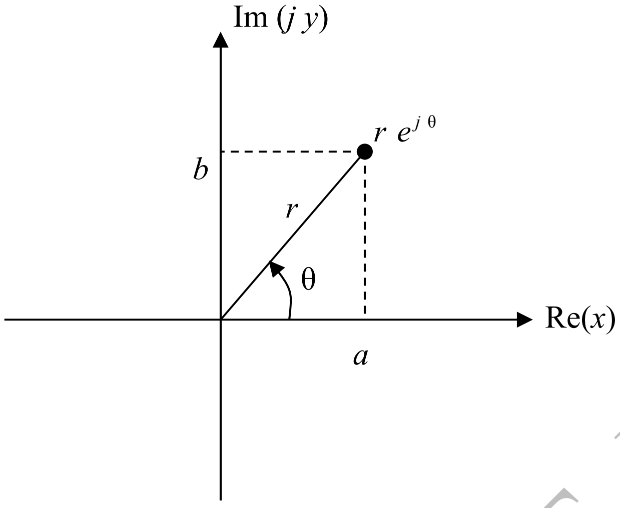
Kompleks Sayılar (karmaşık sayılar)



Şekil 1 Kompleks uzay

$z = a + jb$

$a = x\cos\theta$

$b = y\sin\theta$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = Arctg\dfrac{b}{a}$

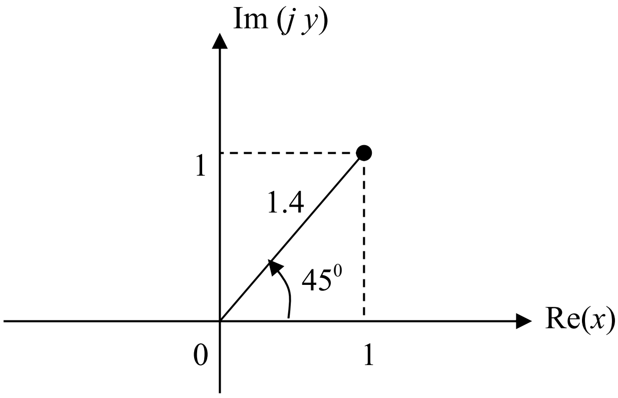
$z = r\ e^{j\theta} = |z|\ e^{j\theta}$

Örnek

$z = 1 + j$ ise, $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.4$

$\theta = \mathrm{Arctg}\dfrac{b}{a} = \mathrm{Arctg}\dfrac{1}{1} = \mathrm{Arctg}1 = 45^0$

$\theta = 45^0$



Şekil 2 Kompleks düzlem ($z = 1 + j$)

Örnek

$$e^{j30} = \cos 30 + j \sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$$

$$e^{j\,\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

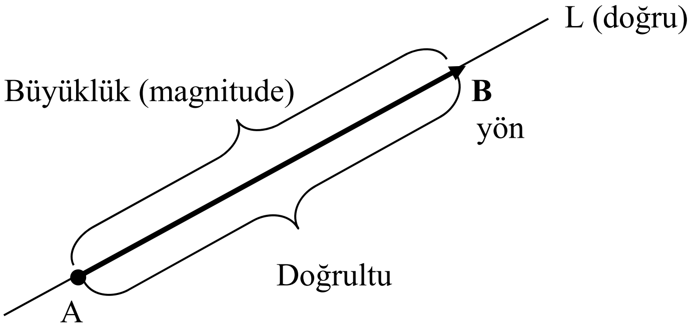
Örnek

$$e^{-j60} = e^{j(-60)} = \cos(-60) + j\sin(-60) = \cos 60 + j\sin(-60) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

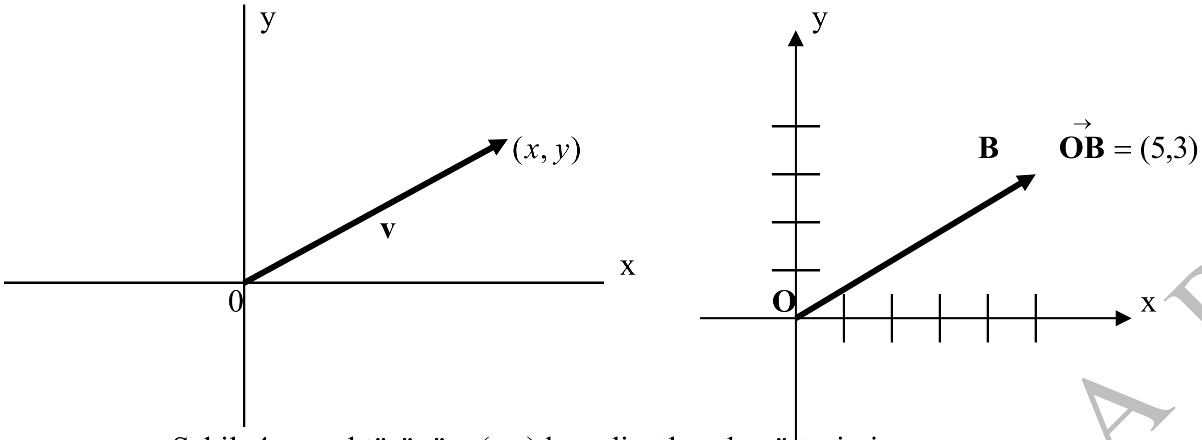
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

VEKTÖRLER

Vektörler belirli yön, doğrultu ve büyüklükteki (uzunluk) doğru parçalarıdır. Yönlendirilmiş doğru parçaları tanımında doğrudur. Genellikle belli bir koordinatta bulunan bir L doğrusunun belirli (AB) uzunluğundaki parçası vektör olarak anılır. Dolayısıyla yönü ve şiddeti değişebilen ancak doğrultusu değişmeyen doğru parçalarıdır. Çünkü üzerinde bulundukları doğrunun doğrultusu değişmez.



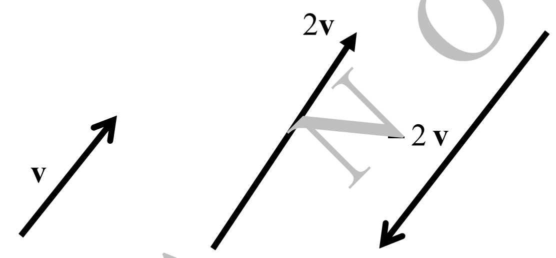
Şekil 3 Vektör gösterimi



Şekil 4 **v** vektörünün (x,y) koordinatlarıyla gösterimi

Vektörlerin sabitle çarpımı

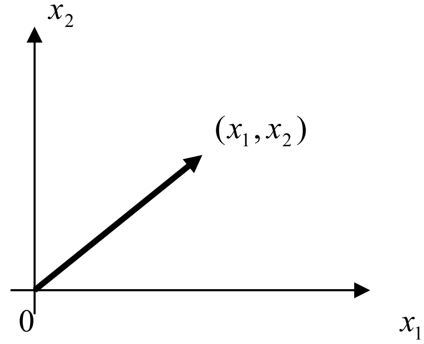
Eğer vektörümüz $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ olarak n boyutlu ise, bir “c“ sabiti (skaler) ile çarpımı, $c\,\mathbf{v} = c(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) = (cv_1, cv_2, cv_3, \cdots, cv_n)$



Şekil 5. Vektörlerin sabitle (skaler) çarpımı

Norm : Vektör uzunluğu

Vektörlerin uzunluğu ya da şidedetinin hesaplanması vektörün büyüklüğü hakkında bilgi sağlar. Bir anlamda vektörün enerjisi olarak görülebilecek vektör uzunluğu norm olarak anılmaktadır. Norm vektörün boyutuna göre hesaplanmaktadır. Aşağıda iki boyutlu reel bir vektör ve normunun hesaplanması ele alınmıştır.



Şekil 6. Gerçek vektörlerin R^2 deki uzunluğu

Şekilden x_1 ve x_2 koordinatlarından R^2 iki boyutlu reel vektör söz konusudur. Böyle bir **x** vektörünün uzunluğu **norm** olarak anılır ve $\|\mathbf{x}\|$ ile gösterilir. Buna göre $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ olarak verilen **x** vektörünün uzunluğu :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\mathbf{x}|$$

olarak hesaplanır. Eğer iki boyutlu R^2 yerine gerçek vektörler n boyutlu R^n de alınsalardı, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ vektör uzunluğu norm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Örnek

a) $\mathbf{u} = (-8,-4,8)$ Vektöünün uzunluğunu (normunu) hesaplayın.

Çözüm

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

Örnek

a) $\mathbf{v} = \frac{1}{6}(4,2,-4)$ Vektöünün uzunluğunu (normunu) hesaplayın.

Çözüm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(-\frac{4}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{36} + \frac{4}{36} + \frac{15}{36}} = \sqrt{\frac{16+4+16}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow \text{ birim vektör}$$

Reel Vektörlerin Skaler Çarpımı

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots, yx_n)$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R$

$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \; < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \; = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n$ **reel kaler çarpım** (inner product, dot product)

Örnek

$\mathbf{x} = (-3,2,-5)$ ve $\mathbf{y} = (1,-4,9)$ vektörlerinin skaler (içsel) çarpımını hesaplayın.

Çözüm

$$\mathbf{x}\ .\ \mathbf{y} = \ <\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}> \ = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n = (-3,2,-5)\bullet(1,-4,9) = -3.1 + 2.(-4) + (-5).9$$
$$= -3 - 8 - 45 = -56$$

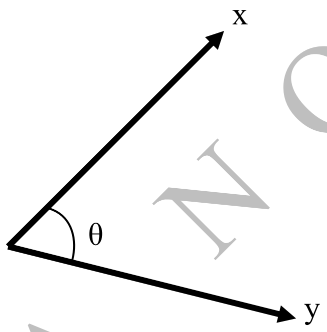
Kompleks Vektörlerin Skaler Çarpımı

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \quad , \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots, yx_n) \quad , \quad \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y} \in C$$

$$\mathbf{x.y} = \ <\mathbf{x},\mathbf{y}> \ = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$ **skaler kompleks çarpım**

İki Vektör Arasındaki Açı

Bu bölümde vektör bahsi için temel prensipleri içeren, iki vektörün arasındaki açının hesaplanması, ve çeşitli amaçlara uygun olarak analizleri ele alınacaktır. Aşağıdaki şemadan iki vektörün θ açısıyla konumlandıklarını göz önüne alalım.



Şekil 7 x ve y vektörleri

$$\mathbf{x.y} \ = \ <\mathbf{x},\mathbf{y}> \ = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}| \cos\theta$$

vektör uzunluklarını norm olarak da ifade edebiliriz.

$$\mathbf{x.y} \ = \ <\mathbf{x},\mathbf{y}> \ = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|} \ \rightarrow \ \theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

Örnek

$$\mathbf{x} = (-2,4,3) \quad , \quad \mathbf{y} = (2,5,-5) \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ise} \quad \mathbf{x}\,.\,\mathbf{y} = ?$$

Çözüm

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = <\mathbf{x},\mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos\theta$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25 + 25} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta = (\sqrt{29}).(3\sqrt{6})\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\sqrt{29\times 6}\,.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{174}\,.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{174\times 2}}{2} = \frac{3\sqrt{348}}{2} = \frac{3\times 2\sqrt{87}}{2}$$

$$= 3\sqrt{87}$$

Örnek $\mathbf{x} = (9,-2)$, $\mathbf{y} = (4,18)$ vektörlerinin skaler çarpım özelliğini inceleyin.

Çözüm

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{340}$$

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|} = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|} = \frac{(9.4 + (-2)18)}{\sqrt{85}\sqrt{340}} = \frac{0}{\sqrt{85.340}} = 0$$

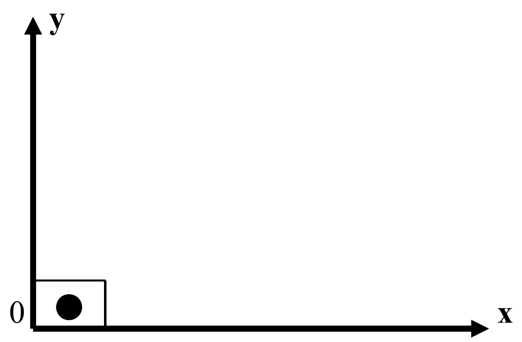
$$\cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

Bu durumda **x** ve **y** <u>**vektörleri ortogonaldir**</u>.

Not : Vektörler bu örnekteki gibi ortagonal, yani bir birlerine dik iseler, aralarında lineer bir ilişki veya benzerlik yoktur. Bu durumdaki vektörler bağımsız olup, <u>**lineer bağımsız**</u> olarak anılırlar.

Ortogonal Vektörler

Vektörlerin ortogonalliği geometrik açıdan dikliği belirlemektedir. **x** ve **y** vektörleri ortogonal iseler birbirlerine dik yani aralarındaki açının $\theta = 90^0$ olduğu vurgulanmaktadır.

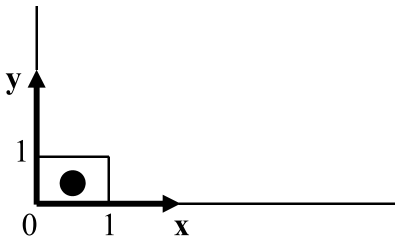


Şekil 8 Ortagonal vektörler

Görüldüğü gibi **x** ve **y** vektörleri birbirine dik olup, aralarındaki açı 90^0 dir. Bu özellikteki vektörlere <u>**ortagonal vektörler**</u> denilmektedir.

Ortonormal Vektörler

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ortogonal, birbirlerine dik, aralarındaki açı $\theta = 90^0$, ve de içsel çarpımları $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$ ve uzunlukları "1" ise $\|\mathbf{x}\| = 1$ ve $\|\mathbf{y}\| = 1$ vektörler ortonormal olarak anılırlar.



Şekil 9 Ortonormal vektörler

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$ matrislerinin $\mathbf{AB}$ çarpımını hesaplayalım.

Çözüm

$\mathbf{C}_{m\,x\,n} = (\mathbf{A}_{m\,x\,r})\ \mathrm{x}\ (\mathbf{B}_{r\,\,x\,n})$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & & \mathbf{B} & & \mathbf{AB} \\ m \times r & & r \times n & = & m \times n \end{array}$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$ $\rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-1).4+(-3).(-8) & (-1).6+(-3).1 \\ 2.4+5.(-8) & 2.6+5.1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} -4+24 & -6-3 \\ 8-40 & 12+5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 20 & -9 \\ -32 & 17 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ Kare matrisinin determinantını hesaplayın.

Çözüm

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 8.7 - 3.(-5) = 56 + 15 = 71$$

$\det \mathbf{A} \neq 0$ olduğu için $\mathbf{A}$ matrisi **<u>tekil değildir</u>** <u>(nonsingular)</u> ve **tersi** ($\mathbf{A}^{-1}$) **<u>alınabilir</u>**.

Örnek $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 12\\ -3 & 9\end{bmatrix}$ Matrisinin varsa çarpma işlemine göre $\mathbf{A}^{-1}$ tersini bulun.

Çözüm $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}4 & 12\\ -3 & 9\end{vmatrix}=4.9-((-3).12)=36-(-36)=36+36=72$

$\det\mathbf{A}\neq 0$ olduğundan **A** matrisinin içerdiği vektörler bağımsızdır. $\det\mathbf{A}=0$ olması halinde vektörler bağımlı olurdu, aynı zamanda **A** mtrisinin tersi alınamazdı.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ab-cd}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{(4.9-(-3).12)}\begin{bmatrix}9 & -12\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{(36-(-36))}\begin{bmatrix}9 & -12\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{(36+72)}\begin{bmatrix}9 & -12\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix}9 & -12\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

Örnek $\begin{matrix}3x-8y=-9\\ 5x+7y=46\end{matrix}$ Lineer denklem sisteminin çözümünü elde edin.

Çözüm Verilen basit lineer denklem sisteminin açık hali,

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{y}\rightarrow\quad\begin{matrix}3x-8y=-9\\ 5x+7y=46\end{matrix}\quad\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -8\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}$$

Buradan $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}\rightarrow\quad\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 5 & 7\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}$ olduğundan

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ab-cd}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 5 & 7\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{(3.7-(-8).5)}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{(21-(-40))}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{(21+40)}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}$$

$$x=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}7 & 8\\ -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-9\\ 46\end{bmatrix}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}7.(-9)+8.46\\ (-5).(-9)+3.46\end{bmatrix}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}-63+368\\ 45+138\end{bmatrix}=\frac{1}{61}\begin{bmatrix}305\\ 183\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{305}{61}\\ \frac{183}{61}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}$$