جبر خطی (امیر ذولقانی)

Subject: Year: Month: Date:

mazlaghanyi @ aut.ac.ir — تکالیف و کوییز (۲۰٪)

میانترم (۳۰٪) پایانترم (۵۰٪)

☑ معادلات خطی:

فرم کلی: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

(رابطه‌ی برابر صفر)

* ضرایب ... باشد و توان هر کدام از $x_1, \dots, x_n$ یک باشد.

→ System of lenear eqeation

چند تا lenear equation داریم و تقاطع این صفحه‌ها را می‌خواهیم

solution set ← همه جواب‌های دستگاه معادلات خطی را در یک مجموعه جمع می‌کنیم

☑ دو سیستم خطی را برابر می‌گوییم هرگاه solution set های برابر داشته باشند

سیستم خطی با دو معادله و دو متغیر (دو معادله دو مجهول)

☑ یک جواب داشته باشد ☑ جواب نداشته باشد ☑ بی‌نهایت جواب داشته باشد (قابل تعمیم)

ناسازگار
inconsistent

سازگار
consistent

عملیات سطری برای ماتریس ← interchange، scaling، Replacement

Echelon matrix

۱) اگر ماتریس ما سطر صفر دارد باید زیر بقیه سطرها باشد.

۲) عنصر پیشرو هر سطر (اولین عنصر غیر صفر) سمت راست عنصر پیشرو سطرهای بالایی باشد

۳) عناصر زیر هر عنصر پیشرو باید صفر باشند.

Reduce Echelon matrix

۴) عنصر پیشرو همگی یک باشد.

۵) عنصر پیشرو تنها عنصر غیر صفر ستون باشد.

Row Reduction ← ماتریس غیر صفر ، با عملیات سطری مقدماتی می‌توان فرم پلکانی را به دست آورد ← می‌توان پلکانی کاهش یافته یکتا به دست آورد

Pivot position ← مکانی که در ماتریس کاهش یافته درایه‌های پیشرو قرار می‌گیرند (همان درایه‌های پیشرو)

ستون دارای pivot position است ستون محوری است

Row Reduction Algorithm:

۱. اولین ستون سمت چپ غیر صفر را بگیر، بالاترین موقعیت ستون را موقعیت محوری در نظر بگیر.

۲. اگر عنصری که در موقعیت محوری بود صفر بود، یکی از سطرها را تعویض می‌کنیم.

پلکانی

۳. با عملیات کاهش سطری همه‌ی عناصر زیر Pivot position را صفر می‌کنیم.

۴. سطر بالا را در نظر نگیریم و همه‌ی گام‌های بالا را برای زیر ماتریس باقی مانده انجام می‌دهیم.

۵. برای این که ماتریس اشلون کاهش یافته از سمت راست شروع می‌کنیم و پایینی را یک می‌کنیم و بقیه رو صفر می‌کنیم.

basic Variable → ستون محوری

Free variable → ستون غیر محوری

دو مدل متغیر داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$$

basic x_1 و x_2

Free x_3

فرم پارامتریک مجموعه جواب‌ها

شنبه، ۲۴

Subject: Year: Month: Date:

* اگر سطر آخر ماتریس افزوده ما صفر شود، معادله جواب ندارد.

* اگر متغیر آزاد داشتیم و جواب داشتیم حتماً بی‌نهایت است (بی‌نهایت جواب)

* بردارها ⟵ ماتریس یک ستونی

← مجموعه همه بردارهای $n \times 1$ به ازای مؤلفه‌های عضو $\mathbb{R}$ فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند.

linear cobination ⟶ $y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

$[a \quad b \quad c]$ برای این می‌دانیم بردار c حاصل ترکیب خطی a و b

جواب داشتن این مجموعه را بررسی می‌کنیم (ماتریس افزوده ساخته شده را بررسی می‌کنیم) ⟵ ماتریس افزوده

Vector equation $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$

$[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n \quad b]$ ⟵ ماتریس افزوده‌ای که محل بررسی است.

☑ برای اینکه ترکیب خطی را بررسی کنیم span می‌گوییم.

span $= v_1, \dots, v_p$ همه ترکیب خطی‌ها $= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$

linear Independent ⟶ بردارها مستقل خطی هستند اگر معادله

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

فقط به ازای $0 = x_1 = x_2 = \dots = x_p$ برقرار باشد.

مثال: چه بردارهایی $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند؟

$$\begin{bmatrix}1&4&2&0\\2&5&1&0\\3&6&0&0\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&-6&-6&0\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

← سطر صفر باعث می‌شود x_3 عضو free بشود.

مفهوم مجموعه وابستگی خطی: در وابسته خطی باشد حتماً می‌توان یکی را با ترکیب خطی بقیه بنویسیم (دو طرفه).
است.

رفت: اگر یکی را بر حسب بقیه بتوانیم بنویسیم

$v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_p$

$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + 0\, v_k + \dots \alpha_p v_p$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0$

حالا برای v_k را به این سمت بیاوریم

به ترکیب خطی صفری شود و α_1 تا α_p برابر صفر نیستند.

برگشت: خطی است

Matrix Equation

ضرب ماتریس در بردار: (ستون) $A = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n]_{m \times n}$

$a_i \in \mathbb{R}^m$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$

$Ax = b$ جواب‌های یک ماتریس که نسبت به عبارت بالا بردار این اعمال کنیم:

در صورتی جواب دارد که b با ترکیب خطی ستون‌های A باشد.

آیا به ازای هر b ای این عبارت دارای جواب است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \equiv$$

$Ax = b$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - \frac{b_2}{2} \end{bmatrix}$$

☑ به ازای همه b ها دارای جواب نیست.

نکته: اگر یکی از ۲ عبارت زیر برقرار بود می‌دانیم $Ax=b$ به ازای هر b ای جواب دارد.

① $\text{span}\{A \text{ ستون‌های}\} = \mathbb{R}^m$ ، ② ماتریس A در هر سطر دارای موقعیت محوری است.

یعنی سطرهای A مستقل خطی باشند.

Solution sets of linear system :)

☑ سیستم خطی همگن: $A x = \vec{0}$ جواب بدیهی $x=0$ است ولی ما به دنبال جواب غیربدیهی هستیم پس ماتریس افزوده را می‌یابیم.

مثال: آیا سیستم زیر جواب غیربدیهی دارد؟

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بی‌نهایت جواب}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

همه ضریب‌های این بردار جواب هستند پس جواب بی‌نهایت است.

Subject: Year: Month: Date:

مثال جزوه نیز

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -3 & -2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \longrightarrow \text{span}\{v_1, v_2\}$$

☑ نحوه جواب نهایی دستگاه معادلات همگن را می‌توان به صورت span یک سری بردار نوشت.

☑ سیستم حل غیر همگن : $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 7-10 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 - 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Subject: Year: Month: Date:

قضیه: اگر P یک جواب $Ax=b$ باشد و v_h جواب $Ax=0$ باشد، جواب $Ax=b$ به طور کلی $v_h + P$

استقلال خطی و برابری ماتریسی: ← استقلال خطی را همواره می‌فهمیم اگر $Ax=0$ فقط جواب بدیهی دارد.

مثال: ستون‌های A مستقل خطی هستند؟

$$A=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&2&-1\\5&8&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&-2&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&0&13\end{bmatrix}$$

چون فقط جواب بدیهی دارد ← مستقل خطی‌اند.

☑ اگر تعداد سطرها بیشتر از ستون‌ها شود حتماً وابسته خطی داریم

☑ کاربرد: Network Flow

- مجموع جریان‌های وارد شونده به گره = مجموع جریان‌های خارج شونده ← معادلات خطی به دست می‌آید ← حل می‌کنیم
- کل شبکه ورودی‌هایش = خروجی‌های کل شبکه

☑ تبدیل‌های خطی: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تبدیل = نگاشت = تابع

domain space — Image space or codomain

← نیازی نیست ورودی تابع کل $\mathbb{R}^n$ باشد یا خروجی کل $\mathbb{R}^m$ باشد

← مجموعه بردارهایی از $\mathbb{R}^m$ که توسط T ساخته می‌شود range یا برد تابع T می‌باشد.

☑ تعریف تبدیل خطی

$$\left.\begin{aligned}T(u+v)&=T(u)+T(v)\\T(\alpha u)&=\alpha T(u)\end{aligned}\right\}\rightarrow T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$$

Subject: Year : Month: Date:

اگر داشته باشیم $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ می‌دانیم $T(x) = Ax$

$m\times n$ ← $n\times 1$

☑ می‌دانیم تبدیل بالا حتماً خطی است ☑ اما عکس قابل اثبات است که هر تبدیل خطی را می‌توان

بصورت ماتریسی نوشت

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = [T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)]$

☑ اثبات:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow T(x) = T(x_1 e_1 + \dots x_n e_n) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n T(e_n)$

$T(x) = [T(e_1) \dots T(e_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

تابع T از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ که بردارهای $\mathbb{R}^2$ را به اندازه φ درجه می‌چرخاند:

$A = [T_\varphi(1,0), T_\varphi(0,1)] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

▨ تابع onto یا پوشا ← تابع / one to one یک به یک

یعنی $Ax = b$ برای همه bها جواب بدهد / یعنی $Ax = b$ فقط یک جواب بدهد

← چون متغیر آزاد داریم ← بی‌نهایت

جواب داریم ← یک به یک نیست

☑ چون هر سطر دارای محور داریم ← پوشاست

span آن کل $\mathbb{R}^3$ را می‌پوشاند (Example 4)

Subject: Year: Month: Date:

برای پوشا بودن ← هر سطر pivot داشته باشد

برای یک به یک بودن ← هر ستون pivot داشته باشد

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7-\frac{5}{3} \\ 0 & 3-\frac{1}{3} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7-\frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ← یک به یک هست چون هر ستون آن pivot دارد.

پوشا نیست چون سطر ۳ آن pivot ندارد.

☑ فصل دوم (جبر ماتریسی) ☑ به ماتریسی قطری می‌گویند که درایه‌های غیرقطری صفر و درایه‌ها غیر قطری صفر

☑ یک ماتریس قطری است که درایه‌هایش ۱ است. ☑ ماتریس صفر = O = با علامت O نشان می‌دهند

☑ ضرب ماتریسی $C_{m\times q} = A_{m\times n} B_{n\times q}$ ← برای مثال AB یعنی ابتدا روی B, A

AB یعنی اعمال کنیم و نتیجه آنها را A اعمال کنیم. حاصلضرب را می‌توان ماتریس تبدیل خطی ترکیب آنها در نظر گرفت

$= C$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

مثال) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

$$AB = \left[A\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

می‌توان بصورت سطرهای A در B هم نوشت

$$AB = \begin{bmatrix} [2, 3] \times B \\ [1, -5] \times B \end{bmatrix}$$

قانون از طرفین زدن نداریم $AB = AC \;\cancel{\Rightarrow}\; B = C$ (بستگی دارد که A^{-1} موجود باشد)

$$A^0_{n\times n} = I_n$$

Transpose of a matrix → $A_{m\times n} = A^{T}_{n\times m}$

هر عنصر جای i و j اش تغییر می‌کند ← مثلاً ستون i از A، سطر i از A^T است.

$(A^T)^T$ ، $(A+B)^T = A^T + B^T$ ، $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ، $(AB)^T = B^T A^T$

مهم
Inverse of a matrix → معکوس‌پذیر (Invertible): ماتریس مربعی A، اگر ماتریس $B: n\times n$ داشته باشیم $I_n = AB = BA$

B یکتا است و از طریق A محاسبه می‌گردد.

اثبات: $AB = AC \rightarrow BAB = BAC \Rightarrow IB = IC \rightarrow B = C$

برای نشان دادن معکوس ماتریس A: A^{-1}

معکوس ماتریس ۲×۲: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$ad-bc$ نباید صفر شود ⇒ دترمینان

Singular ← معکوس‌پذیر نبودن
nonsingular ← 〃 〃 بودن

اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد: $Ax = b$

$A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$

قضایا: اگر دو ماتریس معکوس‌پذیر داشته باشیم ← حاصلضرب آن نیز معکوس‌پذیر است.

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$

مثال: داریم $A = PBP^{-1}$ ؛ B چه می‌شود؟

$B = P^{-1}AP$

مثال: داریم $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I$ ؛ X را بیابید

$A + X = CB \rightarrow X = CB - A$

Subject: Year : Month: Date:

مثال: می‌دانیم A و X و $A - Ax$ وارون‌پذیر است داریم $(A - Ax)^{-1} = x^{-1}B$

اثبات: B معکوس‌پذیر است؟ و X را بیابید.

$x(A - Ax)^{-1} = B$ — وارون‌پذیر

$\Rightarrow$ B وارون‌پذیر است (ضرب ۲ ماتریس وارون‌پذیر)

$x = B(A - Ax) = BA - BAx \Rightarrow (x + BAx) = BA$

$(I + BA)x = BA \rightarrow (I + BA) = BAx^{-1} \rightarrow x^{-1} = (BA)^{-1}(I + BA)$

ماتریس‌های مقدماتی Elementry matrices

☑ ماتریس‌ها را اگر روی سطر $\boxed{I}$ عملیات سطری انجام دهیم به ماتریس مقدماتی می‌رسیم

مثلا: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad E_1 \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4b & i-4c \end{bmatrix}$

چون عملیات سطری را اوردیم به ماتریس دلخواه می‌رسیم

آخر انجام دهیم — اول انجام دهیم

$E_p \dots E_2 E_1 A$ — عملیات‌های سطری مقدماتی را می‌توان به کمک ماتریس‌های مقدماتی انجام داد

☑ معکوس ماتریس مقدماتی چیزی از جنس خودش است

بدست اوردن معکوس A: معادل حذف با ماتریس‌ها $\equiv$ معکوس‌پذیر A

$(E_p \dots E_2 E_1)A = I \longrightarrow (E_p \dots E_2 E_1) = A^{-1}$

مثال: ماتریس A را معکوس کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&3\\4&-3&8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\4&-3&8\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&-3&-4\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}\equiv$$

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

پیدا کردن ماتریس‌های مقدماتی:

$$E_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$$

$$E_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad E_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_6=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

☑ نگاهی دیگر به معکوس ماتریس !!

$$AB=I,\quad A[b_1,b_2,\dots,b_n]=[e_1,e_2,\dots,e_n]$$

$$\Rightarrow Ab_1=e_1,\ Ab_2=e_2,\ \dots,\ Ab_n=e_n$$

مثال: ستون سوم A^{-1} را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}-1&-7&-3\\2&15&6\\1&3&2\end{bmatrix}$$

$$Ab_n=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&-7&-3&0\\2&15&6&0\\1&3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1&-7&-3&0\\0&1&0&0\\0&-4&-1&1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}-1&-7&-3&0\\0&1&0&0\\0&0&+1&-1\end{bmatrix}\equiv$$

$$\begin{bmatrix}+1&0&0&+3\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

☺

ماتریس های معکوس پذیر چندین نام معادل دارند (IMT)

① ماتریس A وارون پذیر است ② معادل سطری همانی $n \times n$ است

③ " " n موقعیت محوری دارد ④ $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی دارد $\mathbb{R}^n$

⑤ ستون های A مستقل خطی اند ⑥ $x \to Ax$ یک به یک است (پوشا هم هست)

⑦ $\mathbb{R}^n$ را span می کنند (ستون های A) ⑧ $Ax = b$ حداقل یک جواب دارد و یکتاست.

⑨ A دارای C و D است: $CA = I$ و $AD = I$ (یکی از آن ها کافیست)

☑ فضای ماتریس های $n \times n$ شامل دو دسته ی منفرد و غیر منفرد تبدیل می گردد

☑ تبدیل های خطی قابل تبدیل شدن به ماتریس را دارند ← برخی از آن ها معکوس پذیرند!

(معکوس تبدیل همان معکوس ماتریس تبدیل است) $A_S A_T x = x \equiv S(T(x)) = x$

☑ ماتریس های بالا مثلثی (پایین مثلثی) وقتی معکوس پذیرند که قطر اصلی آن ها صفر نداشته باشد.

Partition Matrices (ماتریس های بلوکی)

با کشیدن خط های عمودی و افقی ماتریس را به ماتریس دیگری تبدیل می کنیم که هر درایه ی آن خود ماتریس دیگر است

☑ اگر دو ماتریس هم سایز را به یک شکل بلوک بندی کنیم می شود جمعشان کرد!

☑ اگر دو ماتریس به شکلی بلوک بندی شده باشند که ضرب ممکن باشد ← می توان مثل درایه عددی با آن برخورد کرد.

☑ در واقع پارتیشن بندی ستون های A و سطرهای B برابر باشد! ☑

داریم: $AB = col_1 A \times row_1 B + col_2 A \times row_2 B + \dots + col_n A \times row_n B$

← تعداد ستون های مستقل خطی هرکدام از $col \times row$ ها یک است.

☑ اگر به شکلی بلوک بندی کنیم که تنها قطر اصلی غیر صفر باشد در این حالت "ماتریس بلوک قطری" داریم.

مثال: ثابت کنید عبارت روبرو معکوس پذیر است!

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$B_1 = I$

$B_2 = 0$

$AB_1 + B_3 = 0 \to A + B_3 = 0 \to \boxed{B_3 = -A}$

$AB_2 + B_4 = I \to \boxed{B_4 = I}$

☑ معکوس پذیر است ☑

SOBHAN

برای ترانهاده کردن یک ماتریس بلوکی ابتدا به هر درایه بصورت عدد نگاه می‌کنیم و ترانهاده می‌کنیم سپس تک‌تک هر کدام از درایه‌ها را ترانهاده می‌کنیم

تجزیه ماتریس: می‌توان یکی از ماتریس‌ها را تجزیه کرد، اگر ماتریس قابل تبدیل به فرم پلکانی است بدون جابجایی سطرها

$A = LU$

ماتریس پلکانی شده A ← L پایین مثلثی ☺

این کار باعث می‌گردد حل سیستم‌مان سریع‌تر باشد.

$LY = b \rightarrow UX = Y$

برای بدست آوردن L هر قطر اصلی را یک می‌گذاریم و درایه‌های دیگر را به شکلی می‌نویسیم که $(E_p \dots E_1)L = I$

هر کدام از حرکاتی که روی ماتریس انجام دادیم باید از سمت راست بیایند تا به I تبدیل شود (اسلایدها را چک کن ببین)

تمرینات: ... دیگه حال ندارم جزوه بنویسم ☺

فضای برداری: Vector Space ← مجموعه‌ای از اشیاء است که برای آن می‌بایست جمع و ضرب اسکالر تعریف می‌کنیم و می‌بایست بسته باشد.

تعریف: یک فضای برداری مانند V یک مجموعه غیر تهی از اشیاء یا بردارهاست که عملیات جمع و ضرب اسکالر در آن تعریف می‌شود و دارای ویژگی‌های زیر است

$u, v, w \in V \qquad c, d \in \mathbb{R}$

1) $u + v = v + u$

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

3) $(u+0) = u$

4) $u + (-u) = 0 \quad , \quad -u \in V$

5) $c(u+v) = cu + cv$

6) $(c+d)u = cu + du$

7) $c(du) = (cd)u$

8) $1u = u$

9) $u + v \in V$

10) $cu \in V$

مثال: فضای برداری چند جمله‌ای‌ها از درجه n حداکثر

Subject: a b c d e

Year : Month: Date:

مجموعه فضای پوچ ماتریس A را بیابید

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = 2b + d - 3e \quad , \quad c = 2e - 2d$

$$\Rightarrow b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فضای برداری (ستونی ماتریس)

ماتریس A با ابعاد $m\times n$ ، تعداد سطرها m ، تعداد ستون‌ها n ، A ، تعداد ستون‌ها مجموعه فضای ستونی

ماتریس A با ابعاد $m\times n$ به $\mathrm{col}\,A$ نمایش داده می‌شود و مجموعه ترکیبات خطی ستون‌های ماتریس A است یعنی

$A = [a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n]$

$\mathrm{col}\,A = \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$

☑ فضای ستونی زیرفضای $\mathbb{R}^m$ است.

☑ در نظر بگیرید آیا x عضو فضای برداری ماتریس A است یا خیر کافیست دستگاه $Ax = b$ را بررسی کنیم

مثال) مجموعه w به صورت زیر داده شده است، ماتریس A ای را بیابید که w فضای ستونی A باشد.

$$w = \left\{ \begin{bmatrix} 4a - b \\ a + b \\ -7a \end{bmatrix} \middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad , \quad a\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

① فضای پوچ وقتی برابر $\{0\}$ است که A یک به یک باشد (ستون‌ها مستقل)

② فضای برداری وقتی برابر $\mathbb{R}^m$ است که A پوشا باشد (سطرها مستقل)

Subject: Year: Month: Date:

مثال) اگر $A_{n\times n}$ داریم $\text{Col}\,A = \text{Null}\,A$ مطلوب است $\text{Null}\,A^2 = ?$

$\text{Col}\,A = Ax \to A(Ax)=0 \to A^2x = 0 \Rightarrow \text{Null}\,A^2 = \mathbb{R}^n$

■ تبدیل‌های خطی از فضای برداری: تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W، به هر x متعلق به V یک $T(x)$ منحصر به فرد متعلق به W را نسبت می‌دهد به طوری که شرط‌های خطی بودن برقرار باشد

1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2) $cT(u) = T(cu)$

☑ فضای پوچ یا کرنل: به مجموعه تمام بردارهای x متعلق به V که به ازای آن داریم $T(x)=0$ فضای برداری می‌گویند.

☑ رنج تبدیل T: مجموعه تمام بردارهای متعلق به W به فرم $T(x)$ به ازای همه x های متعلق به V است.

مثال) تبدیل T از $P_2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$ نشان دهید T خطی است. و سپس کرنل و رنج T را هم مشخص فرمایید.

$T(kp_1 + k'p_2) = \begin{bmatrix} kp_1(0) + k'p_2(0) \\ kp_1(1) + k'p_2(1) \end{bmatrix} = kT(p_1) + k'T(p_2)$ ✓

کرنل: $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} ax^2+bx+c \xrightarrow{0} \\ ax^2+bx+c \xrightarrow{1} \end{matrix} \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}$

$\boxed{ax^2 - ax = 0}$

رنج: $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2$

پایه‌های فضای برداری Bases: مجموعه بردار $\{v_1, \dots, v_p\}$ متعلق به فضای برداری V

مستقل خطی هستند در صورتی که $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0$ تنها پاسخ $c_1, c_2, \dots, c_p = 0$ را داشته باشد.

مثال) سه بردار $p_1(t) = 1$ و $p_2(t) = t$ و $p_3(t) = 4 - t$ مستقل خطی هستند؟

$p_3 = 4p_1 - p_2$

مثال) $\cos t$ و $\sin t$ مستقل خطی اند.

مثال) $\sin t \cdot \cos t$ و $\sin 2t$ وابسته خطی اند.

زیرفضا (subspace): فرض کنید H یک زیرمجموعه از فضای برداری V است. در این صورت H یک زیرفضا از فضای برداری V است اگر:

☑ صفر فضای برداری V داخل H باشد.

☑ H نسبت به جمع برداری بسته باشد. $u,v\in H \ ,\ u+v\in H$

☑ نسبت به ضرب اسکالر بسته باشد.

☑ تک عضوی $\{0\}$ خودش زیرفضاست و به آن زیرفضای صفر گفته می‌شود.

☑ مثلاً چند جمله‌ای‌ها زیرفضای توابع‌اند.

☑ در فضای $\mathbb{R}^3$ یک ابر صفحه‌ها در حالتی زیرفضا خواهند بود که از مبدأ بگذرد.

مثال: بردارهای v_1 و v_2 متعلق به فضای برداری V اند. فرض کنید $H=\text{span}\{v_1,v_2\}$ بررسی کنید آیا H زیرفضای V خواهد بود یا خیر؟!

$$H=\{c_1v_1+c_2v_2 \mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\}$$

$$h_1+h_2=(c_1v_1+c_2v_2)+(c_1'v_1+c_2'v_2)=(c_1+c_1')v_1+(c_2+c_2')v_2$$

$$=k_1v_1+k_2v_2 \ ,\ k_1,k_2\in\mathbb{R} \longrightarrow \boxed{h_1+h_2\in H} \quad \text{شرط ۲}$$

$$c_1,c_2=0 \longrightarrow \boxed{0\in H} \quad \text{شرط ۱}$$

$$\boxed{kc_1v_1+kc_2v_2=kh\in H} \quad \text{شرط ۳}$$

نتیجه: اگر $v_1,\dots,v_p$ متعلق به فضای برداری V باشند آنگاه $\text{span}\{v_1,\dots,v_p\}$ یک زیرفضای V خواهد بود.

☑ اگر زیرفضای H با $\text{span}\{v_1,\dots,v_p\}$ نشان داده شود به $\{v_1,\dots,v_p\}$ مجموعه مولد H می‌گویند.

مثال: فرض کنید H مجموعه تمام بردارها به شکل روبرو باشد $H=\left\{\begin{bmatrix}a-3b\\ b-a\\ a\\ b\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$، آیا H زیرفضای $\mathbb{R}^4$ است یا خیر؟!

$$H=a\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1}+b\underbrace{\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_2} \Rightarrow H=\text{span}\{v_1,v_2\}$$

مثال) مجموعه ماتریس‌های متقارن با ابعاد $n\times n$ در نظر است. بررسی کنید فضای برداری هست یا خیر.

$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B \in S^n$

$(cA)^T = cA^T = cA \in S^n$

$A=0 \to A \in S^n$

$\to$ "فضای برداری است"

زیرفضاهای خاص ماتریس:

Null space فضای پوچ

column space فضای ستونی

"فضای پوچ"

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: فضای پوچ ماتریس A با ابعاد $m\times n$، با نشان Null A داده می‌شود $(N(A))$ و مجموعه تمام جواب‌های معادله همگن $Ax=0$ است.

قضیه: فضای پوچ ماتریس A با ابعاد $m\times n$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$x_1, x_2 \in \text{Null } A$ and $x_1 + x_2 \in \text{Null } A$

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 = 0 \\ Ax_2 = 0 \end{array}\right\} \to A(x_1+x_2) = 0 \ \checkmark$$

$x_1 \in \text{Null } A \to cx_1 \in \text{Null } A$ $\qquad Ax_1 = 0 \xrightarrow{c} Acx = c0$

$\to Acx = 0 \ \checkmark$

در واقع، مجموعه جواب‌های یک سیستم همگن، زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

مثال) فرض کنید H به صورت زیر تعریف شود

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{l} a - 2b + 5c - d = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خود H، در واقع همان Null Space A است.

بنابراین H زیرفضای $\mathbb{R}^4$ است.

Subject: Year: Month: Date:

فرض کنید H یک زیرفضا از فضای برداری V باشد. مجموعه بردارهای $B=\{b_1,b_2,\dots,b_p\} \subseteq V$

یک پایه برای H است اگر ① B مستقل خطی باشد ② داشته باشیم $Span(B) = H$

مثال: مجموعه‌ی ... در این صورت $S=\{1,t,t^2,\dots,t^n\}$ ترکیب کنید ... نشان دهید که یک پایه برای فضای برداری P_n است

$a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\dots+a_nt^n=0$

$\boxed{a_0=a_1=\dots=a_n=0}$ مستقل خطی اند

قضیه مجموعه spanning: فرض کنید $S=\{v_1,\dots,v_p\}$ مجموعه‌ای در فضای برداری V باشند و H همان $span\{v_1,\dots,v_p\}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت: اگر یکی از بردارهای v_k در S ترکیب خطی بقیه بردارهای S باشد، در آن صورت مجموعه‌ی حاصل از آن بردار همچنان H را span خواهد کرد.

زیرمجموعه‌ای از S یک پایه برای زیرفضای H خواهد بود.

پایه‌های فضای برداری:

spanning set که تا حد امکان کوچک باشد

مجموعه مستقل خطی که تا حد امکان بزرگ باشد

نوشتن Nul(A) به صورت span چند بردار (تعداد بردارهای مستقل خطی = تعداد متغیرهای آزاد است)

ماتریس A را به صورت پلکانی در می‌آوریم

پایه‌های فضای ستونی ماتریس A ← ستون‌های مستقل خطی A هستند C

مثال: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و دو تبدیل خطی T و U داشته باشیم و $v_1, v_2, \dots, v_p$

پایه‌های فضای برداری V باشند. نشان دهید اگر $T(v_j)=U(v_j)$ برای $1\le j\le p$ آنگاه

$T(x)$ و $U(x)$ یکی هستند

Subject: Year : Month: Date:

سیستم های مختصات

قضیه نمایش یکتا: فرض کنید مجموعه $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد. در این صورت برای هر $x\in V$ یک مجموعه از اسکالرهای یکتا $(c_1,\dots,c_n)$ وجود دارد که $x=c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n$

"مختصات": فرض کنید مجموعه $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است و x متعلق به V. در این صورت مختصات x بر حسب پایه B، وزن های $c_1,\dots,c_n$ است که به ازای آن داریم

$$x=c_1b_1+c_2b_2+\dots+c_nb_n$$

و بردار x را با این روش نشان می دهند

$$[x]_B=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

مثال: مجموعه $B=\{1+t,1+t^2,t+t^2\}$ یک پایه برای P_2 است. مختصات $6+3t-t^2$ را بیابید.

$$[P(t)]_B=\begin{bmatrix}5\\1\\-2\end{bmatrix}$$

Coordinate mapping: فرض کنید $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است. نگاشت مختصاتی $x\to[x]_B$ یک تبدیل خطی از V به $\mathbb{R}^n$ است که یک به یک و پوشا می باشد $\Longleftrightarrow$ isomorphism

■ هر تبدیل یک به یک و پوشای خطی از فضای برداری V به W را یک isomorphism از V به W می گویند.

تمرین ها ۲۵، ۲۶ ← قسمت ۴-۴ کتاب خوانده شود ☺

مثال: با استفاده از بردار مختصات استقلال خطی ۳ چندجمله ای زیر را بررسی کنید

$$1+2t^2,\quad 4+t+5t^2,\quad 3+2t$$

$$\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

سیستم مختصات در $\mathbb{R}^n$:

مثال: بردارهای $b_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ را داریم. مجموعه $B=\{b_1,b_2\}$ پایه $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید

Subject:　　　　Year:　　Month:　　Date:

مطلوب است محاسبه $[x]_B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 2 \text{ و } x_1 = 3$$

$$\rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$$

می‌دانیم: $P_B [x]_B = x$

که از کنار هم قرار دادن پایه‌ها تشکیل شد

ماتریس تغییر مختصات

بعد فضای برداری: اگر یک فضای برداری V دارای یک پایه $B=\{b_1, \dots, b_n\}$ باشد، آنگاه هر مجموعه در V که بیشتر از n بردار را شامل شود وابسته خطی خواهد بود.

اگر فضای برداری V یک پایه شامل n بردار داشته باشد، هر پایه دیگر باید دقیقاً n بردار را شامل گردد.

«بعد»: اگر فضای برداری V با مجموعه محدودی از بردارها span شود گفته می‌شود فضای برداری دارای بعد محدود یا متناهی‌البعد است و بعد آن با $\dim V$ نمایش داده می‌شود که برابر تعداد بردارها در مجموعه پایه V

← اگر V با مجموعه محدودی از بردارها span نگردد گفته می‌شود V دارای بعد بی‌نهایت است

مثال: بعد فضای برداری H را که به صورت زیر تعریف شده بیابید

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{bmatrix} , a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

اگر H یک زیرفضا از فضای متناهی‌البعد V باشد هر مجموعه مستقل خطی از H قابلیت گسترش به یک پایه H را دارد و خواهیم داشت $\dim(H) \le \dim(V)$

فرض کنید V یک فضای برداری P بعدی باشد $(P \geq 1)$، هر مجموعه مستقل خطی شامل P بردار یک پایه برای V

خواهد بود و هر مجموعه‌ی spanning برای V دقیقاً p عضو یک پایه برای V خواهد بود

☑ بعد فضای ستونی ماتریس A و فضای پوچ ماتریس A: بعد فضای ستونی A، تعداد ستون‌های محوری است.

$\dim(Col(A))$ ←

بعد فضای پوچ ماتریس A: تعداد متغیرهای آزاد است $\dim(Null(A))$

☑ فضای سطری ماتریس (Row space): ماتریس A با ابعاد $m\times n$ مفروض است مجموعه‌ی تمامی ترکیب‌های خطی سطرهای A فضای سطری A نامیده می‌شود و با Row A نمایش داده می‌شود.

$Row\,A = Col\,A^T$

☑ قضیه: اگر دو ماتریس A و B هم‌ارز سطری باشند در آن صورت فضای سطری آن‌ها یکسان خواهد بود و اگر ماتریس B فرم پلکانی داشته باشد در آن صورت سطرهای غیرصفر ماتریس B یک پایه برای فضای سطری B و یک پایه برای فضای سطری A هستند.

مثال: پایه‌ی فضای سطری ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

۳ بردار بالایی‌ها پایه‌ی فضای سطری است ← بعد آن ۳

رتبه‌ی ماتریس (Rank): بعد فضای ستونی ماتریس A، رتبه‌ی آن ماتریس می‌گویند.

☑ قضیه: بعد فضای سطری و فضای ستونی ماتریس دلخواه A با ابعاد دلخواه هم برابرند چون رتبه‌ی ماتریس A هستند. برابر با تعداد موقعیت‌های محوری ماتریس A خواهند بود. در ادامه رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$Rank\,A + \dim Null\,A = n \quad , \quad A_{m\times n}$

مثال: اگر ماتریس A دارای ابعاد 7×9 باشد و فضای پوچ ۲ بعدی داشته باشد $Rank\,A$ ؟ 7

آیا ماتریس با ابعاد 6×9 می‌تواند فضای پوچ یک‌بعدی موجود باشد؟ No

$Rank\,A_{m\times n} \leq \min(m,n) \rightarrow$ اگر مساوی باشد رتبه کامل می‌شود

فرض کنید A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، هر کدام از عبارت‌های زیر معادل معکوس‌پذیری A است:

① ستون‌های A پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ خواهند بود. ② فضای سطری A، $\mathbb{R}^n$ است. ③ $\text{Rank}A = n$

④ فضای ستونی A، $\mathbb{R}^n$ است. ⑤ $n = \dim \text{Col}A = \dim \text{Row}A$ ⑥ $\text{Null}A = \{0\}$

⑦ $\dim \text{Null}A = 0$

تغییر پایه:

$$B = \{b_1, \dots, b_n\} \longrightarrow [x]_B$$
$$\Downarrow ?$$
$$C = \{c_1, \dots, c_n\} \longrightarrow [x]_C$$

مثال: فرض کنید برای فضای برداری V دو مجموعه پایه B و C معلوم است به‌طوری‌که

$$\begin{cases} b_1 = 4c_1 + c_2 \\ b_2 = -6c_1 + c_2 \end{cases}$$

فرض کنید $[x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$، $[x]_C$ را بیابید.

$$3b_1 + b_2 = 12c_1 + 3c_2 - 6c_1 + c_2 = 6c_1 + 4c_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

فرمول کم تبدیل $\Longrightarrow [x]_C = \big[[b_1]_C \; [b_2]_C\big][x]_B$

قضیه: فرض کنید $B = \{b_1 \dots b_n\}$ و $C = \{c_1 \dots c_n\}$ پایه‌های فضای برداری V باشند، در این صورت ماتریس $n\times n$ یکتای $\underset{C\leftarrow B}{P}$ وجود خواهد داشت به شکلی که

$$[x]_C = \underset{C\leftarrow B}{P}[x]_B$$

ستون‌های $\underset{C\leftarrow B}{P}$ مختصات بردارهای پایه B نسبت به پایه C هستند.

$$\underset{C\leftarrow B}{P} = \big[[b_1]_C \; [b_2]_C \; \cdots \; [b_n]_C\big]$$

بنابراین $\underset{B\leftarrow C}{P} = \underset{C\leftarrow B}{P}^{-1}$ و این ماتریس معکوس‌پذیر است.

مثال: در فضای برداری P_2 ماتریس تغییر مختصات از پایه $B = \{1-2t+t^2, 3-5t+4t^2, 2t+3t^2\}$ به پایه استاندارد را بیابید و مختصات $p(t) = -1+2t$ را نسبت به B بیابید.

$$\underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$Co_n - 6 = -1$ 5

$x = P_B[x]_B \rightarrow [x]_B = x(P_B)^{-1}[P_B] \times [P_C]^{-1}$

تغییر مختصات در $\mathbb{R}^n$

$x = P_B[x]_B$

$B = \{b_1, \dots, b_n\} \Rightarrow P_B = [b_1, b_2 \cdots b_n]$

مثال: دو پایه‌ی B و C به صورت داده شده برای مختصات $\mathbb{R}^2$ داده شده

ماتریس تغییر مختصات از B به C بیابید

$B = \left\{\begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}\right\}$

$C = \left\{\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\right\}$

$\underset{C \leftarrow B}{P} = \left[[b_1]_C \ [b_2]_C\right]$ ، $b_1 = x_1c_1 + x_2c_2 = [c_1\ c_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = b_1$

$b_2 = y_1c_1 + y_2c_2 = [c_1\ c_2]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = b_2$

$\Rightarrow$ بهتر است این ماتریس را حل کنیم $\left[c_1\ c_2 \,\vdots\, \underset{x}{b_1}\ \underset{y}{b_2}\right]$

مقادیر ویژه و بردار ویژه

در بحث این فصل راجع به ماتریس مربعی است

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} : T, \underset{\mathbb{R}^n}{x} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{Ax}$

بردار ویژه: $Ax = \lambda x$

بردار ویژه ماتریس A — مقدار ویژه

$x \neq 0$ * بردار ویژه یکتا نیست چون بی‌نهایت بردار ویژه همگی بردار ویژه هست.

دستگاه بالا می‌بایست جواب غیر بدیهی داشته باشد

مثال: ماتریس A به صورت روبرو است $\begin{bmatrix}1&6\\5&2\end{bmatrix}$ بررسی کنید $u=\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}$ و $v=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ بردار ویژه هستند؟ بررسی کنید آیا ۷ یک مقدار ویژه هست یا خیر

$\begin{bmatrix}-24\\20\end{bmatrix} \rightarrow u ✓$ ، $\begin{bmatrix}-9\\11\end{bmatrix} \rightarrow v ✗$

$\begin{bmatrix}1&6\\5&2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}x_1+6x_2\\5x_1+2x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7x_1\\7x_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}6x_1 = 6x_2\\5x_1 = 5x_2\end{cases}$

در واقع $(A-7I)x = 0$

می‌گوییم λ یک مقدار ویژه است وقتی $(A-\lambda I)x = 0$ جواب غیر بدیهی داشته باشد. و مجموعه جواب همگی بردار ویژه‌ها را می‌دهند (که $Null(A-\lambda I)$ است)

فضای ویژه‌ی ماتریس A مربوط به مقدار ویژه‌ی λ

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$ مقدار ویژه‌اش ۲ است. یک پایه برای فضای ویژه‌ی مربوط به آن بدست آورید

$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$

$\begin{bmatrix}2&-1&6\\2&-1&6\\2&-1&6\end{bmatrix}$ $\quad 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{x_2}{2} - \frac{6}{2}x_3$

x_2, x_3 free

$x_2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-\frac{6}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$

نکته: مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس مثلثی مقادیر روی قطر هستند.

مثال) مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{3, 0, 2\} \qquad \{4, 1\}$$

نکته: ماتریس A معکوس‌پذیر است اگر مقدار ویژه صفر نداشته باشد.

$$x \to \lambda \longrightarrow Ax = \lambda x \xrightarrow{\text{نکته}} A^k x = \lambda^k x$$

معادلات تفاضلی:

$$x_{k+1} = A x_k$$

$$v_1 , \lambda_1 \longrightarrow x_k = \lambda^k v_1$$

$$x_{k+1} = \lambda^{k+1} v_1$$

قضیه) بردار ویژه‌های مربوط به مقادیر ویژه‌های متفاوت یک ماتریس مستقل خطی خواهند بود.

$$A_{n\times n} \longrightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$$

$$v_1 \quad v_2 \quad v_p$$

برهان خلف: فرض می‌کنیم یکی از بردارها را به صورت ترکیب خطی بقیه نوشته‌ایم

$$\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}\} \longrightarrow v_{r+1} = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_rv_r$$

ترکیب خطی قبلی‌ها

$$Av_{r+1} = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \dots + c_rAv_r$$

$$\lambda_{r+1}v_{r+1} = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \dots + c_r\lambda_rv_r \quad (2)$$

$$\longrightarrow \lambda_{r+1}v_{r+1} = c_1\lambda_{r+1}v_1 + c_2\lambda_{r+1}v_2 + \dots + c_r\lambda_{r+1}v_r \quad (1)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 0 = c_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)v_1 + \dots + c_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)v_r = 0$$

چون c_1 تا c_r صفر نیستند و می‌دانیم $\lambda_{r+1} - \lambda_k \neq 0$ از طرفی v_1 تا v_r مستقل خطی‌اند

بنابراین c_1 تا c_r باید صفر باشند ← ✗

«معادله مشخصه»: اگر $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد λ مقدار ویژه‌ی ماتریس A است.

مثال: مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را بیابید. $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$

$-(2-\lambda)(6+\lambda)-9=0$

$-12+4\lambda+\lambda^2-9=0 \rightarrow \lambda^2+4\lambda-21=0 \rightarrow (\lambda+7)(\lambda-3)=0$

مثال: معادله مشخصه ماتریس A را بیابید.

$$A\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\lambda-5)^2(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$

چندگانگی مقدار ویژه‌ی ۵ برابر ۲

☑ به تعداد تکرار ریشه معادله مشخصه «چندگانگی» می‌گویند.

معادلات تفاضلی: ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0/95 & 0/03 \\ 0/05 & 0/97 \end{bmatrix}$ مفروض است. مفروض است تکامل را بنویسیم

دینامیک سیستم را از الگوی $x_{k+1}=Ax_k$ در حالت دائمی وقتی که $\begin{bmatrix} 0/6 \\ 0/4 \end{bmatrix}=x_0$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \rightarrow v_1 \quad \rightsquigarrow x_k=\lambda_1^k v_1 \\ \lambda_2 \rightarrow v_2 \quad \rightsquigarrow x_k=\lambda_2^k v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_k=\alpha\lambda_1^k v_1+\beta\lambda_2^k v_2$$

کافیست بفهمیم x_0 چه ترکیب خطی از v_1, v_2 است.

■ متشابه: می‌گوییم A و B متشابه هستند اگر یک ماتریس معکوس‌پذیر مانند P پیدا شود که $B=P^{-1}AP$

☑ اگر دو ماتریس A و B متشابه باشند، چندجمله‌ای مشخصه یکسان خواهند بود (مقادیر ویژه‌ی یکسان دارند)

$$\det(P^{-1}AP-\lambda I)=\det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P)=\det(P^{-1}(A-\lambda I)P)=$$

$$\det(P^{-1})\det(A-\lambda I)\det(P)=\det(A-\lambda I)$$

⊙ عکس قضیه لزوماً برقرار نیست...

مثال: ماتریس $A=QR$ و $B=RQ$ که R بالا مثلثی و Q متعامد است که $Q^T=Q^{-1}$

نشان دهید A و B متشابه‌اند.

$A=P^{-1}BP$

$QR=P^{-1}RQP$

$$\rightsquigarrow A=QR\underbrace{I}_{QQ^{-1}}=Q\underbrace{RQ}_{B}Q^{-1}$$ ☺

قطری‌سازی ماتریس‌ها: اگر ماتریس A قطری باشد در این صورت A^2 همان ماتریس A است با این تفاوت که عناصرش به توان ۲ رسیده

نکته: اگر ماتریس A با ماتریس قطری (D) مشابه باشد، ماتریس A را قطری‌شدنی می‌نامیم. $A = PDP^{-1}$

قطری را قطری‌شدنی

حالا $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$

بنابراین اگر ماتریسی قطری‌شدنی باشد، بدست آوردن توان‌های آن آسان است.

قضیه: ماتریس $A_{n\times n}$ قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر ماتریس A دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی باشد. یا به بیان دیگر $A = PDP^{-1}$ با ماتریس D قطری است اگر و تنها اگر ستون‌های ماتریس P، n بردار ویژه‌ی مستقل خطی ماتریس A باشد، در این حالت درایه‌های ماتریس D مقدار ویژه‌های مربوط به ماتریس P خواهد بود.

← بردار ویژه‌ی ستون‌های P.

hint: برای اثبات رفت و برگشت کافیست $AP = PD$ را اثبات کنیم.

مثال: ماتریس A را در صورت امکان قطری کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: $\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\big((5+\lambda)(\lambda-1)+9\big) + -3(3\lambda-3+9) + 3(-9+15+3\lambda)$

$= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) \cancel{-9\lambda} + 9 - 27 - 27 + 45 \cancel{+9\lambda} =$

$\lambda^2+4\lambda+4-\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda = 0 \longrightarrow +\lambda^3+3\lambda^2-4 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = 0 \longrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$Ax = x \longrightarrow$ یعنی بردارها را پایه در نظر بگیریم $\longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = 2x \longrightarrow (A-2I)x = 0 \longrightarrow$ کافیست پایه‌های فضای پوچ را پیدا کنیم $\longrightarrow \begin{cases} v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

$P = [v_1, v_2, v_3]$ ، $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ حله

Subject:

Year : Month: Date:

تذکر: ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه‌ی مجزای λ_1 و ... و λ_p مفروض است.

☑ برای $1 \leq k \leq p$ بُعد فضای ویژه‌ی $\lambda_k \geq$ چندگانگی مقدار ویژه‌ی λ_k است

☑ ماتریس A قطری شدنی است اگر و تنها اگر مجموع بُعدهای فضاهای ویژه‌ی λ_1 تا λ_p برابر n باشد

← درصورتی رخ می‌دهد که ① دارای n بردار ویژه‌ی مجزا باشد یا ② بُعد فضای ویژه مقدار ویژه λ_k = چندگانگی λ_k

☑ اگر ماتریس A قطری شدنی باشد و B_k پایه‌ی فضای ویژه‌ی مقدار ویژه‌ی λ_k باشد در آن صورت $B_1, B_2, ..., B_p$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند.

$T: U \to W$ مثلا $x \to T(x)$ «بردارهای ویژه تبدیل‌های خطی»

پایه: B «مبدأ» ، پایه: C «مقصد»

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & T(x) \\ \downarrow & & \\ [x]_B & \xrightarrow{M} & [T(x)]_C \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$[x]_B = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \longrightarrow x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n$$

تبدیل، تبدیل خطی است

$$T(x) = r_1 T(b_1) + r_2 T(b_2) + \cdots + r_n T(b_n) \longrightarrow$$

$$[T(x)]_C = [r_1 T(b_1) + \cdots + r_n T(b_n)] = r_1 [T(b_1)]_C + \cdots + r_n [T(b_n)]_C$$

$$= \underbrace{\Big[[T(b_1)]_C \, [T(b_2)]_C \cdots [T(b_n)]_C \Big]}_{M} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

فرض کنیم: $T: \overset{B}{V} \to \overset{B}{V}$

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & T(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [x]_B & \longrightarrow & [T(x)]_B \end{array}$$

$$[T]_B = M = \Big[[T(b_1)]_B \cdots [T(b_n)]_B \Big]$$

SOBHAN

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

قضیه: فرض کنید ماتریس $A = PDP^{-1}$ که در آن D یک ماتریس قطری است. اگر B یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ باشد که از ستون‌های P تشکیل شده است، آنگاه D ماتریس تبدیل $x \to Ax$ برحسب پایه‌های B خواهد بود.

B-matrix یا $[T]_B$

اثبات: می‌دانیم: $x = P_B[x]_B = [v_1, v_2, \dots, v_n][x]_B = P[x]_B$

$$\Rightarrow [x]_B = P^{-1}x$$

بنابراین: $[Ax]_B = P^{-1}Ax = P^{-1}APP^{-1}x = D\underbrace{P^{-1}x}_{[x]_B} = D[x]_B$

نکته: همان طور که می‌بینیم در اثبات بالا از قطری بودن D استفاده نشد؛ کافی بود A با ماتریسی مشابه باشد.

نکته: از نکته‌ی بالا درمی‌یابیم که وقتی ماتریس A, B مشابه باشند، از $x \xrightarrow{A} Ax$ در پایه‌ای دیگر $[x]_v \xrightarrow{B} [Ax]_v$

مقادیر ویژه‌ی مختلط

$Z = x + jy \quad , \quad j^2 = -1$

$\bar{Z} = x - jy \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

می‌دانیم: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ برای معادله‌ی مشخصه‌ی $\det(A - \lambda I) = 0$ ممکن است ریشه‌ی مختلط داشته باشیم.

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \pm j \to$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A

$$\lambda_1 = j: \; Ax = jx \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jx_1 \\ jx_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -jx_1 = x_2 \longrightarrow$ بردار ویژه $= \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$

نکته ی مهم: فرض کنیم λ مقدار ویژه ی ماتریس A است و مختلط است. در این صورت $\bar{v}$ هم بردار ویژه ی متناظر آن است.
حال می توانیم بگوییم $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه ی دیگر آن و $\bar{v}$ نیز بردار ویژه ی متناظر آن است.

مثال: مطلوب است محاسبه ی مقادیر و بردارهای ویژه ی ماتریس A

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۵ & -۰/۶ \\ ۰/۷۵ & ۱/۱ \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} ۰/۵-\lambda & -۰/۶ \\ ۰/۷۵ & ۱/۱-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^۲ - ۱/۶\lambda + ۱ = ۰ \longrightarrow ۰/۸ \pm j\,۰/۶ = \lambda_{۱,۲}$$

$$v_۱ = \begin{bmatrix} -۲ - j۴ \\ ۵ \end{bmatrix} \longrightarrow v_۲ = \begin{bmatrix} -۲ + ۴j \\ ۵ \end{bmatrix}$$

نکته: هر ماتریس به فرم $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ داشته باشیم می توان آن را به شکل ضرب ۲ ماتریس scaling و دوران بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{a^۲+b^۲} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

مثال بالا را در نظر بگیریم:

$$\lambda = ۰/۸ - ۰/۶j \longrightarrow v_۱ = \begin{bmatrix} -۲ - ۴j \\ ۵ \end{bmatrix}$$

ادامه

$$P = \begin{bmatrix} Re\{v_۱\} & Im\{v_۱\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$C = P^{-1}AP = \frac{۱}{۲۰}\begin{bmatrix} ۰ & +۴ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰/۵ & -۰/۶ \\ ۰/۷۵ & ۱/۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸ & -۰/۶ \\ ۰/۶ & ۰/۸ \end{bmatrix}$$

همانطور که می بینیم A با ماتریس دوران C مشابه می شود ← A در فضای دیگر با پایه های متفاوت عمل دوران انجام می دهد.

قضیه: فرض کنید A ماتریس ۲×۲ با مقدار ویژه ی مختلط $\lambda = a - bj$ و بردار ویژه ی متناظر v باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$A = PCP^{-1} \text{ یا } C = P^{-1}CP \longrightarrow C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Subject: Year: Month: Date:

۷) روش توانی یا Power Method: برای تعیین مقدار ویژه و بردار ویژه‌ی متناظر با آن که دارای ویژگی‌ها در ماتریس‌های مخصوص خود است

منظور از بزرگترین مقدار ویژه، از لحاظ اندازه است

	بردار ویژه	مقدار ویژه
$A \rightarrow$	v_1	λ_1
	v_2	λ_2
	$\vdots$	$\vdots$
	v_n	λ_n

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$ فرض

$$A^k x_0 = c_1 A^k v_1 + c_2 A^k v_2 + \dots + c_n A^k v_n$$

$$A^k x_0 = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n$$

$$\frac{A^k}{\lambda_1^k} x_0 = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n$$

$$k \to \infty \quad \frac{A^k}{\lambda_1^k} x_0 = c_1 v_1$$

توضیح الگوریتم توانی:

① $x_0 \in \mathbb{R}$ انتخاب با بزرگترین درایه ۱

② برای $k = 0, 1, 2, \dots$

الف) Ax_k محاسبه شود

ب) فرض شود μ_k بزرگترین درایه Ax_k : $x_{k+1} = \frac{1}{\mu_k} A x_k$

$\Longleftarrow$ دنباله‌ی $\{x_k\}$ به سمت v_1 میل می‌کند. دنباله‌ی μ_k به سمت λ_1 میل می‌کند.

تعامد و مسائل کمترین مربعات:

orthogonality و least square

ضرب داخلی: به این شکل تعریف می‌شود: $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

ویژگی‌ها:

1) $u \cdot v = v \cdot u$ 2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ 3) $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv)$

4) $u \cdot u \geq 0 \Rightarrow \boxed{u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0}$

$$\|u\|^2 = u \cdot u$$

Subject: Year : Month: Date:

ویژگی‌های تابع Norm : $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ۱) $f(x) \geq 0$, ۲) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۳) $f(\alpha x) = |\alpha| x \quad \alpha \in \mathbb{R}$ ۴) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

نوشتن تابع نرم : $\|x\|$ ← برای بدست آوردن فاصله x و y $\|x-y\|$

نرم ۲ یا نرم اقلیدسی :

$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

نرم ۱ :

$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

نرم ∞ یا چبی‌شف :

$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

نرم P $(P \geq 1)$

$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

نکته : $\|x\|_2^2 = x \cdot x$

بردار یکه unit vector : برداری که برای آن نرم دو آن یک باشد. $\|v\|_2 = 1$

نرمال کردن : $\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \|u\| = \boxed{1}$

متعامد بودن $\langle u, v \rangle = 0$

فاصله ۲ بردار : $dist(u,v) = \|u-v\|_2^2 = (u-v) \cdot (u-v)$

$(u^T - v^T)(u-v) = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 - 2u \cdot v$

قانون کسینوس‌ها: $\|u-v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\varphi$

داریم $\rightarrow$ $u\cdot v = \|u\|\cdot\|v\|\cos\varphi$

☑ متمم متعامد زیرفضاهای برداری

فرض کنید زیرفضای برداری $W \subseteq \mathbb{R}^n$ موجود است، بردار z بر W عمود است اگر و تنها اگر

$z\in\mathbb{R}^n ,\ \forall u\in W \Rightarrow z\cdot u = 0$

چنین متمم متعامد را تعریف می‌کنیم

$W^\perp \Rightarrow \forall v\in W^\perp ,\ \forall u\in W$ به طوری که $\boxed{u\cdot v = 0}$

قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ است A متمم متعامد فضای سطری A فضای پوچ ماتریس A خواهد بود

یعنی داریم $(\text{Row}A)^\perp = \text{Null}A ,\ (\text{Col}A)^\perp = \text{Null}A^T$

مجموعه متعامد: $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ مجموعه متعامدند اگر ۲ به ۲ بر هم عمود باشند

☑ هر مجموعه متعامد یک مجموعه مستقل خطی هم هست.

پایه متعامد (orthogonal basis): $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ یک پایه برای W است اگر B یک مجموعه متعامد باشد در این حالت پایه متعامد برای فضای $\mathbb{R}^n$ است

قضیه: فرض کنید $\{u_1,\dots,u_p\}$ یک پایه متعامد برای زیرفضای W از $\mathbb{R}^n$ باشد برای هر $x\in W$ خواهیم داشت:

$$x\in W :\ x = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_pu_p$$

$$c_j = \frac{x\cdot u_j}{u_j\cdot u_j}$$

بردارهای n تایی orthonormal اند اگر هم بر هم عمود باشند هم هر بردار unit vector باشد

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \longrightarrow \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$$

orthogonal → orthonormal

قضیه: ماتریس U ماتریسی با ابعاد $m\times n$ است. اگر ستون‌های این ماتریس بردارهای orthonormal باشند اگر و فقط اگر $U^T \times U$ واحد است.

$U_{m\times n} = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n]$

$$U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_n^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} [u_1, u_2, \dots, u_n] =$$

$$\begin{bmatrix} u_1^Tu_1 & u_1^Tu_2 & \cdots & u_1^Tu_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_n^Tu_1 & \cdots & & u_n^Tu_n \end{bmatrix} = I_n$$

قضیه: ماتریس $U_{m\times n}$ فرض است ستون‌های orthonormal دارد، آنگاه:

① $x\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \frac{\|Ux\|}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ux, Ux\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{(Ux)^T Ux}{x^Tx} = \frac{x^TU^TUx}{x^Tx} = \frac{x^Tx}{x^Tx} = 1$

② $x,y\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \frac{(Ux)(Uy)}{x\cdot y} = \frac{x^TU^TUx}{x^Ty} = 1$

ماتریس متعامد: ماتریس مربعی U را متعامد می‌نامند اگر U معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $U^{-1}=U^T$ (orthogonal)

که در واقع یعنی ستون‌های آن orthonormal باشند.

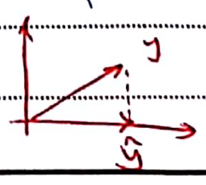
$y\in\mathbb{R}^n, W\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad y=\hat{y}+z$ طوری که $\hat{y}\in W, z\in W^\perp$: orthogonal Projection

قضیه: فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است، در آن صورت هر بردار $y\in\mathbb{R}^n$ به صورت یکتایی به فرم

$y=\hat{y}+z \qquad \hat{y}\in W, \; z\in W^\perp$

قابل نوشتن است. در واقع اگر $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ یک پایه متعامد W باشد

$$\hat{y} = \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 + \dots + \frac{y\cdot u_p}{u_p\cdot u_p}u_p$$



$z = y - \hat{y}$

Subject: Year : Month: Date:

نمایش $\hat{y}$: $\hat{y} = \text{Proj}_W(y)$

اثبات تعامد z بر فضای W

$$z \cdot u_1 = \left(y - \left(\frac{y u_1}{u_1 u_1} u_1 + \dots + \frac{y u_p}{u_p u_p} u_p\right)\right) u_1 =$$

$$\underbrace{y u_1}_{y u_1} - \underbrace{\frac{y u_1}{u_1 u_1} u_1 \cdot u_1}_{-y u_1} + \frac{y u_2}{u_2 u_2} \cancel{u_1 \cdot u_2} + \dots + \frac{y u_p}{u_p u_p} \cancel{u_1 \cdot u_p} = 0$$

بنابراین z بر تمام بردارهای $u_1, \dots, u_p$ عمود است

قضیه: فرض کنید $W (\in \mathbb{R}^n)$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت $\hat{y}$ تصویر متعامد y در W است

با این شرایط $\hat{y}$ نزدیک‌ترین نقطه در W به y است به عبارتی داریم:

$$\forall v \in W : \quad \|y - \hat{y}\| < \|y - v\|$$

اثبات:

$$\|y - v\|^2 = \|(y - \hat{y}) + (\hat{y} - v)\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 + \underbrace{\|\hat{y} - v\|^2}_{\geq 0} + 2(y - \hat{y})(\hat{y} - v)$$

$$\|y - v\|^2 \geq \|y - \hat{y}\|^2 \longrightarrow \text{حکم}$$

نشان: فرض کنید $\{u_1, \dots, u_p\}$ پایه‌ای orthonormal برای زیرفضای W در $\mathbb{R}^n$ projection y در فضای W را بیابید و نشان دهید داریم:

$$\text{Proj}_W y = U U^T y$$

$$U = [u_1, u_2 \cdots u_p] \qquad \rightarrow (y \cdot u_1) u_1 + \dots + (y \cdot u_p) u_p$$

$$[u_1 \ u_2 \cdots u_p] \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_p^T \end{bmatrix} y = [u_1 \ u_2 \cdots u_p] \begin{bmatrix} y \cdot u_1 \\ \vdots \\ y \cdot u_p \end{bmatrix} \rightarrow \smile$$

روش گرام - اشمیت

Gram - Schmidt

نشان: فرض کنید فضای برداری $\text{span}\{x_1, x_2\} = W$ که $x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

یک پایه متعامد v_1 و v_2 برای این فضای برداری بیابید.

Subject: Year : Month: Date:

چون نشان، کافیست $v_1 = x_1$ ، $v_2 = x_2 - \operatorname{proj}_{\operatorname{span}\{v_1\}} x_2$

پایه‌ها فضای برداری $W \subset \mathbb{R}^n$: $\{x_1, \dots, x_p\} \longrightarrow \{v_1, \dots, v_p\}$ $\quad v_i \cdot v_j = 0$

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

$$v_3 = x_3 - \left(\frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \right)$$

$$\vdots$$

$$v_p = x_p - \left(\frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \dots + \frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1} \right)$$

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

QR factorization

$A = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ⟵ ستون‌ها مستقل خطی

$$\downarrow \text{Gram-Schmidt}$$

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] \xrightarrow{\text{normalization}} \underbrace{[u_1, u_2, \dots, u_n]}_{\text{orthonormal}}$$

$$A = [x_1, x_2, \dots, x_n] = [u_1, u_2, \dots, u_n] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

بالا مثلثی

least square

$A x = b \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} \|A\hat{x} - b\| < \|Ax - b\|$

مشخص $\hat{x}$ ، بقیه x ها

چگونه $\hat{b}$ را بدست آوریم:

$$\hat{b} = \operatorname{proj}_{\operatorname{Col} A} b \rightsquigarrow A\hat{x} = \hat{b} \longrightarrow \hat{x} = A^{-1}\hat{b}$$

که بدست آوردن $\hat{b}$ سخت است؛ دنبال روش ساده‌تری می‌گردیم

$$(b - \hat{b}) \in \operatorname{Col} A^{\perp} \longrightarrow (b - A\hat{x}) \in \operatorname{Col} A^{\perp}$$

$$\longrightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0 \longrightarrow A^T b = A^T A \hat{x} \quad (\text{Normal Equation})$$

SOBHAN

موجود است اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند ← جواب یکتا دارد.

Subject: Year: Month: Date:

قطری‌سازی معمولی : PDP^{-1} orthogonally diagonalizable

« « متعامد : PDP^{T} $\boxed{P^{-1} = P^{T}}$ →

ستون‌های P همگی عمود و یکه هستند

← ماتریس‌های متقارن ، قابلیت قطری‌سازی متعامد را دارند.

آیا برعکس عبارت بالا نیز صادق است؟ یعنی آیا هر ماتریسی که PDP^{T} است، آیا متقارن است.

$$A = PDP^{T} \longrightarrow A^{T} = (PDP^{T})^{T} = PDP^{T}$$

۲۸ از روی اسلاید بخوان ٪ ۱۰