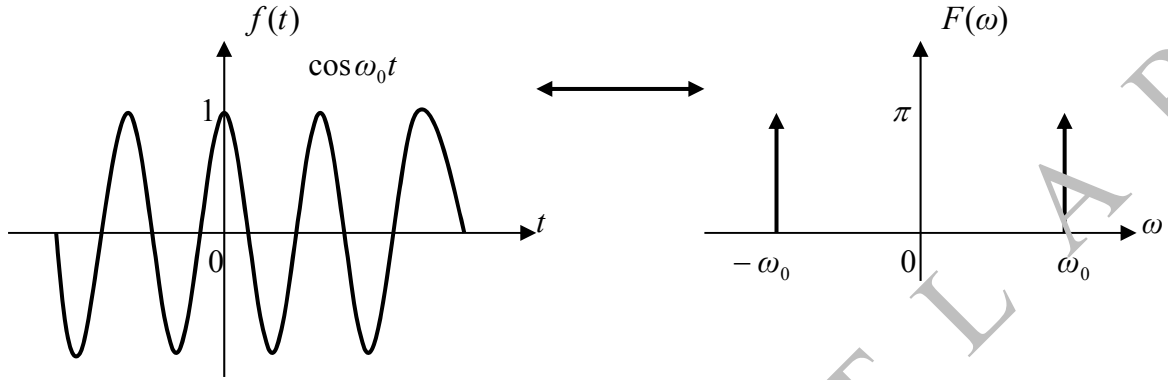


İŞARETLER VE BAND GENİŞLİKLERİ

1. $\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$



Şekil 4 $f(t) = \cos \omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

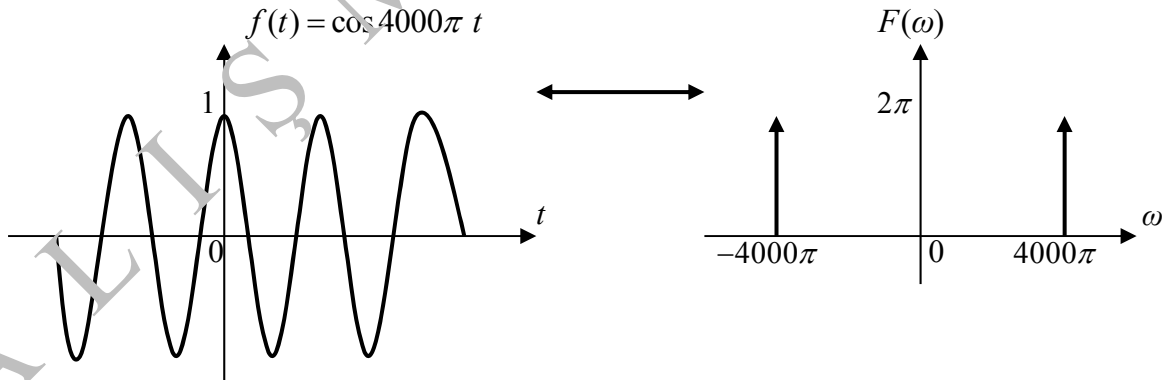
Örnek

$f(t) = 2 \cos 4000\pi t$ işaretinin band genişliğini bulun.

Çözüm

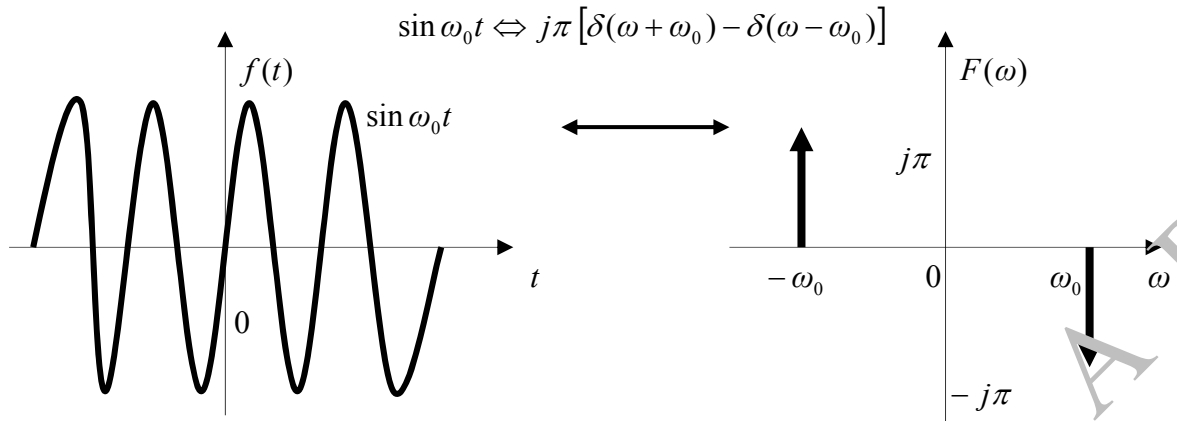
Band genişliği = $f(t) = 2 \cos 4000\pi t \rightarrow 2\pi f = 4000\pi \rightarrow f = 2000 \text{ Hz} = 2 \text{ KHz}$

$$2 \cos 4000\pi t \Leftrightarrow 2\pi [\delta(\omega + 4000\pi) + \delta(\omega - 4000\pi)]$$



Şekil 5 $f(t) = 2 \cos 4000\pi t$ ve Fourier Transformasyonu

2.

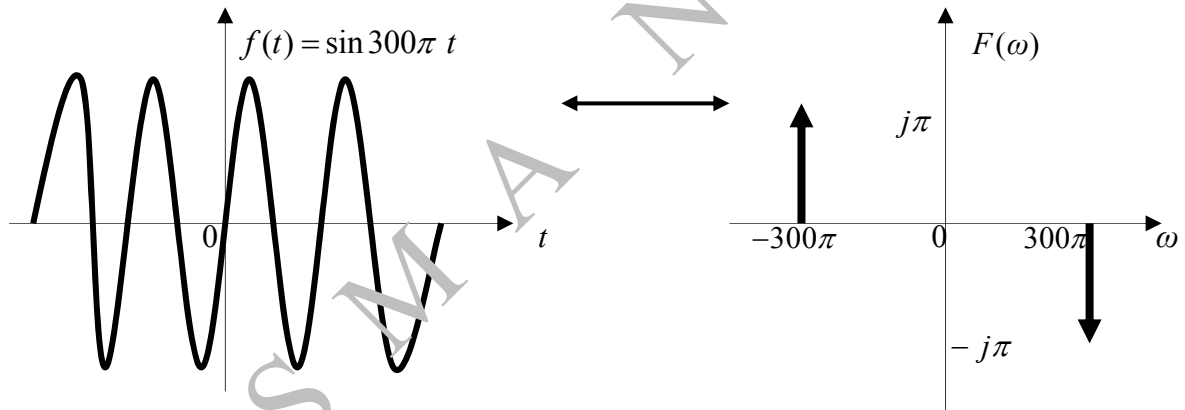


Şekil 164. $f(t) = \sin \omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Örnek $f(t) = \sin 300\pi t$ işaretinin band genişliğini bulun.

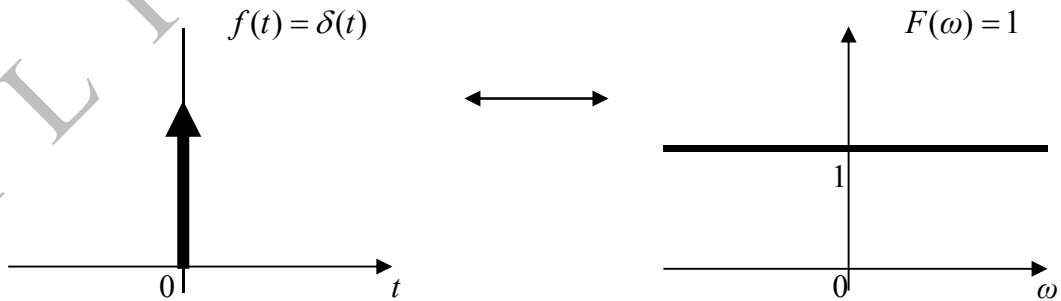
Çözüm Band genişliği $= f(t) = \sin 300\pi t \rightarrow 2\pi f = 300\pi \rightarrow f = 150 \text{ Hz}$

$$\sin 300\pi t \Leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + 300\pi) - \delta(\omega - 300\pi)]$$



Şekil 7. $f(t) = \sin 300\pi t$ ve Fourier Transformasyonu

3.



Şekil 8 Impuls fonksiyonu $f(t) = \delta(t)$ ve Fourier transformasyonu

$$\text{Birim Impuls fonksiyonu} = \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Örnek

Aşağıdaki birim impuls (delta, δ) fonksiyonu ile ilgili hesaplamaları yapınız.

Çözümler için

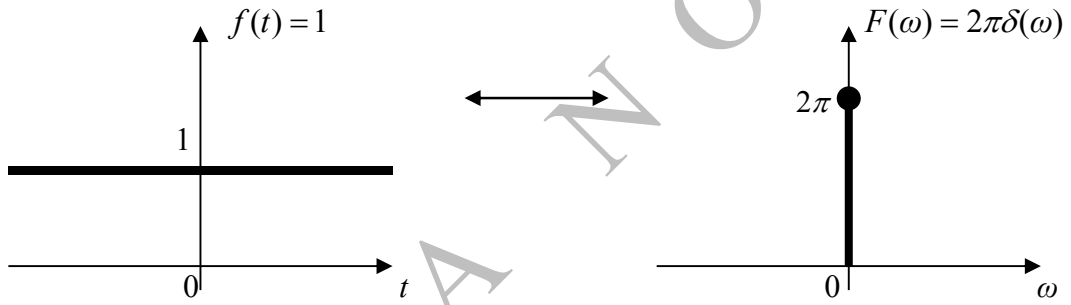
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t \neq 0 \end{cases} \text{ olduğundan}$$

Koşulu göz önünde bulundurulacaktır.

a) $2t\delta(t) \rightarrow 2(0)\delta(0) \rightarrow 0$

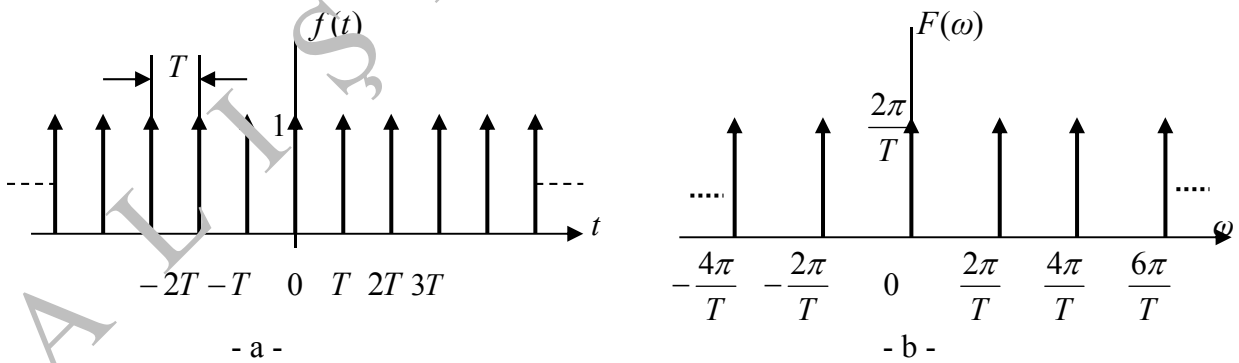
b) $\cos[t\delta(t-\pi)] \rightarrow \cos[t\delta(t-\pi)] = \cos[\pi\delta(\pi-\pi)] = \cos[\pi\delta(0)] = \cos \pi = -1$

4.



Şekil 9 $f(t) = 1$ Fourier transformasyonu

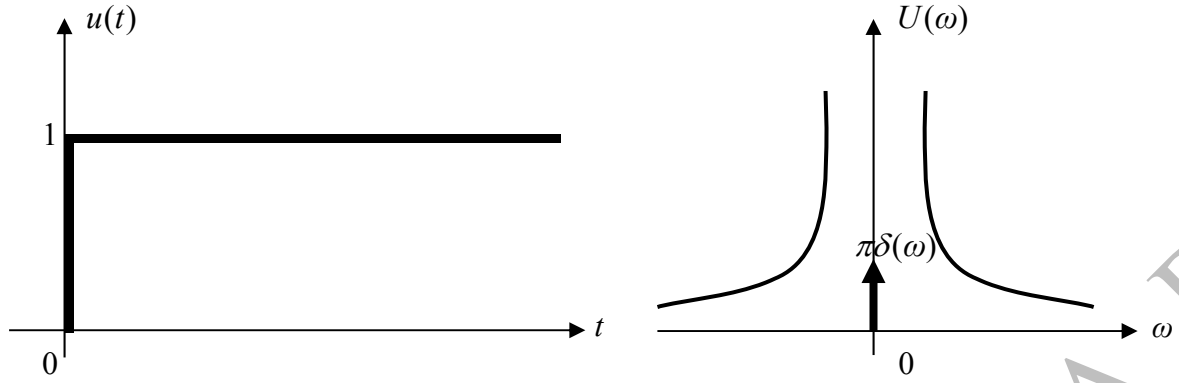
5.



$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Şekil 10 (a) Periyodik impuls dizisi (b) periyodik impuls Fourier transformasyonu

6.

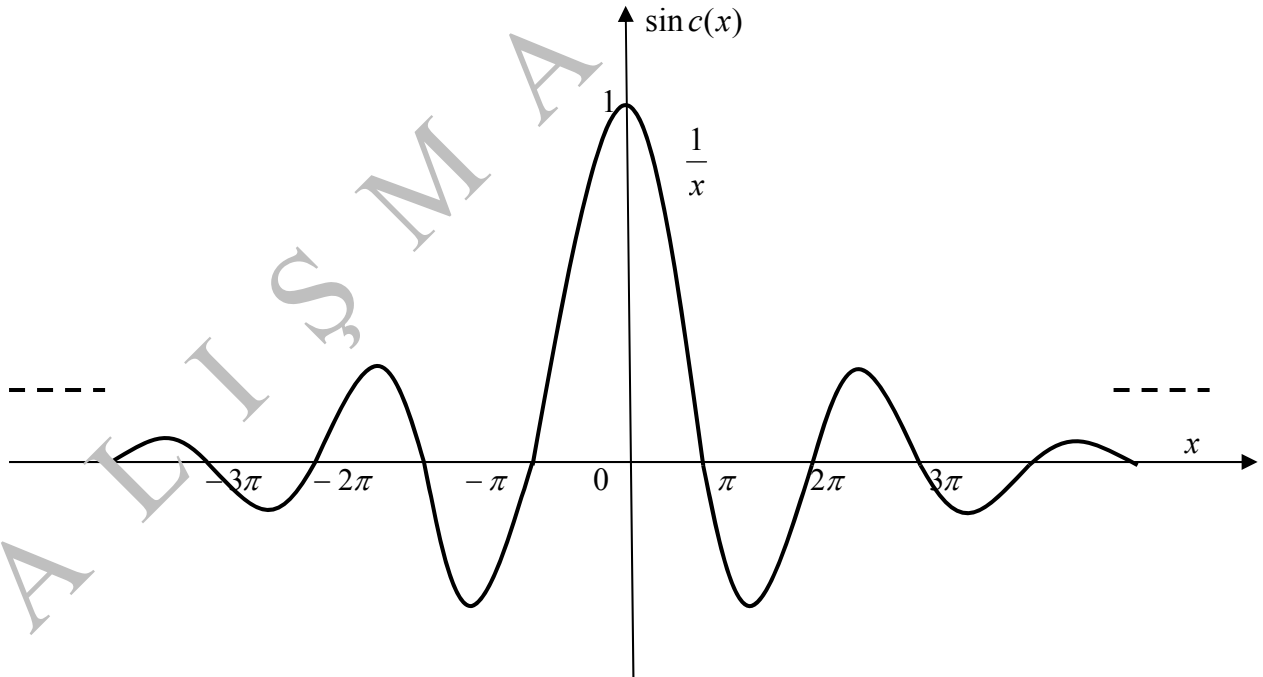


Şekil 11 Birim basamak fonksiyonu $u(t)$, Fonksiyonu ve Fourier transformasyonu

$$\text{Birim basamak fonksiyonu} = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

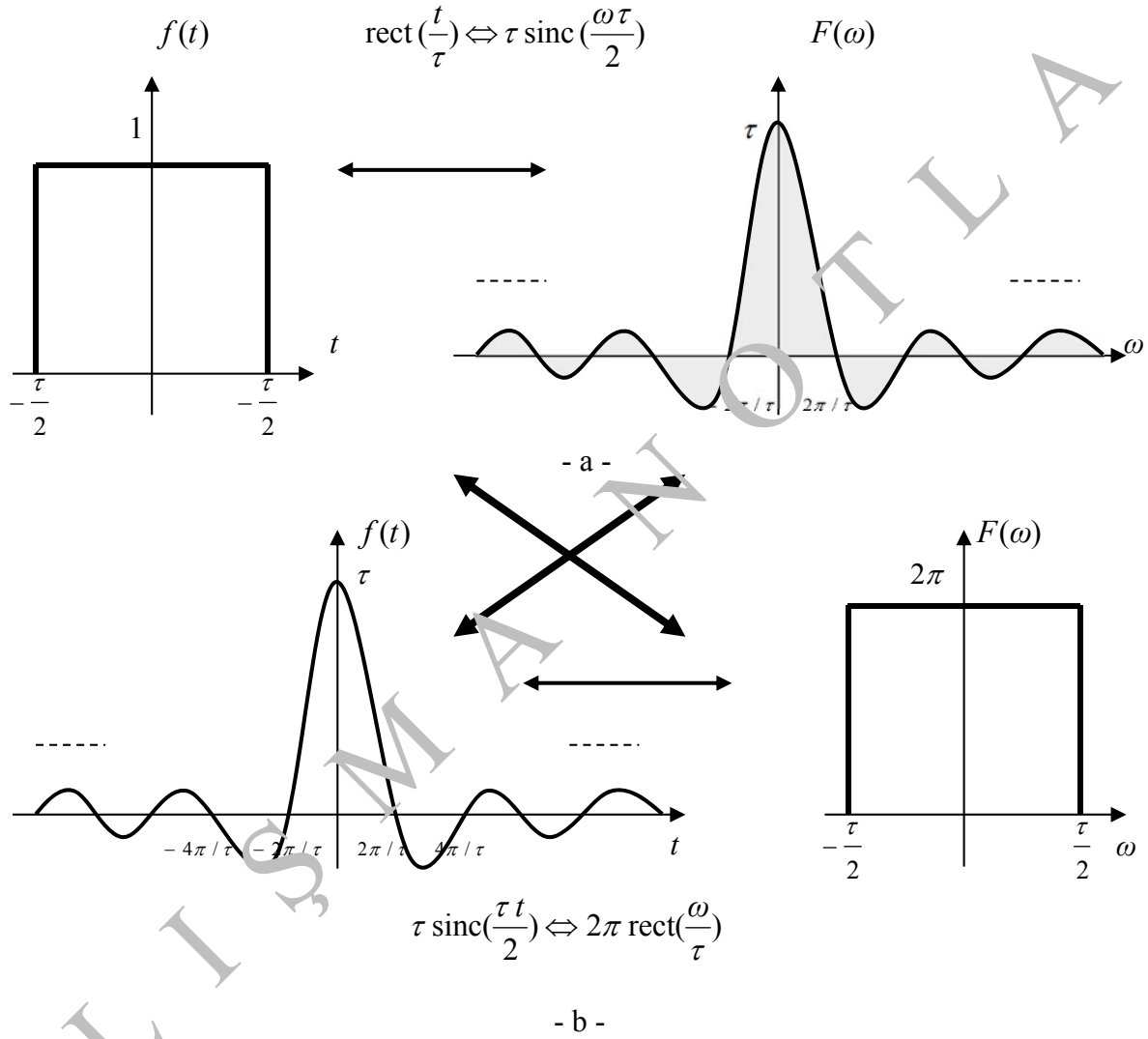
7. Sinc işaret fonksiyonu



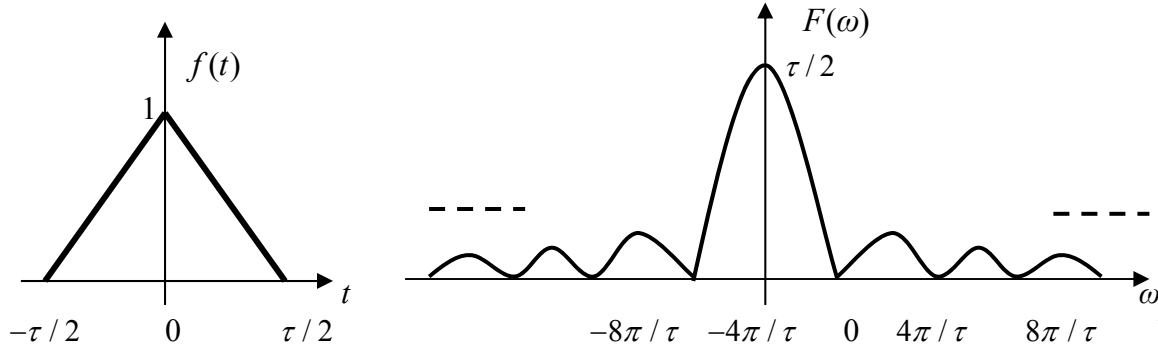
Şekil 12 $\sin c(x)$ İşaretinin görünümü

$$\sin c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

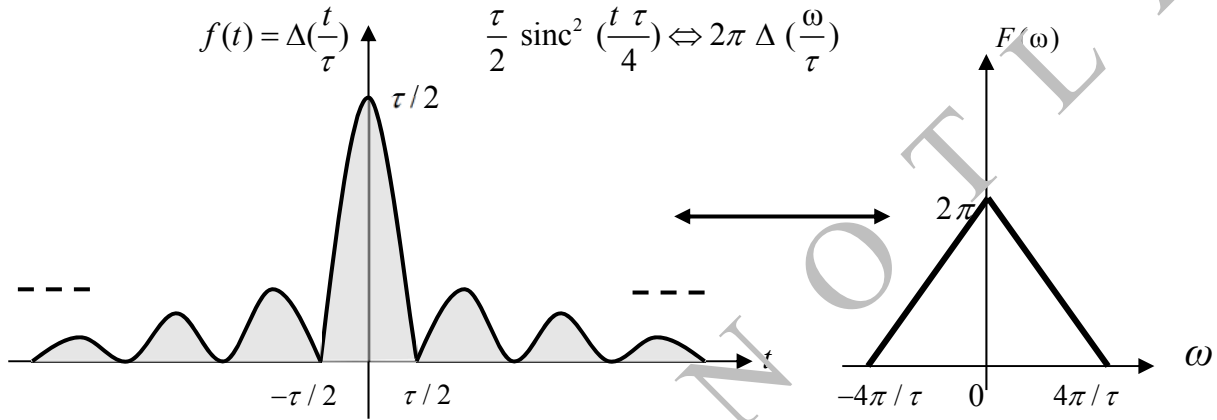
$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi \\ \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \text{ ve } x \neq \pm k\pi \end{cases}$$



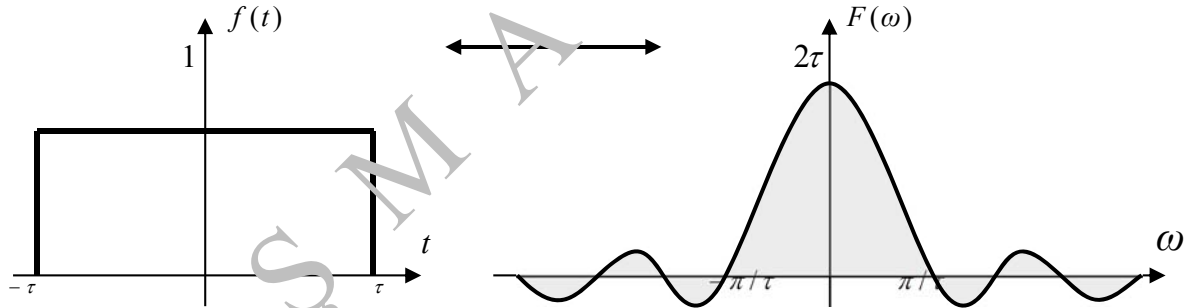
Şekil 13 Fourier transformasyonunun dualite özelliği



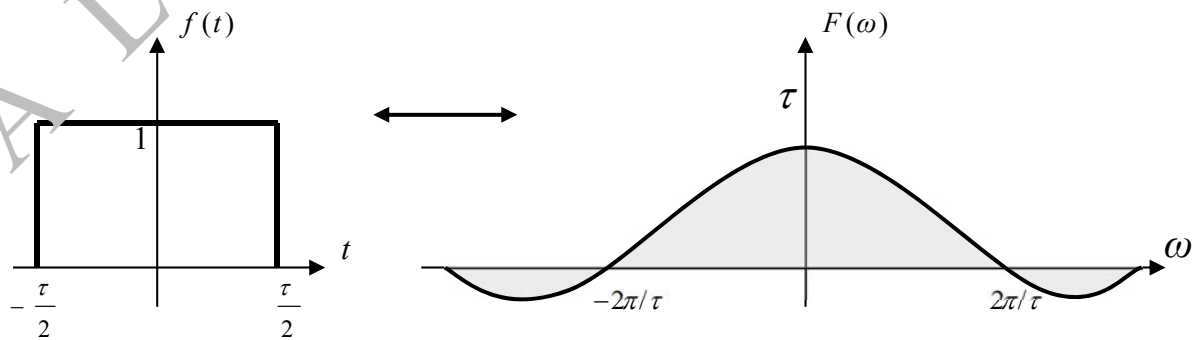
Şekil 14 $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$



Şekil 15



- a -



- b -

Şekil 16 Fourier transformasyonu ölçekleme özelliği

Örnek

Bir haberleşme sisteminin kanalı $x(t) = 16000\pi \text{ sinc}(8000\pi t)$ filtresi ile tanımlıdır. Bu haberleşme sisteminden $y(t) = 20000\pi \text{ sinc}(10000\pi t)$ darbeleri iletilebilir mi.

Çözüm

Önce haberleşme kanalının band genişliğini $\tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau})$ yaklaşımından,

$$16000\pi \text{ sinc}(8000\pi t) = \tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 8000\pi \rightarrow \tau = 16000\pi \text{ sn}$$

Buna göre haberleşme kanalı genişliği $\tau = 16000\pi$ sn uzunluğundaki bir filtre işlevindedir. Bu kanalın band genişliği ise,

$$\tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau})$$

olduğundan,

$$16000\pi \text{ sinc}(8000\pi t) \leftrightarrow 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau}) = 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{16000\pi})$$

$$\text{sinc}(8000\pi t) \leftrightarrow 125 \cdot 10^{-6} \text{ rect}(\frac{\omega}{16000\pi})$$

$$2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{16000\pi}) = 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau}) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 8000\pi = f_1 = 4000 \text{ Hz} = 4 \text{ KHz}$$

Buna göre haberleşme kanalının band genişliği : $f_1 = 4000 \text{ Hz} = 4 \text{ KHz}$

Bunun ardından iletilecek $y(t) = 20000\pi \text{ sinc}(10000\pi t)$ verisinin/işaretinin band genişliğini belirlemeliyiz. Bunun için,

$$\tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau}) \text{ yaklaşımından,}$$

$$20000\pi \text{ sinc}(10000\pi t) = \tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 10000\pi \rightarrow \tau = 20000\pi \text{ sn}$$

Buna göre haberleşme kanalı genişliği $\tau = 20000\pi$ sn uzunluğundaki bir filtre işlevindedir. Bu kanalın band genişliği ise,

$$\tau \text{ sinc}(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{ rect}(\frac{\omega}{\tau})$$

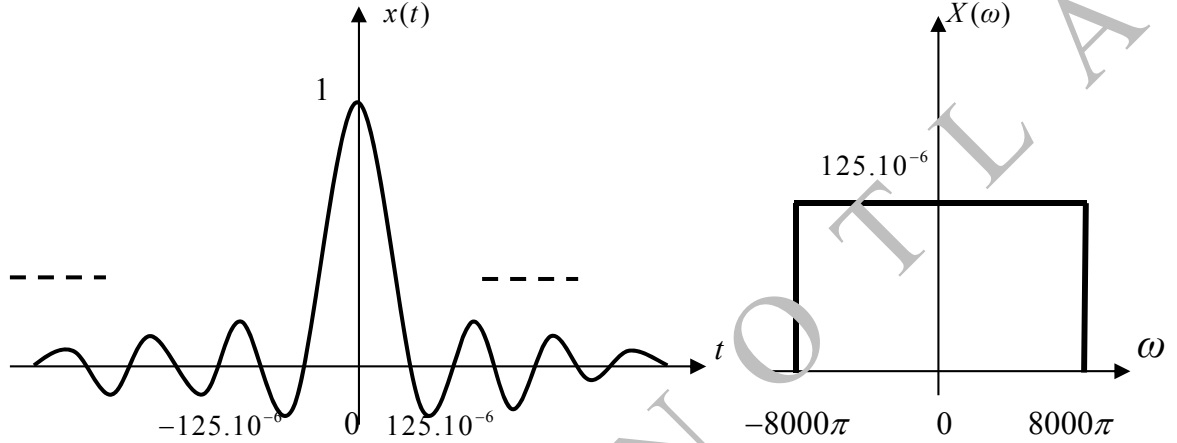
olduğundan,

$$20000\pi \operatorname{sinc}(10000\pi t) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right)$$

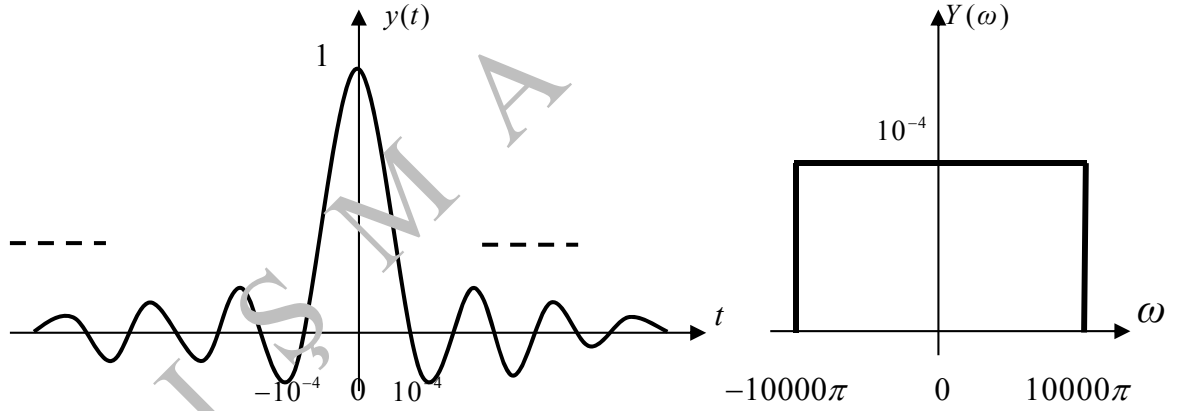
$$\operatorname{sinc}(10000\pi t) \leftrightarrow 10^{-4} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right)$$

$$2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 2\pi f_2 = 10000\pi \rightarrow f_2 = 5000 \text{ Hz} = 5 \text{ KHz}$$

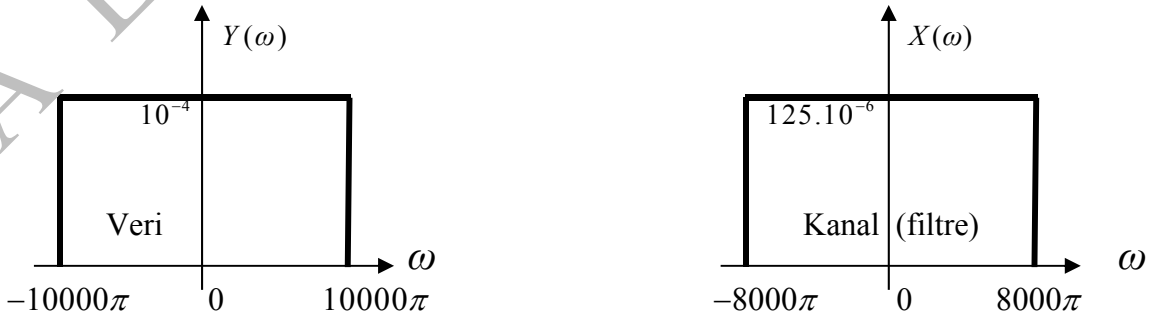
Buna göre iletilecek verinin band genişliği : $f_2 = 5000 \text{ Hz} = 5 \text{ KHz}$



Şekil 17 Kanal zaman – frekans değişimi : $\operatorname{sinc}(8000\pi t) \leftrightarrow 125.10^{-6} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{16000\pi}\right)$



Şekil 18 Veri zaman – frekans değişimi : $\operatorname{sinc}(10000\pi t) \leftrightarrow 10^{-4} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right)$



Şekil 19 Veri ve iletilecek kanalın band genişliklerinin karşılaştırılması

İletilecek $Y(\omega)$ verisinin band genişliği, $X(\omega)$ haberleşme kanalının band genişliğine eşit veya ondan küçük olması halinde ancak sağlıklı bir iletimin yapılabileceği düşünülebilir. Ancak eldeki bilgilere bakıldığında iletilecek verinin band genişliği $f_2 = 5 \text{ KHz}$ olmasına rağmen, bu bilginin iletileceği kanalın band genişliği $f_1 = 4 \text{ KHz}$ olduğundan bu bilgi iletilemez veya en azından sağlıklı iletilemeyeceğinden, verinin/işaretin kaybedilmesi söz konusu olur.

Örnek

Bir haberleşme sisteminde $x(t) = \text{sinc}^2(3000\pi t)$ bilgisi $y(t) = \text{sinc}(14000\pi t)$ kanalından iletilmek istenmektedir. İletimin mümkün olup olmadığını araştırın.

Çözüm

Önemli olan gönderilecek bilginin band genişliğinin, kanal band genişliğinden küçük olması veya en iyi ihtimalle kanal band genişliğine eşit olmasıdır. Bu yüzden gerek verinin gerekse kanalın yani filtrenin band genişliklerinin tespit edilmesi gerekir. Önce iletilecek verinin band genişliğini $\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{t}{4}) \leftrightarrow 2\pi \Delta(\frac{\omega}{\tau})$ yaklaşımından,

$$\text{sinc}^2(3000\pi t) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{t}{4}) \rightarrow \frac{\tau}{4} = 3000\pi \rightarrow \tau = 12000\pi \text{ sn}$$

Buna göre iletilecek verinin uzunluğu $\tau = 12000\pi \text{ sn}$. Bu verinin band genişliği ise,

$$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{t}{4}) \leftrightarrow 2\pi \Delta(\frac{\omega}{\tau}) \text{ veya } \text{sinc}^2(\frac{t}{4}) \leftrightarrow \frac{4\pi}{\tau} \Delta(\frac{\omega}{\tau})$$

$$\text{sinc}^2(3000\pi t) \leftrightarrow \frac{4\pi}{12000\pi} \Delta(\frac{\omega}{12000\pi}) = \frac{1}{3000} \Delta(\frac{\omega}{12000\pi})$$

$$\text{sinc}^2(3000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{3000} \Delta(\frac{\omega}{12000\pi})$$

$$\frac{1}{3000} \Delta(\frac{\omega}{12000\pi}) = 2\pi \Delta(\frac{\omega}{\tau}) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 2\pi f_1 = 6000\pi = f_1 = 3000 \text{ Hz} = 3 \text{ KHz}$$

Buna göre haberleşme kanalının band genişliği : $f_1 = 4000 \text{ Hz} = 4 \text{ KHz}$

Bunun ardından söz konusu verinin iletileceği $y(t) = \text{sinc}(14000\pi t)$ kanalının band genişliğini belirlemeliyiz. Bunun için,

$$\tau \text{sinc}(\frac{t}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \text{ yaklaşımından,}$$

$$\text{sinc}(14000\pi t) = \tau \text{sinc}(\frac{t}{2}) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 14000\pi \rightarrow \tau = 28000\pi \text{ sn}$$

Buna göre haberleşme kanalı genişliği $\tau = 28000\pi$ sn uzunluğundaki bir filtre işlevindedir. Bu kanalın band genişliği ise,

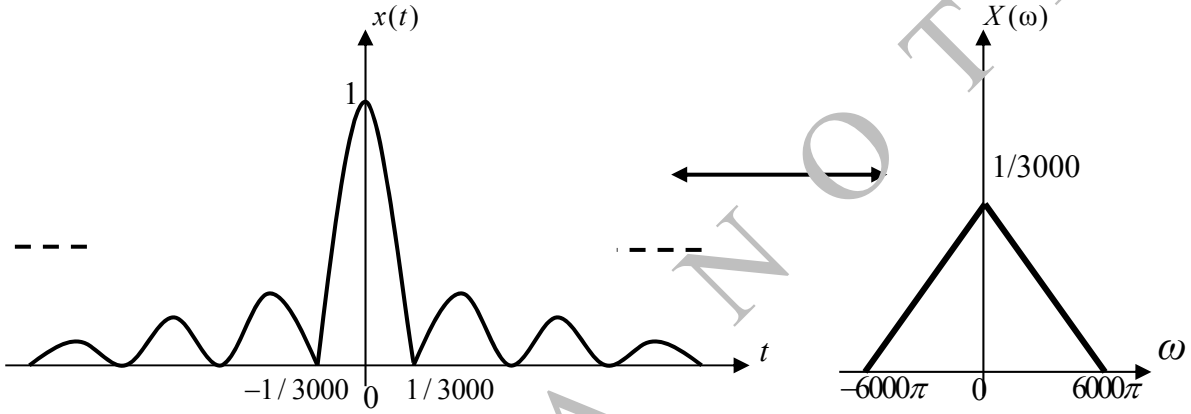
$$\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \text{ veya } \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \text{ olduğundan,}$$

$$\operatorname{sinc}(14000\pi t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) = \frac{2\pi}{28000\pi} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{28000\pi}\right) = \frac{1}{14000} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{28000\pi}\right)$$

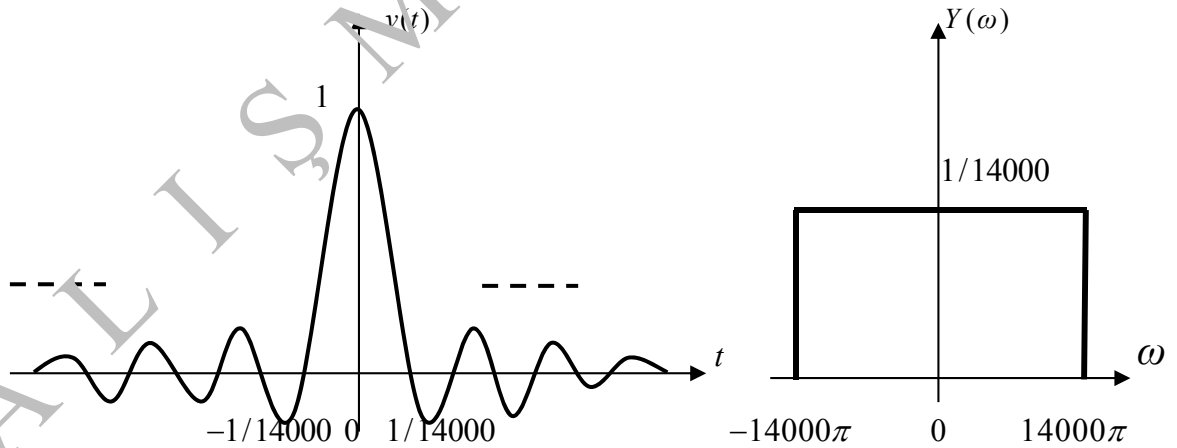
$$\operatorname{sinc}(14000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{14000} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{28000\pi}\right)$$

$$\frac{1}{14000} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{28000\pi}\right) = \frac{1}{14000} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \rightarrow \frac{\tau}{2} = 2\pi f_2 = 14000\pi \rightarrow f_2 = 7000 \text{ Hz} = 7 \text{ KHz}$$

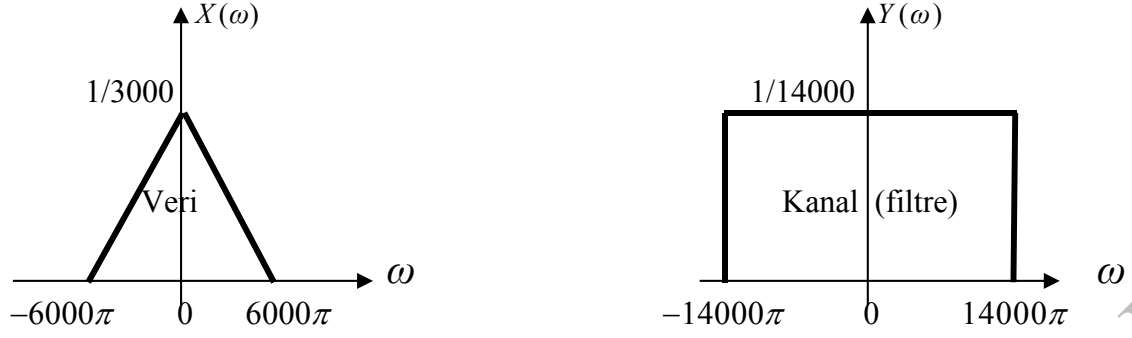
Buna göre haberleşme kanalının yani filtrenin band genişliği : $f_2 = 7000 \text{ Hz} = 7 \text{ KHz}$



Şekill 20 Veri zaman – frekans değişimi : değişimi $\operatorname{sinc}^2(3000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{3000} \Delta\left(\frac{\omega}{12000\pi}\right)$



Şekil 21 Kanal/filtre zaman – frekans değişimi : $\operatorname{sinc}(14000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{14000} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{28000\pi}\right)$



Şekil 22 Veri ve iletilecek kanalın band genişliklerinin karşılaştırılması

İletilecek $X(\omega)$ verisinin band genişliği, $Y(\omega)$ haberleşme kanalının band genişliğine eşit veya ondan küçük olması halinde sağlıklı bir iletimin yapılabileceğini biliyoruz. Eldeki bilgilere bakıldığında iletilecek verinin band genişliği $f_1 = 3 \text{ KHz}$ iken, bu bilginin iletileceği kanalın yani filtrenin band genişliği $f_2 = 7 \text{ KHz}$ olduğundan bilgi çok rahat olarak kanaldan iletilebilir.