

BÖLÜM 5. AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

5.1 Giriş

Bölüm 7 de bir $x(n)$ dizisinin Fourier dönüşümünün z -dönüşümü $X(z)$ nin birim daire üzerindeki $z = e^{j\Omega}$ değerlerinde hesaplanması yöntemiyle bulunacağı belirtilmişti. Ancak, sayısal işaret işlemenin pratik uygulaması, sonsuz bir $x(n)$ dizisinin saklanması ve sürekli Ω frekansının değerlendirilmesi olanaksız olan sayısal donanımlar üzerinde yapılır. Ayrıca, teorik olarak tanımlanan bazı dizilerin aksine, gerçek dizilerin Fourier dönüşümleri hesaplanamaz. Bu nedenle, sayısal işaretler için Fourier dönüşümünün kullanılması uygun değildir. Frekansın analog olarak gösterilmesi ve sonsuz sayıda örneğin gerekmesi, bu uygunsuzluğun temel nedenleridir.

Bu güçlüklerden dolayı, Fourier dönüşümünün işaret işlemedeki önemi dikkate alındığında daha pratik bir dönüşüm tanımlamak gerekmektedir. Birim daire etrafında düzgün aralıklı N frekans noktası (Ω_k) ve $x(n)$ dizisinin N örneği için tanımlanan bu yeni dönüşüm, Ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) olarak adlandırılır. Tersine de alınabilen bu dönüşümün önemli özellikleri vardır. En önemlisi, iki AFD nin çarpımının zaman domeninde karşılığının dizilerin konvolüsyon toplamı olmasıdır. Ayrıca, birçok spektrum analiz yöntemi AFD ye dayanmaktadır.

Bu bölümde, AFD nin Fourier dönüşümünden elde edilmesi için yapılması gereken değişiklikler tartışılacaktır. Önceki bölümde, bir sayısal işaretin tam olarak belirlenebilmesi için Fourier dönüşümünden alınması gereken frekans domeni örneklerine ilişkin koşullar ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Buradan elde edilen koşulların ışığı altında, periyodik ve gerçel işaretlerin Fourier dönüşümü ile AFD arasındaki ilişki açıklığa kavuşturulacaktır.

5.2 Ayrık Fourier dönüşümünün tanımı

Ayrık Fourier dönüşümü (AFD), Fourier serisi, Fourier dönüşümü veya dik fonksiyon açılımından yararlanarak tanımlamak mümkündür. Gerçekten de AFD işlemi, verilen sonlu

uzunlukta bir sayısal işaretin periyodik yapıldıktan sonra Fourier serisi katsayılarının bulunmasıyla gerçekleştirilebilir. Ayrıca tüm n değerleri için verilen bir $x(n)$ dizisinin Fourier dönüşüm ifadesinde sadece N örneğinin alınmasıyla da AFD bulunabilir. Diğer taraftan, dik fonksiyonlar kullanılarak, AFD dik fonksiyon açılımı biçiminde de tanımlanabilir. Bundan sonraki alt bölümlerde AFD nin tanımlanmasına ilişkin yöntemler tartışılacaktır.

5.2.1. Periyodik işaretlerin örneklenmesi

Şekil 5.1 in sol sütununda, verilen bir $x(t)$ işaretinin önce örneklenip sonra periyodik duruma getirilmesi gösterilmektedir. Zaman domenindeki bu operasyonların frekans domeni karşılıkları, şekil 5.1 in sağ sütununda görülmektedir. Periyodik sayısal işaretin Fourier dönüşümü AFD olarak tanımlanır.

$(0, NT)$ aralığında örneklenmiş $x(nT) = x(t) \cdot \delta_T(t)$ dizisinin Fourier serisi katsayıları x_k olarak verildiğinde, bu x_k değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$x_k = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} x(t) \cdot \delta_T(t) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{NT})t} \cdot dt \quad (5.1)$$

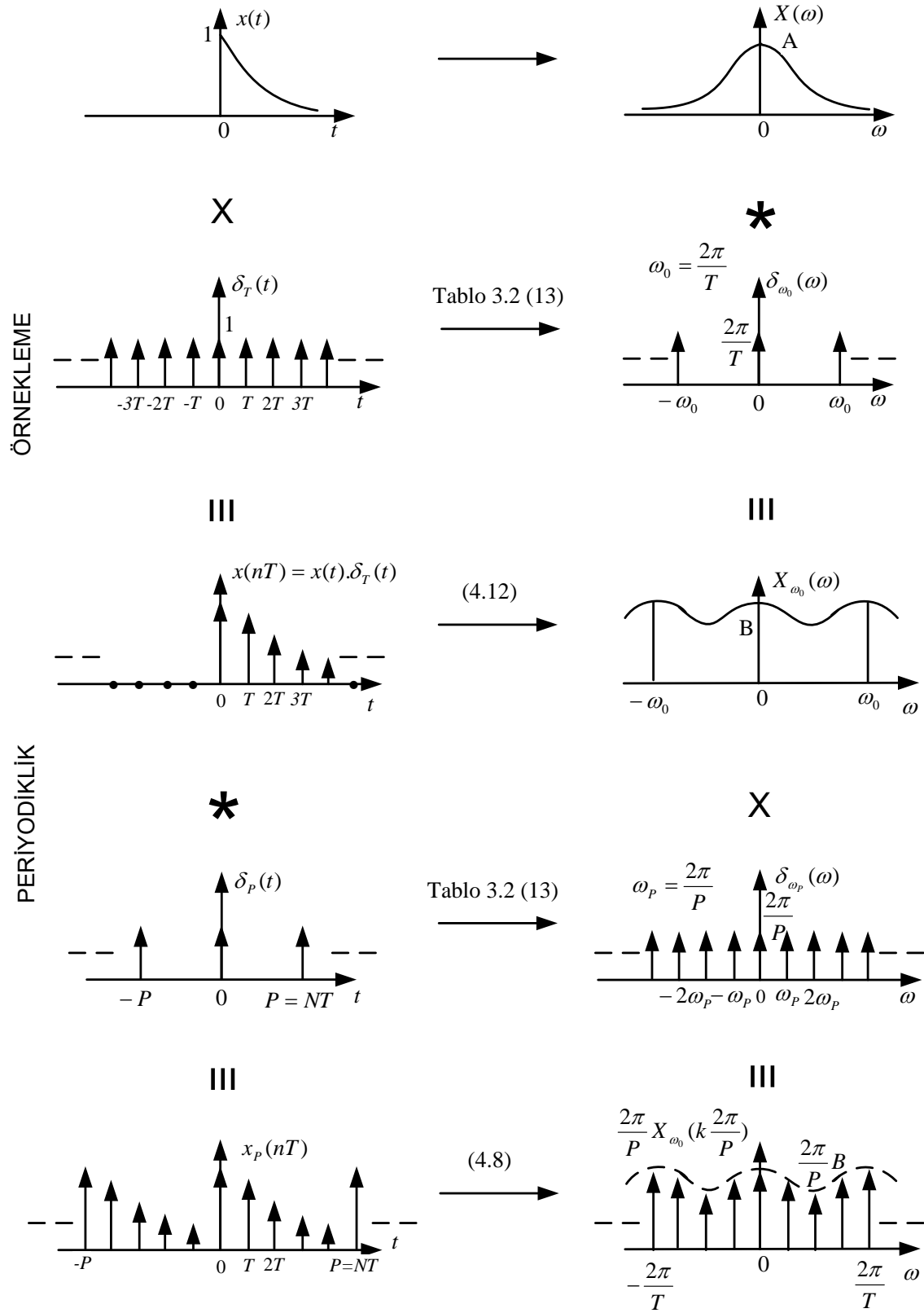
T örnekleme aralığı ve N örnek sayısı olduğuna göre,

$$\int_0^{NT} x(t) \cdot \delta_T(t) \cdot dt = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \quad (5.2)$$

eşitliğinden yararlanarak (5.1) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_k \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.3)$$

Fourier katsayısını ifade eden 5.3 denklemindeki bu sonuç, Fourier serisini ifade eden aşağıdaki iki denklemden de elde edilebilir.



Şekil 5.1 Ayırık Fourier dönüşümünün grafiksel gösterimi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{P})t} \quad (5.4a)$$

$$x_k = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{P})t} \cdot dt \quad (5.4b)$$

Gerçekten $dt = T$ ve $P = NT$ alınarak, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için $t = nT$ kullanılırsa, (5.4b) denklemi, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için aşağıdaki gibi olur.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.5)$$

(5.3) ve (5.5) denklemleri özdeştir. O halde X_k , Fourier serisi katsayısı x_k nın yaklaşığıdır. Yani $X_k \cong x_k$ olur. Buradaki X_k lar AFD değerleridir. Eğer mümkünse X_k değerleri verildiğinde, $x(n)$ dizisi bulunabilmelidir. Burada N adet $x(n)$ örneği, N adet X_k değerini ürettiği için, AFD nin tersinin de olmasını beklemek normaldir. Gerçekten de Ters Ayrık Fourier Dönüşümü vardır. $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için Ters Ayrık Fourier Dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.6)$$

Bu ifadenin gerçekliği (5.5) denkleminde yerine konularak sağlanabilir. (5.5) ve (5.6) denklemleri, Ayrık Fourier Dönüşüm(AFD) çifti olarak anılır.

Açıklama:

Literatürde (5.5) denklemindeki $\frac{1}{N}$ terimi (5.6) ifadesinde toplamın önünde kullanılmaktadır. Bu durumda AFD ikilisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.7a)$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.7b)$$

Ayrıca, literatürde bazen X_k nın, pozitif üstel fonksiyon ve buna karşı düşen $x(n)$ in de, negatif üstel fonksiyon yardımıyla tanımlandığı görülmektedir. $\frac{1}{N}$ terimi yine denklemlerden herhangi biriyle birlikte kullanılabilir.

5.2.2 Dik fonksiyon açılımı

AFD, doğrudan dik fonksiyon açılımı olarak da tanımlanabilir. $x(0)$, $x(1)$, $x(2), \dots, x(N-1)$ olarak verilen N noktalı karmaşık sayı dizisi, dik açılım yardımıyla şöyle yazılabilir.

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk} = \frac{1}{N} [X_0 + X_1 W_N^{-n} + \dots + X_p W_N^{-pn} + \dots + X_{N-1} W_N^{-(N-1)n}] \quad (5.8)$$

$$\text{Burada } W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (5.9)$$

olarak tanımlanmaktadır. (5.8) denkleminde kullanılan dik fonksiyonların $\phi_k(n) = W_N^{nk}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ olduğu görülmektedir. Gerçekten dik fonksiyon tanımından

$$\langle \phi_k(n), \phi_p(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-p)} = \frac{1 - W_N^{(k-p)N}}{1 - W_N^{(k-p)}} = \begin{cases} N & p = k \text{ için} \\ 0 & p \neq k \text{ için} \end{cases} \quad (5.10)$$

bulunabilir. AFD katsayıları olan X_k ların elde edilmesi için (5.8) in her iki yanını W_N^{nk} ile çarpılıp n değişkenine göre toplamı alınır.

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} X_p W_N^{-pk} \right] W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X_p \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k-p)n} \quad (5.11)$$

(5.10) daki diklik koşulu kullanılarak (5.11) in sağ tarafı X_k olur.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} \quad (5.12)$$

Benzer biçimde X_k kümesinin de $x(n)$ değerlerini vereceği gösterilebilir. Yani,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W_N^{-nk} \quad (5.13)$$

olarak bulunur. (5.12) ve (5.13) deki X_k ve $x(n)$ nin ortak özelliği periyodik olmalarıdır.

$$X_{k+N} = X_k \quad (5.14)$$

$$x(n+N) = x(n) \quad (5.15)$$

Açıklama 5.2 Bölüm 4 de, analog bir $x(t)$ işaretinin örneklenmesinin bu işaretin Fourier dönüşümünü periyodik duruma getirdiğini gördük. Zaman ve frekans domenlerindeki dualite nedeniyle, Fourier dönüşümü $X(\omega)$ nin örneklenmesi de, (5.15) de gösterilen sayısal işaretin periyodik olmasını sağlar. Analog ve sayısal işaretlerin Fourier dönüşümü arasındaki temel farklılık böylece belirlenmiş olmaktadır. Bu gerçeğin unutulması önemli hatalara yol açabilir.

Örnek 5.1

Aşağıdaki ayrık zamanlı $x(n)$ dizisi için AFD yi hesaplayınız.

$$x(n) = \begin{cases} e^{-an}; & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ için} \\ 0; & n < 0 \text{ ve } n \geq N \text{ için} \end{cases} \quad (5.16)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için AFD katsayıları

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-an} \cdot e^{-j(2\pi/N)nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(a+jk(2\pi/N))n} \quad (5.17)$$

olarak bulunur. Öte yandan,

$$\sum_{n=0}^{N-1} y^n = \frac{1-y^N}{1-y} \quad (5.18)$$

ve

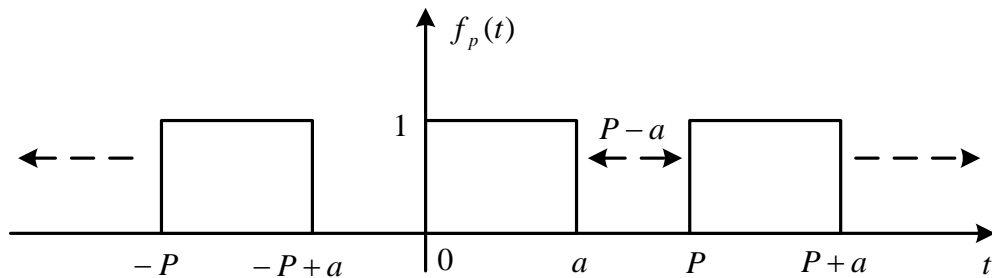
$$e^{-(a+j(2\pi k/N))n} = e^{-aN} \cdot e^{j2\pi k} = e^{-aN} \quad (5.19)$$

özellikleri kullanarak X_k şöyle yazılabilir.

$$X_k = \frac{1-e^{-aN}}{1-e^{-a}e^{-j(2\pi k/N)}} \quad (5.20)$$

Örnek 5.2

$P = 10$ ve $a = 5$ için, Şekil 5.2'deki kare dalga göz önüne alınsın. (a) Bu işaretin Fourier serisi katsayılarını bulunuz; (b) Yalnızca bir kare dalga darbesi için Fourier dönüşümü $F(\omega)$ yı belirleyiniz; (c) Fourier integralinden Fourier katsayılarını elde ediniz; (d) $N = 10$ için işaretin AFD değerlerini hesaplayalım; (e) Tüm sayısal değerleri tablo halinde karşılaştırınız.



Şekil 5.2 Kare dalga

Cözüm 5.2

(a) Şekil 5.2'deki $f_p(t)$ işareti ile Fourier serisi katsayıları f_k arasında aşağıdaki ilişkiler bilinmektedir.

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad (5.21)$$

$$f_k = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt \quad (5.22)$$

(5.21) ve (5.22) ifadelerinde $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ dir. Bu durumda (5.22) denklemindeki integral, kare dalga için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{P} \int_0^a e^{-jk(\frac{2\pi}{P})t} \cdot dt = \frac{1}{P} \cdot \frac{e^{-jk(\frac{2\pi}{P})t}}{-jk(\frac{2\pi}{P})} \bigg|_0^a = \frac{1}{P} \cdot \frac{e^{-jk(\frac{2\pi}{P})a} - 1}{-jk(\frac{2\pi}{P})} = \frac{1}{P} \cdot e^{-jk(\frac{\pi}{P})a} \cdot \frac{(e^{-jk(\frac{\pi}{P})a} - e^{jk(\frac{\pi}{P})a})}{-jk(\frac{2\pi}{P})} \\ &= \frac{1}{P} \cdot e^{-jk(\frac{\pi}{P})a} \cdot \frac{\sin k(\frac{\pi}{P})a}{k(\frac{\pi}{P})} = \frac{\sin k(\frac{\pi}{P})a}{k\pi} \cdot e^{-jk(\frac{\pi}{P})a} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$P=10$ ve $a=P/2=5$ için f_k nın genliği, $k=0, \mp 1, \mp 2, \dots$ için aşağıdaki gibi bulunur.

$$|f_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, \quad k=0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (5.24)$$

(b) Bir kare dalga darbesinin Fourier integrali aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_0^a e^{-j\omega t} \cdot dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \bigg|_0^a = -\frac{e^{-j\omega a} - 1}{j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega a}}{j\omega} \\ &= e^{-j\omega \frac{a}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{a}{2}} - e^{-j\omega \frac{a}{2}}}{j\omega} = e^{-j\omega \frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot \frac{a}{2})}{\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$a = P/2 = 10/2 = 5$ için $F(\omega)$ nın genliği aşağıdaki gibi bulunur.

$$|F(\omega)| = \frac{\sin(\omega \cdot \frac{5}{2})}{\frac{\omega}{2}} \quad (5.26)$$

(c) Fourier katsayıları f_k lar ile Fourier integrali $F(\omega)$ arasındaki ilişkinin, daha önceden aşağıdaki gibi verildiği bilinmektedir.

$$f_k = \frac{1}{P} \cdot F(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad (5.27)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ değeri, (5.27) denkleminde yerine konursa aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$f_k = \frac{1}{10} \cdot F(k \frac{\pi}{5}) \quad (5.28)$$

Gerçekten (a) ve (b) şıklarındaki (5.25) ve (5.26) dan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$|f_k| = \frac{1}{10} \cdot F(k \frac{\pi}{5}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin(k \frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{2})}{k \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \quad (5.29)$$

(d) $N = 10$, $T = 1$, $P = 10$ ve $a = 5$ için, (5.12) deki AFD denkleminde F_0, F_1, \dots, F_9 değerleri hesaplanabilir.

$$F_k = \sum_0^9 f(nT) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (5.30)$$

$f(nT) = [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ örneklenmiş işaret değerleri, (5.30) da yerine konursa aşağıdaki denkleme gelinir.

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk(\frac{2\pi}{10})n} = \frac{1 - e^{jk\pi}}{1 - e^{-jk\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{-jk(\frac{\pi}{2})} \cdot \left[e^{jk(\frac{\pi}{2})} - e^{-jk(\frac{\pi}{2})} \right]}{e^{-jk(\frac{\pi}{10})} \cdot \left[e^{jk(\frac{\pi}{10})} - e^{-jk(\frac{\pi}{10})} \right]} = e^{-jk(\frac{2\pi}{5})} \cdot \frac{\sin k(\frac{\pi}{2})}{\sin k(\frac{\pi}{10})} \quad (5.31)$$

(5.31) denkleminde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için F_k nın genliği aşağıdaki gibi bulunur.

$$|F_k| = \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{\sin(k \frac{\pi}{10})} \quad (5.32)$$

Ayrıca $\sin(k \frac{\pi}{10}) \approx (k \frac{\pi}{10})$ olarak kabul edilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$|F_k| \cong 10 \cdot \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ için} \quad (5.33)$$

(e) Bu durumda ayrık Fourier dönüşüm(AFD) değerleri ile Fourier serisi katsayıları karşılaştırılabilir. Şekil 5.3 de $|F_k|/10$ ile $|f_k|$ değerlerinin karşılaştırılması görülmektedir.

$$|F_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \quad (5.34)$$

$$|f_k| = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \quad (5.35)$$

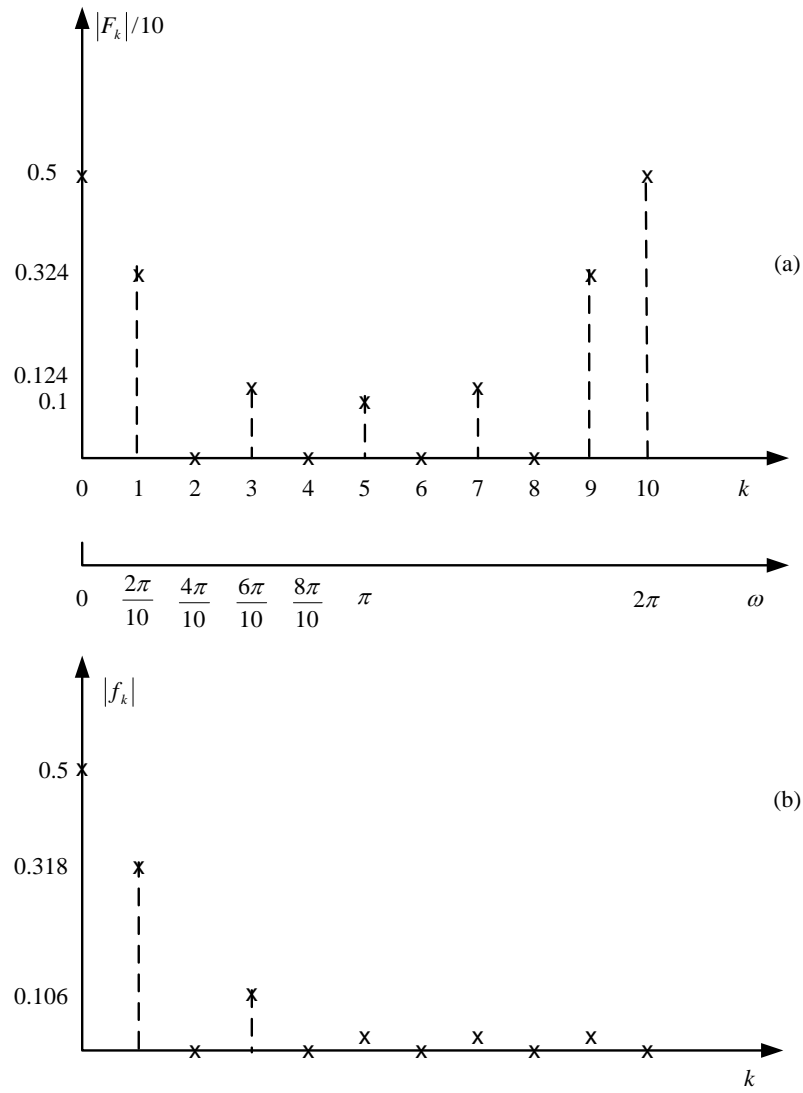
Açıklama: Yukarıdaki sayısal değerlerin incelenmesinden, $k=0, 1, 2, 3, 4$ için $|F_k|/10$ ile $|f_k|$ değerlerinin birbirlerine yaklaşık olarak eşit olduğu görülmektedir. $k=5, 6, 7, 8, 9$ için herhangi bir benzerlik söz konusu değildir. $k \geq 5$ için Fourier katsayısı $|f_k|$ lar sürekli olarak azalırken, AFD değerleri olan $|F_k|$ lar AFD nün simetri özelliği olan bu durum ayrıca incelenecektir.

k	$ F_k $	$ F_k /10$	$ f_k $
0	5	0.5	0.5
1	3.24	0.324	0.318
2	0	0	0
3	1.24	0.124	0.106
4	0	0	0
5	1	0.1	0.064
6	0	0	0
7	1.24	0.124	0.045
8	0	0	0
9	3.24	0.324	0.035

5.3 AFD temel özellikleri

AFD nin etkin ve yararlı kullanılabilmesi için, bazı temel özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu bölümde, AFD nin sayısal işaret işleme açısından önemli olan özellikleri üzerinde durulacaktır.

Burada tartışılacak özelliklerin büyük bir bölümü z -dönüşümünün özelliklerine benzer. Gerçekten AFD birim daire üzerinde z -dönüşümünün örneklenmesi ile elde edilmektedir. Bu nedenle, ispat açık olduğu için verilmeyecektir.



Şekil 5.3 Grafiksel gösterimler; (a) AFD değerleri; (b) Fourier serisi katsayıları

5.3.1 Doğrusallık özelliği

AFD doğrusal bir dönüşümdür. Eğer X_k ve Y_k sonlu uzunluktaki $x(n)$ ve $y(n)$ işaretlerinin AFD ise,

$$x(n) = ax(n) + by(n) \quad (5.36)$$

işaretinin AFD şöyle bulunur:

$$Z_k = aX_k + bY_k \quad (5.37)$$

$x(n)$ ve $y(n)$ nın uzunlukları sırasıyla N_1 ve N_2 ise, $z(n)$ işaretinin uzunluğu

$$N = \max(N_1, N_2) \quad (5.38)$$

olarak verilir. Örneğin $N_1 > N_2$ ise iki AFD $N = N_1$ için hesaplanır. $y(n)$ işaretine $N_1 - N_2$ kadar sıfır ilavesi ile elde edilecek işaretin AFD Y_k dır. Aynı periyotlu ($N = N_1 = N_2$) periyodik işaretler için de (5.36) ve (5.37) denklemleri geçerlidir. Ancak, periyodik işaretler için sıfır ilavesi yöntemi uygulanamaz.

5.3.2 Simetri özellikleri

Gerçel değerlerden oluşan periyodik bir diziye karşı düşen AFD değerleri karmaşık ve periyodiktir. Yani,

$$\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\} \quad (5.39)$$

gerçel değerlerle gösterilen periyodik dizinin periyodu N ise

$$x(n + N) = x(n) \quad (5.40)$$

olur. (5.39) noktalarından elde edilecek AFD değerleri karmaşıktır ve periyodiktir.

$$\{X_k\} = \{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\} \quad (5.41)$$

$$X_{k+N} = X_k \quad (5.42)$$

$x(n)$ işaretinin gerçel olması durumunda (5.41) deki AFD değerleri ayrıca simetri özelliklerine sahip olur. Bu simetri özellikleri yardımıyla, X_k katsayılarının sadece yarısının hesaplanması yeterli olacaktır. Gerçel $x(n)$ için bu önemli simetri şöyle bulunabilir.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left\{ \cos \left[k \left(\frac{2\pi}{N} \right) n \right] - j \sin \left[k \left(\frac{2\pi}{N} \right) n \right] \right\} \quad (5.43)$$

(5.44) den X_k nın gerçel bölümünü

$$\operatorname{Re}[X_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[k \left(\frac{2\pi}{N} \right) n \right] \quad (5.44)$$

olarak gösterelim. N sayısını çift varsayarak,

a) $k = N/2$ için

$$\operatorname{Re}[X_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos n\pi = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n) \quad (5.45)$$

bulunur.

b) $k = (N/2) - m$ için

$$\cos \left[\left(\frac{N}{2} - m \right) \frac{2\pi}{N} n \right] = \cos \left[\left(\frac{N}{2} + m \right) \frac{2\pi}{N} n \right] \quad (5.46)$$

yazılabilir. O halde, $m = 0, 1, 2, \dots, (N/2) - 1$ için .

$$\operatorname{Re}[X_{(N/2)-m}] = \operatorname{Re}[X_{(N/2)+m}] \quad (5.47)$$

olacaktır.

(5.47) ifadesinden X_k nın gerçel bölümünün $k = N/2$ etrafında simetrik olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca X_k nın sanal kısmının $k = N/2$ ye göre ters simetrik olduğu gösterilebilir.

$$\operatorname{Im}[X_{(N/2)-m}] = -\operatorname{Im}[X_{(N/2)+m}] \quad (5.48)$$

(5.47) ve (5.48) özelliklerinden

$$X_{(N/2)+m} = X_{(N/2)-m}^*; \quad m = 0, 1, 2, \dots, (N/2) - 1 \quad \text{ için} \quad (5.49)$$

ve

$$|X_{(N/2)+m}| = |X_{(N/2)-m}| \quad (5.50)$$

yazılabilir.

(5.50), $\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ dizisinde bulunan spektral enformasyonun tamamının ilk $N/2$ AFD katsayısında bulunduğunu göstermektedir. Buna göre, sadece ilk $N/2$ AFD katsayısının hesaplanması yeterlidir.

$N = 8$ için, $N/2 = 4$

$$X_4 = X_4^*; \quad X_5 = X_3^*; \quad X_6 = X_2^*; \quad X_7 = X_1^*$$

$N = 7$ için benzer şekilde aşağıdaki gibi olduğu gösterilebilir.

$$X_4 = X_3^*; \quad X_5 = X_2^*; \quad X_6 = X_1^*; \quad X_7 = X_0^*$$

İşaret dizisi $x(n)$ nin karmaşık değerli olması durumunda yukarıdaki simetri özellikleri geçerli değildir.

5.3.3 Zaman ve frekans seçiciliğine ilişkin belirsizlik prensibi

Ayrık-Fourier dönüşümünün belirsizlik prensibi AFD nin zaman ve frekans domenindeki kavramlarıyla ilgilidir. Fizikteki iyi bilinen belirsizlik ilkesiyle eşdeğerdir. Bu kavram fiziksel özelliklerin bir sonucu olmayıp sadece temel bir matematiksel formülasyonun neticesidir.

Periyodu P olan periyodik bir $x(t)$ işaretini T örnekleme aralığı ile örnekleyelim. $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ şeklinde bir periyot boyunca örnek noktaları elde edilirken, T zaman domenindeki seçiciliği, $P = NT$ olacak biçimde N AFD uzunluğunu yada örnek noktaların sayısını göstermektedir. Bölüm 4 de tartışıldığı üzere, örneklenmiş periyodik $x(n)$ işaretinin Fourier dönüşümü $x(\omega)$ da ayrık ve periyodiktir. Tanımlı olduğu frekans noktaları $\omega = k\omega_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ dir. Burada temel frekans olan

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{NT} \quad (5.51)$$

frekans seçiciliği olarak adlandırılır. Frekans domenindeki tekrarlama periyodu AFD analizinde kapsanan frekans aralığına eşittir. Gerçekten, frekans aralığı,

$$N\omega_0 = N \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{T} \quad (5.52)$$

olarak bulunur. (5.35) den

$$\omega_0 T = \frac{2\pi}{N} \quad (5.53)$$

yazılabilir. N örnek sayısını gösterdiğine göre (5.53) belirsizlik prensibini göstermektedir. Daha açık bir yazımla, $(\omega_0, \text{frekans seçiciliği}) \times (T, \text{zaman seçiciliği veya örnekleme zamanı}) = \frac{2\pi}{N}$ olarak verilen bir sabite eşittir. Eğer nokta sayısı sabitse, birinde yapılan iyileştirme diğerinin aleyhine olacaktır.

5.3.4 AFD ile Fourier dönüşümü arasındaki bağlantı-eşdeğerlik koşulları

Ayrık-Fourier dönüşümü (AFD) ile sürekli Fourier dönüşümünün yaklaşığı olduğu için ilgilenilmektedir. Bu yaklaşıklığın geçerliliği kesinlikle ilgilenilen dalga biçimine bağlıdır. Bu bölümde, ayrık ve sürekli dönüşümlerin eşdeğerlik derecesini belirlemek için grafiksel

analiz yöntemi kullanılacaktır. İki dönüşüm arasındaki farklılıkların temel nedeni, AFD için geçerli olan örnekleme ve kesmedir.

AFD ile Fourier dönüşümünün eşdeğerliği için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

1. Zaman fonksiyonu $x(t)$ periyodik olmalıdır.
2. $x(t)$ sınırlı bant genişlikli olmalıdır.
3. Örnekleme hızı, $x(t)$ nin en büyük frekans bileşeninin en az iki katı olmalıdır.
4. Kesme (pencereleme) fonksiyonu $w(t)$, $x(t)$ nin bir periyodunda (veya periyodun tam katlarında) sıfırdan farklı olmalıdır.

Verilen bir $x(t)$ işaretinin Fourier integrali (5.54) denklemi ile bulunur.

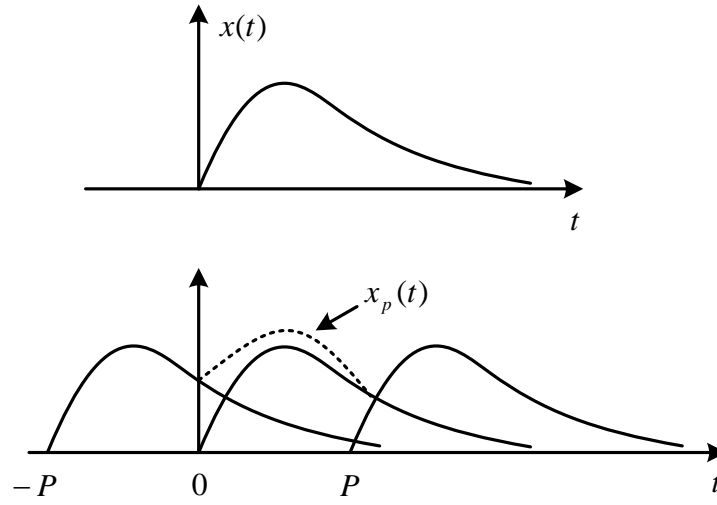
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.54)$$

$x(t)$ periyodik ve periyodu P ise (5.54) integrali, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için bir dizi integralin toplamı formunda yazılabilir.

$$X(\omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_{\lambda P}^{(\lambda+1)P} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.55)$$

(5.55) denklemi $t = \lambda P + \tau$; $dt = d\tau$ değişken dönüşümü yardımıyla (5.56) gibi olur.

$$X(\omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \int_0^P x(\tau + \lambda P) e^{-j\omega \tau} \cdot e^{-j\omega \lambda P} d\tau = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(\tau + \lambda P) e^{-j\omega \tau} \cdot e^{-j\omega \lambda P} d\tau \quad (5.56)$$



Şekil 5.5 $x_p(t)$ nin $0 \leq t \leq P$ aralığında örtüşmeden dolayı oluşan yeni dalga formu. P

periyodu yeterince büyük seçilirse $0 \leq t \leq P$ için $x_p(t) \cong x(t)$ olacağı görülmektedir.

$\omega = k\omega_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ayrık frekansları (5.56) daki $X(\omega)$

$$X(k\omega_0) = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(\tau + \lambda P) e^{-jk\omega_0\tau} \cdot e^{-jk\omega_0\lambda P} d\tau \quad (5.57)$$

ifadesinden bulunabilir. Ayrıca, $\omega_0 = 2\pi/P$ ise yukarıdaki denklem,

$$X(k \frac{2\pi}{P}) = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(t + \lambda P) e^{-jk(\frac{2\pi}{P})\tau} \cdot d\tau \quad (5.58)$$

biçiminde sadeleştirilir. P periyotlu $x(t)$ işareti için,

$$x_p(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x(t + \lambda P) \quad (5.59)$$

notasyonu kullanılırsa, (5.58) denklemi (5.60) formunda elde edilir.

$$X(k \frac{2\pi}{P}) = \int_0^P \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} x_p(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{P})t} \cdot dt \quad (5.60)$$

(5.59), $x(t)$ işaretinin periyodik ya da katlanmış uyarlamasıdır. Bu durum şekil 5.5 de gösterilmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi, P periyodu yeterince büyük tutulursa

$$x_p(t) \cong x(t); \quad 0 \leq t \leq P \text{ için} \quad (5.61)$$

yazılabilir. (5.61) deki sonuç (5.60) da yerine konulursa,

$$X(k \frac{2\pi}{P}) \cong \int_0^P x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{P})t} .dt \quad (5.62)$$

bulunur. Zaman domeninde $x(t)$ işareti sınırlı ise $P \geq 2t_{\max}$ için zaman domeni örtüşmesi olmayacaktır. Bu koşul örnekleme teoreminin zaman domeni karşılığıdır. Bununla beraber frekans domeninde $\omega_0 = 2\pi/P$ aralıklarıyla yapılan örneklemin zaman domeninde oluşturduğu örtüşme ile de ilgilidir. $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü olan $X(\omega)$ nın ayırık frekanslardaki $\omega = k(2\pi/P)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ değerlerinin, $0 \leq t \leq P$ sınırlı aralığında $x_p(t) e^{-j(\frac{2\pi}{P})t}$ nin integraliyle elde edileceği (5.60) dan anlaşılmaktadır. $x(t)$ sınırlı bir işaret ve P yeterince büyük seçilirse, $x_p(t)$ nin oluşumunda örtüşme olmayacaktır. O halde, $0 \leq t \leq P$ aralığında $x_p(t) = x(t)$ olur.

$P = NT$ olacak şekilde $x(t)$ işareti, $t = nT$ ayırık noktalarında N örnek ile tanımlanmış ise, (5.60) daki integral yaklaşık olarak toplam biçiminde ifade edilebilir. $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ için,

$$X(k \frac{2\pi}{P}) \cong \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nt) e^{-jk(\frac{2\pi}{NT})nT} .T \quad (5.63)$$

veya

$$X(k \frac{2\pi}{P}) \cong T \sum_{n=0}^{N-1} x_p(nt) e^{-jn(\frac{2\pi}{T})k} \quad (5.64)$$

yazabiliriz.

(5.64) ifadesi $x(t)$ işaretinin $\omega = k(2\pi / N)$; $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ayrık frekans noktalarındaki Fourier integralinin değerlerini yaklaşık olarak vermektedir. Bu değerler $x_p(nT)$ uyarlamasının ayrık Fourier dönüşümünün (AFD) $T = P/N$ katına eşittir. Ancak, P yeterince büyük seçilirse örtüşme olmayacaktır. Bu durumda

$$x_p(nT) = x(nT) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{ için} \quad (5.65)$$

olacak ve (5.66) daki gibi yazılabilecektir.

$$X(k \frac{2\pi}{P}) \cong \frac{P}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jn(\frac{2\pi}{N})k} = \frac{P}{N} AFD[x(nT)] = \frac{P}{N} X_k = TX_k \quad (5.66)$$

Açıklama 5.4 İhmal edilebilir bir örtüşmeyle periyodik duruma getirilen bir işaretin ayrık Fourier dönüşümü, orijinal dalga formunun $\omega = k\omega_0 = k(2\pi / P) = k(2\pi / NT)$ ayrık frekanslarında ki Fourier integralini $T = P/N$ faktörüyle verir. Burada,

$T =$ örnekleme aralığı

$\omega_0 =$ frekans aralığı $= 2\pi / P = 2\pi / NT$

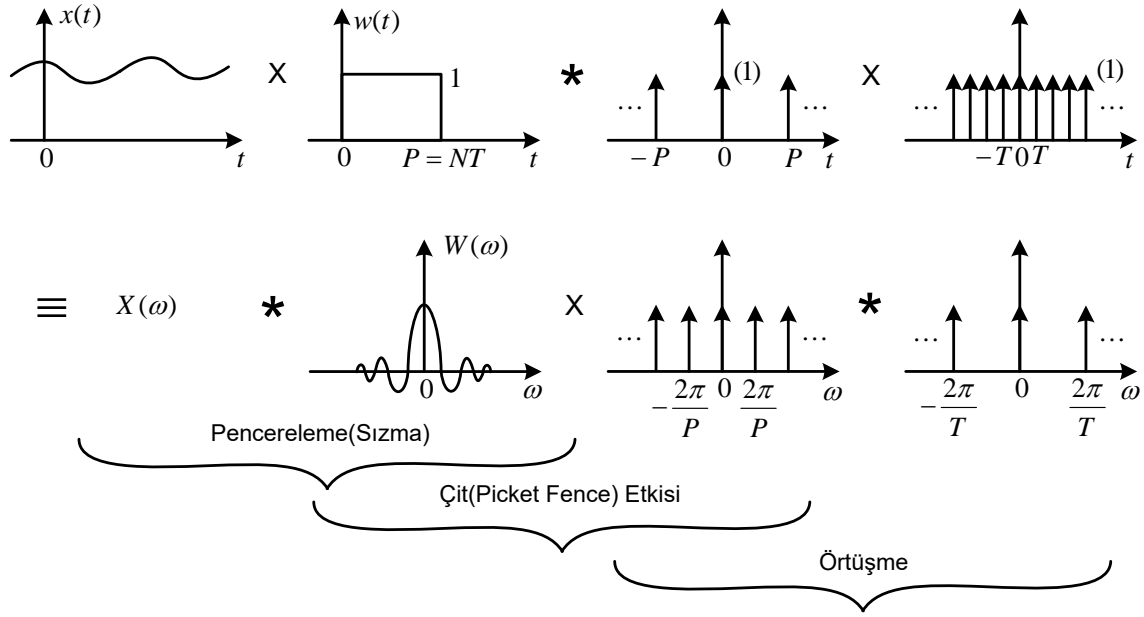
$NT =$ zaman domenindeki tekrarlama periyodu $= P$

$N\omega_0 =$ Frekans domenindeki tekrarlama periyodu $= 2\pi / T$ olarak tanımlanır.

5.4 AFD işlemindeki yaklaşıklıklar

Verilen bir $x(t)$ işaretinin AFD sinin bulunmasında kullanılan işlemlerin herbiri yaklaşıklığa neden olmaktadır. Şekil 5.6 da AFD deki tüm işlem basamakları görülmektedir. Burada görülen işlem sırası değiştirilebilmektedir.

Örnekleme işleminin etkileri daha önce incelendiği için periyodikliğin ve pencerelemenin etkileri üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır.



Şekil 5.6 AFD işleminde kullanılan yaklaşıklar.

5.4.1 Çit (picket fence) etkisi

$x(n)$ işareti ω frekanslı $x(t) = e^{j\omega t}$ karmaşık fonksiyonun $t = nT$ anlarında örneklenmesiyle elde edilsin. O halde,

$$x(nT) = e^{j\omega nT}; \quad \omega = 2\pi f \quad (5.67)$$

yazılabilir. AFD ise,

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega nT} \cdot e^{-jk n(\frac{2\pi}{N})} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j[\omega T - k(\frac{2\pi}{N})]n} = \frac{1 - e^{j2\pi[fT - (k/N)]N}}{1 - e^{j2\pi[fT - (k/N)]}} \quad (5.68)$$

olarak bulunur. Genlik ve faz spektrumu biçiminde gösterilimden yararlanarak,

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} \quad (5.69)$$

formunda yazılırsa,

$$|X_k| = \frac{\sin \pi[fT - (k/N)]N}{\sin \pi[fT - (k/N)]} \quad (5.70)$$

ve

$$\Delta X_k = \pi[fT - (k/N)](N-1) \quad (5.71)$$

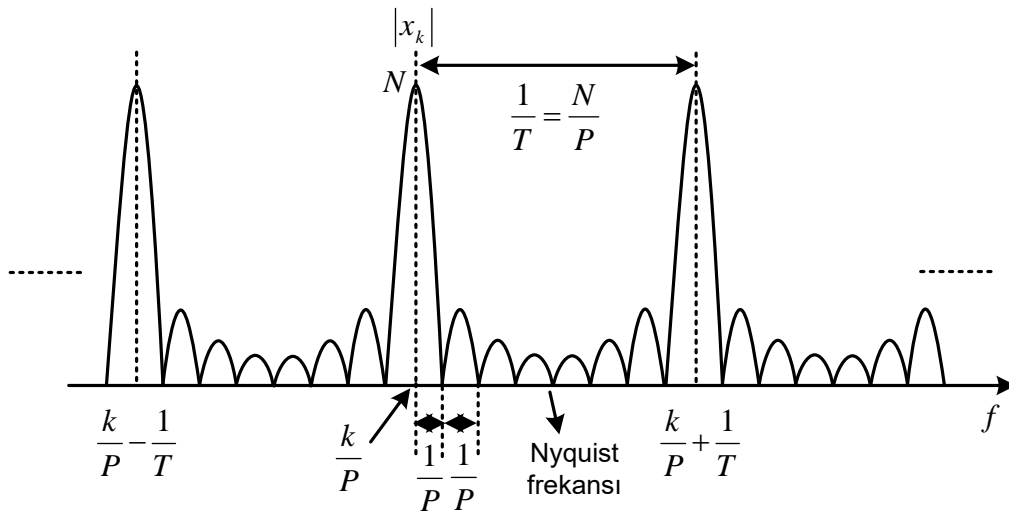
olacaktır. Ayrıca, büyük N değerleri için

$$\frac{\sin \phi}{\sin \frac{\phi}{N}} \approx \frac{N \sin \phi}{\phi} \quad (5.72)$$

olma özelliğinden yararlanarak (5.70) deki genlik spektrumu için büyük N için

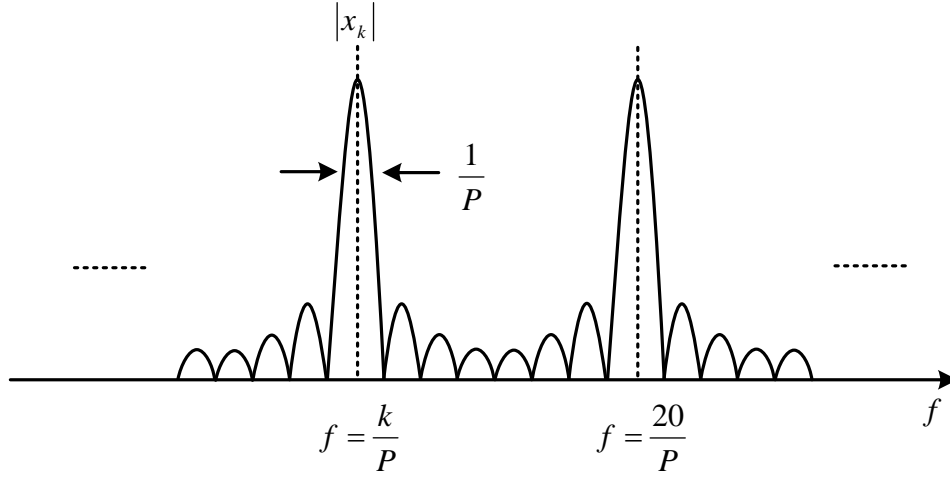
$$|X_k| \rightarrow \frac{N \sin \pi[fT - (k/N)]}{\pi[fT - (k/N)]} \quad (5.73)$$

elde edilir. $|X_k|$ nın diyagramı şekil 5.7 de görülmektedir.



Şekil 5.7 Tarama fonksiyonu, T = Örnekleme aralığı; $P = NT$ = kayıt uzunluğu; k = frekans sırası $= 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Şekil 5.8 de $N = 20$ için $|X_k|$ nın frekansa göre değişimi çizilmiştir. AFD nin sadece temel lobları gözönüne alınırsa, katsayılar şekil 5.9(a) da yaklaşık olarak gösterildiği gibi bir dizi bant geçiren süzgeç olarak düşünülebilir. Bu bant geçiren süzgeçlerin 4dB veya $2/\pi$ noktalarındaki bant genişliği $1/P$ dir. Burada, $2/\pi = 0.637$ olup, $20\log(0.637) = -3.9$ dur.



Şekil 5.8 $N = 20$ için $|X_k|$ nın frekansa göre değişimi.

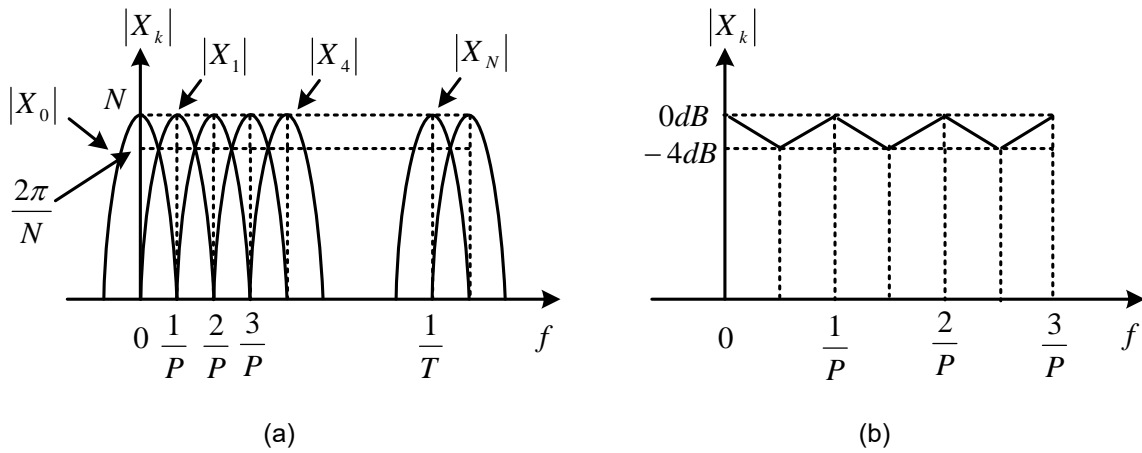
Şekil 5.9(b) de görüldüğü gibi AFD, işaretin birbiri üzerine örtüşen bant geçiren süzgeçlerden geçirilmesine eşdeğer bir durum yaratmaktadır. Şekil 5.9(b) deki şekil bir çite benzediğinden bu duruma "picket fence" etkisi denir.

Çit etkisini yok etmenin yollarından biri örneklenmiş işarete sıfırlar ilave yöntemidir. Sıfırlar ilavesiyle N örnek sayısı artacağından, süzgeçler arasındaki $1/P$ aralığı azalır. Böylece orijinal uzatılmış işaretin bileşenleri arasındaki frekans bileşenleri için AFD katsayıları hesaplanmış olur. Bir tür frekans domen interpolasyonu olan bu işlemle frekans seçiciliği artırılmış olmaktadır. Buradan AFD nin çit etkisine ilişkin iki önemli sonuç ortaya çıkmaktadır.

1. Eğer P sabit tutulursa N ye bağlı olmaksızın, süzgeçlerin bant genişlikleri $1/P$ ile sabittir. $1/P$ nin katlarında ortaya çıkan frekans cevabı N den bağımsızdır. Anlamlı olarak kapsanan bant genişliği $N/2P = 1/2T$ den, N nin artırılması (P sabit olduğunda) bant genişliğini artırmasına rağmen frekans seçiciliğini değiştirmez.

2. Eğer T sabit tutulursa, anlamlı olarak kapsanan bant genişliği $1/2T$ dir. Ayrıca, herhangi bir N değeri için süzgeç bant genişlikleri $1/NT = 1/P$ dir.

O halde, N nin artırılması (T sabit olduğunda) her bir süzgecin bant genişliğini azaltırken kapsanan bant genişliği sabit kalır. N nin artırılması frekans bandının tamamen kaplanması için gerekli süzgeç sayısını da artırmaktadır. Eğer N sayısı iki katına çıkarılırsa, süzgeç sayısı iki katına çıkar ve bant genişlikleri yarıya iner.



Şekil 5.9 AFD işleminde çit etkisi.

5.4.2 Pencereleme ve sızma etkisi

Sonsuz uzunlukta bir işaret dizisi ile çalışmak imkansız olduğundan tüm işaret analizinde pencereleme kaçınılmazdır. Analiz için işaretin bir bölümü seçilir seçilmez orijinal verinin pencerelendiği söylenebilir. En basit pencereleme tekniğinde verilen işaretin incelenecek bölümü bir ile, dışarda kalan gözlem dışı aralık ise sıfır ile çarpılır. Örneğin bir sinüs veya kosinüs işaretinin sadece bir bölümünü makasla almak bu türden bir pencereleme işlemidir. Bu işlem sinüs dalgasının sonlu genişlikte birim pencere ile çarpımına eşdeğerdir. Frekans domeninde bu işlemin karşılığı konvolüsyondur. Yani, orijinal işaretin Fourier dönüşümü olan impuls ile pencerenin spektrumunun konvolüsyonu söz konusudur. Pencerenin Fourier dönüşümündeki yan lobları nedeniyle yan bantlarda bir spektrum "sızıntısı" vardır. Tablo 5.1 de dikdörtgen pencere fonksiyonunun oluşturduğu sızıntı görülmektedir. İdeal olarak, makasla kesme yoluyla gerçekleştirilen dikdörtgen pencere sonsuz genişlikte olursa, spektrum bir impuls biçiminde olacaktır. Bu özel durumda sızıntı etkisi yoktur.

Dikdörtgen pencere fonksiyonunun uçlarındaki süreksizliklerin oluşturduğu spektrum dağılımından dolayı, diğer pencere fonksiyonlarını kullanma yoluna gidilir. Pencere fonksiyonları zaman domeninde şekillendirilirken Fourier dönüşümünün frekans domeninde bazı özellikleri sağlaması istenir. Buna göre, pencerenin spektrumu yan loblarda minimum ve esas lobda maksimum enerji taşıırken bant genişliği de olabildiğince dar olmalıdır. Literatürde çok sayıda pencere fonksiyonu mevcuttur. Bunlara ilişkin zaman ve frekans domeni ifadeleri Tablo 5.1 de gösterilmiştir. Burada gösterilen pencereler aşağıdaki denklemlerle belirlenir:

1. Dikdörtgen:

$$\omega_R(k) = \begin{cases} 1; & |k| \leq N/2 \text{ için} \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

2. Hamming:

$$\omega_H(k) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(2\pi k / N); & |k| \leq N/2 \text{ için} \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

3. Üçgen:

$$\omega_T(k) = \begin{cases} 1 - (2|k| / N); & \text{diğer} \\ 0; & |k| \leq N/2 \text{ için} \end{cases}$$

4. Blackman:

$$\omega_B(k) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(2\pi k / N) + 0.08 \cos(4\pi k / N); & |k| \leq N/2 \text{ için} \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

5. Kosinüs:

$$\omega_C(k) = \begin{cases} \cos(\pi k / N); & |k| \leq N/2 \text{ için} \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$$

Açıklama 5.5 Pencereleme orijinal işarete uygulanır. Sıfırlarla genişletilmiş diziye uygulanmaz. Hamming penceresiyle çarpılmış bir kare dalganın Fourier serisi yaklaşıklığı Şekil 5.11 de görülmektedir. Bu spektrum Şekil 7.10 da gösterilen pencerelenmemiş

Fourier serisi yaklaşıklığı ile karşılaştırıldığında pencerelemenin etkisi açıkça görülmektedir.

Bu örnekte kesim frekansı $f_c = 2.0$ kHz olan ideal bir alçak geçiren süzgecin $N = 11$ terimli Fourier serisi yaklaşıklığı Şekil 5.11 (a) da görülmektedir. Gerçekten Hamming penceresinin kullanılması Şekil 5.10(a) da görülen yan bantları ortadan kaldırmaktadır. Fourier serisi yaklaşıklığında terim sayısı artırıldığında ideale daha yakın sonuç elde edilmektedir. Şekil 5.11(b) de $N = 41$ terim için Fourier serisi yaklaşıklığı görülmektedir. Bu yöntem FIR süzgeç tasarım bölümünde ayrıntılı olarak tartışılacaktır.

Tablo 5.1 Pencere fonksiyonları

Şekil 5.10 Pencerelememiş bir kare dalganın (ideal alçak geçiren süzgecin) Fourier serisi yaklaşıklığı; a) $N = 11$ terim için; b) $N = 41$ terim için.

Şekil 5.11 Hamming penceresi ile çarpılmış bir kare dalganın (ideal alçak geçiren süzgecin) Fourier serisi yaklaşıklığı; a) $N = 11$ terim için; b) $N = 41$ terim için.