



عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

۱۶- شبکه‌های پتری

دکتر محمد عبداللّهی آزگمی

دانشیار گروه نرم‌افزار

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

azgomi@iust.ac.ir

فهرست مطالب

- مقدمه
- تعریف صوری ساختار شبکه پتری
- تعریف گراف شبکه پتری
- رفتار شبکه پتری:
 - تعریف صوری سیستم شبکه پتری
 - نشانه‌گذاری شبکه‌های پتری
 - قواعد اجرای شبکه پتری
- مثال‌هایی از شبکه‌های پتری

مقدمه

- تاکنون زبان‌های مدل‌سازی مختلفی معرفی شده‌اند. اما برای اهداف تحلیل خودکار تنها آنهایی مناسبند که دارای مبانی ریاضی یا صوری بوده و به اصطلاح **صورت‌بندی (formalism)** باشند.
- یک صورت‌بندی به یک زبان صوری و مبتنی بر نوعی از ریاضیات برای توصیف و بیان مدل‌ها گفته می‌شود.
- برخی از این صورت‌بندی‌ها، زبان‌های مدل‌سازی متنی (textual modeling language) هستند، مثل انواع جبرهای فرایندی (process algebras) نظیر:
 - فرآیندهای ارتباطی ترتیبی (CSP: Communicating Sequential Processes)
 - حساب سیستم‌های ارتباطی (CCS: Calculus of Communicating Systems)
- برخی دیگر، علاوه بر صوری بودن و داشتن روش بیان ریاضی، دارای قابلیت نمایش گرافیکی نیز هستند، نظیر **شبکه‌های پتری (Petri nets)**.

شبکه‌های پتری

- مدل‌های ایجاد شده با صورت‌بندی‌ها، برای تحلیل خودکار سیستم‌ها و به‌منظور ارزیابی جنبه‌های عملیاتی یا درستی‌یابی جنبه‌های کارکردی آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- موضوع بحث ما مدل‌های شبکه‌ای (net models) یا شبکه‌های پتری (Petri nets) است که در سال ۱۹۶۲ توسط **کارل آدام پتری (Carl Adam Petri)**، دانشمند آلمانی، برای مدل‌سازی سیستم‌های همروند (concurrent systems) معرفی شده است.



ویژگیهای شبکه‌های پتری

■ ویژگی اول: شبکه‌های پتری مبانی صوری (formal basis) دارند:

- در حقیقت شبکه‌های پتری یک صورت‌بندی محسوب می‌شوند که صوری بودن یک نیازمندی کلیدی برای تحلیل خودکار مدل‌ها است.
- شبکه‌های پتری یک رده از ماشین‌ها تحت عنوان اتوماتای شبکه پتری (Petri net automaton) را تعریف می‌کند.
- تعریف صوری شبکه‌های پتری با استفاده از نظریه کیسه (bag theory) ارائه می‌شود.
- نظریه کیسه یا چندمجموعه (multiset) یک بسط نظریه مجموعه‌ها است که در آن هر کیسه، برخلاف مجموعه، می‌تواند اعضاء تکراری داشته باشد.

ویژگیهای شبکه‌های پتری

■ ویژگی دوم: شبکه‌های پتری نمادهای گرافیکی (graphical notations) دارند:

- شبکه‌های پتری را می‌توان به صورت گرافیکی نمایش داد که این یک مزیت مهم برای فهم آسانتر مدل‌های ایجاد شده با شبکه‌های پتری است.
- این در حالی است که برخی از صورت‌بندی‌ها، نظیر جبرهای فرآیندی، گرافیکی نبوده و فقط یک زبان مدل‌سازی هستند.
- از طرف دیگر برخی زبان‌های مدل‌سازی گرافیکی، نظیر UML، اساساً صورت‌بندی محسوب نمی‌شوند.

مفاهیم اولیه شبکه‌های پتری

■ هر صورت‌بندی مدل‌سازی متشکل از حداقل دو مفهوم اولیه (primitive) است:

□ حالت (state)

□ کنش (action)

■ در شبکه‌های پتری:

□ مفهوم اولیه مکان (place) برای توصیف حالت‌ها وجود دارد، و

□ مفهوم اولیه گذر (transition) برای مدل‌سازی کنش‌ها وجود دارد.

ساختار و رفتار شبکه‌های پتری

■ مدل شبکه‌های پتری دارای یک ساختار ایستا (static structure) هستند که:

□ با استفاده از نظریه کیسه به‌طور صوری بیان می‌شود و

□ در عین حال قابلیت نمایش گرافیکی را با استفاده از گراف‌های شبکه‌های پتری (Petri net graphs) دارد.

■ همچنین شبکه‌های پتری دارای یک رفتار پویا (dynamic behavior) نیز هستند، که:

□ نشانه‌گذاری شبکه‌های پتری (Petri net marking) و قواعد اجرای شبکه‌های پتری (Petri net execution rules) این رفتار را تعریف می‌کند.

تعریف صوری ساختار شبکه پتری

■ **تعریف ۱:** ساختار شبکه پتری (Petri net structure) یک پنج تایی $C = (P, T, I, O, H)$ است به نحوی که:

- P یک مجموعه متناهی از مکان‌ها است ($P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$).
- T یک مجموعه متناهی از گذرها است ($T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$), به نحوی که P و T دو مجموعه مجزا هستند ($P \cap T = \emptyset$).
- $I: T \rightarrow \text{Bag}(P)$ یک تابع ورودی (input function) است که گذرها را به کیسه‌های مکان‌ها نگاشت می‌کند و در آن $\text{Bag}(P)$ مجموعه همه چندمجموعه‌های امکان‌پذیر P است.
- $O: T \rightarrow \text{Bag}(P)$ یک تابع خروجی (output function) است که گذرها را به کیسه‌های مکان‌ها نگاشت می‌کند.
- $H: T \rightarrow \text{Bag}(P)$ یک تابع بازدارنده (inhibition function) است که گذرها را به کیسه‌های مکان‌ها نگاشت می‌کند.

مثالی از یک مدل شبکه پتری

$$C = (P, T, I, O, H)$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

$$O(t_1) = \{p_2, p_3, p_5\}$$

$$O(t_2) = \{p_5\}$$

$$O(t_3) = \{p_4\}$$

$$O(t_4) = \{p_2, p_3\}$$

$$I(t_1) = \{p_1\}$$

$$I(t_2) = \{p_2, p_3, p_5\}$$

$$I(t_3) = \{p_3\}$$

$$I(t_4) = \{p_4\}$$

بازدارنده ندارد.

چند تعریف دیگر

■ برای یک گذر $t \in T$ ، مجموعه مکان‌های ورودی را با t^\bullet (نقطه t)، مجموعه مکان‌های خروجی را با t° (نقطه t) و مجموعه مکان‌های بازدارنده را با ${}^o t$ (دایره t) نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

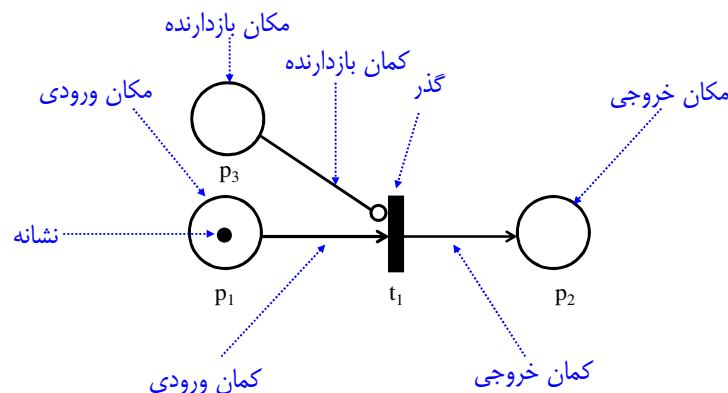
- $t^\bullet = \{ p \in P : I(t, p) > 0 \}$
- $t^\circ = \{ p \in P : O(t, p) > 0 \}$
- ${}^o t = \{ p \in P : H(t, p) > 0 \}$

■ با در نظر گرفتن $\text{Bag}(P)$ ، هر دو تعریف زیر درست خواهد بود:

- $I(t)$ ، نشان‌دهنده چندمجموعه مکان‌های ورودی گذر t است.
- $I(t, p)$ نشان‌دهنده مضرب (multiplicity) (تعداد) عناصر p در چندمجموعه $I(t)$ است.

نمایش گرافیکی شبکه‌های پتری

■ اجزاء شبکه‌های پتری در نمایش گرافیکی در مثال ساده زیر نشان داده شده است:



نمایش گرافیکی شبکه‌های پتری

- همانگونه که در شکل مشخص است، یک شبکه پتری متشکل از سه جزء اصلی است:





- مکان‌ها (places) که با دایره نشان داده می‌شوند و حالت‌های امکان‌پذیر سیستم را مدل می‌کنند.
- گذرها (transitions) که با مستطیل نشان داده می‌شوند و رخدادها یا کنش‌هایی هستند که باعث تغییر حالت‌ها می‌شوند.
- کمان‌ها (arcs) که با پیکان نشان داده می‌شوند و مکان‌ها را به گذرها یا گذرها را به مکان‌ها متصل می‌کنند.

- در کنار سه جزء اصلی فوق، نشانه‌ها (token) هم وجود دارند که نشانه‌گذاری (marking) یا مقادیر قرار گرفته در مکان‌ها را مشخص می‌کنند.

گراف‌های شبکه‌های پتری

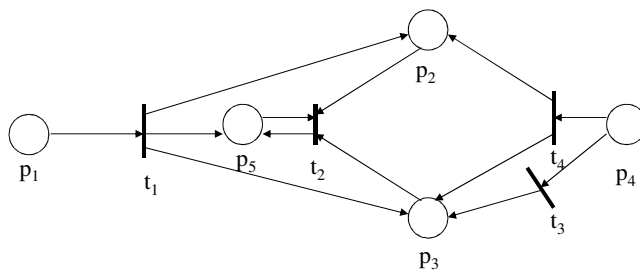
- نمایش گرافیکی شبکه‌های پتری برای تشریح مفاهیم نظریه شبکه پتری سودمند است.
- برای نمایش گرافیکی از گراف‌های شبکه‌های پتری استفاده می‌شود که یک گراف جهت‌دار دوسویه (bipartite directed multigraph) است. این گراف متشکل است از:

- دو نوع گره:

- مکان که با دایره (○) نشان داده می‌شود.
- گذر که با مستطیل عمودی (▮) نشان داده می‌شود (البته در مراجع و ابزارهای مختلف نمادهای متفاوتی برای گذر استفاده می‌شود).
- کمان‌های جهت‌دار (directed arcs) که با پیکان نشان داده می‌شوند و مکان‌های ورودی را به گذرها یا گذرها را به مکان‌های خروجی متصل می‌کنند: 
- کمان‌های ورودی و خروجی ممکن است که دارای یک برچسب عددی به عنوان مضرب (multiplicity) باشند: 
- کمان‌های بازدارنده (inhibitor arcs) که مکان‌های بازدارنده را به گذرها متصل می‌کنند: 
- کمان‌های بازدارنده هم ممکن است که دارای مضرب باشند: 

گراف‌های شبکه‌های پتری

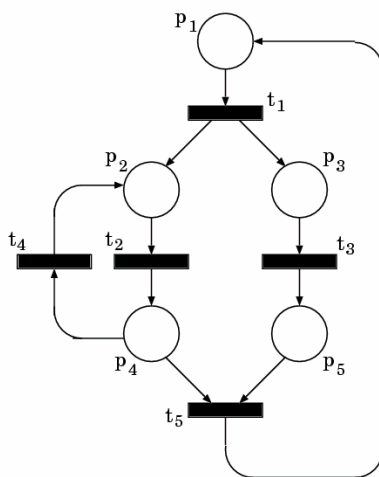
■ مثالی از گراف‌های شبکه‌های پتری در شکل زیر نشان داده شده است که معادل همان مثال ارائه شده با ساختار صوری است:



مثال دوم

نمایش گرافیکی



ساختار صوری



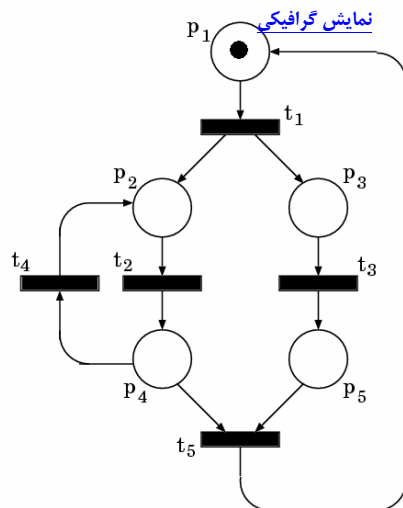
رفتار شبکه پتری

- همانگونه که گفته شد، شبکه‌های پتری علاوه بر ساختار صوری ایستا، دارای رفتار پویا هستند.
- از این نظر، شبکه‌های پتری مشابه برنامه‌ها هستند که دارای یک متن برنامه منبع (source code) بوده که به صورت ایستا است. اما یک برنامه پس از کامپایل شدن اجرا شده و رفتار پویایی را بروز می‌دهد.
- تعریف ساختار صوری یک شبکه پتری مثل یک متن برنامه منبع است. اما یک ابزار مدل‌سازی می‌تواند این تعریف ساختار را گرفته و شبکه پتری را اجرا کند.
- رفتار پویای شبکه‌های پتری با استفاده از سیستم شبکه پتری (Petri net system) تعریف می‌شود که مبتنی بر نشانه‌گذاری (marking) شبکه پتری و قواعد اجرای (execution rules) شبکه پتری است.

نشانه‌گذاری شبکه پتری

- نشانه‌گذاری (marking) همانند مکان و گذر یک مفهوم اولیه اصلی شبکه‌های پتری است.
- نشانه‌گذاری شبکه پتری انتساب نشانه‌ها (token) یا اعداد صحیح مثبت (N) به مکان‌های آن شبکه است.
- نشانه‌گذاری در تعریف ساختار صوری شبکه پتری با M, μ یا m نشان داده می‌شود.
- هر شبکه دارای یک نشانه‌گذاری اولیه (initial marking) است که با M_0, μ_0 یا m_0 نشان داده می‌شود.
- نشانه‌ها به مکان‌های شبکه پتری منتسب شده و می‌توانند آن باقی مانده یا در طی اجرای شبکه پتری تغییر کنند.
- در گراف شبکه پتری نشانه‌ها با دایره‌های کوچک توپر در داخل دایره مکان‌ها نشان داده می‌شوند: 
- اگر تعداد نشانه‌ها در یک مکان زیاد باشد، عدد تعداد نشانه‌ها در داخل دایره مکان نوشته می‌شود: 

مثال اول شبکه پتری نشانه گذاری شده



ساختار صوری

نمایش گرافیکی

PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

19

تعریف صوری سیستم شبکه پتری

■ **تعریف ۲:** یک سیستم شبکه پتری یک شش تایی $C = (P, T, I, O, H, M_0)$ است به نحوی که:

□ که P, T, I, O و H مطابق تعریف (۱) هستند.

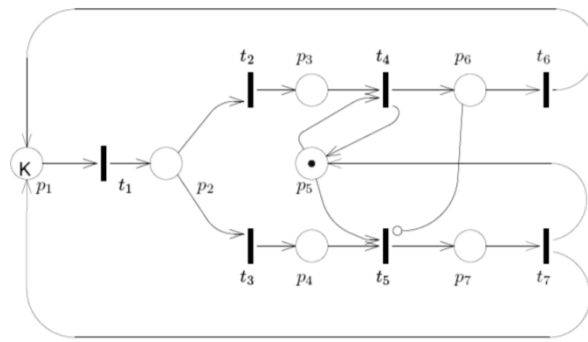
□ $M_0: P \rightarrow N$ تابع نشانه گذاری اولیه است که یک عدد صحیح مثبت را به هر کدام از مکان های شبکه پتری منتسب می کند.

PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

20

مثال دوم شبکه پتری نشانه گذاری شده

■ در این مثال t_5 دارای یک کمان بازدارنده بوده و مکان p_1 دارای k نشانه است.



$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$
 $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$

$I(t_1) = \{p_1\}$
 $I(t_2) = \{p_2\}$
 $I(t_3) = \{p_2\}$
 $I(t_4) = \{p_3, p_5\}$
 $I(t_5) = \{p_4, p_5\}$
 $I(t_6) = \{p_6\}$
 $I(t_7) = \{p_7\}$

$O(t_1) = \{p_2\}$
 $O(t_2) = \{p_3\}$
 $O(t_3) = \{p_4\}$
 $O(t_4) = \{p_5, p_6\}$
 $O(t_5) = \{p_7\}$
 $O(t_6) = \{p_1\}$
 $O(t_7) = \{p_1, p_5\}$

$H(t_5) = \{p_5\}$

$M_0 = (k, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$

PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

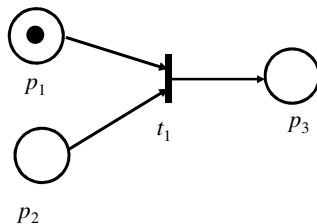
21

توانا بودن گذر

■ به صورت غیر صوری، یک گذر توانا (enabled) یا قابل شلیک (firable) است اگر:

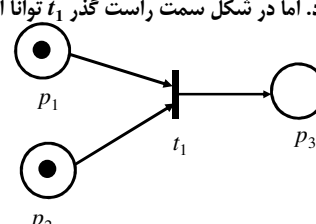
1. در هر کدام از مکان های ورودی حداقل به تعداد یا مضرب کمان های ورودی، نشانه وجود داشته باشد.
2. در مکان های متصل با کمان های بازدارنده کمتر از تعداد یا مضرب کمان های بازدارنده نشانه وجود داشته باشد.
3. گذر فاقد کمان های ورودی و بازدارنده: همیشه توانا است.

■ برای مثال در دو شکل زیر، در شکل سمت چپ گذر t_1 توانا نیست چون در مکان p_2 هیچ نشانه ای وجود ندارد. اما در شکل سمت راست گذر t_1 توانا است.



t_1 توانا نیست:

$$M(p_1) \geq 1 \ \& \ M(p_2) \geq 1 = \text{false}$$



t_1 توانا است:

$$M(p_1) \geq 1 \ \& \ M(p_2) \geq 1 = \text{true}$$

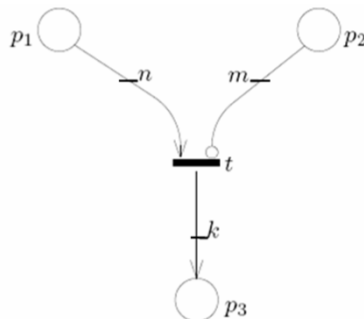
PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

22

توانا بودن گذر

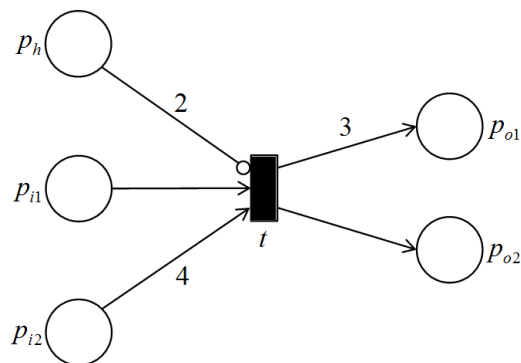
- در مثال زیر گذر t در صورتی توانا خواهد بود که در مکان p_1 به تعداد n یا بیشتر از آن نشانه وجود داشته باشد و در مکان p_2 کمتر از m نشانه وجود داشته باشد.
- به طور صوری توانا بودن t به صورت زیر بیان می شود:

$$M(p_1) \geq n \ \& \ M(p_2) < m$$



توانا بودن گذر

- مثال دیگر:



- شرط توانا شدن؟

$$m(p_{i1}) \geq 1$$

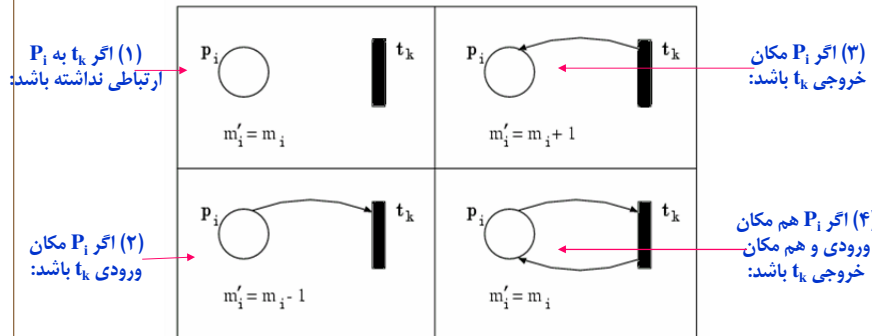
$$m(p_{i2}) \geq 4$$

$$m(p_h) < 2$$

قواعد اجرای شبکه پتری

■ اگر یک گذر در نشانه گذاری m توانا باشد، اجرا می شود که اصطلاحاً گفته می شود که شلیک می کند (fire) و شبکه را به یک نشانه گذاری جدید m' می برد. برای این منظور چهار قاعده وجود دارد که در شکل زیر برای گذر t_k آمده است:

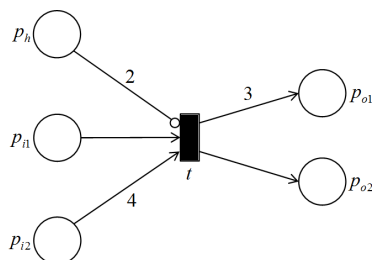
$$m \rightarrow t_k \rightarrow m'$$



قواعد اجرای شبکه پتری

به بیان دیگر، وقتی یک گذر اجرا شود:

- از هر مکان ورودی مثل p_i به تعداد برجسب کمان مربوطه، $I(p_i, t)$ نشانه برداشته می شود.
- به هر مکان خروجی مثل p_o به تعداد برجسب کمان مربوطه، $O(t, p_o)$ نشانه اضافه می شود.



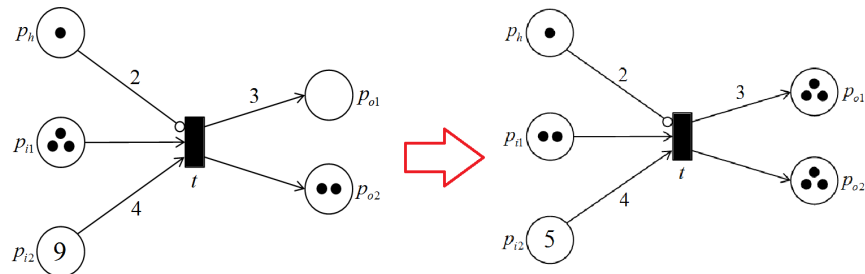
$$m(p_{i1}) -= 1$$

$$m(p_{i2}) -= 4$$

$$m(p_{o1}) += 3$$

$$m(p_{o2}) += 1$$

قواعد اجرای شبکه پتری



$$m[t]m'$$

تعریف صوری توانا بودن و شلیک کردن گذر

■ **تعریف ۳:** گذر t در یک نشانه گذاری M توانا است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

- $\forall p \in {}^*t, M(p) \geq I(t, p)$ and
- $\forall p \in {}^\circ t, M(p) < H(t, p)$

■ وقتی t توانا بوده و شلیک کند:

□ از مجموعه مکان های ورودی (*t) به تعداد مضرب کمان متصل کننده آن مکان به t نشانه حذف می کند.

□ به مجموعه مکان های خروجی (${}^\circ t$) به تعداد مضرب کمان متصل کننده t به آن مکان نشانه اضافه می کند.

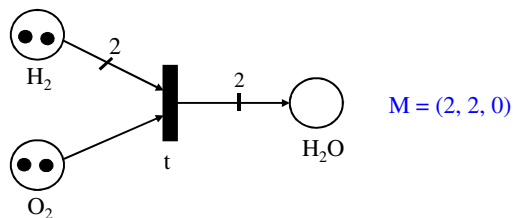
■ **تعریف ۴:** شلیک کردن گذر t در نشانه گذاری M که در آن توانا است باعث ایجاد نشانه گذاری M' می شود، به نحوی که:

$$M' = M + O(t) - I(t)$$

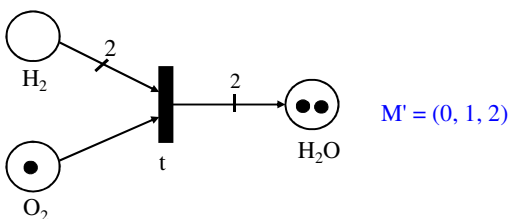
□ به اختصار شلیک کردن گذر t را با $M[t]M'$ نشان می دهیم.

مثالی از شلیک کردن یک گذر

■ به عنوان مثال فرمول $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ را با شبکه پتری مدل می کنیم:



■ در مدل فوق گذر t توانا است و می تواند به شکل زیر شلیک کند:



مثالی از شلیک کردن یک گذر

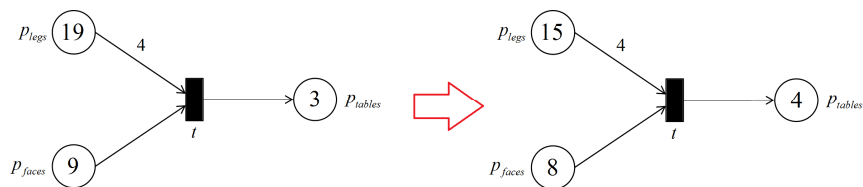
نشانه گذاری اولیه $m_0 = (19, 9, 3)$

$$m_1 = (15, 8, 4)$$

$$m_2 = (11, 7, 5)$$

$$m_3 = (7, 6, 6)$$

$$m_4 = (3, 5, 7)$$



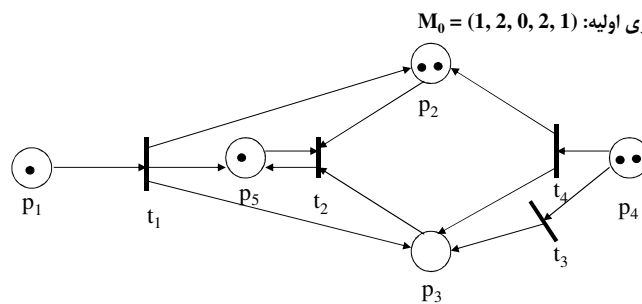
$$m_0[t] m_1[t] m_2[t] m_3[t] m_4$$

اجرای شبکه پتری

- اجرای شبکه پتری بوسیله تعداد نشانه‌ها در مکان‌های شبکه پتری کنترل می‌شود.
- شلیک کردن یا کامل شدن (completion) گذرها، نشانه‌های موجود در مکان‌ها را کم و زیاد می‌کند.
- اجرای شبکه پتری به صورت غیرقطعی (non-deterministic) است. این بدان معنی است که:
 - چندین گذر ممکن است که در یک زمان (یا در یک نشانه‌گذاری) توانا باشند که یکی از آنها می‌تواند شلیک می‌کند.
 - هر کدام از گذرها ممکن است در یک زمانی بین صفر تا بی‌نهایت شلیک کنند.
 - انتخاب هر کدام از گذرها برای شلیک کردن به طور غیرقطعی انجام می‌شود.
- چون شلیک کردن گذرها به طور غیرقطعی است، شبکه‌های پتری برای مدل‌سازی رفتار همروند (concurrent) در سیستم‌های توزیع شده (distributed) مناسب هستند.

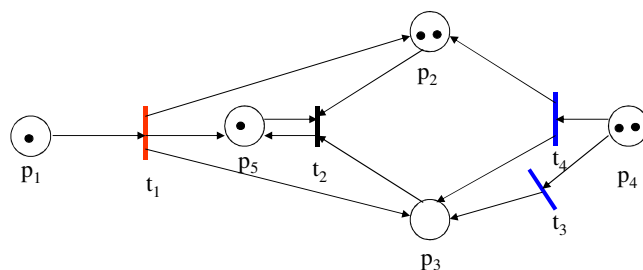
مثالی از اجرای یک شبکه پتری

- حالا همان مثال اولیه را در نظر می‌گیریم و با نشانه‌گذاری شبکه را در چند مرحله اجرا می‌کنیم:



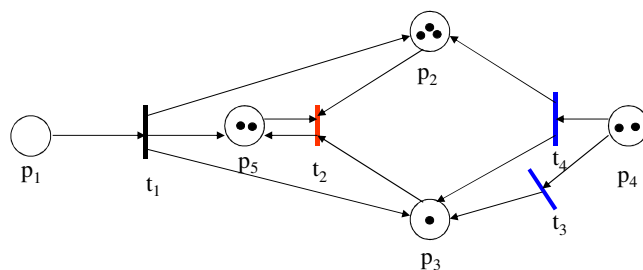
مثالی از اجرای یک شبکه پتری

- در نشانه گذاری اولیه گذرهای t_1 ، t_3 و t_4 توانا هستند، که یکی از آنها به طور غیرقطعی شلیک می کند.
- فرض می کنیم که t_1 شلیک کند:



مثالی از اجرای یک شبکه پتری

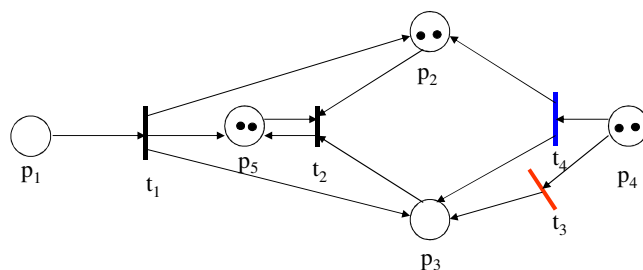
- پس از شلیک کردن گذر t_1 نشانه گذاری جدید $M_1 = (0, 3, 1, 2, 2)$ ظاهر می شود:



- در نشانه گذاری M_1 گذرهای t_2 ، t_3 و t_4 توانا هستند، که فرض می کنیم که t_2 شلیک می کند...

مثالی از اجرای یک شبکه پتری

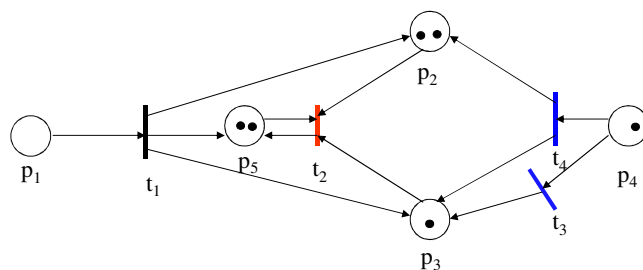
■ پس از شلیک کردن گذر t_2 نشانه گذاری جدید $M_2 = (0, 2, 0, 2, 2)$ ظاهر می شود:



■ در نشانه گذاری M_2 گذرهای t_3 و t_4 توانا هستند، که فرض می کنیم که t_3 شلیک می کند...

مثالی از اجرای یک شبکه پتری

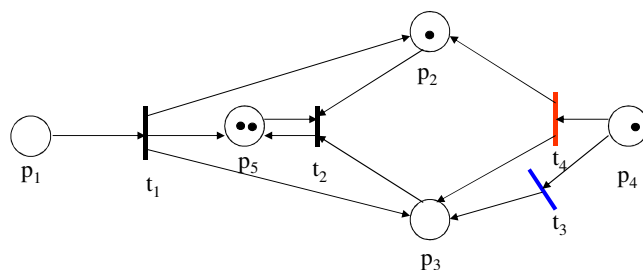
■ پس از شلیک کردن گذر t_2 نشانه گذاری جدید $M_3 = (0, 2, 1, 1, 2)$ ظاهر می شود:



■ در نشانه گذاری M_3 گذرهای t_2 ، t_3 و t_4 توانا هستند، که فرض می کنیم که t_2 شلیک می کند...

مثالی از اجرای یک شبکه پتری

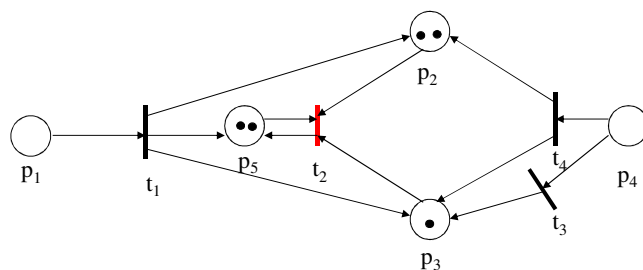
■ پس از شلیک کردن گذر t_2 نشانه گذاری جدید $M_4 = (0, 1, 0, 1, 2)$ ظاهر می شود:



■ در نشانه گذاری M_4 تنها گذر t_3 و t_4 توانا است، که فرض می کنیم t_4 شلیک می کند...

مثالی از اجرای یک شبکه پتری

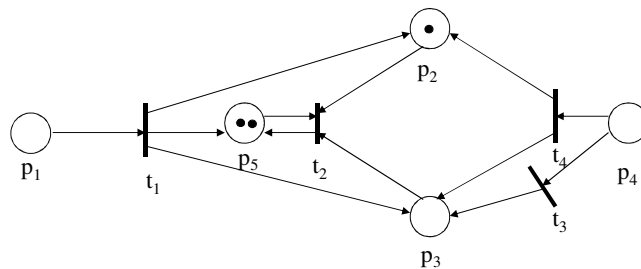
■ پس از شلیک کردن گذر t_4 نشانه گذاری جدید $M_5 = (0, 2, 1, 0, 2)$ ظاهر می شود:



■ در نشانه گذاری M_5 تنها گذر t_2 توانا است که شلیک می کند...

مثالی از اجرای یک شبکه پتری

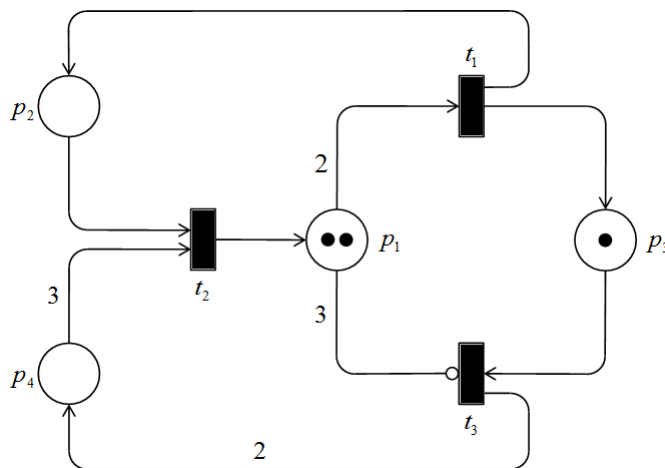
- پس از شلیک کردن گذر t_2 نشانه گذاری جدید $M_6 = (0, 1, 0, 0, 2)$ ظاهر می شود:



- در نشانه گذاری M_6 هیچ گذری توانا نیست و اینجا متوقف می شود.
- البته در حالت کلی مدل های سیستم های همروند به این صورت پس از چند مرحله اجرا خاتمه پیدا نمی کنند، بلکه به صورت خاتمه ناپذیر (non-terminating) هستند.

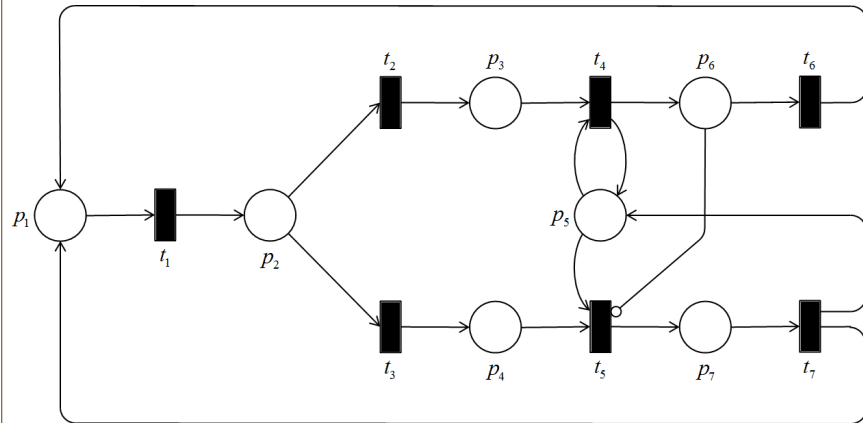
تمرین ۱: توصیف صوری مدل

- توصیف صوری مدل شبکه پتری زیر را بنویسید:



تمرین ۲: توصیف صوری مدل

■ توصیف صوری مدل شبکه پتری زیر را بنویسید:



PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

41

تمرین ۳: مدل شبکه پتری ساعت

■ یک مدل شبکه پتری برای مدل سازی ساعت ارائه کنید، طوری که مکانسیم ساعت را برای ۲۴ ساعت شبانه روز نشان دهد:

□ ۶۰ ثانیه یک دقیقه

□ ۶۰ دقیقه یک ساعت

□ ۲۴ ساعت یک شبانه روز

■ محدودیت این مدل شبکه پتری در زمینه مدل سازی زمان واقعی چیست؟

PECS 16 - Petri Nets - By: M. Abdollahi Azgomi - IUST-CE

42

تمرین ۴: کار با ابزار شبکه پتری

- هر سه مدل تمرین‌های قبل را با یک ابزار شبکه پتری ساخته و اجرا (قابلیت انیمیشن یا بازی نشانه‌ها) کنید. مدل ساخته شده را تحویل دهید.