

MN1. Curs 11-12. Pràctica 5: Factorització $PA=LU$ usant {elimin. gaussiana amb pivotaatge parcial "relatiu"}

La informació de P es guarda en un vector de permutació (p)

Exemple senzill en dim. $n=4$ (\Rightarrow 3 passos d'eliminació)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 0 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \end{matrix} \quad (\text{numereu files i columnes de 0 a 3})$$

Inicialitzen $p = (0, 1, 2, 3)$; $\text{sig} = +1$

Pas $k=0$

* Cerca del pivot en la col. 0:

Valors "relatius" de la columna 0: $1/8, 3/8, \underline{4/8}, 2/8 \Rightarrow$ màxim per a $i=2$ ($\neq k=0$)
(cal permutar files)

* Actualització: $p = (2, 1, 0, 3)$; $\text{sig} = -1$

Intercanieu files $0 \leftrightarrow 2$ de A i feu l'eliminació

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 3/4 & -1 & 8 & 8 \\ 1/4 & 0 & 5 & 8 \\ 2/4 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pas $k=1$

* Cerca del pivot en la subcolumna 1:

Valors "relatius": $1/8, 0/8, \underline{2/8} \Rightarrow$ màxim per a $i=3$ ($\neq k=1$) (cal permutar files)

* Actualització: $p = (2, 3, 0, 1)$; $\text{sig} = +1$

Intercanieu de files $1 \leftrightarrow 3$ de A

* Feu l'eliminació

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2/4 & 2 & 4 & 8 \\ 1/4 & 0 & 5 & 8 \\ 3/4 & -1 & 8 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2/4 & 2 & 4 & 8 \\ 1/4 & 0 & 5 & 8 \\ 3/4 & -1/2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Pas $k=2$

* Cerca del pivot en la subcolumna 2:

Valors "relatius": $5/8, \underline{10/12} \Rightarrow$ màxim per a $i=3$ ($\neq k=2$) (cal permutar files)

* Actualització: $p = (2, 3, 1, 0)$; $\text{sig} = -1$

Intercanieu de files $2 \leftrightarrow 3$ de A

* Feu l'eliminació

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2/4 & 2 & 4 & 8 \\ 3/4 & -1/2 & 10 & 12 \\ 1/4 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2/4 & 2 & 4 & 8 \\ 3/4 & -1/2 & 10 & 12 \\ 1/4 & 0 & 5/10 & 2 \end{pmatrix}$$

\rightarrow

Resultat

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p = (2, 3, 1, 0) \Rightarrow PA \equiv (A \text{ amb l'ordre de files: } 2, 3, 1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que $PA = LU$.

Esquema del programa

main

declarar variable

llegir n

reservar de memòria

llegir la matriu i per-ne còpia

cridar lu

si retorna 0:

missatge: "no és possible per $PA=LU$ "

en cas contrari:

escriure L i U

escriure p

escriure PA

escriure LU

alliberar memòria

final

lu

declarar variable, i inicialitzar la puntat

$\forall k = 0, 1, \dots, n-2$

$i = \text{indmaxrel}(a, k, n)$

si $i \neq k$:

intercanviar $p_i \leftrightarrow p_k$

canviar el signe de la puntat

intercanviar files $i \leftrightarrow k$ de la matriu

si pivot = 0:

retornar 0

si no:

calcular els multiplicadors i fer la reducció

[imprimir la matriu després del pas k]

$$\left[\begin{array}{l} \forall i = k+1 \div n-1 \\ a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk} \\ \forall j = k+1 \div n-1 \quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj} \end{array} \right]$$

retornar la puntat de la permutació

final

indmaxrel

declaracions

inicialitzacions de la fila k i del màxim relatiu associat

$\forall i = k+1 \div n-1$

[calcular el màxim relatiu de la fila i

si cal, actualitzar la fila del pivot i el màxim relatiu

retornar la fila del pivot.