BÖLÜM 6. z -DÖNÜŞÜMÜ

6.1 Giriş

Ayrık-zamanlı sistemlerin analizi z -dönüşümünün kullanılmasıyla basitleşir. Gerçekten de fark denklemleriyle gösterilen sistem modeli z -dönüşümü ile üzerinde kolaylıkla işlem yapılabilecek cebrik denklemlere dönüşür. Örneğin, ayrık-zamanlı sistemin giriş ve çıkış işaretleri arasındaki konvolüsyon bağıntısı, uygun z -dönüşümlerinin çarpımıyla gerçekleştirilir. Bu bölümde, bir dizinin z -dönüşümü gösterilimi ve dizi özellikleri ile z -dönüşümünün özellikleri arasındaki ilişki tartışılacaktır.

z -dönüşümünün incelenmesi sırasında kompleks değişkenler teorisinden birçok sonuç kullanılacaktır. Ancak, başvurulacak teoremlerin bazılarının matematiksel kanıtları verilmeyecektir,

6.2 z - dönüşümünün tanımı

$x(n)$ dizisinin z -dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} \qquad (6.1)$$

Burada z karmaşık (kompleks) değerli bir değişkeni göstermektedir. (6.1) deki z -dönüşümü sadece $X(z)$ nin yakınsak olduğu z değerleri için tanımlanır. $x(n)$ dizisinin z -dönüşümü bazen de basitleştirilmiş notasyonlarla aşağıdaki gibi gösterilir.

$$X(z) = Z[x(n)] \qquad (6.2)$$

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad (6.3)$$

$Z[\bullet]$, z -dönüşümüne ilişkin dönüşüm kuralını gösteren matematiksel bir operatördür.

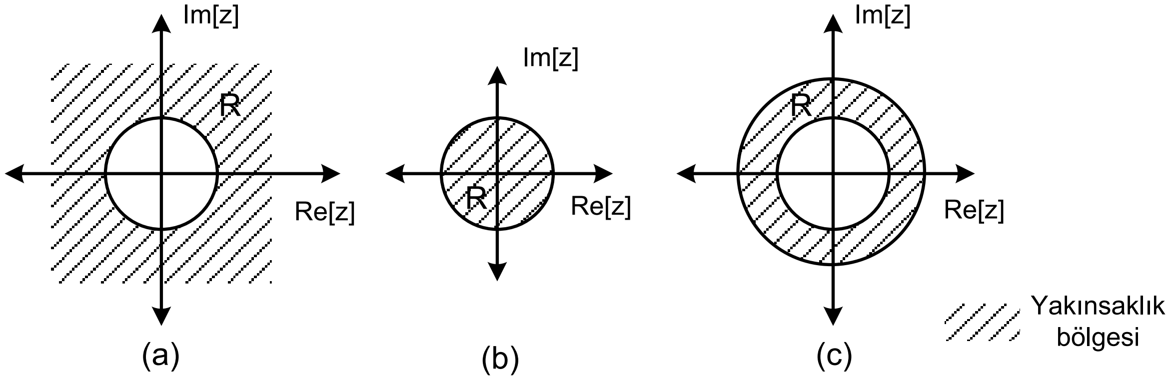
Yakınsaklık bölgesi

Tüm dizilerin z-dönüşümü yakınsak değildir. Diğer bir deyişle, tüm z değerleri için z-dönüşümü yakınsak olmaz. Verilen herhangi bir dizinin z-dönüşümünün yakınsak olduğu z değerlerinin karmaşık düzlemde oluşturduğu küme, o dönüşümün yakınsaklık bölgesi olarak adlandırılır.

Düzenli yakınsaklık, dizinin mutlak değerlerinin toplamının sonlu olmasını gerektirir. Yani,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n).z^{-n} \right| < \infty \tag{6.4}$$

eşitsizliğini sağlayan tüm z-değerleri yakınsaklık bölgesini oluşturur. (6.1) de tanımlanan z-dönüşümü $X(z)$, bir Laurent serisidir. Kompleks değişkenler teorisinden bilindiği üzere, bir Laurent serisinin yakınsaklık bölgesi R, halka şeklindedir. Yani, halkanın iç ve dış yarıçapı r_1 ve r_2 olarak verilirse, $r_1 < |z| < r_2$ yakınsaklık bölgesi R halkasını gösterir. $x(n)$ dizisinin $+\infty$ ve $-\infty$ arasındaki davranışına göre r_1 ve r_2 sınır değerleri belirlenir. Bu halka içerisinde $X(z)$, z nin analitik bir fonksiyonudur. Bu nedenle, $X(z)$ nin kutupları ve tekil noktaları R bölgesi dışındadır.



Şekil 6.1 Mümkün olan yakınsaklık bölgesi formları: a) Sağ taraflı dizi; b) Sol taraflı dizi; c) İki taraflı dizi

Eğer $n < 0$ için $x(n) = 0$ ise, (6.1) de z nin sadece negatif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_2 = \infty$ olur. Yakınsaklık bölgesi R, r_1 yarıçaplı bir çemberin dışı olur ve $|z| > r_1$ şeklinde gösterilir. Eğer $n > 0$ için $x(n) = 0$ ise, (6.1) de z nin sadece pozitif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_1 = 0$ olup, yakınsaklık bölgesi R, $|z| < r_2$ gibi bir çemberin içinde kalan bölgedir. Şekil 6.1 de karşılaşılabilecek yakınsaklık bölgeleri gösterilmiştir. Aşağıdaki bölümde bu konuya ilişkin örnekler verilecektir.

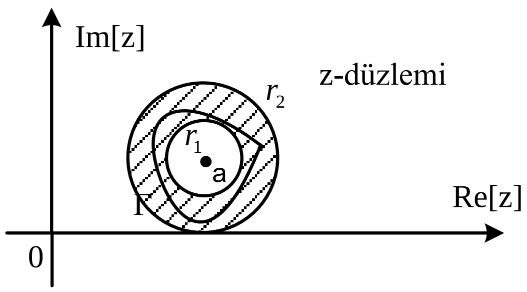
6.3 z -dönüşümünün özellikleri

z -dönüşümünün özelliklerini bir dizi teorem yardımıyla açıklayacağız. Önce Laurent teoremini ve sonuçlarını inceleyelim.

Teorem 6.1 (Laurent Teoremi).

a.) $X(z)$ şekil 6.2 de gösterildiği gibi, yarıçapları r_1 ve r_2 ve merkezi z_0 da olan bir halka $(r_1 < |z - z_0| < r_2)$ üzerinde analitik ve tek değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $X(z)$, z_0 noktası civarında Laurent serisiyle (6.5) denklemindeki gibi gösterilebilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).(z - z_0)^{-n} \tag{6.5}$$



Şekil 6.2 $X(z)$ nin z -düzlemindeki analitik bölgesi

(6.5) denklemindeki $x(n)$ katsayıları ise kontur entegrali yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z).(z - z_0)^{n-1} dz \tag{6.6}$$

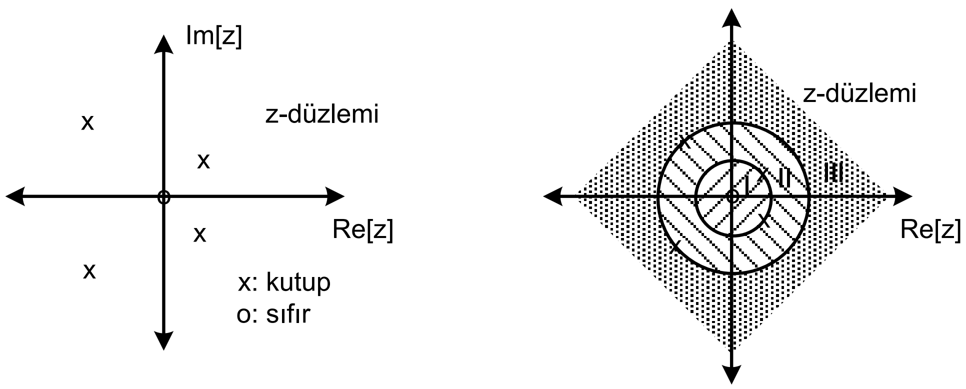
Burada Γ, halka içinde saat yönünün tersi yönlü ve içteki çemberi çevreleyen kapalı bir kontoru gösterir.

b) $X(z)$ nin tekil olduğu noktalara varıncaya kadar sürekli olarak r_2 nin çapını artırırken r_1 in çapını küçülterek elde edilen açık halkanın içinde Laurent serisi yakınsaktır ve $X(z)$ yi temsil eder.

c) Yakınsaklık halkası içinde $X(z)$ nin Laurent serisi tektir. Bununla beraber, aynı merkezli farklı halkalarda $X(z)$ nin farklı Laurent serileri olabilir.

(6.1) ve (6.5) deki bağıntıların karşılaştırılmasından (6.1) in sağ tarafının, z-düzleminin orijini etrafında $(z_0 = 0)$, $X(z)$ için bir Laurent serisi açılımı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Laurent Teoremi z-dönüşümlerine uygulanabilir.

İşaret işlemede sadece, tekil noktaları sonlu z-düzleminde kutuplar olan z-dönüşümleri ele alınacaktır. Teorem 6.1(c) ye göre bu türden fonksiyonların orijin etrafında birden fazla Laurent serisi bulunabilir. Örneğin, şekil 6.3(a) daki sıfır ve kutup grafiğinden, ilgili $X(z)$ fonksiyonunun orijin etrafında üç Laurent serisi olduğu görülür. Herbir halka şekil 6.3(b) de belirtilmiştir. Kolaylık açısından, r_1 orijine göre en dıştaki kutuptan geçecek ve $r_2 \to \infty$ olacak şekilde $X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi açık halka olarak kabul edilir.



Şekil 6.3 Orijine göre üç Laurent serisi bulunan $X(z)$ fonksiyonu: a) $X(z)$ sıfır ve kutup diyagramı b) Yakınsaklık halkaları

$X(z)$ nin iki polinomun oranı biçiminde z nin rasyonel bir fonksiyonu olması en çok karşılaşılan durumdur. Pay polinomun kökleri $X(z)$ yi sıfır yapacağından $X(z)$ nin sıfırları olarak adlandırılır. Payda polinomunun kökleri olan z değerlerinde ise $X(z)$ nin değeri sonsuz olacağından, $X(z)$ nin kutupları olarak adlandırılır. Yakınsaklık tanımından dolayı kutuplar yakınsaklık bölgesi dışında olmalıdır. Yani,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{6.7}$$

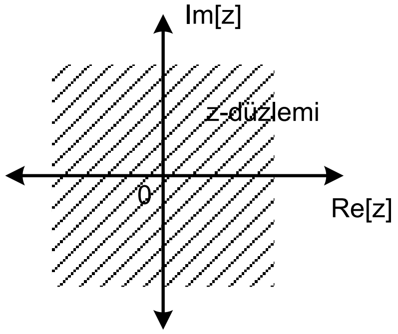
gösteriliminde, $A(z) = 0$ denkleminin kökleri sıfırları, $B(z) = 0$ ın kökleri ise kutupları oluşturacaktır.

Kutuplar payda polinomu $B(z)$ nin kökleri dışında, $z = 0$ veya $z = \infty$ da bulunabilir. Yukarıdaki tanımları ve özellikleri göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

<u>Örnek 6.1</u> $x(n) = \delta(n)$ dizisinin z -dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = 1 \tag{6.8}$$

olur. Yakınsaklık bölgesi $0 \le |z| \le \infty$ olduğundan $X(z)$ tüm z -düzleminde yakınsaktır. Şekil 6.4 te $X(z) = 1$ için yakınsaklık bölgesi gösterilmektedir.



Şekil 6.4 $x(n) = \delta(n)$ birim impuls dizisi için yakınsaklık bölgesi

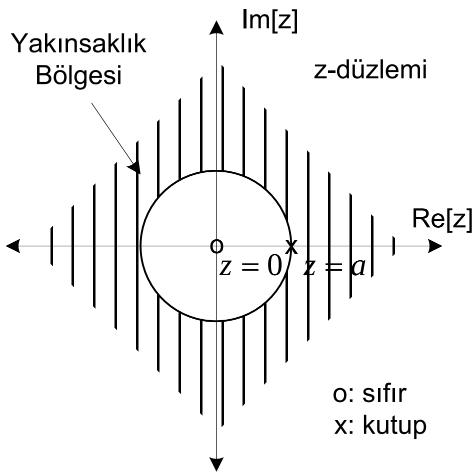
<u>Örnek 6.2</u> Sağ taraflı üstel $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için z -dönüşümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a.z^{-1})^n \tag{6.9}$$

Burada $\left|a.z^{-1}\right| < 1$ için seri yakınsak olur ve z -dönüşümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a} \tag{6.10}$$

$\left|a.z^{-1}\right| < 1$ koşulundan $|z| > |a|$ yazılabilir. Şekil 6.5 te gösterildiği gibi yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında kalan bölgedir. $X(z)$ nin $z = 0$ da bir sıfırı ve $z = a$ da bir kutbu vardır.



Şekil 6.5 $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Örnek 6.3 Sol taraflı bir diziye örnek olarak aşağıdaki diziyi ele alalım.

$$x(n) = \begin{cases} 0, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} \leq -1 \quad \text{için} \end{cases} \tag{6.11}$$

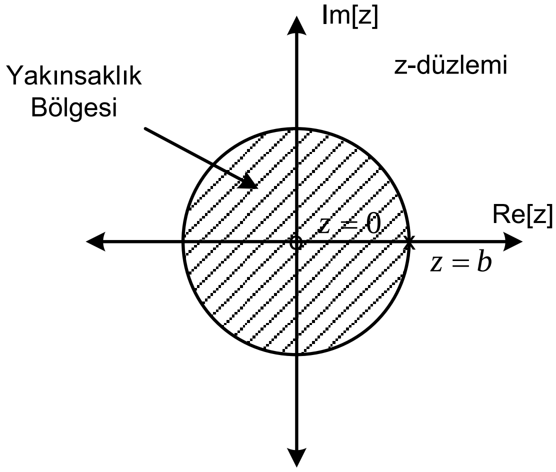
$x(n)$ nin z -dönüşümü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n}.z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}.z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}.z)^n \tag{6.12}$$

Eğer $\left|b^{-1}.z\right| < 1$ veya $|z| < b$ ise (6.12) deki seri yakınsar. Yani (6.13) elde edilir.

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - b^{-1}.z} = \frac{-b^{-1}.z}{1 - b^{-1}.z} = \frac{z}{-b + z} = \frac{z}{z - b} \tag{6.13}$$

Şekil 6.6 da görüleceği gibi yakınsaklık bölgesi b yarıçaplı dairenin içinde kalan alandır.



Şekil 6.6 $x(n) = -b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Açıklama 6.1 Son iki örnekteki dizilere ait z-dönüşümlerinin incelenmesinden, sadece z-dönüşümünün sıfırları ve kutupları yardımıyla dizileri belirlemenin mümkün olmadığı görülmektedir. Gerçekten $a = b$ olması halinde, (6.10) ve (6.13) den sağ ve sol taraflı dizilerin z-dönüşümleri aynı olmaktadır. Farklı olan özellik ise yakınsaklık bölgeleridir. O halde, diziyi belirlerken z-dönüşümünün yanısıra yakınsaklık bölgesi de verilmelidir. Dizinin sağ veya sol taraflı olarak belirtilmesi durumunda da yakınsaklık bölgesi dolaylı olarak verilmiş olur.

Örnek 6.4 İki taraflı diziye örnek olarak

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} < 0 \quad \text{için} \end{cases} \tag{6.14}$$

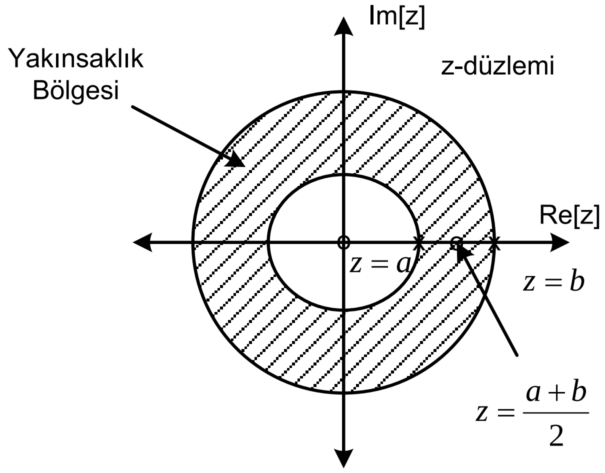
dizisinin z-dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n} \tag{6.15}$$

(6.10) ve (6.13) de $\left|a.z^{-1}\right| < 1$ ve $\left|b^{-1}.z\right| < 1$ koşullarının sağlanması durumunda (6.15),

$$X(z) = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a).(z-b)} \tag{6.16}$$

şeklinde yazılabilir. Yakınsaklık bölgesi şekil 6.7 deki gibi yarıçapları a ve b olan halka içindedir. Yani, $|a| < |b|$ ise, $|a| < |z| < |b|$ yakınsaklık bölgesidir. Çok kullanılan z -dönüşüm çiftleri Tablo 6.1 de gösterilmiştir.



Şekil 6.7 $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Teorem 6.2 (Doğrusallık). $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ herhangi iki dizi ve z -dönüşümleri

$$Z[x_1(n)] = X_1(z) \tag{6.17}$$

$$Z[x_2(n)] = X_2(z) \tag{6.18}$$

olarak verilsin. a ve b herhangi iki sabit katsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$X_3(z) = Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} Z[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n) + bx_2(n)].z^{-n} = a.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).z^{-n} + b.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n).z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned} \tag{6.20}$$

$X_3(z)$ nin yakınsaklık bölgesi en azından $X_1(z)$ ve $X_2(z)$ nin yakınsaklık bölgelerinin arakesitini kapsar. Yani sonuç (6.21) de gösterildiği gibi olur.

$$R_{x_3} \supset (R_{x_1} \cap R_{x_2}) \tag{6.21}$$

R_{x_1} ve R_{x_2} nin sınırında bulunan bir kutbun, (6.19) toplamı sonucu ortaya çıkan bir sıfır ile yokedilmesi durumunda R_{x_3} yakınsaklık bölgesi $(R_{x_1} \cap R_{x_2})$ den daha geniş olur.

Tablo 6.1 Standart z -Dönüşümleri

Dizi	z -Dönüşümü	Yakınsaklık Aralığı
$\delta(n)$	1	Tüm z
$\delta(n-m)$, $m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert > 0$, yani $z=0$ hariç tüm z
$\delta(n+m)$, $m>0$	z^{m}	$\lvert z\rvert < \infty$, yani $z=\infty$ hariç tüm z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$u(n)\cos n\theta$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n)\sin n\theta$	$\dfrac{z^{-1}\sin\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n)r^n\cos n\theta$	$\dfrac{1-rz^{-1}\cos\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$u(n)r^n\sin n\theta$	$\dfrac{rz^{-1}\sin\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$

Teorem 6.3 (Öteleme).

a.) $Z[x(n+m)] = z^m X(z)$ (6.22)

Eğer $x(n)$ dizisi sağ taraflı ise, yani $n<0$ için $x(n)=0$ olursa, pozitif m tamsayısı için aşağıdaki özelliklerin bulunduğu gösterilebilir.

b.) $Z[x(n+m)] = z^m \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k).z^{-k} \right\}$ (6.23)

c.) $Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$ (6.24)

İspat. (a)

$$Z[x(n+m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m).z^{-n} = z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+m).z^{-(n+m)} = z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).z^{-k} = z^m.X(z)$$

İspat. (b)

$$Z[x(n+m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m).z^{-n} = z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m).z^{-(n+m)} = z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k).z^{-k}$$

$$= z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k).z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k).z^{-k} \right] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k).z^{-k} \right]$$

İspat. (c)

$n<0$ için $x(n) = x(n-m) = 0$ olduğundan Teorem 6.3(a) uygulanırsa, $Z[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$Z[x(n-m)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m).z^{-n} = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m).z^{-(n-m)} = z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k).z^{-k}$$

$$= z^{-m} \left[\underbrace{\sum_{k=-m}^{k=-1} x(k).z^{-k}}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} x(k).z^{-k} \right] = z^{-m} X(z)$$

Ötelenmiş $x(n-m)$ dizisi ile orijinal $x(n)$ dizisinin yakınsaklık bölgeleri aynıdır. Ancak $z=0$ veya $z=\infty$ noktası yakınsaklık bölgesi dışında olabilir. Birim gecikme durumunda $m=1$ dir. (6.24) bağıntısından aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$Z\left[x(n-1)\right]=z^{-1}X(z) \tag{6.25}$$

(6.25) de $X(z)$, z^{-1} ile çarpılmıştır. Bu z^{-1} çarpanına birim gecikme operatörü adı verilir. Benzer şekilde, birim ilerleme durumunda ise sonuç (6.26) daki gibi olur.

$$Z\left[x(n+1)\right]=z.X(z) \tag{6.26}$$

<u>Örnek 6.5</u>

a) Geciktirilmiş impuls dizisi, $x(n)=\delta(n-m)$ için,

$$X(z)=Z\left[\delta(n-m)\right]=z^{-m} \tag{6.27}$$

bulunur. $0<|z|\leq\infty$ yakınsaklık bölgesidir. $z=0$ da $X(z)$ yakınsamaz.

b) İlerletilmiş impuls dizisi, $x(n)=\delta(n+m)$ için,

$$X(z)=Z\left[\delta(n+m)\right]=z^{+m} \tag{6.28}$$

bulunacaktır. $X(z)$, $z=\infty$ da yakınsamadığından yakınsaklık bölgesi $0\leq|z|<\infty$ olur.

<u>Teorem 6.4 (Karmaşık Türev).</u>

$$Z\left[nx(n)\right]=-z\cdot\frac{dX(z)}{dz} \tag{6.29}$$

<u>İspat.</u>

$$Z[nx(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n).z^{-n} = -z.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).(-n).z^{-n-1} = -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot\frac{d}{dz}(z^{-n})$$
$$= -z\cdot\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).(z^{-n})\right] = -z\frac{dX(z)}{dz} \tag{6.30}$$

$X(z)$ ve $Z[nx(n)]$ in yakınsaklık bölgeleri aynıdır.

Örnek 6.6

$$x(n) = \begin{cases} na^n, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ 0, & \text{n} < 0 \quad \text{için} \end{cases} \tag{6.31}$$

dizisinin z -dönüşümünü Teorem 6.4 yardımıyla bulalım. Örnek 6.2 den hatırlarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n} = \frac{z}{z-a} = X(z) \tag{6.32}$$

olur. (6.30) dan aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$Z[na^n u(n)] = -z\cdot\frac{d}{dz}\underbrace{\left\{\frac{z}{z-a}\right\}}_{X(z)} = -z\cdot\frac{(-a)}{(z-a)^2} = \frac{za}{(z-a)^2} \tag{6.33}$$

(6.31) ve (6.33) ün karşılaştırılmasından yakınsaklık bölgelerinin değişmediği görülmektedir.

Teorem 6.5 (Gerçel konvolüsyon).

$$Z\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)\right] = X(z).H(z) \tag{6.34}$$

veya

$$Z\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k).h(k)\right] = X(z).H(z) \tag{6.35}$$

İspat.

$$Z\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k).z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k).z^{-(n-k)}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).z^{-k}.\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).z^{-m} = X(z).H(z) \qquad (6.36)$$

$X(z).H(z)$ nin yakınsaklık bölgesi $X(z)$ ve $H(z)$ nin yakınsaklık bölgelerinin arakesitini kapsar. Yani, $R \supset (R_x \cap R_h)$ olur.

<u>**Açıklama 6.2**</u> Herhangi iki dizinin konvolüsyonu sonucu elde edilecek dizinin z-dönüşümünün, dizilerin z-dönüşümlerinin çarpımı olduğu gerçel konvolüsyon teoreminden anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, iki dizinin çarpımının z-dönüşümü, dizilerin z-dönüşümlerinin kompleks konvolüsyonu olduğu gösterilebilir. Yani, $Z[x(n)] = X(z)$ ve $Z[y(n)] = Y(z)$ ise (6.37) deki sonuç elde edilir.

$$Z[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}dv \qquad (6.37)$$

(6.37) deki çizgisel entegralde Γ, $X(v)$ ve $Y(\frac{z}{v})$ için ortak yakınsaklık bölgesinde yer alan bir konturu göstermektedir.

<u>**Teorem 6.6 (İlk Değer Teoremi).**</u> Eğer $x(n)$ nedensel bir dizi ise ($x(n) = 0$, $n < 0$),

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad (6.38)$$

<u>**İspat.**</u>

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \lim_{z\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) \qquad (6.39)$$

<u>**Teorem 6.7 (Son Değer Teoremi).**</u> Nedensel $x(n)$ dizisinin z-dönüşümü $X(z)$ olsun. $(z-1)X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi $z=1$ i kapsıyor ise,

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{6.40}$$

İspat.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} \tag{6.41}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}x(k)z^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty}x(k-1)z^{-k} = (1-z^{-1})X(z)-x(0) \tag{6.42}$$

yazılabilir. (6.41) ve (6.42) den de aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$(1-z^{-1})X(z)-x(0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k} \tag{6.43}$$

$z=1$, $(1-z^{-1})X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi içinde ise, (6.43) denkleminin her iki tarafının $z\to 1$ limiti alınmak suretiyle önce (6.44) ardından da (6.45) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)-x(0) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}z^{-k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x(k)-x(k-1)\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\{x(n)-x(0)\}\\ &= \lim_{n\to\infty}x(n)-x(0)\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{6.45}$$

Teorem 6.8 (Parseval Teoremi).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz \tag{6.46}$$

C uygun olarak seçilmiş bir konturu göstermektedir.

İspat.

(6.37) bağıntısında $x(n)=y(n)$ ve $z=1$ için (6.47) deki sonuç elde edilir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)]^2=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}X(v)X(v^{-1})v^{-1}dv \tag{6.47}$$

6.4 Ters z -dönüşümü

Cauchy entegral teoremi yardımıyla ters z -dönüşümünü elde etmek mümkündür. Bu önemli teoremi şöyle tanımlayabiliriz.

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}z^{k-1}dz=\begin{cases}1, & k=0\ için\\ 0, & k\neq 0\ için\end{cases} \tag{6.48}$$

(6.48) bağıntısında C, orijini çevreleyen saat ibresinin ters yönünde kapalı bir konturu göstermektedir. z -dönüşümü ilişkisi aşağıda verilmektedir.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{6.49}$$

(6.49) un her iki tarafını z^{k-1} ile çarparak $X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi içinde orijini çevreleyen C konturu üzerinde entegrali alınırsa,

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}X(z)z^{k-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n+k-1}dz \tag{6.50}$$

elde edilir. Toplam ve entegrasyon yer değiştirirse (6.51) denklemi elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}X(z)z^{k-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\oint_{C}z^{-n+k-1}dz \tag{6.51}$$

Halbuki, (6.48) deki Cauchy entegral teoreminden,

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}dz = \begin{cases} 1, & n = k \text{ için} \\ 0, & n \neq k \text{ için} \end{cases} \tag{6.52}$$

olduğu bilinmektedir. (6.51) ve (6.52) den ters z -dönüşüm bağıntısı olarak

$$x(k) = Z^{-1}\left[X(z)\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz \tag{6.53}$$

bulunur. C saat ibresinin ters yönünde orijini çevreleyen kapalı bir kontur olup, $X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi içindedir. Burada, (6.49) ve (6.53) bağıntıları birlikte z -dönüşüm çiftini oluştururlar.

Ters z -dönüşümü hesaplanırken (6.53) deki kontur entegralinin yerine pratikte daha basit olan yöntemler kullanılır. Şimdi, bu alternatif metotları inceleyelim.

6.4.1 Rezidü metodu

Cauchy rezidü teoremi yardımıyla, z -dönüşümü

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{\prod_{i=1}^{K}(z-p_i)^{m_i}} \tag{6.54}$$

biçiminde olan rasyonel fonksiyonların, (6.53) deki kontur entegrali hesaplanabilir. (6.54) de p_i kutbunun m_i katlı olduğu görülmektedir. Cauchy rezidü teoremine göre, $x(k)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}dz = \sum_{k=1}^{K}\left\{\begin{array}{l} X(z).z^{k-1} \text{ teriminin } C \text{ konturu içindeki} \\ \text{tüm kutuplarina ait rezidüler} \end{array}\right\} \tag{6.55}$$

m katlı p kutbunun rezidüsü (6.56) daki gibi yazılabilir.

$$\underset{z=p}{res}\{X(z)z^{n-1}\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to p}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-p)^m X(z)z^{n-1}\} \tag{6.56}$$

p kutbunun tek katlı olması durumunda $z = p$ deki rezidü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underset{z=p}{res}\{X(z)z^{n-1}\} = \lim_{z\to p}\{(z-p)X(z)z^{n-1}\} \tag{6.57}$$

Örnek 6.7

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\,,\quad |z| > |a| \tag{6.58}$$

olarak verilen z -dönüşümünün tersini rezidü teoremini kullanarak bulalım.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz \tag{6.59}$$

Şekil 6.5 te görüldüğü gibi C sadece $z = a$ da yer alan tek bir kutbu çevrelemektedir. $n \geq 0$ için $x(n)$ değerleri

$$x(n) = \underset{z=a}{res}\{X(z)z^{n-1}\} = \lim_{z\to a}\left\{(z-a)\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\right\} = a^n,\ n \geq 0 \text{ için} \tag{6.60}$$

olarak bulunur. $n < 0$ için ise $X(z)z^{n-1}$ in $z = 0$ da n ye bağlı olarak birden çok kutbu vardır. Örneğin, $n = -1$ için $z = a$ ve $z = 0$ daki rezidüleri toplayalım. (6.60) da $n = -1$ konularak,

$$x(-1) = \lim_{z\to a}\left\{(z-a)\frac{z^{-1-1}}{1-az^{-1}}\right\} + \lim_{z\to 0}\left\{z\frac{z^{-1-1}}{1-az^{-1}}\right\} = a^{-1} - a^{-1} = 0 \tag{6.61}$$

Benzer şekilde, $n = -2, -3, \ldots\ldots$ için de rezidülerin toplamı sıfırdır. O halde, $n < 0$ için,

$$x(n) = 0 \tag{6.62}$$

bulunur. (6.60) ve (6.62) den aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$x(n) = a^n u(n) \tag{6.63}$$

6.4.2 Kuvvet serileri

A) Eğer z -dönüşümü z nin kuvvet serisi şeklinde verilmişse, istenen dizinin n nci elemanı $x(n)$ nin z^{-n} teriminin katsayısı olduğu gözlenir. Yani, z -dönüşümü (6.64) biçimindedir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{6.64}$$

Ancak, $X(z)$ (6.64) deki gibi verilmeyip kapalı formda verilmiş ise uygun seri açılımı yazılır.

<u>**Örnek 6.8**</u>

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |a| < |z| \tag{6.65}$$

Kapalı formunda verilen z -dönüşümünün tersini seriye açarak bulalım. $|\omega| < 1$ için $\log(1+\omega)$ in Taylor serisine açılımını hatırlarsak,

$$\log(1+\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\omega^n}{n}, \quad |\omega| < 1 \tag{6.66}$$

yazılır. Bu sonucu (6.65)'de kullanırsak,

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} \cdot z^{-n} \tag{6.67}$$

$x(n)$ (6.67) den bulunabilir. Bu durumda (6.68) veya (6.69) denklemleri elde edilir.

$$x(n)=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}, & n\geq 1 \text{ için}\\ 0, & n\leq 0 \text{ için}\end{cases} \tag{6.68}$$

$$x(n)=\frac{-(-a)^n}{n}u(n-1) \tag{6.69}$$

Örnek 6.9 $X_1(z)=2+3z^{-1}+4z^{-2}$ ve $X_2(z)=3+4z^{-1}+5z^{-2}+6z^{-3}$ olarak verilmiş olsun. $X_3(z)=X_1(z)X_2(z)$ yi belirleyiniz.

Çözüm. Bu iki dizinin ters z-dönüşümleri $x_1(n)=\{2,3,4\}$ ve $x_2(n)=\{3,4,5,6\}$ olarak bulunur. z-dönüşümünün gerçel konvolüsyon özelliğini kullanırsak, bu iki dizinin konvolüsyonu olan dizi, aradığımız çarpım polinomunun katsayılarını verecektir. MATLAB kullanılarak,

```
x1=[2 3 4]; x2=[3 4 5 6]; x3=conv(x1,x2);
```

Böylece aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$X_3(z)=6+17z^{-1}+34z^{-2}+43z^{-3}+38z^{-4}+24z^{-5}$$

B) Diğer bir ters z-dönüşümü yönteminde ise rasyonel formdaki z-dönüşümlerinden bölme işlemi sonucu kuvvet serisi bulunur.

Örnek 6.10 Yakınsaklık bölgesi $|z|>|a|$ olan aşağıdaki gibi verilmiş olan $X(z)$ i kuvvet serisi biçiminde açarak $x(n)$ i bulunuz.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$X(z)$ nin yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında olduğu için $x(n)$ dizisi sağ taraflıdır. O halde, bölüm sonucu z^{-1} in kuvvetleri cinsinden bir seri elde edilir. Bölme işlemi yapılarak z nin negatif kuvvetleri şöyle bulunur:

$$X(z)=1+\frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$$
$$X(z)=1+az^{-1}+\frac{a^2z^{-2}}{1-az^{-1}}$$
$$X(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\frac{a^3z^{-3}}{1-az^{-1}}$$
$$X(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\frac{a^4z^{-4}}{1-az^{-1}}\cdots\cdots$$

veya (6.70) deki gibi ifade edilir ve ardından kısaca (6.71) deki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\ldots\ldots \tag{6.70}$$

$$x(n)=a^n u(n) \tag{6.71}$$

<u>Örnek 6.11</u> Yakınsaklık bölgesi $|z|<|a|$ olduğunda aynı $X(z)$ i kuvvet serisi biçiminde açarak $x(n)$ i bulunuz.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \tag{6.72}$$

$z=0$ noktası yakınsaklık bölgesi içindedir. O halde, $z=0$ da $X(z)$ sınırlıdır. Buradan, $n\geq 0$ için $x(n)=0$ olacağı ve dizinin sol taraflı olduğu anlaşılır. Bölme işlemiyle z nin pozitif kuvvetleri bulunur. Önce (6.73) deki gibi ifade edilir.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \tag{6.73}$$

Buradan,

$$X(z) = -a^{-1}z - \frac{a^{-1}z^2}{z-a}$$

$$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \frac{a^{-2}z^3}{z-a}$$

$$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \frac{a^{-3}z^4}{z-a}$$

$$X(z) = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - a^{-4}z^4 - \frac{a^{-4}z^5}{z-a} \cdots\cdots$$

bulunur. Böylece (6.74) denklemi elde edilir.

$$x(n) = -a^n u(-n-1) \qquad (6.74)$$

<u>Örnek 6.12</u> Payın derecesi paydanın derecesinden daha büyük olan aşağıdaki z-dönüşümünün tersini bölme işlemiyle bulalım.

$$X(z) = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 2}{z^{-1} + 1}, \quad |z| > 1 \qquad (6.75)$$

Bölme işlemi sonucu (6.76) elde edilir.

$$X(z) = 2 + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5} + \ldots\ldots \qquad (6.76)$$

Bu durumda (6.77) bulunur.

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ (-1)^n, & n \geq 2 \end{cases} \qquad (6.77)$$

(6.77) den de (6.78) yazılabilir.

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + (-1)^n u(n) \qquad (6.78)$$

C) Rasyonel formda verilen z-dönüşümünün tersinin bulunmasında Jury tarafından formüle edilen aşağıdaki yöntem kullanılabilir. Buna göre,

$$X(z)=\frac{b(0)+b(1)z^{-1}+\ldots\ldots+b(n)z^{-n}}{1+a(1)z^{-1}+\ldots\ldots+a(n)z^{-n}} \tag{6.79}$$

olarak verilmiş ise,

$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\ldots\ldots+x(n)z^{-n}\ \ldots\ldots \tag{6.80}$$

Kuvvet serisinin katsayıları, (6.81), (6.82), (6.83) ve (6.84) denklemlerindeki determinantlar yardımıyla bulunur.

$$x(0)=b(0)=\Delta_1 \tag{6.81}$$

$$x(1)=\begin{vmatrix} 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) \end{vmatrix}=b(1)-a(1)b(0)=\Delta_2 \tag{6.82}$$

$$x(2)=\begin{vmatrix} 1 & a(1) & a(2) \\ 0 & 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) & b(2) \end{vmatrix}=\Delta_3 \tag{6.83}$$

$$x(3)=\begin{vmatrix} 1 & a(1) & a(2) & a(3) \\ 0 & 1 & a(1) & a(2) \\ 0 & 0 & 1 & a(1) \\ b(0) & b(1) & b(2) & b(3) \end{vmatrix}=\Delta_4 \tag{6.84}$$

Ayrıca, bu determinantlar özyineli (rekürsif) olarak da hesaplanabilir.

$$\Delta_1=x(0)=b(0) \tag{6.85}$$

$$\Delta_{n+1}=x(n)=b(n)-\sum_{i=1}^{n}\Delta_{n+1-i}a(i)\,,\quad n=1,2,\ldots\ldots \tag{6.86}$$

$$\Delta_{n+1+k}=-\sum_{i=1}^{n}\Delta_{n+1+k-i}a(i)\,,\quad k>n \text{ için} \tag{6.87}$$

(6.85) ve (6.87) deki işlemler bir bilgisayar algoritması yardımıyla kolaylıkla programlanabilir.

6.4.3 Kısmi kesirlere açılım

z -dönüşümü $X(z)$ nin, iki polinomun oranı şeklinde rasyonel biçiminde olması durumunda bu yöntem kullanılır. Eğer, pay polinomunun derecesi paydanın derecesinden daha küçük ve kutupların tamamı birinci dereceden ise,

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \ldots\ldots = \sum_{k=1}^{N} X_k(z) \tag{6.88}$$

ve

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + \ldots\ldots = \sum_{k=1}^{N} x_k(n) \tag{6.89}$$

yazılabilir. $X_1(z)$, $X_2(z)$,..... tek kutuplu z -dönüşümleridir. z -dönüşümünün doğrusallık özelliğinden aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$x(n) = Z^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{k=1}^{N} Z^{-1}\left[X_k(z)\right] \tag{6.90}$$

p_k , $X(z)$ nin tek katlı kutuplarını göstermek üzere, $X(z)$ aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad |z| > r \tag{6.91}$$

Ayrıca her bir terimin ters z -dönüşümü bir üstel dizi olacağından, $X(z)$ nin ters z -dönüşümü Tablo 6.1 den aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N} R_k\, p_k^n u(n) \tag{6.92}$$

Örnek 6.13 Aşağıdaki $X(z)$ fonksiyonunun tersini bulalım.

$$X(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} \tag{6.93}$$

$X(z)$ önce aşağıdaki gibi kısmi kesirlerine ayrılarak A ve B katsayıları bulunur.

$$X(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = \frac{A}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{B}{(z-\frac{1}{4})} \qquad A=2 \quad \text{ve} \quad B=-1$$

$$X(z) = \frac{2}{(z-\frac{1}{2})} - \frac{1}{(z-\frac{1}{4})} = \frac{2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{6.94}$$

(6.91) ve (6.92) den faydalanarak (6.95) denklemi bulunur.

$$x(n) = 2(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1) - (\frac{1}{4})^{n-1}u(n-1) = 4\left[(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n\right]u(n-1) \tag{6.95}$$

<u>Açıklama 6.3</u> Eğer payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit ise, önce bölme işlemi, sonra kesirlere açılım işlemi gerçekleştirilir. Buna göre, pay polinomu $A(z)$ nin derecesi M ve payda polinomu $B(z)$ nin derecesi N olsun. Ayrıca, kutupların yine basit ve tek katlı olduklarını varsayalım. O halde açılım aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots\ldots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_N z^{-N}} \\ &= c_{M-N} z^{N-M} + c_{M-N-1} z^{N-M+1} + \ldots\ldots + c_1 z^{-1} + c_0 + \frac{R(z)}{B(z)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}}_{M \geq N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1-p_k z^{-1}} \end{aligned} \tag{6.96}$$

Burada c_k değerleri bölüm sonucu bulunur. $R(z)$ ise derecesi $M = N-1$ olan kalan polinomudur. $R(z)/B(z)$ kısmi kesirlere açılabilir. (6.91) ve (6.96) dan $X(z)$ nin tersi

$$x(n) = \sum_{j=0}^{M-N} c_j \delta(n-j) + \sum_{k=1}^{N} R_k p_k^n u(n) \tag{6.97}$$

olarak elde edilir. R_k ları bulmak için (6.98) deki bağıntı kullanılır.

$$R_k = \lim_{z \to p_k} (z-p_k) X(z) \tag{6.98}$$

MATLAB de **residuez** komutu kullanılarak rasyonel bir z -dönüşümü ifadesinin rezidüleri ve kalan polinomu bulunabilir. $X(z)$ nin (6.96) da olduğu şekilde iki polinomun bölümü olduğunu varsayalım. Bu pay ve payda polinomlarının katsayıları z^{-1} in artan kuvvetlerine göre dizilmiş olsun ve a ile b vektörleri bu katsayıları belirtsin. Bu halde

`[R,p,c]=residuez(a,b)` komutu $X(z)$ için rezidüleri, kutupları ve doğrudan c_k katsayılarını verecektir. Sütun vektörü **R** rezidüleri, sütun vektörü **p** kutuplan, satır vektörü **c** ise doğrudan katsayıları içermektedir. Eğer çok katlı kutuplar varsa çıkış vektörleri buna göre düzenlenecektir. Eğer aynı komutu **`[a,b]=residuez(R,p,c)`** şeklinde üç giriş ve iki çıkış olarak kullanırsak, bu kez kısmi kesir açılımından bölüm şeklindeki gösterilime geri dönüş sağlanır.

Örnek 6.14

$$X(z)=\frac{1-1.7z^{-1}+0.95z^{-2}-0.15z^{-3}}{1-0.8z^{-1}+0.15z^{-2}}$$

fonksiyonunun kısmi kesir açılımını MATLAB kullanarak bulalım.

```
a=[1 -1.7 0.95 -0.15]; b=[1 -0.8 0.15]; [R,p,c]=residuez(a,b);
R=
     0.5000
    -0.5000
p=
     0.5000
     0.3000
c=
     1      -1
```

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$X(z)=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}-\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{3}{10}z^{-1})}+1-z^{-1}$$

6.4.4 Fark denklemi çözümü

Verilen z-dönüşümü sayısal bir süzgecin transfer fonksiyonu olarak düşünülebilir. Öteleme teoreminden yararlanarak bu transfer fonksiyonuna karşı düşen fark denklemi bulunur. Bulunacak olan impuls cevabı ters z-dönüşümünü verir. Sayısal bir bilgisayar yardımıyla fark denkleminin çözümü kolaylıkla programlanabileceğinden bu yöntem özel bir önem taşır. Aşağıdaki basit örnek üzerinde bu tekniği inceleyelim.

<u>Örnek 6.15</u> Aşağıdaki $F(z)$ nin tersini bulalım.

$$F(z) = \frac{z}{z+1/2} \tag{6.99}$$

$F(z)$ transfer fonksiyonu, giriş işareti $x(n)$ ve çıkış işareti $y(n)$ nin z -dönüşümleri sırasıyla $X(z)$ ve $Y(z)$ olmak üzere $F(z) = Y(z)/X(z)$ biçiminde yazılabilir. O halde,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z+1/2} \tag{6.100}$$

ve

$$zY(z) + \frac{1}{2}Y(z) = zX(z) \tag{6.101}$$

yazılabilir. (6.101) denkleminin her iki tarafı z ye bölünerek aşağıdaki ifadeye gelinir.

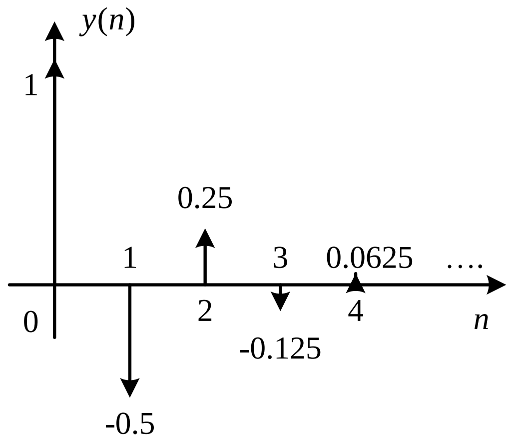
$$Y(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + X(z) \tag{6.102}$$

(6.102) eşitliğine karşı düşen fark denklemi ise (6.103) deki gibi olur.

$$y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + x(n) \tag{6.103}$$

(1) n	(2) $x(n)$	(3) $y(n-1)$	(4) $(1/2)y(n-1)$	(5) $y(n) = (2)-(4)$
0	1	0(ilk koşul)	0	1
1	0	1	½	-1/2
2	0	-1/2	-1/4	1/4
3	0	¼	1/8	-1/8
4	0	-1/8	-1/16	1/16
5	0	1/16	1/32	-1/32
6	0	-1/32	-1/64	1/64

Sistemin başlangıç koşulları sıfır varsayılarak $x(n) = \delta(n)$ giriş işareti için çıkış yukarıdaki gibi 5 aşamada hesaplanabilir. (6.99) un impuls cevabı Şekil 6.8 de görülmektedir.



Şekil 6.8 Ters z -dönüşümü: $y(n) = Z^{-1}\left[\dfrac{z}{z+0.5}\right]$