

SAYISAL ANALİZ

Doç.Dr. Cüneyt BAYILMIŞ



SAYISAL ANALİZ

LİNEER DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMLERİ (İTERATİF YÖNTEMLER)



İÇERİK

Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü

- **Yinelemeli (İterasyon) Yöntemler**
 - **Jacobi yöntemi**
 - **Gauss-Siedel yöntemi**

Doğrusal Denklem Sistemleri

❑ Bir Bilinmeyenli Bir Denklem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 = b_1$$

Matris Form

$$[a_{11}][x_1] = [b_1] \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

❑ İki Bilinmeyenli İki Denklemlili Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

❑ **m** Bilinmeyenli **n** Denklemlili Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2$$

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

Not: Birinci dereceden bilinmeyen ve sabit sayılar içeren denklem sistemleri lineer denklem sistemlerdir.

YİNELEMELİ YÖNTEMLER

- ❑ Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman ekonomik olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir.
- ❑ İteratif ve yaklaşık çözümler daha önce anlatılan yerine koyma yöntemlerine alternatif oluştururlar.
- ❑ Örnek yinelemeli (iteratif) yöntemler
 - ❑ Jacobi Yöntemi
 - ❑ Gauss-Siedel Yöntemi

JACOBI YÖNTEMİ

- ❑ Toplam adımlarla yineleme yöntemi olarak ta bilinir.
- ❑ Örneğin iki bilinmeyenli bir denklem ele alalım.
 - ❑ $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = c_1$
 - ❑ $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = c_2$
- ❑ Denklemler tekrar düzenlenirse (bilinmeyenler yalnız bırakılırsa)
 - ❑ $x_1 = (c_1 - a_{12} x_2) / a_{11} = f(x_1, x_2)$
 - ❑ $x_2 = (c_2 - a_{21} x_1) / a_{22} = g(x_1, x_2)$
- ❑ Jacobi iterasyonu bilinmeyenler için bir tahmin ile başlar.
 - ❑ Çözüm için bir başlangıç x_1 ve x_2 değerleri seçilir. (yani x_0 vektörü)
 - ❑ Örneğin; $X_1 = Ax_0 + C$ ve sırasıyla $X_2 = Ax_1 + C$
 - ❑ genellersek, $X_k = Ax_{k-1} + C$ ve X_k bilinmeyen vektör elemanları
 - ❑
$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i, \quad i = 1 : n$$
- ❑ Durdurma kriteri olarak ya iterasyon sayısı ya da hata sınırlaması kullanılır

$$\max_{i \leq i \leq n} \frac{|x_i^k - x_i^{k-1}|}{x_i^k}$$

JACOBI YÖNTEMİ

Örnek: jacobi iterasyon metodu kullanarak aşağıdaki lineer denklem sistemini çözünüz

$$\begin{aligned}10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 23 \\2x_1 - 10x_2 + 3x_3 &= -9 \\-x_1 - x_2 + 5x_3 &= 12\end{aligned}$$

Çözüm Yolu: yeniden düzenleme

$$\begin{aligned}x_1 &= (23 - 2x_2 - 3x_3)/10 \\x_2 &= (-9 - 2x_1 - 3x_3)/(-10) \\x_3 &= (12 + x_1 + x_2)/5\end{aligned}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ve $x_3 = 0$. keyfi tahminlerle başlıyoruz ve iterasyon aşağıdaki sonuçları verir.

ITER	X_1	X_2	X_3	Hata normu, $E = \sum_{i=1}^n x_i^{\text{new}} - x_i^{\text{old}} $
0	0	0	0	---
1	2.300000	0.900000	2.400000	5.600000
2	1.400000	2.080000	3.040000	2.720000
3	0.972000	2.092000	3.096000	4.960001E-01
4	0.952800	2.023200	3.012800	1.712000E-01
5	0.991520	1.994400	2.995200	8.512014E-02
6	1.002560	1.996864	2.997184	1.548803E-02
7	1.001472	1.999667	2.999885	6.592035E-03
8	1.000101	2.000260	3.000228	2.306700E-03
9	0.9998797	2.000089	3.000072	5.483031E-04
10	0.9999606	1.999998	2.999994	2.506971E-04

JACOBI YÖNTEMİ

❑ Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = ?$$

❑ Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü $x = [0.1667 \ 0.4167 \ -0.0833 \ 0.1667]$ dir.

❑ Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i . bilinmeyen k . Ve $k-1$. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $\max |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. $\varepsilon = 0.0001$ seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ alalım.

JACOBI YÖNTEMİ

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875	0.4375	-0.0625	0.1875
4	0.1563	0.4063	-0.0938	0.1563
5	0.1719	0.4219	-0.0782	0.1719
6	0.1641	0.4141	-0.0860	0.1641
7	0.1680	0.4180	-0.0821	0.1680
8	0.1660	0.4160	-0.0840	0.1660
9	0.1670	0.4170	-0.0830	0.1670
10	0.1665	0.4165	-0.0835	0.1665
11	0.1668	0.4168	-0.0833	0.1667
12	0.1666	0.4166	-0.0834	0.1666
13	0.1667	0.4167	-0.0833	0.1667

Başlangıç değerleri

$\text{Max} |x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$
olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyon durduruldu**

İterasyon no

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

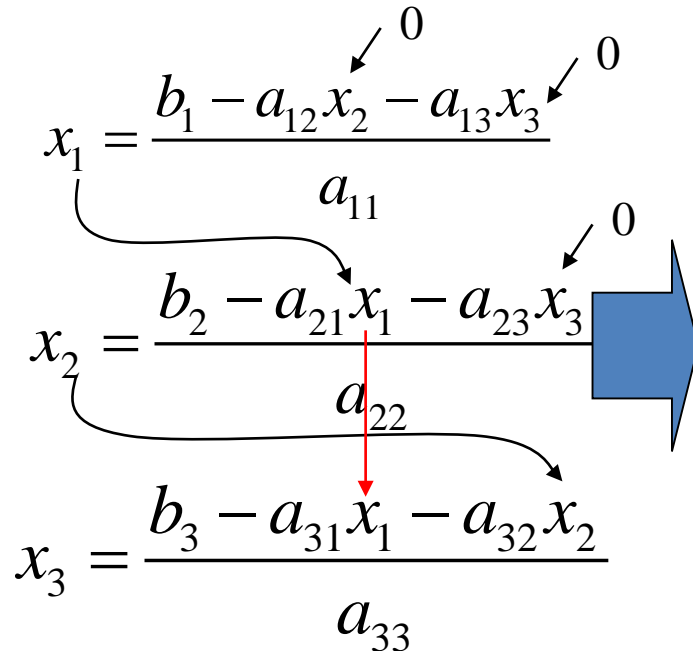
Çözüm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ

- ❑ En çok kullanılan iteratif yöntemdir.
- ❑ Değişkenlerin yeni değerleri, tüm değişkenler için bir iterasyonun tamamlanması beklenmeden, sonraki hesaplamalarda kullanılır.
- ❑ 3'e 3'lük bir denklem sistemi üzerinde Gauss-Siedel yönteminin çalışması.

Başlangıç koşulları: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}\end{aligned}$$


$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

❑ n değişken için Gauss-Siedel formülü;

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k$$

❑ Yakınsama koşulu $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ

❑ **Örnek:** Aşağıdaki denklemi Gauss-Siedel yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz?.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$



❶ Bilinmeyen x değerlerini diğerleri cinsinden bul

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

❷ İterasyon 0 için $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$

❸ İterasyon 1

❑ x_1 hesabı için, $x_2 = 0, x_3 = 0,$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

❑ x_2 hesabı için, $x_1 = 2.616667, x_3 = 0,$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

❑ x_3 hesabı için, $x_1 = 2.616667, x_2 = -2.794524,$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ

④ İterasyon 2

❑ x_1 hesabı için, $x_2 = -2.794524$, $x_3 = 7.005610$,

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$

❑ x_2 hesabı için, $x_1 = 2.990557$, $x_3 = 7.005610$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

❑ x_3 hesabı için, $x_1 = 2.990557$, $x_2 = -2.499625$,

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Hatayı tahmin etmek için bilinmeyenlerin bağıl yaklaşım yüzde hatalarına bakılır. Örneğin x_1 için:

$$|\epsilon_{a,1}| = \left| \frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557} \right| \% 100 = \% 12.5 \text{ 'tir. } x_2 \text{ ve } x_3 \text{ için hata tahminleri}$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left| \frac{-2.499625 - 2.794524}{-2.499625} \right| \% 100 = \% 11.8$$

$$|\epsilon_{a,3}| = \left| \frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291} \right| \% 100 = \% 0.076$$

Bu şekilde tüm hatalar belirlenen bir tolerans sınırı altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ

❑ Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = ?$$

- ❑ Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü $x = [0.1667 \ 0.4167 \ -0.0833 \ 0.1667]$ dir.
- ❑ Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini GAUSS-SEIDEL iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyen k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $\max |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. $\varepsilon = 0.0001$ seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ alalım.

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ

k	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.4375	-0.0625	0.1563
2	0.1563	0.4219	-0.0782	0.1641
3	0.1641	0.4180	-0.0821	0.1660
4	0.1660	0.4170	-0.0830	0.1665
5	0.1665	0.4168	-0.0833	0.1666
6	0.1666	0.4167	-0.0833	0.1667
7	0.1667	0.4167	-0.0834	0.1667

Başlangıç değerleri

$\text{Max } |x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^1| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$
olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

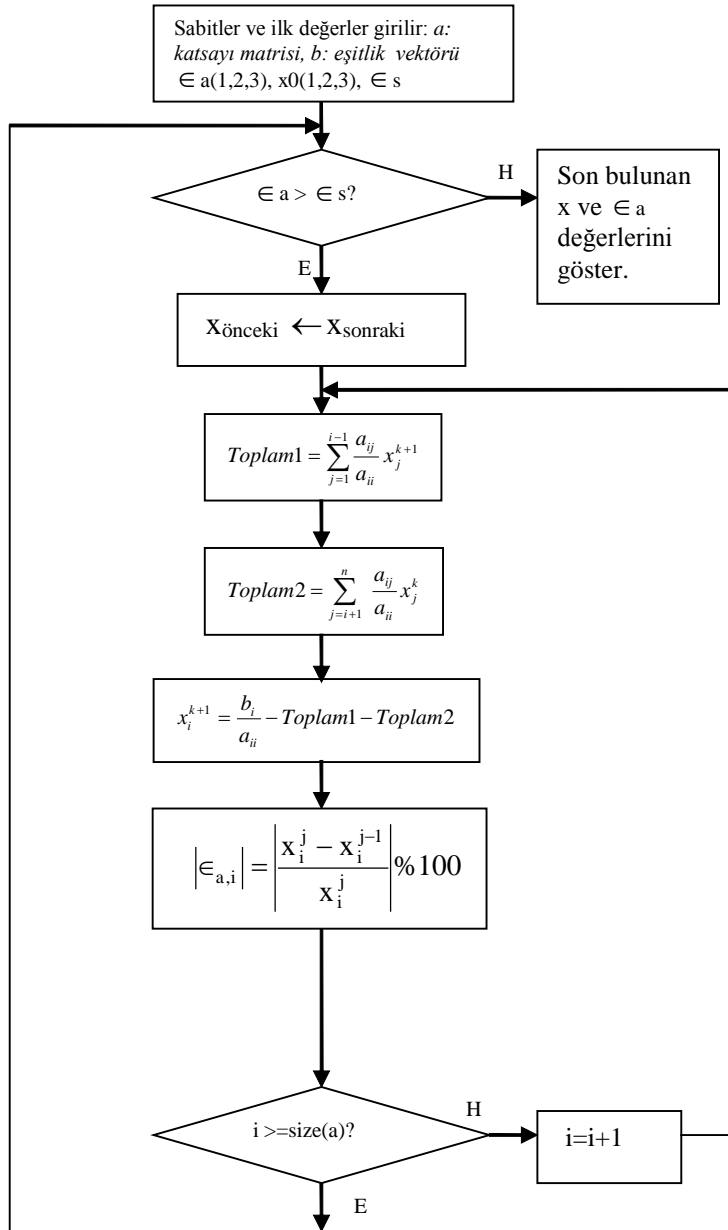
İterasyon
adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI



```

a=[3 -0.1 -0.2
    0.1 7 -0.3
    0.3 0.2 10];
b=[7.85
    -19.3
    71.4];
for i=1:size(a,1)
    ea(i)=0.9;
    xson(i)=0;
end
es=0.8;

while max(ea)>es
    xonceki=xson;
    for i=1:size(a,1)
        Toplam1=0; Toplam2=0;
        for j=1:i-1
            Toplam1=Toplam1+a(i,j)/a(i,i)*xson(j);
        end
        for j=i+1:size(a,1)
            Toplam2=Toplam2+a(i,j)/a(i,i)*xonceki(j);
        end
        xson(i)=b(i)/a(i,i)-Toplam1-Toplam2;
        ea(i)=abs((xson(i)-xonceki(i))/xson(i))*100;
    end
end
xson
ea
    
```

GAUSS-SIEDEL YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI

```
A=[9 1 4 -1 2 0; 1 7 1 2 0 -2;  
4 1 8 1 0 -1; -3 0 1 9 0 4;  
1 1 2 0 6 -1; 2 -2 0 1 1 7];  
b=[-1; 6; 3; 4; 0; -2];  
x=[0;0;0;0;0;0];  
x_1=[0;0;0;0;0;0];  
eps=0.01;n=0;Nmax=100;  
while n<Nmax  
    for i=1:length(A)  
        for j=1:length(A)  
            if j<i  
                x(i)=x(i)+(-1*A(i,j)*x(j));  
            elseif i==j  
                bol=A(i,j);  
            else  
                x(i)=x(i)+(-1*A(i,j)*x_1(j));  
            end  
        end  
        x(i)=(x(i)+b(i))/bol;  
    end  
    if max(100*abs(x-x_1)./x)<eps  
        sonuc=x  
        n  
        n=Nmax;  
    end  
    x_1=x;  
    x(:)=0;  
    n=n+1;  
end
```

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k$$

Yandaki MATLAB Programını Jacobi Yöntemini gerçekleştirecek şekilde değiştiriniz.

Hatırlatma

$$x_i^k = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k-1}$$

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.



JACOBI İLE GAUSS-SEIDEL YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Birinci iterasyon

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

İkinci iterasyon

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

(a)

Gauss-Siedel

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

(b)

Jacobi

- ❑ Her x değeri bulunduğca bir sonraki x değerini belirleyen denklemde hemen hesaplanır.
- ❑ Eğer çözüm yakınsıyorsa her zaman en iyi tahminler kullanılmış olur.

- ❑ Her iterasyonda hesaplanan tüm x değerleri bir sonraki x değerleri bulunurken toplu olarak yerine koyulur.

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- ❑ **Örnek:** Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerleri için;
- 1 Gauss Eleme yönteminin $[R : E]$ formunu kullanarak tam değerlerini bulunuz.
 - 2 Gauss Siedel Yöntemini kullanarak 3 iterasyon için çözünüz. Başlangıç değerlerini 0 alınız. 3. iterasyon sonunda yaklaşık bağıl hatalarını hesaplayınız. Her iterasyonda bulduğunuz sonucun, tam değerlere yaklaşıp yaklaşmadığını gözlemleyiniz.

$$\begin{array}{rrcrcl} 2X_1 & - & X_2 & + & X_3 & = & 2 \\ X_1 & - & 2X_2 & + & X_3 & = & -1 \\ X_1 & - & X_2 & + & X_3 & = & 0 \end{array}$$



Çalışma Sorusu

- ❑ Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini **Gauss Seidel ve Jacobi yöntemlerini** kullanarak 5 iterasyon için ayrı ayrı hem el ile hem de MATLAB ile çözünüz? Not: Her iterasyon için hata hesaplamalarını da yapınız.

$$2X_1 - 3X_2 + X_3 = -5.4$$

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 6.7$$

$$X_1 + 4X_2 - 5X_3 = 3.2$$

KAYNAKLAR

- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”, Seçkin Yayıncılık
- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Ahmet TOPÇU, “*Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz*”, OGÜ.
- Yüksel YURTAY, *Sayısal Analiz Ders Notları*, Sakarya Üniversitesi
- Prof.Dr. Asaf VAROL, “*Sayısal Analiz Ders Notları*”, Fırat Üniversitesi
- Fahri VATANSEVER, “*İleri Programlama Uygulamaları*”,Seçkin Yayıncılık