MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre del curs 2011-12.
SEGON EXAMEN PARCIAL: 11 de gener de 2012.
PART ESCRITA

ENTREGUEU PROBLEMES DIFERENTS EN FULLS DIFERENTS
Qualificacions provisionals: Dimecres, 18 de gener a migdia.
Revisions: Dijous, 19 de gener, de 12h a 13 h, al “xalet”.

1.- Siguin $I = [a, b]$, amb $a < b$, i definim $h = b - a$ (longitud) i $z = (a + b)/2$ (punt mig). Considerem $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable tantes vegades com calgui, i sigui $p \in P_3$ el polinomi d'interpolació d'Hermite de f en els punts a i b.

(a) Comproveu que

$$p(z) = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{h}{8}\left(f'(a) - f'(b)\right) .$$

(b) Suposant que existeixi $M > 0$ tal que $|f^{(k)}(x)| \leq (k+1)M$, $\forall k = 0, 1, \ldots$, trobeu la millor fita que pugueu de $|f(z) - p(z)|$, en funció de M i h.

(c) Aplicació: $f(x) = x \exp(x)$, $I = [0, 1]$. Calculeu, en aquest cas, $p(0.5)$ usant (a), i una fita numèrica de $|f(0.5) - p(0.5)|$ usant (b).

2.- Volem una fórmula de derivació numèrica de 3 punts i pas h, de la forma

$$f'(a) \approx D(h) \equiv \frac{Af(a) + Bf(a + h) + Cf(a + 2h)}{h} .$$

Suposem que la usarem només per a funcions f suficientment diferenciables.

(a) Trobeu els valors de les constants $A, B, C \in \mathbb{R}$ per tal que $D(h) = f'(a) + c_2h^2 + O(h^3)$. Expresseu c_2 en funció d'una derivada adequada de f en el punt a.

Nota. Ha de donar $A = -3/2$, $B = +2$, $C = -1/2$.

(b) Donada la taula de valors

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.00	0.91	0.83	0.77	0.71

trobeu una aproximació de $f'(0)$ mitjançant l'aplicació de la fórmula obtinguda en l'apartat anterior per a dos valors diferents del pas h, i fent després una etapa d'extrapolació.

(c) Apliqueu la fórmula de derivació numèrica $D(h)$ a la funció $f(x) = x^4$, en el punt $a = 0$, amb passos $h = 0.4$, $h = 0.2$ i $h = 0.1$. Sabent que el resultat exacte és $f'(0) = 0$, comproveu que es verifica el següent resultat:

”quan el pas h es divideix per 2, l'error $D(h) - f'(a)$ es divideix per 8”.

Per què passa això? (quan seria natural que l'error es dividís per 4, ja que el primer terme de l'error és c_2h^2).

3.- Sigui $I = [0,1]$ i considerem la iteració

$$x_0 = 0.5\ ,\ \ x_{k+1} = g(x_k)\ ,\ k = 0,1,2,\dots\ ,$$

on $g(x) = \frac{1}{3}\left(5x^3 - 7x^2 + x + 2\right)$.

(a) Vegeu que $g(I) \subset I$.

(b) Demostreu que $L \equiv \max_{x\in[0,1]}\{|g'(x)|\} = \frac{34}{45}$.

(c) Demostreu que l'equació $f(x) \equiv 5x^3 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$, quan $x \in I$, té una única arrel.

(d) Sigui α l'arrel de l'apartat anterior. Quantes iteracions (n) del mètode inicial cal fer per tal d'assegurar que $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}10^{-6}$?

(e) A partir de $x_0 = 0.5$, feu 3 iteracions del mètode de Newton-Raphson, aplicat a la funció $f(x)$, arrodonint cada iterat x_{i+1} a 5 decimals, abans de calcular el següent. Comproveu que, amb aquesta precisió, $x_2 = x_3$.