3B HOMOJEN KOORDİNAT SİSTEMİ

ÜÇ BOYUTLU DÖNÜŞÜMLER:

- İki boyutlu düzlemlerdeki benzer bir yaklaşımla bir noktayı üç boyutlu homojen koordinat sistemine göre $[x \quad y \quad z \quad 1]$ olarak alırsak;

$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = \left[{x'}/{h} \quad {x'}/{h} \quad {x'}/{h} \quad h\right]$$
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1].[T]$$

olur.

- Genel olarak 4x4'lük T dönüşüm matrisi:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & r \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} : ölçekleme, shearing\ yansıma, döndürme \\ [l \quad m \quad n] : öteleme \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} : perspektif\ dönüşümü \\ [s] : genel\ ölçekleme \end{array} \right.$$

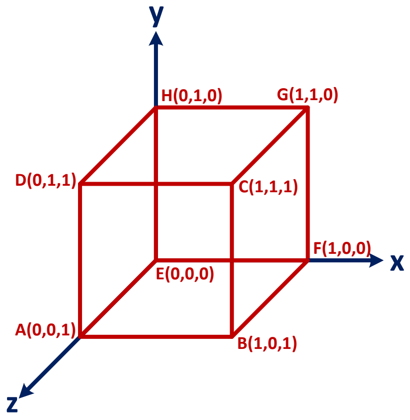
ÜÇ BOYUTLU ÖLÇEKLEME:

- 3B ölçekleme matrisi:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

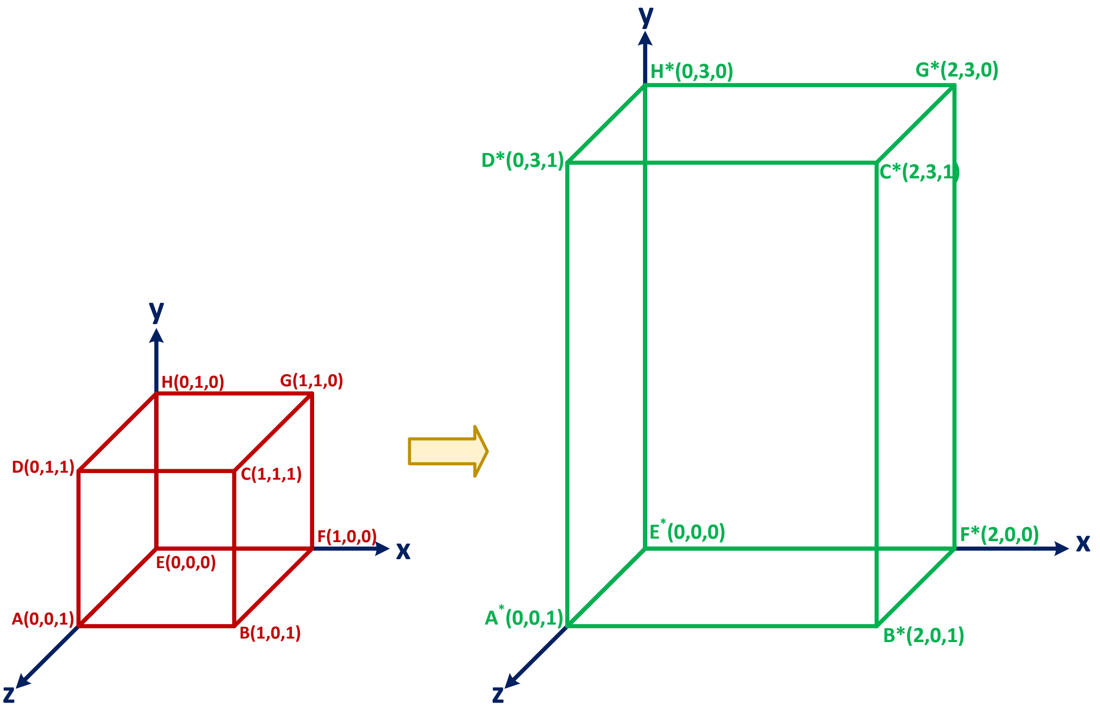
$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1].[T] = [x \quad y \quad z \quad 1].\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \quad ey \quad jz \quad 1]$$

ÖRNEK: Aşağıdaki birim küpün x ekseninde 2, y ekseninde de 3 birim ölçeklenmesi sonucu oluşacak yeni şekli hesaplayın.



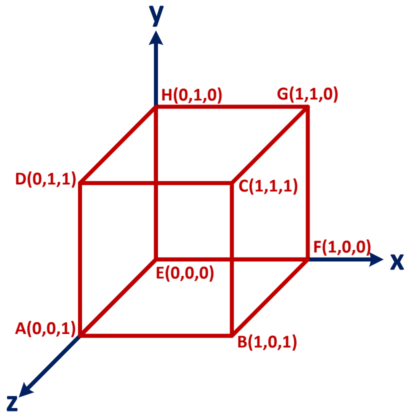
ÇÖZÜM:

$$[X^*] = [X].[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



GENEL ÖLÇEKLEME:

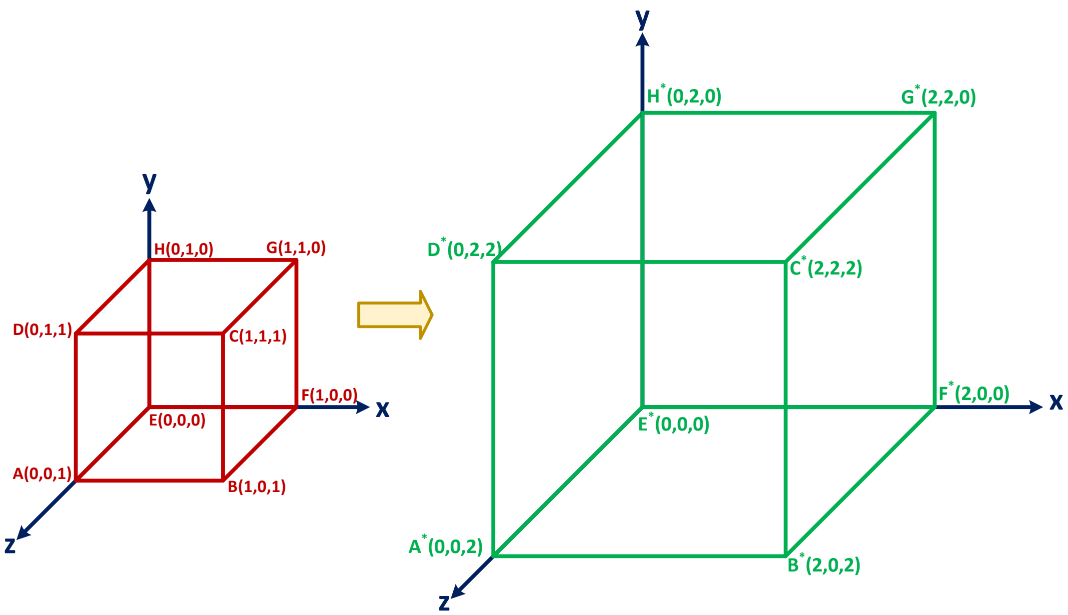
ÖRNEK: Bir önceki örnekteki birim küpün genel ölçekleme değeri 0,5 olacak şekilde ölçeklenmesi sonucu oluşacak yeni şekli hesaplayın.



ÇÖZÜM:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X].[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



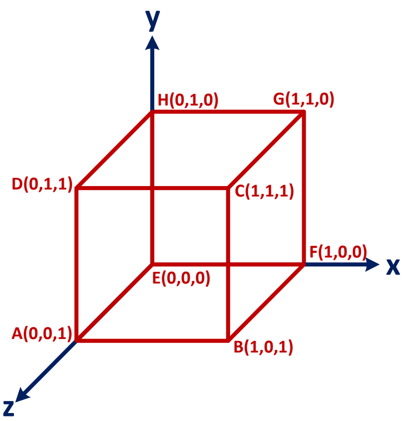
➡ **s < 1** ise, üniform büyütme; **s > 1** ise, üniform küçültmedir.

ÜÇ BOYUTLU SHEARING:

➡ 3B homojen koordinat sistemi dönüşüm matrisinde 3x3 bölümde köşegen dışı elemanlar shear etkisi oluşturacaktır.

$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1].[T]$$
$$= [x \quad y \quad z \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= [x + yd + gz \quad bx + y + iz \quad cx + fy + z \quad 1]$$

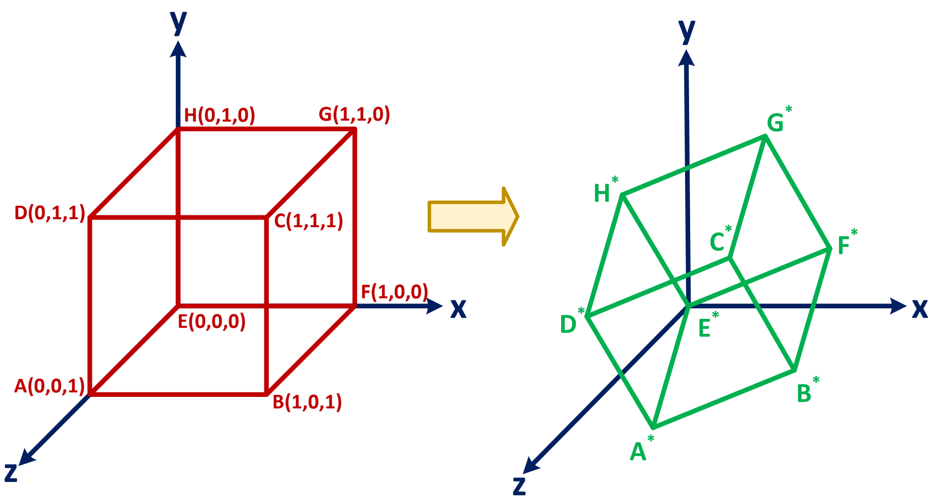
➡ **ÖRNEK:** Önceki örnekteki birim küpe aşağıdaki shearing matrisi uygulanması sonucu oluşacak yeni şekli hesaplayın.



$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➡ **ÇÖZÜM:**

$$[X^*] = [X].[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 1 & 1 \\ 1,5 & 0,5 & 1,25 & 1 \\ 1,5 & 1,5 & 1,75 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 1 \\ 1 & 1,5 & 0,75 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$



ÜÇ BOYUTLU DÖNDÜRME:

- x ekseni etrafında θ kadar döndürme matrisi ⇒

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

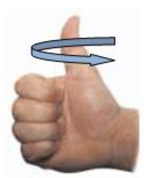
- y ekseni etrafında ϕ kadar döndürme matrisi ⇒

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- z ekseni etrafında ψ kadar döndürme matrisi ⇒

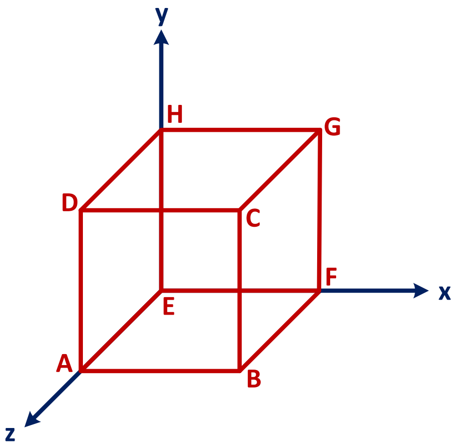
$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sağ el kuralına göre döndürme yönü, baş parmak eksenin yönünü gösterecek şekilde tutulduğunda diğer dört parmağın yönüne bağlı olarak belirlenir.



ÖRNEK: Aşağıda koordinatları verilmiş olan birim küpe x ekseni etrafında -90^0 döndürme uygulanması sonucu oluşacak yeni şekli hesaplayın.

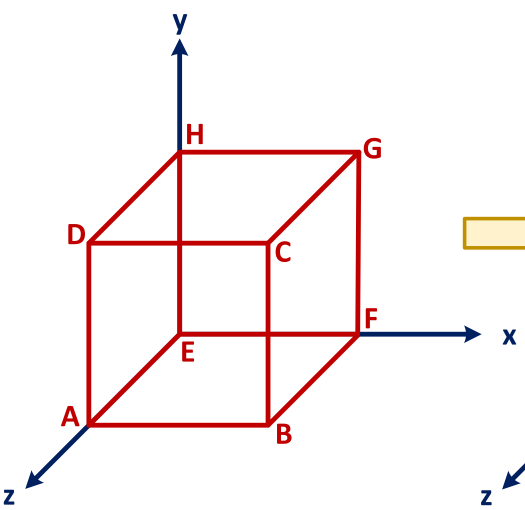
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

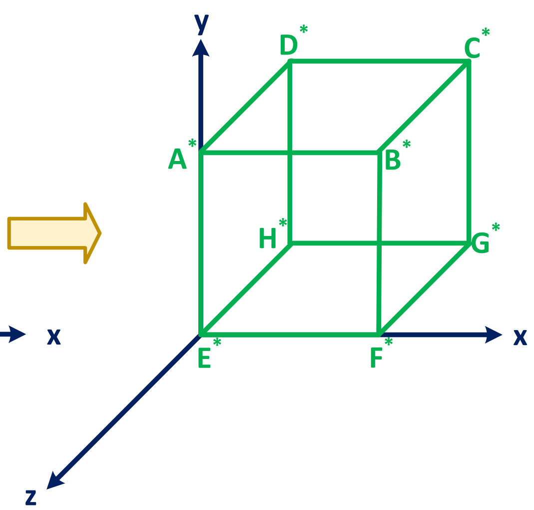


ÇÖZÜM: Nesneye x ekseni etrafında -90^0 döndürme yapmak için gerekli dönüşüm matrisi:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90) & \sin(-90) & 0 \\ 0 & \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A^*] = [A].[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$





ÜÇ BOYUTLU (REFLECTION) AYNALAMA:

- İki boyutlu aynalamaya benzer olarak üç boyutlu uzayda bir düzleme göre aynalama, diğer eksenin ters işarete dönüştürülmesi ile yapılır.

- Örneğin, x – y düzlemine aynalamada sadece objenin "z" koordinat değeri değişecektir. Gerçekte ters işaretlisi olacaktır.

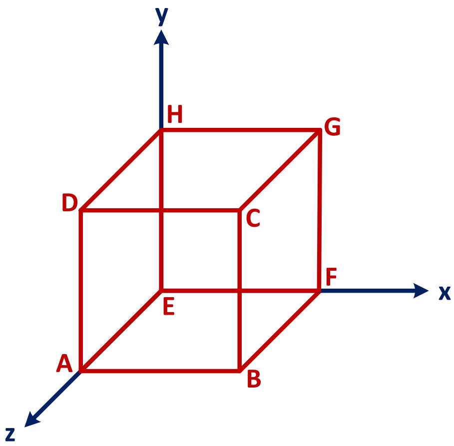
- x-y düzlemine göre aynalama matrisi ⇒ $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- y-z düzlemine göre aynalama matrisi ⇒ $$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- x-z düzlemine göre aynalama matrisi ⇒ $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ÖRNEK:** Aşağıda koordinatları verilmiş olan birim küpe y-z eksenine göre aynalama uygulanması sonucu oluşacak yeni şekli hesaplayın.

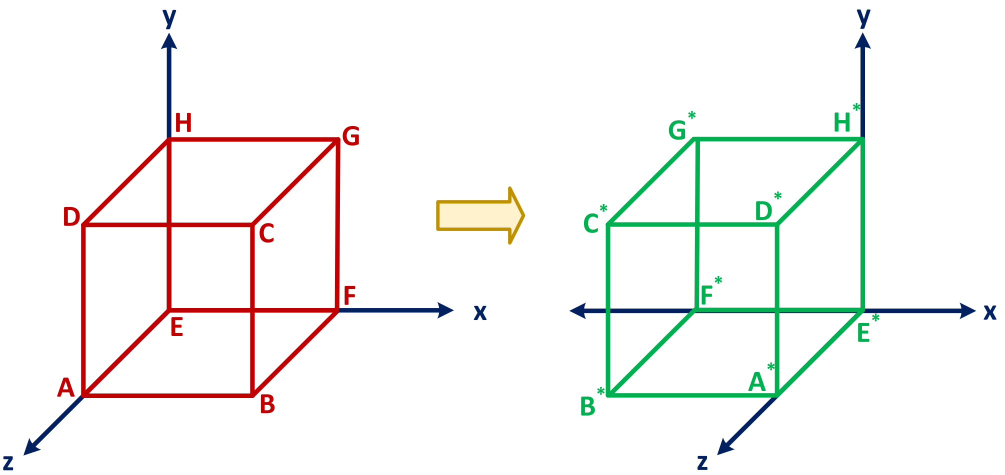
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- **ÇÖZÜM:** Nesneyi y-z düzlemine göre aynalamak için gerekli dönüşüm matrisi:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A^*] = [A].[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ÜÇ BOYUTLU ÖTELEME:

➡ 3B öteleme matrisi:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

➡ $[x \quad y \quad z \quad 1]$ noktasına öteleme dönüşümü uygulanırsa yeni koordinatlar aşağıdaki gibi olur:

$$x^* = x + 1$$
$$y^* = y + m$$
$$z^* = z + n$$

ÇOKLU DÖNÜŞÜMLER:

➡ Peş peşe dönüşüm uygulanan dönüşümlerde genelleştirilmiş dönüşüm matrisini, iki boyutlu ile benzer biçimde dönüşüm matrislerinin sırası ile çarpımı ile elde edilir.

$$[T] = [T_1].[T_2].[T_3].[T_4]\,...$$

$$[X^*] = [X].[T] = [X][T_1].[T_2].[T_3].[T_4]\,...$$

➡ **ÖRNEK:** $[3 \quad 2 \quad 1 \quad 1]$ noktasına, sırasıyla xyz eksenleri boyunca (-1, -1, -1) birim öteleme, x ekseni etrafında +30^0 döndürme ve y ekseni etrafında + 45^0 döndürme işlemi yapıldığında noktanın yeni konumu ne olur?

➡ **ÇÖZÜM:**

$$[T] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

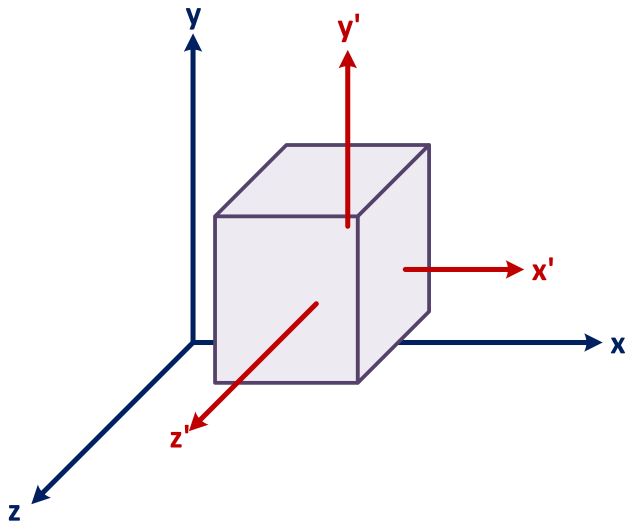
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30) & \sin(30) & 0 \\ 0 & -\sin(30) & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(45) & 0 & -\sin(45) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(45) & 0 & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X].[T] = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 1] . \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0{,}707 & 0 \\ 0.354 & 0.866 & 0{,}354 & 0 \\ 0.612 & -0{,}5 & 0{,}612 & 0 \\ -1.673 & -0{,}366 & -0{,}259 & 1 \end{bmatrix} = [1.768 \quad 0.866 \quad -1.061 \quad 1]$$

BİR KOORDİNAT EKSENİNE PARALEL BİR EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRME:

- Şekildeki cismi göz önüne aldığımızda cismin lokal koordinat sistemi x′, y′ ve z′, xyz koordinat eksenlerine paraleldir.



- Herhangi bir eksen etrafında dönüşüm uygulamak için;

  T1: Cisim eksen, ana eksen çakışacak şekilde ötele ⇒ T_r

  T2: Belirlenen eksen etrafında cisim döndür⇒ R_x

  T3: Cismi ters öteleme ile orijinal eksen takımına yerleştir⇒ ${T_r}^{-1}$

$$[T] = [T_r].[R_x].[T_r]^{-1}$$

$$[X^*] = [X].[T] = [T_r].[R_x].[T_r]^{-1}$$

ÖRNEK: Aşağıda koordinatları verilen cismin merkezinin x eksenine paralel x' ekseninden geçtiğini kabul edilirse cismin ve bu eksen etrafında +30° döndürülmesi sonucu oluşacak yeni koordinatları hesaplayın.

$$[X]=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&1&2&1\\2&2&2&1\\1&2&2&1\\1&1&1&1\\2&1&1&1\\2&2&1&1\\1&2&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}A\\B\\C\\D\\E\\F\\G\\H\end{matrix}$$

ÇÖZÜM:

Cismin merkezi $[x_c \quad y_c \quad z_c \quad 1]=[3/2 \quad 3/2 \quad 3/2 \quad 1]$ olarak hesaplanır.

$$[T_r]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-x_c&-y_c&-z_c&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-3/2&-3/2&-3/2&1\end{bmatrix}$$

$$[R_x]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 30&\sin 30&0\\0&-\sin 30&\cos 30&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0{,}866&0{,}5&0\\0&-0{,}5&0{,}866&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[T_r]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\x_c&y_c&z_c&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\3/2&3/2&3/2&1\end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X].[T] = [X].[T_r].[R_x].[T_r]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0,951 & -0,549 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0,817 & 1683 & 1 \\ 2 & 0,817 & 1,683 & 1 \\ 2 & 1,683 & 2,183 & 1 \\ 1 & 1,683 & 2,183 & 1 \\ 1 & 1,317 & 0,817 & 1 \\ 2 & 1,317 & 0,817 & 1 \\ 2 & 2,183 & 1,317 & 1 \\ 1 & 2,183 & 1,317 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ H^* \end{array}$$

2. YOL: Cismin merkezi x eksenine paralel x' ekseninden geçtiğine ve döndürme işlemi bu eksen etrafında yapılacağına göre, nesneyi x ekseni üzerine ötelemek yeterli olacaktır.

$$[T_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ 0 & -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_r]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_c & z_c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

UZAYDA HERHANGİ BİR EKSEN ETRAFINDA DÖNDÜRME

- Robotik, animasyon ya da simülasyon alanlarında, herhangi bir eksen etrafında döndürme işlemine sıkça rastlanır.

- Keyfi bir koordinat ekseni etrafında döndürme işlemi gerçekleştirmek için bu keyfî ekseni, herhangi bir koordinat eksenine çakıştırmamız gerekir.

- Varsayalım ki, x_0, y_0, z_0 keyfî eksen (c_x, c_y, c_z) noktasından geçsin ve bu eksen etrafında δ kadar döndürmek isteyelim. Bunun için yapılacak işlemler:

  T1: x_0, y_0, z_0 noktasını, orijinle çakışacak şekilde ötele

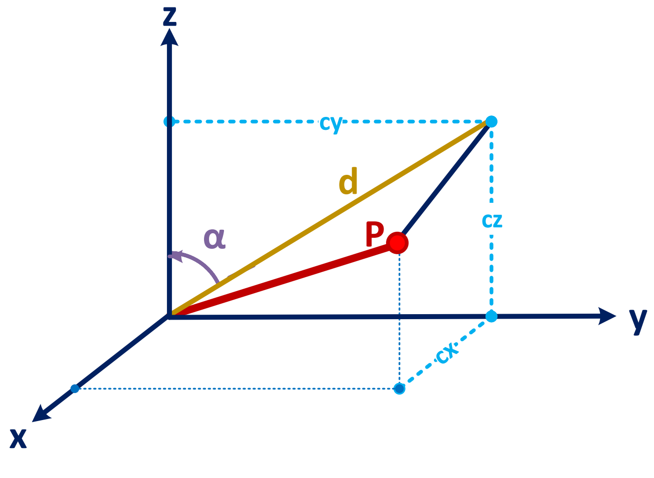
  T2: Uygun dönüşümle, bu ekseni (keyfi seçilen) z eksenine çakıştır

  T3: z ekseni etrafında δ kadar döndür

  T4: (T2)'de gerçeklenen dönüşümün tersini uygula

  T5: (T1)'de gerçeklenen ötelemenin tersini uygula

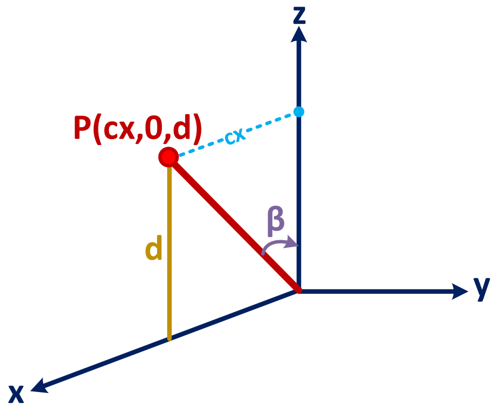
- Genel olarak; keyfî ekseni koordinat eksenlerinden keyfi seçilen birine çakıştırma işlemi, diğer koordinat eksenlerinde peş peşe dönüşümler gerektirir. Örneğin, keyfî ekseni z eksenine çakıştırmak istersek, önce x ekseni etrafında döndürme ve daha sonra y ekseni etrafında döndürme işlemleri gerçekleştirmek gerekir



$$d = \sqrt{c_y{}^2 + c_z{}^2}$$

$$\cos\alpha = {}^{c_z}\!/_{d},\ \sin\alpha = {}^{c_y}\!/_{d}$$

➡ x ekseni etrafında α kadar döndürme sonucunda nokta x – z düzlemine gelecektir.



$$\cos\beta = d\,,\sin\beta = c_x$$

➡ y ekseni etrafında –β rotasyon ile P noktası z ekseni üzerine getirilmiş olacaktır.

➡ Buna göre genelleştirilmiş dönüşüm matrisi [T] ile gösterilirse:

T1: x_0, y_0, z_0 noktasını, orijinle çakışacak şekilde ötele⇒ $\boldsymbol{T_{xyz}}$

T2: Uygun dönüşümle, bu ekseni (keyfi seçilen) z eksenine çakıştır

T2.1: x ekseni etrafında α kadar döndür ⇒ $\boldsymbol{R_x}$

T2.2: y ekseni etrafında -β kadar döndür⇒ $\boldsymbol{R_y}$

T3: z ekseni etrafında δ kadar döndür⇒ $\boldsymbol{R_\delta}$

T4: (T2)'de gerçeklenen dönüşümün tersini uygula

T4.1: y ekseni etrafında β kadar döndür⇒ $\boldsymbol{R_y}^{-1}$

T4.2: x ekseni etrafında -α kadar döndür ⇒ $\boldsymbol{R_x}^{-1}$

T5: (T1)'de gerçeklenen ötelemenin tersini uygula ⇒ $\boldsymbol{T_{xyz}}^{-1}$

$$[T] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y].[R_\delta].[R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}[T_{xyz}]^{-1}$$

$$[X^*] = [X].[T] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y].[R_\delta].[R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}[T_{xyz}]^{-1}$$

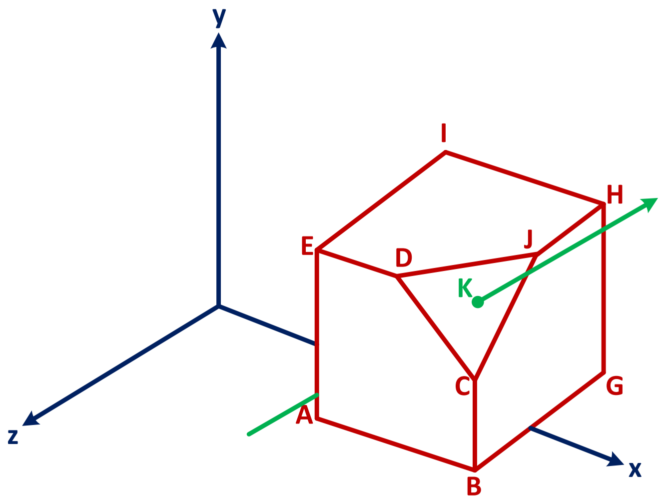
$$[T_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {c_z}/{d} & {c_y}/{d} & 0 \\ 0 & -{c_y}/{d} & {c_z}/{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

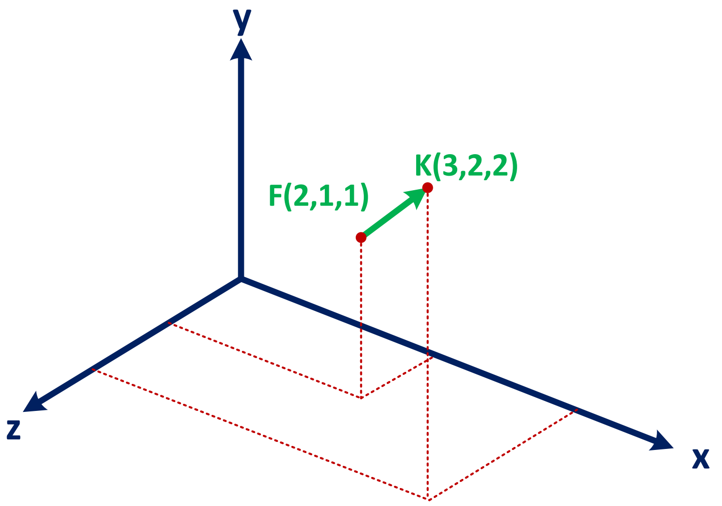
$$[R_\delta] = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK: Aşağıda koordinatları verilen cisim F noktasıyla karşı köşegeninden geçen eksen etrafında -45^0 döndürülmesi sonucu oluşacak yeni cismin koordinatlarını hesaplayın.



$$[X] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1,5 & 2 & 1 \\ 2,5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1,5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array}$$

ÇÖZÜM: Cisim F noktasıyla karşı köşegeninden geçen eksen etrafında -45^0 döndürülmek istenmektedir. Eksen yönü F noktasından karşı köşe yüzeyinin orta noktasına doğru yönlendirilmiştir. Öncelikle yön kosinüsleri olan c_x, c_y ve c_z değerleri hesaplanır.



Buna göre F, K noktalarından geçen vektör, $V = [(x_K - x_F) \quad (y_K - y_F) \quad (z_K - z_F)]$ biçiminde yazılabilir. (c_x, c_y, c_z) yön kosinüsleri ise bu vektörün normalize edilmesiyle hesaplanır.

Vektörün boyu ⇒

$$L = \sqrt{(x_k - x_F)^2 + (y_k - y_F)^2 + (z_k - z_F)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$[c_x \quad c_y \quad c_z] = \left[\frac{3-2}{\sqrt{3}} \quad \frac{2-1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2-1}{\sqrt{3}}\right] = \left[{}^{1}/_{\sqrt{3}} \quad {}^{1}/_{\sqrt{3}} \quad {}^{1}/_{\sqrt{3}}\right]$$

$$d = \sqrt{{c_y}^2 + {c_z}^2} = \sqrt{\left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)^2 + \left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{{}^{2}/_{3}}$$

$$\cos\alpha = {}^{c_z}/_{d} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left({}^{{}^{1}/_{\sqrt{3}}}/_{\sqrt{{}^{2}/_{3}}}\right) = \cos^{-1}\left({}^{1}/_{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

$$\cos\beta = d \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(d) = \cos^{-1}\left(\sqrt{{}^{2}/_{3}}\right) = 35.26°$$

F noktasını orijine ötelersek ⇒

$$[T_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 & 0 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-35.26) & 0 & -\sin(-35.26) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-35.26) & 0 & \cos(-35.26) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

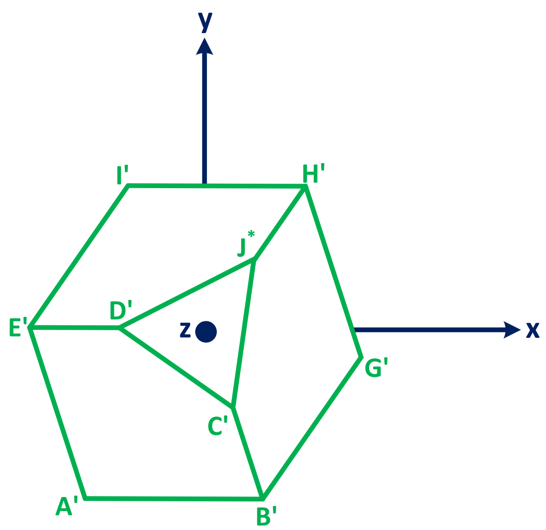
$$[M] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -4/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X'] = [X].[M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1,5 & 2 & 1 \\ 2,5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1,5 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -4/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -0,408 & -0,707 & 0,577 & 1 \\ 0,408 & -0,707 & 1,155 & 1 \\ 0,204 & -0,354 & 1,443 & 1 \\ -0,408 & 0 & 1,443 & 1 \\ -0,816 & 0 & 1,155 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,816 & 0 & 0,577 & 1 \\ 0,408 & 0,707 & 1,155 & 1 \\ -0,408 & 0,707 & 0,577 & 1 \\ 0,204 & 0,354 & 1,443 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \\ F' \\ G' \\ H' \\ I' \\ J' \end{array}$$



Artık F noktası $(0,0,0)$ noktasına gelmiştir. Şimdi istenilen δ döndürme işlemini z ekseni etrafında yapılabilir.

$$[R_\delta] = \begin{bmatrix} \cos(-45) & \sin(-45) & 0 & 0 \\ -\sin(-45) & \cos(-45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{-1}/_{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M^{-1}] = [R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}.[T_{xyz}]^{-1} =$$

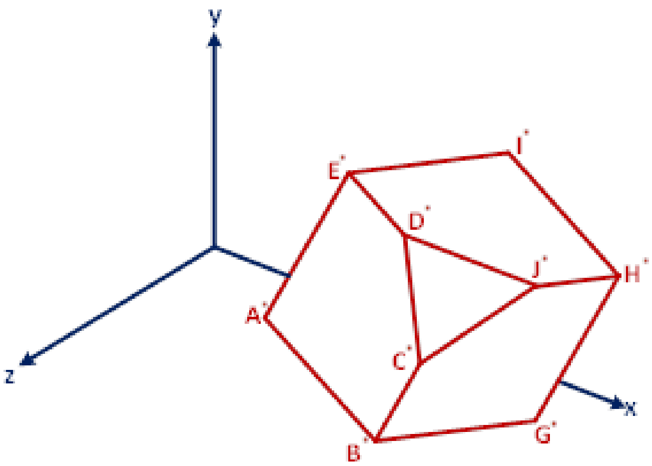
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{{}^{2}/_{3}} & 0 & -{}^{1}/_{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{{}^{2}/_{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & -{}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{2}/_{\sqrt{6}} & {}^{-1}/_{\sqrt{6}} & {}^{-1}/_{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{-1}/_{\sqrt{2}} & 0 \\ {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{1}/_{\sqrt{3}} & {}^{1}/_{\sqrt{3}} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [M].[R_\delta].[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,805 & -0,311 & 0,506 & 0 \\ 0,506 & 0,805 & -0,311 & 0 \\ -0,311 & 0,506 & 0,805 & 0 \\ 0,195 & 0,311 & -0,506 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X].[M].[R_\delta].[M^{-1}]$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1,689 & 1,506 & 1,805 & 1 \\ 2,494 & 1,195 & 2,311 & 1 \\ 2,747 & 1,598 & 2,155 & 1 \\ 2,598 & 2,155 & 1,747 & 1 \\ 2,195 & 2,311 & 1,494 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2,805 & 0,689 & 1,506 & 1 \\ 3,311 & 1,494 & 1,195 & 1 \\ 2,506 & 1,805 & 0,689 & 1 \\ 3,155 & 1,747 & 1,598 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ H^* \\ I^* \\ J^* \end{array}$$



HERHANGİ BİR DÜZLEME GÖRE AYNALAMA:

- Şimdiye kadar verilen aynalama x = 0, y = 0, z = 0 düzlemlerinden birine göre aynalama idi. Bir objenin, bu düzlemlerin dışında herhangi bir düzleme göre aynalanması istediğinde, gerekli dönüşümler birleştirilerek aynalama gerçekleştirilir.

- Buna göre genelleştirilmiş dönüşüm matrisi [T] ile gösterilirse:

T1: x_0, y_0, z_0 noktasını, orijinle çakışacak şekilde ötele$\Rightarrow \boldsymbol{T_{xyz}}$

T2: Uygun dönüşümle, bu ekseni (keyfi seçilen) z eksenine çakıştır

T2.1: x ekseni etrafında α kadar döndür $\Rightarrow \boldsymbol{R_x}$

T2.2: y ekseni etrafında -β kadar döndür$\Rightarrow \boldsymbol{R_y}$

T3: z eksenine göre aynala $\Rightarrow \boldsymbol{Ref_z}$

T4: (T2)'de gerçeklenen dönüşümün tersini uygula

T4.1: y ekseni etrafında β kadar döndür$\Rightarrow \boldsymbol{R_y}^{-1}$

T4.2: x ekseni etrafında -α kadar döndür $\Rightarrow \boldsymbol{R_x}^{-1}$

T5: (T1)'de gerçeklenen ötelemenin tersini uygula $\Rightarrow \boldsymbol{T_{xyz}}^{-1}$

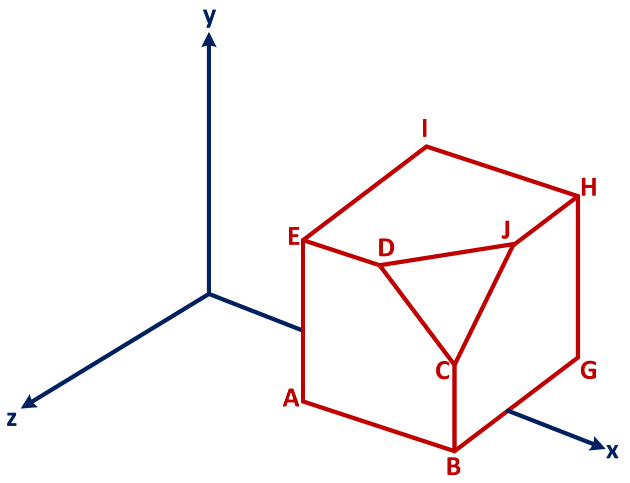
$$[T] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y].[R_{efz}].[R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}[T_{xyz}]^{-1}$$

$$[X^*] = [X].[T] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y].[Ref_z].[R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}[T_{xyz}]^{-1}$$

- T_{xyz}, R_x, R_y daha önce verilen matrislerdir.

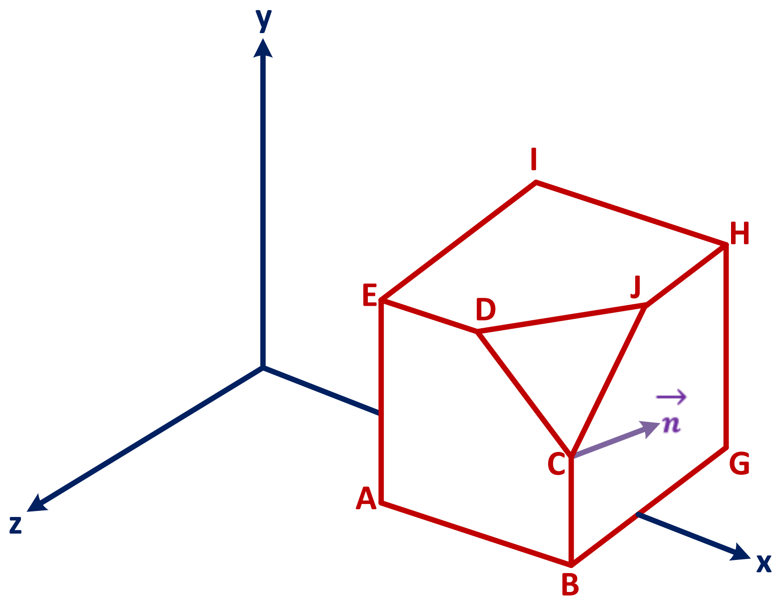
- $(x_0, y_0, z_0) = (P_x, P_y, P_z)$, P noktasının koordinatları, (c_x, c_y, c_z) ise normal vektörün yön kosinüsleridir.

ÖRNEK: Aşağıda koordinatları verilen cismin CDJ üçgeninden geçen düzleme göre aynalanması sonucu oluşacak yeni cismin koordinatlarını hesaplayın.



$$[X] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1{,}5 & 2 & 1 \\ 2{,}5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{matrix}$$

ÇÖZÜM: $ax + by + cz + d = 0$ düzlemi bilinmiyorsa, düzlemin birim normal vektörü (düzleme dik olan vektör) $\Rightarrow \vec{n} = [c_x \quad c_y \quad c_z] = \dfrac{[a \quad b \quad c]}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ olarak hesaplanabilir.



$\overset{\Delta}{CDJ}$ noktalardan birisini (C noktası)orijine ötele:

$$[T_{xyz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1{,}5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aynalama için CJ ve CD vektörlerinin normal vektörlerini hesapla:

$$\vec{n} = ([J] - [C])x([D] - [C])$$

$$= ([(3-3) \quad (2-1{,}5) \quad (1{,}5-2)])x([(2{,}5-3) \quad (2-1{,}5) \quad (2-2)])$$

$$= ([0 \quad 0{,}5 \quad -0{,}5])x([-0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0])$$

$$= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0{,}25 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25]$$

Normalleştirilmiş birim vektörünü hesapla:

$$\vec{n} = \left[\frac{n_x}{\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}} \quad \frac{n_x}{\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}} \quad \frac{n_x}{\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2}} \right]$$

$$= \underset{\displaystyle c_x \quad\;\; c_y \quad\;\; c_z}{\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right]}$$

$\vec{n}$ vektörünü (keyfi seçilen) z eksenine çakıştır:

$$d = \sqrt{{n_y}^2 + {n_z}^2} = \sqrt{\left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)^2 + \left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{{}^{2}/_{3}}$$

$$\alpha = 45°, \quad \beta = 35.26°$$

C noktasındaki normal vektörünü z eksenine çakıştır:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 & 0 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-35.26) & 0 & -\sin(-35.26) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-35.26) & 0 & \cos(-35.26) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

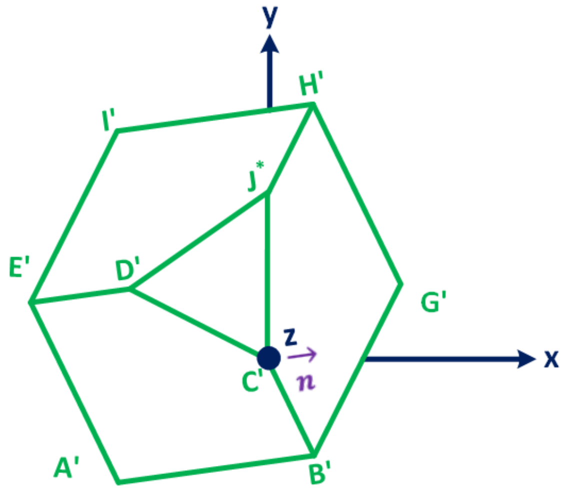
$$[M] = [T_{xyz}].[R_x].[R_y] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3/2 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -5/2\sqrt{6} & 1/2\sqrt{2} & -13/2\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X'] = [X].[M]$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -0{,}612 & -0{,}354 & -0{,}876 & 1 \\ 0{,}204 & -0{,}254 & -0{,}287 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}612 & 0{,}354 & 0 & 1 \\ -1{,}021 & 0{,}354 & -0{,}287 & 1 \\ -0{,}204 & 0{,}354 & -1{,}443 & 1 \\ 0{,}612 & 1{,}354 & -0{,}876 & 1 \\ 0{,}204 & 1{,}061 & -0{,}287 & 1 \\ -0{,}612 & 1{,}061 & -0{,}876 & 1 \\ 0 & 0{,}707 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \\ D' \\ E' \\ F' \\ G' \\ H' \\ I' \\ J' \end{array}$$



$$[Ref_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M^{-1}] = [R_y]^{-1}.[R_x]^{-1}.[T_{xyz}]^{-1} =$$

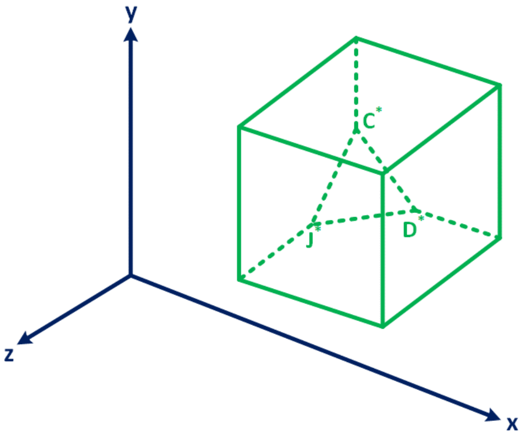
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 3 & 3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [M].[R_\delta].[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}805 & -0{,}311 & 0{,}506 & 0 \\ 0{,}506 & 0{,}805 & -0{,}311 & 0 \\ -0{,}311 & 0{,}506 & 0{,}805 & 0 \\ 0{,}195 & 0{,}311 & -0{,}506 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [M].[R_{efz}].[M^{-1}] = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 13/3 & 13/3 & 13/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X].[T] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 10/3 & 4/3 & 7/3 & 1 \\ 3 & 3/2 & 2 & 1 \\ 5/2 & 2 & 2 & 1 \\ 7/3 & 7/3 & 7/3 & 1 \\ 11/3 & 8/3 & 8/3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 10/3 & 7/3 & 4/3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \\ G^* \\ H^* \\ I^* \\ J^* \end{array}$$



REFEREANSLAR

➡ Rogers, D.F., Adams, J.A., Mathematical Elements for Computer Graphics, First Edition.

EK:

NORMAL VEKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI

Normal vektörü, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin çarpraz çarpımı ile hesaplanır.

$$axb = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_z & b_z & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

Normal vektörünün yönü sağ el kuralı ile bulunur.