Soru 1. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan doğal, zorlanmış ve toplam çözümünü bulun.

Çözüm.
a.

$$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^{n-2}(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = C_1(1)^n + nC_2(1)^n$ şeklinde bulunur. Sıfır giriş için C_1 ve C_2 katsayılarını bulalım. $y_d(n)$ yi $x(n) = 0$ ve $n = 0$ ve $n = 1$ için fark denklemine yerleştirirsek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$y(0) = 2y(-1) - y(-2) = 2 \times 1 - 1 \times 0 = 2$$

$$y(1) = 2y(0) - y(-1) = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

$$y(0) = C_1 + 0 = 2 \qquad C_1 = 2$$

$$y(1) = C_1 + C_2 = 3 \qquad C_2 = 1$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = 2(1)^n + n(1)^n = (2+n)u(n)$ olarak bulunmuş olur.

b.

Giriş işareti $x(n) = u(n) = 1$ dir. Özdeğerlerin her ikisi de 1 den farklı olsaydı $y_ö(n) = Ku(n)$ şeklinde özel çözüm tahmininde bulunacaktık. Özdeğerlerin bir tanesi 1 olsaydı $y_ö(n) = Knu(n)$ şeklinde özel çözüm tahmininde bulunacaktık. Özdeğerlerin her ikisi de 1 (katlı) olduğundan dolayı, özel çözüm tahmini $y_ö(n) = Kn^2u(n)$ olarak yapılacaktır. Bu tahmin fark denklemine yerleştirilmek suretiyle K ve ardından da $y_ö(n)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Kn^2u(n) - 2K(n-1)^2u(n-1) + K(n-2)^2u(n-2) = u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 2$ için değerlendirirsek K yı bulabiliriz.

$$4K - 2K = 1 \quad K = 1/2$$

Böylece $y_ö(n) = \frac{1}{2}n^2u(n)$ olarak bulunur.

Bu durumda zorlanmış çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$y_z(n) = C_1(1)^n + nC_2(1)^n + \frac{1}{2}n^2u(n)$$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n = 0$ ve $n = 1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$y(0) = 2y(-1) - y(-2) + u(0) = 2\times 0 - 1\times 0 + 1 = 1$

$y(1) = 2y(0) - y(-1) + u(1) = 2\times 1 - 1\times 0 + 1 = 3$

$y_z(0) = C_1 = 1$

$y_z(1) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 3 \quad C_2 = \frac{3}{2}$

Böylece zorlanmış çözümü aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$y_z(n) = (1)^n u(n) + n\frac{3}{2}(1)^n u(n) + \frac{1}{2}n^2 u(n) = (1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n)$$

Toplam çözüm ise doğal ve zorlanmış çözümün toplamı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = (2+n)u(n) + (1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n) = (3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n)$$

Soru 2. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin $y(-1) = y(-2) = 1$ başlangıç koşulları ile $x(n) = 2u(n)$ işaretine cevabın doğal, zorlanmış ve tam çözümünü bulunuz.

$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$

Çözüm.

a.

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0 \qquad \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \qquad (\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2$

$y_d(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n$

$n = 0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{1} + 4\underbrace{y(-2)}_{1} = 0 \qquad y(0) = 0$

$n = 1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{0} + 4\underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \qquad y(1) = -4$

$n = 0$ için $y_d(0) = C_1 = 0$

$n = 1$ için $y_d(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 = -4 \qquad C_2 = -2$

$$y_d(n) = -2n(2)^n = -2n(2)^n u(n)$$

b.

$x(n) = 2u(n)$ olduğundan dolayı $y_ö(n) = Ku(n)$ olarak tahmin edilir.

$Ku(n) - 4Ku(n-1) + 4Ku(n-2) = 2u(n)$

$n \geq 2$ için $K - 4K + 4K = 2 \qquad K = 2$

$$y_ö(n) = 2u(n)$$

Zorlanmış çözüm ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$y_z(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n + 2u(n)$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n=0$ ve $n=1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$n=0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{0} + 4\underbrace{y(-2)}_{0} = 2u(0) = 2 \qquad y(0) = 2$

$n=1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{2} + 4\underbrace{y(-1)}_{0} = 2u(1) = 2 \qquad y(1) = 2 + 8 = 10$

$n=0$ için $y_z(0) = C_1 + 2 = 2 \qquad C_1 = 0$

$n=1$ için $y_z(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 + 2 = 10 \qquad C_2 = 4$

$y_z(n) = 4n(2)^n + 2u(n) = 4n(2)^n u(n) + 2u(n) = (4n(2)^n + 2)u(n)$

c.

$$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = -2n(2)^n u(n) + 4n(2)^n u(n) + 2u(n)$$
$$= 2n(2)^n u(n) + 2u(n) = \left[2n(2)^n + 2\right]u(n)$$

Soru 3. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin $y(-1) = y(-2) = 1$ başlangıç koşulları ile $x(n) = (2)^n$ işaretine cevabın doğal, zorlanmış ve tam çözümünü bulunuz.

$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$

Çözüm.

a.

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0 \qquad \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \qquad (\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2$

$y_d(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n$

$n=0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{1} + 4\underbrace{y(-2)}_{1} = 0 \qquad y(0) = 0$

$n=1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{0} + 4\underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \qquad y(1) = -4$

$n=0$ için $y_d(0) = C_1 = 0$

$n=1$ için $y_d(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 = -4 \qquad C_2 = -2$

$y_d(n) = -2n(2)^n = -2n(2)^n u(n)$

b.

$x(n)=(2)^n u(n)$ dir. Şayet özdeğerlerin her ikisi de 2 den farklı olsaydı o zaman $y_ö(n)=K(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilecek idi. Özdeğerler katlı olmayıp sadece bir tanesi 2 olsaydı o zaman $y_ö(n)=Kn(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilecek idi. Özdeğerlerin her ikisi de 2 (iki katlı) olduğundan dolayı $y_ö(n)=Kn^2(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilir. Bu tahmin fark denkleminde yerine konmak suretiyle K ve ardından da $y_ö(n)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Kn^2(2)^n u(n)-4K(n-1)^2(2)^{n-1}u(n-1)+4K(n-2)^2(2)^{n-2}u(n-2)=(2)^n u(n)$$

$n=2$ için $4K(2)^2-4K(2)=K(2)^2 \quad \Rightarrow \quad 16K-8K=4 \qquad K=1/2$

$$y_ö(n)=\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$

Zorlanmış çözüm ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_z(n)=C_1(2)^n+nC_2(2)^n+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n=0$ ve $n=1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$n=0$ için $y(0)-4\underbrace{y(-1)}_{0}+4\underbrace{y(-2)}_{0}=(2)^0=1 \qquad y(0)=1$

$n=1$ için $y(1)-4\underbrace{y(0)}_{1}+4\underbrace{y(-1)}_{0}=(2)^1=2 \qquad y(1)=2+4=6$

$n=0$ için $y_z(0)=C_1=1 \qquad C_1=1$

$n=1$ için $y_z(1)=2\underbrace{C_1}_{1}+2C_2+1=6 \qquad C_2=3$

$$y_z(n)=(2)^n u(n)+3n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)=\left[1+3n+\frac{1}{2}n^2\right](2)^n u(n)$$

c.

$$y_T(n)=y_d(n)+y_z(n)=-2n(2)^n u(n)+(2)^n u(n)+3n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$
$$=(2)^n u(n)+n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)=\left[1+n+\frac{1}{2}n^2\right](2)^n u(n)$$