} + v'(ax^m + 1 + 2mx^{m+1}) = 0 \Rightarrow xv'' + v'(2m+a) \xrightarrow[\text{valor de } m]{\text{recordando el}} v'' - \frac{v'}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{v''}{v'} = -\frac{1}{x}}$$

$$\log v' = \log\frac{1}{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{x} \Rightarrow v = \log x \Rightarrow \boxed{y = x^m \log x}$$

Met. 2: $t \equiv \log x \to x = e^t$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow x^2\left\{\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}\right\} + ax\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + by = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + [a-1]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + by = 0 \Rightarrow [D^2 + (a-1)D + b]y = 0 \to$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b}$$

Casos:

i)

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \to y = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} = \alpha x^{\lambda_1} + \beta x^{\lambda_2}$$

ii)

$$\lambda = \alpha \pm i\beta \to y = C_1 e^{\alpha + i\beta t} + C_2 e^{\alpha t - i\beta t}$$

$$y = C_1 x^\alpha(\cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x)) + C_2 x^\alpha(\cos(\beta\log x) - i\sin(\beta\log x))$$

$$y = C_1 x^\alpha(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + C_2 x^\alpha(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

iii) Sólo una raíz de mult. 2

$$y = e^{\lambda t}(\alpha + \beta t) = x^\lambda(\alpha + \beta\log x)$$

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

3.1. Resolución de sistemas por sustitución, eliminación, Métodos de operadores diferenciales

$$\sum_{j,k} a_{jk} y_j^{(k)}(x) = h_i(x) \qquad \text{para } i = 1, \dots, n \qquad \sum_j P_{ji}(D) y_j = h_i(x) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Se tratan los operadores $P(D)$ como "polinomios"ordinarios y aumentando el grado de las EDs se relaciona el sistema con una ED (de una sola función) de orden superior.

Ejemplos

$$\left.\begin{array}{l} 2g' - g + f' + 4f = 1 \\ g' - f' = x - 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} (2D-1)g + (D+4)f = 1 \\ (Dg - Df) = x - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} D \otimes (1) \\ (D+4) \otimes (2) \end{array} : \left\{\begin{array}{l} D(2D-1)g + D(D+4)f = D \cdot 1 = 0 \\ (D+4)Dg + (D+4)Df = (D+4)(x-1) = 1 + 4x - 4 = 4x - 3 \end{array}\right\} +$$

$$(2D^2 - D + D^2 + 4D)g + 0 = 4x - 3 \quad \to \quad \boxed{(3D^2 + 3D)g = 4x - 3}$$

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 + 3\lambda = 3\lambda(\lambda + 1) \ \to \ g_H = \alpha + \beta e^{-x} \quad [\lambda_1 = 0, m = 1; \quad \lambda_2 = 1, m = 1]$$

$$g_P = (ax + b)x = ax^2 + bx, \ g'_P = 2ax + b, \ g''_P = 2a \quad \Rightarrow \quad 3\{2a + 2ax + b\} = 4x - 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 6a = 4 \\ 6a + 3b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 2/3 \\ b = -7/3 \end{array}\right\} g = g_H + g_P = \alpha + \beta e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x \quad \to \quad \text{Sust. en } 2$$

$$f' = g' + 1 - x = -\beta e^{-x} + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} + 1 - x = -\beta e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f = \beta e^{-x} + \frac{x^2}{6} - \frac{4}{3}x + \gamma$$

Ahora sustituyendo en 1 los resultados de f y g se halla una relación entre α y γ, pues sólo pueden haber dos ctes. libres (pues hay 2 fciones. de grado 1).

$$\left.\begin{array}{l} g = 4\gamma - 7 + \beta e^{-x} + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x\right) \\ f = \beta e^{-x} + \frac{x^2}{6} - \frac{4}{3}x + \gamma \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (D+5)f + (D+4)g = 3x^2 \\ (D+2)f + (D+1)g = 3x \end{array}\right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \quad \to \quad \left.\begin{array}{l} (D+1) 1 \\ (D+4) 2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (D+1)(D+5)f + (D+1)(D+4)g = (D+1)3x^2 = 6x + 3x^2 \\ (D+4)(D+2)f + (D+4)(D+1)g = (D+4)3x = 3 + 12x \end{array}\right\} -$$

$$(D^2 + 6D + 5 - D^2 - 6D - 8)f = -3f = 3x^2 - 6x - 3 \quad \Rightarrow f = -x^2 + 2x + 1; g = 2x^2 - 3x - 1$$

3.2. Sistemas Lineales

* Todo sist. de ecs. lineales de cualquier grado puede escribirse → sistema de ecs. lineales de primer grado que se puede poner en forma normal.

$$\underline{\text{Sistema}} \xrightarrow{\text{man.}} \left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ y_2' & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ & \vdots & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{array}\right\} \vec{y}'(t) = [A]\vec{y}(t) + \vec{f}(t)$$

Ejemplos :

$$\left.\begin{array}{l} x'' + y' = t \\ x' + y' - x + y = t^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{z\equiv x'} \left\{\begin{array}{l} z' + y' = t \\ z + y' - x + y = t^2 \\ x' = z \end{array}\right\}$$

De la segunda ec. se despeja y' como $y' = x - y - z + t^2$ y se introduce en la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} z' + x - y - z + t^2 = t \to z' = -x + y + z + t - t^2 \\ y' = x - y - z + t^2 \\ x' = z \end{array}\right\}$$

Por lo que

$$\begin{array}{rccccc} x' = & & & z & \\ y' = & x & -y & -z & +t^2 \\ z' = & -x & -y & +z & +t - t^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ t - t^2 \end{pmatrix}$$

2 $x''' + ax'' + bx' + cx = g(t)$

$$y \equiv x' \ ; \ z \equiv y' \equiv x'' \left\{\begin{array}{l} z' + az + by + cx = g(t) \\ x' = y \\ y' = z \end{array}\right. \ \Bigg| \ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = z \\ z' = -cx - by - az + g(t) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \Rightarrow e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \cdots \overset{D}{\Longrightarrow} \frac{d(e^{At})}{dt} = 0 + A + A^2t + \frac{3t^2}{6}A^3 + \cdots$$

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A(I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots) = Ae^{At}$$

* TEU (T$^{\underline{ma}}$ de Existencia y unicidad): SEL con n ecs., y sec $t_0 \Rightarrow \exists! \vec{x}(t)$ sol. de

$$\vec{x}' = A\vec{x} + f(t)/\vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} ; \alpha_i \text{ ctes. arbitrarias}$$

3.3. Homogéneas $\vec{f}(t) = 0$

$$\boxed{\vec{x}' = A\vec{x}}$$

- n sol. son LI $\Leftrightarrow W \neq 0$

$$\{\vec{x}_i\}, i = 1, \ldots, n \qquad W = \begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\vec{x}_1) & (\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{vmatrix}$$

Ejemplo para $n = 2$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \; ; \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad W = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

T$\underline{^{ma}}$: $\{x_i\}$tal que$|W| \neq 0 \;\to\; \vec{x} = \sum \alpha_i \vec{x}_i$. $\{\vec{x}_i\}$ es el sistema conjunto fundamental de soluciones.

$$M \equiv \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \equiv \text{matriz ftal. del stma.}$$

La sol. gen. del stma. es

$$\vec{x} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{x} = M\vec{\alpha} \qquad \text{siendo } \vec{\alpha} \text{ cte.}$$

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\dot{x}} \ddot{x} = x \;\to\; (D^2 - 1)x(t) = 0; P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \;\to\; \lambda = \pm 1$$

$$\boxed{x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}} \qquad \boxed{\dot{x} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} = y}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \dot{\vec{x}} = A\vec{x}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2$$

Soluciones:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}; \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}; \; W = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \text{LI}; \quad M = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución general:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} = M\vec{c} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \text{¿autovalores? } |A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1$$

Sus autovectores son los vectores que cumplen $Av = \lambda v$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

T$\underline{^{ma}}$: Si una matriz $n \times n$ cte. $[A]$ tiene n valores propios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sus vectores asociados $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son LI y el conjunto

$$\{e^{\lambda_1} \vec{u}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2, \ldots, e^{\lambda_n t} \vec{u}_n\}$$

es un conjunto ftal. de sols., en $(-\infty, \infty)$ del SEDL homogéneo

$$\dot{\vec{x}}(t) = [A]\vec{x}(t)$$

De modo que su sol. gen. puede escribirse como:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_e^{\lambda_i t}\vec{u}_i, \quad \text{con } c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ ctes. arbitrarias}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i \text{ autovalor} \\ \vec{v}_i \text{ autovector}\end{array}\right\} \rightarrow A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \qquad \vec{x} = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i \text{ es sol. de } \dot{\vec{x}} = A\vec{x}?$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = \lambda_i e^{\lambda_i t}\vec{v}_i \\ A\vec{x} = Ae^{\lambda_i t}\vec{v}_i = e^{\lambda_i t}A\vec{v}_i = \lambda_i e^{\lambda_i t}\vec{v}_i\end{array}\right\} \checkmark$$

Recapitulación

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \rightsquigarrow A \text{ autovalores } \{\lambda_i\} \text{ y autovectores } \vec{u}_i \text{ de } A \rightarrow \vec{x}_i = \{e^{\lambda_i}\vec{u}_i\}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \; |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda - 27 = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

$*\ \lambda = -3 \rightarrow A\vec{u} = -3\vec{u} \rightarrow (A + 3I)\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a - 2b + 2c \\ -2a + 4b + 2c \\ 2a + 2c + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \left.\begin{array}{l} 4a - 2b + 2c = 0 \\ -2a + 4b + 2c = 0 \\ 2a + 2c + 4c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2 \times 1 & 8a - 4b + 4c = 0 \\ & -2a + 4b + 2c = 0 \\ & \overline{} \\ & 6a + 6c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -c, b = -c \Rightarrow u_{-3} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$*\ \lambda = 3 \rightarrow (A - 3I)\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - 2b + 2c \\ -2a - 2b + 2c \\ 2a + 2c - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; 2a + 2b - 2c = 0 \Rightarrow \boxed{a = c - b}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} c - b \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \alpha e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}_2 = \beta e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}_3 = \gamma e^{3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -e^{-3t} & e^{3t} & -e^{3t} \\ -e^{-3t} & 0 & e^{3t} \\ e^{-3t} & -e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}$$

2 $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \rightarrow \lambda = -1$$

$$(A + \lambda I)\vec{u} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a - b = 0 \rightarrow \boxed{2a = b} \rightarrow \vec{u} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \alpha e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si se resuelve por sustitución, se llega a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1 - 2t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución mediante el método matricial está incompleta

3.4. Definición y propiedades de exponenciales con matrices

La definición de la exponencial de una matriz es la siguiente:

$$e^{[A]} = [I] + [A] + \frac{[A]^2}{2!} + \cdots + \frac{[A]^n}{n!} + \cdots$$

Es fácil calcular la exponencial de una mat. diagonal, pues sus potencias son fáciles de obtener

$$[A] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [A]^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad [A]^3 = \begin{pmatrix} a_1^3 & 0 \\ 0 & a_2^3 \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente. Por tanto

$$e^{[A]} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{[A]^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{[A]^nt^n}{n!} + \cdots$$

Ahora se expondrán unas propiedades útiles de la exponencial de matrices:

1) $e^{[A]0} = e^0 = I$

2) $e^{[A](t+s)} = e^{[A]t}e^{[A]s}$

3) $\left(e^{[A]t}\right)^{-1} = e^{-[A]t}$

4) $e^{[A]+[B]t} = e^{[A]t}e^{[B]t} \iff [A][B] - [B][A] = 0$

5) $e^{\lambda[I]t} = e^{(\lambda t)[I]}$

6) $\frac{d}{dt}e^{[A]t} = [A]e^{[A]t}$

3.5. Aplicación del método matricial

T$\underline{^{ma}}$: Si $[A]$ es una matriz $n \times n$ cte., $\exp([A]t)$ es una matriz ftal. del sistema, y la sol. del SEDL homogéneo $\dot{\vec{x}}(t) = [A]\vec{x}(t)$ es

$$\vec{x}(t) = \exp([A]t)\vec{C}, \text{ con } \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{un vector cte. arbitrario.}$$

La demostración es inmediata derivando la solución y recordando las propiedades de la exponencial de una matriz.

T$\underline{^{ma}}$ de Componentes de una matriz: Sea $f([A])$ una función de la matriz $[A]$. Sea m el número de autovalores $\lambda_{i\,i=1,\dots,m}$ diferentes de $[A]$ con multiplicidad k_i. Entonces se verifica que

$$f(A) = \sum_{a=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)[Z_{ij}]$$

donde $[Z_{ij}]$ son las llamadas matrices constituyentes o componentes de $[A]$. Dichas matrices son LI y **sólo** dependen de $[A]$, **no** de la forma específica de la función f. $f^{(j)}(\lambda_i)$ es el valor de la función f (y de sus derivadas de orden j respecto de λ) para el valor propio λ_i.

Corolario: En las mismas condiciones del T$\underline{^{ma}}$ anterior, sea

$$f([A]) = \exp([A]t)$$

Entonces

$$\exp([A]t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i-1} \left(t^j e^{\lambda_i t}\right)[Z_{ij}]$$

Ejemplo Considérese el anterior ejemplo, $\dot{\vec{x}} = [A]\vec{x}(t)$ con

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

En este caso $[A]$ sólo tiene un valor propio ($\lambda = -1, k = 2$). Así cualquier función de de $[A]$ se podrá descomponer de la forma:

$$f([A]) = f(-1)[Z_1] + f'(-1)[Z_2]$$

Para determinar las matrices $[Z_1]$ y $[Z_2]$ pueden considerarse las siguientes fciones.

$$f_1([A]) = [I] \qquad f_2([A]) = [A] + [I]$$

correspondientes a las funciones

$$f_1(\lambda) = 1 \qquad f_2(\lambda) = \lambda + 1$$

de modo que

$$f([A]) = [I],\ f_1(\lambda = -1) = 1,\ f_1'(\lambda = -1) = 0 \longrightarrow [I] = [Z_1]$$
$$f([A]) = [A] + [I],\ f_2(\lambda = -1) = 0,\ f_2'(\lambda = -1) = 1 \longrightarrow [A] + [I] = [Z_2]$$

De este modo se obtienen las matrices $[Z_1]$ y $[Z_2]$

$$[Z_1] = [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ [Z_2] = [A] + [I] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Con ello, la matriz ftal. del stma. $\exp([A]t)$ será

$$\exp([A]t) = e^{-t}[z_1] + te^{-t}[Z_2] = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

y la solución general del SEDL homogéneo es

$$\vec{x}(t) = \exp([A]t)\vec{C} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Nota: Obsérvese que en el desarrollo de Taylor de la exp. de una matriz hay infinitos términos, mientras que al utilizar las mats. constituyentes no es así. Esto no debe resultar sorprendente pues utilizando un valor propio de la matriz $[A]$:

$$[A] = \lambda[I] + ([A] - \lambda[I])$$

de donde

$$e^{[A]t} = e^{[I]\lambda t + ([A]-\lambda[I])t} = e^{[I]\lambda t}e^{([A]-\lambda[I])t} = e^{\lambda t}[I]e^{([A]-\lambda[I]t)}$$

A su vez, desarrollando por Taylor la última exponencial

$$e^{[A]t} = e^{\lambda t}\left[[I] + ([A] - \lambda[I])t + ([A] - \lambda[I])^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + ([A] - \lambda[I])^n\frac{t^n}{n!} + \cdots\right]$$

Ahora bien, nótese que $[A - \lambda I] = [Z_2]$, y que $[Z_2]^2 = [0]$, y así sucesivamente todas las potencias superiores: $[Z_2]$ es **nilpotente (es decir, que al elevarla a n (orden) da [0]) de orden igual a la multiplicidad de la raíz**. Esto no es casualidad, sino consecuencia del T$^{\underline{ma}}$ de Hamilton-Cayley en Álgebra lineal: una mat. siempre cumple su polinomio característico. En este caso era $(\lambda - 1)^2 = 0 \to ([A] + [I])^2 = [0]$.

El resultado anterior es válido en general y explica por qué el desarrollo en matrices constituyentes está limitado.

Ejemplo : Hallar la solución del SEDL homogéneo

$$\dot{\vec{x}}(t) = [A]\vec{x}(t) \qquad [A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$$\Delta(\lambda) = [A] - \lambda[I] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1(k_1 = 2) \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Así,

$$f_1([A]) = [I] \to f_1(\lambda) = 1 \qquad f_2([A]) = [A] - [I] \to f_2(\lambda) = \lambda - 1$$
$$f_3([A]) = ([A] - [I])^2 \to f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

De este modo,

$$f_1([A]) = [I],\ f_1(1) = 1\ f_1'(1) = 0,\ f_1(2) = 2 \to [I] = [Z_1] + [Z_3]$$
$$f_2([A]) = [A] - [I],\ f_2(1) = 0,\ f_2'(1) = 1,\ f_2(2) = 1 \to [A] - [I] = [Z_2] + [Z_3]$$
$$f_3([A]) = ([A] - [I])^2,\ f_3(1) = 0,\ f_3'(1) = 0,\ f_3(2) = 1 \to ([A] - [I])^2 = [Z_3]$$

de modo que se obtiene

$$[Z_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ [Z_2] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ [Z_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, la mat. ftal. del SEDL propuesto es

$$\exp{[A]t} = e^t[Z_1] + te^t[Z_2] + e^{2t}[Z_3]$$

y la sol. general

$$\vec{x}(t) = \exp{[A]t}\vec{C} = c_1 \begin{pmatrix} e^t(1+t) \\ e^t(1+t) - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -te^t \\ -te^t + e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sean $[X(t)]$ e $[Y(t)]$ dos matrices ftales. del SEDL homogéneo

$$\dot{\vec{x}}(t) = [A(t)]\vec{x}(t)$$

Entonces, existe una mat. cte. $[C]$ tal que

$$[X(t)] = [Y(t)][C]$$

Demostración

Sean $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ las columnas de la mat. $[X(t)]$ y $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ las columnas de la matriz $[Y(t)]$. Dado que $\{\vec{y}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es, por definición, un cjto. ftal. de sols., y $\vec{x}_j, j = 1, \ldots, n$ son sols. del SEDL. Tienen que existir n ctes. $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}$ tales que

$$\vec{x}_j(t) = c_{1j}\vec{y}_1(t) + c_{2j}\vec{y}_2(t) + \cdots + c_{nj}\vec{y}_n(t), \qquad j = 1, \ldots, n$$

Pero esto es equivalente a escribir

$$[X(t)] = [Y(t)][C], \qquad [C] = [c_{ij}]$$

Teorema: Sea $[A]$ una matriz cte. y $[X(t)]$ una matriz ftal. del SEDL homogéneo $\dot{\vec{x}}(t) = [A]\vec{x}(t)$. Entonces

$$\exp([A]t) = [X(t)][X(0)]^{-1}$$

Demostración

Por el anterior $\mathrm{T}^{\underline{ma}}$ se sabe que debe existir una matriz cte. $[C]$ tal que

$$\exp[A]t = [X(t)][C]$$

haciendo $t = 0$, resulta que

$$[I] = [X(0)][C] \;\Rightarrow\; [C] = [X(0)]^{-1}$$

3.6. Sistemas normales no homogéneos

Considérese ahora el sistema completo

$$\dot{\vec{x}}(t) = [A(t)]\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \tag{3.1}$$

donde las funciones: matriz $[A(t)]$ y vector $\vec{f}(t)$, son ambas continuas en un cierto intervalo (a, b).

Teorema: Si $\vec{x}_p(t)$ es una sol. particular del sistema completo (3.1) y $\vec{x}_H(t)$ es la sol. general del sistema homogéneo correspondiente, entonces la sol. general del sistema no homogéneo es:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t)$$

Demostración

Inmediatamente

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}_H(t) = [A(t)]\vec{x}_H(t) \\ \dot{\vec{x}}_p(t) = [A(t)]\vec{x}_p(t) + \vec{f}(t) \end{array}\right\} \rightarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_H(t) + \dot{\vec{x}}_p(t) = [A(t)](\vec{x}_H(t) + \vec{h}_p(t)) + \vec{f}(t)$$

3.6.1. Variación de parámetros

Al igual que en el caso de una ec. lin. donde, mediante variación de parámetros se obtenía una sol. particular de la ec. completa, en el caso de un sistema (avisar de que esto falta en el pdf) normal con coeficientes ctes. puede seguirse el mismo procedimiento.

Si en el caso de una ec. diferencial se ensayaba una sol. particular a partir de la sol. gen. pero dejando que las ctes. fuesen funciones de x, $c_i \to c_i(x)$, en el caso de un SEDL no homogéneo con $[A]$ matriz $n \times n$ **constante**, se ensayará la sol.:

$$\vec{x}_p = \exp([A]t)\vec{C}(t)$$

El vector $\vec{C}(t)$ se determinará exigiendo que la sol. propuesta satisfaga (3.1)

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}_p(t) = [A]\vec{x}_p(t) + \exp([A]t)\dot{\vec{C}}(t) \\ \dot{\vec{x}}_p(t) = [A]\vec{x}_p(t) + \vec{f}(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = [\exp([A]t)]^{-1}\vec{f}(t)$$

$$\dot{\vec{C}}(t) = \exp(-[A]t)\vec{f}(t)$$

de modo que la sol. particular $\vec{x}_p(t)$ puede escribirse como

$$\vec{x}_p(t) = e^{[A]t}\int e^{-([A]t)}\vec{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ejemplo

Encuéntrese la sol. general del sistema

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + e^t \\ -4x + 4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primero se buscará la sol. del sistema homogéneo

$$\dot{\vec{x}}(t) = [A(t)]\vec{x}(t), \quad \text{con } [A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Valores propios y vectores propios:

$$\Delta(\lambda) = [[A] - \lambda[I]] = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, k = 2$$

Calcúlese $\exp\left([A]t\right)$ mediante el método de las componentes,

$$f([A]) = f(2)[Z_1] + f'(2)[Z_2]$$

$$f_1([A]) = [I] \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f_1(2) = 1 \\ f_1'(2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow [I] = [Z_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2([A]) = [A] - 2[I] \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f_2(2) = 0 \\ f_2'(2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow [A] - 2[I] = [Z_2] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Así,

$$e^{([A]t)} = e^{2t}[Z_1] + te^{2t}[Z_2] = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{pmatrix}$$

y, por tanto

$$\vec{x}_H(t) = e^{([A]t)}\vec{C} \rightarrow \vec{x}_H(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = e^{([A]t)}\int e^{-([A]t)}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}t = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & -t \\ -4t & 1+2t \end{pmatrix} \times \int e^{-2t}\begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

de modo que, operando

$$\vec{x}_p(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ 4t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2t \\ 4+4t \end{pmatrix}$$

se obtiene la sol. gen. del sistema completo:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_H(t) + \vec{x}_p(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - e^t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales en series de potencias

4.1. Series de potencias

Una serie del tipo

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

donde $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots}$ son ctes. y x es una variable real, se llama serie (infinita) de potencias. Tal serie siempre converge para $x = x_0$ y, en general, lo hará en un intervalo de convergencia (absoluta) que puede ser de radio 0 (sólo el punto $x = 0$) o de radio infinito (todo el eje real). En general -mediante una traslación del sistema de coordenadas- siempre es posible reducir la anterior serie a

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Definición 4.1: Se define el **radio de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como el número real positivo R dado por

$$R \equiv \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \ \text{ es convergente} \right\}$$

Un método para conocer el radio de convergencia de una serie se basa en el criterio de d'Alembert o del cociente: una serie numérica infinita $c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \cdots$ (que puede ser alternada) converge si el límite del cociente entre dos términos consecutivos es menor que uno. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

si $L < 1$ converge; si $L > 1$ diverge, si $L = 1$ el criterio no es concluyente. Por tanto, para una serie de potencias, esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

y por tanto, el radio de convergencia R de la serie será

$$R = |x-x_0|_{\text{máx}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ejemplo 4.1

Sea la serie de potencias

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es una serie geométrica de razón x. Será pues convergente si $|x| < 1$, lo cual también puede verse ya que claramente $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ y por tanto el radio de convergencia ha de ser la unidad. Esa serie define, de hecho, una función ya que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

que está obviamente definida en una región mayor que el intervalo $]-1,1[$: todo el eje real excepto el punto $x = 1$.

Por otro lado, es razonable pensar que el intervalo de convergencia limitado a $|x| < 1$ esté motivado por el mal comportamiento (que más adelante recibirá el nombre de singularidad) de la función en $x = 1$.

Ejemplo 4.2

Sea ahora la serie de potencias

$$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

cuya suma es la función $1/1+x^2$ y cuyo intervalo de convergencia es también $|x| < 1$. Al contrario que en el ejemplo anterior, aquí la función no tiene un mal comportamiento (singularidad) en $x = 1$, ni en realidad en ningún punto del eje real. Sin embargo, si se amplia el carácter de x considerándola una variable compleja, entonces la función posee singularidades en $z = \pm i$ (pues el denominador se anula y la función no está definida); por ello, la serie converge dentro del círculo de radio unidad y centro en el origen de coordenadas. El intervalo de convergencia en el eje $\mathbb{R}$ es meramente una sección transversal de la región de convergencia en el plano complejo.

Definición 4.2 (Función analítica o regular): Se dice que una función $f(x)$ es analítica (o regular) en x_0 si, en un intervalo abierto en torno a x_0, la función puede desarrollarse como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad |x - x_0| < R \tag{4.1}$$

Toda serie de potencias puede derivarse e integrarse término a término en el intervalo (radio) de convergencia -a pesar de que la convergencia en los extremos pueda variar- según nos aseguran los teoremas y proposiciones siguientes:

Teorema 4.1: Sea $\sum_{m=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y R su radio de convergencia. Entonces se tiene:

i) La serie converge absolutamente en $|x| < R$ y uniformemente en $|x| \leq r < R$.

ii) La serie diverge en $|x| > R$.

iii) La suma de la serie es regular en $|x| < R$, y la serie derivada o integral obtenida derivada o integrando término a término tiene el mismo radio de convergencia.

De este modo es obvio que los coeficientes del desarrollo (4.1) pueden identificarse con los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en torno al punto x_0.

Proposición 4.1: Considérese la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$, que define la función $f(x)$ en su intervalo de convergencia. Los coeficientes a_n vienen dados por la expresión:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Demostración

Es suficiente derivar término a término. De este modo,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (x - x_0)^p \Rightarrow$$

$$f^{(n)} = \sum_{p=n}^{\infty} a_p p(p-1)\cdots(p-n+1)(x - x_0)^{p-n},$$

y por lo tanto,

$$f^{(n)}(x_0) = a_n n! \;\Rightarrow\; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Así pues $f(x)$ es analítica en x_0 si puede expresarse mediante un desarrollo de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

o de Maclaurin para $x_0 = 0$.

Análogamente

Corolario 4.1: Toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$ define una función regular $f(x)$ en el intervalo de convergencia $|x - x_0| < R$, con derivadas regulares en el mismo intervalo de convergencia.

Por ejemplo, e^x es analítica en $x_0 = 0$ (y en todo el eje real) y puede escribirse como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Igualmente, $\sin x$ es analítica, por ejemplo en $x = \pi/2$ (y en cualquier punto del eje real) pudiéndose escribir en un entrono de dicho punto como

$$\sin x = 1 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n (x-\pi/2)^{2n}}{2n!} + \cdots$$

Definición 4.3 (regularidad de una función): Un punto en que la función $f(x)$ es analítica se dice que es un punto regular. En caso contrario se dice que se tiene un punto singular de la función.

Si la función no estuviera definida en un punto, éste será siempre singular pero podría estar definida y no ser un punto singular. Es el caso de la función $\sqrt{1+x}$, el punto -1 es singular aunque $\sqrt{0} = 0$, pero (todas) las derivadas no están definidas en dicho punto $f'(x) = 1/2\sqrt{1+x}$. Lo mismo ocurre para $f(x) = (1+x)^{3/2}$, que no es analítica en $x = -1$.

Existen diversos tipos de singularidades (evitables, polos de orden finito, esenciales) de una función en un punto.

Definición 4.4: Se dirá que x_0 es un **polo de orden n** de la función $f(x)$ si la función es singular en x_0 y además existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^n f(x) \neq 0$$

y es diferente de cero.

Ejemplo 4.3

Se verá un sencillo ejemplo que una solución en serie conduce a la misma sol. encontrada por los medios ya estudiados antes. Sea la EDO de primer orden,

$$y' = y$$

se supondrá que tiene una solución en serie de potencias en torno al origen (que es un punto regular) de la forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Derivando se halla

$$y' = a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

Exigiendo ahora que ambas series coincidan:

$$a_1 = a_0,\ 2a_2 = a_1,\ 3a_3 = a_2,\ \cdots,\ (n+1)a_{n+1} = a_n$$

lo que implica

$$a_1 = a_0,\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2},\ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3},\ \cdots,\ a_n = \frac{a_0}{n!}$$

Insertando los coeficientes en la serie, se obtiene la solución

$$y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

en donde a_0 queda libre y juega el papel de la (única) cte. arbitraria que aparece en la resolución de una EDO de primer orden. En este ejemplo concreto, puede reconocerse la serie como una exponencial, como era de esperar al hallar la solución de la EDO, es decir, $y = a_0 e^x$.

Este caso pone de manifiesto un método útil para obtener la expansión de una función dada: encontrar la ec. dif. satisfecha por la función para luego resolverla por medio de series de potencias.

4.2. Clasificación de los puntos de una ecuaciónn diferencial ordinaria

En el caso de una EDO, se ha de estudiar cuando existen singularidades, tanto en la propia ED, como en sus soluciones (ambos problemas están relacionados).

Considérese la ED de segundo orden

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{4.2}$$

Si se dividen los términos de la ec. por $P_0(x)$, la EDO puede expresarse de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

donde $p(x) = P_1(x)/P_0(x)$ y $q(x) = P_2(x)/P_0(x)$; la condición de que el punto x se **ordinario** es que $p(x)$ y $q(x)$ sean analíticas. Si no se satisfacen las anteriores condiciones el punto x_0 es **singular**. En general no puede afirmarse mucho acerca de las soluciones de una EDO cerca de un punto singular. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones los puntos singulares son lo suficientemente "débiles" como para que las funciones sean sólo "ligeramente" no analíticas. Se trata de los llamados **puntos singulares regulares** que se verán seguidamente.

Así, se ha de distinguir entre punto **singular regular** y **no regular**.

Definición 4.5: Un punto x_0 se llamará **singular regular** (PSR) si x_0 es un punto singular de la EDO, pero la función $p(x)$ tiene un polo de orden uno (como máximo) y/o la función $q(x)$ tiene un polo de orden dos (como máximo) en el punto x_0. En caso contrario el punto se denominará **singular irregular** (PSI).

En el primer caso, en un entorno suficientemente pequeño de x, podrá escribirse la EDO en la forma

$$y'' + \frac{r_1(x)}{x - x_0} y' + \frac{r_2(x)}{(x - x_0)^2} y = 0$$

donde $r_{1,2}(x)$ son analíticas en x_0. Dicho de otro modo, si tanto $x - x_0 p(x)$ como $(x - x_0)^2 q(x)$ son analíticas en x_0, el punto es **singular regular**.

Ejemplo 4.4

Clasificar los puntos singulares de la EDO:

$$(x^2 - 1)^2 y'' + (x - 1)y' - y = 0$$

En este caso

$$p(x) = \frac{x+1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} \qquad q(x) = \frac{-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

de donde se ve que $x_0 = \pm 1$ son PSs, Para la singularidad en $x_0 = 1$ se tiene

$$(x-1)p(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

que no es analítica en $x = 1$ y por tanto es un PSI. Para la singularidad en $x_0 = -1$

$$(x+1)p(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad (x+1)^2 a(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

y por tanto son analíticas en dicho punto que es PSR. Con esta información:

Punto	$p(x)$	$q(x)$	Clasificación
-1	$P_1(x)$	$P_2(x)$	PSR
1	$P_2(x)$	$P_2(x)$	PSI

donde P_n indica que la función tiene un polo de orden n.

Sin embargo, todavía debe investigarse el problema de obtener soluciones para valores grandes de x para los que la convergencia de una serie en torno a un valor determinado x_0 pueda ser demasiado lenta.

Definición 4.6 (Punto del infinito): Para tratar el punto del infinito se realiza el cambio $x = 1/w$; entonces se atribuye al punto del infinito el carácter que tenga el punto $w = 0$.

Puede comprobarse que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} = -w^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = -w^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-w^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\right) = 2w^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + w^4\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}w^2}$$

y la EDO

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

se transforma en

$$w^4\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}w^2} + [2w^3 - w^2 p(1/w)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w} + q(1/w)y = 0$$

y dividiendo por w^4, se halla

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}w^2} + \left[\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p(1/w)\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w} + \frac{1}{w^4}q(1/w)y = 0$$

Por último, $w = 0$ (y el punto del infinito en consecuencia) será un punto ordinario o singular según el comportamiento de las funciones

$$\left[\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p(1/w)\right] \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{1}{w^4}q(1/w)\right]$$

en torno a $w = 0$

Ejemplo 4.5

Clasificar las singularidades de la siguiente EDO incluyendo el punto del infinito:

$$x^2(x+3)y'' - (x+3)y' + 3xy = 0 \tag{4.3}$$

que en forma normal se escribe

$$y'' - \frac{1}{x^2}y' + \frac{3}{x(x+3)}y = 0$$

Las singularidades son $x = 0$ y $x = -3$; el primero es un punto singular no regular mientras que el segundo es singular regular; para ver el carácter del punto del infinito, se estudiará en $w = 0$ el comportamiento de las funciones

$$p(x) = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{w=1/x} \left[\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p(1/w)\right] = \left[\frac{2}{w} + \frac{w^2}{w^2}\right] = \left[\frac{2}{w} + 1\right] \tag{4.4}$$

$$q(x) = \frac{3}{x(x+3)} \xrightarrow{w=1/x} \left[\frac{1}{w^4}q(1/w)\right] = \frac{1}{w^4}\frac{3w^2}{1+3w} = \frac{3}{w^2(1+3w)} \tag{4.5}$$

y como ambos son singulares en $w = 0$ (polo simple y doble, respectivamente), se concluye que el infinito es un punto singular regular. De este modo se completa la tabla:

Punto	$p(x)$	$q(x)$	Clasificación
-3	R	P_1	PSR
0	P_2	P_1	PSI
∞	P_1	P_2	PSR

Examinando los puntos ordinarios y singulares de una ecuación diferencial también puede conocerse la región de convergencia mínima de la solución en serie de potencias. Se verán ahora algunos teoremas que ayudarán a esto mismo.

Teorema 4.2: Si x_0 es un punto ordinario de la ED

$$y'p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.6}$$

entonces, la solución $y(x)$ es regular en x_0.

Como aplicación directa de este teorema pueden concluirse los siguientes corolarios.

Corolario 4.2: El conjunto de puntos singulares de la solución $y(x)$ está contenido en el conjunto de puntos singulares de la EDO.

Corolario 4.3: El intervalo de convergencia de la solución $y(x)$, en serie de potencias en torno a x_0, se extiende como mínimo hasta la singularidad más próxima a x_0 de la EDO.

Corolario 4.4: El intervalo de convergencia de la solución $y(x)$ en serie de potencias en torno a x_0 ha de pasar por una singularidad de la EDO.

Ejemplo 4.6

El radio de convergencia de la solución en serie de potencias, en torno a $x = 0$, de la EDO del Ej. 6.4 es 1, como mínimo, ya que la EDO tiene una singularidad en $x = \pm 1$. De modo semejante, si la solución se busca en torno al punto $x = -1$, el radio de convergencia mínimo será 2, de modo que la solución $y(x)$ será válida en $|x+1| < 2$.

Para poder aplicar de forma general las técnicas de soluciones de ecuaciones diferenciales para desarrollos en series de potencias habrá que recordar algunas de las propiedades de la suma y producto de series que se necesitarán más adelante

Teorema 4.3 (Sumas de series): Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son ambas series convergentes, su suma está definida por la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

Obsérvese también quesi una serie es convergente, al ser multiplicada por una cte., su suma también lo será

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$$

Teorema 4.4 (Producto de Cauchy de series): Si $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ y $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ son dos series convergentes, su producto puede escribirse como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{4.7}$$

Demostración

La demostración es inmediata sin mas que considerar la suma de los términos del producto de las series reordenados según las diagonales $\nearrow$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \begin{pmatrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots & a_0b_n & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Otra relación interesante a tener en cuenta es

Teorema 4.5: Si $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ y $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ son dos series convergentes, su producto puede escribirse como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} a_{n-2k} b_k, \tag{4.8}$$

con

$$[n/2] = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración

Considérese la serie

$$S \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(n.k) t^{n+2k}$$

Si se ordena por potencias de t se obtendrá

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{[n/2]} A(m-2k, k)$$

donde $m = n + 2k$, de modo que $n = m - 2k$ y como $n > 0$, entonces $k < m/2$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, es decir, $k \leq [n/2]$.

Considerando ahora el caso $t = 1$ y $A(n, k) = a_n b_k$ se obtiene (4.8)

4.2.1. Resolución de una EDO en torno a un punto ordinario

La solución de una EDO en torno a un punto ordinario mediante una serie de potencias se separa en dos series linealmente independientes: *i*) una serie en términos del coeficiente a_0 y *ii*) otra serie en términos del coeficientes a_1 (aunque podrían ser otros coeficientes).

Teorema 4.6: Si $x = x_0$ es un punto ordinario de una EDO de segundo orden, siempre puede determinarse una solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

de modo que:

(1) Su radio de convergencia es no nulo.
(2) Contiene dos ctes. arbi. (usualmente a_0 y a_1).
(3) Satisface la EDO en su radio de convergencia.

Se mostrará un ejemplo donde se hará la sustitución directa de la solución en la EDO y se hallará la relación de recurrencia para sus coeficientes.

Ejemplo 4.7

Considérese la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + y = 0 \tag{4.9}$$

Como $p(x) \equiv 0$ y $q(x) \equiv 1$ evidentemente son analíticas en todos los puntos, se buscará una solución, en torno al punto $x = 0$, de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

Derivando sucesivamente esta expresión

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + + \cdots (n+2) a_{n+2} x^{n+1} \quad \wedge \quad y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3a_4 + \cdots + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \cdots$$

y, sustituyendo en a EDO, se obtiene

$$(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_2 + a_1)x + (4 \cdot 3a_4 + a_2)x^2 + \cdots + [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n + \cdots = 0$$

de modo que, al igualar a cero los coeficientes de las potencias de x, se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ 3 \cdot 2a_3 + a_1 = 0 \\ 4 \cdot 3a_4 + a_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases}$$

Con estas relaciones puede escribirse la forma general de los términos pares e impares de la solución en serie de pots. en términos de las ctes. arbitrarias a_0 y a_1 como

$$\begin{array}{cc} a_2 = -\dfrac{a_0}{2}, & a_3 = -\dfrac{a_1}{3!}, \\ a_4 = -\dfrac{a_2}{4 \cdot 3} = \dfrac{a_0}{4!}, & a_5 = -\dfrac{a_3}{5 \cdot 4} = \dfrac{a_1}{5!}, \\ \vdots & \vdots \\ a_{2k} = (-1)^k \dfrac{a_0}{(2k)!} & a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{a_1}{(2k+1)!} \end{array}$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$

La serie de potencias, solución de la EDO propuesta es

$$\begin{aligned} y &= a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= a_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right), \quad |x| < \infty \end{aligned}$$

Resulta trivial comprobar que ambas series son linealmente independientes y que convergen $\forall x \in \mathbb{R}$. De hecho, pueden reconocerse como las funciones seno y coseno de x, de modo que la solución general de la EDO es (como podría haberse calculado utilizando los procedimientos de anteriores capítulos) puede escribirse de la forma:

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x \tag{4.10}$$

Resulta evidente que el procedimiento de resolución detallado anteriormente puede resultar mucho más complicado si los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ no son ctes. Es por eso que a continuación se dará un ejemplo, un esquema más eficaz y simple para hallar la relación de recurrencia.

Ejemplo 4.8

Encuéntrese la solución general, en torno al punto $x = 0$ de la EDO

$$(1 + x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$$

Primero se clasificarán los puntos de la EDO. Pr ello se considerarán las singularidades de las funciones

$$p(x) = \frac{10x}{1 + x^2}, \qquad q(x) = \frac{20}{1 + x^2} \tag{4.11}$$

$$\left[\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p(1/w)\right] = \frac{2w^2 - 8}{w(1 + w^2)}, \qquad \left[\frac{1}{w^4}q(1/w)\right] = \frac{20}{w^2(1 + w^2)} \tag{4.12}$$

Para construir la siguiente tabla:

Punto	$p(x)$	$q(x)$	Clasificación
$\pm$ i	P_1	P_1	PSR
∞	P_1	P_2	PSR

De este modo se sabe que la solución en torno a $x = 0$ (punto ordinario) será convergente, como mínimo, en el intervalo $|x| < 1$.

Si se prueba con la solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la EDO se obtiene

$$(1 + x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}\right) + 10x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right) + 20\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0 \tag{4.13}$$

Las potencias de x que se tienen en la ecuación anterior son x^{n-2} y x^n, con coeficientes que vendrán dados por los distintos términos de la ecuación (4.13) y que puede reunirse en el cuadro siguiente

$$\begin{array}{cc} x^{n-2} & x^n \\ \hline n(n-1)a_n & (n(n-1) + 10n + 20)a_n \\ & (n^2 + 9n + 20)a_n \\ & (n+4)(n+5)a_n \\ & \Downarrow \qquad\qquad (n \to n+2) \\ & (n+2)(n+3)a_{n-2} \end{array}$$

De modo que la relación de recurrencia es:

$$a_n = -\frac{(n+2)(n+3)}{n(n-1)}a_{n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{4.14}$$

De esta relación puede obtenerse la expresión general de los términos pares e impares sin más que hacer uso de la misma forma recursiva hasta llegar a los términos a_0 y a_1, respectivamente,

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(2k+3)(2k+2)}{\cancel{2k}\cancel{(2k-1)}} \cdot \frac{(2k+1)\cancel{2k}}{\cancel{(2k-2)}\cancel{(2k-3)}} \cdot \frac{\cancel{(2k-1)}\cancel{(2k-2)}}{\cancel{(2k-4)}\cancel{(2k-5)}} \cdots$$
$$\cdots \frac{\cancel{9}\cdot\cancel{8}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{2\cdot 1} \cdot a_0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+4)(2k+3)}{\cancel{(2k+1)}\cancel{(2k)}} \cdot \frac{(2k+2)\cancel{(2k+1)}}{\cancel{(2k-2)}\cancel{(2k-1)}} \cdot \frac{\cancel{(2k)}\cancel{(2k-1)}}{\cancel{(2k-3)}\cancel{(2k-4)}} \cdots$$
$$\cdots \frac{\cancel{10}\cdot\cancel{9}}{\cancel{7}\cdot\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{8}\cdot\cancel{7}}{\cancel{5}\cdot 4} \cdot \frac{\cancel{6}\cdot\cancel{5}}{3\cdot 2} \cdot a_1, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.16}$$

Simplificando se obtiene

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{6}(2k+3)(2k+2)(2k+1)a_0, \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{24}(2k+4)(2k+3)(2k+2)a_1 \tag{4.17}$$

y la solución gen. de la ecuación planteada es

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 &\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{6}(2k+3)(2k+2)(2k+1)x^{2k}\right] + \cdots \\ \cdots + a_1 &\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{24}(2k+4)(2k+3)(2k+2)x^{2k+1}\right], \quad |x| < 1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2.2. Solución en serie de potencias en torno a un PSR. Método de Frobenius

Sea z_0 un PSR de la ecuación

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{4.19}$$

Entonces p y q pueden desarrollarse en serie de potencias:

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z-z_0)^{n-1}, \qquad q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z-z_0)^{n-2}. \tag{4.20}$$

Nótese que p_0, q_0 y q_1 no deben ser simultáneamente nulos, pues entonces z_0 sería un punto ordinario.

La idea básica es ampliar el espectro de posibles soluciones probando con funciones del tipo

$$w = (z-z_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n; \qquad a_0 \neq 0$$

donde r puede ser negativo y además no necesariamente entero. De este modo las soluciones pueden ser singulares en z_0.

- **Ecuación indicial y relación de recurrencia**

  Sustituyendo w en (4.19) y utilizando el producto de series de Cauchy se llega a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}[(k+r)a_kp_{n-k}+a_kq_{n-k}]\right\}(z-z_0)^{n+r-2}=0$$

  La expresión entre llaves ha de ser igual a cero para cada valor de n. En particular para $n=0$ y teniendo en cuenta que $a_0\neq 0$ se obtiene la *ecuación indicial*:

$$r^2+r(p_0-1)+q_0=0, \tag{4.21}$$

  que dice cuáles son los posibles valores de r. Nótese que, dadas las definiciones (4.20), los valores de p_0 y q_0 son fáciles de obtener:

$$p_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)p(z), \qquad q_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2q(z).$$

  Para $n\geq 1$ se obtiene la relación de recurrencia

$$[(n+r)(n+r-1)+(n+rp_0+q_0]a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}] \tag{4.22}$$

  que permite obtener cada coeficiente a_n en función de los anteriores. Así se ve que, en principio, para cada raíz r de la e. indicial (4.21) todos los coeficientes $a_n(r), n\geq 1$ pueden expresarse en función de a_0 que no queda determinado.

  Puede definirse la función auxiliar

$$F(s)\equiv s(s-1)+sp_0+q_0,$$

  con lo que

$$a_n(r)=\frac{1}{F(n+r)}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}]\right) \tag{4.23}$$

  Sólo podría haber problemas para obtener las dos soluciones linealmente independientes cuando:

  a) La ec. indicial tiene una única raíz de multiplicidad dos. En ese caso sólo se obtendrá una solución con este método.
  b) La función $F(n+r)$ toma el valor cero para algún n, por lo tanto, podría ser imposible despejar el coeficiente a_n a partir de la regla de recurrencia (4.22). Nótese que $F(r)=0$ es simplemente la ec. indicial y F se anula cuando su argumento es una de las dos raíces ya obtenidas. Si se calcula (4.23) para la raíz r_2 más pequeña, al ir incrementando n se tomará $F(1+r_2),F(2+r_2),F(3+r_2),\ldots$ que será cero si para algún n se tiene que el argumento es igual a la raíz mayor de la ec. indicial, $n+r_2=r_1$.

  Ahora se verá como se resuelven estos **casos excepcionales**, encontrando una segunda solución.

En resumen se ha obtenido lo siguiente:

Sea z_0 un PSR de la ec.

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

y sean r_1 y r_2 raíces de la ec. indicial $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$. Entonces

a) Siempre existe una solución de la forma

$$w_1(z) = (z - z_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_0 \neq 0$$

correspondiente a la raíz mayor r_1, $(\mathrm{Re}(r_1) \geq \mathrm{Re}(r_2))$.

b) Si $r_1 - r_2$ no es cero ni un entero positivo, entonces existe una segunda solución:

$$w_2(z) = (z - z_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad b_0 \neq 0$$

Los coeficientes a_n y b_n con $n \geq 1$ se obtienen usando la relación de recurrencia (4.22).

CASOS EXCEPCIONALES

En los llamados casos excepcionales en los que $r_1 - r_2$ es cero o un entero pueden usarse varios métodos para encontrar una segunda solución linealmente independiente.

En primer lugar el método de la *reducción de orden* probando $w_2 = w_1 v(z)$. Tras un sencillo cálculo se obtiene

$$w_2 = w_1 \int \frac{\exp\left(-\int p(z)\, \mathrm{d}z\right)}{w_1^2}\, \mathrm{d}z$$

Como es obvio a partir de esta fórmula, la viabilidad de este método depende de que las integrales sean abordables.

Otras posibilidades utilizan el hecho de que se conoce la forma que toma la segunda solución.

A) Cuando $r_1 = r_2$ la segunda solución será

$$w_2(z) = w_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Se puede sustituir las soluciones w_1 y w_2 en la ec. diferencial y hallar los coeficientes a_i y b_i. Los coeficientes b_i pueden ser bastante complicados de obtener por este método.[1]

B) Cuando $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$, es un entero positivo, la segunda solución toma la forma

$$w_z(z) = C w_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

En este caso la cte. C puede ser cero, con lo que el término logarítmico puede estar o no presente. De nuevo, pueden sustituirse las soluciones w_1 y w_2 en la ec. diferencial e intentar hallar los coeficientes a_i, b_i y C.

[1] Alternativamente, puede usarse un teorema que garantiza que

$$b_n = \left.\frac{\mathrm{d}a_n(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_1}$$

Para esto es útil recordar que ${}^{\mathrm{d}a_n(r)}/_{\mathrm{d}r} = a_n(r) \cdot {}^{\mathrm{d}\log a_n(r)}/_{\mathrm{d}r}$ (pues ${}^{\mathrm{d}\log a_n(r)}/_{\mathrm{d}r} = a_n'(r)/a_n(r)$), pues $a_n(r)$ suele ser un producto infinito de cocientes (con r en los numeradores y denominadores; es posible de derivar, pero es bastante complicado y tedioso), por lo que es más sencillo aplicar logaritmo a la recurrencia y derivar una suma infinita de logaritmos.

Antes de proceder a la sustitución directa puede averiguarse si $C = 0$.

Caso no logarítmico ($C = 0$): Sea $z = r_1 - r_2$. A veces, aunque $F(s + r_2) = 0$, la regla de recurrencia puede usarse, pues el término de la derecha de (4.22) también es cero y cancelan, $F(s+r_2) = 0b_s = 0 \cdot b_s = 0$. Eso implica que el coeficiente b_s es libre. Por lo tanto se tienen dos parámetros libre, (b_0 y b_s), y tomando distintos valores para ellos se tendrán dos soluciones linealmente independientes. De hecho si se escoge $b_0 = 0$ la serie comenzaría a partir de $b_s(x - x_0)^{r_1}$ y reproduciría exactamente la w_1 obtenida previamente.

5. Funciones especiales

5.1. Función hipergeométrica de Gauss

Sea la EDO

$$x(1-x)y''' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{5.1}$$

de donde

$$p(x) = \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)}, q(x) = \frac{-ab}{x(1-x)}$$

siendo pues $x=0$ y $x=1$ puntos singulares. Como

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \frac{c-(a+b+1)x}{(1-x)}, \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \frac{-xab}{1-x} = 0$$

y de modo similar para $x=1$. Luego ambos son puntos singulares regulares (además el punto del infinito también es un punto singular regular) satisfaciendo que $p_0 = c$ y $q_0 = 0$, de modo que la ec. indicial es

$$\sigma(\sigma-1) + \sigma c = 0 \;\rightarrow\; \sigma \cdot [\sigma - (1-c)] = 0$$

de donde las soluciones son $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 1-c$. Si $1-c$ no es un entero positivo (o sea, si c no es cero ni un entero negativo), entonces existe una solución de la forma

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Sustituyendo en la EDO, se halla

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + c\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$$
$$-(a+b+1)\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} - ab\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Haciendo el cambio $n = k-1$ en aquellos sumatorios con potencias de x^n y $k=n$ en aquellos con potencias de x^{n-1}

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k-1)a_k - (k-1)(k-2)a_{k-1} + cka_k - (a+b+1)(k-1)a_{k-1} - aba_{k-1}\right] x^{k-1}$$

lo que implica

$$a_k[k(k-1)+ck] - [(k-1)(k-2) + (a+b+1)(k-1) + ab]a_{k-1} = 0$$

Entonces se halla la siguiente relación de recurrencia:

$$a_k = \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{k(c+k-1)} a_{k-1}$$

que también puede expresarse mediante el cambio $k \mapsto k+1$ hallando la expresión habitual para las series hipergeométricas:

$$a_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} a_k$$

El mismo resultado se halla fácilmente utilizando la siguiente tabla:

x^n	x^{n-1}	
$\big[-n(n-1)-(a+b+1)n-ab\big]\,a_n$	$[n(n-1)+cn]a_n$	
$-(a+n)(b+n)a_n$	$\Downarrow$	$n-1\to n$
	$(1+n)(c+n)a_{n+1}$	

Para conseguir una notación más simple, suele introducirse el símbolo de Pochhammer, $(a)_n$, que se define como

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_n = a\cdot(a+1)\cdots(a+n-1)$$

Por ejemplo $(3)_4 = 3\cdot4\cdot5\cdot6$.

Nótese que a puede ser negativo; Si a es un entero negativo $-m$, se tiene

$$(-m)_n = (-m)\cdot(-m+1)\cdots(-m+n-1), n\le m; \qquad (-m)_n = 0, n>m$$

Obsérvese que la función Γ (que se verá más adelante) se relaciona con el símbolo $(a)_n$ mediante

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

siendo $n\in\mathbb{Z}^+$ y $a>0$.

Algunos casos de especial utilidad posterior son

$$(1)_n = n!, (2)_n = (n+1)!, (a)_{n+1} = (a)_n\cdot(a+n) = a\cdot(a+1)\cdots(a+n-1)\cdots(a+n) = a\cdot(a+1)_n$$

Con esos coeficientes, la solución, que se expresa mediante $F(a,b;c;x)$, se convierte en

$$y_1(x) = F(a,b;c;x) =$$
$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Esta serie se conoce como hipergeométrica (o de Gauss) y se denota mediante el símbolo $F(a,b;c;x)$, y a veces también como ${}_2F_1(a,b;c;x)$. Se llama así porque generaliza las series geométricas familiares; cuando $a=1$ y $c=b$ se obtiene

$$F(1,b;b;x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

que es convergente si $|x|<1$. En verdad, ese intervalo de convergencia es el mismo para todas las series hipergeométricas pues

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+n)(c+n)}{(a+n)(b+n)}\right| = 1$$

Las series hipergeométricas también pueden escribirse de forma compacta como

$$F(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n$$

y, entre otras, tiene la evidente propiedad de que

$$F(a,b;c;x) = F(b,a;c;x)$$

Otra solución LI de (5.1) es

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;x)$$

La función hipergeométrica es muy versátil a la hora de identificarse con la mayoría de las funciones familiares en el análisis matemático, dando adecuadamente valores a los parámetros a, b y c. Por ejemplo:

$$F(a, b; b; x) = (1-x)^{-a}; \quad F(1, 1; 2; x) = -\frac{1}{x}\log(1-x);$$
$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x\right) = \frac{1}{x}\sin^{-1} x$$

Cuando $x = 1$, se sabe sumar la serie

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \ c-a-b > 0$$

Obsérvese también que si alguno de los parámetros a o b es negativo, la serie tiene un número finito de términos y es, de hecho, un polinomio: $F(-n, b; c; x)$ tiene $n+1$ términos. Por ejemplo

$$F(-2, b; c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n = 1 + \frac{(-2)b}{c} x + \frac{(-2)(-1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!}$$
$$= 1 + \frac{2b}{c} x + \frac{b(b+1)}{c(c+1)} x^2$$

La derivada de una función hipergeométrica con respecto a x da lugar a otra función hipergeométrica pero con distintos parámetros:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x)$$

Para demostrarlo aplíquese la derivada a la serie hallándose

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^{n-1}$$

Si ahora se hace un desplazamiento de índice $k = n-1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1} (k+1)!} x^k$$

y como $(k+1)! = (k+1)k!, (a)_{k+1} = a(a+1)_k$, etc., se obtiene el resultado enunciado.

5.1.1. Función hipergeométrica confluente

Modificando la serie $F(a, b; c; x)$ eliminando uno de los factores superiores, se llega a la función hipergeométrica confluente definida como

$$F(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} x^n$$

que es la solución de la EDO

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0$$

Puede considerarse que la ecuación diferencial que origina la función hipergeométrica confluente procede de la más general (5.1) escrita en la forma

$$x(1 - x/b)y'' + [(c-x) - (a+1)x/b]y' - ay = 0$$

haciendo el límite $b \to \infty$; el punto singular b se ha unido con el ∞. Esta confluencia de dos puntos singulares regulares genera un punto singular irregular.

5.2. Polinomios de Legendre

Antes de atacar la EDO que da lugar a los pols. de Legendre, se presentará primero su "motivación" de origen físico. En efecto, son muchas las situaciones en física en las que aparecen potenciales del tipo

$$U(r) \sim \frac{1}{r}$$

Un caso particular lo constituye el campo gravitatorio (o el coulombiano). Supóngase que el sistema de referencia está centrado en el punto O, la fuente del campo en P y el punto de observación en y.

Se tiene que $\vec{r} = \vec{y} - \vec{a}$ y por tanto

$$r = (y^2 + a^2 - 2ya\cos\theta)^{1/2}$$

de modo que

$$U(r) \sim (y^2 + a^2 - 2ay\cos\theta)^{-1/2}$$

Una situación bastante habitual es considerar los efectos de la fuente en puntos muy alejados de ella ($a \ll y$) o, por el contrario, muy próximos ($a \gg y$). En cada caso, se escribirá

$$U(r) \sim \frac{1}{a}\left[1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{a}\right)\cos\theta\right]^{-1/2} \; ; \; U(r) \sim \frac{1}{y}\left[1 + \left(\frac{a}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{y}\right)\cos\theta\right]^{-1/2}$$

Ambas expresiones son del tipo

$$V(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

lo cual permite un desarrollo en serie de potencias de t, que habrá de ser una variable pequeña: y/a si $y \ll a$, o a/y si $a \ll y$.

Así pues, interesará la forma de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la función $V(x,t)$, como un sumatorio de potencias crecientes de t.

Tras un desarrollo que se omite aquí puede escribirse

$$V(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

donde

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!x^{n-2r}}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} \tag{5.2}$$

son los polinomios de Legendre y $V(x,t)$ la función generatriz. En general, una función generatriz $G(x,t)$, es tal que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_(x) t^n$$

y, en efecto, la función generatriz $V(x,t)$ proporciona en este caso los coeficientes de las potencia de t que definen los polinomios de Legendre: $f_n(x) = P_n(x)$.

Los polinomios de orden más bajo son:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \ldots$$

Obsérvese que los polinomios con n par o cero tienen potencias pares y aquéllos con n impar sólo potencias impares. Naturalmente este resultado puede deducirse directamente de (5.2) debido a la dependencia de la potencia de x con $2r$.

Seguidamente se enuncia una fórmula de recurrencia.

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

y compruébese que se podría haber deducido $P_2(x)$ a partir de $P_1(x)$ y $P_0(x)$. Haciendo $n = 1$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}[3xP_1(x) - P_0(x)] = \frac{1}{2}[3x - 1]$$

5.2.1. Fórmula de Rodrigues

En general, el enésimo polinomio de Legendre viene dado por la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

También cabe mencionar que los polinomios de Legendre pueden expresarse como funciones hipergeométricas

$$P_n(x) = F(-n, n+1; 1; (1-x)/2)$$

5.2.2. Propiedades elementales

Si en

$$V(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

se hace el cambio $x \to -x, t \to -t$

$$V(-x,-t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(-x)t^n$$

y por tanto

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

que se llama paridad del polinomio de Legendre. Este resultado también podría haberse obtenido a partir de la definición misma pues puede escribirse

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} K(n,r)x^{n-2r}$$

y al hacer el cambio $x \to -x$

$$P_n(-x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} K(-x)^{n-2r} = (-1)^n P_n(x)$$

Por otro lado, si se hace $x = 1$

$$V(1,t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

por lo que

$$P_n(1) = 1, \quad \forall n$$

Ortogonalidad de los polinomios

Los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ n \neq m \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

que pueden reescribirse conjuntamente

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Véase un ejemplo

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3-3)\,\mathrm{d}x = 0$$

por ser el integrando una función impar.

Ahora en cambio,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_2(x)P_2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(3x^2-1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

como debe ser.

5.2.3. Resolución de la EDO origen de los polinomios de Legendre

Ahora se resolverá la EDO que da lugar a los polinomios de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1 = y = 0 \tag{5.3}$$

en donde l es un entero positivo. Puede expresarse también como

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{l(l+1)}{1-x^2}y = 0$$

cuyas singularidades son $x = \pm 1$ (punto singular regular) además del punto del infinito. Se estudiarán las soluciones en torno del punto creo, que es regular.

A partir de la serie solución propuesta

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} l(l+1)a_n x^n = 0$$

haciendo una traslación de índices en el primer sumatorio $k = n-2$ (además, los dos primeros términos se anular) y $k = n$ en los restantes sumatorios:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k-1) + 2k - l(l+1)a_k]\}x^k = 0$$

luego

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = [k(k+1) - l(l+1)]a_k$$

de donde resulta

$$\begin{array}{ll} k=0 & a_2 = -\dfrac{l(l+1)}{2!}a_0 \\ k=1 & a_3 = -\dfrac{(l+2)(l-1)}{3!}a_1 \\ k=2 & a_4 = -\dfrac{(l+3)(l-1)}{4\cdot 3}a_2 = \dfrac{(l+1)(l+3)l(l-2)}{4!}a_0 \\ k=3 & a_5 = -\dfrac{(l+4)(l-3)}{5\cdot 4}a_3 = \dfrac{(l+2)(l+4)(l-1)(l-3)}{5!}a_1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Y en función de las dos ctes. a_0 y a_1, que quedan arbitrarias, pueden escribirse la solución general

$$\begin{aligned} y = a_0 \left(1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{(l+1)(l+3)l(l-1)}{4!x^4 - \cdots}\right) + \\ + a_1\left(x - \frac{(l+2)(l-1)}{3!} + \frac{(l+2)(l+4)(l-1)(l-3)}{5!}x^5 - \cdots\right) \end{aligned}$$

Para valores de l concretos, las series infinitas se transforman en polinomios. Así, al suponer que l es entero, (positivo) la serie de potencias pares (impares) si l es par (impar) terminará en a_l; los términos siguientes ($k \geq l$) se anularán, definiendo un polinomio que se corta en $k = l$.

Obsérvese que se ha escrito la solución general de la EDO como combinación lineal de dos series, utilizando dos ctes. arbitrarias a_0 y a_1.

Como se tiene libertad para elegir dichas ctes. a_0 y a_1, hágase que a_l tome el valor:

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$$

lo cual equivale a una elección particular de a_0 y a_1 en función de l, en concreto según que l sea par o impar.

$$\begin{aligned} l=0, a_0=1, \quad l=2,4,6,\ldots\ a_0 = (-1)^{l/2}\frac{1\cdot 3\cdots(l-1)}{2\cdot 4\cdots l} \\ l=1, a_1=1, \quad l=3,5,7,\ldots,\ a_1 = (-1)^{(l-1)/2}\frac{1\cdot 3\cdots l}{2\cdot 4\cdots(l-1)} \end{aligned}$$

Utilizando la expresión de a_l anterior pueden obtenerse los valores de $a_{l-2}, a_{l-4}, \cdots$, de modo que se encontrará una expresión para el polinomio de Legendre igual a una obtenida anteriormente. En efecto, se tiene en primer lugar

$$\begin{aligned} a_{l-2} &= \frac{l(l-1)}{(l-2)(l-1)-l(l+1)} \times \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{1}{2^l l!} \times \frac{l(l-1)}{-2(2l-1)} \times \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{l(l-1)(l-2)!} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \times \frac{l(2l-2)!}{(l-2)!} \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$a_{l-4} = \frac{(l-2)(l-3)}{(l-4)(l-3)-l(l+1)} \cdot \frac{(-1)}{2^l l!} \cdot \frac{l(2l-2)!}{(l2)!} = \frac{1}{2^l l!}\frac{l(l-1)(2l-4)!}{2(l-4)!}$$

Así pues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left[\frac{(2l)!}{0!l!}x^l - \frac{l(2l-2)!}{1!(l-2)!}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(2l-4)!}{2!(l-4)}x^{l-4} - \cdots\right]$$

Como se adelantó, si l es par, la solución$P_l(x)$ es un polinomio de potencias pares; si l es impar, es un polinomio de potencias impares. Si l no fuera entero la solución, para cada l sería una serie que no terminaría (no sería un polinomio) definiendo una función llamada de Legendre.

La anterior expresión puede escribirse de forma compacta como

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r}$$

que coincide con la obtenida antes.

5.3. Armónicos esféricos

Sea la ED en derivadas parciales

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)\right] f(\theta,\phi) = 0 \tag{5.4}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Supóngase que puede realizarse la factorización: $f(\theta,\phi) = g(\theta)h(\phi)$. Entonces se escribirá:

$$h(\phi)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right) + g(\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2h(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + l(l+1)g(\theta)h(\phi) = 0$$

Dividiendo por $g(\theta)h(\phi)$,

$$\frac{1}{g(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{h(\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2h(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + l(l+1) = 0$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{g(\theta)}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{h(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2h(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + l(l+1)\sin^2\theta = 0$$

por lo tanto

$$\frac{1}{g(\theta)}\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{h(\phi)}\frac{\mathrm{d}^2h(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = m^2, \quad \forall\phi,\theta$$

siendo m una cte. que no depende ni de θ ni de ϕ.

Así pues, se exigirá por un lado,

$$\frac{\mathrm{d}^2h(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2h(\phi) = 0$$

suyas soluciones son

$$h(\phi) = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi} \;\Rightarrow\; h(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

pues sólo se está interesado en la solución $m > 0$ y se ha tomado un valor particular de la cte. arbitraria A por razones de normalización posteriores.

Por otro lado,

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + g(\theta)l(l+1)\sin^2\theta - m^2g(\theta) = 0$$

de donde

$$\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta-m^2\right]g(\theta)=0$$

Ahora se dividirá la anterior expresión por $\sin^2\theta$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]g(\theta)=0$$

Haciendo $x=\cos\theta$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

y así,

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

luego

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]g(x)=0$$

y como $\sin^2\theta=1-x^2$, se deduce que

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]g(x)=0$$

que finalmente resuelve la EDO

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2g(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}+\left[-\frac{m^2}{1-x^2}+l(l+1)\right]g(x)=0$$

cuya solución es un polinomio asociado de Legendre si l es un número natural.

La solución de (5.4) se escribe

$$Y_l^m(\theta,\phi)=Y_{lm}(\theta,\phi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta)$$

que son los **armónicos esféricos**.

Los armónicos esféricos satisfacen la siguiente condición de ortonormalidad:

$$\iint Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

siendo $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

Escríbanse explícitamente las expresiones de los primeros armónicos esféricos

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta,\quad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\dots$$

Por último, por relevancia de los armónicos esféricos en la Mecánica Cuántica, se pondrán de relieve las siguientes propiedades de los "operadores" L^2 y L_z definidos como:

$$L^2=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right],\qquad L_z=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

donde se ha hecho $\hbar=1$

$$\begin{aligned}L^2Y_l^m(\theta,\phi)&=l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi)\ ;\ l=0,1,2,\dots\\ L_zY_l^m(\theta,\phi)&=mY_l^m(\theta,\phi)\ ;\ m=-l,-l+1,\dots,l-1,l\end{aligned}$$

5.4. Funciones de Bessel

La EDO de Bessel se define como

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.5}$$

donde se va a suponer $\nu \geq 0$. Como se sabe que $x = 0$ es un PS, al menos existe una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$$

La ecuación indicial, $\sigma^2 - \nu^2 = 0$, conduce a las dos soluciones: $\sigma = \pm\nu$. Tomando $\sigma = \nu$ y sustituyendo en la EDO se llega a

$$(n+2)(n+2+2\nu)a_{n+2} + a_n = 0$$

es decir

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)},\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Haciendo $a_1 = 0$, conduce a que sólo las potencias pares son no nulas y la ley de recurrencia

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^\nu n(n+\nu)}$$

Se acostumbra a elegir un valor específico para a_0

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$$

y por consiguiente los coeficientes a_{2n} puede expresarse como

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(1+\nu+n)} \tag{5.6}$$

5.4.1. Funciones de Bessel de primera y segunda especie

Cuando se y utilizan los coeficientes que se acaban de obtener y $\sigma_1 = \nu$, la solución representada mediante $J_\nu(x)$ se expresa como

$$J_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{5.7}$$

donde la serie converge en $[0, \infty[$ si $\nu \geq 0$. Para el segundo índice, $\sigma_2 = -\nu$, se obtiene del mismo modo

$$J_{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} \tag{5.8}$$

Las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ se conocen como **funciones de Bessel de primera especie**. Si ν no es un entero, la solución general de la EDO en $[0, \infty[$ es

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad \nu \neq \text{entero} \tag{5.9}$$

Si $\nu = n$ es entero, entonces se satisface

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

y ya no son linealmente independientes. Hay que buscar otra solución que se denomina **función de Bessel de segunda especie** y se define como sigue:

$$Y_\nu(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{5.10}$$

También es interesante citar las llamadas **funciones esféricas de Bessel**, definidas mediante

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \ y_n(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x) \tag{5.11}$$

que son solución de la EDO

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + [x^2 - n(n+1)]y = 0 \tag{5.12}$$

siendo n un entero positivo.

Algunos ejemplos son:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \ j_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x}, \dots; \ y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \ y_1(x) = -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x}, \dots$$

6. Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)

6.1. Introducción a Ecuaciones en derivadas parciales

6.1.1. Ejemplos

- Vibración de una cuerda flexible (ec. de ondas 1D):

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

- Ec. de Laplace:

$$\nabla^2\Psi = 0; \qquad \nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

- Ec. de Poisson para campos

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

  donde ϕ es el potencial eléctrico y ρ es la densidad de carga. Nótese que la ec. de Laplace es un caso particular de esta.

- Ec. de ondas en 3D:

$$\nabla^2\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

  donde Ψ es la temperatura y κ es función de la conductividad térmica, el calor específico y la densidad.

- Ec. de difusión

$$\nabla^2\Psi(\vec{x},t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

- Ec. de Schrödinger:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\vec{x})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \;\Rightarrow\; \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 + V(x)\right]\Psi(\vec{x},t) = i\hbar\,\partial_t\Psi(\vec{x},t),$$

  donde V es el potencial, m es la masa de la partícula y $\hbar$ es la cte. de Planck

6.1.2. Ejercicios

1. $u_{xy} = 0 \rightsquigarrow \partial_y(\partial_x u) = 0 \;\Rightarrow\; \partial_x u = H(x) \;\Rightarrow\; u = \int H(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{G(x) + F(y) = u}$
2. Encontrar $u(x,y)$ tal que $u_x - 2u_y = 0$ y $u(x,0) = 3e^{5x} - 5e^{3x}$

6.1.3. Discusión cualitativa

PDE: La situación es más complicada que en una ODE (EDO). En general no es suficiente dar los valores en un punto de la función y alguna de sus derivadas para determinar totalmente la solución. De hecho es habitual usar varios tipo de condiciones de contorno, por ejemplo

- *Dirichlet*: La solución Ψ se especifica en el contorno $\partial\Omega$ (frontera) de la superficie donde se aplica la ec. dif.
- *Neuman*: La componente normal del gradiente de la solución $(\nabla\Psi)_n$, se especifica en $\partial\Omega$. Aquí, $(\nabla\Psi)_n \equiv \hat{N}\cdot\vec{\nabla}\Psi$ y $\hat{N}$ es un vector unitario perpendicular a la frontera

- *Cauchy/Robin*: combina las dos anteriores

Como ejemplo sencillo se tomará una ec. lineal de segundo orden y con dos vars. Se verá si es posible obtener la expansión de Taylor a partir de la ED y las condiciones de contorno tipo Cauchy.

El contorno será una curva que se toa escrita en forma paramétrica:

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

Se dan los valores de la función $\Psi(s)$ y su derivada normal $N(s)$ sobre el contorno (Cauchy).

$$N(s) = \hat{N} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

donde $\hat{N} = \left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)$. Además,

$$\frac{\mathrm{d}\Psi(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \Psi_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \Psi_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}. \tag{6.2}$$

Usando (6.1) y (6.2), y la normalización de $\hat{N}$ pueden despejarse Ψ_x y Ψ_y

$$\begin{aligned} \Psi_x &= -N(s)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\Psi(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \\ \Psi_y &= N(s)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\Psi(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

con lo que ya se tienen las primeras derivadas para las series de Taylor y todavía no se ha usado la ED. Véase qué ocurre con las segundas derivadas. Se necesitan Ψ_{xx}, Ψ_{xy} y Ψ_{yy}. Hay tres ecs. que pueden servir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Psi_x = \Psi_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \Psi_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \tag{6.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Psi_y = \Psi_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \Psi_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \tag{6.4}$$

$$A\Psi_{xx} + 2B\Psi_{xy} + C\Psi_{yy} = f(x, y, \Psi_x, \Psi_y). \tag{6.5}$$

A, B y C son funciones de x e y. Tras algo de trabajo puede verse que las tres derivadas, Ψ_{xx}, Ψ_{xy} y Ψ_{yy}, pueden despejarse salvo en los puntos del plano en que

$$\begin{vmatrix} x_s & y_s & 0 \\ 0 & x_s & y_s \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Ay_s^2 - 2Bx_s y_s + Cx_s^2 = 0. \tag{6.6}$$

En cada punto del plano (6.6) define hasta dos direcciones (características de la ED). Hay solución salvo si la frontera es tangente a una característica. Hay tres casos:

$$\begin{aligned} B^2 > AC &\quad \Rightarrow \quad \text{Ec. hiperbólica. Dos trayectorias reales} \\ B^2 = AC &\quad \Rightarrow \quad \text{Ec. parabólica. Una trayectorias reales} \\ B^2 < AC &\quad \Rightarrow \quad \text{Ec. elíptica. No hay trayectorias reales} \end{aligned}$$

Dependiendo del tipo de ecuación se requieren distintas condiciones de contorno y escoger adecuadamente la frontera, ¿Qué ocurre con las derivadas de orden superior? ¿Pueden obtenerse?

6.2. Método de separación de variables

En este método se reduce una ED con n variables a n EDOs. En lugar de discutirse este procedimiento de modo general, se mostrarán los detalles del procedimiento en algunos ejemplos[1].

[1] No sólo la ecuación ha de ser separable, además las condiciones de contorno deben estar definidas de modo compatible con la separación y no mezclar distintas variables.

6.2.1. Ecuación de ondas 1D

En este caso se tiene[1]

$$\Psi_{xx} = \frac{1}{c^2}\Psi_{tt} \tag{6.7}$$

Paso 1: Se buscarán soluciones de la forma $\Psi(x,t) = X(x)T(t)$, o sea, producto de funciones de cada una de las variables. Sustituyendo en la ED se tiene

$$X''T = \frac{1}{c^2}T''X \tag{6.8}$$

Paso 2: Se intenta separar las piezas que dependen de cada variable llevándolas a lados distintos de la ec.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{6.9}$$

Obviamente, el término de la izq. no depende de t y el de la derecha (que es igual) tampoco. Lo mismo ocurre con x. Por lo tanto ambos términos tienen que ser iguales a una cte. Se llamará, por ejemplo, $-\lambda$, de modo que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \end{array} \right. \tag{6.10}$$

y ya se tienen dos ecs. ordinarias.

La Ec. de ondas describe muchos sistemas distintos. Ψ sería la amplitud de la onda que se propaga. Se fijaran las condiciones de contorno consistentes con la vibración de una cuerda de guitarra o piano de longitud l. En primer lugar la cuerda está fija en los extremos luego

$$\begin{array}{lcr} \Psi(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ \forall t & \rightarrow & X(0) = 0, \\ \Psi(l,t) = X(l)T(t) = 0,\ \forall t & \rightarrow & X(l) = 0 \end{array}$$

Nótese que se están fijando el valor de la función no en dos puntos sino en segmentos rectilíneos $(0,t)$ y (l,t) en el plano (x,t).

Además se fija la amplitud inicial, $(t = 0)$,

$$\Psi(x,0) = f(x), \quad \text{posición inicial de la cuerda,} \tag{6.11}$$

y la velocidad a la que se está moviendo,

$$\Psi_t(x,0) = g(x), \quad \text{velocidad inicial de la cuerda.} \tag{6.12}$$

Paso 3: Se buscan las sols. del SEDL que además cumplan las condiciones de contorno. Comiéncese con la primera ec. Dependiendo del valor de λ cabe distinguir tres casos.

* $\lambda = 0$. En este caso la sol. general es $X(x) = \alpha x + \beta$. Imponiendo $X(0) = X(l) = 0$ se obtiene que $\alpha = \beta = 0$ y $X(x) = 0$. Esta solución es la trivial.

* $\lambda < 0$. La sol. es $X(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Las condiciones en los extremos implican $X(0) = 0 = \alpha + \beta$ y $X(l) = 0 = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}l} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}l}$, $\rightsquigarrow$

$$0 = 2\alpha \sinh\sqrt{-\lambda}l \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = 0. \tag{6.13}$$

Otra vez la solución trivial. ¿Hay alguna otra?

[1]Por supuesto, existe una solución trivial, $\Psi = 0$. Aquí sólo se buscarán las soluciones distintas de 0. Esto implica que las funciones $T(t)$ y $X(x)$ no son idénticamente cero, aunque sí que pueden serlo en algún punto.

$*$ $\lambda > 0$. La solución es

$$X(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

$X(0) = 0$ implica que $\alpha = 0$ pero $X(l) = 0 \rightsquigarrow \beta \sin(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Esta última ec. se cumple aunque β sea distinta de cero para cualquier valor de λ tal que

$$l\sqrt{\lambda} = n\pi$$

con $n \in \mathbb{Z}$.[1].

En consecuencia sólo se tienen soluciones distintas de la trivial y consistentes con las condiciones de contorno cuando la cte. de separación es

$$\lambda = \lambda_n \equiv \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Para cada uno de estos valores λ_n se tiene una posible solución que se llamará X_n:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Usando esa misma cte. la solución de $T_n(t)$ es

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + B_n \sin \frac{n\pi}{l} ct, \tag{6.14}$$

con A_n y B_n ctes. arbitrarias. Las soluciones obtenidas son

$$\Psi_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + B_n \sin \frac{n\pi}{l} ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Paso 4: Construir la solución como combinación lineal de las soluciones obtenidas e imponer las condiciones de contorno.

Como la ec. es lineal y homogénea (*principio de superposición*), la combinación lineal de soluciones es solución

$$\begin{aligned}\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) \\ = \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + B_n \sin \frac{n\pi}{l} ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).\end{aligned} \tag{6.15}$$

Observar que todas las frecuencias (armónicos) son múltiplos de una frecuencia fundamental, (con $n = 1$). También, que se puede modificar esa frecuencia cambiando la longitud de la cuerda l, o su tensión, que altera la velocidad c. Aún se han de imponer las condiciones de contorno $t = 0$, (*posición y velocidad inicial de la cuerda*).

$$\Psi(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right), \qquad \Psi_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} c B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right).$$

Sólo queda encontrar las ctes. A_n y B_n de modo que se cumplan estas ecs. Usando la ortogonalidad de las funciones $\{\sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\}$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} x\right) = \delta_{mn},$$

se obtiene que

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \, \mathrm{d}x$$

[1]Puede uno quedarse sólo con los enteros positivos. El caso $n = 0$ da la solución trivial. Los valores negativos dan amplitudes iguales con distinto signo de β.

6.2.2. Cambios de coordenadas

En ocasiones la ED no es separable. Esto a veces ocurre por la presencia de derivadas cruzadas. En otros casos son las condiciones de frontera las que mezclan las distintas coordenadas. Algunos de estos problemas pueden obviarse con un cambio de coordenadas de modo que el método de separación de variables sea aplicable. Se verá algún ejemplo. Antes se deducirá el operador laplaciano en polares (2D) (también útil para simetría cilíndrica en 3D) y esféricas (3D).

Laplaciana en polares: El laplaciana en cartesianas es

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

Las coordenadas cartesianas en función de las polares son

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

con $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le r \le \infty$. En lo siguiente se usará la notación $s \equiv \sin\theta$ y $c \equiv \cos\theta$. Se tiene que[1]

$$\left.\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\,\partial_y = c\,\partial_x + s\,\partial_y \\ \partial_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\,\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} = -rs\,\partial_x + rc\,\partial_y \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -sr & cr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} rc & rs \\ -s & c \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} c & -s/r \\ s & c/r \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s/r \\ s & c/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \partial_x^2 = \left(c\,\partial_r - \dfrac{s}{r}\,\partial_\theta\right)\left(c\,\partial_r - \dfrac{s}{r}\,\partial_\theta\right) = c^2\,\partial_r^2 - 2\dfrac{cs}{r}\,\partial_{r\theta} + 2\dfrac{cs}{r^2}\,\partial_\theta + \dfrac{s^2}{r}\,\partial_r + \dfrac{s^2}{r^2}\,\partial_\theta^2 \\ \partial_y^2 = \left(s\,\partial_r + \dfrac{c}{r}\,\partial_\theta\right)\left(s\,\partial_r + \dfrac{c}{r}\,\partial_\theta\right) = s^2\,\partial_r^2 + 2\dfrac{cs}{r}\,\partial_{r\theta} - 2\dfrac{cs}{r^2}\,\partial_\theta + \dfrac{s^2}{r}\,\partial_r + \dfrac{s^2}{r^2}\,\partial_\theta^2 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r = \frac{1}{r}\,\partial_r(r\,\partial_r) + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2}$$

Laplaciana en esféricas: La laplaciana en coordenadas cartesianas es

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Las coordenadas cartesianas en función de las esféricas son

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

con $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi$ y $0 \le r \le \infty$. Comprobar, usando el mismo procedimiento que en el caso anterior

$$\boxed{\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\,\partial_r + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2 s^2}\,\partial_\phi^2 + \frac{c}{sr^2}\,\partial_\theta = \frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r) + \frac{1}{sr^2}\,\partial_\theta(s\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2 s^2}\,\partial_\phi^2}$$

6.2.3. Ecuación de ondas en 2D

Tómese como ejemplo de uso la ec. de ondas en 2D la vibración de la membrana de un tambor circular de radio R, $(r < R)$. Se tiene que la amplitud de oscilación, $u(r,\theta,t)$, obedece la ec.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}u_{tt}.$$

[1] Puede usarse una función auxiliar f para comprobar como las siguientes relaciones de operadores diferenciales vienen de la regla de la cadena.

Se hace la primera separación de la variable t. Tomando $u = X(r, \theta)T(t)$ y sustituyendo

$$T\nabla^2 X = \frac{X}{c^2} T_{tt} \rightsquigarrow \frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{T_{tt}}{c^2 T} = -k^2.$$

Se ha escogido $-k^2$ como cte. de separación. Queda la siguiente ec. para T

$$T'' + k^2 c^2 T = 0; \quad \omega \equiv kc \quad \Rightarrow \quad T = e^{\pm i\omega t}.$$

Se tiene pues vibraciones con frecuencia $\omega/2\pi$. La parte espacial es

$$\nabla^2 X + k^2 X = 0.$$

Escribiendo la laplaciana en polares se tiene

$$\frac{1}{r}\,\partial_r(r\,\partial_r X) + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 X + k^2 X = 0.$$

Se hace una segunda separación de variables suponiendo $X(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Sustituyendo y multiplicando el resultado por $r^2/(R\Theta)$ se obtienen términos que dependen sólo de r o θ.

$$r^2 \frac{R_{rr}}{R} + r\frac{R_r}{R} + r^2 k^2 = -\frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta} \equiv n^2.$$

Se ha introducido una nueva cte. de separación n^2. La ec. angular es inmediata y conduce a

$$\Theta_n = e^{\pm in\theta} \ (= \alpha_n e^{in\theta} + \beta_n e^{-in\theta}).$$

Obviamente sólo los valores de enteros de n son aceptables (no cambian al modificar el ángulo por múltiplos de 2π). La parte radial de la ec. de Bessel (obtenida multiplicando 'por $1/r^2$ y haciendo $z \equiv kr$) y su solución es

$$R_n(r) = a_n J_n(kr) + b_n Y_n(kr).$$

Cuando se impongan las condiciones de contorno b_n ha de ser cero porque las funciones de Bessel de segunda clase, Y_n, divergen en el origen. Por lo tanto se tiene

$$u_{n,k} = J_n(kr)(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)(\gamma_n \cos kct + \delta_n \sin kct) = \begin{Bmatrix} J_n(kr) \\ \cancel{Y_n(kr)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{in\theta} \\ e^{-in\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

Queda imponer la condición de frontera $u(r = R_0, \theta, t) = 0 \ \forall\theta,\ t \quad \to \qquad J_n(kR_0) = 0$. Sólo los valores de k tales que kR_0 coincide con ceros de la funciones de Bessel son posibles. Eso restringe los posibles valores de k y por tanto las frecuencias de vibración[1]. Finalmente

$$u = \sum_{n,k} u_{n,k},$$

y se tendría que buscar los valores de las ctes. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ y δ_n que reprodujeran la posición y velocidad inicial de la membrana.

6.2.4. Ecuación de ondas en 3D

Por su relevancia se incluye la resolución de la ec. de ondas en 3D y usando coordenadas esféricas. La ec. es formalmente idéntica a la de 2D:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

pero ahora

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r u) + \frac{1}{sr^2}\,\partial_\theta(s\,\partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 s^2}\,\partial_\phi^2 u.$$

[1] A diferencia del caso de la cuerda elástica las diferentes frecuencias no son múltiplos enteros de una fundamental. Tomando como 1 la frecuencia más baja las siguientes son: 1,59, 2,14, 2,30, 2,65, 2,92, ...

Primero se separa la parte temporal tomando $u(r,\theta,\phi,t) \equiv X(r,\theta,\phi)T(t)$. Todo es idéntico al caso anterior y se llega a

$$T = e^{\pm i\omega t}.$$

La parte espacial queda

$$\frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r X) + \frac{1}{sr^2}\,\partial_\theta(s\,\partial_\theta X) + \frac{1}{s^2r^2}\,\partial_\phi^2 X + k^2 X = 0.$$

En un segundo paso se toma $X(r,\theta,\phi) \equiv R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ y se sustituye. Dividiendo el resultado por X

$$\frac{1}{r^2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{sr^2\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{r^2s^2\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + k^2 = 0.$$

Multiplicando todo por r^2s^2 puede pasarse a la derecha de la ec. un término que es sólo función de ϕ. El otro lado sólo es función de las otras variables así que puede introducirse una nueva cte. de separación, $-m^2$, $\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2, \quad \Rightarrow \quad \Phi = e^{\pm im\phi}.$$

Obviamente m tiene que ser entero. La otra ec. es

$$\frac{1}{r^2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{sr^2\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + k^2 = \frac{m^2}{r^2s^2}.$$

Multiplicando por r^2 hay dos términos que dependen sólo de r y otros dos sólo de θ. Usando una cte. de separación que se toma como $l(l+1)$ se tiene para la parte radial

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k - \frac{l(l+1)}{2}\right]R = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $z \equiv kr$ se llega a

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right)R = 0.$$

Esta ec. tiene como solución. las funciones esféricas de Bessel, $j_l(kr)$ e $y_r(kr)$. Queda únicamente la parte que depende del ángulo θ.:

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(-\frac{m^2}{s^2} + l(l+1)\right)\Theta = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $x \equiv \cos\theta$ la ec. se transforma en

$$T(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0.$$

Su solución son las funciones asociadas de Legendre, P_l^m y Q_l^m. En resumen la solución correspondiente a las ctes. de separación k, m, l es

$$\Psi_{k,m,l} = \begin{Bmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{+im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ y_l(kr) \end{Bmatrix}$$

La notación usada {} significa combinación lineal de las funciones que hay dentro. Para acabar se tiene

$$\Psi = \sum_{k,m,l} \Psi_{k,m,l},$$

y habrá que ajustar las ctes. de las combs. lineales para cumplir las condiciones de contorno.

Ejemplo: Se aplicará el resultado a una antena formada por dos semiesferas de radio a y tales que en $r = a$ tienen el potencial oscilante

$$\Psi = \begin{cases} V_0 e^{-i\omega_0 t} & 0 < \theta < \pi/2 \\ -V_0 e^{-i\omega_0 t} & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

Como se tiene simetría axial y las soluciones no pueden depender de ϕ la cte, $m = 0$. Las funciones asociadas de Legendre cunado $m = 0$ se reducen a las funciones de Legendre. Q_l divergen para $\cos = \pm 1$ y por lo tanto no aparecerán. Lo mismo ocurre con P_l para l no entero. Además la antena sólo emite con frecuencia ω_0, luego la amplitud será

$$\Psi = e^{-i\omega_0 t} \sum_{l\in\mathbb{N}}^{\infty} P_l(\cos\theta)[a_l j_l(k_0 r) + b_l y_l(k_0 r)]$$

($\mathbb{N}$ incluye a $\{0\}$). Con $k_0 = \omega_0/c$. En lugar de utilizar j_l e y_l puede expresarse la solución usando las funciones de Hankel

$$h_l^{(1)} = j_l + iy_l \qquad \text{y} \qquad h_l^{(2)} = j_l - iy_l$$

Hay buenas razones para hacerlo debido a su comportamiento asintótico. Cunado $z \to \infty$

$$h_l^{(1)}(z) \sim \frac{1}{z} e^{iz} \qquad h_l^{(2)}(z) \sim \frac{1}{z} e^{-iz}$$

lo que en el ejercicio implica que las partes proporcionales a $h_l^{(1)}$ van como

$$\frac{1}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t)},$$

que corresponde a ondas que se mueven desde el origen hacia fuera mientras que las proporcionales a $h_l^{(2)}$ van como

$$\frac{1}{r} e^{i(-k_0 r - \omega_0 t)},$$

y corresponde a ondas que se mueven hacia el origen. Si se está interesado en las ondas emitidas por la antena debe tomarse sólo las partes con $h_l^{(1)}$. $\rightsquigarrow$

$$\Psi = e^{-i\omega_0 t} \sum_{l\in\mathbb{N}}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_0 r)$$

Por último deben encontrarse los valores de c_l tales que se cumplan las condiciones de frontera en $r = a$:

$$\sum_{l\in\mathbb{N}}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_0 a) = \begin{cases} V_0 & 0 < \theta < \pi/2 \\ -V_0 & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

Puede despejarse c_l usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Multiplicando por $P_n(\cos\theta)$ e integrando entre -1 y 1

$$\frac{2}{2n+1} c_n h_n^{(1)}(k_0 a) = V_0 \left[\int_0^1 P_n(\cos\theta)\, \mathrm{d}\cos\theta - \int_{-1}^0 P_n(\cos\theta)\, \mathrm{d}\cos\theta \right]$$

Dada la paridad de los polinomios de Legendre para los n pares las integrales se cancelan y para n impar se suman y

$$c_n = V_0 \frac{2n+1}{h_n^{(1)}(k_0 a)} \int_0^1 P_n(x)\, \mathrm{d}x$$

Usando varias propiedades de los polinomios se obtiene el siguiente coeficiente

$$c_n = (-1)^{(n-1)/2} \frac{V_0}{h_n^{(1)}(k_0 a)} \frac{(n+1)(2n+1)(n-1)!}{2^{n+1} \left[\left(\dfrac{n+1}{2} \right)! \right]^2}$$

para n impar.