MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2011-2012

Examen parcial del 7 de novembre de 2011

1.- Volem calcular el valor R definit per

$$R = \left(\sqrt{5} - 2\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)^2} = \left(9 - 4\sqrt{5}\right) = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} \; .$$

(a) Demostreu que, efectivament, les quatre expressions anteriors donen el mateix resultat.

(b) Si el valor $\sqrt{5}$ es coneix només aproximadament, digueu quina de les 4 expressions anteriors és la millor per a avaluar R (o sigui, en quina de les expressions serà menor l'error propagat).

2.- Quan es fan eliminacions gaussianes, apareixen càlculs de la forma

$$m = b/a \quad ,$$

$$c = d - me \quad .$$

(a) Suposem que en cada operació aritmètica es fa un `error relatiu` fitat per $u(<< 1)$. Trobeu una fita (a primer ordre) de l'error relatiu en el resultat c, en funció de u, a, b, d, e.

(b) Aplicació: Siguin

$$a = 0.123, \; b = 0.234, \; d = 0.345, \; e = 0.181 \; .$$

Calculeu c amb aquestes dades, suposant a més que, en cada operació, s'arrodoneix el resultat a 3 dígits significatius.

3.- Sigui $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ una matriu Hessenberg superior, o sigui, verificant

$$i > j + 1 \Longrightarrow a_{ij} = 0 \; .$$

Suposem que A admet factorització LU sense necessitat de fer pivotatges.

(a) Escriviu les fórmules de l'eliminació gaussiana en aquest cas. Tingueu en compte que els zeros de A (que la fan ser Hessenberg superior) es conserven, de manera que es poden estalviar operacions. Compteu també la quantitat de productes i la quantitat de divisions que cal fer per a calcular la factorització LU, en funció de n.

(b) Calculeu la factorització LU de la matriu $n \times n$ $(n > 10)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \; .$$

4.- Direm que una matriu $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ és `equilibrada (per files)` si $S(i) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ no depèn de i.

(a) Demostreu que, donada una matriu A regular qualsevol, es pot trobar una matriu D diagonal regular tal que DA és equilibrada.

(b) Demostreu que si A és equilibrada llavors $\|DA\|_\infty = \|D\|_\infty \|A\|_\infty$, per a tota matriu D diagonal.

(c) Demostreu que si A és equilibrada llavors $\kappa_\infty(A) \le \kappa_\infty(DA)$ per a tota matriu D diagonal no singular.

(d) Quin interès tenen els apartats anteriors a l'hora de resoldre sistemes lineals $Ax = b$?

5.- Volem fer una funció en C tal que, donats els vectors x, y i b, de dimensió n, actualitzi el vector b mitjançant:

$$b \;\leftarrow\; \frac{1}{\|(Id + xy^T)b\|_2}(Id + xy^T)b \;,$$

sempre i quan sigui possible (el denominador de la fracció no pot ser 0).
L'algorisme que usem consta de 3 passos:

- Càlcul de $r = y^T b$.
- Actualització de b per $b + rx$.
- Normalització de b (o sigui, divisió de cada component de b per la $\|\ \ \|_2$ de b), si això és possible.

(a) Demostreu que l'algorisme anterior correspon al que volem.

(b) Completeu el codi que vé a continuació segons les indicacions anteriors i les següents. Només podeu escriure codi en la part dels punts suspensius. La funció ha de retornar el valor 1 si l'actualització ha estat possible, i ha de retornar el valor 0 si no ha estat possible. No podeu usar més variables que les que ja estan declarades.

```
int aval(int n, double x[], double y[], double b[])
{
   double r;
   int i;

   ...

}
```

NOTA: El primer examen parcial consta de les preguntes 1, 2, 3 i 4. La pregunta 5 comptarà per a la qualificació de les pràctiques d'ordinador.
Entrega problemes diferents en fulls diferents
Qualificacions: Divendres 18 de novembre, al Campus Virtual.