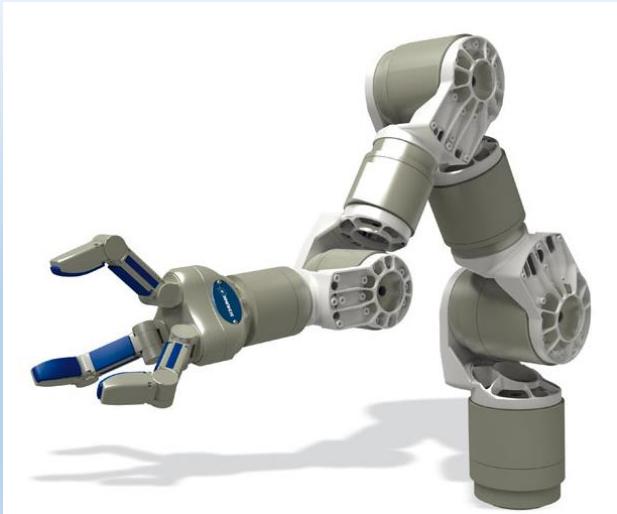


Robotik Sistemlerine Giriş



Yard. Doç. Dr. Hasan TİRYAKİ



Ders Planı

HAFTA	KONU
1.Hafta	Derse giriş, robot teknolojisi hakkında çeşitli temel kavramların tanıtılması.
2.Hafta	<p>Robotikte kullanılan sensörler</p> <p>Robot Studio Konularının Paylaşımı</p> <p>http://new.abb.com/products/robotics/tr/robotstudio/yuklemeler</p> <p>RobotStudio 6.01.01 (ücretsiz 30 günlük deneme sürümü)</p> <p>http://new.abb.com/products/robotics/tr/robotstudio/kullanim-kilavuzu</p> <p>(ücretsiz eğitim videoları)</p>
3.Hafta	Uzaysal tanımlar ve dönüşümler
4.Hafta	Uzaysal tanımlar ve dönüşümler ve Manipülatör kinematikleri giriş
5.Hafta	Manipülatör kinematikleri
6.Hafta	Manipülatör kinematikleri
7.Hafta	ARA SINAV
8.Hafta	ARA SINAV
9.Hafta	Ters manipülatör kinematikleri
10.Hafta	Ters manipülatör kinematikleri
11.Hafta	Jacobian : hız ve statik kuvvetler
12.Hafta	Jacobian : hız ve statik kuvvetler
13.Hafta	Robot Studio Uygulamaları
14.Hafta	Robot Studio Uygulamaları



Robot nedir ?



- Robot, yeniden programlanabilen, maddeleri, parçaları, aletleri programlanmış hareketler ile işe göre taşıyan veya işleyen çok fonksiyonlu makinedir.



Robotik - Tarihçe

- Robot fikri ve kavramı, yunan mitolojisine kadar dayanan bir olgudur.
- Günümüzde robotik alanında kullanılan mekanik sistemlerin çoğunun temeli antik yunan zamanlarına dayanmaktadır.
- İlk dizayn olarak, Leonardo da Vinci'nin 1495 yılında sözde ortaya çıkardığı insansı robot (humanoid robot) dizaynı kabul edilebilir. Söz konusu dizayndaki yapı, el sallama, oturma kalkma, hareketli boyun bölgesi gibi esasları içermektedir.

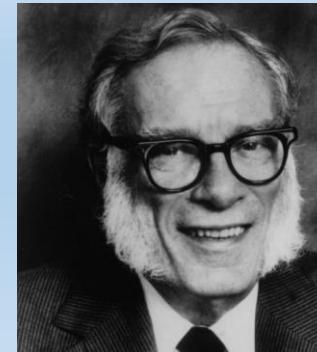
Robotik - Tarihçe

- **Robot** sözcüğü, ilk olarak 1921 yılında bir tiyatro oyununda Çek Cumhuriyeti vatandaşı yazar Karel Capek tarafından kullanılmıştır. (Oyunun konusu ise, insanın robotu buluşu sonrası, robotun insanı yok edisiydi.)



Robotik - Tarihçe

- 1937-1938 yıllarında, Westinghouse şirketi ELEKTRO adlı ürünü ortaya çıkardı. Söz konusu insansı robot yürüyebiliyor, konuşabiliyor ve sigara içebiliyordu. ELEKTRO adlı robot 1939 Dünya Bilişim Fuarı'nda sergilendi.
- 1941 yılında bilim kurgu yazarı Isaac Asimov robotik teknolojisini ifade ederken **robot** kelimesini kullanmış, söz konusu teknolojinin gelecek nesillerin odağı olacağını belirtmiştir.



Robotik - Tarihçe

- 1942 yılında yine yazar Isaac Asimov, Robotığın Üç Yasası adlı taslağı bilim kamuoyuna sunmuştur. Söz konusu üç yasaya sonradan bir adet ekleme de (literatürde 'law zero' olarak geçmektedir.) yapılmıştır.
- Kural 1: Herhangi bir robot, insanlara ve insanlığa zarar verme amaçlı dizayn edilemez.
- Kural 2: Robot, verilen komuta, ortada daha yüksek dereceli bir emir yoksa uymak zorundadır.
- Kural 3: Robot, ortada daha yüksek dereceden bir emir yoksa, kendi var oluşunu korumak ile yükümlüdür.

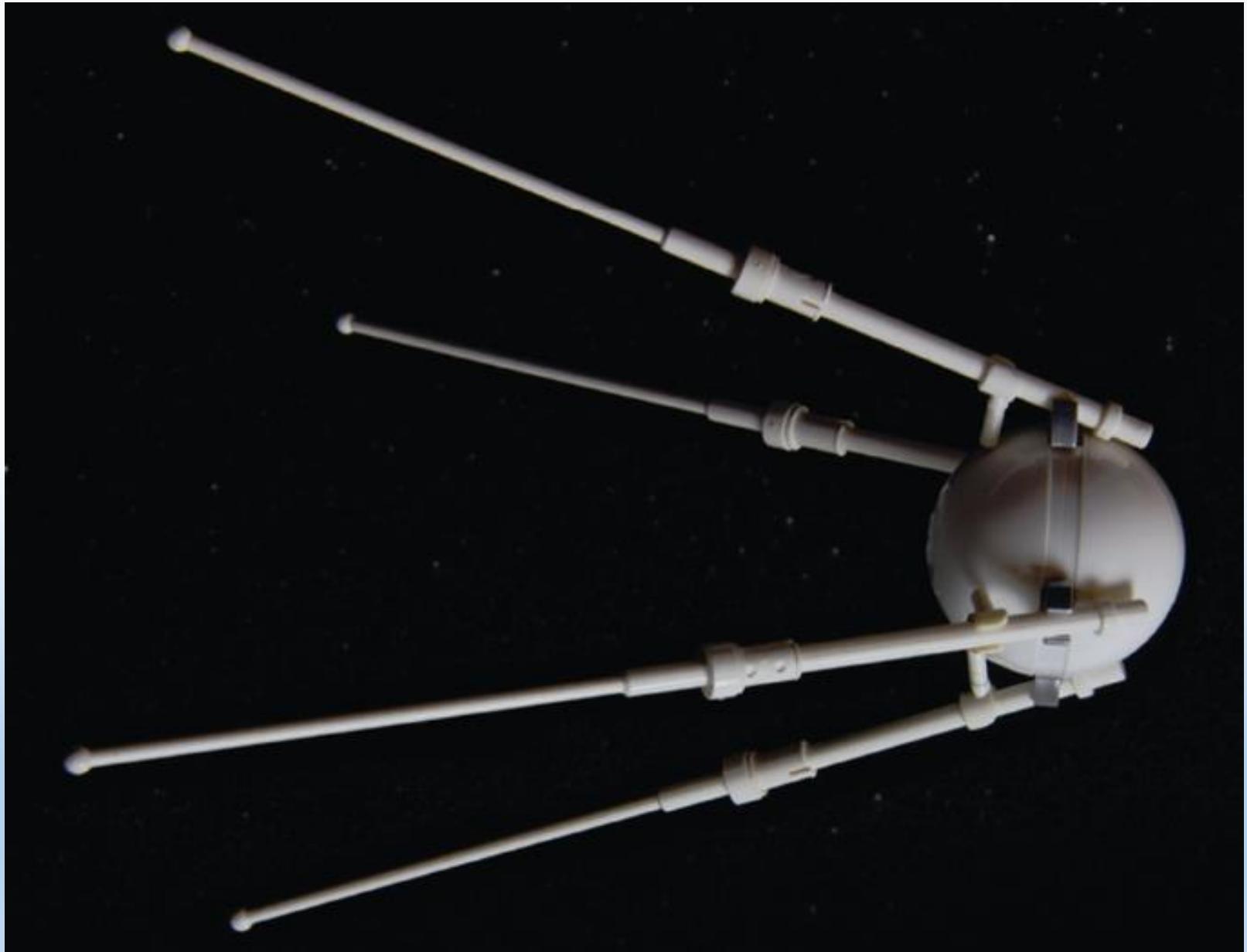
Robotik - Tarihçe

- 1948 yılında, William Grey Walter, bataryası belirlenen kritik seviyeye düştüğünde kendi şarj istasyonunu herhangi bir müdahale olmadan bulabilen bir robot yapmıştır.
- İlk gerçek anlamda programlanabilir robot, 1954 yılında George Devol tarafından gerçeklenmiştir. (US patent 2 998 237)
- Rusya, 4 Ekim 1957'de önemli bir ilke imza atmış, ilk yapay otonom uydu olan **Sputnik-1'i** başarı ile yörüngeye oturtmuştur.

- Sputnik-1.

Ağırlık : 80 kg.

Çap : 58 cm.



Robotik - Tarihçe

- 1964 yılında M.I.T. ve Stanford Üniversitesi'nde ilk yapay zeka laboratuvarları açıldı.
- 1973 yılında, Ichiro Kato tarafından gerçekleştirilen WABOT-1 adlı robot, ortalama 1,5 yaşında bir çocuğun zekasına sahip robot olarak tarihte kendine yer buldu.
- 1981 yılında Shigeo Hirose tarafından yapılan Titan II adlı robot, merdiven inip çıkma yeteneğine sahip ilk robot oldu.



WABOT-1

Robotik - Tarihçe

- 1988 yılında, HelpMate adlı robot, Danbury Hastanesi’nde çalışmaya başladı. Bu durum robotığın medikal giriş olarak kabul edilir.
- 1990 yılında Rodney Brooks tarafından kurulan iRobot firması, askeri alanda robotik faaliyeti gerçekleştiren ilk robotik kuruluşu oldu.

- 1996 yılında Honda firması, gelecekte üreteceği ASIMO adlı robotun temellerini P2 adlı robotun üretimi ile attı.


Robotik - Tarihçe

- 1997 yılında, NASA'nın ürettiği 'Pathfinder' adlı robot Mars'a gönderildi, bu proje sayesinde Mars hakkında detaylı data ve fotoğraf elde edildi.



- Yine 1997 yılında, IBM'in ürettiği 'Deep Blue' süper bilgisayarı Dünya tarihinin önde gelen satranç ustalarından biri olarak kabul edilen **Gary Kasparov'u** yendi. Bu durum bir ilk olarak tarihte yerini aldı.



- 1997 yılının son dönemlerinde Honda, P3 adlı robotunu sertiflledi. Söz konusu robot Dünya'da ilk **tam-otonom** insansı robot olma niteliğini taşımaktadır.

Robotik - Tarihçe

- 1998 yılında LEGO firması Mindstorms Robotik adı altında ürünlerini piyasaya sundu. (Söz konusu ürünün bir versiyonu okulumuzda bulunmaktadır.)
- 1998 yılında Sony, ilk robotik köpeği piyasaya sunmuştur.



Robotik - Tarihçe

- 2002 yılında, uzun süredir temellerini oluşturduğu robotunu tamamen geliştiren Honda, ASIMO'yu Dünya'ya sundu.
- 2000'li yıllarda ilk otonom ev temizleme robotları (elektrik süpürgesi, paspas gibi işleri gerçekleyen robot tipleri.) piyasaya sunuldu.



Robotik - Tarihçe

- 2005-2008 yılları arasında Cornell Üniversitesi **kendini kopyalayabilen** robot üretimini başardı.
- **(self replication.** Tek hücrelilerde üreme....)

Endüstriyel Robot Kavramı

- ISO 8373 Standardına göre belirlenmiş endüstriyel robot tanımı ve robot tiplerinin sınıflandırılması şöyledir:

"Endüstriyel uygulamalarda kullanılan, üç veya daha fazla programlanabilir eksenli olan, otomatik kontrollü, yeniden programlanabilir, çok amaçlı, uzayda sabitlenmiş veya hareketli manipülatördür."



Neden Robot?

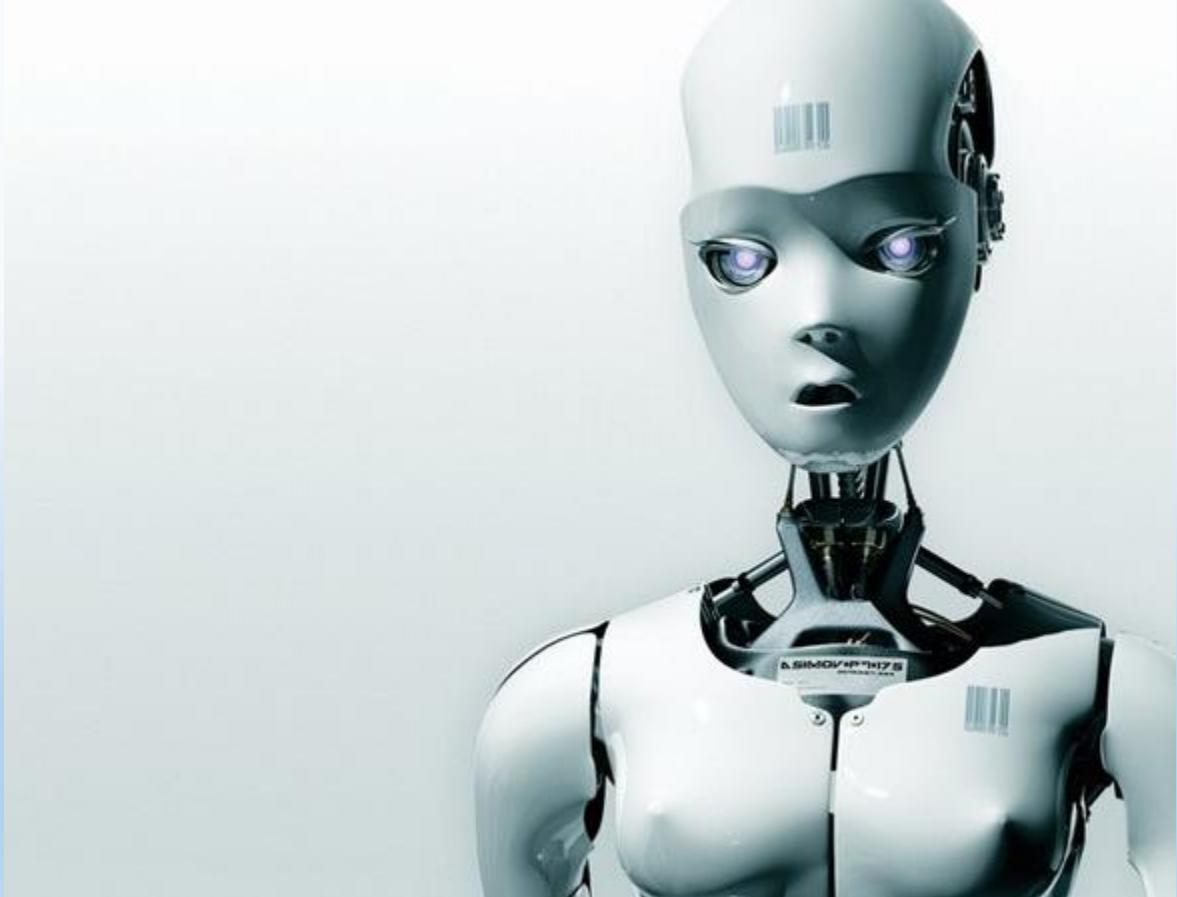
1) Üretim maliyetinin düşmesi

1a. İşçi maliyeti unsuru

1b. Verim

1c. Toplam kalitede artış

1d. Kısa amortisman süresi

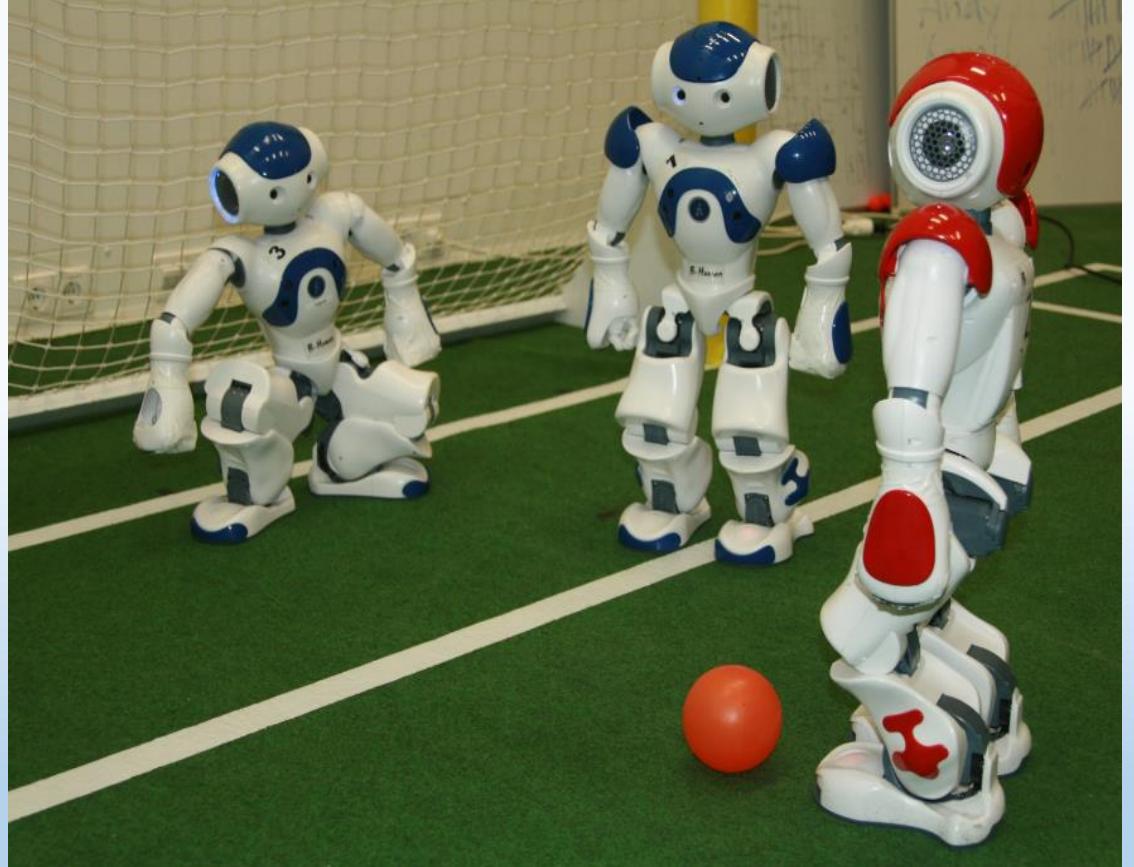


Neden Robot?

2) Üretim Artışı

2a. İnsanlara göre daha hızlı çalışma

2b. Çalışma süresinde artış



Neden Robot?

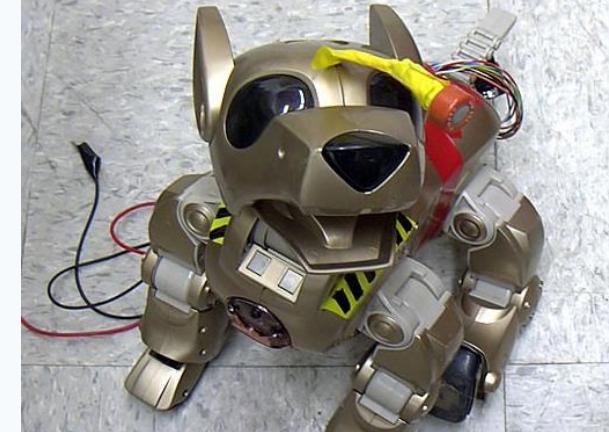
3) Üretim Kalitesinde Artış

3a. Pozisyon doğruluğu (Örn: mevcut çalışmanın 0.01 mm'de tekrarlanabilirliği ; cerrahide kullanılan robotlar vs.)



Neden Robot?

4) Tehlikeli Ortamlarda Çalışabilme



4a. Radyoaktif ortamlarda yapılan çalışmalar, zehirli boya kullanımı vs.

4b. Sualtı, uzay, düşman bölgesinde araştırma tarama – insana zarar verme ihtimali olan tabiatlar.

Dezavantajlar...

İş gücünü çok ucuzlattıklarından dolayı işsizliği artırlabilirler.

Rutin işlemlerde (Fabrikasyon vs) yanlış veri varsa sürekli yanlış ürünü verirler.

Askeri alandaki kullanımları - kitle imha silahı işlevi.

Teknik donanımlarının karmaşıklığı boyutu.



Otomasyon ve Robotlar

- Şişeleme Makinaları , Bulaşık Makineleri, Boya Püskürtme vs.



- Farklı görevleri gerçekleştirebilen robotlar; seç yerleştir, gezgin robotlar, sayısal kontrol makinaları vs.

Manipülatör Kavramı

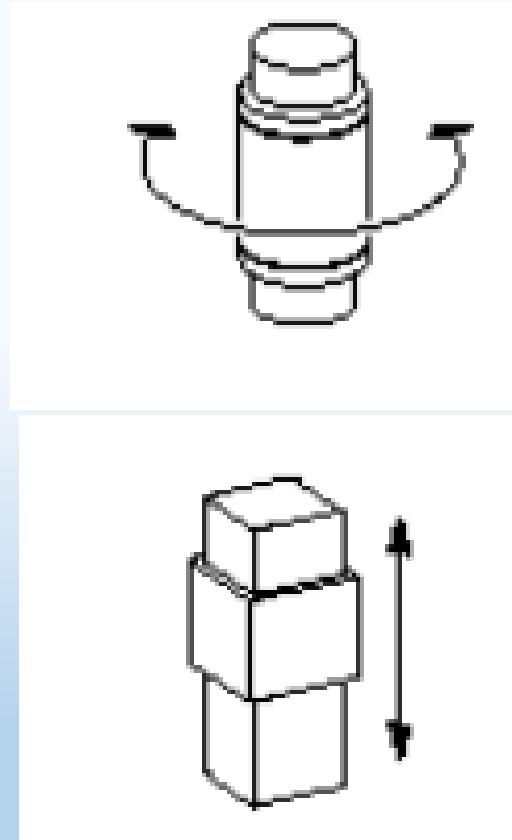
Manipülatör nedir?

- Manipüle eden, değiştiren, etkileyen.
- Bir cismi ya da belirlenen bir işi, hedefi, uzayda istenen bir duruma, konuma getiren yapı.



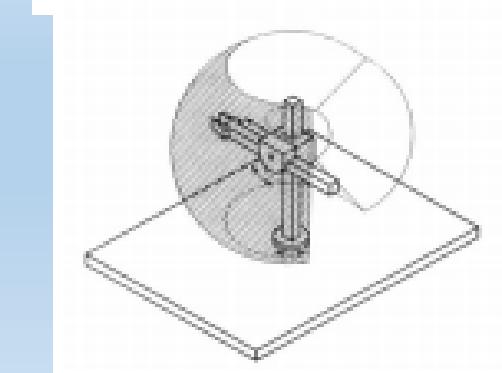
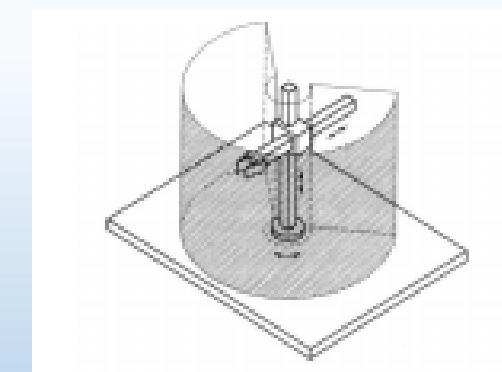
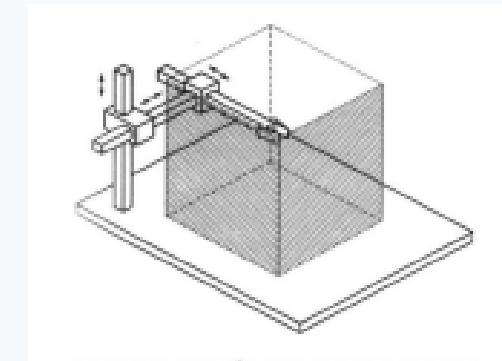
Manipülatörlerin Sınıflandırılması

- Döner (Revolute – R) :
Menteşeye benzer iki
uzuv arasında dönme
hareketine izin verir.
- Kayar (Prismatic – P) : İki
uzuv arasında doğrusal
harekete izin verir.



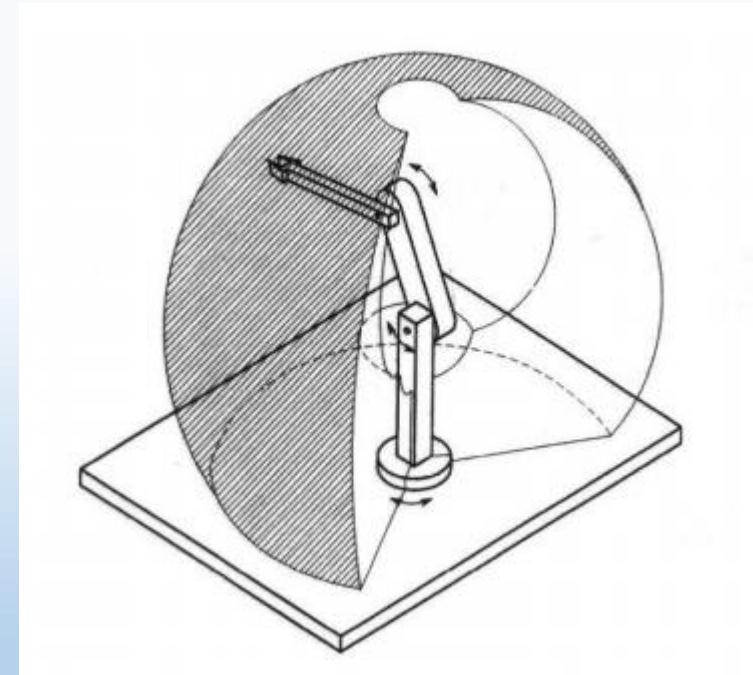
Manipülatörlerin Sınıflandırılması

- Kartezyen (Cartesian)
- Silindirik (Cylindrical)
- Küresel (Spherical)



Manipülatörlerin Sınıflandırılması

- Eklemlı (Articulated)
İnsan Kolu Modeli



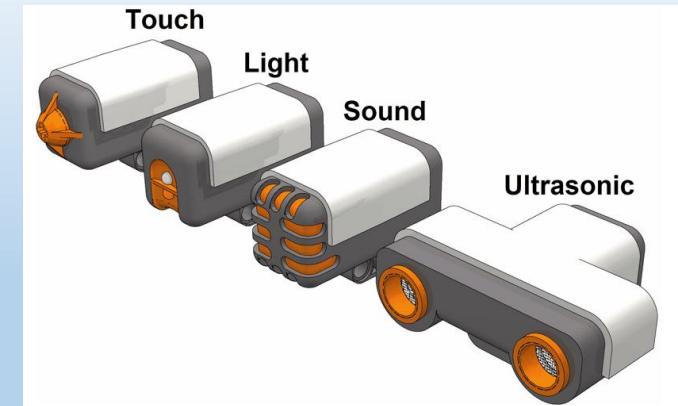
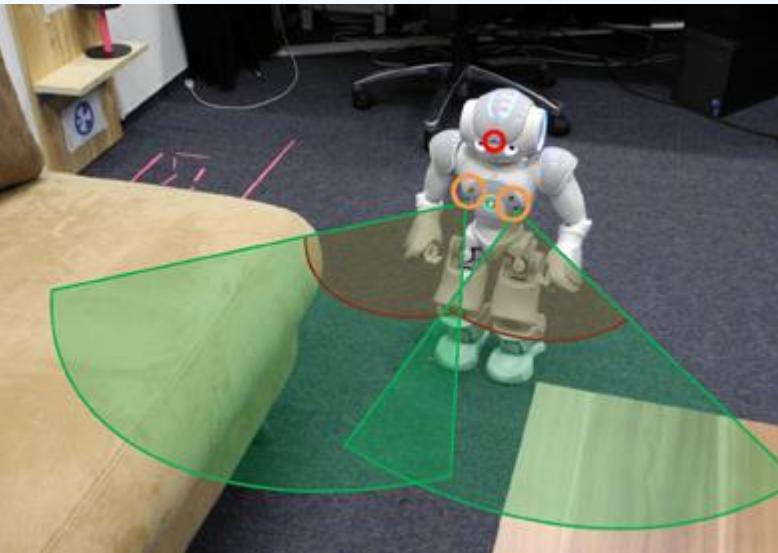
Manipülatörlerin Özellikleri

Robot Tipi	Eklem Tipleri (3 Eklem)	Kullanım Alanları
Kartezyen Robot Kollar	Prizmatik Prizmatik Prizmatik	Demiryolu köprü inşaatları, büyük makine montajları
Silindirik Robot Kollar	Dönel Prizmatik Prizmatik	Büyük makine montaj sanayi, basit montaj & demontaj hatları
Küresel Robot Kollar	Dönel Dönel Prizmatik	Montaj sanayi, nükleer santraller
Eklemli Robot Kollar	Dönel Dönel Dönel	Otomobil sanayi, boyama sanayi, elektronik montaj sanayi, tıbbi araç gereç yapımı

Robot Tipi	Avantajlar	Dezavantajlar
Kartezyen Robot Kollar	<ul style="list-style-type: none"> • Kinematik modelleri basittir • Katı bir gövdeye sahiptir • Hareket analizi basittir 	<ul style="list-style-type: none"> • Büyük çalışma alanı • Yapının büyüklüğüne rağmen iş alanı ufaktır
Silindirik Robot Kollar	<ul style="list-style-type: none"> • Kinematik modelleri basittir • Hareket analizi basittir • Güçlü hidrolik elemanlar kullanılır 	<ul style="list-style-type: none"> • İş alanları sınırlıdır • Tozlu veya ıslak ortamlarda çalışma sorunu
Küresel Robot Kollar	<ul style="list-style-type: none"> • Büyük alanlara uzanabilirler • Zeminden uzaktaki nesneleri tutabilirler 	<ul style="list-style-type: none"> • Kinematik modelleri karışıktrır • Hareket analizleri zordur
Eklemlı Robot Kollar	<ul style="list-style-type: none"> • Maksimum esnekliğe sahiptir • İş alanı robot büyüğü ile orantılıdır • Elektrik motorları kullanılabilir <ul style="list-style-type: none"> • Cisimlere altlarından ulaşabilirler 	<ul style="list-style-type: none"> • Kinematik modelleri karmaşıktrır • Hareket analizleri zordur

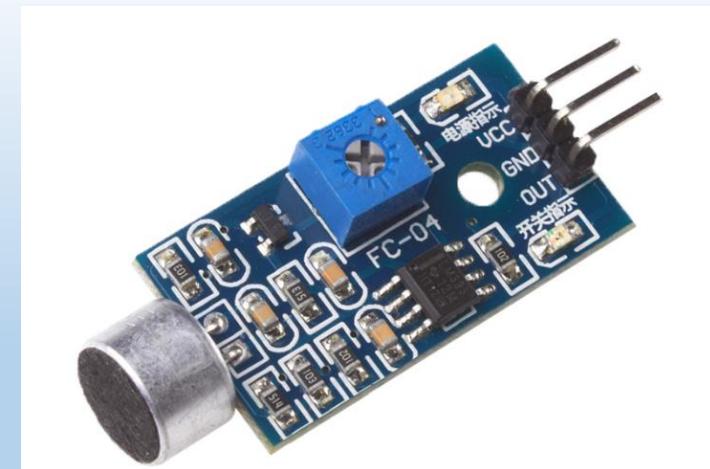
Sensör nedir ?

- Dış dünya ile ilgili istenen türde veri elde edilmesine olanak veren yapılardır.



Robotikte Sensör Çeşitleri

- Yönlenme – Hareket (Orientation & Heading ex: gyroscope)
- Engel – Cisim bulma (Obstacle Detection)
- Isı – Ses gibi durumlara ilişkin sensörler



Ses sensörü

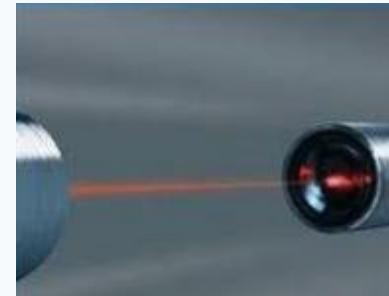
Kızılıötesi (Infrared) Engel Sensörü

Çalışma prensibi,

0-1 lojik mantığı geçerli olmak üzere,

0 durumu: Kızılıötesi ışın sensöre herhangi bir cisim üzerinde yansıma yapıp geri dönüyorsa (engel var) ,

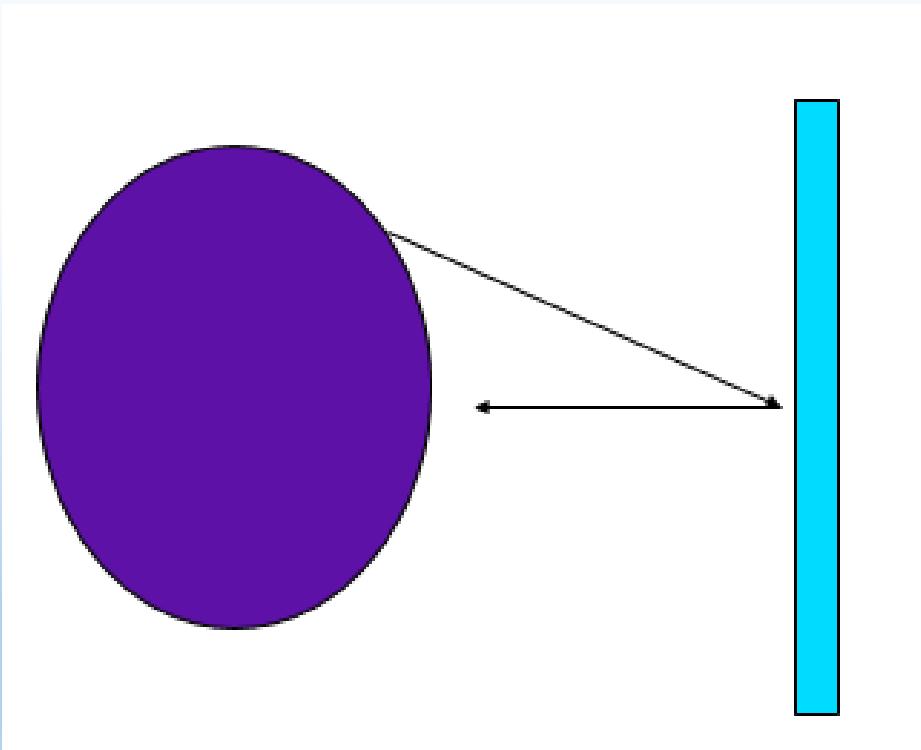
1 durumu: Kızılıötesi ışın sensöre herhangi bir cisim üzerinde yansıma yapmamasından dolayı geri dönmüyorsa (engel yok)



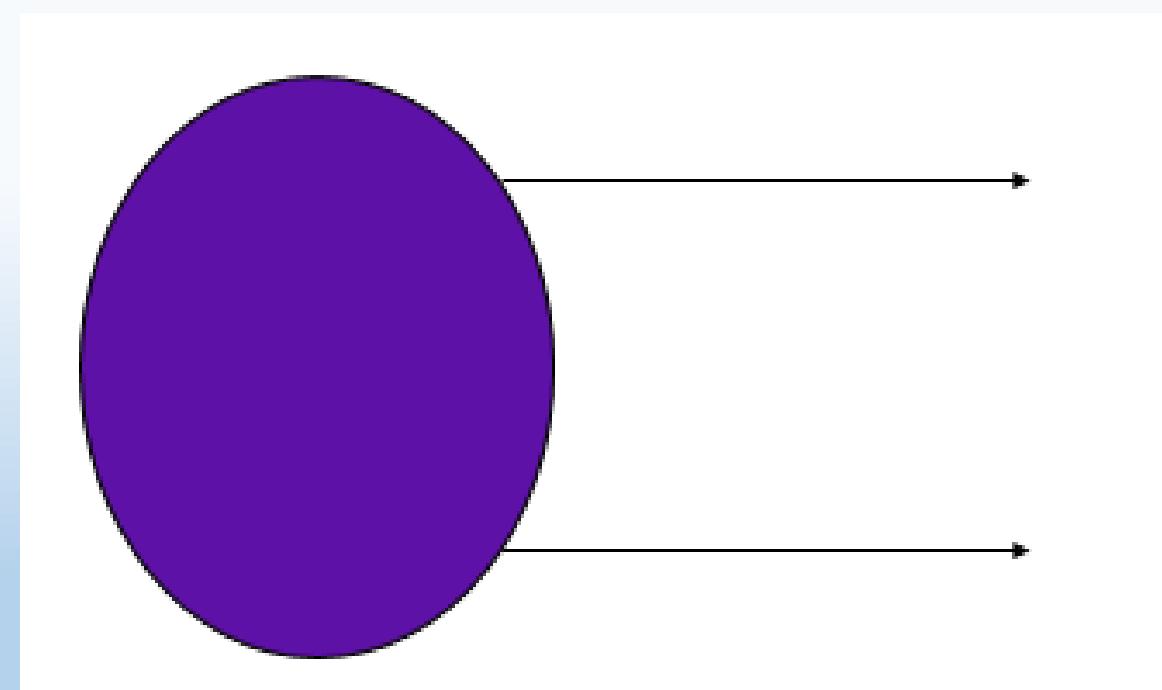
‘ olarak açıklanabilir.

Kızılıtesi (Infrared) Engel Sensörü

- 0 Durumu:



- 1 Durumu:



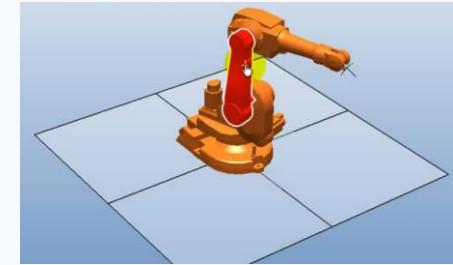
Yönelme – Hareket sensörlerinden birini ele alalım....

Örneğin, (Gyroscope) Jiroskop. Denge.

- Nasıl çalışıyordu?



Robot Studio Programı

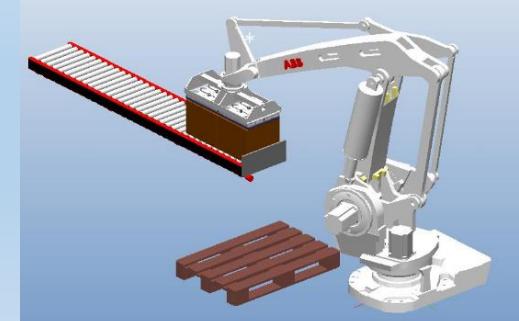


- Link 1 (Ürün Deneme Sürümü (30 gün) İndirme Linki):

<http://new.abb.com/products/robotics/tr/robotstudio/yuklemeler>

- Link 2 (Kullanım Kılavuzunun Bulunduğu Link):

<http://new.abb.com/products/robotics/tr/robotstudio/kullanim-kilavuzu>



Robot Studio Programı İndirme Sayfası

Menü Robotik Dersi Sunum - gur ABB Yazılım yükleme - RobotSti +

new.abb.com/products/robotics/tr/robotstudio/yuklemeler

ANA SAYFA → PORTFÖY → ROBOTİK → ROBOTSTUDIO → YAZILIM YÜKLEME

GLOBAL SITE Power and productivity for a better world™ ABB

Değerlendirme amacıyla, Premium İşlevler ve PowerPacs yazılımını 30 gün boyunca ücretsiz kullanabilirsiniz.

RobotStudio Üyelik Modeli
RobotStudio Üyelik Modeli'nin içeriği, tam olarak neleri kapsadığı ve ürünler ve ilgili hizmetlerin teslimatı hakkında daha fazla bilgi edinin.

RobotStudio

RobotStudio 6.01.01'i
Robotware 6.01.01 ile indir
Yayın tarihi: 20150615
Boyut: 2.28GB

OPC Sunucu ve RobotStudio SDK, FlexPendant SDK ve PC SDK indirmek için:
→ ABB Robotik Geliştirici Merkezi

PowerPacs

Arc Kaynağı PowerPac 6.01 indir
Yayın tarihi: 20150612

Kesme PowerPac 6.01 indir
Yayın tarihi: 20150601
Boyut: 45 Mb

Talaşlı İmalat PowerPac 6.01 indir
Release date: 20150428

Makine Besleme PowerPac 6.01 indir
Yayın tarihi: 20150601

Robot Studio Programı – Kullanım Kılavuzu



ANA SAYFA → PORTFÖY → ROBOTİK → ROBOTSTUDIO → ROBOTSTUDIO KULLANIM KILA
GLOBAL SITE Power and productivity for a better world™ ABB

RobotStudio - Kullanım kılavuzu

Başlangıç videolarımızı izleyin ve sadece 30 dakikada yazılımı kullanabilecek duruma gelin. Daha fazlasını öğrenmeye hazır olduğunuzda ise 25'in üzerinde eğitim videolarımızdan faydalabilirsiniz.

Başlarken
30 dakika içinde, sadece birkaç adımla kullanıma başlayabilirsiniz

Ücretsiz eğitim videoları
Eğitim videolarımızı izleyerek RobotStudio'ya hızlı bir başlangıç yapabilirsiniz

Daha fazla
Ürün kılavuzlarını okuyarak detaylı bilgi edinebilirsiniz

İletişim bilgileri
Ne yapmak istiyorsunuz?

Bir ürünü satın almak veya fiyat bilgisi

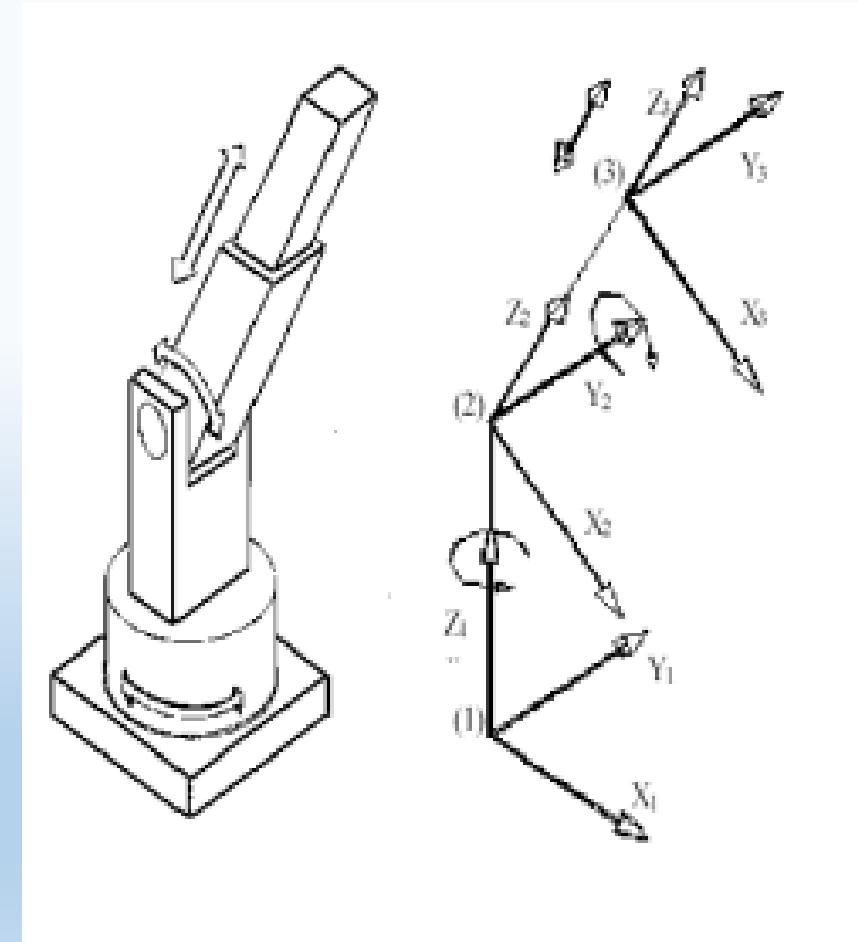
© Copyright 2016 ABB | Yaratıcı Birlikte / Küresel | Gerec ve Çözümleri Dergisi

Robotlar - Genel Çalışma Prensibi

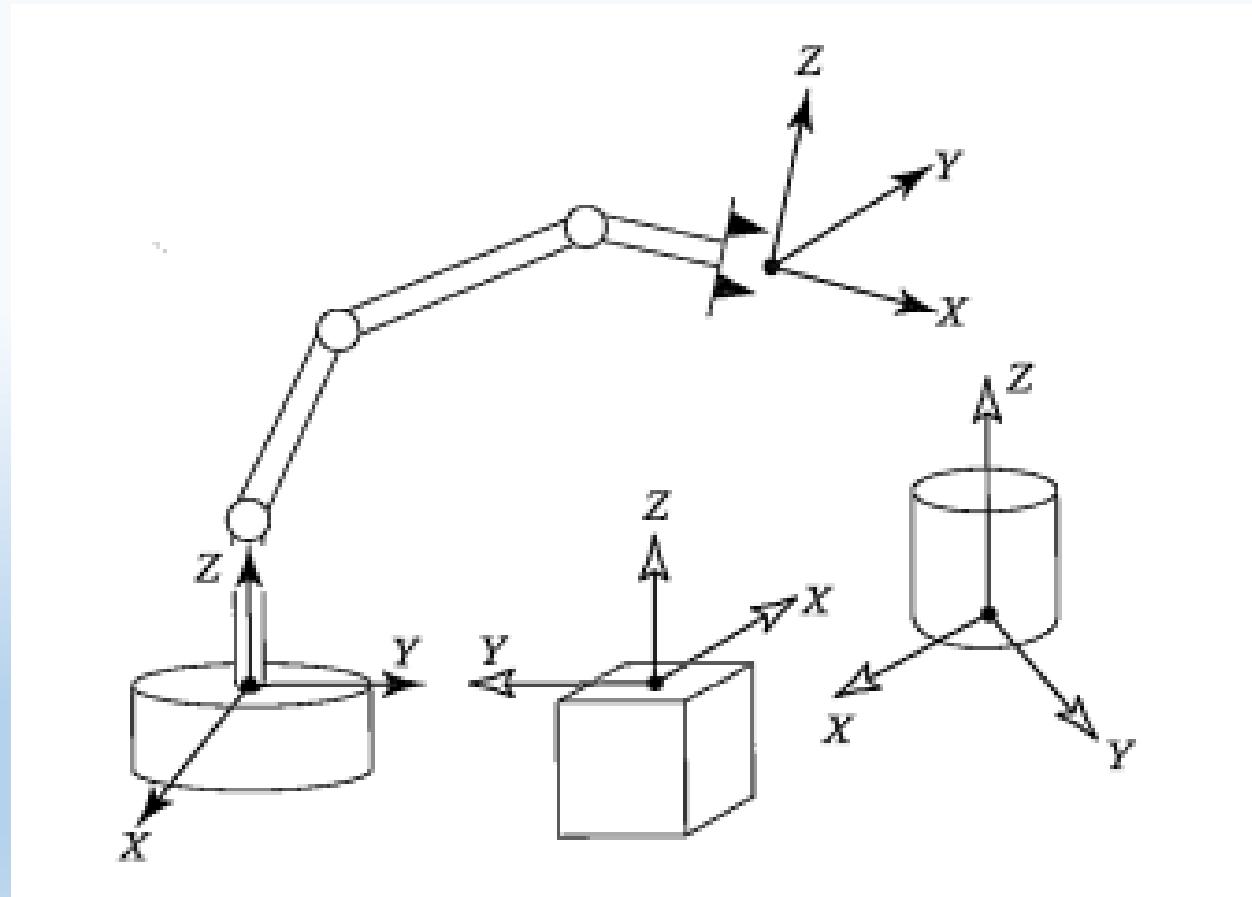
- Robot komponentleri ve objeler, birbirleri ile, belirlenen koordinat birimine göre etkileşime girer. Söz konusu koordinat birimi genelde 3 boyutlu (XYZ) koordinat birimi olarak seçilir ve söz konusu birim üzerinden tanımlanan pozisyonlar ile matris kullanılarak işlemler gerçekleştirir.

Robotlar - Genel Çalışma Prensibi

- Robotlar her bir özgürlük derecesi için bir küresel(global) bir yerel(local) koordinat sistemine sahiptirler.
- Global koordinat sistemi robot üzerinde sabit bir noktaya bağlıdır, veya çalışma uzayında uygun bir noktadadır.

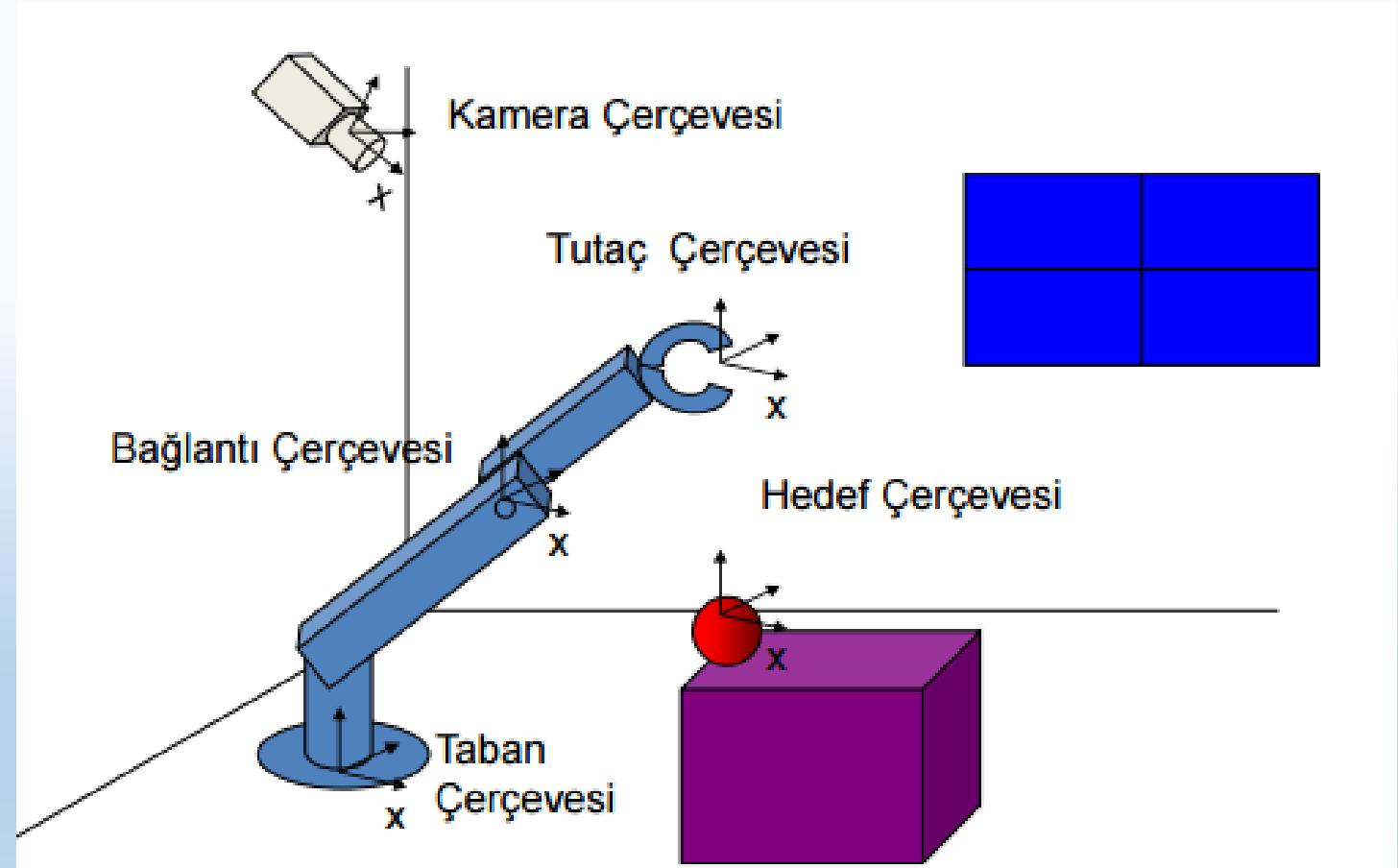


Robotlar - Genel Çalışma Prensibi



Koordinat Çerçeveleri (Coordinate Frames)

- İki çerçeve(frame) arasında kinematik ilişki mevcuttur, bu ilişki dönüşüm ve ötelemedir.
- Söz konusu ilişki homojen dönüşüm matrisleri ile matematiksel olarak modellenir.



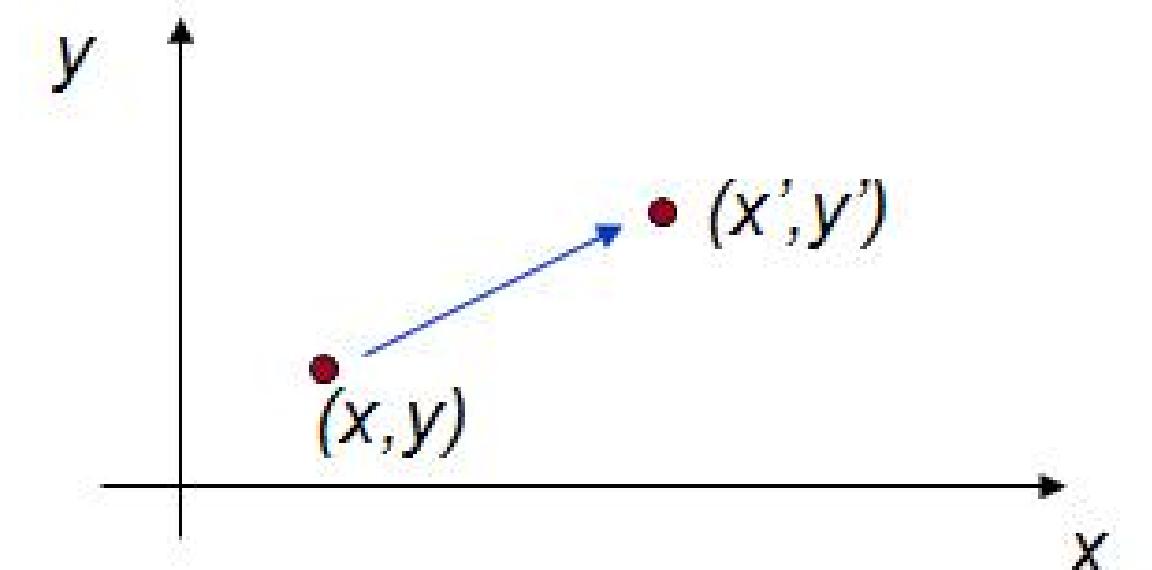
Yanda verilen (x,y) noktasını, (x',y') koordinatına taşıyalım.

Söz konusu işlemi,

$$x' = tx + x$$

$$y' = ty + y$$

'şeklinde ifade edecek olursak, tx ve ty değerleri ilgili koordinatların taşınma miktarı olacaktır.



- Bu taşıma işlemini homojen koordinat kullanarak yapmamız da mümkün değildir.
- Bunun için homojen koordinatlarda (homogenous coordinates) bir dönüşüm matrisi (transformation matrix) oluşturmamız gereklidir.
- Temel olarak dönüşüm matrislerindeki amaç noktaya çarpan olarak gelebilmesidir.

Sonuç olarak bu yöntem ile,

$P' = T \times P$ şeklinde bütün T dönüşüm matrislerini orjinal noktamız olan P ile çarparak P' noktasını elde etmek isteriz.

Örnek verdiğimiz taşıma işleminde bu durum toplama olarak yapılmaktadır.

Yani,

$$P' = T + P$$

şeklinde formülize edilmiştir. Öyleyse yukarıdaki bu $[tx, ty]$ matrisini homojen koordinatlara uygun hale getirmemiz gereklidir.

Yandaki matrisi P noktası ile çarparsak elde edeceğimiz sonuç formülü de aslında toplama işlemidir.

Söz konusu işlem,

$$P' = T \times P$$

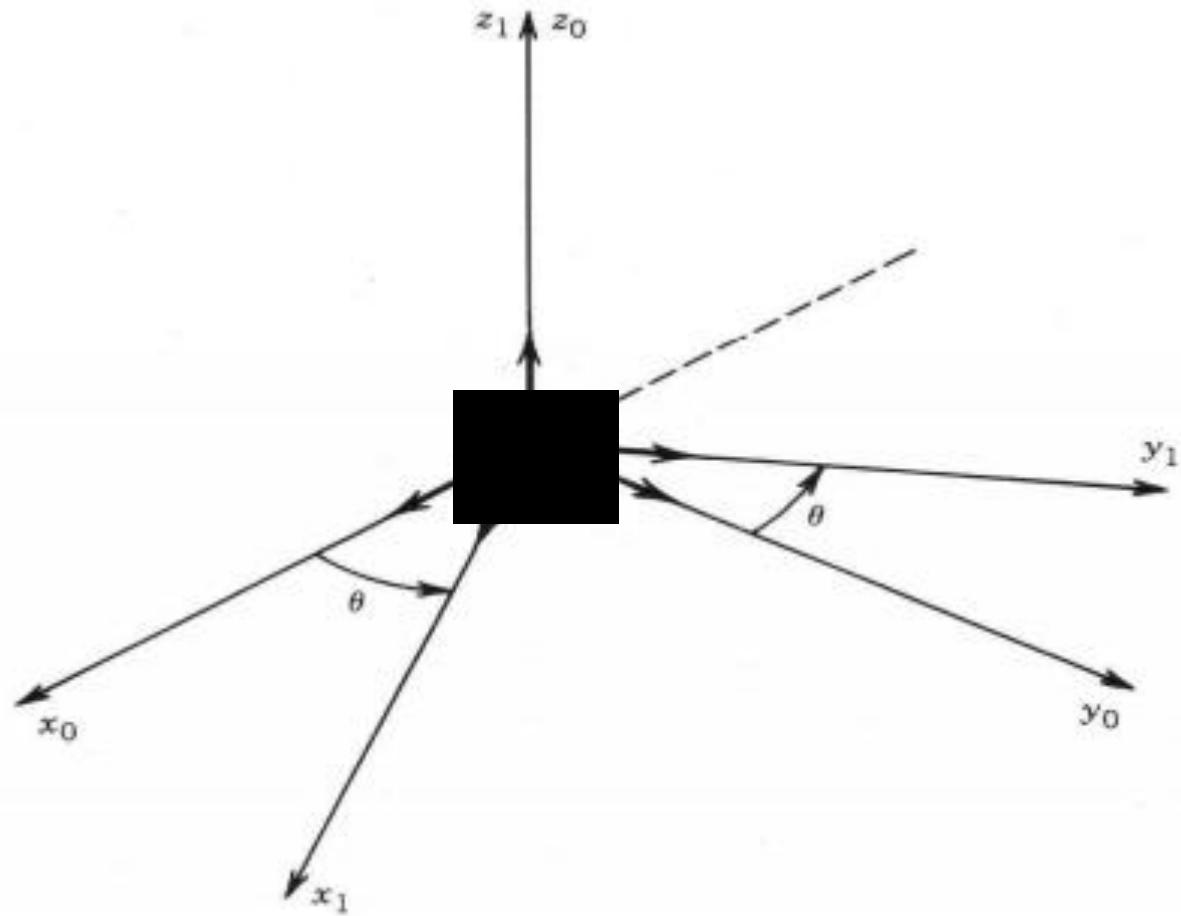
‘olarak formülize edilip işlem sonuçlandırılırsa:

- $x = x + tx$
 - $y = y + ty$
- ‘ elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Taşıma işlemine benzer olarak, döndürme (Rotation) işlemi de uygulanabilir.

Yandaki cismin homojen dönüşüm matrisini çıkaralım.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^1$$

Genel formatı ile düşünülecek olursa,

$$\bullet x^0 = a_{11} \cdot x^1 + a_{12} \cdot y^1 + a_{13} \cdot z^1$$

$$\bullet y^0 = a_{21} \cdot x^1 + a_{22} \cdot y^1 + a_{23} \cdot z^1$$

$$\bullet z^0 = a_{31} \cdot x^1 + a_{32} \cdot y^1 + a_{33} \cdot z^1$$

Denklemlerinden matris elemanlarının
karşılıkları elde edilir.

İşlemlere devam edersek,

$$x^0 = \cos\theta \cdot x^1 + -\sin\theta \cdot y^1$$

$$y^0 = \sin\theta \cdot x^1 + \cos\theta \cdot y^1$$

$$z^0 = 1 \cdot z^1$$

‘ denklemleri elde edilir.

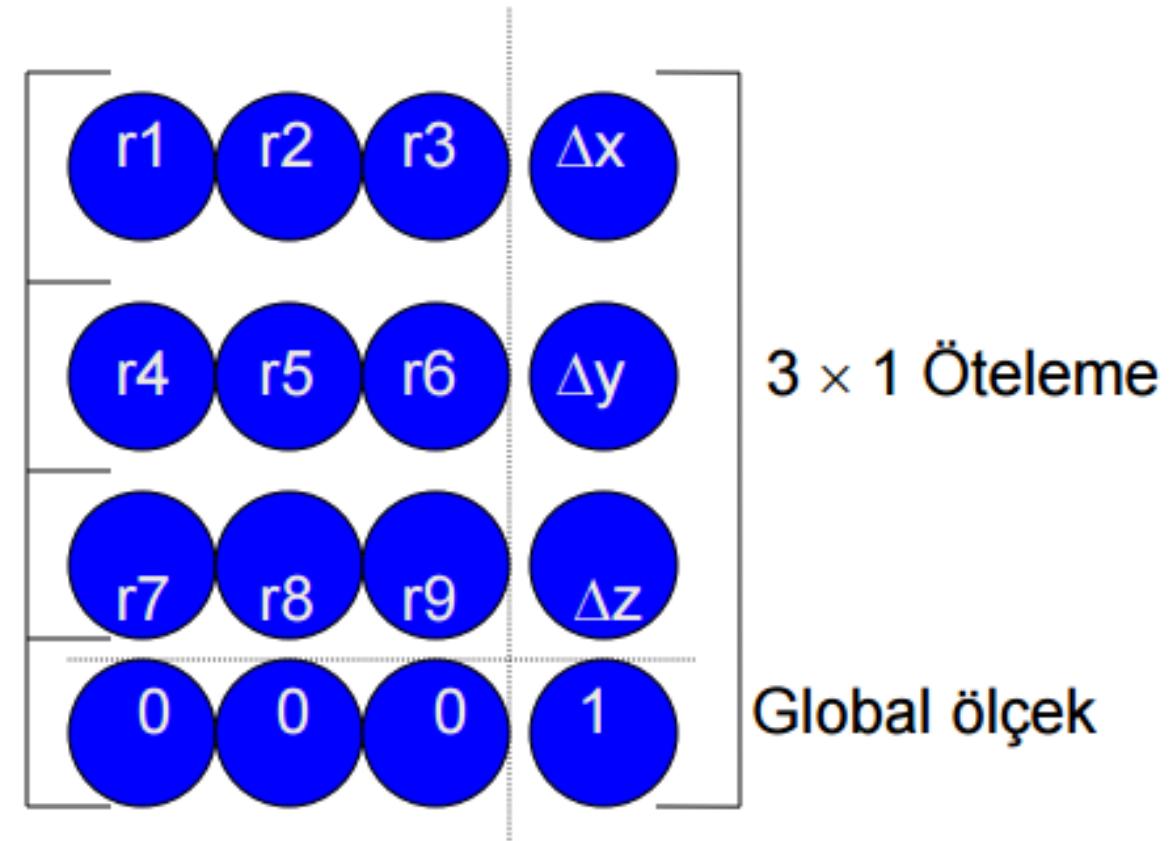
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^1$$

' şeklinde bir 3×3 homojen dönüşüm matrisi elde edilir.

Homojen Dönüşüm – Genel Format

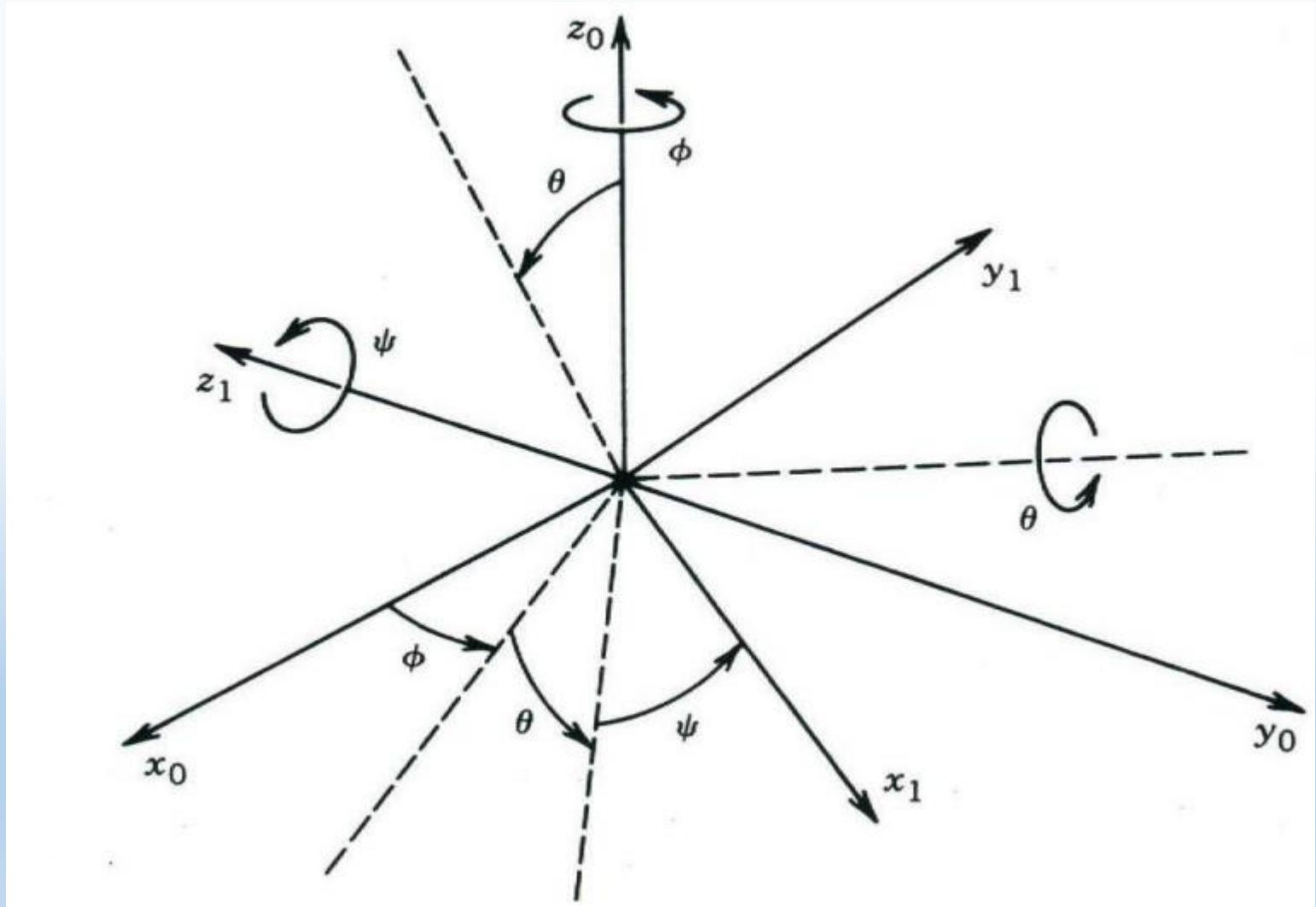
XYZ Düzlemi için,
dönüşüm matrisi &
öteleme matrisi şu
formattadır.

3×3 Dönüşüm
Matrisi



Euler Açıları

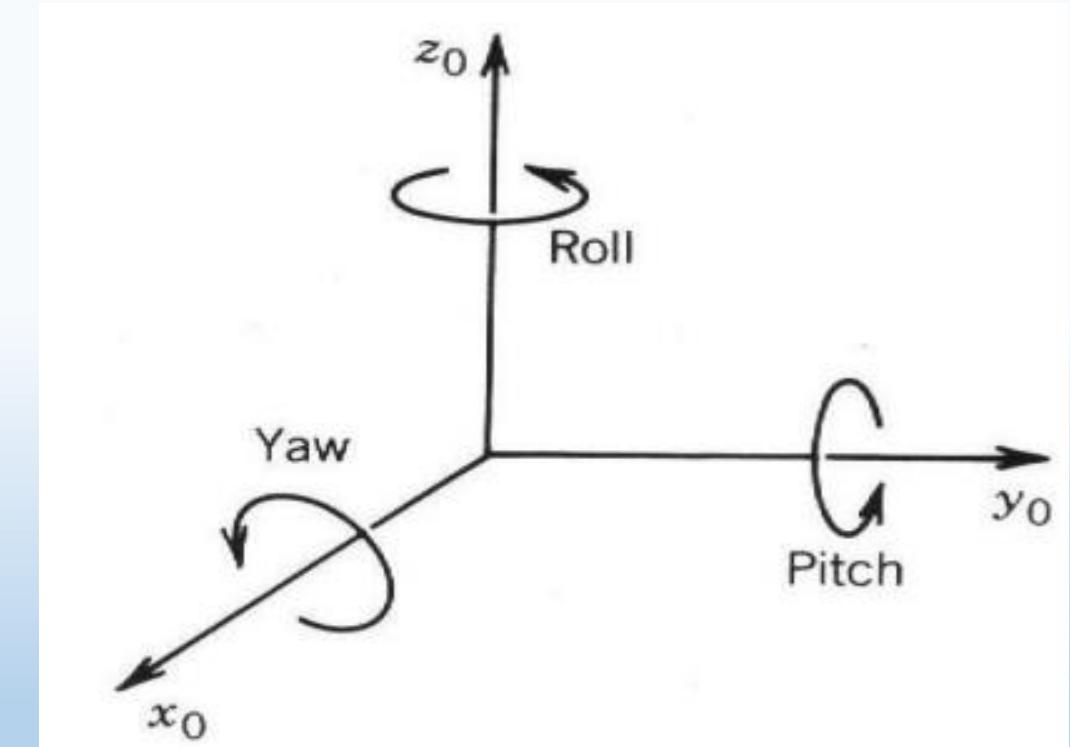
Euler'in rotasyon teoremine göre, herhangi bir rotasyon durumu 3 kilit açı ile açıklanabilir.



Euler Açıları

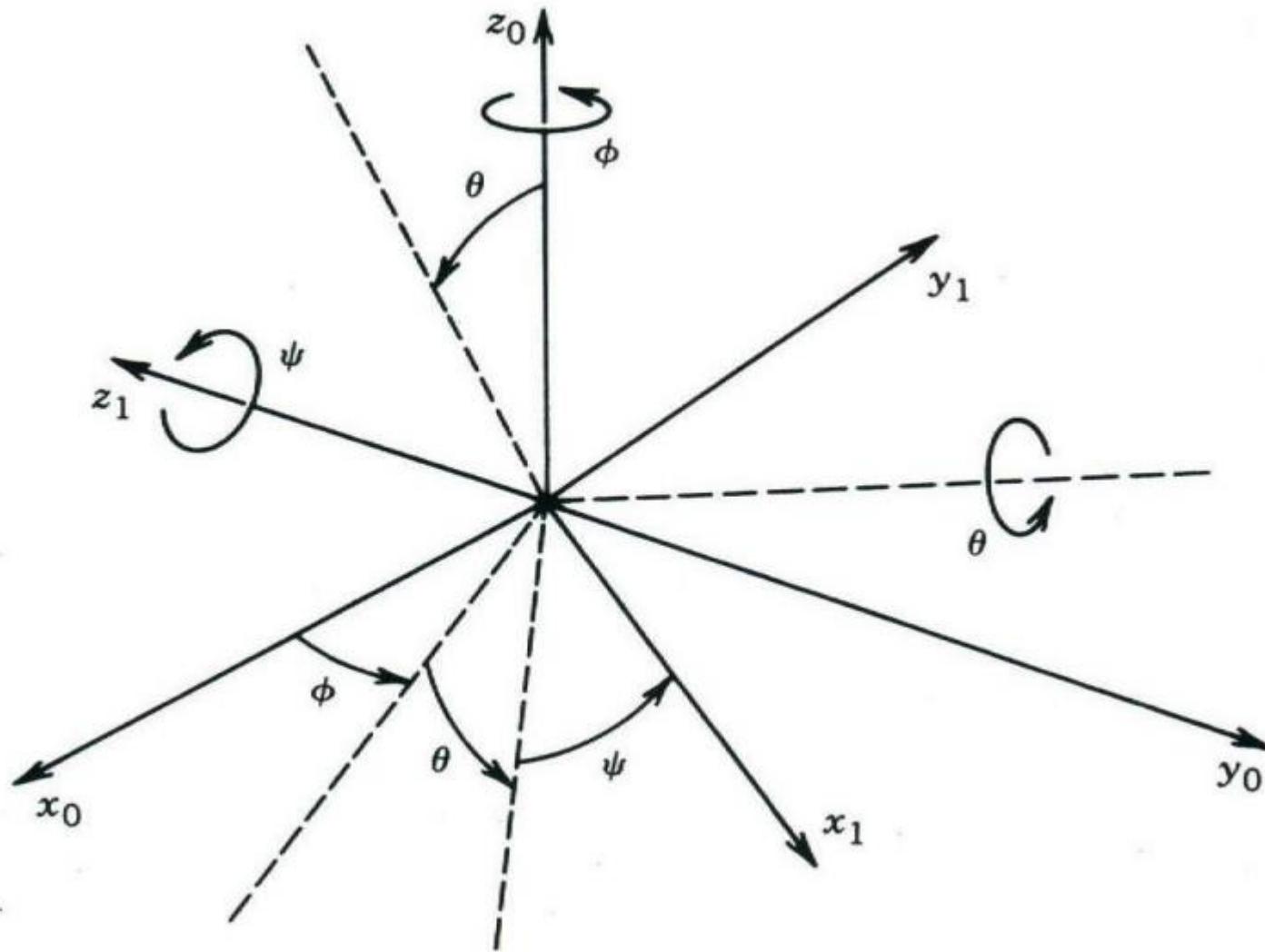
- Sözü edilen 3 açı,
 - Roll
 - Yaw
 - Pitch‘ açılarıdır.

Üç eksende dönme matrisleri tanımlandıktan sonra, bu matrislerin çarpımı ile toplam dönme hareketi, R_0^1 tanımlanmış olur.



Dönme Hareketinin Açıklanması – Euler Açıları

- Tahmin edilebileceği üzere, farklı düzlemlerde farklı açılar ile çeşitli dönme kombinasyonları ortaya çıkabilir.
- Toplam dönme-öteleme hareketi, her bir düzlem için elde edilen dönme matrislerinin eşdeğerinin bulunması ile elde edilir.



Sisteminde, sırasıyla, Z düzlemi etrafında ϕ açısı , ardından Y düzlemi etrafında θ açısı ve son olarak Z düzleminde ψ açısı ile dönme hareketi, şu şekilde ifade edilebilir;

$$R_0^1 = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$$

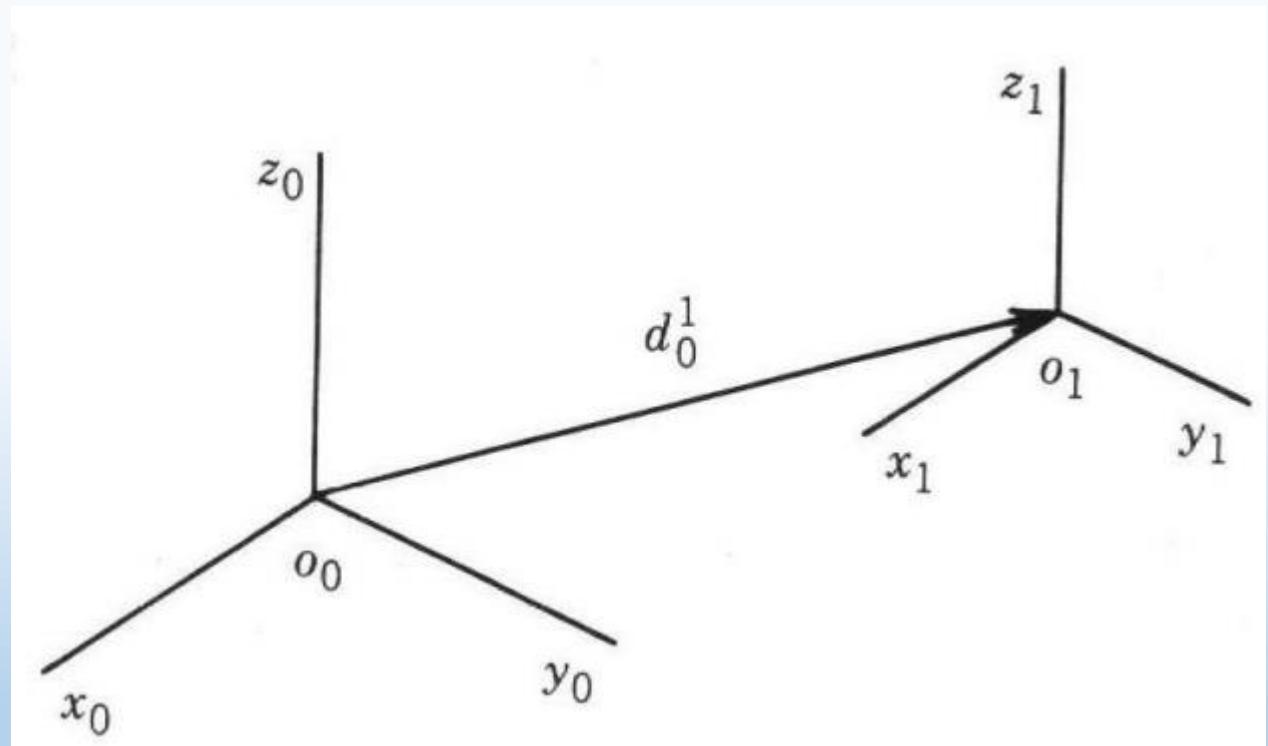
$R_T = R_1 R_2 R_3$
formatında...

Bu dönmə
hareketini
daha önce
bulmuştuk....

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Öteleme

- Homojen Dönüşüm, genel format slaytında gösterildiği üzere, ilgili matris, varsa dönme matrisi ile birlikte denklem seti olarak yazılır.
(Dönme hareketi yoksa, tahmin edilebileceği üzere, dönme matrisi yerine birim matris yazılacaktır....)



Öteleme Matrisi Formatı

- Öteleme hareketini ifade edecek değer şu şekilde olacaktır;

$$d_0^1 = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

Toplam Hareket Özeti

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Ödev

- Derste örneği işlenen sistemde, diğer kombinasyonların dönüşüm matrislerini elde ediniz. ($R_y^{(\psi)}$ vs vs. 3 Düzlemin her biri için 3 farklı dönme hareketi olabilir....)

Örnek Öteleme İşlemleri...

- (Görüldüğü üzere, bir dönme hareketi olmadığından, birim matris kullanılmış...)
- $a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ satırı, literatürde **global ölçek** olarak tanımlanır.)

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kinematik Analiz ve Pozisyon Belirleme

- İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği
- Ters Manipülatör Kinematiği

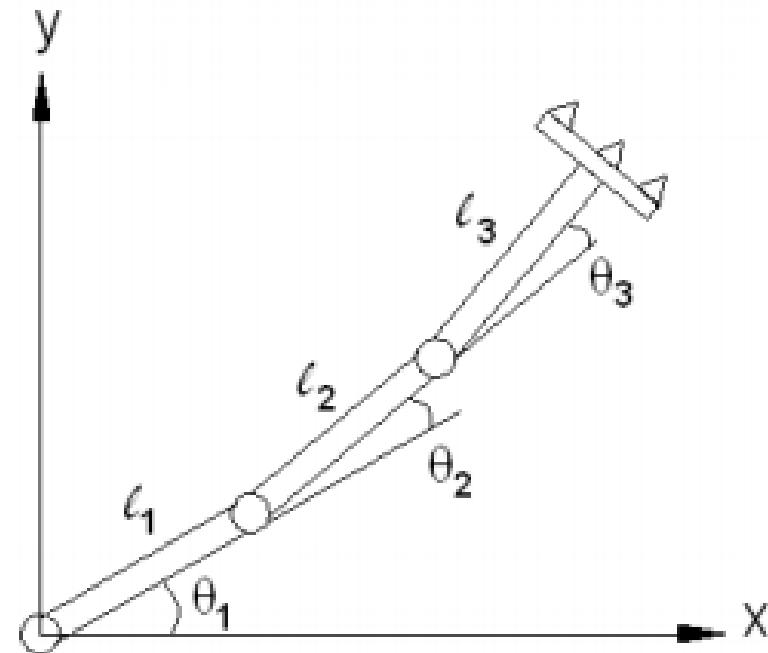
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

Konunun çözümlenmesinde, iki çeşit yaklaşım mevcuttur.

- 1) Geometrik Yaklaşım:** Bu yaklaşımda manipülatör durumuna bağlı olarak oluşan geometrik şekilden yararlanılmaktadır.
- 2) Cebirsel Yaklaşım:** Bu yaklaşımda manipülatörün parametreleri ve eklem değişkenleri arasındaki cebirsel ilişkiden yararlanılmaktadır.

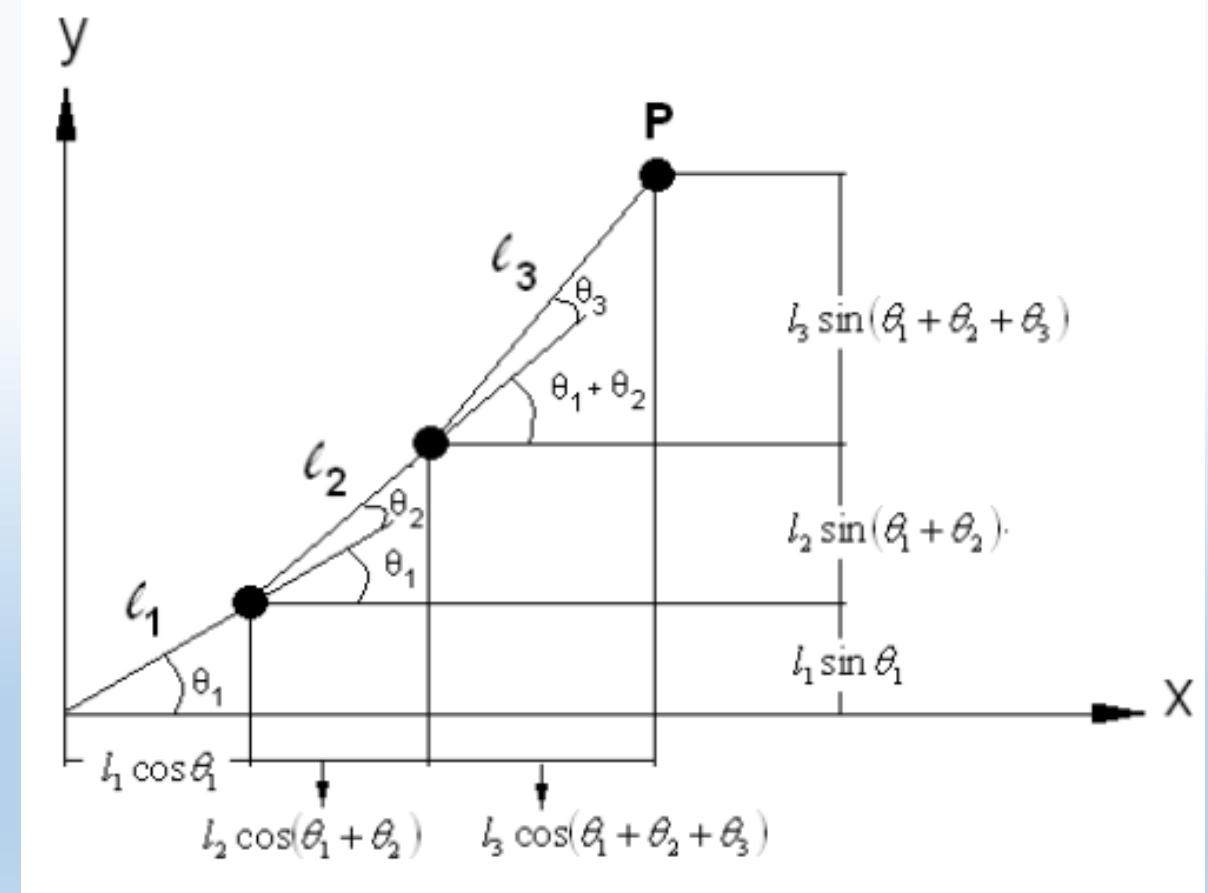
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Geometrik Yaklaşım

- Aşağıda verilen iki boyutlu düzlemede hareket eden bir robot kolunun ileri yön kinematiğini **Geometrik Yaklaşım** ile inceleyelim.



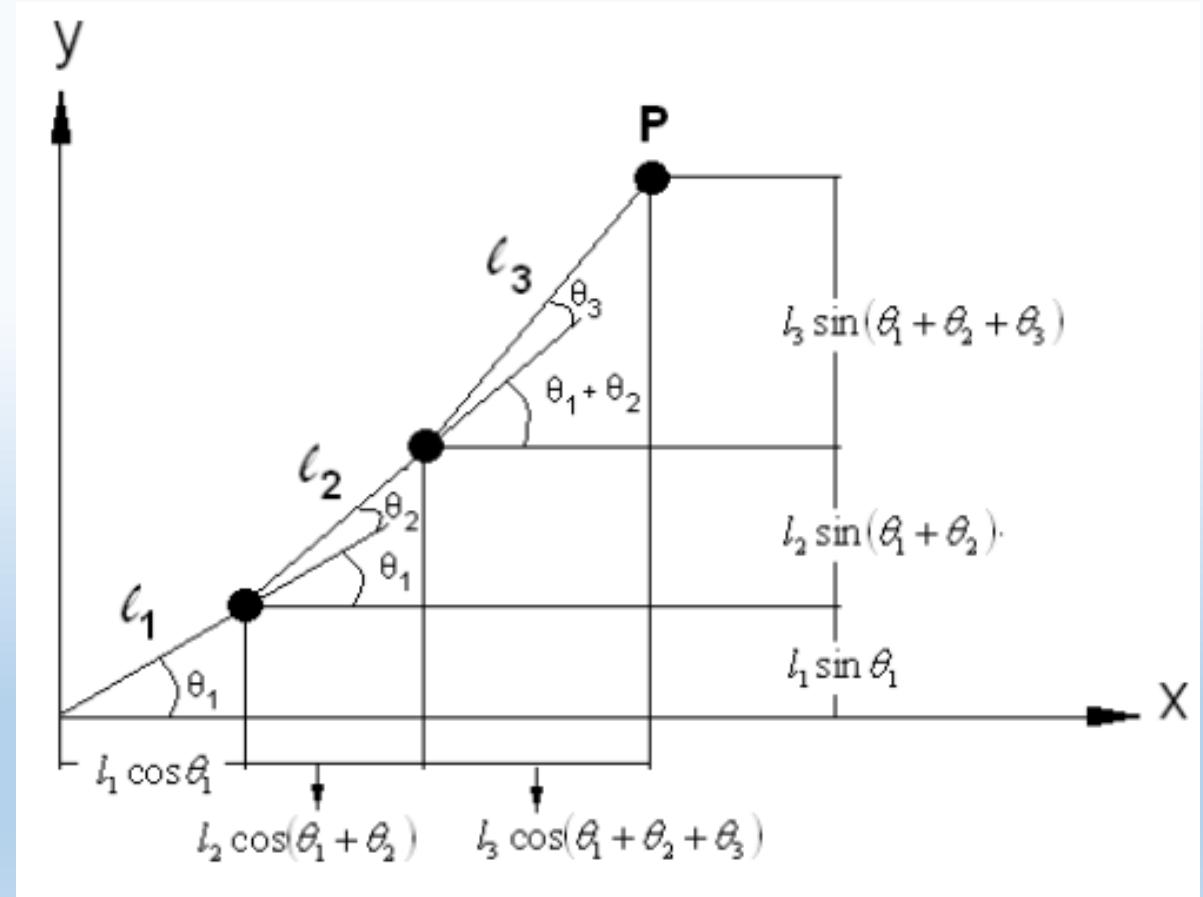
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Geometrik Yaklaşım

- Öncelikle robotun iki boyutlu düzlemde aldığı biçim / konum / şekil çizilerek üç işlevcisinin ifade eden P noktasının konumu belirlenir.



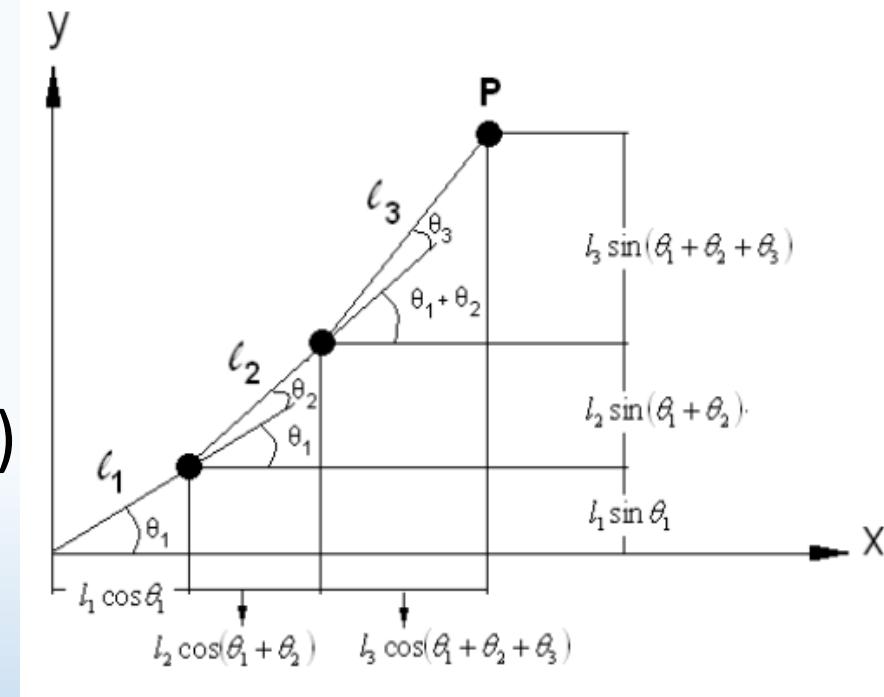
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Geometrik Yaklaşım

- Ardından, P noktasının X eksenindeki izdüşümü (P_x) ve Y eksenindeki izdüşümü (P_y) hesaplanır.



İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Geometrik Yaklaşım

- Bu durumda P_x ve P_y ,
- $P_x = L_1 \cdot \cos\theta_1 + L_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$
- $P_y = L_1 \cdot \sin\theta_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$



‘ olarak elde edilir.

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

- Bir robot, ana çerçevesinden araç çerçevesine doğru birbirine prizmatik veya döner eklemlerle bağlanmış seri eklemlerden oluşur.
- İki eklem arasındaki ilişki bir homojen dönüşüm matrisiyle açıklanır.
- Eklem dönüşüm matrislerinin ard arda çarpılmasıyla ana çerçeve ile araç çerçeve arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişki manipülatörün araç çerçevesinin konumunu ve yönelimini ana çerçeveye göre belirtir.

(Çerçeve, literatürde **FRAME** olarak geçmektedir....)

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

- İleri Yön (Düz) Kinematiği eklem denklemleri ile uç işlevcisinin konumu ve yönelimini ana çerçeveye göre hesaplar diyebiliriz.

Her bir ekleme bir koordinat sistemi yerleştirilse komşu iki eklem arasındaki ilişki bir ${}^{i-1}_iT$ dönüşüm matrisiyle elde edilir.

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

- İlk ekleme ait dönüşüm matrisi, ilk eklem ile ana çerçeve arasındaki ilişkiyi tanımlarken, son ekleme ait dönüşüm matrisi üç işlevcisi ile son eklem arasındaki ilişkiyi ifade eder.
- Arka arkaya sıralanan bu eklem dönüşüm matrisleriyle ana çerçeve ile araç çerçevesi arasındaki ilişki tanımlanır. Bu ilişkiye de **İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği** adı verilir.

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

- Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, ana çerçeve ile araç çerçevesi arasındaki ilişki şu şekilde tanımlanabilir;

$${}_{N}^0T = {}_1^0T {}_2^1T \dots \dots {}_{N-1}^N T$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği

- Bu dönüşüm kolay gibi görünse de her bir eklem için koordinat çerçevesinin yerleştirilmesi ve birbirlerine göre durumlarının yorumlanması karmaşa yol açmaktadır.
- Denavit ve Hartenberg 1955 yılında bu sorunu çözmek için sistematik bir yöntem önermişlerdir.

$$\begin{matrix} {}^0T \\ {}_N \end{matrix} = \begin{matrix} {}^0T \\ {}_1 \end{matrix} \begin{matrix} {}^1T \\ {}_2 \end{matrix} \dots\dots \begin{matrix} {}^{N-1}T \\ {}_N \end{matrix}$$

Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Bu yöntemde dört ana değişken (Literatürde D-H Değişkeni / D-H Variables olarak geçmektedir...) kullanılarak robot kinematiği çıkarılır.

Söz konusu değişkenler;

1. İki eksen arasındaki uzuv uzunluğu
2. İki komşu eksen arasındaki eksen açısı olan α_{i-1}
3. Üst üste çıkan bağlar arasındaki eklem kayması (Literatürde eklem açıklığı olarak da geçmektedir.) olan d_i
4. İki komşu uzuv arasındaki eklem açısı olan θ_{i-1}

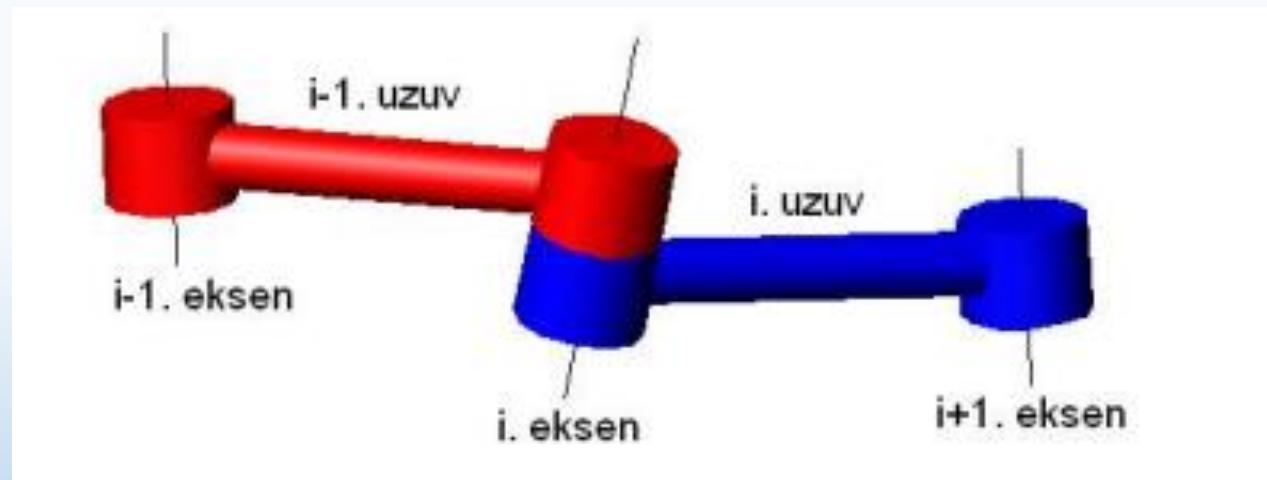
' olarak tanımlanmıştır.

Denavit-Hartenberg Yöntemi

1. Öncelikle eklem eksenleri dönme veya kayma yönleri belirlenir ve bu eksene paralel bir doğru çizilir.
2. Bu işlem gerçekleştirildirken eklem eksenleri, döner eksenler için dönme yönü Z, prizmatik eklemeler için kayma yönü Z ekseni olarak belirlenir.
3. Z eksenine dik ve kol boyunca olan bağ (eklem) uzuluğu X eksenin olarak kabul edilir.
4. Z ve X eksenleri belirlendikten sonra sağ el kuralına göre Y eksenin bulunur.
5. Eğer arka arkaya gelen 2 eklemin dönme veya kayma yönleri aynı ise Z ekseni belirlendikten sonra kol boyunca X eksenin belirlenir. Son olarak sağ el kuralına göre Y eksenin belirlenir.
6. 0 ve 1. eksenler üst üste kabul edilebilir.
7. Bir seri robotun eklemine koordinat sistemleri yerleştirilirken 1. eksenin dönme yönü Z ekseni olarak belirlendikten sonra genellikle bu eksene X eksenince döndürüldüğünde komşu iki Z ekseni çakışacak şekilde bir X eksenin yerleştirilir.

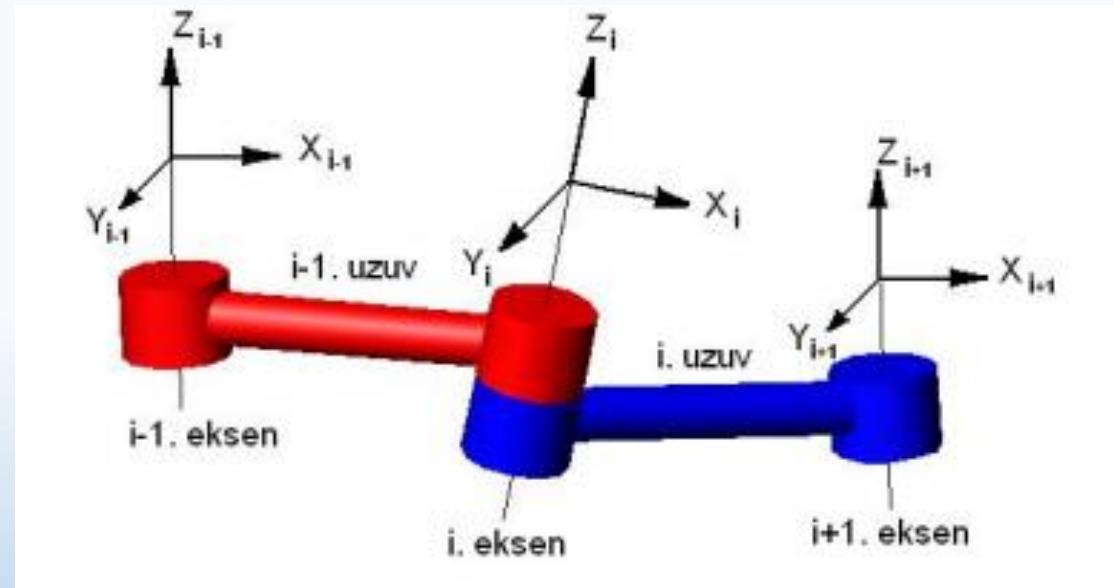
Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Bu değişkenleri belirlemek için öncelikli olarak yanda görüldüğü gibi robotun dönme eksenleri belirlenir ve dönme eksenleri uzuvlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır.



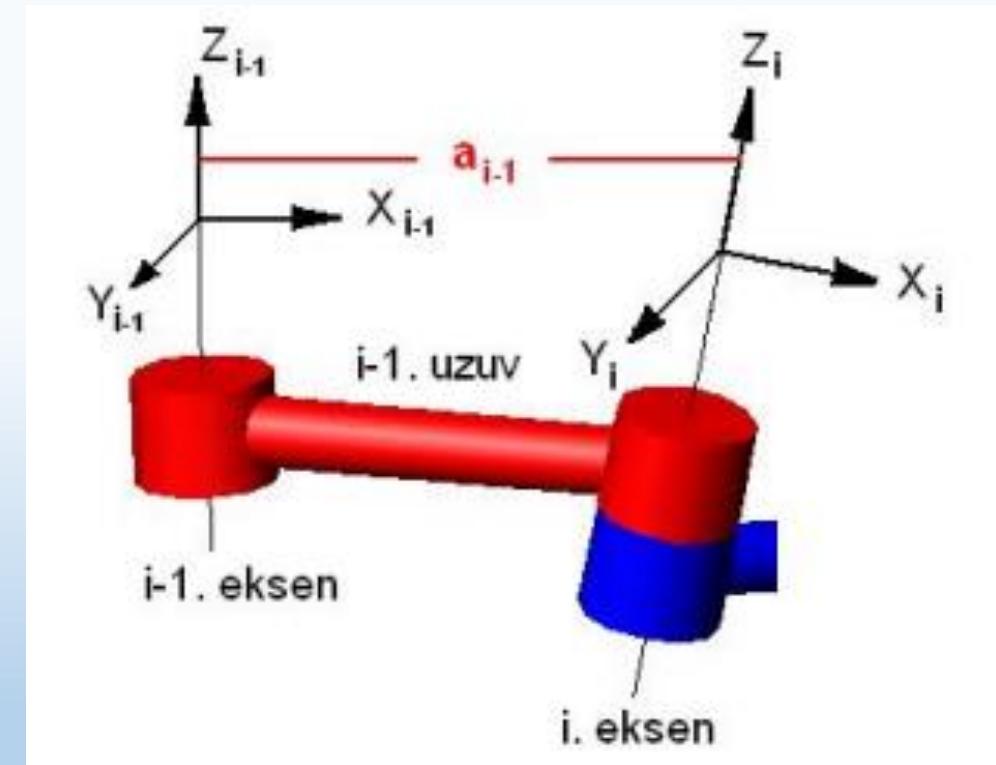
Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Daha sonra bu eksenlerin her birine bir koordinat sistemi yerleştirilir ve uzuv dönme eksenini yanda görüldüğü üzere koordinat sisteminin Z eksenini olarak kabul edilir.



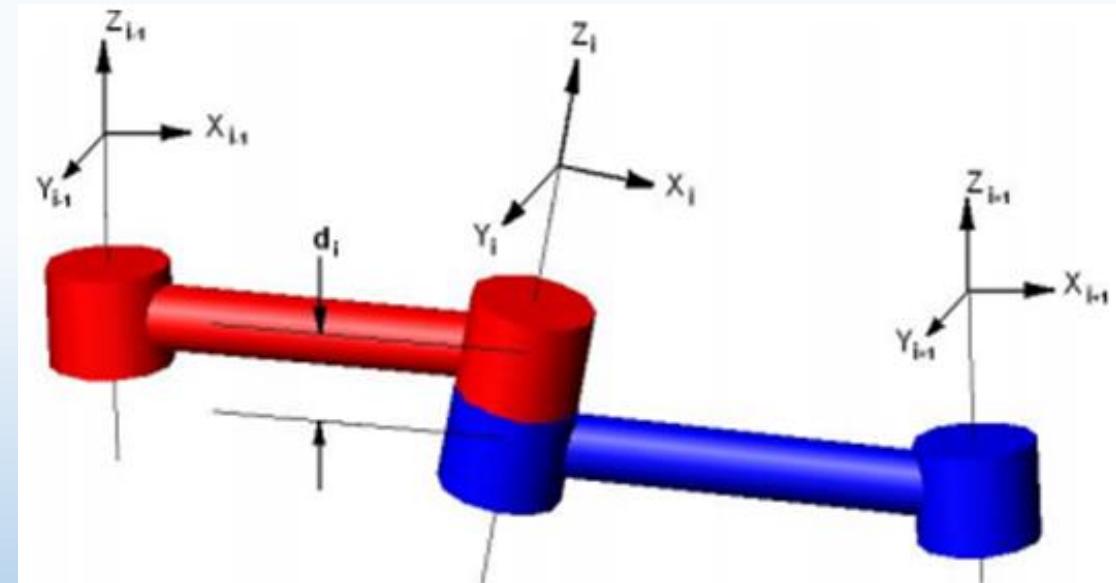
Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Yandaki şekil incelenirse, x_{i-1} yönünde uzanan z_{i-1} ile z_i eksenleri arasındaki dik uzaklığa a_{i-1} uzuv (eklem) uzunluğu adı verilir.



Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Yandaki şekilde görüldüğü üzere, z_i yönünde uzanan x_{i-1} ile x_i eksenleri arasındaki dik uzaklığa d_i eklem kaçıklığı denir.



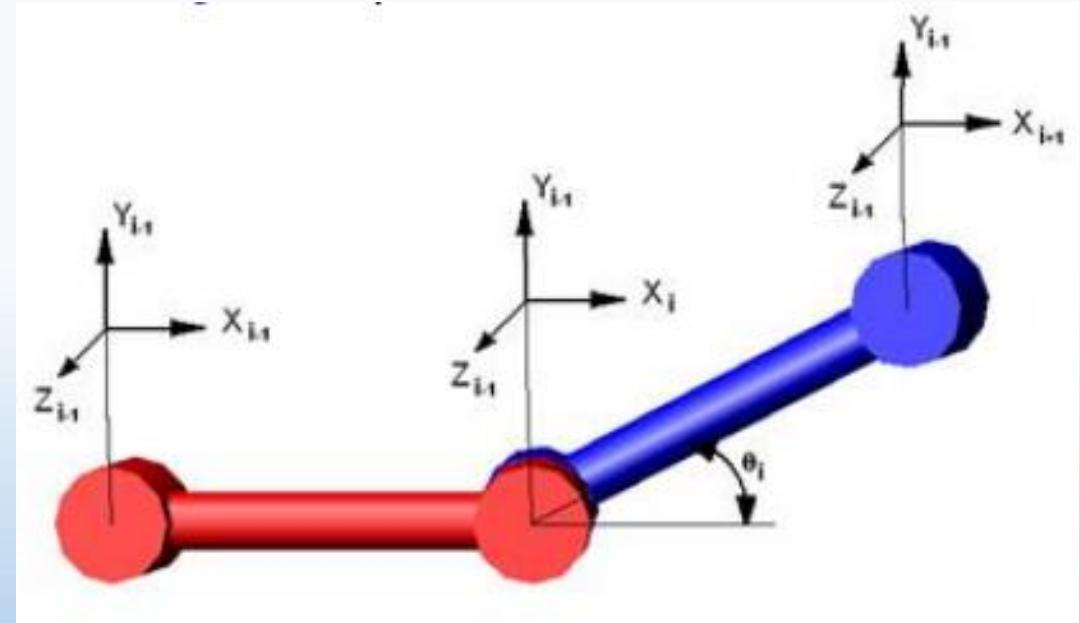
Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Şekil incelenirse, z_{i-1} ekseni ile z_i ekseni arasındaki x_i boyunca ölçülen açıya α_{i-1} eksen açısı denir.



Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Yandaki şekil incelenirse, x_{i-1} ekseni ile x_i ekseni arasındaki z_i boyunca ölçülen açıya θ_i eklem açısı denir.



Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Koordinat sistemleri eklemlere yerleştirildikten sonra D-H değişkenleri bulunur ve bir sonraki slaytta yer alan tabloya ilgili veriler yazılır.
- Robotun hareket etmesiyle değişmeyen parametreler a_{i-1} eklem uzunlukları ve α_{i-1} eksen açılarıdır.
- Değişen parametreler, eklem döner ise **θ_{i-1} eklem açısı**, eklem prizmatik ise **d_{i-1} eklem kaçılığıdır**.

Denavit-Hartenberg Yöntemi - Tablo

Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
	2 Komşu Eksen Açısı	Eklem Uzunluğu	Eklem Kaçılığı	Eklem Açısı	
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i veya θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1	d_1 veya θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2	d_2 veya θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3	d_3 veya θ_3
4	α_3	a_3	d_4	θ_4	d_4 veya θ_4

Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Her ekleme ait dönüşüm matrisi şu şekilde bulunacaktır;

$${}^{i-1}_iT = R_x(\alpha_{i-1})D_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)D_z(d_i)$$

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

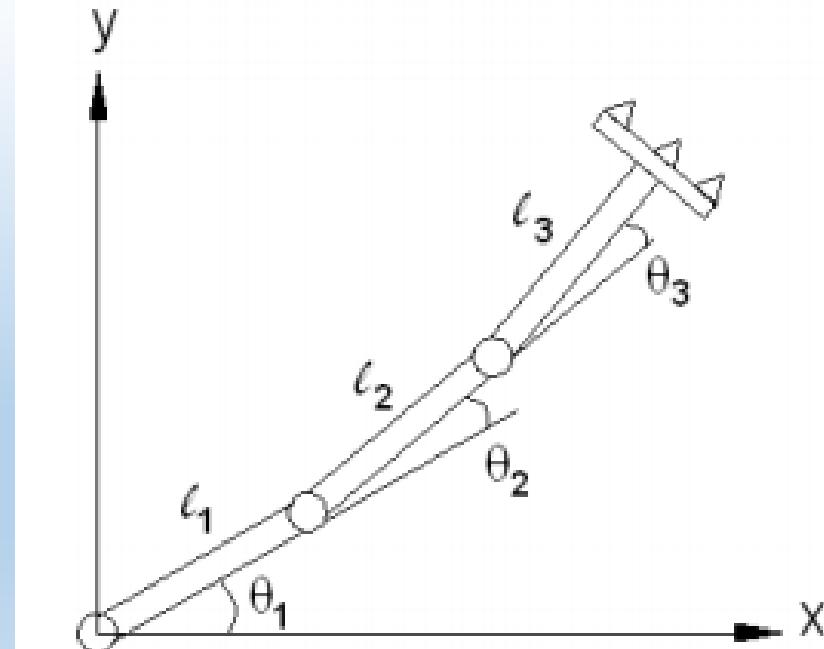
Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Dönüşüm matrislerin çarpılması ile uç işlevcisinin konumunu ve yönelimini içeren ve eklem değişkenlerinin birer fonksiyonu olan genel bir dönüşüm matrisi elde edilir.
- Bu matriste 9 adet **dönme** (r_{11} , r_{12} , r_{13} , r_{21} , r_{22} , r_{23} , r_{31} , r_{32} ve r_{33}) ve 3 adet de **konum** (p_x , p_y ve p_z) belirten toplam 12 elemanı bulunur.
- Daha önce de sözü edildiği üzere; r_{41} , r_{42} , r_{43} ve r_{44} elemanları (Bir önceki slaytta yer alan formülde [0 0 0 1] olarak gözükmekte..) **Global Ölçek** olarak adlandırılır.

Soru : Global Ölçek matrisi [0 0 0 1] haricinde kullanılabilir mi, anlamı nedir?

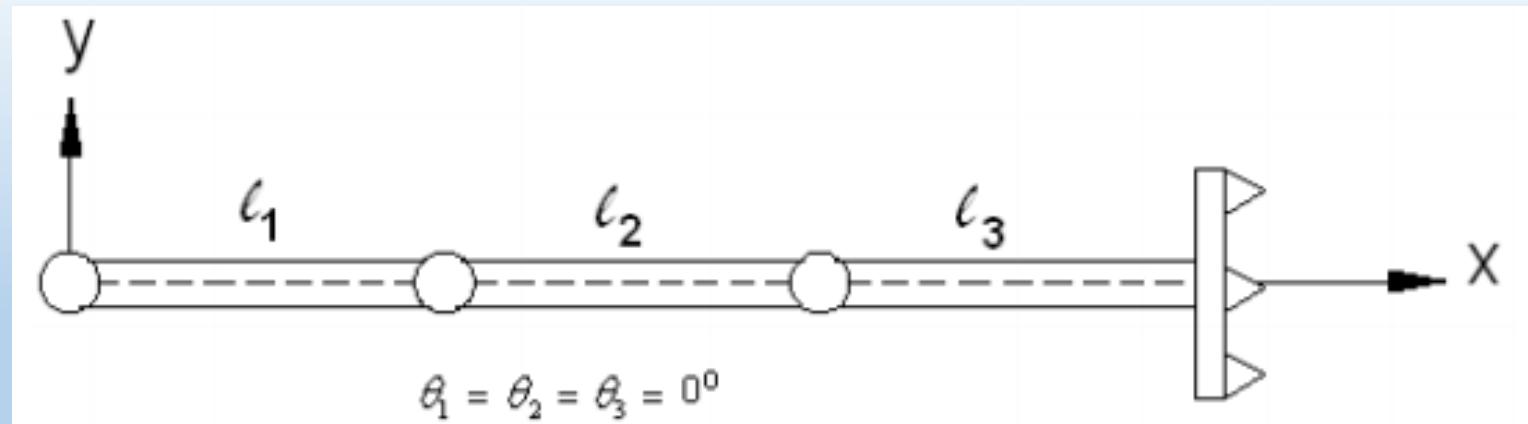
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- “İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Geometrik Yaklaşım” konusunda kullandığımız robot sistemine, Denavit-Hartenberg Yöntemini uygulayalım.



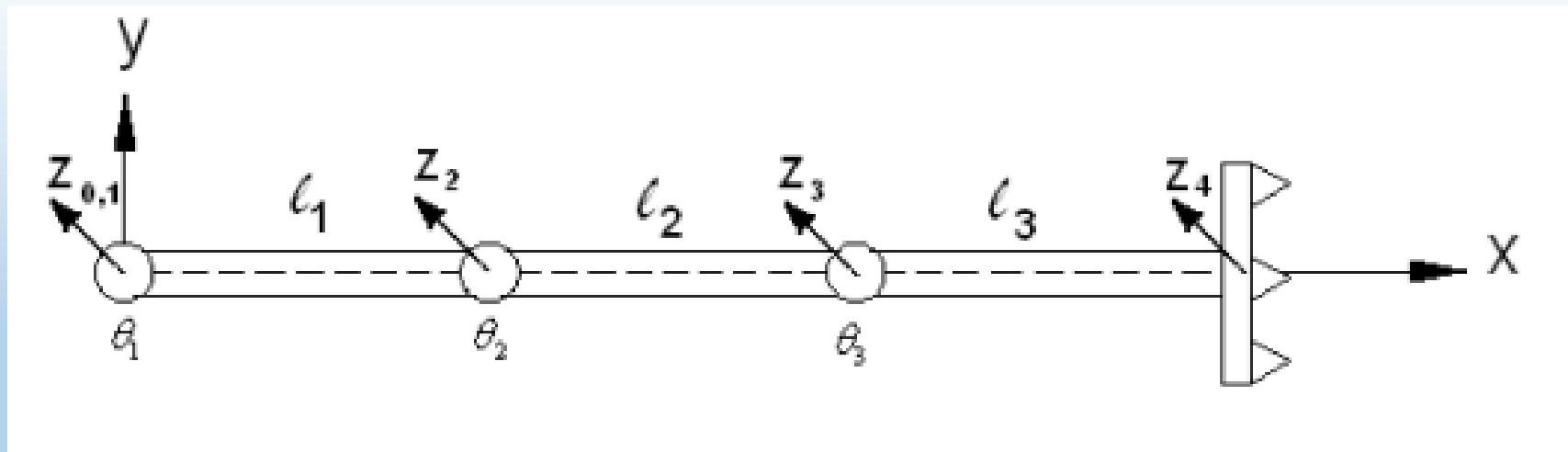
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Öncelikle kolun başlangıç değerlerine göre eklemelere koordinat sistemleri yerleştirilir.



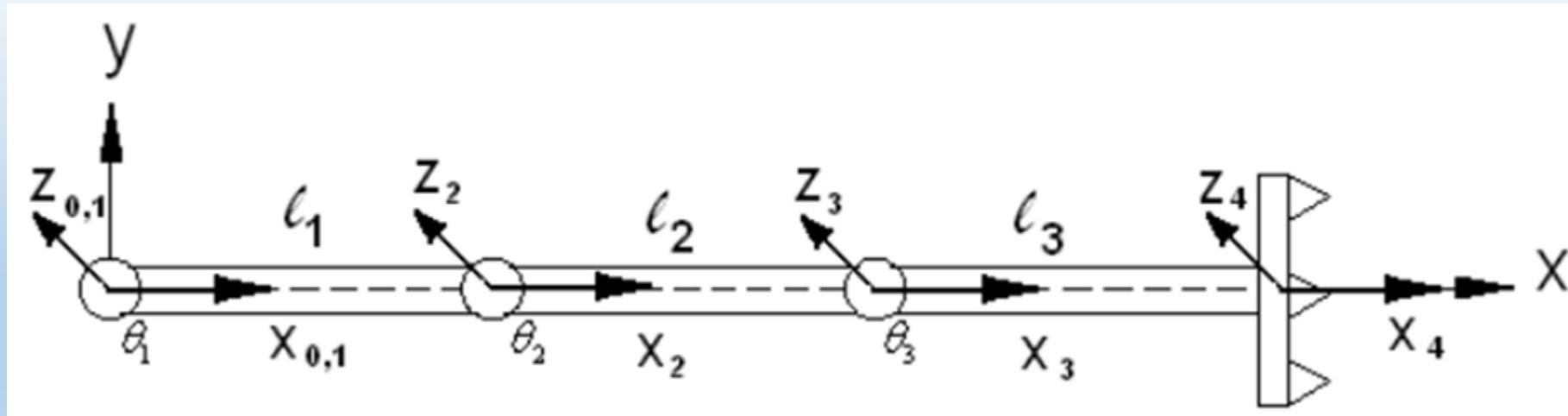
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- İkinci adım olarak, dönme eklemelerine Z eksenleri yerleştirilir.



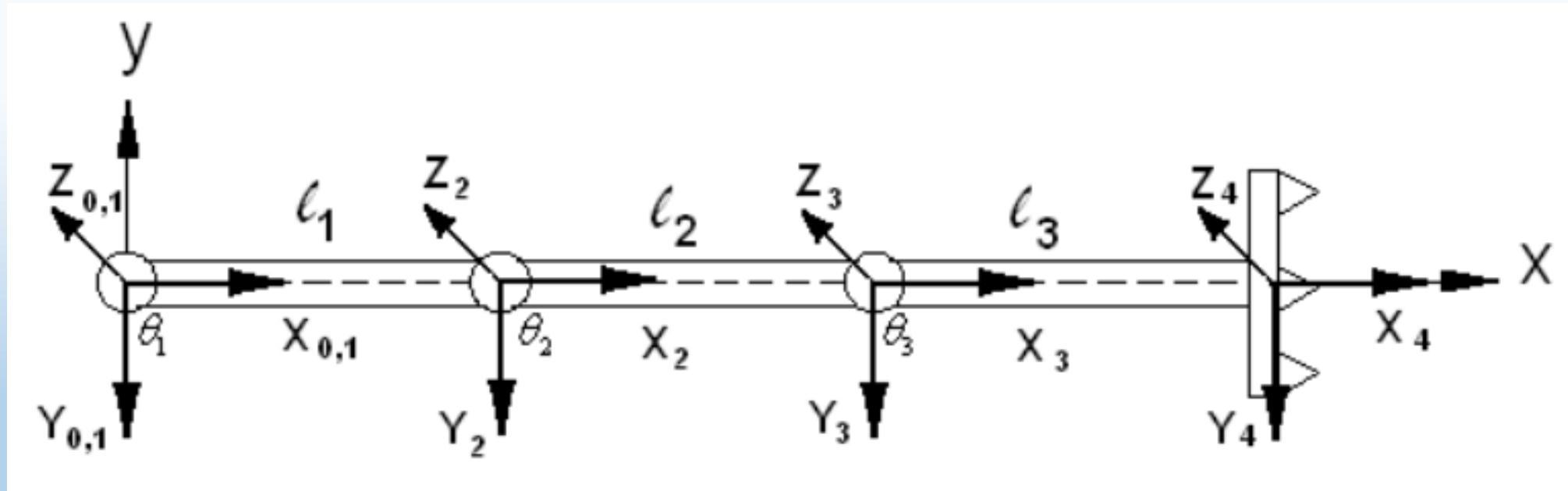
İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Üçüncü adımda Z eksenine dik ve eklem boyunca uzanan X eksenleri yerleştirilir.



İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Dördüncü adımda **sağ el kuralına göre** Y eksenleri yerleştirilir.



İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Son adım olarak da koordinat sistemleri eklemelere yerleştirildikten sonra D-H değişkenleri belirlenir ve veriler ilgili tabloya işlenir.

HATIRLATMA : Denavit-Hartenberg Yöntemi - Tablo

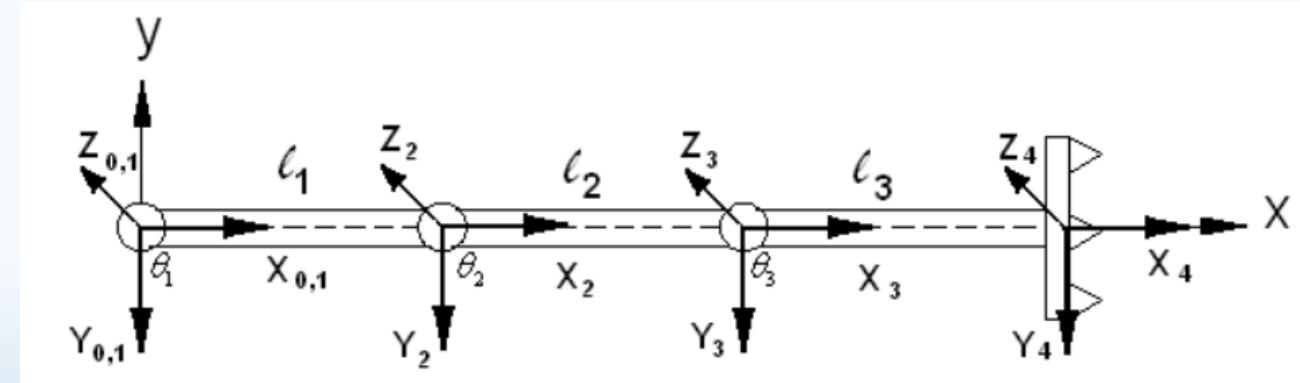
Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
	2 Komşu Eksen Açısı	Eklem Uzunluğu	Eklem Kaçılığı	Eklem Açısı	
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i veya θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1	d_1 veya θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2	d_2 veya θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3	d_3 veya θ_3
4	α_3	a_3	d_4	θ_4	d_4 veya θ_4

' şeklindeydi...

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Öncelikle D-H değişkenlerinden sabit olan parametreler belirlenir.

Örnekteki robot incelemesi,



$Z_{0,1}$, Z_2 , Z_3 ve Z_4 eksenlerinin dönme yönleri aynı olduğundan α_0 , α_1 , α_2 ve α_3 açıları 0 (sıfır) 'dır.

Z_0 ile Z_1 arasında X_1 boyunca uzanan herhangi bir bağ uzunluğu olmadığından $a_0 = 0$ olacaktır.

Eksen No	D-H Değişkenleri				Eklem Değişkeni
	2 Komşu Eksen Açısı	Eklem Uzunluğu	Eklem Kaçıklığı	Eklem Açısı	
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	d_i veya θ_i
1	0	0	0	θ_1	θ_1
2	0	L_1 $(Z_1 - Z_2 \text{ arası})$	0	θ_2	θ_2
3	0	L_2 $(Z_2 - Z_3 \text{ arası})$	0	θ_3	θ_3
4	0	L_3 $(Z_3 - Z_4 \text{ arası})$	0	0	0

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Tablomuzu elde ettik. Dönüşüm matrislerini teker teker bulmamız gerekiyor. Ardından elde edilen dönüşüm matrisleri ile sistemin hareketini açıklamış olacağız.

$${}^{i-1}{}_iT = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Genel formülünü kullanarak, ${}^0{}_4T = {}^0{}_1T {}^1{}_2T {}^2{}_3T {}^3{}_4T$ eşitliğini ifade edeceğiz.

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Birinci eklem dönüşüm matrisi şu şekilde bulunacaktır;

$$\begin{aligned} {}_1^0T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_0 \\ \sin \theta_1 \cos \alpha_0 & \cos \theta_1 \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & -\sin \alpha_0 d_1 \\ \sin \theta_1 \sin \alpha_0 & \cos \theta_1 \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & \cos \alpha_0 d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- İkinci eklem dönüşüm matrisi şu şekilde bulunacaktır;

$$\begin{aligned} {}_2^1T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_1 \\ \sin\theta_2 \cos\alpha_1 & \cos\theta_2 \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & -\sin\alpha_1 d_2 \\ \sin\theta_2 \sin\alpha_1 & \cos\theta_2 \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Üçüncü eklem dönüşüm matrisi şu şekilde bulunacaktır;

$$\begin{aligned} {}^2_3T &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_2 \\ \sin \theta_3 \cos \alpha_2 & \cos \theta_3 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_2 d_3 \\ \sin \theta_3 \sin \alpha_2 & \cos \theta_3 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Dördüncü eklem dönüşüm matrisi şu şekilde bulunacaktır;

$$\begin{aligned} {}^3_4T &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & a_3 \\ \sin\theta_4 \cos\alpha_2 & \cos\theta_4 \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_3 d_4 \\ \sin\theta_4 \sin\alpha_2 & \cos\theta_4 \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_3 d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- Elde edilen dört matrisi çarpıp, işlemimizi bitireceğiz.

$${}^0T = {}_1^0T {}_2^1T {}_3^2T {}_4^3T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- İşlemin devamı sinüs kosinüs dönüşümlerinin de yardımı ile şu şekilde getirilebilir;

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & -s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & 0 & l_3(c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3) + l_2c(\theta_1 + \theta_2) + l_1c\theta_1 \\ s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 & 0 & l_3(s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3) + l_2s(\theta_1 + \theta_2) + l_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 - s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Hatırlatma: Kullanılan Dönüşümler....

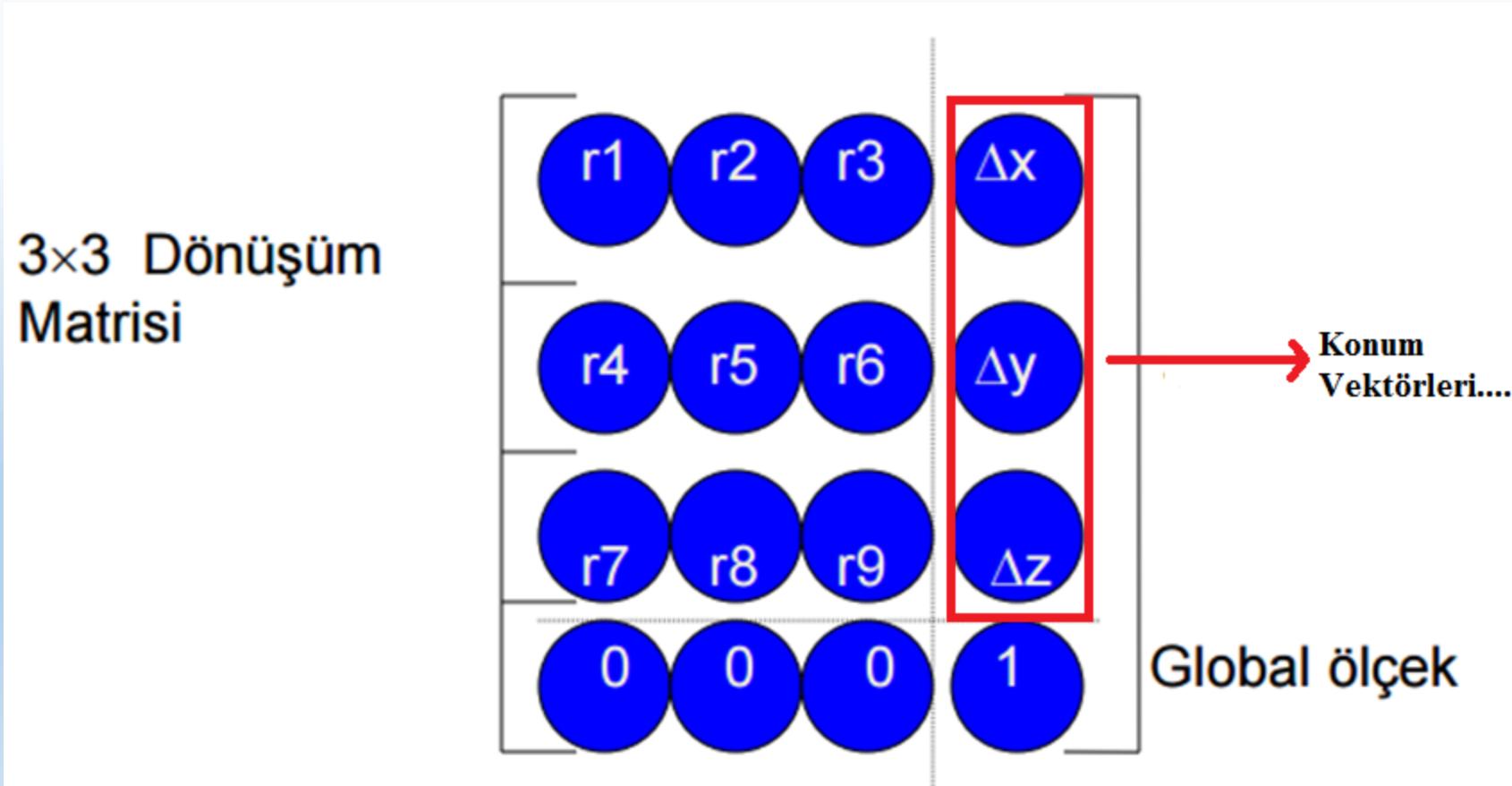
$$P_x = l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1$$

$$P_y = l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin \theta_1$$

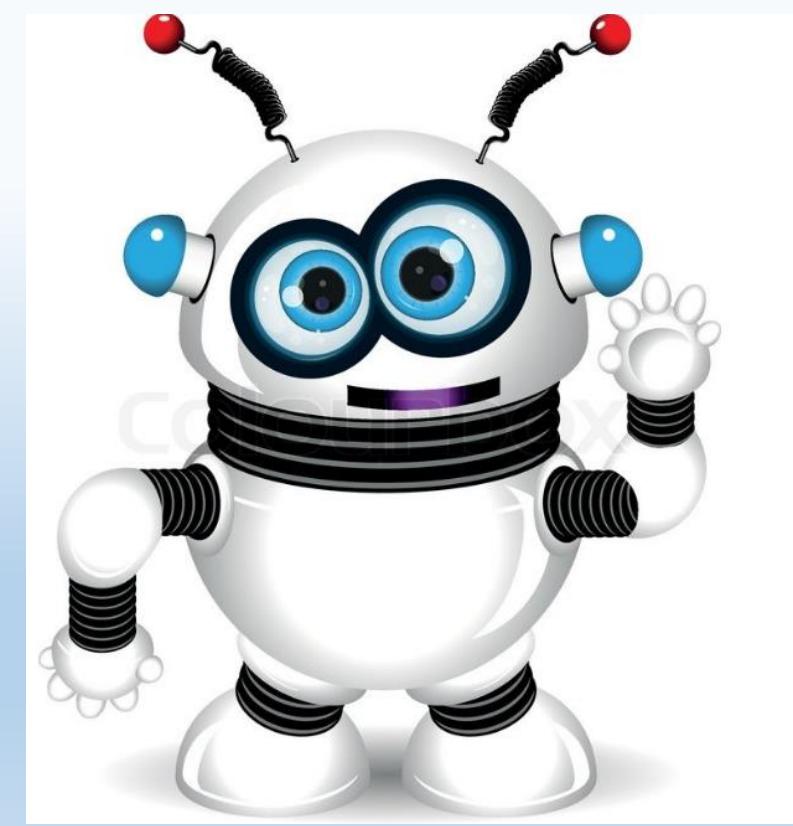
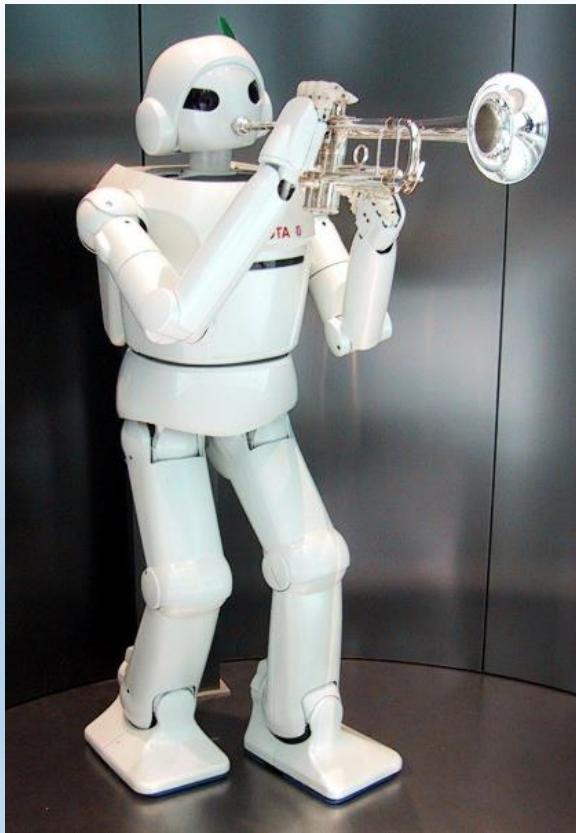
- | | |
|---|--|
| 1 | $\rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ |
| 2 | $\rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ |
| 3 | $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ |
| 4 | $\rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ |

İleri Yön (Düz) Manipülatör Kinematiği – Cebirsel Yaklaşım : Denavit-Hartenberg Yöntemi

- **HATIRLATMA** ; İşlem sonucunda ilgili elemanların P_x ve P_y olduğuna nereden varıldı ??



Ters Manipülatör Kinematiği



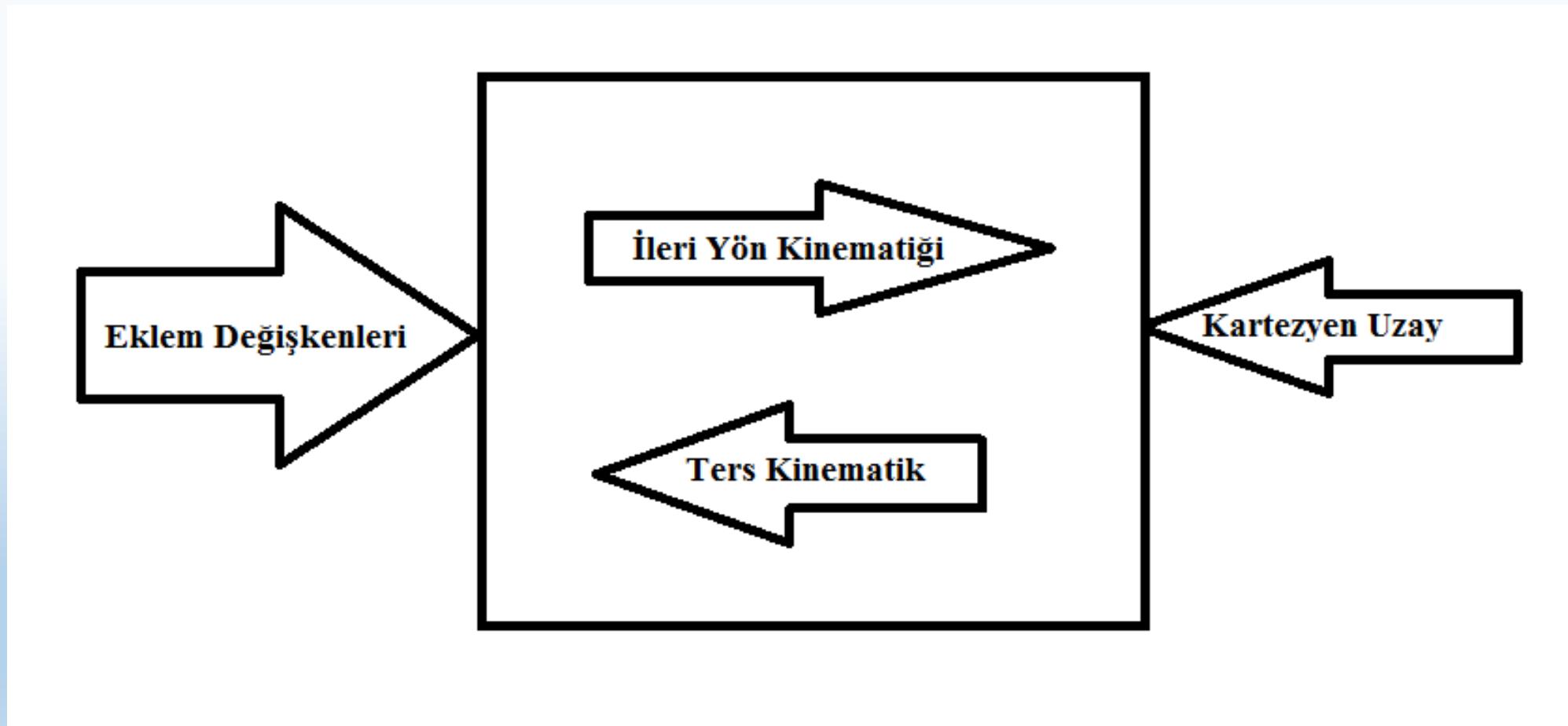
Ters kinematik problemi nedir ?

- Verilen sonlandırıcı konumu ve yönelimi için **eklem değişkenlerinin** değerlerini bulmak.
- Ters kinematik problemlerinde düz kinematiklerin tersi biçimde homojen dönüşüm matrisleriyle oluşturulan doğrusal olmayan denklemlerin çözümlenmesi istenir.

Ters Kinematik

- Robotun uç işlevcisinin ana çerçeveye göre konumu ve yönelimi verildiğinde, manipülatörün **bu konuma ve yönelime gelebilmesi için** gerekli eklem değişkenlerinin bulunması işlemi.
- Başka bir deyişle ters kinematik, uç işlevcisinin konum ve yönelimini kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemi olarak da tanımlanabilir.

Ters Kinematik



Ters Kinematik

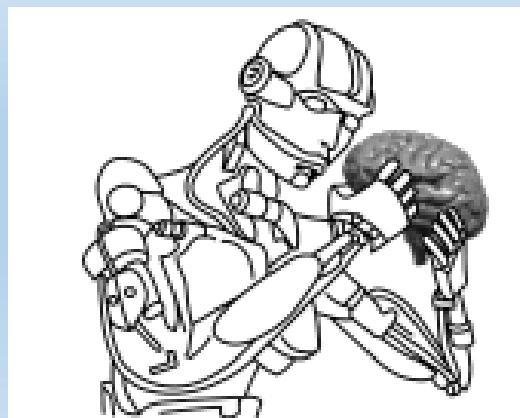
İleri yön kinematiğinde,

$$\mathbf{x} = f(\theta)$$

Ters Kinematikte,

$$\theta = f^{-1}(\mathbf{x})$$

‘ mantığı mevcuttur.



Ters Kinematik - Zorluklar

- Ters Kinematik, aşağıdaki sebeplerden dolayı oldukça zor olan problemleri bünyesinde barındırmaktadır;
 - A) Analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içerir.
 - B) Eklemlerin yapısına bağlıdır. Eğer robot prizmatik eklemelerden oluşuyorsa ters kinematik probleminin çözümü kolaylaşıyorken, robottaki döner eklem sayısı arttıkça problemin zorluğu da doğru orantılı bir şekilde artmaktadır.
 - C) Her zaman matematiksel çözüm **fiziksel çözümü** temsil edemez.

Ters Kinematik - Zorluklar

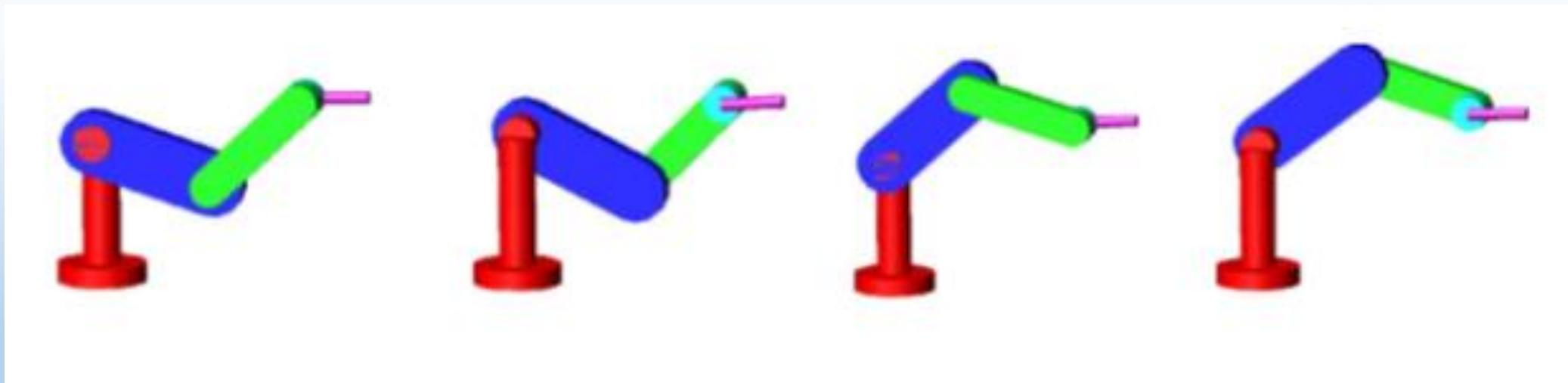
D) Aynı uç işlevcisi için birden fazla çözüm olabilir. Ters kinematik çözüm sayısı, robotun serbestlik derecesinin yanında aynı zamanda eklem değişkenlerine de bağlıdır. Her bir eklemde eklem uzunluğu ve eklem kaçılığının olması çözüm sayısını artıracaktır.

Örneğin, 6 eksenli bir robotta, her bir eklem için en az bir eklem uzunluğu ve eklem kaçılığı olduğundan ters kinematik çözüm sayısı tahmin edilebileceği üzere $2^6=64$ 'tür.

Yalnız, C maddesinde de belirtildiği üzere, bu çözümlerden bazıları **sanal çözümlerdir**.

Ters Kinematik

- Örnek: PUMA robot kolunun, aynı hedef noktaya 4 farklı şekilde erişmesi;



Ters Kinematik – Arctan2 Fonksiyonu

- Arctan2 fonksiyonu, çift parametreli bir arctanjant fonksiyonudur.
- Yazılımda (C dilinde math.h standart kütüphanesinde tanımlı bir fonksiyondur.) / robotikte özellikle ters kinematik incelemelerinde kullanılır.

Arctan2 fonksiyonunun, klasik Arctanjant fonksiyonuna göre avantajını iki durum ile açıklayalım,

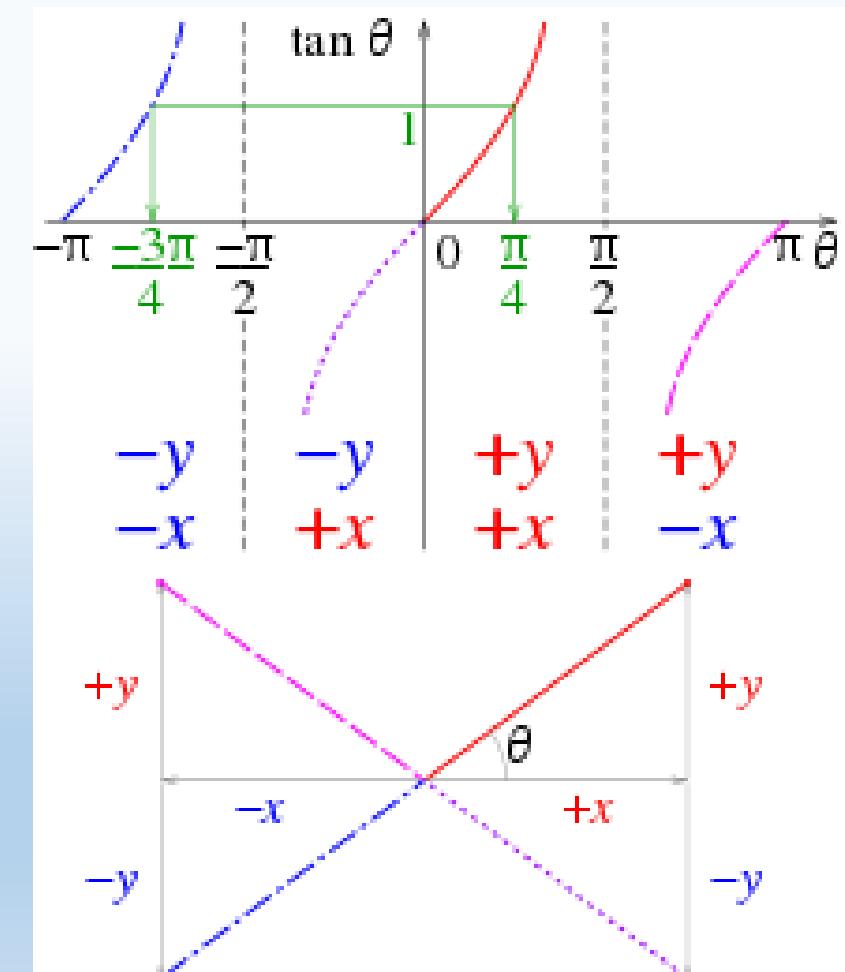
Durum 1 : Standart arctanjant fonksiyonuna göre $(1,1)$ ve $(-1,-1)$ noktalarının karşılığı $\pi/4$ olmaktadır. Fakat tanımı gereği arctan2 fonksiyonu söz konusu koordinatlarda sırasıyla $\pi/4$ ve $-3\pi/4$ değerlerini verir.

Durum 2 : x ekseni ile $(1,0)$ vektörü arasındaki açıyı elde etmek isteyelim. Söz konusu açıyı klasik arctanjant fonksiyonu ile elde etmek istersek sonuca ulaşamayız. Fakat Arctan2 fonksiyonu, söz konusu vektör için doğru sonuç olan $\pi/2$ değerini elde etmemize olanak sağlar.

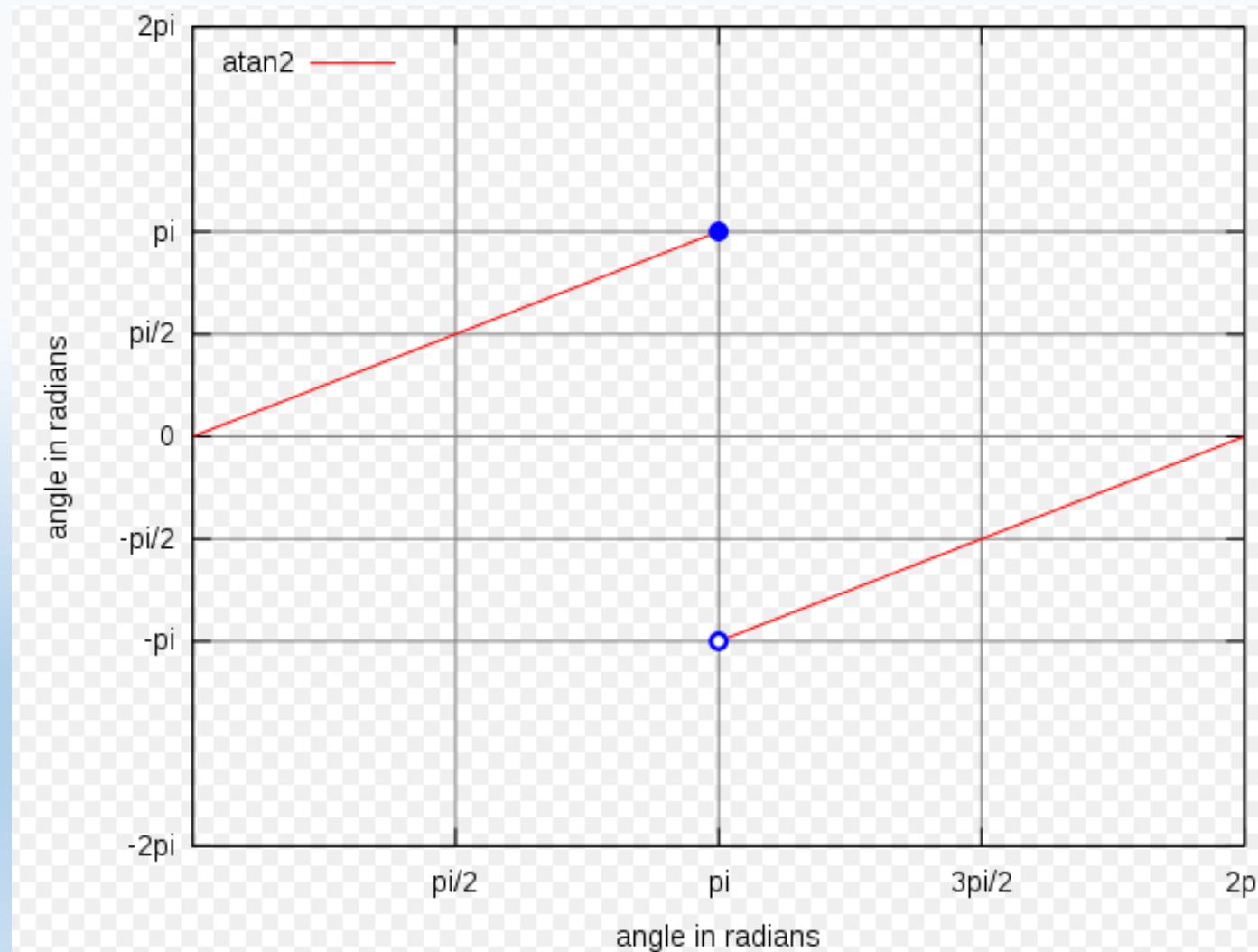
Ters Kinematik – Arctan2 Fonksiyonu

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{if } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{if } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi & \text{if } x < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases}$$

Arctan2(0,0) , geleneksel olarak tanımsız olarak ifade edilmiştir.



Arctan2 Fonksiyonu – Birim Çemberde Tanım Aralığı

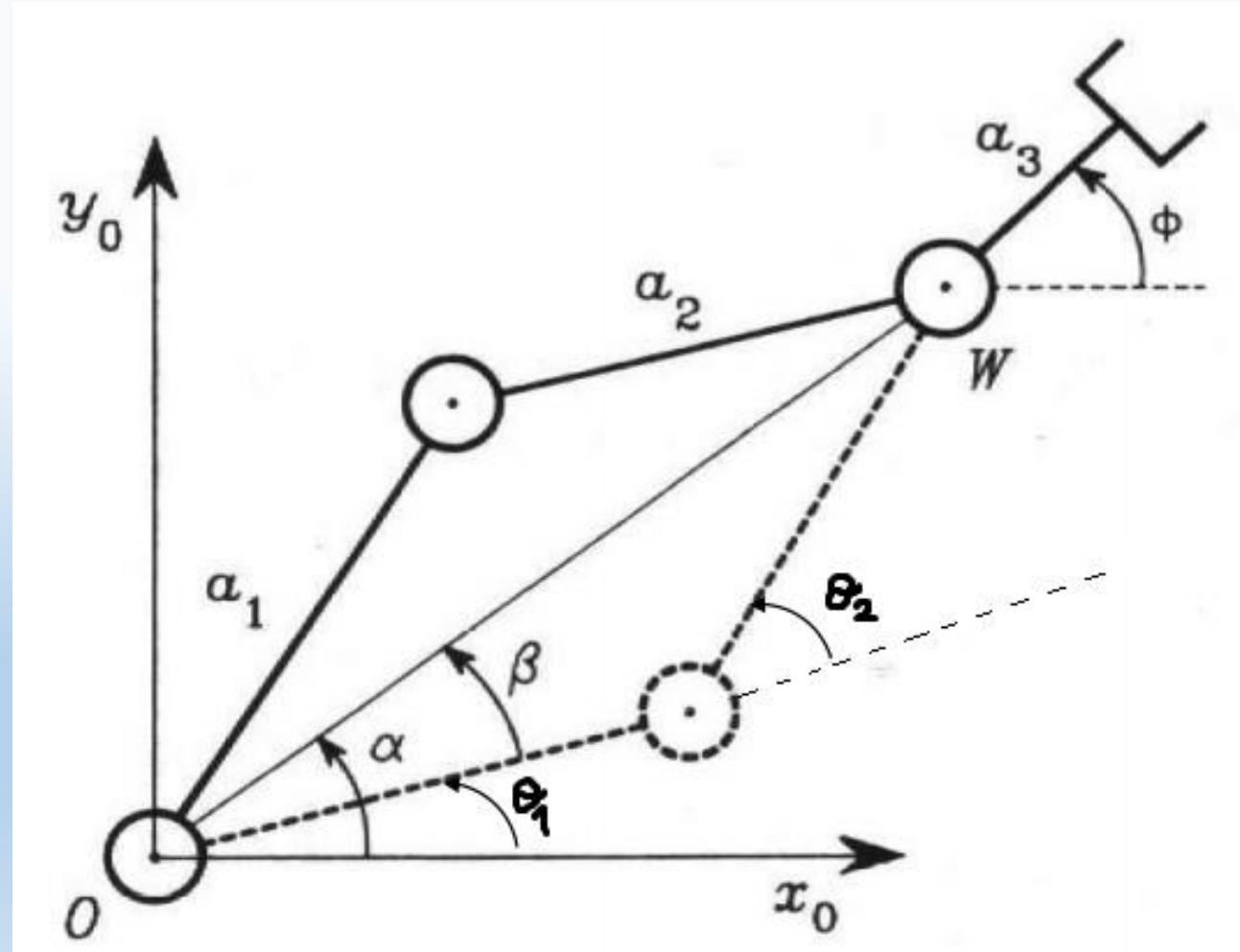


Ters Kinematik

- Denklemlerin çözümü için iki adet yaklaşım mevcuttur.
 - A) Kapalı Form Yaklaşımı (Cebirsel / Geometrik)
 - B) Sayısal Yaklaşım (İteratif)

Ters Kinematik

- Aşağıda verilen düzlemsel kol üzerinde **kapalı form yaklaşımını** inceleyelim.



Ters Kinematik – Kapalı Form Yaklaşımı

$$\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

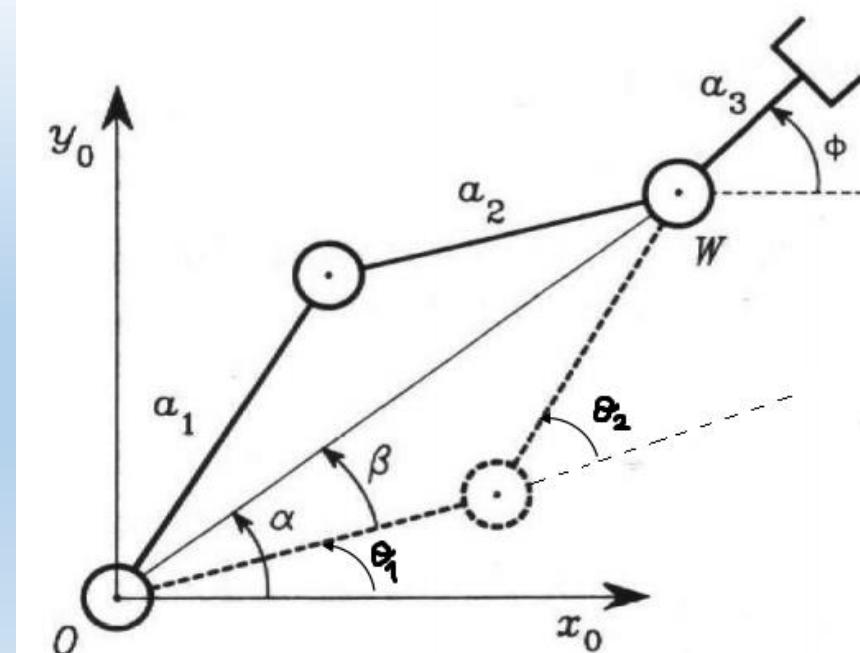
$$pw_x = p_x - a_3 \cos(\Phi) = a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$pw_y = p_y - a_3 \sin(\Phi) = a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$pw_x^2 + pw_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = (pw_x^2 + pw_y^2 - a_1^2 - a_2^2) / (2 a_1 a_2)$$

$$\sin(\theta_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}$$
 ‘ olarak hesaplanır.



Ters Kinematik – Kapalı Form Yaklaşımı

$$\sin(\theta_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$$

Burada \pm kavramı dirsek yukarı / aşağı duruşlara karşılık gelmektedir.

Ters Kinematik - Kapalı Form Yaklaşımı

θ_2 açısı, elde edilen ifadeler ile şu şekilde ifade edilmelidir,

$$\theta_2 = \text{Arctan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))$$

W noktası için elde ettiğimiz ifadelerde $\sin(\theta_2)$, $\cos(\theta_2)$ ifadelerini uygun yerlere yazıp denklemleri düzenlersek,

$$\sin(\theta_1) = [(a_1 + a_2 \cos(\theta_2)) pw_y - a_2 \sin(\theta_2) pw_x] / (pw_x^2 + pw_y^2)$$

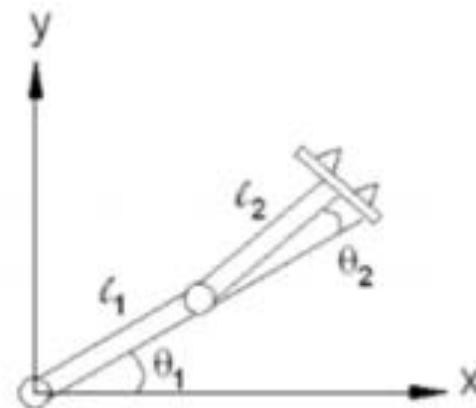
$$\cos(\theta_1) = [(a_1 + a_2 \cos(\theta_2)) pw_x + a_2 \sin(\theta_2) pw_y] / (pw_x^2 + pw_y^2)$$

‘denklemleri elde edilir.

$\theta_1 = \text{Arctan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1))$ olarak ifade edilir.

Ters Kinematik – İteratif Yöntem

Aşağıdaki sistemi ele alalım;



$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

İleri yön kinematiğine ait dönüşüm matrisinin her iki tarafını $[{}^0T]^{-1}$ ile çarpalım,

$$[{}^0T]^{-1} {}_3T = [{}^0T]^{-1} {}_1T {}_1T {}_2T {}_3T$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

Daha önceki derslerimizde belirttiğimiz üzere,

$${}^0_1 T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0_1 R^T & -{}^0_1 R^T {}^0_1 P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1 R = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1 R^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^0_1 T]^{-1} {}^0_1 T = I$$

' olacaktır.

P_1 konum vektörünün sıfır olduğu da ortadadır.

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

İşleme devam edersek,

$${}_{-1}^0 R {}^T {}^0 P_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0 T {}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

'elde edilir.

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

Elde ettiğimiz matrisi, 0_3T ileri yön kinematiği homojen dönüşüm matrisi ile çarpalım.

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T^{-1} {}^0_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 r_{11} + \sin \theta_1 r_{21} & \cos \theta_1 r_{12} + \sin \theta_1 r_{22} & \cos \theta_1 r_{13} + \sin \theta_1 r_{23} & \cos \theta_1 p_x + \sin \theta_1 p_y \\ -\sin \theta_1 r_{11} + \cos \theta_1 r_{21} & -\sin \theta_1 r_{12} + \cos \theta_1 r_{22} & -\sin \theta_1 r_{13} + \cos \theta_1 r_{23} & -\sin \theta_1 p_x + \cos \theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

${}^1T_2 {}^2T_3$ ifadesini elde edelim,

$${}^1T_2 {}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 + l_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

Elde ettiğimiz denk iki ifadeyi birbirine eşitleyip ters kinematik denklemlerini elde edelim...

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 r_{11} + \sin\theta_1 r_{21} & \cos\theta_1 r_{12} + \sin\theta_1 r_{22} & \cos\theta_1 r_{13} + \sin\theta_1 r_{23} & \cos\theta_1 p_x + \sin\theta_1 p_y \\ -\sin\theta_1 r_{11} + \cos\theta_1 r_{21} & -\sin\theta_1 r_{12} + \cos\theta_1 r_{22} & -\sin\theta_1 r_{13} + \cos\theta_1 r_{23} & -\sin\theta_1 p_x + \cos\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2 \cos\theta_2 + l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2 \cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

- Şu denklemler elde edilecektir,

$$1. \cos\theta_1 r_{11} + \sin\theta_1 r_{21} = \cos\theta_2$$

$$2. -\sin\theta_1 r_{11} + \cos\theta_1 r_{21} = \sin\theta_2$$

$$3. r_{31} = 0$$

$$4. \cos\theta_1 r_{12} + \sin\theta_1 r_{22} = -\sin\theta_2$$

$$5. -\sin\theta_1 r_{12} + \cos\theta_1 r_{22} = \cos\theta_2$$

$$6. r_{32} = 0$$

$$7. \cos\theta_1 r_{13} + \sin\theta_1 r_{23} = 0$$

$$8. -\sin\theta_1 r_{13} + \cos\theta_1 r_{23} = 0$$

$$9. r_{33} = 1$$

$$10. \cos\theta_1 P_x + \sin\theta_1 P_y = l_2 \cos\theta_2 + l_1$$

$$11. -\sin\theta_1 P_x + \cos\theta_1 P_y = l_2 \sin\theta_2$$

$$12. P_z = 0$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

Ters kinematik çözümünün tamamı mümkünse kol uzunlukları cinsinden ifade edilmelidir.

Dolayısı ile elde ettiğimiz denklemlere tekrar dönelim...

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

10. ve 11. denklemlerin her iki tarafının karesini alıp alt alta toplayalım,

$$\begin{array}{c} \cos^2 \theta_1 P_x^2 + \sin^2 \theta_1 P_y^2 = l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 \\ + (-\sin \theta_1)^2 P_x^2 + \cos^2 \theta_1 P_y^2 = l_2^2 \sin^2 \theta_2 \\ \hline \cos^2 \theta_1 P_x^2 + \sin^2 \theta_1 P_y^2 + \sin^2 \theta_1 P_x^2 + \cos^2 \theta_1 P_y^2 = l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 + l_1^2 + l_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{array}$$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

- Eşitliğin son tarafını P_x^2 ve P_y^2 , sağ tarafını da l_2^2 parantezlerine alıp ifadeyi tekrar düzenleyelim,

$$(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1)P_x^2 + (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1)P_y^2 = l_2^2(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) + 2l_1l_2 \cos \theta_2 + l_1^2$$

Hatırlatma: $(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = 1$

Ters Kinematik - İteratif Yöntem

- İşleme devam edelim,

$$P_x^2 + P_y^2 = l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2 + l_1^2$$

$$\cos \theta_2 = \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right)$$

Hatırlatma: $\cos \theta = a$ ise $\theta = \arctan 2(\pm \sqrt{1-a^2}, a)$

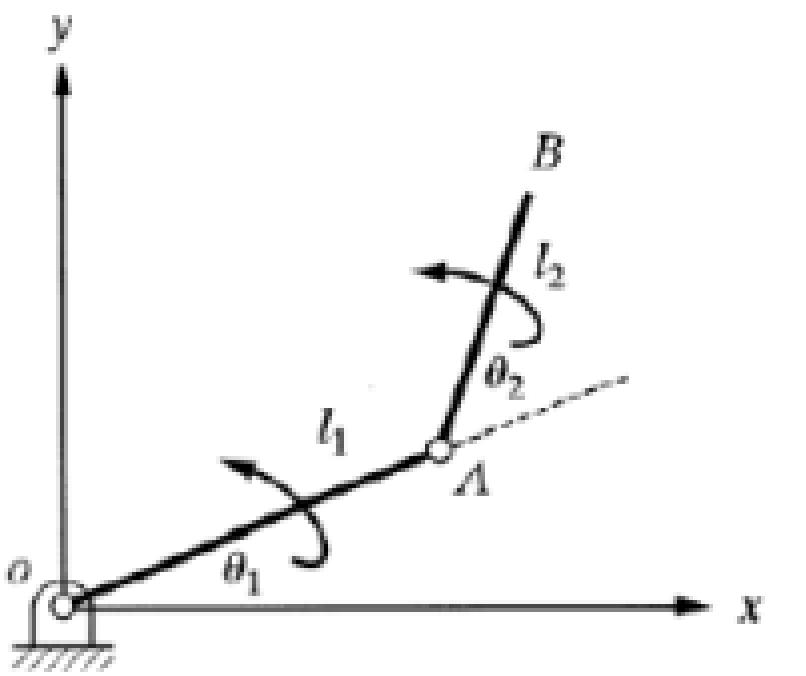
Dolayısı ile,

$$\theta_2 = \arctan 2 \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right)^2}, \left(\frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_2^2 + l_1^2)}{2l_1l_2} \right) \right)$$

'elde edilir.

ÖDEV : θ_1 için nasıl bir yaklaşım yapılabilir???

Diferansiyel Hareket ve Hız Kavramları



B noktası için;

$$x_B = \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_B = \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

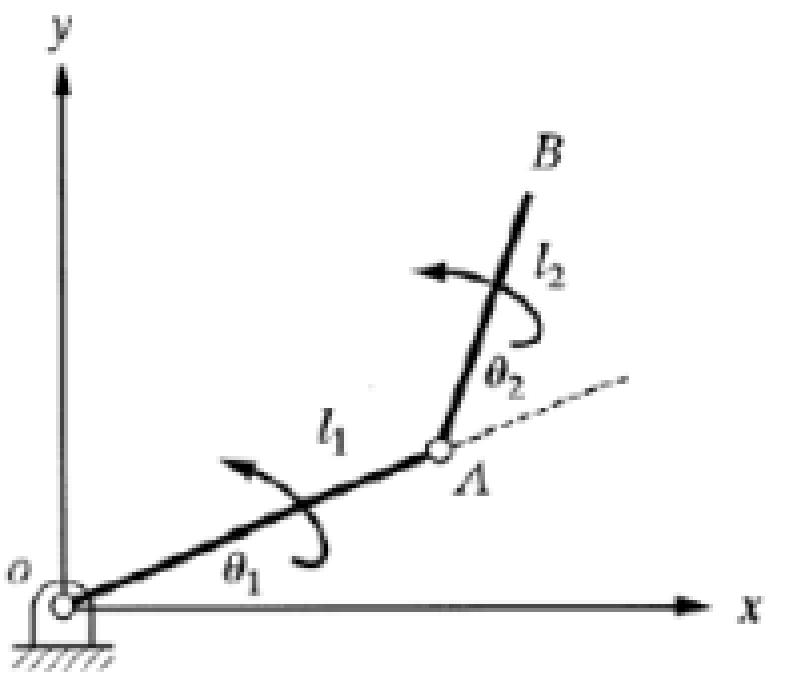
İfadelerin diferansiyeli,

$$dx_B = -\ell_1 \sin \theta_1 d\theta_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(d\theta_1 + d\theta_2)$$

$$dy_B = \ell_1 \cos \theta_1 d\theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(d\theta_1 + d\theta_2)$$

'şeklinde olacaktır.

Diferansiyel Hareket ve Hız Kavramları



Elde ettiğimiz denklem setini matris formunda yazacak olursak;

$$\begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

'elde edilir.

Genel hatları ile;

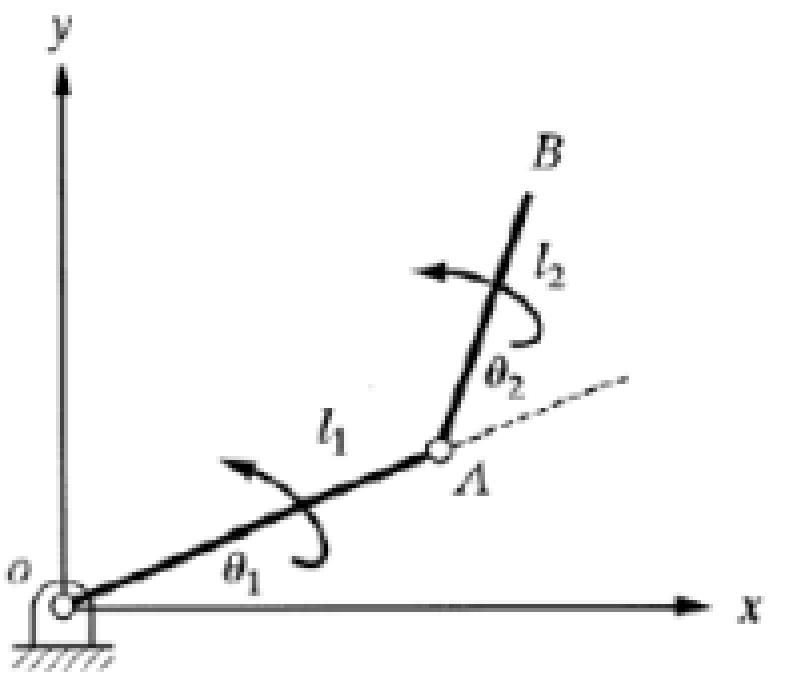
[A] = [B].[C] formatı...

A= B noktasındaki robot kolunun / manipülatörün diferansiyel hareketi

B= Jacobian

C= Eklemlerin/Eklem değişkenlerinin diferansiyel hareketi

Diferansiyel Hareket ve Hız Kavramları



$$\begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

İşleme devam edersek,

$$\begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix} / dt = \begin{bmatrix} -\ell_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} / dt$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx_B}{dt} = \bar{V}_{B_x} \quad \& \quad \frac{dy_B}{dt} = \bar{V}_{B_y}$$

' elde edilir.

Jacobian

- Tanım olarak;

Bir robot mekanizmasının elemanlarının geometrisinin zamanda gösterilmesi denebilir...

- Tek tek eklem hareketleri ile genel mekanizma hareketleri arasındaki ilişki....

Jacobian

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j) \quad x_j = \text{değişkenler}, Y_i = f \text{ fonksiyonlar kümesi olmak üzere},$$

x_j diferansiyel değişimi oluşturulduğunda Y_i 'deki diferansiyel değişim şu şekilde tanımlanacaktır;

$$\begin{aligned}\delta Y_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \delta x_j \\ \delta Y_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \delta x_j \\ &\vdots \\ \delta Y_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j\end{aligned}$$

Jacobian

- Elde ettiğimiz denklem setlerini matris formunda yazacak olursak;

$$\begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \vdots \\ \delta Y_i \\ \vdots \\ \delta Y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_i \\ \vdots \\ \delta x_j \end{bmatrix}$$

Yani;

$$[\delta Y_i] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] [\delta x_j]$$

Jacobian

- Robotik sistem için düşünecek olursak;

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \text{Jacobian}_{\text{Robot}} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix}$$

Düzen bir gösterimle;

$$[D] = [J][D_\theta]$$

Jacobian

Burada;

dx, dy, dz : Elin eksen boyunca diferansiyel hareketi.

$\delta x, \delta y, \delta z$: Elin eksene göre diferansiyel dönüşleri/rotasyonları.

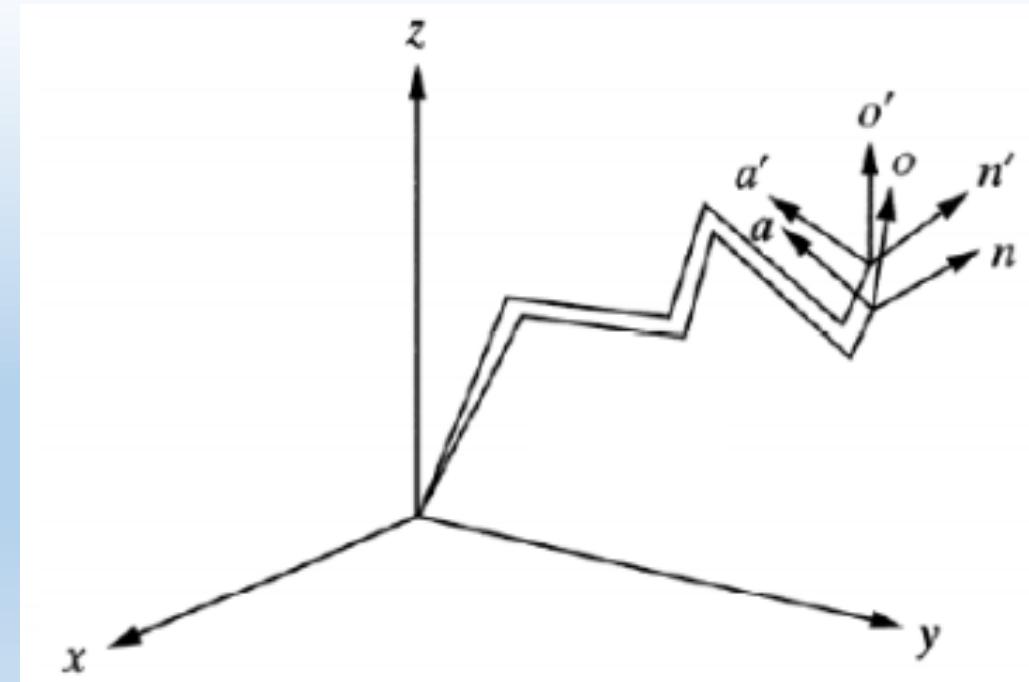
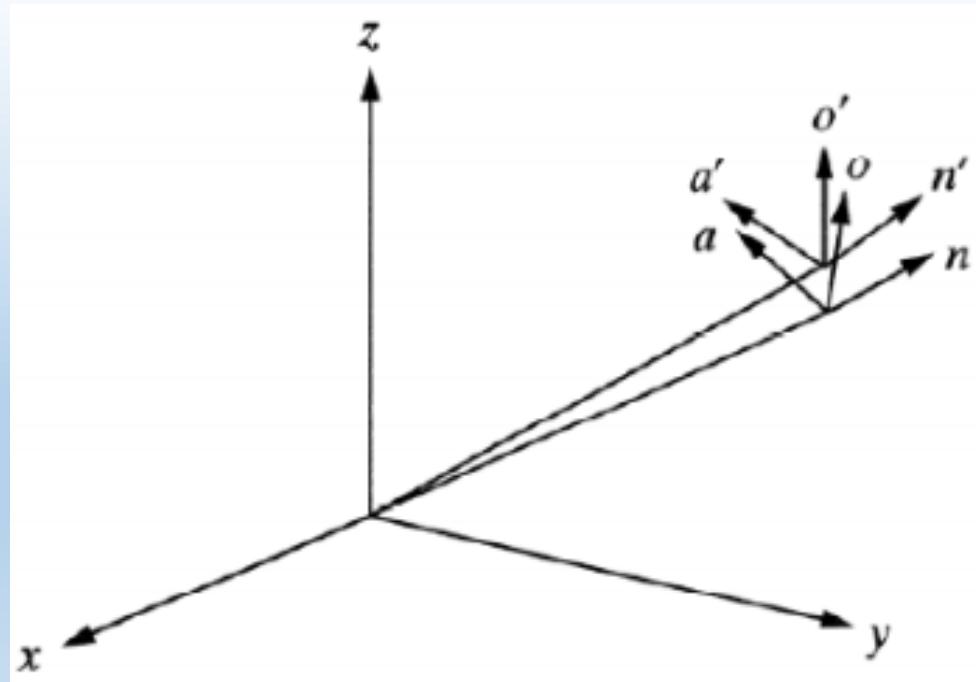
$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \text{Jacobian}_{\text{Robot}} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix}$$

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

A) Diferansiyel Öteleme (dx, dy, dz)

B) Diferansiyel Dönme/Rotasyon ($\delta x, \delta y, \delta z$)

C) Diferansiyel Dönüşüm (Dönmeler ve ötelemeler...)



Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

Diferansiyel Öteleme ($\delta x, \delta y, \delta z$) ,

Diferansiyel Dönme/Rotasyon ($\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$) olmak üzere ve,

$$\sin \delta x = \delta x$$

$$\cos \delta x = 1$$

$$(\delta x)^2 \ll \delta x$$

' kabulleri ile öteleme & dönme/rotasyon matrislerimizi tanımlayalım/bulalıım.

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

$$\text{Rot}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

' Elde edilir.

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

SORU: Aşağıdaki eşitlik doğru mudur ?

$$\text{Rot}(x, \delta x) \text{Rot}(y, \delta y) = \text{Rot}(y, \delta y) \text{Rot}(x, \delta x)$$

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

$$\text{Rot}(x, \delta x) \text{Rot}(y, \delta y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ \delta x \delta y & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \delta y) \text{Rot}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta x \delta y & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dolayısı ile;

$$\text{Rot}(x, \delta x) \text{Rot}(y, \delta y) = \text{Rot}(y, \delta y) \text{Rot}(x, \delta x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

- Genel bir k ekseni için diferansiyel hareket;

$$\text{Rot}(k, \delta\theta) = \text{Rot}(x, \delta x)\text{Rot}(y, \delta y)\text{Rot}(z, \delta z)$$

'şeklinde tanımlanır.

İşleme devam edersek;

$$\text{Rot}(k, d\theta) = \text{Rot}(x, \delta x)\text{Rot}(y, \delta y)\text{Rot}(z, \delta z)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta x & 0 \\ 0 & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & 0 & 0 \\ \delta z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z + \delta x \delta y & 1 - \delta x \delta y \delta z & -\delta x & 0 \\ -\delta y + \delta x \delta z & \delta x + \delta y \delta z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

- Yüksek dereceli diferansiyel terimlerini ihmal edip işleme devam edersek;

$$\text{Rot}(k, d\theta) = \text{Rot}(x, \delta x) \text{Rot}(y, \delta y) \text{Rot}(z, \delta z) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

'elde edilir.

Bir çerçevede/düzlemdede diferansiyel hareket

Hatırlayacak olursak,

$$\text{Rot}(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_z k_x v\theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta & 0 \\ k_z k_x v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

'idi.

Not: versine fonksiyonu = $1 - \cos \alpha$

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

$\theta \approx 0$ ($d\theta$) $\rightarrow v\theta \approx 0, c\theta \approx 1, s\theta \approx d\theta$ için,

$$\text{Rot}(k, d\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & -k_z d\theta & k_y d\theta & 0 \\ k_z d\theta & 1 & -k_x d\theta & 0 \\ -k_y d\theta & k_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta x = k_x d\theta \quad \delta y = k_y d\theta \quad \delta z = k_z d\theta$$

'elde edilir...

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

- $T = \text{orijinal düzlem}$, $dT = T$ 'deki diferansiyel değişim olmak üzere,

$$[T + dT] = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(k, d\theta)] [T]$$

$$[dT] = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(k, d\theta) - I] [T]$$

‘şeklinde tanımlanmıştır.



Diferansiyel Operatörü olmak üzere;

$$[dT] = [\Delta] [T]$$

$$[\Delta] = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(k, d\theta) - I]$$

‘ ifadesidir.

Bir çerçevede/düzlemde diferansiyel hareket

$$\Delta = \text{Trans}(dx, dy, dz) \times \text{Rot}(k, d\theta) - I$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NOT

Diferansiyel operatörü, bir **homojen dönüşüm matrisi** ya da **düzlem** değildir!

‘ olarak elde edilir.

Diferansiyel Değişimin Yorumlanması

$[dT]$ = Bir düzlemin mevcut diferansiyel harekete göre değişimini ifade etsin,

$$dT = \begin{bmatrix} dn_x & do_x & da_x & dp_x \\ dn_y & do_y & da_y & dp_y \\ dn_z & do_z & da_z & dp_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Düzlem $[dT]$ kadar dönmüş, ötelenmiş...

$\{dn, do, da\}$ = yöndeki/yonelimdeki değişim. (Change in orientation...)

$\{dp\}$ ifadeleri = pozisyondaki değişim.

Eksenler arası diferansiyel dönüşüm



: Diferansiyel Operatör



: Sabit referans eksene göre diferansiyel operatör (dif. operator w.r.t fixed ref. frame)



: Belirlenen andaki eksene göre diferansiyel operatör (dif. operator w.r.t the current frame)

'olmak üzere,

$$[dT] = [\Delta][T] = [T][^T\Delta]$$

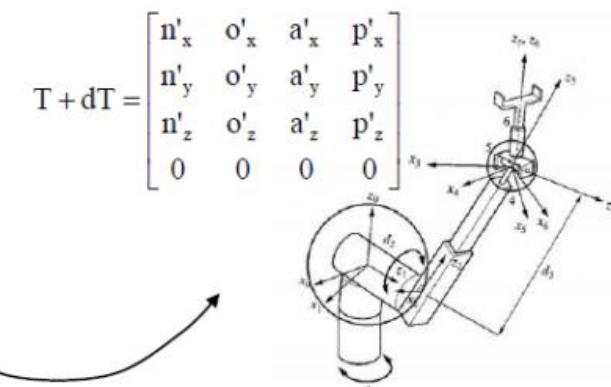
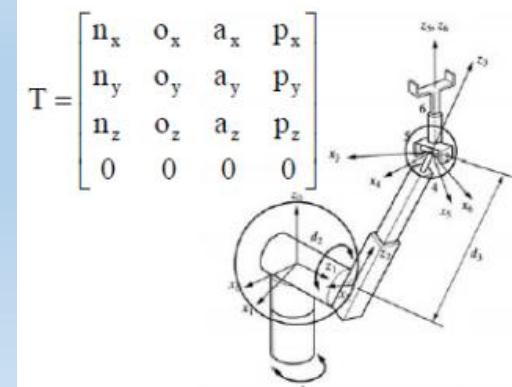
Eşitliğinde her iki tarafı da T^{-1} ile çarparsak,

$$[T]^{-1}[\Delta][T] = [T]^{-1}[T][^T\Delta]$$

ifadesini düzenlersek,

$$[^T\Delta] = [T]^{-1}[\Delta][T]$$

ifadesi elde edilir.



Eksenler arası diferansiyel dönüşüm

Bir önceki slaytta elde ettiğimiz denklemi matematiksel olarak detaylı ifade edecek olursak,

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise, } T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olacaktır.}$$

Eksenler arası diferansiyel dönüşüm

Diferansiyel Operatörü, $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ öyleyse,

$T^T \Delta = T^{-1} \Delta T$ işlemi,

$$\begin{bmatrix} 0 & -{}^T \delta z & {}^T \delta y & {}^T dx \\ {}^T \delta z & 0 & -{}^T \delta x & {}^T dy \\ -{}^T \delta y & {}^T \delta x & 0 & {}^T dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \cdot n \\ o_x & o_y & o_z & -p \cdot o \\ a_x & a_y & a_z & -p \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

'şeklinde olacaktır.

Eksenler arası diferansiyel dönüşüm

Burada işlemler yapıldığında,

$${}^T \delta \underline{x} = \bar{\delta} \cdot \bar{n}$$

$${}^T \delta \underline{y} = \bar{\delta} \cdot \bar{o}$$

$${}^T \delta \underline{z} = \bar{\delta} \cdot \bar{a}$$

$${}^T d \underline{x} = \bar{n} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p} \right) + \bar{d} \right]$$

$${}^T d \underline{y} = \bar{o} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p} \right) + \bar{d} \right]$$

$${}^T d \underline{z} = \bar{a} \cdot \left[\left(\bar{\delta} \times \bar{p} \right) + \bar{d} \right]$$

' ifadeleri elde edilecektir...

(☺☺☺Söz konusu konu ve diğer konular ile ilgili uygulamada sayısal örnek çözülecektir....☺☺☺)

Bir Robot Kolu Eksenini ve Robotun Diferansiyel Hareketi

$$dT = \Delta T = T^T \Delta \Rightarrow n, o, a, p \text{ bileşenlerindeki değişim...}$$

Jacobian, robot kolinin mikro düzeyde hareketleri – robotun genel(tüm) mikro düzeyde hareketleri arasında ilişkiyi verir/ yansıtır.

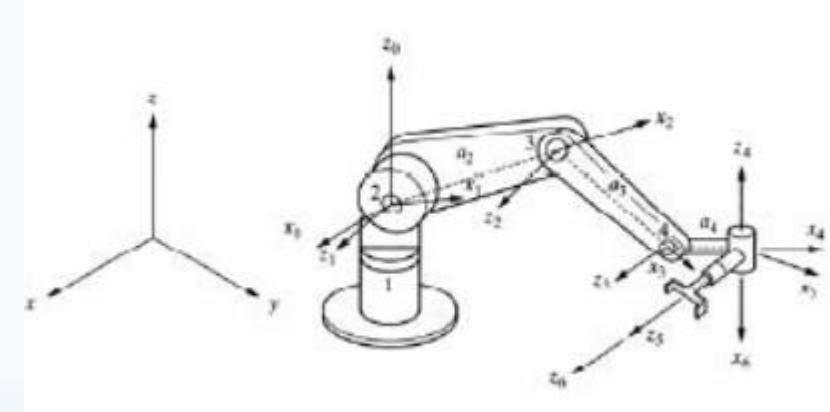
$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \textbf{Robot} \\ \textbf{Jacobian Matrisi} \end{array} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \end{bmatrix}$$

veya

$$[D] = [J][D_\theta]$$

Jacobian'ın hesaplanması

Yandaki robotik sistemin D-H tablosu
aşağıdaki gibidir;



D-H parameters				
#	Θ	d	a	α
1	Θ_1	0	0	90
2	Θ_2	0	a_2	0
3	Θ_3	0	a_3	0
4	Θ_4	0	a_4	-90
5	Θ_5	0	0	90
6	Θ_6	0	0	0

Jacobian'ın hesaplanması

Sistemin genel homojen dönüşüm matrisi şu şekilde olacaktır;

$$\begin{aligned} {}^R T_H &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ &= \begin{bmatrix} c_1(c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) & c_1(-c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) & c_1(c_{234}s_5) & c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2) \\ -s_1s_5c_6 & +s_1s_5s_6 & +s_1c_5 & \\ s_1(c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) & s_1(-c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6) & s_1(c_{234}s_5) & s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2) \\ +c_1s_5s_6 & -c_1s_5c_6 & -c_1c_5 & \\ s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & -s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & s_{234}s_5 & s_{234}a_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D-H parameters				
#	Θ	d	a	α
1	Θ_1	0	0	90
2	Θ_2	0	a_2	0
3	Θ_3	0	a_3	0
4	Θ_4	0	a_4	-90
5	Θ_5	0	0	90
6	Θ_6	0	0	0

Jacobian'ın hesaplanması

1 – 3 satır hesaplanması;

Homojen dönüşüm matrisinde son sütun ifadesidir,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$dp_x \rightarrow dx$, $dp_y \rightarrow dy$ ve $dp_z \rightarrow dz$ ifadelerine bakalım....

Jacobian'ın hesaplanması - 1 – 3 satır

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2) \\ s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2) \\ s_{234}a_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Daha önce bahsi geçen zincir kuralını uygulayacağız....

$$dp_x = dx$$

$$p_x = c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)$$

$$\begin{aligned} dp_x &= \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} d\theta_6 \\ &= -s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)d\theta_1 + c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3 - s_2a_2]d\theta_2 \\ &\quad + c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3]d\theta_3 + c_1[-s_{234}a_4]d\theta_4 \end{aligned}$$

Jacobian'ın hesaplanması 1 – 3 satır

$$p_x = c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)$$

$$\begin{aligned} dp_x &= \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} d\theta_6 \\ &= -s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)d\theta_1 + c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3 - s_2a_2]d\theta_2 \\ &\quad + c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3]d\theta_3 + c_1[-s_{234}a_4]d\theta_4 \end{aligned}$$

Jacobian'ın ilk satır elemanları şu şekilde bulunacaktır;

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} = J_{11} = -s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} = J_{12} = c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3 - s_2a_2]$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} = J_{13} = c_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3]$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_4} = J_{14} = c_1[-s_{234}a_4]$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_5} = J_{15} = 0$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} = J_{16} = 0$$

Jacobian'ın hesaplanması 1 – 3 satır

Benzer şekilde,

$$dp_y = dy$$

$$p_y = s_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)$$

$$\begin{aligned} dp_y &= \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_6} d\theta_6 \\ &= c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)d\theta_1 + s_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3 - s_2a_2]d\theta_2 \\ &\quad + s_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3]d\theta_3 + s_1[-s_{234}a_4]d\theta_4 \end{aligned}$$

Jacobian'ın hesaplanması 1 – 3 satır

İşlem devam ettirilirse, Jacobian'ın 2. satır elemanları şu şekilde elde edilecektir;

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} = J_{21} = c_1(c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2)$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} = J_{22} = s_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3 - s_2a_2]$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} = J_{23} = s_1[-s_{234}a_4 - s_{23}a_3]$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_4} = J_{24} = s_1[-s_{234}a_4]$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_5} = J_{25} = 0$$

$$\frac{\partial p_y}{\partial \theta_6} = J_{26} = 0$$

Jacobian'ın hesaplanması 1 – 3 satır

$$dp_z = dz$$

$$p_z = s_{234}a_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2$$

$$\begin{aligned} dp_z &= \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \cdots + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_6} d\theta_6 \\ &= [c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2]d\theta_2 + [c_{234}a_4 + c_{23}a_3]d\theta_3 + [c_{234}a_4]d\theta_4 \end{aligned}$$

Jacobian'ın hesaplanması 1 – 3 satır

İşlem devam ettirilirse, Jacobian'ın 3. satır elemanları şu şekilde elde edilecektir;

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} = J_{31} = 0$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} = J_{32} = [c_{234}a_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2]$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} = J_{33} = [c_{234}a_4 + c_{23}a_3]$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_4} = J_{34} = [c_{234}a_4]$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_5} = J_{35} = 0$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial \theta_6} = J_{36} = 0$$

Jacobian'ın hesaplanması 4 – 6 satır

δx , δy , δz : T 'deki rotasyonları ifade eder...

Fakat burada bir sorun var, tek bir denklem / denklem seti 3 boyuttaki tüm diferansiyel rotasyonları ifade edemez....

Devamı **haftaya ☺** (T6 (son düzlem/çerçeve) 'ya göre Jacobian hesabı...)