BÖLÜM 2. AYRIK ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER

Pek çok fiziksel sistem, doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) sistem biçiminde modellenebilir. Bu bölümde ayrık zamanlı bir sistemin giriş ve çıkış ilişkisini belirleyen birbirinden farklı eşdeğer yöntemler tanıtılacaktır. Sistemlerin davranışları, birim impuls cevabı, fark denklemleri ve durum denklemleri ile karakterize edilecektir. Her modelin belirli hesaplamalar ve işlemler için kendine özgü avantajları vardır.

2.1 DZD sistemlerin giriş-çıkış ilişkisinin birim impuls cevabı yöntemiyle belirlenmesi

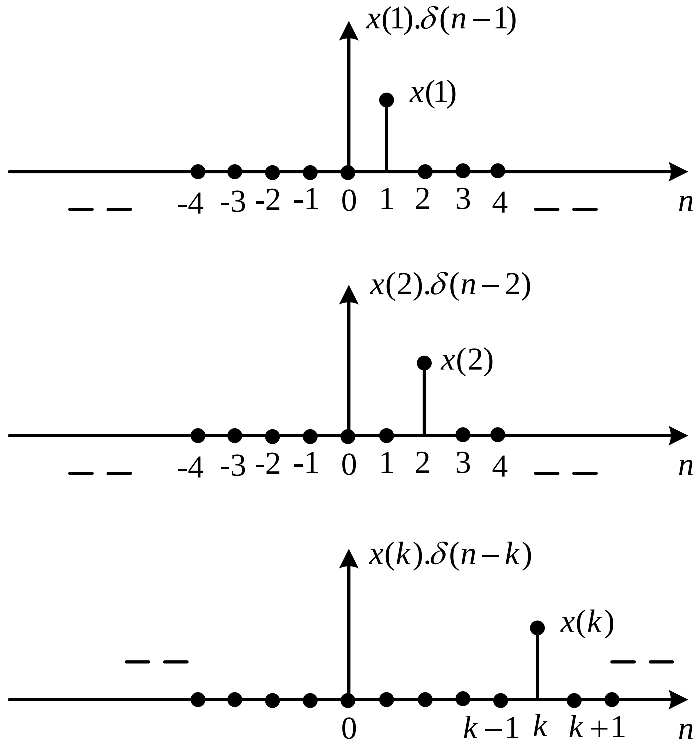
Giriş birim impuls dizisi $\delta(n)$ ise, buna karşı düşen sistem çıkışı impuls cevabı olarak adlandırılır ve $h(n)$ ile gösterilir. Ayrık zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış bağıntısını, birim impuls cevabı yardımıyla belirlemede ilk adım, önceki bölümde verilmiş olan denklemin bir daha yazılmasıdır.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k) \tag{2.1}$$

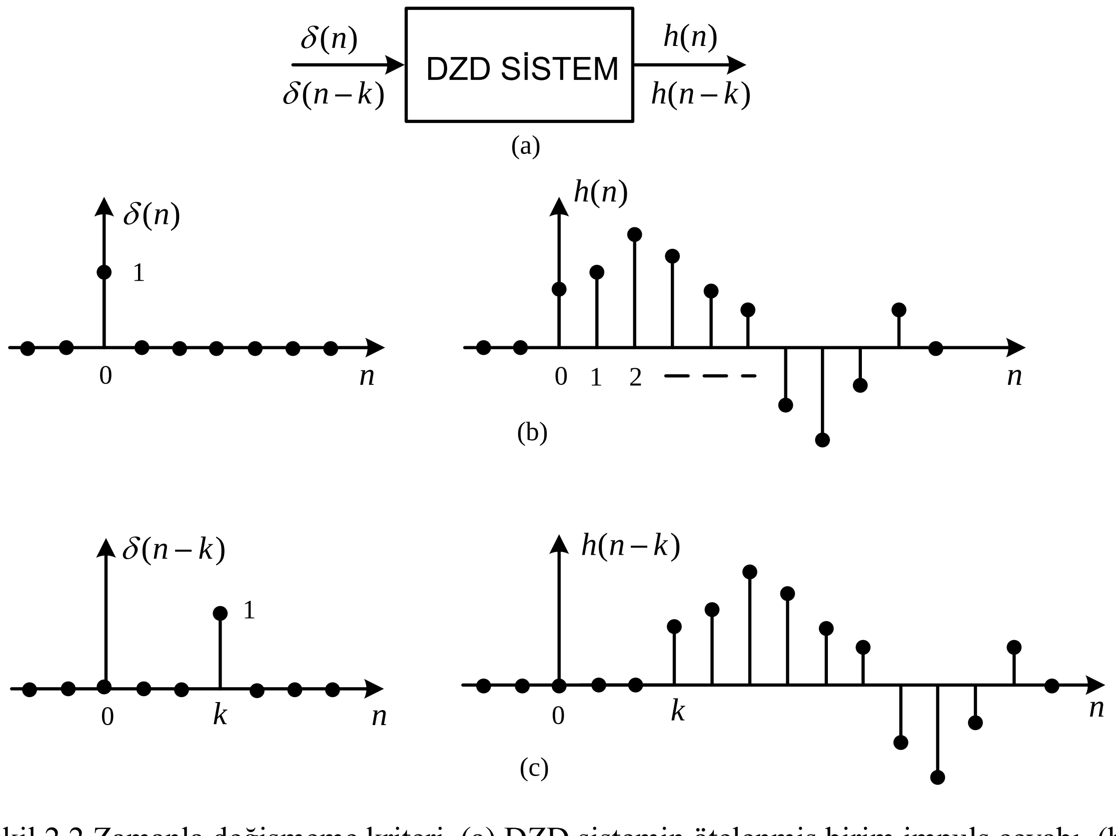
Şekil 2.1 de gösterildiği gibi, k ncı impuls olan $\delta(n-k)$ nın katsayısı, $x(n)$ dizisinin k ncı elemanı $x(k)$ dır.

DZD sistemin ötelenmiş birim impuls girişi $\delta(n-k)$ için olan çıkış dizisinin $h(n-k)$ olduğu şekil 2.2 de gösterilmiştir. Bu durum sistemin zamanla değişmeme özelliğinin bir sonucudur. Ayrıca sistemin doğrusallık özelliğinin ve (2.1) ifadesinin kullanılmasıyla, $x(n)$ nin cevabı $y(n)$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).T\left[\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) \tag{2.2}$$



Şekil 2.1 $x(n)$ dizisinin impuls bileşenleri ile gösterilmesi



Şekil 2.2 Zamanla değişmeme kriteri, (a) DZD sistemin ötelenmiş birim impuls cevabı, (b) $\delta(n)$ için DZD sistemin cevabı, (c) $\delta(n-k)$ için aynı sistemin cevabı

(2.2) bağıntısı ayrık zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış ilişkisine ait konvolüsyon toplamıdır. Buna göre, impuls cevabı $h(n)$ in sistemin giriş çıkış ilişkisini tamamen karakterize ettiğini görmekteyiz. Öyleyse, sistemin kararlılığı ve nedenselliğine ilişkin gerekli ve yeterli koşulların da birim impuls cevabından bulunabilmesi gerekir.

Konvolüsyon toplamı ve özellikleri

$x(n)$ sistemin girişi ve $h(n)$ impuls cevabı olduğuna göre çıkış dizisi $y(n)$, (2.2) ifadesi ile hesaplanır. $y(n)$ dizisine ‘ $x(n)$ ve $h(n)$ ’ in konvolüsyonu denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{2.3}$$

Konvolüsyon toplamı için aşağıdaki ilişkilerin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Değişme özelliği

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{2.4}$$

bağıntısı ile verilen bu özellik, (2.2) denkleminde değişken dönüşümü ile gösterilebilir. O halde çıkış dizisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k) \tag{2.5}$$

Dağılma özelliği

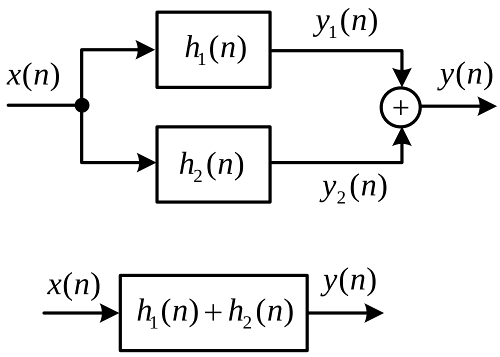
$$x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \tag{2.6}$$

Bu özellik paralel bağlı iki DZD sistemin birim impuls cevabının bulunmasında yararlıdır (şekil 2.3). Şöyle ki;

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \{x(n) * h_1(n)\} + \{x(n) * h_2(n)\} = x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} \tag{2.7}$$

şeklinde bulunur ve sistemlerin paralel bağlanmasından oluşan eşdeğer tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki gibi olur.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \tag{2.8}$$



Şekil 2.3 Paralel bağlı iki DZD sistemin eşdeğeri

Birleşme özelliği

$$x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\} = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) \tag{2.9}$$

Bu özellik seri bağlı DZD sistemlerin birim impuls cevabının bulunmasında kullanılır. Birinci sistemin çıkışı ikincinin girişi ise, bu iki sisteme seri ya da kaskad bağlı denir ve şekil 2.4 de gösterilir.

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n) \tag{2.10}$$

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) \tag{2.11}$$

yazılabilir. (2.10), (2.11) bağıntılarından ve birleşme özelliğinden aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$y(n) = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\} \tag{2.12}$$

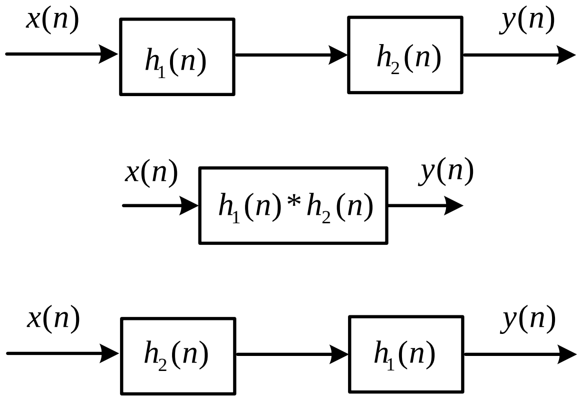
O halde seri bağlı sisteme eşdeğer, tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki şekilde olur.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \tag{2.13}$$

Değişim özelliği nedeniyle aşağıdaki ifade yazılabildiğinden

$$h(n) = h_2(n) * h_1(n) \tag{2.14}$$

seri bağlı sistemlerin sıra değiştirilmesinin, çıkış dizisi $y(n)$ i değiştirmediği görülmektedir.



Şekil 2.4 Seri bağlı iki DZD sistemin eşdeğeri

<u>Örnek 2.1</u>

Şekil 2.5 de gösterildiği gibi giriş işareti birim basamak dizisi ve sistemin birim impuls cevabı sağ taraflı üstel bir dizi olduğunda, konvolüsyon toplamına örnek olarak, DZD bir sistemin çıkışını hesaplayınız.

$$x(n) = u(n)$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

<u>Çözüm 2.1</u> Sistem çıkışı $y(n)$, konvolüsyon toplamı yardımıyla bulunabilir.

<u>Hatırlatma:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots\dots + a^{n-1} + \dots\dots$$

Geometrik serisinin n nci mertebeden kısmi toplamı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots\dots + a^{n-1}$$

Diğer taraftan,

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} a^k = 1 + a + a^2 + ...+ a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1}$ $(a \neq 1)$ özdeşliğinden ilk n terim için aşağıdaki ifade yazılır.

$|a| \geq 1$ için $\lim_{n\to\infty} a^n \to \infty$ olduğundan geometrik seri ıraksak olur.

$|a| < 1$ için $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ olduğundan sonuç olarak aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$$

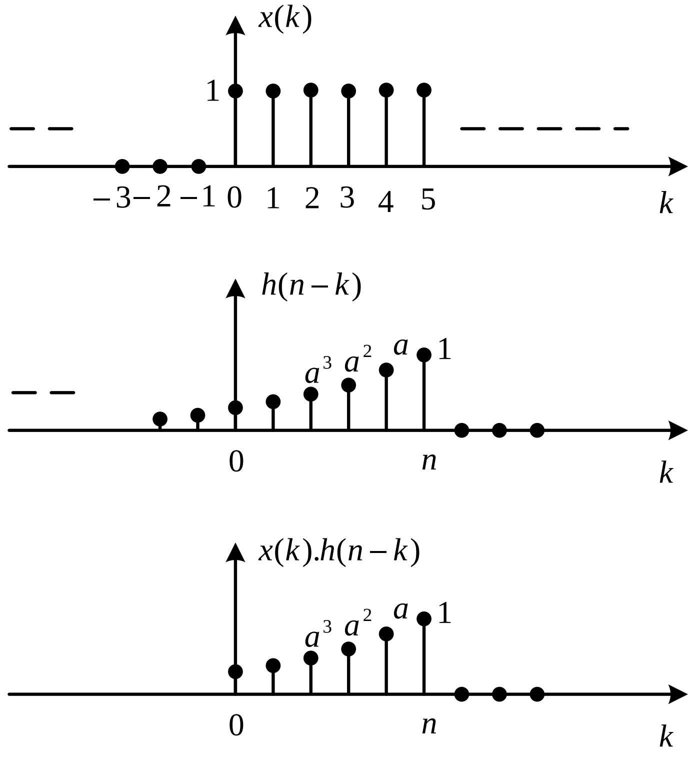
O halde $|a| < 1$ için seri yakınsak olup, tam ve yaklaşık ifadeler aşağıdaki gibi verilir.

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + ... = \frac{1}{1-a}$ (İlk n terim için yaklaşık ifade)

$\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... = \frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} = \frac{a^{-n}-1}{a^{-1}-1}$ (İlk n terim için tam ifade)

$\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... = \frac{1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{a-1}$ (İlk n terim için yaklaşık ifade) veya

$\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... = \frac{-1}{a^{-1}-1} = \frac{a}{a-1}$ (İlk n terim için yaklaşık ifade)



Şekil 2.5 Örnek 2.1 deki konvolüsyon toplamının grafiksel gösterimi

Şimdi sorumuzun çözümüne devam edelim.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k).a^{n-k}.u(n-k) = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a^{n-k} u(n-k)\right\} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\right\} u(n) \\ &= a^n \left\{\sum_{k=0}^{n} a^{-k}\right\} u(n) = a^n \cdot \left\{\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}\right\} u(n) = \left\{\frac{a^{(n+1)}-1}{a-1}\right\} u(n) = \left\{\frac{1-a^{(n+1)}}{1-a}\right\} u(n) \\ &= \begin{cases} 0 & n<0 \quad için \\ 1+a+a^2+.....+a^n & n \geq 0 \quad için \end{cases} \end{aligned}$$

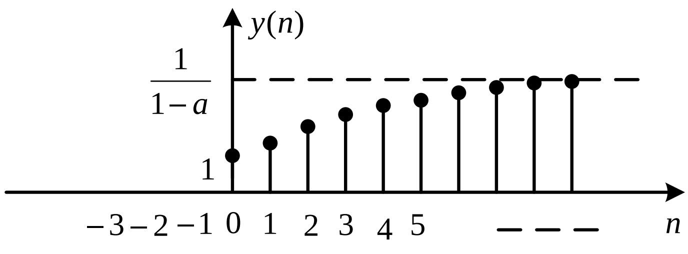
$0<a<1$, yani $|a|<1$ olduğu için, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ olur. Bu durumda $y(n)$ çıkışı, şekil 2.6 da gösterildiği gibi $\frac{1}{1-a}$ şeklinde elde edilmiş olur. Bu sonuçtan görülüyor ki; a limitte sıfır(0)a yaklaşıyor iken, $\frac{1}{1-a}$ limitte bir(1) e yaklaşmaktadır. Yine benzer şekilde a limitte bir(1)e yaklaşıyor iken, $\frac{1}{1-a}$ limitte sonsuz(∞)a yaklaşmaktadır. Bu durumu uygulamalı olarak gösterecek olursak aşağıdakileri yazabiliriz.

$a=\frac{1}{2}$ ise, $\frac{1}{1-a}=2$ olur.

$a=\frac{1}{5}$ ise, $\frac{1}{1-a}=\frac{5}{4}=1.25$ olur.

$a=\frac{1}{10}$ ise, $\frac{1}{1-a}=\frac{10}{9}=1.11$ olur.

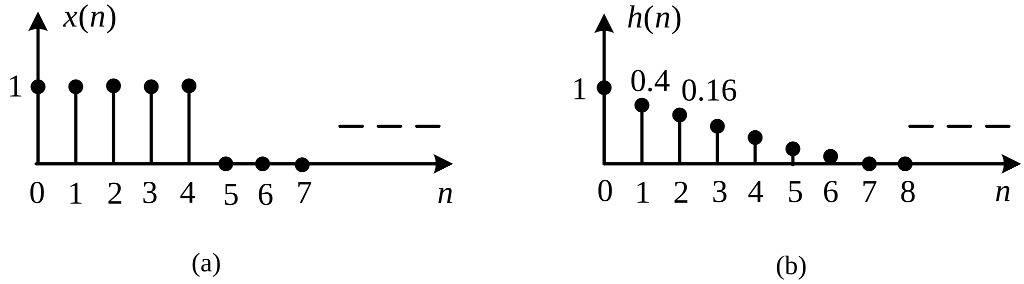
$a=\frac{1}{100}$ ise, $\frac{1}{1-a}=\frac{100}{99}=1.01$ olur.



Şekil 2.6 Örnek 2.1 de $0<a<1$ için sistem çıkışı, $y(n)=u(n)*(a^n u(n))$

Örnek 2.2

$x(n) = u(n) - u(n-5)$ olarak verilen dikdörtgen impuls şeklinde bir dizi, birim impuls cevabı $h(n) = 0.4^n u(n)$ olarak verilen DZD bir sisteme giriş olarak uygulanmaktadır. Çıkış dizisini bulunuz.



Şekil 2.7 Örnek 2.2 için, (a) sistem girişi, (b) sistem impuls cevabı

Çözüm 2.2

Giriş dizisi $x(n)$ ve birim impuls cevabı $h(n)$ şekil 2.7 de gösterilmektedir. (2.2) ifadesi kullanılarak,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{4} \overbrace{(1)}^{x(k)=u(k)-u(k-5)} \underbrace{.(0.4)^{n-k}.u(n-k)}_{h(n-k)} = (0.4)^n \sum_{k=0}^{4} (0.4)^{-k}.u(n-k) \tag{2.15}$$

(2.15) ifadesinde verilen toplam, $u(n-k)$ terimi dışında bir geometrik seri toplamına benzemektedir. $u(n-k)$ için değerlendirilmesi gereken üç farklı bölge vardır.

(i) $n < 0$: Bu durumda $0 \le k \le 4$ için $u(n-k) = 0$ olmaktadır. Bu durumda (2.15) ifadesinden $y(n) = 0$ bulunur. Bu aralık için $x(k)$ ve $h(n-k)$ nın sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler örtüşmemektedir.

(ii) $0 \le n \le 4$: Bu durumda $0 \le k \le n$ için $u(n-k) = 1$ olmaktadır. (2.15) ifadesinden,

$$y(n) = (0.4)^n \sum_{k=0}^{n} (0.4)^{-k} = (0.4)^n \sum_{k=0}^{n} \left[(0.4)^{-1}\right]^k$$
$$= (0.4)^n \frac{1-(0.4)^{-(n+1)}}{1-1/0.4} = \frac{10}{6}\left[1-(0.4)^{n+1}\right] \qquad (*1)$$

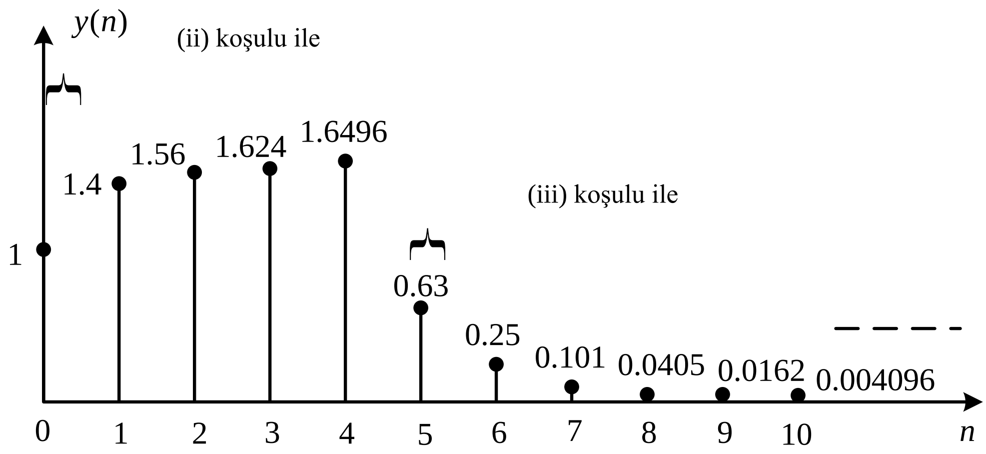
Bu aralık için ise, $x(k)$ ve $h(n-k)$ nın sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler kısmi olarak örtüşmektedir.

(iii) $n \geq 5$: Bu durumda $0 \leq k \leq 4$ için $u(n-k)=1$ olmaktadır. Bu durumda,

$$y(n) = (0.4)^n \sum_{k=0}^{4} (0.4)^{-k} = (0.4)^n \frac{1-(0.4)^{-5}}{1-1/0.4} = \frac{10}{6}(0.4)^{n-4}\left[1-(0.4)^5\right] \qquad (*2)$$

Bu aralık için ise, $x(k)$ ve $h(n-k)$ nın sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler sürekli olarak örtüşmektedirler.

Toplam çıkış aşağıdaki şekil 2.8 de verilmiştir.



Şekil 2.8 Örnek 2.2 için sistem çıkışı

Burada (*1) denklemi ile,

$y(0)=1$, $y(1)=1.4$, $y(2)=1.56$, $y(3)=1.624$, $y(4)=1.6496$

ve (*2) denklemi ile de,

$y(5)=0.63$, $y(6)=0.25$, $y(7)=0.101$, $y(8)=0.0405$, $y(9)=0.0162$, $y(10)=0.004096$

sonuçları elde edilir.

Birim impuls cevabı ve kararlılık

Tanım uyarınca her sınırlı giriş işareti yine sınırlı bir çıkış sağlıyorsa, DZD sistem kararlıdır. Buna göre M sonlu bir sayı olmak üzere, tüm n ' ler için,

$$|x(n)| < M \tag{2.16}$$

olan bir giriş dizisi, birim impuls cevabı $h(n)$ olarak verilen sisteme uygulanırsa, çıkışın genliği aşağıdaki gibi bulunur.

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)\right| \tag{2.17}$$

Sayıların toplamının mutlak değeri, tek tek mutlak değerleri toplamından büyük olamaz. Bu durumu ifade etmek için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$|y(n)| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|.|x(n-k)| \tag{2.18}$$

Giriş dizisi sonlu olduğundan, tüm k ve n ' ler için,

$$|x(n-k)| < M \tag{2.19}$$

olur. Bunu (2.18) denkleminde yerine koyacak olursak, tüm n ' ler için,

$$|y(n)| \le M.\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda $h(n)$ in mutlak değerleri toplamı sonlu, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{2.21}$$

olursa, sistem çıkışı $y(n)$ nin genliği de sonlu olacaktır. Bu durumda (2.20) ve (2.21) denklemlerinden, tüm n ’ ler için, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$|y(n)| < \infty \tag{2.22}$$

Demek ki, DZD bir sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart, (2.21) denklemindeki koşulun sağlanmasıdır. Bu şartı sağlamayan DZD sistemler kararsızdır.

Örnek 2.3

DZD sistemin impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$$h(n) = a^n u(n) \tag{2.23}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \tag{2.24}$$

elde edilir. Eğer $|a| < 1$ ise (2.24) toplamı yakınsar. Buradan aşağıdaki sonuca gelinir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = \frac{1}{1-|a|} \tag{2.25}$$

O halde sistem kararlıdır. Ancak $|a| \geq 1$ olursa bu toplam yakınsamaz ve sistem kararsız olur.

Örnek 2.4

Sadece zamanda öteleme sağlayan bir ayrık zamanlı sistemi ele alalım.

$$h(n) = \delta(n - n_0) \tag{2.26}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n - n_0)| = 1 \tag{2.27}$$

Birim impuls cevabı (2.26) denklemi ile verilen DZD sistem kararlıdır.

Örnek 2.5

Birim impuls cevabı birim basamak dizisi olan DZD bir sistem ele alalım.

$$h(n) = u(n) \tag{2.28}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| \to \infty \tag{2.29}$$

Bu durumda söz konusu sistem kararsız olur.

Birim impuls cevabı ve nedensellik

Nedensel bir sistemin çıkışı, o andaki ve geçmişteki giriş işaretlerine bağımlıdır. (2.2) denklemindeki konvolüsyon toplamı kullanılırsa, DZD bir sistemin birim impuls cevabı ile nedensellik arasındaki ilişki kolayca görülebilir. Burada nedenselliğin geçerli olabilmesi için, $y(n)$ çıkış işaretinin hesaplanmasında $x(k)$ $k > n$ ($x(k)$ nın katsayısı $h(n-k)$ olduğundan $\forall\ n < k$ için $h(n-k) = 0$ olmalıdır) terimlerinin yer almaması gerekmektedir. Bu koşul aşağıda verilen özelliğe indirgenebilir.

$$h(n) = 0\,,\ \forall\ n < 0 \tag{2.30}$$

(2.30) koşulu altında konvolüsyon toplamı aşağıda verilen şekilde basitleşecektir.

$$y(n) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l).x(n-l) \tag{2.31}$$

Açıklayıcı örnek

$y(n) = \sum_{k=-2}^{2} x(k).h(n-k)$ olduğunda $y(1)$ i yazalım.

$$y(1) = x(-2).\overbrace{h(1-(-2))}^{h(3)} + x(-1).\overbrace{h(1-(-1))}^{h(2)} + x(0).\overbrace{h(1-0)}^{h(1)} + x(1).\overbrace{h(1-1)}^{h(0)} + x(2).\overbrace{h(1-2)}^{h(-1)}$$

Nedensellik tanımından dolayı $x(2)$ teriminin yukarıdaki ifadede yer almaması gerekir. Bu durum ise $h(1-2)$ nin sıfır olmasını gerektirir. Yani $\forall\ n < k$ için $h(n-k) = 0$ olması gerekir. Bu koşul basitleştirildiğinde ise $\forall\ n < 0$ için $h(n) = 0$ yazılabilir.

Sonlu ve sonsuz uzunluklu impuls cevaplı sistemler

DZD sistemler birim impuls cevaplarının sonlu ya da sonsuz uzunluklu olmasına göre sınıflandırılabilirler. Sonlu uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler, Sonlu İmpuls Cevaplı(Finite Impuls Response-FIR), sonsuz uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler Sonsuz İmpuls Cevaplı(Infinite Impuls Response-IIR) sistemler olarak adlandırılır. Bir FIR sistem, belirli sonlu bir zaman aralığı dışında sıfır olan bir impuls cevabına sahiptir ve giriş-çıkış ilişkisini belirten konvolüsyon toplamı aşağıdaki şekilde verilir.

$n > N_1$ ve $n < -N_2$ için $h(n) = 0$

$$y(n) = \sum_{k=-N_2}^{N_1} h(k).x(n-k) \tag{2.32}$$

Eğer sistemin nedensel olduğu bilgisi de verilirse,

$n < 0$ ve $n > N_1$ için $h(n) = 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_1} h(k).x(n-k) \tag{2.33}$$

IIR DZD sistem için ise, impuls cevabı sonsuz uzunluklu olacaktır ve giriş-çıkış ilişkisi (2.2) denkleminde verilen genel sonsuz uzunluklu konvolüsyon toplamı ile ifade edilecektir.

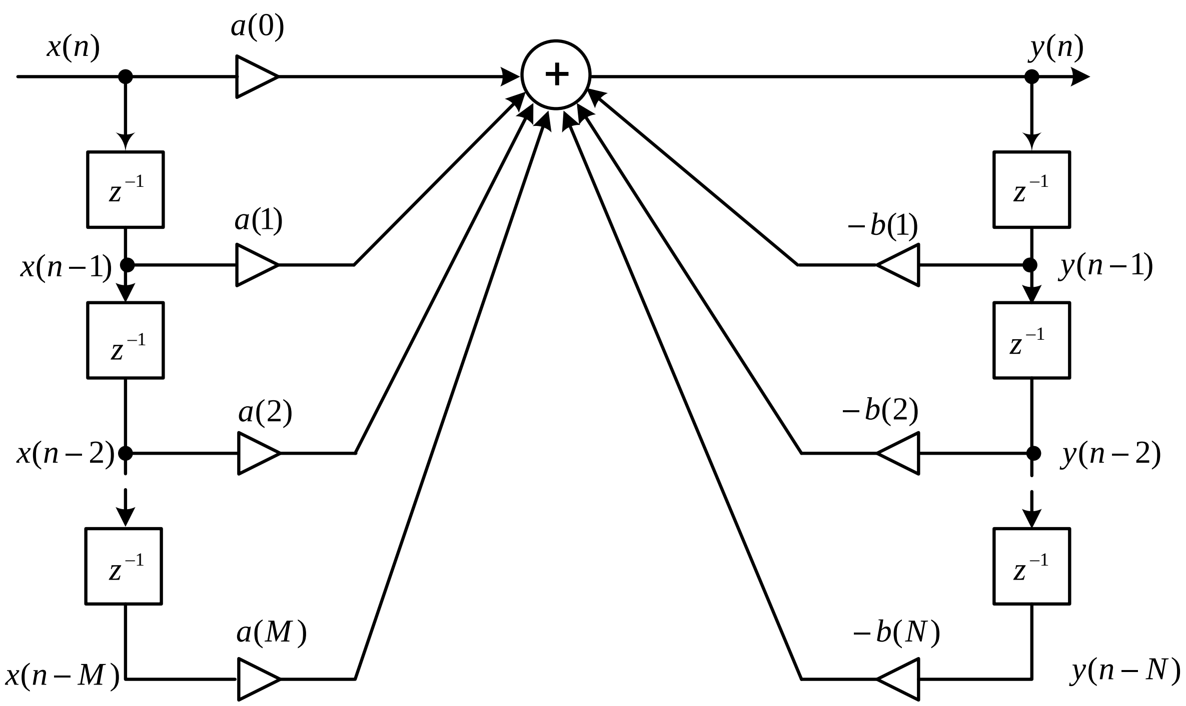
2.2 Fark denklemleriyle belirlenen sistemler

Bir DZD sisteminin giriş-çıkış ilişkisinin, birim impuls cevabı $h(n)$ ile tamamen belirlendiğini gördük. Böylece konvolüsyon toplamı, birim impuls cevabı bilinen bir sistemin gerçekleştirilmesi için bir yöntem olacaktır. Denklem (2.32) den görüldüğü gibi, FIR sistemler için bu çeşit bir gerçekleştirme, sınırlı sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. Böylece bir FIR sistem doğrudan konvolüsyon toplamı ile gerçeklenebilir. Ancak sistem IIR ise, sistemin konvolüsyon toplamı kullanılarak gerçekleştirilmesi pratik olarak imkansızdır. Böyle bir gerçekleştirme sonsuz sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. IIR sistemleri gerçekleştirmek, fark denklemleriyle ifade edilebilen ayrık zamanlı sistemler ile mümkündür. DZD sistemlerin bir alt sınıfı olan bu sistemlerin giriş-çıkış ilişkisi, sabit katsayılı bir fark denklemi ile ifade edilir.

$$\sum_{k=0}^{N} b_k.y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k.x(n-k) \tag{2.34}$$

Burada $x(n)$ ve $y(n)$ sistemin giriş ve çıkış dizilerini a_k ve b_k ise sabit katsayıları belirtmektedir. Maksimum (N, M) bu ayrık zamanlı sistemin ve fark denkleminin derecesi olarak adlandırılmaktadır. Bu denklemi kullanarak $y(n)$ çıkış dizisi, özyineli (yinelemeli-recursive) bir şekilde hesaplanabilir. Bunun için sistemin nedensel olduğunu ve katsayılarının $b_0 = 1$ olacak şekilde normalize edildiğini varsayalım. Bu durumda (2.34) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k.x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k.y(n-k) \tag{2.35}$$



Şekil 2.9 (2.35) deki fark denkleminin gerçekleştirilmesi. Birim gecikme z dönüşümünde karşılığı olan z^{-1} operatörü ile gösterilmiştir.

Böylece eğer $x(n)$ ve başlangıç koşulları olan $y(n_0 - 1)$, $y(n_0 - 2)$,………..…, $y(n_0 - N)$ biliniyorsa, her $n \geq 0$ için $y(n)$ çıkışı hesaplanabilir. (2.35) deki fark denklemi şekil 2.9 da gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir. Burada toplama, çarpma ve z^{-1} ile gösterilen birim gecikme elemanları, fark denklemiyle belirlenen sistemin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır.

Sistem cevabının hesaplanması

Bu bölümdeki amacımız, $n \geq 0$ için belirli bir giriş $x(n)$ işareti ve bir dizi başlangıç koşulları verildiğinde, $n \geq 0$ için $y(n)$ çıkış dizisini bulmak olacaktır. Sabit katsayılı fark denklemlerinin çözümünün hesaplanmasında, sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümüne benzer bir yöntem izleyeceğiz. (2.34) denklemi ile belirtilen ayrık zamanlı sistemin çıkışı, birbirinden bağımsız olarak hesaplanıp, toplam cevabı oluşturmak üzere bir araya getirilen iki çıkıştan oluşacaktır. Bu çıkışlardan biri sadece ilk koşullara, diğeri ise sadece giriş işaretine bağlı olacaktır. İlk koşullara bağlı olan cevap, sistemin doğal cevabı olarak adlandırılacak ve y_d ile gösterilecektir. Giriş nedeniyle oluşan çıkış ise sistemin zorlanmış cevabı olarak adlandırılacak ve y_z olarak gösterilecektir. Doğal cevap sıfır giriş için sistemin çıkışı, zorlanmış cevap ise sıfır başlangıç koşulları için sistem çıkışı olacaktır. Sıfır başlangıç koşullarına sahip olan sistem, sistemin depolanmış herhangi bir enerjisi ya da belleği olmadığı için durgun olarak nitelendirilir. Doğal cevap, sistemin sıfırdan farklı ilk koşullarla nitelenen depolanmış bir enerjiyi ya da geçmişe yönelik bilgiyi nasıl kullandığını gösterir. Zorlanmış cevap ise, durgun sistem için giriş işaretinin zorladığı çıkışı belirtir.

Doğal çözüm(cevap)

$y_d(n)$, $x(n) = 0$ için (2.34) denkleminin çözümüdür. Böylece $y_d(n)$ aşağıda verilen homojen fark denkleminin çözümü olmaktadır.

$$\sum_{k=0}^{N} b_k . y(n-k) = 0 \qquad (2.36)$$

Doğal çözümü bulmak için, bu çözümün λ^n biçiminde olduğu varsayılır. Bu biçimin (2.34) denkleminde yerine koyulmasıyla aşağıdaki koşul elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{N} b_k.\lambda^{n-k} = \lambda^{n-N}(b_0\lambda^N + b_1\lambda^{N-1} + b_2\lambda^{N-2} + ...+ b_{N-1}\lambda + b_N) = 0 \tag{2.37}$$

$\sum_{k=0}^{N} b_k.\lambda^{n-k}$ polinomu ayrık zamanlı sistemimizin karakteristik polinomu olarak adlandırılır.

Bu polinomun köklerini, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...,\lambda_N$ olarak adlandıralım. Eğer bu köklerin her biri ayrı ise, doğal çözüm şu şekilde oluşacaktır.

$$y_d(n) = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n + C_3.\lambda_3^n + ... + C_N.\lambda_N^n \tag{2.38}$$

Buradaki $C_1, C_2, C_3, ...,C_N$ katsayıları, başlangıç koşulları kullanılarak bulunacaktır. Doğal cevaptaki her terim, karşılık gelen kökün gerçel, sanal ya da karmaşık değerli olmasına göre farklılık gösterecektir. Gerçel kökler, gerçel üstel cevaplara, sanal kökler, sinüzoidal cevaplara ve karmaşık değerli kökler ise üstel sönümlü sinüzoidal cevaplara neden olacaktır.

Eğer karakteristik denklem katlı köklere sahipse, doğal çözüm değişikliğe uğrayacaktır. λ_j kökü p katlı ise, doğal çözümde bu köke ilişkin p ayrı terim olacaktır. Bu terimler, $\lambda_j^n, n\lambda_j^n, n^2\lambda_j^n,........, n^{p-1}\lambda_j^n$ fonksiyonlarıdır.

<u>Örnek 2.6</u>

Başlangıç koşulları $y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 2$ olarak verilen sistemin fark denklemi aşağıdaki gibi verildiğine göre $n \geq 0$ için sisteme ait $y_d(n) = \lambda^n$ doğal çözümü bulunuz.

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n) \tag{2.39}$$

Çözüm 2.6

Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} - 3\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \lambda^{n-2}(\lambda + 1).(\lambda - 3) = 0$$

Böylece karakteristik polinomun kökleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 3$ olur. Bu durumda doğal çözüm

$$y_d(n) = C_1.(-1)^n + C_2.(3)^n \quad (2.40)$$

şeklinde yazılır. Burada C_1 ve C_2 katsayıları $y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 2$ önkoşullarını sağlayacak şekilde seçilir. (2.39) denklemi, $x(n) = 0$ olmak suretiyle $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir.

$$y(0) = 2y(-1) + 3y(-2) = 2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$$

$$y(1) = 2y(0) + 3y(-1) = 2 \times 10 + 3 \times 2 = 26$$

Öte yandan (2.40) denklemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$y(0) = C_1 + C_2 = 10$$

$$y(1) = -C_1 + 3C_2 = 26$$

Buradan çözüm olarak $C_1 = 1$ ve $C_2 = 9$ bulunur. Bulunan katsayıları (2.40) denkleminde yerine koyduğumuzda, doğal çözüm $n \geq 0$ için aşağıdaki gibi olur.

$$y_d(n) = 1(-1)^n + 9(3)^n$$

Zorlanmış çözüm(cevap)

(2.34) denklemi için zorlanmış çözüm, ilk koşulları sıfır varsayarak verilen giriş işareti için bulunacak çözümdür. Zorlanmış çözüm(cevap) iki bölümden oluşacaktır; doğal çözüm (cevap) ile aynı biçimde bir çözüm ve bir özel çözüm.

Özel çözüm $y_ö(n)$, verilen giriş işareti için fark denkleminin herhangi bir çözümünü göstermektedir. Özel çözümün bulunmasında uygulanacak yöntem, özel çözümün giriş işaretiyle aynı genel biçimde olacağı varsayımıdır. Böylece eğer $x(n)$ sabit ise, $y_ö(n)$ de sabit, eğer $x(n)$ bir sinüzoid ise, $y_ö(n)$ de aynı frekanslı bir sinüzoid olacaktır. Eğer giriş işareti doğal çözüm(cevap)de yer alan terimlerle aynı biçime sahipse, özel çözüm farklı bir yol izlenerek bulunur. Bunun için doğal çözümde yer alan terimlerden bağımsız bir özel çözüm bulmamız gerekir. Karakteristik denklemde katlı kökler olduğunda, doğal çözümde yapılan değişikliğe benzer bir yol izlenir. Özel çözümün genel biçimi, n^m gibi bir fonksiyonla çarpılır. m doğal cevapta yer almayan bir terimi sağlayacak en küçük değer olarak seçilir. Zorlanmış çözüm, özel çözüm ve doğal çözüm genel formunun toplanmasıyla oluşur. Doğal çözümdeki katsayılar bu kez, zorlanmış çözümün sıfır ilk koşulları sağlayacağı şekilde seçilir.

Örnek 2.7

Örnek 2.6 da verilen sistemin $n \geq 0$ için $y_z(n)$ zorlanmış çözümünü, $x(n) = 10u(n)$ girişi için belirleyiniz.

Çözüm 2.7

Zorlanmış çözüm $y_z(n) = y_d(n) + y_ö(n)$ biçiminde bulunacaktır. Doğal çözüm $y_d(n)$ in genel formu örnek 2.6 da $y_d(n) = C_1.(-1)^n + C_2.(3)^n$ olarak bulunmuştu. Şimdi bir özel çözüm bulmaya çalışalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y_ö(n) = Ku(n)$ olarak alınıp, sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda verilmektedir.

$$Ku(n) - 2Ku(n-1) - 3Ku(n-2) = 10u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 2$ için değerlendirirsek K yı bulabiliriz.

$$K - 2K - 3K = 10 \quad \Rightarrow \quad K = -10/4 = -2.5$$

Böylece $y_{ö}(n) = -2.5u(n)$ olarak bulunur. Bu durumda zorlanmış çözümün genel formu ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_z(n) = C_1.(-1)^n + C_2.(3)^n - 2.5u(n), \qquad n \geq 0 \tag{2.41}$$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları, sıfır($y(-1) = 0$ ve $y(-2) = 0$) ilk koşullarını sağlayacak şekilde seçilir. (2.39) denklemi, $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir.

$$y(0) = 2\overbrace{y(-1)}^{0} + 3\overbrace{y(-2)}^{0} + 10 = 0 + 0 + 10 = 10$$
$$y(1) = 2\underbrace{y(0)}_{10} + 3\underbrace{y(-1)}_{0} + 10 = 20 + 10 = 30$$

Öte yandan (2.41) denklemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$y(0) = C_1 + C_2 - 2.5 = 10$$
$$y(1) = -C_1 + 3C_2 - 2.5 = 30$$

Buradan çözüm olarak $C_1 = 1.375$ ve $C_2 = 11.125$ bulunur. Bulunan katsayıları (2.41) denkleminde yerine koyduğumuzda, zorlanmış çözüm $n \geq 0$ için aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_z(n) = 1.375(-1)^n + 11.125(3)^n - 2.5u(n)$$

Toplam çözüm(cevap)

Sistemin toplam çözümü ise, $n \geq 0$ için doğal çözüm ve zorlanmış çözümün toplamı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_T(n) = 2.375(-1)^n + 20.125(3)^n - 2.5u(n)$$

Örnek 2.8

Aşağıdaki fark denklemi ile verilen sistem için toplam çözümü $(y_T(n),\ \ n \geq 0)$ bulunuz. Giriş $x(n) = u(n)$ birim basamak dizisi ve başlangıç koşulu $y(-1) = 2$ dir.

$$y(n) + 0.5y(n-1) = x(n)\,, \tag{2.42}$$

Çözüm 2.8

Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\lambda^n + 0.5\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + 0.5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0.5$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = C_1(-0.5)^n$ şeklinde bulunur. Sıfır giriş için C_1 katsayısını bulalım. $y_d(n)$ yi $x(n) = 0$ ve $n = 0$ için fark denklemine yerleştirirsek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$y(0) + 0.5\underbrace{y(-1)}_{2} = 0 \qquad y(0) + 1 = 0 \quad \text{ve} \qquad y_d(0) = C_1$$

$$C_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = -(-0.5)^n$ olarak bulunmuş olur.

Zorlanmış çözümü bulalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y_ö(n) = Ku(n)$ olarak alınıp sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda verilmektedir.

$$Ku(n) + 0.5Ku(n-1) = u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 1$ için değerlendirirsek K yı bulabiliriz.

$$K + 0.5K = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{1+0.5} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Böylece $y_{ö}(n) = \frac{2}{3}u(n) = 0.67u(n)$ olarak bulunur. Bu durumda zorlanmış çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$y_z(n) = C_2(-0.5)^n + 0.67u(n)$$

Burada C_2 katsayısı sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilir. Sıfır ilk koşul için $n = 0$ da fark denklemi aşağıdaki şekilde verilir.

$$y_z(0) + 0.5 \times 0 = u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y_z(0) = 1$$

$$y_z(0) = C_2 + 0.67 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.33$$

Böylece zorlanmış cevabı aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$y_z(n) = 0.33 \times (-0.5)^n + 0.67u(n)$$

Böylece toplam çözüm, doğal ve zorlanmış çözümün toplamı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y_T(n) = -0.67 \times (-0.5)^n + 0.67u(n)$$

Birim impuls cevabının hesaplanması

Fark denklemi ile belirtilen ayrık zamanlı bir sistemin birim impuls cevabı, sistemin girişine $x(n) = \delta(n)$ girişi verilerek elde edilen zorlanmış cevaptır. Birim impuls giriş işareti için $n > 0$ olduğunda $x(n) = 0$ olacağından, özel çözüm sıfır $(y_{ö}(n) = 0)$ olacaktır. Böylece, birim impuls cevabı sadece $y_d(n)$ doğal çözümü ve sıfır başlangıç koşulları kullanılarak bulunabilir.

Örnek 2.9

Aşağıda fark denklemi verilen sistem için birim impuls cevabını bulunuz.

$$y(n) + 0.5y(n-1) = x(n)\,, \tag{2.44}$$

Çözüm 2.9

Bu sistem için doğal çözüm bir önceki örnekte aşağıdaki gibi bulunmuştu.

$$h(n) = y_d(n) = C(-0.5)^n u(n)$$

Sistemin birim impuls cevabını bulmak için $h(-1) = 0$ alınır. Bu durumda $n = 0$ için fark denklemini yazarsak,

$$h(0) + 0.5\overbrace{h(-1)}^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad h(0) = 1$$

$n = 0$ için birim impuls cevabını yazarsak C yi aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$h(0) = C(-0.5)^0 u(0) = y_d(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Buradan $h(n) = (-0.5)^n u(n)$ sonucuna ulaşırız.

Örnek 2.10

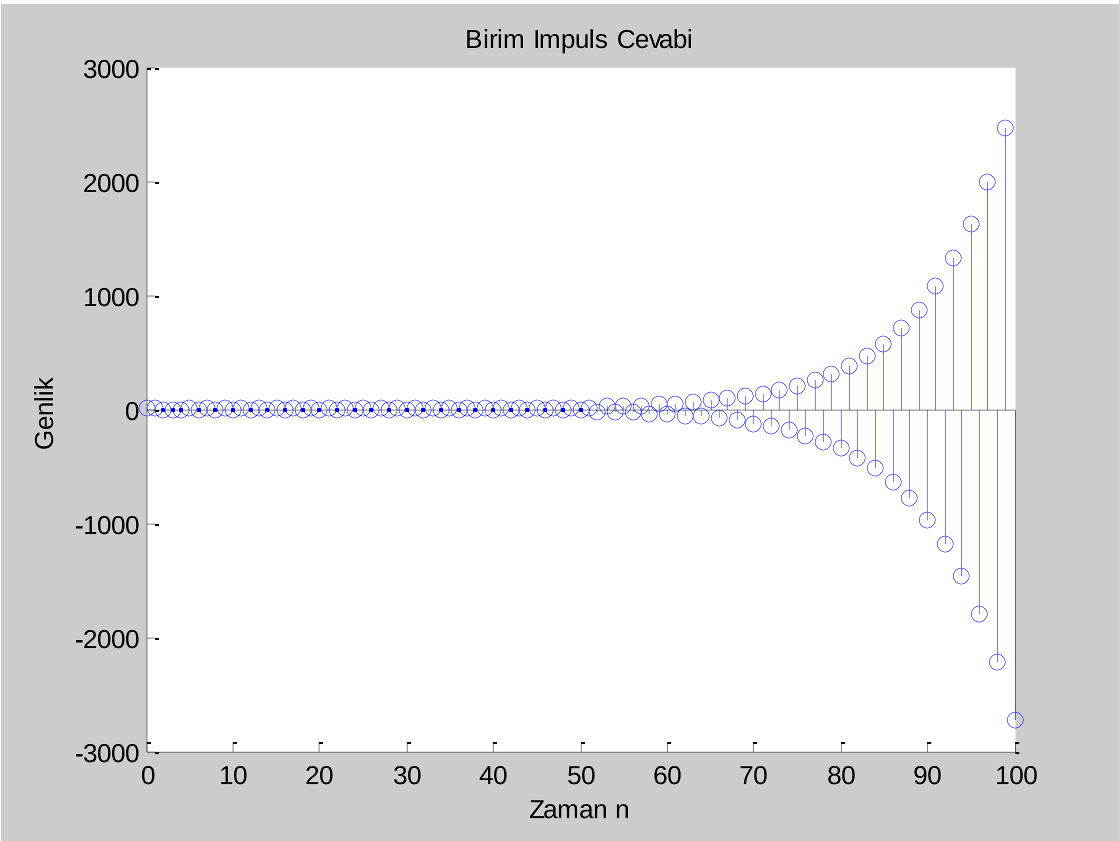
Fark denklemi aşağıda verilen nedensel DZD bir sistemin birim impuls cevabını MATLAB ile çizdirelim.

$$0.8y(n) + 0.3y(n-1) - 0.2y(n-2) + 0.5y(n-3) = 0.3x(n) + 0.5x(n-1) \tag{2.45}$$

Çözüm 2.10

```
%Birim İmpuls Cevabının Hesaplanması
clear all;
close all;
N=input('birim impuls cevabının hesaplanacağı uzunluk=');
a=input('a_k katsayılarını girin a=');
b=input('b_k katsayılarını girin b=');
x=[1 zeros(1,N-1)];
y=filter(a,b,x);
k=0:N-1;
stem(k,y);
xlabel('Zaman n');
ylabel('Genlik');
title('Birim Impuls Cevabi')
```

Açıklama: Bu program genel bir yaklaşımı verir. Zira *N*, *a* ve *b* değişken değerleri giriş olarak verilmeyip, doğrudan program içerisinde tanımlansaydı, o zaman bu program sadece bu program içerisinde tanımlanan değişken değerlerine göre bu problemi çözecekti. Ayrıca birim impuls fonksiyonu olarak tanımlanan *x*, sıfırda 1, 1 ila *N*-1 aralığında sıfır olarak verilmiştir. Yine program içerisinde doğrudan tanımlanan filtrenin çıkışı olan *y*, fark denklemi yazılmak suretiyle de verilebilirdi. `Stem` komutu ise ayrık sistem çizimleri için kullanılır.



Şekil 2.10 Örnek 2.10 daki sayısal süzgecin impuls cevabının MATLAB ile çizdirilmiş şekli

Giriş yaptığımız değerler; `N=101;` `a=[0.3 0.5];` `b=[0.8 0.3 -0.2 0.5]`

Bu programla hesaplanan birim impuls cevabı şekil 2.10 da çizilmiştir. Burada kullanılan **`filter`** komutu yerine kendimiz doğrudan fark denklemini yazarak da bu sistemi gerçekleyebilirdik. Ancak **`filter`** genel bir giriş işareti ve genel fark denklemi derecesi için bu işlemi kolaylaştırmaktadır. İmpuls cevabının genliği üstel olarak arttığı için mutlak değerin toplanabilir olmadığını söyleyebiliriz. Böylece bu sistemin kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.

2.3 Durum değişkenleri yöntemi

Fark denklemiyle modellenen nedensel süzgeçlerin iç değişkenlerinin durumunu belirlemek için durum değişkenleri yaklaşımı kullanılır. Sistemin tüm durum değişkenleri durum vektörü adı verilen bir vektörle gösterilir. Durum değişkenleri N nci dereceden fark denklemini N adet birinci dereceden sisteme dönüştürerek elde edilir. Bu amaçla, aşağıdaki N nci dereceden fark denklemini ele alalım.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k . x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k . y(n-k) \tag{2.46}$$

Bu süzgeci birbirine seri bağlanmış iki süzgece ayırabiliriz.

$$\omega(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k . \omega(n-k) \tag{2.47}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k . \omega(n-k) \tag{2.48}$$

(2.47) ve (2.48) ifadeleri yeniden düzenlenmek suretiyle (2.46) da verilmiş olan fark denklemi elde edilir. $q_1(n)$, $q_2(n)$, ….. , $q_N(n)$ durum değişkenleri de aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \omega(n-N) \\ q_2(n) &= \omega(n-N+1) \\ q_3(n) &= \omega(n-N+2) \\ &\vdots \\ q_{N-1}(n) &= \omega(n-2) \\ q_N(n) &= \omega(n-1) \end{aligned} \tag{2.49}$$

(2.47) ve (2.49) denklemlerinden durum değişkenleri arasındaki ilişki yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&q_1(n+1) = \omega(n-N+1) = q_2(n) \\
&q_2(n+1) = \omega(n-N+2) = q_3(n) \\
&\vdots \\
&q_{N-1}(n+1) = \omega(n-1) = q_N(n) \\
&q_N(n+1) = \omega(n) = x(n) - b_1\omega(n-1) - b_2\omega(n-2) - \ldots\ldots - b_N\omega(n-N) \\
&\qquad\qquad = x(n) - b_1 q_N(n) - b_2 q_{N-1}(n) - \ldots\ldots - b_N q_1(n)
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Bu matrisleri (2.51) de olduğu gibi denklem formunda gösterebiliriz.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix}}_{q(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n) \\ q_N(n) \end{bmatrix}}_{q(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot x(n)
\tag{2.51}
$$

(2.47) kullanılarak $\omega(n)$ değişkeni (2.48) de yok edilebilir.

$$
\begin{aligned}
y(n) &= a_0 \cdot \left[x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k . \omega(n-k) \right] + \sum_{k=1}^{N} a_k . \omega(n-k) \\
&= a_0 x(n) + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k - a_0 b_k \right] . \omega(n-k)
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Aşağıdaki katsayıları tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
&c_1 = a_N - a_0 b_N \\
&c_2 = a_{N-1} - a_0 b_{N-1} \\
&\vdots \\
&c_{N-1} = a_2 - a_0 b_2 \\
&c_N = a_1 - a_0 b_1
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

(2.50) ve (2.53) deki tanımları kullanarak, çıkış ifadesi,

$$y(n) = a_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + c_3 q_3(n) + \ldots\ldots + c_{N-1} q_{N-1}(n) + c_N q_N(n) \tag{2.54}$$

veya

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix}}_{d} x(n) \tag{2.55}$$

olarak yazılabilir. Girişine $x(n)$ işareti uygulanan doğrusal bir sistemin çıkışı $y(n)$ olduğuna göre, durum denklemleri (2.51) ve (2.55) den aşağıdaki gibi yazılabilir.

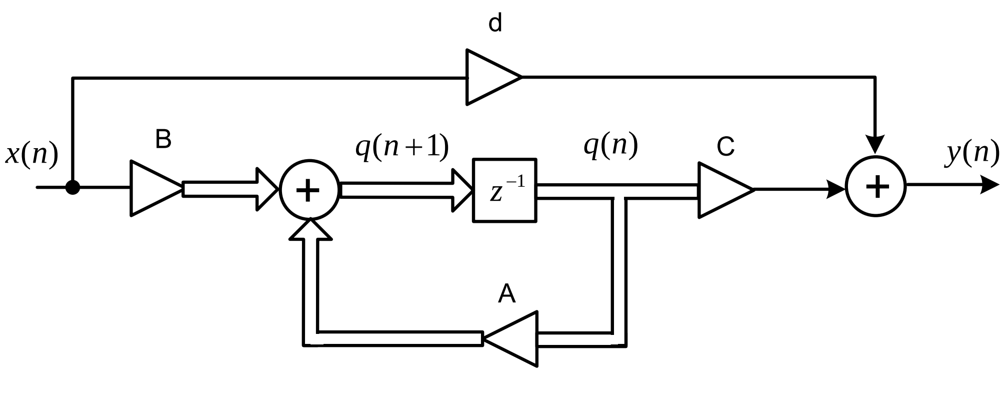
$$q(n+1) = Aq(n) + Bx(n) \tag{2.56}$$

$$y(n) = Cq(n) + dx(n) \tag{2.57}$$

A sistem matrisi, B kontrol vektörü, C gözlem vektörü ve d geçiş katsayısı olarak kullanılır. A matrisi N nci dereceden bir kare matristir. B ve C vektörleri N boyutludur. $q(n)$ ise durum değişkenleri içeren durum vektörüdür.

$$q(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) & q_2(n) & \cdots & q_N(n) \end{bmatrix}^T \tag{2.58}$$

Durum değişkenlerine ilişkin blok diyagramı gösterilimi Şekil 2.11 de verilmiştir. Burada çift çizgiler vektör işaretleri göstermektedir.



Şekil 2.11 Durum değişkenleri yöntemiyle modellenen süzgecin blok diyagramı

Örnek 2.11(a) Sayısal bir süzgeç aşağıdaki fark denklemiyle tanımlansın:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2) \qquad (2.59)$$

Yukarıdaki (2.59) denkleminden $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ olarak belirlendiğinden, bu süzgeç durum değişkenleri yöntemi ile (2.60) denklemindeki gibi gösterilir. (2.51) denkleminden yararlanmak suretiyle,

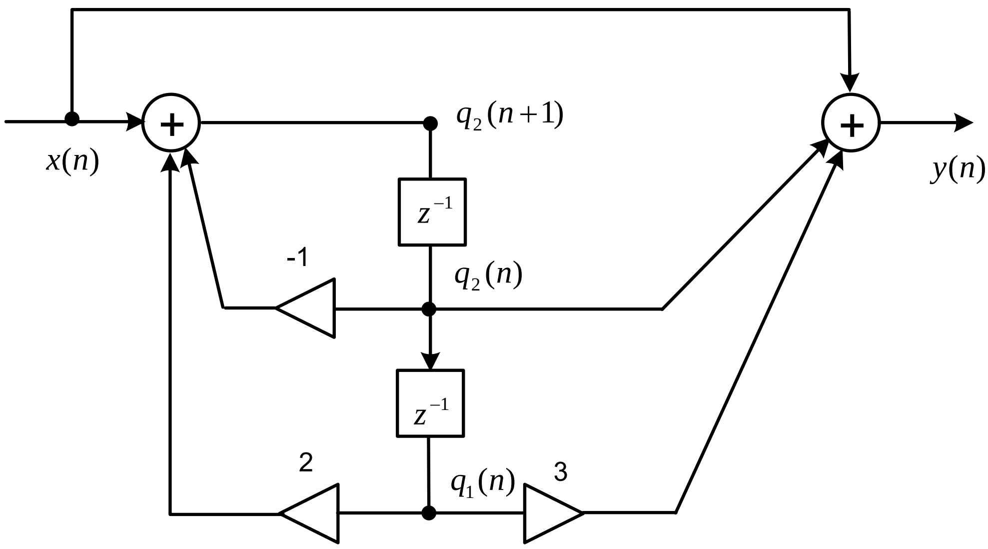
$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(n) \qquad (2.60)$$

elde edilir. Yine (2.53) denkleminden yararlanmak suretiyle,

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 1(-2) = 3$$
$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 2 - 1.1 = 1$$

bulunur. O halde çıkış, durum değişkenleri ve giriş cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$y(n) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n) \qquad (2.61)$$



Şekil 2.12 Örnek 2.11 deki sayısal süzgecin durum denklemleri cinsinden blok diyagramı

(2.60) ve (2.61) denklemlerinin her ikisi birlikte sayısal süzgecin durum denklemlerini göstermektedir. Durum değişkenleri cinsinden blok diyagram şekil 2.12 de gösterilmiştir.

Örnek 2.11(b) Sayısal bir süzgecin çıkışı $y(k)$ ile $u(k)$ girişi arasında aşağıda verilen fark denkleminin geçerli olduğunu kabul edelim.

$$y(k+2)-1.5y(k+1)+0.5y(k)=u(k)$$

$k+2=n$ şeklinde bir değişken dönüşümü yaparsak, $k+1$ yerine $k+1=n-1$ ve k yerine de $k=n-2$ yazabiliriz. Bu durumda denklemimiz aşağıdaki hale gelir.

$$y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n-2)=u(n-2)$$

Bu durumda $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$, $b_0=1$, $b_1=-1.5$ ve $b_2=0.5$ olur. Bu katsayılara göre sistemin durum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(n)$$

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 0 \times (0.5) = 1$$

$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 0 - 0 \times (-1.5) = 0$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix}$$

Aynı sistemi aşağıdaki tanımlamaları yaparak da çözebiliriz. Bu denklem ikinci mertebeden bir fark denklemidir. Sabit katsayılı ikinci mertebeden olan bu fark denklemi aşağıdaki gibi yazılacak olursa iki adet durum denklemi elde edilir. Tanım olarak,

$$y(k) = q_1(k) \rightarrow y(k+1) = q_1(k+1)$$

$$y(k+1) = q_2(k) = q_1(k+1) \rightarrow y(k+2) = q_2(k+1)$$

yazabiliriz. Bu tanım eşitliklerini esas denklemde yerine yazıp, ardından da hep birlikte yazacak olursak, durum denklemleri ile çıkış fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$q_1(k+1) = q_2(k)$$
$$q_2(k+1) = -0.5q_1(k) + 1.5q_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = q_1(k)$$

O halde lineer sabit katsayılı ikinci mertebeden fark denklemini matris şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix}$$

2.3.1 Durum vektörünün doğrusal dönüşümü

Durum denklemleri gösterimi, verilen bir sistem için tek değildir. Aynı sayısal süzgeç için farklı yapıların var olması, kuvantalama hatalarının etkisinin azaltılması ve işlem karmaşıklığının azaltılması gibi konularda yararlıdır. T matrisi, boyutu N olan ve tersi alınabilen bir kare matris olduğuna göre, $q(n)$ durum vektörünün doğrusal dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$q^{'}(n) = Tq(n) \qquad (2.62)$$

(2.62) ve (2.56) denklemlerinin tersinden aşağıdaki ifadeler yazılır.

$$q^{'}(n+1) = Tq(n+1) \text{ ve } q(n+1) = Aq(n) + Bx(n)$$

$$\begin{aligned} q^{'}(n+1) &= TAq(n) + TBx(n) \\ &= TAT^{-1}q^{'}(n) + TBx(n) \end{aligned} \qquad (2.63)$$

ve

$$y(n) = CT^{-1}q^{'}(n) + dx(n) \qquad (2.64)$$

$$A^{'} = TAT^{-1}, \quad B^{'} = TB, \quad C^{'} = CT^{-1}, \quad d^{'} = d$$

olarak tanımlanırsa yeni durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} q'(n+1) &= A'q'(n) + B'x(n) \\ y(n) &= C'q'(n) + d'x(n) \end{aligned} \tag{2.65}$$

Burada çıkış $y(n)$ nin değişmediği görülmektedir. Yani $C' = CT^{-1}$, $d' = d$ ve $q'(n) = Tq(n)$ ifadelerini yukarıdaki denklemde yerine koyacak olursak $y(n)$ çıkışı için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$y(n) = C'q'(n) + d.x(n) = C.T^{-1}.Tq(n) + d'x(n) = C.q(n) + d.x(n)$$

<u>Örnek 2.12</u> Dönüşüm matrisi T nin bir diagonal matris olması durumunda A', B' ve C' matrislerini bulalım.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

olduğuna göre ölçeklenmiş durum vektörü $q'(n)$

$$q'(n) = \begin{bmatrix} q_1'(n) \\ q_2'(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}q_1(n) \\ t_{22}q_2(n) \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

olarak bulunur. Ayrıca ölçeklenmiş durum matrisi de

$$A' = T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dfrac{t_{11}}{t_{22}} \cdot a_{12} \\ \dfrac{t_{22}}{t_{11}} \cdot a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$B' = T\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}b_1 \\ t_{22}b_2 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

$$C' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{t_{11}} & \dfrac{c_2}{t_{22}} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

2.3.2 Zaman domeni analizi

Sayısal süzgecin zaman domeni analizi durum denklemleri yardımıyla da gerçekleştirilir. İlk koşulların bilinmesi durumunda giriş ve çıkış ilişkisi A, B, C ve d cinsinden ifade edilebilir. $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$\begin{aligned} q(1) &= Aq(0) + Bx(0) \\ q(2) &= Aq(1) + Bx(1) \\ q(3) &= Aq(2) + Bx(2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.71}$$

olduğu açıkça görülür ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} q(2) &= A^2q(0) + ABx(0) + Bx(1) \\ q(3) &= A^3q(0) + A^2Bx(0) + ABx(1) + \underbrace{A^0}_{I}Bx(2) \end{aligned}$$

Buradan genel bağıntı olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$q(n) = A^n q(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} Bx(k) \tag{2.72}$$

(2.72) bağıntısında $A^0 = I$ boyutları $(N \times N)$ olan birim matristir. O halde

$$y(n) = Cq(n) + dx(n)$$

$$y(n) = CA^n q(0) + C\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} Bx(k) + dx(n) \tag{2.73}$$

olur. $q(0)$ başlangıç koşullarını taşıyan durum vektörü olup (2.49) bağıntısından aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(-N) \\ \vdots \\ \omega(0) \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Giriş işaretinin $n<0$ için $x(n)=0$ ve $q(0)=0$ olması durumunda, çıkış ifadesi (2.73) denkleminden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(n)=C\sum_{k=0}^{n-1}A^{(n-1-k)}Bx(k)+dx(n) \tag{2.75}$$

(2.75) denklemi başlangıç koşulları sıfır olan sayısal süzgecin çıkışını gösterir. Benzer şekilde A, B, C ve d cinsinden sayısal süzgecin impuls cevabı (2.75) denkleminden yazılabilir.

$$h(n)=C\sum_{k=0}^{n-1}A^{(n-1-k)}B\delta(k)+d\delta(n) \tag{2.76}$$

Böylece $a_0=d$ olmak üzere (2.77) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h(n)=\begin{cases} a_0, & n=0 \quad \text{için} \\ CA^{(n-1)}B, & n\neq 0 \quad \text{için} \end{cases} \tag{2.77}$$