SAYISAL ANALİZ

Doç.Dr. Cüneyt BAYILMIŞ

SAYISAL ANALİZ

İNTERPOLASYON

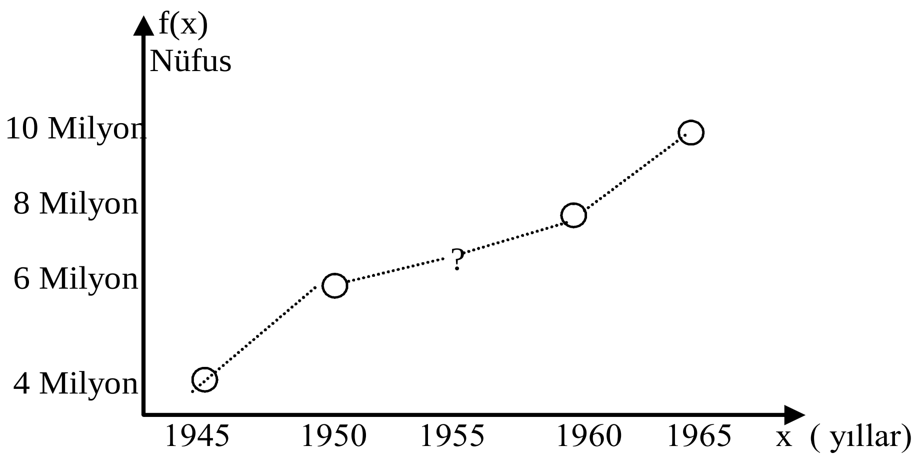
(Ara Değer Bulma)

İÇİNDEKİLER

Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

- Ara değer hesabı mühendislik problemlerinde sıklıkla karşılaşılan bir işlemdir.
- İnterpolasyon
  - Bilinen değerlerden **bilinmeyen aradeğerin ya da değerlerin** bulunması işlemidir.
  - Genel olarak ise bir f(x) fonksiyonunun x_0, x_1, …, x_n gibi ayrık noktalarda verilen f_0, f_1,…,f_n değerlerini kullanarak, bu fonksiyonu temsil eden ve daha basit bilinen bir F(x) fonksiyonu (enterpolasyon fonksiyonu) ile ifade edilmesidir.

istatistiksel veriler



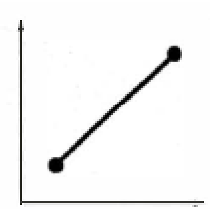
Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

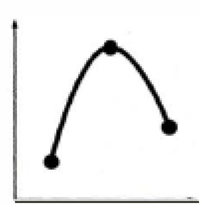
- Ara değer bulmada en yaygın kullanılan yöntem, **polinom interpolasyonudur**.

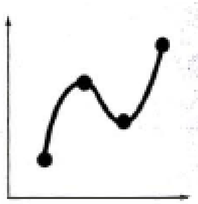
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

- n + 1 adet nokta için, tüm noktalardan geçen ve n. derece olan yalnızca tek bir polinom vardır.

  - İki noktayı birleştiren birinci derece (doğrusal) polinom
  - 3 noktayı sadece bir parabol (ikinci derece polinom) birleştirir.
  - Dört noktayı birleştiren üçüncü dereceden (kübik) polinom.







- Polinomlar, **Newton**, **Lagrange** gibi bir çok seçenek ile matematiksel olarak ifade edilebilir.

İnterpolasyon

- İnterpolasyon fonksiyonu için polinom, trigonometrik fonksiyon, üstel gibi fonksiyonlar kullanılır. Ancak çoğu durumda koşulları kolaylıkla sağlamaları sebebiyle polinomlar tercih edilir.
- İnterpolasyon fonksiyonunun seçiminde kullanılan teoremler:

❶ Eğer fonksiyon [a,b] aralığında sürekli ve türevlenebilir ise polinom kullanılabilir.

- [a,b] aralığında küçük bir ε değeri için,

  $| f(x) - F(x) | \le \varepsilon$ koşulu sağlanabilir

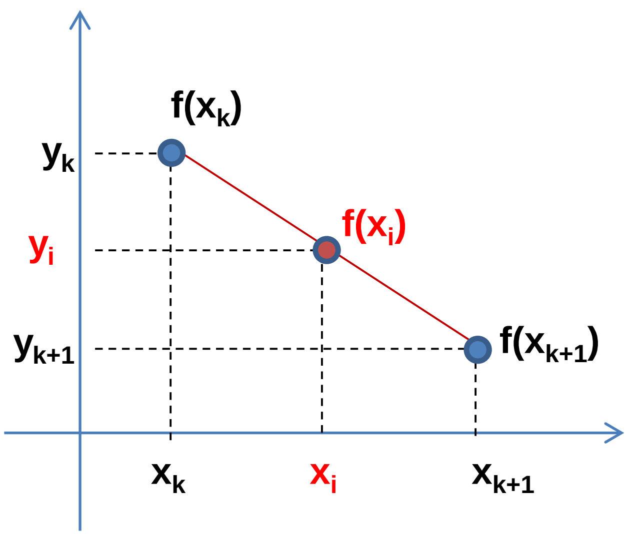
❷ Periyodik (2π) ve sürekli bir fonksiyon için,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

şeklinde sonlu bir trigonometrik seri interpolasyon fonskiyonu olarak kullanılabilir

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- En basit interpolasyon şeklidir.
- Doğrusal interpolasyonda iki farklı değişkene karşılık gelen fonksiyon değerleri (x_1, y_1), (x_2, y_2), bir doğru ile birleştirilir.
- Aradeğer (interpolasyon) doğru üzerindedir. Doğru denkleminin elde edilmesi ile interpolasyon bulunur.
- Bilinen iki nokta arasındaki uzaklık ne kadar az ise bilinmeyen nokta için bulunacak interpolasyon fonksiyonunun değeri de o kadar doğru olacaktır.



DogruDenklemi

$$y_i = y_k + m(x_i - x_k) \qquad m = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$\frac{f(x_k) - f(x_i)}{x_k - x_i} = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k)$$

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- **Örnek:** Aşağıdaki tablo da bir firmanın son 5 yılki ciro dağılımı görülmektedir. Tabloda 2009 yılına ait sonuç yer almamaktadır. Doğrusal interpolasyon yöntemini kullanarak değeri bulunuz.

Yıllar	2007	2008	2009	2010	2011
Ciro	120	142	?	146	143

- **Çözüm:**
  - **Doğru Denklemi ile**

$$m=\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}=\frac{146-142}{2010-2008}=2$$

$$y_i=y_k+m(x_i-x_k)$$

$$y_i=142+2(2009-2008)$$

$$y_i=144$$

$$\frac{f(x_k)-f(x_i)}{x_k-x_i}=\frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{x_k-x_{k+1}}$$

$$\frac{142-f(x_i)}{2008-2009}=\frac{142-146}{2008-2010}$$

$$f(x_i)=144$$

MATLAB İle Doğrusal İnterpolasyon

- YI= interp1 (X, Y, XI)

X'in bu değeri için işlem yapılacak

bilinen Y değerlerinden oluşan **sütun vektörü**

bilinen X değerlerinden oluşan **sütun vektörü**

Y sütun vektöründe bilinmeyen olarak hesaplanacak değer

- **Örnek:** **Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta interp1 komutu ile çözünüz?**

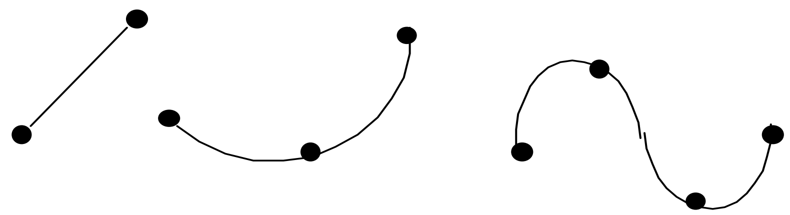
```
>> Y = [120 142 146 140]';

>> X = [2007 2008 2010 2011]';

>> YI=interp1(X,Y,2009)

YI =

     144
```

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- **Örnek:** $f(x)= e^x$ fonksiyonunun [0.2, 0.3] aralığındaki değerleri sırasıyla [1.22140, 1.34986]'dır. Doğrusal interpolasyon yöntemi ile x=0.27 noktasındaki değer nedir?
  - x=0.27 noktasındaki gerçek değer 1.3099 olduğuna göre bağıl yüzde hatayı hesaplayınız?

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

- Lagrange interpolasyonu, bilinen noktalara önce bir eğri uydurulması sonra eğriyi temsil eden denklemden istenilen noktaların değerlerinin elde edilmesine dayanır.



N adet noktadan N-1. dereceden polinom geçebilir

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
f(x)	f_1	f_2	f_3	…	f_n

- n elemandan oluşan bir f(x) yukarıdaki tablodaki gibi tanımlanmış olsun.
- Lagrange yöntemine göre interpolasyon hesabı yapılırken kullanılacak polinom forma sahip fonksiyonun derecesi sahip olunan ölçüm değerlerinin adedinden bir eksik olacak şekilde seçilir.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

❶ **Polinom formun derecesi belirlenmeli**

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

❷ **Her ölçüm sonucuna ait bir eşitlik ifadesi yazılarak, ölçüm sonuçlarının adedi kadar eşitliklerden oluşan bir denklem takımı elde edilir.**

$$f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1{}^2 + a_3 x_1{}^3 + \ldots + a_{n-1} x_1{}^{n-1}$$

$$f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2{}^2 + a_3 x_2{}^3 + \ldots + a_{n-1} x_2{}^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n{}^2 + a_3 x_n{}^3 + \ldots + a_{n-1} x_n{}^{n-1}$$

❸ **Elde edilen denklem takımı matris formda ifade edilebilir**

$$\begin{bmatrix} 1\; x_1\; x_1^2\; x_1^3\; \ldots\; x_1^{n-1} \\ 1\; x_2\; x_2^2\; x_2^3\; \ldots\; x_2^{n-1} \\ 1\; x_3\; x_3^2\; x_3^3\; \ldots\; x_3^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\; x_n\; x_n^2\; x_n^3\; \ldots\; x_n^{n-1} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots. \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \ldots. \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

❹ **Denklem takımı ile polinom form yapısında olan fonksiyonun katsayıları bulunur. Ortaya çıkan fonksiyon ifadesinin değişken değerine istenilen sayı büyüklüğü verilerek bunun karşılığında ölçüm sonucunun yaklaşık olarak tahmini gerçekleştirilir.**

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)} * f_1$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)} * f_2$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)} * f_3$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})} * f_n$$

Elde edilen f(x) eşitliğinde x değişkeninin istenilen değer karşılığı sayısal olarak girilmek suretiyle fonksiyonun karşılığı Lagrange yöntemine göre bulunmuş olur.

Lagrange İnterpolasyon

- **Örnek:** Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. x=3 için aradeğeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz

x	0	2	4	7	10
f(x)	1	7	10	13	20

- **Çözüm:**

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-7)(x-10)}{(0-2)(0-4)(0-7)(0-10)}*1+\frac{(x-0)(x-4)(x-7)(x-10)}{(2-0)(2-4)(2-7)(2-10)}*7$$

$$\frac{(x-0)(x-2)(x-7)(x-10)}{(4-0)(4-2)(4-7)(4-10)}*10+\frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-10)}{(7-0)(7-2)(7-4)(7-10)}*13$$

$$+\frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-7)}{(10-0)(10-2)(10-4)(10-7)}*20$$

X=3 için f(3)=8.7583

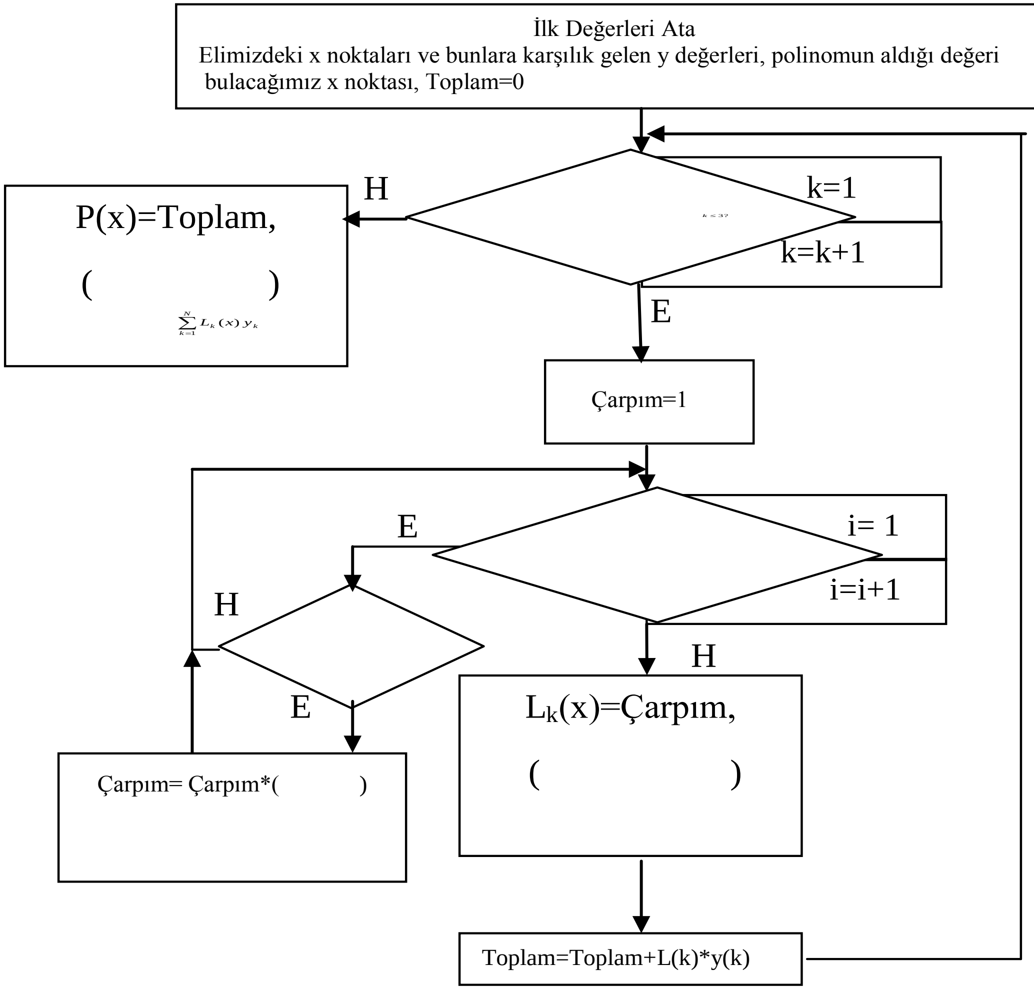
Lagrange İnterpolasyon

- **Örnek:** **Aşağıda verilen 4 nokta için Lagrange interpolasyon polinomu elde ederek y (3.9) değerini hesaplayınız.**

Not: Tüm değerler, virgülden sonra 4 basamak alınacak.

x	1	3	5	7
f(x)	0.6	0.9	1.7	3.3

Algoritması ve MATLAB Program Kodu




```matlab
function [xL] = x(L)
x=[30 45 60]; y=[0.5 0.7071 0.8660];

xL=L;

 Toplam=0;

for k=1:3
    Carpim=1;
    for i=1:3
        if i~=k
         Carpim= Carpim*(xL-x(i))/(x(k)-x(i));
        end
    end
 L(k)= Carpim
 Toplam=Toplam+L(k)*y(k);
end
P=Toplam
```

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

ÖDEV

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

- **Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. X=4 için aradeğeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz**
  - **Ödevi hem el ile hemde matlab ile çözünüz. Matlab da program (döngüler) yazınız (serhat yılmazın notlarından ya da laboratuardaki uygulamalardan yararlanabilirsiniz)**

x	0	2	5	7	9
f(x)	2	6	8	11	15

KAYNAKLAR

- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**