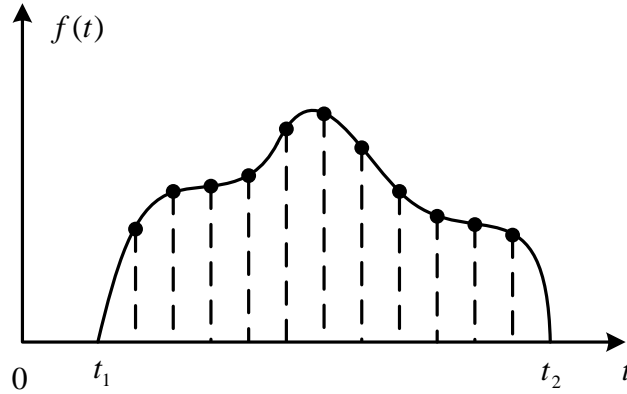


BÖLÜM 3. ANALOG İŞARETLERİN SPEKTRUM ANALİZİ

İşaret analizinde spektrum kavramı esastır. Periyodik analog işaretlerin spektrumlarının incelenmesi Fourier serileri ile mümkündür. Fourier serisi, periyodik işaretler için genel bir dik fonksiyon açılımı olarak tanımlanır. Bu açılımda en iyi yöntem, en küçük kareler yaklaşıklığıdır. Diğer taraftan, Fourier integrali, Fourier serisinin periyodunun sonsuza götürülmesi ile elde edilen limit durumudur.

3.1 Dik vektör ve işaret uzayları

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi (t_1, t_2) aralığında zamanın tüm değerleri için tanımlanan $f(t)$ işaretini ele alalım. $f(t)$ işareti, sınırlı zamanlı ve sonlu enerjilidir. Zamanın belirli anlarında alınacak örneklerle bu işareti göstermek mümkündür. Eğer bu örnekleme aralıklarını sıklaştırırsak $f(t)$ nin değişimini daha iyi biliriz.



Şekil 3.1 Sınırlı zamanlı ve sonlu enerjili işaret

Alternatif olarak, t değişkeninin seçimine bağlı bulunmayan, sayılabilir bir sayı kümesi ile bu $f(t)$ işaretini belirlemek mümkündür. Yani $f(t)$ işaretini aşağıdaki gibi ifade etmek istiyoruz.

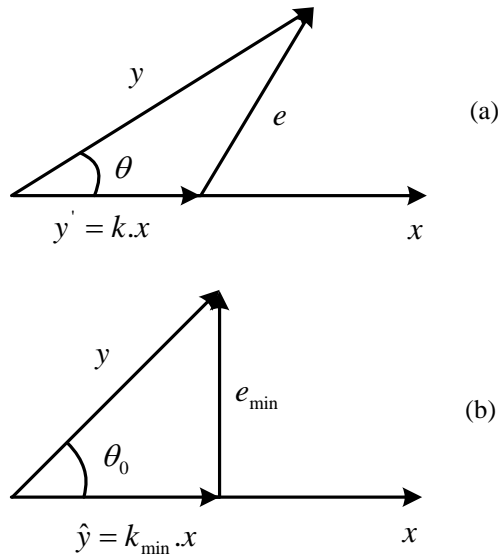
$$f(t) = \sum_n f_n \cdot \phi_n(t) \quad (3.1)$$

Denklem (3.1) de , $\phi_n(t)$ belirlenecek bir dik fonksiyon kümesini ve f_n ler ise zamandan bağımsız sayıları göstermektedir.

Vektörleri sayılabilir bir sayılar kümesi ile göstermeye alışkın olduğumuzdan, öncelikle dik vektör uzayının bazı temel özelliklerini ele alacağız. Daha sonra, Fourier serisi kavramı genelleştirilmiş dik fonksiyonlar cinsinden ifade edilecektir.

3.1.1 Dik vektör uzayı

x ve y verilen vektörler ise, y vektörü, x yönünde bulunan keyfi bir y' bileşeni ve hata vektörü e cinsinden ifade edilecektir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 Dik vektör uzayları; (a) hata vektörünün tanımı, (b) diklik

O halde y vektörü aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} y &= y' + e = kx + e \\ y' &= kx \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bu durumda hata vektörü e yi minimum yapacak k değerinin bulunması gerekmektedir. $k = k_{\min}$, hatayı minimum yapan değeri gösteriyorsa, y nin ne kadarının x yönünde olduğunun ölçüsü, k_{\min} ile gösterilmektedir. Eğer $k_{\min} = 0$ ise, x ve y vektörleri diktir. Üçgenler için cosinüs kuralından aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$|e|^2 = |y|^2 + k^2|x|^2 - 2|y||x|k \cos \theta \quad (3.3)$$

Hatanın genliğinin karesi k nin parabolik bir fonksiyonu olduğundan, $|e|^2$ nin k ya göre türevini sıfır yapan $k = k_{\min}$ değeri, $|e|^2$ yi de minimum yapacaktır. Bu durumda aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$k_{\min} = \frac{|x||y|\cos\theta}{|x|^2} = \frac{x.y}{x.x} \quad (3.4)$$

k_{\min} ifadesi yukarıdaki denklemde, iki vektörün skaler çarpımlarının oranı biçiminde ifade edilmektedir. N boyutlu iki vektör,

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]^T \quad (3.5)$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N]^T \quad (3.6)$$

formunda gösterilebildiğinden, sonuç olarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} x.y &= \langle x, y \rangle = x^T.y = y^T.x \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_Ny_N \end{aligned} \quad (3.7)$$

$k = k_{\min}$ olduğu zaman, y nin x yönündeki bileşeni \hat{y} olarak gösterilirse, aşağıdaki ilişkinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

$$\hat{y} = k_{\min} x = \left(\frac{y^T.x}{x^T.x} \right) x \quad (3.8)$$

Bu durumda hata vektörünün karesinin minimumu aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$\begin{aligned} |e|_{\min}^2 &= |y|^2 (1 - \cos^2 \theta_0) = |y|^2 \cdot \sin^2 \theta_0 \\ &= |y|^2 - k_{\min}^2 |x|^2 = |y|^2 - |\hat{y}|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bu ise, e hata vektörünün, $k = k_{\min}$ için minimum olmasının yanı sıra, x vektörüne dik olduğunu göstermektedir. Yani $e_{\min} \perp x$ olur. Şayet $e_{\min} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]^T$ ise, aşağıdaki ilişkiyi yazabiliriz.

$$\langle e_{\min}, x \rangle = e_{\min} \cdot x = \sum_n^N e_n \cdot x_n = 0 \quad (3.10)$$

(3.10) denklemi ile verilen ilişki, diklik koşulu olarak bilinir.

3.1.2 Dik işaret uzayı

Vektör uzayı kavramı işaret uzayı ve zamanın fonksiyonlarına genelleştirilebilir. x ve y vektörleri yerine zamanın karmaşık değerli birer fonksiyonları olan $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerini ele alalım. (3.2) denklemine benzer şekilde, $y(t)$ işareti, $x(t)$ ve hata fonksiyonu $e(t)$ cinsinden ifade edilebilir.

$$y(t) = kx(t) + e(t) \quad (3.11)$$

$kx(t)$ terimi, $y(t)$ nin $x(t)$ fonksiyonu üzerine olan izdüşümüdür. $e(t)$ ise, hata terimi olup aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$e(t) = y(t) - kx(t) \quad (3.12)$$

Sabit bir (t_1, t_2) zaman aralığında, hatanın karesinin integralini minimum yapan k değeri, $k = k_{\min}$ olarak gösterilirse, k_{\min} terimi vektör uzayındakine benzer şekilde bulunur. "*" simgesi karmaşık eşleniği gösterdiğinde, minimize edilecek hatanın karesinin integrali (3.13) denklemindeki gösterim biçimiyle gösterilir.

$$\langle e(t), e(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} e(t) \cdot e^*(t) \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 \cdot dt \quad (3.13)$$

(3.12) denkleminden sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$|e(t)|^2 = [y(t) - kx(t)][y^*(t) - k^*x^*(t)] \quad (3.14)$$

ve

$$\langle e(t), e(t) \rangle = \langle y(t), y(t) \rangle + k^2 \langle x(t), x(t) \rangle - k \langle x(t), y(t) \rangle - k^* \langle y(t), x(t) \rangle \quad (3.15)$$

(3.15) denklemini k ya göre türetilip, ondan sonra da sıfıra eşitlersek aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$k_{\min} = \frac{\langle y(t), x(t) \rangle}{\langle x(t), x(t) \rangle} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x^*(t) \cdot dt}{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt} \quad (3.16)$$

Şayet (3.4) ve (3.16) denklemleri karşılaştırılırsa, işaret ve vektör uzaylarındaki k_{\min} teriminin elde edilmesindeki benzerlik görülmektedir. Bununla beraber, (3.16) denkleminde $k_{\min} = 0$ yaparak, $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin dik olma koşulunu aşağıdaki biçimde buluruz.

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x^*(t) \cdot dt = 0 \quad (3.17)$$

$k = k_{\min}$ olduğu zaman, $y(t)$ fonksiyonunun $x(t)$ üzerine olan izdüşümü $y'(t)$ olarak gösterilir ve aşağıdaki (3.18) denklemindeki gibi verilir.

$$y'(t) = k_{\min} x(t) \quad (3.18)$$

Minimum hatanın karesinin integrali, (3.18) denkleminden aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\langle e_{\min}(t), e_{\min}(t) \rangle = \langle y(t), y(t) \rangle - k_{\min}^2 \langle x(t), x(t) \rangle \quad (3.19)$$

Bu denklem (3.9) denkleminin benzeridir. Ayrıca $k = k_{\min}$ olduğu zaman, $e(t) = e_{\min}(t)$, $x(t)$ işaretine dik olacaktır. Bu durumda aşağıdaki (3.20) eşitliğini yazabiliriz.

$$\int_{t_1}^{t_2} e_{\min}(t) \cdot x^*(t) \cdot dt = 0 \quad (3.20)$$

3.1.3 Genelleştirilmiş dik açılımlar

Fonksiyonların yaklaşık olarak ifadesi için, dik işaret uzayı kavramı, genelleştirilmiş dik açılımlar teorisi biçiminde genişletilebilir. Bu genel teoride Fourier serisi bir örnek olarak verilecektir. Verilen bir $f(t)$ fonksiyonunu, $\phi_k(t)$ ile gösterilen fonksiyonların, sabit katsayılar ile çarpımlarının toplamı biçiminde yaklaşık olarak ifade etmek istiyoruz. O halde $f(t)$ fonksiyonunun yaklaşık olarak ifadesi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f'(t) = \sum_{k=-N}^N f_k \cdot \phi_k(t) = F^T \cdot \phi(t) = \phi^T(t) \cdot F \quad (3.21)$$

(3.21) denklemindeki F terimi, aşağıda (3.22) denkleminde verildiği gibi, sayısal katsayılardan oluşan vektörü gösterir.

$$F = [f_{-N} \quad \dots \quad f_{-1} \quad f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_N]^T \quad (3.22)$$

(3.21) denklemindeki $\phi(t)$ terimi ise, aşağıda (3.23) denkleminde verildiği gibi, bu açılımda kullanılan temel fonksiyonlardan oluşan vektörü göstermektedir.

$$\phi(t) = [\phi_{-N} \quad \dots \quad \phi_{-1} \quad \phi_0 \quad \phi_1 \quad \dots \quad \phi_N]^T \quad (3.23)$$

Burada da temel amaç, sabit bir aralık üzerinde hata fonksiyonu $e(t)$ nin karesinin integralini minimum yapacak şekilde f_n katsayılarını belirlemektir. Bu durumda, hata fonksiyonu sırayla aşağıdaki şekilde edilir.

$$e(t) = f(t) - f'(t) \quad (3.24)$$

$$e(t) = f(t) - \phi^T(t) \cdot F \quad (3.25)$$

$$e^*(t) = f^*(t) - F^{T*} \cdot \phi^*(t) \quad (3.26)$$

Buradan, hatanın karesinin (t_1, t_2) aralığındaki integrali, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \langle e(t), e(t) \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} e(t) \cdot e^*(t) \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 \cdot dt = \langle f(t) - F^T \cdot \phi(t), f(t) - \phi^T(t) \cdot F \rangle \\ &= \langle f(t), f(t) \rangle + F^T \cdot \langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle \cdot F^* - F^T \cdot \langle \phi(t), f(t) \rangle - \langle f(t), \phi(t) \rangle \cdot F^* \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27) denklemindeki $\langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle$ terimi, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) \cdot \phi^{*T}(t) \cdot dt = [\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle] \quad (3.28)$$

$\phi(t)$ bir sütun vektörü ve $\phi^{*T}(t)$ de bir satır vektörü olduğundan, $\langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle$ ifadesi bir kare matris oluşturur. $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle$ gösterimi, söz konusu matrisin terimlerini belirtmektedir. $\phi_k(t)$ fonksiyonları birbirine dik ise, $i \neq j$ için, $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = 0$ olur. Böylece $\langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle$ terimi, aşağıda gösterildiği gibi diagonal(köşegen) bir matris biçimini alır.

$$\langle \phi(t), \phi^T(t) \rangle = \text{diag}[\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle]$$

F teriminin parabolik bir fonksiyonu olan (3.27) denklemi, F teriminin elemanlarına bağlı olarak minimum yapılabilir. F nin herhangi bir terimi olan f_k için, (3.27) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \langle e(t), e(t) \rangle &= \langle f(t), f(t) \rangle + f_k^2 \cdot \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle - f_k \cdot \langle \phi_k(t), f(t) \rangle - f_k^* \langle f(t), \phi_k(t) \rangle \\ &\quad - [f_k \text{ dan bağımsız olan terimler}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$f_k = \frac{\langle f(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \phi_k^*(t) \cdot dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t) \cdot \phi_k^*(t) \cdot dt} \quad (3.30)$$

Bu (3.30) eşitliği, (3.29) eşitliğinin, $k = -N, \dots, +N$ için f_k ya göre türetilip, daha sonra sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir.

3.1.4 Fourier serisi

Sınırlı (t_1, t_2) aralığında tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun sonlu Fourier serisi açılımı, aşağıdaki fonksiyon kümesinden oluşmaktadır.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \text{ için} \quad (3.31)$$

Şayet $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$ olarak seçilirse, $\phi_k(t)$ fonksiyonlarının birbirine dik olacağı gösterilebilir.

O halde aşağıdaki (3.32) ifadesini yazabiliriz.

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} e^{jm\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt = \underbrace{(t_2 - t_1)}_P \cdot \delta_{mn} \quad (3.32)$$

(3.32) denklemindeki δ_{mn} terimi Kronecker Delta Fonksiyonu olup, $m \neq n$ için $\delta_{mn} = 0$ ve $\delta_{mm} = 1$ dir. Bir periyot boyunca, P periyotlu $f(t)$ periyodik fonksiyonu için integral alınır. Yani $(t_2 - t_1)$ aralığı, $P = (t_2 - t_1)$ olacak şekilde işaretin herhangi bir bölümü olabilir.

$f(t)$ işaretinin Fourier serisi yaklaşıklığı (3.31) denklemindeki dik fonksiyonlar kullanılarak elde edilir.

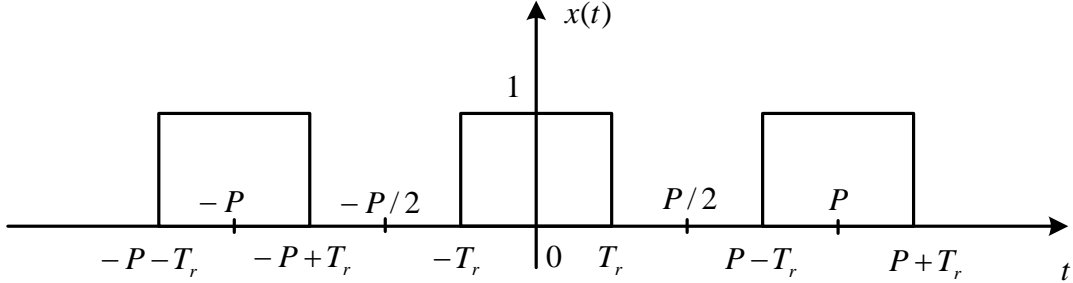
$$f'(t) = \sum_{k=-N}^N f_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad (3.33)$$

Fourier serisi katsayıları f_k lar ise, aşağıdaki (3.34) denkleminde kolayca elde edilebilir.

$$f_k = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt \quad (3.34)$$

Örnek 3.1

Şekil 3.3 de gösterilen kare dalga işareti için Fourier serisi açılımını bulunuz.



Şekil. 3.3

Cözüm 3.1

İşaretin periyodu P olmaktadır. Böylece $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ olarak bulunur. (3.34) denkleminde verilen integral formülü kullanılarak, Fourier serisi katsayıları bulunabilir. $x(t)$ çift-simetrik bir işaret olduğundan, integrali $(-\frac{P}{2}, \frac{P}{2})$ aralığında almak işlemi basitleştirecektir. İntegral sonucunu $k = 0$ ve $k \neq 0$ için aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$x_k = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{P} \int_{-T_r}^{T_r} e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = -\frac{1}{jk\omega_0 P} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_r}^{T_r}, \quad k \neq 0 \text{ için,}$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 P} \cdot \left(\frac{e^{jk\omega_0 T_r} - e^{-jk\omega_0 T_r}}{2j} \right) = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_r)}{k\omega_0 P}$$

$$x_0 = \frac{1}{P} \int_{-T_r}^{T_r} dt = \frac{2T_r}{P}, \quad k = 0 \text{ için,}$$

Ayrıca x_0 terimini, L'Hopital kuralını kullanarak da aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_r)}{k\omega_0 P} = \frac{2\omega_0 T_r \overbrace{\cos(k\omega_0 T_r)}^1}{\omega_0 P} = \frac{2T_r}{P}$$

Böylece sonuç ifadesini genel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x_k = \frac{2 \sin(k \omega_0 T_r)}{k \omega_0 P}$$

x_k terimi, $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ değişimi yapılmak suretiyle, T_r/P oranının bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_k = \frac{2 \sin(k \frac{2\pi T_r}{P})}{k 2\pi}$$

Bu örnekte, $\sin(\cdot)$ çift-simetrik gerçel bir fonksiyon olduğu için, $x_k = x_{-k}$ olmaktadır. Şayet bulduğumuz Fourier serisi katsayılarını Fourier toplamına yerleştirirsek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e^{jk\omega_0 t} + x_{-k} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \\ &= x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \cdot \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \cdot \cos(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

Şayet $k=0$ için $b_x(0) = x_0$ ve $k \neq 0$ için $b_x(k) = 2x_k$ tanımlamalarını yaparsak, yukarıda elde edilmiş olan ifadeyi, en genel formda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_x(k) \cdot \cos(k\omega_0 t) \quad (3.36)$$

Örnek 3.2

(3.36) denkleminin sonucu için yaklaşık Fourier serisi toplamı, sadece ilk J adet terimin alınmasıyla aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\hat{x}_j(t) = \sum_{k=0}^J b_x(k) \cdot \cos(k\omega_0 t)$$

$P=1$ ve $\frac{T_r}{P} = \frac{1}{5}$ varsayalım. Bu durumda aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz.

$$b_x(k) = \begin{cases} \frac{2}{5} & k = 0 \\ \frac{2 \sin(\frac{k2\pi}{5})}{k2\pi} & k > 0 \end{cases}$$

$J = 1, 5, 10, 25, 50$ ve 100 için $\hat{x}_j(t)$ nin bir periyodunu çiziniz.

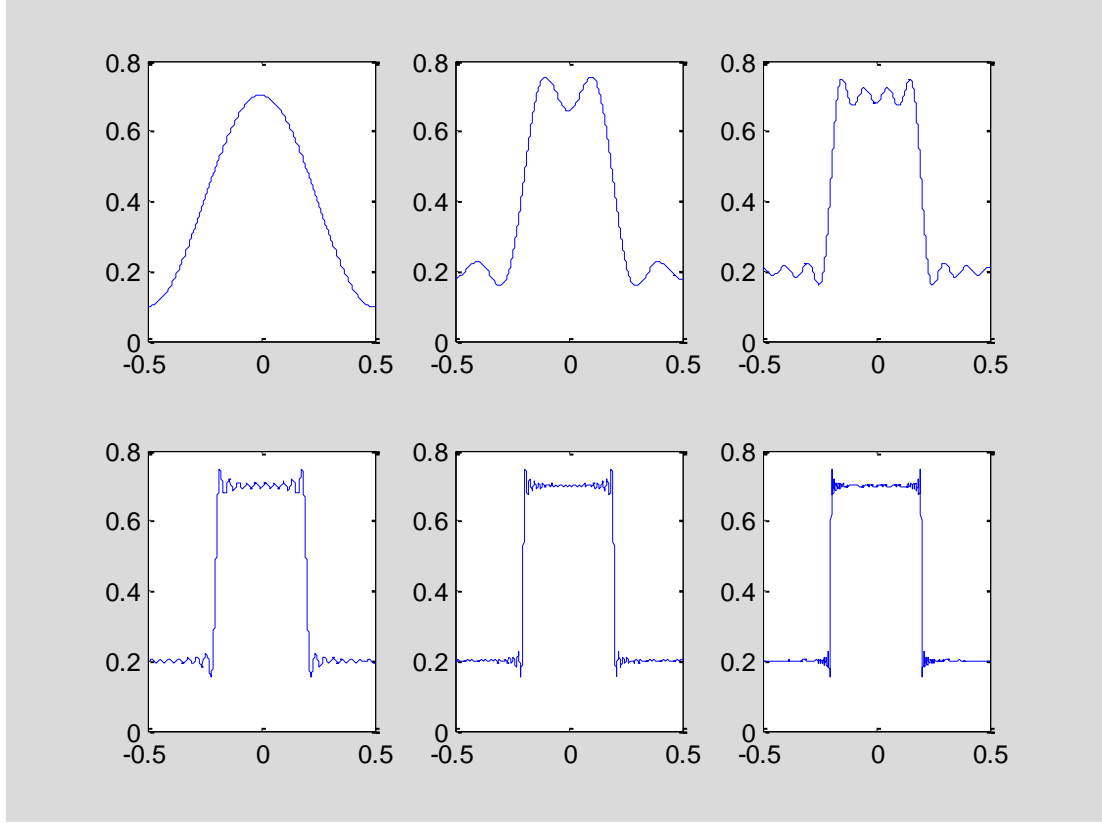
Çözüm 3.2

```
clear all;
close all;
P=1;
J_max=100;
Delta=P/(50*J_max);
b(1)=2/5;
for k=1:100
    b(k+1)=(2*sin(k*2*pi/5))/(k*2*pi);
end
t=[-P/2:Delta:P/2];
x_j(1,:)=b(1)*cos(t*0*2*pi/P);
for j=2:101
    x_j(j,:)=x_j(j-1,:)+b(j)*cos(t*(j-1)*2*pi/P);
end
subplot(2,3,1), plot(t,x_j(2,:))
subplot(2,3,2), plot(t,x_j(6,:))
subplot(2,3,3), plot(t,x_j(11,:))
subplot(2,3,4), plot(t,x_j(26,:))
subplot(2,3,5), plot(t,x_j(51,:))
subplot(2,3,6), plot(t,x_j(101,:))
```

Şekil 3.4 de yaklaşık toplamlar bir periyot için çizdirilmiştir. Yaklaşık toplamın, süreksizlik

noktası $t = \mp \frac{1}{5}$ etrafında gösterdiği davranış önemlidir. Süreksizlik noktasının her iki

tarafında dalgalanmalar gözlenmektedir. J artırıldıkça hatanın enerjisi (dalgalanmanın enerjisi) azalsa da maksimum dalga yüksekliği değişmemektedir. Bu yükseklik yukarıda belirtildiği gibi, süreksizliğin yaklaşık olarak %9 u kadardır. J sonsuza giderken Fourier serisi toplamı $x(t)$ ye yakınsayacaktır. Ancak sınırlı büyüklüklü J için her zaman dalgalanmalar mevcut olacaktır.



Şekil 3.4 Örnek 3.2 için çizdirilen yaklaşık Fourier serisi toplamaları, (a) $J = 1$, (b) $J = 5$, (c) $J = 10$, (d) $J = 25$, (e) $J = 50$, (f) $J = 100$

3. Fourier integrali(dönüşümü)

Periyodik bir fonksiyonun periyodunun sonsuza götürülmesiyle Fourier integralinin geliştirilebileceği, şekil 3.5 de görülmektedir. Yöntemi daha etkin yapmak için, istenen periyodik işaret orijine yerleştirilir.

Periyodik $f_p(t)$ fonksiyonu (3.35) denklemindeki gibi üstel Fourier serisi ile gösterilebilir.

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (3.35)$$

(3.35) denklemindeki f_n ve ω_0 terimleri, (3.36) ve (3.37) denklemlerindeki gibi verilirler.

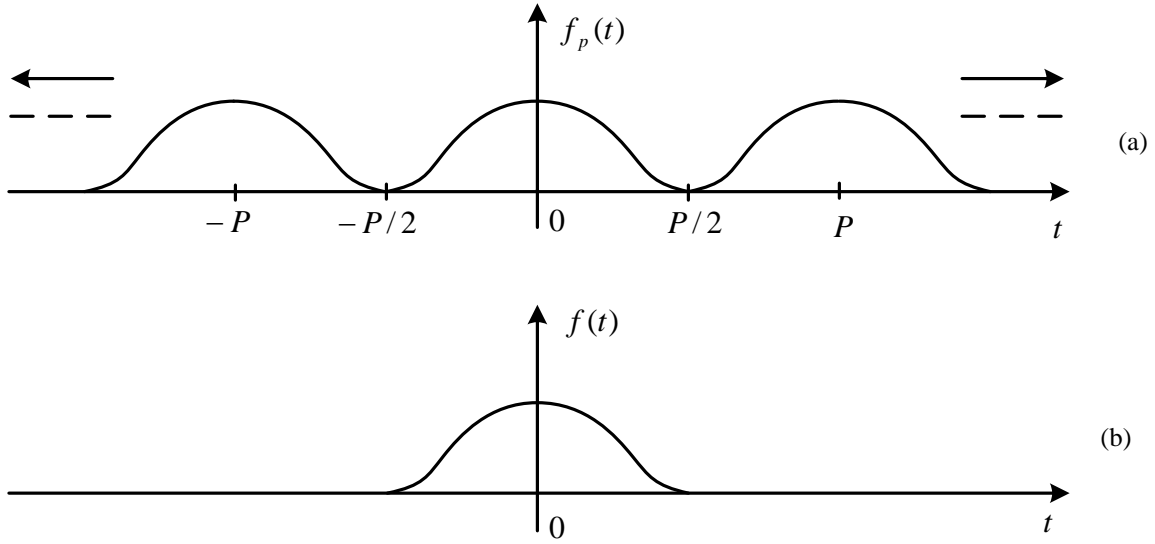
$$f_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f_p(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \quad (3.36)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.37)$$

(3.36) denkleminde periyot sonsuza götürülürse, tüm Fourier serisi katsayılarının sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu nedenle, P yi sonsuza götürecek limit alınmadan önce, aşağıdaki tanımlar yapılır.

$$\omega_n = n\omega_0 \quad (3.38)$$

$$F(\omega_n) = \lim_{P \rightarrow \infty} P \cdot f_n \quad (3.39)$$



Şekil 3.5 Periyodik işareten periyodik olmayan işaretin üretilmesi; (a) periyodik işaret, (b) periyodik olmayan işaret, $f(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} f_p(t)$

(3.38) ve (3.39) eşitlikleri ile verilen tanımları kullanmak suretiyle, (3.35) ve (3.36) denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{P} \cdot F(\omega_n) \cdot e^{j\omega_n t} \quad (3.40)$$

$$F(\omega_n) = \int_{-P/2}^{P/2} \lim_{P \rightarrow \infty} f_p(t) \cdot e^{-j\omega_n t} \cdot dt \quad (3.41)$$

$f_p(t)$ nin spektrum çizgileri arasındaki uzaklık $\Delta\omega$ olarak aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{P} \quad (3.42)$$

ve P sonsuza götürülürse (sonuçta $\Delta\omega$ sıfıra gider), (3.40) denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$f(t) = \lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) \cdot e^{j\omega_n t} \cdot \Delta\omega \quad (3.43)$$

(3.43) denklemindeki limit alınır, $f_p(t)$ nin ayrık spektrum çizgileri birbirleriyle birleşik ve spektrum sürekli olur. Matematiksel olarak (3.43) denklemindeki sonsuz toplamı bir Riemann integralidir.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (3.44)$$

Benzer şekilde (3.41) denkleminden aşağıdaki (3.45) denklemi elde edilebilir.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (3.45)$$

(3.44) ve (3.45) denklemleri standart Fourier integral dönüşümünü tanımlayan ilişkilerdir. (3.44) denklemi, işaretin karmaşık üstel fonksiyonlara ayrıştırılabileceğini gösterir. $F(\omega)$ terimi, ω rad/san. deki frekans bileşeninin büyüklüğünü gösterir.

Fourier integralinin önemli olmasının tek sebebi periyodik olmayan işaretlerin spektral yoğunluğunu tanımlaması değildir. Tablo 3.1 de gösterilen özellikleri dolayısıyla da önemlidir. Bu faydalı fonksiyonların Fourier dönüşümleri Tablo 3.2 de verilmiştir.

Bazı işaretlerin Fourier integrali gerçekten yoktur. Bu yargıya, (3.45) deki tanım yardımıyla da varabiliriz. Yani, $F(\omega)$ sonlu ise dönüşüm vardır. $e^{-j\omega t}$ nin enerjisi birim olduğundan, Fourier integralinin varlığı için yeter bir koşul (3.46) denklemi ile verilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3.46)$$

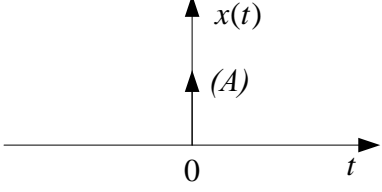
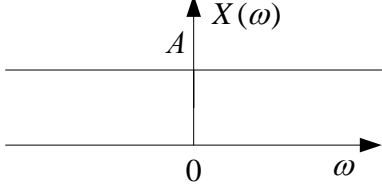
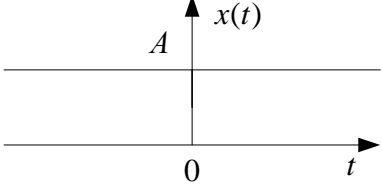
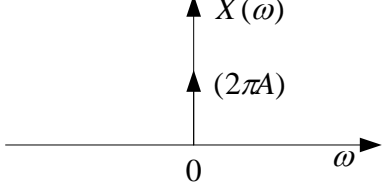
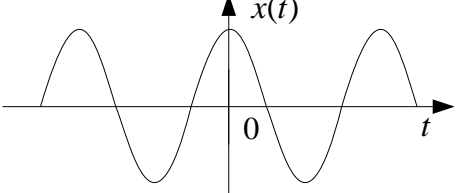
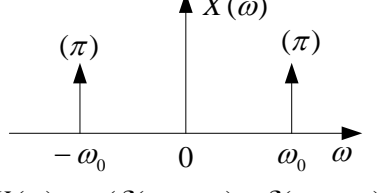
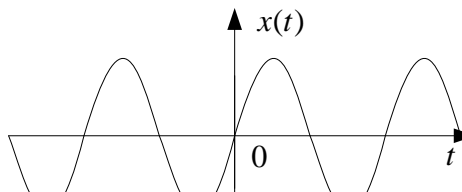
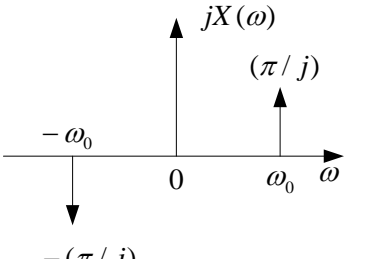
Bu koşul oldukça kısıtlayıcıdır. Örneğin birim basamak işareti için bile bu koşul sağlanmaz. Bunun yerine daha zayıf bir koşul olan ve (3.47) denklemi ile aşağıda verilen koşul kullanılabilir.

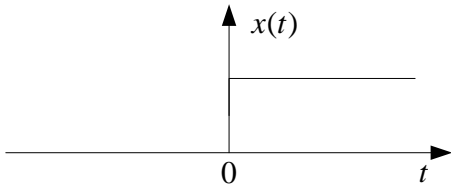
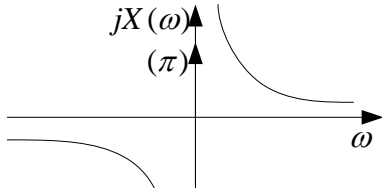
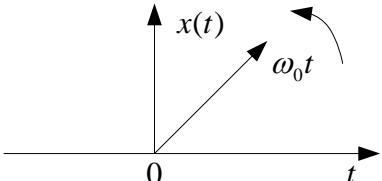
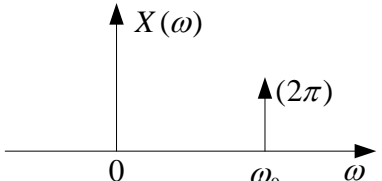
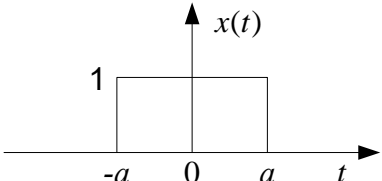
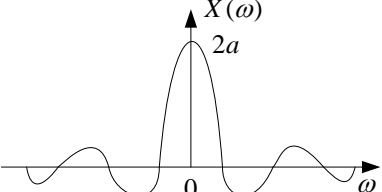
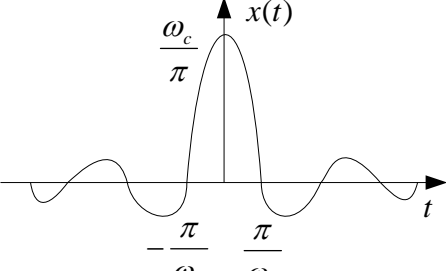
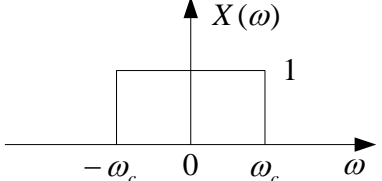
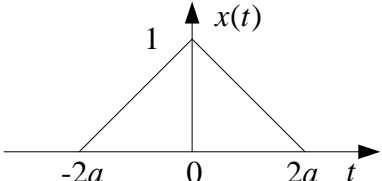
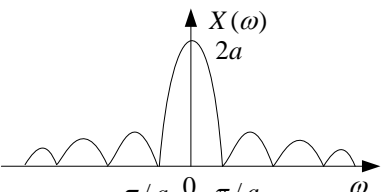
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (3.47)$$

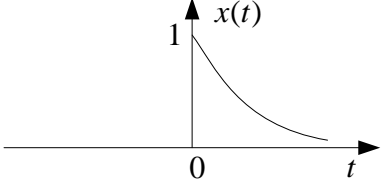
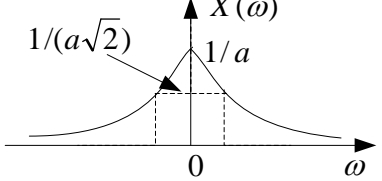
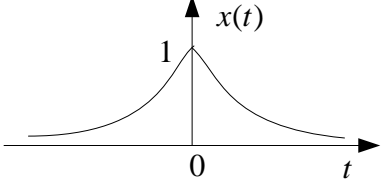
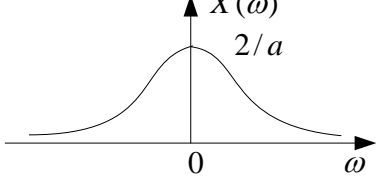
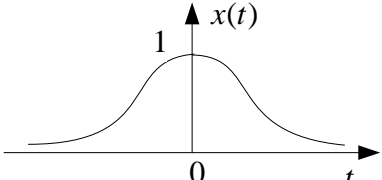
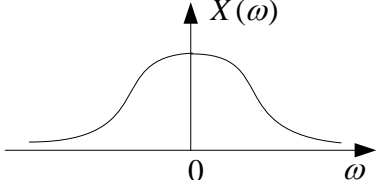
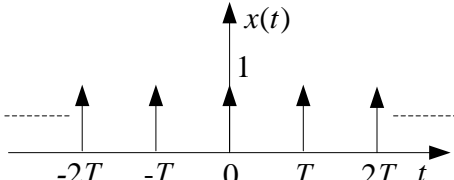
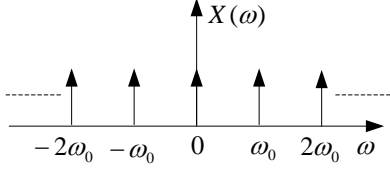
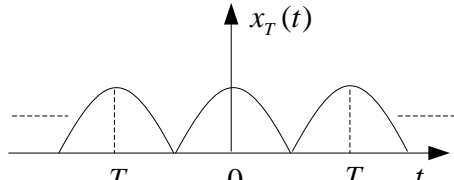
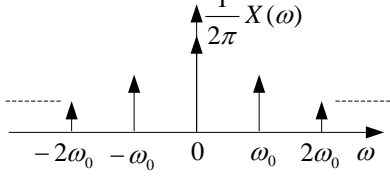
Tablo 3.1 Bazı önemli Fourier dönüşümleri

1	Doğrusallık	$F[a.x(t) + b.y(t)] = a.X(\omega) + b.Y(\omega)$
2	Frekans kaydırma	$F[x(t).e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$
3	Zaman kaydırma	$F[x(t - t_0)] = X(\omega).e^{-j\omega t_0}$
4	Zaman türevi	$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega.X(\omega)$
5	Zaman integrali	$F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau).d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi.X(0).\delta(\omega)$
6	Zaman domeninde konvolüsyon	$F[x(t) * y(t)] = X(\omega).Y(\omega)$ $x(t) * y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).y(t - \tau).d\tau$
7	Frekans domeninde konvolüsyon	$F[X(\omega) * Y(\omega)] = x(t).y(t)$ $X(\omega) * Y(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha).Y(\omega - \alpha).d\alpha$
8	Ölçekleme	$F[x(at)] = \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right); a \text{ gerçel için}$
9	Parseval teoremi	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 .dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 .d\omega$
10	Dualite(zaman-frekans)	$F[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$
11	Korelasyon	$F\int_{-\infty}^{\infty} x(t).y(t + \tau).dt = F[x(t) * y(-t)] = X(\omega).Y^*(\omega)$
12	Karmaşık eşlenik	$F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$
13	Genlik modülasyonu	$F[x(t).\cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$
14	Simetrik(çift-tek)	$F[x_{\text{çift}}(t)] = X_{\text{çift}}(\omega)$ $F[x_{\text{tek}}(t)] = X_{\text{tek}}(\omega)$
15	Frekans türevi	$F[t.x(t)] = j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
16	Gerçel $x(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\text{Re}[X(\omega)] = \text{Re}[X(-\omega)]$ $\text{Im}[X(\omega)] = -\text{Im}[X(-\omega)]$
		$ X(-\omega) = X(\omega) $ $\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$

Tablo 3.2 Bazı önemli Fourier dönüşümleri

1	İmpuls	 $x(t) = A\delta(t)$	 $X(\omega) = A$
2	Sabit	 $x(t) = A$	 $X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$
3	Kosinüs	 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$	 $X(\omega) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
4	Sinüs	 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$	 $X(\omega) = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$

5	Basamak	 $x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau).d\tau$	 $X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
6	Karmaşık üstel	 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$	 $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
7	Darbe	 $x(t) = u(t+a) - u(t-a)$	 $X(\omega) = 2a \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}$
8	Sınırlı bantlı işaret	 $x(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$	 $X(\omega) = u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)$
9	Üçgen	 $x(t) = 1 - \frac{1}{2a} t ; t < 2a$	 $X(\omega) = 2a \frac{\sin^2(\omega a)}{(\omega a)^2}$

10	Tek taraflı üstel işaret	 $x(t) = e^{-at} \cdot u(t); \quad a > 0$	 $X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
11	Çift taraflı üstel işaret	 $x(t) = e^{-a t }; \quad a > 0$	 $X(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
12	Gauss işareti	 $x(t) = e^{-at^2}$	 $X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\omega^2/4a}$
13	İmpuls treni	 $x(t) = x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	 $X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ $\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$
14	Periyodik işaret	 $x_T(t) = x_T(T + t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ <p>X_k :Fourier Serisi Katsayıları</p>	 $X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$ $\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$