Subject: جلسه اول

معادلات خطی :

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ ابرصفحه یا hyperplain

دستگاه معادلات خطی :

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

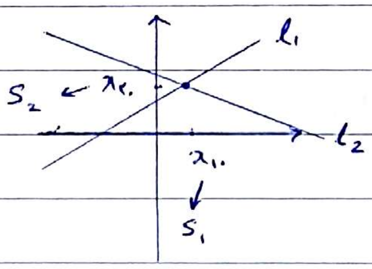
جواب دستگاه خطی : $(s_1, s_2, \dots, s_n) \rightarrow$ solution

مجموعه جواب (solution set)

دستگاه های خطی معادل ← مجموعه جواب یکسان

دستگاه های خطی دو متغیره :

$$\begin{cases} l_1: a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ l_2: a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$



(s_1, s_2)

حالات جواب دستگاه : ۱_ دستگاه معادلات خطی جواب ندارد. (ناسازگار)

۲_ " " " یک جواب دارد.

۳_ " " " بی نهایت جواب دارد.

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow$ vector

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix}$ augmented matrix

ماتریس افزوده

Subject: جلسه دوم

اگر $m=n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

افزوده $n(n+1)$ ضرایب $n \times n$

حل سیستم خطی:

۱- ماتریس ضرایب مربعی:

- ماتریس ضرایب قطری:

$$a_{11}x_1 = b_1$$

$$a_{22}x_2 = b_2 \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i=1,\ldots,n$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}x_n = b_n$$

- ماتریس ضرایب بالامثلثی:

مثال:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \longrightarrow x_1 = -5$$

$$5x_2 - 2x_3 = 1 \longrightarrow x_2 = 1$$

$$2x_3 = 4 \longrightarrow x_3 = 2$$

روش جایگذاری پس رو

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \rightarrow a_{nn} x_n = b_n \rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

```
for i = n : -1 : 1 do
    t = b_i
    for j = i+1 : n do
        t = t - a_ij x_j
    end
    x_i = t / a_ii
end
```

→ جایگذاری پس رو

← حل سیستم خطی دلخواه ، روش حذفی گوس:

تبدیل سیستم دلخواه به سیستم بالا مثلثی است.

عملیات سطری:
۱- مقیاس دهی (ضرب هر سطر در یک عدد ثابت)
۲- جابجایی سطرها
۳- جایگذاری یک سطر با مجموع آن سطر و ضریبی از سطر دیگر

دو ماتریس row equivalent (معادل سطری) هستند در صورتی که با یک سری عملیات سطری بتوان از یکی به دیگری رسید.

Subject:

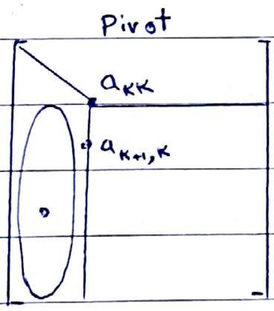
دو سیستم خطی معادلند در صورتی که ماتریس افزوده شان معادل سطری باشند.

مثال: مطلوب است تبدیل سیستم خطی زیر به یک سیستم بالا مثلثی

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۶ & -۶ \end{array}\right]$$

$(row\,2 - \frac{1}{2}\,row\,1 \rightarrow row\,2) \rightarrow (row\,3 - \frac{1}{2}\,row\,1 \rightarrow row\,3)$
$\rightarrow (row\,3 - 3\,row\,2 \rightarrow row\,3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right]$$



$\rightarrow -\dfrac{a_{K+1,K}}{a_{KK}} \times row\,K + row\,(K+1) \rightarrow row\,(K+1)$

الگوریتم روش حذفی گوس:

```
For K = 1 : n-1 do
  For i = K+1 : n do
    piv = a_iK / a_KK          b_i = a_i(n+1)
    For j = K+1 : n+1 do
      a_ij = a_ij - piv * a_Kj
    end
  end
end
```

Subject:

مثال: مطلوب است حل سیستم خطی زیر با روش حذفی گوس:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

pivoting: $\max\limits_{i=k,\dots,n} |a_{ik}| \rightarrow$ سطر i و k

روش حذفی گوس جردن:

تبدیل دستگاه معادلات خطی دلخواه به دستگاه قطری.

مثال: سیستم خطی زیر را قطری کنید.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

گوس: $\frac{2}{3}n^3$ گوس - جردن: n^3

Subject: جلسه سوم

تعریف :

ستون صفر

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

سطر صفر

درایه پیشرو سطر ۲

درایه پیشرو سطر ۳

* فرم سطری پلکانی :
(echelon form)

- سطر و ستون صفر
- درایه پیشرو (leading entry)

گفته می‌شود یک ماتریس دارای فرم سطری پلکانی است، در صورتی که :

۱- تمامی سطرهای غیر صفرش بالای سطرهای صفر باشد.

۲- درایه پیشرو هر سطری در ستونی سمت راست درایه پیشرو سطر بالایی اش باشد.

* فرم پلکانی کاهش یافته :
(reduced echelon form)

گفته می‌شود یک ماتریس دارای فرم پلکانی کاهش یافته است، اگر:

۱- یک سطری پلکانی باشد.

۲- درایه پیشرو در هر سطر غیر صفر برابر ۱ باشد.

۳- هر درایه پیشرو که برابر ۱ است باید تنها عنصر غیر صفر در ستون مربوط‌اش باشد.

Subject:

* عملیات کاهش سطری :

هر ماتریس غیر صفری با استفاده از عملیات سطری مقدماتی قابلیت تبدیل به ماتریس به فرم پلکانی را دارد. به این عمل "کاهش سطری ماتریس" می گویند.

قضیه : هر ماتریس با یک و تنها یک ماتریس پلکانی کاهش یافته معادل است.

* موقعیت محوری :
(pivot position)

موقعیت محوری در یک ماتریس جایی است که اگر آن ماتریس کاهش یابد و به فرم پلکانی کاهش یافته درآید، درایه پیشرو که برابر یک است آنجا قرار می گیرد. ستون محوری (pivot column) ستونی است که یک موقعیت محوری را دربر بگیرد.

الگوریتم کاهش سطری :

۱- اولین ستون غیر صفر از سمت چپ، ستون محوری است. موقعیت محوری بالای این ستون است.

۲- یکی از درایه های غیر صفر ستون محوری را به عنوان محور در نظر گرفته و در صورت لزوم جابه جایی سطری انجام می دهیم تا این درایه در جایگاه محوری قرار بگیرد.

۳- با استفاده از عملیات سطری مقدماتی در ستون محوری، درایه های زیر موقعیت محوری را صفر می کنیم.

Subject:

۴- سطر شامل درایه محوری و همه سطرهای بالای آن را حذف می‌کنیم و گام ۱ تا ۳ را به زیر ماتریس حاصل اعمال می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا فقط ۱ سطر باقی بماند.

۵- اگر فرم پلکانی کاهش یافته بخواهیم: با سمت راست‌ترین موقعیت محوری شروع می‌کنیم و در ستون محوری مربوطه عناصر بالای آن را صفر می‌کنیم. (خود درایه محوری باید صفر باشد)

گام ۱ تا ۴: پیشرو یا forward گام ۵: پسرو یا backward

- کاربرد کاهش سطری در حل دستگاه خطی:

مثال: ماتریس افزوده مربوط به یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر است. مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی را به دست آورید.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ متغیر آزاد} \end{cases}$$

ستون محوری

basic، متغیر پایه، متغیر اصلی ← x_1, x_2

متغیر آزاد ← x_3

← توصیف پارامتری مجموعه جواب

parametric description of solution set

Subject:

مثال: جواب عمومی سیستم خطی با ماتریس افزوده زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$x_5, x_3, x_1 \leftarrow$ basic

$x_4, x_2 \leftarrow$ free

$x_5 = 7$

$x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -3(x_4 + 2x_2)$

$x_3 - 4x_4 = 5 \rightarrow x_3 = 5 + 4x_4$

قضیه: یک سیستم خطی سازگار است، اگر و تنها اگر فرم پلکانی ماتریس افزوده آن سطری به فرم $[0 \;\cdots\; 0 \;\; b]$ نداشته باشد. (یا به عبارت دیگر ستون آخر ماتریس افزوده ستون محوری نداشته باشد)

اگر یک سیستم افزوده سازگار باشد، آنگاه مجموعه جواب آن:

۱- شامل یک جواب یکتا است اگر هیچ متغیر آزادی نداشته باشیم.

۲- شامل بی‌نهایت جواب است، اگر حداقل یک متغیر آزاد داشته باشیم.

Subject: جلسه چهارم

گام های استفاده از کاهش سطری برای حل سیستم های خطی :

گام اول: به دست آوردن ماتریس افزوده

گام دوم: به دست آوردن فرم پلکانی

گام سوم: به دست آوردن فرم پلکانی کاهش یافته

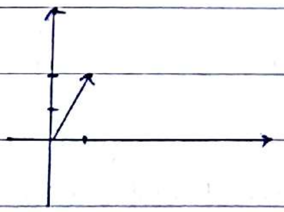
گام چهارم: توصیف پارامتری مجموعه جواب

بردارها ؟

می گوییم ماتریس در فضای n بعدی است اگر n درایه داشته باشد.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad u_i \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^n$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad u \in \mathbb{R}^2$$



ویژگی بردارها : $u, v \in \mathbb{R}^n$

1- $u = v \Rightarrow u_i = v_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

2- $u + v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$

Subject:

۳- $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha u = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$

۴- $u = 0 \Rightarrow u_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

$u + v = v + u \qquad u + (v + z) = (u + v) + z \qquad 0 + u = u + 0 \qquad u + (-u) = 0$

$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \qquad \alpha(\beta u) = (\alpha \beta) u$

ترکیب خطی بردارها :

$v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \rightarrow$ وزن ها

مثال: ۳ بردار v_1، v_2، v را داریم. آیا می توان v را به صورت ترکیب خطی v_1، v_2 نوشت؟

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = v \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ -2\alpha + 5\beta \\ -5\alpha + 6\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 7 \\ -2\alpha + 5\beta = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow 9\beta = 18$

$\beta = 2$

$-15 + 12 = -3 \checkmark \leftarrow \alpha = 3$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v = 3v_1 + 2v_2$

Subject:

نکته: بردار v به صورت ترکیب خطی بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_p$ قابل بازنویسی است، اگر سیستم خطی با ماتریس افزوده $[v_1\ v_2 \dots v_p\ v]$ دارای جواب باشد.

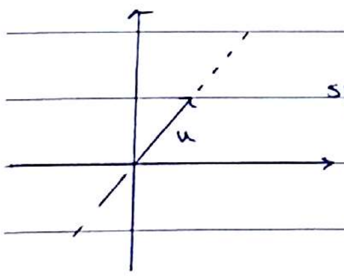
$v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$

$\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$

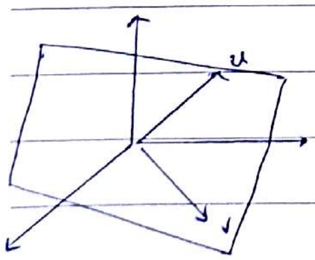
اگر $v_1, \dots, v_p$ متعلق به $\mathbb{R}^n$ باشند، مجموعه تمام ترکیب‌های خطی $v_1, \dots, v_p$ را به وسیله نماد $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ نشان می‌دهند، و آن را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ به توسط $v_1, v_2, \dots, v_p$ ساخته (span) می‌شود می‌نامیم. یعنی $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه تمام بردارهایی که به صورت زیر قابل نوشتن است.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$

تعبیر هندسی:



$\text{span}\{u\}$



$\text{span}\{u, v\}$

$\alpha_1 u + \alpha_2 v$

$\text{span}\{u, v\} = \text{span}\{v, u\}$

Subject:

مجموعه بردارهای $V_1, V_2, \dots, V_p$ وابسته‌ی خطی هستند اگر وزن‌های $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ داشته باشیم که همگی صفر نباشند و رابطه زیر برقرار باشد.

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p = 0$$

در غیر این صورت V_1 تا V_p مستقل خطی هستند. به عبارت دیگر یک مجموعه از بردارها وابسته خطی هستند اگر دست کم یک بردار در میان آن‌ها باشد که به صورت ترکیب خطی بقیه قابل نوشتن باشد.

اگر دو بردار داشته باشیم فقط در صورتی وابسته خطی هستند که در امتداد یکدیگر باشند.
$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} V_2$

مثال: وابستگی خطی ۳ بردار زیر را بررسی کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$
۳ بردار وابسته خطی هستند.

معادله‌ی ماتریسی:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p$$

$$\underset{1\times p}{\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_p \end{bmatrix}} \underset{p\times 1}{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}}$$

تعریف: اگر A ماتریسی با ابعاد $m\times n$، ستون‌های $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد و $x \in \mathbb{R}^n$ آنگاه ضرب A در بردار x با Ax نمایش داده می‌شود و ترکیب خطی ستون‌های A با استفاده از درایه‌های x به عنوان وزن خواهد بود.

$A = [a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n] \quad a_i \in \mathbb{R}^m \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^n$

$$[a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} a_1 & & a_n \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

* $A_{mn} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $A(u+v) = Au + Av$

2) $A(\alpha u) = \alpha (Au)$

3) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$

معادله‌ی ماتریسی: $A_{m\times n} \, x_{n\times 1} = b \; , \; b \in \mathbb{R}^m$

مثال ۱: با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ -۴ & ۲ & ۶ \\ -۳ & -۲ & -۷ \end{bmatrix}$ آیا به ازای هر b دلخواهی متعلق به $\mathbb{R}^۳$ ، $Ax = b$ دارای جواب است؟

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۳ & ۴ & b_۱ \\ -۴ & ۲ & ۶ & b_۲ \\ -۳ & -۲ & -۷ & b_۳ \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۳ & ۴ & b_۱ \\ ۰ & ۱۴ & ۱۰ & b_۲ + ۴b_۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & b_۳ + ۳b_۱ - \frac{۱}{۲}(b_۲ + ۴b_۱) \end{array}\right]$$

$$b_۱ - \frac{۱}{۲} b_۲ + b_۳ = ۰$$

Subject: جلسه نهم

مثال: مشخص کنید آیا سیستم خطی همگن زیر جواب غیر بدیهی دارد؟ سپس مجموعه جواب را بنویسید.

بله. x_3 متغیر آزاد است.

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$
$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 v, \text{ where } v = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال: تمامی جواب‌های سیستم همگن زیر را بنویسید.

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3 \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (with } x_2, x_3 \text{ free)}$$

مثال: تمامی جواب‌های $Ax=b$ را توصیف کنید، در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 2$$
$$3x_1 - 4x_3 = -3$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 - 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{p}$$

$x = p + x_3 v$

$\hookrightarrow x = p + tv \quad (t \in \mathbb{R})$

(parametric vector form)

Subject:

: Theorem 6

$Ax = b$

$AP = b \longrightarrow w = P + V_h$

$AV_h = 0 \longleftarrow$ جواب $Ax = 0$

بردار ثابت — span بردارهای دیگر

$Aw \stackrel{?}{=} b \;,\; A(P + V_h) = AP + AV_h = b + 0 = b$ ✓

$AP = b \longrightarrow AP - AP_1 = 0 \qquad A(P - P_1) = 0$

$AP_1 = b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V_h$

- تا اسلاید 17 درس داده شد

Subject: جلسه ششم

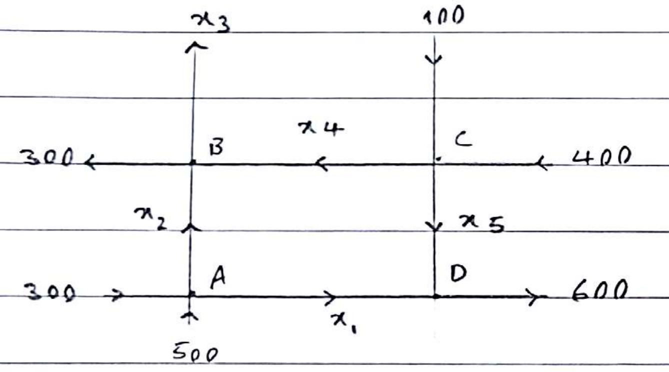
Example: Determine if the columns of the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ are linearly independent.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ → نقطه محوری داریم → مستقل خطی هستند

زیرا متغیر آزاد نداریم

Example:



$$x_4 + x_5 = 500$$
$$x_5 + x_1 = 600$$
$$x_1 + x_2 = 800$$
$$x_2 + x_4 - x_3 = 300$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

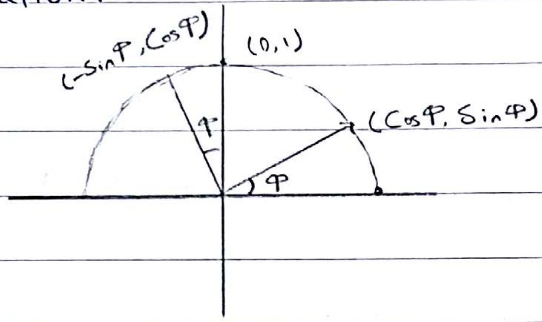
Theorem 10 Proof:

$$T(x) = T(Ix) = T\left(\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_n \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)$$

$$= \underbrace{[T(e_1) \ \ T(e_2) \ \ \ldots \ \ T(e_n)]}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Subject:

Example 3: Let $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the transformation that rotates each point in $\mathbb{R}^2$ about the origin through an angle φ, which counterclockwise rotation for a positive angle. Find the standard matrix A of this transformation.



$$\begin{array}{cc} T(e_1) & T(e_2) \\ \left[\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right] \end{array}$$

Subject: جلسه هفتم

Example 5: Let $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2,\ 5x_1 + 7x_2,\ x_1 + 3x_2)$, show that T is a one-to-one linear transformation. Does T map $\mathbb{R}^2$ onto $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
→ در هر سطر درایه محوری نداریم → پوشا نیست

متغیر آزاد نداریم پس یک‌به‌یک

نکته ۱:

با فرض اینکه $Ax=b$ دارای جواب است، $Ax=b$ دارای بی‌نهایت جواب است اگر متغیر آزاد داشته باشیم.

$Ax=b$ دارای تنها یک جواب است اگر $Ax=0$ دارای یک جواب باشد / ستون‌های A مستقل خطی هستند.

پس اگر $Ax=b$ بی‌نهایت جواب داشته باشد پس ستون‌های A مستقل خطی نیستند، مستقل نبودن ستون‌های A معادل داشتن متغیر آزاد است.

نکته ۲:

$Ax=b$ به ازای هر b جواب دارد اگر هر سطر A دارای درایه محوری باشد. در صورتی که تعداد ستون‌های A از سطرهایش بیشتر باشد، $Ax=b$ به ازای هر b بی‌نهایت جواب دارد. در صورتی که تعداد سطرها و ستون‌ها برابر باشند $Ax=b$ به ازای هر b یک جواب دارد.

$Ax=b$ به ازای هر b جواب دارد
- $A_{m\times n}$ $n>m$ بی‌نهایت جواب ← چون متغیر آزاد داریم
- $A_{n\times n}$ تنها یک جواب

Subject:

Example 3: Compute AB, where $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ and $B \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

جلسه هشتم

- مرور مطالب پیش دانشگاهی

Example: 25. Show that if $ad-bc=0$, then the equation $Ax=0$ has more than one solution. Why does this imply that A is not invertible? $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} c & cb/a & 0 \\ 0 & d-\frac{cb}{a} & 0 \end{array}\right] \rightarrow [0\ 0\ 0] \rightarrow \text{متغیر آزاد} \rightarrow \text{بی نهایت جواب}$$

$$\hookrightarrow d-\frac{cb}{a}=0$$

Example: 18. Suppose P is invertible and $A=PBP^{-1}$. Solve for B in terms of A. $P^{-1}AP=B$

Example: 19. If A, B and C are $n\times n$ invertible matrices, does the eqution $C^{-1}(A+X)B^{-1}=I_n$ have a solution, X? If so, find it.

$$(A+X)B^{-1}=\underbrace{CI_n}_{C} \rightarrow (A+X)=CB \rightarrow X=CB-A$$

Example: 20. Suppose A, B and X are $n\times n$ matrices with A, X and $A-AX$ invertible, and suppose $(A-AX)^{-1}=X^{-1}B$ (3)

a. Explain why B is invertible. (3) × X $X(A-AX)^{-1}=B$

$\downarrow$

حاصل ضرب چند ماتریس معکوس پذیر.

b. Solve (3) for X. If you need to invert a matrix, explain why that matrix is invertible. $((A-AX)^{-1})^{-1}=(X^{-1}B)^{-1} \rightarrow A-AX=B^{-1}X \rightarrow A=(A+B^{-1})X$

$\ast \rightarrow (A+B^{-1})^{-1}A=X$

$\downarrow$

$$\underbrace{AX^{-1}}_{\text{معکوس پذیر}}=(A+B^{-1})$$

$\downarrow$

* معکوس پذیر

Subject:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -4a+g & -4b+h & -4c+i \end{bmatrix} \qquad E_2 A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad E_3 A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}$$

Example 7. Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, if it exists.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Subject: جلسه دهم

- اثبات کنید عملیات های سطری مقدماتی، وابسته یا مستقل بودن ماتریس A را تغییر نمی دهد.

Example: Let $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Find the third column of A^{-1} without computing the other columns.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

- اثبات کنید اگر $CA = I$ باشد آنگاه $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی دارد.

$Ax = 0 \rightarrow \underbrace{CA}_{I}x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ فرض خلف / با حل

$x \neq 0$: برهان خلف

ستون های A مستقل خطی هستند
A معکوس پذیر است.

Example 1: Use the Invertible Matrix Theorem to decide if A is invertible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Example: Let $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$. Verify that:

$AB = \text{col}_1(A)\,\text{row}_1(B) + \text{col}_2(A)\,\text{row}_2(B) + \text{col}_3(A)\,\text{row}_3(B)$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a & -3b \\ a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -4c & -4d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e & 2f \\ 5e & 5f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3a + c + 2e & -3b + d + 2f \\ a - 4c + 5e & b - 4d + 5f \end{bmatrix} = AB$$

Subject:

Example: Find the invert of matrix A. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ $\quad AA^{-1} = I \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I_p$

$A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} = 0 \quad \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

$A_{22} B_{21} = 0$

$A_{22} B_{22} = I_p$

Subject: جلسه یازدهم

Example: Show that $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$ is invertible and find its inverse.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \longrightarrow B_{11} + B_{12}A = I \longrightarrow B_{11} = I$$

$$B_{12} = 0$$

$$B_{21} + B_{22}A = 0 \longrightarrow B_{21} = -A$$

$$B_{22} = I$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix}$$

شرطی روی A اعمال نکردیم پس A معکوس‌پذیر است.

Example: Compute X^TX, where X is partitioned as $[x_1 \;\; x_2]$.

$$X^TX = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} \times [X_1 \;\; X_2] = \begin{bmatrix} X_1^TX_1 & X_1^TX_2 \\ X_2^TX_1 & X_2^TX_2 \end{bmatrix}$$

Example: LU Factorization of $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject: جلسه دوازدهم

Example 1: Compute the determinant of $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Example 3: Compute det A, where $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Example:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$ad-bc \qquad -(ad-bc) \qquad ad-bc \qquad k(ad-bc)$$

Example 4: Compute det A, where $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ \underset{0}{\cancel{-2}} & \underset{0}{\cancel{-5}} & \underset{-3}{\cancel{4}} & \underset{1}{\cancel{-2}} \end{bmatrix}$

Example 5, Verify theorem 6 for $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = 9 \quad \det B = 5$

$AB = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{bmatrix} \qquad \det AB = 25.13 - 20.14 = 45$

example verify that $\det EA = \det E . \det A$, where E is the elementary matrix shown and $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 36. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+Kc & b+Kd \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det = ad + Kdc - bc - Kdc = ad - bc$

$\det E = 1 \quad \det A = ad - bc$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ Ka+c & Kb+d \end{bmatrix}$ $\det = ad - bc$

35. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ $\det = bc - ad$

$\det E = -1 \quad \det A = ad - bc$

36. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ Kc & Kd \end{bmatrix}$ $\det = K(ad - bc)$

$\det E = K \quad \det A = ad - bc$

* اثبات کنید اگر حاصل ضرب دو ماتریس معکوس پذیر باشد، آنگاه هر دو ماتریس معکوس پذیرند.

AB is invertible $\rightarrow \exists\, C \mid AB = I \rightarrow (CA)B = I \rightarrow CA$ is inverse of B

AB is invertible $\rightarrow \exists\, C \mid ABC = I \rightarrow A(BC) = I \rightarrow BC$ is inverse of A

Proof: $A \,.\, I_i(x)$

$$A.I_i(x) = A[e_1 \; e_2 \; \dots \; x \; \dots \; e_n] = [\overset{a_1}{Ae_1} \;\; \overset{a_2}{Ae_2} \; \dots \; \overset{b}{Ax} \; \dots \; \overset{a_n}{Ae_n}] = A_i(b)$$

$$I = [e_1 \; e_2 \; \dots \; e_n]$$

$$\det(A_i(b)) = \det(A) \,.\, \det(I_i(x))$$

Find $\det(I_i(x)) = x_i$

$$I_i(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & x_i & \vdots \\ & & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & x_n & 0 \end{bmatrix}$$

Example1: Use Cramer's rule to solve the system $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6 \\ -5x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_1(b) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Example 2: Consider the following system in which s is an unspecified parameter. Determine the value of s for which the system has a unique solution, and use Cramer's rule to describe the solution.

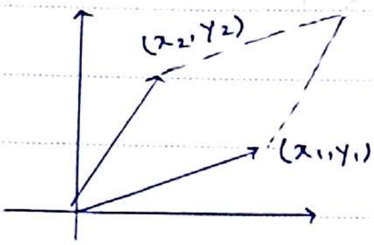
$$\begin{cases} 3sx_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + sx_2 = 1 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}$, $A_1(b) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$, $A_2(b) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

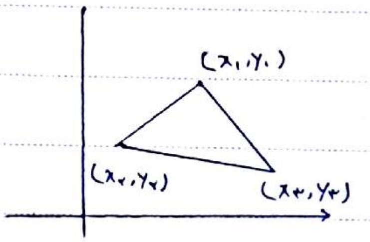
$\det A = 3s^2 - 12 \neq 0 \rightarrow s \neq \pm 2$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix}} = \frac{4s+2}{3s^2-12} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{s+8}{s^2-4}$$

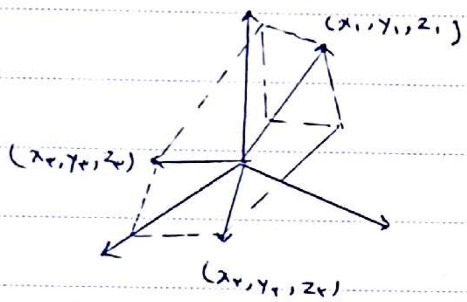
رابطه ی دترمینان و حجم :



مساحت متوازی الاضلاع $= \left|\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}\right|$



مساحت مثلث $= \left|\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\right|$



حجم متوازی السطوح $= \left|\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right|$

قضیه: فرض کنید T یک تبدیل خطی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ باشد که با ماتریس A مشخص می شود. اگر S نشان دهنده یک متوازی الاضلاع در $\mathbb{R}^2$ باشد آنگاه این رابطه برقرار است:

مساحت $T(S)$ $= |\det A| \times$ مساحت S

اثبات:

$S:\{s_1b_1+s_2b_2 \mid 0\le s_1,s_2\le 1\}$

$T(S)=T(s_1b_1+s_2b_2)=s_1T(b_1)+s_2T(b_2)=s_1Ab_1+s_2Ab_2$

$0\le s_1,s_2\le 1$

مساحت $(s_1Ab_1+s_2Ab_2)=|\det[Ab_1\ \ Ab_2]|=|\det A[b_1\ \ b_2]|$

$=|\det(A)|\cdot|\det[b_1\ \ b_2]|$

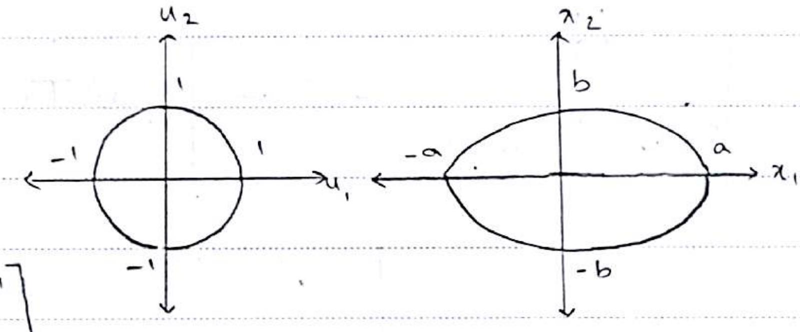
Subject
Date

قضیه: فرض کنید T تبدیل خطی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ با ماتریس A باشد. اگر S یک متوازی السطوح در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد خواهیم داشت:

$$T(S) \text{ حجم } = |\det(A)| \times S \text{ حجم }$$

مثال: مطلوب است محاسبه مساحت بیضی که با رابطه زیر مشخص می‌شود با استفاده از مساحت دایره.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 \\ bu_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \longrightarrow \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$$

$$\text{مساحت بیضی} = \pi \times 1 \times |\det(A)| = \pi ab$$

زیرفضاهای R^n:
Subspace

$H \subset R^n$

1) $0 \in H$ 2) $\forall u \in H, \forall v \in H \Rightarrow u+v \in H$ 3) $\forall u \in H, \alpha \in R \rightarrow \alpha u \in H$

مثال: بررسی کنید که آیا $\text{span}\{v_1, v_2\}$ که $v_1, v_2 \in R^n$ زیرفضای R^n هست یا خیر.

$$\overbrace{\text{span}\{v_1, v_2\}}^{A} = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \quad \alpha, \beta \in V\}$$

1) $\alpha, \beta = 0 \rightarrow 0 \in A$ 2) $u+v = (\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\beta_1 + \beta_2)v_2 \in A$ 3) $\alpha u = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\beta_1 v_2 \in A$

Subject
Date

نکته: عنصر صفر یک زیرفضای R^n است.

فضای ستونی ماتریس:

فضای ستونی یک ماتریس مانند A با $\text{Col}\,A$ نمایش داده می‌شود و مجموعه‌ی تمامی ترکیب‌های خطی ستون‌های A است.

مثال: ماتریس A و بردار b را به صورت داده شده در نظر بگیرید. تعیین کنید آیا b متعلق به فضای ستونی A هست یا خیر.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$ سازگار است پس b متعلق است.

نکته: فضای ستونی A، b هایی است که به ازای آن‌ها $Ax=b$ دارای پاسخ باشد.

فضای پوچ ماتریس:

Null Space

فضای پوچ یک ماتریس مجموعه‌ی همه‌ی پاسخ‌های دستگاه همگن مربوط به آن ماتریس است. $Ax=0$

- نشان دهید $\text{Null}(A)$ یک زیرفضا از R^n است.

$1)\ x=0 \Rightarrow A\times 0=0$

$2)\ \underset{Au=0}{u\in N(A)},\ \underset{Av=0}{v\in N(A)} \rightarrow u+v\in N(A) \qquad A(u+v) = \overset{0}{Au}+\overset{0}{Av}=0$

$3)\ \underset{Au=0}{u\in N(A)},\ \alpha\in R \rightarrow \alpha u\in N(A) \rightarrow A\alpha u = \alpha Au = 0$

PAPCO

پایه های زیرفضا :

یک پایه برای زیرفضای H یک زیرمجموعه مستقل خطی از H است که H را span می‌کند.

$$v_1, v_2, \dots, v_p \xrightarrow{\text{پایه‌ها}} H$$

1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, p$

2) $\forall u \in H \quad u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$

مثال: $I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \rightarrow$ پایه‌های استاندارد R^n

ستون‌ها مستقل

مثال: فرم پارامتری مجموعه جواب دستگاه $Ax=0$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Ax=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \rightarrow x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$

$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \rightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

$\rightarrow$ مستقل خطی هستند

پس پایه‌ها null space نیز هستند

مثال: برای ماتریس B داده شده، یک پایه برای فضای ستونی بیابید.

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\{b_1, b_2, b_5\}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & & & b_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: مطلوب است تعیین یک پایه برای فضای ستونی ماتریس A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & -16 \\ 0 & -4 & -6 & 3 & -17 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & & & a_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\{a_1, a_2, a_5\}$$

* ستون‌های محوری ماتریس A، یک پایه برای فضای ستونی ماتریس A هستند.

مثال: فرض کنید ماتریس A، ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد، فضای ستونی و فضای پوچ ماتریس A را مشخص کنید.

$$\mathrm{Col}\, A = R\{A\} = R^n \qquad Ax = 0 \rightarrow N\{A\} = \{0\} \neq \varnothing$$

سیستم‌های مختصات:

$H = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \rightarrow$ پایه‌ای زیرفضای V

$\forall x \in V: \quad x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p \qquad [x]_H = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

c_1 تا c_p یکتا هستند. اثبات:

فرض می‌کنیم یکتا نیستند:

$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = c_1' v_1 + c_2' v_2 + \dots + c_p v_p$

$(c_1 - c_1') v_1 + (c_2 - c_2') v_2 + \dots + (c_p - c_p') v_p = 0 \rightarrow$ چون مستقل‌ها مستقل هستند

پس جواب ۰ است $\rightarrow \begin{cases} c_1 - c_1' = 0 \\ \vdots \\ c_p - c_p' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = c_1' \\ \vdots \\ c_p = c_p' \end{cases}$

مثال: بردارهای v_1 ، v_2 و x به صورت زیر داده شده‌اند. اگر $H = \{v_1, v_2\}$ پایه‌ای زیرفضای V باشند، بررسی کنید آیا x داخل V قرار می‌گیرد یا خیر. مختصات x را براساس این پایه‌ها به دست آورید.

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = 2, c_2 = 3 \rightarrow [x]_H = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Subject
Date

بُعد زیرفضا :

Dimension of Subspace

بعد زیرفضای غیر صفر H، با $\dim H$ نمایش داده می‌شود و برابر تعداد بردارهای پایه‌ی این زیرفضاست. بعد زیرفضای $\{0\}$ نیز صفر در نظر گرفته می‌شود.

$\dim \mathbb{R}^n = n$ $\dim$ (صفحه) = ۲ $\dim$ (خط) = ۱

رتبه‌ی ماتریس :

Rank of Matrix

رتبه‌ی ماتریس A با rank A نمایش داده می‌شود و برابر بعد فضای ستونی ماتریس A است. بنابراین رتبه ماتریس A برابر با تعداد ستون‌های محوری ماتریس A است.

مثال : رتبه‌ی ماتریس A را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 & 14 & -6 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank } A = 3$

قضیه: اگر ماتریس A، n ستون داشته باشد، آنگاه:

$$\text{rank } A + \dim N(A) = n$$

* تعداد متغیرهای آزاد = $\dim N(A)$

Subject
Date

قضیه: فرض کنید H، یک زیرفضای p بعدی از R^n باشد. هر مجموعه مستقل خطی از p بردار در H یک پایه برای H خواهد بود. هم چنین هر مجموعه p عضوی از H که H را span می کند یک پایه برای H است.

page 230

فرض کنید A ماتریسی مربعی با ابعاد $n \times n$ باشد، آنگاه عبارت های مختلف زیر معادل با معکوس پذیری A است:

M. ستون های A یک پایه برای R^n است.

N. $\text{Col}\, A = R^n$

O. $\dim \text{Col}\, A = n$

P. $\text{rank}\, A = n$

Q. $\text{Null}(A) = \{0\}$

R. $\dim \text{Null}(A) = 0$

مثال: فرض کنید H مجموعه ی دربرگیرنده تمامی بردارها به فرم زیر باشد. نشان دهید H یک زیرفضا از R^4 است.

$$H : \left\{ \begin{bmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{bmatrix} , \; a, b \in R \right\} \qquad H = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow H = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و می دانیم span دو بردار، یک زیرفضا است.

مثال: فرض کنید H مجموعه تمامی بردارهای متعلق به R^4 است که درایه های این بردارها، در دو رابطه زیر صدق می کنند.
نشان دهید H یک زیرفضا از R^4 است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a - 2b + 5c = d \\ c - a = b \end{matrix} \qquad \begin{cases} a - 2b + 5c - d = 0 \\ c - a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0 \rightarrow \text{null space} \rightarrow$ زیرفضاست

Subject
Date

مثال: ماتریسی را بیابید که فضای ستونی آن W باشد.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a-b \\ a+b \\ -7a \end{bmatrix} : a, b \in R \right\} \qquad a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

مقایسه فضای ستونی و فضای پوچ ماتریس:

$A_{m \times n}$

فضای ستونی	فضای پوچ
$\mathrm{Col}\,A$ زیرفضایی از R^m	$\mathrm{Null}(A)$ زیرفضایی از R^n
ترکیب خطی ستون ها $(a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots)$ زمان بر نیست	$[A \;\; 0]$ کاهش سطری ← زمان بر
رابطه مستقیم وجود دارد.	عدم وجود رابطه مستقیم A و $\mathrm{null}\,A$ و درایه های A
$v \in \mathrm{Col}\,A \rightarrow Ax = v$ سازگار	$v \in \mathrm{Null}(A) \rightarrow Av = 0$
$v \rightarrow Ax = v$ زمان بر	$v \rightarrow Av = 0$ ✓ / ✗ سریع (با چک کردن اینکه بردار متعلق هست یا نه)
$\mathrm{Col}\,A = R^n \underset{\text{اگر و تنها اگر}}{\longleftrightarrow} Ax = b \quad \forall b \in R^m$	$\mathrm{Null}(A) = \{0\} \underset{\text{اگر و تنها اگر}}{\longleftrightarrow} Ax = 0$ جواب بدیهی
$\mathrm{Col}\,A = R^m \longleftrightarrow x \rightarrow Ax$ پوشا	$\mathrm{Null}(A) = \{0\} \longleftrightarrow x \rightarrow Ax$ یک به یک

P4PCO

فضای برداری :

یک فضای برداری V یک مجموعه ناتهی از اشیاست که دو عملیات جمع و ضرب اسکالر روی آن تعریف شده و اصول ده گانه زیر در آن برقرار است:

$u, v, w \in V \qquad c, d \in R$

۱) $\forall u, v \in V \rightarrow u + v \in V$

۲) $u + v = v + u$

۳) $(u + v) + w = u + (v + w)$

۴) $0 \in V \rightarrow u + 0 = u$

۵) $u \rightarrow -u \rightarrow u + (-u) = 0$

۶) $\forall c \in R , u \in V \rightarrow cu \in V$

۷) $c(u + v) = cu + cv$

۸) $(c + d)u = cu + du$

۹) $c(du) = (cd)u$

۱۰) $1u = u$

Subject
Date

مثال: فرض کنید P_n مجموعه‌ی تمامی چندجمله‌های مرتبه n باشد. یعنی $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in R$

بررسی کنید P_n یک فضای برداری هست یا خیر.

$(p+q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n$

$\forall c \in R, \; cp(t) = a_0 c + a_1 ct + a_2 ct^2 + \dots + a_n ct^n$

$1, 2, 3) \checkmark \quad 4) \; 0 \checkmark \quad 5, 6, 7, 8, 9, 10) \checkmark \rightarrow$ فضای برداری می‌باشد.

مثال: بررسی کنید آیا مجموعه‌ی ماتریس‌های متقارن با ابعاد $n \times n$، فضای برداری هست یا خیر.

$A_{n \times n} : a_{ij} = a_{ji}$

$1) \; A, B \in V \quad (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \checkmark$

$2, 3) \checkmark \quad 4) \; 0$ ماتریس $\checkmark \quad 5) \; (-A)^T = -A^T \quad 6) \; (cA)^T = cA^T \checkmark$

$7, 8, 9, 10) \checkmark$

فضای برداری هست.

مثال: مجموعه تمامی توابع مقدار حقیقی، فضای برداری هست یا خیر. (دامنه توابع یکسان) $f: R \rightarrow R$

بله این مجموعه فضای برداری هست.

Subject
Date

زیرفضای فضای برداری:

زیرفضای فضای برداری V، زیرمجموعه H از V است که دارای ۳ ویژگی زیر باشد:

$H \subset V$

۱) $0 \in H$

۲) $\forall u, v \in H \rightarrow u + v \in H$

۳) $\forall c \in R, \forall u \in H \rightarrow cu \in H$

تبدیل خطی فضای برداری:

تبدیل خطی T از فضای برداری V به فضای برداری W به هر x متعلق به V یک $T(x)$ یکتا متعلق به W را نسبت می دهد. به طوری که

۱) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

۲) $T(cu) = cT(u)$

فضای پوچ یا کرنل تبدیل T مجموعه تمامی u های متعلق به V است که $T(u)$ به ازای آن ها مساوی صفر باشد.

range تبدیل T مجموعه تمامی $w \in W$ است به فرم $T(x)$ $x \in V$ قابل بازنویسی باشند.

Subject: جلسه هفدهم
Date

فضای برداری:

مثال: فرض کنید V فضای برداری تمامی توابع مقدار حقیقی مشتق پذیر و با مشتق پیوسته باشد. تبدیل D به صورت مشتق تعریف شده است. نشان دهید این تبدیل خطی است. کرنل و range آن را بیابید.

$D: V \to W$

$$\left.\begin{array}{l} D(f(t)+g(t)) = D(f(t)) + D(g(t)) \quad (\text{ویژگی مشتق}) \\ D(\alpha f(t)) = \alpha D(f(t)) \quad (\text{ویژگی مشتق}) \end{array}\right\} \to \text{تبدیل خطی}$$

کرنل این تبدیل توابع ثابت است. و range آن توابع پیوسته است.

استقلال خطی:

$\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \in V$ (فضای برداری)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

مثال: استقلال خطی مجموعه ی بردارهای زیر را در فضای برداری داده شده بررسی کنید.

1) $\{p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = 4 - t\} \to p_3(t) = 4p_1(t) - p_2(t) \to$ وابسته خطی

2) $\{\sin t, \cos t\}$ $C[0,1]$ $(= f(t)\quad 0 \le t \le 1) \to a\sin t + b\cos t = 0 \to a, b = 0$
$0 \le t \le 1$ مستقل خطی

3) $\{\sin t\cos t, \sin 2t\}$ $C[0,1] \to -2\sin t\cos t + \sin 2t = 0 \to$ وابسته خطی

پایه‌های زیرفضا:

مجموعه B یک پایه برای زیرفضای H است درصورتی که دو شرط زیر را دارا باشد:

1) B یک مجموعه مستقل خطی باشد   2) $H = Span\{b_1, \dots, b_n\}$

مثال: فضای برداری P_n (چندجمله‌ای‌ها از مرتبه n) را در نظر بگیرید. نشان دهید مجموعه S یک پایه برای P_n است.

$$S = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = 0 \quad a_i = 0 \quad i = 0, \dots, n$$

$$c_0 + c_0 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n = P_n$$

قضیه: فرض کنید V فضای برداری و S مجموعه‌ای در V باشد. زیرفضای H به صورت $Span\{v_1, \dots, v_p\}$ تعریف شده است. آنگاه داریم:

الف) اگر یکی از بردارهای S، مثلاً v_k ترکیب خطی سایر بردارهای S باشد، آنگاه $S - \{v_k\}$ هم H را span می‌کند.

ب) اگر $H \neq \{0\}$ آنگاه زیرمجموعه‌ای از S یک پایه برای H خواهد بود.

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \qquad H = span\{v_1, \dots, v_p\}$$

Subject
Date

مثال: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و $T: V \to W$ و $U: V \to W$ تبدیل‌های خطی هستند.

و مجموعه $\{v_1, \dots, v_p\}$ یک پایه برای V است. نشان دهید اگر $T(v_j) = U(v_j)$ به ازای $j = 1, \dots, p$

آنگاه $T(x) = U(x)$

$$T(x) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) = \alpha_1 U(v_1) + \dots + \alpha_p U(v_p) = U(x)$$

مختصات:

فرض کنید مجموعه $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است. در این صورت برای هر $x \in V$ اعداد

اسکالرهای $c_1, \dots, c_n$ وجود دارند به طوری که $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ به بردار $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ مختصات x در پایه B گفته می‌شود.

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید مجموعه B به صورت زیر تعریف شده باشد. بردار $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ داده شده است. مطلوب است نمایش

x بر حسب بردارهای B. $\quad c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad B = \{ b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow c_1 = 3, c_2 = 2 \longrightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

نکته: $B=\{b_1,\dots,b_n\},\ x\in R^n :\ [b_1\ b_2 \dots b_n][x]_B = x \to [x]_B = P_B^{-1}x$

(ماتریس تغییر مختصات P_B)

قضیه: فرض کنید $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد در آن صورت $x\to[x]_B$ یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا است.

$T: x\to [x]_B$

اثبات خطی بودن: $w,u\in V:\ u=c_1b_1+\dots+c_nb_n,\ w=d_1b_1+\dots+d_nb_n$

$u+w=(c_1+d_1)b_1+\dots+(c_n+d_n)b_n$

$$T(u+w)=T(u)+T(w) \to \begin{bmatrix} c_1+d_1 \\ \vdots \\ c_n+d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha u=\alpha c_1b_1+\dots+\alpha c_nb_n \to T(\alpha u)=\begin{bmatrix} \alpha c_1 \\ \vdots \\ \alpha c_n \end{bmatrix} = \alpha T(u)=\alpha\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

مثال: کنید B یک پایه برای P_2 است. مختصات $P(t)$ را بر پایه B بیابید:

$B=\{1+t,\ 1+t^2,\ t+t^2\},\ P(t)=6+3t-t^2$

$$c_1+c_1t+c_2+c_2t^2+c_3t+c_3t^2=c_1+c_2+(c_1+c_3)t+(c_2+c_3)t^2=6+3t-t^2$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=6 \\ c_1+c_3=3 \\ c_2+c_3=-1 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

نکته: یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا از فضای برداری V به فضای برداری W یک isomorphism از V به W نامیده می‌شود.

مثال: استقلال خطی چندجمله‌ای های $\{1+2t^2,\ 4+t+5t^2,\ 3+2t\}$ در فضای P_2 با استفاده از مختصات‌های برداری، بررسی کنید.

$P_2(t) = \{1, t, t^2\}$ $\qquad \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow$$ وابسته خطی هستند

بُعد فضای برداری:

تعریف: اگر یک فضای برداری مانند V دارای یک پایه $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ باشد، آنگاه $\dim V$ برابر با n است.

قضیه: اگر بعد فضای برداری V برابر با n باشد، آنگاه هر مجموعه در فضای برداری V که بیشتر از n عضو داشته باشد، وابسته‌ی خطی هستند.

اثبات: $\{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset V$ $\qquad B=\{b_1,\dots,b_n\}$ پایه

$p > n$

it is linearly dependent cause we have p vectors and n entries and p>n tebghe fasl haye aval

$\rightarrow \alpha_1[u_1]_B + \alpha_2[u_2]_B + \dots + \alpha_p[u_p]_B = 0$

we conclude ui are linearly dependent

$\rightarrow [\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p]_B = 0 \rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = 0\times b_1 + 0\times b_2 + \dots + 0\times b_n$

قضیه: اگر فضای برداری V یک پایه‌ی شامل n بردار است، داشته باشد آنگاه هر پایه‌ی V دقیقاً n بردار خواهد داشت.

تعریف: اگر فضای برداری V با مجموعه‌ی محدودی از بردارها span شود، گفته می‌شود فضای برداری V متناهی البعد است، در غیر این صورت فضای برداری V دارای بعد بی‌نهایت است. (مثل مجموعه‌ی چندجمله‌ای ها)

قضیه: اگر H یک زیرفضا از فضای متناهی البعد V باشد، هر مجموعه‌ی مستقل خطی در H قابلیت گسترش به یک پایه را دارد. هم چنین H متناهی البعد خواهد بود و $\dim H \leq \dim V$.

اثبات: $\underbrace{\{u_1, u_2, \dots, u_k\}}_{\text{مستقل خطی}} \subset H$, if $u_{k+1} \in H$ $u_{k+1} \notin \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$

$\to \{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ $\to$ پس قابلیت گسترش به یک پایه را دارد

قضیه: فرض کنید V یک فضای برداری p بعدی باشد هر مجموعه‌ی مستقل خطی p عضوی از V یک پایه برای V خواهد بود و هر مجموعه p عضوی از V که V را span کند یک پایه برای V خواهد بود.

PROOF By Theorem 11, a linearly independent set S of p elements can be extended to a basis for V. But that basis must contain exactly p elements, since $\dim V = p$. So S must already be a basis for V. Now suppose that S has p elements and spans V. Since V is nonzero, the Spanning Set Theorem implies that a subset S' of S is a basis of V. Since $\dim V = p$, S' must contain p vectors. Hence $S = S'$. ∎

اثبات: $V \to \dim V = p$

$\underbrace{\{u_1, \dots, u_p\}}_{\text{مستقل خطی}} \subset V \to u_k = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p \in V \to \{u_1, \dots, u_p\} \to$ span می‌کند

$\{v_1, \dots, v_p\} \to$ H را span می‌کند $\to$ زیرمجموعه‌ای از این مجموعه پایه H است $\to$ بعد p، پس باید p عضو داشته باشد

فضای سطری ماتریس:

تعریف: ماتریس A مفروض است مجموعه تمامی ترکیب های خطی سطرهای A فضای سطری A نامیده می‌شود و با Row A نمایش داده می‌شود.

نکته: $\text{Row } A = \text{Col } A^T$

Subject
Date

قضیه: اگر دو ماتریس A و B معادل سطری باشند، آنگاه فضای سطری آن‌ها یکسان است.

اثبات: $\underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}_{A} \to \{\underbrace{\sum c_i a_i}_{b_1}, \underbrace{\sum d_i a_i}_{b_2}, \dots, \underbrace{\sum z_i a_i}_{b_n}\} \to \text{Row } B \subset \text{Row } A$

و به طور مشابه $\text{Row } A \subset \text{Row } B$، در نتیجه $\text{Row } A = \text{Row } B$

نکته: $\text{Rank } A = \underbrace{\dim(\text{Col } A)}_{\text{ستون‌های مستقل خطی}} = \underbrace{\dim(\text{Row } A)}_{\text{سطرهای مستقل خطی}} =$ تعداد عناصر محوری

مثال: پایه‌های فضای سطری، فضای ستونی و فضای پوچ ماتریس A را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌های فضای ستونی $= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

پایه‌های فضای سطری $= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 20 \end{bmatrix}$

$\text{Rank } A = 3$

پایه‌های فضای پوچی $= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

نکته: $\text{Rank } A \leq \min(m,n)$ و اگر $\text{Rank } A = \min(m,n)$، رتبه‌ی کامل یا full rank است.

قضیه رتبه: برای ماتریس A، بعد فضای ستونی و فضای سطری با هم برابر بوده و رتبه ماتریس A نامیده می‌شود. برابر

تعداد موقعیت‌های محوری ماتریس A است و در تساوی زیر صدق می‌کند: $\text{rank}\, A + \dim \text{Nul}\, A = n$

مثال: ماتریس A با ابعاد 7×9 دارای فضای پوچ با بعد ۲ است. رتبه ماتریس را تعیین کنید. $\text{Rank}\, A = 7$

آیا ماتریس A با ابعاد 6×9 می‌تواند دارای فضای پوچ با بعد ۲ باشد؟ بعد فضای پوچ حداقل ۳ است.

تغییر مختصات در یک فضای برداری:

مثال: فرض کنید B و C دو پایه برای فضای برداری V باشند در حالی که داریم $\begin{cases} b_1 = 4c_1 + c_2 \\ b_2 = -6c_1 + c_2 \end{cases}$ فرض کنید

$x = 3b_1 + b_2$ است، مختصات x را برحسب پایه‌های C بیابید. $B = \{b_1, b_2\},\ C = \{c_1, c_2\}$

$$[x]_C = [3b_1 + b_2]_C = 3[b_1]_C + [b_2]_C = \big[[b_1]_C\ [b_2]_C\big]\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -6\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$$

ماتریس تغییر مختصات:

$$[x]_C = \big[[b_1]_C\ [b_2]_C \cdots [b_n]_C\big][x]_B$$

قضیه: فرض کنید در مجموعه B و C دو پایه برای فضای برداری V هستند، در آن صورت ماتریس یکتای $\underset{C\leftarrow B}{P}$

وجود خواهد داشت که به ازای آن داریم: $[x]_C = \underset{C\leftarrow B}{P}[x]_B$ ستون‌های ماتریس $\underset{C\leftarrow B}{P}$ مختصات بردارهای پایه

B برحسب C هستند. یعنی داریم: $\underset{C\leftarrow B}{P} = \big[[b_1]_C \cdots [b_n]_C\big]$

نکته: $\underset{C\leftarrow B}{P}$ یک ماتریس $n\times n$ و معکوس‌پذیر است.

معکوس ماتریس تغییر مختصات:

$$(\underset{C\leftarrow B}{P})^{-1}[x]_C = [x]_B \Rightarrow (\underset{C\leftarrow B}{P})^{-1} = \underset{B\leftarrow C}{P}$$

مثال: در فضای برداری P_2 ماتریس تغییر مختصات از پایه B به پایه استاندارد را به دست آورید و سپس مختصات $x = 1+2t$ را برحسب پایه B بیابید.

$$B = \{1-2t+t^2,\ 3-5t+4t^2,\ 2t+3t^2\}$$

$$C = \{1, t, t^2\}$$

$$\underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{C\leftarrow B}{P}[x]_B = [x]_C \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{حل}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال: کنید B و C دو پایه برای $\mathbb{R}^2$ هستند. ماتریس تغییر مختصات از B به C را محاسبه کنید.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[c_1\ \ c_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = b_1,\quad [c_1\ \ c_2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad [c_1\ \ c_2 \mid b_1\ \ b_2] \rightarrow \Big[I \,\Big|\, \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}^{\underset{C\leftarrow B}{P}}\Big]$$

$$\underset{C\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

مقادیر و بردارهای ویژه:

eigen vectors & values

مثال: ماتریس A به صورت زیر داده شده است، تصویر بردارهای u و v را با ضرب در این ماتریس به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Au = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \tilde{u} \quad Av = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ هم‌راستا با v

Subject
Date

تعریف: یک بردار ویژه برای ماتریس A با ابعاد $n\times n$ بردار غیر صفر x است که به ازای آن داریم:

$Ax=\lambda x$ که λ یک عدد اسکالر است.

تعریف: عدد اسکالر λ مقدار ویژه ماتریس A نامیده می‌شود اگر $Ax=\lambda x$ جواب غیر بدیهی داشته باشد.

مثال: نشان دهید عدد ۷ یک مقدار ویژه برای ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ است و بردار ویژه متناظر را بدست آورید.

داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow Ax-7x=0 \longrightarrow Ax-7Ix=0$$

$$(A-7I)x=0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ جواب غیربدیهی ← ستون‌ها وابسته خطی

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow x_1-x_2=0 \longrightarrow x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_2 آزاد

نکته: مقدار λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A است در صورتی که $(A-\lambda I)x=0$ دارای جواب غیر بدیهی باشد.

$$A-\lambda I=B \longrightarrow \text{Null } B=\text{eigen space } A(\lambda)$$

قضیه: مقادیر ویژه یک ماتریس مثلثی، درایه‌های روی قطر آن هستند.

اثبات:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} a_{11}=\lambda \\ a_{22}=\lambda \\ a_{33}=\lambda \end{array}$$

جواب غیر بدیهی داشته باشد

Subject

Date

قضیه: اگر $v_1, v_2, \ldots, v_k$ بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ در یک ماتریس $n \times n$ باشند، آنگاه مجموعه‌ی $\{v_1, \ldots, v_k\}$ مستقل خطی خواهد بود.

نکته: اگر ماتریس A دارای مقدار ویژه صفر باشد، معکوس پذیر نیست.

معادله مشخصه :

مثال : مقادیر ویژه ماتریس زیر را حساب کنید.

$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & -۶ \end{bmatrix}$ $\qquad Ax = \lambda x \rightarrow (A-\lambda I)x = 0$

$(A-\lambda I = \underbrace{\begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۳ \\ ۳ & -۶-\lambda \end{bmatrix}}_{B})x = 0 \rightarrow$ جواب غیر بدیهی ← معکوس ناپذیر ← دترمینان صفر

$\underbrace{\det(A-\lambda I) = ۰}_{\text{معادله مشخصه}} \Rightarrow (۲-\lambda)(-۶-\lambda) - ۹ = ۰ \rightarrow \lambda = ۳ , -۷$

تعریف: عدد اسکالر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A است اگر و تنها اگر در معادله مشخصه صدق کند یعنی:

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

مثال: معادله مشخصه ماتریس زیر را بیابید.

$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ & -۶ & ۱ \\ ۰ & ۳ & -۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $\qquad \det(A-\lambda I) = (۵-\lambda)(۳-\lambda)(۵-\lambda)(۱-\lambda) = ۰$

$\rightarrow (۵-\lambda)^۲(۳-\lambda)(۱-\lambda) = ۰$

نکته: اگر مقدار ویژه λ ریشه n ام $\det(A-\lambda I)$ باشد، می‌گوییم چندگانگی مقدار ویژه برابر n است.

$A_{n \times n} \rightarrow$ چند جمله‌ای مشخصه از درجه n است $\qquad P_n(\lambda) = ۰$

$\det(A-\lambda I) \rightarrow$ چند جمله‌ای مشخصه گفته می‌شود.

Subject
Date

ماتریس های متشابه :
Similar

اگر ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد به طوری که : $B = P^{-1}AP \leftarrow PBP^{-1} = A \leftarrow$ A و B متشابه

قضیه : اگر دو ماتریس A و B با ابعاد $n \times n$ متشابه باشند ، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه یکسان و درنتیجه مقادیر ویژه یکسانی خواهند داشت.

اثبات : $\det(B - \lambda I) = \det(P(B-\lambda I)P^{-1}) = \det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = \det(A - \lambda I)$

* عکس قضیه برقرار نیست.

الگوریتم QR : اثبات کنید ماتریس هایی که به دست می‌آیند متشابه هستند. $Q^T = Q^{-1}$

R بالا مثلثی

$A = Q_1R_1$
$A_1 = R_1Q_1$
$A_1 = Q_2R_2$
$A_2 = R_2Q_2$

قطری سازی :
Diagonalization

مثال : ماتریس D مفروض است. D^2 ، D^3 را محاسبه کنید.

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $D^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ $D^3 = \begin{bmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$ $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

* اگر ماتریس A را به صورت روبه‌رو بنویسیم که P ماتریس معکوس پذیر و D قطری باشد داریم :

$A = PDP^{-1}$

$A^K = PD^KP^{-1}$

PAPCO

Subject
Date

تعریف: ماتریس مربعی A قطری شدنی است در صورتی که مشابه با یک ماتریس قطری باشد، یعنی ماتریس معکوس پذیر P وجود داشته باشد به ازای آن $A = PDP^{-1}$ که در آن D ماتریس قطری است.

قضیه: ماتریس A با ابعاد $n \times n$ قطری شدنی است، اگر و تنها اگر A دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد.

در حقیقت $A = PDP^{-1}$ با ماتریس قطری D است اگر و تنها اگر ستون‌های P، n بردار ویژه مستقل خطی A باشد که در این حالت عناصر قطری ماتریس D مقادیر ویژه‌ی مربوط به بردار ویژه‌های ماتریس P هستند.

مثال: ماتریس داده شده را در صورت امکان قطری کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) \longrightarrow \text{مقادیر ویژه} \longrightarrow \text{بردار ویژه} \longrightarrow D, P$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$Ax = -2x \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه مستقل خطی مربوط به $\lambda = -2$

اثبات قضیه :

$$A = PDP^{-1} \rightarrow AP = PD$$

$$A[v_1, v_2 \dots v_n] = [Av_1 \;\; Av_2 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n]$$

$$PD = [v_1 \;\; v_2 \dots v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n]$$

$$P = [u_1 \;\; u_2 \dots u_n] \rightarrow A[u_1 \;\; u_2 \dots u_n] = [Au_1 \;\; Au_2 \dots Au_n] = [\alpha_1 u_1 \dots \alpha_n u_n]$$

$$\rightarrow \begin{cases} Au_1 = \alpha_1 u_1 \\ \vdots \\ Au_n = \alpha_n u_n \end{cases} \rightarrow$$

• u_i ها بردار ویژه های متناظر مقادیر ویژه α_i ها هستند

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \qquad PD = [u_1 \;\; u_2 \dots u_n]\begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} = [\alpha_1 u_1 \dots \alpha_n u_n]$$

مثال : در صورت امکان فرم قطری ماتریس زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$(A-\lambda_1 I)x_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)x_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه دارد و ماتریس 3×3
پس قطری شدنی نیست

Subject
Date

نکته: ماتریس A با ابعاد $n\times n$ با n مقدار ویژه متمایز حتماً قطری شدنی است.

قضیه: ماتریس A با ابعاد $n\times n$، مفروض است که دارای P مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_P$ می‌باشد.

برای $1 \le K \le P$ بعد فضای ویژه‌ی λ_K کوچکتر یا مساوی چندگانگی مقدار ویژه λ_K است.

ماتریس A قطری شونده است، اگر و فقط اگر مجموع ابعاد فضاهای ویژه آن برابر با n باشد.

اگر ماتریس A قطری شدنی باشد و B_K یک پایه برای فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه λ_K باشد در آن صورت مجموعه‌ی

$B_1, B_2, \ldots, B_P$ بردار ویژه‌های ماتریس A و یک پایه برای فضای R^n هستند.

* فضای ویژه، x هایی هستند که در رابطه زیر صدق کنند: $(A-\lambda_K I)x = 0$

مقادیر و بردارهای ویژه و تبدیل‌های خطی:

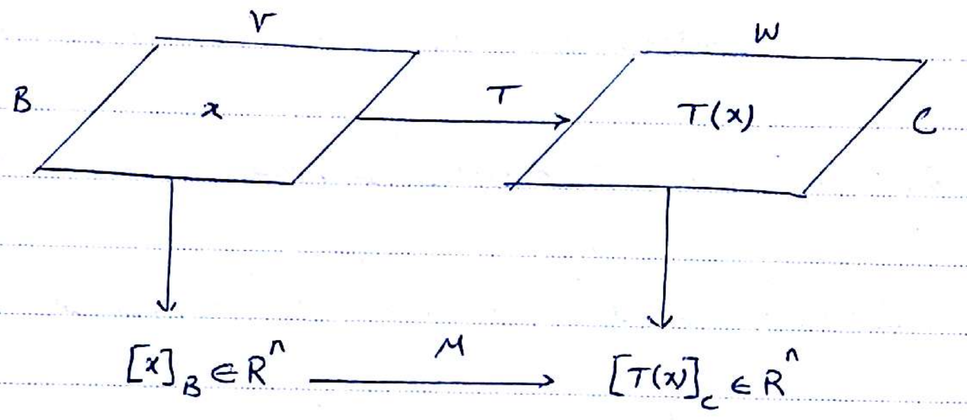
تعریف ماتریس برای تبدیل خطی از V به W:

$$\underset{\text{پایه } B}{\overset{n \text{ بعدی}}{V}} \xrightarrow{\;T\;} \underset{\text{پایه } C}{\overset{m \text{ بعدی}}{W}}$$

فرض کنید تبدیل خطی T از فضای برداری n بعدی V به فضای برداری m بعدی W را داریم. یک پایه B را برای

فضای V و پایه C را برای فضای W در نظر می‌گیریم. هدف به دست آوردن ماتریس تبدیل T مرتبط با پایه‌های

B و C است.



$$\boxed{[T(x)]_C = M[x]_B}$$

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ $\qquad [x]_B = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$

$$T(x) = T(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n)$$
$$= r_1 T(b_1) + \cdots + r_n T(b_n)$$

$$[T(x)]_C = [r_1 T(b_1) + r_2 T(b_2) + \cdots + r_n T(b_n)]_C = r_1 [T(b_1)]_C + \cdots + r_n [T(b_n)]_C$$

$$= \underbrace{\big[[T(b_1)]_C \quad [T(b_2)]_C \quad \cdots \quad [T(b_n)]_C\big]}_{M} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $B = \{b_1, b_2\}$ یک پایه برای فضای V و $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ یک پایه برای فضای W باشد

و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی با ویژگی‌های زیر باشد. ماتریس M مربوط به تبدیل T را به دست آورید.

$T(b_1) = ۳c_1 - ۲c_2 + ۵c_3$

$T(b_2) = ۴c_1 + ۷c_2 - c_3$

$$M = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۲ & ۷ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

نکته: مسئله تغییر مختصات حالت خاص این بحث است. $T: \underset{B}{V} \to \underset{C}{V}$ ، $T(x) = x$

$T: V \to V$, $B \xrightarrow[T]{} B$ $M = \left[[T(b_1)]_B \ [T(b_2)]_B \ \cdots \ [T(b_n)]_B \right] = T_B$

B-Matrix مربوط به تبدیل T

مثال: تبدیل خطی $T: P_2 \to P_2$ به صورت زیر تعریف شده است:

$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + 2a_2 t$

B-Matrix مربوط به تبدیل T را برای پایه استاندارد B به دست آورید. $B = \{1, t, t^2\}$

$\underset{0}{T(1)} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underset{1}{T(t)} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underset{2t}{T(t^2)} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $T_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تبدیل های خطی و مقادیر بردار ویژه:

$A = PDP^{-1}$ $\quad x \to Ax$

$u \to Du$

قضیه: فرض کنید ماتریس $A = PDP^{-1}$ باشد که در آن D ماتریس قطری است. اگر B یک پایه برای فضای R^n باشد که توسط ستون‌های P ساخته شده است، آنگاه ماتریس D، B-Matrix تبدیل $x \to Ax$ خواهد بود.

اثبات قضیه:

$x = P[x]_B \qquad Ax = P[Ax]_B \Rightarrow P^{-1}Ax = [Ax]_B$

$\to P^{-1}PDP^{-1}x = DP^{-1}x = D[x]_B \to D[x]_B = [Ax]_B$

مقادیر ویژه مختلط:

$\det(A - \lambda I) = 0$

مثال: ماتریس A به صورت زیر تعریف است، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/6 \\ 0/75 & 1/1 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = 0 = \det\left(\begin{bmatrix} 0/5-\lambda & -0/6 \\ 0/75 & 1/1-\lambda \end{bmatrix}\right) \to \lambda^2 - 1/6\lambda + 1 = 0$$

$\lambda_1 = 0/8 - j0/6 \,,\ \lambda_2 = 0/8 + j0/6$

$$(A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 0/5 - (0/8 - j0/6) & -0/6 \\ 0/75 & 1/1 - (0/8 - j0/6) \end{bmatrix} x = 0 \to V_1 = \begin{bmatrix} -2 - j4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -2 + j4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

۱/ نکته:

$a = x + jy \rightarrow \bar{a} = x - jy \qquad \overline{ab} = \bar{a} . \bar{b}$

$b = r + jw \rightarrow \bar{b} = r - jw$

اگر λ مقدار ویژه باشد: $Ax = \lambda x \rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \rightarrow \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \xrightarrow{\text{حقیقی}} A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

$\bar{\lambda}$ باز نیز مقدار ویژه و $\bar{x}$ نیز بردار ویژه است.

ادامه مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/6 \\ 0/75 & 1/1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 0/8 - j0/6 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -2-j4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P = [\,Re\{v_1\} \quad Im\{v_1\}\,] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = PCP^{-1} \rightarrow C = P^{-1}AP$$

$$C = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 0 & +4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0/5 & -0/6 \\ 0/75 & 1/1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/8 & -0/6 \\ 0/6 & 0/8 \end{bmatrix} \rightarrow \text{دوران}$$

قضیه: فرض کنید ماتریس A یک ماتریس حقیقی 2×2 باشد که دارای مقادیر ویژه مختلط بوده، یک مقدار ویژه مختلط آن $\lambda = a - jb$ باشد و v بردار ویژه متناظر با λ است. در این صورت $A = PCP^{-1}$ خواهد بود که $P = [Re\{v\} \quad Im\{v\}]$ و ماتریس $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نوشته می‌شود.

یادآوری: $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ ماتریس دوران پادساعتگرد به اندازه φ می‌باشد.

Subject
Date

روش توانی :
Power Method

n بردار ویژه مستقل خطی $v_1, v_2, \dots, v_n$ A $\quad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \dots$

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \xrightarrow{\times A} Ax_0 = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \dots + c_n A v_n$$

$$Ax_0 = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n \xrightarrow{\times A} A^2 x_0 = c_1 (\lambda_1)^2 v_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^2 v_n$$

$$A^k x_0 = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k v_n \to (\lambda_1)^{-k} A^k x_0 = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n$$

اگر از عبارت بالا $\lim_{k \to \infty}$ بگیریم داریم :

$$\lambda_1^{-k} A^k x_0 = c_1 v_1$$

الگوریتم :

گام اول : یک بردار x_0 ابتدایی انتخاب می‌شود که بزرگترین درایه آن ۱ باشد (اگر نبود scale می‌کنیم)

گام دوم : برای $k = 0, 1, 2, \dots$

a. Ax_k محاسبه شود.

b. μ_k درایه‌ای از Ax_k است که بزرگترین مقدار مطلق را دارد.

c. $$x_{k+1} = \frac{1}{\mu_k} A x_k$$

گام سوم : دنباله μ_k ها به سمت λ_1 و دنباله x_k ها به سمت v_1 میل خواهند کرد (در اکثر موارد)

تعامد و کمترین مربعات :

ضرب داخلی :

$$\langle u, v\rangle = u\cdot v = u^T v = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$u, v, w \in \mathbb{R}^n \qquad c \in \mathbb{R}$

1) $u\cdot v = v\cdot u$ ۲) $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

۳) $(cu)\cdot v = c(u\cdot v) = u\cdot (cv)$ ۴) $u\cdot u \geqslant 0 \qquad u\cdot u = 0 \iff u = 0$

طول بردارها : $\|u\|_2 = (u\cdot u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

تابع نرم : $f(x) \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n \rightarrow f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

1) $f(x) \geqslant 0$ ۲) $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$ ۳) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ ۴) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$

$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = \|x\|$

$\|u\|_1 = |u_1| + \cdots + |u_n| \qquad \cdots \qquad \|u\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|\}$ (بیشینه)

در حالت کلی :

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_n|^p)^{1/p}$$

Subject
Date

فاصله دو بردار: برای دو بردار u,v متعلق به $\mathbb{R}^n$ فاصله بین دو بردار با (u,v) dist نمایش داده می‌شود

و برابر با $\|u-v\|$ است.

unit vector $\rightarrow \|u\| = 1$

$*\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u.v$

اثبات:

$(u-v)^T(u-v) = (u^T - v^T)(u-v) = u^Tu - u^Tv - v^Tu + v^Tu = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u.v$

زاویه بین دو بردار:

$u.v = \langle u,v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}\right)$

تعامد:

تعریف: دو بردار (غیر صفر) u,v در فضای $\mathbb{R}^n$ عمود هستند درصورتی که $u.v = 0$

قضیه: دو بردار u,v برهم عمودند، اگر و تنها اگر $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

مکمل متعامد:

$\forall z \in W^{+}, \forall v \in W \quad \langle z,v \rangle = 0$

W فضای برداری $\quad \forall v \in W \rightarrow u.v = 0$

Subject
Date

نکته: مکمل متعامد بردارِ W یک زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ است.

نکته: بردار x متعلق به مکمل متعامد W است اگر و تنها اگر x متعامد بر همه‌ی بردارهای موجود در مجموعه‌ی بردارهایی باشد که W را span می‌کنند.

قضیه: فرض کنید A ماتریسی با ابعاد $m\times n$ باشد، مکمل متعامد فضای سطری A، فضای پوچ A خواهد بود و مکمل متعامد فضای ستونی A، فضای پوچ A^T خواهد بود.

اثبات: $AX=0$ ← باید ثابت کنیم xهایی که در این رابطه صدق می‌کنند بر تمام بردارهایی که $Row(A)$ را span می‌کنند، عمودند.

یعنی باید ثابت کنیم xهایی که $AX=0$ بر تک تک سطرهای ماتریس A عمودند:

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

مجموعه‌های متعامد:

تعریف: مجموعه بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_p$ از $\mathbb{R}^n$ مجموعه متعامد نامیده می‌شوند در صورتی که $u_i \cdot u_j = 0$ ، $i \neq j$

قضیه: اگر مجموعه‌ی $S=\{u_1, \dots, u_p\}$ یک مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر متعلق به $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه مجموعه‌ی S یک مجموعه مستقل خطی خواهد بود و بنابراین یک پایه برای زیرفضایی که توسط S، span می‌شود، می‌باشد.

Subject

Date

اثبات:

$$u_1^T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0) \longrightarrow \alpha_1 \|u_1\|^2 + \underset{0}{\cancel{\alpha_2 u_1^T u_2}} + \cdots + \underset{0}{\cancel{\alpha_p u_1^T u_p}} = 0$$

متعامد

$$\longrightarrow \alpha_1 \|u_1\|^2 = 0 \xrightarrow{u_1 \text{ بردار غیرصفر}} \alpha_1 = 0 \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

مستقل خطی

بردارهای orthonormal:

orthogonal + normal

$\|u\| = 1 \rightarrow$ نرمال و یکه $\quad \frac{u}{\|u\|}$

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad i \neq j$ و $\langle u_i, u_i \rangle = \|u_i\|^2 = 1$: orthonormal

قضیه: ماتریس U با ابعاد $m \times n$ دارای ستون‌های orthonormal است، اگر و تنها اگر $U^T U = I$.

اثبات: $U^T U = I \qquad U_{m \times n}$

$$U = [u_1 \dots u_n] \qquad \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} [u_1 \dots u_n] = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cancel{u_1^T u_2} & \cdots & \cancel{u_1^T u_n} \\ \cancel{u_2^T u_1} & u_2^T u_2 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ u_n^T u_1 & & & u_n^T u_n \end{bmatrix}$$

ویژگی‌ها:

1) $\|Ux\| = \|x\| \qquad \rightarrow \|Ux\| = (Ux)^T Ux = x^T U^T U x = x^T x$

$\hookrightarrow$ ماتریس ستون‌ها orthonormal

2) $(Ux) \cdot (Uy) = xy$

$U_{m \times n} \rightarrow U_{n \times n} \qquad U^T U = I \rightarrow U^{-1} = U^T \rightarrow UU^T = I \rightarrow$ orthonormal سطرها نیز

نکته: اگر ماتریس مربعی orthonormal باشد یعنی $U^{-1} = U^T$، و هم چنین سطرهای آن نیز orthonormal هستند.

پایه‌های متعامد:

یک پایه‌ی متعامد برای زیرفضای W، یک مجموعه‌ی متعامد است.

قضیه: فرض کنید مجموعه‌ی $\{u_1,\dots,u_p\}$ یک پایه‌ی متعامد برای زیرفضای W در $\mathbb{R}^n$ باشد. برای هر y متعلق به W، داریم:

$$\forall y\in W \quad y=c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_pu_p \qquad c_j=\frac{y\cdot u_j}{u_j\cdot u_j} \quad j=1,\dots,p$$

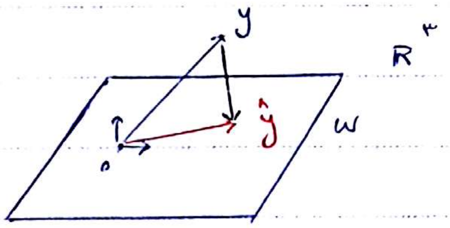
اثبات:

$$u_j^T(y=c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_pu_p) \to u_j^Ty=\cancel{c_1u_j^Tu_1}+\dots+c_ju_j^Tu_j+\cancel{c_pu_j^Tu_p}$$

$$u_j^Ty=c_ju_j^Tu_j \to u_j\cdot y=c_j\cdot u_j\cdot u_j \to c_j=\frac{u_j\cdot y}{u_j\cdot u_j}$$

تصویر کردن متعامد:

Orthogonal Projection



قضیه: فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه هر بردار y متعلق به $\mathbb{R}^n$ به صورت یکتایی به فرم $y=\hat{y}+z$ قابل نوشتن است که در آن $\hat{y}$ به صورت زیر است و $\{u_1,\dots,u_p\}$ یک پایه‌ی متعامد برای زیرفضای W هستند.

بنابراین:

$$y=\hat{y}+z \to \hat{y}\in W,\ z\in W^{\perp}$$

$$\hat{y}=\frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1+\dots+\frac{y\cdot u_p}{u_p\cdot u_p}u_p$$

Subject
Date

اثبات : $y-\hat{y} \in W^{\perp}$ bayad be hameye bordar hai ke W ra span mikonad amod bashad

$$\left(y - \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \cdots - \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p\right) \cdot u_1 \rightarrow y \cdot u_1 - \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 \cdot u_1 - \cdots - \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} \cancel{u_p \cdot u_1}$$

$$= y \cdot u_1 - \frac{y \cdot u_1}{\cancel{u_1 \cdot u_1}} \cancel{u_1 \cdot u_1} = 0$$ به همین ترتیب برای بقیه u_i ها

$$y = \hat{y} + z \qquad y = \hat{y}_1 + z_1 \rightarrow \hat{y} + z = \hat{y}_1 + z_1 \rightarrow \underbrace{\hat{y} - \hat{y}_1}_{\hat{y}, \hat{y}_1 \in W} = \underbrace{z_1 - z}_{z_1, z \in W^{\perp}}$$

$$\rightarrow \hat{y} - \hat{y}_1 = 0 , \; z_1 - z = 0 \rightarrow$$ یکتا است

notation: $\hat{y} = \text{Proj}_W \, y$

ویژگی های Orthogonal Projection :

$$y \in W \rightarrow \text{Proj}_W \, y = y$$

قضیه: فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد، $y \in \mathbb{R}^n$ و $\hat{y} = \text{Proj}_W \, y$ آنگاه $\hat{y}$ نزدیک‌ترین نقطه

در فضای W به y است، یعنی: $\|y-\hat{y}\| < \|y-v\| \quad \forall v \in W$

اثبات:

$$y - v = y - \hat{y} + \hat{y} - v \rightarrow \|y-v\|^2 = \|y-\hat{y}\|^2 + \underbrace{\|\hat{y}-v\|^2}_{>0} + \cancel{2(\underbrace{y-\hat{y}}_{\in W^{\perp}}) \cdot (\underbrace{\hat{y}-v}_{\in W})}$$

$$\Rightarrow \|y-\hat{y}\|^2 < \|y-v\|^2$$

PAPCO

Subject

Date

قضیه: اگر $\{u_1, \dots, u_p\}$ یک پایه orthonormal برای زیرفضای W در R^n باشند آنگاه

I) $$\text{Proj}_W\, y = \hat{y} = y\cdot u_1\, u_1 + y\cdot u_2\, u_2 + \dots + y\cdot u_p\, u_p$$

II) $$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p] \rightarrow \boxed{\text{Proj}_W\, y = UU^T y}$$

اثبات: $$UU^T y = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p] \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_p^T \end{bmatrix} y = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p] \begin{bmatrix} u_1^T y \\ \vdots \\ u_p^T y \end{bmatrix} = y\cdot u_1\, u_1 + \dots + y\cdot u_p\, u_p$$

روش گرام اشمیت:

Gram-Schmidt

$$\underbrace{\{x_1, \dots, x_p\}}_{\text{پایه‌های فضای } W}^{\text{مستقل خطی}} \rightarrow \{v_1, \dots, v_p\}^{\text{متعامد}}$$

1) $v_1 = x_1$

2) $$v_2 = x_2 - \frac{x_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} v_1$$

3) $$v_3 = x_3 - \frac{x_3\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} v_1 - \frac{x_3\cdot v_2}{v_2\cdot v_2} v_2$$

$\vdots$

p) $$v_p = x_p - \frac{x_p\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} v_1 - \dots - \frac{x_p\cdot v_{p-1}}{v_{p-1}\cdot v_{p-1}} v_{p-1}$$

قضیه‌ی تجزیه QR : ماتریس A را با ابعاد $m\times n$ با ستون‌های مستقل خطی در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس A قابل تجزیه به فرم $A = QR$ خواهد بود که در آن Q یک ماتریس $m\times n$ است که ستون‌های آن orthonormal بوده و R یک ماتریس $n\times n$ بالا مثلثی با درایه‌های مثبت روی قطرش است.

اثبات:

$$A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n} \qquad A = [x_1 \ x_2 \cdots x_n] \to [u_1 \ u_2 \cdots u_n]$$

$$\text{Span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\} = W_k$$

$$x_k = r_{1k} u_1 + r_{2k} u_2 + \dots + r_{kk} u_k + 0 \times u_{k+1} + \dots + 0 \times u_n$$

$$r_k = \begin{bmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{kk} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_k = Q r_k = [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} r_{1k} \\ \vdots \\ r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [x_1 \ x_2 \cdots x_n] = Q[r_1 \ r_2 \cdots r_n] \Rightarrow A = QR$$

چون u_iها مستقل هستند پس امکان ندارد روی قطر اصلی R صفر شود.

مثال: تجزیه QR ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا روش گرام-اشمیت را روی ستون‌های ماتریس A می‌زنیم ← v_1, v_2, v_3 به دست می‌آید.
سپس v_3, v_2, v_1 را نرمال می‌کنیم و ماتریس Q به دست می‌آید.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \qquad v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Subject
Date

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad I = Q^TQ \rightarrow A = QR \xrightarrow{\times Q^T} Q^TA = Q^TQR = IR \rightarrow R = Q^TA$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

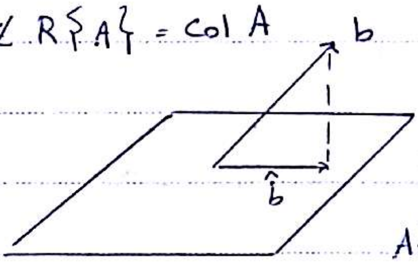
Least Square Problems (مسائل کمترین مربعات) :

ماتریس $A_{m\times n}$ و بردار b متعلق به $\mathbb{R}^m$ است. جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$، $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ است که

به ازای آن داشته باشیم: $\|A\hat{x}-b\| \leq \|Ax-b\| \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

یعنی با تغییر x، $\|Ax-b\|$ مینیمم می‌شود. $\hat{x} = \arg\min_{x} \|Ax-b\|$

$b \notin R\{A\} = \text{Col } A$



$\hat{b} = \text{proj}_{\text{Col } A}\, b$

$A\hat{x} = \hat{b} \qquad b-\hat{b} \in \text{Col } A^{\perp}, \quad b-\hat{b} = b - A\hat{x}$

$$\Rightarrow A^T(b-\hat{b}) = A^T(b-A\hat{x}) = 0 \Rightarrow A^TA\hat{x} = A^Tb$$

مجموعه جواب least square دستگاه $Ax=b$ همان مجموعه جواب معادلات نرمال $A^TAx = A^Tb$ است.

مثال: پاسخ کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb \quad A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad A^Tb = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

PaPCO

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

* اگر ستون های A مستقل خطی باشند آنگاه ستون های A^TA مستقل خطی هستند.

قضیه: ماتریس $A_{m\times n}$ را در نظر بگیرید. عبارت های زیر معادل هم هستند:

a) $Ax=b$ این دستگاه جواب کمترین مربعات یکتا به ازای هر $b\in\mathbb{R}^m$ دارد.

b) ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند.

c) A^TA معکوس پذیر است.

مربعی است و ستون های مستقل دارد.

قضیه: ماتریس $A_{m\times n}$ دو ستون های مستقل خطی است. اگر تجزیه QR به صورت $A=QR$ باشد آنگاه دستگاه $Ax=b$ به ازای $\forall b\in\mathbb{R}^m$ دارای پاسخ کمترین مربعات یکتا است، که دارای فرمول زیر است:

$$\hat{x} = R^{-1}Q^Tb$$

پاسخ کمترین مربعات در $A\hat{x}=\hat{b}$ صدق می کند:

$$\hat{b} = \text{proj}_{\text{col}\,A}\, b = Q^TQb$$

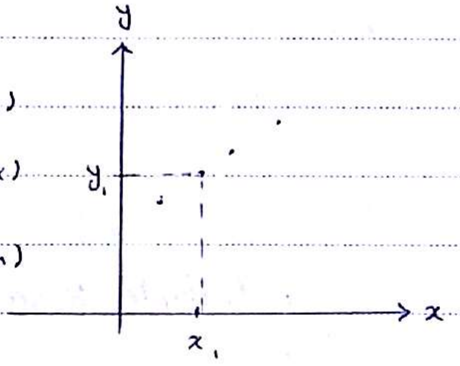
$$\Rightarrow A\hat{x} = Q^TQb \rightarrow QR\hat{x} = QQ^Tb \xrightarrow{\times Q^T} \underbrace{Q^TQ}_{I}R\hat{x} = \underbrace{Q^TQ}_{I}Q^Tb$$

$$\Rightarrow R\hat{x} = Q^Tb$$

Subject جلسه بیست و ششم
Date

: Least Square Line

(x_1,y_1)
(x_2,y_2)
$\vdots$
(x_n,y_n)



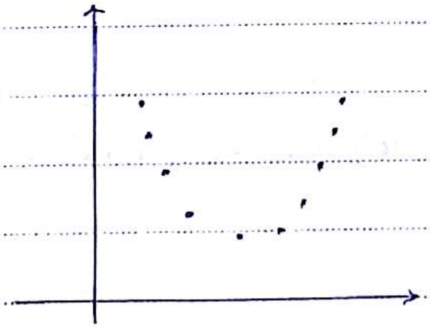
(x_1,y_1) $\;x_1 \to B_0+B_1x_1$	y_1	$\to (B_0+B_1x_1-y_1)^2+$
(x_2,y_2) $\;x_2 \to B_0+B_1x_2$	y_2	$\to (B_0+B_1x_2-y_2)^2+$
$\vdots$		$\vdots$
(x_n,y_n) $\;x_n \to B_0+B_1x_n$	y_n	$\to (B_0+B_1x_n-y_n)^2$

$$\|\underbrace{X}_{\text{ماتریس}}B-\underbrace{y}_{\text{بردار}}\|^2 \qquad X=\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ & \vdots\\ 1 & x_n\end{bmatrix}_{n\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix}B_0\\ B_1\end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

$$XB-y=\begin{bmatrix}B_0+B_1x_1-y_1\\ B_0+B_1x_2-y_2\\ \vdots\\ B_0+B_1x_n-y_n\end{bmatrix} \qquad \underbrace{XB=y}_{\text{ناسازگار}} \to \|XB-y\|_2^2 \to X^TXB=X^Ty$$

: (GLM) General Linear Model

$$y=XB+\mathcal{E}$$



$(x_1,y_1)\to B_0+B_1x_1+B_2x_1^2$	y_1	
$(x_2,y_2)\to B_0+B_1x_2+B_2x_2^2$	y_2	$\to \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(B_0+B_1x_i+B_2x_i^2)\right)^2$
$\vdots$		
$(x_n,y_n)\to B_0+B_1x_n+B_2x_n^2$	y_n	

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon + XB = y \quad \longrightarrow \quad \|XB - y\|^2$$

: Multiple Regression

$$y = B_0 + B_1 u + B_2 v$$

(u_1, v_1, y_1)	$B_0 + B_1 u_1 + B_2 v_1$	y_1
	$\vdots$	
(u_n, v_n, y_n)	$B_0 + B_1 u_n + B_2 v_n$	y_n

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (B_0 + B_1 u_i + B_2 v_i)\right)^2$$

$$\underset{B}{\operatorname{argmin}} \|XB - y\| \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ & \vdots & \\ 1 & u_n & v_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فضاهای ضرب داخلی :

Inner Product Spaces

$u, v \in V \qquad \langle u, v \rangle$

۱) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

۲) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

۳) $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle$ c اسکالر

۴) $\langle u, u \rangle \geq 0 \rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Subject
Date

$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ $\quad$ $dist(u, v) = \|u - v\|$

تعریف ضرب داخلی برای توابع:

$$\left.\begin{matrix} f(t) \\ g(t) \end{matrix}\right. \rightarrow \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt$$

ماتریس های متقارن و فرم Quadratic:

$A = PDP^{-1}$

$A = PDP^T$ orthogonally diagonizable

$A^T = (PDP^T)^T = PDP^T$

قضیه: ماتریس مربعی A قطری شدنی به صورت orthogonal است، اگر و تنها اگر ماتریس A متقارن باشد.

اثبات: A ماتریس متقارن ، $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\begin{matrix} \lambda_i & \neq & \lambda_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_i & & v_j \end{matrix}$$

$$\lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle = \langle A v_i, v_j\rangle = (A v_i)^T v_j = v_i^T A^T v_j$$

$$= v_i^T A v_j = v_i^T \lambda_j v_j = \lambda_j v_i^T v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle \rightarrow \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle$$

$$\xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

مثال : ماتریس A را که معادله مشخصه اش به صورت داده شده است به صورت orthogonally قطری کنید.

$$-(\lambda-7)^2(\lambda+2)=0 \longrightarrow \lambda_1=7\ ,\ \lambda_2=2$$

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&4\\-2&6&2\\4&2&3\end{bmatrix}\qquad v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\qquad v_3=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

متعامد نیستند

گرام اشمیت :

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\longrightarrow z_2=v_2-\frac{v_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1}v_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\1\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$v_1, z_2, v_3\xrightarrow[\text{normalize}]{}P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{\sqrt{18}}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Subject جلسه بیست و هفتم
Date

قضیه: فرض کنید $A_{n\times n}$ متقارن باشد؛ در این صورت A دارای ویژگی های زیر خواهد بود:

۱- مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی هستند.

۲- بعد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه λ برابر با چندگانگی مقدار ویژه λ است.

↳ ماتریس های متقارن همواره قطری شدنی هستند یعنی همیشه n بردار ویژه مستقل دارند.

۳- فضاهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه مختلف متعامد هستند.

۴- ماتریس A قطری شدنی به صورت متعامد خواهد بود.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow xx^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_nx_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & & x_nx_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \operatorname{rank}(xx^T) = 1$$

تجزیه طیفی ماتریس متقارن:
Spcetral Decomposition

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \underbrace{u_1u_1^T}_{n\times n} + \lambda_2 \underbrace{u_2u_2^T}_{n\times n} + \cdots + \lambda_n \underbrace{u_nu_n^T}_{n\times n}$$

← A به صورت جمع n ماتریس با $\operatorname{rank}=1$ قابل نوشتن است.

Subject
Date

فرم های Quadratic :

$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $Q(x) = \underset{1\times n}{x^T} A \underset{n\times 1}{x}$ $\quad$ (متقارن $A_{n\times n}$)

$x \to Q(x)$

* $\|x\|^2$ تابعی به فرم Quadratic است :

$\|x\|^2 = x^T x = x^T I x$

مثال : آیا تابع زیر به فرم Quadratic است؟

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to A = \begin{bmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

تغییر متغیر در فرم Quadratic :

$\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times n}{P}\,\underset{n\times 1}{y}$ $\qquad$ $y = P^{-1} x$

$Q(x) = x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T (P^T A P) y$

می دانیم ماتریس A متقارن ، قطری شدنی به صورت PAP^T است $\leftarrow$ $D = P^T A P$

اگر در عبارت بالا P همان ماتریس متشکل از بردارهای ویژه A (orthonormal) باشد :

$Q(x) = y^T (P^T A P) y = y^T D y$

قضیه محورهای اساسی :

Principle Axes

فرض کنید $A_{n\times n}$ متقارن باشد. در آن صورت تغییر متغیر $x = Py$ که در آن بردار ویژه های orthonormal ماتریس A هستند فرم Quadratic ، x^TAx را به فرم y^TDy که در آن D ماتریس قطری است تبدیل می کند

و ستون های P محورهای اساسی فرم x^TAx نامیده می شوند.

مثال : تغییر متغیری انجام دهید که فرم Quadratic زیر را به فرم Quadratic با ماتریس قطری تبدیل کند.

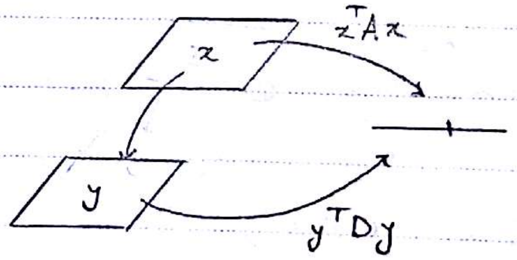
$x^TAx \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$(A-\lambda I)x = 0 \rightarrow \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-5-\lambda)-16$

$= \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -7$

$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad x = Py \qquad D = P^TAP$

$\xrightarrow{\text{فرم Quadratic}} y^TDy$



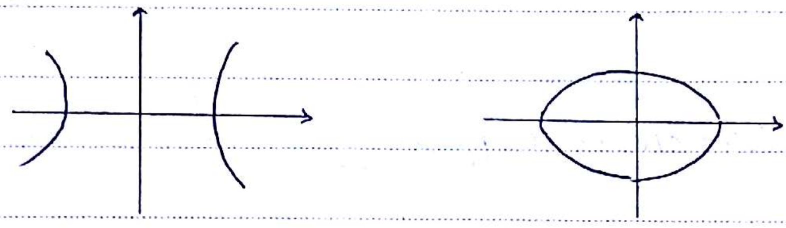
$* \quad x^TAx = [x_1 \quad x_2] \boxed{\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 = K$

A is symetric

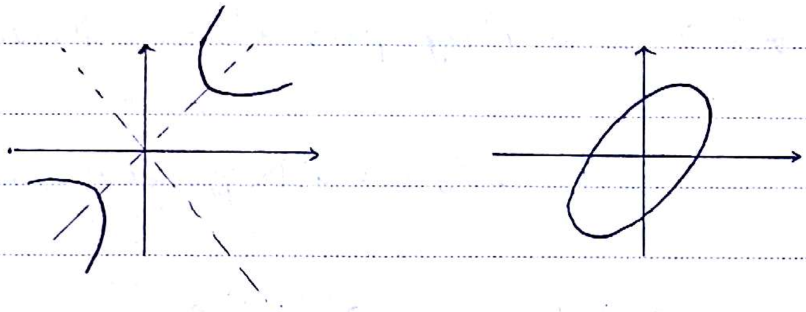
$Q(x) = x^TAx = K$

$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

a) اگر A قطری باشد: $x^TAx = ax_1^2 + bx_2^2 = K$ ← دایره، بیضی، هذلولی



b) اگر A قطری نباشد:



$P = [u_1 \quad u_2]$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

دسته بندی فرم های Quadratic:

ماتریس A، با فرم های Quadratic دسته اول، positive definite (مثبت معین) هستند درصورتی که:
متقارن

$\forall x: Q(x) = x^TAx > 0$

negative definite (منفی معین) هستند درصورتی که:

$\forall x: Q(x) = x^TAx < 0$

indefinite، هستند اگر:

$\begin{cases} \exists x: Q(x) > 0 \\ \exists x: Q(x) < 0 \end{cases}$

Subject
Date

قضیه: ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ مفروض است.

این ماتریس مثبت معین است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه‌اش مثبت باشند.

این ماتریس منفی معین است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه‌اش منفی باشند.

این ماتریس indefinite است اگر بعضی از مقادیر ویژه‌اش مثبت و بعضی منفی باشند.

$$x = Py \rightarrow x^T A x = y^T D y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

بهینه سازی

قضیه: ماتریس متقارن A مفروض است. اگر $M = Max\{x^T A x ; \|x\|=1\}$ و $m = Min\{x^T A x ; \|x\|=1\}$ باشند

در این صورت M برابر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A و m کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A خواهد بود و مقدار x^TAx

به ازای u_1 که بردار ویژه مربوط به بزرگترین مقدار ویژه است برابر با M است و به ازای u_2 که بردار ویژه مربوط به کوچکترین

مقدار ویژه است برابر m خواهد شد.

اثبات:

$$\underset{\|x\|=1 \rightarrow \|Py\|=1 \rightarrow \|y\|=1}{Max}\ x^TAx = y^TDy \xrightarrow{\text{مسئله معادل}} \underset{\|y\|=1}{Max}\ y^TDy$$

Subject
Date

فرض $\rightarrow Q : \mathbb{R}^{3} \rightarrow \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$

$\xrightarrow{\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3} y^T D y \leqslant \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \lambda_1 y_3^2 = \lambda_1 (\underbrace{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}_{\|y\|^2}) = \lambda_1$

$\rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = Py = [u_1 \ u_2 \ u_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1$

Subject جلسه بیست ششم
Date

Example: $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad x \mapsto Ax$

Good Example

x at which the length $\|Ax\|$ is maximized, and compute this maximum length, $\|x\|=1$.

$$(A^TA)^T = A^TA$$

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T Ax = x^T \underbrace{A^TA}_{\text{متقارن}} x \quad \|x\|=1$$

$\longrightarrow$ بردار ویژه A^TA به ازای بزرگترین مقدار ویژه

$$A^TA = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 360, \lambda_2 = 90, \lambda_3 = 0$

$\hookrightarrow \|Ax\|_{max} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

Example: $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ singular value decomposition.

۱ـ تشکیل A^TA

۲ـ محاسبه ی مقدارهای ویژه A^TA $\quad \overset{\sigma_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \overset{\sigma_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \overset{\sigma_n}{\sqrt{\lambda_n}}$

۳ـ محاسبه بردارهای ویژه A^TA $\rightarrow [v_1\ v_2 \dots v_n]$

۴ـ محاسبه $u_i = \dfrac{Av_i}{\|Av_i\|}$