

## MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2010-11

Examen parcial del 8 de novembre de 2010

1.- Volem calcular el volum d'un con, on el radi de la base és  $r = 0.250\text{m}$  i l'alçada és  $h = 0.500\text{m}$ ,

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

- a) Suposem que la precisió de les mides correspon als dígit donats (amb arrodoniment), i que usem l'aproximació  $\pi \approx 3.1416$ . Usant la fórmula de propagació d'errors, digues a quin interval es troba el volum del con (suposem que no es comet cap error en les operacions).
- b) Suposant que l'error en les mesures de  $r$  i  $h$  és el mateix, amb quina exactitud cal conèixer les dades (i  $\pi$ ) per tal de garantir un error absolut menor que  $10^{-5}$  en el càlcul del volum del con?
- c) Si es comet un error relatiu de  $10^{-10}$  en les operacions aritmètiques, com afecta això a l'error final comès a l'apartat a)?

2.- Sigui  $a$  i  $b$  dos nombres reals positius tals que  $a > b$ , i considerem les dues expressions equivalents

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Suposem que cada operació aritmètica es fa amb un error relatiu fitat per  $u$ .

- a) Trobeu fites dels errors relatius per a les dues expressions, en funció de  $u$ ,  $a$  i  $b$ .
- b) Raoneu quina de les dues expressions és numèricament millor, en cadascun dels dos casos:  $a \gg b$  i  $a \approx b$ . Indicació: Podeu fer proves numèriques. Per exemple, considereu  $a = 9.8765$  i els dos casos  $b = 0.011111$  i  $b = 9.8754$ . Feu els càlculs amb pocs dígit.

3.- Sigui  $U = (u_{i,j})$  una matriu real  $n \times n$ , regular i triangular superior.

- a) Demostreu que  $U^{-1} = X = (x_{i,j})$  és també triangular superior.
- b) Doneu fórmules recurrents per a trobar els elements de  $X$  en forma d'algorisme i compteu quants productes i quantes divisions cal fer (en funció de  $n$ ).

4.- Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Digueu per a quins valors del paràmetre  $a$  NO existeix la descomposició  $A = LU$ , amb  $U$  triangular superior, i  $L$  triangular inferior amb uns a la diagonal.
- b) Per a quins valors d' $a$  NO existeix la descomposició  $PA = LU$ , on  $P$  és una matriu de permutació?

5.- Considerem el sistema lineal real  $Ax = b$ ,  $n \times n$ . Suposem  $A$  regular i  $b \neq 0$ . Sigui  $y$  una aproximació de la solució exacta  $x$ ,  $e = x - y$  el vector error, i  $r = b - Ay$  el vector residu. Usarem una norma vectorial qualsevol, així com la norma matricial associada.

- a) Demostreu  $\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$ .
- b) Raoneu si és certa o falsa la proposició següent:  $\|r\|$  petit implica  $\|e\|$  petit.
- c) Idem  $\|e\|$  petit implica  $\|r\|$  petit.
- d) Demostreu  $\frac{\|r\|}{k(A)} \leq \frac{\|e\| \|b\|}{\|x\|} \leq k(A) \|r\|$ .

Entrega problemes diferents en fulls diferents

Notes: Dimecres 17 de novembre, a les 12h, al Campus Virtual i al taulell del “xalet”.

Revisions: Divendres 19, de 12:30 a 13:00, al “xalet”.