Grau de Matemàtiques. Curs 2011-2012. Semestre de tardor
MÈTODES NUMÈRICS I

PRÀCTICA 8: Interpolació polinomial (continuació)

L'objectiu d'aquesta pràctica és el de calcular el polinomi d'interpolació d'Hermite associat a un conjunt de dades adequat.

Problema [Interpolació d'Hermite (simple)]
Sigui $n \geq 0$ i considerem $n+1$ ternes de valors reals

$$(x_i, f_i, g_i)\ ,\quad i = 0, 1, \ldots, n$$

on les abscisses x_i són totes diferents entre si.

Volem trobar un polinomi $p \in P_{2n+1}(x)$ que verifiqui les condicions:

$$p(x_i) = f_i\ ,\quad p'(x_i) = g_i\ ,\quad \forall i = 0, 1, \ldots, n\ .$$

Exercici 1 [Programa principal]
Feu un programa amb les característiques:

- Llegeixi un valor natural n i reservi memòria per a 2 vectors (x i f) de $2n+2$ components reals.
- Llegeixi $n+1$ ternes de valors ($(x_i, f_i, g_i)\ ,\quad i = 0, 1, \ldots, n$) i ompli els vectors x i f per tal que quedin en la forma

$$\mathtt{x} = (x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n)\ ,\quad \mathtt{f} = (f_0, g_0, f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n)\ .$$

- Invoqui la funció del proper exercici, `difdivherm`, per a calcular les diferències dividides generalitzades associades a les dades llegides.
- Si la funció ha retornat el valor 0, és que s'han pogut calcular els coeficients (en una base adequada) del polinomi interpolador d'Hermite $p(x)$. Seguidament, s'avalua aquest polinomi, així com la seva derivada primera, en 501 punts equidistants de l'interval $[x_0, x_n]$, i s'escriuen en un fitxer les ternes $(z_i, p(z_i), p'(z_i))\ ,\quad i = 0, 1, \ldots, 500$.

Nota: Per a calcular $p(z)$ i $p'(z)$ es pot adaptar la funció `horner` de la pràctica anterior. En general, suposem que

$$p(z) = c_0 + c_1(z - y_0) + c_2(z - y_0)(z - y_1) + \cdots c_m(z - y_0)(z - y_1) \cdots (z - y_{m-1}),$$

on els nodes y_i, $i = 0, \ldots, m$ no tenen perquè ser tots diferents. Llavors definim

$$p_0 = c_m, \qquad p_0' = 0,$$

i per $1 \leq j \leq m$ definim recurrentment

$$p_j' = p_{j-1} + (z - y_{m-j})p_{j-1}', \qquad p_j = c_{m-j} + (z - y_{m-j})p_{j-1}.$$

Es pot demostrar (fer-ho) que $p(z) = p_m$ i $p'(z) = p_m'$.

Exercici 2 [Adaptació del mètode de les diferències dividides]

Escriu una funció amb capçalera:

```
int difdivherm(double *x, double *f, int m)
```

de manera que:

- A l'entrada, `x` i `f` són vectors coneguts, de $m + 1 = 2n + 2$ components, de la forma explicada a l'exercici 1.
- A la sortida, el vector `f` conté les diferències dividides generalitzades associades a la taula de valors (x_i, f_i, g_i) , $i = 0, 1, \ldots, n$.

  Recordem que les fórmules per a calcular les diferències en el cas del problema d'Hermite simple són com en el cas d'interpolació de Newton excepte en el primer pas, on cal tenir en compte el conveni:

  $$f[x_i, x_i] \equiv g_i \ \ \forall i = 0, 1, \ldots, n \ .$$

- Si el procés s'ha pogut fer sense cap entrebanc, la funció retorna el valor 0. En canvi, si algun dels denominadors que surten en el procés té valor absolut menor que 10^{-12} llavors el procés no continua i la funció retorna el valor -1.

Exercici 3 [Gràfica del polinomi interpolador]

Usem el programa gràfic `gnuplot` per a pintar les gràfiques dels polinomis $p(x)$ i $p'(x)$.