Yrd.Doç.Dr.Nilüfer YURTAY

BSM

Giriş

5. Hafta

Ayrık İşlemsel Yapılar

İletişim :

nyurtay@sakarya.edu.tr
(264) 295 58 98

Matematiksel Muhakeme

Doğru olduğu ispatlanmış önermelere teorem denir. Teoremler genelde $p \Rightarrow q$ şeklinde verilir. Böyle bir teoremin ispatını yapmak için p doğru iken q nun doğru olduğu gösterilmelidir. Bazen teoremler $p \Leftrightarrow q$ şeklinde verilir. Bu durumda $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ önermeleri ayrı ayrı ispatlanmalıdır.

Matematiksel Muhakeme- **Doğrudan İspat Yöntemi**

Bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ önermesini ispatlamak için daha önceden doğru olduğu bilinen $p \Rightarrow r1$, $r1 \Rightarrow r2$, $r2 \Rightarrow r3$, . . . , $r_{n-1} \Rightarrow rn$, $rn \Rightarrow q$ önermeler zincirinden faydalanılır.

Örneğin "Bir tek doğal sayının karesi tektir" teoreminin ispatı şu şekilde yapılabilir:

p : " x tektir" ve q : " x^2 tektir" olarak önermelerimizi belirtelim.
x tek $\Rightarrow$ k tamsayısı için $x = 2k + 1$ yazılabilir. Çarpma kurallarına göre bu ifade

$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$ biçiminde yazılabilir. Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanırsak;

$x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2y + 1$ dir. Burada $y= 2k^2 + 2k$ alınmıştır.
Öyleyse

$x^2 = 2y + 1$ tektir, çünkü y tamsayıdır.

Matematiksel Muhakeme- **Dolaylı İspat Yöntemi**

1. $p \Rightarrow q$ önermesi yerine onun dengi olan $q' \Rightarrow p'$ önermesi ispatlanır. Bu önermeye $p \Rightarrow q$ nun karşıt tersi denir.

Örnek olarak Her x tamsayısı için x^2 çift ise x de çifttir önermesini ispatlayalım. Burada p=”x^2 çiftdir.” Ve q=”x çifttir” önermeleri vardır. Olmayana ergi metodu da denilen ve
$p \Rightarrow q$ önermesi yerine onun dengi olan $q' \Rightarrow p'$ önermesini kullanarak ispatı yapalım:

p=”x^2 çiftdir.” olduğundan p′=”x^2 tekdir” ve q′=”x tekdir” olacaktır.
X bir tek tamsayı olsun.
x tek $\Rightarrow$ k tamsayısı için $x = 2k + 1$ yazılabilir.
$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$ biçiminde yazılabilir. Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanırsak;
$x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2y + 1$ dir. Burada $y= 2k^2 + 2k$ alınmıştır.
Öyleyse
$x^2 = 2y + 1$ tektir, çünkü y tamsayıdır. Dolayısı ile ispat tamamlanmıştır. Ispat $q' \Rightarrow p'$ için yapılmıştır. Ispatın yapılmasına gerek kalmaksızın $p \Rightarrow q$ için de doğruluğu kabul edilecektir.

BSM

5. Hafta

4. Sayfa

Matematiksel Muhakeme- **Dolaylı İspat Yöntemi**

2. $p \Rightarrow q \equiv (p' \vee q) \equiv (p \wedge q')'$ olduğunu biliyoruz. $p \Rightarrow q$ biçimindeki bir ispatı yapabilmek için, $(p \wedge q')$ biçiminde bir çelişki elde edilemeye çalışılır. Bu şekilde $(p \wedge q')$ yanlış dolayısı ile $(p \wedge q')'$ önermesi doğru olacaktır. Dolayısı ile de $p \Rightarrow q$ nun doğruluğu da ispatlanmıştır.

Örnek olarak $2x+3=5 \Rightarrow 3x+2=5$ olduğunu ispatlayalım.

$(2x+3=5 \Rightarrow 3x+2=5) \equiv (2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5)'$ yazılabilir.

$(2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5) \Rightarrow (2x+3=2+3 \wedge 3x+2 \neq 3+2)$

$\Rightarrow (2x=2 \wedge 3x \neq 3)$

$\Rightarrow (x=1 \wedge x \neq 1)$ bir çelişki olduğundan

$(2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5)$ ifadesi yanlış olup, $(2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5)'$ ifadesi doğrudur.

$(2x+3=5 \wedge 3x+2 \neq 5)' \equiv (2x+3=5 \Rightarrow 3x+2=5)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Matematiksel Muhakeme- **Aksine Örnek ya da Çelişki Bulma Yöntemi**

$p \Rightarrow q$ önermesi için $(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$ olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Buna göre $p \wedge q'$ önermesinin doğru olduğunu gösteren tek bir örnek bulunursa, $p \Rightarrow q$ önermesinin yanlış olduğu sonucuna ulaşılır. Bu yöntem aksine örnek bulma yöntemi olarak ifade edilir.

Örnek olarak ”bir doğal sayı 3 ve 2 sayılarına ayrı ayrı bölünürse, bu doğal sayı 12 ile bölünür” ifadesinin yanlış olduğunu göstermek isteyelim:

X doğal sayısı 3 ve 2 sayıları ile bölünebiliyorsa

$(3 | x \wedge 2 | x) \Rightarrow 12 | x$ önermesinin yanlış olduğunu göstereceğiz.

$P=(3 | x \wedge 2 | x)$
$Q=(12 | x)$ olarak tanımlayalım. N= 30 için q yanlış sonucunu verir. Bu da $p \wedge q'$ için doğruluk değeri anlamına gelir. Dolayısıyla $p \Rightarrow q$ yanlışdır.

BSM

5. Hafta

Matematiksel Muhakeme- **Aksine Örnek ya da Çelişki Bulma Yöntemi**

Doğru ya da yanlış olduğu bilinmeyen bir $p \Rightarrow q$ önermesini ele alalım. Bu önerme doğru kabul edilerek bazı sonuçlar arayalım. Elde edilen sonuçlar bilinenlerle ya da birbiri ile çelişirse $p \Rightarrow q$ biçimindeki önermenin yanlış olduğu sonucuna varılır.

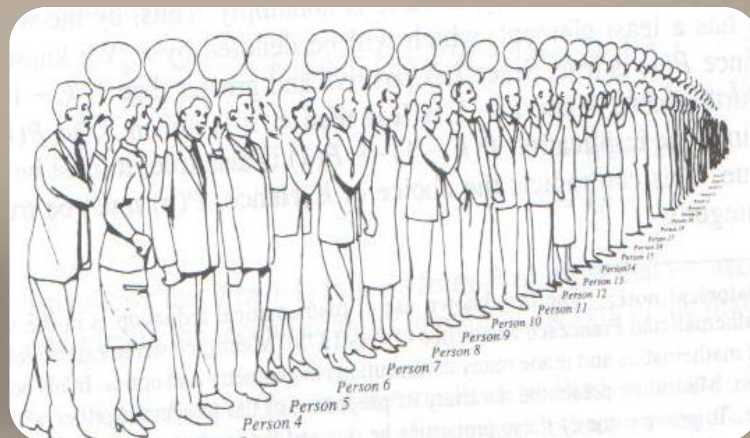
Örnek olarak "bir doğal sayı tek ise bu doğal sayının karesi çift sayısıdır" önermesinin doğruluğunu araştıralım.

Önermenin doğru olduğunu kabul ederek ispata başlayalım:

"x tek sayı $\Rightarrow x^2$ çift sayısır" (1)
x tek $\Rightarrow$ k tamsayısı için $x = 2k + 1$ yazılabilir.
$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$ biçiminde yazılabilir. Çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanırsak;
$x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow x^2$ tek sayısıdır diyebiiriz. Yani

"x tek sayı$\Rightarrow x^2$ tek sayıdır" (2) sonucu elde edilmiştir. (1) ve (2) nolu sonuçlar biribiri ile çeliştiği için başlangıçta doğru olduğunu kabul etttiğimiz önerme yanlıştır. Böylelikle de ispat tamamlanmıştır.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**



Teorem (Matematiksel İndüksiyonun Prensibi)

Pozitif tamsayılar üzerine tanımlanan bir P önermesi ele alalım. Her $n \in Z^+$ için P(n) ya doğrudur ya da yanlışdır. P'nin aşağıdaki iki özelliği sağladığı kabul edilir:

P(1) doğrudur
P(n+1), P(n) doğru ise doğrudur.

Bu durumda P her bir pozitif tamsayı için doğrudur.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**

Matematiksel indüksiyon ile $n<2^n$ ifadesinin tüm pozitif n tamsayısı için doğru olduğunu gösterelim.

P(n) =" $n<2^n$" olsun.

n=1 için p(1) doğrudur çünkü $1<2^1=2$ dir.(Temel adım sağlandı)

şimdi tümevarım adımına geçelim:

Tüm pozitif tamsayılar için P(n) doğru olduğunu kabul edelim. Ihtiyacımız olan şey P(n+1) için doğru olduğunu göstermektir.

$n<2^n$ ifadesinde her iki tarafa da 1 ekleyelim ($1\leq 2^n$)

$n+1<2^n+1\leq 2^n+2^n=2^{n+1}$ olduğundan n+1 için doğru olduğu gösterildi.

Böylelikle P(n) doğrudur denilecektir.

Matematiksel indüksiyon ile n^3-n ifadesinin pozitif bir n tamsayısı için 3 ile bölünebildiğini gösterelim.

P(n) =" n^3-n 3 ile bölünebilirdir" olsun.

P(1) için $1^3-1=0$, 3 ile bölünebilir.

P(n) doğru kabul edilsin. P(n+1) için de doğruluğu göstermemiz yeterli olacaktır.

$(n+1)^3-(n+1) = (n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)$

$= (n^3-n)+3(n^2+n)$ olur ki bu toplam da 3 ile bölünebilir.

Dolayısı ile $(n+1)^3-(n+1)$ de 3 ile bölünebilirdir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**

Matematiksel indüksiyon ile tüm negatif olmayan tamsayılar için $1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$ olduğunu gösterelim.

P(n)=" $1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$" ifadesi doğru olsun.

$P(0)=2^0=1=2^1-1$ olup doğrudur.(temel adım)

n için doğru olduğunu kabul edelim. n+1 için doğruluğu araştıralım

$1+2+2^2+...+2^n+2^{n+1} = 2^{n+1+1}-1=2^{n+2}-1.$

$1+2+2^2+...+2^n+2^{n+1} = (1+2+2^2+...+2^n)+ 2^{n+1}$

$= (2^{n+1}-1)+ 2^{n+1}$

$= 2.2^{n+1}-1$

$= 2^{n+2}-1$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**

Tümevarım yöntemiyle her $1 \leq n \in N$ için

$1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$
olduğunu gösterelim. P (n) önermesi " $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$" olsun.
n = 1 için eşitliğin her iki tarafı da 1'e eşit olduğunudan P (1) doğrudur. Şimdi de önermenin k için doğru olduğunu kabul edip k + 1 için doğru olduğunu gösterelim. P (k) doğru olsun.

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=(k+1)(\frac{k}{2}+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Olduğundan p(k+1) için de doğru olduğu gösterilmiştir.
Her $1 \leq n \in N$ için $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ doğrudur.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**

H_k ile gösterilen harmonik sayılar (k=1,2,3,....) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}$$

Örneğin

$$H_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

dir. Şimdi matematiksel indüksiyon metodu ile

$$H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$$

olduğunu gösterelim. Burada n negative olmayan bir tamsayıdır.

$$P(n) = H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$$

olsun. P(0) için

$$H_{2^0} \geq 1+\frac{0}{2}$$

olduğu olup doğrudur. P(n) için de doğru olduğunu kabul edelim ve P(n+1) için de doğru olup olmadığına bakalım:

$$H_{2^{n+1}} \geq 1+\frac{n+1}{2}$$

$$H_{2^{n+1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$H_{2^{n+1}} \geq (1+\frac{n}{2})+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$H_{2^{n+1}} \geq (1+\frac{n}{2})+2^n\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel İndüksiyon**

Matematiksel indükdison metodunu kullanarak

$2^n < n!$

ifadesinin her n≥4 pozitif tamsayısı için doğru olduğunu gösterelim.

olsun. P(4) için $P(4) = 2^4 = 16 < 4! = 24$

olduğu için doğrudur. P(n) için doğru olduğunu kabul edelim. P(n+1) için inceleyel

$$P(n) = 2^n < n!$$

$$P(n+1) = 2^{n+1} < (n+1)!$$

ifadesinin her iki tarafını 2 ile çarpalım:

$2^n < n!$

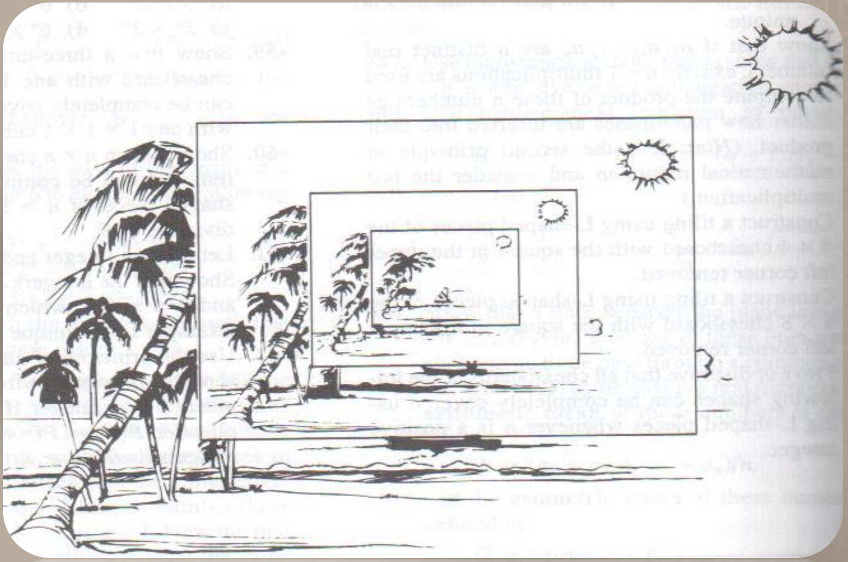
$2.2^n < 2.n!$

$2.2^n < (n+1).n!$

$2.2^n = (n+1)!$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel Özyineleme(recursion)**



Aşağıdaki f fonksiyonu için recursive özelliği verilmiştir. Buna göre f(1),f(2),f(3) ve f(4) değerlerini bulalım.

f(0)=3

f(n+1)=2f(n)+3

f(1)= 2f(0)+3=2.3+3=9

f(2)= 2f(1)+3=2.9+3=21

f(3)= 2f(2)+3=2.21+3=45

f(4)= 2f(3)+3=2.45+3=93

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel Özyineleme(recursion)**

Faktöriyel fonksiyonu için indüktive bir tanım verelim.

F(n)=n!

F(0)=1

F(n+1)=(n+1)F(n)

Örneğin F(5)=5! İçin

F(5)=5.F(4)=5.4.F(3)=5.4.3.F(2)=5.4.3.2.F(1)=5.4.3.2.1.F(0)=5.4.3.2.1.1=120

a^n için recursive bir tanım yapalım(a sıfırdan farklı bir reel sayı ve n negatif olmayan bir tamsayı)

$a^0=1$

a^n den a^{n+1} için kural aranabilir. $a^{n+1}=a.a^n$,n=0,1,2,3,…. İçin yazılabilir.

Matematiksel Muhakeme- **Matematiksel Özyineleme(recursion)**

$\sum_{k=0}^{n} a_k$

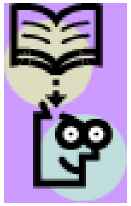
için recursive bir tanım yapalım.

$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$ dır

$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$ elde edilir.

$f_0, f_1, f_2, \ldots$. Olarak verilen Fibonacci sayıları
$f_0=0$, $f_1=1$ ve $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ denklemleri ile veriliyor. f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 Fibonacci sayılarını bulalım.

$f_2=f_1+f_0=1+0=1$
$f_3=f_2+f_1=1+1=2$
$f_4=f_3+f_2=2+1=3$
$f_5=f_4+f_3=3+2=5$
$f_6=f_5+f_4=5+3=8$



Ödev

1. n doğal sayısı çift ise n+1 tekdir. İspatlayınız.
2. n doğal sayısı asal ise tekdir. İspatlayınız.

Kaynaklar

F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
"Soyut Matematik", S.Aktaş,H.Hacısalihoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Ünv.Yayınları,1984,Ankara.
"Applied Combinatorics", Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
"Applications of Discrete Mathematics", John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
"Discrete Mathematics", Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
"Discrete Mathematic and Its Applications", Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.
"Discrete Mathematics", Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
"Discrete Mathematics with Graph Theory" , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
"Discrete Mathematics Using a Computer", Cordelia Hall and John O'Donnell, Springer, 2000.
"Discrete Mathematics with Combinatorics", James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
"Discrete and Combinatorial Mathematics", Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
"Discrete Mathematics", John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
"Essence of Discrete Mathematics", Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
"Mathematics:A Discrete Introduction", Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
"Mathematics for Computer Science", A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
"Theory and Problems of Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
"2000 Solved Problems in Discrete Mathematics", Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.