

IST108

OLASILIK VE İSTATİSTİK

KOVARYANS VE KORELASYON

A solid orange horizontal bar at the bottom of the slide.

İçerik

Kovaryans

Kovaryansın Özellikleri

Kovaryans ve Bağımlı Rastgele Değişken

Bağımsız Rastgele Değişkenlerin Kovaryansı

Kovaryans Ne İfade Eder?

Korelasyon

Korelasyonun Özellikleri

Kovaryans

Kovaryans, iki rastgele değişken arasındaki ilişkinin bir ifade biçimidir.

X ve Y iki rastgele değişken olsun.

μ_x ve μ_y sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerinin ortalamaları olsun.

X ve Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

Eşitliğin sağ tarafının açılımını yaparsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Kovaryansın Özellikleri

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X + Z, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Z, Y)$$

$$\text{Cov}(\sum_{i=1}^n X_i, Y) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, Y)$$

Kovaryans ve Bağımlı Rastgele Değişken

Bağımlı rastgele değişkenlerin varyanslarının toplamı, kovaryansları kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Cov(X_i, X_j)$$

İki rastgele değişken için

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X, Y) + Cov(Y, X)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Bağımsız Rastgele Değişkenlerin Kovaryansı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenlerse kovaryansları 0'a eşit olur.

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

Neden?

X ve Y bağımsız rastgele değişkenlerse

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Dolayısıyla

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[XY] = 0$$

Bağımsız Rastgele Değişkenlerin Kovaryansı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenlerse kovaryansları 0'a eşittir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

İki rastgele değişkenin kovaryansı 0'a eşit ise bu iki rastgele değişken bağımsızdır diyemeyiz.

Bağımlı rastgele değişkenlerin de kovaryansları 0'a eşit olabilir.

Kovaryans Ne İfade Eder?

$Cov(X, Y)$ 'nin değeri pozitif ise

- X arttıkça Y'nin artma eğiliminde olduğunun göstergesi

$Cov(X, Y)$ 'nin değeri negatif ise

- X arttıkça Y'nin azalma eğiliminde olduğunun göstergesi

Korelasyon

X ve Y iki rastgele değişken olsun.

Bu iki rastgele değişken arasındaki ilişkinin gücü korelasyon ile ifade edilebilir.

Aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{Corr}(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Korelasyon her zaman -1 ile $+1$ arasında değer alır.

$$-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$$

Korelasyonun Özellikleri

$Corr(X, Y) = 1 \Rightarrow Y = aX + b$ ve $a > 0$

$Corr(X, Y) = -1 \Rightarrow Y = aX + b$ ve $a < 0$

$Corr(X, Y)$ 'nin değeri pozitif ise

- X arttıkça Y'nin artma eğiliminde olduğunun göstergesi

$Corr(X, Y)$ 'nin değeri negatif ise

- X arttıkça Y'nin azalma eğiliminde olduğunun göstergesi

$Corr(X, Y) = 0$ ise X ve Y rastgele değişkeni **birbiri ile ilişkisizdir** denir.

Korelasyonun Özellikleri

Korelasyon, iki rastgele değişkenin arasındaki doğrusal ilişkiye dair bilgi verir.

- $Corr(X, Y) = 1$ ise veya $Corr(X, Y) = -1$ ise X ve Y rastgele değişkenleri arasında tam doğrusal ilişki var demektir.
- $Corr(X, Y)$, 1 veya -1 civarında ise örneğin 0,8 veya $-0,7$ gibi değer ise X ve Y rastgele değişkenleri arasında görece olarak güçlü bir doğrusal ilişki var demektir.
- $Corr(X, Y)$, 0 civarında ise örneğin 0,3 gibi değer ise X ve Y rastgele değişkenleri arasında görece olarak zayıf bir doğrusal ilişki var demektir.

Örnek 1

W, X, Y ve Z rastgele değişkenleri ikili olarak bağımsızdır.

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0 \text{ ve}$$

$$Var(W) = Var(X) = Var(Y) = Var(Z) = 1 \text{ ve}$$

$$R = W + X, S = X + Y \text{ ve } T = Y + Z \text{ ise}$$

$$Corr(R, S) = ?$$

$$Corr(R, T) = ?$$

Örnek 1

$$\text{Corr}(R, S) = \frac{\text{Cov}(R, S)}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(S)}}$$

$$\text{Cov}(R, S) = E[RS] - E[R]E[S]$$

$$= E[(W + X)(X + Y)] - E[W + X]E[X + Y]$$

$$= E[WX + WY + X^2 + XY] - (E[W] + E[X])(E[X] + E[Y])$$

$$= E[X^2]$$

$$= \text{Var}(X) + E[X]^2$$

$$= 1$$

Örnek 1

$$\text{Corr}(R, S) = \frac{\text{Cov}(R, S)}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(S)}}$$

$$\text{Cov}(R, S) = 1$$

$$\text{Var}(R) = \text{Var}(W) + \text{Var}(X) = 2$$

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2$$

$$\text{Corr}(R, S) = \frac{\text{Cov}(R, S)}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(S)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{2}$$

Örnek 1

$$\text{Corr}(R, T) = \frac{\text{Cov}(R, T)}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(T)}}$$

$$\text{Cov}(R, T) = E[RT] - E[R]E[T]$$

$$= E[(W + X)(Y + Z)] - E[W + X]E[Y + Z]$$

$$= E[WY + WZ + XY + XZ] - (E[W] + E[X])(E[Y] + E[Z])$$

$$= 0$$

$$\text{Corr}(R, T) = \frac{\text{Cov}(R, T)}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(T)}} = \frac{0}{\sqrt{\text{Var}(R)\text{Var}(T)}} = 0$$

Örnek 2

X ve Y bir rastgele değişkendir.

$Y = aX + b$ ise, X ve Y arasındaki kovaryans ve korelasyonu hesaplayınız.

Örnek 2

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[X(aX + b)] - E[X](aE[X] + b) \\ &= E[aX^2 + bX] - aE[X]^2 - bE[X] \\ &= aE[X^2] + bE[X] - aE[X]^2 - bE[X] \\ &= aE[X^2] - aE[X]^2 \\ &= a\text{Var}(X) \end{aligned}$$

Örnek 2

$$\text{Cov}(X, Y) = a\text{Var}(X)$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{a\text{Var}(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)a^2\text{Var}(X)}} = \frac{a}{|a|}$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

Örnek 3

X , rastgele değişkeni $(-1, 1)$ arasında düzgün olarak dağıtılmıştır.

$Y = X^n$ ise X ve Y arasındaki kovaryans ve korelasyonu hesaplayınız.

Örnek 3

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= E[XX^n] - \underbrace{E[X]}_{=0} E[X^n]$$

$$= E[X^{n+1}] = \int_{-1}^1 \frac{x^{n+1}}{2} dx = \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} \Big|_{-1}^1 = \frac{(1)^{n+2} - (-1)^{n+2}}{2(n+2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+2} & n \text{ tek ise} \\ 0 & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

Örnek 3

$$Cov(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & n \text{ tek ise} \\ 0 & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}}$$

$$n \text{ çift ise } Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} = 0$$

$$n \text{ tek ise } Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2n+1}\right)}} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$