MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2010-11

Examen final, 2 de febrer de 2011

1.- Sigui $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ un angle desconegut, del qual es coneixen valors aproximats del sinus ($s \approx \sin(\alpha)$) i del cosinus ($c \approx \cos(\alpha)$), amb un error absolut fitat per ε_a en els dos casos.

(a) Quina de les següents fórmules permet calcular α amb menys error?

$$\alpha = \arcsin s, \qquad \alpha = \arccos c.$$

Si la resposta depèn del valor d'α, especifica tots els casos possibles.

(b) Dóna una fita de l'error amb què obtenim α si usem l'expressió següent:

$$\alpha = \arctan \frac{s}{c}.$$

(c) Si $\alpha < \dfrac{\pi}{6}$, quina de les tres fórmules anteriors permet calcular α amb més precisió?

2.- Sigui A una matriu $n \times n$ que té descomposició $A = LU$ (sense necessitat de permutacions). Suposem que aquesta descomposició és coneguda. Volem aprofitar-la per a trobar les descomposicions d'altres matrius semblants a A.

(a) Sigui B una matriu $n \times n$ que **difereix de** A **només en l'última fila**. Demostreu que B també té descomposició $B = \tilde{L}\tilde{U}$. Digueu quins elements de $\tilde{L}$ (i $\tilde{U}$) són diferents dels corresponents de L (i U).

(b) Sigui C una matriu $n \times n$ que **difereix de** A **només en l'última columna**. Demostreu que C també té descomposició $C = L_1 U_1$. Digueu quins elements de L_1 (i U_1) són diferents dels corresponents de L (i U).

(c) Sabent que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trobeu les descomposicions LU de les matrius

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 10 \cdot 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 10 \cdot 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 10 \cdot 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 10 \cdot (n-1) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 10 \cdot n \end{pmatrix}$$

3.-

(a) D'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ coneixem tres condicions:

$$f(x_0) = f_0 \ , \quad f'(x_1) = f_1' \ , \quad f(x_2) = f_2 \ ,$$

on $x_0 < x_1 < x_2$. Trobeu quina relació hi ha d'haver entre les abscisses x_0, x_1 i x_2 per tal que existeixi un únic polinomi de $P_2(x)$ que interpoli la funció f segons les tres condicions anteriors.

(b) Sigui ara $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificant

$$f(0) = 3 \ , \quad f(1) = 3 \ , \quad f'(1) = 0 \ , \quad f(2) = 9 \ .$$

Calculeu una aproximació de $\int_0^2 f(x)dx$ mitjançant $\int_0^2 p(x)dx$, on $p \in P_3(x)$ és el polinomi interpolador d'Hermite de f segons les condicions donades.

(c) Si la funció de l'apartat (b) també verifica

$$f \in C^4([0,2]) \ , \quad \text{i} \quad |f^{(4)}(z)| \leq 24 \quad \forall z \in [0,2] \ ,$$

trobeu una fita de l'error absolut comès a l'apartat anterior.

4.- Considerem l'equació $f(x) = 1 - x - \sin x = 0$.

(a) Quantes solucions té?

(b) Considerem l'esquema iteratiu $x_{n+1} = g(x_n, \lambda)$, on $g(x, \lambda) = \lambda + (1 - \lambda)x - \lambda \sin x$.

(b.1) Vegeu que, per a qualsevol $\lambda \neq 0$, els punts fixos de g coincideixen amb els zeros de f.

(b.2) L'equació té un zero prop de $x = 0.5$. Escolliu un valor de λ perquè la convergència de $x_{n+1} = g(x_n, \lambda)$ sigui el més rapida possible. Useu aquest esquema (amb aquest valor de λ) per a calcular aquest zero amb 5 xifres decimals correctes.

(b.3) Quin és l'ordre d'aquest mètode iteratiu? i la constant asimptòtica?

<u>Entregueu problemes diferents en fulls diferents</u>

Notes: Dimarts 8 de febrer, a les 14h, al Campus Virtual i al tauler del "xalet".

Revisions: Dimecres 9 de febrer, de 12:00 a 13:00, al "xalet".