دانشکده مهندسی کامپیوتر

عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

Performance Evaluation of Computer Systems (PECS)

جلسه ۷: مدلهای آماری

(Statistical Models)

مدرس:

محمد عبداللهی ازگمی

(Mohammad Abdollahi Azgomi)

azgomi@iust.ac.ir

جلسه ۷: مدلهای آماری

- مقدمه
- اصطلاحات و مفاهیم آمار و احتمالات
- مدلهای احتمالی سودمند
- توزیع‌های گسسته
- توزیع‌های پیوسته
- توزیع‌های تجربی
- جمع‌بندی

مقدمه

- دنیایی که مدل‌ساز با آن سر و کار دارد بیشتر احتمالی (probabilistic) است تا اینکه قطعی (deterministic) باشد.
  - از اینرو مدلهای احتمالی می‌توانند به‌خوبی تغییرات در چنین دنیایی را توصیف کنند.
- برای انتخاب یک مدل احتمالی مناسب می‌توان پدیده‌های مورد نظر را نمونه‌برداری (sampling) نموده و سپس:
  - یک توزیع شناخته شده را حدس زده و انتخاب کرد.
  - پارامتر(های) توزیع را تخمین زد.
  - آزمون برازندگی (goodness of fit) (نظیر K2 یا K-S) را جهت بررسی و حصول اطمینان از انتخاب صحیح توزیع و پارامترها انجام داد.
- برای این منظور در ادامه توزیع‌های احتمالی مهم مورد بررسی قرار گرفته و برخی از موارد کاربرد آنها ذکر می‌شود.

اصطلاحات و مفاهیم آمار و احتمالات

- بنا بر این در ادامه مفاهیم و تعاریف زیر ارائه می‌شوند:
  - متغیرهای تصادفی گسسته (discrete random variables)
  - متغیرهای تصادفی پیوسته (continuous random variables)
  - تابع توزیع تجمعی (cumulative distribution function)
  - امید ریاضی (expectation)

متغیرهای تصادفی گسسته

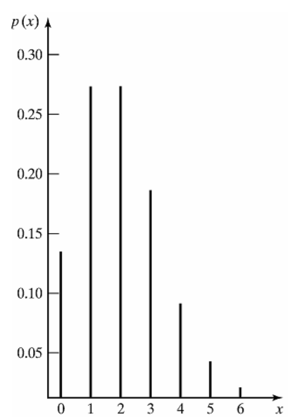
- به X یک متغیر تصادفی گسسته گفته می‌شود اگر تعداد مقادیر امکان‌پذیر X متناهی (finite) یا قابل شمارش (شمارا) (countably finite) باشد.
- برای مثال کارهای وارده به یک کارگاه را در نظر بگیرید:
  - تعداد کارهای وارده در یک هفته را با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم.
  - فضای برد (range space) مقادیر امکان‌پذیر X را با R_x نشان می‌دهیم: $R_x=\{0, 1, 2, \dots\}$
  - احتمال اینکه مقدار متغیر برابر با x_i باشد را با $p(x_i)$ نشان می‌دهیم: $p(x_i) = P(X = x_i)$
- $p(x_i)$ برای $i = 1, 2, \dots$ باید در شرایط زیر صدق کند:

1. $p(x_i) \geq 0, \text{ for all } i$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

- به مجموعه زوجهای مرتب $[x_i, p(x_i)]$، $i=1, 2, \dots$ توزیع احتمالی (probability distribution) و به $p(x_i)$ تابع جرم احتمالی (pmf: probability mass function) متغیر تصادفی X گفته می‌شود.

متغیرهای تصادفی گسسته (ادامه)

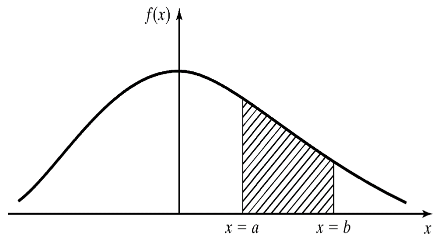
- مثال: تماسهای تلفنی درخواست سرویس به یک تعمیرکار کامپیوتر طبق یک توزیع گسسته پواسان است. تابع جرم احتمالی این توزیع در شکل زیر نشان داده شده است:



تعریف متغیرهای تصادفی پیوسته

- به X یک متغیر تصادفی پیوسته گفته می‌شود اگر فضای برد (R_x) آن یک بازه (پیوسته) یا مجموعه‌ای از بازه‌ها از اعداد حقیقی باشد.
- احتمال اینکه X در بازه [a, b] قرار گرفته باشد به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



- به $f(x)$ تابع چگالی احتمالی (pdf: probability density function) گفته می‌شود.

تعریف متغیرهای تصادفی پیوسته

- $f(x)$ باید در شرایط ذیل صدق نماید:

1. $f(x) \ge 0$, for all x in R_X
2. $\int_{R_X} f(x)dx = 1$
3. $f(x) = 0$, if x is not in R_X

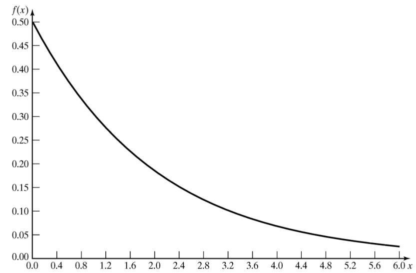
- خصوصیتها:

1. $P(X = x_0) = 0$, because $\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
2. $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$

متغیرهای تصادفی پیوسته

- مثال: فرض کنید که X یک متغیر تصادفی پیوسته که نماینده طول عمر یک دستگاه بوده و دارای pdf زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2}, & \text{x} \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



  - بعداً خواهیم دید که X دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ سال است.

- احتمال اینکه طول عمر دستگاه بین ۲ تا ۳ سال باشد برابر خواهد بود با:

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 e^{-x/2} dx = 0.145$$

تابع توزیع تجمعی

- تابع توزیع تجمعی (cumulative distribution function (cdf)) یک متغیر تصادفی X با F(X) یا F_x نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - $\mathbf{F(x) = F_x = P(X \leq x)}$
  - اگر X گسسته باشد: $F(x) = \sum_{\substack{\text{all} \\ x_i \leq x}} p(x_i)$
  - اگر X پیوسته باشد: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$
- خصوصیت‌ها:

1. F is nondecreasing function: If $a < b$, then $F(a) \leq F(b)$
2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

- همه پرسشهای احتمالی در باره X بر حسب cdf قابل پاسخگویی است. برای مثال:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \text{ for all } a < b$$

تابع توزیع تجمعی

- برای مثال در مورد توزیع تجمعی دستگاه مورد بحث خواهیم داشت:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt = 1 - e^{-x/2}$$

- احتمال اینکه این دستگاه کمتر از دو سال عمر کند چقدر است؟

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

- احتمال اینکه این دستگاه دو الی سه سال عمر کند چقدر است؟

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = (1 - e^{-(3/2)}) - (1 - e^{-1}) = 0.145$$

امید ریاضی و واریانس

- امید ریاضی (expected value) یک متغیر تصادفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - اگر **X** گسسته باشد: $E(x) = \sum_{\text{all } i} x_i p(x_i)$
  - اگر **X** پیوسته باشد: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- واریانس یک متغیر تصادفی با σ^2 یا **V(X)** یا **Var(X)** نشان داده می‌شود و عبارت است از:
  - $V(X) = E[(X - E[X]^2)]$
  - یا $V(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$
- به جذر واریانس، انحراف معیار (standard deviation) گفته می‌شود.

امید ریاضی و واریانس

- امید ریاضی دستگاه مورد بحث را بدست می‌آوریم:

$$E(X)=\frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x/2}dx=-xe^{-x/2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x/2}dx=2$$

- سپس $E[X^2]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x/2}dx=-x^2e^{-x/2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x/2}dx=8$$

- و حالا می‌توانیم واریانس و انحراف معیار را بدست آوریم:

$$V(X)=8-2^2=4$$

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=2$$

مدلهای احتمالی سودمند

- در ادامه با برخی مدلهای احتمالی سودمند که در زمینه‌های زیر کاربرد دارند آشنا می‌شویم:
  - سیستم‌های صف (queueing systems)،
  - سیستم‌های موجودی و زنجیره تامین (inventory and supply-chain systems)
  - قابلیت اطمینان و قابلیت نگهداشت (reliability and maintainability)
  - مدلهای احتمالی داده‌های محدود (limited data):
    - موقعی که در مورد یک پدیده، داده‌های کافی در اختیار نداریم، استفاده می‌شوند.

مدلهای سودمند برای سیستم‌های صف

- در سیستم‌های صف الگوهای زمان بین ورود مشتریان و زمان سرویس می‌تواند احتمالی باشد.
- برای این منظور توزیع‌های احتمالی زیر قابل استفاده هستند:
  - اگر زمانهای بین ورود یا سرویس کاملاً تصادفی هستند: توزیع نمایی
  - اگر زمانهای بین ورود یا سرویس دارای مقادیر مثبت و منفی حول یک مقدار ثابت باشند: توزیع نرمال
  - در حالتهای عمومی‌تر توزیعهای گاما (gamma) و ویبول (Weibull) قابل استفاده هستند.

سیستم‌های موجودی و زنجیره تامین

- در سیستم‌های موجودی و زنجیره تامین، حداقل سه متغیر تصادفی وجود دارد:
  - تعداد واحدهای مورد تقاضا در هر سفارش،
  - زمان بین تقاضاها، و
  - زمان انجام سفارش تا رسیدن تقاضا (lead time).
- مدل آماری مناسب برای زمان انجام سفارش تا رسیدن تقاضا:
  - توزیع گاما
- تعداد واحدهای مورد تقاضا در هر سفارش:
  - توزیع پواسان،
  - توزیع دوجمله‌ای منفی، یا
  - توزیع هندسی.

قابلیت اطمینان و قابلیت نگهداشت

- توزیع مناسب برای زمان تا خرابی ((time to failure (TTF)):
  - اگر خرابیها تصادفی باشند: توزیع نمایی
  - برای حالتی که قطعات یدکی افزونه (standby redundancy) داریم و هر قطعه دارای TTF نمایی باشد، باشد در این صورت TTF کل سیستم: توزیع گاما
  - اگر خرابی به دلیل عیوب متعدد در قطعات سیستم باشد: توزیع ویبول
  - اگر خرابیها حاصل فرسودگی (عمر بالا) باشد: توزیع نرمال

مدلهای احتمالی سودمند برای داده‌های محدود

- در صورتی که داده‌های محدودی در دسترس است توزیع‌های زیر قابل استفاده هستند:
  - یکنواخت،
  - مثلثی، و
  - بتا.
- سایر توزیع‌های قابل استفاده و مهم:
  - برنولی (Bernoulli)،
  - دوجمله‌ای (binomial)، و
  - فوق‌نمایی (hyperexponential).

توزیع‌های گسسته

- متغیرهای تصادفی گسسته برای توصیف یک پدیده تصادفی که فقط مقادیری از نوع اعداد صحیح می‌توانند رخ دهند، استفاده می‌شوند.
- در ادامه توزیع‌های زیر را معرفی می‌کنیم:
  - آزمونها و توزیع برنولی
  - توزیع دوجمله‌ای
  - توزیع هندسی و دوجمله‌ای منفی
  - توزیع پواسان

آزمونها و توزیع برنولی

- آزمونهای برنولی: یک آزمایش را که شامل n آزمون است که نتیجه هر کدام موفقیت یا شکست است را در نظر بگیرید:
  - $X_j = 1$ در صورتی که نتیجه jامین آزمایش موفقیت باشد.
  - $X_j = 0$ در صورتی که نتیجه jامین آزمایش شکست باشد.
- توزیع برنولی (یک آزمون) عبارت است از:
  - که در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_j(x_j) = p(x_j) = \begin{cases} p, & x_j = 1, j = 1,2,\dots,n \\ 1-p = q, & x_j = 0, j = 1,2,\dots,n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - $E(X_j) = p$
  - $V(X_j) = p(1-p) = pq$
- فرآیند برنولی: شامل n آزمون مستقل برنولی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - $p(x_1,x_2,\dots,x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_n(x_n)$

توزیع دوجمله‌ای

- متغیر تصادفی X که تعداد موفقیت‌ها در n آزمون برنولی را نشان می‌دهد یک توزیع دوجمله‌ای است:

$$p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}\underbrace{p^{x}q^{n-x}}, & x=0,1,2,\dots,n\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

تعداد برآمدهایی که دارای تعداد مورد نیاز موفقیت و شکست باشند.

احتمال اینکه x موفقیت و n-x شکست وجود داشته باشد

- امید ریاضی و واریانس:
  - E(x) = p + p + … + p = n*p
  - V(X) = pq + pq + … + pq = n*pq

توزیع هندسی و دوجمله‌ای منفی

- توزیع هندسی: نشان‌دهنده تعداد آزمونهای مورد نیاز (X) برای نیل به اولین موفقیت:

$$p(x)=\begin{cases} q^{x-1}p, & x=0,1,2,\dots,n\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

  - E(x) = 1/p و $V(X) = q/p^2$

- توزیع دوجمله‌ای منفی:
  - نشان‌دهنده تعداد آزمونهای برنولی (X) تا نیل به kامین موفقیت است.
  - اگر Y یک توزیع دوجمله‌ای منفی است با پارامتر p و k باشد، آنگاه:

$$p(x)=\begin{cases}\binom{y-1}{k-1} q^{y-k}p^{k}, & y=k,k+1,k+2,\dots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

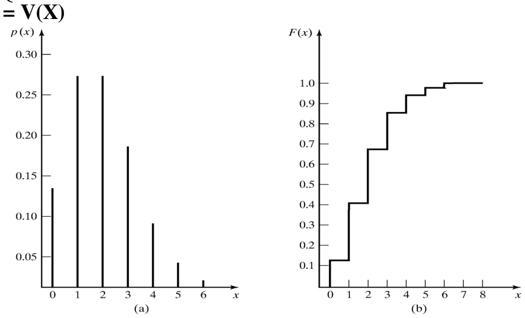
  - E(Y) = k/p و $V(X) = kq/p^2$

توزیع پواسان

- توزیع پواسان فرآیندهای تصادفی متعددی را به‌خوبی توصیف می‌کند و از نظر ریاضی کاملاً ساده است. برای $\alpha > 0$، pdf و cdf این توزیع به شکل زیر است:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha}\alpha^{x}}{x!}, & x=0,1,\ldots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\qquad F(x)=\sum_{i=0}^{x}\frac{e^{-\alpha}\alpha^{i}}{i!}$$

  - **$E(X) = \alpha = V(X)$**



توزیع پواسان

- **مثال: تماسهای تلفنی درخواست سرویس به یک تعمیرکار کامپیوتر طبق یک توزیع پواسان با نرخ $\alpha = 2$ در هر ساعت است.**
  - **احتمال سه درخواست در یک ساعت آینده چقدر است؟**

p(3) $= e^{-2}2^{3}/3! = 0.18$

همچنین به طور مشابه و با توجه به نمودار F(x) داریم:

p(3) $= F(3) - F(2) = 0.857 - 0.677 = 0.18$

  - **احتمال دو یا بیشتر درخواست در مدت یک ساعت چقدر است؟**

p(2 or more) $= 1 - p(0) - p(1)$

$= 1 - F(1)$

$= 0.594$

توزیع‌های پیوسته

- متغیرهای تصادفی پیوسته می‌توانند برای توصیف پدیده‌های تصادفی استفاده شوند که در آنها متغیر می‌تواند هر مقداری را در یک بازه داشته باشد (مقادیری از مجموعه اعداد حقیقی).
- در ادامه توزیع‌های پیوسته زیر معرفی می‌شوند:
  - یکنواخت **(uniform)**
  - نمایی **(exponential)**
  - نرمال **(normal)**
  - ویبول **(Weibull)**
  - لاگ‌نرمال **(lognormal)**

توزیع یکنواخت

- یک متغیر تصادفی X در بازه (a, b) دارای توزیع یکنواخت است و با U(a, b) نشان داده می‌شود اگر pdf و cdf آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

- خصوصیت‌ها:
  - $P(x_1 < X < x_2)$ به نسبت طول بازه $[F(x_2) - F(x_1) = (x_2-x_1)/(b-a)]$ است.
  - امید ریاضی: $E(X) = (a+b)/2$ و واریانس: $V(X) = (b-a)^2/12$
- $U(0, 1)$ وسیله‌ای برای تولید اعداد تصادفی **(random numbers)** است که از این اعداد تصادفی می‌توان سایر متغیرهای تصادفی را تولید نمود.

توزیع نمایی

- یک متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ که λ>0 است، اگر تابع چگالی احتمالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

  - یا اگر CDF آن به‌صورت زیر باشد:

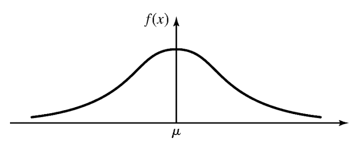
$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}, x\geq 0$$

- توزیع نمایی دارای خصوصیت‌های جالبی است که در جلسه ۸ به بررسی دقیق‌تر آنها خواهیم پرداخت.

توزیع نرمال

- متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است اگر pdf آن به صورت زیر باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \; -\infty<x<\infty$$



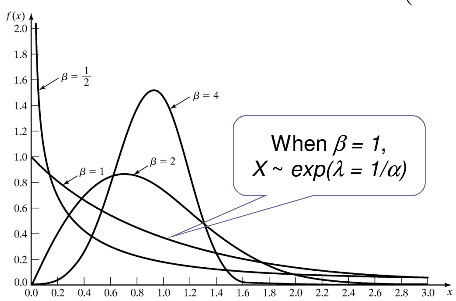
  - میانگین آن: $-\infty<\mu<\infty$
  - و واریانس آن: $\sigma^2>0$
  - و به شکل $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ نشان داده می‌شود.
- خصوصیت‌های جالب توزیع نرمال:
  - خصوصیت‌های $f(x)$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, and $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$
  - pdf دارای تقارن حول μ است: $f(\mu-x)=f(\mu+x)$
  - حداکثر مقدار pdf در $x=\mu$ رخ می‌دهد.

توزیع ویبول

- یک متغیر تصادفی X دارای توزیع ویبول است اگر pdf آن به شکل زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x \geq \nu \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

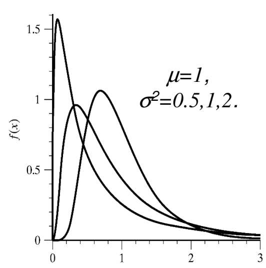
- این توزیع دارای سه پارامتر است:
  - پارامتر مکان (location): υ $(-\infty < \nu < \infty)$
  - پارامتر مقیاس (scale): β $(\beta > 0)$
  - پارامتر شکل (shape): α $(\alpha > 0)$
- مثال: $\upsilon = 0$ و $\alpha = 1$



توزیع لاگ‌نرمال

- یک متغیر تصادفی X که دارای توزیع لاگ‌نرمال (lognormal) است دارای pdf به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



  - میانگین: $E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$
  - واریانس: $V(X) = e^{2\mu+\sigma^2/2}(e^{\sigma^2} - 1)$
- رابطه توزیع لاگ‌نرمال با توزیع نرمال به این صورت است که:
  - اگر $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ آنگاه: $X = e^Y \sim \text{lognormal}(\mu, \sigma^2)$ (یا $Y = \ln X$)
  - توجه کنید که پارامترهای μ و σ^2 میانگین و واریانس لاگ‌نرمال نیستند، بلکه مربوط به نرمال هستند.

توزیع‌های تجربی

- به توزیعی که پارامترهایش مقادیر مشاهده شده (observed values) حاصل از داده‌های نمونه‌برداری شده باشد، توزیع تجربی (empirical distribution) گفته می‌شود.
  - این نوع توزیع‌ها در مواقعی که داشتن یک متغیر تصادفی ممکن یا ضروری نباشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند.
  - برای این منظور داده‌های نمونه برداری شده تبدیل به جدولها یا نمودارهایی می‌شوند که با روشهای درون‌یابی (interpolation) یا برون‌یابی (extrapolation) می‌توان داده‌های ورودی بیشتری را از آن تولید نمود.
  - مزیت: هیچگونه فرضی خارج از مقادیر مشاهده شده در داده‌های نمونه لازم نیست انجام شود.
  - عیب: نمونه‌ها ممکن است که کل محدوده مقادیر امکان‌پذیر را پوشش ندهند.

جمع‌بندی

- در این جلسه انواع مدلهای احتمالی پیوسته و گسسته و خصوصیت‌ها و کاربردهایشان را به اختصار معرفی نمودیم.
- برای اطلاعات بیشتر به فصل مدلسازی ورودی (input modeling) مراجعه شود.
- در جلسه بعد این بحث را با فرآیندهای تصادفی پی می‌گیریم.