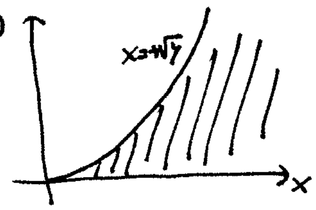
① (b) $z \equiv f(x,y) = \ln(x-\sqrt{y})$

$D = \{(x,y) \mid y>0,\ x > +\sqrt{y}\}$ és la part ratllada



Propagació de l'error (absolut):

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad ; \quad |\Delta f| \lesssim \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|$$

Per hipòtesi, $|\Delta x|$ i $|\Delta y|$ són de la mateixa magnitud. Per tant, per a saber quin afecta més el resultat, que té error $|\Delta f|$, cal comparar $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ i $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-\sqrt{y}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x-\sqrt{y}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}}$$

Per tant, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \iff 1 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y}} \iff y \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{1}{4}$

Resum: Per a $(x,y) \in D$,
- si $y < \frac{1}{4}$ llavors afecta més l'error en y
- si $y = \frac{1}{4}$ llavors afecten per igual els errors en x i en y
- si $y > \frac{1}{4}$ llavors afecta més l'error en x

(c) Seguint les hipòtesis, el resultat calculat serà

$$fl(z) = (1+\delta_3)\ln\{[x-(1+\delta_1)\sqrt{y}](1+\delta_2)\}, \quad \text{amb } |\delta_1|,|\delta_2|,|\delta_3| \leq u \ll 1$$

$$= (1+\delta_3)\ln\{[(x-\sqrt{y})-\delta_1\sqrt{y}](1+\delta_2)\}$$

$$= (1+\delta_3)\ln\{(x-\sqrt{y})-\delta_1\sqrt{y}+\delta_2(x-\sqrt{y})+\underbrace{O(\delta_1\delta_2)}_{\text{menyspreable}}\}$$

Ara usem la indicació $\ln(a+d) \simeq \ln(a) + \frac{1}{a}d$, amb $a \equiv (x-\sqrt{y})$

$$fl(z) \simeq (1+\delta_3)\cdot\left[\ln(x-\sqrt{y}) + \frac{1}{x-\sqrt{y}}\left[-\delta_1\sqrt{y}+\delta_2(x-\sqrt{y})\right]\right] =$$

$$= (1+\delta_3)\left[\ln(x-\sqrt{y}) - \delta_1\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \delta_2\right] =$$

$$= \ln(x-\sqrt{y}) + \left[\delta_3\ln(x-\sqrt{y}) - \delta_1\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \delta_2 + \underbrace{O(\delta_i\delta_j)}_{\text{menyspreable}}\right]$$

Per tant l'error absolut en el resultat serà, aproximant a primer ordre,

$$e_a(z) \simeq \delta_3\ln(x-\sqrt{y}) - \delta_1\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + \delta_2$$

I una fita serà

$$\boxed{|e_a(z)| \lesssim \left(|\ln(x-\sqrt{y})| + \frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}} + 1\right)\cdot u}$$

② (a) Fem eliminació gaussiana (sense pivotatge)

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & & \\ & & b_4 & a_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow[m_{21}=b_2/a_1]{} \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ 0 & a_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & & \\ & & b_4 & a_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow[m_{32}=b_3/a_2]{} \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ 0 & a_2 & & & \\ & 0 & a_3 & & \\ & & b_4 & a_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{etc.}}$$

O sigui, en cada etapa $\begin{cases} \text{només cal calcular 1 multiplicador (la resta són 0)} \\ \text{no canvia cap element més de la matriu (excepte el que fem 0)} \end{cases}$

La matriu final del procés serà U, i els multiplicadors, afegits a la identitat, donen L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ b_2/a_1 & 1 & & & & \\ & b_3/a_2 & 1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & b_{n-1}/a_{n-2} & 1 & \\ & & & & b_n/a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & \\ & & a_3 & & & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1} & \\ & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

(b) Sigui $A^{-1} = (c^1, c^2, \ldots, c^n)$. Busquem les columnes c^j $j=1,2,\ldots,n$

Cal $A A^{-1} = Id$, o sigui $A c^j = e^j$ $\forall j=1,2,\ldots,n$; on $e^j=(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{1},0,\ldots,0)^T$

Fem per exemple, el cas $j = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & & & & \\ & b_3 & a_3 & & & \\ & & b_4 & a_4 & & \\ & & & b_5 & a_5 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \\ c_{43} \\ c_{53} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 c_{13} = 0 \\ b_2 c_{13} + a_2 c_{23} = 0 \\ b_3 c_{23} + a_3 c_{33} = 1 \\ b_4 c_{33} + a_4 c_{43} = 0 \\ b_5 c_{43} + a_5 c_{53} = 0 \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{13} = 0 \\ c_{23} = 0 \\ c_{33} = 1/a_{33} \\ c_{43} = \dfrac{-b_4 c_{33}}{a_4} \\ c_{53} = \dfrac{-b_5 c_{43}}{a_5} \\ \ldots \end{cases}$$

En general, l'algorisme serà:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall j=1,2,3,\ldots,n \\ \quad c_{1j} = c_{2j} = \ldots = c_{j-1,j} = 0 \\ \quad c_{jj} = 1/a_j \\ \quad \forall k = j+1, j+2, \ldots, n \\ \qquad c_{kj} = -b_k c_{k-1,j}/a_k \end{array}}$$

I les operacions:

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} (n-j) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(/) Cal afegir una divisió més per a cada $j=1,\ldots,n$

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Nota. Hi ha tants canvis de signe com (*).

(c). Usem (b) i per a cada j:

$$\left.\begin{array}{l} c_{jj} = 1/a \\ c_{j+1,j} = -b(1/a)/a = -b/a^2 \\ c_{j+2,j} = -b(-b/a^2)/a = +b^2/a^3 \\ c_{j+3,j} = -b(+b^2/a^3)/a = -b^3/a^4 \\ \text{etc} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & & & & \\ -b/a^2 & 1/a & & & 0 \\ +b^2/a^3 & -b/a^2 & 1/a & & \\ -b^3/a^4 & +b^2/a^3 & -b/a^2 & 1/a & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \;\; 1/a \end{pmatrix}}$$

2 (d) $K_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

Recordem que $\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|$

Si la dimensió és $\boxed{n=1,}$ llavors $A=(a)$, $A^{-1}=(1/a)$ i $K_\infty(A) = \boxed{|a| + \frac{1}{|a|}}$

Suposem $\boxed{n\geq 2.}$ Llavors

$\|A\|_\infty = |a| + |b|$

$\|A^{-1}\|_\infty = \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{b}{a^2}\right| + \left|\frac{b^2}{a^3}\right| + \dots + \left|\frac{b^{n-1}}{a^n}\right| = \left|\frac{1}{a}\right| \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{b}{a}\right|^i$

Distingim 2 casos:

- Si $\boxed{|a|=|b|}$ llavors $\|A^{-1}\|_\infty = n\cdot\left|\frac{1}{a}\right|$. Per tant $K_\infty(A) = 2|a|\cdot n\left|\frac{1}{a}\right| = \boxed{2n}$
- Si $|a|\neq|b|$ llavors $\|A^{-1}\|_\infty = \left|\frac{1}{a}\right| \frac{|b/a|^n - 1}{|b/a|-1}$. Llavors $K_\infty(A) = \frac{|a|+|b|}{|a|} \frac{|b/a|^n-1}{|b/a|-1}$

$$= \boxed{\frac{\left|\frac{b}{a}\right|+1}{\left|\frac{b}{a}\right|-1}\left(\left|\frac{b}{a}\right|^n - 1\right)}$$

(e) Seguint l'apartat anterior, distingim 2 casos

- Si $\boxed{|a|=|b|}$ llavors $K_\infty(A) = 2n$ és lineal respecte n. Quan n és molt gran, $\boxed{\text{A és mal condicionada}}$

- Si $\boxed{|a|<|b|}$ llavors $K_\infty(A) = (\text{constant})\left(\left|\frac{b}{a}\right|^n - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Quan n és gran, $\boxed{\text{A és molt mal condicionada}}$

③ (a) Fem diferències dividides generalitzades

$$\begin{array}{llll} 0 & f_0 & & \\ & & f'_0 & \\ 0 & f_0 & & (f_1-f_0-f'_0)/(1-0) \\ & & (f_1-f_0)/(1-0) & \\ 1 & f_1 & & \end{array} \Rightarrow \boxed{p(x) = f_0 + f'_0 x + (f_1 - f_0 - f'_0)x^2}$$

(b) Usem la ~~fita~~ fórmula de l'error en la interpolació polinomial

$$|f(x)-p(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x-0)^2(x-1) \right| = \frac{|f^{(3)}(\xi(x))|}{6}|x^2(x-1)|$$

Fitem $q(x) = x^2(x-1)$ a l'interval $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} q(0)=0 \\ q(1)=0 \\ 0=q'(x)=3x^2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2/3 \to q(2/3) = \frac{4}{9}(-1/3) = -4/27 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow |q(x)| \leq \frac{4}{27} \quad \forall x \in [0,1]$$

Per tant $|f(x)-p(x)| \leq \frac{M_3}{6}\cdot\frac{4}{27} = \boxed{\frac{2M_3}{81}}$

(c) La fórmula serà exacta $\forall f \in \mathbb{P}_2 \Leftrightarrow$ és exacta per a una base de $\mathbb{P}_2$

[La raó d'això és que les dues bandes de l'aproximació són lineals respecte f. O sigui, si $f = \sum_i \alpha_i f_i$ (α_i escalars, f_i funcions) llavors

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = \sum_i \alpha_i \int_0^1 f_i(x)dx \\ c_0 f(0) + c'_0 f'(0) + c_1 f(1) = \sum_i \alpha_i \left[c_0 f_i(0) + c'_0 f'_i(0) + c_1 f_i(1)\right] \end{cases}$$]

Calcularem, doncs, els coeficients (c_0, c'_0, c_1) imposant exactitud per a la base $1, x, x^2$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \int_0^1 1\,dx = c_0 + c_1 \\ \frac{1}{2} = \int_0^1 x\,dx = c'_0 + c_1 \\ \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx = c_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{3},\ c'_0 = \frac{1}{6},\ c_0 = \frac{2}{3}}$$

(d) Observem que, si $p(x)$ interpola $f(x)$ com a l'apartat (a) llavors

$$c_0 f(0) + c'_0 f'(0) + c_1 f(1) = c_0 p(0) + c'_0 p'(0) + c_1 p(1) \underset{(c)}{=} \int_0^1 p(x)dx$$

Per tant,

$$\int_0^1 f(x)dx - [c_0 f(0) + c'_0 f'(0) + c_1 f(1)] = \int_0^1 f - \int_0^1 p = \int_0^1 (f-p) = \int_0^1 \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}x^2(x-1)dx$$

Com que $x^2(x-1)$ no canvia de signe a $[0,1]$ (i $f^{(3)}$ és contínua) podem usar el teorema del valor mitjà per a integrals:

$$|\text{Error}| = \left|\frac{f^{(3)}(\eta)}{6}\int_0^1 x^2(x-1)dx\right| \leq \frac{M_3}{6}\Big|\underbrace{\int_0^1 x^2(x-1)dx}_{=-1/12}\Big| = \boxed{\frac{M_3}{72}}$$

⑤ a) Sigui $e_n = x_n - \alpha$ $\forall n \geq 0$. Cal veure que $\frac{e_{n+1}}{e_n^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} C \neq 0$, i trobar C.

El mètode és NR: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Usem la hipòtesi de multiplicitat p del zero α. Desenvolupant per Taylor:

$$f(x_n) = \cancel{f(\alpha)} + \cancel{f'(\alpha)}(x_n-\alpha) + \dots + \frac{\cancel{f^{(p-1)}(\alpha)}}{(p-1)!}(x_n-\alpha)^{p-1} + \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}(x_n-\alpha)^p = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!} e_n^p$$

$\xi \in \operatorname{Int}\langle x_n, \alpha\rangle$

Anàlogament:

$$f'(x_n) = \cancel{f'(\alpha)} + \cancel{f''(\alpha)}(x_n-\alpha) + \dots + \frac{\cancel{f^{(p-1)}(\alpha)}}{(p-2)!}(x_n-\alpha)^{p-2} + \frac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!}(x_n-\alpha)^{p-1} = \frac{f^{(p)}(\eta)}{(p-1)!} e_n^{p-1}$$

$\eta \in \operatorname{Int}\langle x_n, \alpha\rangle$

Per tant,

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f^{(p)}(\xi)/p!}{f^{(p)}(\eta)/(p-1)!} \frac{e_n^p}{e_n^{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{p}\frac{f^{(p)}(\xi)}{f^{(p)}(\eta)}\right) e_n$$

Quan $n\to\infty$, $x_n \to \alpha$, per tant, $\xi, \eta \to \alpha$. Llavors $\boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{p}} \neq 0$

$\boxed{\text{ordre 1 i coef. asimpt: } 1 - \frac{1}{p}}$

b) Si afegim el factor p en el mètode de NR, observem que a l'apartat a) obtindríem $e_{n+1} = e_n - p\,\frac{f^{(p)}(\xi)/p!}{f^{(p)}(\eta)/(p-1)!}\frac{e_n^p}{e_n^{p-1}} = \left(1 - \frac{f^{(p)}(\xi)}{f^{(p)}(\eta)}\right) e_n$

de manera que $\frac{e_{n+1}}{e_n^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 = 0$!!

L'ordre serà >1. Per a trobar-lo, usem un terme més del desenvolupament de Taylor: $f(x_n) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}e_n^p + \frac{f^{(p+1)}(\delta)}{(p+1)!}e_n^{p+1}$; $f'(x_n) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{(p-1)!}e_n^{p-1} + \frac{f^{(p+1)}(\varepsilon)}{p!}e_n^p$

amb $\varepsilon, \delta \in \operatorname{Int}\langle x_n,\alpha\rangle$. Llavors, per al mètode modificat de NR:

$$e_{n+1} = e_n - p\,\frac{\frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}e_n^p + \frac{f^{(p+1)}(\delta)}{(p+1)!}e_n^{p+1}}{\frac{f^{(p)}(\alpha)}{(p-1)!}e_n^{p-1} + \frac{f^{(p+1)}(\varepsilon)}{p!}e_n^p} \underset{\text{simplif. } (p-1)! \text{ i } e_n^{p-1}}{=} e_n - \frac{f^{(p)}(\alpha)\cdot e_n + \frac{p}{p+1}f^{(p+1)}(\delta)e_n^2}{f^{(p)}(\alpha) + \frac{1}{p}f^{(p+1)}(\varepsilon)e_n} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{p}f^{(p+1)}(\varepsilon) - \frac{p}{p+1}f^{(p+1)}(\delta)\right]e_n^2}{f^{(p)}(\alpha) + O(e_n)}$$

Per tant, $\boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p+1}\right)\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{f^{(p)}(\alpha)} \neq 0} \Rightarrow \begin{cases} \text{ordre } 2 \\ \text{coef. } \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p+1}\right)\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{f^{(p)}(\alpha)} \end{cases}$

c) Estem en el cas de l'apartat a) amb $\alpha = 0$ i $x_n = e_n$.

Per tant, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx 1 - \frac{1}{p} \iff p \approx \frac{x_n}{x_n - x_{n+1}}$

Calculant $x_n/(x_n - x_{n+1})$ amb les dades donades obtenim valors ≈ 3 $\Rightarrow \boxed{p=3}$