

MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques, primer semestre, curs 2010-11
Examen final (segona convocatòria), 27 de juny de 2011

1.- Considerem el sistema lineal 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix},$$

del qual es coneixen valors aproximats de les dades:

$$a = 7 \pm 0.1, \quad b = 3 \pm 0.2, \quad c = 5 \pm 0.3.$$

Trobeu valors aproximats de les incògnites x i y , així com fites (aproximades) dels errors absoluts d'aquests valors (usant la fórmula de propagació de l'error maximal).

2.- Sigui $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Suposem que són nuls tots els elements diferents de

$$\begin{aligned} a_{i,i} & \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ a_{i,1} & \quad \forall i = 2, \dots, n \\ a_{i,n} & \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

(o sigui, són nuls els elements que no estan situats, ni a la diagonal principal, ni a la primera columna, ni a la última columna).

Feu la seva descomposició LU . En particular, digueu quins elements de A han de ser no nuls per a assegurar l'existència de la descomposició. ¿Quins elements de L i de U podem assegurar que són nuls? Doneu les fórmules que permeten trobar explícitament els elements de L i de U . Compteu quantes operacions (\pm , $*$ i $/$) cal fer, en funció de n .

3.- Tenim les dades següents d'una funció $f(x)$:

$$f(0) = -3, \quad f'(0) = +3, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = +2.$$

Calculeu el seu polinomi d'interpolació de grau mínim $p(x)$.

Suposant que f és suficientment diferenciable i que $|f^{(k)}(x)| \leq (k-1)! \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall k \geq 1$, doneu una fita de l'error $|f(0.5) - p(0.5)|$.

Repetiu tots els càlculs anteriors (polinomi i fita) en el cas que hi hagués una condició més: $f(2) = 1$.

4.- Donada la taula

t	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3
r(t)	0.7408	0.9048	1	1.1052	1.3499

volem aproximar el valor $r'(0)$. Useu la fórmula centrada d'ordre 2

$$r'(t) \approx \frac{r(t+h) - r(t-h)}{2h}$$

amb dos passos h diferents, i després feu un pas d'extrapolació, per a trobar l'aproximació buscada.

5.- Sabem que $\alpha = 2^{1/5} \in (1.14, 1.15)$. Volem calcular α amb molta precisió usant el mètode de Newton aplicat a la funció $f(x) = x^5 - 2$ a partir del valor inicial $x_0 = 1.145$. Calculeu 2 iterats, treballant amb 8 dígits significatius. Suposant que poguéssiu fer els càlculs amb tants decimals com volguéssiu, quantes iteracions caldria fer per a garantir un error absolut menor que 10^{-30} en el resultat?

Entregueu problemes diferents en fulls diferents

Notes: Dimecres 6 de juliol, al Campus Virtual.

Revisions: Dijous 7 de juliol, de 12:00 a 13:00, al "xalet".