BSM 101 Bilgisayar Mühendisliğine Giriş

Bool Cebri

Hazırlayan: Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Ben kimim?

www.sakarya.edu.tr/~fdikbiyik

- Lisans: İstanbul Üniversitesi
- Yüksek Lisans ve Doktora: University of California, Davis, ABD
- Öğretim:
  - IST 108 Olasılık ve İstatistik
  - BSM 203 Logic Circuits
  - BSM 206 Computer Organization
  - BSM 445 Kuyruk Teorisi
  - BSM 450 Fiber Optik Ağlar
  - SG 507 Siber Savaşlar
  - BSM 527 Network Optimization of Optical Networks
- Araştırma:
  - Bilgisayar Ağları (Özellikle Fiber Optik Ağlar ve Doğal Afetler-Haberleşme ilişkisi)

Bugün ne öğreneceğiz?

- Bool Cebri (Giriş)
- Temel işlemler
- Bool ifadeleri ve gerçekleme tabloları
- Temel teoremler
- Değişme, Birleşme ve Dağılma Yasaları
- Sadeleştirme Teoremleri
- Çarpımların Toplamı ve Toplamların Çarpımı Formları
- De Morgan Yasası

Bool Cebri

- Mantık devreleri ile tasarım için temel matematik
- Diğer bir deyişle «Bilgisayar» matematiği
- Sadece iki değer var: 1 ve 0
- Bool değişkeni: X, Y, … sadece iki durum değerinden (0, 1) birini alabilir.
- Doğru/Yanlış (True/False) 1 ve 0 ile gösterilebilir.

Temel İşlemler

- DEĞİL (Tümleyen)
- 0’ = 1 ve 1’ = 0
- X = 0 ise X’ = 1 olur ve X = 1 ise X’ = 0 olur

Temel İşlemler

- VE
- $0.0 = 0 \qquad 0.1 = 0 \qquad 1.0 = 0 \qquad 1.1 = 1$
- Gerçekleme tablosu

A B	$C = A \cdot B$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Temel İşlemler

- VEYA

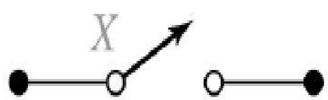
- $0 + 0 = 0 \quad 0 + 1 = 1 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad 1 + 1 = 1$

- Gerçekleme tablosu

A B	C = A + B
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Temel İşlemler

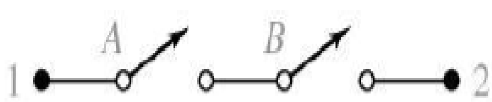
- Anahtarlara uygulanması



$X = 0 \longrightarrow$ anahtar açık

$X = 1 \longrightarrow$ anahtar kapalı

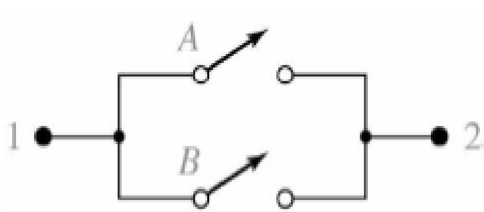
- VE : $T = A.B$



$T = 0 \rightarrow$ A veya B açık : $A = 0$ veya $B = 0$

$T = 1 \rightarrow$ A ve B kapalı: $A = 1$ ve $B = 1$

- VEYA :$T = A + B$



$T = 0 \rightarrow$ A ve B açık : $A = 0$ ve $B = 0$

$T = 1 \rightarrow$ A veya B kapalı: $A = 1$ veya $B = 1$

Bool ifadeleri

- Bool değişkenleri ile gösterilen ifadeler

  - Örnek: [A(C + D)]’ + BE
  - Mantıksal değerlendirme (A = B = C = 1, D = E = 0 olursa)
    - [A(C + D)]’ + BE = [1(1 + 0)]’ + 1.0 = [1.1]’ + 0 = 0 + 0 = 0

Bool ifadeleri ve gerçekleme tablosu

- $F = A' + B$
- F'e ait gerçekleme tablosu

A	B	A'	F = A' + B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

- Gerçekleme tablosu Bool ifadesindeki değerlerin tüm olası kombinasyonları için ifadenin değerini belirtir.
- n adet değişken için 2^n adet satıra ihtiyaç vardır.

Bool ifadeleri ve gerçekleme tablosu

- Gerçekleme tablosu kullanarak ispat

- AB’ + C = (A + C)(B’ + C)

A B C	B’	AB’	AB’ + C	A + C	B’ + C	(A + C) (B’ + C)
0 0 0	1	0	0	0	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	1	0	0
1 1 1	0	0	1	1	1	1

Temel Teoremler

$$X + 0 = X \qquad X \cdot 1 = X$$

$$X + 1 = 1 \qquad X \cdot 0 = 0$$

$$X + X = X \qquad X \cdot X = X$$

$$(X')' = X$$

$$X + X' = 1 \qquad X \cdot X' = 0$$

Örnek:

$$(AB' + D)E + 1 = 1$$

$$(AB' + D)(AB' + D)' = 0$$

Değişme, Birleşme, Dağılma Yasaları

- Değişme yasası: $XY = YX$ $X + Y = Y + X$

- Birleşme yasası: $X(YZ) = (XY)Z = XYZ$

  $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$

- Dağılma yasası: $X(Y + Z) = XY + XZ$

  $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$

Sadece bool cebrinde geçerli, normal cebirde geçerli değil

İspat:

$$(X+Y)(X+Z) = X(X+Z) + Y(X+Z) = XX = XZ + YX + YZ$$
$$= X + XZ + XY + YZ = X \cdot 1 + XZ + XY + YZ$$
$$= X(1 + Z + Y) + YZ = X \cdot 1 + YZ = X + YZ$$

Sadeleştirme Teoremleri

- Daha sade bool ifadesi = daha az mantık kapısı = daha ucuz tasarım
- Yararlı teoremler:

$$XY + XY' = X \qquad (X+Y)(X+Y') = X$$

$$X + XY = X \qquad X(X+Y) = X$$

$$(X+Y')Y = XY \qquad XY' + Y = X + Y$$

- Bazılarının ispatı:

$$X + XY = X\cdot 1 + XY = X(1+Y) = X\cdot 1 = X$$

$$X(X+Y) = XX + XY = X + XY = X$$

$$Y + XY' = (Y+X)(Y+Y') = (Y+X)1 = Y + X$$

Sadeleştirme Teoremleri

- Örnekler:

  - $F = A(A' + B) = AB$

  - $F = ac + ac' + (a + b')b + (a' + c)(a' + c')(a' + b)$

$XY + XY' = X$

$(X+Y)(X+Y') = X$

$= a + (a + b')b + a'(a' + b)$

$(X+Y')Y = XY$

$X(X+Y) = X$

$= a + ab + a'$

$X + XY = X$

$= a + a' = 1$

Çarpımların Toplamı

- Bir bool ifadesini çarpımların toplamı (veya toplamların çarpımı) haline getirmek, daha düzenli bir devre tasarımını sağlar.

- Çarpımların toplamı formuna örnek: AB’ + CD’E + AC’E
- Şunlarda çarpımların toplamı kabul edilir:
  - ABC’ + DEFG + H
  - A + B’ + C + D’E
- (A +B)CD + EF (?)

  çarpımların toplamı değildir.

Çarpımların Toplamı

- Çarpımların toplamı elde etmek için: parantezleri aç ve fazla terimleri elimine et

$$(A+BC)(A+D+E) = A + AD + AE + ABC + BCD + BCE$$
$$= A(1+D+E+BC) + BCD + BCE$$
$$= A + BCD + BCE$$

Toplamların çarpımı

- Bool ifadelerini toplamların çarpımı olarak ifade etmek de düzenli devre tasarımını sağlar.

- Toplamların çarpımı örneği:
  - (A + B’)(C + D’ + E)(A + C’ + E’)

- Şunlarda toplamların çarpımı olarak kabul edilir.
  - (A + B)(C + D + E)F
  - AB’C(D’ + E)

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

De Morgan Yasası

- De Morgan Yasası: $(X+Y)' = X'Y'$ $(XY)' = X' + Y'$

- n adet değişken için de geçerlidir:

$$(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)' = X_1'X_2'X_3'\ldots X_n'$$

$$(X_1X_2X_3\ldots X_n)' = X_1' + X_2' + X_3' + \ldots + X_n'$$

- Örnek: $(A'B + AB')' = (A'B)'(AB')' = (A + B')(A' + B) = A'B' + AB$

Sözel ifadelerin bool ifadelerine çevrilmesi

- Örn: F doğrudur, eğer A ve B doğru ise => F = AB

- Daha karmaşık bir örnek:
  - Eğer alarm düğmesine basılmışsa (A) ***ve*** kapı kapalı değilse (B') ***veya*** akşam 6'dan sonra ise (C) ***ve*** pencere kapalı değilse (D') alarm çalar (Z).

  - Z = AB' + CD'