SAYISAL ANALİZ

Doç.Dr. Cüneyt BAYILMIŞ

SAYISAL TÜREV

(Numerical Differentiation)

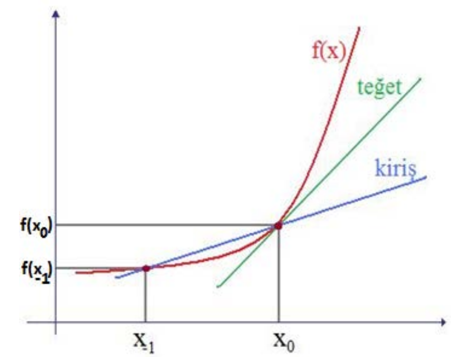
İÇİNDEKİLER

Sayısal Türev

- **Türev,** bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
  - Örnek: Bir firmanın yıllık satış miktarı (cirosu)
- Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir **x** noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle **x** noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.

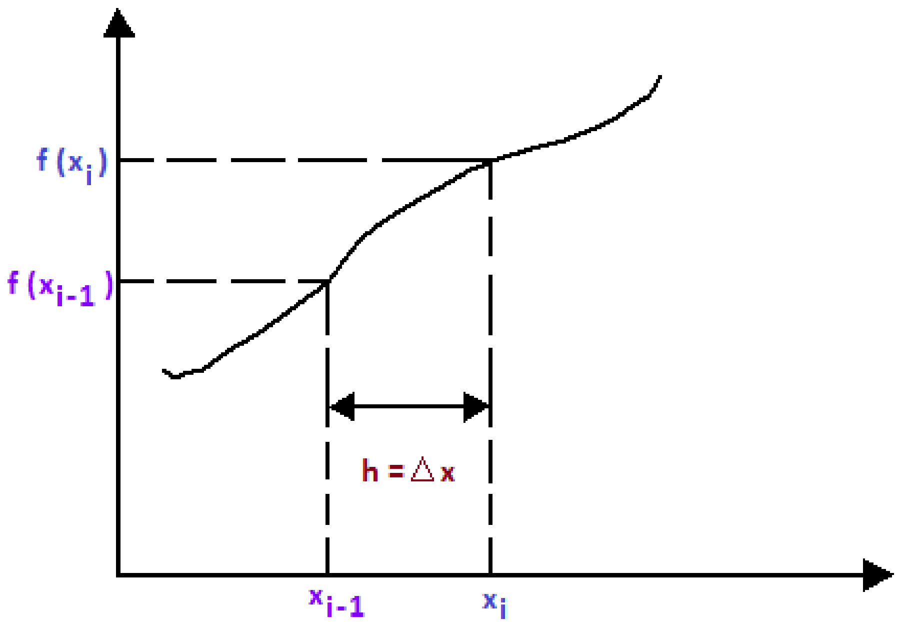
$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- **Sayısal türev,** bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

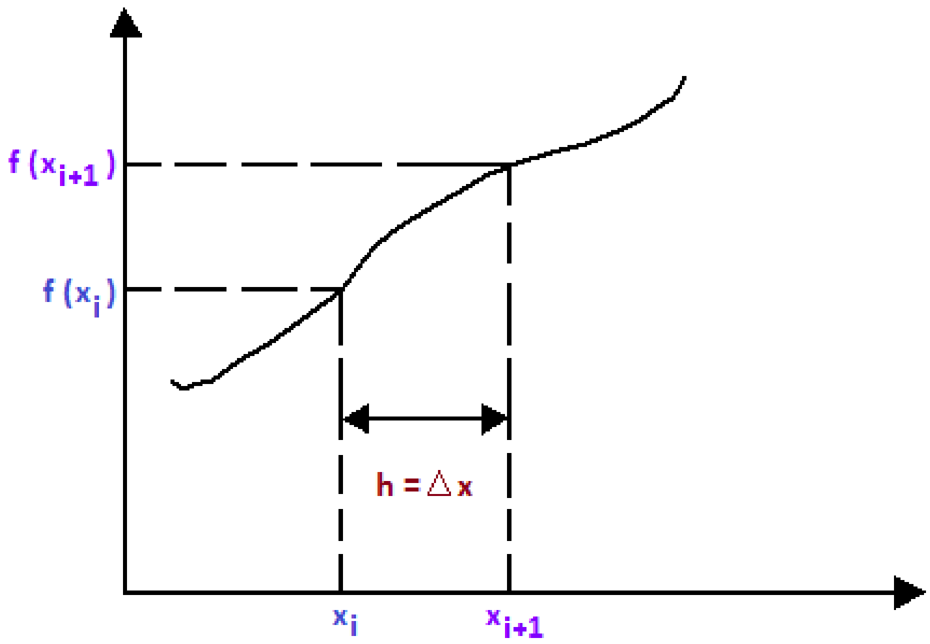
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

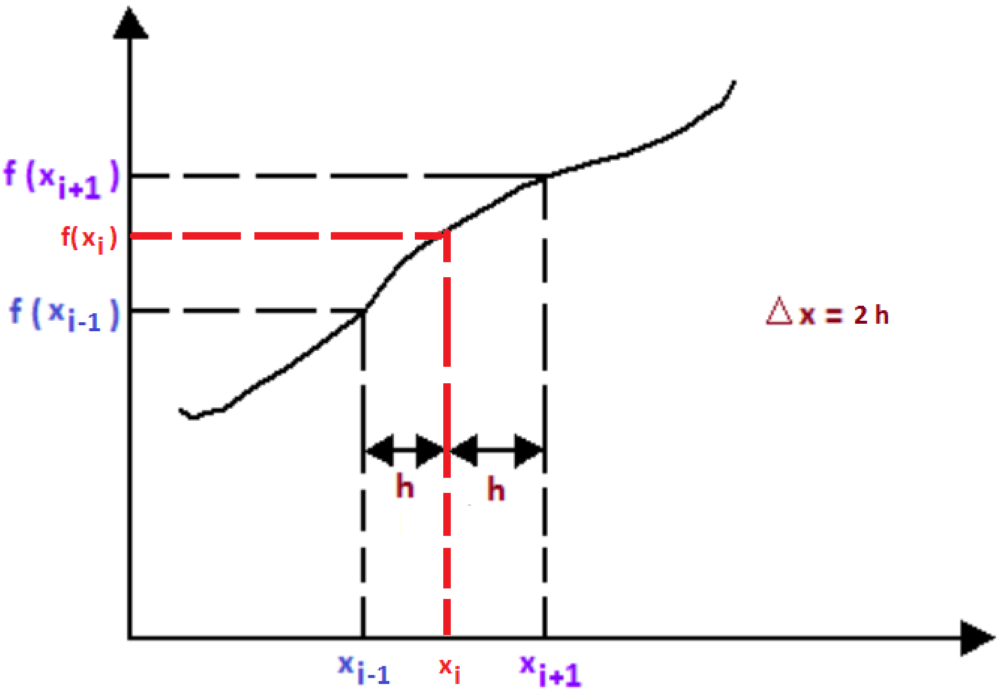
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Sayısal Türev

- **Örnek: f(x)= x^2 fonksiyonunun x=2 noktasındaki türevini h=0.2 kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?**

- **Çözüm:**

  - **Geri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(2) - f(2-0.2)}{0.2} = \frac{2^2 - 1.8^2}{0.2} = 3.8$$

  - **İleri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(2+0.2) - f(2)}{0.2} = \frac{2.2^2 - 2^2}{0.2} = 4.2$$

  - **Merkezi farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(2+0.2) - f(2-0.2)}{2*0.2} = \frac{2.2^2 - 1.8^2}{0.4} = 4$$

  - **Analitik Çözüm**

4

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- Bir fonksiyonun $x_i+\Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i+\Delta x)=f(x_i)+\frac{\Delta x}{1!}f'(x_i)+\frac{\Delta x^2}{2!}f''(x_i)+\frac{\Delta x^3}{3!}f'''(x_i)+\ldots+\frac{\Delta x^n}{n!}f^n(x_i)$$

- Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx' in mertebesine eşit olur.
  - **Örnek:** Taylor serisinde ikinci terim'den sonraki terimler atılacak olursa, yapılan hatanın mertebesi 2 olacaktır.
- Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

Taylor Serisi ile İleri Fark Yöntemi

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

-4

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x)}{2!}$$

+

$$-4f(x_i+h) = -4f(x_i) - 4hf'(x_i) - 4\frac{h^2 f''(x_i)}{2}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2 f''(x)}{2}$$

+

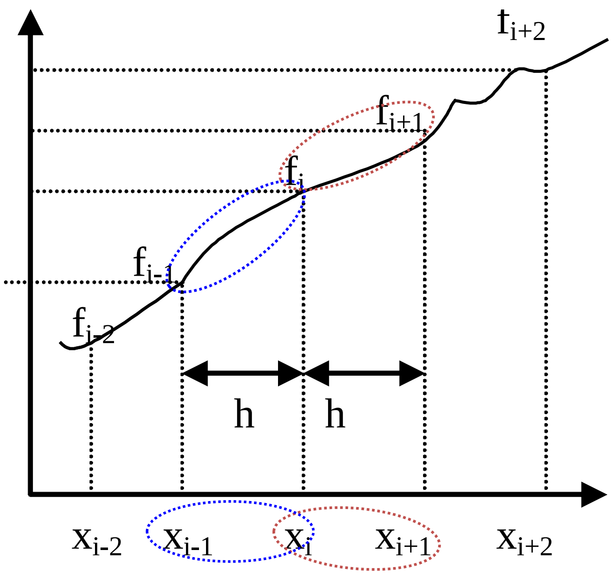
$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_i) + 4f(x_i+h) - f(x_i+ 2$$

Taylor serisi için ileri fark formülü

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi ile Geri Fark Yöntemi

- İleri fark yöntemindeki işlemler **f(x)** fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi için geri fark formülü

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

Sayısal Türev

- **Örnek:** **f(x)=2x²+1** fonksiyonunun **x=2** yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. **h=0.1** ve analitik çözüm **f'(2)=8**

- **Çözüm:**

- **Basit ileri farkla çözüm**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} = \frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} = \frac{(2*2.1^2+1)-(2*2^2+1)}{0.1} = \frac{9.82-9}{0.1} = 8.2$$

- **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f_i = f(2) = 2*2^2+1 = 9$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

$$f_{i+1} = f(2.1) = 2*2.1^2+1 = 9.82$$

$$f_{i+2} = f(2.2) = 2*2.2^2+1 = 10.68$$

$$f_i' = \frac{1}{2*0.1}\left[-3*9+4*9.82-10.68\right] = \frac{1.6}{0.2} = 8$$

Sayısal Türev

- **Örnek: $f(x) = x^2e^x$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini 0.1 adımlarla ileri, geri, merkezi farklar ve taylor serisi 2. kuvvetin sayısal türev yöntemlerini kullanarak ayrı ayrı hesaplayınız.**

diff komutu ile sembolik türev alma

- Tanımlanan bir denklemin türevini alır.
- diff (denklem, değişken)

türev işleminde kullanılacak değişkenin adı

çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklem

```
%  sembol tanımlama
>> syms x
%  diff komutu ile sembolik türev alma
>> diff (x^2)
ans =
     2*x
```

```
%  sembol tanımlama
>> syms x t
%  diff komutu ile sin(2xt)nin t'ye göre türevi
>> diff (sin(2*x*t), t)
ans =
     2*x*cos(2*t*x)
```

diff komutu ile sembolik katlı türev alma

- Katlı türev alma durumu.
- diff (denklem, değişken, türevderecesi)

```
%  sembol tanımlama
>> syms x
%  diff komutu ile x² nin 2. dereceden türevi
>> diff (x^2, x, 2)
ans =
     2
```

diff komutu ile bir dizinin türevini alma

- **MATLAB'ta dizi elemanları arasındaki fark diff komutu ile elde edilebilir.**

t (sn)	0	0.5	1	1.5
y(t)	0	0.6	1.9	2.6

```
%  zaman artışını belirt
>> dt=0.5;
%  diziyi belirt
>> y= [0 0.6 1.9 2.6];
%  dizinin türevi
>> dydt = diff (y)/dt
dydt =
     1.2000    2.6000    1.4000
```

Sayısal Türev MATLAB Uygulama

```
% Sayısal Türev
%%%%%%%%%%%%%%%%
x=[0:0.5*pi:2*pi];
y=1+2*sin(x);
n=length(x);

%ileri farklar
dydxi=(y(2:n)-y(1:n-1))./(x(2:n)-x(1:n-1));
xi=x(1:n-1);

%geri farklar
dydxg=(y(1:n-1)-y(2:n))./(x(1:n-1)-x(2:n));
xg=x(2:n);

%merkezi farklar
dydxm=(y(3:n)-y(1:n-2))./(x(3:n)-x(1:n-2));
xm=x(2:n-1);

%analitik türev
dydx=2*cos(x);

% türev farklarının ortalaması
ileri = mean(abs(dydx(1:end-1)- dydxi))
geri = mean(abs(dydx(2:end)- dydxg))
merkezi = mean(abs(dydx(2:end-1)- dydxm))

plot(x,dydx,':rs',xi,dydxi,'-.ko',xg,dydxg,'--<',xm,dydxm,'-g*')
legend('analitik','ileri','geri','merkezi',-1)
```

ÖDEV

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

- **$f(x)= e^{2x-3}$ fonksiyonunun x=2 için, h=0.2 adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak türevini hesaplayınız.**

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**