Grau de Matemàtiques. Curs 2011-2012. Semestre de tardor
MÈTODES NUMÈRICS I

PRÀCTICA 9: Derivació numèrica i extrapolació de Richardson

En aquesta pràctica veurem quin és el comportament de l'error en les fórmules de derivació numèrica més habituals.

Sigui $f : I \to R$ una funció diferenciable tantes vegades com calgui, on I és un interval real. A vegades, se sap avaluar $f(x)$ en qualsevol punt $x \in I$, però que no se sap avaluar directament $f'(x)$ o $f''(x)$. Convé usar diferenciació numèrica.

En endavant, sempre que surti h suposarem que és un valor estrictament positiu (i petit).

Exercici 1 [Diferència endavant i diferències centrades]

Considerem les següents fórmules per a aproximar derivades:

$$(1)\quad D_{1,h}f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{1}{2}f^{(2)}(x)h + \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^2 + \dots$$

$$(2)\quad D_{2,h}f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h^2 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(x)h^4 + \dots$$

$$(3)\quad DD_{2,h}f(x) \equiv \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} = f''(x) + \frac{2}{4!}f^{(4)}(x)h^2 + \frac{2}{6!}f^{(6)}(x)h^4 + \dots$$

Feu un programa que consti de:

- Una funció de capçalera
  ```
  double fun(double x)
  ```
  on s'avaluarà $f(x)$. Per a fer proves i poder comprovar els resultats, podeu posar-hi una funció senzilla, com ara $f(x) = \exp(x)$ o $f(x) = \cos(x)$.
- Una funció que calculi una de les tres aproximacions. La capçalera serà
  ```
  double dernum(int ind, double x, double h) .
  ```
  La variable `ind` indica quina fórmula volem.
- Una funció `main` on:
  - Llegim els valors de les variables: `ind` (quina aproximació volem), `x` (abscissa), `h` (pas inicial de discretització), `m` (quantitat d'aproximacions), i `q`$\in (0,1)$ (factor de variació del pas; s'acostuma a usar 0.5 o 0.1.
  - Cridem la funció d'aproximació desitjada m vegades, usant valors decreixents del pas: h, qh, q^2h, …, $q^{m-1}h$.
  - Escrivim els resultat per a cada h.

L'objectiu d'aquest exercici és doble:

- D'una banda, comprovar que, si h no és massa petit, l'error degut al mètode aproximat de derivació es comporta com preveu la seva fórmula.
- D'una altra, veure que, quan h es fa suficientment petit, l'error ja no es comporta com caldria (això és degut als errors d'arrodoniment que es produeixen pel fet de treballar amb precisió finita).

Podeu fer una versió usant variables `double` i una altra usant variables `float`.

Exercici 2 [Extrapolació de Richardson]

Fixem la funció f i l'abscissa x. Sigui $d \in \{1,2\}$ i sigui $F_0(h)$ una de les fórmules d'aproximació de $f^{(d)}(x)$. Ho escrivim com

$$F_0(h) = f^{(d)}(x) + a_1h^{p_1} + a_2h^{p_2} + \dots ,$$

amb a_i, p_i constants, i $0 < a_1 < a_2 < \ldots$.

Usant dos passos diferents, h i qh, es pot trobar una combinació lineal de $F_0(h)$ i $F_0(qh)$ que és una aproximació de $f^{(d)}(x)$ amb una expressió de l'error on no apareix el terme d'exponent p_1. Concretament,

$$F_1(h) \equiv \frac{q^{p_1} F_0(h) - F_0(qh)}{q^{p_1} - 1} = f^{(d)}(x) + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} \ldots \quad .$$

- Feu una funció de capçalera

  ```
  double extrapol(int p, int q, double fh, double fqh)
  ```

  que faci aquest procés.
- Amplieu la funció `main` de manera que es faci l'extrapolació de manera repetida:
  - llegeix p_1 i calcula les $m-1$ primeres extrapolacions,
  - llegeix p_2 i calcula les $m-2$ segones extrapolacions,
  - ...
  - llegeix p_{m-1} i calcula l'última extrapolació.,

  Cal escriure totes les aproximacions que s'obtenen.