SİNYALLER

Sinyal, veri, data veya bilgi içerecek biçimde kodlanmış anlamlı bir elektriki büyüklük olduğu şeklinde enerjisi ve frekansı olan dalga olarak tanımlanabilir. İşaret herhangi bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ile aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir :

$$s(t) = 15t^2$$
$$s(x, y) = y^2 + 6xy - 9y + 5x - 7x^2$$
$$s(x, y, t) = 4x - 2xy + 3x^2 + 5t - 6xt + y^2$$

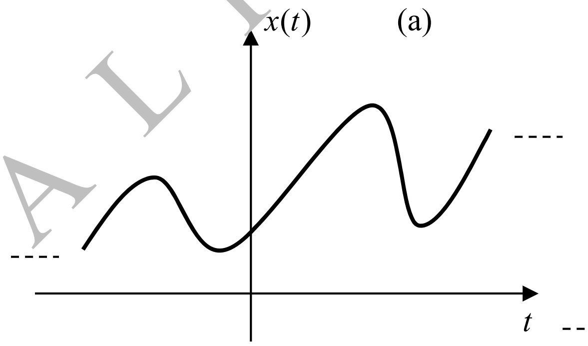
Sinyal tipleri

Bu bölümde temel işaret tipleri bulundukları kategori ve sınıflarına göre model ve işlevleriyle ele alınacaktır.

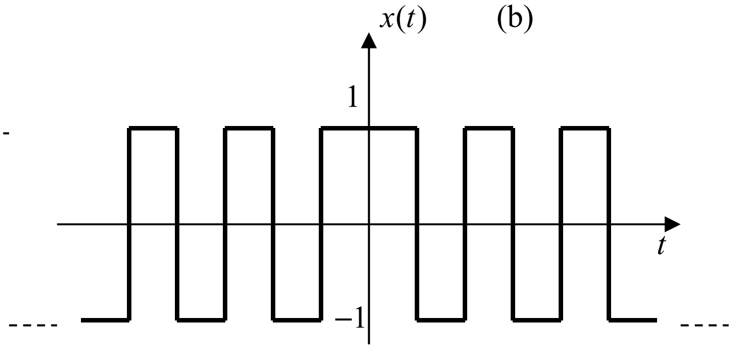
1 Analog ve Dijital Sinyaller

Analog işaretlerle, sürekli-zaman işaretleri daima karıştırılır. Aynı şekilde ayrık-zamanlı işaretler ile de dijital işaretler birbirine karıştırılır. Her sürekli işaret, analog işaretmidir?. Sürekli işaret için, işaretin her t anında tanımlı olması gerekmektedir. Bu açıdan aşağıdaki şekil (a) ve (b) sürekli işaret formlarındadır. Ancak bu iki ışarete bu durumda analog işaret denilebilirmi?. Bu anlamda yalnızca (a) analog özellikte olup, (b) analog değil, dijital yapıdadır. Bu ayırımı nasıl anlayacağız?.

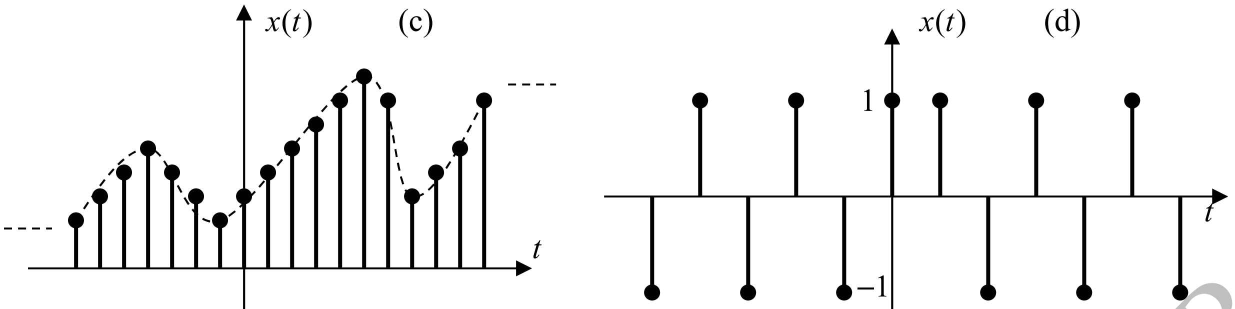
Bir işaretin sürekliliğinin yanı sıra aynı zamanda analog olması için genliğinin almış olduğu değerlere bakmak gerekiyor. Eğer bir işaretin genliği (amplitude) sonsuz $(-\infty, \infty)$ aralığındaki sürekli-zaman işaretinin her anında (sonsuz sayıda) değer alıyorsa, bu işarete analog işaret denilir. *Buna gore bir analog işaret genliği sonsuz zamanda sonsuz sayıda olacaktır*. Ses ve görüntü işaretleri analog işaretler olarak aşınabilir. Bu analog işaretin en önemli ayrıtıdır. Bu anlamda bir analog işaretin illa da sürekli-zaman formunda olması gerekmiyor veya yetmiyor. Buna göre ayrık-zaman formundaki bir işaret de analog olabilir. Benzer biçimde sonsuz sayıda genliğe sahip bir ayrık-zaman işaretide analog olabilir. Aynı şekilde bir dijital işaret genliği (amplitude) sonlu sayıda değer alan işarettir. Bu anlamda dijital bir işaretin illa da ayrık-zamanlı bir işaret olması gerekmez. Aşağıdaki şekiller bu özellikleri açıklamaktadır.



Analog, sürekli-zaman işaret



Dijital, sürekli-zaman işaret



Analog , ayrık-zaman işaret

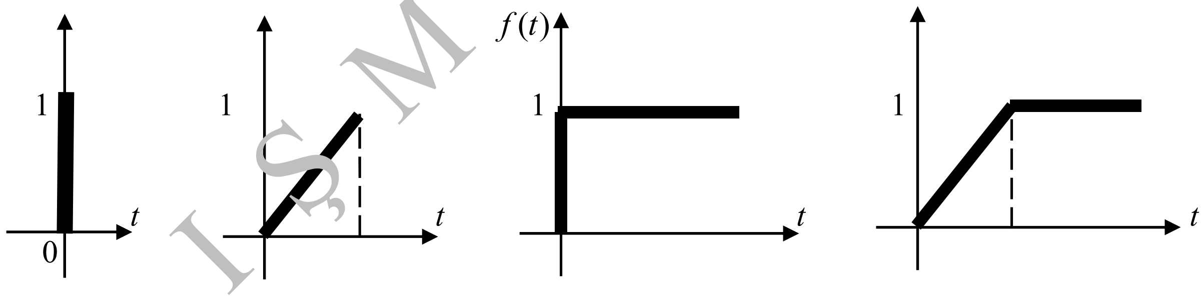
Dijital , ayrık-zaman işaret

Şekil 1 Analog – Dijital işaretler

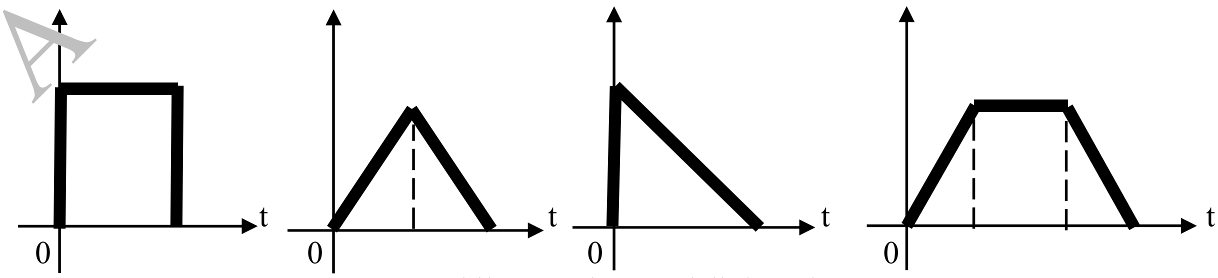
Şekil (a) da sürekli-zaman işareti vardır ve bu işaretin her bir anında bir genlik değeri mevcuttur. Dolaysıyla sonsuz tane genlik değeri olduğundan bu işaret sürekli ve aynı zamanda analog bir işarettir (analog, sürekli-zaman). Şekil (c) incelendiği zaman bu kez işaret ayrık-zaman formda olmasına rağmen yine sonsuz tane genlik içerdiğinden bu işaret de analogdur (analog, ayrık-zaman).

Şekil (b) incelendiği zaman işaret sürekli-zaman formunda olmasına rağmen genliği sonlu sayıdadır (-1,0,1 gibi). Dolaysıyla bu işaret dijitaldir (dijital, sürekli-zaman). Nihayet şekil (d) incelendiği zaman, işaret ayrık formda ve genlikleri de yine sonlu sayıdadır (-1,0,1 gibi). Bu yüzden bu işaret yine dijitaldir (dijital, ayrık-zaman). Görüldüğü gibi analog bir işaret her zaman sürekli bir işaret anlamına gelmediği gibi dijital bir işaret de her zaman ayrık işaret anlamına gelmez. Yine fark edildiği gibi analog ve dijital kavramları genlik değerleri olarak düşey eksenle ilgiliyken, sürekli-zaman ve ayrık-zaman işareti ise yatay sütunla ilgili kavramlar olarak karşımıza çıkmaktadır.

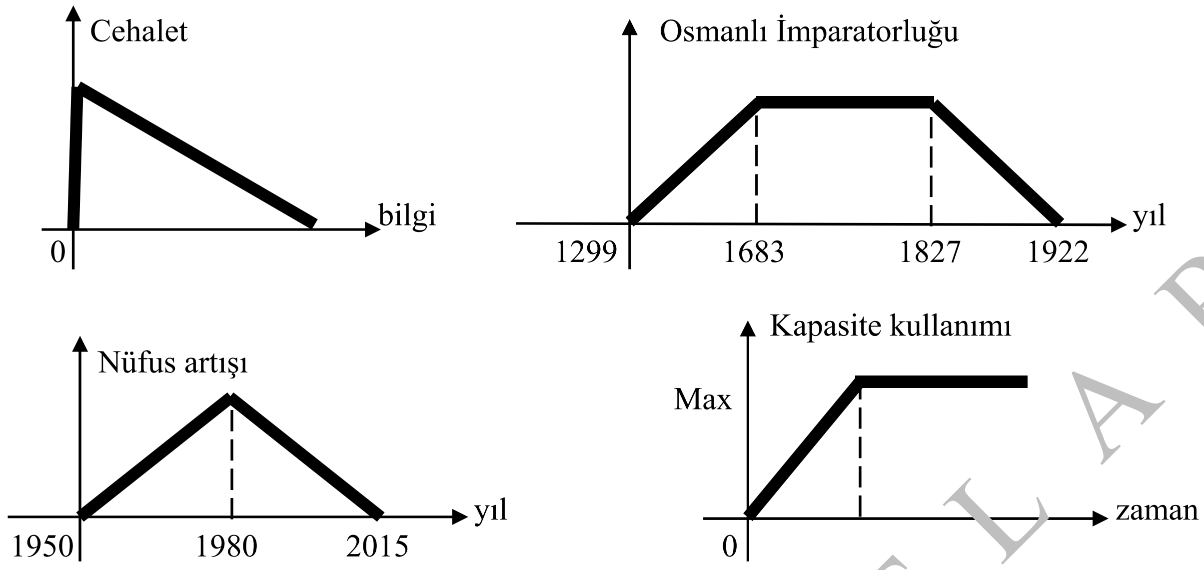
Anahtar Sinyaller



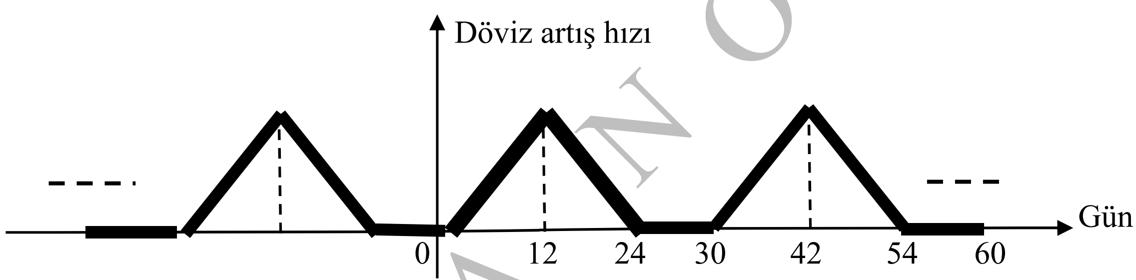
Şekil 33. Ani ve geçişli yükselişler



Şekil 34. Ani ve geçişli düşüşler



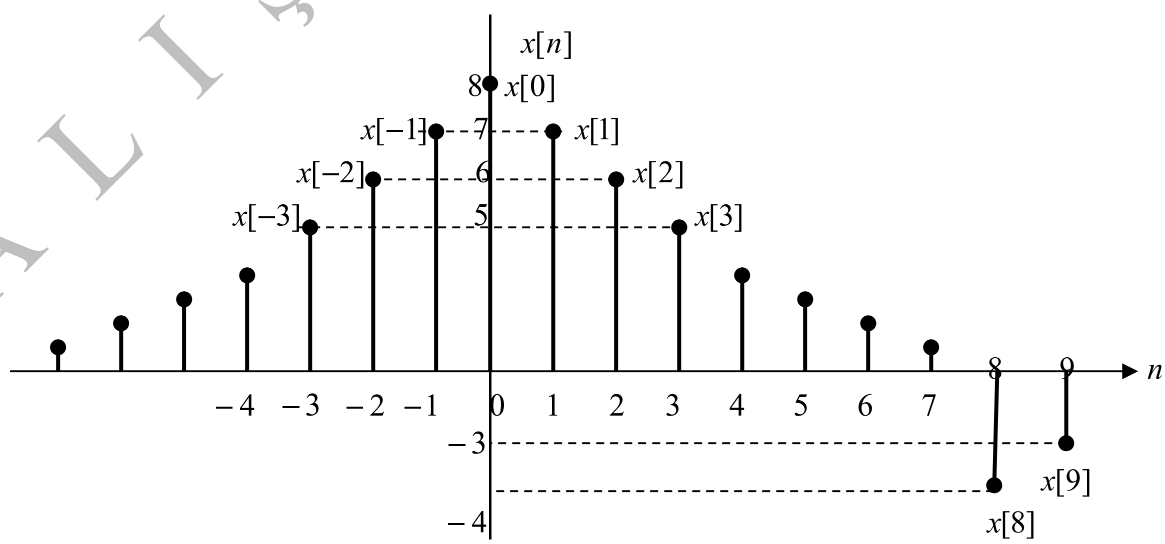
Şekil 35. Sinyaller ve uygulama alanları



Şekil 36.Periyodik sinyal ve bir uygulaması

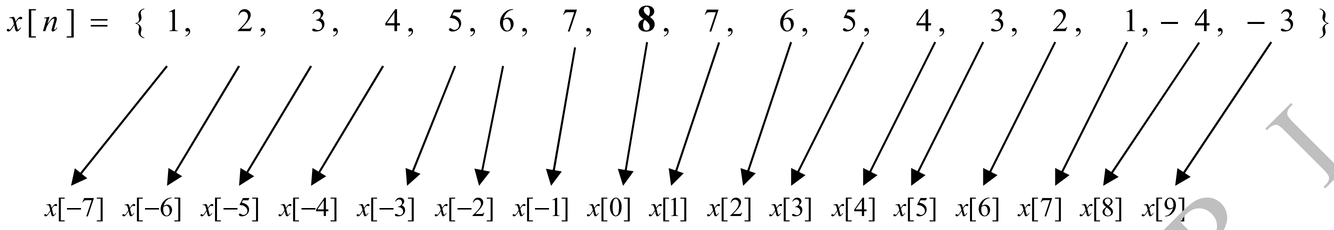
2. Ayrık İşaretler

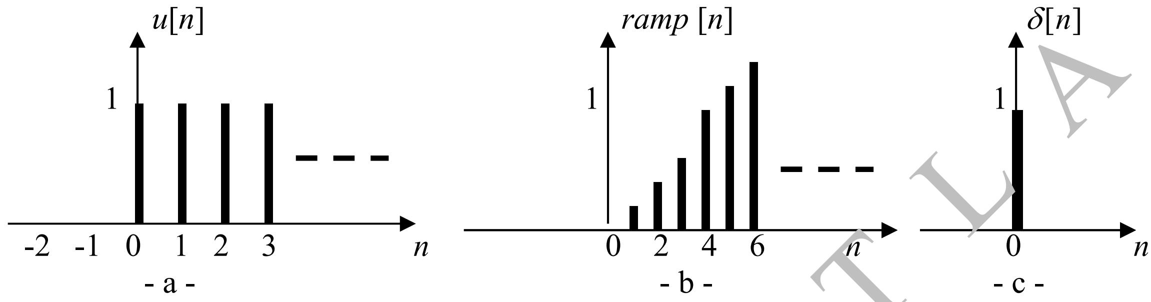
Zamanın belli değerlerinde tanımlanan işaretlerdir. Doğal işaretler olmayıp, sürekli-zaman işaretlerden özel yöntemlerle (örnekleme) elde edilirler.



Şekil 2 Ayrık işaret

$$x[n] = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \mathbf{8},\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1, -4, -3 \,\}$$

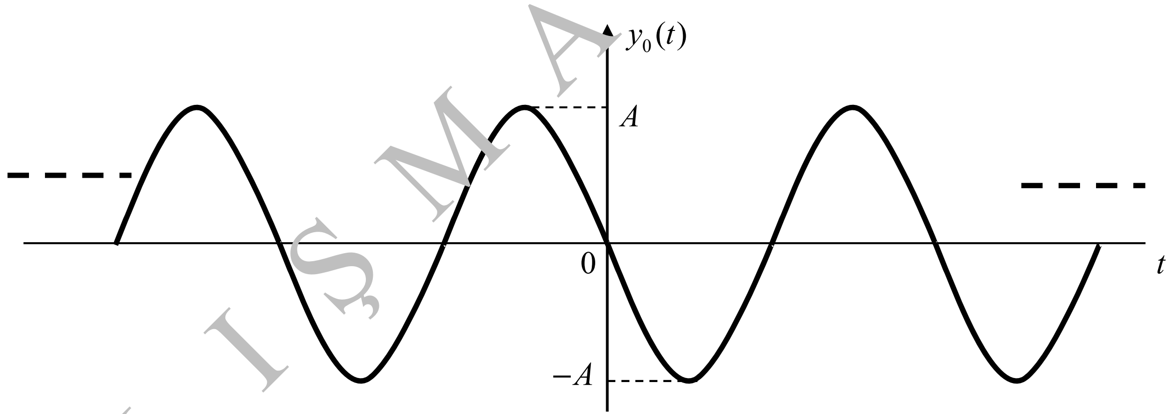




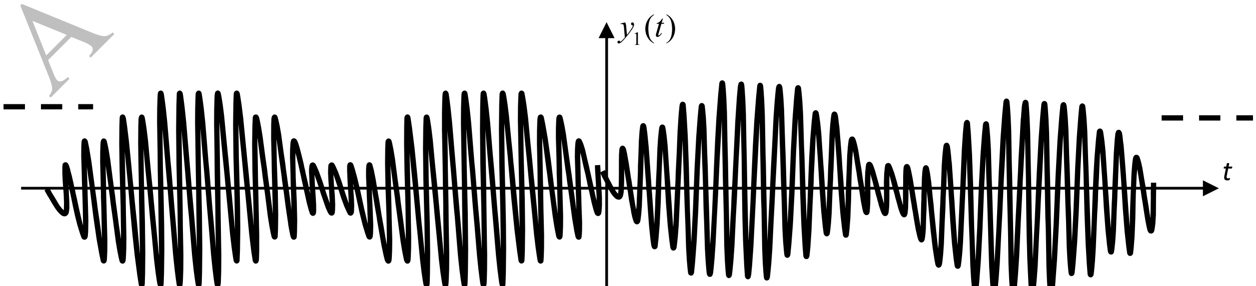
Şekil 3 Ayrık işaretler

Ayrık işaretler sürekli-zaman işaretlerinden örnekleme (sampling) yöntemiyle elde edilen bir tür sayısal tabanlı işaret olarak aynı zamanda dijital işaretin elde edilmesinde kullanılan ikincil temel işaret olarak önemli bir işleve sahiptir.

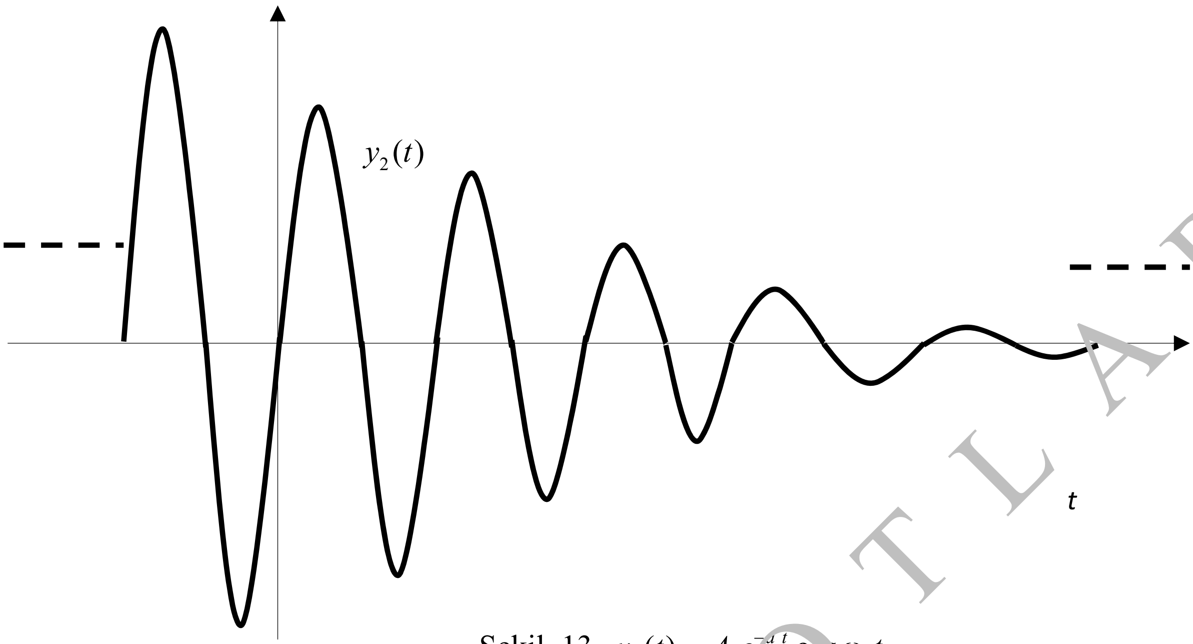
Genel Sinyal Tipleri



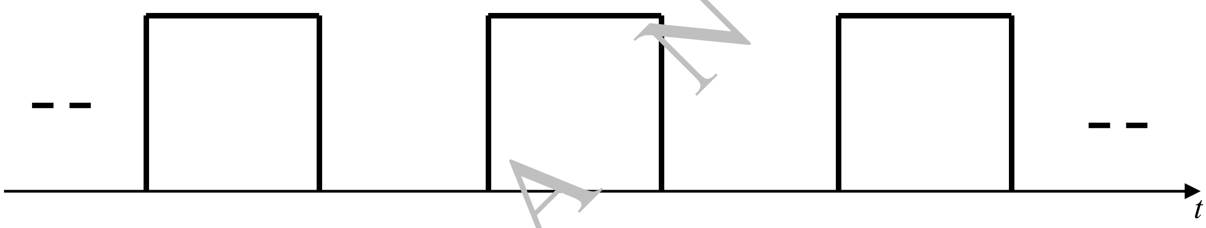
Şekil 11. Periodik siusoid işaret : $y_0(t) = A\sin\omega_0 t \rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0$



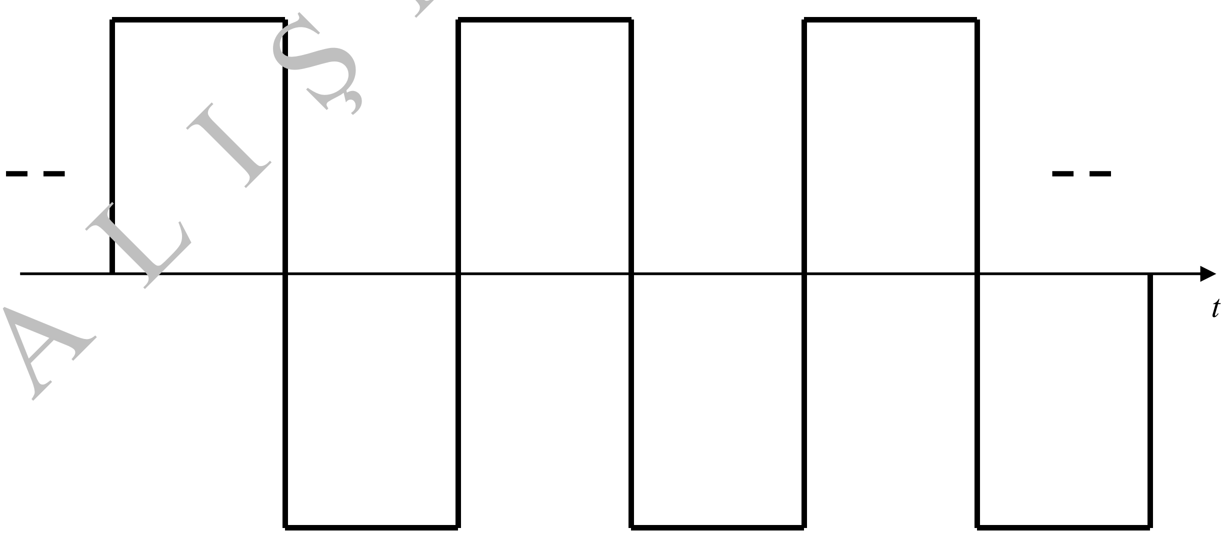
Şekil 12. Modülasyonlu işaret : $y_1(t) = s_1(t) \times s_2(t)$



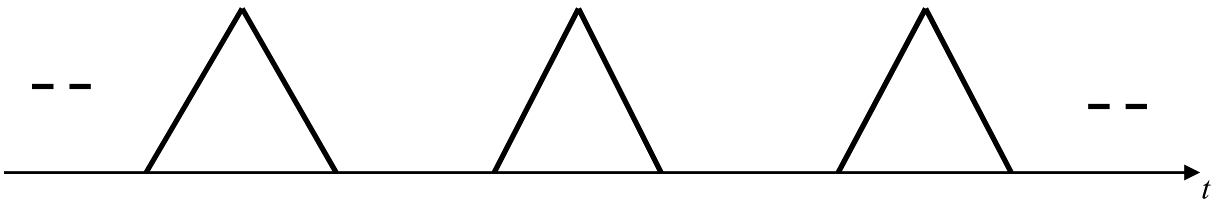
Şekil 13. $y_2(t) = A\, e^{-a\,t} \cos \omega_0 t$



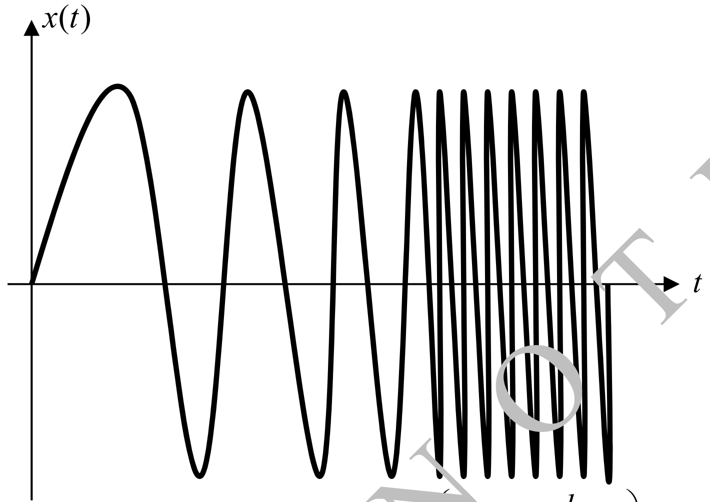
Şekil 16. Periodik darbe işareti : $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos(2n-1)t$



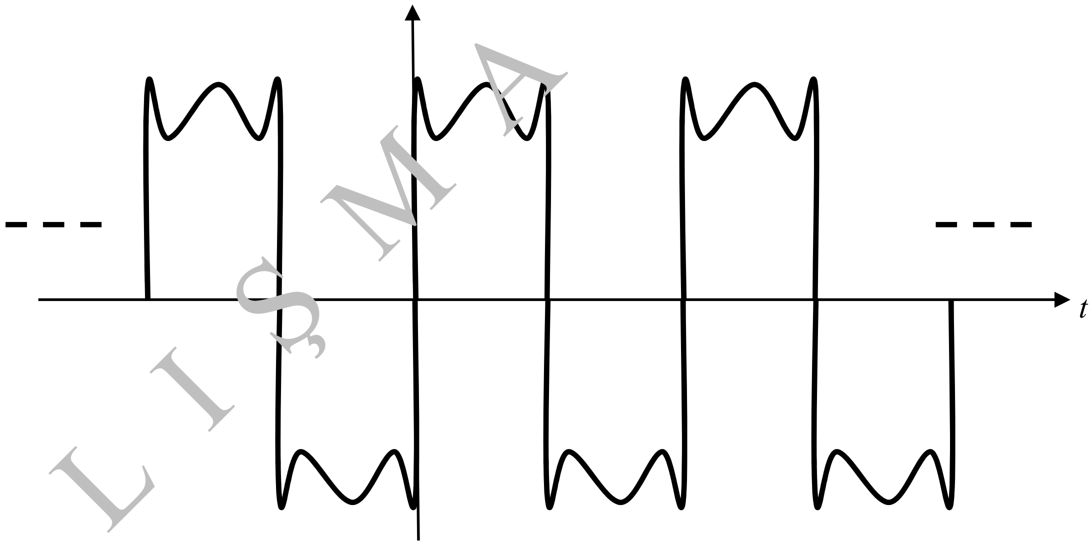
Şekil 17. Periodik darbe işareti : $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos[(2n-1)\,t + \theta_n]$



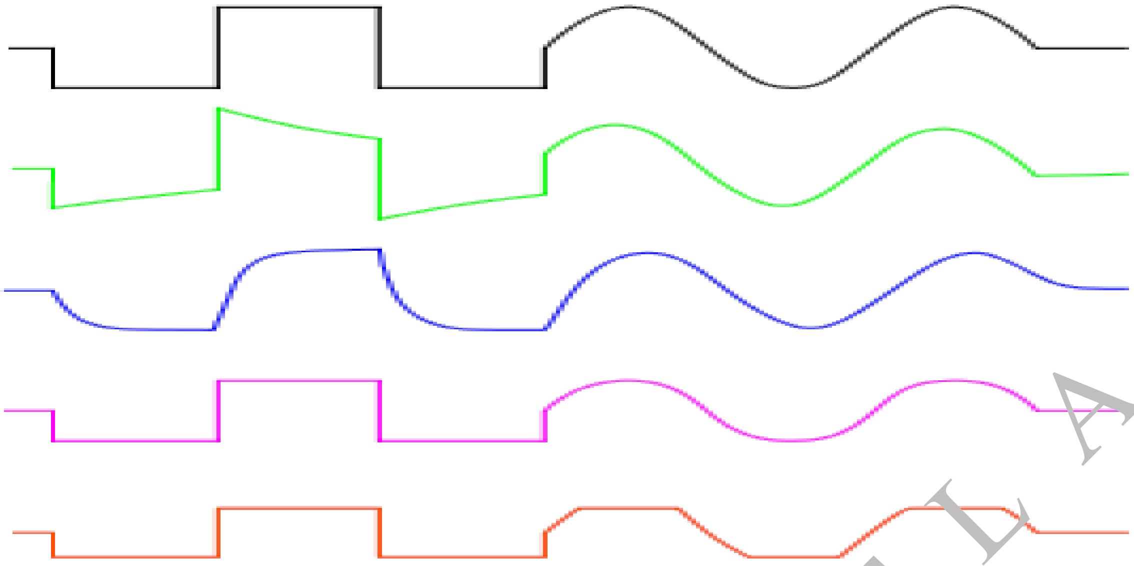
Şekil 18. Periodik üçgen işareti : $f(t) = 1 + \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\,\pi\,t \pm \pi)$



Şekil 20 Chirp işareti : $x(t) = \sin\left(2\pi(f_0 + \frac{k}{2}t)\,t\right)$



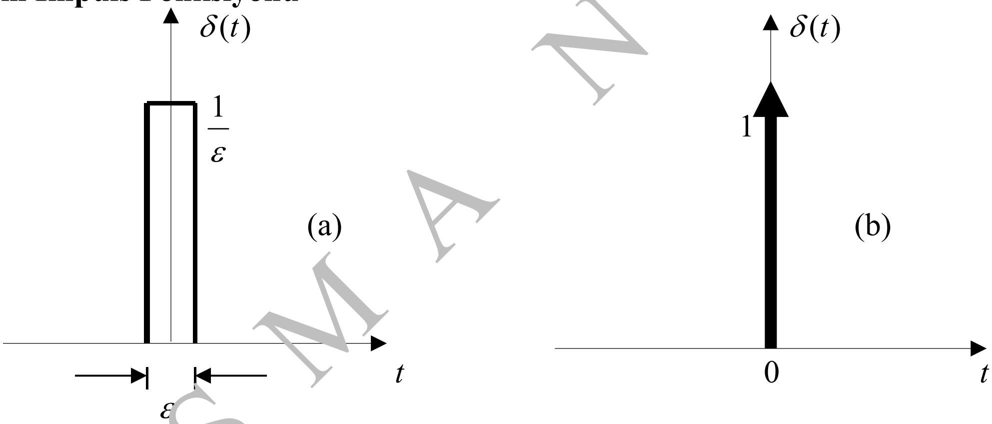
Şekil 21. Osilasyonlu periodik sinusoid işaret



Şekil 22. Gürültülü ve bozulmuş (distorted) sinyaller (filtre edilmesi gereken işaretler)

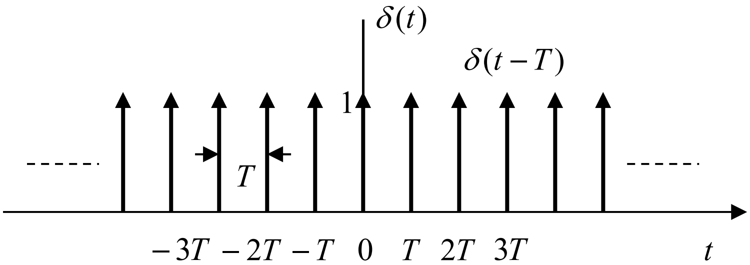
Özel Sinyaller

1. Birim Impuls Fonksiyonu



Şekil 23.Birim impuls (Delta fonksitonu)

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases} \quad , \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$$



Şekil 24. Impuls dizisi : örnekleme fonksiyonu

1. $\delta(0)=1$, 2. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$, 3. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=1$, 4. $\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$

Örnek

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt$ İşlemini hesaplayın.

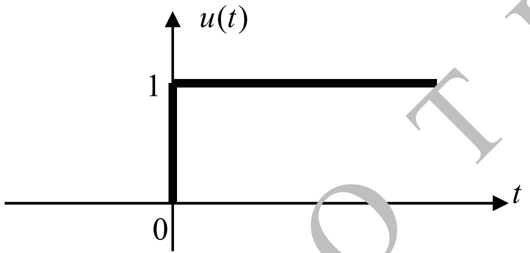
Çözüm

$\delta(0)=1$ ise , $t=4$ için $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt=\delta(4-4)\cos\left(\frac{\pi}{4}4\right)=\delta(0)\cos(\pi)=-1$

2. Birim Basamak Fonksiyonu

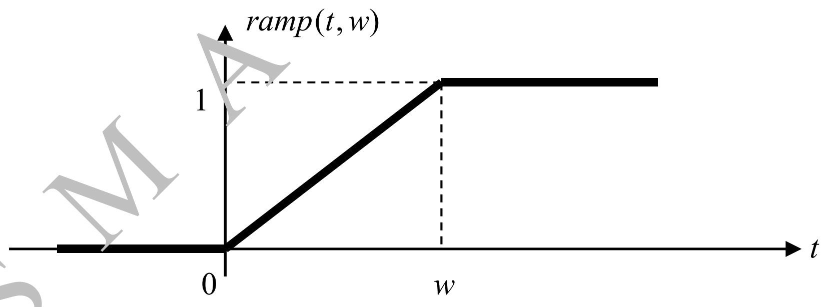
Birim adım (unit step) veya olarak bilinen bu işaretin matematiksel modeli ;

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



Şekil 26. Birim basamak fonksiyonu

3. Birim rampa fonksiyonu



Şekil 27. (b): Birim rampa fonksiyonu

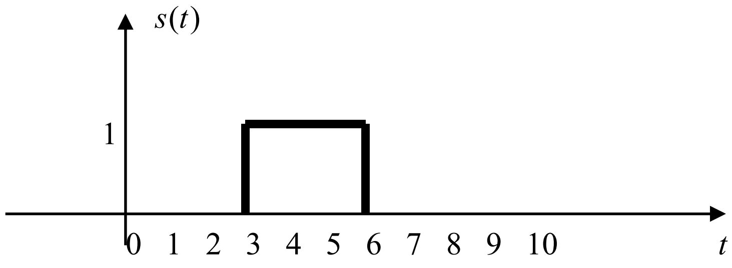
$$ramp(t)=\begin{cases}t & t\geq w\\ t/w & 0\leq t\leq w=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)d\lambda=tu(t)\\ 0 & t<0\end{cases}$$

Örnek $y=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}u(t)\,dt$ integralini hesaplayın

Çözüm

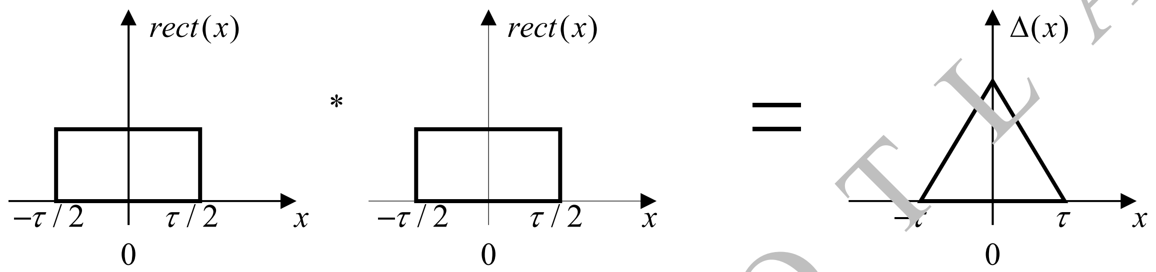
$$y=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}u(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}(e^{-2t})_{0}^{\infty}=-\frac{1}{2}(e^{-\infty}-e^{0})=-\frac{1}{2}(\frac{1}{e^{\infty}}-1)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{\infty}-1)=-\frac{1}{2}(0-1)=0.5$$

Örnek $s(t)=u(t-3)-u(t-6)$



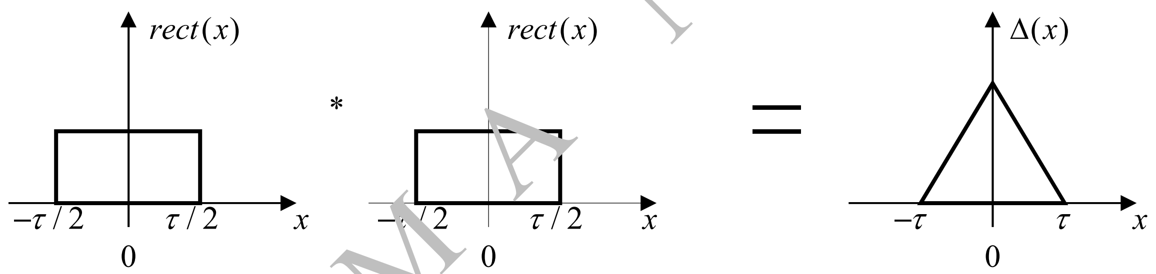
Şekil 28. İki birim basamak fonksiyonunun farkı

Dörtgen – Üçgen Darbe İlişkisi : $\Delta(x) = rect(x) * rect(x)$



Şekil 29. $\Delta(x) = rect(x) * rect(x)$

Dörtgen – Üçgen Darbe İlişkisi : $\Delta(x) = rect(x) * rect(x)$



Şekil 98. $\Delta(x) = rect(x) * rect(x)$

Gauss Dağılımı ve Standart Normal Dağılım

Normal dağılım olasılık ve istatistikte oldukça önemlidir ve olasılık dağılımlarının en çok kullanılanıdır. Bu dağılım ilk olarak 1733 de De Moivre, sonrasında ise 1809 da Gauss tarafından bulundu. Bu nedenle normal dağılım bazen Gauss dağılımı olarak da bilinir.

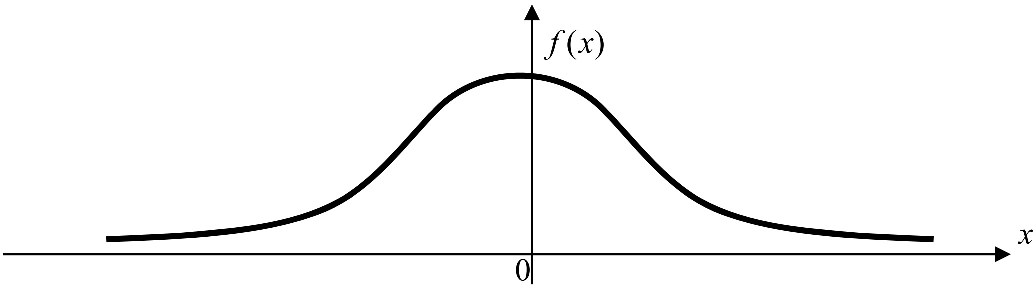
Gaussian Fonksiyon : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\mu =$ dağılımın ortalamsı

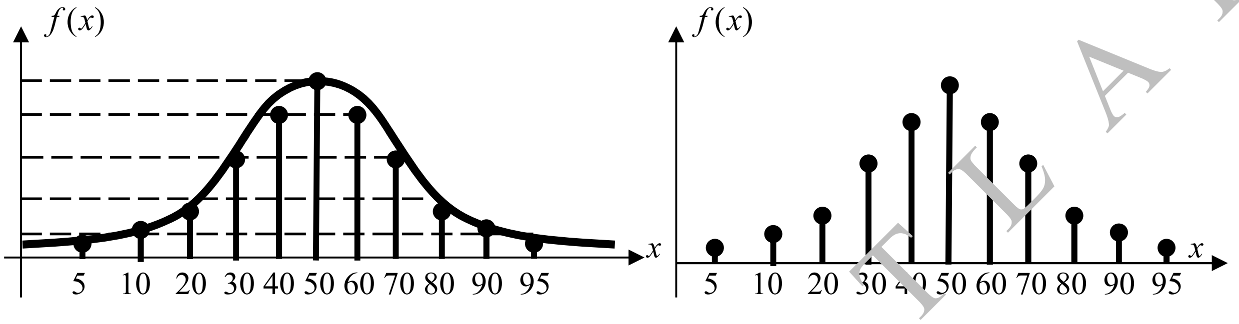
$\sigma =$ dağılımın standart sapması

Görüldüğü gibi Gaussian fonksiyonunun ortalaması $\mu = 0$ ve varyansı $\sigma^2 = 1$ alınırsa, ***standart normal dağılım fonksiyonu*** elde edilir.

Standart Normal Dağılım Fonksiyon : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



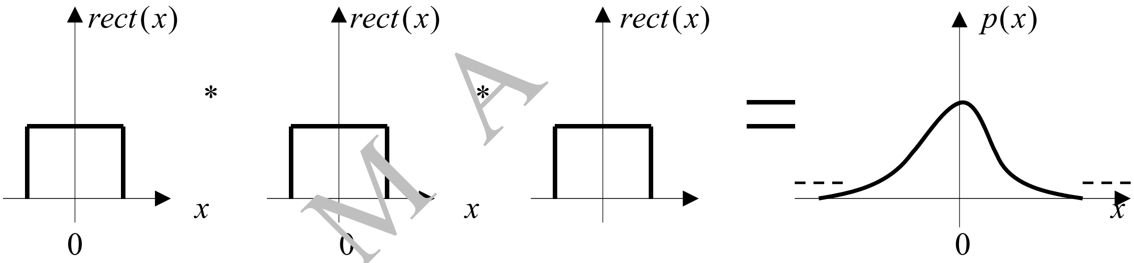
Şekil 52.Normal dağılım ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$)



Şekil 53.Normal dağılım

Dörtgen – Gauss İlişkisi

$p(x) = rect(x) * rect(x) * rect(x)$



Şekil 101. $p(x) = rect(x) * rect(x) * rect(x)$

Periyodik Sinyaller

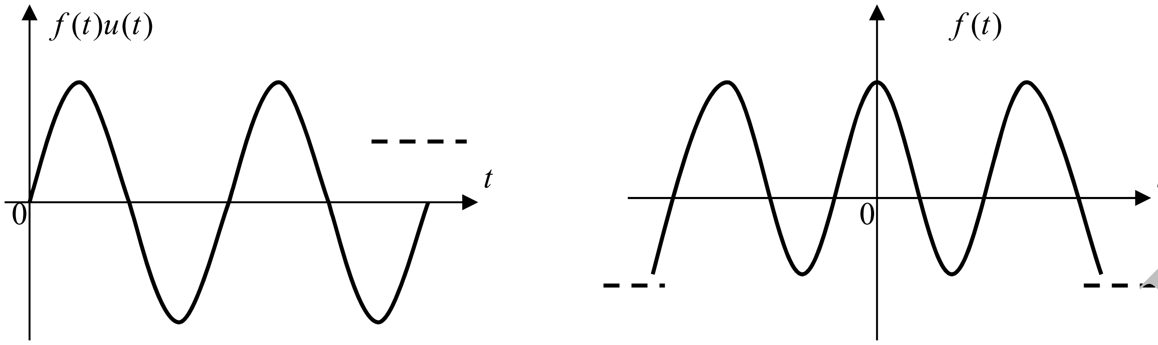
Genel anlamda bir $x(t)$ işareti sürekli veya ayrık formda

$x(t) = x(t+T)$ veya $x(n) = x(n+T)$

Periyodik İşaretlerin Nedenselliği

$f(t) = 0 \quad , \quad t < 0$

Bu tür işaretlere aşağıdaki (a) da görülen işaret örnek gösterilebilir.

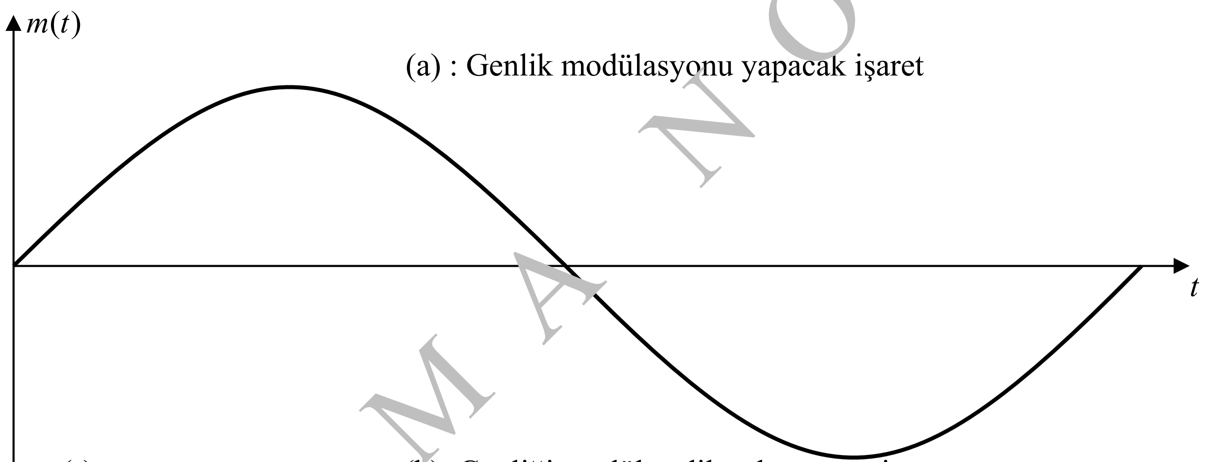


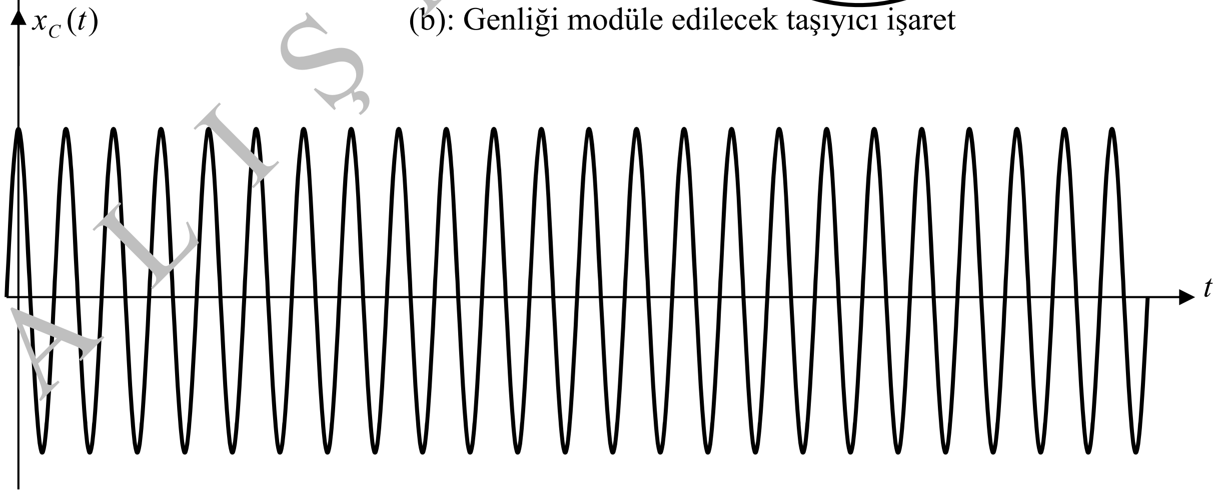
- a -   - b -

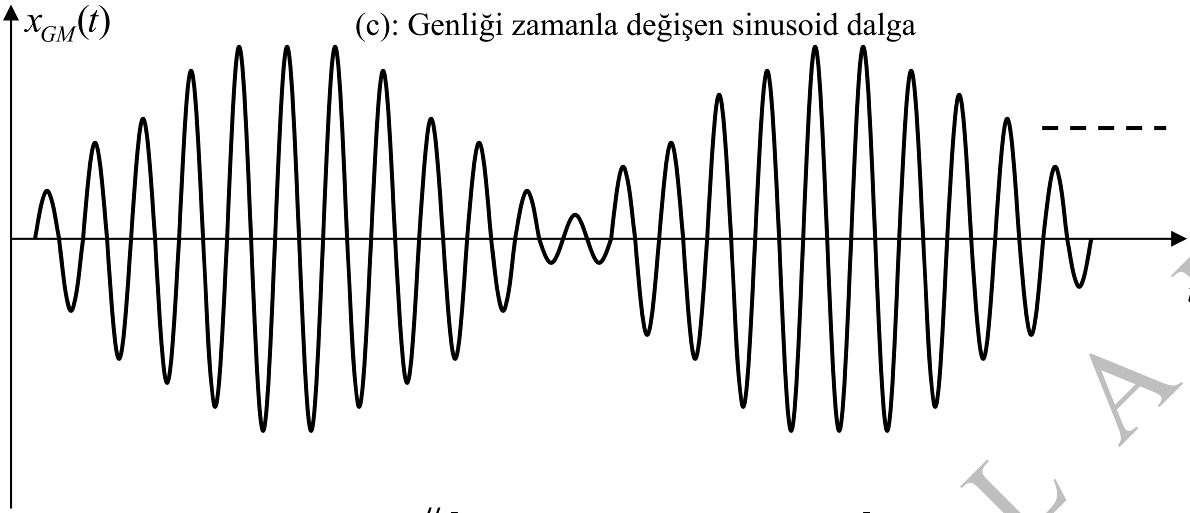
Şekil 61: Nedensel/casual ve (b) : nedensel olmayan/noncausal işaretler

$$f(t)u(t) \quad , \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

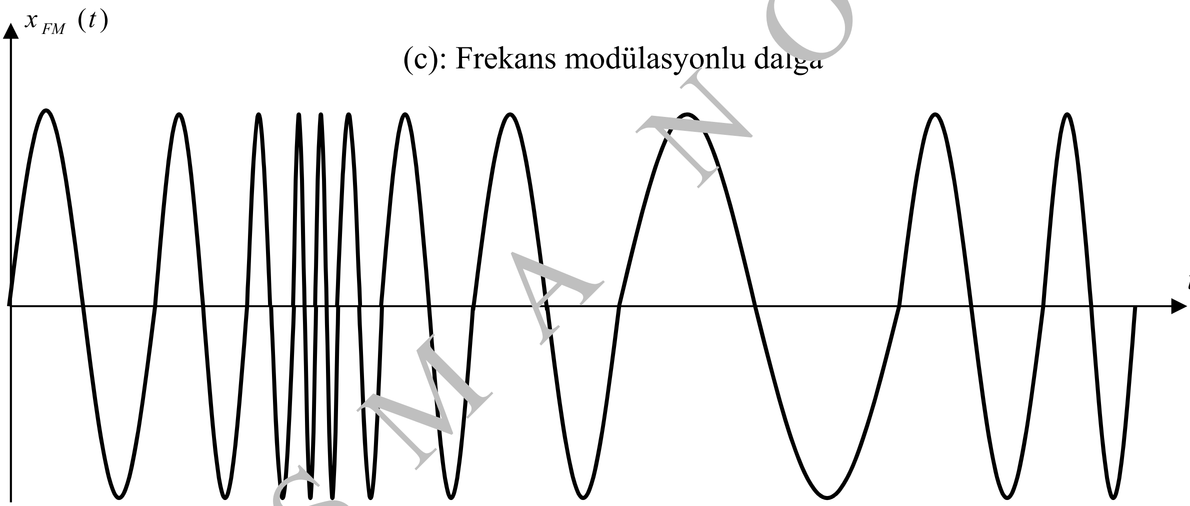
1. Genlik Modülasyonunun Grafik Gösterimi







Şekil 59: $x_{GM}(t) = A_C \cos \omega_C t + \frac{\mu}{2}\left[\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t\right]$ genlik modülasyon işareti



Şekil 60. Frekans modülasyonlu dalga : $x_{FM}(t) = A\cos\theta(t) = A\cos\left[\omega_C t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right]$

Frekans Modülasyonlu Sinyalin Band Genişliği

Sinusoidal sinyalleri temel alan Carson Kuralına göre frekans modülasyonlu dalgaların band genişliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B = 2(\Delta f + f_m)$$

Δf = Anlık frekansın $[f(t)]$, taşıyıcı f_c ve f_m mesaj sinyali frekansından olan sapması.

Anlık Frekans ve Sinusoidler

$$x(t) = A\cos(\omega_C t + \theta_0) = A\cos\theta(t)$$

gibi düşünülürse, bağıntısından $\theta(t)$ genelleştirilmiş açının, zamana göre türevinden bulunur.

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$2\pi\ f_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \text{veya} \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$$

olarak bulunur. Buna göre eğer tek frekanslı sinusoid $\theta(t) = \omega_C t + \theta_0$ olarak düşünülürse

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_C t + \theta_0) = \omega_C \ \text{rad/sn}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\omega_C t + \theta_0) = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{2\pi\ f_C}{2\pi} = f_C \ \text{Hz}$$

Örnek

Modüle edici işaret $m(t) = 9\cos 10000\,\pi\, t$ ve taşıyıcı frekansı $x_C(t) = 10\cos 200\pi \mathrm{K} t$ olan bir GM modülatörde

a) Alt ve üst yan bantların frekans sınırlarını bulun.
b) Eğer $9\cos 6000\pi\, t$ modüle edici işaretle genlik modülasyonu yapılıyorsa, alt ve üst yan bantları bulun
c) Bant genişliğini bulun.
d) Modülasyon indeksini bulun.
e) Çıkış frekans tayfını (spektrumunu) çizin.

Çözüm

$$x_{GM}(t) = A_C \cos\omega_C t + \frac{\mu}{2}\left[\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t\right]$$

Bağıntısı gereği modüle edici işaret

$$m(t) = 9\cos 10000\,\pi\, t = 9\cos 2\pi(5000)\,t$$

$$x_C(t) = 10\cos 200\pi \mathrm{K} t = 10\cos 2\pi(100\mathrm{K})t$$

Alt yan bant $= f_C - f_m = 100 - 5 = 95 \text{kHz}$

Üst yan bant $= \omega_C +_m = 100 + 5 = 105 \text{kHz}$

Buna göre üst yan bandı (USB) 105 kHz ve alt yan bandı (LSB) 95 kHz olan bir sistem söz konusudur. Diğer bir deyişle bu sistemde ancak 95-105 kHz bantları arasında GM (haberleşmesi) yapılabilecektir.

b) $m(t) = 9\cos 6000\pi t$ işaretle GM yapılıyorsa, alt ve üst yan bantlar için

$m(t) = 9\cos 6000\pi t = 9\cos 2\pi(3000)t$
Alt yan bant $= f_C - f_m = 100 - 3 = 97$ kHz
Üst yan bant $= f_C + f_m = 100 + 3 = 103$ kHz

Bu duruma göre alt yan frekansı (LSF) 97 kHz ve üst yan frekansı (USF) 103 kHz olan bir işaret için GM yapılmak istenmektedir. Bu duruma göre bulunan bu değerler 97-103 kHz (bant genişliği 6 kHz), 95-105 kHz ana sistem bant genişliği arasında olduğundan, 97-103 kHz GM sağlıklı yapılabilecektir.

c) Bant genişliği olarak kastedilen 95-105 kHz GM sisteminin bant genişliğidir.

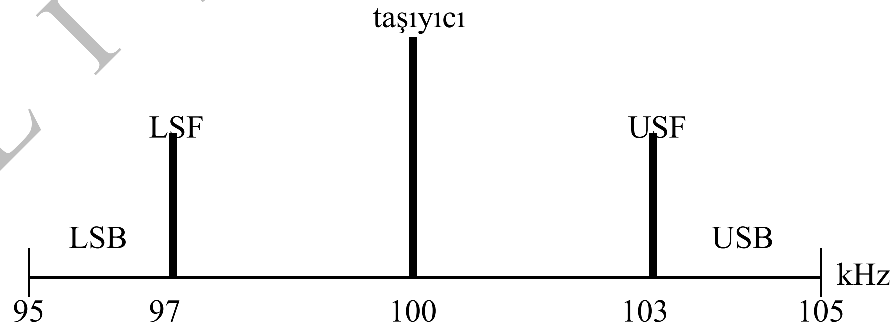
$B = 2f_m = 2 \times 5 = 10$ kHz

Buna göre böyle bir sistemden 97-103 kHz işaret (bant genişliği 6 kHz) iletilebilir.
d) Modülasyon indeksi

$m(t) = 9\cos 2\pi(3000)t$
$x_C(t) = 10\cos 2\pi(100\text{ K})t$
$m = \dfrac{A_m}{A_C} = \dfrac{9}{10} = 0.9$
$0 \le m \le 1$

olduğundan, oldukça sağlıklı bir modülasyon söz konusudur.

e) Elde edilenlerin ışığında $m(t) = 9\cos 2\pi(3000)t$ ile modüle edilen $x_C(t) = 10\cos 2\pi(100\text{ K})t$ işaretinin genliğinin zamanla değişimini gösteren, genlik modülasyonlu $x_{GM}(t) = m(t) \times x_C(t)$ dalganın, spektrumu ($X_{GM}(\omega)$) yani frekans tayfı aşağıdaki gibi olacaktır.



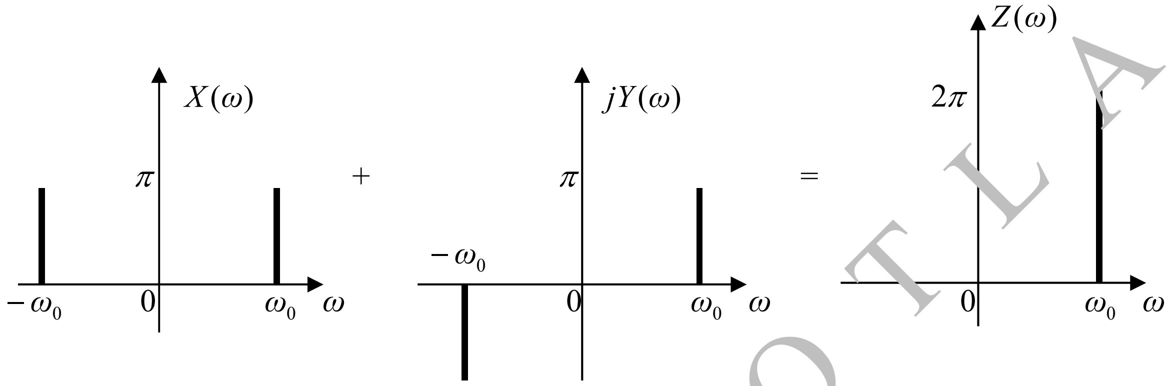
Şekil 216. 10 kHz Band genişlikli GM spektrumu (tayfı)

Analitik İşaret

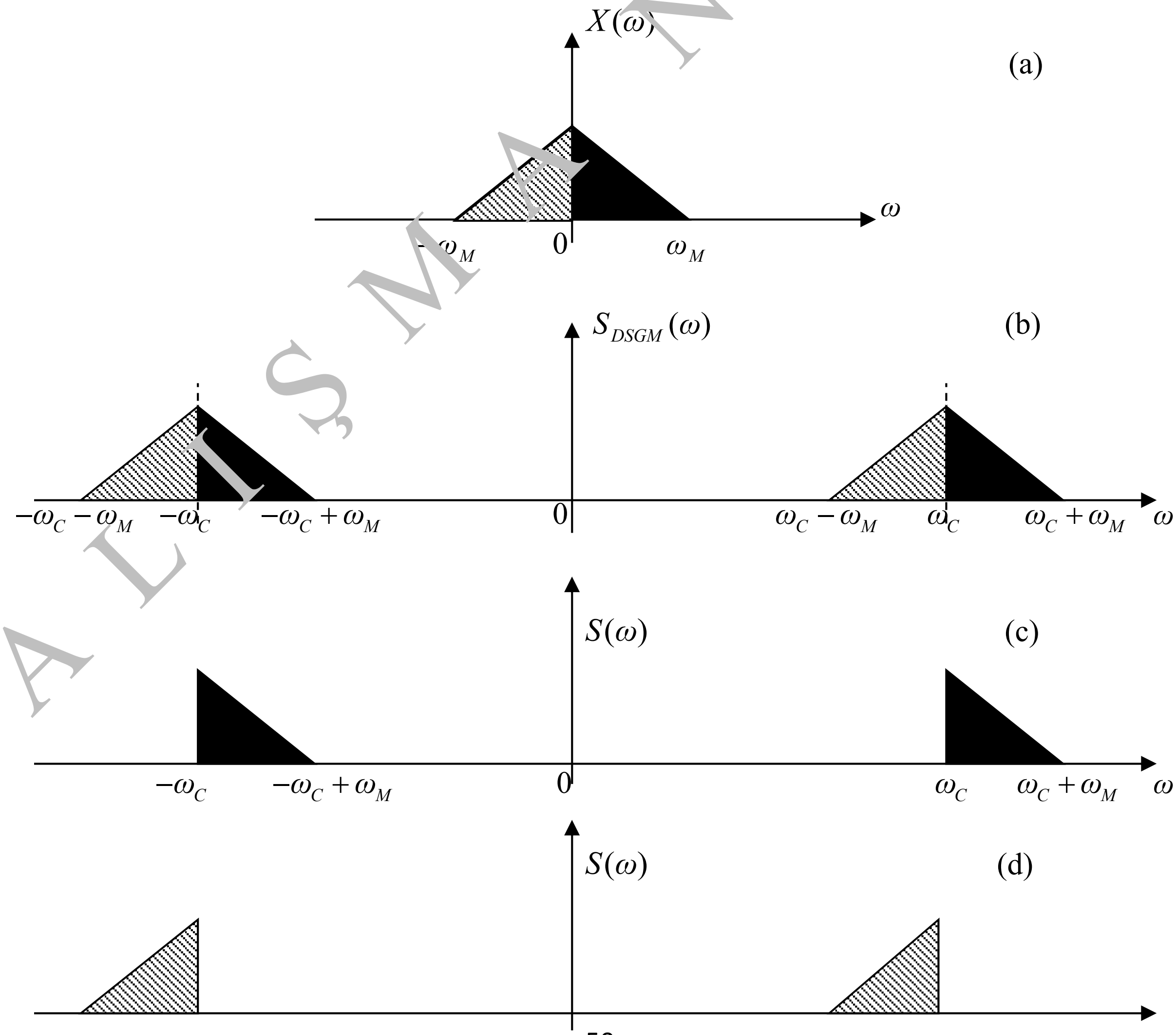
Reel bir $x(t)$ işareti analitik işarete dönüştürülebilir Buna göre eğer gerçek bir işaret $x(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $X(\omega)$ ile analitik işaret $z(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $Z(\omega)$ arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega \geq 0 \\ X(0) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$z(t) = x(t) + j\, y(t)$$



Şekil 62. Analitik $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ işaretin spektrumu



ω

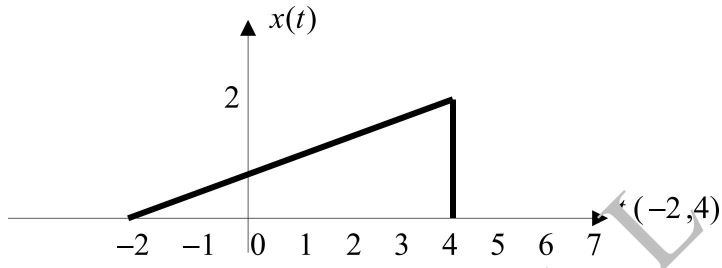
$-\omega_C - \omega_M$ $-\omega_C$ 0 $\omega_C - \omega_M$ ω_C

Şekil 63. Çift yan modülasyondan tek yan band modülasyona geçiş

Sinyaller ve İşlemler

Örnek

Aşağıdaki $x(t)$ işareti için istenen işlemleri elde edin.



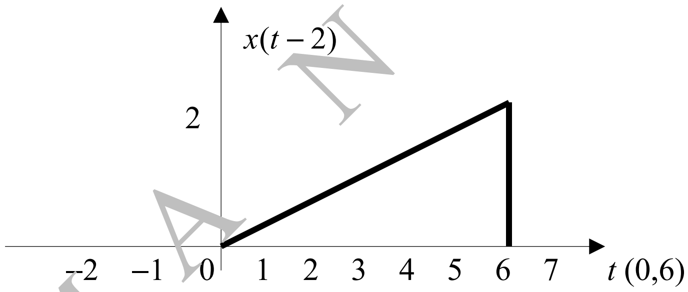
Şekil 31.

a) $x(t-2)$ b) $x(t+2)$ c) $x(2t)$ d) $x(\frac{t}{2})$ e) $x(-t)$ f) $2x(t)$ g) $-x(t)$ h) $x(t)+1$

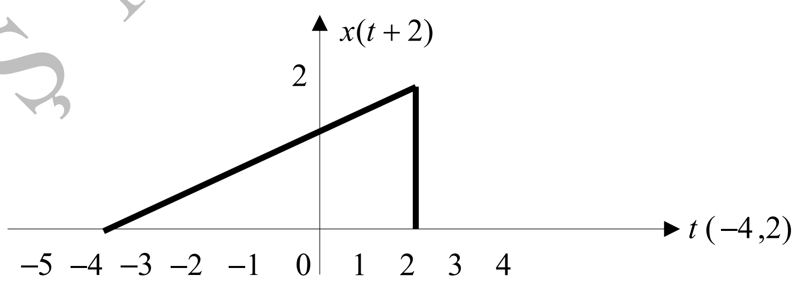
Çözüm

a) $x(t-2)$

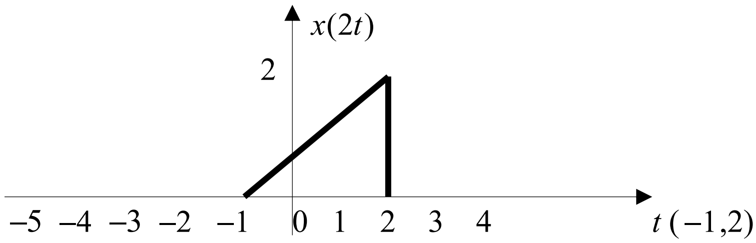
1. $t-2=-2$
   $t=0$
2. $t-2=4$
   $t=6$



b) $x(t+2)$
1. $t+2=-2$
   $t=-4$
2. $t+2=4$
   $t=2$



c) $x(2t)$
1. $2t=-2$
   $t=-1$
2. $2t=4$
   $t=2$



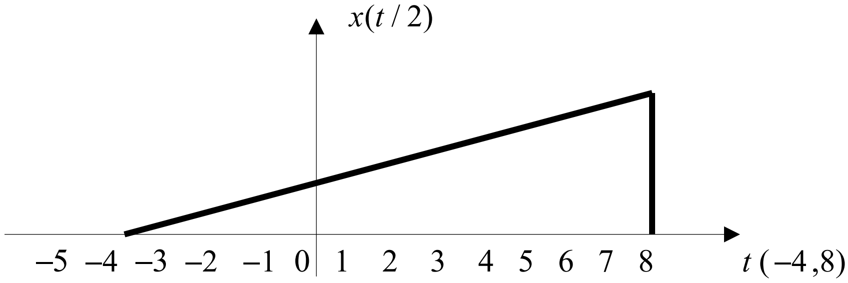
d) $x(t/2)$

1. $\dfrac{t}{2}=-2$

   $t=-4$

2. $\dfrac{t}{2}=4$

   $t=8$



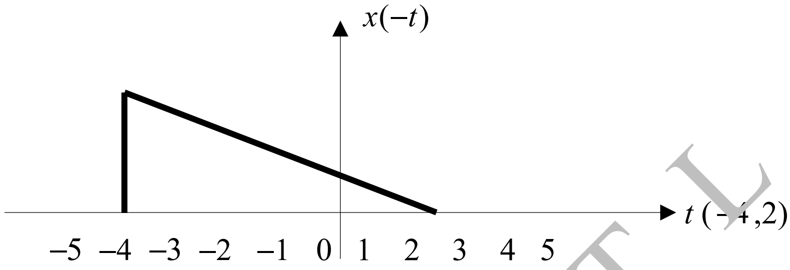
e) $x(-t)$

1. $-t=-2$

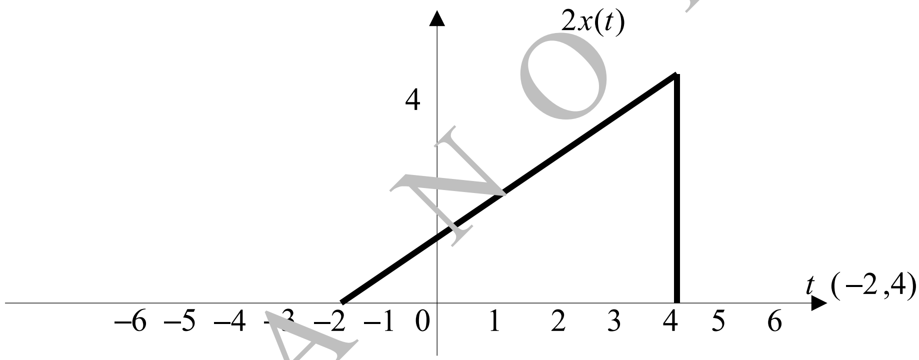
   $t=2$

2. $-t=4$

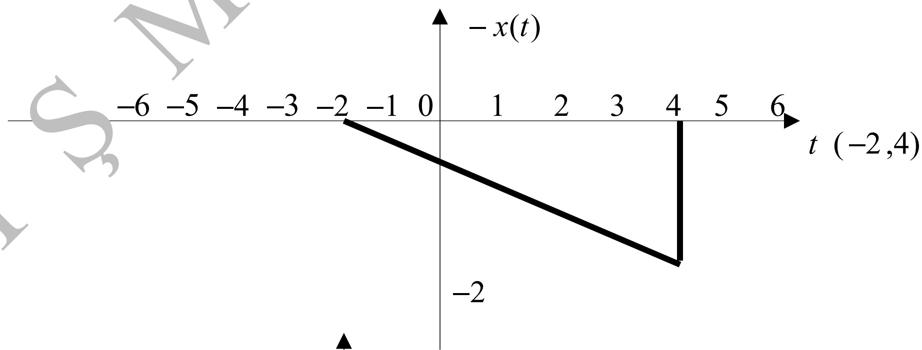
   $t=-4$



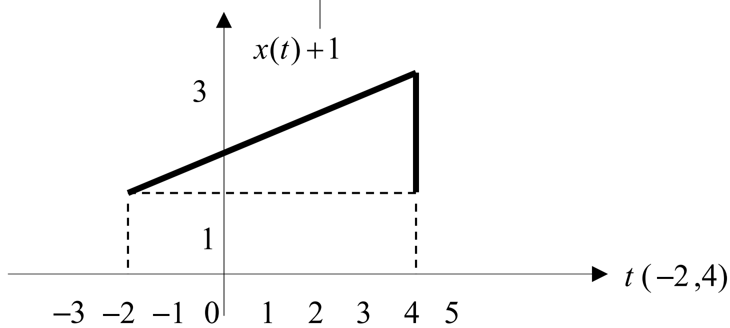
f) $2x(t)$



g) $-x(t)$



h) $x(t)+1$



Şekil 32. Çeşitli işaret işlemleri