

BÖLÜM 7. z -DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

7.1 Giriş

z -dönüşümünün ayrık-zamanlı sistem teorisinde oynadığı rol Laplace dönüşümünün sürekli-zamanlı sistem teorisindeki rolüne benzer. z -dönüşümünün en önemli avantajlarından biri doğrusal fark denklemlerinin sistematik bir şekilde çözülmesinde sağladığı kolaylıktır. İki polinomun oranı biçiminde ifade edilen ayrık-zamanlı transfer fonksiyonu, sabit katsayılı doğrusal bir fark denkleminin karşı düşer ve sayısal bir bilgisayar yardımıyla gerçekleştirilebilir. Bu bölümde, transfer fonksiyonunun fark denklemlerinden elde edilmesi gösterilecek, ayrıca impuls cevabı ve durum denklemlerinin karakterize edilmesi de tartışılacaktır.

Zaman ve frekans domen analizleri, kararlılık ve kararlı duruma getirmek gibi konular z -dönüşümünün diğer uygulama alanları olarak incelenecektir.

7.2 Transfer fonksiyonu

Bölüm 2.4 te impuls cevabı $h(n)$ olan bir ayrık zamanlı sistemin $x(n)$ giriş işareti için oluşturduğu çıkış işareti $y(n)$ nin konvolüsyon toplamı ile elde edildiği gösterilmişti.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k).h(k) \quad (7.1)$$

Konvolüsyon teoremi yardımıyla (7.1) in z -dönüşümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$Y(z) = H(z).X(z) \quad (7.2)$$

Burada

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n).z^{-n} \quad (7.3)$$

ayrık-zamanlı sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. $H(z)$ transfer fonksiyonu (7.2) denklemi yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir. O halde transfer fonksiyonu, çıkış işaretinin z -dönüşümünün giriş işaretinin z -dönüşümüne oranıdır.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (7.4)$$

Eğer sistemin impuls cevabı biliniyorsa, (7.3) denklemindeki gibi z -dönüşümü alınarak transfer fonksiyonu bulunabilir. Ancak, fark denklemi, durum denklemi ve ayrık-zamanlı sistemin devre yapısı yardımıyla da transfer fonksiyonunun (7.4) denklemindeki tanımdan yararlanarak yazılabilir. Şimdi bunları inceleyelim.

7.2.1 Fark denklemlerinden

$a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(M)$ ve $b(1)$, $b(2)$, ..., $b(N)$ sabit katsayılar olduğuna göre doğrusal ve zamanla değişmeyen ayrık zamanlı sistemin giriş ve çıkış ilişkisi aşağıdaki fark denklemi ile belirlenebilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a(k).x(n-k) - \sum_{k=1}^N b(k).y(n-k) \quad (7.5)$$

Bu fark denkleminde transfer fonksiyonunu elde edebilmek için fark denkleminin her iki tarafının z -dönüşümü alınır. Böylece $Y(z)$ nin $Y(z) = H(z).X(z)$ formunda elde edilmesi sağlanır. Her iki tarafın z -dönüşümünü alır ve z -dönüşümünün öteleme ve doğrusallık özelliklerinden faydalanırsak,

$$Y(z) = X(z). \sum_{k=0}^M a(k).z^{-k} - Y(z). \sum_{k=1}^N b(k).z^{-k} \quad (7.6)$$

Buradan, $Y(z)$ içeren terimleri bir tarafa toplayarak $H(z)$ transfer fonksiyonunu elde ederiz.

$$Y(z).(1 + \sum_{k=1}^N b(k).z^{-k}) = X(z). \sum_{k=0}^M a(k).z^{-k} \quad (7.7)$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a(k).z^{-k}}{(1 + \sum_{k=1}^N b(k).z^{-k})} \cdot X(z) \quad (7.8)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H(z)}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a(k).z^{-k}}{(1 + \sum_{k=1}^N b(k).z^{-k})}$$

7.2.2 Durum denklemlerinden

Bölüm 2.3 te açıklanan durum değişkenleri yardımıyla transfer fonksiyonu $H(z)$ bulunabilir.

Durum denklemleri

$$\begin{aligned} q(n+1) &= Aq(n) + Bx(n) \\ y(n) &= Cq(n) + dx(n) \end{aligned} \quad (7.9)$$

olarak verildiğine göre, birinci denklemin z -dönüşümü alınır,

$$\begin{aligned} Z[q(n+1)] &= AZ[q(n)] + BZ[x(n)] \\ &= AQ(z) + BX(z) \end{aligned} \quad (7.10)$$

bulunur. Ayrıca,

$$Z[q(n+1)] = zZ[q(n)] = zQ(z) \quad (7.11)$$

yazılabilir. (7.10) ve (7.11) denklemlerinden

$$zQ(z) = AQ(z) + BX(z) \quad (7.12)$$

veya

$$Q(z) = (zI - A)^{-1} BX(z) \quad (7.13)$$

elde edilir. I boyutları $N \times N$ olan birim matrisi göstermektedir. Şimdi, (7.9) denklemindeki ikinci denklemin z -dönüşümünden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Y(z) = CQ(z) + dX(z) \quad (7.14)$$

(7.13) ve (7.14) denklemlerinde $Q(z)$ yok edilerek $H(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = C(zI - A)^{-1} B + d \quad (7.15)$$

Örnek 7.1 (2.59) denkleminde verilen fark denkleminin sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım.

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2)$$

denkleminin z -dönüşümü alınarak $H(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) - z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) \\ Y(z)(1 + z^{-1} - 2z^{-2}) &= (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Örnek 7.2 Bu örnekte, (7.16) denklemindeki transfer fonksiyonuyla verilen sayısal süzgecin eşdeğer modelini, (2.60) ve (2.61) daki durum denklemlerinden bulalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n) \end{aligned} \quad (7.17)$$

durum denkleminde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = 1 \quad (7.18)$$

olduğu açıktır. (7.15) bağıntısından $H(z)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} H(z) &= C(zI - A)^{-1}B + d \\ &= [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} z & -1 \\ -2 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{1}{z^2 + z - 2} \cdot [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 2 & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \frac{3+z}{z^2 + z - 2} + 1 = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + z - 2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

(7.19) denkleminin pay ve paydasını z^{-2} ile çarparsak (7.20) denklemine geliriz.

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}} \quad (7.20)$$

(7.16) ve (7.20) ifadelerinin karşılaştırılmasından eşdeğer matematiksel modellerden aynı transfer fonksiyonunun bulunduğu görülmektedir.

7.2.3 Devre yapısından

Sayısal süzgecin gerçekleştirilmesi için herhangi bir formda belirlenen giriş ve çıkış ilişkisi hesaplanabilir bir algoritmaya çevrilmelidir. Bu algoritmanın sayısal bir bilgisayar ve özel amaçlı bir donanım ile gerçekleştirilmesinde bazı temel işlemler kullanılır. Tablo 7.1 de gösterildiği gibi bu işlemler, birim gecikme, toplama ve çarpma işlemlerinden oluşmaktadır. Buna göre z -domeni tanımları yardımıyla,

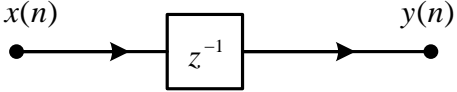
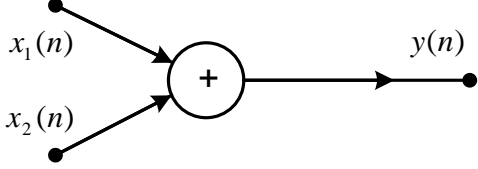
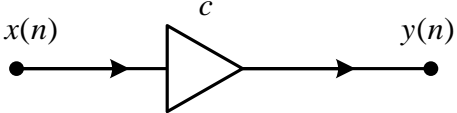
Birim gecikme: $Y(z) = z^{-1}X(z)$

Toplama: $Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$

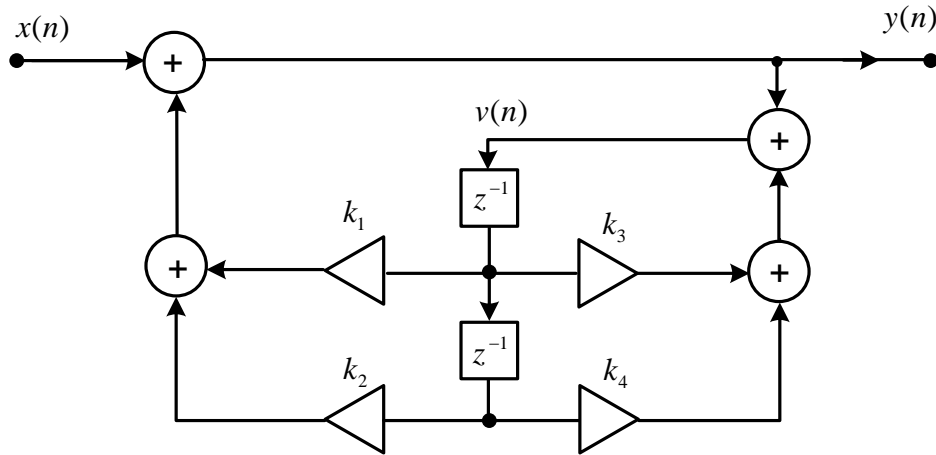
Çarpma: $Y(z) = cX(z)$

formunda gösterilebilir. O halde verilen bir sayısal süzgeç devresinden analizi yapmak ve transfer fonksiyonunu elde etmek mümkündür.

Tablo 7.1 Sayısal süzgeç elemanları

	Sembol	Denklem
Birim gecikme		$y(n) = x(n-1)$
Toplayıcı		$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$
Çarpıcı		$y(n) = cx(n)$

Örnek 7.3 Şekil 7.1 de verilen ikinci dereceden sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım.



Şekil 7.1 İkinci dereceden sayısal süzgeç

Tablo 7.1 deki temel elemanları kullanarak,

$$V(z) = Y(z) + k_3 z^{-1} V(z) + k_4 z^{-2} V(z) \quad (7.21)$$

$$Y(z) = X(z) + k_1 z^{-1} V(z) + k_2 z^{-2} V(z) \quad (7.22)$$

yazılabilir. Burada $V(z)$ ve $Y(z)$

$$V(z) = \frac{Y(z)}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}} \quad (7.23)$$

$$Y(z) = X(z) + (k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2})V(z) \quad (7.24)$$

şeklinde elde edilir. $V(z)$ yok edilerek aşağıdaki ifade elde edilir.

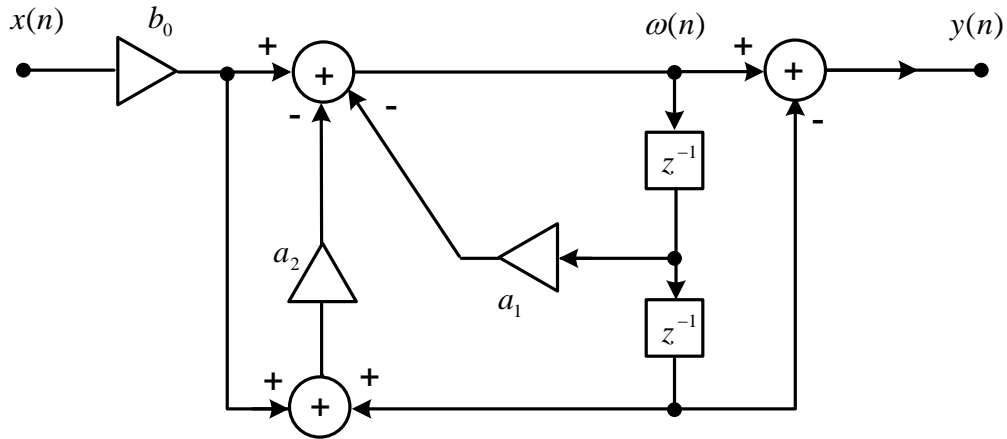
$$Y(z) = X(z) + \frac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}} \cdot Y(z) \quad (7.25)$$

$$Y(z) \left(1 - \frac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}} \right) = X(z)$$

O halde transfer fonksiyonu $H(z)$ (7.26) daki gibi elde edilir.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - \frac{k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}}{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}}} = \frac{1 - k_3 z^{-1} - k_4 z^{-2}}{1 - (k_1 + k_3)z^{-1} - (k_2 + k_4)z^{-2}} \quad (7.26)$$

Örnek 7.4 Birim kazançlı rezonatör olarak da adlandırılan şekil 7.2 deki sayısal süzgecin transfer fonksiyonunu bulalım. Temel elemanlar yardımıyla,



Şekil 7.2 Birim kazançlı rezonatör

$$W(z) = b_0 X(z) - a_1 z^{-1} W(z) - a_2 (b_0 X(z) + z^{-2} W(z)) \quad (7.27)$$

$$Y(z) = W(z) - z^{-2} W(z) = (1 - z^{-2}) W(z) \quad (7.28)$$

yazılabilir. $W(z)$ nin yok edilmesi için

$$W(z) [1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}] = b_0 (1 - a_2) X(z) \Rightarrow W(z) = \frac{b_0 (1 - a_2)}{[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}]} \cdot X(z) \quad (7.29)$$

(7.29) denkleminde (7.30) denklemi elde edilir.

$$Y(z) = (1 - z^{-2}).W(z) = (1 - z^{-2}) \cdot \left[\frac{b_0(1 - a_2)}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \right] \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0(1 - a_2)(1 - z^{-2})}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (7.30)$$

7.3 Kararlılık

Sayısal süzgeç tasarımında kararlılık çok önemli bir kavramdır. Kararlı olmayan sayısal süzgecin pratikte kullanıma olanağı yoktur. Bu nedenle, tasarlanan tüm sayısal süzgeçler kararlı olmak zorundadır. Kararlılığa ilişkin konuların incelenebilmesi için bazı ön bilgilere ihtiyaç vardır. Bunlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Tanım 7.1

Bir $\{x(n)\}$ dizisinin aşağıdaki şartı sağlaması halinde, $\{x(n)\}$ dizisine mutlak değerli toplanabilir denir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (7.31)$$

Tanım 7.2

Bir $\{x(n)\}$ dizisinin $M < \infty$ olan bir gerçel sabit için,

$$|x(n)| < M, \text{ tüm } n \text{ için} \quad (7.32)$$

şartını sağlaması halinde, $\{x(n)\}$ dizisine sınırlı (değerli) denir.

Tanım 7.3

Herhangi bir sınırlı genlikli giriş dizisinin sınırlı genlikli bir çıkış dizisi ürettiği doğrusal zamanla-değişmeyen sayısal süzgeç sınırlı-giriş-sınırlı-çıkış (SGSÇ) anlamında kararlıdır.

Tanım 7.3 gereğince, bir süzgecin kararsız olduğunu gösterebilmek için sınırlı olmayan çıkış dizisi üreten bir sınırlı giriş dizisi bulmak yeterlidir. Oysa aynı süzgecin kararlı olduğunu gösterebilmek için, her sınırlı giriş için çıkışların sonlu olduğunun gösterilmesi gerekir.

Sonsuz sayıda sınırlı giriş dizisinin varlığı gözönüne alınacak olursa, pratikte Tanım 7.3 ten sayısal süzgecin kararlılığına karar verilmesi mümkün değildir. Aşağıdaki teorem SGSC kararlılık için gerek ve yeter koşulu göstermektedir.

Teorem 7.1 Bir sayısal süzgecin SGSC kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul, süzgecin impuls cevabı $\{h(n)\}$ nin mutlak değer toplanabilir olmasıdır. Yani aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

İspat. Bu teoremin ispatı Bölüm 2.1'de gösterilmiştir. Ne var ki, Teorem 7.1 deki kararlılık kriteri yardımıyla da kararlılığı belirlemek pratikte güçtür. Önce süzgecin impuls cevabının bulunması, sonra mutlak değerlerinin toplanması gerekmektedir. Bu güçlüğü önlemek için sayısal süzgecin transfer fonksiyonundan kararlılığı belirleyen aşağıdaki teorem geliştirilmiştir. Kararlılık transfer fonksiyonu $H(z)$ den kolaylıkla belirlenebilecektir.

Teorem 7.2 (7.8) deki gibi rasyonel transfer fonksiyonlu *nedensel* sayısal süzgecin kararlı olması için gerek ve yeter koşul transfer fonksiyonu $H(z)$ nin kutuplarının tümünün z - düzleminde birim daire içinde olmasıdır. Yani, $H(z)$ nin kutuplarının genliği birden küçük olmalıdır.

İspat. Önce kararlı sayısal süzgece ait transfer fonksiyonu $H(z)$ nin $|z| \geq 1$ koşulunu sağlayan bölgede yakınsak olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$H(z) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| |z|^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad \text{tüm } |z| \geq 1 \text{ için} \quad (7.33)$$

O halde, eğer sayısal süzgeç kararlı ise, $H(z)$ nin kutuplarından hiçbiri $|z| \geq 1$ bölgesinde bulunmaz. Başka bir deyişle $H(z)$ nin tüm kutupları birim dairenin içindedir.

Şimdi, eğer $H(z)$ nin tüm kutupları birim dairenin içinde ise, sayısal süzgecin kararlı olduğunu gösterelim. Kolaylık sağlamak için $H(z)$ nin tüm kutuplarını birbirlerinden farklı olduğunu varsayalım. (7.8) deki $H(z)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - p_i} \quad (7.34)$$

O halde Tablo 6.1 den,

$$h(n) = \sum_{i=1}^N A_i p_i^n \quad (7.35)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^N A_i p_i^n \right| \leq \sum_{i=1}^N |A_i| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |p_i|^n \quad (7.36)$$

elde edilir. Eğer tüm i için $|p_i| < 1$ ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_i|^n = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N_1} |p_i|^n = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - |p_i|^{N_1+1}}{1 - |p_i|} = \frac{1}{1 - |p_i|}, \quad \text{tüm } i \text{ için} \quad (7.37)$$

Sayısal süzgecin sonlu sayıda kutbu olduğundan aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (7.38)$$

Buradan da sayısal süzgecin kararlı olduğu sonucuna varılır.

Açıklama 7.1 Sayısal süzgecin kararlılığı sadece kutupların z -düzlemi üzerindeki yerine bağlıdır. Sıfırların herhangi bir rolü yoktur. Geri beslemeli olmayan (FIR) süzgeçlerde transfer fonksiyonu $H(z)$ nin payda polinomu $B(z) = 1$ olduğu için süzgeç daima kararlıdır.

Örnek 7.5 İkinci dereceden özyineli (rekürsif) sayısal süzgecin transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (7.39)$$

olarak verilmiş ise, bu sayısal süzgecin kararlı olduğu b_1 ve b_2 katsayılarını belirleyiniz.

Çözüm. Kutupların yerlerini belirlemek için,

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = (1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1}) \quad (7.40)$$

yazılabilir. λ_1 ve λ_2 kökleri gerçel veya karmaşık olabilir.

Gerçel kökler ($b_1^2 \geq 4b_2$) için

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_2} \quad (7.41)$$

Karmaşık kökler ($b_1^2 < 4b_2$) için

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{b_1}{2} \pm j\sqrt{b_2 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2} \quad (7.42)$$

bulunur. Karmaşık kökler birbirinin karmaşık eşleniğidir.

Bu durum için $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olur. Kutupsal koordinatlar kullanılarak,

$$r = \sqrt{b_2} \quad (7.43a)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}}\right) \quad (7.43b)$$

tanımlanırsa,

$$\lambda_1, \lambda_2 = re^{\pm j\theta} \quad (7.44)$$

olarak elde edilir. O halde, (7.43a) ve (7.43b) den aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$b_2 = r^2 \quad (7.45a)$$

$$b_1 = -2r \cos \theta \quad (7.45b)$$

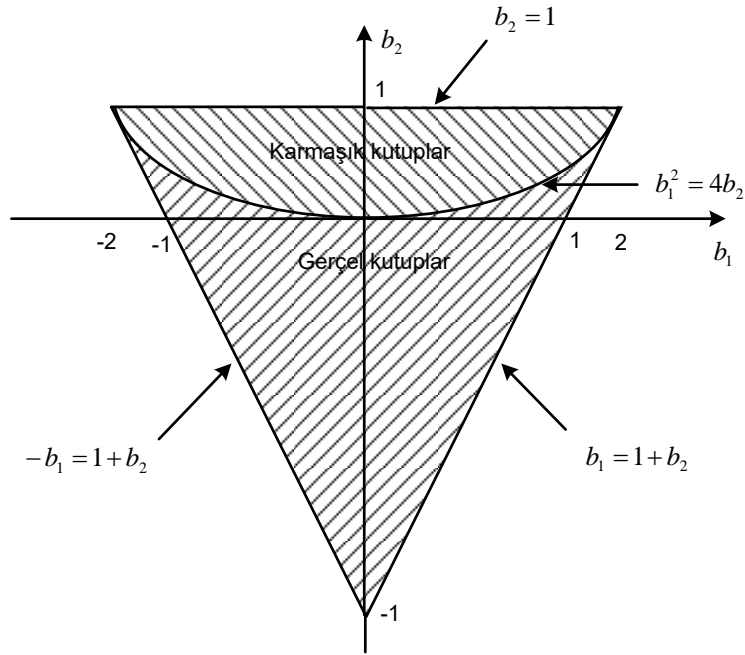
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{4b_2}} \quad (7.45c)$$

Kararlılık için kutupların birim dairenin içinde olması gerektiğinden aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

$$|b_2| < 1 \quad (7.46a)$$

$$|b_2 + 1| > \pm b_1 \quad (7.46b)$$

(7.46a) koşulu, (7.45a) ve genliğin birim daire içinde ($r < 1$) olmasından elde edilir. Sınırdaki $z = \pm 1$ noktalarında gerçek kutuplar olamayacağından (7.46b) koşulu bulunur. Şekil 7.3 te, (7.46) daki kararlılık koşulları b_1 - b_2 düzleminde gösterilmektedir. Kararlılık üçgeni olarak adlandırılan bölge içinde seçilen b_1 ve b_2 değerleri için sayısal süzgeç kararlıdır. Kararlılık üçgeni dışındaki b_1 ve b_2 değerlerinde kararsız olur. Yukarıda belirtildiği gibi ($b_1^2 < 4b_2$) için kutuplar karmaşık, aksi halde gerçeldir.



Şekil 7.3 İkinci dereceden sayısal süzgecin kararlı olduğu b_1 ve b_2 katsayılarının bölgesi

Örnek 4.5 te gösterildiği gibi, ikinci dereceden sayısal süzgeçlerin kararlılığını kararlılık üçgeni yardımıyla kolaylıkla belirlemek mümkündür. Uygulamada IIR sayısal süzgeçler ikinci dereceden süzgeçlerin ardışıl (cascade) bağlanmasıyla gerçekleştirilebileceğinden, bu metod oldukça etkilidir. Ancak, derecesi ikiden daha büyük süzgeçlerde kutupların (payda polinomunun köklerinin) yerlerinin tam olarak belirlenmesi oldukça güçtür. Ayrıca, kararlılığın incelenmesi sırasında köklerin yerlerinin tam olarak bilinmesine de gerek yoktur. Önemli olan tüm köklerin z -düzleminde birim dairenin içinde olup olmamasıdır. Bundan dolayı, kökleri bulmaksızın kararlılığı test edebilecek bir metoda gerek vardır. Aşağıda Jury tarafından geliştirilen "kararlılık test tablosu" köklerin birim daireye göre dağılımı hakkında bilgi verir. Bu yöntem analog sistemlerde kullanılan Routh-Hurwitz kriterinin benzeridir.

Tablo formunda kararlılık testi

b_n ler gerçel katsayılar ve $b_N > 0$ kabul edilerek payda polinomu aşağıdaki şekilde olsun.

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_k z^k + \dots + b_N z^N \quad (7.47)$$

Burada $B(z)$ nin köklerini bulmaksızın, tüm köklerinin birim daire içinde olup olmadığını gösteren bir kararlılık kriteri açıklanacaktır. Tablo 7.2 de gösterilen Jury tablosunun oluşturulmasında $B(z)$ polinomunun katsayıları kullanılır.

Tablo 7.2 Jury nin kararlılık test tablosu

Sıra	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{N-2}	z^{N-1}	z^N
1	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{N-2}	b_{N-1}	b_N
2	b_N	b_{N-1}	b_{N-2}	\dots	b_2	b_1	b_0
3	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{N-2}	c_{N-1}	
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	\dots	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	\dots	d_{N-2}		
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	\dots	d_0		
.	.	.	.	\dots	.		
.	.	.	.	\dots	.		
$2N-3$	r_0	r_1	r_2	\dots			

Tablonun ilk satırı $B(z)$ nin katsayılarının konulmasıyla elde edilir. İkinci satır ise, ilk satırın ters sırada yazılmasıyla bulunur. Üçüncü satırın elamanları da

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{N-k} \\ b_N & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \text{ için} \quad (7.48)$$

determinantlarından hesaplanır. Dördüncü satır ise, üçüncü satırın ters sırada yazılmasıyla bulunur. Beşinci ve altıncı satırlar da benzer şekilde

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1-k} \\ c_{N-1} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N-2 \text{ için} \quad (7.49)$$

determinantlarından bulunur. Bu işlem son satır $2N-3$ hesaplanıncaya kadar devam eder. Son satırın r_0 , r_1 ve r_2 ile gösterilen üç elemanı vardır. Payda polinomu (7.47) deki gibi olan ayırık-zamanlı bir sistemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerek ve yeterlidir.

$$1. \quad B(1) > 0 \quad (7.50)$$

$$2. \quad (-1)^N B(-1) > 0 \quad (7.51)$$

3. Jury tablosunun ilk sütunundaki elemanlara bakılarak, $(N-1)$ eşitsizlikten oluşan koşullar test edilir.

$$\left. \begin{array}{l} |b_0| < |b_N| \\ |c_0| > |c_{N-1}| \\ |d_0| > |d_{N-2}| \\ \vdots \\ |r_0| > |r_2| \end{array} \right\} (N-1) \text{ koşul} \quad (7.52)$$

Açıklama 7.2 İşlem kısıtlılığı açısından, Jury tablosu oluşturulmadan önce (7.50) ve (7.51) koşulları kontrol edilir. Eğer bu koşullardan biri bile sağlanmıyorsa, sistem kararsızdır. Ayrıca tablo oluşturularak (7.52) deki $(N-1)$ eşitsizliğin test edilmesine gerek yoktur.

Örnek 7.6 Eğer sayısal bir süzgecin payda polinomu

$$B(z) = 0.0025 + 0.08z + 0.4126z^2 - 1.368z^3 + z^4 \quad (7.53)$$

olarak verilmiş ise, köklerinin birim daireye göre dağılımını bulalım. $N = 4$ olan (7.53) deki polinoma ait Jury tablosunu hazırlamadan önce, (7.50) ve (7.51) deki gerekli koşulları yazarsak,

$$\begin{aligned} B(1) &= 0.0025 + 0.08 + 0.4126 - 1.368 + 1 = 0.1271 > 0 \\ B(-1) &= 0.0025 - 0.08 + 0.4126 + 1.368 + 1 = 2.708 > 0 \end{aligned} \quad (7.54)$$

ve

$$(-1)^N B(-1) = (-1)^4 2.708 > 0 \quad (7.55)$$

bulunur. (7.54) ve (7.55) ten ilk iki koşulun sağlandığı görülmektedir. O halde, teste devam edebiliriz. $B(z)$ polinomunun katsayılarından Jury tablosu Tablo 7.3 de gösterilmiştir.

Tablo 7.3 Örnek 7.6 için Jury tablosu

Sıra	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	0.0025	0.08	0.4126	-1.368	1
2	1	-1.368	0.4126	0.08	0.0025
3	$\cong -1$	1.368	-0.4116	-0.0834	
4	-0.0834	-0.4116	1.368	-1	
5	0.9936	-1.402	0.5256		

Tablonun ilk sütunundaki elemanlardan (7.52) koşulları tesbit edilebilir.

$$\begin{aligned} 0.0025 < 1 & , \quad |b_0| < |b_N| \\ 1 > 0.0834 & , \quad |c_0| > |c_{N-1}| \\ 0.9936 > 0.5256 & , \quad |d_0| > |d_{N-2}| \end{aligned} \quad (7.56)$$

(7.54), (7.55) ve (7.56) dan $B(z)$ nin' tüm köklerinin birim dairenin içinde olduğu görülür.

Yani, sistem kararlıdır.

Örnek 7.7 Sayısal süzgecin payda polinomunun aşağıdaki gibi verilmesi durumunda köklerin birim daireye göre dağılımını bulunuz.

$$B(z) = 3 - 2z + (3/2)z^2 + z^3$$

Cözüm. (7.50) ve (7.51) deki koşullardan,

$$B(1) = 3 - 2 + (3/2) + 1 = 3.5 > 0 \quad (7.57)$$

$$B(-1) = 3 + 2 - (3/2) - 1 = 2.5 > 0$$

$$(-1)^N B(-1) = (-1)^3 B(-1) = -2.5 < 0 \quad (7.58)$$

bulunur. (7.51) ve (7.58) in karşılaştırılmasından ikinci koşulun sağlanmadığı görülmektedir. O halde, köklerin tümü birim dairenin içinde değildir. Tabloyu oluşturarak teste devam etmeye gerek yoktur. Sistem kararsızdır.

7.4 Kararsız sistemlerin kararlı duruma getirilmesi

Sayısal bir süzgecin tasarımında esas amaç, belirli bir frekans cevabı karakteristiğini sağlayan transfer fonksiyonu $H(z)$ nin bulunmasıdır. Tasarım sonucu bulunan transfer fonksiyonu istenen frekans özelliklerini sağlamasına karşılık kararlı olmayabilir. Pratikte kararsız süzgeçlerin kullanımı mümkün olmadığından kararsız $H(z)$ den faydalanılamaz. Ancak kararsız $H(z)$ transfer fonksiyonu, frekans karakteristiğini değiştirmeden kararlı bir transfer fonksiyonu elde edilecek biçimde değişikliğe uğratılabilir.

7.4.1 Resiprok kutuplar yöntemi

Süzgeç tasarımında, transfer fonksiyonu $H(z)$ nin genlik frekans karakteristiğini sağlaması ve kararsız olması durumunda $H(z)$ nin kararsızlığına neden olan kutuplar resiprokları ile değiştirilir. Birim dairenin dışında bir kutbu olan süzgecin transfer fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z).(z - re^{j\theta})} \quad (7.59)$$

Varsayım gereği $r > 1$ olup $re^{j\theta}$ kutbu kararsızlığa neden olmaktadır. (7.59) dan,

$$H'(z) = \frac{A(z)}{B(z).(z - r^{-1}e^{j\theta})} = \frac{A(z)}{B(z).(rz - e^{j\theta})} \quad (7.60)$$

yazılabilir. $H'(z)$ transfer fonksiyonunun $re^{j\theta}$ kutbu $r^{-1}e^{j\theta}$ kutbuyla değiştirilir. $r^{-1}e^{j\theta}$ kutbuna $re^{j\theta}$ nin resiprokal kutubu denir.

Şimdi $H(z)$ ve $H'(z)$ transfer fonksiyonlarının genlik cevaplarının aynı olduğunu gösterelim. Burada,

$$|H(e^{j\Omega})| = |H'(e^{j\Omega})|, \quad \text{tüm } \Omega \text{ için} \quad (7.61)$$

olduğunu ispat edebilmek için tüm Ω için

$$|e^{j\Omega} - re^{j\Omega}| = |re^{j\Omega} - e^{j\Omega}| \quad (7.62)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |e^{j\Omega} - re^{j\Omega}| &= |\cos \Omega + j \sin \Omega - r \cos \Omega - jr \sin \Omega| \\ &= [(\cos \Omega - r \cos \Omega)^2 + (\sin \Omega - r \sin \Omega)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.63)$$

ve

$$\begin{aligned} |re^{j\Omega} - e^{j\Omega}| &= |e^{j\Omega} e^{j\theta} (re^{-j\Omega} - e^{-j\Omega})| \\ |(e^{-j\Omega} - re^{-j\Omega})| &= [(\cos \Omega - r \cos \Omega)^2 + (\sin \Omega - r \sin \Omega)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.64)$$

elde edilir. (7.63) ve (7.64) den, (7.61) deki eşitlik doğrulanmış olmaktadır.

Örnek 7.8 Birinci dereceden transfer fonksiyonunun kararlı hale getirilmesi şöyle olur. Eğer

$$|a| > 1 \text{ ise}$$

$$H(z) = \frac{1}{(z + a)} \quad (7.65)$$

kararsızdır. Kararlı duruma getirilmiş transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H'(z) = \pm \frac{1}{(az + 1)} \quad (7.66)$$

$H'(z)$ nin kutbu birim dairenin içindedir.

Örnek 7.9 İkinci dereceden bir süzgece ait transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + bz + c} \quad (7.67)$$

olarak verilsin. Örnek 7.5 den biliyoruz ki, eğer $c > 1$ ve $(c+1)^2 > b^2$ ise, transfer fonksiyonun iki kutbu da birim dairenin dışındadır. Her iki kutup ya karmaşık ya da gerçeldir.

$H(z)$ yi kararlı yapmak için

$$H'(z) = \frac{\mp 1}{cz^2 + bz + 1} \quad (7.68)$$

yazılabilir. $H'(z)$ nin kutupları birim dairenin içindedir.

Örnek 7.10 Kararsız transfer fonksiyonu,

$$H(z) = \frac{z^2 + 10}{(z + 0.8)(z - 2)(z^2 + 2z + 3)} \quad (7.69)$$

resiprok kutuplar kullanılarak aşağıdaki şekilde kararlı duruma getirilebilir.

$$H(z) = \frac{\mp (z^2 + 10)}{(z + 0.8)(-2z + 1)(3z^2 + (2/3)z + 1)} \quad (7.70)$$

Payın işareti eksi alınırsa $H'(1) \geq 0$ olarak elde edilecektir.

7.5 Ayırık işaretin sıfırları ve kutupları yardımıyla gösterilimi

Pratikte karşılaşılan bir $x(k)$ işaretinin z -dönüşümü $X(z)$ nin iki polinomun oranı biçiminde yazılması mümkündür.

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}} \quad (7.71)$$

Gerçek işaretler için, $A(z)$ ve $B(z)$ polinomlarının katsayıları gerçel sayılardır. $X(z)$ nin kutupları p_k ; $k = 1, 2, \dots, N$ ve sıfırları z_m ; $m = 1, 2, \dots, M$ ile gösterilirse, (7.71) deki ifade

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = A_0 \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_m)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \quad (7.72)$$

biçiminde yazılabilir. A_0 sabit bir sayıdır. O halde, (7.71) deki gibi z -dönüşümü olan tüm işaretleri sıfırları ve kutupları yardımıyla gösterilebiliriz. Bu türden gerçel işaretlerin sıfırları ve kutupları ya gerçeldir ya da karmaşık eşlenik çiftler biçimindedir.

Örnek 7.11 Aşağıdaki işaretin kutuplar ve sıfırlar formunda gösterilimini ele alalım:

$$x(n) = b^n u(n), \quad |b| < 1 \text{ için} \quad (7.73)$$

z -dönüşümü alınarak,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{-n} \quad (7.74)$$

bulunur. $X(z)$ dönüşümünün $z_1 = 0$ da bir adet sıfırı ve $p_1 = b$ de bir kutbu vardır.

7.6 Ayırık işaretin Fourier dönüşümünün bulunması

Sayısal bir $x(n)$ işaretinin ayırık zaman Fourier dönüşümü şöyle tanımlanır:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n} \quad (7.75)$$

Bu tanımdan da görüldüğü gibi $X(\Omega)$, gerçel Ω değişkeninin sürekli ve karmaşık (kompleks) değerli bir fonksiyonudur.

$X(\Omega)$ nın varlığı için sağ taraftaki sonsuz toplamın sonlu olması gerekir. Yani, (7.75) deki seri yakınsak olmalıdır. (7.75) deki $e^{-j\Omega n}$ teriminin mutlak değerinin daima bire eşit olduğu

gözönüne alınırsa $x(n)$ dizisinin mutlak değerlerinin toplanabilir olması yeterli bir koşuldur.

Yani yakınsaklık için yeter koşul (7.76) daki gibi verilir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (7.76)$$

(7.76) koşulunu sağlayan tüm işaretlerin enerjilerinin sonlu olduğu gösterilebilir. Bu özellik aşağıdaki eşitsizliğin direkt bir sonucudur.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 \quad (7.77)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı $x(n)$ nin enerjisidir. O halde, (7.76) koşulunu sağlayan işaretler (7.77) koşulunu da sağlarlar. Ancak, tüm sonlu enerjili işaretlerin mutlak değerlerinin toplamı sonlu olmak zorunda değildir. Bununla birlikte, pratikte karşılaşılan sonlu enerjili diziler (7.76) koşulunu sağlarlar ve Fourier dönüşümleri vardır.

Şimdi, sayısal işaretin Fourier dönüşümüne ilişkin bu kısa tanımlamadan sonra z -dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$x(n)$ işaretinin z -dönüşümü $X(z)$ ile, Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ arasındaki ilişkiyi göstermek için (6.1) deki tanımı ele alalım:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} \quad (7.78)$$

z -karmaşık değişkeni, z -düzleminde kutupsal koordinatlarla gösterilebilir.

$$z = re^{j\Omega} \quad (7.79)$$

Bu (7.79) ilişkisi (7.78) denkleminde yerleştirilecek olursa (7.80) elde edilir.

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).(re^{j\Omega})^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).r^{-k}e^{-j\Omega k} \quad (7.80)$$

Bu ilişki, (7.75) deki Fourier dönüşümü ile karşılaştırıldığı zaman, $r=1$ için Fourier dönüşümü ile z -dönüşümünün birbirinin aynı olduğu görülmektedir. $|z|=1$ için $r=1$ olacağından,

$$X(z)|_{|z|=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\Omega n} = X(\Omega) \quad (7.81)$$

bulunur. Diğer bir anlatımla, z -dönüşümünün birim daire üzerinde hesaplanması işaretin Fourier dönüşümünü vermektedir.

Açıklama 7.3 (7.75) ve (7.80) in karşılaştırılmasından şu sonuç çıkmaktadır: (7.76) koşulu sağlanmadığı için verilen işaretin Fourier dönüşümü yakınsak olmasa bile, gerçek üstel r^{-k} terimi aynı işaretin z -dönüşümünün yakınsamasını sağlayabilir.

z -dönüşümü gösteriliminde birim dairenin oynadığı rol çok önemlidir. Teorem 7.2 de belirtildiği gibi z -dönüşümünün tüm kutupları birim dairenin içinde ise, ters dönüşüm kararlı, nedensel bir doğrusal sistemin impuls cevabıdır.

7.7 Sayısal süzgeç çıkışının transfer fonksiyonu yardımıyla hesaplanması

Verilen bir sayısal süzgecin transfer fonksiyonunun bulunmasına ilişkin yöntemler Bölüm 7.2 de ayrıntılı olarak tartışıldı. Şimdi, bulunan $H(z)$ transfer fonksiyonunu kullanarak bir sayısal süzgecin çıkışını hesaplayalım. Burada kullanılan yöntem oldukça basittir. Giriş dizisi $x(n)$ nin z -dönüşümü $X(z)$ ile süzgecin transfer fonksiyonu $H(z)$ çarpılarak çıkış işaretinin z -dönüşümü bulunur, $Y(z) = H(z)X(z)$. $Y(z)$ nin ters z -dönüşümü çıkış dizisi $y(n)$ yi verir. Bölüm 6 da gösterilen ters z -dönüşüm metodlarından biri kullanılabilir. Aşağıda örnekte kısmi kesirlere açılım tekniği kullanılmaktadır.

Örnek 7.12 Transfer fonksiyonu

$$H(z) = \frac{1 + z + z^2}{2 + 3z + z^2} \quad (7.82)$$

olarak verilen bir sayısal süzgecin girişine $x(n) = 0.5^n u(n)$ dizisi uygulanırsa çıkış dizisi $y(n)$ yi bulalım.

Çözüm. Giriş dizisi $x(n)$ nin z -dönüşümü Tablo 6.1 kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$X(z) = Z[0.5^n u(n)] = \frac{z}{z - 0.5} \quad (7.83)$$

(7.82) ve (7.83) ten

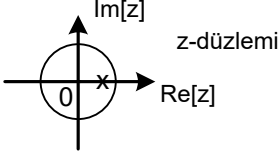
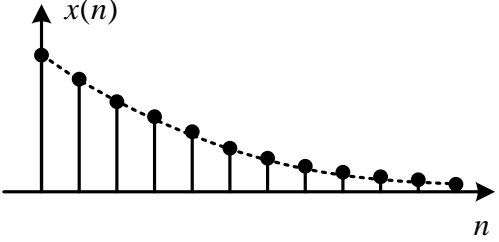
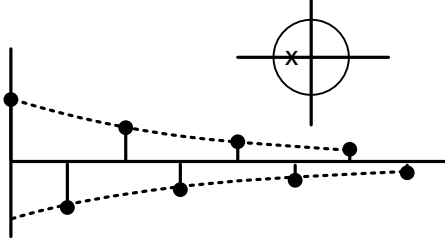
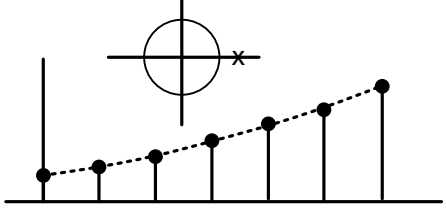
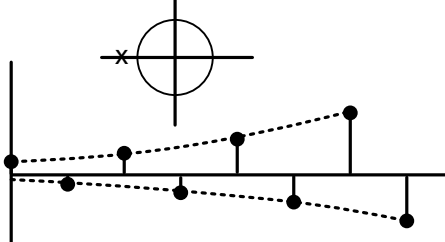
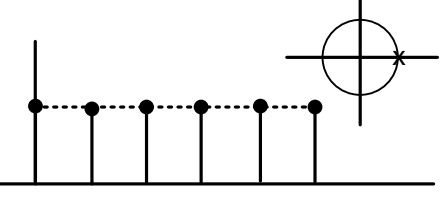
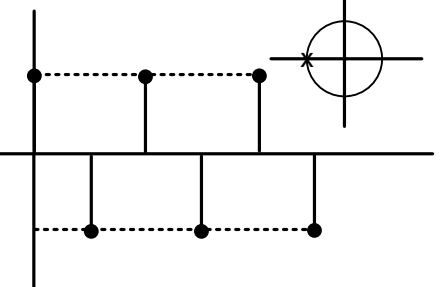
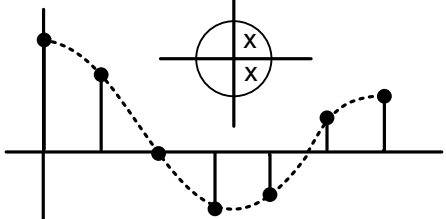
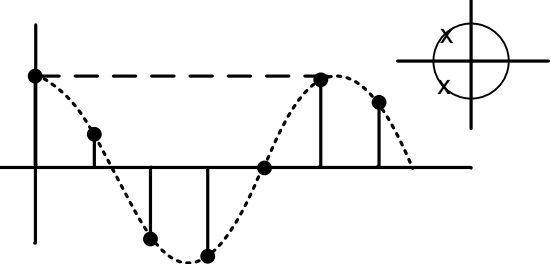
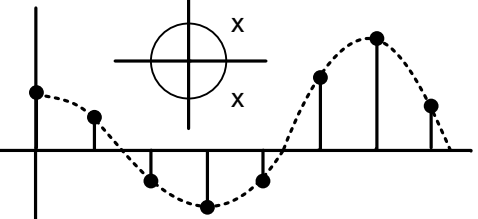
$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 + z + z^2}{2 + 3z + z^2} \cdot \left\{ \frac{z}{z - 0.5} \right\} \quad (7.84)$$

yazılabilir. $Y(z)$ kısmi kesirlere açılarak (7.85) ve ardından (7.86) elde edilir.

$$Y(z) = -\frac{2}{3} \cdot \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} + \frac{6}{5} \left\{ \frac{z}{z+2} \right\} + \frac{7}{15} \left\{ \frac{z}{z-0.5} \right\} \quad (7.85)$$

$$y(n) = \left\{ -\frac{2}{3} \cdot (-1)^n + \frac{6}{5} (-2)^n + \frac{7}{15} (0.5)^n \right\} u(n) \quad (7.86)$$

Tablo 7.4 Kutup yerleri ile zaman cevapları arasındaki ilişki

(7.85) ve (7.86) ile, sayısal süzgeç çıkışı $y(n)$ z -dönüşümündeki kutuplar tarafından belirlenmektedir. Bu nedenle, kutupların z -düzlemindeki yerleri ile bunlara karşı düşen cevaplar arasındaki ilişkinin bilinmesi yararlıdır. Tablo 7.4 te kutupların yerleri ile zaman cevapları arasındaki ilişki gösterilmektedir.

z -düzleminde birim dairenin içinde olan kutuplara karşı düşen cevaplar $n \rightarrow \infty$ iken sifıra yaklaşır. Kutubun genliğinin küçülmesi cevabın sifıra yaklaşımını hızlandırır. Eğer bir kutup birim dairenin dışında ise, cevabın genliği n ile birlikte artar. Eğer kutup birim daire üzerinde ve katsız ise, cevap sabit veya sabit genlikli salınımdır. Eğer kutup katlı bir kökse, cevap $n \rightarrow \infty$ iken sonsuza yaklaşır.