SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Bilgisayar Grafiği
HAFTA 4
2B Homojen Koordinat Sistemi

Arş. Gör. Dr. Gülüzar ÇİT

Bilgisayar ve Bilişim Bilimleri Fakültesi

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

gulizar@sakarya.edu.tr

Konu & İçerik

- Öteleme ve Homojen Koordinatlar
  - Öteleme
  - Homojen Koordinat Sistemi
    - Döndürme
    - Ölçekleme
    - Shearing
    - Öteleme
- Kaynaklar

Öteleme

- Döndürme
  - Orijin etrafında değil de başka bir referans noktası etrafında dönülüyor ise
    - Nesneyi, seçilen referans noktası orijine gelecek şekilde ötele
    - Nesneyi döndür
    - Döndürülen nesneyi eski konumuna geri ötele

Homojen Koordinat Sistemi

- Neden?
  - (x, y) noktasına öteleme uygulanırsa;

$$x^* = ax + cy + m$$
$$y^* = bx + dy + n$$

  - 2x2'lik matris gösteriminde *m* ve *n* parametrelerini gösteremeyiz. Bu nedenle BG'de homojen koordinat sistemi kullanılmaktadır.
  - $[x \quad y]$ vektörü homojen koordinat sisteminde $[x' \quad y' \quad h]$ biçiminde gösterilmekte ve $x = \frac{x'}{h}$, $\mathrm{y} = \frac{y'}{h}$ (h: reel sayı ve $h = 0$: özel anlam taşır)

Homojen Koordinat Sistemi…

- $[x \quad y \quad 1]$ gösterimi, $[x \quad y]$vektörünün fiziksel gösterimine karşılık gelmektedir.
- $[6 \quad 4 \quad 2], [12 \quad 8 \quad 4], [3 \quad 2 \quad 1]$ gösterimlerinin hepsi aynı fiziksel (3,2) noktasını göstermektedir.

$$\textit{Dönüşüm matrisi} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

a,b,c ve d: daha önce bahsedilen dönüşümler

m ve n: öteleme

2B Dönüşümler

$$\ddot{O}teleme\ matrisi \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

a,b,c ve d: daha önce bahsedilen dönüşümler

m ve n: öteleme

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \quad y+n \quad 1]$$

2B Dönüşümler…

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Döndürme

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Shearing

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

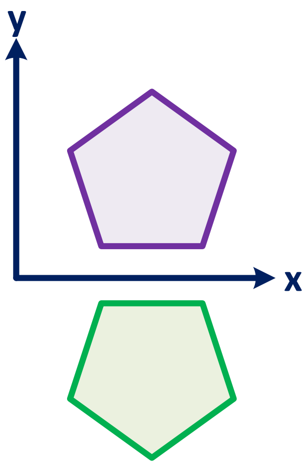
Ölçekleme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

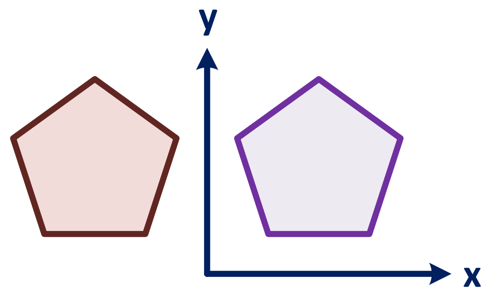
Öteleme

2B Dönüşümler…

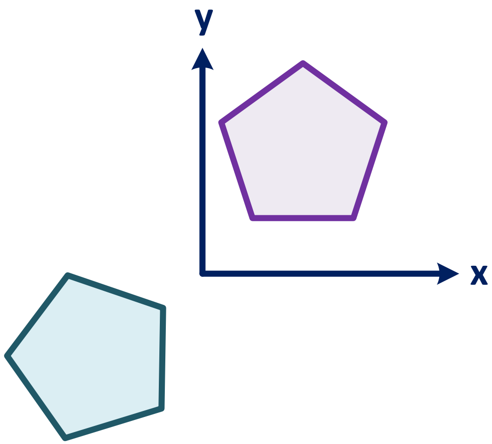
Aynalama



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler...

➢ Herhangi Bir Nokta Etrafında Döndürme

(x, y) noktasını (m, n) noktası etrafında θ kadar döndürme

Adım 1: Noktayı orjine ötele $\Rightarrow \boldsymbol{T_1}$

Adım 2: İstenilen döndürmeyi yap $\Rightarrow \boldsymbol{T_2}$

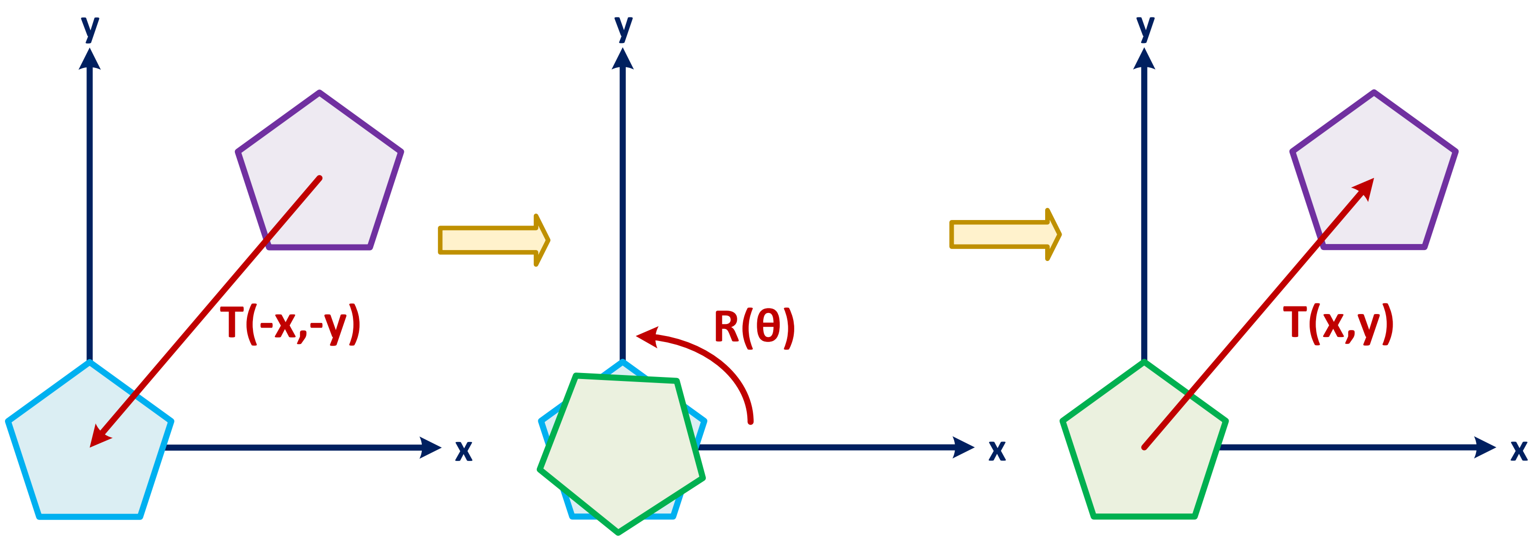
Adım 3: Noktayı eski yerine geri ötele $\Rightarrow \boldsymbol{T_3}$

$$\left.\begin{aligned}
[T_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \\
[T_2] &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
[T_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} [T] = [T_1].[T_2].[T_3]$$

2B Dönüşümler…

Bileşik Dönüşüm Matrisi:

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1].\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -m(-1+\cos\theta)+n\sin\theta & -n(-1+\cos\theta)-m\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Merkezi (4,3) noktasında olan cismi bu merkez etrafında 90^o döndürmek için gerekli olan dönüşüm matrisini hesaplayın.

Adım 1: Noktayı orjine ötele $\Rightarrow \boldsymbol{T_1}$

Adım 2: $90^{\circ} döndür$ $\Rightarrow \boldsymbol{T_2}$

Adım 3: Noktayı geri ötele $\Rightarrow \boldsymbol{T_3}$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 \\ -\sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [T_1].[T_2].[T_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler…

➢ Herhangi Bir Eksene/Doğruya Göre Aynalama

Adım 1: Doğruyu eksenlerden birine çakıştır

Adım 1.1: Doğruyu orjin ile çakışacak şekilde ötele (0,-2)$\Rightarrow \boldsymbol{T'}$

Adım 1.2: Doğruyu x ekseni ile çakışacak şekilde $-\theta$ kadar döndür $\Rightarrow \boldsymbol{R}$

Adım 2: Aynala $\Rightarrow \boldsymbol{R'}$

Adım 3: Doğruyu orijinal konumuna geri ötele

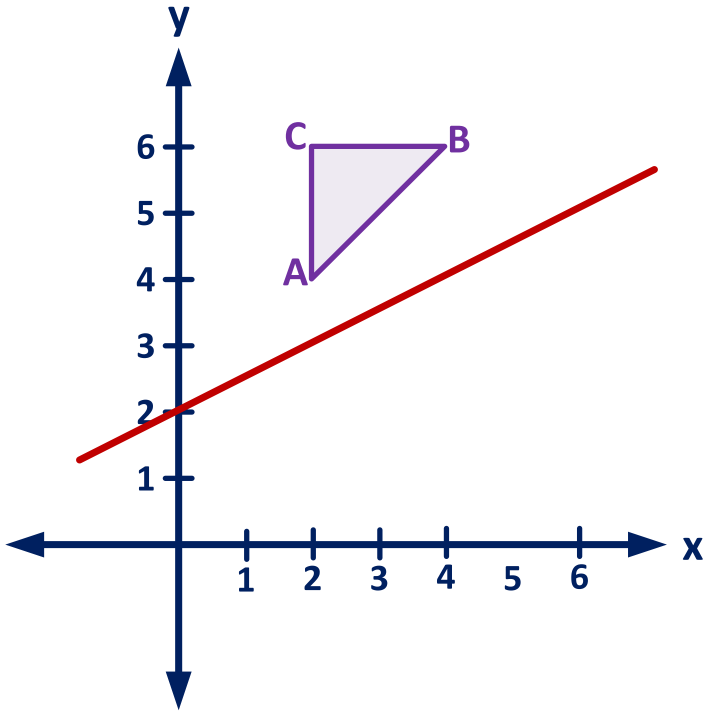
Adım 3.1: Doğruyu θ kadar geri döndür $\Rightarrow [\boldsymbol{R}]^{-1}$

Adım 3.2: Doğruyu geri ötele (0,2) $\Rightarrow [\boldsymbol{T'}]^{-1}$

Genelleştirilmiş Dönüşüm Matrisi $\Rightarrow$ $[\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{T'}].[\boldsymbol{R}].[\boldsymbol{R'}].[\boldsymbol{R}]^{-1}.[\boldsymbol{T}]^{-1}$

2B Dönüşümler…

➢**ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x + 4)$ doğrusuna göre aynalayınız.



2B Dönüşümler…

- **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\underset{ABC}{\Delta}$'nin $L = \frac{1}{2}(x + 4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

  - Aynalama işlemini gerçekleştirmek için doğruyu eksenlerden birisi ile çakışacak şekilde dönüşüm uygulamalıyız.

Adım 1: L doğrusunu x eksenine çakıştır
  - **Adım 1.1:** Doğruyu orjin ile çakışacak şekilde ötele (0,-2)$\Rightarrow$ $\boldsymbol{T1}$
  - **Adım 1.2:** Doğruyu x ekseni ile çakışacak şekilde $-\theta$ kadar döndür $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T2}$

Adım 2: Aynala $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T3}$

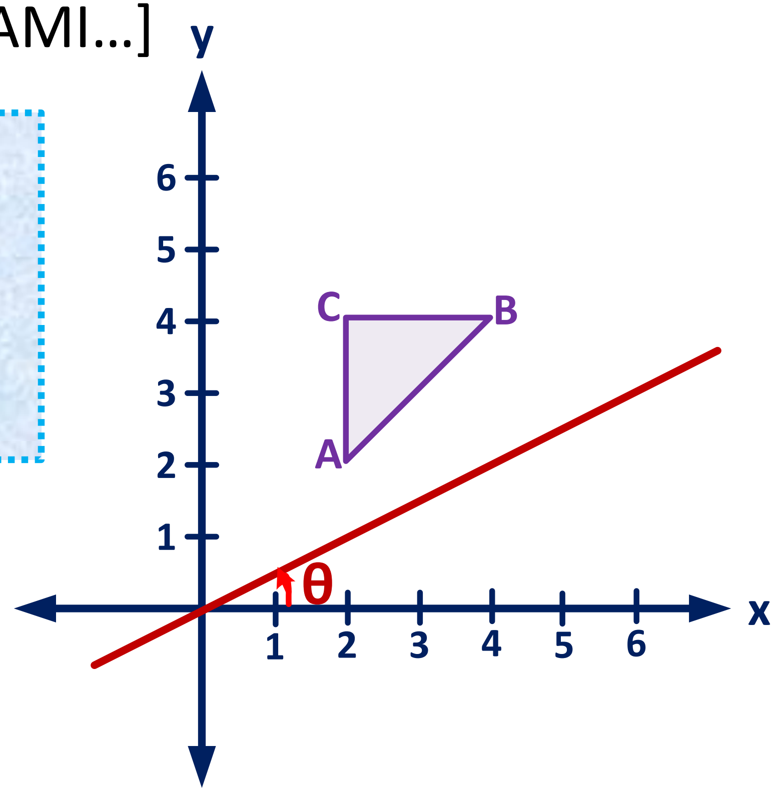
Adım 3: L doğrusunu orijinal konumuna geri ötele
  - **Adım 3.1:** Doğruyu θ kadar geri döndür $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T4}$
  - **Adım 3.2:** Doğruyu geri ötele (0,2) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{T5}$

2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

$\boldsymbol{T1} \Rightarrow$ *Doğruyu orjin ile çakışacak şekilde ötele*

$$[T1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



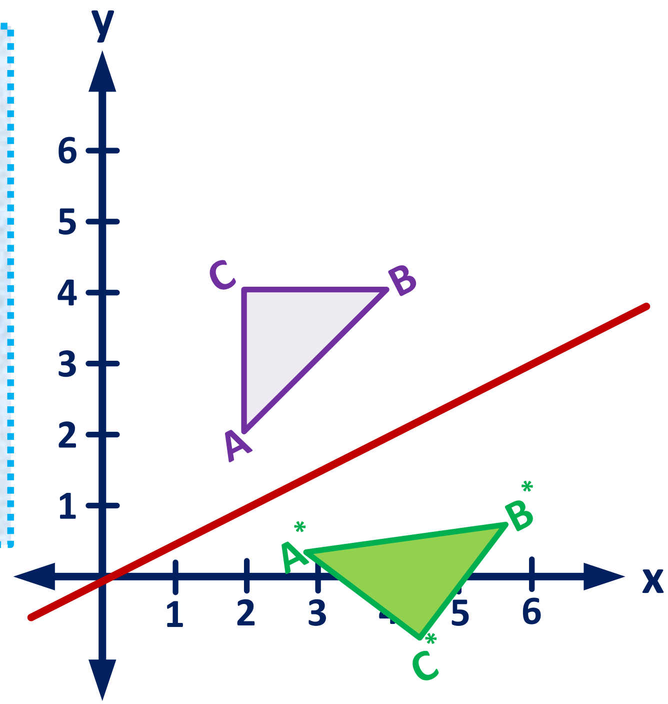
2B Dönüşümler…

- **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

T2 $\Rightarrow$ *Doğruyu x ekseni ile çakışacak şekilde $-\theta$ kadar döndür*

$$[T2] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

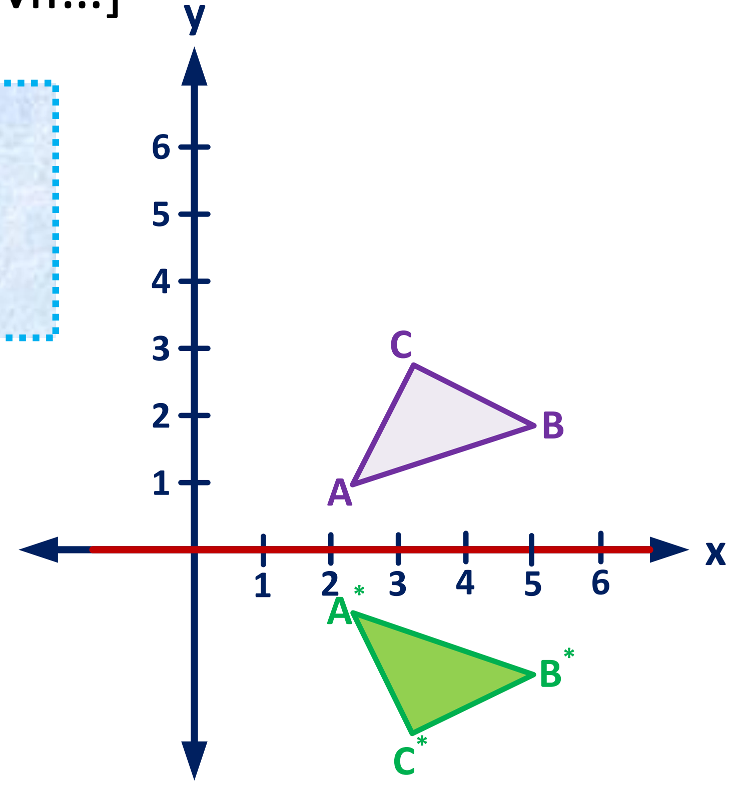


2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

$\boldsymbol{T3} \Rightarrow \mathit{Aynala\ (x\ eksenine\ göre)}$

$$[T3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

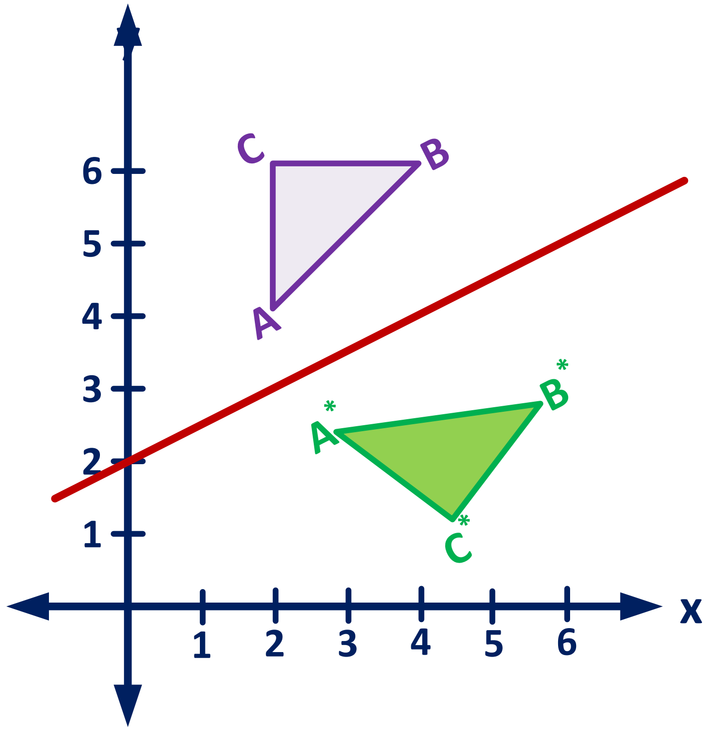
- **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

$\boldsymbol{T4} \Rightarrow$ *Doğruyu θ kadar geri döndür*

$$[T4] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T5} \Rightarrow$ *Doğruyu geri ötele*

$$[T1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

$\boldsymbol{T} \Rightarrow$ *Genelleştirilmiş dönüşüm matrisi*

$$[T] = [T_1].[T_2].[T_3].[T_4].[T_5]$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix}$$

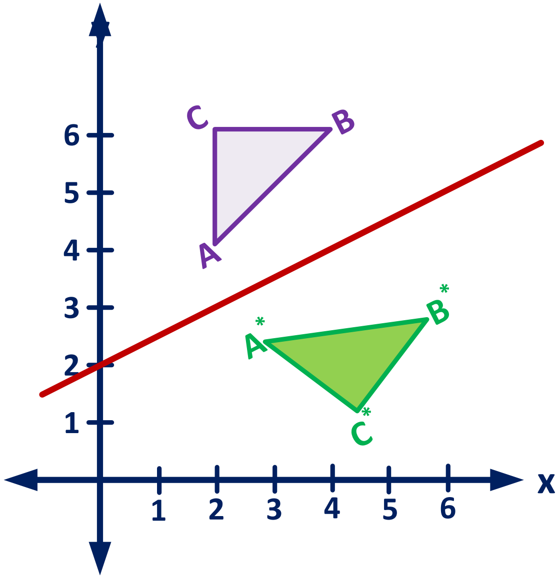
2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $A = [2 \quad 4 \quad 1]$, $B = [4 \quad 6 \quad 1]$ ve $A = [2 \quad 6 \quad 1]$ noktalarından geçen $\overset{\Delta}{ABC}$'nin $L = \frac{1}{2}(x+4)$ doğrusuna göre aynalayınız. [DEVAMI…]

$\overset{\Delta}{A^*BC^*} \Rightarrow$ *Doğruya göre aynalanmış üçgen*

$$\left[\overset{\Delta}{A^*BC^*}\right] = \left[\overset{\Delta}{ABC}\right].[T] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14/5 & 12/5 & 1 \\ 28/5 & 14/5 & 1 \\ 16/5 & 6/5 & 1 \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

- **UYARI:**
  - Dönüşüm matrisleri ve vektör gösterimleri değişik kaynaklarda farklılık gösterebilir
    - Sol ya da sağ el koordinat sistemi kullanımı
    - Objenin ya da koordinat sisteminin döndürülmesi
    - Pozitif ve negatif dönüş yönlerinin seçimi
    - Noktaların satır ya da sütun vektör olarak gösterilmesi
  - Örneğin noktalar sütun vektör olarak gösterilirse

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - *T* matrisi soldan çarpılır ve kullandığımız matrise göre transpozesi olur

2B Dönüşümler…

- 3x3'lük dönüşüm matrisini dört bölüme ayıralım

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix} \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : Rotasyon, aynalama, ölçekleme, shearing \\ [m \quad n]: Öteleme \end{cases}$$

$$p = q = 0 \; ve \; s = 1 \Rightarrow h = 1$$

$$p \neq q \; ve \; p \neq 0, q \neq 0 \Rightarrow Dönüşüm \; h = 1 \; fiziksel \; düzlemine \; çakıştırılır$$

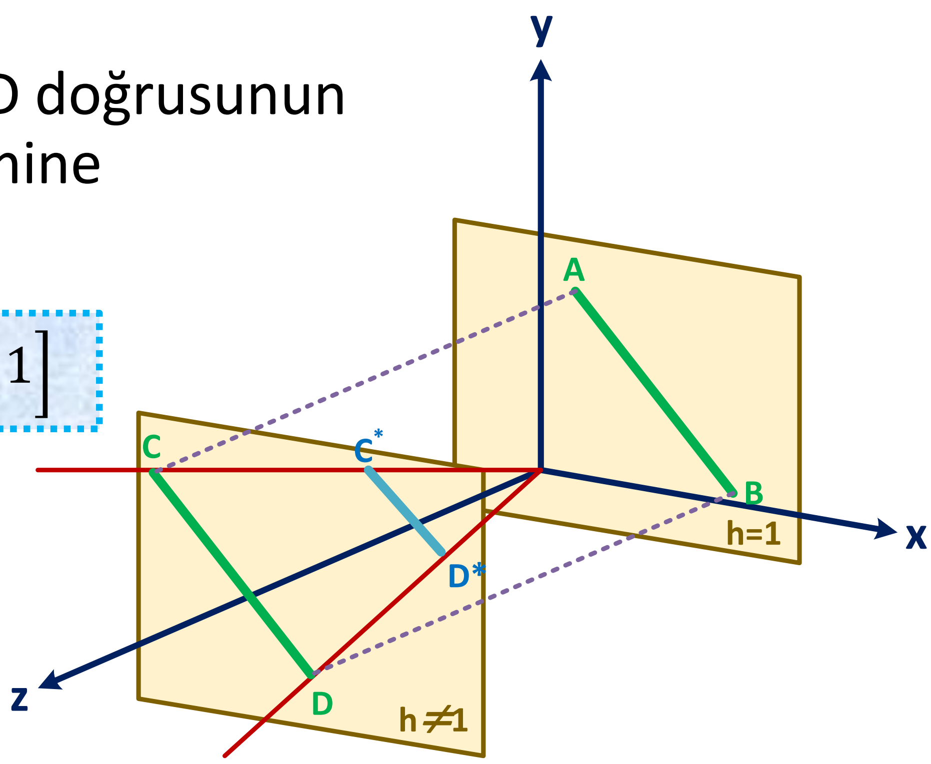
$$[x \quad y \quad 1] = [hx \quad hy \quad h]$$

$$[x \quad y \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad (px + qy + 1)] = \begin{bmatrix} \frac{x}{px+qy+1} & \frac{y}{px+qy+1} & 1 \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler…

- $x = hx, y = hy$ ve $h = px + qy + 1$
- Homojen koordinat sisteminde bu vektör, 3B uzayda $h = px + qy + 1$ düzleminde bir nokta $(h \neq 1)$
- $h = 1$ düzlemindeki karşılığı, CD doğrusunun $h \neq 1$ düzleminden $h = 1$ düzlemine projeksiyonu

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = \left[\frac{x}{px+qy+1} \quad \frac{y}{px+qy+1} \quad 1\right]$$



2B Dönüşümler…

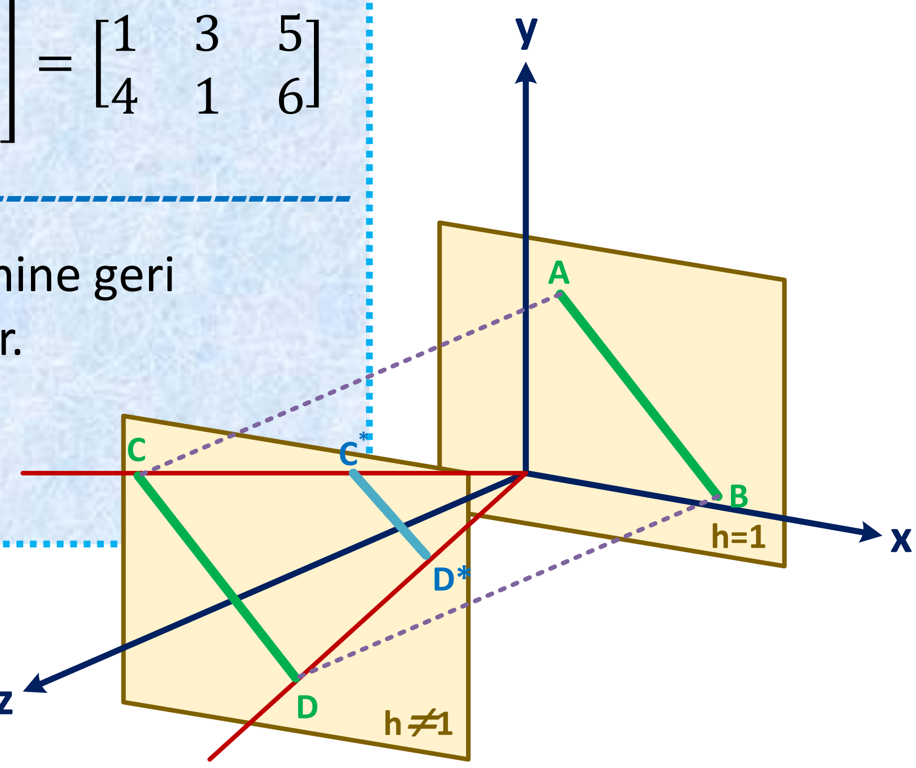
➢ **ÖRNEK:** $A = [1 \quad 3 \quad 1], B = [4 \quad 1 \quad 1]$ noktalarına $p = q = 1$ olacak şekilde dönüşüm uygulandığında *A* ve *B* noktalarının yeni koordinatları ne olur?

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

A^* ve B^* noktalarını $h = 1$ fiziksel düzlemine geri projeksiyonu dönüştürülmüş noktayı verir.

$$C^* = [1 \quad 3 \quad 5] = [{}^{1}/_{5} \quad {}^{3}/_{5} \quad 1]$$

$$D^* = [4 \quad 1 \quad 6] = [{}^{4}/_{6} \quad {}^{1}/_{6} \quad 1]$$



2B Dönüşümler…

➢ Genel Ölçekleme

- $s \neq 1$ olması durumu,
  - Konum vektörünün tüm elemanlarının eşit olarak ölçeklenmesi

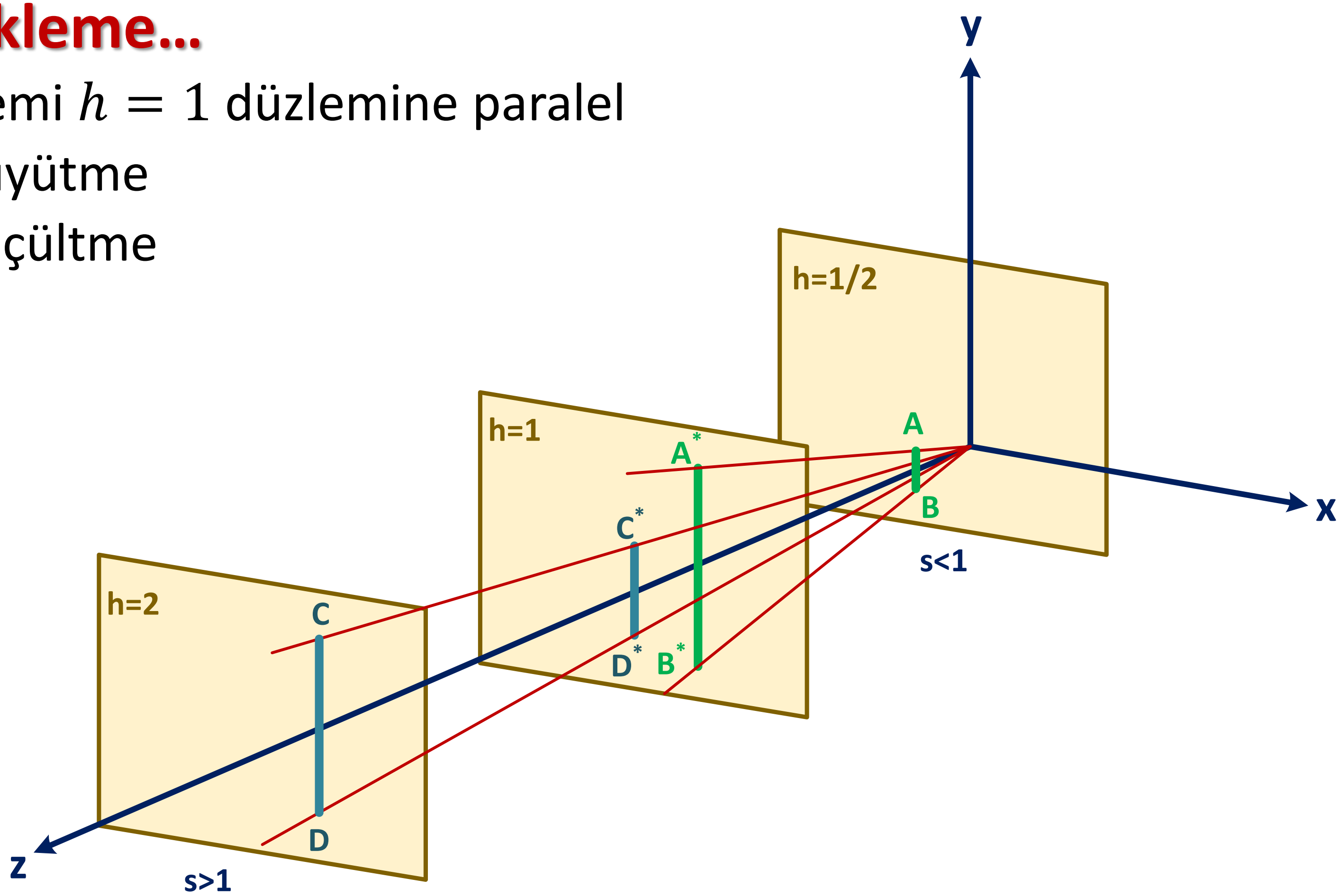
$$[X^*] = [X].[T] = [x \quad y \quad 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \quad y \quad s] = [x^* \quad y^* \quad 1]$$

$$x^* = {}^{x}/_{s}\,, y^* = {}^{y}/_{s}$$

2B Dönüşümler…

➢ Genel Ölçekleme…

- ➢ $h \neq 1$ düzlemi $h = 1$ düzlemine paralel
- ➢ $s < 1 \Rightarrow$ Büyütme
- ➢ $s > 1 \Rightarrow$ Küçültme



KAYNAKLAR

➢ Rogers, D.F., Adams, J.A., Mathematical Elements for Computer Graphics, First Edition.