SAYISAL ANALİZ

Doç.Dr. Cüneyt BAYILMIŞ

SAYISAL ANALİZ

LİNEER DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMLERİ

(Klasik Yöntemler)

İÇERİK

Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü

❶ Cramer Yöntemi

❷ Matrisin Tersi ile Bilinmeyenleri Bulma
- Örnek uygulama
- MATLAB'ta matrisin tersini (inv komutu) ve transpozesini alma

❸ GAUS Eleme Yöntemi
- Örnek uygulama

❹ solve komutu ile denklem takımının çözümü

❺ Yinelemeli (İterasyon) Yöntemler
- Jacobi yöntemi
- Gauss-Siedel yöntemi

Doğrusal Denklem Sistemleri

Bir Bilinmeyenli Bir Denklem

Klasik Form

$$a_{11}x_1=b_1$$

Matris Form

$$[a_{11}][x_1]=[b_1] \rightarrow \underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$$

İki Bilinmeyenli İki Denklemli Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$$

m Bilinmeyenli n Denklemli Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=b_n$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\ \underline{x}=\underline{b}$$

Not: Birinci dereceden bilinmeyen ve sabit sayılar içeren denklem sistemleri lineer denklem sistemlerdir.

CRAMER YÖNTEMİNİ

- **Elektriksel devrelere ait göz denklemlerinin kullanımı sonucunda ortaya çıkan genelleştirilmiş matris yapısı;**
  - **[R] x [I] = [E]**
- **3 gözlü bir elektriksel sisteme ait eşitlikleri matris formda ifade edersek;**

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

- **Yukarıdaki doğrusal denklem takımlarındaki bilinmeyen akım (I) değerleri Cramer yöntemi ile bulunacaktır.**
  - **Bu işlem için oluşturulacak olan kare matrislerin determinant hesaplamaları kullanılacaktır.**
  - **Determinantı alınacak kare matrisin boyutu sistemi tanımlayan doğrusal denklem takımındaki eşitlik (devredeki göz) sayısına bağlıdır.**

CRAMER YÖNTEMİNİN KULLANIMI

❶ **Göz denklemine göre kare matris oluşturulur**

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

❷ **Öncelikle empedans değerlerinden oluşan matrisin determinantı hesaplanır**

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$

❸ **Örneğin birinci göze ait akım değerleri hesaplanacak ise empedans değerlerinden oluşan matrisin birinci sütunundaki elemanların yerine gerilim değerleri yazılarak yeni bir matris oluşturulur.**

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} E_1 & r_{12} & r_{13} \\ E_2 & r_{22} & r_{23} \\ E_3 & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$

❹ **Birinci göz akımı I,**

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta_R}$$

❺ **Diğer göz akımları**

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} r_{11} & E_1 & r_{13} \\ r_{21} & E_2 & r_{23} \\ r_{31} & E_3 & r_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta_R}$$

$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & E_1 \\ r_{21} & r_{22} & E_2 \\ r_{31} & r_{32} & E_3 \end{vmatrix} \Rightarrow I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta_R}$$

CRAMER YÖNTEMİNİN KULLANIMI -Örnek-

- **Aşağıdaki verilen bir elektriksel devreye ait doğrusal denklem takımında yer alan akım değerlerini Cramer yöntemi kullanarak elde ediniz?**

$$\begin{aligned} I_1 &- I_2 &+ 2I_3 &= 1 \\ 2I_1 &+ 3I_2 &+ I_3 &= 1 \\ 3I_1 &+ 2I_2 &+ 2I_3 &= 0 \end{aligned}$$

❶ Cramer yöntemine göre elektriksel devreye ait denklem takımı üzerinden empedans ve gerilim değerlerinin oluşturduğu matrisleri elde edin

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

❷ Empedans matrisinin birinci satırına göre determinantı hesaplanır

$$\Delta_R = |R| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 10 = -5$$

❸ Hangi akım değeri için işlem yapılacak ise empedans değerlerinden oluşan matrisin ilgili akımına ait sütun elemanlarının yerine gerilim değerleri yazılarak yeni bir matrisin determinantı (birinci satıra göre) hesaplanır.

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 4 = 10$$

❹ Birinci akım değeri,

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\Delta_{\mathrm{I}_1}}{\Delta_{\mathrm{R}}} = \frac{10}{-5} = -2\mathrm{A}$$

❺ Diğer akım değerlerini aynı yolları izleyerek bulunuz

CRAMER YÖNTEMİNİN KULLANIMI - MATLAB Çözümü -

Komut penceresi

% R ve E matrislerinin tanımlanması

```
>> R=[1 -1 2;2 3 1;3 2 2]

R =

     1    -1     2
     2     3     1
     3     2     2

>> E=[1 1 0]'        % transpoze işlemi

E =

     1
     1
     0
```

% I1, I2 ve I3 akım değerlerinin hesabı için matrislerin tanımlanması

```
>> MI1=[E R(:,[2 3])]

MI1 =

     1    -1     2
     1     3     1
     0     2     2
```

Komut penceresi

```
>> MI2=[R(:,1) E R(:,3)]

MI2 =

     1     1     2
     2     1     1
     3     0     2

>> MI3=[R(:,[1 2]) E]

MI3 =

     1    -1     1
     2     3     1
     3     2     0
```

% Akım değerlerinin hesabı

```
>> I=[det(MI1); det(MI2); det(MI3)]/det(R)

I =

    -2
     1
     2
```

CRAMER YÖNTEMİ

- **Örnek: Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerlerini Cramer yöntemini kullanarak elde ediniz.**

Not: Çözüm için gerekli determinant işlemleri seçilen satır ve sütun yöntemi kullanılarak ikinci satıra göre yapılacaktır.

$$\begin{array}{rcrcrcr} X_1 & - & 2X_2 & + & X_3 & = & -1 \\ 3X_1 & - & 5X_2 & - & 2X_3 & = & 7 \\ 2X_1 & + & 7X_2 & - & X_3 & = & 4 \end{array}$$

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA

- **Doğrusal denklem takımlarındaki bilinmeyenlerin bulunmasında kullanılır.**
- **Bilinmeyen akım değerlerinin bulunuşunda işlem gereği empedans değerlerinden oluşan matrisin tersini almak gerekmektedir.**

$$[I]=\frac{[E]}{[R]} \quad \Rightarrow \quad [I]=[R]^{-1}\times[E]$$

- **Bir matrisin tersini alma farklı şekillerde yapılabilir.**
  - **Bu yöntemlerden biri, bir matrisin determinantı alma ile matrisin ekini (adjoint) almayı gerektirir.**
  - **Bir matrisin ekinin bulunması iki farklı şekilde olabilir.**
    1. Matrisin tüm elemanlarının eşçarpanları bulunur. Bulunan eşçarpanlardan yeni bir matris oluşturulur. Bu matrisin transpozesi (devriği-satırlar sütun, sütunlar satır olarak yazılması) alınarak matrisin eki bulunur.
    2. Matrisin transpozu alınır. Oluşan yeni matrisin tüm elemanlarının eşçarpanları bulunarak matrisin eki elde edilir.

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA

- **Örnek: Bir matrisin ekininin ve bilinmeyen akım değerinin bulunması.**

$$[R]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

❶ **R matrisinin tüm elemanlarının eşçarpanlarını bul**

$$R_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \quad R_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} r_{21} & r_{23} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix} \quad R_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix}$$

$$R_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \quad R_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix} \quad R_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix}$$

$$R_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{22} & r_{23} \end{vmatrix} \quad R_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{vmatrix} \quad R_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}$$

❷ **Eşçarpanlardan oluşan matris**

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

❸ **Eşçarpan matrisin transpozesi alınır.**

$$ek(R)=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix}$$

- **Diğer Yöntem**

$$[R]^{-1}=\frac{1}{\Delta_R}ek(R)$$

- **Bilinmeyen Akımın Bulunması**

$$[I]=[R]^{-1}\times[E]$$

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA -Örnek-

- **Örnek: Verilen denklemdeki akım değerlerini matrisin tersini alarak bulunuz?**

$$\begin{aligned} 3I_1 &+ 2I_2 - I_3 = 4 \\ 2I_1 &- I_2 + 2I_3 = 10 \\ I_1 &- 3I_2 - 4I_3 = 5 \end{aligned}$$

❶ Denklemleri matris şeklinde yazın

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

❷ Akım değerleri

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

❸ Matrisin eki için gerekli determinant işlemi

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \boxed{1 \quad -3 \quad -4} \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 24 + 28 = 55$$

❹ R matrisinin eşçarpanları

$$R_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 10 \qquad R_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 10 \qquad R_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

$$R_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 11 \qquad R_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11 \qquad R_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11$$

$$R_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad R_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad R_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA -Örnek-

❺ Eşçarpan matrisinin transpozesi alınarak matrisin eki elde edilir

$$ek(R)=\begin{bmatrix}10 & 10 & -5\\ 11 & -11 & 11\\ 3 & -8 & -7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}10 & 11 & 3\\ 10 & -11 & -8\\ -5 & 11 & -7\end{bmatrix}$$

❻ R Matrisinin tersi

$$[R]^{-1}=\frac{1}{\Delta_R}ek(R)=\frac{1}{55}\begin{bmatrix}10 & 11 & 3\\ 10 & -11 & -8\\ -5 & 11 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10/55 & 11/55 & 3/55\\ 10/55 & -11/55 & -8/55\\ -5/55 & 11/55 & -7/55\end{bmatrix}$$

❼ Bilinmeyen akım değerleri

$$[I]=[R]^{-1}\times[E]=\begin{bmatrix}10/55 & 11/55 & 3/55\\ 10/55 & -11/55 & -8/55\\ -5/55 & 11/55 & -7/55\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\ 10\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix}Amper$$

inv komutu ile bir matrisin tersini alma

- **Matrisin tersini verir.**
- **inv (matris)**

tersi hesaplanacak matris

Komut penceresi

```
% R  matrisinin tanımlanması
>> R=[3 2 -1;2 -1 2;1 -3 -4]

R =

     3     2    -1
     2    -1     2
     1    -3    -4

>> inv(R)       % matrisin tersi

ans =

    0.1818    0.2000    0.0545
    0.1818   -0.2000   -0.1455
   -0.0909    0.2000   -0.1273
```

- **Örnek:**

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA
-MATLAB Örnek-

Komut penceresi

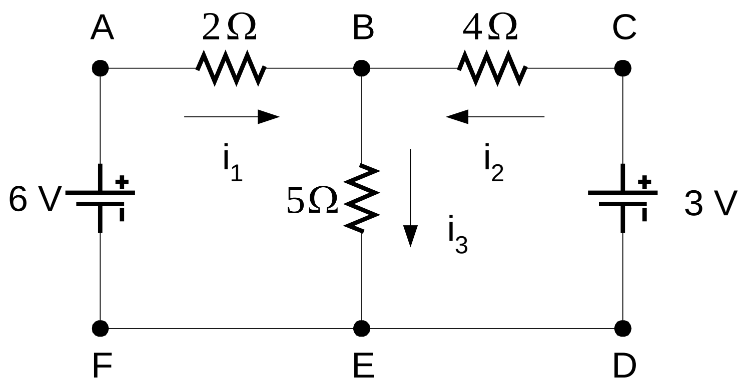
```
% R ve E  matrislerinin tanımlanması
>> R=[3 2 -1;2 -1 2;1 -3 -4]

R =

     3     2    -1
     2    -1     2
     1    -3    -4

>> E=[4 10 5]'

E =

     4
    10
     5

%  Akım değerlerinin hesabı
>> I=inv(R)*E

I =

    3.0000
   -2.0000
    1.0000
```

Komut penceresi

```
% R ve E  matrislerinin tanımlanması
>> R=[3 2 -1;2 -1 2;1 -3 -4]

R =

     3     2    -1
     2    -1     2
     1    -3    -4

>> E=[4 10 5]'

E =

     4
    10
     5

%  Akım değerlerinin diğer yolla hesabı
>> I=R\E

I =

    3.0000
   -2.0000
    1.0000
```

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA -Örnek-

- **Örnek: Verilen devredeki akım değerlerini matrisin tersini alarak bulunuz?**



❶ **ABEF noktaları ile tanımlanan göze ait denklem**

$$2\,i_1 + 5\,i_3 = 6$$

❷ **ACDF noktaları ile tanımlanan göze ait denklem**

$$2\,i_1 - 4\,i_2 = 6 - 3$$

❸ **B noktası için Kirchoff'un akımlar kanunu**

$$i_1 + i_2 = i_3$$

❹ **3 denklemi matris şeklinde ifade edin**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

❺ **Matris formdaki ifadeden I akım değerlerini yalnız bırakalım**

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BİLİNMEYENLERİ MATRİSİN TERSİNİ ALARAK BULMA

-Örneğin MATLAB ile Çözümü-

Komut penceresi

```
% Direnç değerlerine ait A,  gerilim kaynaklarına ait B matris formlarının tanımlanması
>> A = [2  0  5; 2  -4  0; 1  1  -1];
>> B = [6; 3; 0];

% Dal akımlarının hesaplanması
>> I = inv(A)*B

I =
    1.0263
   -0.2368
    0.7895

% veya bu işlem aşağıdaki şekilde de yapılabilir
>> I = A \ B

I =
    1.0263
   -0.2368
    0.7895
```

ÖDEV

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

$$\begin{aligned} I_1 &- I_2 + 2I_3 = 1 \\ 2I_1 &+ 3I_2 + I_3 = 1 \\ 3I_1 &+ 2I_2 + 2I_3 = 0 \end{aligned}$$

- **Yukarıdaki lineer denklem takımını,**
  - **Cramer**
  - **Matrisin Tersi yöntemlerini kullanarak hem el ile hem de MATLAB programı şeklinde çözünüz?**

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Birden fazla uygulama şekli vardır.**
- **Biz üç farklı uygulama türünden bahsedeceğiz.**

❶ $\left[R \;\vdots\; I_{birim}\right]$ formunu kullanarak bilinmeyen değerlerin bulunmasıdır. Burada R matrisinin tersinin elde edilmesini isteyen bir yapı mevcuttur.

➢ Bu uygulama şeklini aşağıda örnek bir elektriksel devreye ait doğrusal denklem takımındaki akım değerlerinin bulunmasında kullanalım.

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & + & 2I_3 & = & 1 \\ 2I_1 & + & 3I_2 & + & I_3 & = & 1 \\ 3I_1 & + & 2I_2 & + & 2I_3 & = & 0 \end{array}$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ - DEVAM -

- Doğrusal denklem takımları Gauss eleme yöntemi $\left[R \;\vdots\; I_{birim}\right]$ formatına dönüştürülür.

$$\left[R \;\vdots\; I_{birim}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- R matris eleman değerlerinin bulunduğu yerde birim matrisin oluşturulması için gerekli olan alt ve üst üçgen matrisin eleman değerlerini sıfır yapacak işlemlere başlanır.
  - Örneğin ikinci satır birinci sütun eleman değerini sıfır yapabilmek için ikinci satır elemanlarının tamamına aşağıdaki uygulamadan da görüldüğü gibi $S_2 - 2\times S_1/1$ formülü ile işlem yapılır.
  - Bu formülün anlamı sıfır yapılacak elemanın büyüklüğü o sütunda yer alacak olan birim matrisin '1' olacak eleman değerinin bulunduğu satır ile çarpılıp, birim matrisin o sütununda '1' olan elemanına karşılık gelen elemana bölünüp işlem ikinci satır için gerçekleştirildiğinden ikinci satır elemanlarından çıkarılacak demektir.

GAUSS ELEME YÖNTEMİ -DEVAM-

$$[R \,\vdots\, I_{birim}] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow S_2 - 2\times S_1/1 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow S_3 - 3\times S_1/1 \end{array}$$

- İkinci satırın birinci elemanı sıfır yapıldığına göre burada alt üçgen matrisin içinde yer alan üçüncü satırın birinci eleman değerini sıfır yapacak işleme geçmek gerekir.
- Bunun için üçüncü satırın birinci eleman değeri işlemlerin sonunda o sütunda birim matrisin ‘1’ olacak değerinin bulunacağı birinci satır ile çarpılıp yine birinci satırın ilk eleman değerine bölündükten sonra işlem üçüncü satır için gerçekleştirildiğinden üçüncü satırdan çıkartılacak demektir. Yukarıdaki gösterimden de anlaşıldığı gibi bunun için üçüncü satıra $S_3 - 3\times S_1/1$ formülü uygulanacak demektir.

GAUSS ELEME YÖNTEMİ -DEVAM-

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -4 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow S_3-5\times S_2/5\end{array}$$

- Alt üçgen matrisin son sıfır elemanı için $S_3-5\times S_2/5$ formülü uygulanırsa,

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow S_1-2\times S_3/(-1)\\ \\ \\ \end{array}$$

- Benzer uygulamalar devam ettirilirse

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow -S_3\end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow S_2-(-3)\times S_3/1\\ \\ \end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \leftarrow S_2/5\\ \\ \end{array}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 4/5 & -3/5\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow S_1-(-1)\times S_2/1\\ \\ \\ \end{array}$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ -DEVAM-

$$
=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -6/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]
$$

- Sonunda elektriksel devreye ait doğrusal denklem takımında empedans değerlerinin oluşturduğu matrisin tersi önceki slaytlardaki işlemlerin sonucunda elde edilmiş olur.
- Bu ters matris, gerilim değerlerinden oluşan matris ile aşağıdaki şekilde çarpılırsa, bilinmeyen akım değerleri elde edilir.

$$
[I]=[R]^{-1}[E]=\begin{bmatrix} -4/5 & -6/5 & 7/5 \\ 1/5 & 4/5 & -3/5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} Amper
$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Örnek:** **Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerlerini Gauss Eleme yönteminin $\left[R \;\vdots\; I_{birim}\right]$ formunu kullanarak elde ediniz.**

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - X_3 &= 4 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 &= 3 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 &= 0 \end{aligned}$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

❷ İkinci yöntem ise, birinci yöntemdekinden farklı olarak, empedans değerlerinden oluşan matrisin yanına birim matrisin değil gerilim değerlerinden oluşan matrisin yazılmasını gerektirir.

- $\left[\mathrm{R} \;\vdots\; \mathrm{E} \right]$

- Önceki yöntemde olduğu gibi işlemler empedanslardan oluşan matrisin yerinde birim matris oluşturuluncaya kadar devam ettirilir.
- Birim matrisin oluşturulduğu anda gerilimlerin yer aldığı matris elemanları doğrudan bilinmeyen akım değerlerini vermiş olur.

$$\left[R^{-1} \;\vdots\; I_A \right]$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ - Örnek -

- Aşağıda verilen bir elektriksel devreye ait doğrusal denklem takımında yer alan akım değerlerini Gauss eleme yönteminin $\left[R \;\vdots\; E\right]$ formunu kullanarak bulunuz?

$$\begin{aligned} 2I_1 &+ 4I_2 = 20 \\ -I_1 &+ 2I_2 = 6 \end{aligned}$$

- Doğrusal denklem takımındaki değerler kullanılarak $\left[R \;\vdots\; E\right]$ formu elde edilir

$$\left[R \;\vdots\; E\right] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \vdots & 20 \\ -1 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

- Bu formda birim matris yapısında alt köşegen matris eleman değerinin sıfır olabilmesi için ikinci satırda işlem yapılması gerekir.
- İkinci satır birinci sütun değer elemanı olan '-1' sayısı birinci satır 'S1' ile çarpılıp birinci satırın birinci elemanı olan '2' sayısına bölünür ve işlem ikinci satır için gerçekleştirildiğine göre elde edilen sonuç ikinci satır 'S2' den çıkartılır.
- İkinci satırın birinci eleman değerini '0' yapmak için gerçekleştirilen bu işlemde ortaya çıkan formül $S_2 - ((-1) \times S_1)/2$ <u>ikinci satırın bütün elemanlarına uygulanır</u>.

GAUSS ELEME YÖNTEMİ - Örnek -

$$[R \;\vdots\; E] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \vdots & 20 \\ -1 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \leftarrow S_2 - ((-1) \times S_1)/2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \vdots & 20 \\ 0 & 4 & \vdots & 16 \end{bmatrix}$$

- Elde edilen bu sonuca göre ikinci satıra ait denklem ifadesi tekrar yazılacak olursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$0I_1 + 4I_2 = 16$$

- Bu sonuca göre eşitlik içerisinde bir tane bilinmeyen ifadesi olan I_2'nin olduğu görülmektedir.
- Bundan dolayı sayısal işlem yapılırsa ikinci göze ait olan akım değerinin $I_2 = 4$A olduğu kolayca bulunmuş olur. Bulunan bu değer birinci göze ait denklem ifadesinde yerine yazılır ise,

$$2I_1 + 4I_2 = 20 \quad \Rightarrow \quad 2I_1 + 4 \times 4 = 20 \quad \Rightarrow I_2 = 2\ A$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Örnek:** Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerlerini Gauss Eleme yönteminin $[R \vdots E]$ formunu kullanarak elde ediniz.

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 - X_3 &= 1 \\
2X_1 - X_2 + 2X_3 &= -1 \\
X_1 + X_2 - X_3 &= 2
\end{aligned}
$$

❶ R:E formunu oluşturarak ilk 0 değerini elde et

$$
[R \vdots E] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow S_2 - 2\times S_1/1 \\ \\ \end{matrix}
$$

❷ Alt üçgendeki ikinci 0 değerini oluşturalım

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 4 & \vdots & -3 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow S_3 - 1\times S_1/1 \end{matrix}
$$

❸ Alt üçgendeki üçüncü 0 değerini oluşturalım

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 4 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow S_3 - S_2/5 \end{matrix}
$$

❹ Matrisin son halini yazalım

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & -4/5 & \vdots & 8/5 \end{bmatrix}
$$

❺ Bilinmeyen X değerlerini bulalım

$$\frac{-4}{5}X_3 = \frac{8}{5} \Rightarrow X_3 = -2$$

$$-5X_2 + 4X_3 = -3 \Rightarrow X_2 = -1$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 = 1 \Rightarrow X_1 = 1$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Örnek: Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerlerini Gauss Eleme yönteminin $[R \vdots E]$ formunu kullanarak elde ediniz.**

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
X_1 & + & X_2 & - & X_3 & = & 4 \\
2X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 3 \\
X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & = & 0
\end{array}
$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

❸ Üçüncü yöntem ise, yerine koyma ve yok etme metodunun uygulanmasıdır. Bu yöntemi örnekler üzerinde görelim.

❑ **Örnek 1:** Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki akım değerlerini Gauss Eleme yönteminin yerine koyma ve yok etme metodunu kullanarak çözünüz?

❖ I_1'i yalnız bırakalım.

$$\begin{aligned} 5I_1 - 2I_2 - 3I_3 &= 4 \quad /5 \\ -5I_1 + 7I_2 - 2I_3 &= -10 \quad /\text{-}5 \\ -3I_1 - 3I_2 + 8I_3 &= 6 \quad /\text{-}3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} I_1 - \frac{2}{5}I_2 - \frac{3}{5}I_3 &= \frac{4}{5} \\ I_1 - \frac{7}{5}I_2 + \frac{2}{5}I_3 &= 2 \\ I_1 + I_2 - \frac{8}{3}I_3 &= -2 \end{aligned}$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- 2. ve 3. eşitliklerden 1. eşitlik çıkarılarak I_1'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{2}{5}I_2 - \frac{3}{5}I_3 &= \frac{4}{5} \\ -I_2 + I_3 &= \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5}I_2 - \frac{31}{15}I_3 &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

- 2. eşitlik -1'e ve 3. eşitlik 5/7'ye bölünerek tekrar yazılır.

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{2}{5}I_2 - \frac{3}{5}I_3 &= \frac{4}{5} \\ I_2 - I_3 &= -\frac{6}{5} \\ I_2 - \frac{31}{21}I_3 &= -2 \end{aligned}$$

- 3. eşitlikten 2. eşitlik çıkarılarak I_2'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{2}{5}I_2 - \frac{3}{5}I_3 &= \frac{4}{5} \\ I_2 - I_3 &= -\frac{6}{5} \\ -\frac{10}{21}I_3 &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

- 3. eşitlikten I_3 hesaplanır.

$$I_3 = \frac{84}{50}\ \text{Amper}$$

- I_3 2. eşitlikte yerine koyulur ve I_2 hesaplanır.

$$I_2 - \frac{84}{50} = -\frac{6}{5} \Rightarrow I_2 = \frac{24}{50}\text{Amper}$$

- I_2 ve I_3 1. eşitlikte yerine koyulur ve I_1 hesaplanır.

$$I_1 - \frac{2}{5}\left(\frac{24}{50}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{84}{50}\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow I_1 = 2\,\text{Amper}$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Örnek 2:** Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerlerini Gauss Eleme yönteminin yerine koyma ve yok etme metodunu kullanarak çözünüz?

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 &= -1 \\ 3X_1 - 5X_2 - 2X_3 &= 7 \\ 2X_1 + 7X_2 - X_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 3 ile çarpılarak 2.'den çıkarılır

$\Rightarrow$ 2 ile çarpılarak 3.'den çıkarılır

$(E_2 - 3E_1 \Rightarrow E_2 ;\ E_3 - 2E_1 \Rightarrow E_3)$

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 &= -1 \\ X_2 - 5X_3 &= 10 \\ 11X_2 - 3X_3 &= 6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 11 ile çarpılarak 3.'den çıkarılır

$(E_3 - 11E_2 \Rightarrow E_1)$

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 &= -1 \\ X_2 - 5X_3 &= 10 \\ -52X_3 &= 104 \end{aligned}$$

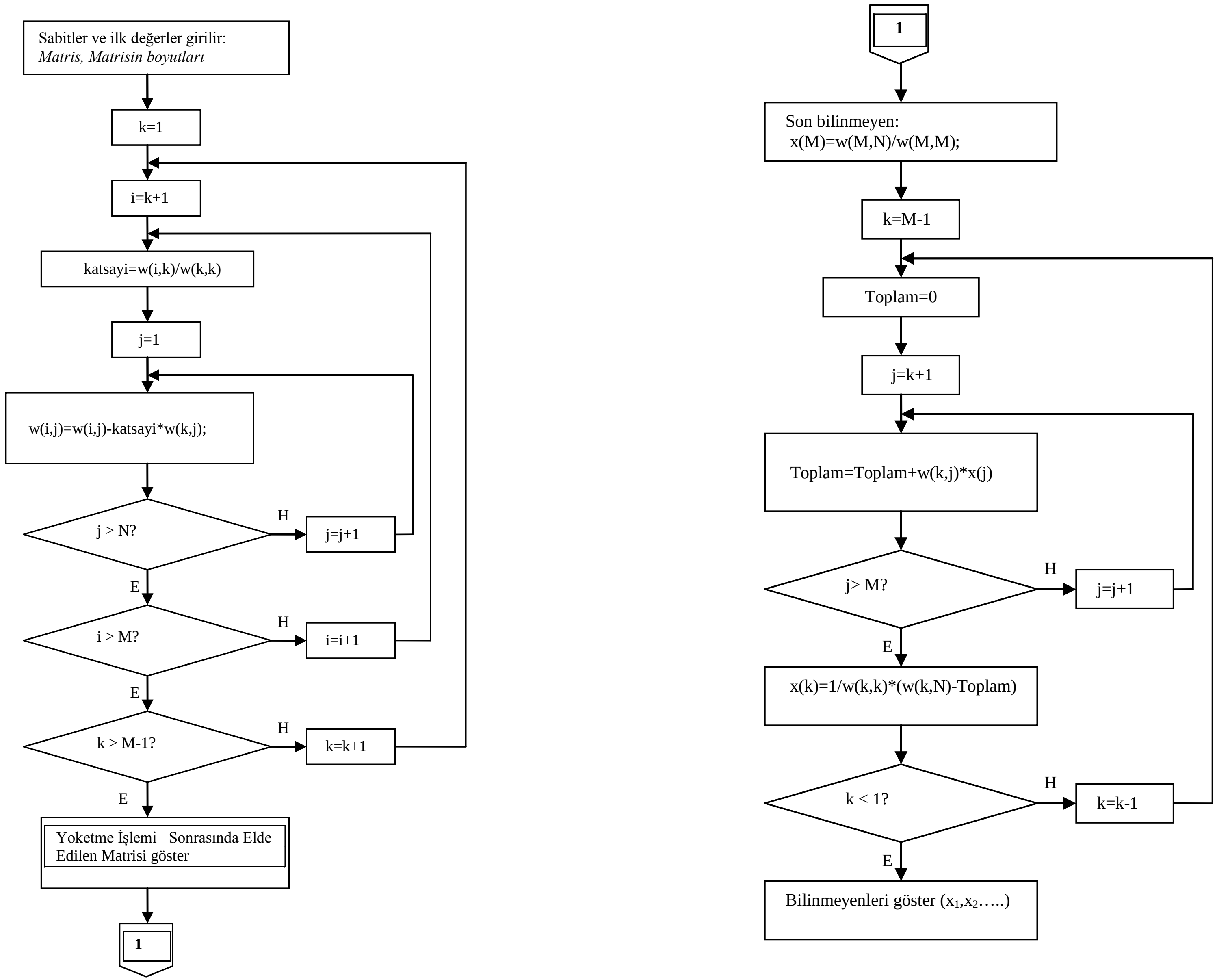
$\Rightarrow$

$$X_3 = \frac{104}{-52} = -2$$

$$X_2 = 10 + 5(-2) = 0$$

$$X_1 = -1 + 2*0 - (-2) = 1$$

GAUSS ELEME YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI



GAUSS ELEME YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Gauss Yok Etme (R:E)Yöntemi%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
R=[1 -3 4 -5; 2 4 6 8; 4 3 2 1; 5 3 1 -3];
E=[-11;42;-11;-38];
GK=[R E];
M=size(GK,1);N=size(GK,2);

% Yok Etme -------------
 for i=1:M-1
   for j=i+1:M
      katsayi=GK(j,i)/GK(i,i);
      for k=1:N
         GK(j,k)=GK(j,k)-katsayi*GK(i,k);
      end
   end
end
GK
```

```
% Yerine Koyma -----------------
x(M)=GK(M,N)/GK(M,M);
for i=M-1:-1:1
   Toplam=0;
   for j=i+1:M
      Toplam=Toplam+GK(i,j)*x(j);
   end
   x(i)=1/GK(i,i)*(GK(i,N)-Toplam);
end
x
```

ÖDEV

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

- **Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini her 3 Gauss yöntemini de kullanarak ayrı ayrı çözünüz?**

$2X_1 - 3X_2 + X_3 = -5$

$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 7$

$X_1 + 4X_2 - 5X_3 = 3$

- **Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini Gauss Eleme Yönt. (R : E) ile çözen MATLAB programını yazınız.**

$$
\begin{aligned}
&-2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + x_6 = 5 \\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 10 \\
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1 \\
&2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -6 \\
&-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 - 2x_6 = -8 \\
&2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 3
\end{aligned}
$$

solve komutu ile sembolik denklem çözümü

- **Cebirsel denklemlerin sembolik olarak çözümünde kullanılır.**

$$\text{solve}(\underbrace{\text{'denk1','denk2', ... ,'denkn'}}_{})$$

çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklemler

solve komutu ile sembolik denklem çözümü
- Örnek -

- **Aşağıda verilen elektriksel bir devreye ait doğrusal denklem takımındaki I akım değerlerini solve komutu ile bulunuz?**

$$\begin{array}{rcrcr} 3I_1 & + & 4I_2 & = & 2 \\ -2I_1 & + & 3I_2 & = & 4 \end{array}$$

Komut penceresi

% Denklemde yer alan sabitlerin sembollerle tanımlanması

```
>> syms I1 I2
```

% Bilinmeyen akım değerlerinin bulunması

```
>> [I1,I2] = solve('3*I1+4*I2=2','-2*I1+3*I2=4')

I1 =

-10/17

I2 =

16/17
```

solve komutu ile sembolik denklem çözümü
- Örnek -

- **Aşağıda verilen elektriksel bir devreye ait doğrusal denklem takımındaki I akım değerlerini solve komutu ile bulunuz?**

$$\begin{aligned} I_1 &- I_2 + 2I_3 = 1 \\ 2I_1 &+ 3I_2 + I_3 = 1 \\ 3I_1 &+ 2I_2 + 2I_3 = 0 \end{aligned}$$

Komut penceresi

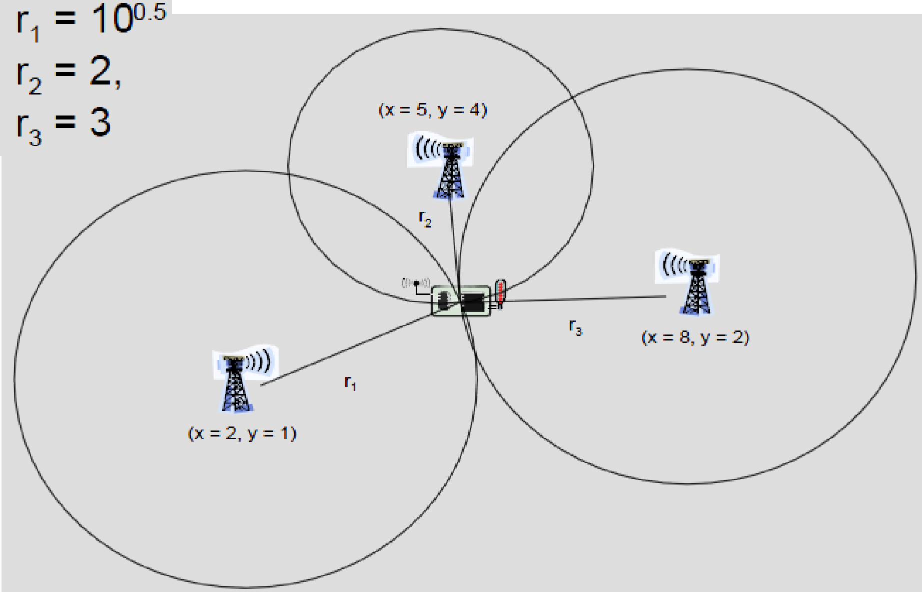
% Denklemde yer alan sabitlerin sembollerle tanımlanması
```
>> syms I1 I2 I3
```
% Bilinmeyen akım değerlerinin bulunması
```
>> [I1,I2,I3]=solve('I1-I2+2*I3=1','2*I1+3*I2+I3=1', '3*I1+2*I2+2*I3=0')

I1 =

-2

I2 =

1

I3 =

2
```

Denklem Sistemlerinin Kullanıldığı Mühendislik Problemi Örneği

❑ Lateration – RSSI ile Konum Belirleme Yöntemi

➢ İletişim ortamında sinyalin aldığı yol boyunca çeşitli nesneler mevcut ise ve bu nesneler

$r_1 = 10^{0.5}$
$r_2 = 2,$
$r_3 = 3$



$$(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 = r_i^2 \text{ for } i = 1, \ldots, 3$$

Subtracting eq. 3 from 1 & 2:

$$(x_1 - x_u)^2 - (x_3 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 - (y_3 - y_u)^2 = r_1^2 - r_3^2$$
$$(x_2 - x_u)^2 - (x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 - (y_2 - y_u)^2 = r_2^2 - r_3^2.$$

Rearranging terms gives a linear equation in (x_u, y_u)!

$$2(x_3 - x_1)x_u + 2(y_3 - y_1)y_u = (r_1^2 - r_3^2) - (x_1^2 - x_3^2) - (y_1^2 - y_3^2)$$
$$2(x_3 - x_2)x_u + 2(y_3 - y_2)y_u = (r_2^2 - r_2^2) - (x_2^2 - x_3^2) - (y_2^2 - y_3^2)$$

$$2\begin{bmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1^2 - r_3^2) - (x_1^2 - x_3^2) - (y_1^2 - y_3^2) \\ (r_2^2 - r_2^2) - (x_2^2 - x_3^2) - (y_2^2 - y_3^2) \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$(x_u, y_u) = (5,2)$

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR *"Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB"*, Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, *"Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme"*, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Ahmet TOPÇU, "*Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz*", OGÜ.**
- **Yüksel YURTAY, *Sayısal Analiz Ders Notları*, Sakarya Üniversitesi**
- **Prof.Dr. Asaf VAROL, "*Sayısal Analiz Ders Notları*", Fırat Üniversitesi**
- **Fahri VATANSEVER, *"İleri Programlama Uygulamaları"*,Seçkin Yayıncılık**