① (111107)

(a) $(\sqrt{5}-2)^2 = 5+4-4\sqrt{5} = 9-4\sqrt{5}$

$$\sqrt{5}-2 = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2} = \frac{5-4}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$ (i elevem al quadrat)

$$9-4\sqrt{5} = \frac{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}{9+4\sqrt{5}} = \frac{81-16\cdot 5}{9+4\sqrt{5}} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}$$

(b) Siguin
$$\begin{cases} f_1(x) = (x-2)^2 \\ f_2(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} \\ f_3(x) = 9-4x \\ f_4(x) = \dfrac{1}{9+4x} \end{cases}$$

En $x=\sqrt{5}$, les 4 funcions prenen el mateix valor: R

A primer ordre, el factor de propagació de l'error en $x=\sqrt{5}$ és $|f'_i(\sqrt{5})|$

$f'_1(x) = 2(x-2) \Rightarrow |f'_1(\sqrt{5})| \approx 0.472$

$f'_2(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^3} \Rightarrow |f'_2(\sqrt{5})| \approx 0{,}0263$

$f'_3(x) = -4 \Rightarrow |f'_3(\sqrt{5})| = 4$

$f'_4(x) = \dfrac{-4}{(9+4x)^2} \Rightarrow |f'_4(\sqrt{5})| \approx 0{,}0124 \Rightarrow$

La millor fórmula, numèricament parlant, és la de $f_4(x)$:
$$\boxed{R = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}}$$

② (111107)

(a) $c = d - \left(\frac{b}{a}\right) e$. (Usem $\approx$ per a indicar igualtat a 1r ordre)

$$fl(c) = \left[d - \frac{b}{a}(1+\delta_1)\cdot e(1+\delta_2)\right](1+\delta_3) \qquad |\delta_i| \leq u << 1$$

$$= \left[d - \frac{b}{a}e\,(1+\delta_1+\delta_2+O_2)\right](1+\delta_3)$$

$$\approx \left[\left(d-\frac{b}{a}e\right) - \frac{b}{a}e\,(\delta_1+\delta_2)\right](1+\delta_3)$$

$$= \left(d-\frac{b}{a}e\right) - \frac{b}{a}e\,(\delta_1+\delta_2) + \left(d-\frac{b}{a}e\right)\delta_3 + O_2$$

$$\approx \underbrace{\left(d-\frac{b}{a}e\right)}_{\overset{\shortparallel}{c}}\left[1 - \frac{be/a}{d-be/a}(\delta_1+\delta_2) + \delta_3\right]$$

$$\Rightarrow \quad e_{rel}(fl(c)) = -\frac{be/a}{d-be/a}(\delta_1+\delta_2)+\delta_3$$

$$\Rightarrow \quad |e_{rel}(fl(c))| \leq \left[\left|\frac{be/a}{d-be/a}\right|2+1\right]u = \boxed{\left[\left|\frac{2be}{ad-be}\right|+1\right]u}$$

(b)

$$\frac{b}{a} = \frac{0.234}{0.123} = 1{,}902439\ldots \approx \boxed{1{,}90}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)e \approx (1{,}90)\cdot 0.181 = 0.3439 \approx \boxed{0.344}$$

$$d - \left(\frac{b}{a}\right)e \approx 0.345 - 0.344 = \boxed{0.001}$$ ← el resultat només té 1 dígit

<u>Observació 1</u>. Apartat (a) usant directament la fita relativa u. Usarem $(1\pm u)(1\pm u) \approx 1\pm 2u$

$$fl(c) = \left\{d - \left[\left(\frac{b}{a}\right)(1\pm u)\right]\cdot e(1\pm u)\right\}(1\pm u) = \left[d - \frac{b}{a}e(1\pm 2u)\right](1\pm u) =$$

$$= \left[\left(d-\frac{b}{a}e\right) \pm 2\left|\frac{be}{a}\right|u\right](1\pm u) \approx \left(d-\frac{b}{a}e\right) \pm \left|d-\frac{b}{a}e\right|u \pm 2\left|\frac{be}{a}\right|u =$$

$$= \left(d-\frac{b}{a}e\right)\left\{1 \pm u\,\frac{|d-\frac{b}{a}e|+2|\frac{be}{a}|}{|d-\frac{b}{a}e|}\right\} = \left(d-\frac{b}{a}e\right)\left(1\pm u\left[1+\frac{2|be|}{|ad-be|}\right]\right)$$

Quan es treballa amb fites, cal vigilar a posar tots els valors absoluts que calgui.

<u>Observació 2</u>. Si l'apartat (b) es fa canviant l'ordre de la (/) i el (*) (<u>NO</u> s'ha de fer):

$$c = d - \frac{(b*e)}{a}$$ llavors dóna $c = 0$.

③ (111107)

(a) En cada pas k, només cal fer eliminació de la fila $i=k+1$. Queda:

$$
\begin{array}{l}
\forall k=1,2,\dots,n-1 \\
\quad a_{k+1,k} \leftarrow a_{k+1,k} / a_{k,k} \\
\quad \forall j = k+1, k+2, \dots, n \\
\qquad a_{k+1,j} \leftarrow a_{k+1,j} - a_{k+1,k} * a_{k,j}
\end{array}
$$

Operacions:

$$(/):\quad \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \boxed{n-1}$$

$$(*):\quad \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = (n-1)+(n-2)+\dots+2+1 = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(b) Marquem amb $\square$ els elements de les matrius finals U i L que van apareixent:

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots} \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
0 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots &
\end{pmatrix}
\xrightarrow{m_{21}=\boxed{2}}
\begin{pmatrix}
\boxed{-1 & -2 & -3 & -4 & \dots} \\
2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
0 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
0 & 0 & 2 & 3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots &
\end{pmatrix}
\xrightarrow{m_{32}=\boxed{-2}}
\begin{pmatrix}
\boxed{-1 & -2 & -3 & \dots} \\
2 & 3 & 4 & \dots \\
0 & 2 & 3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots &
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{m_{43}=-2}
\begin{pmatrix}
\boxed{-1 & -2 & \dots} \\
2 & 3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\xrightarrow{m_{54}=-2} \quad \text{etc.}
$$

O sigui, excepte el 1r pas, tots els altres són "iguals" $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'únic multiplicador és } -2; \\ \text{les submatrius que van quedant} \\ \text{són sempre iguals} \end{array} \right.$

Per tant,

$$
\boxed{
L = \begin{pmatrix}
1 & & & & & 0 \\
2 & 1 & & & & \\
 & -2 & 1 & & & \\
 & & -2 & 1 & & \\
 & 0 & & -2 & \ddots & \\
 & & & & -2 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
U = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \dots \\
 & & -1 & -2 & -3 & -4 & \dots \\
 & & & -1 & -2 & -3 & \dots \\
 & & & & -1 & -2 & \dots \\
 & 0 & & & & -1 & \dots \\
 & & & & & & \dots
\end{pmatrix}
}
$$

④ (111107)

Introduïm un subíndex en la notació: donada $A=(a_{ij})$, sigui $S_A(i)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ $\forall i=1\div n$

A és equilibrada $\iff S_A(i)=S_A$ (independent de i)

(a) Observem l'efecte de multiplicar per matrius diagonals per l'esquerra:

Si $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T\end{pmatrix}$ $\left(a_i^T=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}),\ \text{fila de } A\right)$,

llavors $DA=\begin{pmatrix} d_1a_1^T \\ d_2a_2^T \\ \vdots \\ d_na_n^T\end{pmatrix}$ $\left(d_ia_i^T=(d_ia_{i1},d_ia_{i2},\dots,d_ia_{in})\right)$

Ara ja podem veure (a):

A regular $\Rightarrow a_i^T\neq 0\ \forall i \iff S_A(i)\neq 0\ \forall i$. Sigui $d_i=\dfrac{1}{S_A(i)}$ $\forall i$

Llavors $S_{DA}(i)=|d_i|\cdot S_A(i)=1$ $\forall i$, tal com volíem.

(b) Observem que $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\max_{1\le i\le n}\left(S_A(i)\right)$.

Si A és equilibrada, llavors $\|A\|_\infty=S_A$

Sigui $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{pmatrix}$ diagonal $\Rightarrow \|D\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|d_i|$

Calculem:

$$\|DA\|_\infty=\max_i\Big(\sum_j|d_ia_{ij}|\Big)=\max_i\Big(|d_i|\underbrace{\sum_j|a_{ij}|}_{\substack{\| \\ S_A(i) \\ \| \ \leftarrow A \text{ equilibrada} \\ S_A}}\Big)=S_A\cdot\max_i|d_i|=\|A\|_\infty\|D\|_\infty \quad \text{OK}$$

(c)
$$k_\infty(DA)=\|DA\|_\infty\|A^{-1}D^{-1}\|_\infty \underset{\substack{\uparrow \\ A\text{ equilibrada} \\ (b)}}{=} \underbrace{\|D\|_\infty}\|A\|_\infty\underbrace{\|A^{-1}D^{-1}\|_\infty} \ge \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=k_\infty(A) \quad \text{OK!}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty=\|A^{-1}D^{-1}D\|_\infty\le\underbrace{\|A^{-1}D^{-1}\|_\infty\|D\|_\infty}$$

(d) Si les dades A,b es coneixen només aproximadament, la propagació de l'error cap al resultat x depèn directament del nombre de condició $k(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$.

Suposem que usem $\|\ \|_\infty$.

Donada A regular, per l'apartat (a) podem trobar D diagonal regular | DA equilibrada.

En lloc de resoldre $Ax=b$, resolem $(DA)x=(Db)$.

Per l'apartat c), sabem que $k_\infty(DA)\le k_\infty(A)$.

$$k_\infty(A)=k_\infty(\underbrace{D^{-1}}_{\text{diag.}}\underbrace{DA}_{\text{equilibr.}})$$

⑤ (111107)

(a) Només cal veure que $\underbrace{(Id + xy^T)b}_{b+(xy^T)b} \stackrel{?}{=} b + (y^T b)x$

O sigui, que $(xy^T)b \stackrel{?}{=} (y^T b)x$

El producte de matrius **no** és commutatiu, però **sí** associatiu. Llavors

$$(xy^T)b \underset{\text{assoc.}}{=} x(y^T b) \underset{\text{ja que } (y^T b) \text{ és un escalar}}{=} (y^T b)x$$

(b)

```
r=0.;
for(i=0;i<n;i++)  r=r+y[i]*b[i];
for(i=0;i<n;i++)  b[i]=b[i]+r*x[i];
r=0.;
for(i=0;i<n;i++)  r=r+b[i]*b[i];
if( fabs(r) < tol){
    return 0;
}else{
    r=sqrt(r);
    for(i=0;i<n;i++)  b[i]=b[i]/r;
    return 1;
}
```

Nota. Hem suposat que tol és una variable global definida fora de la funció. També es pot canviar per una constant, per exemple, 1.e-14.