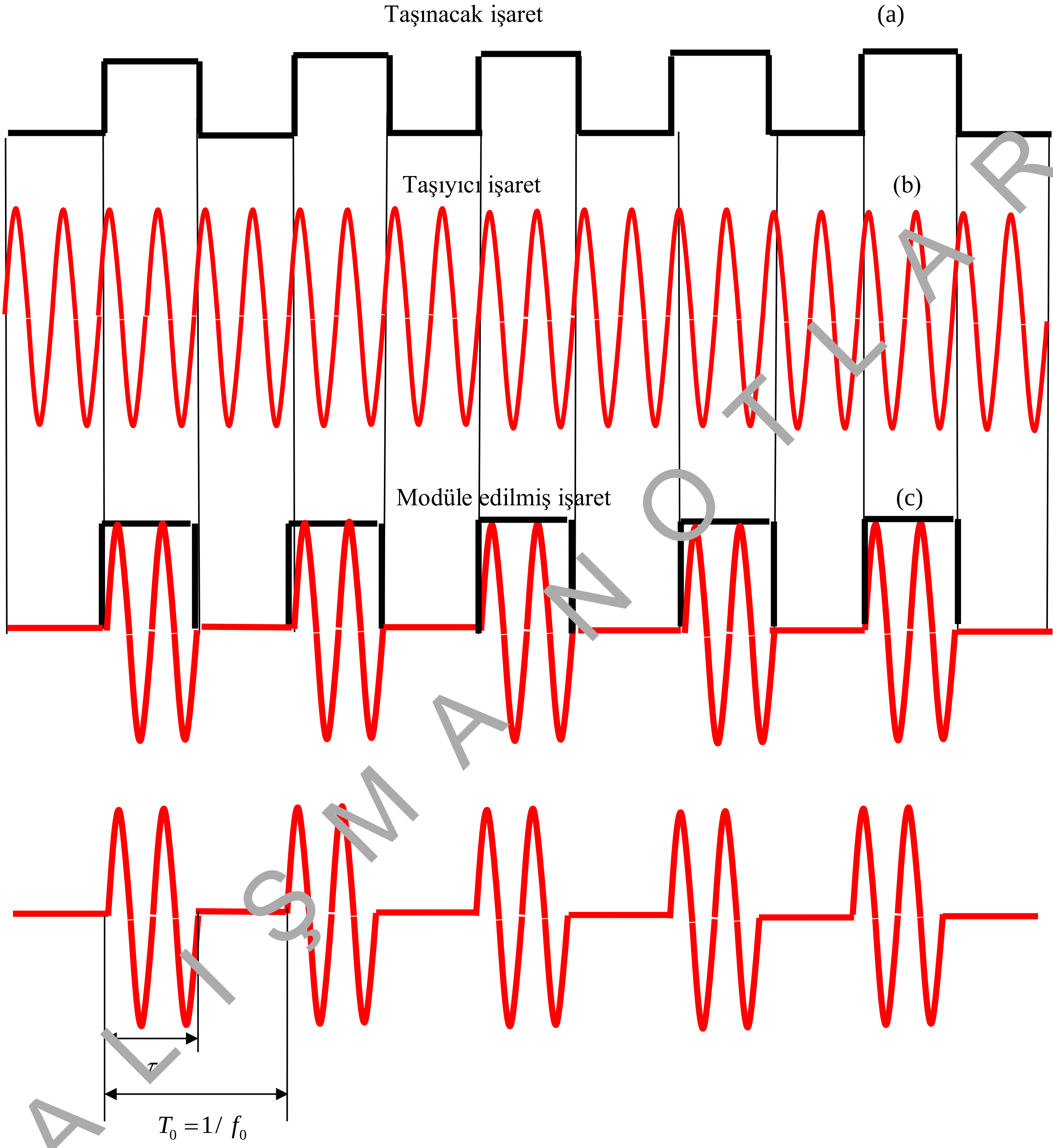
Darbe Modülasyonu



Şekil 1 Darbe modülasyonlu dalga : $f(t) = \dfrac{A\tau}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2A}{n\pi} \sin(n\pi\ f_0\ \tau) \cos 2\pi\, n f_0\, t$

(Genlik kaydırmalı sayısal modülasyon (ASK))

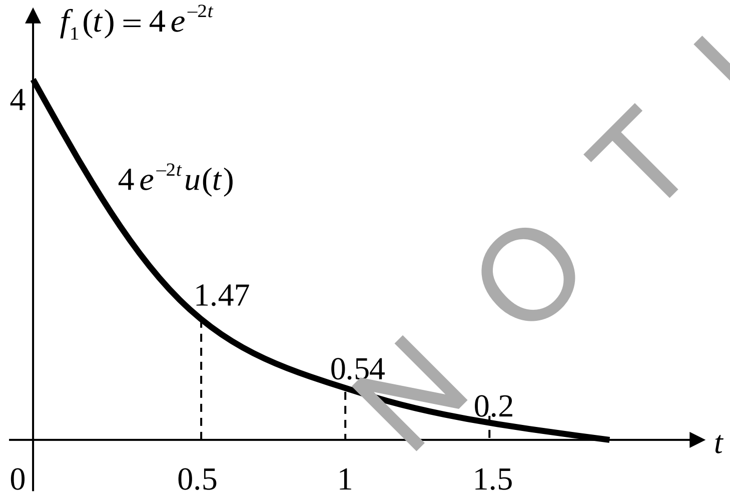
Exponensiyel Modülasyon

Örnek

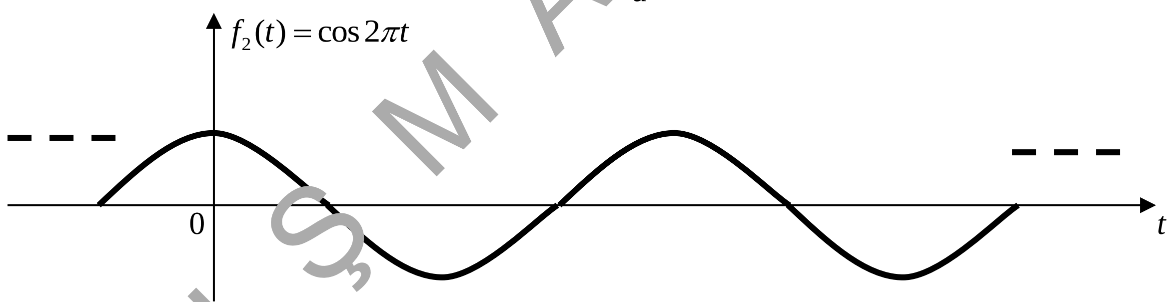
$f(t) = 4\,e^{-2t}\cos 2\pi t$ Fonksiyonunu modülasyon açısından analiz edin.

Çözüm

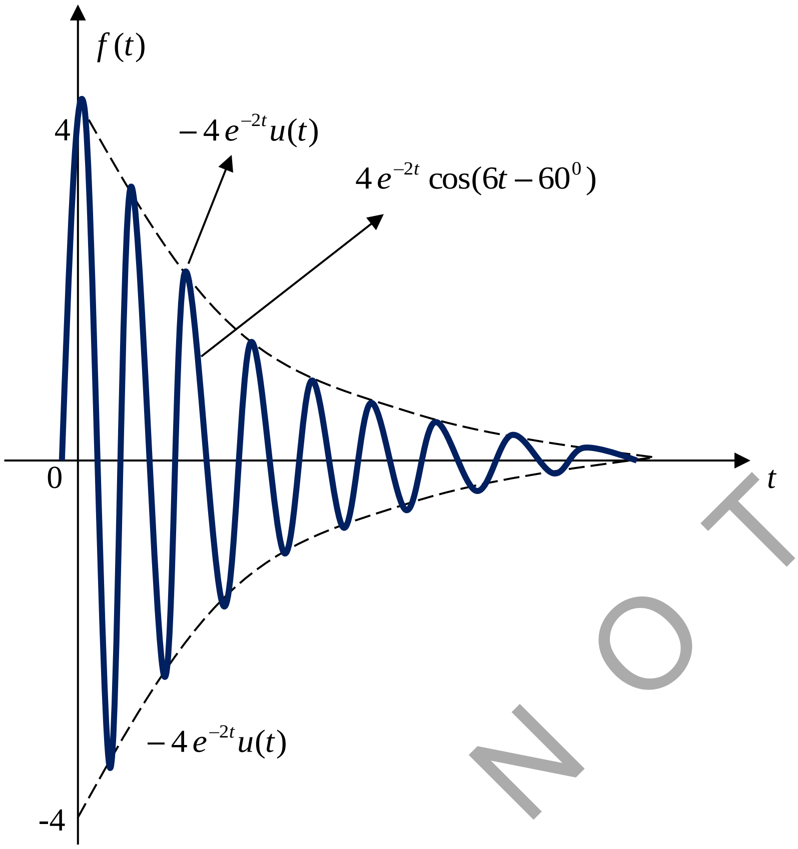
$$f(t) = 4\,e^{-2t}\cos 2\pi t = 4\,e^{-2t} + \cos 2\pi t$$
$$= f_1(t) + f_2(t)$$



- a -



- b -



- c -

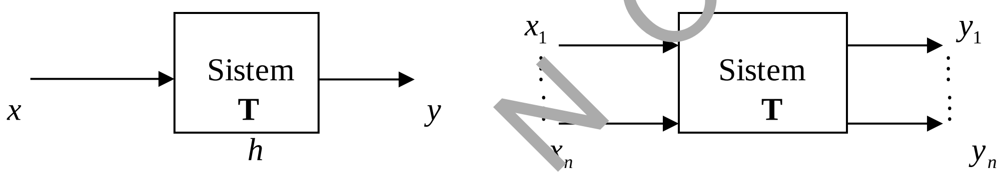
Şekil 2 Exponensiyel (üstel) modülasyon

Şekil (c) den (a) daki $f_1(t) = 4e^{-2t}$ exponensiyel işaretin, (b) da verilen $f_2(t) = \cos 2\pi t$ sinüsoidal işaret üzerine bindirildiğini görmekteyiz. Diğer bir deyişle sinüsoidal işaret exponensiyel işareti temsil edecek veya onu taşıyacak biçimde kodlanmıştır, yani modüle edilmiştir. Taşıyıcı üzerine exponensiyel ifade kodlandığından, yapılan kodlama veya modülasyon exponensiyel modülasyon olarak anılmaktadır. Modülasyon sonucu daha önce (b) de periodik ve sönümsüz olan $f_2(t) = \cos 2\pi t$ işaretinin exponensiyel etkiden dolayı sönümlü hale geldiği görülmektedir ($\lim_{t\to\infty}(4e^{-2t}\cos 2\pi t) = 0$).

SİSTEMLER

Sistem teori, bir abstract ve fenomen deyim olarak, disiplinler arası ilişkilerin bilimsel yaklaşımlarla incelendiği bir teoridir. Bunun için ilişkinin varlığı veya derecesi, ilgili olduğu sosyal ve fen alanlarına uygun matematiksel veya sosyal tabanlı modeller ve çerçeveler geliştirilerek araştırılmakta ve sonuçları üretilmektedir. Bu teori 1936 da biolog Ludwig von Bertalanffy tarafından ilk olarak geliştirilmiştir. Bertalanffy teoriyi disiplinler arasında var olan ilişkinin araştırılması ihtiyacından geliştirmiştir. Bilgi sistemi, haberleşme sistemi, enerji sistemi, elektrik sistemi, eko (çevre) sistemi, kontrol sistemi, açık ve kapalı sistemler, sağlık sistemi, aile sistemi, vücut sistemi, banka sistemi ve politik sistemler en genel sistemler olup, aralarındaki ilişkiler sistem araçları tarafından araştırılabilmekte ve ortaya konulabilmektedir.

Genel tanımlamayı işaret işleme ve sistem kavramlarını kapsayacak şekilde daha bir özel hali olacak şekilde de tanımlamak mümkündür. Buna göre bir sistem, girişindeki işareti amaca uygun çıkışında değiştirerek elde etme kabiliyetindeki mekanizmalar veya matematiksel modellerdir. Giriş işareti çıkışta başka bir işarete dönüştürüldüğü için böyle bir işlem özel anlamda filtrasyon genel anlamda ise "dönüştürme (mapping)", "transformasyon", ve "cevap (response)" olarak da anılır. Sisteme dair genel şemalar aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3 Tek giriş-çıkışlı ve çok giriş-çok çıkışlı sistemler

Verilen tanıma ve şekillere dayanarak matematiksel model ;

$y = \mathbf{T}x$

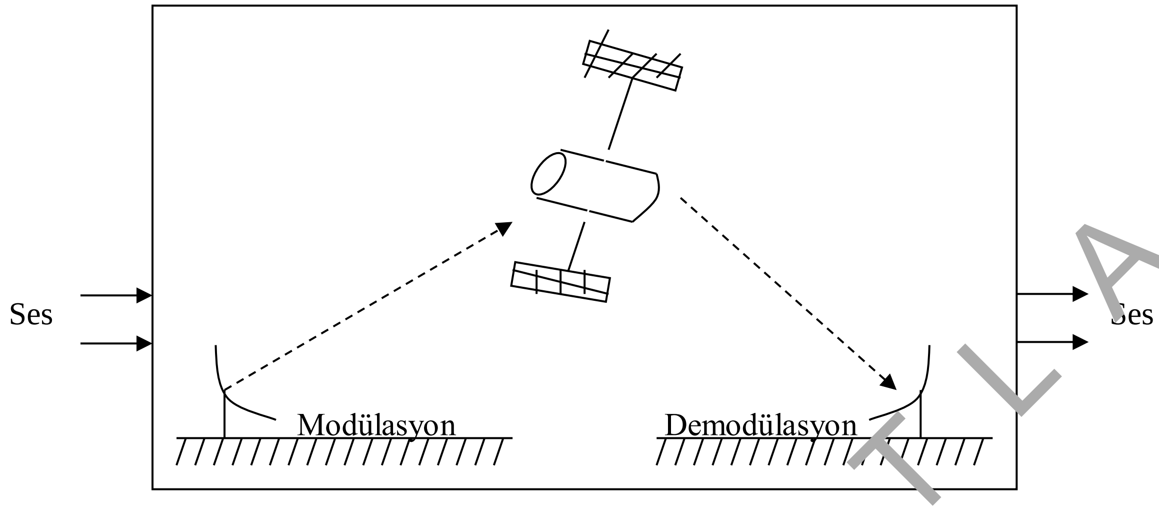
$x(t) = x$ = fiziksel sisteme giriş işareti

$y(t) = y$ = fiziksel sistemin ürettiği çıkış işareti

T = Sistemin amacına uygun olarak dönüşüm, transformasyon veya cevabını sağlayan fonksiyonel operatör.

$h(t) = h$ = sistem impuls cevabı

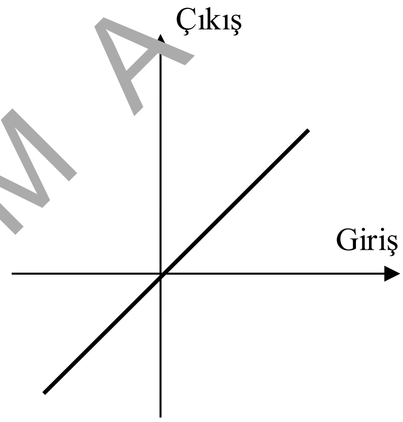
$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ Sistem cevabı (convolution)



Şekil 4 Haberleşme sistemi

Sistem Teorinin Sınıflandırılması

1. Lineer sistemler



Şekil 5 Lineer (doğrusal) sistem

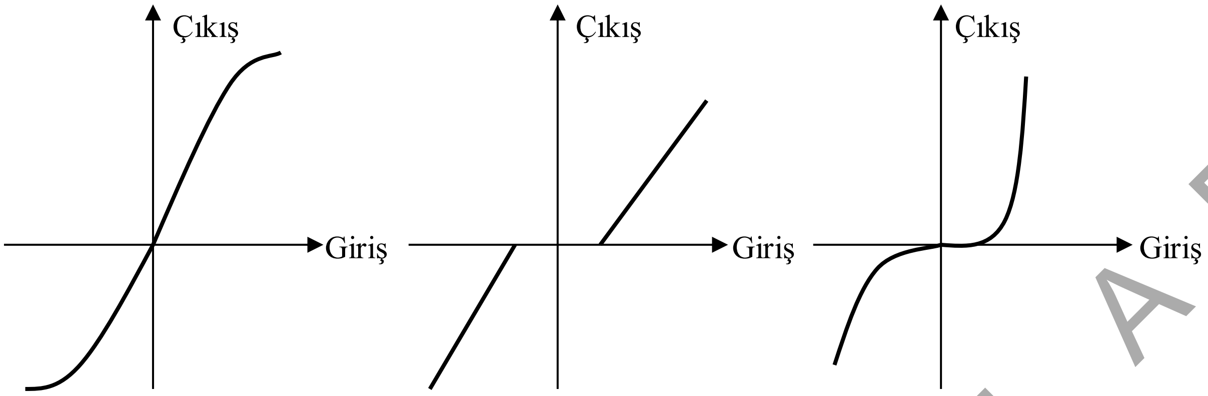
1. $y(t) = x(t)$

2. $y(t) = ax(t-1)$

3. $y(t) = x(t) + x(t-1)$

4. $a_n \dfrac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \dfrac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \dfrac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\dfrac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \dfrac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$

2. Lineer olmayan sistemler



Şekil 6 Lineer olmayan (nonliner) sistemlere ait örnek eğriler

1. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \sqrt{\frac{\mathbf{dx(t)}}{\mathbf{dt}}} + x(t) = A\cos\omega t$

2. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + [\mathbf{x^2(t) - 1}]\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$

3. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{x^3(t)}x(t) = 0$

4. $y = x^2$

1.Lineer sistemler

Lineer veya doğrusal bir sistem basit anlamda, çıkışın girişle orantılı olması durumu olarak değerlendirilebilir. Eğer $x(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı ise, basit bir sistemdeki

$y(t) = ax(t)$

bağıntısı, sistemin lineer olmasına yetmektedir. Sistem çıkışı, girişin a kadar katı, olarak değişmektedir. Ancak gerçekte bir sistemin lineerliği bu kadar basit olarak değerlendirilemez. Bir sistemde

$$x \longrightarrow \boxed{\mathbf{L}} \longrightarrow y$$

Şekil 7 Sistem

Lineer sistem teori toplamsallık (additivity), çarpımsallık (scaling) ve süperpozisyon özellikleri üzerine kurulu bir teoridir. Bu özelliği göstermek üzere bir sistem $x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış olmak üzere

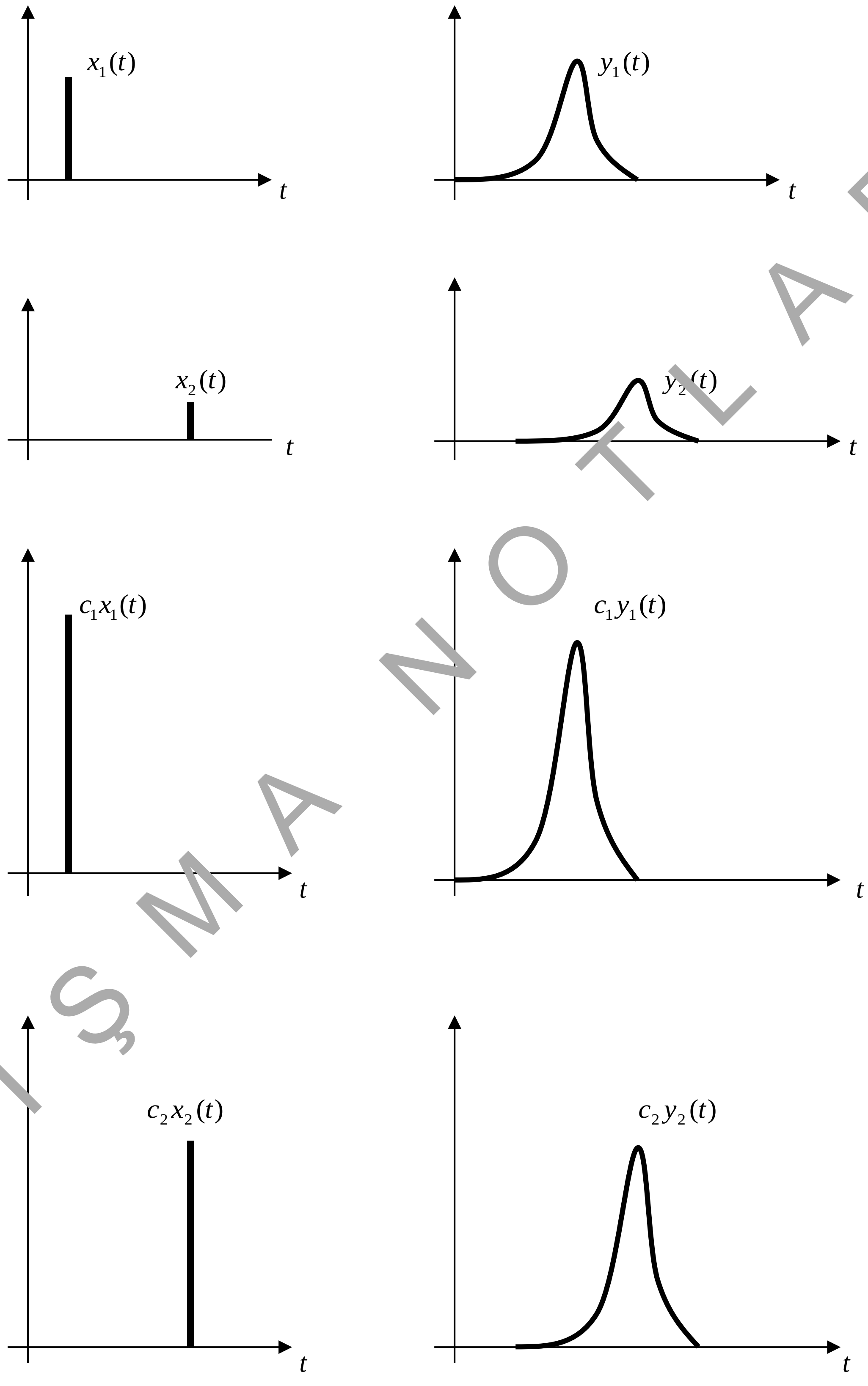
$x_1(t)$ için $y_1(t)$
$x_2(t)$ için $y_2(t)$

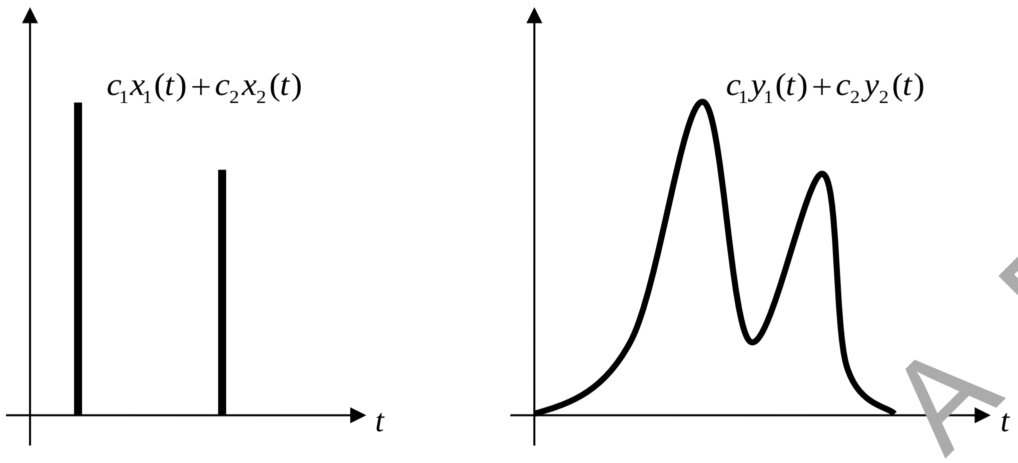
$x_1(t)+x_2(t)=y_1(t)+y_2(t)$ toplamsallık

$c_1x_1(t)$ için $c_1y_1(t)$ çarpımsallık
$c_2x_2(t)$ için $c_2y_2(t)$

$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ süperpozisyon

Giriş   Çıkış



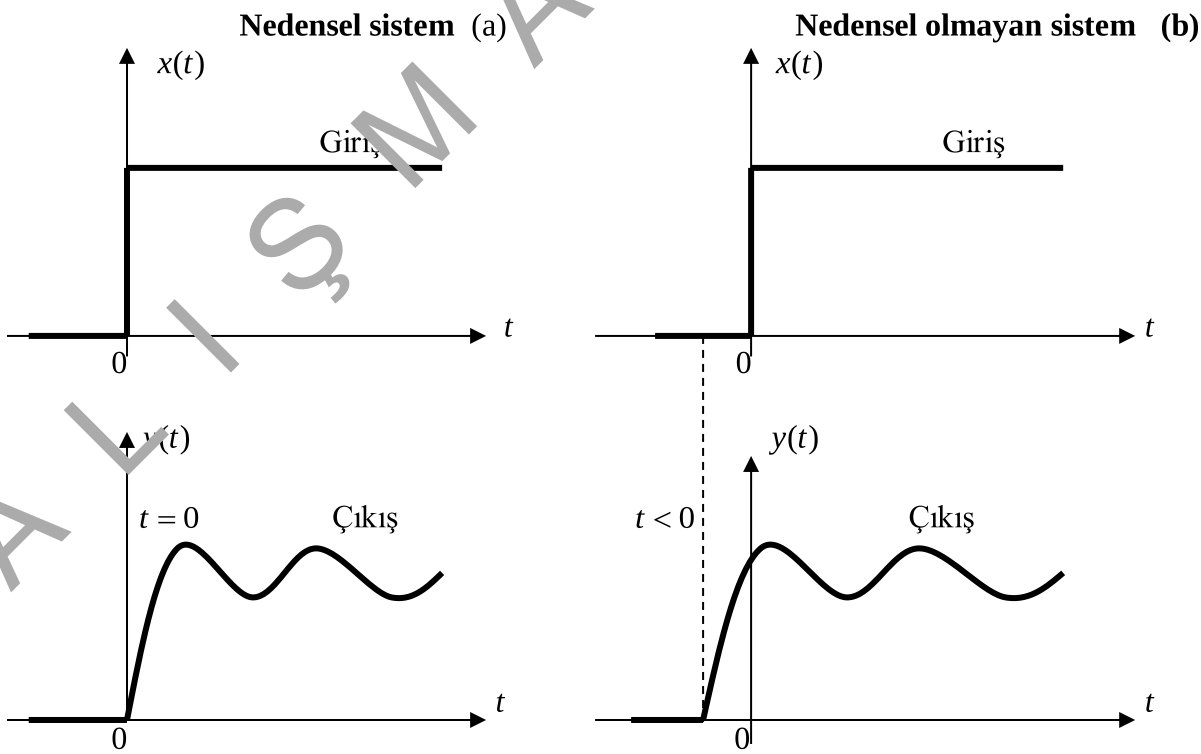


Şekil 8 Lineer sistem, $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$:çarpma +toplama = süperpozisyon

2. Nedensel (causal) ve Nedensel Olmayan (noncausal) Sistemler

Eğer bir sistemin herhangi bir andaki cevabı veya çıkışı, girişin o anki ve girişin geçmişteki değerlerine göre değişiyorsa sisteme nedensel sistem denir. Diğer bir deyişle sisteme önce bir giriş uygulanmalı, ardından cevap gözlenmelidir. Bundan dolayı, **kendisine giriş olmadan cevap üretmeyen sisteme nedensel sistem denilmektedir**. Bu tanıma uygun olmayan sistemlere nedensel olmayan sistem denilir. Tipik olarak girişin gelecekteki değerlerine göre cevap üreten sisteme nedensel olmayan (noncausal) sistemler denilmektedir. Pratikte fiziksel sistemlerin çoğu nedensel olup, etki – tepki prensibine göre çalışmaktadır.

Örnek



Şekil 9 Nedensel ve nedensel olmayan sistemler

Örnek

$y[n] = x[n-2] + x[n-1] + x[n]$ Sisteminin nedenselliğini araştırın.

Çözüm

Verilen sistemde çıkış $y[n]$, girişin mevcut yani anlık (instantaneous) $x[n]$ ve bu girişin $x[n-1]$ ve $x[n-2]$ gibi geçmiş değerlerine göre belirlendiğinden sistem nedenseldir.

Örnek

$y(t) = x(t+3) + x(t-3)$ Sisteminin nedenselliğini araştırın.

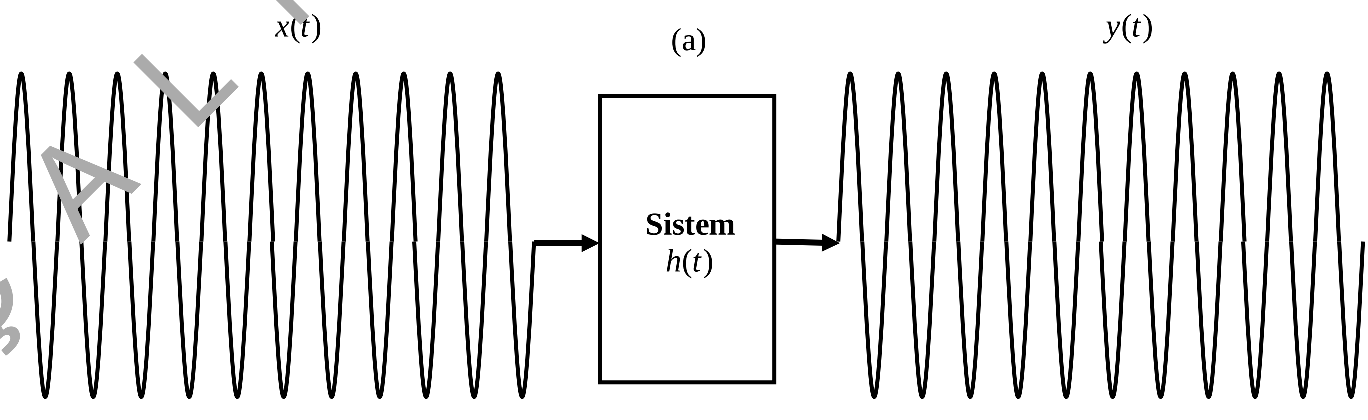
Çözüm

$x(t-3)$ ifadesine bakıldığında çıkışın girişe göre 3 birim gecikmeyle oluştuğunu görmekteyiz. Diğer bir deyişle, cevap giriş yapıldıktan üç birim zaman sonra oluşmaktadır. Bu durum nedenselliğe uygundur. Öte yandan $x(t+3)$ ifadesine bakıldığında, sistemin cevabını oluşturan ilk $x(t+3)$ kısmının girişe göre 3 birim önce oluşmaktadır. Diğer bir deyişle sistem kendisine giriş yapılmadan 3 birim önce cevap oluşturmuştur ki, hem fizikse sistem hemde sonuçta nedensel sistem tanımına aykırıdır. Toparlarsak, sistemin iki cevabından biri ($x(t+3)$), sistemin girişin gelecekteki değerlerine bağlı oluştuğundan, toplam <u>**sistem nensel değildir**</u>.

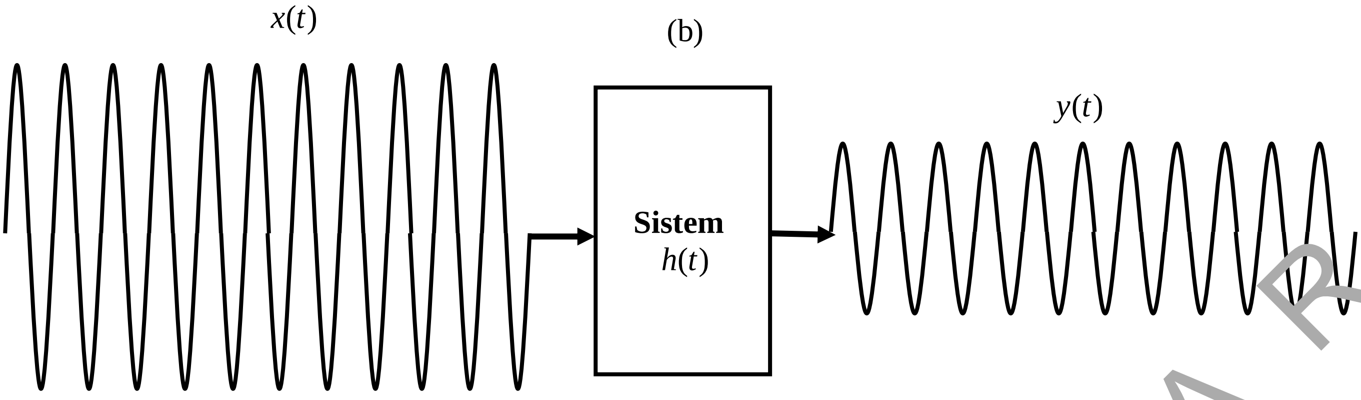
3. Zamandan Bağımsız Sistemler (time invariant systems)

$x(t) = \mathbf{A}\sin(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\theta})$

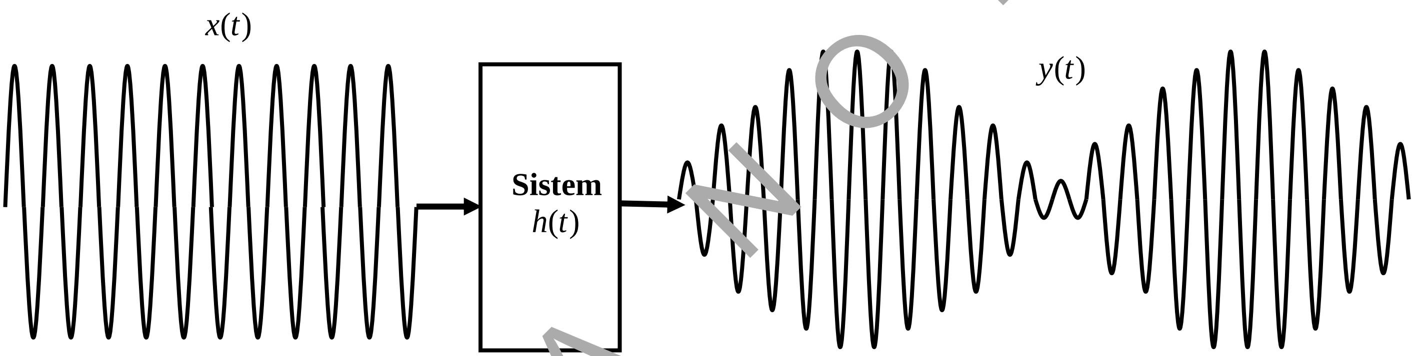
Yukarıdaki formda modellenen bir işaretin genel parametreleri genlik (A), frekans $(\boldsymbol{\omega})$ ve faz $(\boldsymbol{\theta})$ olduğundan sistem girişindeki işaretin sahip olduğu bu parametrelerden herhangi sistem çıkışında değişime uğrarsa sisteme zamandan bağımsız sistem (time invariant), aksi taktirde zamana bağımlı sistem (time varying system) söz konusu olacaktır. Genlik modülasyonlu, frekans modülasyonlu ve faz modülasyonlu işaretler tipik zamanla değişen (time varying) sistemlerdir.



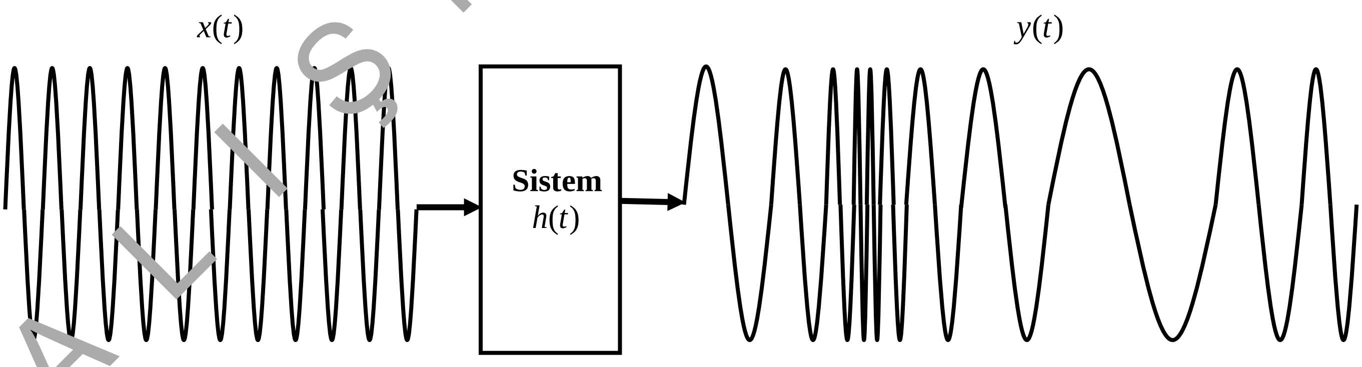
$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$, $h(t) =$ sistem impuls cevabı



Şekil 10 Zamandan bağımsız sistemler :
genliği, frekansı ve fazı zamanla değişmeyen sistemler



(a) : Genlik modülasyonlu dalga

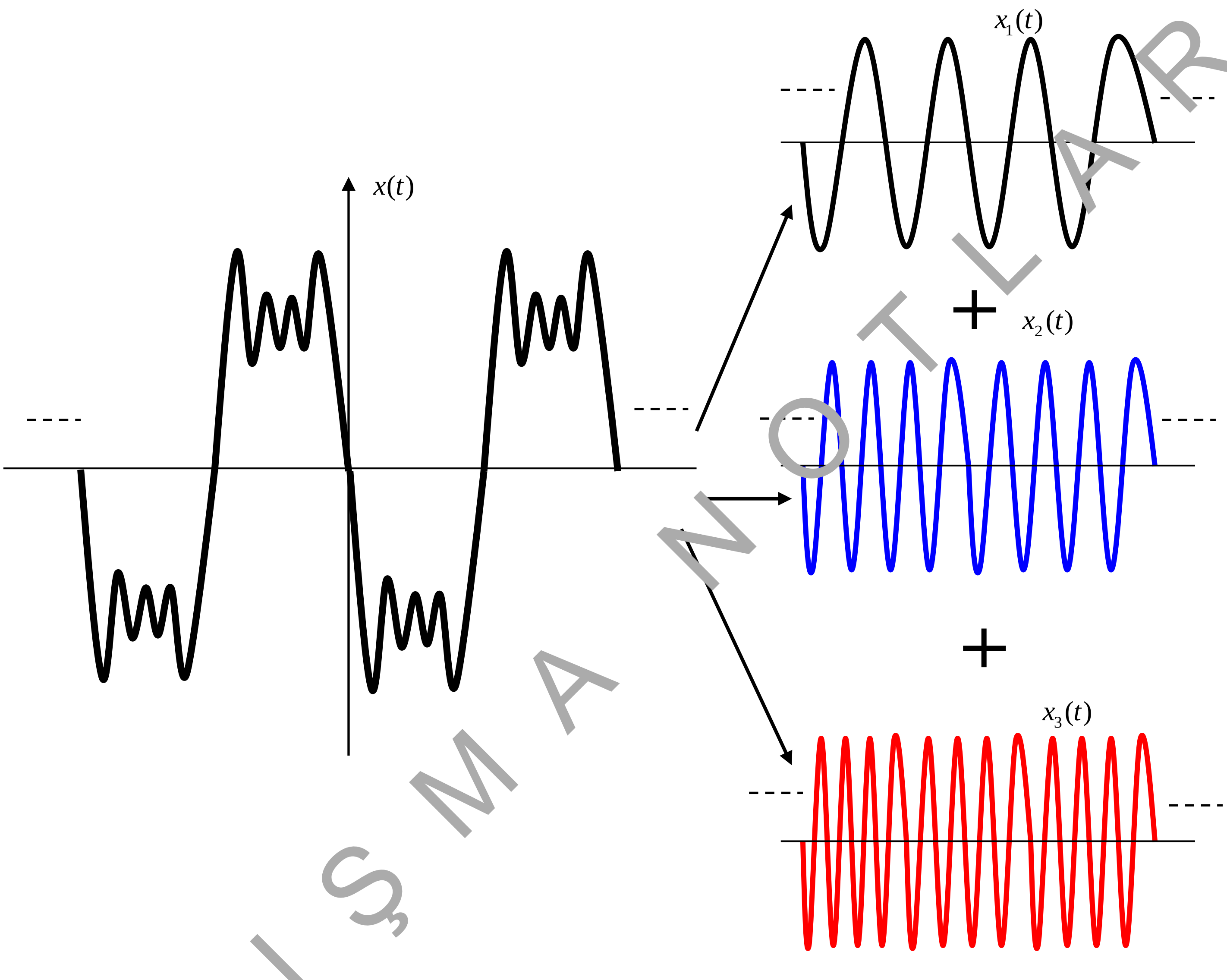


(b) : Frekans, faz modülasyonlu dalga

Şekil 11 Zamana bağımsız sistemler : genliği, frekansı ve fazı zamanla değişen işaretler

İŞARETLERİN DEKOMPOZİSYONU

İşaretlerin kendilerini oluşturan bileşenlerine ayrıştırılması işlemine işaretlerin dekompozisyonu denilir. Bu anlamda genellikle bir işaretin kendisini oluşturan frekanslara ayrıştırılması işlemi dekompozisyon olarak bilinir.

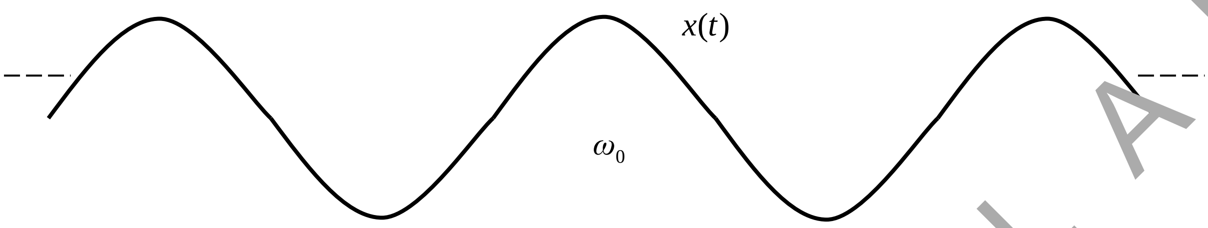


Şekil 12 İşaretin bileşenlerine ayrılması (dekompozisyon) : $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

Görüldüğü gibi periodik işaretini oluşturan işaretlerin yine periodik özellikteki $x_1(t), x_2(t)$ ve $x_3(t)$ işaretleri olduğunu görmekteyiz. Bu işaretlere ana işaretin bileşenleri hatta harmonikleri de denilmektedir.

Durağan İşaretler

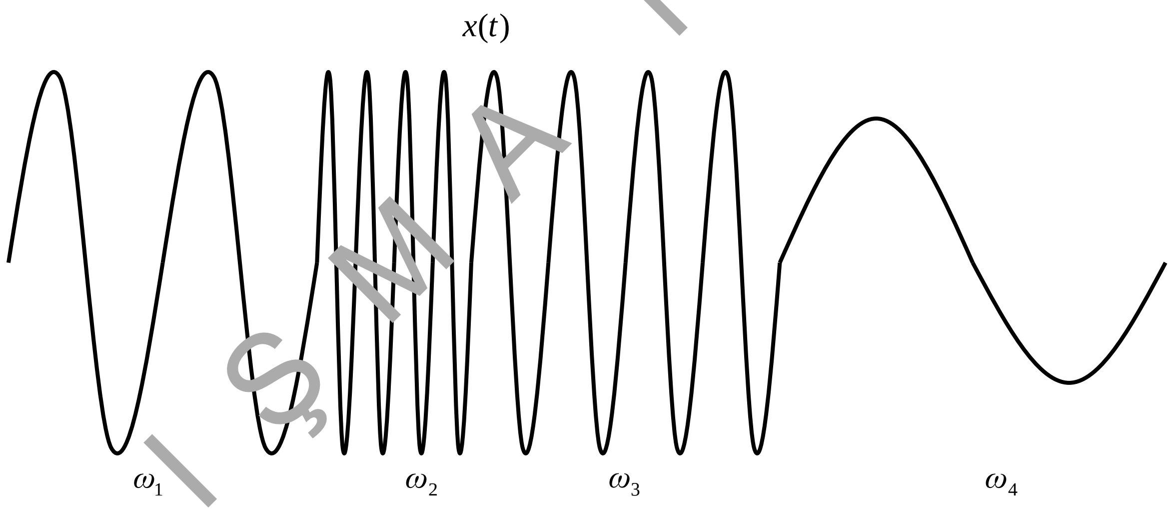
Ortalama, varyans ve korelasyon gibi istatistiksel özellikleri zamanla değişmeyen işaretlere durağan işaretler (stationary signals) denilmektedir. Periodik işaretler tipik durağan işaretleridir. Herhangi bir period boyunca söz konusu istatistikleri değişmemektedir.



Şekil 13 Durağan işaret : periodik işaretler : $\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$

Durağan Olmayan İşaretler

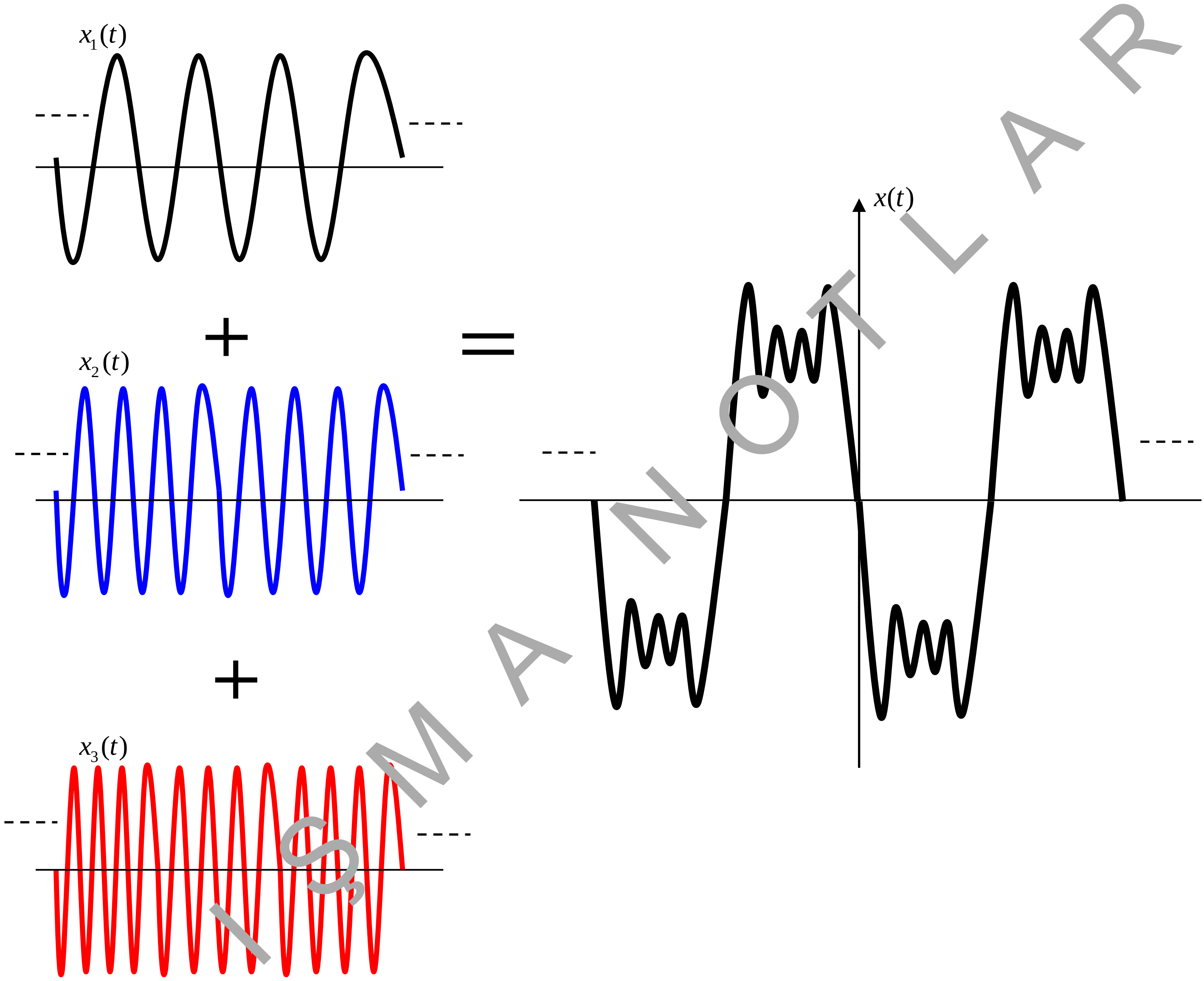
Periodik olmayan, dolayısıyla istatistiksel özellikleri zamanla değişen işaretlere durağan olmayan (nonstationary) işaretler denilmektedir.



Şekil 14 Durağan olmayan işaret : $x(t) = \sin\left(2\pi\ f_0 t + \frac{k}{2} t^2\right)$

DURAĞAN İŞARETLERİN DEKOMPOZİSYONU

Durağan periodik işaretlerin çeşitli frekanstaki bileşenleri toplanırsa, toplam işaret söz konusu frekansları içeren özellikteki başka bir periodik işarete dönüşür.



Şekil 15 Bileşenlerin (harmoniklerin) dalgayı oluşturması

Bu düşüncenin tersi de dekompozisyon olarak anılmaktadır. Buna göre sağ taraftaki $x(t)$ işaretini açarsak, ona ait çeşitli frekanstaki (harmonikler) bileşenler ortaya çıkar.

FOURIER SERISI : Durağan Periodik İşaretlerin Dekompozisyonu

Genel olarak durağan işaretlerin hangi frekanslardan oluştuklarını ortaya koyan dekompozisyon yaklaşımı Fransız Matematikçi ve Fizikçi **John Baptista Joseph Fourier** tarafından 1800 li yıllarda (1822) ortaya konulmuştur. Fourier tarafından ortaya konulan bu yaklaşım durağan özellikteki periodik işaretlerle ilgili Fourier serisi ve periodik olmayan işaretlerle ilgili olarak ise Fourier serisinden oluşmaktadır. İlk olarak Fourier serisini ele alacağız.

$x(t) = x(t+T)$ periodiklik kriteri

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad ; \quad t_1 \le t \le t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\, dt$$

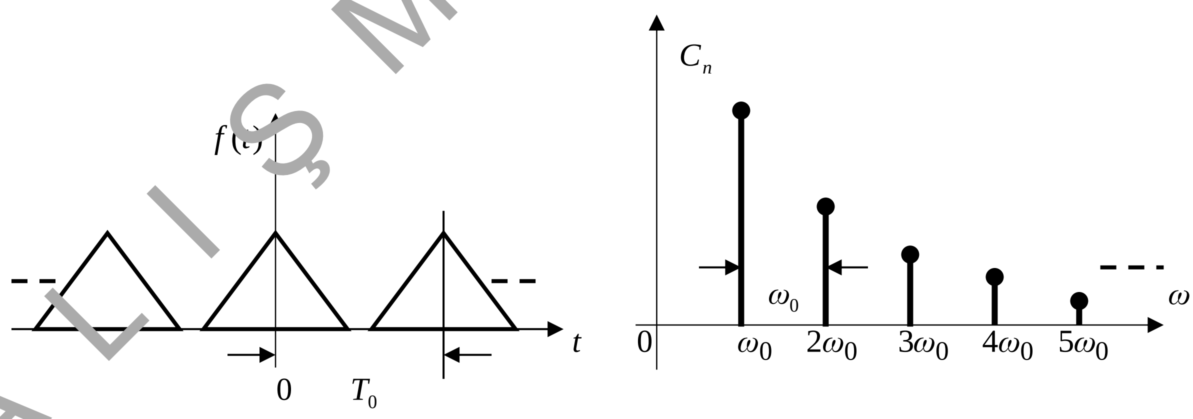
$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t\, dt$$

$\theta_n = \tan^{-1}(\frac{-b_n}{a_n}) \rightarrow$ **Faz cevabı**

$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |C_n| \rightarrow$ **genlik cevabı**

$C_0 = a_0$

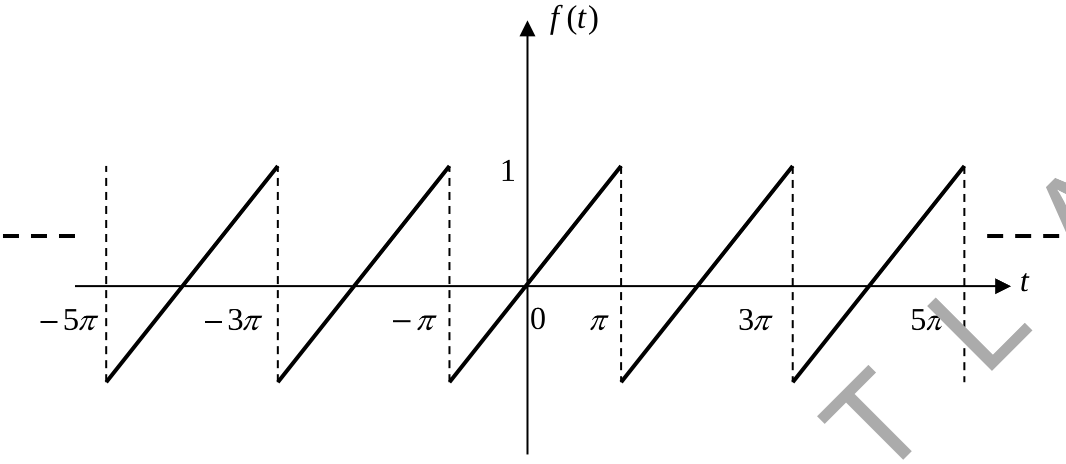


- a -   - b -

Şekil 17 Periodik işaret ve harmoniklerinin dağılımı

Örnek

$f(t) = t \quad , \qquad -\pi \le t \le \pi$ İşaretini Fourier serisine açınız.



Şekil 18 Periodik Testere dişi işaret fonksiyonu

Çözüm

Öncelikle Fourier serisine açılma koşulu olan işaretinin

$f(t) = f(t+T)$

olan periodik olma koşulunun şekilden

$f(t) = f(t+2\pi)$

ile sağladığını görmekteyiz. İşaretin T_0 temel periodu π olduğundan ($T_0 = 2\pi$), periodik olup, Fourier serisine açılabileceği görülmektedir. Bu onaylamanın ardından Fourier serisinin a_0, a_n, b_n ve θ_n parametrelerinin bulunması aşamasına geçilebilir. Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$f(t) = t \quad , \qquad -\pi \le t \le \pi$

ifadesinde,

$$T_0 = 2\pi$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

buna göre,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

yazılır, buradan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\,dt = \frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$$

bu bir kısmi integrasyon ifadesidir.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

çözüm için,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$$

$$u = t \quad , \quad dv = \cos nt\,dt$$
$$du = dt \quad , \quad v = \frac{1}{n}\sin nt$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\,dv = \frac{1}{\pi}\left[uv - \int_0^{\pi} v\,du\right]$$

eğer,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt + \frac{1}{n^2}\cos nt\right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

aynı şekilde b_n çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\, dt = \frac{2\times 2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\, dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\, dt$$

burada da kısmi integrasyon gerekecektir.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\, dt$$

$$u = t \quad , \quad dv = \sin nt\, dt$$
$$du = dt \quad , \quad v = -\frac{1}{n}\cos nt$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\, dv = \frac{2}{\pi}\left[uv - \int_0^{\pi} v\, du\right]$$

eğer,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\, dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nt\, dt\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{2}{n}(-1)^n$$
$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

sonuçta bulunan katsayılara göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt \quad , \quad -\pi \le t \le \pi$$

alternatif olarak,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

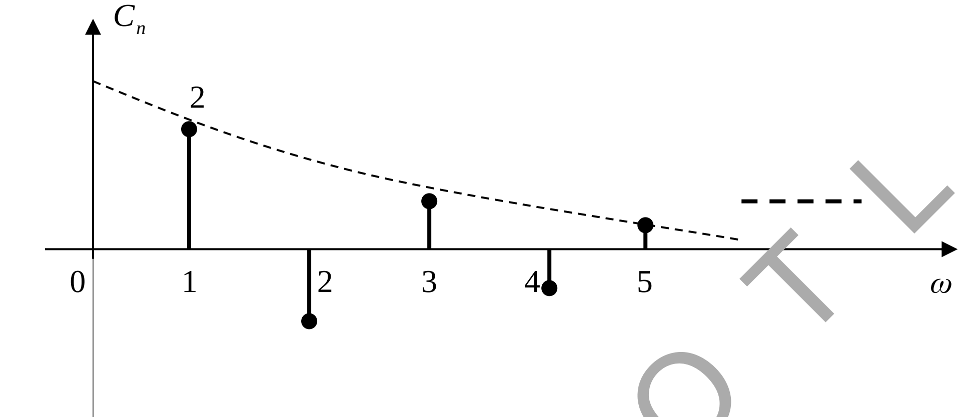
gibi kompakt forma dönüştürürsek,

$$C_0 = 0$$
$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + b^2} = b = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

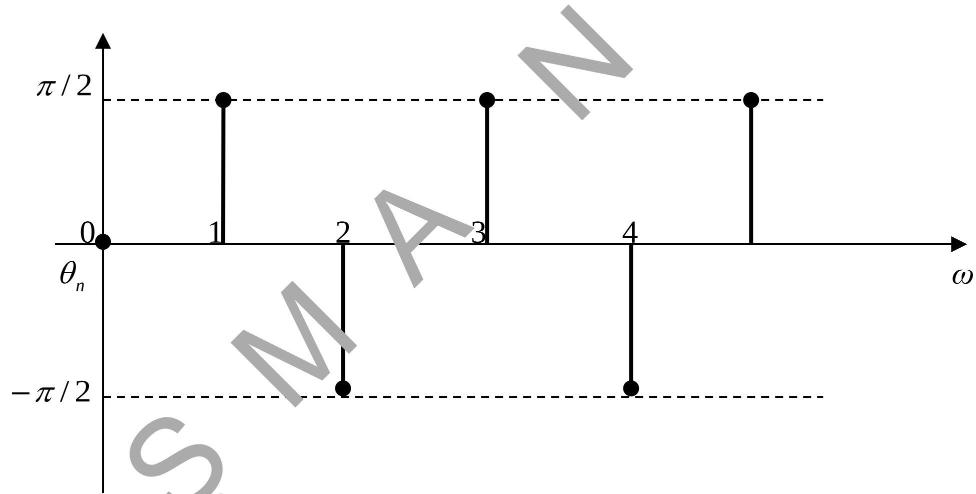
$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n = 0}\right) = \tan^{-1}(-\infty, \infty) = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} = 270^0, -270^0$$

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\omega_0 t + [\tan^{-1}(\frac{-b_n}{a_n = 0})]) = f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos\left(n\omega_0 t + [\tan^{-1}(-2\frac{(-1)^{n+1}}{0})]\right)$$



Şekil 19 Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri



Şekil 20 Periodik bir işaretin Fourier serisindeki $\theta_n = \pm\frac{\pi}{2}$ faz - frekans görüntüsü

EXPONENSİYEL FOURİER SERİSİ

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

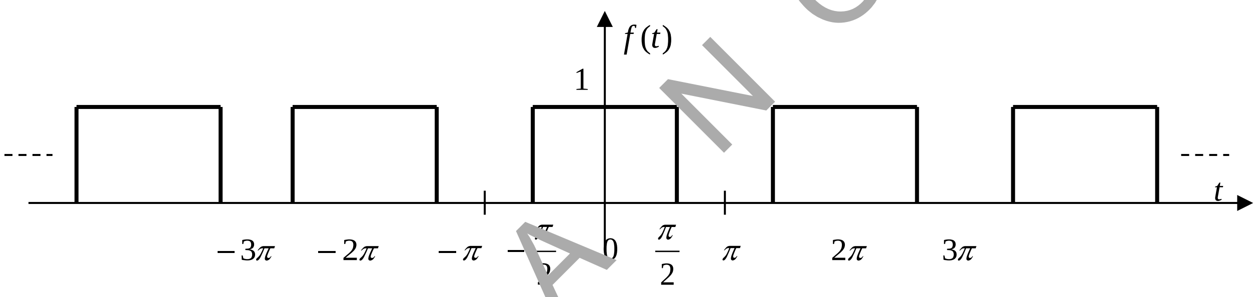
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$\left.\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ D_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{aligned}\right. \rightarrow \quad |D_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \rightarrow \quad D_n = |D_n| e^{j\theta_n}$$

Örnek

Aşağıda verilen kare dalgayı Fourier serisine açınız.



Şekil 21 Periodik darbe işaretinin Fourier serisi

Çözüm

Öncelikle Fourier serisine açılma koşulu olan işaretinin

$$f(t) = f(t+T)$$

olan periodiklik koşulunun şekilden yine,

$$f(t) = f(t+2\pi)$$

ile sağladığını görmekteyiz. İşaret ($T_0 = 2\pi$) temel periodlu olup, Fourier serisine açılabileceği görülmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi işaret $f(t) = 1,\ (-\pi, \pi)$ aralığında tanımlıdır.

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Seri periodik olduğundan, exponensiyel Fourier serisi karşılığı olarak, D_n ve θ_n parametreleri hesaplanabilir.

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,e^{-jnt}dt$$

$$D_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1)\,e^{-jnt}dt=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=-\frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=-\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{-jn(\pi/2)}-e^{-jn(-\pi/2)}\right]=-\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{-jn\pi/2}-e^{jn\pi/2}\right]=\frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\frac{e^{jn\pi/2}-e^{-jn\pi/2}}{2j}\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]=\frac{1\times(1/2)}{n\pi\times(1/2)}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right]=\frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\,(\frac{n\pi}{2})$$

$$D_n=\frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2})$$

$n=0$ için, $\mathrm{sinc}\,(0)=1$ olduğundan

$$D_0=\frac{1}{2}\sin c(\frac{0\pi}{2})=\frac{1}{2}\sin c(0)=\frac{1}{2}$$

$n=2,6,10,14,18,\cdots$ için

$$D_n=\frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2})=\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}}=0$$

$n=1,5,9,13,17,\cdots$ için

$$D_n = \frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}$$

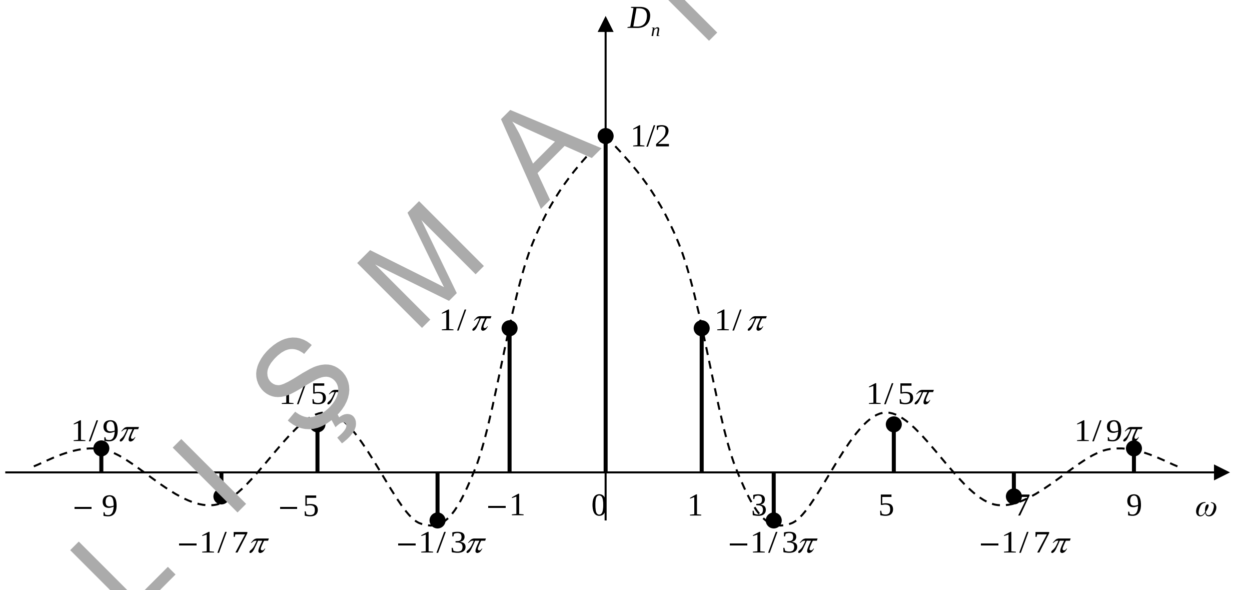
$n = 3,7,11,15,19,\cdots$

$$D_n = \frac{1}{2}\sin c(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\frac{n\pi}{2}} = -\frac{1}{n\pi}$$

$$D_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad D_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \dfrac{1}{\pi\, n} & n = 1,5,9,13,\cdots \\ -\dfrac{1}{\pi\, n} & n = 3,7,11,15,\cdots \end{cases}$$

$$D_n = \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}), \frac{1}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}), \frac{1}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}), \frac{1}{7\pi}\sin(\frac{7\pi}{2}), \frac{1}{9\pi}\sin(\frac{9\pi}{2}), \frac{1}{11\pi}\sin(\frac{11\pi}{2}), \cdots$$

$$D_n = \frac{1}{\pi}(\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}) + \frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2}) + \frac{1}{9}\sin(\frac{9\pi}{2}) + \frac{1}{11}\sin(\frac{11\pi}{2}) + \cdots)$$



Şekil 22 Periodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2})\right] e^{jnt} = \frac{1}{n\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{2})\, e^{jnt}$$

FOURIER TRANSFORMASYONU : Durağan Periodik Olmayan İşaretlerin Dekompozisyonu

Fourier Transformasyonuyla, genel olarak durağan ve periodik olmayan işaretlerin hangi frekanslardan oluştukları ortaya konulmaktadır.

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad \text{Fourier transformasyonu}$$

$$f(t) = F^{-1}\{F\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad \text{Ters Fourier transformasyonu}$$

Örnek

$f(t) = e^{-5t}u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} u(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-5t} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+5)\,t} dt = -\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-(j\omega+5)\,t})_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-(j\omega+5)\,\infty} - e^{-(j\omega+5)\,0}) = -\frac{1}{(j\omega+5)}(e^{-\infty} - e^{0}) = -\frac{1}{(j\omega+5)}(\frac{1}{e^{\infty}} - 1) = -\frac{1}{(j\omega+5)}(\frac{1}{\infty} - 1)$$

$$= -\frac{1}{(j\omega+5)}(0-1) = \frac{1}{(j\omega+5)}$$

$$= \frac{1}{5+j\omega}$$

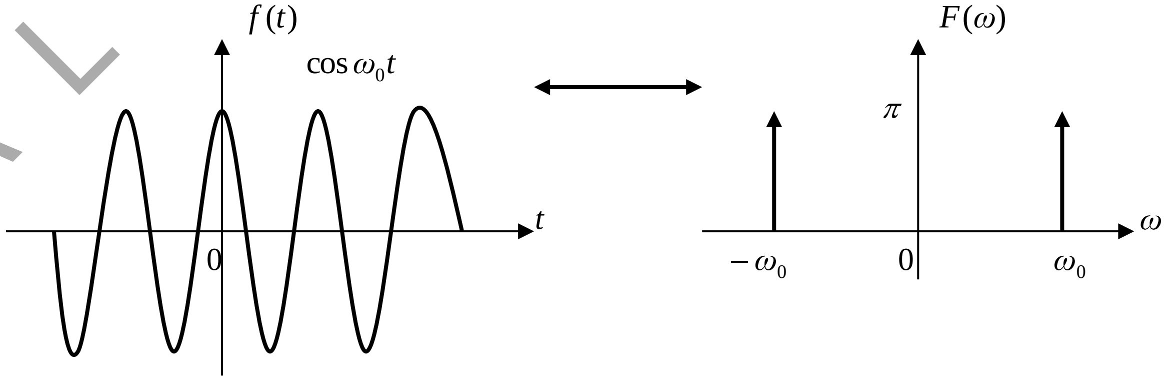
Örnek

$f(t) = \cos\omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$



Şekil 23 $f(t) = \cos\omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

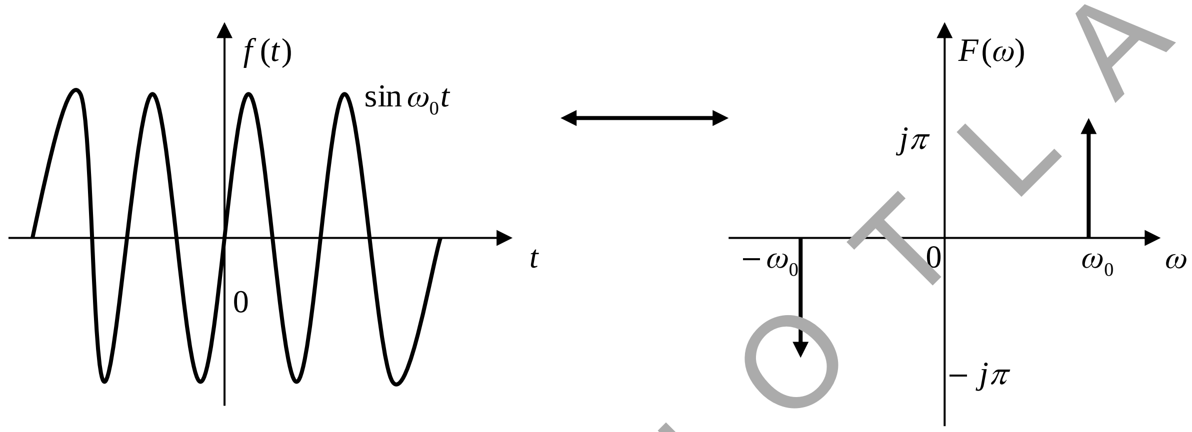
Örnek

$f(t) = \sin \omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

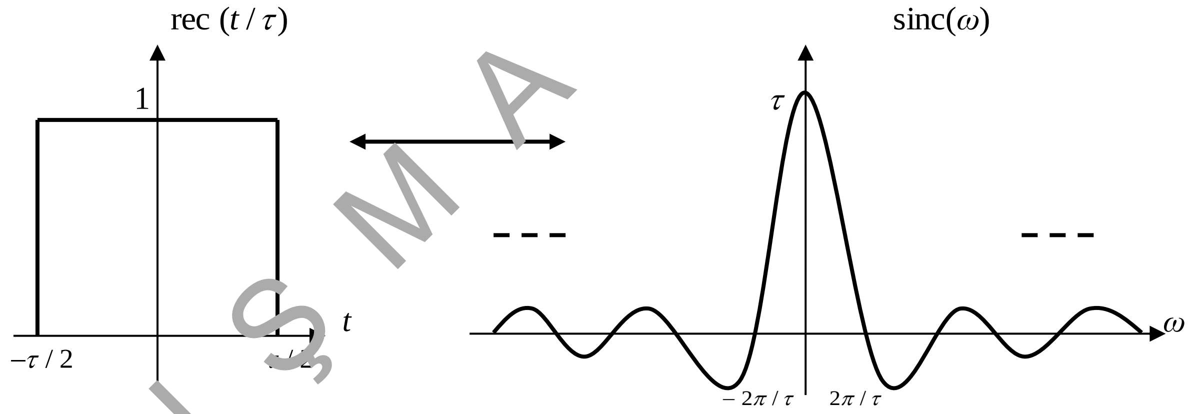
$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$\sin \omega_0 t \Leftrightarrow j\pi \left[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) \right]$



Şekil 24 $f(t) = \sin \omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Örnek



$$\text{rec}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau\, \text{sinc}(\frac{\omega \tau}{2})$$

Şekil 25 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

Solda verilen τ genişliğindeki dörtgen dalganın band genişliğinin sağ taraftan $f = 1/\tau$ Hz olarak sonlu bir değer/band olduğunu görmekteyiz.

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$2\pi f = \frac{2\pi}{\tau} \rightarrow f = \frac{1}{\tau} \text{ Hz}$$

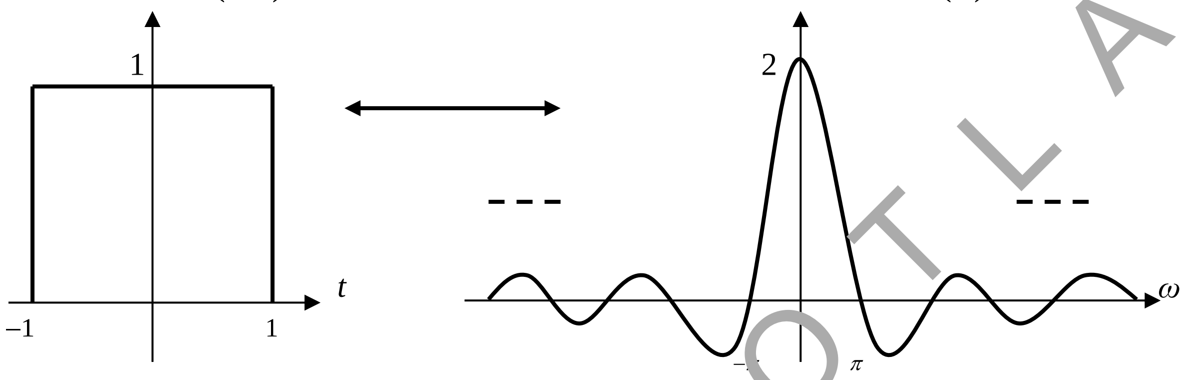
Not : Zaman domeninde genişliği τ sn olan bir dörtgen dalganın band genişliği $f = 1/\tau$ Hz.

Örnek

Sayısal haberleşme sisteminde bilgi kare dalga dizisiyle gönderilmektedir. Uzunluğu 2 sn olan bir kare dalga dizisi kullanıldığına göre tek bir kare dalganın band genişliğini hesaplayın.

Çözüm

Kare dalganın uzunluğu $\tau = 2$ sn ise band genişliği $f = 1/\tau = 1/2$ Hz olacaktır.

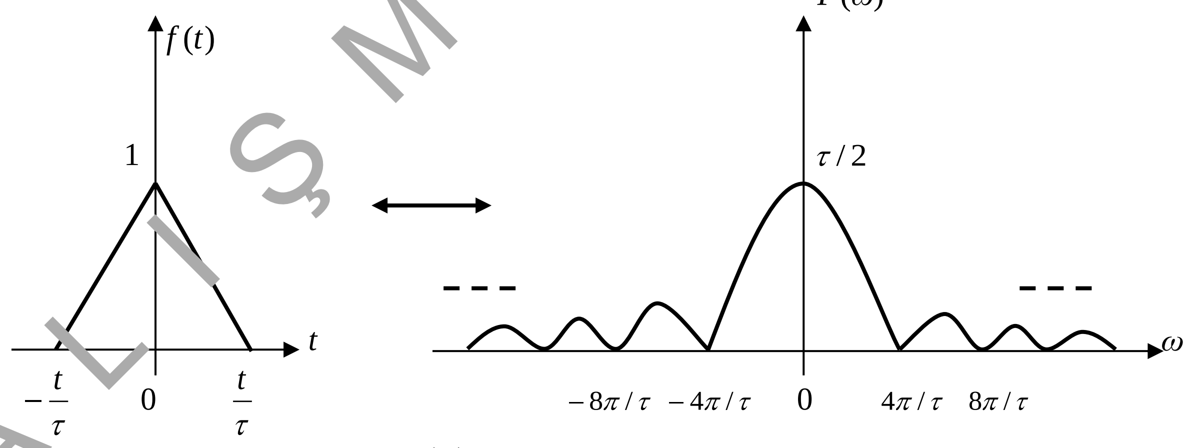


$$\text{rec}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau\,\text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$$

Şekil 26 Darbe işareti ve spektrumu

Doğrulama : $\omega = \pi \leftrightarrow 2\pi f = \pi \rightarrow f = 1/2$ Hz ; $\text{rec}(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2\,\text{sinc}(\frac{\omega 2}{2}) = 2\,\text{sinc}(\omega)$

Örnek



$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2}\sin c^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

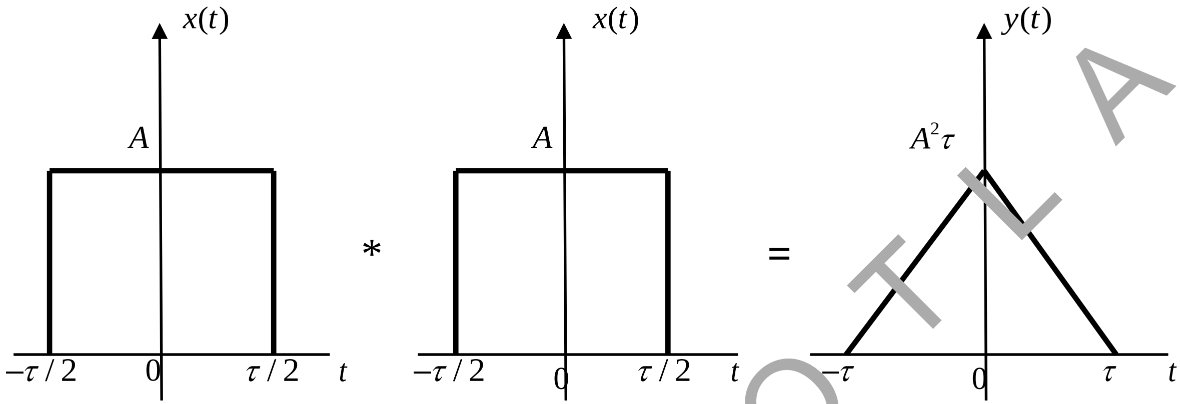
Şekil 27 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

Solda verilen τ genişliğindeki dörtgen dalganın band genişliğinin sağ taraftan $f = 2/\tau$ Hz olarak sonlu bir değer/band olduğunu görmekteyiz.

$$\omega = \frac{4\pi}{\tau}$$

$$2\pi f = \frac{4\pi}{\tau} \rightarrow f = \frac{2}{\tau} \text{ Hz}$$

Not : Zaman domeninde genişliği τ sn olan bir üçgen dalganın band genişliği $f = 2/\tau$ Hz.



Şekil 28 $x(t) * x(t) = A\ \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau}) * A\ \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau}) = A^2\tau\ \Delta(\frac{t}{2\tau})$

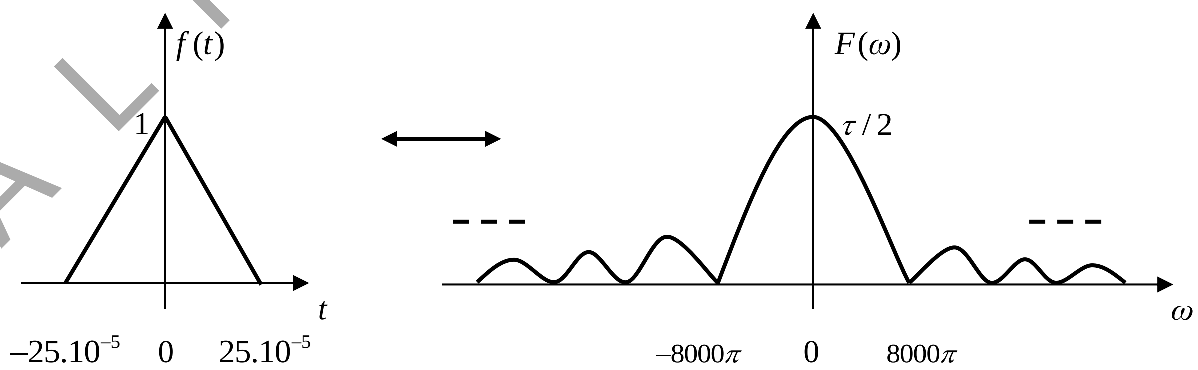
Örnek

Sayısal haberleşme sisteminde bilgi üçgen dalga dizisiyle gönderilmektedir. Uzunluğu 0.0005 sn olan bir kare dalga dizisi kullanıldığına göre tek bir üçgen dalganın band genişliğini hesaplayın.

Çözüm

Üçgen dalganın uzunluğu $\tau = 5.10^{-4}$ sn ise band genişliği ,

$f = 2/\tau = 2/(5.10^{-4}) = 4000$ Hz $= 4$ KHz olacaktır.



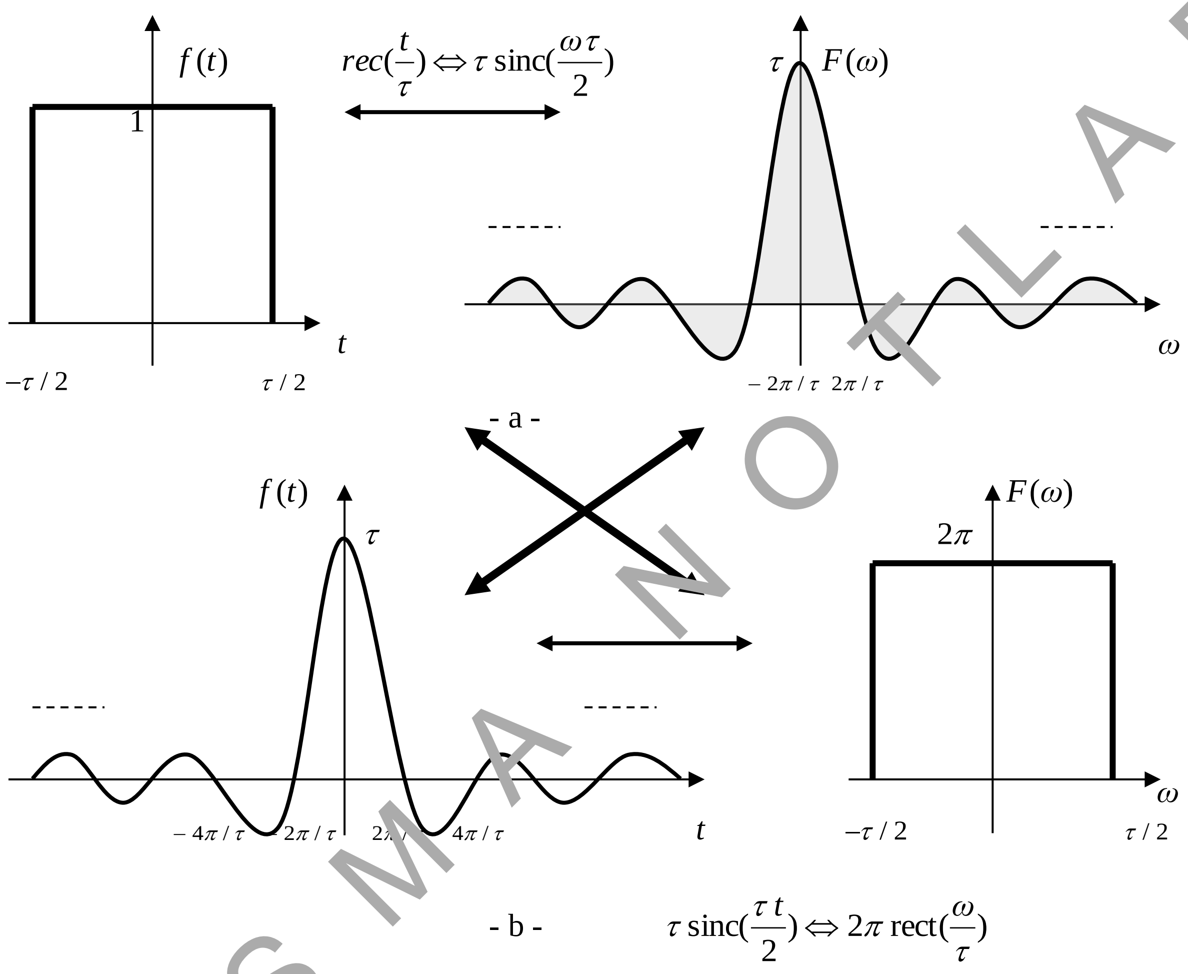
$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2}\sin c^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

Şekil 29 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

Doğrulama : $\omega = 8000\pi \leftrightarrow 2\pi f = 8000\pi \rightarrow f = 4000\ \text{Hz} = 4\ \text{KHz}$;

$$\Delta\left(\frac{t}{5.10^{-4}}\right) \Leftrightarrow \frac{5.10^{-4}}{2}\sin c^2\left(\frac{\omega 5.10^{-4}}{4}\right) = 25.10^{-5}\sin c^2\left(\frac{\omega}{8000}\right)$$

Örnek



Şekil 30 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Örnek

$f(\frac{t}{2})$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$f(\frac{t}{2}) \Leftrightarrow 2F(2\omega)$

Not : Zaman domenindeki geniş işaretin frekans domenindeki band genişliği düşük olur.

Örnek

$f(3t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$f(3t) \Leftrightarrow \frac{1}{3}F(\frac{\omega}{3})$

Not : Zaman domeninde sıkışık (frekansı yüksek, periodu düşük) olan işaretin frekans domenindeki band genişliği yüksek olur.

Örnek

$F(7\omega)$ İşaretinin ters Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$F(7\omega) \Leftrightarrow \frac{7}{2\pi} f(\frac{t}{7})$

Not : Frekans domeninde dar olan (frekansı düşük olan) işaretin zaman domenindeki periodu geniş olur.

Örnek

$F(\frac{\omega}{4})$ İşaretinin ters Fourier transformasyonunu bulun.

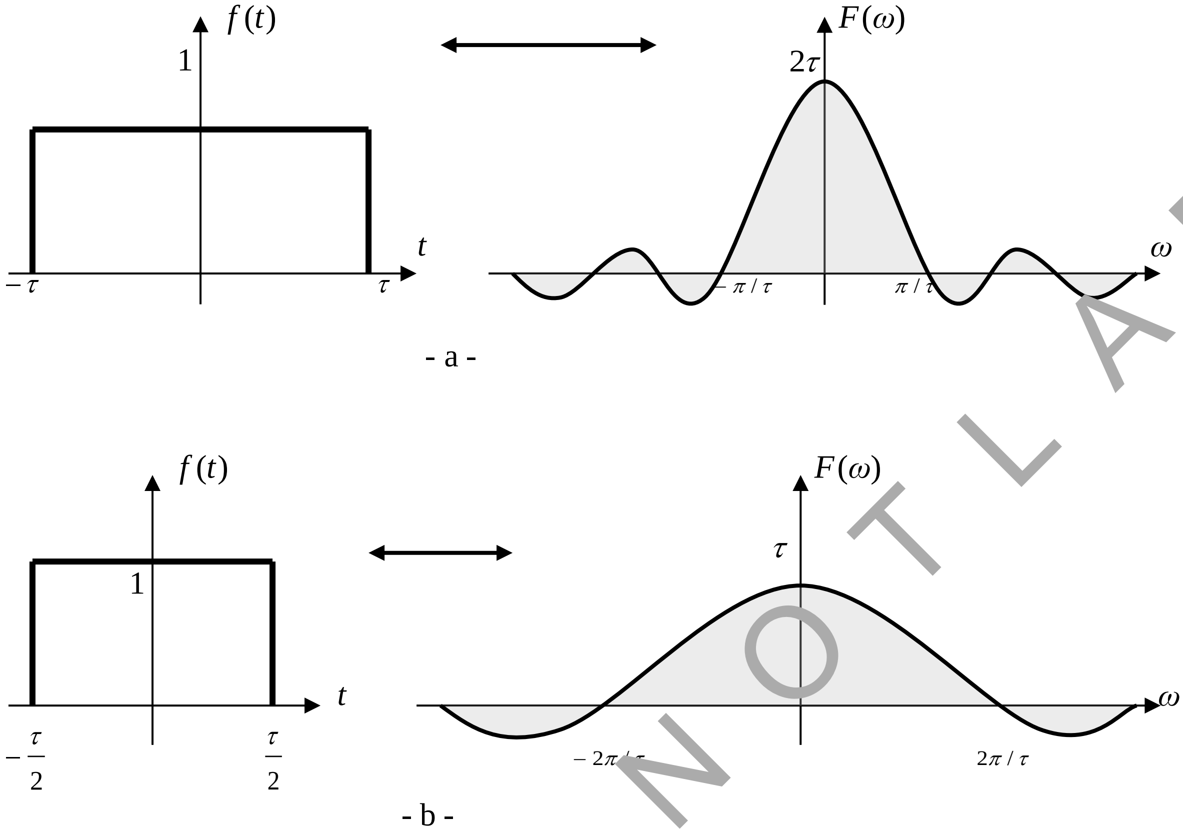
Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$F(\frac{\omega}{4}) \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi} f(4t)$

Not : Frekans domeninde geniş banda sahip işaretin (frekansı yüksek olan) işaretin zaman domenindeki periodu dar olur.

Örnek



Şekil 31 Fourier transformasyonu ölçekleme özelliği

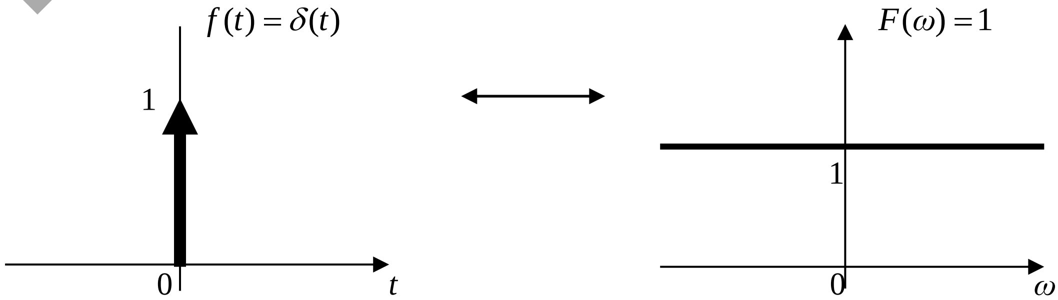
Örnek

$f(t)=\delta(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayınız.

Çözüm

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

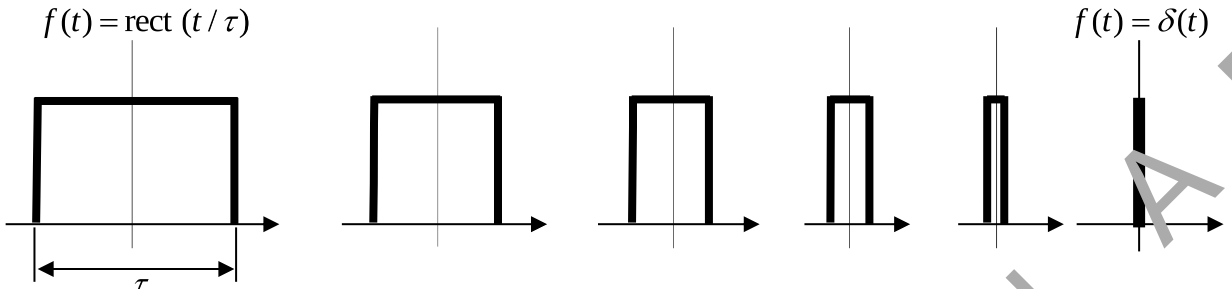
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}dt=\delta(0)\, e^{-j\omega 0}$$
$$=1$$



Şekil 32 $f(t)=\delta(t)$ Fourier transformasyonu

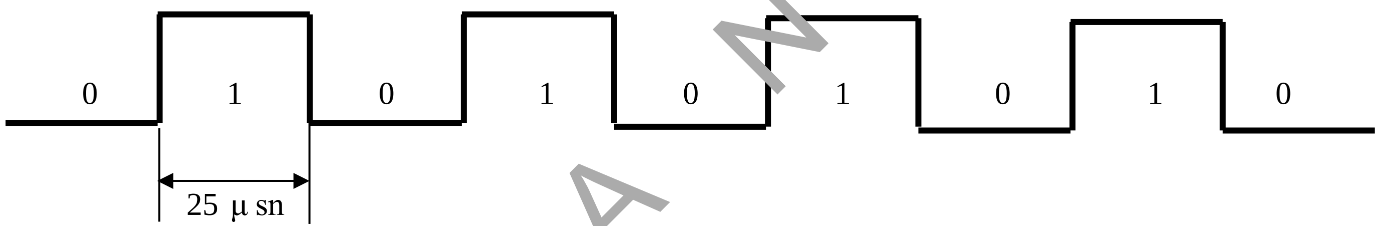
Not – 1 : Zaman domenindeki dar işaretin frekans domenindeki band genişliği yüksek olur.

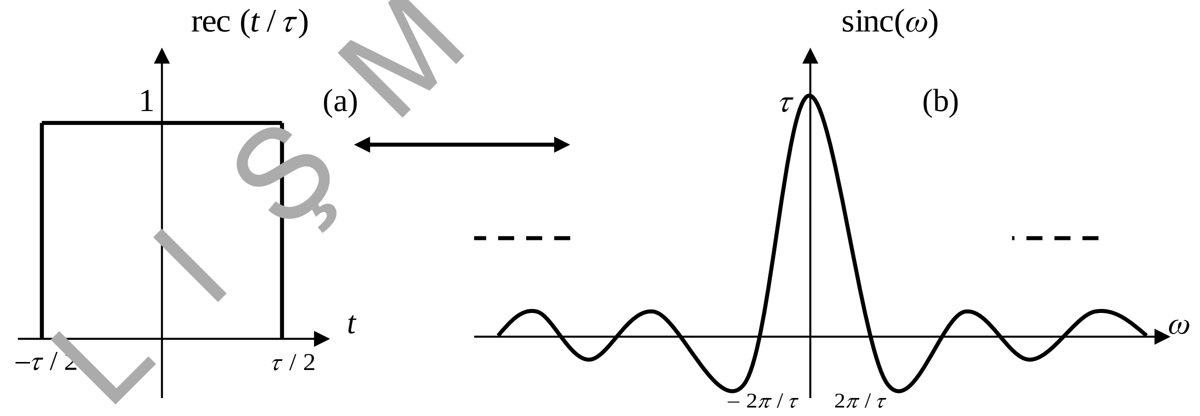
Not – 2 : Eğer zaman domenindeki işaret gibi impuls veya delta dirac fonksiyonu olursa şekilden görüldüğü gibi band genişliği sonsuz olur. İmpuls fonksiyonu aslında belirli bir τ genişliği olan normal bir dörtgen veya kare dalgadır.



Şekil 33 Belirli bir genişlikten sıfır genişlikteki impuls fonksiyonuna giden kare dalga

Not – 3 : Sayısal haberleşme sistemlerinde sayısal bilgi iletiminde sayısal işaret olarak belirli genişliğe sahip dörtgen dalga kullanılmaktadır. Hatta belirli genişliğe sahip periodik dörtgen dalga kullanılmaktadır.





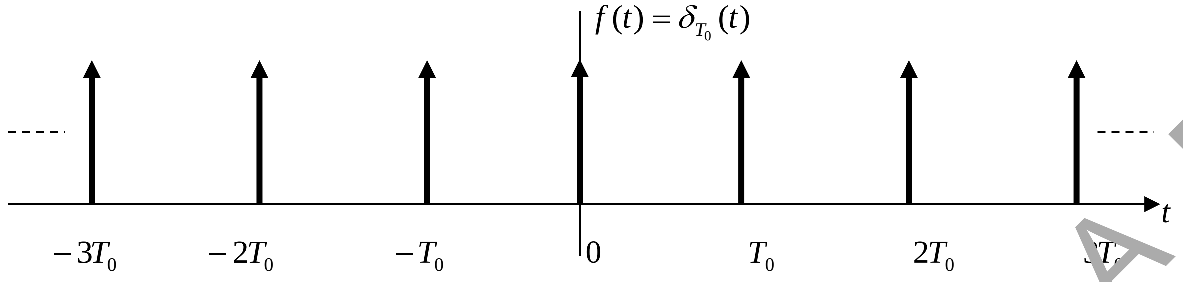
$$\text{rec}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau\,\text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$$

Şekil 34 Dörtgen dalga ve frekans spektrumu

Solda verilen τ genişliğindeki dörtgen dalganın band genişliğinin sağ taraftan $f = 1/\tau$ Hz olarak sonlu bir değer/band olduğunu görmekteyiz.

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \leftrightarrow 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau} \rightarrow f = \frac{1}{\tau} \text{ Hz}$$

Not – 4 : Sayısal haberleşme sistemlerinde sayısal bilgi iletiminde ideal anlamda sıfır genişlikteki özel dörtgen dalga olan impuls fonksiyonu veya impuls dizisi kullanılması istenir. Ancak impuls işaretinin sıfır genişlikte olması, dolayısıyla sonsuz band genişliği istemesinden dolayı kullanılamamaktadır.



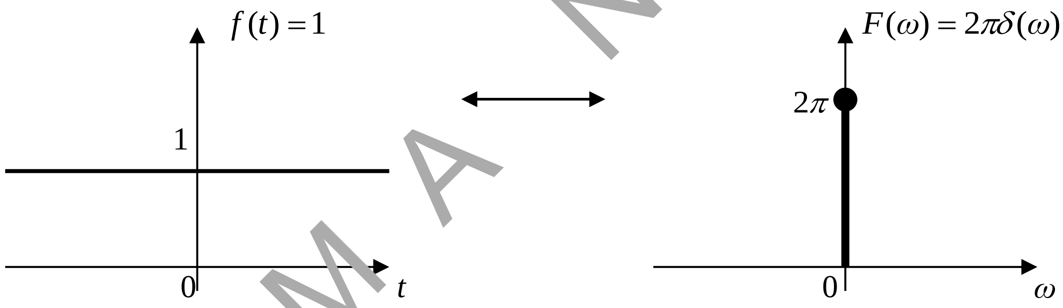
Şekil 35 Birim impuls fonksiyonu

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin Fourier transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

$1 \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$



Şekil 36 $f(t) = 1$ Fourier transformasyonu

Not : Zaman domenindeki geniş işaretin frekans domenindeki band genişliği düşük olur.