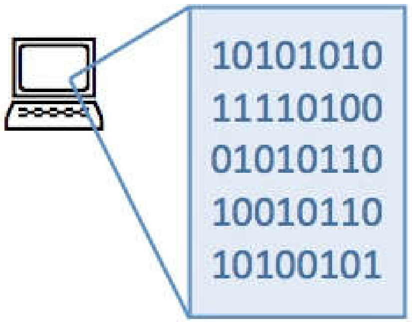
Sayı Sistemleri

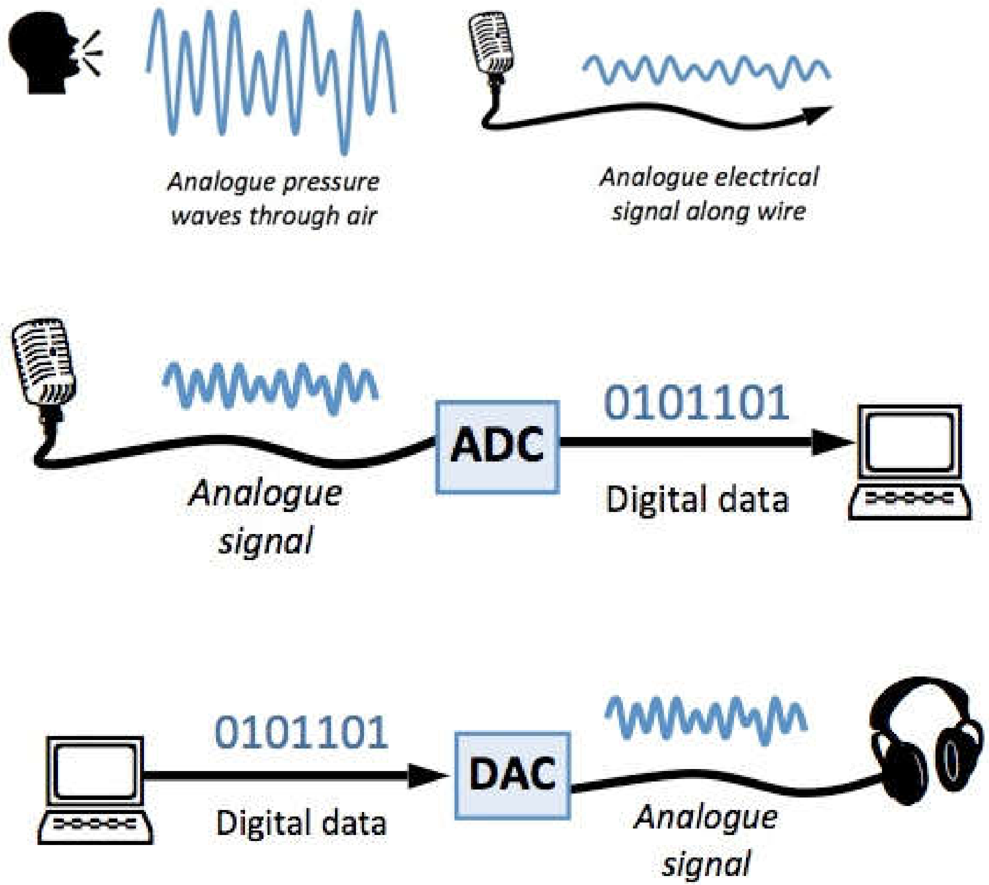
- **Onluk, İkilik, Sekizlik ve Onaltılık sistemler**
- **Dönüşümler**
- **Tümleyen aritmetiği**



Giriş

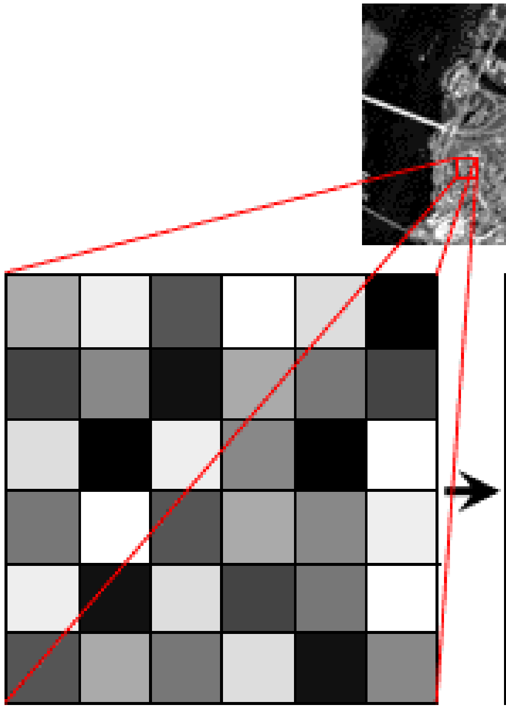
- Bilgisayar dış dünyadan verileri sayılar aracılığı ile kabul eder.
- Günümüz teknolojisinde bu işlem ikilik sayı sistemin ile gerçekleştirilir.
- İkilik sayı sistemindeki sayılarda 0 ve 1 olmak üzere iki farklı değerden oluştuğu için bilgisayar donanımında iki farklı gerilim seviyesi kullanılarak temsil edilir.
- İkilik sayı sisteminin yanında, sekizlik ve onaltılık gibi sayı sistemleri de bilgisayar ortamında birçok ara işlemlerde kullanılmaktadır.

Sayısal verilere örnekler

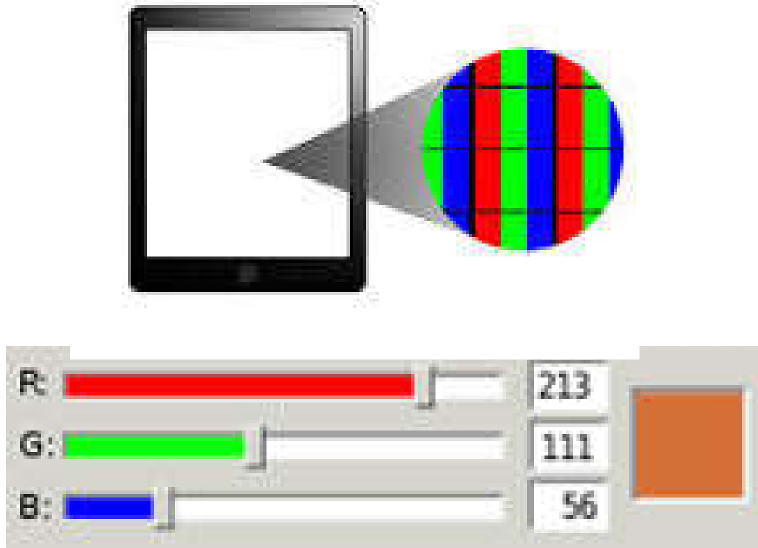


http://www.igcseict.info/theory/0/anadig/

Sayısal verilere örnekler



170	238	85	255	221	0
68	136	17	170	119	68
221	0	238	136	0	255
119	255	85	170	136	238
238	17	221	68	119	255
85	170	119	221	17	136



Sayı sistemleri

Genel olarak bir S sayı sisteminin ifadesi:

$$S= d_nR^n +d_{n-1}R^{n-1}+................+d_2R^2+d_1R^1+d_0R^0$$

Burada rakamlar ***d***, taban ***R*** ile gösterilir.

Virgülden sonrasını ifade etmek için

$$S = d_nR^n +d_{n-1}R^{n-1}+.............+d_2R^2+d_1R^1+d_0R^0 ,\ d_1R^{-1}+d_2^{-2}+d_3R^{-3} +........$$

Sayı sistemleri

Onluk (Decimal) sistem

Genel ifade:

$$Decimal = d_n 10^n + \ldots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0 , d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-2} 10^{-3} + \ldots$$

digit: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

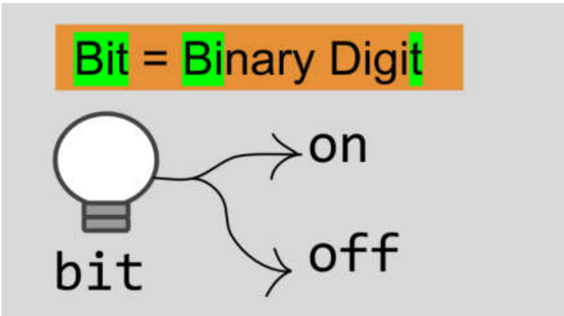
Örnek: 2016,2017

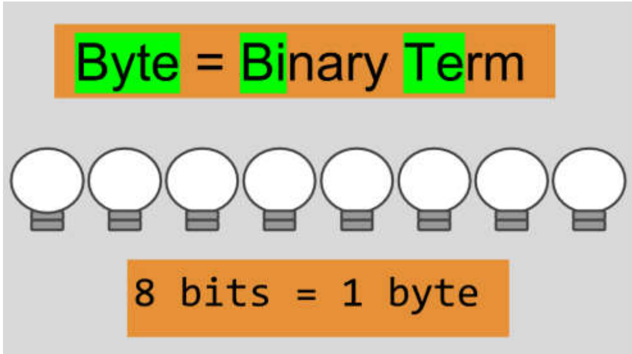
$$2016{,}2017 = 2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 6\times10^0 + 2\times10^{-1} + 0\times10^{-2} + 1\times10^{-3} + 7\times10^{-4}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Genel ifade:

$$Binary = d_n 2^n + \ldots + d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0 , d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + d_{-2} 2^{-3} + \ldots$$

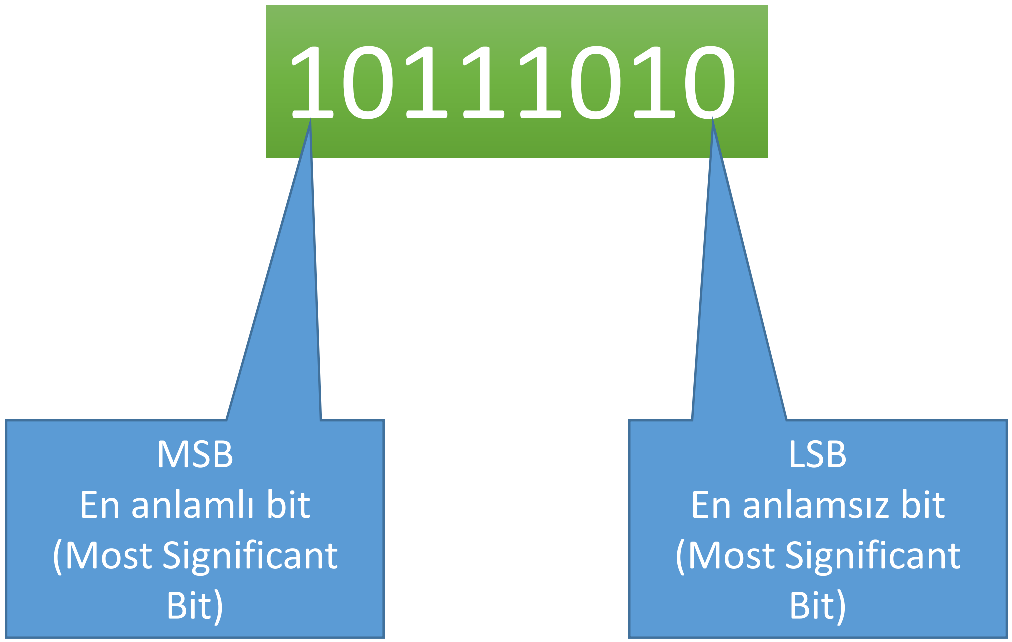




Kaynaklar: http://pumpkinprogrammer.com/2014/10/03/intro-to-binary-numbers/

İkili (Binary) sayı sistemi

Sayıların iki tabanında sunumu	
10 tabanı	2 tabanı
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
4	00000100
5	00000101
...	...
65	01000001
66	01000010
67	01000011
...	...
254	11111110
255	11111111



İkili (Binary) sayı sistemi

Binary $\rightarrow$ Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(1001)_2 = ?$$

$$\begin{aligned}(1001)_2 &= 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 \\ &= 8+1 \\ &= 9\end{aligned}$$

Örnek:

$$(10110101)_2 = ?$$

$$\begin{aligned}(10110101)_2 &= 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 \\ &= 128+32+16+4+1 \\ &= 181\end{aligned}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary $\rightarrow$ Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: 8 bit ile ifade edilebilecek en büyük sayı nedir?

$$
\begin{aligned}
(11111111)_2 &= 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 \\
&= 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\
&= 255
\end{aligned}
$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary $\rightarrow$ Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: $(101.101)_2 = (?)_{10}$

$$\begin{aligned}(101.101)_2 &= 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} \\ &= 4+1+1/2+1/8 \\ &= 5.75\end{aligned}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(155)_{10} = (?)_2$$

İşlem	Bölüm	Kalan
155 / 2	77	1
77 / 2	38	1
38 / 2	19	0
19 / 2	9	1
9 / 2	4	1
4 / 2	2	0
2 / 2	1	0
1	→	1

LSB

$(10011011)_2$

MSB

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal $\rightarrow$ Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek: $$(7.625)_{10} = (?)_2$$

İşlem	Bölüm	Kalan
$7/2$	3	1
$3/2$	1	1
1	$\rightarrow$	1

İşlem	Çarpım	Tam kısım
0.625×2	$= 1.25$	1
0.25×2	$= 0.50$	0
0.50×2	$= 1.0$	1

MSB

LSB

$$(111.101)_2$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal $\rightarrow$ Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek: $(0.85)_{10} = (?)_2$

İşlem	Çarpım	Tam kısım
$0.85 \times 2 =$	1.70	1
$0.70 \times 2 =$	1.40	1
$0.40 \times 2 =$	0.80	0
$0.80 \times 2 =$	1.60	1
$0.60 \times 2 =$	1.20	1

$$(0.85)_{10} = (11011)_2$$

İşlemler devam ettirilebilir.

İkili (Binary) sayı sistemi

Toplama:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 11 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Çıkarma:

$$\begin{array}{r} 101 \\ -\ 11 \\ \hline 010 \end{array}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Çarpma

$$
\begin{array}{r}
101 \\
\times\ \ 11 \\
\hline
101 \\
+101 \\
\hline
1111
\end{array}
$$

Bölme

$$
\begin{array}{r|l}
1010 & 11 \\
\cline{2-2}
-\ 11 & 11 \\
\cline{1-1}
0100 & \\
-\ \ \ 11 & \\
\cline{1-1}
001 &
\end{array}
$$

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

$$D = d_n 8^n + \ldots + d_3 8^3 + d_2 8^2 + d_1 8^1 + d_0 8^0 , d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + d_{-2} 8^{-3} + \ldots$$

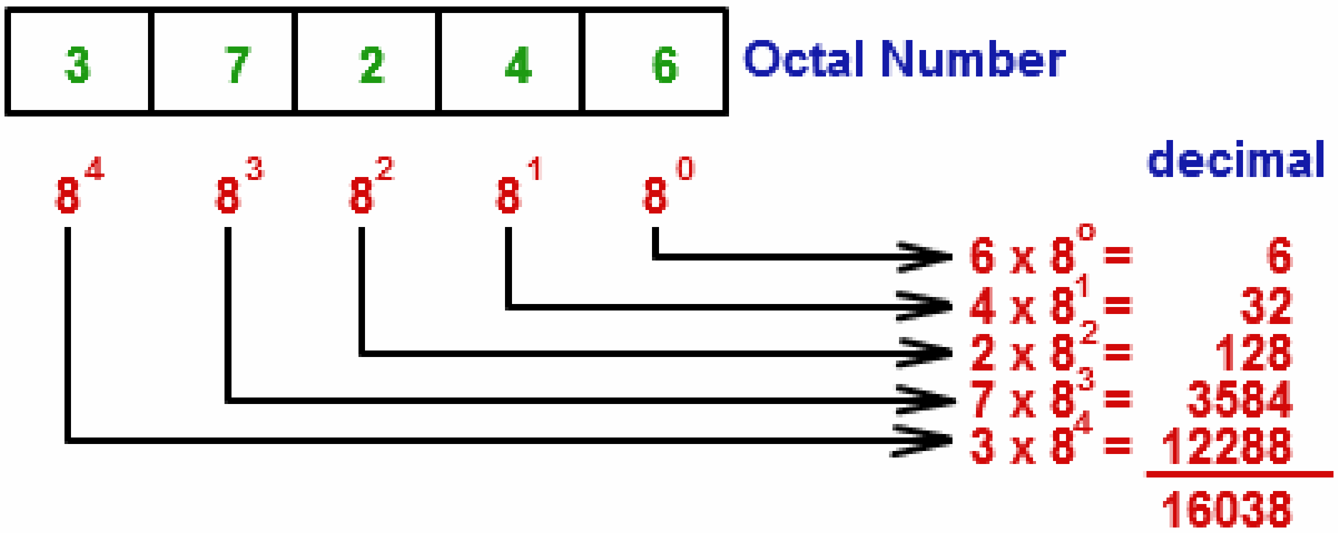
- Sekizli sayı sistemi, ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Geçmiş yıllarda, 12-bit, 24-bit veya 36-bit gibi 3 ile bölünebilen kelime uzunluğuna sahip bilgisayarlarda kullanılmıştır.
- Günümüzde, 16 bit, 32 bit veya 64 bit gibi kelime uzunluğu sekize bölünen bilgisayarlarda yerini onaltılık sayı sistemine bırakmıştır.

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Octal → Decimal

Sekizlik sistemden onluk sisteme dönüşüm

- $(37246)_8=(16038)_{10}$



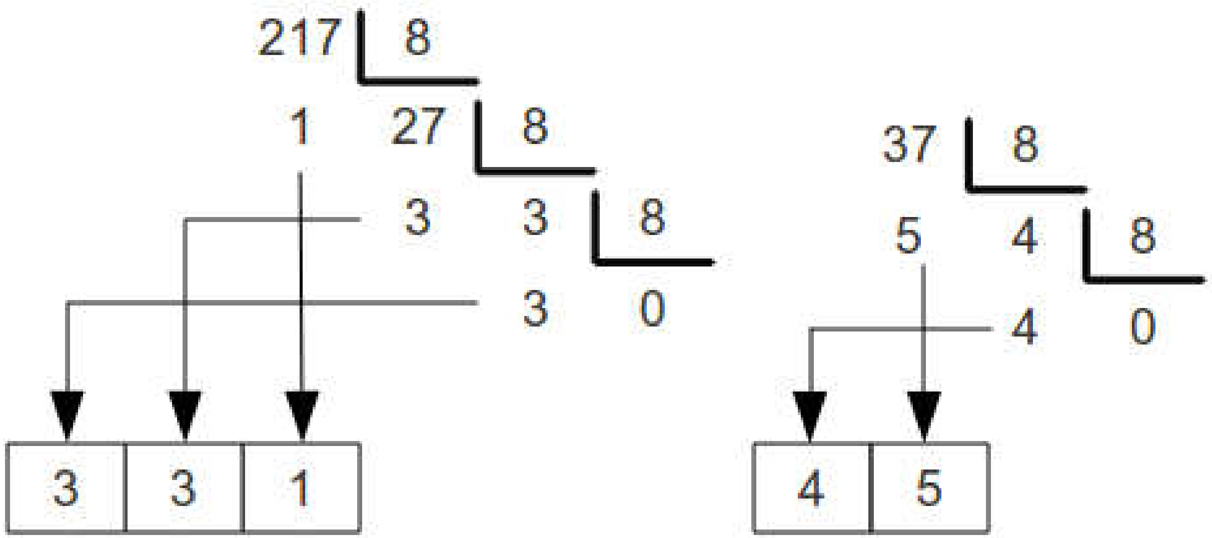
http://calculator.tutorvista.com/octal-calculator.html

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Decimal → Octal

Onluk sistemden sekizlik sisteme dönüşüm

- $(217)_{10} = (331)_8$
- $(37)_{10} = (45)_8$



http://helpdev.com.br/2013/09/19/java-conversao-de-base-numerica-binario-decimal-octal-hexa/

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

$$H = d_n 16^n + \ldots + d_3 16^3 + d_2 16^2 + d_1 16^1 + d_0 16^0, d_{-1} 16^{-1} + d_{-2} 16^{-2} + d_{-2} 16^{-3} + \ldots$$

- Sekizli sayı sistemi gibi ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Günümüz bilgisayar sistemlerinde yaygın olarak başvurulur.

- Örnekler:
  - Görüntü renk kodları
  - Adres kodları
  - Makine kodları vb..

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

- Onaltılık sistemde rakamlar:
  - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D

Decimal	0	1	…	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	…	9	A	B	C	D	E	F

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Decimal $\rightarrow$ Hexadecimal

Onluk sistemden onaltılık sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(333)_{10} = (?)_{16}$$

İşlem	Bölüm	Kalan
$333/16$	20	D
$20/16$	1	4
1	$\rightarrow$	1

LSB

$$(14D)_{16}$$

MSB

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Hexadecimal→Decimal

Onaltılık sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(14D)_{16} = (?)_{10}$$

$$(14D)_{16} = 1\times16^2 + 4\times16^1 + 13\times16^0$$

$$= 256 + 64 + 13$$

$$= 333$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(11101)_2 = (?)_8$

$$(11101)_2 = (29)_{10}$$
$$(29)_{10} = (35)_8$$

$$(11|101)_2$$

$$(011)_2 \qquad (101)_2$$

$$(3)_8 \qquad (5)_8$$

$$(35)_8$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2574)_8 = (?)_2$

$$(2574)_8$$

$$(010 \quad 101 \quad 111 \quad 100)_2$$

$$(010101111100)_2$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(1011101111111101)_2 = (?)_{16}$

$$(0010 \quad 1110 \quad 1111 \quad 1101)_2$$

$$(2)_{16} \quad (E)_{16} \quad (F)_{16} \quad (D)_{16}$$

$$(2EFD)_{16}$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2FA5)_{16} = (?)_2$

$$(2FA5)_{16}$$

$$(0010\ 1111\ 1010\ 0101)_2$$

$$(0010111110100101)_2$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek:

$$(F51A)_{16} = (?)_8$$

$$(F51A)_{16} = (1111010100011010)_2$$

$$(001\,|\,111\,|\,010\,|\,100\,|\,011\,|\,010)_2$$

$$(172432)_8$$

Tümleyen aritmetiği

- Bilgisayarlarda çıkarma işlemini gerçekleştirmek için tümleyen aritmetiği kullanılır. M iki tabanında bir sayı, N bu sayının basamak adedi olmak üzere M sayısının 1 ve 2 tümleyeni aşağıdaki gibi belirlenir:

- 1 tümleyen aritmetiği $$r = 2^N - (M)_2 - 1$$
- 2 tümleyen aritmetiği $$r = 2^N - (M)_2$$
- **Örnek:** 1010
- 1 tümleyeni: 10000-1010-1=1111-1010=0101 (**bitlerin terslenmiş hali**)
- 2 tümleyeni: 10000-1010=0110 veya **1 tümleyeni+1**

1 tümleyeni

Sayı	1 tümleyeni

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$1111 \rightarrow 0000$$

$$1010 \rightarrow 0101$$

$$10100011 \rightarrow 01011100$$

$$r = 10 - 0 - 1 = 1$$

Sayını her bir
bitini tersleyerek
1 tümleyeni
belirlenir

$$r = 100000000 - 101000111 - 1 = 101011100$$

2 tümleyeni

Pratikte 2 tümleyenini hesaplamak için 1 tümleyeni hesaplanır ve sonuca 1 eklenir.

Sayı	1 tümleyeni	2 tümleyeni

$$1111 \rightarrow 0000 \rightarrow 0001$$

$$1010 \rightarrow 0101 \rightarrow 0110$$

$$1011 \rightarrow 0100 \rightarrow 0101$$

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- M-N işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- M-N=M+(-N)

Örnek:

```
  1001        2 tümleyeni        1001
- 0011   →       1101      →   + 1101
------                         ------
                                10110   →   0110
```

Elde ihmal edilir

En yüksek değerli bitin 0 olması sayının pozitif gösterir

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- M-N işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- M-N=M+(-N)

Örnek:

```
  0011            2 tümleyeni        0011
- 1001      →       0111       →   + 0111
------                             ------
                                     1010   →   1010
```

Elde yok. Bu durumda sayı negatif.

En yüksek değerli bitin 1 olması sayının negatif olduğunu gösterir.
Bu değerin ne olduğunu öğrenmek için,
sayının tekrar 2 tümleyenini alırsak 0110 olduğu görülür venegatiftir
(-0110)

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

İşaretli sayı	Onluk değeri
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

İşaretli sayı	Onluk değeri
1000	-8
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1

Negatif (1 ile başlayan sayılarda) sayının değerini anlamak için 2 tümleyenini alınıp önüne – işareti yazarız. Örneğin: 1101 sayısı onluk 13 sayısına karşılık gelirken, eğer bu işaretli sayı ise -0011=-3 sayısına karşılık gelmektedir.