SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Bilgisayar Grafiği
HAFTA 4
2B Koordinat Sistemi

Arş. Gör. Dr. Gülüzar ÇİT

Bilgisayar ve Bilişim Bilimleri Fakültesi

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

gulizar@sakarya.edu.tr

Konu & İçerik

- Bilgisayar Grafiklerinin temel matematiği
  - 2B/3B Nokta Gösterimi
  - 2B Dönüşümler
    - Ölçekleme
    - Öteleme
    - Döndürme
    - Aynalama
    - Birleşik Dönüşümler
- Kaynaklar

2B/3B Nokta Gösterimi

- **2B Nokta gösterimi**
  - Satır vektörü: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$
  - Sütun vektörü: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- **3B Nokta gösterimi**
  - Satır vektörü: $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$
  - Sütun vektörü: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

2B Dönüşümler

- **$P(x, y)$ noktasının dönüşümü**
  - 2x2'lik bir *T* dönüşüm matrisi ile çarpılır
  - $P(x, y) \Rightarrow P^*(x^*, y^*)$

$$[X^*] = [X].[T] = [x \quad y].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [ax + cy \quad bx + dy] = [x^* \quad y^*]$$

2B Dönüşümler…

- **$P(x, y)$ noktasının dönüşümü – Birim matris dönüşümü**
  - $T = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[X^*] = [X].[T] = [x \quad y].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x^* \quad y^*]$$

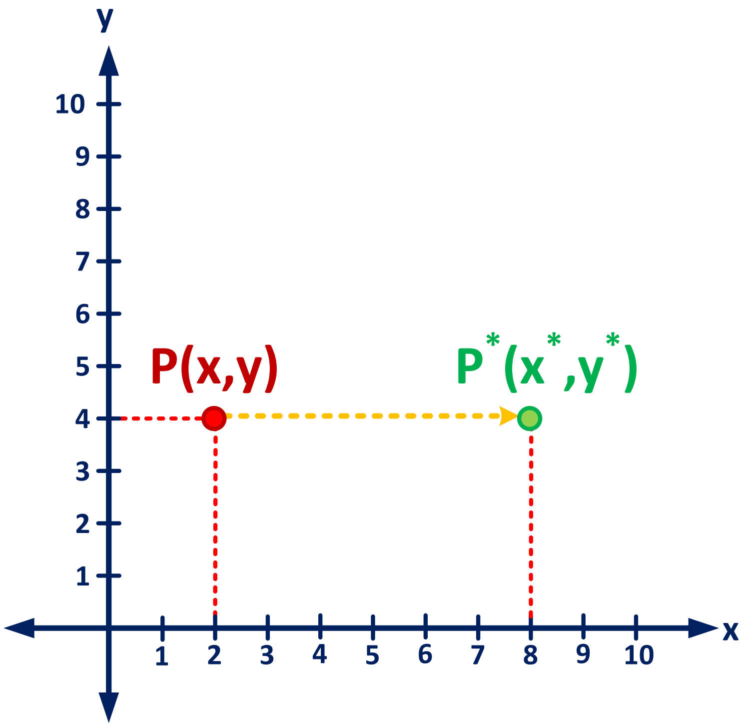
$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y]$$

2B Dönüşümler…

- **$P(x, y)$ noktasının dönüşümü – Ölçekleme**
  - Yatay eksende ölçekleme

$$[X^*] = [X].[T]$$

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y].\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \quad y]$$



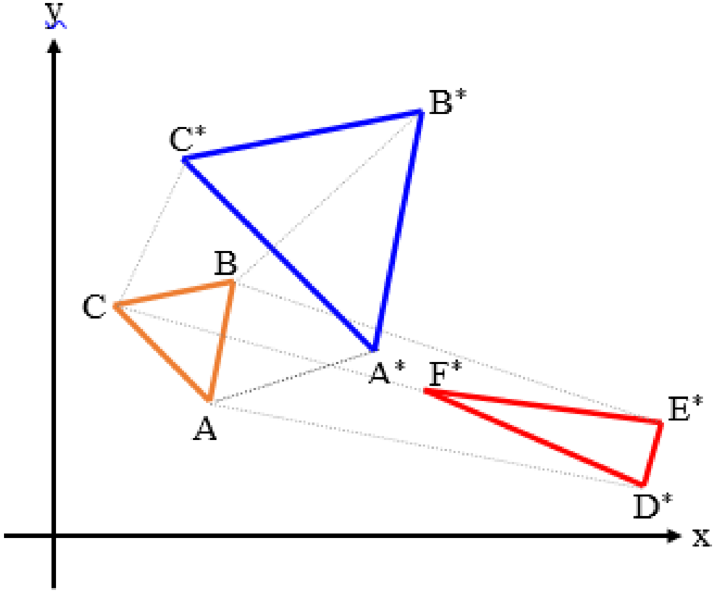
2B Dönüşümler…

➢ $P(x, y)$ noktasının dönüşümü – Ölçekleme…

- ➢ $T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi için
  - ➢ a = d ise düzgün ölçekleme
  - ➢ a = d > 1 ise büyütme
  - ➢ 0 < a = d < 1 ise küçültme
  - ➢ a≠d ise düzgün olmayan ölçekleme

$$[X^*] = [X].[T]$$

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y].\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [ax \quad dy]$$



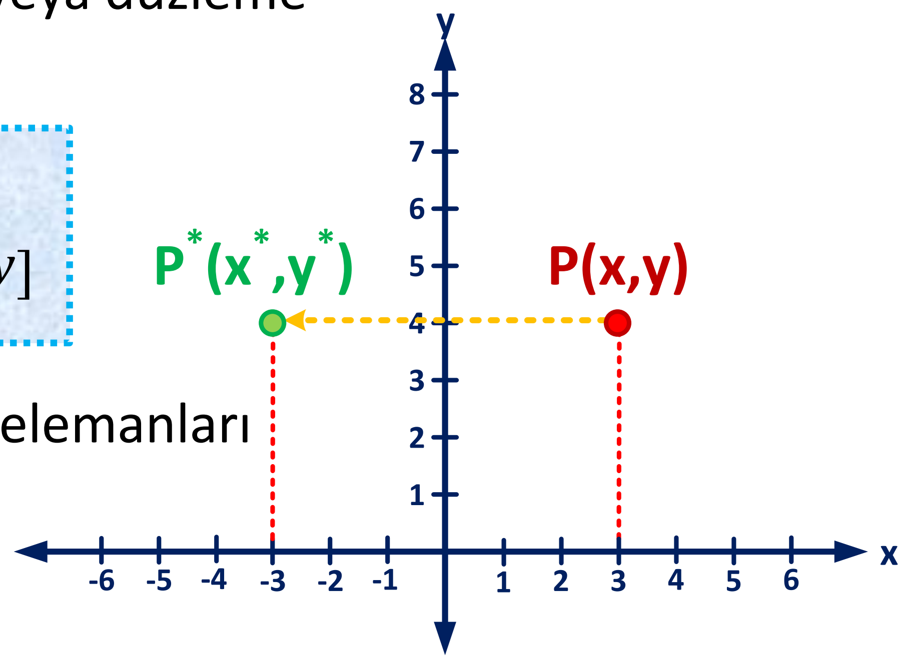
2B Dönüşümler…

➢ $P(x, y)$ noktasının dönüşümü – Aynalama

- ➢ Yatay ve dikey eksende ölçekleme
- ➢ a ve(ya) d negatif ise, eksene göre veya düzleme göre aynalama

$$[X^*] = [X].[T]$$

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y].\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad y]$$



- ➢ NOT: Dönüşüm matrisinin köşegen elemanları ölçekleme ve aynalama etkisi yapar

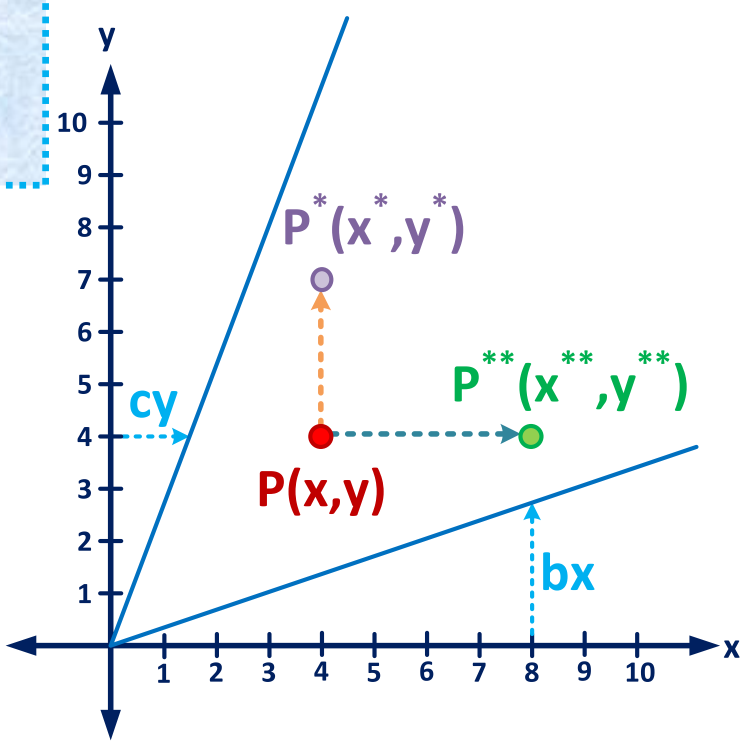
2B Dönüşümler...

- **$P(x, y)$ noktasının dönüşümü – Simetrik Alma**
  - Ölçekleme ile simetrik alma işlemleri gerçeklenebilir

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y].\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix} = [x \quad bx + y]$$

$$[x^{**} \quad y^{**}] = [x \quad y].\begin{bmatrix}1 & 0\\c & 1\end{bmatrix} = [x + cy \quad y]$$

- **Shearing**
  - Değeri sıfırdan farklı olan köşegen dışı elemanların etkisi
  - (0,0) noktası için geçerli değil



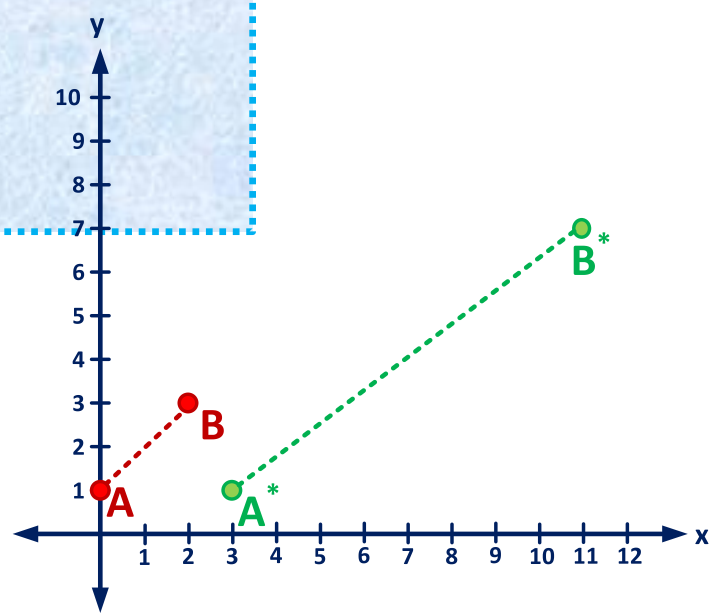
2B Dönüşümler…

- **ÖRNEK:**
  - $A(0,1), B(2,3)$ noktalarına $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dönüşümünü uygulayın

$$L_{AB}.T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = L^*_{AB}$$

$$AB \Longrightarrow y = x + 1$$

$$A^*B^* \Longrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$



2B Dönüşümler...

Orta Nokta Dönüşümü

- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ve $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun
- Uç noktaların (A,B) dönüşümü

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} . [T] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + xy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}$$

- $|A^* B^*|$ doğrusunun orta noktası: (x_m^*, y_m^*)

$$\begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^* + x_2^*}{2} & \dfrac{y_1^* + y_2^*}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \dfrac{x_1 + x_2}{2} + c \dfrac{y_1 + y_2}{2} & b \dfrac{x_1 + x_2}{2} + d \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler…

Orta Nokta Dönüşümü…

- *AB* doğrusunun orta noktası

$$[x_m \quad y_m] = \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

- *T* dönüşümünü, (x_m, y_m) noktasına uygularsak, sonuç aynı olur, yani uygulanan dönüşüm doğrunun tüm noktalarını etkiler

- NOT: BG'de, bir çizginin dönüştürülmüşü, çizginin uç noktalarına dönüşüm uygulandıktan sonra elde edilen noktalar arasına çizgiler çizilerek oluşturulur.

2B Dönüşümler…

Paralel Çizgi Dönüşümü

- $A = [x_1 \quad y_1]$ ve $B = [x_2 \quad y_2\ ]$
- AB doğrusu, EF doğrusuna paralel.
- Dönüşüm sonucu elde edilen A^*B^* ve E^*F^* da birbirine paraleldir

$$m_{(AB)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m^* = \frac{b + dm}{a + cm}$$

2B Dönüşümler...

Kesişen Doğrular Dönüşümü

- $y = m_1x + b_1$ ve $y = m_2x + b_2$ doğrularını ele alalım
- $[x \quad y]\begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [b_1 \quad b_2]$ denkleminin çözümü var ise doğrular birbirini keser.
- Kesim noktası: $[X_i]$ olsun
- $[X].[M] = [B]$
- $X_i = [x_i \quad y_i] = [B][M]^{-1}$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_2 - m_1} & \dfrac{m_2}{m_2 - m_1} \\ \dfrac{-1}{m_2 - m_1} & \dfrac{-m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler…

Kesişen Doğrular Dönüşümü…

- İki doğrunun kesişimi

$$[X_i]=[x_i \quad y_i]=[b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_2-m_1} & \dfrac{m_2}{m_2-m_1} \\ \dfrac{-1}{m_2-m_1} & \dfrac{-m_1}{m_2-m_1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{b_1-b_2}{m_2-m_1} & \dfrac{b_1m_2-b_2m_1}{m_2-m_1} \end{bmatrix}$$

- Bu iki doğruya $T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dönüşü uygulanırsa

- Doğrular $\begin{matrix} y^* = m_1^* + b_1^* \\ y^* = m_2^* + b_2^* \end{matrix}$ formunda olur

2B Dönüşümler…

Kesişen Doğrular Dönüşümü…

- $m_j^* = \frac{b+dm_j}{a+cm_j}$ $\quad b_j^* = b_j(d - cm_j^*) = b_j\left(\frac{ad-bc}{a+cm_j}\right)$ $(j = 1,2, \dots)$
- Dönüştürülmüş doğruların kesişim noktası

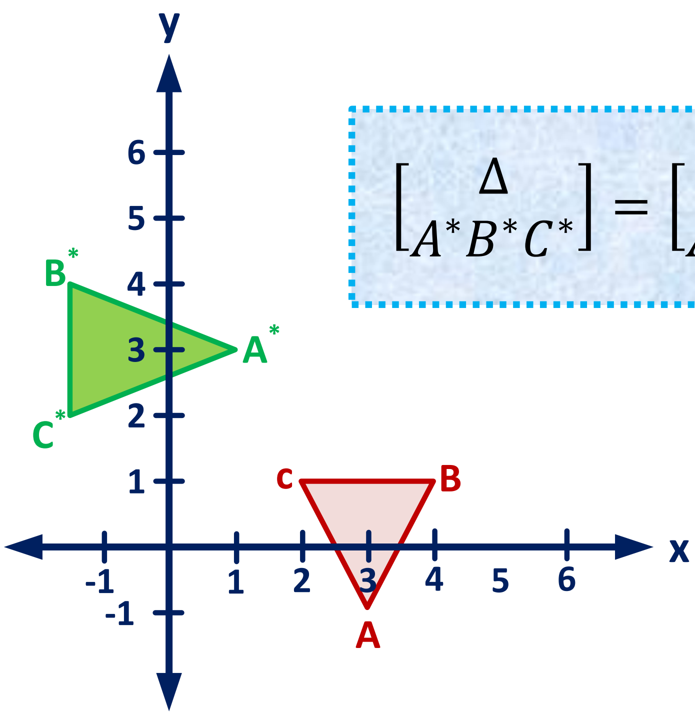
$$[X_i^*] = [x_i^* \quad y_i^*] = \left[\frac{b_1^* - b_2^*}{m_2^* - m_1^*} \quad \frac{b_1^* m_2^* - b_2^* m_1^*}{m_2^* - m_1^*}\right]$$

$$= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{c(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1}\right]$$

- Hesaplanan kesişim noktası $[x_i \quad y_i]$'ye T dönüşümü uygulanırsa aynı sonuç elde edilir.
- NOT: Kesim noktasının dönüşümü, dönüştürülmüş doğruların kesişim noktasına eşittir.

2B Dönüşümler...

- **ÖRNEK:**
  - Döndürme
  - ABC üçgenine $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü uygula



$$\begin{bmatrix} \Delta \\ A^*B^*C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ ABC \end{bmatrix}.[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

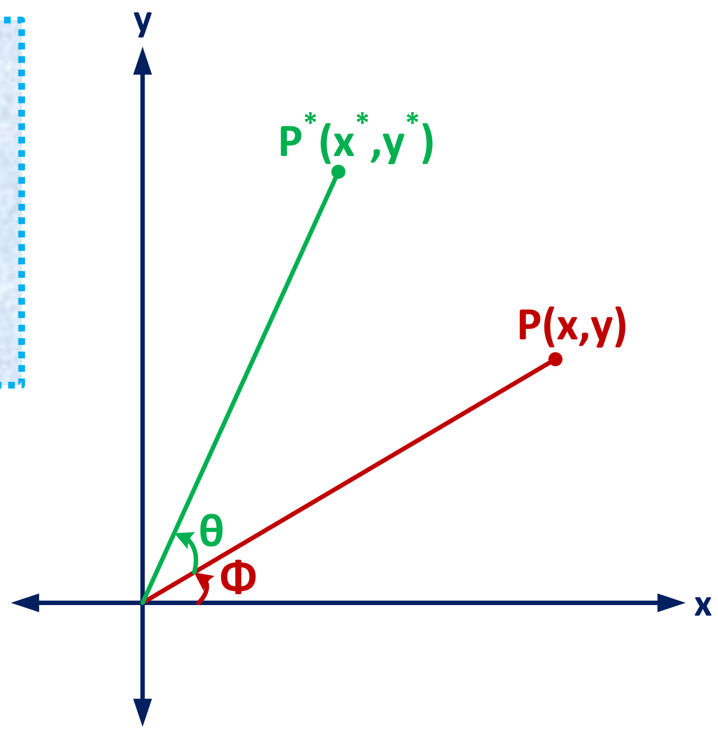
2B Dönüşümler…

Döndürme…

Genel olarak bir θ açısı kadar döndürme:

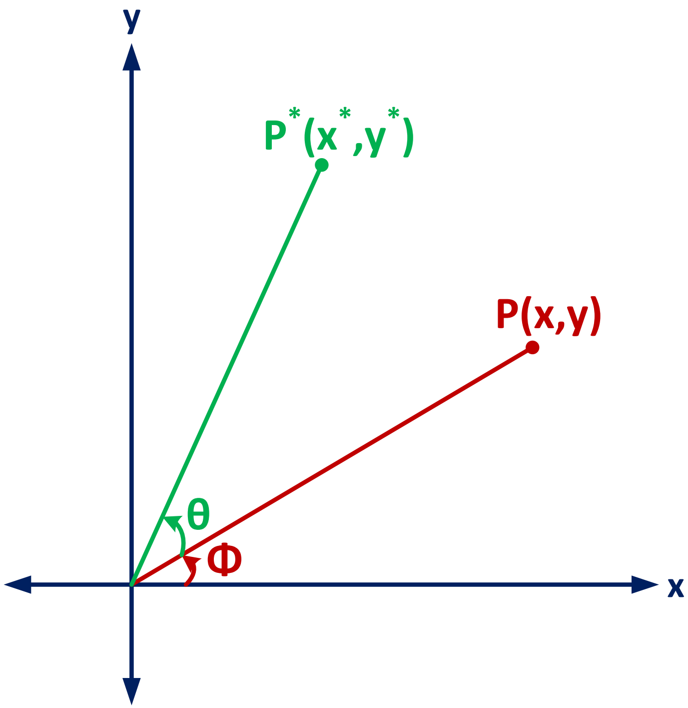
$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

➢ Döndürme…



$$x = r * \cos\theta$$
$$y = r * \sin\theta$$

$$x^* = r * \sin(\emptyset + \theta)$$
$$= r * \cos\emptyset * \cos\theta - r * \sin\emptyset * \sin\theta$$
$$= x * \cos\theta - y * \sin\theta$$
$$y^* = r * \cos(\emptyset + \theta)$$
$$= r * \sin\emptyset * \cos\theta + r * \cos\emptyset * \sin\theta$$
$$= y * \cos\theta + x * \sin\theta$$

$$[x^* \quad y^*] = [x \quad y].\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2B Dönüşümler…

➢ Aynalama

➢ 2B döndürme x-y eksenine dik bir eksen etrafında döndürme olduğundan aynalama da benzer şekilde x, y düzlemleri etrafında 180^o lik döndürme olarak tanımlanabilir

$x\ ekseni, yani\ y = 0\ doğrusuna\ göre$
$aynalama\ dönüşümü:$

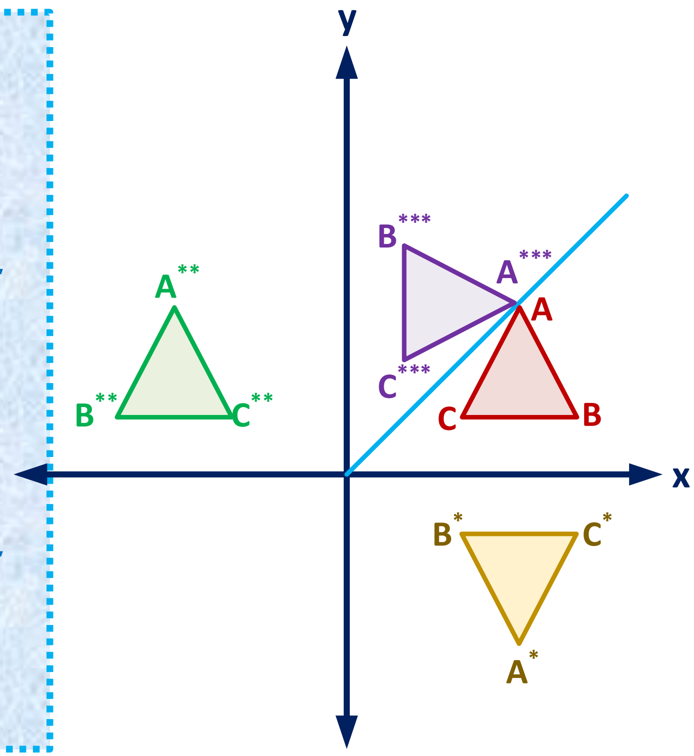
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$y\ ekseni, yani\ x = 0\ doğrusuna\ göre$
$aynalama\ dönüşümü:$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$y = x\ doğrusuna\ göre\ aynalama\ dönüşümü:$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

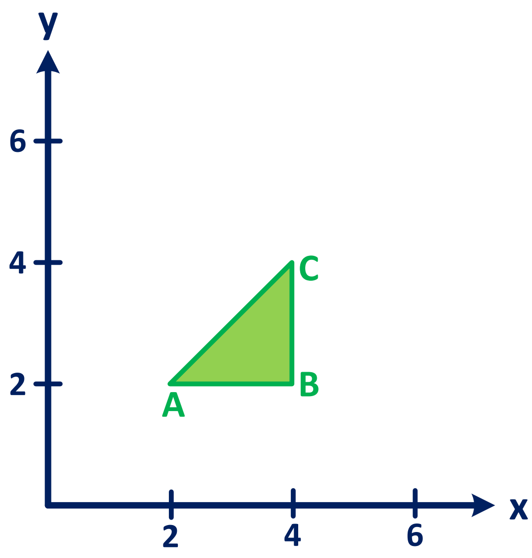


2B Dönüşümler…

- **Birleşik Dönüşümler**
  - Bir noktaya önce T_1 dönüşümü sonra da T_2 dönüşümü uygulanıyorsa, bu noktaya $T_3 = T_1 . T_2$ dönüşümü uygulanır demektir.
  - Bir noktaya uygulanan birleşik dönüşüm matrisi uygulanan dönüşümlerin çarpılması ile hesaplanır.
  - $T_1 . T_2 \neq T_2 . T_1$

2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $(2,2)$, $(4,2)$ ve $(4,4)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$'nini önce 90^o döndürüp, sonra da $y = -x$ doğrusuna göre aynalarsak üçgenin yeni konumu ne olur?



2B Dönüşümler…

➢ **ÖRNEK:** Koordinatları $(2,2)$, $(4,2)$ ve $(4,4)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$'nini önce 90^o döndürüp, sonra da $y = -x$ doğrusuna göre aynalarsak üçgenin yeni konumu ne olur? [DEVAMI…]

$\boldsymbol{T1} \Rightarrow 90^o$ *döndürme*

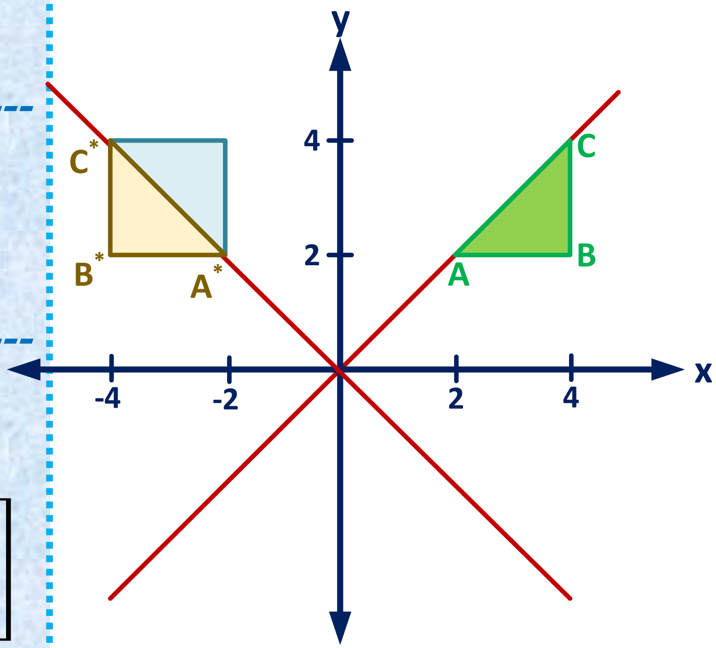
$$T_1 = \begin{bmatrix} cos90 & sin90 \\ -sin90 & cos90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T2} \Rightarrow y = -x$ *doğrusuna göre aynalama*

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = T_1 . T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overset{\Delta}{A^*B^*C^*}\right] = \left[\overset{\Delta}{ABC}\right] . [T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$



2B Dönüşümler…

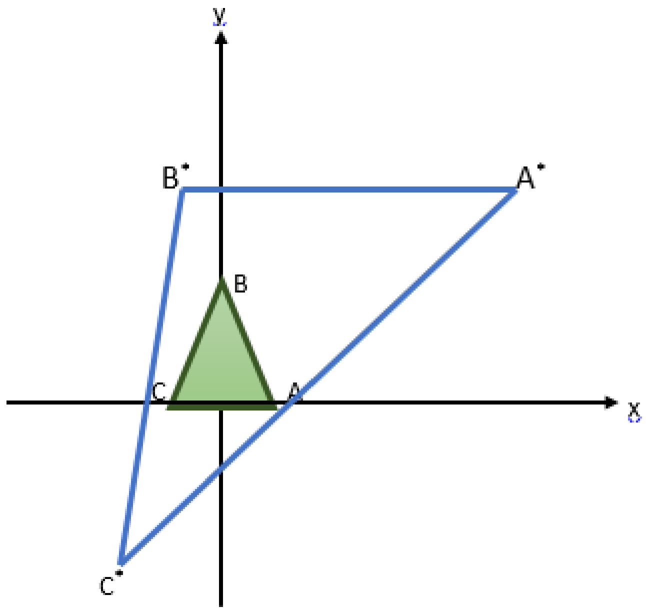
Alan Ölçekleme

- ABC üçgeninin noktaları: [1,0], [0,1], [-1,0]
- $T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dönüşümü
- $A_i = {}^1/_2 . (taban). (yükseklik) = 1\ br$

$$A_t = {}^1/_2 . 4.4 = 8\ br$$

$$A_t = A_t . det[T] = 1.8 = 8\ br$$

$$\begin{bmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$



KAYNAKLAR

- Rogers, D.F., Adams, J.A., Mathematical Elements for Computer Graphics, First Edition.