IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

HİPOTEZ TESTİ - 1

İçerik

Hipotez Testi

Hipotez Çeşitleri

Kritik Bölge

Hata Tipleri

Önem Seviyesi

Normal Bir Yığının Beklentisi İle İlgili Testler

Varyansın Bilindiği Durum

Varyansın Bilindiği Durum – Çift Yanlı Test

İçerik

Varyansın Bilindiği Durum - Hata Tipi II İhtimali ve İK Eğrisi

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

Özet

Hipotez Testi

Bir yığından seçilmiş rastgele bir örneği kullanarak popülasyonun geneline ait bilinmeyen parametrelerle ilgili bir hipotezin test edilmesi.

İstatistiksel hipotez, yığın dağılımına ait parametre kümesi ile alakalı ifadelerdir.

Örneğin, bir inşaat firması yüklü miktarda kablo alımı yapacak ve kablo üreticisi ürettikleri kabloların ortalama kırılma kuvvetlerinin en az 7000psi olduğunu iddia ediyor.

Bu iddiayı (hipotezi) doğrulamak için, inşaat firması 10 birimlik rastgele kablo örneği alabilir ve bu örnek üzerinde yapacakları testlere göre üreticinin hipotezini kabul edip etmeyeceklerini karar verebilirler.

Hipotez Testi

Esas problem, bu yığından rastgele seçilen örneğin belirtilen hipotez ile uyumlu olup olmadığını tespit edecek yöntemler bulmaktır.

Örneğin bir yığının, ortalaması bilinmeyen (Θ) ve varyansı (1) olan normal dağılıma sahip olduğu verilsin.

"Θ, 1'den küçüktür" ifadesi, rastgele örnek incelenerek test edebileceğimiz bir istatistiki hipotezdir. Eğer rastgele örnek dikkate alınan hipotez ile uyumlu ise hipotez "kabul edilebilir", aksi halde "reddedilir".

Hipotez Testi

Bir hipotezi kabul ettiğimizde, hipotezin gerçekten doğruluğunu kabul etmiyoruz, hipotezin elimizdeki sonuçlar ile tutarlı olduğunu söylüyoruz.

Normal $(\Theta, 1)$ popülasyondan seçilmiş 10 elemanlı bir rastgele örnek için, eğer bu örneğin ortalaması;

- $1{,}25$ ise hipotez lehine bir kanıt olarak görünmese de hipotez kabul edilebilir.
- 3 ise, $\Theta < 1$ olduğunda dahi seçilen 10 adet rastgele değerin ortalaması 3 olabilir, fakat bu çok küçük bir ihtimaldir. O yüzden elimizdeki sonuç hipotez ile tutarsızdır.

Hipotez Çeşitleri

Θ'nın bilinmediği bir yığında Θ ile ilgili özel bir hipotezi test etmek istiyoruz. H_0 (**sıfır hipotez**) bu testi simgelesin.

Aşağıda iki adet örnek sıfır hipotezi görülmektedir.

- $H_0 : \Theta = 1$
- $H_0 : \Theta \leq 1$

Eğer birinci hipotez doğruysa, bu yığın dağılımını tümüyle tanımlar. Bu tür testlere **basit hipotez** denir.

Eğer hipotezin doğruluğu, yığın dağılımını tümüyle tanımlamıyorsa (ikinci hipotez) bu tür hipotezlere **bileşik hipotez** denir.

Kritik Bölge

Bir sıfır hipotezini test etmek için bir yığından n elemanlı rastgele seçilmiş bir örnek alırız. Bu örneğin elemanlarının $(X_1, X_2, \ldots, Xn)$ ortalamasının bulunduğu yere göre hipotezi kabul edip etmeyeceğimize karar veririz.

n boyutlu uzayda bir C bölgesi tanımlanır. Eğer rastgele örnek $X_1, X_2, \ldots, Xn$ bu bölgede ise hipotez reddedilir. Bu bölgeye **kritik bölge** denir.

Diğer bir deyişle, kritik bölge C tarafından belirlenen istatistiki test,

- eğer $(X_1, X_2, \ldots, Xn)$ C'de değil ise H_0'ı kabul et
- eğer $(X_1, X_2, \ldots, Xn)$ C'de ise H_0'ı reddet

Hata Tipleri

Hata Tipi I: H_0 doğru olduğunda H_0'ı reddetmek (α)

Hata Tipi II: H_0 yanlış olduğunda H_0'ı kabul etmek (β)

Önem Seviyesi

Amacımız hipotezin doğru veya yanlış olup olmadığını bulmaktan çok, rastgele örnek sonuçlarına göre hipotezin tutarlılığını tespit etmektir.

Bu durumda hipotez doğru olduğunda elde ettiğimiz sonuçların gerçekleşme ihtimali çok muhtemel değilse, hipotez reddedilmelidir.

Bunu yapmanın bir yolu, bir I. tür hata ihtimaline karşılık gelen α değeri belirlemektir.

α değeri bir testin **önem seviyesi** olarak adlandırılır, önceden belirlenir ve genellikle şu değerleri alır: $0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}005$. Ancak bundan başka değerler de alabilir.

Normal Bir Yığının Beklentisi İle İlgili Testler

Normal bir yığının beklentisi ile ilgili olarak iki çeşit test mevcuttur.

1. Varyansın bilindiği durum

2. Varyansın bilinmediği durum - t Testi

Bu sununun devamında varyansın bilindiği durum işlenecek. Sonraki sunuda varyansın bilinmediği durum (t Testi) işlenecek.

Varyansın Bilindiği Durum - Çift Yanlı Test

Ortalaması (μ) bilinmeyen ve varyası (σ^2) bilinen bir normal dağılımlı yığından n elemanlı bir örnek alalım: $X_1, X_2, \dots, Xn$.

Alternatif hipotezine (H_1) karşı aşağıdaki sıfır hipotezi (H_0) test edelim. Burada μ_0 belirli bir sabit sayıdır.

- $H_0 : \mu = \mu_0$
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$

Yığın ortalaması (μ)'nün belirli bir μ_0 değerine eşit olup olmadığı test ediliyorsa **çift yanlı test** olarak isimlendirilir.

Varyansın Bilindiği Durum - Çift Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

Örnek ortalaması, beklentinin (μ) doğal bir nokta değerlendiricisi olduğuna göre, eğer μ_0, ortalamadan çok uzakta değilse H_0 kabul edilebilir.

Önem seviyesi α olduğuna göre, kritik değer c'yi bulmak için $\mu = \mu_0$ kabulü ile Hata Tipi I ihtimalini α'ya eşitleriz.

$$P\left((\bar{X} < \mu_0 - c) \cup (\bar{X} > \mu_0 + c)\right) = \alpha$$

Varyansın Bilindiği Durum - Çift Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

$\mu = \mu_0$ olduğunda, örnekleme ortalaması, beklentisi μ_0 ve varyansı $\frac{\sigma^2}{n}$ olan bir normal dağılıma sahip olacaktır. Ortalamayı standart normal dağılıma (Z) dönüştürürsek;

$$P\big((\bar{X} < \mu_0 - c) \cup (\bar{X} > \mu_0 + c)\big)$$

$$= P\left(\left(Z < \frac{\mu_0 - c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \cup \left(Z > \frac{\mu_0 + c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= P\left(\left(Z < \frac{-c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \cup \left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right) = 2 \times P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$$

Varyansın Bilindiği Durum - Çift Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

$$2 \times P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha \ \rightarrow P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha/2$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma} \ \rightarrow c = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

Varyansın Bilindiği Durum - Çift Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

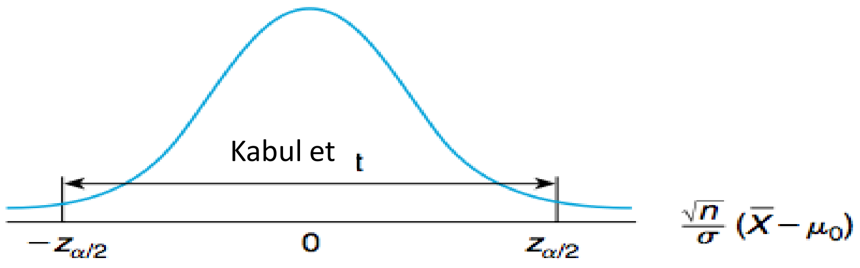
$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

- $1 - \frac{\alpha}{2}$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda $z_{\alpha/2}$'yi bul.
- Z'yi bul. $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$ ise
- reddet, eğer $Z > z_{\alpha/2}$ veya $Z < -z_{\alpha/2}$ ise



Örnek 1

Bir A konumundan μ değerinde bir sinyal gönderiliyor. B konumunda alınan sinyalin değeri, ortalaması μ ve standart sapması 2 olan bir normal dağılım ile dağılıyor. Dolayısıyla sinyale eklenen rastgele gürültü, ortalaması 0, varyansı 4 olan bir normal rastgele değişkendir ($N(0{,}4)$). B konumundaki kişiler bugün gönderilecek olan sinyalin değerinin 8 olacağını tahmin etmektedir ($\mu = 8$). Aynı sinyal değeri, birbirinden bağımsız olarak 5 kere gönderilmişse ve B konumunda alınan ortalama değer 9,5 ($\bar{X} = 9{,}5$) ise bu hipotezi test ediniz.

Örnek 1

$H_0: \mu = 8$

$H_1: \mu \neq 8$

$\alpha = 0,05$ önem seviyesi için test edelim.

$\alpha = 0,05 \rightarrow$ Hipotez doğru iken reddetme ihtimali %5.

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ değerine karşılık gelen $z_{\alpha/2} = 1,96$

$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{5}}{2}(9,5 - 8) = 1,68$

$-1,96 < 1,68 < 1,96$ olduğu için hipotez kabul edilir.

Örnek 1

$H_0 \colon \mu = 8$

$H_1 \colon \mu \neq 8$

Şimdi de $\alpha = 0{,}1$ önem seviyesi için test edelim.

$\alpha = 0{,}1$ $\rightarrow$ Hipotez doğru iken reddetme ihtimali $\%10$.

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$ değerine karşılık gelen $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{5}}{2}(9{,}5 - 8) = 1{,}68$

$1{,}68 > 1{,}645$ olduğu için hipotez reddedilir.

Örnek 1

$H_0: \mu = 8$

$H_1: \mu \neq 8$

Doğru önem seviyesini bulmak önemlidir. Bu, birçok etkene göre değişir.

Örneğin, eğer hipotez doğru iken hipotezi reddetmek büyük zarara yol açacaksa hata ihtimalinin düşük olduğu bir önem seviyesi ($0,05$ veya $0,01$ gibi) seçebiliriz.

Varyansın Bilindiği Durum - Hata Tipi II İhtimali ve İK Eğrisi

Hata Tipi II, $\mu \neq \mu_0$ olduğunda testi kabul etme ihtimali μ değerine bağlıdır.

$$\beta(\mu) = P(\mu_0 - c \leq \bar{X} \leq \mu_0 + c | \mu \; başka \; bir \; değer)$$
$$= P\left(\frac{\mu_0 - c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{\mu_0 + c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
$$= P\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)$$

$\beta(\mu)$ fonksiyonu, **işletim karakteristiği (İK) eğrisi** olarak adlandırılır ve gerçek beklenti μ iken H_0'ın kabul edilme ihtimalini verir.

$1 - \beta(\mu)$ ise **güç fonksiyonu** olarak adlandırılır ve verilen bir μ değeri için, testin gücü, μ gerçek değeri iken reddedilme ihtimalidir.

Örnek 2

Bir A konumundan μ değerinde bir sinyal gönderiliyor. B konumunda alınan sinyalin değeri, ortalaması μ ve standart sapması 2 olan bir normal dağılım ile dağılıyor. Dolayısıyla sinyale eklenen rastgele gürültü, ortalaması 0, varyansı 4 olan bir normal rastgele değişkendir ($N(0,4)$). B konumundaki kişiler bugün gönderilecek olan sinyalin değerinin 8 olacağını tahmin etmektedir ($\mu = 8$). Aynı sinyal değeri, birbirinden bağımsız olarak 5 kere gönderilmişse, B konumunda alınan ortalama değer 9,5 ($\bar{X} = 9{,}5$) ise ve gerçekte gönderilen sinyalin değeri 10 ise Hata Tipi II'yi (yani hipotez yanlışken kabul etme ihtimalini) önem seviyesi 0,05 için hesaplayın.

Örnek 2

$H_0: \mu = 8$

$H_1: \mu \neq 8$

$$\beta(\mu) = P\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}(8 - 10) - 1{,}96 \leq Z \leq \frac{\sqrt{5}}{2}(8 - 10) + 1{,}96\right)$$

$$= P(-4{,}2 \leq Z \leq -0{,}28) = P(Z \leq 4{,}2) - P(Z \leq 0{,}28) \cong 0{,}392$$

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

$\mu = \mu_0$ sıfır hipotezini test ederken, örnekleme ortalaması μ_0'dan uzakta olduğunda reddeden bir test uyguladık.

$\mu = \mu_0$ olmasının tek karşı alternatifi $\mu > \mu_0$ ise ne olur? Diğer bir deyişle $H_0: \mu = \mu_0$ sıfır hipotezinin karşı hipotezi (alternatif hipotez) $H_1: \mu > \mu_0$ ise ne olur?

Bu durumda, örnekleme ortalaması μ_0'dan çok çok büyük olduğunda sıfır hipotezini reddederiz.

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

$$P(\bar{X} > \mu_0 + c) = \alpha$$

$$P(\bar{X} > \mu_0 + c) = \alpha \rightarrow \; P\left(Z > \frac{\mu_0 + c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$z_\alpha = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma} \; \rightarrow c = \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

Kritik Bölgenin Bulunması

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

- $1 - \alpha$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda z_α'yi bul.
- Z'yi bul. $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $Z \leq z_\alpha$ ise
- reddet, eğer $Z > z_\alpha$ ise

Örnek 3

Bir A konumundan μ değerinde bir sinyal gönderiliyor. B konumunda alınan sinyalin değeri, ortalaması μ ve standart sapması 2 olan bir normal dağılım ile dağılıyor. Dolayısıyla sinyale eklenen rastgele gürültü, ortalaması 0, varyansı 4 olan bir normal rastgele değişkendir ($N(0{,}4)$). B konumundaki kişiler bugün gönderilecek olan sinyalin değerinin 8 olacağını tahmin etmektedir ($\mu = 8$). Aynı sinyal değeri, birbirinden bağımsız olarak 5 kere gönderilmişse, B konumunda alınan ortalama değer 9,5 ($\bar{X} = 9{,}5$) ise ve gönderilen sinyalin değerinin **8'den büyük** olduğu iddia ediliyorsa (karşı hipotez) önem seviyesi 0,05 için bu hipotezi test ediniz.

Örnek 3

$H_0 : \mu = 8$

$H_1 : \mu > 8$

$1 - \alpha = 0{,}95$ değerine karşılık gelen $z_\alpha = 1{,}645$

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{5}}{2}(9{,}5 - 8) = 1{,}68$$

$1{,}68 > 1{,}645$ olduğu için hipotez reddedilir.

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

Hipotez test problemi:

- $H_0: \mu \leq \mu_0$
- $H_1: \mu > \mu_0$

Bu hipotez test problemi de bir önceki ile aynı çözüme sahiptir.

- $1-\alpha$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda z_α'yi bul.
- Z'yi bul. $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $Z \leq z_\alpha$ ise
- reddet, eğer $Z > z_\alpha$ ise

Varyansın Bilindiği Durum - Tek Yanlı Test

Hipotez test problemi:

- $H_0: \mu = \mu_0$ (veya $\mu \geq \mu_0$)
- $H_1: \mu < \mu_0$

Bu hipotez test probleminin çözümü aşağıdadır.

- $1 - \alpha$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda z_α ‘ yi bul.
- Z’yi bul. $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0’ı;

- kabul et, eğer $Z \geq -z_\alpha$ ise
- reddet, eğer $Z < -z_\alpha$ ise

Örnek 4

Piyasadaki tüm sigaraların içerdiği ortalama nikotin miktarı sigara başına en az 1,6mg'dır. Bir sigara üreticisi tütün yapraklarını işlemek için yeni bir metot bulduğunu ve bu sayede sigara başına ortalama nikotin miktarını 1,6mg'ın altına indirdiğini iddia etmektedir. Bu iddiayı test etmek için bu üreticiden alınan 20 adet sigara analiz edilmiştir. Bir sigaranın nikotin içermesi ile ilgili standart sapmanın 0,8mg olduğu biliniyorsa ve 20 sigaranın ortalama nikotin miktarı 1,54mg ise %5'lik önem seviyesi için nasıl bir sonuç çıkarılabilir?

Örnek 4

Hipotez testi:

- $H_0: \mu \geq 1{,}6$
- $H_1: \mu < 1{,}6$

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{20}}{0{,}8}(1{,}54 - 1{,}6) = -0{,}336$$

$$z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}645$$

$-0{,}336 \geq -1{,}645$ olduğu için sıfır hipotezi kabul edilir.

Üreticinin iddiasını (karşı hipotezi) kabul etmek için yeterli kanıt yoktur.

Özet

Özet

Varyansın Bilindiği Durum $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0)$		
Çift Yanlı Hipotez Testi H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$	Tek Yanlı Hipotez Testi H_0: $\mu = \mu_0$ veya $(\mu \leq \mu_0)$ H_1: $\mu > \mu_0$	Tek Yanlı Hipotez Testi H_0: $\mu = \mu_0$ veya $(\mu \geq \mu_0)$ H_1: $\mu < \mu_0$
H_0 kabul: $-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$	H_0 kabul: $Z \leq z_\alpha$	H_0 kabul: $Z \geq -z_\alpha$
H_0 red: $Z > z_{\alpha/2}$ veya $Z < -z_{\alpha/2}$	H_0 red: $Z > z_\alpha$	H_0 red: $Z < -z_\alpha$