

Typical Error Rate in Transmission System:

1-Copper wire: $O(1.0e-6)$

2-Optical Fiber: $O(1.0e-9)$

3-Radio Transmission: $O(1.0e-3)$

• امکان پذیری تشخیص و تصحیح خطا:

- بردار پیام ارسال شده X =
- بردار پیام دریافت شده Y =
- $Y = X + n$,
- n = بردار نویز ، $b_n \in \{0, 1\}$,
- $+$: bit-wise XOR

• فاصله همینگ (Hamming Distance):

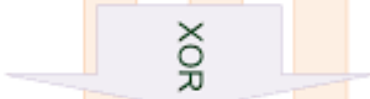
تعریف: عبارتست از تعداد مکان هایی که دو رشته هم طول با هم متفاوتند

- In [information theory](#), the **Hamming distance** between two [strings](#) of equal length is the number of positions at which the corresponding [symbols](#) are different.

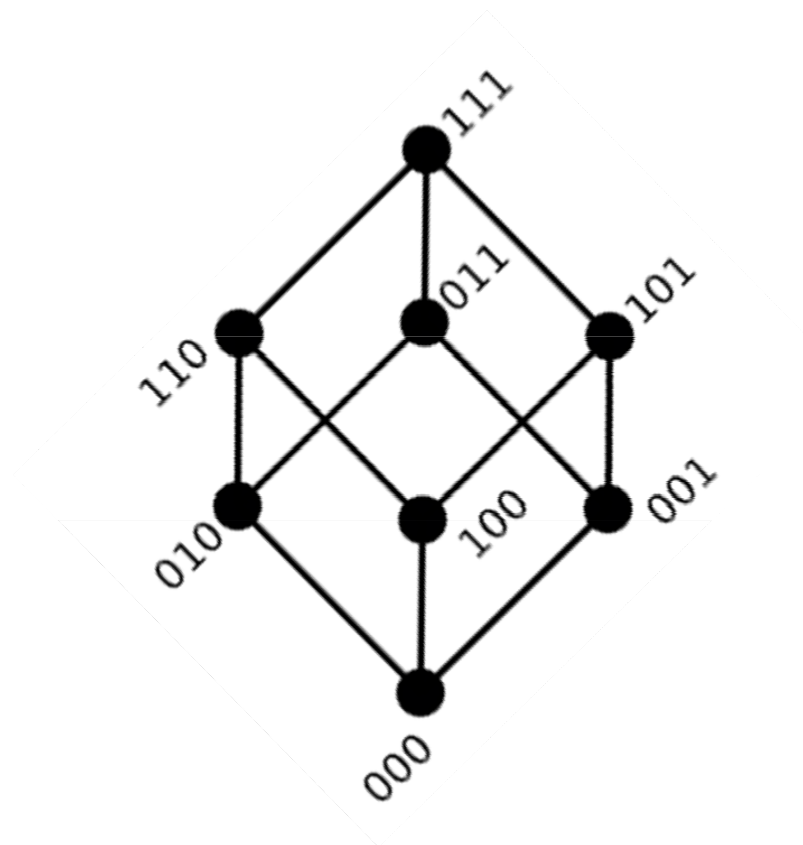
• مثال:

- $X=100, Y=000, d(X,Y) = 1$
- $d(X,Y)$ = Hamming distance between two binary strings
= number of ones in $(X \text{ bitwise-XOR } Y)$

• مثال دیگر:

1	1	0	1	1	1	0	0	220
1	1	1	1	0	1	1	0	246
								
0	0	1	0	1	0	1	0	Hamming distance = 3

مکعب بیانگر فاصله همینگ رشته های باینری سه بیتی



• مثال: کد کردن پیام

• مجموعه پیامهای دو بیتی {00, 01, 10, 11}

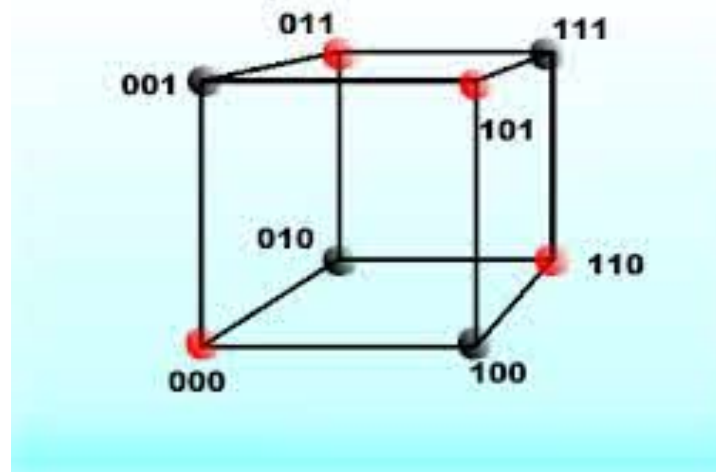
• مجموعه کلمات کد (Codeword) تعریف شده متناظر:

- 00 -> 000
- 01 -> 011
- 10 -> 101
- 11 -> 110

• فاصله همینگ هر دو کلمه کد در مجموعه فوق برابر 2 است.

اگر به جای بردار پیام، کلمه کد متناظر ارسال گردد:

- 1- اگر کلمه کد در حین ارسال دچار خطا نگردد، آنگاه با توجه به تناظر تعریف شده پیام اولیه بدست می‌آید
- 2- اگر کلمه کد در حین ارسال دچار خطا گردد، آنگاه:
- اگر یک بیت خطا شده باشد، در گیرنده تشخیص داده میشود که پیام ارسالی دچار خطا شده است
- اگر دو بیت خطا شده باشد، در گیرنده خطا تشخیص داده نمیشود



- قضیه: اگر فاصله همینگ هر دو کلمه کد (کلمات کد) ارسالی حداقل برابر t بیت باشد،
 $d(C_i, C_j) \geq t$ for all i, j
آنگاه اگر تا $t-1$ بیت خطا در انتقال رخ دهد، گیرنده خطا بودن دریافت را تشخیص میدهد.

• مثال: کد کردن پیام

• مجموعه پیامهای تک بیتی $\{0, 1\}$

• مجموعه کلمات کد (Codeword) تعریف شده متناظر:

- $0 \rightarrow 000$
- $1 \rightarrow 111$

• فاصله همینگ هر دو کلمه کد در مجموعه فوق برابر 3 است.

• اگر به جای بردار پیام، کلمه کد متناظر ارسال گردد:

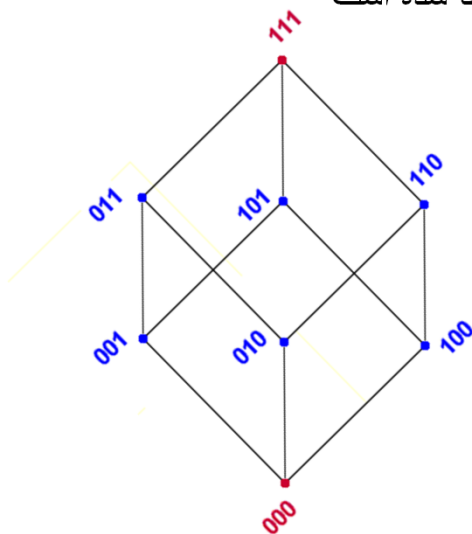
• 1- اگر کلمه کد در حین ارسال دچار خطا نگردد، آنگاه با توجه به تناظر تعریف شده پیام اولیه بدست میآید

• 2- اگر کلمه کد در حین ارسال دچار خطا گردد، آنگاه:

• اگر یک بیت خطا شده باشد، در گیرنده تشخیص داده میشود که پیام ارسالی دچار خطا شده است و تصحیح هم میگردد

• اگر تا دو بیت خطا شده باشد، در گیرنده تشخیص داده میشود که پیام ارسالی دچار خطا شده است

• اگر سه بیت خطا شده باشد، در گیرنده خطا تشخیص داده نمیشود



- قضیه: اگر فاصله همینگ هر دو کلمه کد (کلمات کد) ارسالی حداقل برابر τ بیت باشد،
 $d(C_i, C_j) \geq \tau$ for all i, j
 آنگاه اگر تا $(\tau - 1)/2$ بیت خطا در انتقال رخ دهد، گیرنده خطا بودن دریافت را میتواند تصحیح کند.

