

## AVL Ağaçları

İkili ağaçlar birçok kompleks problemin çözümünde kullanılabilirler ve başarılıdırlar. Fakat başarılarını en çok etkileyen faktör ağacın yapısıdır. Örneğin ikili arama ağacında veriler sıra ile geldiğinde oluşacak ağaç aslında bir listedir ve ağaç veri yapısından beklenen performans elde edilemez. Bundan dolayı ikili arama ağaçlarında her eleman eklendikten veya çıkarıldıktan sonra ağacın sol ve sağ çocuklarına bakmak koşulu ile denge kontrolü yapılır. Bu şekilde dengeyi her daim koruyan ağaçlara AVL ağaçları denir. AVL ismi bu veri yapısını geliştiren kişilerin isimlerinden alınarak oluşturulmuştur. AVL ağaçlarını ilk geliştiren, G.M. Adelson Velskii ve E.M. Landis, yöntemlerinin temelini ağacın sol ve sağ çocuklarının yükseklik değerleri oluşturmaktadır.

Hiç düğümü olmayan bir ağacın yüksekliği tanımsız olacağı için -1 olarak kabul edilir. Tek düğümlü bir ağacın yüksekliği sıfırdır. Yani bir ağacın yüksekliği kökten en uzaktaki yaprağa olan kenar sayısıdır.

## Tanım

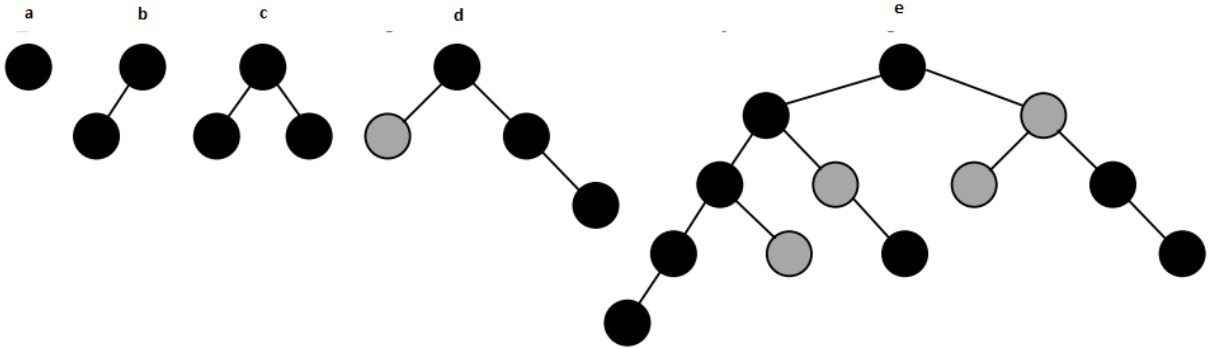
Bir ikili arama ağacı eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa dengeli (AVL) bir ağaçtır.

- Yaprak ve kök olmayan her düğümün mutlaka bir kardeşi olmalıdır.
- Kardeşlerin yükseklikleri eşit veya en fazla 1 fark olmalıdır.

Dengesiz bir ağaç hafif ya da ağır diye nitelendirilebilir. Bu nitelemeler aşağıdaki durumlara bağlıdır.

- Eğer bir düğümün kardeşinin yüksekliği daha fazla ise o düğüm hafiftir.
- Hafif olmayan her düğüm ağırdır.
- Bir düğüm sol-ağır şeklinde nitelendiriliyorsa düğümün sol çocuğunun yüksekliği sağ çocuğunun yüksekliğinden daha fazladır.
- Aynı şekilde bir düğüm sağ-ağır şeklinde nitelendiriliyorsa düğümün sağ çocuğunun yüksekliği sol çocuğunun yüksekliğinden daha fazladır.

Aşağıdaki ağaç örneklerinden hepsi AVL ağaç örnekleridir.



Şekildeki siyah düğümler ağır olan çocukları temsil etmektedirler.

a ağacı tek düğümden oluştuğu için sol ve sağ çocuklarının yüksekliği yoktur yani eşittir dolayısıyla AVL ağacıdır.

b ağacının sol çocuğunun yüksekliği sıfır sağ çocuğunun yüksekliği olmadığı için (-1) arada bir fark vardır ve AVL ağacıdır.

c ağacının sol ve sağ çocuklarının yükseklikleri sıfır ve eşit olduğu için bir AVL ağacıdır.

d ağacının sol çocuğunun yüksekliği sıfır sağ çocuğunun yüksekliği 1 olduğu için arada bir fark vardır ve AVL ağacıdır.

e ağacının sol çocuğunun yüksekliği 3, sağ çocuğunun yüksekliği 2 olduğu ve arada 1 fark olduğu için AVL ağacıdır.

Bir AVL ağacına ekleme veya çıkarma yapıldığında dengenin bozulma ihtimali olacağı için ağacın çocuklarının yükseklik kontrolü yapılır. Eğer ağaçta denge bozulmuş ise denge **tek dönüş** ya da **çift dönüş** işlemi uygulanarak yapılır.

Bu işlemler şu şekilde uygulanır.

d düğümünün sol ve sağ çocuklarının yükseklikleri arasındaki fark 1'den fazla ise denge bozulmuştur.

$sol(d)$  : d'nin sol çocuğu

$sağ(d)$ : d'nin sağ çocuğu

$yükseklik(d)$ : d düğümünün yüksekliği

// +2 'lik fark, hangi dala dağılmış ise o dal h+1 diye nitelendirilir.

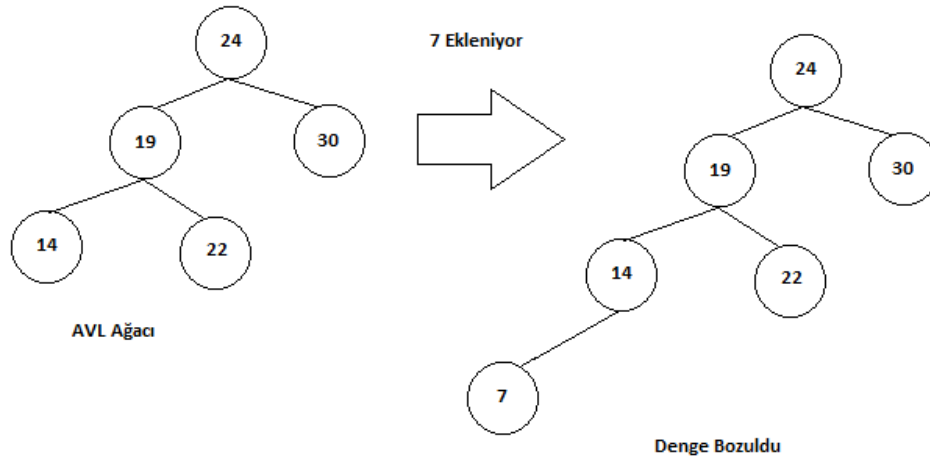
Eğer  $yükseklik(sol(d)) == yükseklik(sağ(d))+2$  ise

- Eğer  $yükseklik(sol(sol(d))) == h+1$  ise
  - Sol çocuk üzerinde **tek dönüş**
- Eğer  $yükseklik(sağ(sol(d))) == h+1$  ise
  - Sol çocuk üzerinde **çift dönüş**

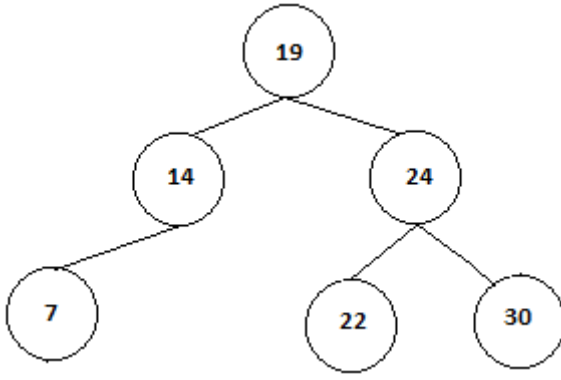
Eğer  $yükseklik(sağ(d)) == yükseklik(sol(d))+2$  ise

- Eğer  $yükseklik(sağ(sağ(d))) == h+1$  ise
  - Sağ çocuk üzerinde **tek dönüş**
- Eğer  $yükseklik(sol(sağ(d))) == h+1$  ise
  - Sağ çocuk üzerinde **çift dönüş**

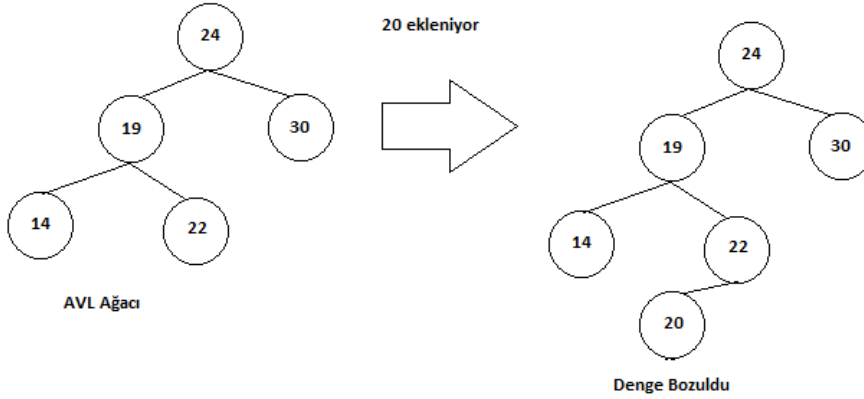
### Tek Dönüş Örneği



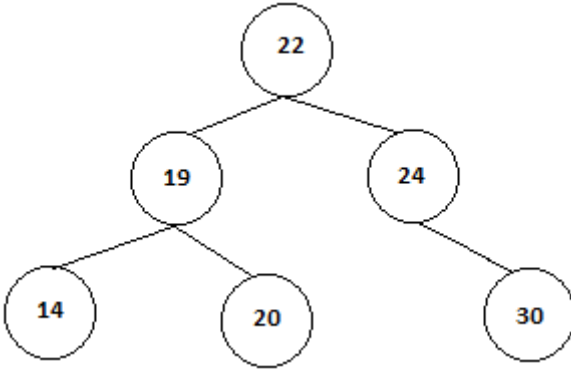
Denge bozulduğunda kontrol yapılırsa ağacın sol çocuğunun yüksekliğinin daha büyük olduğu görülür. Bu durumda yukarıdaki ilk kontrol çalışacaktır. İlk kontrolün içerisinde yine ilk kontrol çalışacaktır. Dolayısıyla sol çocuk üzerinde tek dönüş yapılacaktır.



### Çift Dönüş Örneği



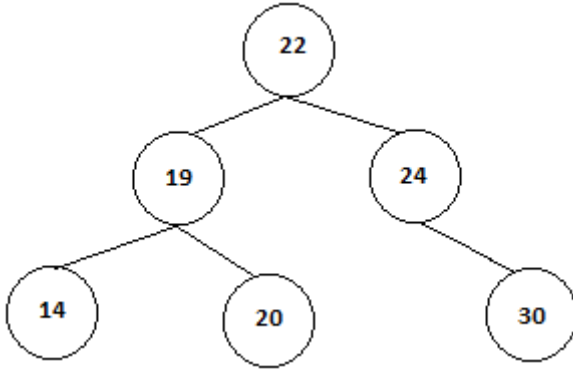
Denge bozulduğunda kontrol yapılırsa ağacın sol çocuğunun yüksekliğinin daha büyük olduğu görülür. Bu durumda yukarıdaki ilk kontrol çalışacaktır. İlk kontrolün içerisinde bu sefer ikinci kontrol çalışacaktır. Dolayısıyla sol çocuk üzerinde çift dönüş yapılacaktır.



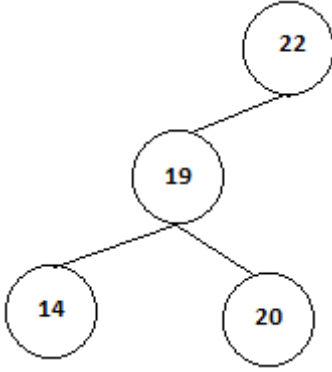
### Silme İşlemi

Silme işleminde de silinen düğümden başlanarak köke doğru ilerlenir ve her geçen düğüm üzerinde denge kontrolü yapılır. Eğer denge bozulmuş ise dengelemek için ekleme işleminde ki durumlar kontrol edilir.

Örneğin aşağıdaki ağaçtan 30 nolu düğüm silindiğinde ağacın dengesi bozulmaz fakat 30'dan sonra 24 nolu düğüm silinirse bu sefer ağacın dengesi bozulur.

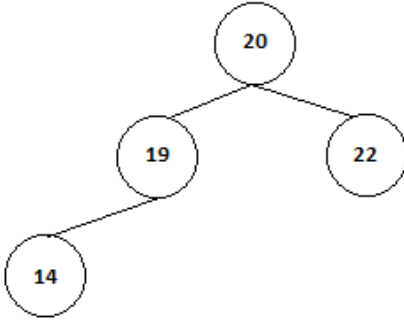


Silme işlemi uygulandı



Dengelemek için

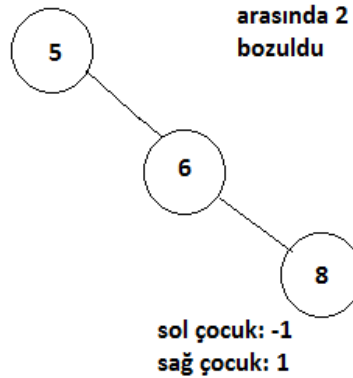
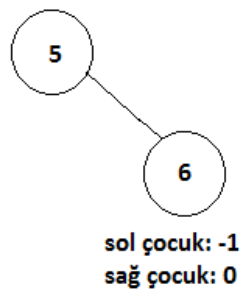
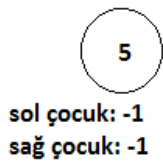
Sol çocuk üzerinde çift dönüş yapılacaktır.



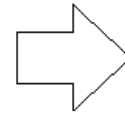
**Örnek**

5, 6, 8, 3, 4 sayıları ikili arama ağcına eklenmek isteniyor.

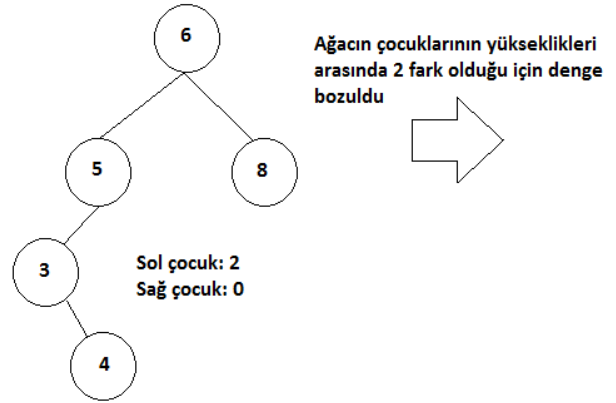
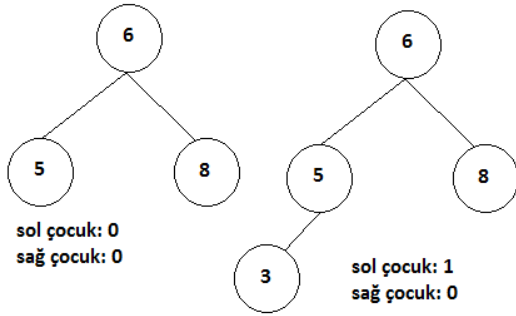
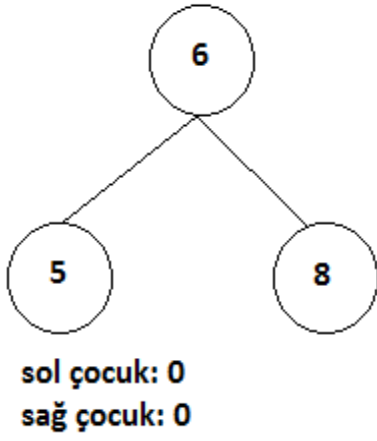
Her eklemede altta yazan ağacın sol ve sağ çocuklarının yükseklikleridir.



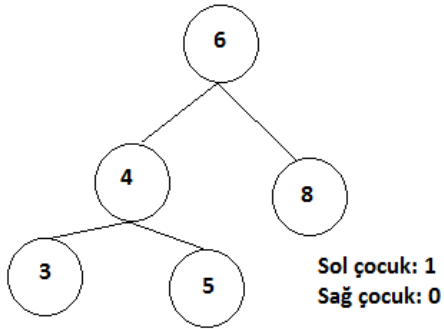
Ağacın çocuklarının yükseklikleri arasında 2 fark olduğu için denge bozuldu



Sağ çocuk üzerinde tek dönüş işlemi uygulanır



Sol çocuk üzerinde çift dönüş işlemi uygulanır.



Hazırlayan  
Arş. Gör. Dr. M. Fatih Adak