1) Soruda periyodu(T) 6 birim olan bir işaret verilmiş ve fourier serisi açılımı istenmiş. Fourier seri açılımını bulmak için seri içindeki terimlerin sadece katsayıları işarete bağlı değiştiği için katsayıları bulmam yeterli olacaktır. Bu işlem için x(t) işaretimin tekrar eden bir aralığını almalıyım. Çünkü, diğer yerlerde bu kısmın tekrarı şeklinde olacağı için sadece birini bulmam kalanını bulmama yetecektir. Bu alınacak kısmı kafama göre seçiyorum. Ancak hem bir tam periyodu dahil ettiğimden emin olmalıyım hem de katsayıları bulurken integral kullanacağım için aralığım –a, +a şeklinde bir aralık olursa yapacağım işlemler daha kolay olur. Bu nedenle işaretimin –3, +3 aralığını alıyorum ve matematiksel olarak ifade ediyorum.

$$x(t) = \begin{cases} -1, & 1 < t < 2 \\ 1, & -2 < t < -1 \\ 0, & - \end{cases}$$

Katsayı formülünün içinde ω_0 terimi geçtiği için ilk olarak bu terimi yazıyorum. Böylece çözüm sırasında yerleştirmem gerektiğinde bana kolaylık sağlayacak.

$$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T} = \frac{2\Pi}{6} = \frac{\Pi}{3}$$

Şimdi katsayılarımı(a_k) bulmaya başlayabilirim.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Şimdi ω_0 terimi hariç yerleştirmem gereken her şeyi yerleştirdim. ω_0 terimini yerleştirmeme nedenim henüz kullanmayacak olmam. Ama istenirse şimdiden yerleştirilebilir. Ancak birazdan göstereceğim yere kadar kullanılamaz.

$$a_k = \frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{-1} e^{-jk\omega_0 t}dt - \int_{1}^{2} e^{-jk\omega_0 t}dt\right) =$$

$$\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-2}^{-1}\right) - \left(\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{1}^{2}\right)\right)$$

Bu adımda ilk olarak integralimi x(t) işaretimin daha önce yazdığım aralıkları ve bu aralıklarda aldığı değerlere göre tekrar düzenledim. Bu düzenleme sonucunda integrali her aralık için tek tek yazmam gerekli. Ancak ben 0 değerini veren aralıkları zaten bir adım sonra atmam gerektiği için ve x(t) işaretimin içinde 3 farklı aralıkta 0 değeri aldığı için direk –1 ve 1 değeri alan aralıkları aldım. Ama büyük ihtimalle hocalar sınavda her aralığı ister diye düşünüyorum. Sonraki adımda aralık sınırlarını yerleştirmeden integral aldım. İşleme burada ara vermemin nedeni birazdan ω_0 terimi yerine yazarak işleme katacak olmam.

$$a_k = \frac{1}{6}\frac{1}{-jk\frac{\Pi}{3}}\left(e^{jk\omega_0} - e^{2jk\omega_0} - e^{-2jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}\right) = -\frac{1}{2jk\Pi}\left(\left(e^{jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}\right) - \left(e^{2jk\omega_0} + e^{-2jk\omega_0}\right)\right)$$

Bu adımda ilk yaptığım işlem ortak paranteze almak ve aralık sınırlarını yerine yazmaktı. Ortak paranteze almanın yanında artık ω_0 terimini yerine yazdım ve böylece $\frac{1}{6}$ ile sadeleşmesini sağladım. Sonraki adımda birazdan yazacağım kuralları kullanabilmek için alakalı e terimlerini aynı parantez içine alarak grupladım. Bilmeyenler veya unutanlar olabilir diye düşünerek sin ve cos açılımlarını yazıyor ve işleme kaldığım yerden devam ediyorum.

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \quad ve \;\; \sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

$$a_k = -\frac{1}{jk\Pi}\left(\frac{e^{jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}}{2} - \frac{e^{2jk\omega_0} + e^{-2jk\omega_0}}{2}\right) = -\frac{1}{jk\Pi}\left(\cos\left(k\frac{\Pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{2\Pi}{3}\right)\right)$$

Artık işlemlerimi tamamlamış oldum. Sonucu ben başında – ile bıraktım siz daha düzgün olması açısından içeriye dağıtabilirsiniz. Zaten örnek sorularda da o şekilde yapılmış. Son olarak bulmuş olduğum değerleri yan yana yazarsam.

$$\omega_0 = \frac{\Pi}{3} \qquad a_k = \begin{cases} -\frac{1}{jk\Pi}\left(\cos\left(k\frac{\Pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{2\Pi}{3}\right)\right), & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

2) Soruda periyodu(T) 1 birim olan bir işaret verilmiş ve fourier serisi açılımı istenmiş. Fourier seri açılımını bulmak için seri içindeki terimlerin sadece katsayıları işarete bağlı değiştiği için katsayıları bulmam yeterli olacaktır. Bu işlem için x(t) işaretimin tekrar eden bir aralığını almalıyım. Çünkü, diğer yerlerde bu kısmın tekrarı şeklinde olacağı için sadece birini bulmam kalanını bulmama yetecektir. Bu alınacak kısmı kafama göre seçiyorum. Ancak hem bir tam periyodu dahil ettiğimden emin olmalıyım hem de katsayıları bulurken integral kullanacağım için aralığım –a, +a şeklinde bir aralık olursa yapacağım işlemler daha kolay olur. Bu nedenle işaretimin –1/2, +1/2 aralığını alıyorum ve matematiksel olarak ifade ediyorum.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{1}{4} \\ -1, & \dfrac{1}{4} < |t| < \dfrac{2}{4} \end{cases}$$

Katsayı formülünün içinde ω_0 terimi geçtiği için ilk olarak bu terimi yazıyorum. Böylece çözüm sırasında yerleştirmem gerektiğinde bana kolaylık sağlayacak.

$$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T} = \frac{2\Pi}{1} = 2\Pi$$

Şimdi katsayılarımı(a_k) bulmaya başlayabilirim.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Şimdi ω_0 terimi hariç yerleştirmem gereken her şeyi yerleştirdim. ω_0 terimini yerleştirmeme nedenim henüz kullanmayacak olmam. Ama istenirse şimdiden yerleştirilebilir. Ancak birazdan göstereceğim yere kadar kullanılamaz.

$$a_k = \left(-\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} e^{-jk\omega_0 t}dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^{-jk\omega_0 t}dt \right) =$$

$$-\left(\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} \right) + \left(\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \right) - \left(\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \right)$$

Bu adımda ilk olarak integralimi x(t) işaretimin daha önce yazdığım aralıkları ve bu aralıklarda aldığı değerlere göre tekrar düzenledim. Bu düzenleme sonucunda integrali her aralık için tek tek yazmam gerekli. İşleme burada ara vermemin nedeni birazdan ω_0 terimi yerine yazarak işleme katacak olmam.

$$a_k = \frac{1}{-2jk\Pi}\left(-e^{\frac{1}{4}jk\omega_0} + e^{\frac{1}{2}jk\omega_0} + e^{-\frac{1}{4}jk\omega_0} - e^{\frac{1}{4}jk\omega_0} - e^{-\frac{1}{2}jk\omega_0} + e^{-\frac{1}{4}jk\omega_0} \right) =$$

$$-\frac{1}{2jk\Pi}\left(-2\left(e^{\frac{1}{4}jk\omega_0} - e^{-\frac{1}{4}jk\omega_0} \right) + \left(e^{\frac{1}{2}jk\omega_0} - e^{-\frac{1}{2}jk\omega_0} \right) \right)$$

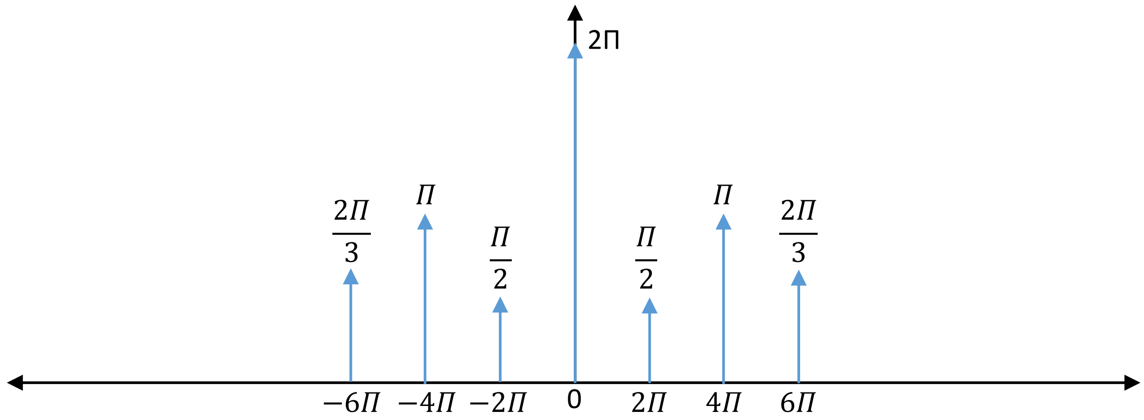
Bu adımda ilk yaptığım işlem ortak paranteze almak ve aralık sınırlarını yerine yazmaktı. Ortak paranteze almanın yanında artık ω_0 terimini yerine yazdım. Sonraki adımda alakalı e terimlerini aynı parantez içine alarak grupladım.

$$a_k = -\frac{1}{k\Pi}\left(-2\left(\frac{e^{\frac{1}{4}jk\omega_0} - e^{-\frac{1}{4}jk\omega_0}}{2j} \right) + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}jk\omega_0} - e^{-\frac{1}{2}jk\omega_0}}{2j} \right) \right) = -\frac{1}{k\Pi}\left(-2\sin\left(k\frac{\Pi}{2}\right) - \sin(k\Pi) \right)$$

Artık işlemlerimi tamamlamış oldum. Bu aşamada $\sin(k\Pi)$ değeri k ne olursa olsun 0 olacağı için atılır. Son olarak bulmuş olduğum değerleri yan yana yazarsam.

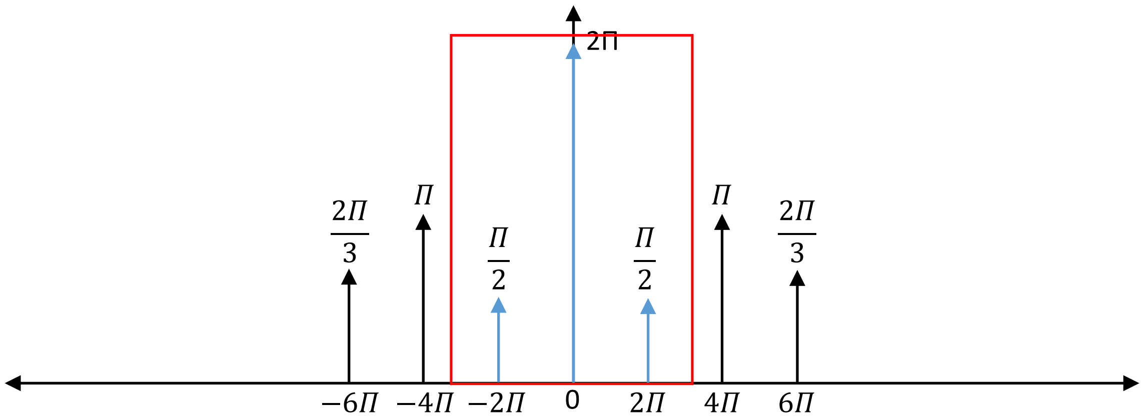
$$\omega_0 = 2\Pi \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{2}{k\Pi}\sin\left(k\dfrac{\Pi}{2}\right), & k\ tek \\ 0, & k\ çift \end{cases}$$

3) Öncelikle her sistemde kullanacağımız x(t) işaretimizin fourier dönüşümünü bulalım. Bu dönüşümü grafik üzerinden göstereceğim ve "$k\omega_0$ da $2\Pi a_k$ değerini alır" kuralını kullanarak yerleştireceğim.

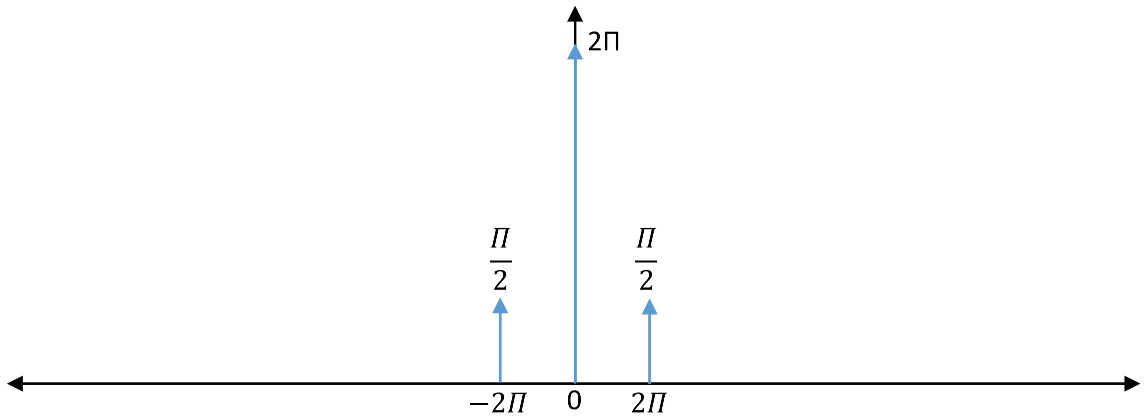


Şimdi tek tek her sistem için çıkışı bulabilirim.

a) Normalde bir işaret sisteme girdiğinde konvolisyon işlemi uygulanırken fourierde bu işlem filtreye dönüşür. Filtre işleminde giriş işaretinin fourier dönüşümü alınır ve üstüne filtre yerleştirilir. Bu işlemin sonucunda sadece filtrenin içinde bulunan değerler alınır ve değerleri filtrenin o noktadaki değeri ile çarpılır.



Burada filtre işleminin sonucunda filtrenin içinde bulunan değerleri aynı bırakırken dışında kalan değerlerin rengini değiştirdim. Bu rengi değişen değerleri işlemimin sonraki adımında atarak sonucuma ulaşmış olacağım.

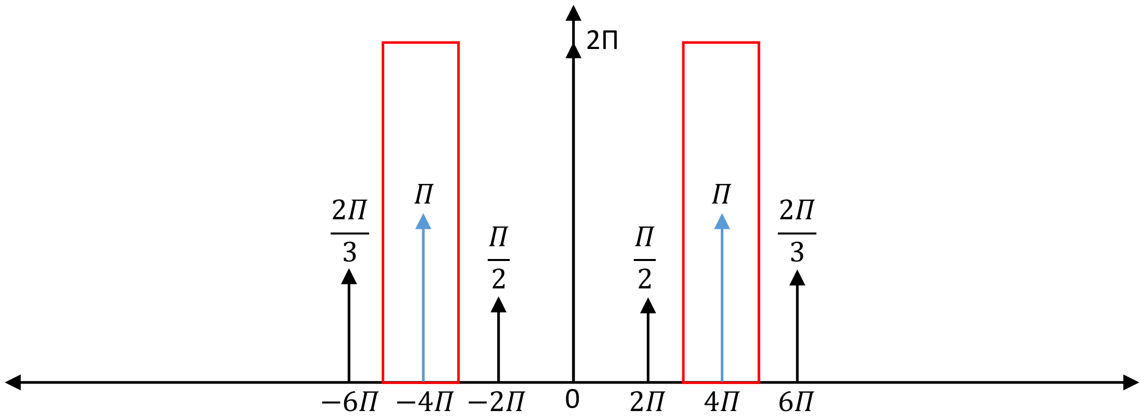


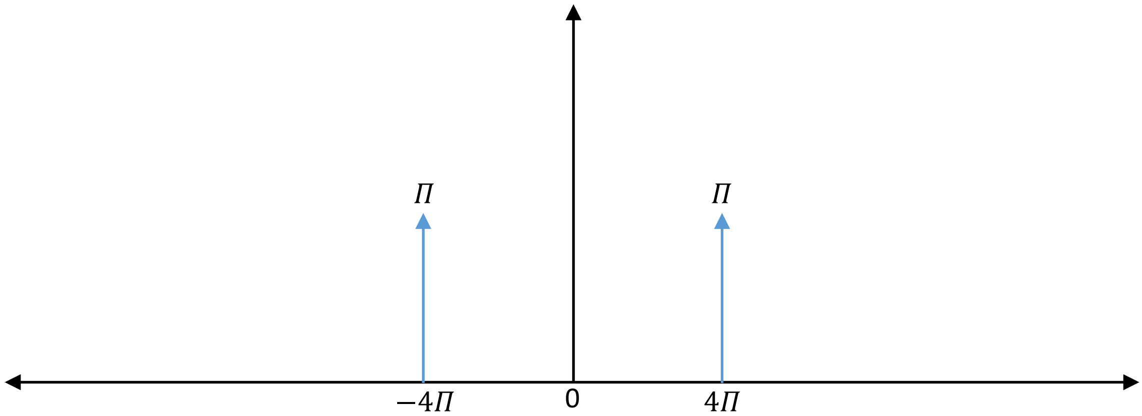
İlk grafiği oluşturmak için kullandığım kuralı tersten kullanırsam benden soruda istenen değerleri bulmuş olurum. $k\omega_0$ da değer alacağı için k yerine tüm noktaları sağlayacak minimum değeri veriyoruz. Orta nokta için 0 diğer noktalar için –1 ve 1 sağladığı için $\omega_0 = 2\Pi$ olarak buluyoruz. Her noktada $2\Pi a_k$ değerini alacağı için önceki adımda söylemiş olduğum her bir k değeri için kontrol ediyoruz. Bu durumda sizin işlemleri ayrıntılı olarak yapmanız daha iyi olacaktır. Ancak ben direk sonuçları yazıyorum. Katsayılar $a_0 = 1 \; a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$ olacaktır. Sonuçları bir kez de bir arada yazarsam şu şekilde olur:

$$\omega_0 = 2\Pi \qquad a_0 = 1 \; a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$$

NOT: Bu yaptığım işlemlerde sadece x(t) ve y(t) işaretlerinin dönüşümü olduğu ve hangisinin hangisi olduğunun anlaşıldığını düşündüğüm için hangi grafik neyin grafiği yazmadım. Sınavda yazmanız daha yararlı olacaktır. Ayrıca yapılan işlem olarak son adıma kadar fazla bir fark bulunmadığından sonraki 2 sistemin sadece grafikleri üstünden gösterip sonucun açıklamasını yapacağım.

b)

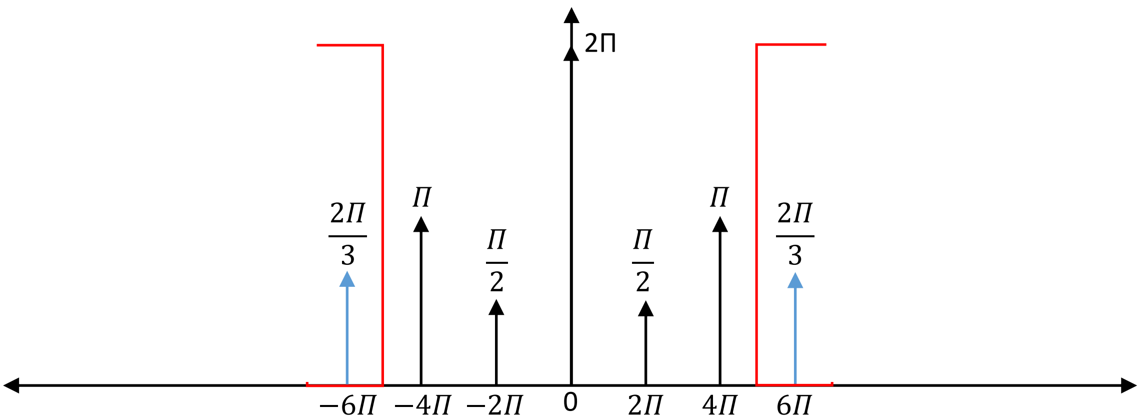


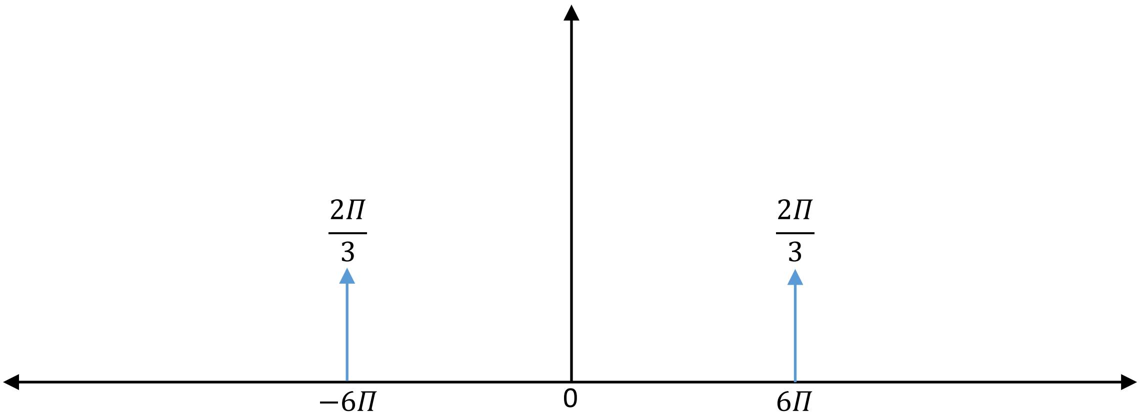


İlk grafiği oluşturmak için kullandığım kuralı tersten kullanırsam benden soruda istenen değerleri bulmuş olurum. $k\omega_0$ da değer alacağı için k yerine tüm noktaları sağlayacak minimum değeri veriyoruz. Noktalar için –1 ve 1 sağladığı için $\omega_0 = 4\Pi$ olarak buluyoruz. Her noktada $2\Pi a_k$ değerini alacağı için önceki adımda söylemiş olduğum her bir k değeri için kontrol ediyoruz. Bu durumda sizin işlemleri ayrıntılı olarak yapmanız daha iyi olacaktır. Ancak ben direk sonuçları yazıyorum. Katsayılar $a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$ olacaktır. Sonuçları bir kez de bir arada yazarsam şu şekilde olur:

$$\omega_0 = 4\Pi \qquad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$$

c)





İlk grafiği oluşturmak için kullandığım kuralı tersten kullanırsam benden soruda istenen değerleri bulmuş olurum. $k\omega_0$ da değer alacağı için k yerine tüm noktaları sağlayacak minimum değeri veriyoruz. Noktalar için –1 ve 1 sağladığı için $\omega_0 = 6\Pi$ olarak buluyoruz. Her noktada $2\Pi a_k$ değerini alacağı için önceki adımda söylemiş olduğum her bir k değeri için kontrol ediyoruz. Bu durumda sizin işlemleri ayrıntılı olarak yapmanız daha iyi olacaktır. Ancak ben direk sonuçları yazıyorum. Katsayılar$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{3}$ olacaktır. Sonuçları bir kez de bir arada yazarsam şu şekilde olur:

$$\omega_0 = 6\Pi \qquad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{3}$$

4) Soruda belirli aralıklarda değer alan bir işaret verilmiş ve fourier dönüşümü istenmiş. Bu işlem için direk fourier dönüşüm formülünü kullanıyorum.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T_1}^{T_1} \cos(\Pi t)e^{-j\omega t}dt$$

Bu aşamadan sonra integral almam gerekiyor. Normalde kısmi integral kullanılmalıdır. Ancak cos(Πt) ifadesini e'li biçimde yazarsak normal bir integral halini alır. Yani:

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} \frac{e^{j\Pi t} + e^{-j\Pi t}}{2} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_{-T_1}^{T_1} \left(e^{j\Pi t} + e^{-j\Pi t}\right)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-T_1}^{T_1} e^{j(\Pi-\omega)t}dt + \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j(\Pi+\omega)t}dt\right)$$

cos(Πt) ifadesini e'li biçimde yazdıktan sonra temel matematik kuralları kullandığım için ayrıntılı olarak açıklamıyorum. Şimdi her iki ifadenin integralini alarak devam edelim.

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{j(\Pi-\omega)} e^{j(\Pi-\omega)t}\Big|_{-T_1}^{T_1}\right) + \left(-\frac{1}{j(\Pi+\omega)} e^{j(\Pi-\omega)t}\Big|_{-T_1}^{T_1}\right)\right)$$

Tüm ifadeyi 1/j ortak parantezine alıp sınırları yerleştiriyorum.

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\Pi-\omega}\left(e^{j(\Pi-\omega)t}\Big|_{-T_1}^{T_1}\right) - \frac{1}{\Pi+\omega}\left(e^{j(\Pi-\omega)t}\Big|_{-T_1}^{T_1}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\Pi-\omega}\left(e^{j(\Pi-\omega)T_1} - e^{-j(\Pi-\omega)T_1}\right) - \frac{1}{\Pi+\omega}\left(e^{-j(\Pi+\omega)T_1} - e^{j(\Pi+\omega)T_1}\right)\right)$$

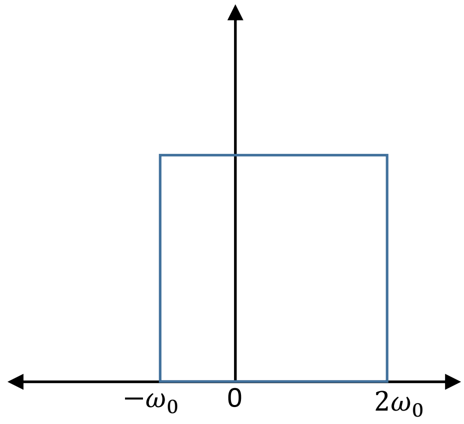
Elimdeki ifadede bulunan e'li ifadeler sin açılımına benzer durumda olduğu için açılıma uygun olarak düzenliyorum.

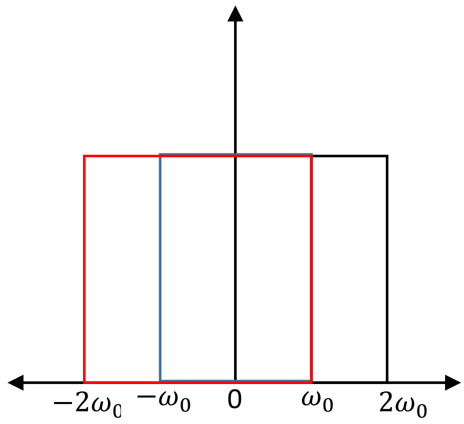
$$X(\omega) = \frac{1}{\Pi-\omega}\frac{e^{j(\Pi-\omega)T_1} - e^{-j(\Pi-\omega)T_1}}{2j} + \frac{1}{\Pi+\omega}\frac{e^{j(\Pi+\omega)T_1} + e^{-j(\Pi+\omega)T_1}}{2j} =$$

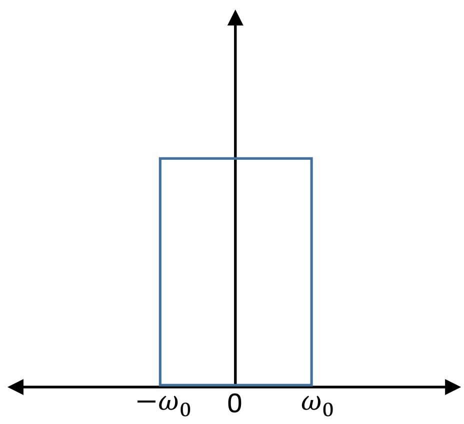
$$\frac{1}{\Pi-\omega}\sin\big((\Pi-\omega)T_1\big) + \frac{1}{\Pi+\omega}\sin\big((\Pi+\omega)T_1\big)$$

Böylece istenen fourier dönüşümü bulunmuş oldu.

5) Soruda giriş işaretinin ve sistemin fourier dönüşümü verilmiş. Bu durumda yapılması gereken tek işlem giriş grafiğine filtre uygulamak ve çıkış grafiğinin işaretini bulmak.







Görmüş olduğunuz grafiklerden ilki soruda verilmiş olan X(ω)'nın grafiğidir. İkinci grafikte ise H(ω) filtresini uyguladım. Böylece son grafikte Y(ω) çıkışımı bulmuş oldum. Bu adımdan sonra y(t) işaretimi bulmak için ters fourier yapmalıyım. Yani:

$$x(t) = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\Pi}\left(\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}\right) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2\Pi jt} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\Pi t}$$

6) Öncelikle bu soruda kullanacağımız formülleri genel olarak yazmak istiyorum. Ardından sırayla çözümlere geçeceğim.

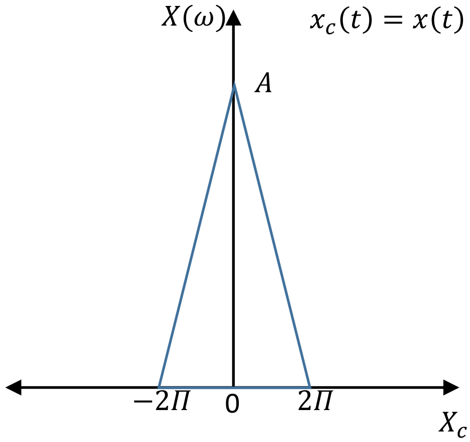
$$x(t) \oplus h(t) = y(t) => X(\omega)H(\omega) = Y(\omega)$$

$$x(t)h(t) = y(t) => \frac{1}{2\Pi}(X(\omega) * H(\omega)) = Y(\omega)$$

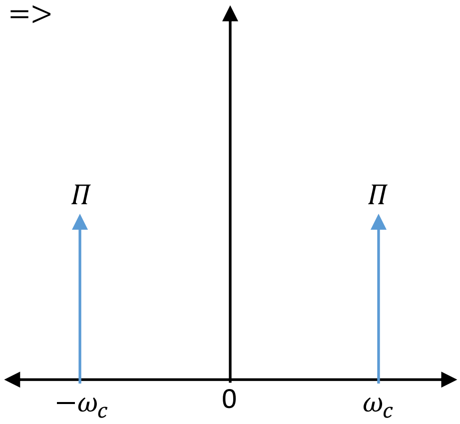
a) Burada yazmış olduğum kurallardan ikincisini kullanacağım.

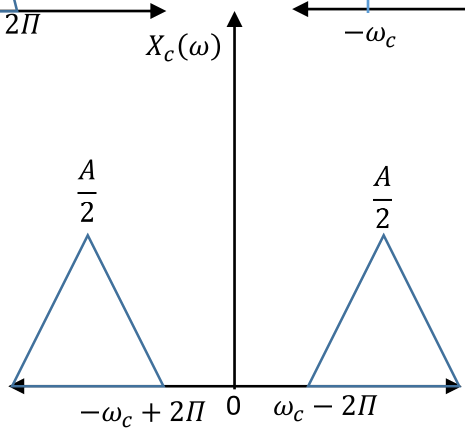
$$x_c(t) = x(t)\cos(\omega_c t) =>$$

$$X_c(\omega) = \frac{1}{2\Pi}$$



$*$



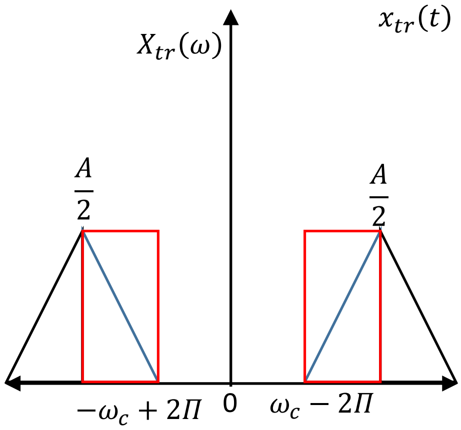


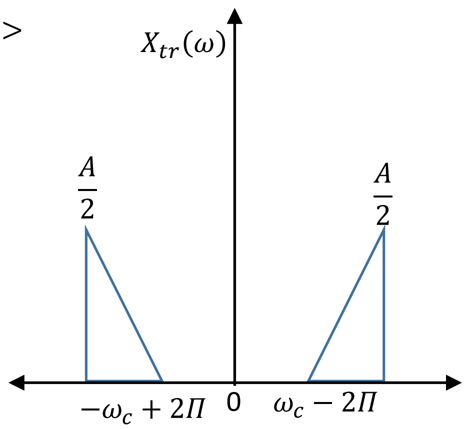
Bu adımda * işlemini yapabilmek için göstermiş olduğum ilk grafiği 0 noktasından tutarak ikinci grafikte değer alınan noktalara yerleştirmem gerekiyor. Yani ilk grafiği 0 noktasından tutup ikinci grafikteki $-\omega_c$ noktasına yerleştirirsem üçgenin köşelerinden biri $-\omega_c + 2\Pi$ noktasına gelir. Diğer noktayı da yazabilirim ancak arada sadece 4Π fark olacağı için yazmaya gerek duymadım. Aynı şekilde ilk grafiği ω_c noktasına yerleştirirsem üçgenin köşelerinden biri $\omega_c - 2\Pi$ noktasına gelir. Her bir üçgenin tepe noktası değeri orijinal tepe değeri ile yerleştirdiğim noktanın değerinin çarpımı şeklinde bulunur. Burada tepe değerleri AΠ olması gerekirken A/2 yazma nedenim * işleminden sonra 2Π'ye bölmem gerekmesinden dolayıdır. AΠ olan değerleri 2Π'ye bölünce A/2 değerini bulmuş olurum.

b) Yazmış olduğum kurallardan ilkini kullanacağım.

$$x_{tr}(t) = x_c(t) \oplus h(t) =>$$

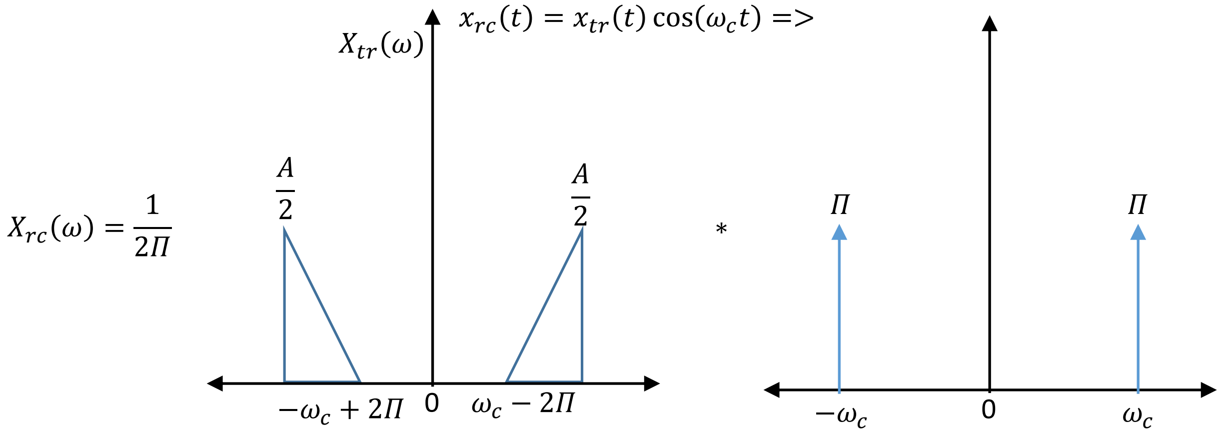
$$X_{tr}(\omega) =$$

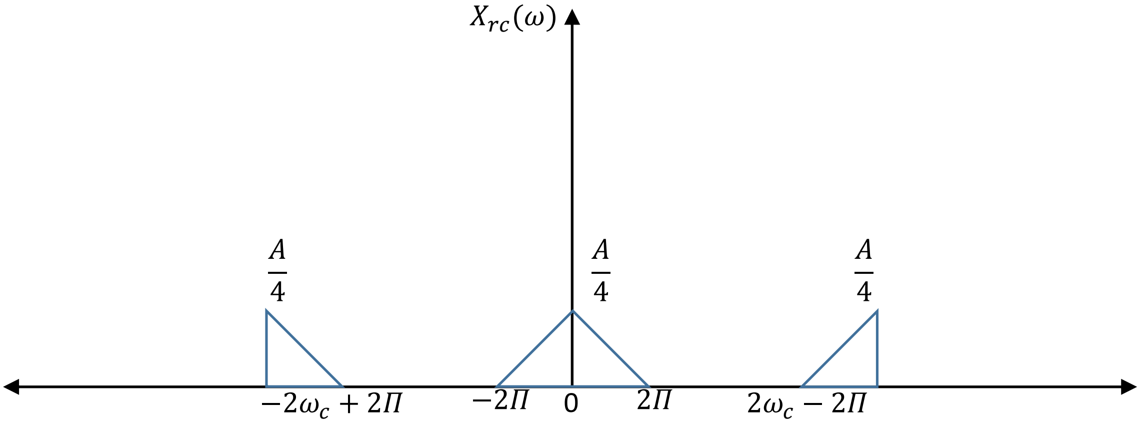




Bu adımda sadece filtre uygulamak ve filtrenin sonucunu yazmak olduğu için çok ayrıntıya girmedim. İlk grafik giriş grafiğine uygulamış olduğum filtre ve ikinci grafik filtre sonucunda çıkan grafik oluyor. Sadece şunu belirtmek isterim filtrenin şeklini anladığım gibi yerleştirdim. Bu soru için değişiklik olmaz. Ancak sınavda daha farklı sorup filtrenin nasıl olduğuna göre sonuç değişebilir.

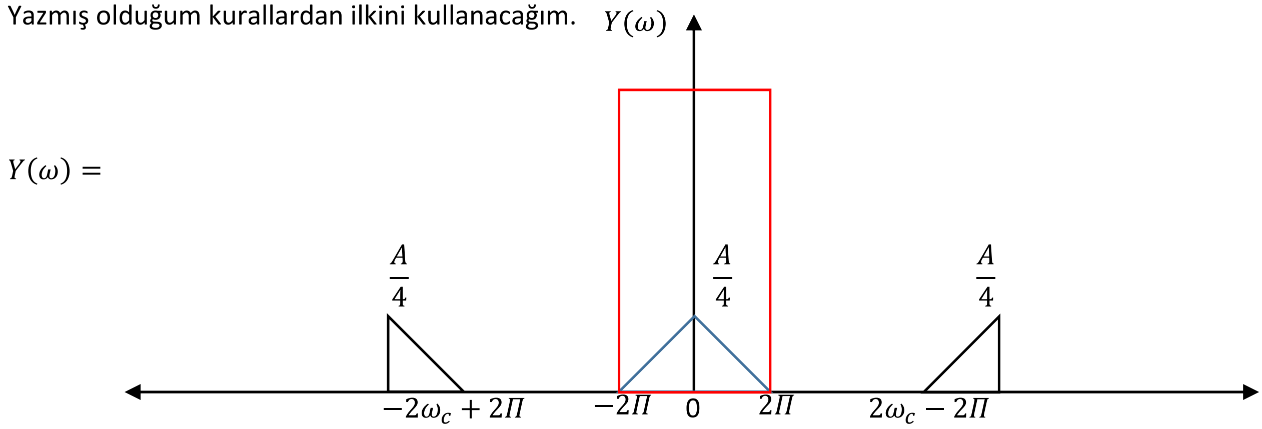
c) Burada yazmış olduğum kurallardan ikincisini kullanacağım.

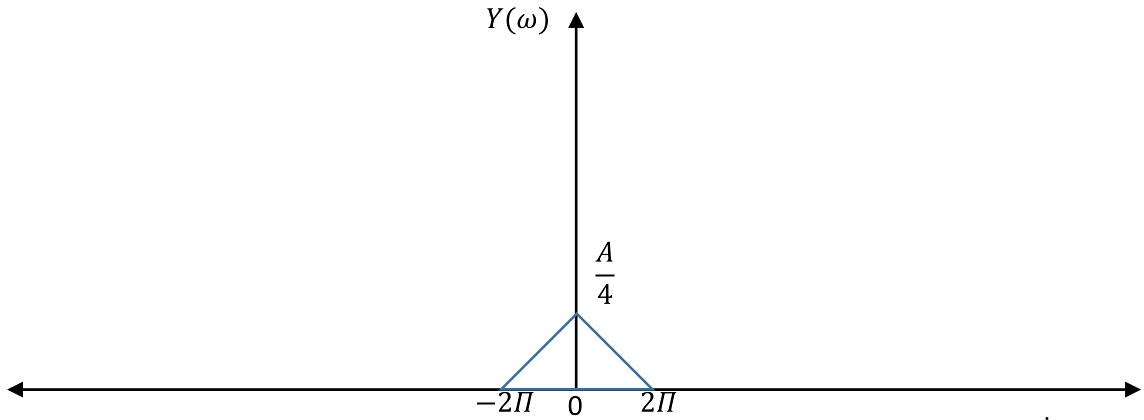




Bu adımda * işlemini yapabilmek için göstermiş olduğum ilk grafiği 0 noktasından tutarak ikinci grafikte değer alınan noktalara yerleştirmem gerekiyor. Yani ilk grafiği 0 noktasından tutup ikinci grafikteki $-\omega_c$ noktasına yerleştirirsem üçgenin köşelerinden biri $-2\omega_c + 2\Pi$ ve -2Π noktasına gelir. Aynı şekilde ilk grafiği ω_c noktasına yerleştirirsem üçgenin köşelerinden biri $2\omega_c - 2\Pi$ ve 2Π noktasına gelir. Her bir üçgenin tepe noktası değeri orijinal tepe değeri ile yerleştirdiğim noktanın değerinin çarpımı şeklinde bulunur. Burada tepe değerleri AΠ/2 olması gerekirken A/4 yazma nedenim * işleminden sonra 2Π'ye bölmem gerekmesinden dolayıdır. AΠ/2 olan değerleri 2Π'ye bölünce A/4 değerini bulmuş olurum.

d) Yazmış olduğum kurallardan ilkini kullanacağım.





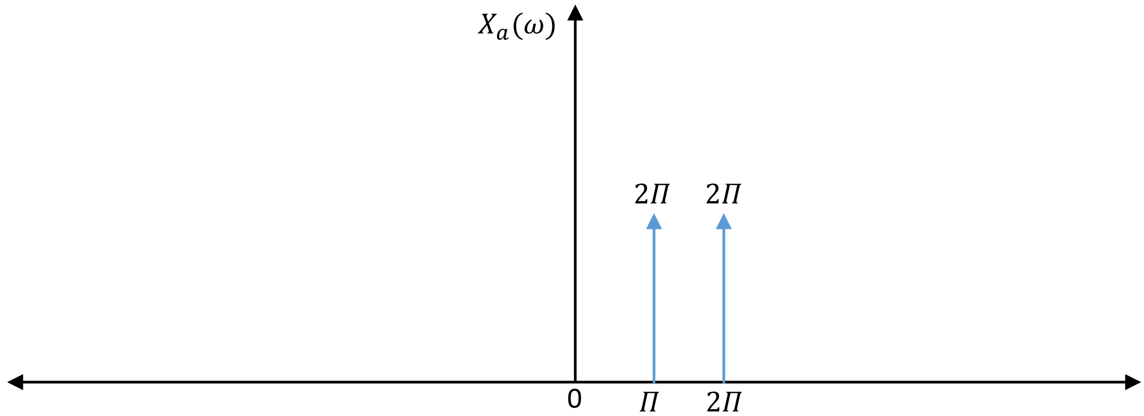
Bu adımda sadece filtre uygulamak ve filtrenin sonucunu yazmak olduğu için çok ayrıntıya girmedim. İlk grafik giriş grafiğine uygulamış olduğum filtre ve ikinci grafik filtre sonucunda çıkan grafik oluyor.

e) Y(ω) grafiğim ile X(ω) grafiğim arasındaki tek fark genlikleri ve tam olarak 1/4 oranında bir farkları var. Bu nedenle y(t) ve X(t) işaretlerimin de aynı orana sahip olduklarını söyleyebilirim.

7) Öncelikle sorunun içinde kullanmam gerekecek olan ω_s işaretini buluyorum.

$$\omega_s = \frac{2\Pi}{T_s} = \frac{2\Pi}{\frac{2}{3}} = 2\Pi.\frac{3}{2} = 3\Pi$$

Artık $x_a(t)$ işaretimin fourier dönüşümünü alıp örnekleyebilirim.

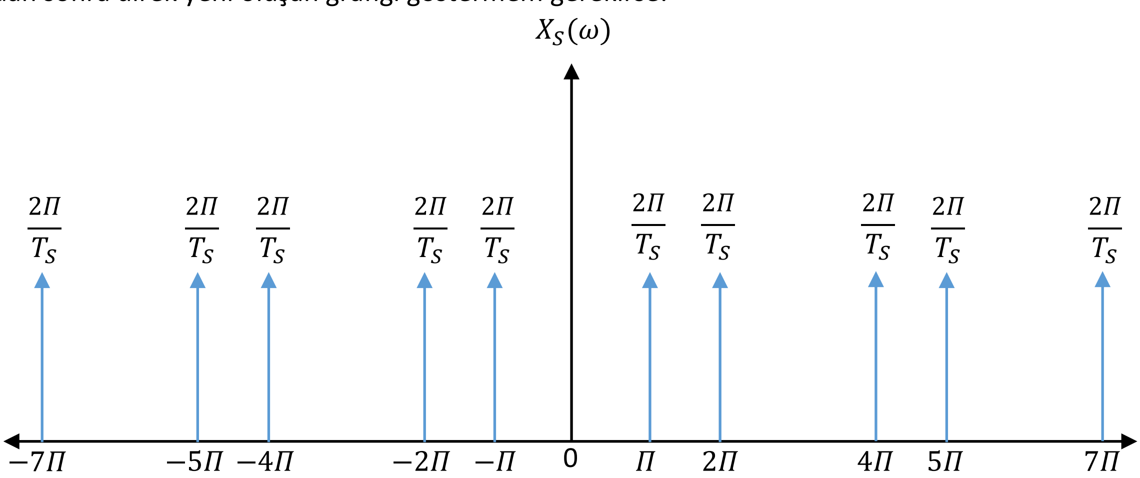


Örnekleme yaparken $x_a(t)$ işareti s(t) işareti ile çarpılmalıdır. $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$ şeklinde bir işarettir.

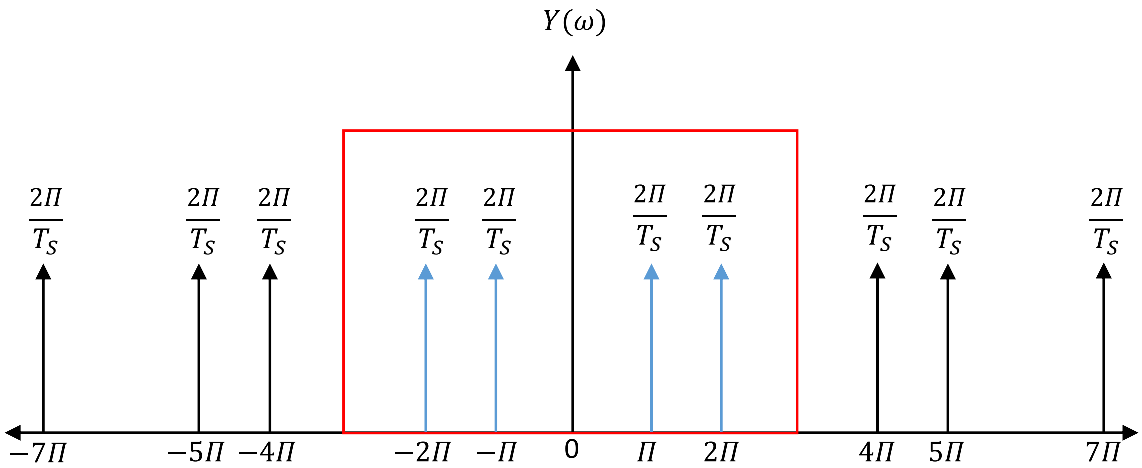
Örnekleme sonucu oluşan işaret $x_S(t)$ olarak gösterilir. Bu durumda:

$$x_S(t) = x_a(t)\, s(t) => X_S(\omega) = \frac{1}{2\Pi}(X_a(\omega) * S(\omega))$$

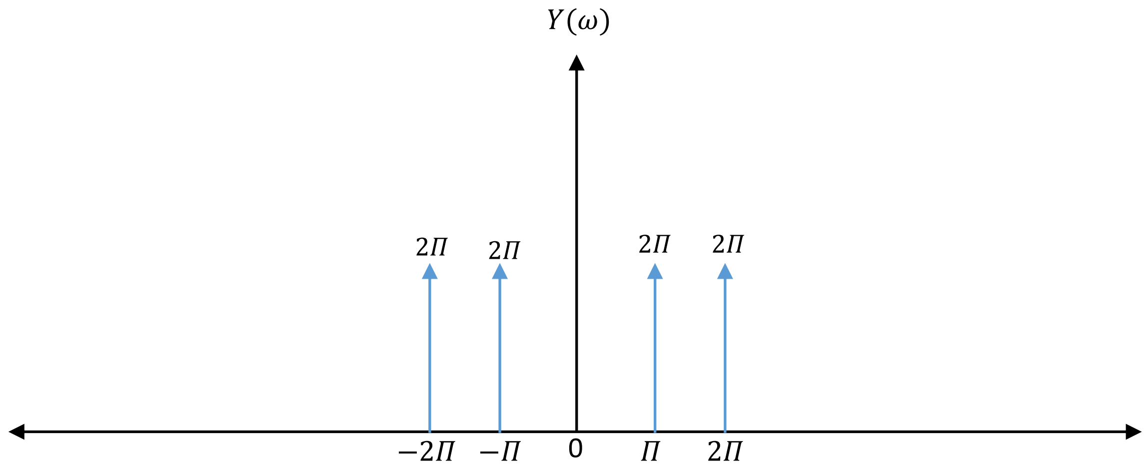
olur. s(t) işaretinin fourier dönüşümü olan S(ω) $\omega_S$aralıkla $\frac{2\Pi}{T_S}$ değerini alır. Bu durumda üstte göstermiş olduğum işlemin sonucunda X(ω) grafiğinin $\omega_S$aralıkla tekrarlanmış ve her bir değeri $\frac{2\Pi}{T_S}$ değeri ile çarpılmış hali oluşur. Bu açıklamadan sonra direk yeni oluşan grafiği göstermem gerekirse:



Örnekleme için $X(\omega) * S(\omega)$ işlemini yaptıktan sonra parantezin önündeki $\frac{1}{2\Pi}$ değeri ile de çarptım. Bu nedenle değerler sadece $S(\omega)$ içinde olan $\frac{1}{T_S}$ ile çarpılmış oldu. O değeri $\frac{1}{T_S}$ olarak bırakma nedenim ise daha sonra T_S ile çarpacak olmamdan dolayıdır.



Örneklemeye soruda verilen filtreyi uyguladım ve filtrenin dışında kalan değerlerin renklerini değiştirerek belirttim. Bu sayede Y(ω) grafiğini bulmuş oldum.



Artık y(t) işaretini bulabilirim. y(t) işaretini nasıl bulduğumu mümkün olduğunca açıklayarak anlatacağım. "$k\omega_0$ da $2\Pi a_k$ değerini alır" kuralını tersten uyguluyorum. Bu işlem için öncelikle tüm $k\omega_0$ noktalarını sağlayan ω_0 değerini bulmam lazım. O da Π oluyor. Çünkü, k değerlerinin hepsinin tam sayı olmasını sağlayan en büyük değerim Π oluyor. Şimdide her bir k değeri için a_k katsayısını bulmalıyım. Tüm genlik değerlerim birbirine eşit olduğu için tüm katsayılarımın birbirine eşit ve 1 olduğunu anlıyorum. Bu durumda şu şekilde devam edebilirim:

$$e^{-2j\Pi t} + e^{-j\Pi t} + e^{j\Pi t} + e^{2j\Pi t} = \left(e^{j\Pi t} + e^{-j\Pi t}\right) + \left(e^{2j\Pi t} + e^{-2j\Pi t}\right) =$$

$$2.\frac{\left(e^{j\Pi t} + e^{-j\Pi t}\right) + \left(e^{2j\Pi t} + e^{-2j\Pi t}\right)}{2} = 2\left(\frac{e^{j\Pi t} + e^{-j\Pi t}}{2} + \frac{e^{2j\Pi t} + e^{-2j\Pi t}}{2}\right) = 2\left(\cos(\Pi t) + \cos(2\Pi t)\right)$$

$$=> y(t) = 2\cos(\Pi t) + 2\cos(2\Pi t)$$

8) $x(n) = (-1)^n = \left(e^{j\Pi}\right)^n = e^{j\Pi n} = \cos(\Pi n) =>$

$$x_a(t) = \cos(\omega_0 t) => T_S = \frac{1}{3}\ s\ periyot\ ile\ örneklendiği\ için\ t = nT_S\ yazılır => x(n) = \cos(\omega_0 n T_S)$$

$$=> \cos(\omega_0 n T_S) = \cos(\Pi n) => \omega_0 n T_S = \Pi n => \omega_0 = \frac{\Pi}{T_S} = \frac{\Pi}{\frac{1}{3}} = 3\Pi => x(n) = \cos(3\Pi t)\ olabilir$$

cos 2Π ve katlarında kendisini tekrar eder. Bu durumda x(n) işaretini en genel olarak

$$x(n) = \cos(\omega_0 n T_S + 2\Pi k n)$$

olarak yazabilirim. Bu adımda işlemlerimi yaparken aynı birimleri kullanmak için ω_0 terimini açıyorum. Böylece yeni x(n) işaretim

$$x(n) = \cos\left(2\Pi \frac{1}{T_0} n T_S \pm 2\Pi k n\right)$$

oluyor. 2Π ve n değerlerini çarpan olarak yazarak düzenlersem

$$x(n) = \cos\left(2\Pi (\frac{1}{T_0} T_S \pm k) n\right)$$

şeklinde olur. Bu haliyle bırakabilirim. Ancak bırakırsam sonraki işlemleri kesirli sayılarla yapmam gerekecektir(T değerleri 1'den küçük olduğu için). Bu nedenle son olarak elimdeki zaman bilgilerini frekansa dönüştürüyorum

$$x(n) = \cos\left(2\Pi (f_0 \frac{1}{f_S} \pm k) n\right)$$

oluyor. Böylece ilk başta yaptığım eşitliği tekrar edebilirim.

$$\cos\left(2\Pi\left(f_0 \frac{1}{f_S} \pm k\right) n\right) = \cos(\Pi n) => 2\Pi\left(f_0 \frac{1}{f_S} \pm k\right) n = \Pi n => f_0 \frac{1}{f_S} \pm k = \frac{1}{2} =>$$

$$f_0 \frac{1}{f_S} = \frac{1}{2} \pm k => f_0 = \frac{f_S}{2} \pm k f_S => f_0 = \frac{f_S}{2} + k f_S \ diyebilirim =>$$

$$f_0 = 3\left(\frac{1}{2} + k\right) => k = 0 => f_0 = \frac{3}{2} => \omega_0 = 3\Pi => x(n) = \cos(3\Pi t) \ olabilir$$

Bu durumda doğru bulduğumu kontrol etmiş oldum. Soruda 3 analog işaret istenmişti. Ben henüz 1 tane buldum. Bu durumda k yerine 1 ve 2 değerlerini yazarak 2 tane daha bulabilirim.

$$k = 1 => f_0 = \frac{9}{2} => \omega_0 = 9\Pi => x(n) = \cos(9\Pi t) \ olabilir$$

$$k = 2 => f_0 = \frac{15}{2} => \omega_0 = 15\Pi => x(n) = \cos(15\Pi t) \ olabilir$$

Böylece 3 analog işaret bulmuş ve soruyu çözmüş oldum.