فصل پنجم

مبانی مدارهای LTI مرتبه n ام

مدار دوگان:

دو مدار وقتی دوگان می‌باشند که متغیرهای دوگان آن‌ها دارای معادلات دیفرانسیل یکسانی باشند. برای دسترسی به مدار دوگان، ابتدا گراف دوگان را رسم نموده و سپس عناصر را نیز به دوگان متناظرشان و مقادیر دوگان آن‌ها ـ با توجه به جدول زیر ـ تبدیل می‌کنیم تا مدار دوگان حاصل گردد.

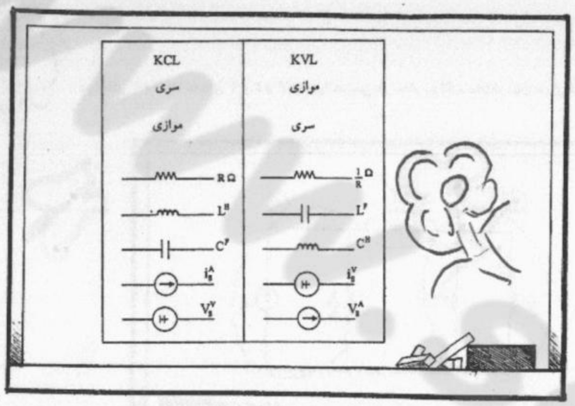
مراحل یافتن مدار دوگان:

در هر مش یک گره می گذاریم.

در بیرون مدار یک گره متناظر مش بیرونی قرار می‌دهیم.

بین هر دو گره، شاخه‌ای را می‌گذاریم که قبلاً بین آن دو مش متناظر، مشترک بوده است. (اگر آن شاخه بین یک مش و مش بیرونی باشد، آن شاخه را بین گره متناظر و گره زمین قرار می‌دهیم.)

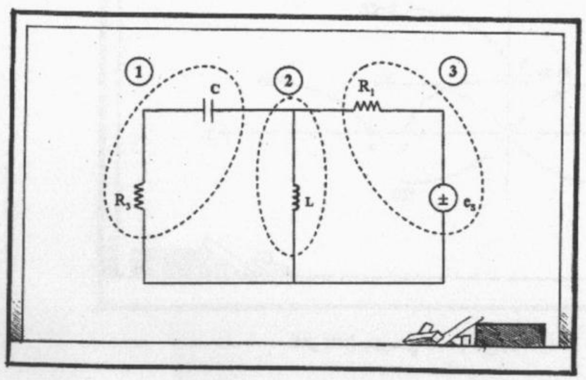
سرانجام به جای عناصر و مقادیرشان، عناصر و مقادیر دوگان آن‌ها را قرار می‌دهیم.



شکل (۱۲۸): جدول دوگانی (Duallity)

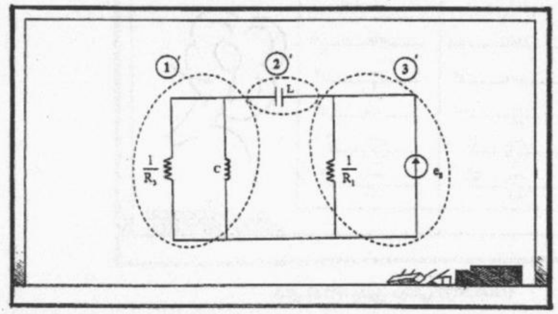
به نظر من، در مسایل تستی با توجه به جدول دوگانی، نیازی به الگوریتم چهار مرحله‌ای فوق نمی‌باشد، چراکه پاسخ جلوی چشم ماست، یعنی با چک کردن بخش‌های مختلف در مدار اصلی و مدار دوگان آن در گزینه‌ها (تکه به تکه!) مسأله حل است.

۴۴: دوگان مدار زیر را پیدا کنید.



شکل (۱۲۹): مدار تمرین ۴۴

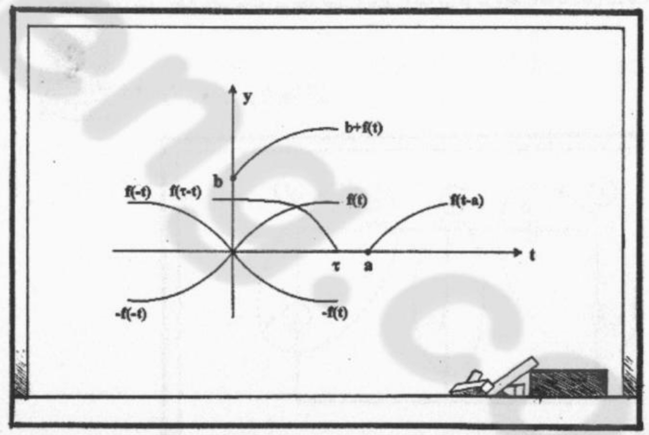
در شکل ۱۶۹) شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ موازی‌اند، پس در مدار دوگان، متناظرشان سری‌اند، یعنی:



شکل (۱۷۰): مدار دوگان شکل ۱۶۹

توابع تحریک مداری (پله، شیب، ضربه، ...)

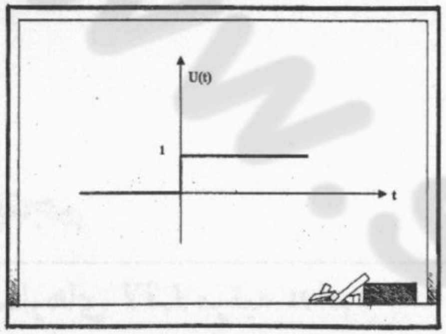
در درس مدار، آشنایی با بعضی توابع مهم، به نظر ضروری می‌رسد، اما قبل از پرداختن به آن‌ها یک یادآوری ساده از ایام جوانی می‌نماییم:



شکل (۱۷۱): بازی‌های ساده با تابع f (t)

۱ـ تابع پله واحد: u (t)

$$u(t)=\begin{cases}1 & ; \quad t\geq 0\\ 0 & ; \quad t<0\end{cases} \qquad (۲۹۲$$

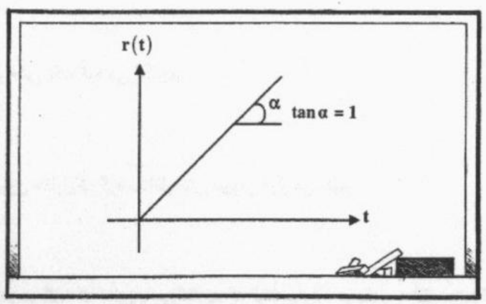


شکل (۱۷۲): تابع پله واحد

۲ـ تابع شیب واحد: r (t)

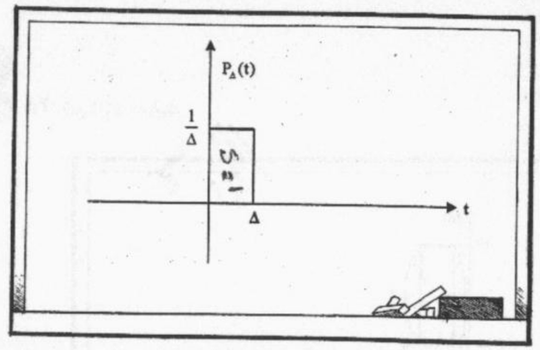
$$r(t)=\begin{cases}t & ; \quad t\geq 0\\ 0 & , \quad t<0\end{cases}=t\,.\,u(t) \qquad (۲۹۳$$

هنگام جمع کردن دوتا خط، شیب‌ها و عرض از مبدأهایشان را با هم جمع می‌کنیم.



۳ـ تابع ضربه واحد: $\delta(t)$

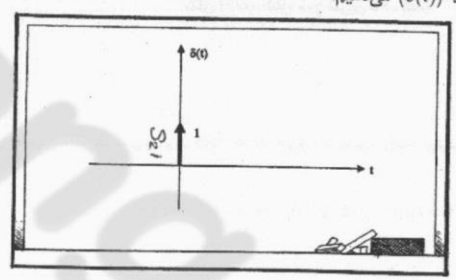
به تابع پالس واحد دقت کنید:



شکل (۱۷۳): تابع پالس واحد

حال اگر عرض پالس به سمت صفر برود، $(0 \to \Delta)$ آنگاه ارتفاع پالس در $t = 0$ به سمت بی‌نهایت می‌رود؛ $\left(\frac{1}{\Delta} \to \infty\right)$ و در سایر نقاط $t \neq 0$، تابع برابر صفر می‌گردد، اما مساحت در هر صورت ثابت و برابر 1 است.

شکل حاصل را تابع ضربه واحد $(\delta(t))$ می‌نامیم.



شکل (۱۷۴): تابع ضربه واحد

$$\delta(t) = \begin{cases} 1^{*} & ; \quad t=0 \\ 0 & ; \quad t \neq 0 \end{cases} = \lim_{\Delta \to 0} P_{\Delta}(t) \qquad (۲۹۴$$

*1 یعنی آنکه مساحت برابر یک است؛ نه ارتفاع (چرا که ارتفاع به سمت بی‌نهایت می‌رود)

خواص تابع ضربه:

۱ـ انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \qquad (۲۹۵$$

و واضح است که چنانچه تابع ضربه در محدوده‌ی انتگرال نباشد، حاصل انتگرال صفر می‌گردد.

۲ـ نمونه‌برداری:

$$f(t) \,.\, \delta(t) = f(0) \,.\, \delta(t) \qquad (۲۹۶$$

و یا در حالت کلی‌تر:

$$f(t) \,.\, \delta(t-t_0) = f(t_0) . \delta(t-t_0) \qquad (۲۹۷$$

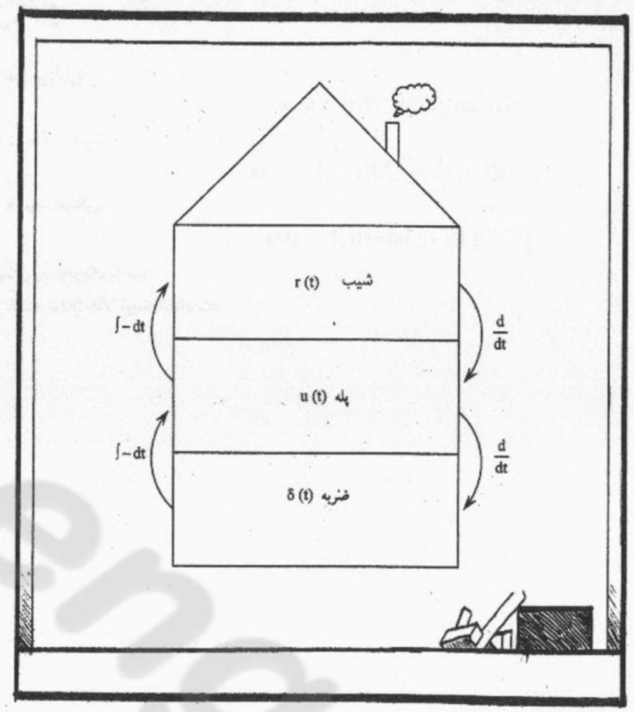
۳ـ خاصیت غربالی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . \delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \qquad (۲۹۸$$

روابط توابع تحریک با هم:

من خسته شدم! حالا نوبت شماست:

به این ساختمان سه‌طبقه دقت کنید:



شکل (۱۷۵): ساختمان سه طبقه توابع تحریک

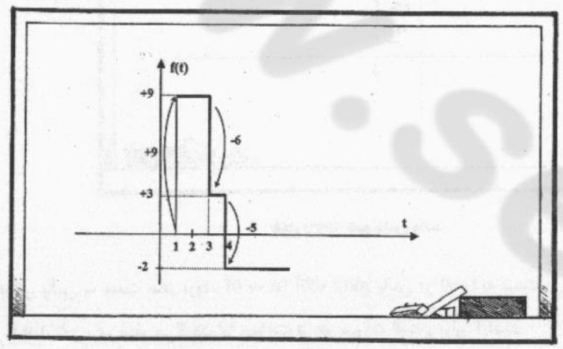
حالا آسانسور ! هر یک طبقه که پایین می‌آید، عمل مشتقگیری (یا شیب مماس) انجام می‌شود و هر یک طبقه که بالا می‌رود، عمل انتگرالگیری (یا سطح زیرمنحنی) صورت می‌پذیرد.

پس یادتان باشه که:

ضربه، مشتق پله است، پس در مدارهای LTI :

پاسخ ضربه، مشتق **پاسخ** پله است و همین‌طور الی آخر...

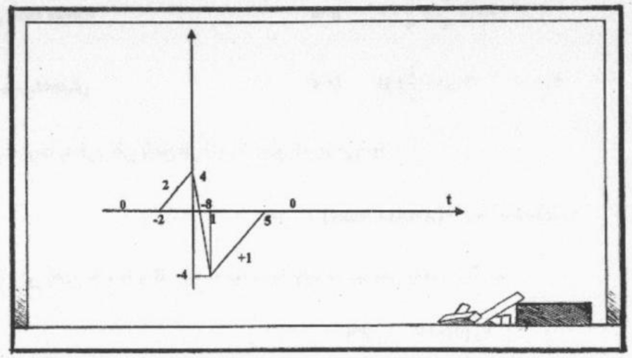
۴۵: تابع f (t) را بیابید.



شکل (۱۷۲): شکل موج تمرین ۴۵ ـ الف)

این که خیلی ساده است، می‌بینیم در نقاط 1 + و 3 + و 4 + پله‌هایی داریم به ترتیب با اندازه‌های 9 + و 6 − و 5 − پس:

$$f(t)=9u(t-1)-6u(t-3)-5u(t-4) \qquad (۲۹۹$$

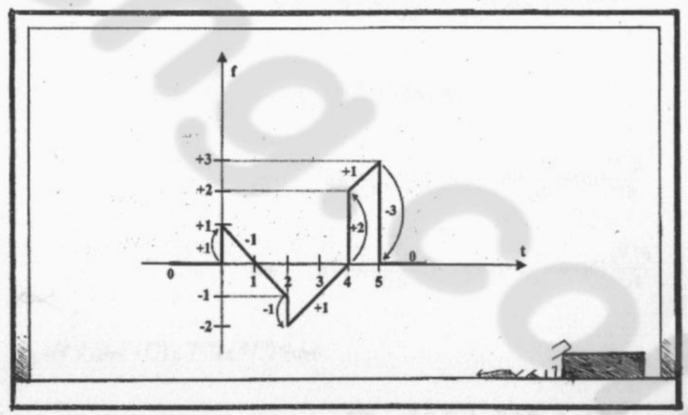


شکل (۱۷۷): شکل موج تمرین ۴۵ ـ ب

این هم ساده است، روی هر خط شیب‌اش را می‌نویسیم و می‌بینیم که در نقطه‌ی 2 - ، شیب از 0 به 2 + رسید و در نقطه‌ی صفر، شیب از 2 + به 8 - رسید و الی آخر ... پس:

$$f(t)=2r(t+2)-10r(t)+9r(t-1)-r(t-5) \qquad (۳۰۰$$

احسنت، یعنی تغییر شیب‌ها را در نقاط زاویه‌دار حساب می‌کنیم و می‌نویسیم. و اما شکل آخر که ترکیبی است



شکل (۱۷۸): شکل موج تمرین ۴۵ ـ ج

یعنی ترکیب حرف‌های دوستم، هم تغییر شیب ها را مد نظر قرار می‌دهیم و هم پله‌ها را ...
مثلاً در نقطه‌ی 2 + ، هم شیب از 1 - به 1 + رسیده (تغییر شیب = 2 +) و هم یک پله رو به پایین داریم ولی در نقطه‌ی 4 ، فقط دو پله رو به بالا رفته‌ایم، شیب تغییر نکرده است. (1 + بوده، 1 + مانده!) ...

$$f(t)=-r(t)+u(t)+2r(t-2)-u(t-2)+2u(t-4)-r(t-5)-3u(t-5) \qquad (۳۰۱$$

می‌خواستم توصیه کنم که نگاهی به ابتدای کتاب دسور داشته باشید تا شکل موج ها را خوب یاد بگیرید ولی فکر کنم، آنچه باید، انجام شد!

مبانی مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مرتبه‌ی n ام:

در این‌جا معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n ام است و شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m W}{dt^m}+\cdots+b_0 W \qquad (۳۰۲$$

همراه این معادله دیفرانسیل، n تا شرط اولیه لازم است. (W : ورودی و y : خروجی)

شرایط اولیه را می‌توان از معادلات اولیه گره یا حلقه در $t=0$ بدست آورد.

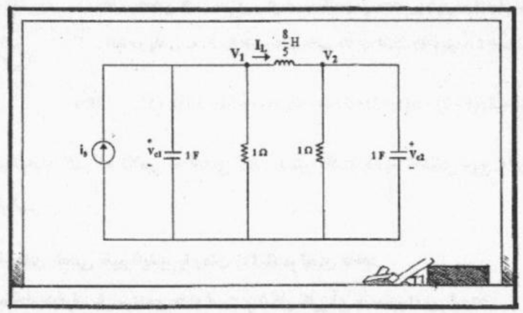
البته بهترین راه، رسم مدار در $t=0$ و سپس استفاده از تعبیرهای فیزیکی است و نهایتاً ... (یادش به خیر! روابط ۲۶۴) و ۲۶۵)

پاسخ ورودی صفر:

در این‌جا سمت راست معادله‌ی دیفرانسیل صفر می‌گردد. (معادله‌ی همگن) با استفاده از ریشه‌های معادله مشخصه (فرکانس‌های طبیعی) و ترکیبی از فرم پاسخ‌ها (که در مدارهای مرتبه‌ی دوم مطرح شد) پاسخ ورودی صفر حاصل می‌گردد. به طوری که معادل هر دسته از فرکانس‌های طبیعی، یک دسته جواب خاص داریم. (برای فهم کامل به تمرین زیر) **خوب** توجه کنید.)

۴۶: ابتدا معادله‌ی دیفرانسیلی برحسب V_{C_2} بنویسید و سپس پاسخ ورودی صفر را برای این مدار بیابید.

$$i_L(0) = V_{C_1}(0) = V_{C_2}(0) = 1$$



شکل (۱۷۹): مدار تمرین ۴۶

در گره‌های ۱ و ۲ ، KCL می‌زنیم:

$$\text{KCL}\quad : \quad \begin{cases} V_1 + V_1' + I_0 + \frac{5}{8}\int_0^t (V_1 - V_2)\,dt = i_s(t) & (۳۰۳ \\ V_2 + V_2' - I_0 + \frac{5}{8}\int_0^t (V_2 - V_1)\,dt = 0 & (۳۰۴ \end{cases}$$

اگر از رابطه‌ی ۳۰۴) مشتق بگیریم:

$$V_2'' + V_2' + \frac{5}{8}(V_2 - V_1) = 0 \qquad (۳۰۵$$

و چنانچه روابط ۳۰۳ و ۳۰۴) را جمع کنیم:

$$V_1' + V_1 + V_2' + V_2 = i_s(t) \qquad (۳۰۶$$

حالا با توجه به ۳۰۵) و ۳۰۶) داریم: (با حذف V_1 و V_1')

$$V_2''' + 2V_2'' + \frac{9}{4}V_2' + \frac{5}{4}V_2 = \frac{5}{8}i_s(t) \qquad (۳۰۷$$

و معادله مشخصه

$$S^3 + 2S^2 + \frac{9}{4}S + \frac{5}{4} = 0 \qquad (۳۰۸$$

حالا ریشه‌هایش

$$S_1 = -1 \quad , \quad S_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j1 \qquad (۳۰۹$$

و با توجه به فرم کلی پاسخ‌ها، $V_2(t)$ بصورت زیر می‌شود:

$$V_2(t) = Ke^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}(A\cos t + B\sin t) \qquad (۳۱۰$$

و برای یافتن K و A و B ، نیاز به سه شرط اولیه داریم، یکی را من می‌گویم:

$$V_2(0) = 1V \qquad (۳۱۱$$

بقیه با شما:

برای $\frac{dV_2}{dt}(0)$ در رابطه‌ی ۳۰۴) ، t را صفر می‌گذاریم:

$$V_2(0) + \frac{dV_2}{dt}(0) - 1(0) + \cancel{\frac{5}{8}\int_0^0}^{\,0} \cdots\cdots = 0 \qquad (۳۱۲$$

$$1 + \frac{dV_2}{dt}(0) - 1 + 0 = 0 \;\rightarrow\; \frac{dV_2}{dt}(0) = 0 \qquad (۳۱۳$$

و برای $\frac{d^2V_2}{dt^2}$ در رابطه‌ی ۳۰۵)، t = 0 قرار می‌دهیم:

$$\frac{d^2V_2}{dt^2}(0) + \frac{dV_2}{dt}(0) + \frac{5}{8}\left(V_2(0) - V_1(0)\right) = 0 \qquad (۳۱۴$$

$$\frac{d^2V_2}{dt^2}(0) + 0 + \frac{5}{8}(1-1) = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2V_2}{dt^2}(0) = 0 \qquad (۳۱۵$$

ص.

و حالا با روابط ۳۱۱) و ۳۱۳) و ۳۱۵) داریم:

$$K = 1 \quad و \quad A = 0 \quad و \quad B = 1 \qquad (۳۱۶$$

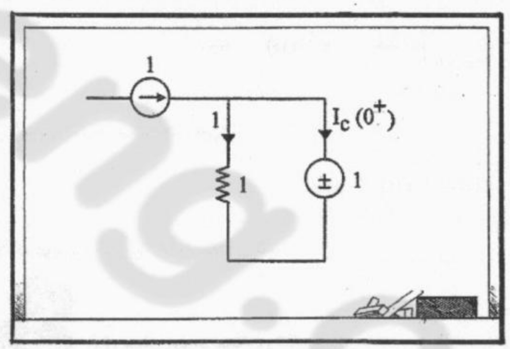
یعنی:

$$V_2(t) = e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\sin t \qquad (۳۱۷$$

و بالاخره تمام شد! انصافاً خیلی قشنگ و به همان اندازه طولانی بود، انتخاب گزینه‌ای که رابطه‌ی ۳۰۷) را نشان بدهد، چقدر زمان و دقت نیاز دارد!؟ آیا شما پیشنهاد بهتری ندارید؟

من که می‌دانم، شما این مسأله‌ی مفصل را حل کردید؛ تا من! راه بهینه‌ام را بگویم. ببینید، از همان داستان! مدارهای مرتبه‌ی دوم و قدم‌های سه‌گانه می‌رویم.

باز می‌گویم چک کردن $V_2(0) = 1$ خیلی خوش‌بینانه است ولی $\frac{dV_2}{dt}(0)$ اَبَر واقع‌بینانه است، و برای بدست آوردن آن، بیخودی خودمان را محتاج! رابطه‌ی ۳۰۴) نمی‌کنیم، مطابق آن قدمِ اولِ معهود! مدار را در $t = 0^+$ (به کمک رابطه صفره) رسم می‌کنیم: (تنها همان بخشی که لازمه!)



شکل (۱۸۰): مدار تمرین ۴۶) در $t = 0^+$

با KCL بازی:

$$1 = 1 + I_C(0^+) \;\rightarrow\; I_C(0^+) = 0 \qquad (۳۱۸$$

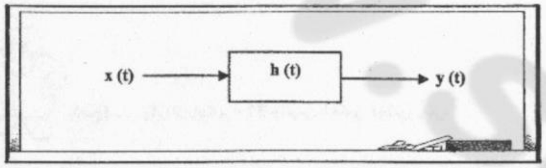
$$\frac{dV_2}{dt}(0^+) = \frac{1}{C_2} \times I_C(0^+) = 0 \qquad (۳۱۹$$

و می‌گوئیم گزینه‌ای درست است که اگر از آن مشتق بگیریم و $t = 0$ بگذاریم، حاصل صفر گردد و ...

مرحبا، و مطمئن باشید که این روش فوق‌العاده سریع، شما را به سر منزل مقصود در اسرع زمان ممکن خواهد رساند. (پس خوب یاد بگیردش!)

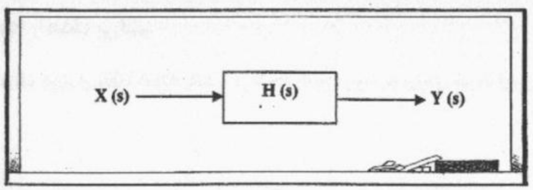
پاسخ حالت صفر:

یعنی یک ورودی داریم و یک خروجی و هیچ خبری هم از شرایط اولیه نیست.



شکل (۱۸۱): شماتیک یک سیستم با ورودی و خروجی در حوزه‌ی زمان

حال چنانچه، دست شکل ۱۸۱) را بگیریم و از شهر زمان ! (Time Domain) به شهر فرکانس (Frequency Domain) ببریم، این‌گونه می‌شود.



شکل (۱۸۲): شماتیک یک سیستم با ورودی و خروجی در شهر فرکانس !

h (t) را پاسخ ضربه نامیده و H (s) تابع تبدیل می‌گوییم.

در این‌جا چون هنوز تا قبل از این ملاقاتی با جناب آقای لاپلاس نداشته‌ایم!، مسأله را در حوزه‌ی زمان حل می‌کنیم، فقط رابطه‌ی کلیدی شکل ۱۸۲) را یادآوری می‌کنم که:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad (۳۲۰$$

و یا

$$Y(s) = H(s) \times X(s) \qquad (۳۲۱$$

حل بعضی از مسایل در .F.D (شهر فرکانس) راحت‌تر است و بعضی هم البته در .T.D

اِسترس بحث ما در این قسمت مربوط به حوزه‌ی زمان است.

دو نوع مسأله (و شاید بازی!) را که لازم است در این مبحث به خوبی یاد بگیریم.

بازی : ورودی و خروجی را داریم، پاسخ ضربه را می‌خواهیم.

پیشنهاد بدهید.

واضح است دیگر: از رابطه‌ی ۳۲۰ و سپس با عکس لاپلاس، یعنی:

$$h(t)=L^{-1}H(s) \qquad (۳۲۲$$

قبول، ولی قرار شد در .T.D بررسی کنیم؛ به روش من خوب دقت کنید:

با مشتق‌گیری از طرفین و خاصیت جمع آثار و تغییرناپذیر با زمان بودن و خلاصه این‌جور چیزها! در طرف ورودی توابع **غیرضربه** را **حذف** می‌کنیم.

تا در **طرف ورودی فقط ضربه** باشد و در نتیجه پاسخ مربوط به ورودی ضربه، (یعنی همان **پاسخ ضربه**) مشخص شود.

من نفهمیدم!

آفرین، از شجاعتت لذت می‌برم، «آدمی که چیزی را نمی‌فهمد، حتماً نفهمیده است دیگر! و کسی که می‌خواهد بفهمد، حتماً باید سؤال کند، بعلاوه، خود سؤال، نصف جواب است، ضمناً [1] ...»

۱ ـ رجوع شود به کتاب رمان «من او»

۴۷: با توجه به ورودی و خروجی داده شده، پاسخ ضربه را پیدا کنید.

$$x(t)=e^{-2t}\,.\,u(t) \qquad (۳۲۳$$

$$y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t) \qquad (۳۲۴$$

اگر از طرفین یکبار مشتق‌گیری کنیم و یکبار هم طرفین را در 2 ضرب کنیم، این‌جوری می‌شود.

$$2\times e^{-2t}u(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow 2\times\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t) \qquad (۳۲۵$$

$$-2e^{-2t}u(t)+\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \left(-e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t) \qquad (۳۲۶$$

به رابطه ۲۹۶) مراجعه کنید.

حالا طرفین را جمع می‌کنیم. (جمع آثار)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow e^{-t}\,u(t) \qquad (۳۲۷$$

پس پاسخ به ضربه بدست آمد، یعنی:

$$h(t)=e^{-t}.\,u(t) \qquad (۳۲۸$$

حالا که فهمیدید؛ تمرین ۴۸) به عهده‌ی شما:

۴۸: همان صورت مسأله‌ی ۴۷.

$$x(t)=\cos t.u(t) \qquad (۳۲۹$$

$$y(t)=e^{-t}.\,u(t) \qquad (۳۳۰$$

باز از طرفین مشتقگیری می‌کنیم:

$$\cos t\, u(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow e^{-t}.u(t) \qquad (۳۳۱$$

$$-\sin t.u(t)+\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow -e^{-t}.u(t)+\delta(t) \qquad (۳۳۲$$

فایده‌ای نداشت، پس یک‌بار دیگر هم مشتق می‌گیریم:

$$-\cos t\, u(t)+\delta'(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow e^{-t}u(t)-\delta(t)+\delta'(t) \qquad (۳۳۳$$

و حالا روابط ۳۳۱ و ۳۳۳) را جمع می‌کنیم:

$$\delta'(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow 2e^{-t}u(t)-\delta(t)+\delta'(t) \qquad (۳۳۴$$

و نهایتاً با انتگرال‌گیری:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \left(-2e^{-t}-1\right)u(t)+\delta(t) \qquad (۳۳۵$$

طرف راست رابطه‌ی ۳۳۵) همان پاسخ به ضربه یا پاسخ ضربه است.

بازی  : ورودی و پاسخ ضربه را داریم؛ خروجی را می‌خواهیم. که البته این بازی مهم‌تر هم هست.

در حوزه‌ی فرکانس ، رابطه‌ی ۳۲۱) و سپس با عکس لاپلاس ...

و در حوزه‌ی زمان از فرمول کانولوشن می‌رویم، یعنی:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau).h(t-\tau)d\tau = x*h \qquad (۳۳۶$$

و یا:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau).x(t-\tau)d\tau = h*x \qquad (۳۳۷$$

(یعنی جابجایی داریم.)

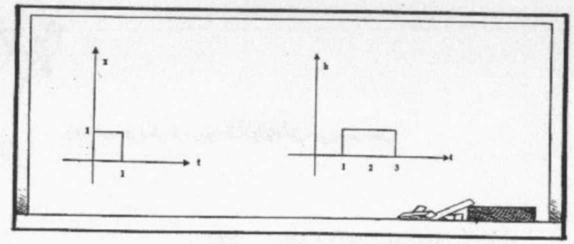
حرفم تمام شد دیگر، منتظر چه هستید؟! با جایگذاری در این روابط خروجی $y(t)$ بدست می‌آید.

درست است، ولی روش خاص (خصوصاً در این درس!) وجود دارد که از آن با عنوان **«کانولوشن ترسیمی»** یاد می‌کنیم. هنگامی که شکل موج ورودی و پاسخ ضربه را بدهند، به روش زیر می‌رویم، که البته همان تعبیر ترسیمی روابط ۳۳۶) و ۳۳۷) می‌باشند:

نام محور **افقی** را τ می‌گذاریم، یکی از آن‌ها ($x(\tau)$ یا $h(\tau)$) را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم (تا $x(-\tau)$ یا $h(-\tau)$ حاصل شود. با حرکت دادن شکل حاصل به اندازه‌ی t روی ریل افقی (محور τ) به سمت راست به $x(t-\tau)$ یا $h(t-\tau)$ می‌رسیم. در بازه‌های هم فرم (یعنی دارای قاعده‌ی یکسان) حاصل ضرب $h(\tau)\times x(t-\tau)$ یا $x(\tau)\times h(t-\tau)$ را بدست آوریم و از آن انتگرال می‌گیریم. (یعنی سطح زیر منحنی حاصل را محاسبه می‌کنیم.)

نگویید، می‌دانم مشکل چیست !!! با حل یکی دو مثال، مشکل حل است!

۴۹: با توجه به $x(t)$ و $h(t)$ ، خروجی $y(t)$ را بیابید.

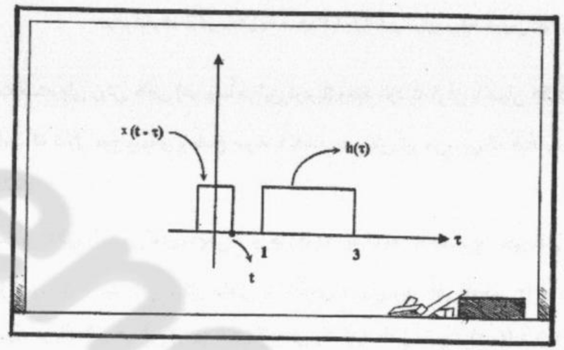


شکل (۱۸۳): ورودی و پاسخ ضربه در تمرین ۴۹

حالا که جابجایی داریم، به نظرم بهتر است با منحنی بازی کنیم که ساده‌تر است، یعنی نقش $h(t-\tau)$ یا $x(t-\tau)$ را به منحنی ساده‌تر بدهیم، (مثلاً در این تمرین، ورودی ساده‌تر است!)

قدم به قدم جلو می‌رویم:

(۱) $0 \le t < 1$



شکل (۱۸۴): مرحله‌ی اول حل تمرین ۴۹

در این بازه هیچ ملاقاتی صورت نمی‌پذیرد، پس:

$$y(t)=0 \qquad (۳۳۸$$

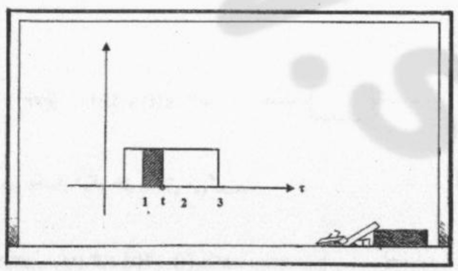
(۲) $1 \le t < 2$

چرا یک‌دفعه بصورت $1 \le t < 3$ نگرفتید؟

سؤال خوبی است. ببینید گفتم در بازه‌های **«هم فُرم»** ...

به زودی می‌بینید که بازه‌ی $(1\,,2)$ و بازه‌ی $(2\,,3)$ دارای فرم‌های مختلفی هستند.

پس من ادامه می‌دهم:

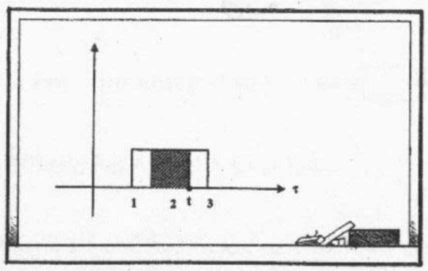


شکل (۱۸۵): مرحله‌ی دوم حل تمرین ۴۹

$$y(t)=\int_1^t 1\times 1\,.\,dt=t-1 \qquad (۳۳۹$$

این نتیجه بسیار راحت از شکل و مساحت هاشور خورده هم معلوم است.

(۳) $2 \le t < 3$

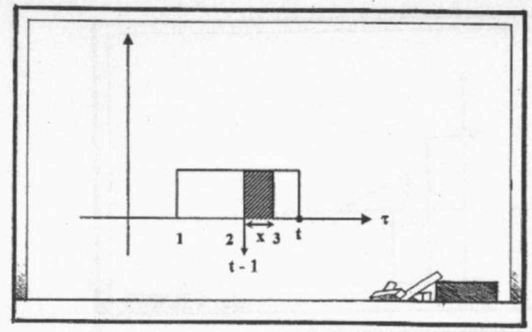


شکل (۱۸۶): مرحله‌ی سوم حل تمرین ۴۹

نکته‌ی جالب آن است که اگر t برابر 2.1 باشد یا 2.5 یا 2.9 یا ... در پاسخ هیچ فرقی نمی‌کند، یعنی:

$$y(t)=1 \qquad (۳۴۰$$

و بالاخره در بازه‌ی چهارم: (۴) $3 \le t < 4$



شکل (۱۸۷): مرحله‌ی چهارم حل تمرین ۴۹

مقدار مشخص شده x روی شکل برابر است با:

$$x = 3 - (t-1) = 4 - t \qquad (۳۴۱)$$

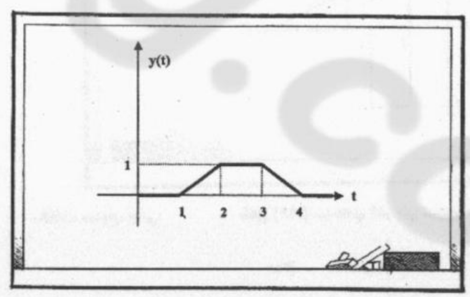
پس مساحت بخش هاشور خورده برابر است با:

$$y(t) = 4 - t \qquad (۳۴۲)$$

و اگر t از 4 بزرگتر شود، ملاقات تمام است: (۵) $4 \le t$

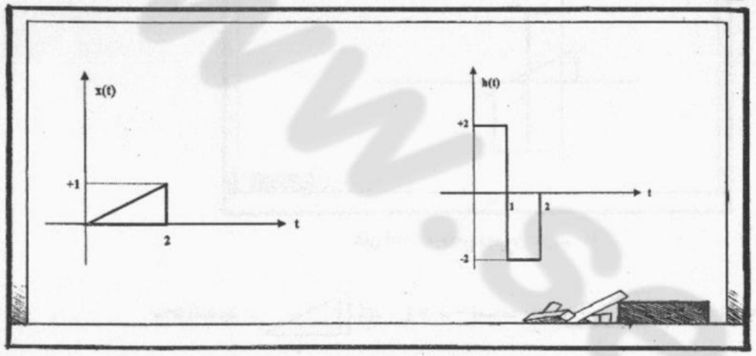
$$y(t) = 0 \qquad (۳۴۳)$$

جمع‌بندی می‌کنیم. شکل پاسخ اینگونه می‌شود:



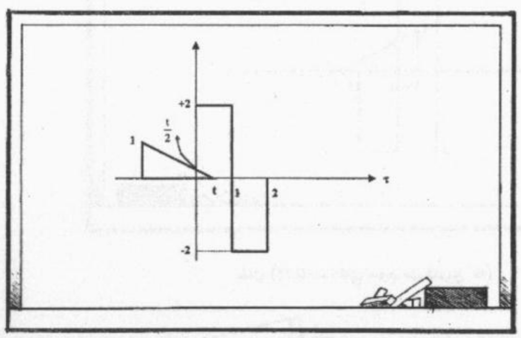
شکل (۱۸۸): پاسخ نهایی تمرین ۴۹

۵۰: با توجه x (t) و h (t)، خروجی y (t) را پیدا کنید.

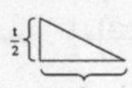


شکل (۱۸۹): ورودی و پاسخ ضربه در تمرین ۵۰

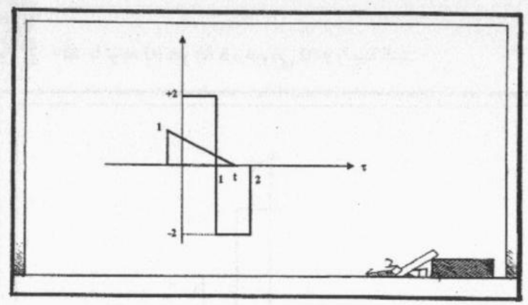
حالا که تمرین مشکل شد، نوبت من است! (یکبار هم من پز بدهم دیگر !!!) $h(\tau)$ را ثابت گرفته، $x(t-\tau)$ را می‌سازیم و روی ریل افقی راه می‌بریم: (۱) $0 \le t < 1$



شکل (۱۹۰): مرحله اول حل تمرین ۵۰

$y(t) = +2 \times ($  مساحت$) = +2 \times \frac{t}{2} \times t \times \frac{1}{2} \qquad (۳۴۴)$

(۲) $1 \le t < 2$

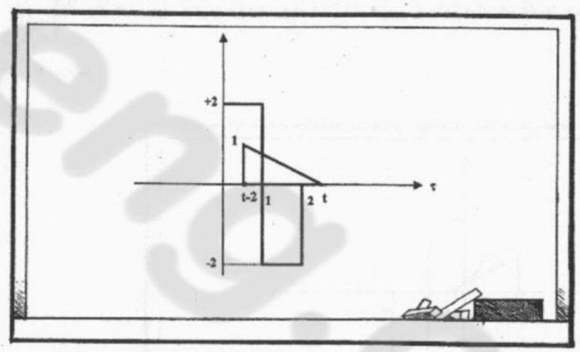


شکل (۱۹۱): مرحله‌ی دوم حل تمرین ۵۰

$$y(t)=+2\times\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\square\right\}}_{1}\frac{t-1}{2}\ \text{مساحت}\right)-2\times\left(\frac{t-1}{2}\underbrace{\left\{\triangle\right\}}_{t-1}\ \text{مساحت}\right) \quad (۳۴۵$$

$$y(t)=2\times\left(\frac{t+t-1}{2}\right)\times\frac{1}{2}-2\times\left(\frac{t-1}{2}\times\frac{t-1}{2}\right) \quad (۳۴۶$$

(۳) $2 \le t < 3$

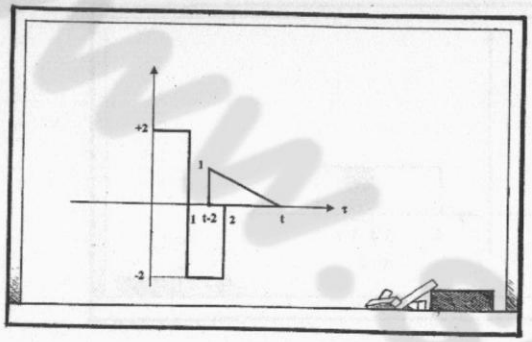


شکل (۱۹۲): مرحله‌ی سوم حل تمرین ۵۰

$$y(t)=+2\times\left(1\underbrace{\left\{\square\right\}}_{3-t}\frac{t-1}{2}\ \text{مساحت}\right)-2\times\left(\frac{t-1}{2}\underbrace{\left\{\square\right\}}_{1}\frac{t-2}{2}\ \text{مساحت}\right) \quad (۳۴۷$$

$$y(t)=2\times\left(1+\frac{t-1}{2}\right)\times\frac{3-t}{2}-2\times\left(\frac{t-1+t-2}{2}\right)\times\frac{1}{2} \quad (۳۴۸$$

(۴) $3 \le t < 4$



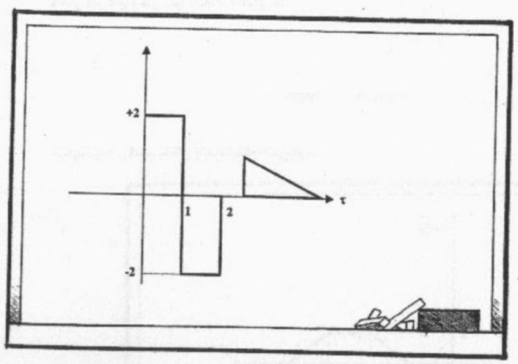
شکل (۱۹۳): مرحله‌ی چهارم حل تمرین ۵۰

اینجا دیگر در ناحیه $0<\tau<1$ همدیگر را نمی‌بینند:

$$y(t)=-2\times\left(1\underbrace{\left\{\square\right\}}_{4-t}\frac{t-2}{2}\ \text{مساحت}\right)=-2\left(1+\frac{t-2}{2}\right)\times\frac{4-t}{2} \quad (۳۴۹$$

و نهایتاً:

(۵) $4 \le t$



شکل (۱۹۴): مرحله‌ی آخر حل تمرین ۵۰

ملاقات ممنوع، یعنی:

$$y(t)=0 \quad (۳۵۰$$

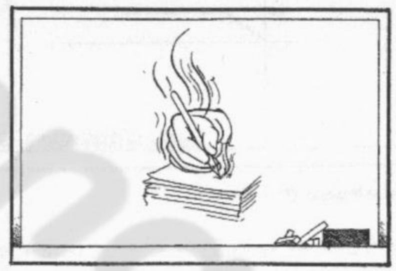
حالا خودم یک سؤال دارم! آیا مسأله‌ای به این مفصلی به درد تست می‌خورد؟

سؤال خوبی است. ببینید در تست‌ها معمولاً خروجی را در یک لحظه‌ی معلوم می‌خواهند، پس به جای n مرحله، آن هم بصورت پارامتری، یک مرحله لازم است آن هم بصورت عددی؛ ولی به هر حال این تمرینات **دست آدم** را گرم می‌کند تا سر جلسه‌ی آزمون با قدرت حاضر شویم.

یک گپ کوتاه:

دوستان **خیلی** خوب من، ببینید، یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های رشته‌ی تحصیلی شما با سایر رشته‌ها (که به جهت پرهیز از سوء تفاهم از بردن نامشان پرهیز می‌کنم!!) آن است که علاوه بر «**دانایی**»، نیاز به «**توانایی**» هم هست، و توانا شدن خودش یک فرآیند است که قطعاً نیاز به زحمت دارد.

گاهی وقت‌ها، دانشجویان عزیز می‌گویند «فلان مسأله را **بلدم**، اما **نمی‌دانم** باید **از کجا شروع کنم**!، همیشه به آن‌ها می‌گویم: تنها راه، **حل مسأله** است، قطعاً فقط دانایی کافی نیست، باید آن‌قدر مسأله حل کنید که **دست‌هایتان** علاوه بر مغزتان گرم شود.



شکل (۱۹۵): یک دست خوب گرم شده از فرط حل مسأله

پس تمام می‌کنم؛

«دانستن، توانستن نیست [۱]»

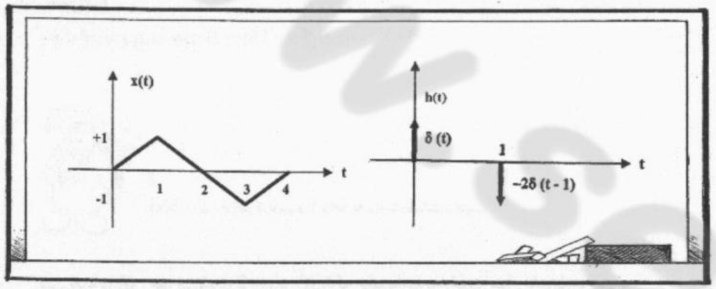
بلکه:

«دانستن مقدمه‌ی توانستن است»

۱ـ قصدم جسارت به عبارت «توانا بود هر که دانا بود» هم نیست و هم هست!

بگذریم، با هم یک تمرین جالب دیگر ببینیم.

۵۱: با توجه به ورودی و پاسخ ضربه، خروجی را پیدا کنید.



شکل (۱۹۶): ورودی و پاسخ ضربه در تمرین ۵۱

به روش قبلی حل این مسأله کمی دشوار به نظر می‌رسد.

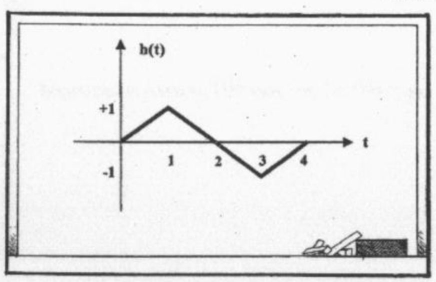
پس یک راه تازه می‌گویم:

حالت خاص

هرگاه یکی از توابع x (t) و یا h (t) بصورت ترکیب خطی **فقط** از توابع **ضربه** بود، با اجازه از خاصیت جابجایی، ورودی x (t) را همان تابع می‌گیریم، پس آن تابع دیگر در حکم پاسخ ضربه می‌شود. حال با توجه به مفهوم پاسخ ضربه، خروجی **به راحتی** معلوم می‌شود.

پس در این‌جا جای اسم x و h عوض می‌شود.

پاسخ ضربه این‌جوری شد:



شکل (۱۹۷): پاسخ ضربه در تمرین ۵۱

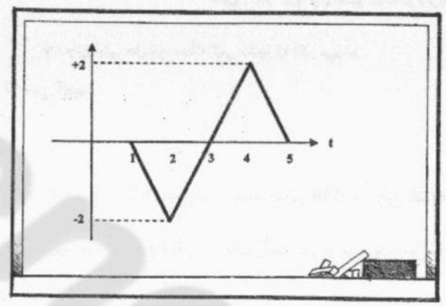
یعنی اگر ضربه بدهیم، شکل ۱۹۷ را می‌گیریم. پس خروجی ناشی از $\delta(t)$ معلوم شد.

اما برای خروجی ناشی از $-2\delta(t-1)$ ؟

راحت است، ببینید، خودِ $-2\delta(t-1)$ چگونه درست شد؟

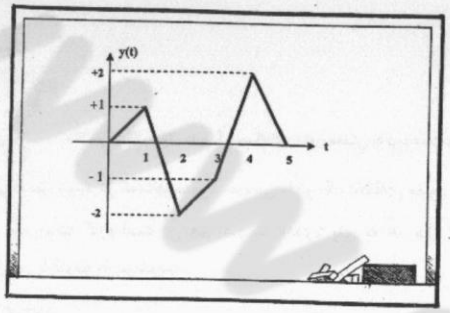
$\delta(t)$ را 2 − برابر کردیم و ۱ واحد به راست شیفت دادیم.

پس خروجی‌اش هم می‌شود، 2 - برابر $h(t)$ که یک واحد به راست هول داده شده یعنی:



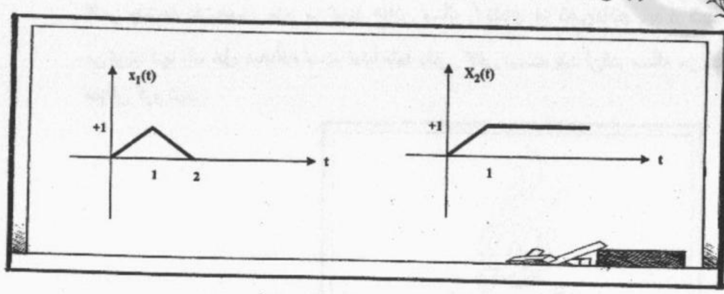
شکل (۱۹۸): خروجی ناشی از $-2\delta(t-1)$ در تمرین ۵۱

تمام شد، چون در ورودی هم $\delta(t)$ داریم و هم $-2\delta(t-1)$ پس جواب می‌شود جمع دو شکل ۱۹۷ و ۱۹۸)



شکل (۱۹۹): پاسخ نهایی تمرین ۵۱

۵۲: اگر پاسخ یک مدار LTI به ورودی $x_1(t)$ بصورت $\delta(t)$ باشد، پاسخ به ورودی $x_2(t)$ چگونه است؟

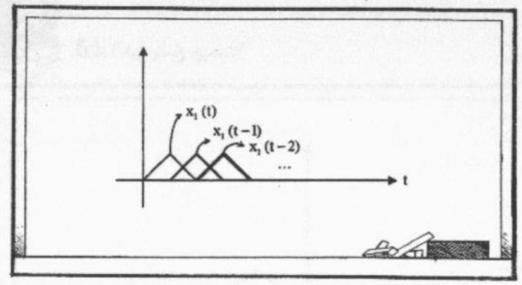


شکل (۲۰۰): ورودی‌ها در تمرین ۵۲

باید ببینیم چه بلایی[1] بر سر x_1 آمد تا تبدیل به x_2 شد، همان بلا به سر خروجی x_1 یعنی $(\delta(t))$ می‌آید تا خروجی x_2 حاصل گردد.

با کمی دقت ملاحظه می‌گردد که:

۱ ـ منظور، بلای خطی است (Linear operator)



شکل (۲۰۱): روش رسیدن از x_1 به x_2

$$x_2(t)=x_1(t)+x_1(t-1)+x_1(t-2)+\cdots \quad (۳۵۱$$

یعنی:

$$x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x_1(t-k) \quad (۳۵۲$$

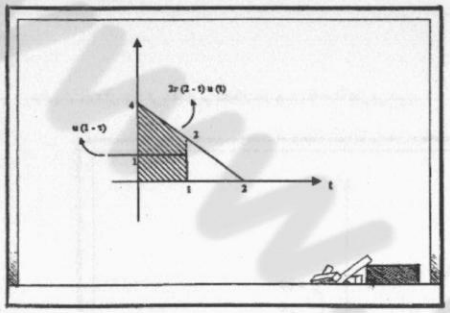
پس:

$$y_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k) \quad (۳۵۳$$

۵۳: پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t)=2r(2-t)u(t)$ می‌باشد. مقدار پاسخ پله در $t=1s$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2.5 ۴) 1

ابتدا $2r(2-t)u(t)$ را رسم می‌کنیم و $u(t)$ را نسبت به محور قائم قرینه کرده و یک واحد به راست هول می‌دهیم:



شکل (۲۰۲): حل ترسیمی تمرین ۵۳)

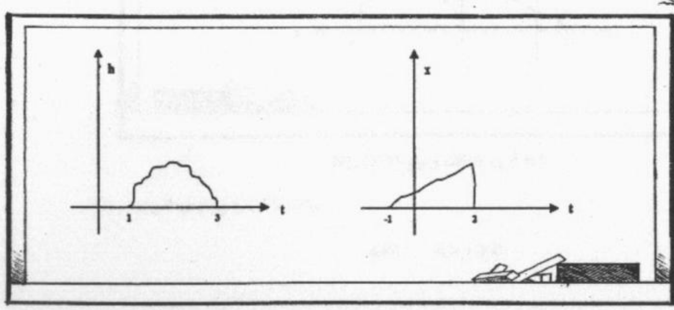
$$S=(4+2)\times\frac{1}{2}=3 \quad (۳۵۴$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

ناحیه پاسخ

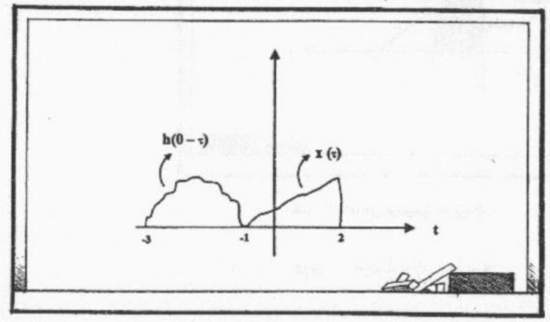
گاهی در جستجوی پاسخ نیستیم، بلکه فقط ناحیه‌ی پاسخ را می‌خواهیم. بسیار راحت است، ابتدا یکی را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم، می‌بینیم به ازاء چه میزان شیفت در آن (t) ملاقات دو شکل شروع شده و کجا پایان می‌پذیرد؛ آنگاه ناحیه پاسخ حاصل شده است.

۵۴: ناحیه‌ی پاسخ را بیابید.



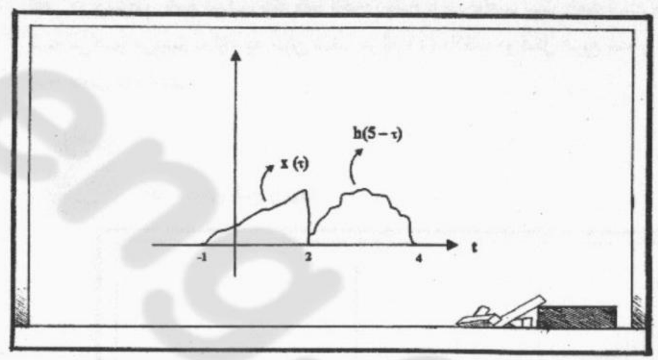
شکل (۲۰۳): ورودی و پاسخ ضربه در تمرین ۵۴)

جالب است اگر h را قرینه کنیم، ملاقات از همان $t = 0$ آغاز می‌شود:



شکل (۲۰۴): شروع ملاقات در $t = 0$

و وقتی شکل چپی را 5 تا به راست هول بدهیم، مقالات تمام است.

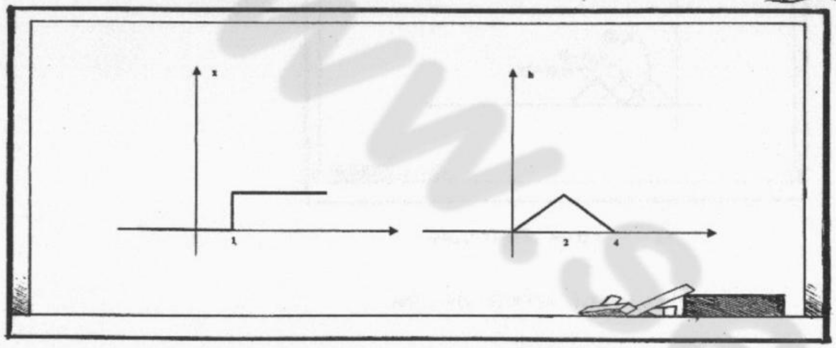


شکل (۲۰۵): پایان ملاقات در $t = 5$

پس ناحیه پاسخ عبارت است از:

$$0 \le t < 5 \qquad (۳۵۵$$

۵۵: ناحیه پاسخ چیست؟

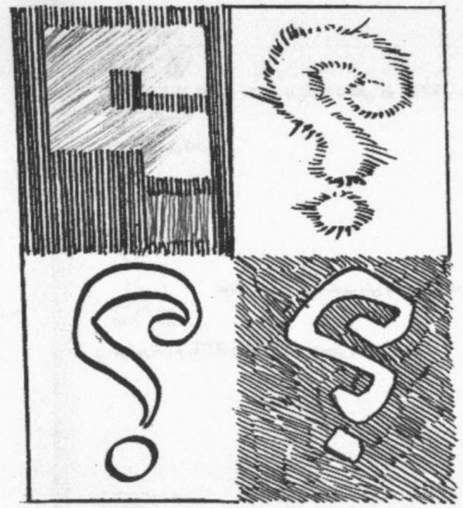


شکل (۲۰۲): ورودی و پاسخ ضربه در تمرین ۵۵

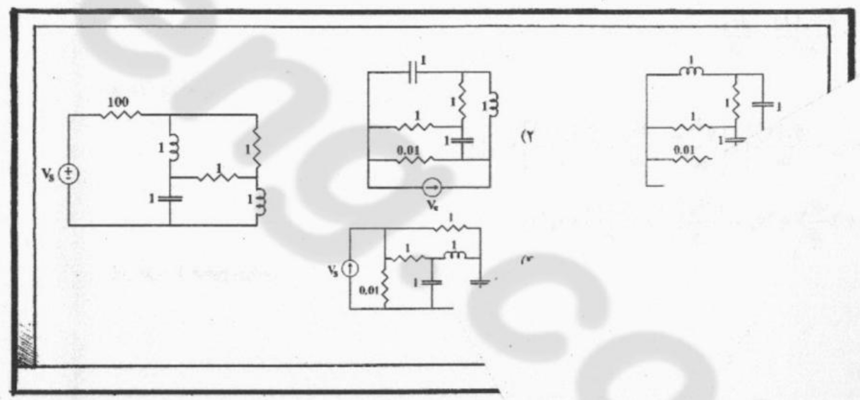
به روش مسأله‌ی قبلی واضح است که ملاقات در $t = 1$ آغاز شده و هیچگاه هم تمام نمی‌شود. پس ناحیه‌ی پاسخ به صورت زیر است.

$$1 \le t \qquad (۳۵۶$$

تمرینات فصل پنجم



۱ـ کدامیک از مدارهای زیر دوگان مدارمقابل است؟ (مقاومت‌ها برحسب اهم، خود القاها برحسب هانری و خازن برحسب فاراد است.)



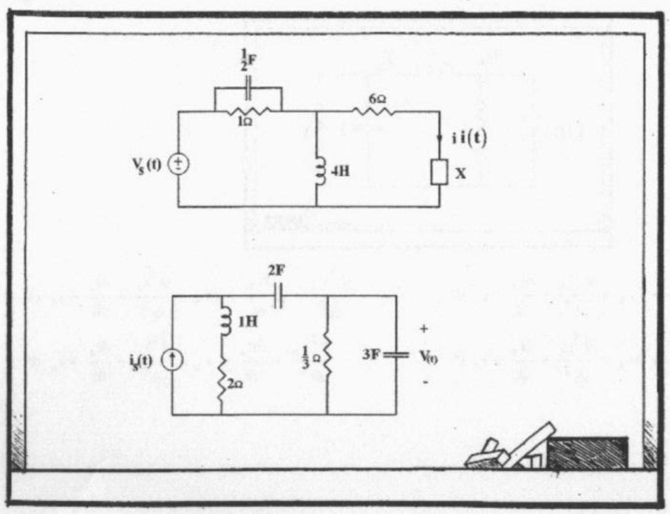
به نظرم کشیدن دوگان مدار کار اشتباهی است، قسمت‌هایی از مدار را چک کنیم.

بله با دوستم موافقم، مثلاً دو سلف موجود در مدار گرهٔ مشترکی ندارند، پس در دوگان مدار دو خازن نباید حلقه مشترک داشته باشند.

چه جالب فقط گزینهٔ ۲ این شرط را دارد.

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۲ـ در صورت یکسان بودن شکل موج‌های $v_s(t)$ و $i_s(t)$ در شکل‌های نشان داده شده به جای X چه عنصری قرار دهیم، تا پاسخ‌های حالت صفر $i(t)$ و $v(t)$ متناسب گردد؟



۱) سلف 3 هانری ۲) خازن $\frac{3}{2}$ فاراد ۳) سلف 6 هانری ۴) هیچکدام

دومدار دوگان یکدیگر به نظر می‌رسند.

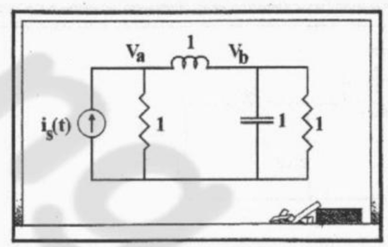
ولی با یک تفاوت سلف‌ها ومقاومت‌ها ضربدر 2 وخازن‌ها تقسیم بر 2 شده‌اند.

درس که کمی جلوتر رود، این مطلب را به تفصیل شرح خواهیم داد ولی فعلاً همین را بگوییم که برای k برابر شدن یک مدار، سلف‌ها ومقاومت‌ها k برابر وخازن‌ها $\frac{1}{k}$ برابر می‌شوند. به همین خاطر هم صورت سؤال گفته است، پاسخ‌های حالت صفر متناسب دارند. نه برابر

پس دوگان خازن 3F که سلف 3H می‌شود را باید ضربدر 2 کنیم.

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۳ـ در مدار زیر معادله دیفرانسیل مابین v_a و $i_s(t)$ برابر کدام گزینه است؟



۱) $\frac{d^2v_a}{dt^2}+2\frac{dv_a}{dt}+2v_a=\frac{d^2i_s}{dt^2}+\frac{di_s}{dt}+i_s$

۲) $\frac{d^2v_a}{dt^2}+\frac{dv_a}{dt}+2v_a=\frac{d^2i_s}{dt^2}+\frac{di_s}{dt}+i_s$

۳) $\frac{d^2v_a}{dt^2}+\frac{dv_a}{dt}+v_a=\frac{d^2i_s}{dt^2}+\frac{di_s}{dt}+i_s$

۴) $\frac{2d^2v_a}{dt^2}+\frac{dv_a}{dt}+2v_a=\frac{d^2i_s}{dt^2}+\frac{di_s}{dt}+i_s$

به نظر مشکل نمی‌آید! نوشتن دو KCL و بدست آوردن v_b برحسب v_a از یکی از معادلات و جایگذاری در معادلهٔ دیگر مسئله را حل می‌کند.

موافقم پس شروع کنیم، ولی به جای آن‌که جریان سلف را در KCL مربوط به هر دو گروه بنویسیم، شاید نوشتن یک KCL در گرهٔ مرکب و KCL دیگر در گرهٔ a بهتر باشد.

$$\text{KCL a}: v_a+\int_0^t(v_a-v_b)dt=i_s(t)$$

$$\text{KCL}: v_a+v_b+\frac{dv_b}{dt}=i_s(t) \quad \text{در گرهٔ مرکب}$$

اگر از اولین معادله یک‌بار مشتق‌گیری کنیم v_b برحسب v_a بدست می‌آید و می‌توان آن را در معادلهٔ دوم جایگذاری کرد.

$$\frac{dv_a}{dt}+v_a-\frac{di_s(t)}{dt}=v_b$$

$$\frac{d^2v_a}{dt}+\frac{dv_a}{dt}-\frac{d^2i_s(t)}{dt^2}=\frac{dv_b}{dt}$$

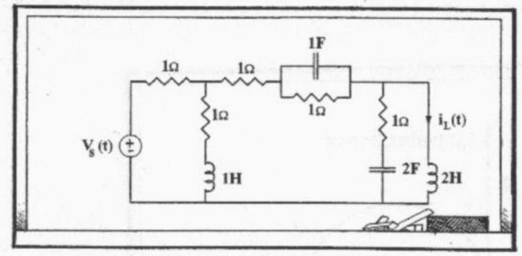
و حالا جایگذاری:

$$v_a+\left(\frac{dv_a}{dt}+v_a-\frac{di_s(t)}{dt}\right)+\left(\frac{d^2v_a}{dt^2}+\frac{dv_a}{dt}-\frac{d^2i_s(t)}{dt}\right)=i_s(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_a}{dt^2}+2\frac{dv_a}{dt}+2v_a=\frac{d^2i_s(t)}{dt^2}+\frac{di_s(t)}{dt}+i_s(t)$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۴ـ شبکه خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل زیر در حالت صفر قرار دارد. اگر $v_s(t)=\delta(t)$ باشد، مقدار $i_L(0^+)$ چقدر است؟



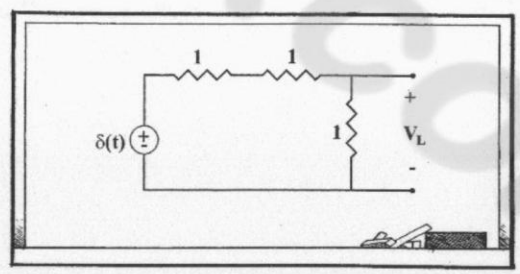
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

وقتی مبحث لاپلاس را درس بدهیم راحت‌تر با تابع ضربه کار می‌کنید، ولی براتون جالب خواهد بود اگر یک مطلب اساسی را در مورد تابع ضربه بدانید، به نظر شما فرکانس تابع ضربه زیاد است یا کم؟

زیاد، چون در زمان بسیار کوتاهی اتفاق می‌افتد.

درسته، پس سلف‌ها و خازن‌ها برعکس حالت دائمی DC که به ترتیب اتصال کوتاه و مدار باز می‌شدند، در این‌جا سلف‌ها مدار باز و خازن‌ها اتصال کوتاه خواهند شد. البته فقط برای لحظه 0 این حرف درست است پس با این توضیحات شکل مدار را در اثر اعمال ضربه بکشید.

پس $v_L(t)=\frac{1}{3}\delta(t)$

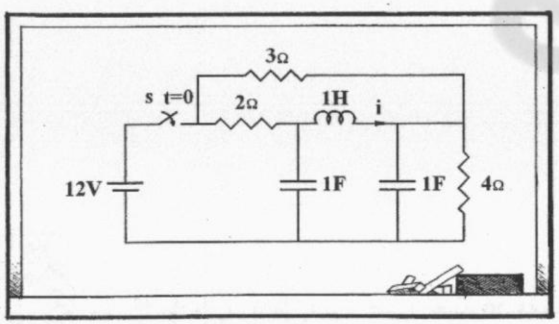


تمام شد دیگه

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L(t)\,dt = 0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

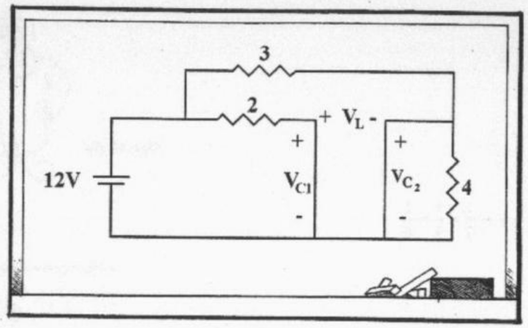
پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۵ـ در مدار زیر سوئیچ S مدت زمان زیادی باز بوده است و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. $\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}$ برحسب $\frac{A}{sec^2}$ کدام است؟



۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

چون مدار در زمان قبل از 0 به حالت پایدار رسیده است و منبعی هم قبل از بسته شدن کلید وجود ندارد، پس مقادیر اولیه جریان سلف و ولتاژ خازن‌ها صفر است. حال مدار را در زمان 0^+ رسم کنیم.



حال اگر یک رابطه برحسب V_L بنویسیم و از آن مشتق بگیریم $\frac{d^2i}{dt^2}$ بدست می‌آید.

$$V_L(t) = V_{c1}(t) - V_{c2}(t)$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} = i_{c_1}(t) - i_{c_2}(t)$$

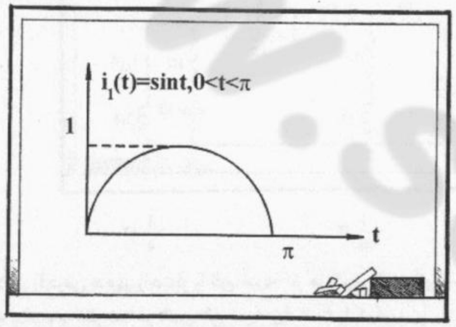
$$\frac{d^2i(0^+)}{dt^2} = i_{c_1}(0^+) - i_{c_2}(0^+)$$

$i_{c_1}(0^+) = \frac{12}{2} = 6A$ و $i_{c_2}(0^+)$ هم ..... ؟! جریان مقاومت 3Ω، 4A است و چون ولتاژ و جریان مقاومت 4Ω صفر است پس $I_{c_2} = 4A$ می‌شود.

$$\frac{d^2i(0^+)}{dt^2} = 6 - 4 = 2A$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

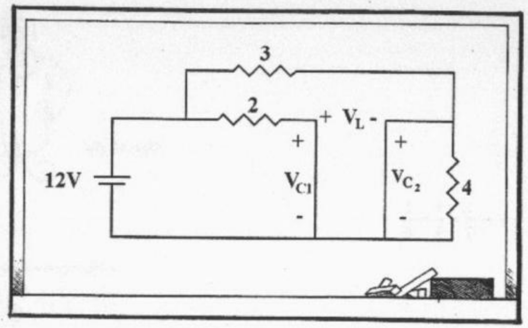
۶ـ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان با ورودی $i_1(t)$ (شکل زیر) به صورت $v_1(t) = \begin{cases} \sin t - e^{-t} & 0<t<n \\ e^{-(t-\pi)} & t>n \end{cases}$ می‌باشد. پاسخ حالت صفر این مدار با ورودی $i_2(t) = \cos t\, u(t)$ در $t = \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟



۱) $-2e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۲) $-e^{-\frac{3\pi}{2}}$ ۳) $-(1+e^{-3\frac{\pi}{2}})$ ۴) $-e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$

شکل $i_1(t)$ سینوسی کامل نیست که با مشتق‌گیری از آن cos t را بدست آوریم.

خوب می‌توانیم $i_1(t)$ را با اعمال تغییرات به شکل sin t در بیاوریم لزومی به ساختن sin t در کل زمان‌ها هم نداریم، محدوده‌ای که $t = \frac{3\pi}{2}$ را شامل شود، کافیست.



حال اگر یک رابطه برحسب V_L بنویسیم و از آن مشتق بگیریم $\frac{d^2 i}{dt^2}$ بدست می‌آید.

$$V_L(t) = V_{c1}(t) - V_{c2}(t)$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = i_{c_1}(t) - i_{c_2}(t)$$

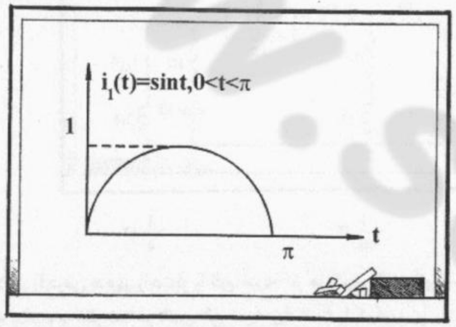
$$\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} = i_{c_1}(0^+) - i_{c_2}(0^+)$$

$i_{c_1}(0^+) = \frac{12}{2} = 6A$ و $i_{c_2}(0^+)$ هم ..... ؟! جریان مقاومت 3Ω، $4A$ است و چون ولتاژ و جریان مقاومت 4Ω صفر است پس $I_{c_2} = 4A$ می‌شود.

$$\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2} = 6 - 4 = 2A$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۶ـ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان با ورودی $i_1(t)$ (شکل زیر) به صورت $v_1(t) = \begin{cases} \sin t - e^{-t} & 0<t<n \\ e^{-(t-\pi)} & t>n \end{cases}$ می‌باشد. پاسخ حالت صفر این مدار با ورودی $i_2(t) = \cos t\, u(t)$ در $t = \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟



۱) $-2e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۲) $-e^{-\frac{3\pi}{2}}$ ۳) $-(1+e^{-3\frac{\pi}{2}})$ ۴) $-e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$

شکل $i_1(t)$ سینوسی کامل نیست که با مشتق‌گیری از آن $\cos t$ را بدست آوریم.

خوب می‌توانیم $i_1(t)$ را با اعمال تغییرات به شکل $\sin t$ در بیاوریم لزومی به ساختن $\sin t$ در کل زمان‌ها هم نداریم، محدوده‌ای که $t = \frac{3\pi}{2}$ را شامل شود، کافیست.