دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

منطق مرتبه اول

«هوش مصنوعی: یک رهیافت نوین»، فصل ۸

ارائه‌دهنده: سیده فاطمه موسوی

نیم‌سال اول ۱۴۰۰–۱۳۹۹

بازنمائی دانش

- ابزارهای ارائه دانش
  - زبان‌های طبیعی
  - زبان‌های برنامه‌نویسی متداول
  - منطق گزاره‌ای
  - منطق مرتبه اول
- دو جنبه مهم ابزارهای ارائه دانش
  - قدرت بیان
  - امکانات استنتاج

بازنمائی دانش

- زبان‌های برنامه‌نویسی
  - ذخیره‌سازی حقایق موجود در دنیا در ساختارهای داده‌ای
  - تغییر ساختارهای داده‌ای با استفاده از رویه‌های خاص حوزه (domain-specific)
  - فاقد امکانات راحت برای بیان اطلاعات جزئی
    - مثال: یک گودال در [2,2] یا [3,3] وجود دارد یا اگر وامپوس در [1,1] باشد آن‌گاه در [2,2] نیست.
  - فاقد مکانیزم عامی برای استخراج حقایق جدید از حقایق موجود

بازنمائی دانش

- منطق گزاره‌ای
  - یک زبان اعلانی (declarative) یا توصیفی است.
    - معنای جملات آن براساس رابطه درستی میان جملات و دنیاهای ممکن تعیین می‌شود.
    - دارای قدرت بیان کافی برای اداره کردن اطلاعات ناقص با استفاده از ترکیب فصلی و نقیض است.
  - یک زبان ترکیبی (compositional) است.
    - معنای هر جمله تابعی از معنای اجزای تشکیل دهنده آن است.
  - معنای جملات در منطق گزاره‌ای مستقل از متن می‌باشد. (برخلاف زبان طبیعی)
  - فاقد قدرت بیانی کافی برای تشریح دقیق محیط پیچیده با اشیاء زیاد است.
    - مثلا، در منطق گزاره‌ای نمی‌توان گفت ”چاله‌ها باعث وزش نسیم در خانه‌های مجاور می‌شوند“ مگر آن‌که برای هر خانه یک جمله نوشته شود.

بازنمائی دانش

- زبان طبیعی
  - قدرت بیان بسیار بالا
  - ابزاری برای برقراری ارتباط و ارائه دانش
  - وابستگی مفهوم یک جمله به زمینه (context) استفاده از آن جمله
  - وجود ابهام (ambiguity) در کلمات و جملات

بازنمائی دانش

- مزایای منطق گزاره‌ای
  - اعلانی
  - ترکیبی
  - مستقل از زمینه و غیرمبهم بودن
- مزایای زبان طبیعی
  - قدرت بیان بالا
- ایده
  - استفاده از منطق گزاره‌ای به‌عنوان پایه روش ارائه و اضافه کردن قابلیت‌های بیانی زبان‌های طبیعی

منطق مرتبه اول

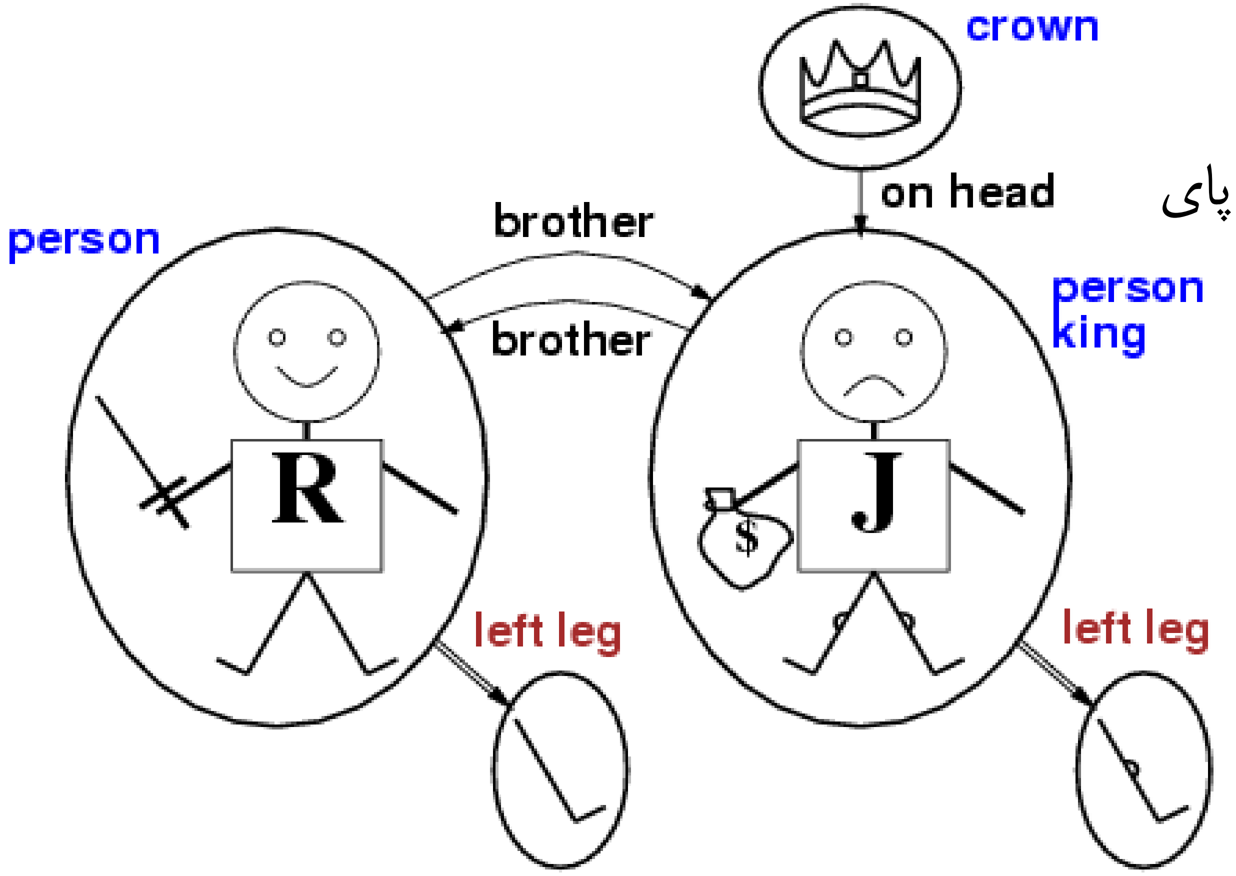
- مدل‌های یک زبان ساختارهای رسمی هستند که جملات زبان را به عناصر دنیای ممکن مربوط ساخته و امکان ارزیابی درستی آن‌ها را فراهم می‌آورد.
- اجزا مدل‌های منطق مرتبه اول:
  - اشیاء (Objects): دنیا شامل اشیائی است که از طریق خصوصیاتشان از هم قابل تمایز هستند.
    - اسامی و عبارات اسمی که به اشیاء اشاره می‌کنند. مانند واMپوس، هر فرد، گودال‌ها و ...
  - روابط (Relations): در بین اشیاء می‌تواند روابط مختلفی وجود داشته باشد.
    - افعال و عبارات فعلی که به روابط بین اشیا دلالت دارد. مانند برادری، قرمز بودن و ...
  - توابع (Functions): نوع خاصی از روابط که یک یا چند شیء را به دقیقا یک شیء دیگر ربط می‌دهند.

انواع رابطه

تمرین: اشیاء و روابط را در جمله‌ی زیر تعیین کنید.
- خانه‌های مجاور وامپوس، بودار هستند.

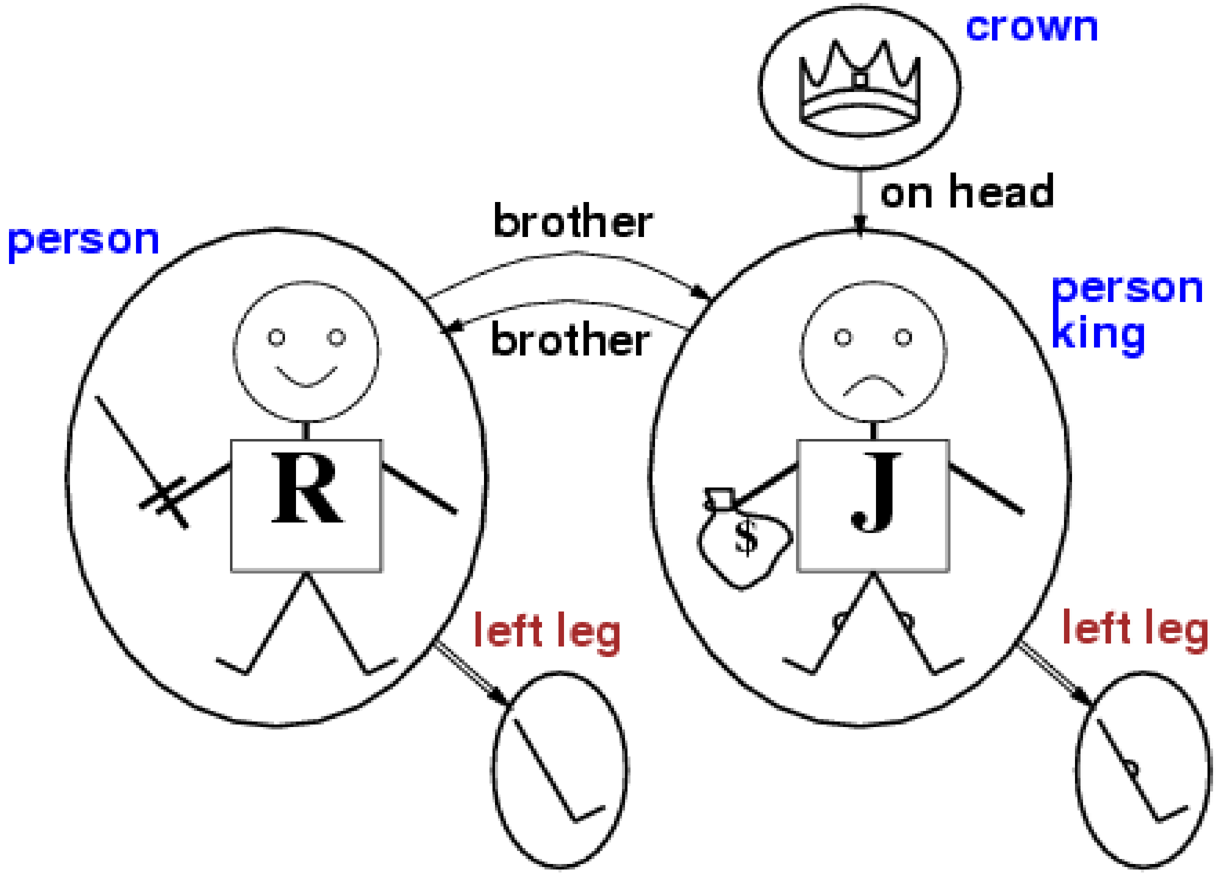
- رابطه‌های یکانی (خاصیت‌ها)
  - رابطه‌هایی که فقط در ارتباط با یک شیء هستند.
  - مثال: «قرمز بودن»، «بودار بودن»
- رابطه‌های چندتایی
  - رابطه‌هایی که دو یا چند شیء را به هم ربط می‌دهند.
  - مثال: «برادری»، «مجاورت»، «بزرگ‌تر بودن»
- توابع
  - مثال: رابطه‌ی «پدر» هر شخص را به دقیقا یک شیء (پدر آن شخص) ربط می‌دهد.
  - مثال: «بیشترین معدل»، «مجموع» و ...

مثال: پادشاه شیطان صفت و برادرش



- اشیاء؟
  - John، Richard، تاج، پای چپ John، پای چپ Richard
- رابطه‌های یکانی؟
  - Crown: تاج بودن
  - Person: شخص بودن
  - King: شاه بودن

مثال: پادشاه شیطان صفت و برادرش



- رابطه‌های چندتایی؟
  - Brother: برادری

{<Richard, John>, <John, Richard>

  - OnHead: برسر

<the crown, John>

- توابع؟
  - LeftLeg: پای چپ

<Richard> → Richard’s left leg
<John> → John’s left leg

نمادها و تفاسیر

- در منطق مرتبه اول، هر شیء، رابطه یا تابع را با یک نماد نشان می‌دهیم.
  - نمادهای ثابت (constant symbols): اشیاء مانند John
  - نمادهای مسندی (گزاره) (predicate symbols): روابط مانند OnHead، Brother
  - نمادهای تابعی (function sumbols): روابط تابعی مانند Father، LeftLeg
- درستی هر جمله نسبت به یک مدل و تفسیری از نمادهای جمله تعیین می‌شود.
  - هر مدل در منطق مرتبه اول علاوه بر اشیاء، روابط و توابع باید شامل یک تفسیر باشد که تعیین می‌کند هر یک از نمادهای ثابت، خبری و تابع به چه شیء، رابطه و تابعی اشاره می‌کنند.
  - به دلیل تعداد زیاد مدل‌های ممکن در منطق مرتبه اول، معمولا امکان بررسی درستی استلزام با مرور کلیه مدل‌ها امکان‌پذیر نیست.

ترم (Term)

- هر ترم یک عبارت منطقی است که به یک شیء اشاره می‌کند.
  - یک نماد ثابت (Constant): برای اشاره به یک شیء می‌توان اسم آن را ذکر کرد.
    - مانند John
  - یک متغیر (Variable): یک متغیر می‌تواند به یک شیء اشاره کند.
    - مثلا اگر قبلا متغیر x را برابر با شیء John قرار داده باشیم از این به بعد هر جا از متغیر x استفاده کنیم منظور ما شیء John است.
  - یک نماد تابع (Function): هر تابع یک یا چند شیء داده شده را به یک شیء ربط می‌دهد، پس هر تابع به یک شیء اشاره می‌کند.
    - برای مثال اگر Henry پدر John باشد آن‌گاه Father(John) به پدر Henry اشاره می‌کند.

$$\text{Term} \quad = \mathit{function}\ (\mathit{term}_1,\ldots,\mathit{term}_n) \mid \mathit{constant} \mid \mathit{variable}$$

جملات اتمیک (Atomic)

- برای بیان یک حقیقت از جملات اتمیک استفاده می‌کنیم.

Atomic sentence = $predicate\ (term_1,\ldots,term_n)\ |\ term_1 = term_2$

- برای بیان این حقیقت که دو ترم مختلف به یک شیء اشاره می‌کنند از عملگر = استفاده می‌شود. (عملگر = یک نماد مسند است)

Brother(John, Richard)

Married(Father(Richard), Mother(John))

Father(John)= Henry

- یک جمله ساده $predicate(term_1,\ldots,term_n)$ زمانی درست است (اگر و فقط اگر) که رابطه $predicate$ بین اشیایی که $term_1,\ldots,term_n$ به آن‌ها اشاره می‌کنند برقرار باشد.

جملات مرکب

- جملات مرکب از ترکیب جملات ساده بوسیله رابطهای منطقی به‌دست می‌آیند.

$$\neg S,\ S_1 \wedge S_2,\ S_1 \vee S_2,\ S_1 \Rightarrow S_2,\ S_1 \Leftrightarrow S_2$$

- مثال:

$$Sibling(John, Richard) \Rightarrow Sibling(Richard, John)$$

$$>(1,2) \vee \leq (1,2)$$

$$>(1,2) \wedge \neg >(1,2)$$

سورها

- سورها این امکان را به ما می‌دهند که یک خاصیت را به مجموعه‌ای از اشیاء نسبت دهیم.
- برتری منطق مرتبه اول نسبت به منطق گزاره‌ای به امکان استفاده از سورها مربوط می‌شود.
  - منطق گزاره‌ای فاقد سور بود و نمی‌توانست یک خاصیت را به مجموعه‌ای از اشیاء نسبت دهد.
  - مثلا برای بیان این که «در یک مربع نسیم می‌وزد اگر و تنها اگر در خانه‌های مجاور گودال باشد» باید برای تمامی مربع‌ها نوشته شود.

سور عمومی

- سور عمومی بیان می‌کند که یک ویژگی یا حقیقت خاص برای تمام اشیاء دامنه برقرار است.

$$\forall \text{ <}variables\text{> <}sentence\text{>}$$

Everyone at AUT is smart: $\forall x\ At(x,AUT) \Rightarrow Smart(x)$

- سور عمومی برابر است با ترکیب عطفی تمام جملاتی که با جایگذاری متغیرها در آن‌ها به‌دست می‌آیند.
  - برای مثال اگر دامنه {John, Richard, AUT} باشد آن‌گاه عبارت بالا هم‌ارز زیر است:

$$\begin{aligned} & At(John, AUT) \Rightarrow Smart(John) \\ \wedge\ & At(Richard, AUT) \Rightarrow Smart(Richard) \\ \wedge\ & At(AUT, AUT) \Rightarrow Smart(AUT) \end{aligned}$$

سور وجودی

- سور وجودی بیان می‌کند که یک ویژگی یا حقیقت خاص برای برخی از اشیاء دامنه برقرار است.

$$\exists\langle variables\rangle\ \langle sentence\rangle$$

Someone at AUT is smart: $\exists x\ At(x, AUT) \wedge Smart(x)$

- سور وجودی برابر است با ترکیب فصلی تمام جملاتی که با جای‌گذاری متغیرها در آن‌ها به‌دست می‌آیند.
  - برای مثال اگر دامنه $\{\text{John}, \text{Richard}, AUT\}$ باشد آن‌گاه عبارت بالا هم‌ارز زیر است:

$$
\begin{aligned}
&(\text{At}(\text{John}, AUT) \wedge \text{Smart}(\text{John}))\\
\vee\ &(\text{At}(\text{Richard}, AUT) \wedge \text{Smart}(\text{Richard}))\\
\vee\ &(\text{At}(AUT, AUT) \wedge \text{Smart}(AUT))
\end{aligned}
$$

یک اشتباه متداول

- سور عمومی اغلب با ترکیب شرطی و سور وجودی اغلب با ترکیب عطفی به‌کار می‌رود:

$\forall x \; At(x, AUT) \Rightarrow Smart(x)$

$\exists x \; At(x, AUT) \wedge Smart(x)$

- استفاده از سور عمومی با ترکیب عطفی ممکن است باعث اشتباه در معنا گردد.
  - مثال: جمله زیر به معنای «هر شیء‌ای هم در AUT است و هم باهوش است» می‌باشد.

$\forall x \; (At(x, AUT) \wedge Smart(x))$

- استفاده از سور وجودی با ترکیب شرطی ممکن است باعث اشتباه در معنا گردد.
  - مثال: جمله زیر حتی برای زمانی که شخص در AUT نباشد true است.

$\exists x \; At(x, AUT) \Rightarrow Smart(x)$

سورهای تو در تو

- ساخت جملات پیچیده‌تر با ترکیب سورها

$\forall x \forall y \equiv \forall y \forall x \equiv \forall x,y$ $\exists x \exists y \equiv \exists y \exists x \equiv \exists x,y$

$\forall x\ \forall y\ Brother(x,y) \Rightarrow Sibling(x,y)$

$\forall y\ \forall x\ Brother(x,y) \Rightarrow Sibling(x,y)$

$\forall x,y\ Brother(x,y) \Rightarrow Sibling(x,y)$

- $\exists x \forall y$ معادل $\forall y \exists x$ نیست.
  - مثال: عبارت زیر به این معناست که شخصی در جهان وجود دارد که همه او را دوست دارند.

$\exists y\ \ \forall x\ Loves(x,y)$

و عبارت زیر به این معناست که هر شخصی حداقل یک نفر را دوست دارد.

$\forall x \exists y\ Loves(x,y)$

ارتباط بین سورها

- در صورت استفاده از دو سور با متغیر یکسان، هر متغیر به نزدیک‌ترین سور بازمی‌گردد.

$\forall x\ (Crown(x) \lor (\exists x\ Brother(Richard, x)))$

- سور عمومی و وجودی از طریق عملگر نقیض با یکدیگر در ارتباط هستند.
  - مثال:

$\forall x\ Likes(x,IceCream)$ $\qquad \neg\exists x\ \neg Likes(x,IceCream)$

$\exists x\ Likes(x,Broccoli)$ $\qquad \neg\forall x\ \neg Likes(x,Broccoli)$

- چون سور عمومی در حقیقت ترکیب عطفی برای تمام اشیای جهان است و سور وجودی ترکیب فصلی است بنابراین از قوانین دمورگان تبعیت می‌کنند.

مفهوم متفاوت برخی جملات منطق مرتبه اول

- دانش فرد: Richard دو برادر به نام John و Geoffrey دارد.
- بیان غلط:

$$Brother(John, Richard) \land Brother(Geoffrey, Richard)$$

- بیان درست:

$$Brother(John, Richard) \land Brother(Geoffrey, Richard) \land$$
$$\neg(John = Geoffrey) \land \forall x\ Brother(x, Richard) \Rightarrow (x = John \lor x = Geoffrey)$$

- فرضیاتی برای ساده کردن اعلان‌ها:
  - فرض یکتایی نام‌ها: هیچ دو نامی به شیء یکسان اشاره نمی‌کنند.
  - فرض دنیای بسته: جملات اتمیکی که معلوم نیست درست باشند نادرست فرض می‌شوند.
  - بستار حوزه: محدود بودن اشیاء حوزه به موارد مشخص شده با نمادهای ثابت

اظهارات و پرس‌وجوها در منطق مرتبه اول

- همانند منطق گزاره‌ای، جملات با استفاده از TELL به یک پایگاه دانش افزوده می‌شود.
  - برای مثال می‌توان به پایگاه دانش اظهار کرد که John یک پادشاه و Richard یک شخص است و تمامی شاهان شخص هم هستند:

$TELL(KB, King(John))$.

$TELL(KB, Person(Richard))$.

$TELL(KB, \forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x))$

اظهارات و پرس‌وجوها در منطق مرتبه اول

- درخواست‌ها (queries)
  - با استفاده از ASK سوالاتی از پایگاه دانش در مورد درستی جمله پرسید.
  - پاسخ این سوالات مقدار true یا false است.

$ASK(KB, King(John))$

$ASK(KB, \exists x\ Person(x))$

- جایگذاری (substitution, binding list)
  - به ازای چه مقادیری از متغیرها یک جمله درست خواهد بود.

$ASKVARS(KB, Person(x))$ → $results = \{\{x/Richard\}, \{x/John\}\}$

- اگر پایگاه دانش شامل جملات $King\ John \vee King(Richard)$ باشد پاسخ سوال زیر چه خواهد بود؟
  $ASK(KB, \exists x\ king(x))$

توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

- اشیاء؟
- *People*
- روابط؟
- *Parent, Sibling, Brother , Sister , Child , Daughter, Son, Spouse, Wife, Husband, Grandparent , Grandchild , Cousin, Aunt, and Uncle*
- توابع؟
- *Mother ،Father*

توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

- مادر یک شخص والد مؤنث وی است.
- $\forall m, c\ Mother(c)=m \Leftrightarrow Female(m) \land Parent(m, c).$
- شوهر یک شخص همسر مذکر اوست.
- $\forall w, h\ Husband(h,w) \Leftrightarrow Male(h) \land Spouse(h,w).$
- مذکر و مونث دو دسته جدا از هم هستند.
- $\forall x\ Male(x) \Leftrightarrow \neg Female(x).$
- والدین و فرزند رابطه معکوس یکدیگرند.
- $\forall p, c\ Parent(p, c) \Leftrightarrow Child(c, p).$

توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

- جد، والدِ والدین شخص است.
- $\forall g, c\ Grandparent(g, c) \Leftrightarrow \exists p\ Parent(g, p) \wedge Parent(p, c)$.
- یک هم‌زاد، فرزند دیگر والدین شخص است.
- $\forall x, y\ Sibling(x, y) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \exists p\ Parent(p, x) \wedge Parent(p, y)$

تمامی روابط فوق به‌عنوان axiom (اصل) شناخته می‌شوند. در واقع تعاریفی هستند که براساس سایر مسندها به‌دست آمده‌اند.

- همزادی متقارن است.
- $\forall x, y\ Sibling(x, y) \Leftrightarrow Sibling(y, x)$

این رابطه یک قضیه است که به‌طور منطقی از اصول گفته‌شده به‌دست می‌آید.

توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

- اشیاء؟
  - زوج‌های $[i,j]$ مشخص‌کننده‌ی مربع‌ها، وامپوس و عامل
- روابط؟
- *Pit, Adjacent, Breezy, Stenchy, Percept, Action, At, HaveArrow*

توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

- عامل دنیای وامپوس یک بردار ادراک متشکل از پنج عنصر را دریافت می‌کند.
  - برای مثال ادارکات دریافتی عامل در لحظه ۵ می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$Percept\ ([Stench, Breeze, Glitter\ , None, None], 5)$$

- اقدام‌ها

$$Turn(Right\ ), Turn(Left\ ), Forward\ , Shoot\ , Grab, Climb$$

- انتخاب بهترین اقدام

$$ASKVARS(\exists\, a\ BestAction(a, 5))$$

  - جوابی به‌صورت $\{a/Grab\}$ می‌تواند برگرداند.

توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

- ادراک به واقعیت‌های مشخصی درباره وضعیت فعلی اشاره می‌کند.

$$\forall t, s, g, m, c \; Percept([s, Breeze, g, m, c], t) \Rightarrow Breeze(t) \,,$$

$$\forall t, s, b, m, c \; Percept([s, b, Glitter, m, c], t) \Rightarrow Glitter(t)$$

- پیاده‌سازی یک رفتار انعکاسی ساده با جملات استلزام سوردار

$$\forall t \; Glitter(t) \Rightarrow BestAction(Grab, t)$$

- مجاورت

$$\forall x, y, a, b \; Adjacent([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow (x = a \land (y = b - 1 \lor y = b + 1)) \lor (y = b \land (x = a - 1 \lor x = a + 1))$$

توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

- تغییر مکان عامل در طی زمان و ثابت بودن مکان وامپوس در یک خانه مشخص

$At(Agent, s, t)$ $\qquad\qquad$ $\forall t\ At(Wumpus, [2, 2], t)$

- هر یک از اشیاء در یک لحظه تنها می‌توانند در یک خانه باشند.

$$\forall x, s1, s2, t\ At(x, s1, t) \wedge At(x, s2, t) \Rightarrow s1 = s2$$

- اگر عامل در خانه‌ای باشد و نسیم حس کند، آن خانه دارای نسیم است (مستقل از زمان)

$$\forall s, t\ At(Agent, s, t) \wedge Breeze(t) \Rightarrow Breezy(s)$$

توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

- اگر یک خانه دارای نسیم باشد حداقل یکی از خانه‌های مجاور آن دارای چاه است.

$$\forall s\ Breezy(s) \Leftrightarrow \exists r\ Adjacent\ (r, s) \land Pit(r)$$

- در اختیار داشتن تیر (یک اصل successor-state)

$$\forall t\ HaveArrow(t + 1) \Leftrightarrow (HaveArrow(t) \land \neg Action(Shoot, t))$$

نظریه مجموعه‌ها با استفاده از منطق مرتبه اول

- کلیه مجموعه‌ها عبارتند از مجموعه تهی و مجموعه‌هایی که از اضافه کردن عنصری به یک مجموعه دیگر ایجاد می‌شوند.

$$\forall s\ Set(s) \Leftrightarrow (s = \{\}) \vee (\exists x, s2\ Set(s2) \wedge s = \{x \mid s2\})$$

- هیچ عنصری به مجموعه تهی اضافه نشده است.

$$\neg \exists x, s\ \{x \mid s\} = \{\}$$

- اضافه کردن عنصری که هم اکنون در مجموعه وجود دارد اثری ندارد.

$$\forall x, s\ x \in s \Leftrightarrow s = \{x \mid s\}$$

- تنها اعضای هر مجموعه عناصری هستند که به مجموعه اضافه شده‌اند.

$$\forall x, s\ \ x \in s \Leftrightarrow [\exists y, s2\ (s = \{y \mid s2\} \wedge (x = y\ \vee x \in s2))]$$

نظریه مجموعه‌ها با استفاده از منطق مرتبه اول

- یک مجموعه زیرمجموعه مجموعه دیگری است اگر اعضای مجموعه اول اعضای مجموعه دوم نیز باشند.

$$\forall s1,s2\ \ s1 \subseteq s2 \Leftrightarrow (\forall x\ x \in s1 \Rightarrow\ x \in s2)$$

- دو مجموعه در صورتی مساوی هستند که هر یک زیرمجموعه دیگری باشد.

$$\forall s1,s2\ \ s1 = s2 \Leftrightarrow (s1 \subseteq s2 \land s2 \subseteq s1\ )$$

- یک عنصر در صورتی به اشتراک دو مجموعه تعلق دارد که عضو هر دو مجموعه باشد.

$$\forall x,\ s1,s2\ x \in (s1 \cap s2) \Leftrightarrow (x \in s1 \land x \in s2\ )$$

- یک عنصر در صورتی به اجتماع دو مجموعه تعلق دارد که عضو یکی از آن دو مجموعه باشد.

$$\forall x,\ s1,s2\ x \in (s1 \cup s2) \Leftrightarrow (x \in s1\ \lor\ x \in s2\ )$$

نمونه‌های بیشتر

- حتما نمونه‌های آورده شده در کتاب شامل موارد زیر را برای یادگیری بیشتر مطالعه کنید.
  - اعداد و لیست‌ها
  - مهندسی دانش در مدارهای الکتریکی