(1) Volum d'un con: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Dades: $r = 0.250$ m, $h = 0.500$ m.

(a) precisió mides $\Leftrightarrow$ dígits donats: $r = \underbrace{0.250}_{\bar r} \pm \underbrace{\tfrac{1}{2}10^{-3}}_{\Delta r}$; $h = \underbrace{0.500}_{\bar h} \pm \underbrace{\tfrac{1}{2}10^{-3}}_{\Delta h}$

$\pi = \underbrace{3.1416}_{\bar \pi} \pm \Delta\pi$. Prenem $\Delta \pi = 10^{-5}$ (es pot usar qualsevol altra fita)

Propagació: $|\Delta V| \lesssim \left|\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\Delta \pi\right|$ (les derivades parcials s'avaluen en el punt conegut $\underbrace{(\bar r, \bar h, \bar \pi)}_{\equiv \bar P}$)

Càlculs:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}(\bar P) = 0.261799\ldots < 0.2618$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial h}(\bar P) = 0.065449\ldots < 0.06545$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{r^2 h}{3} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \pi}(\bar P) = 0.01041\widehat{6} < 0.01042$$

Per tant $|\Delta V| \lesssim 0.2618 \cdot \frac{1}{2}10^{-3} + 0.06545 \cdot \frac{1}{2}10^{-3} + 0.01042 \cdot 10^{-5} = 0.1637292 \cdot 10^{-3}$

A més, $\bar V = \dfrac{\bar\pi\, \bar r^2 \cdot \bar h}{3} = 0.032725 \Rightarrow \boxed{V = 0.032725 \pm 0.1637292 \cdot 10^{-3}\ m^3}$

Nota. Es pot fer directament usant $|E_{rel}(\text{producte o quocient})| \leq \sum_{\text{factors}} |E_{rel}(\text{factor})|$

O sigui: $|E_{rel.}(V)| \lesssim |E_{rel.}(\pi)| + 2|E_{rel.}(r)| + |E_{rel}(h)|$

Càlculs:

$$\left.\begin{array}{l} |E_{rel.}(\pi)| \lesssim \dfrac{10^{-5}}{3.1416} \simeq 0.3183 \times 10^{-5} \\ |E_{rel}(r)| \leq \dfrac{\frac{1}{2}10^{-3}}{0.25} = 2. \times 10^{-3} \\ |E_{rel}(h)| \leq \dfrac{\frac{1}{2}10^{-3}}{0.5} = 1. \times 10^{-3} \end{array}\right\} \Rightarrow |E_{rel.}(V)| \lesssim 5.0032 \times 10^{-3}$$

Llavors: $E_{abs}(V) \equiv \Delta V \simeq E_{rel}(V) \cdot \bar V \leq 5.0032 \times 10^{-3} \cdot 0.032725 = 0.1637297 \cdot 10^{-3}$

(b) Suposem precisió idèntica en r, h (i π). Quina ha de ser per tal que $|\Delta V| \leq 10^{-5}$?

Busquem $\varepsilon > 0 \mid [|\Delta r|, |\Delta h|, |\Delta \pi| \leq \varepsilon \Rightarrow |\Delta V| \leq 10^{-5}]$

Segons la fórmula de propagació, només cal imposar $\underbrace{\left(\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right|\right)}_{0.33767} \varepsilon \leq 10^{-5}$

$\Rightarrow \boxed{\varepsilon \leq 2.9615 \times 10^{-5}}$

(c) Suposem error relatiu de 10^{-10} en les operacions. $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ té 3 productes i 1 divisió

Valor calculat $\tilde V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)(1+\delta_4)$ $\quad |\delta_i| \leq 10^{-10}$

$= \dfrac{\pi r^2 h}{3}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \underbrace{O_2}_{\text{termes amb } \delta_i\delta_j,\ \delta_i\delta_j\delta_k,\ \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4}).$ Els menyspreem.

$\Rightarrow |E_{rel.}(\tilde V)| \simeq |\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4| \leq 4 \cdot 10^{-10}$

$\Rightarrow \boxed{|E_{abs}(\tilde V)| \leq 4 \cdot 10^{-10} \cdot V \simeq 0.1309 \times 10^{-10}}$

És $\boxed{\text{molt més petit}}$ que l'error de l'apartat a), degut a la propagació de l'error en les dades.

(2) $a>b>0$. Expressions equivalents: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Suposem: $fl(x \text{ op } y)=(x \text{ op } y)(1+\delta)$, $|\delta|\le u$ $\forall$ op $\in\{+,-,*,/\}$

(a) ¿Error relatiu de les dues expressions: fita en funció de: a, b, u ?

i) $fl(a^2-b^2)=\left[a^2(1+\delta_1)-b^2(1+\delta_2)\right](1+\delta_3)$ $\quad |\delta_1|,|\delta_2|,|\delta_3|\le u$

$$=\left[(a^2-b^2)+a^2\delta_1-b^2\delta_2\right](1+\delta_3)$$

$$=(a^2-b^2)+a^2\delta_1-b^2\delta_2+(a^2-b^2)\delta_3+O(u^2)$$

$$\approx (a^2-b^2)\Big[1+\underbrace{\frac{a^2}{a^2-b^2}\delta_1-\frac{b^2}{a^2-b^2}\delta_2+\delta_3}_{\text{això és l'error relatiu en el resultat (aproximat a 1er ordre)}}\Big]$$

Fita: $\boxed{|E_{rel.}(a^2-b^2)|}\lesssim\left|\frac{a^2}{a^2-b^2}u\right|+\left|\frac{-b^2}{a^2-b^2}u\right|+|u|=\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+1\right|u=\boxed{\frac{2a^2}{a^2-b^2}u}$

ii) $fl\left[(a+b)(a-b)\right]=(a+b)(1+\varepsilon_1)\cdot(a-b)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$ $\quad |\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,|\varepsilon_3|\le u$

$$=(a+b)(a-b)\left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+O(u^2)\right)$$

$$\approx(a+b)(a-b)\Big(1+\underbrace{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}_{\text{això és l'error relatiu en el resultat (aproximat a 1er ordre)}}\Big)$$

Fita: $\boxed{\left|E_{rel.}[(a+b)(a-b)]\right|\lesssim 3u}$

(b) Quina expressió és millor? en 2 casos:

Cas $a>>b$: Aquí, $a^2-b^2\approx a^2$. Per tant: $|E_{rel}(a^2-b^2)|\lesssim 2u$ ← aquesta expressió és millor, encara que la diferència entre $2u$ i $3u$ és molt poca, ja que u és petit.

Mentre que $E_{rel}[(a+b)(a-b)]\lesssim 3u$

Cas $a\approx b$: Ara, $a^2-b^2\approx 0$ $\Rightarrow$ $|E_{rel}(a^2-b^2)|\lesssim \underbrace{\frac{2a^2}{a^2-b^2}}_{\text{molt gran}}u$

$\Rightarrow$ $(a+b)(a-b)$ és millor que a^2-b^2; de manera molt clara

Exemple: usant 5 dígits significatius

Si $a=9.8765$, $b=9.8754$ llavors

* Exacte: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=0.02172709$
* $\left.\begin{array}{l}a^2\approx 97.545\\ b^2\approx 97.524\end{array}\right\}\Rightarrow a^2-b^2\simeq 0.021$
* $\left.\begin{array}{l}a+b\approx 19.752\\ a-b\approx 0.0011\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)(a-b)\approx 0.02173$ ← és millor

Nota: En l'exemple de l'altre cas, la diferència entre les dues expressions no s'aprecia.

(3) $U=(u_{ij})$ $n\times n$, triang. superior i regular $(\Rightarrow u_{kk}\neq 0 \ \forall k=1,2,\dots,n)$

(a) ¿ $U^{-1}\equiv X=(x_{ij})$ també és triang. superior ?

Imposem $UX=Id$, o bé: $U x^{(j)} = e^{(j)}$ $\forall j=1,2,\dots,n$; on $X=\left(x^{(1)}|x^{(2)}|\dots|x^{(n)}\right)$; $e^{(j)}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow j$

Fixem $j\in\{1,2,\dots,n\}$. En components:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n}\\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n}\\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{1j}\\ x_{2j}\\ x_{3j}\\ \vdots\\ x_{n-1,j}\\ x_{nj}\end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } j$$

$\parallel$ ← usant que U és triangular, va canviant l'índex inferior de $\sum$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} u_{1k}x_{kj}\\ \sum_{k=2}^{n} u_{2k}x_{kj}\\ \vdots\\ \sum_{k=j-1}^{n} u_{j-1,k}x_{kj}\\ \sum_{k=j}^{n} u_{jk}x_{kj}\\ \sum_{k=j+1}^{n} u_{j+1,k}x_{kj}\\ \vdots\\ \sum_{k=n}^{n} u_{nk}x_{kj}\end{pmatrix}$$

Igualant aquest vector, component a component, amb $e^{(j)}$, i començant per la última:

fila n: $\underset{\neq 0}{u_{nn}}x_{nj}=0 \Rightarrow x_{nj}=0$

fila $n-1$: $\underbrace{u_{n-1,n-1}}_{\neq 0}x_{n-1,j}+u_{n-1,n}\underbrace{x_{nj}}_{=0}=0 \Rightarrow x_{n-1,j}=0$

$\vdots$

fila $j+1$: $\underbrace{u_{j+1,j+1}}_{\neq 0}x_{j+1,j}+\sum_{k=j+2}^{n}u_{j+1,k}\underbrace{x_{kj}}_{=0} \Rightarrow x_{j+1,j}=0$

Parem aquí, de moment. (*)

Per tant, $x^{(j)}=\begin{pmatrix}x_{1j}\\ x_{2j}\\ \vdots\\ x_{jj}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\forall j=1,2,\dots,n$. Això vol dir que U^{-1} és triangular superior

(b) ¿ Fórmules recurrents i recompte de $*$ i $/$ en funció de n?

Continuem, a (*), els casos $j, j-1, j-2, \dots, 2, 1$

Degut a l'apartat (a), l'índex superior de $\sum$ es pot posar a $\underline{\underline{j}}$ (ja que, per a $k=j+1,\dots,n$ $x_{kj}=0$)

fila j: $u_{jj}\underbrace{x_{jj}}=1 \Rightarrow x_{jj}=1/u_{jj}$

fila $j-1$: $u_{j-1,j-1}\underbrace{x_{j-1,j}}+u_{j-1,j}\cdot x_{jj}=0 \Rightarrow x_{j-1,j}=\dfrac{-u_{j-1,j}\cdot x_{jj}}{u_{j-1,j-1}}$

$\vdots$

fila 1: $u_{11}\underbrace{x_{1j}}+u_{12}x_{2j}+\dots+u_{1j}\cdot x_{jj}=0 \Rightarrow x_{1j}=\dfrac{-\sum_{k=2}^{j}u_{1k}x_{kj}}{u_{11}}$

Resum:

$$\boxed{\forall j=1,2,\dots,n \quad \begin{array}{ll} \forall i=j+1,j+2,\dots,n & x_{ij}=0\\ x_{jj}=1/u_{jj} & \\ \forall i=j-1,j-2,\dots,1 & x_{ij}=\left(-\sum_{k=i+1}^{j}u_{ik}x_{kj}\right)/u_{ii}\end{array}}$$

Operacions:

$(/)$: $\sum^{n}\left(1+\sum^{j-1}1\right)=\sum^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}$; $(*)$: $\sum^{n}\sum^{j-1}\sum^{j}1=\sum^{n}\sum^{j-1}(j-i)=\sum^{n}\frac{j(j-1)}{2}=\dots=\frac{n^3-n}{6}$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$ paràmetre

a) Cal trobar els valors de $\underline{a}$ per als quals NO es pot fer LU

Per a aconseguir la descomposició $A = LU$ (sense matriu de permutació P), fem eliminació gaussiana $\underline{\text{sense pivotatge}}$. Si, en algun dels 3 passos, el pivot val 0, voldrà dir que la descomposició no existeix.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pas 1: pivot}=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -14 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pas 2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \square & X \\ 0 & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

$m_{21} = \frac{2}{1} = 2$

$m_{31} = \frac{3}{1} = 3$

$m_{41} = \frac{4}{1} = 4$

pivot $= a+2$

$\boxed{\text{Cal } a+2 \neq 0}$

$m_{32} = \frac{6}{a+2}$

$m_{42} = \frac{12}{a+2}$

$\square = 1 - 1 \cdot \frac{6}{a+2} = \frac{a-4}{a+2}$

Per a fer el Pas 3 (i últim) cal $0 \neq \text{pivot} = \square = \frac{a-4}{a+2}$ (els valors X no importen)

Per tant, $\boxed{\nexists \text{ descomposició LU en els casos } a=-2 \text{ i } a=4}$

En la resta de casos, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +4\}$, sí que hi ha descomposició $A = LU$

b) Cal trobar els valors de $\underline{a}$ per als quals $\underline{\text{no}}$ existeix descomposició $PA = LU$.

O sigui, ara podem fer intercanvis de files (pivotatges)

Si canviem les files $2 \Leftrightarrow 4$ obtenim $PA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & a & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Per a aquesta matriu, actuem com a l'apartat a) i veiem que es poden fer els 3 passos d'eliminació gaussiana, $\underline{\text{sigui qui sigui } a \in \mathbb{R}}$. Per tant,

$$\boxed{\exists \text{ descomposició } PA = LU \quad \forall a \in \mathbb{R}}$$

Nota. De fet, no cal fer l'eliminació gaussiana, realment. Només observant que

$|1| \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & -6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$,

ja se sap que l'eliminació és possible, perquè cap dels 3 pivots serà 0.

(5) $Ax=b$; A $n\times n$, regular ; $b\neq 0$ $(\Rightarrow x\neq 0)$

y solució aproximada. Siguin $e=x-y$ (error), $r=b-Ay$ (residu)

$\|\ \|$, norma vectorial qualsevol, i també la matricial associada

(a) ¿ $\frac{\|r\|}{\|A\|}\leq\|e\|\leq\|A^{-1}\|\,\|r\|$?

$$r=b-Ay=Ax-Ay=A(x-y)=Ae \Rightarrow \|r\|=\|Ae\|\leq\|A\|\|e\| \Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\|}\leq\|e\|$$

$$e=A^{-1}r \Rightarrow \|e\|=\|A^{-1}r\|\leq\|A^{-1}\|\,\|r\|$$

(b) ¿ $\|r\|$ petit $\Rightarrow$ $\|e\|$ petit?

És una proposició falsa: si A és tal que $\|A\|$ és molt petit, llavors, com que $\frac{\|r\|}{\|A\|}\leq\|e\|$, pot ser $\|e\|$ gran (encara que $\|r\|$ sigui petit)

(c) ¿ $\|e\|$ petit $\Rightarrow$ $\|r\|$ petit?

És una proposició falsa: si A és tal que $\|A^{-1}\|$ és molt petit, llavors, com que $\frac{\|e\|}{\|A^{-1}\|}\leq\|r\|$, pot ser $\|r\|$ gran (encara que $\|e\|$ sigui petit)

(d) ¿ $\frac{\|r\|}{K(A)}\overset{(i)}{\leq}\frac{\|e\|}{\|x\|}\overset{(ii)}{\leq}K(A)\,\|r\|$? Veurem que és fals. Falta posar $\|b\|$ al mig.

Recordem que $K(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$

Dividim el resultat (a) per $\|x\|\ (\neq 0)$: $(1)\equiv\frac{\|r\|}{\|A\|\,\|x\|}\leq\frac{\|e\|}{\|x\|}\leq\frac{\|A^{-1}\|\,\|r\|}{\|x\|}\equiv(2)$

Observem:

* $Ax=b \Rightarrow \|b\|=\|Ax\|\leq\|A\|\,\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\leq\frac{\|A\|}{\|b\|}$. Llavors $(2)\leq\frac{\|A^{-1}\|\,\|r\|\,\|A\|}{\|b\|}=K(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$

* $x=A^{-1}b \Rightarrow \|x\|\leq\|A^{-1}\|\,\|b\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|\,\|b\|}$. Llavors $(1)\geq\frac{\|r\|}{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|b\|}=\frac{\|r\|}{K(A)\cdot\|b\|}$

Hem vist: $\frac{\|r\|}{K(A)\,\|b\|}\leq\frac{\|e\|}{\|x\|}\leq K(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\|r\|}{K(A)}\leq\frac{\|e\|\cdot\|b\|}{\|x\|}\leq K(A)\,\|r\|}$$