IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

KESİKLİ RASTGELE DEĞİŞKENLER

İçerik

Bernoulli Rastgele Değişkeni

Binom Rastgele Değişkeni

Poisson Rastgele Değişkeni

Geometrik Rastgele Değişken

Negatif Binom Rastgele Değişken

Bernoulli Rastgele Değişkeni

Bir deneyi sonucunun başarılı veya başarısız olarak sınıflandırıldığını düşünelim. X rastgele değişkeni deney başarılı olduğunda 1, başarısız olduğunda 0 değerini alsın. Bu durumda $0 \leq p \leq 1$ için X'in olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

Bu X rastgele değişkenine **Bernoulli rastgele değişkeni** denir ve beklentisi aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = 1p + 0(1 - p) = p$$

Binom Rastgele Değişkeni

p olasılıkla başarılı ve 1-p olasılıkla başarısız olan birbirinden bağımsız n adet deney gerçekleştirdiğimizi düşünelim. X rastgele değişkeni bu n deneyin başarılı sonuç sayısını gösteren rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkenine **(n, p) parametreli binom rastgele değişkeni** denir ve olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

Bernoulli rastgele değişkeni (1, p) parametreli binom rastgele değişkenidir.

Örnek 1

Bir firmanın ürettiği her bir cd'nin birbirinden bağımsız olarak 0,01 olasılıkla defolu olduğu biliniyor. Firma cd'leri 10'luk paketler halinde satıyor. Satılan bir pakette 1'den fazla cd defolu çıkarsa iade garantisi veriliyor. Satılan paketlerin yüzde kaçı iade alınır?

Örnek 1

X bir paketteki defolu cd sayısını göstersin. Bu durumda X, (n=10, p=0,01) parametreli bir binom rastgele değişkendir. Bir paketin değiştirilme olasılığı

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X > 1) = 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9$$

$$P(X > 1) = 0{,}004$$

Satılan paketlerin yüzde 0,4'ü iade alınır.

Binom Rastgele Değişkeni

(n, p) parametreli bir binom rastgele değişkenin beklentisi aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = np$$

(n, p) parametreli bir binom rastgele değişkenin k. momenti aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Burada Y, (n-1, p) parametreli bir binom rastgele değişkendir.

$$E[X^k] = npE[(Y+1)^{k-1}]$$

Binom Rastgele Değişkeni

Y, (n-1, p) parametreli bir binom rastgele değişken olmak üzere, (n, p) parametreli bir X rastgele değişkeninin varyansı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E[X^2] = npE[(Y+1)^{2-1}] = npE[Y+1] = np(E[Y] + E[1])$$

$$E[X^2] = np(E[Y] + 1) = np((n-1)p + 1)$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = np\big((n-1)p + 1\big) - (np)^2$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Binom Rastgele Değişkeni

(n, p) parametreli bir X binom rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(i) = P(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad i = 0,1,2 \ldots, n$$

$P(X = k + 1)$ ve $P(X = k)$ arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$P(X = k + 1) = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P(X = k)$$

Örnek 2

X, (n=6, p=0,4) parametreli bir binom rastgele değişken olsun. Bu durumda X'in alabileceği her bir değerin olasılığı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^{0}(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}6^{6}=0{,}0467$$

$$P(X=k+1)=\frac{p}{1-p}\frac{n-k}{k+1}P(X=k)$$

$$P(X=1)=\frac{0{,}4}{1-0{,}4}\frac{6-0}{0+1}P(X=0)=\frac{4}{6}\frac{6}{1}0{,}0467=0{,}1866$$

Örnek 2

$P(X=1)=0{,}1866$

$P(X=2)=\frac{4}{6}\frac{5}{2}P(X=1)=\frac{4}{6}\frac{6}{1}0{,}1866=0{,}3110$

$P(X=3)=\frac{4}{6}\frac{4}{3}P(X=2)=\frac{4}{6}\frac{4}{3}0{,}3110=0{,}2765$

$P(X=4)=\frac{4}{6}\frac{3}{4}P(X=3)=\frac{4}{6}\frac{3}{4}0{,}2765=0{,}1382$

$P(X=5)=\frac{4}{6}\frac{2}{5}P(X=4)=\frac{4}{6}\frac{2}{5}0{,}1382=0{,}0369$

$P(X=6)=\frac{4}{6}\frac{1}{6}P(X=5)=\frac{4}{6}\frac{6}{1}0{,}0369=0{,}0041$

Örnek 3

Tarık ve Veysel golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p veriliyor. 7. çukur sonunda skor Tarık lehine 4-3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

T: Tarık'ın galip gelmesi

V: Veysel'in galip gelmesi

Örnek 3

Tarık ve Veysel golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p veriliyor. 7. çukur sonunda skor Tarık lehine 4-3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

T: Tarık'ın galip gelmesi

V: Veysel'in galip gelmesi

T={En az 2 çukurdan sayı alması}

V={Tüm çukurlardan sayı alması}

Örnek 3

Tarık ve Veysel golf oynuyorlar. 10 çukurlu bu oyunda kim kaybederse öğle yemeğini ısmarlayacak. Tarık'ın sayı yapma olasılığı p veriliyor. 7. çukur sonunda skor Tarık lehine 4-3 iken gelen telefon üzerine oyunu yarım bırakmak zorunda kalıyorlar. Öğlen yemeğini kim ısmarlamalıdır?

$$P(T) = \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3$$

$$P(V) = (1-p)^3$$

Örnek 4

Olasılık dersindeki düşük katılımdan dolayı dersin hocası N öğrenciden k tanesi derse gelmezse dersi iptal etme kararı alıyor. Her öğrencinin bağımsız olarak hava güzel olunca derse gelme olasılığı p_g, kötü olunca p_k olarak veriliyor. Havanın güzel olma olasılığı p olarak veriliyorsa. O gün ders yapılmasının ihtimali nedir?

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

P(A)=?

Örnek 4

Olasılık dersindeki düşük katılımdan dolayı dersin hocası N öğrenciden en az k tanesi derse gelmezse dersi iptal etme kararı alıyor. Her öğrencinin bağımsız olarak hava güzel olunca derse gelme olasılığı p_g, kötü olunca p_k olarak veriliyor. Havanın güzel olma olasılığı p olarak veriliyorsa. O gün ders yapılmasının ihtimali nedir?

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

Örnek 4

A: Dersin yapılması

B: Havanın güzel olması

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$P(A|B) = \sum_{i=N-k+1}^{N} \binom{N}{i} {p_g}^i \left(1 - p_g\right)^{N-i}$$

$$P(A|B') = \sum_{i=N-k+1}^{N} \binom{N}{i} {p_k}^i (1 - p_k)^{N-i}$$

$$P(A) = \\ p \sum_{i=N-k+1}^{N} \binom{N}{i} {p_g}^i \left(1 - p_g\right)^{N-i} + \\ (1 - p) \sum_{i=N-k+1}^{N} \binom{N}{i} {p_k}^i (1 - p_k)^{N-i}$$

Poisson Rastgele Değişkeni

(n, p) parametreli bir binom rastgele değişkende, n değeri büyük ve p değeri küçük ise bunu $\lambda = np$ parametreli bir poisson rastgele değişken olarak da düşünebiliriz.

Poisson rastgele değişkene yaklaşım yapabileceğimiz durumları şöyle sıralayabiliriz;

Bir sayfadaki hatalı karakter sayısı

Bir ülkede 100 yaşının üzerindeki kişi sayısı

Bir günde çevrilen yanlış telefon numarası sayısı

İlk kullanıldığı günde arızalanan akıllı telefon sayısı

Poisson Rastgele Değişkeni

$\lambda > 0$ olmak üzere, olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen bir X rastgele değişkenine λ parametreli poisson rastgele değişkeni denir.

$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0,1,\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Poisson Rastgele Değişkeni

$\lambda = np$ parametreli bir X poisson rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{i \leq a} P(X = i)$$

$P(X = i + 1)$ ve $P(X = i)$ arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\lambda}{i+1}$$

Poisson Rastgele Değişkeni

$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda}{i} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$

$i - 1 = j$ diyelim.

$E[X] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$

$E[X] = \lambda$

$E[X^2] = \lambda(\lambda + 1)$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$

$Var(X) = \lambda$

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3’tür. Bu hafta en az bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3’tür. Bu hafta en az bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

$$Haftalık\ ortalama\ kaza\ sayısı = 3 = E[X] = \lambda$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} = 0,9502$$

Örnek 5

Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3'tür. 3 günde bir kaza olması olasılığını hesaplayın?

$$Günde\ ortalama\ kaza\ sayısı = 3/7 = E[X] = \lambda$$

$$P(X = 1) = P(X = 1) = e^{-3/7}\frac{3/7^1}{1!} = 0{,}2792$$

A: 3 günde 1 kaza olması

$$P(A) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}2792 \cdot 0{,}7208^2 = 0{,}3137$$

Örnek 6

Bir makine tarafından üretilen bir parçanın defolu olma ihtimali 0,1’dir. Rastgele seçilen 10 üründen en fazla 1 tanesinin defolu olma olasılığı nedir? Parçaların kalitesinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayın.

Örnek 6

X, 10 ürün içerisindeki defolu ürün sayısını gösteren rastgele değişken olsun. n=10, p=0,1'dir.

X'i (n=10, p=0,1) parametreli binom rastgele değişken olarak düşünebiliriz.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = \binom{10}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^9$$

$$P(X \leq 1) = 0{,}7361$$

Örnek 6

X, 10 ürün içerisindeki defolu ürün sayısını gösteren rastgele değişken olsun. n=10, p=0,1’dir.

Poisson yaklaşımı yaparsak, X’i, $\lambda = np = 10 \times 0{,}1 = 1$ parametreli bir poisson rastgele değişken olarak düşünebiliriz.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = e^{-1}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-1}\frac{\lambda^1}{1!} \cong 0{,}7358$$

Örnek 7

10^9bit/s hızla çalışan bir bilgisayar ağı üzerinden ikili sayıların iletilmesinde hata olasılığı 10^{-8}' dir.

1 saniyede 5 veya daha fazla hata olasılığını hesaplayınız.

Örnek 7

10^9bit/s hızla çalışan bir bilgisayar ağı üzerinden ikili sayıların iletilmesinde hata olasılığı 10^{-8}' dir.

1 saniyede 5 bit veya daha fazla hata olasılığını hesaplayınız.

$$\lambda = np = 10^9 10^{-8} = 10 bit/s$$

N: 1 saniyede yapılan hata sayısı

$$P(N \geq 5) = 1 - P(N < 5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} e^{-10} \frac{10^i}{i!} = 0,9707$$

Geometrik Rastgele Değişken

Her birisinin başarılı olma olasılığı p olan bağımsız deneyler yapılsın. Deney başarılı olana kadar gerçekleştirilen tekrar sayısını gösteren rastgele değişkene geometrik rastgele değişken denir.

Örneğin X bir geometrik rastgele değişken ise P(X=3) demek, ilk iki deneyin başarısız ve 3. deneyin başarılı olma olasılığı demektir.

$$P(X = i) = (1 - p)^{i-1}p$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty}(1 - p)^{i-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

Örnek 8

Bir karakter dizisi bir hat üzerinden gönderiliyor. Bir karakterde hata olma olasılığı p'dir. Hatalı bir karakter almadan önce en az 100 karakteri doğru olarak aldığımızdan %95 emin olmak istiyoruz. p=?

N: Hatalı bir karakter gönderilene kadar yapılan hatasız gönderim sayısı

N=k $\rightarrow$ k tane karakter doğru gönderilmiş k+1. karakter hatalı

Örnek 8

Bir karakter dizisi bir hat üzerinden gönderiliyor. Bir karakterde hata olma olasılığı p'dir. Hatalı bir karakter almadan önce en az 100 karakteri doğru olarak aldığımızdan %95 emin olmak istiyoruz. p=?

N: Hatalı bir karakter gönderilene kadar yapılan hatasız gönderim sayısı

N=k → k tane karakter doğru gönderilmiş k+1. karakter hatalı

$$P(N \geq 100) = 1 - P(N < 100) = 1 - \sum_{i=0}^{99}\left[(1-p)^i p\right] = (1-p)^{100} = 0{,}95$$

$$p = 5{,}128 \times 10^{-4}$$

Negatif Binom Rastgele Değişken

Her birisinin başarılı olma olasılığı p olan bağımsız deneyler yapılsın. r. başarımın i. denemede ortaya çıkma durumunu gösteren rastgele değişkene negatif binom rastgele değişken denir.

Örneğin X bir negatif binom rastgele değişken ise r=3 için P(X=10) demek, 3. başarılı deneyin 10. tekrarda olma olasılığı demektir.

$$P(X=i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

Örnek 9

Bir ilacın %60 etkili olduğu söyleniyor. Bir hafta boyunca ilacı alan 7. kişinin ilacın etkili olduğu 5. kişi olmasının olasılığını hesaplayınız.

$$P(X=7)=\binom{6}{4}0{,}6^4 0{,}4^2 0{,}6=0{,}1866$$