دانشکده مهندسی کامپیوتر

عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

Performance Evaluation of Computer Systems (PECS)

جلسه ۱۵: شبکه‌های صف

مدرس:

محمد عبداللهی ازگمی

(Mohammad Abdollahi Azgomi)

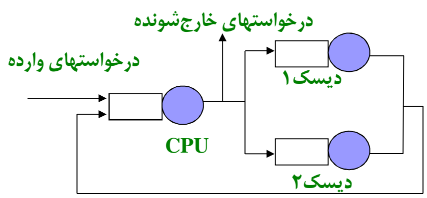
azgomi@iust.ac.ir

فهرست مطالب

- مقدمه
- شبکه‌های صف باز:
  - شبکه‌های صف باز ارسال به جلو (feed forward QN)
  - قضیه برک (Burke's theorem)
  - قضیه لیتل برای شبکه‌های صف
  - شبکه‌های صف باز دارای بازخورد (feedback)
  - قضیه جکسون (Jackson theorem)
- شبکه‌های صف بسته:
  - حل حالت پایدار شبکه‌های صف بسته با CTMC
  - حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول (Gordon and Newell theorem)

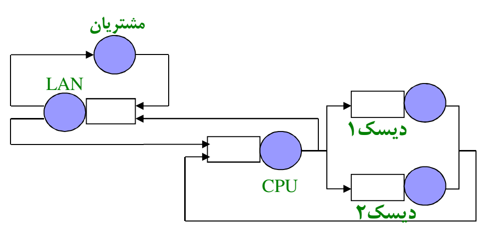
مقدمه

- شبکه‌های صف (QN: queueing networks) برای مدل‌سازی رقابت بر سر سرویس‌دهنده‌ها یا منابع چندگانه مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- مشتریان یا درخواست‌های وارده به یک شبکه صف قابل دسته‌بندی به دو رده باز (open) و بسته (closed) بر اساس نامحدود و ثابت بودن تعداد مشتریان یا درخواستها است.
- در یک رده باز (open class)، مشتریان وارد شبکه شده و سرویس‌دهنده‌های مختلف آنرا ملاقات نموده و سپس شبکه را ترک می‌کنند.
- اگر همه رده‌های مشتریان یک شبکه صف، باز باشند، به آن یک شبکه صف باز (open QN) گفته می‌شود.
- شکل زیر یک شبکه صف باز برای یک سیستم کامپیوتری را نشان می‌دهد:



مقدمه

- رده‌های بسته (closed classes) باتعداد ثابت مشتریان در شبکه صف مشخص می‌شوند.
- اگر همه رده‌های مشتریان یک شبکه صف، بسته باشند، به آن شبکه صف بسته (closed QN) گفته می‌شود.
- یک شبکه صف که برخی از کلاسهای مشتریان آن باز و برخی دیگر بسته باشند، شبکه صف تلفیقی (hybrid QN) گفته می‌شود.
- شکل زیر یک شبکه صف بسته برای یک سیستم مشتری-سرویس‌دهنده (client/server) را نشان می‌دهد:

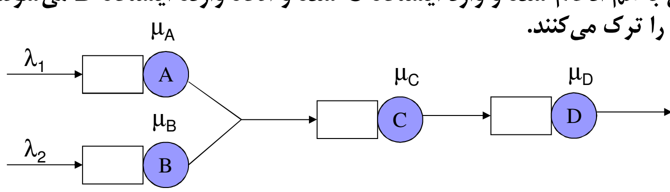


مقدمه

- شبکه‌های صف باز هیچ محدودیتی برای حداکثر تعداد مشتریان سیستم قرار نمی‌دهد.
- اما مواقعی وجود دارد که می‌توان یک سیستم کامپیوتری را با تعداد ثابت یا متناهی درخواستها مدل‌سازی نمود. موارد زیر مثالهایی از چنین وضعیت‌هایی هستند:
  - یک سیستم کامپیوتری چندبرنامه‌ای (multi-programming) که تحت بار (load) سنگین است. در چنین شرایطی اجازه اجرای برنامه جدید داده نمی‌شود و همان تعداد برنامه‌های موجود، اجرا خواهند شد.
  - یک سیستم اشتراک زمانی که تعداد ترمینالهای متصل به سیستم ثابت هستند.
  - یک سیستم مشتری-سرویس‌دهنده که تعداد درخواست‌های صادره از ایستگاه‌های مشتری به سرویس‌دهنده، معلوم است.
- در ادامه ابتدا شبکه‌های صف باز و سپس شبکه‌های صف بسته را معرفی نموده و با روشهای حل آنها آشنا می‌شویم.

شبکه‌های صف باز

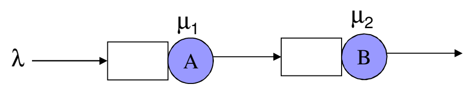
- همانگونه که اشاره شد، در شبکه‌های صف باز مشتریان از خارج وارد شبکه شده، در داخل شبکه دور زده (circulate) و سرانجام شبکه را ترک می‌کنند.
- در شکل زیر مشتریان از دو مسیر وارد دو ایستگاه A با نرخ λ_1 و B با نرخ λ_2 می‌شوند. سپس با هم ادغام شده و وارد ایستگاه C شده و آنگاه وارده ایستگاه D می‌شوند و از آنجا شبکه را ترک می‌کنند.



- در شبکه شکل فوق ممکن است که بخواهیم معیارهایی زیر را محاسبه کنیم:
  - میانگین تعداد مشتریان موجود در شبکه،
  - میانگین زمان صرف‌شده توسط مشتریان در شبکه، یا
  - میانگین زمان صرف‌شده در شبکه توسط مشتریانی که از طریق صف A یا B وارد شبکه می‌شوند.

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- شبکه‌های صف ارسال به جلو (feed forward QN) شبکه‌هایی هستند که هر ایستگاه صف موجود در شبکه، ترافیک ورودی را به ایستگاه بعدی ارسال می‌کند.
- برای مثال شبکه‌ای از دو صف پشت سرهم (two tandem queues) زیر را در نظر بگیرید:



- در این شکل، چون خروجی صف A ورودی صف B است ما نمی‌توانیم دو صف را مستقل از هم فرض کنیم.
- آیا می‌توانیم این شبکه را با CTMC مدل‌سازی کنیم؟ چگونه؟ تعریف حالت چیست؟

شبکه‌های صف ارسال به جلو

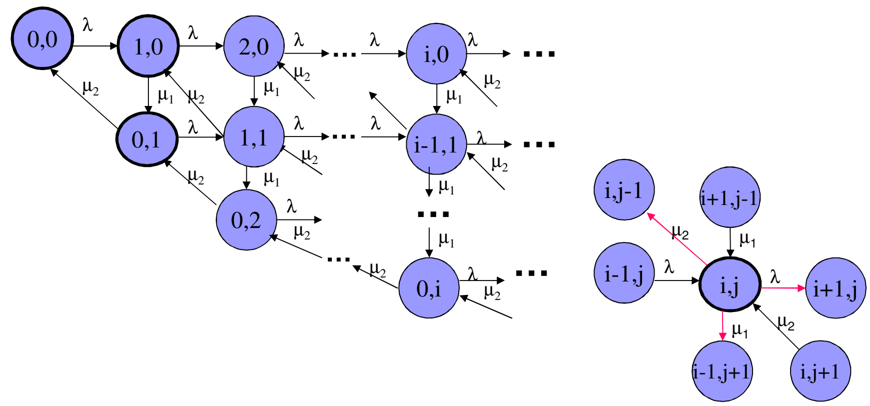
- برای مدل‌سازی شبکه‌ای از دو صف پشت سرهم می‌توانیم از CTMC استفاده کنیم. برای این منظور تعریف حالت عبارت است از یک زوج مرتب که متشکل از تعداد مشتریان در صف اول و تعداد مشتریان در صف دوم است:

$$(N_A(t), N_B(t))$$

- حالا باید نمودار حالت-گذر را رسم کنیم...

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- نمودار حالت-گذر در شکل زیر نشان داده شده است:



شبکه‌های صف ارسال به جلو

- با تعریف حالت به‌صورت $(N_1(t), N_2(t))$، احتمالات حالت پایدار چنین زنجیره مارکوفی هم به صورت زیر تعریف می‌شود:
- $\pi(i, j) = P(N_1=i, N_2=j)$, where $N_i = \text{Lim}_{t\to\infty} N_i(t)$
- آنگاه با فرض حالت پایدار، می‌توانیم معادلات جریان را بنویسیم:
  - $\lambda\pi(0, 0) = \mu_2\pi(0, 1)$ <= گره اول
  - $(\lambda+ \mu_1)\pi(i, 0) = \lambda\, \pi(i-1, 0)+\mu_2\, \pi(i, 1)$ <= گره‌های ضلع بالا
  - $(\lambda+ \mu_2)\pi(0, i) = \mu_2\, \pi(0, i+1)+\mu_1\, \pi(1, i-1)$ <= گره‌های ضلع مورب
  - $(\lambda+ \mu_1 + \mu_2)\pi(i, j) = \mu_1\, \pi(i+1, j-1) + \mu_2\, \pi(i, j+1)+ \lambda\pi(i-1, j)$ <= گره‌های میانی

$$\boxed{\sum_{i,j>=0} \pi(i, j) = 1}$$

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- دستگاه معادلات فوق قابل حل بوده و خواهیم داشت:

$$\pi(i,j) = (1-\rho_1)\rho_1^{\,i}(1-\rho_2)\rho_2^{\,j} \qquad i,j \ge 0$$

  - که در آن داریم: $\rho_i = \lambda/\mu_i$
- درستی معادله فوق را می‌توانیم با جاگذاری در دستگاه معادلات بررسی کنیم.

قضیه برک: ورودی پواسان = خروجی پواسان

- یک خاصیت سودمند که در حل شبکه‌های صف کاربرد فراوان داشته و ما را از استفاده از CTMC برای حل شبکه‌های صف بی‌نیاز می‌کند، قضیه برک (Burke's theorem) است:

قضیه برک: فرآیند خروجی از صف M/M/1 یک فرآیند پواسان با نرخ λ و مستقل از فرآیند ورودی است.

  - قضیه فوق اثبات دارد که برای دیدن آن می‌توانید مراجع درس را ببینید.
- با استفاده از قضیه فوق می‌توانیم شبکه‌های صف ارسال به جلو را با بهره‌گیری از خواص ادغام و انشعاب فرآیند پواسان، به صف‌های مجزا تجزیه نموده و سپس با ادغام نتایج حل آنها شبکه کلی را به آسانی حل کنیم.

قضیه برک: ورودی پواسان = خروجی پواسان

- با بهره‌گیری از قضیه برک احتمالات حالت پایدار یک شبکه ارسال به جلو متشکل از k ایستگاه صف که نرخ ورود به اولین صف λ است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(n_1,n_2,\ldots,n_k)=P(N_1=n_1,N_2=n_2,\ldots,N_k=n_k)=\prod_{i=1}^{k}(1-\rho_i)\rho_i^{n_i} \qquad n_i\ge 0,\ 1\le i\le k$$

- تعداد مشتریان در شبکه صف (N)، مجموع مشتریان در صف‌ها (N_i) خواهد شد:

$$N=\sum_{i=1}^{k} N_i$$

- میانگین تعداد مشتریان در شبکه صف (L)، مجموع میانگین تعداد مشتریان در صف‌ها (L_i) خواهد شد. نحوه محاسبه L_i را برای صف‌های M/M/1 هم از قبل می‌دانیم:

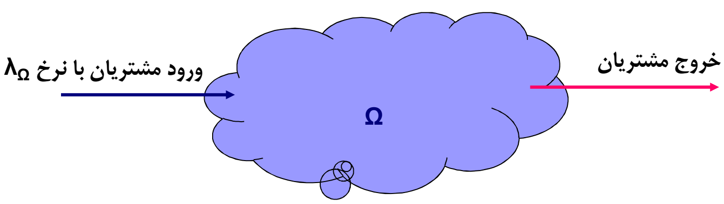
$$L=\sum_{i=1}^{k} L_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_i-\lambda_i}$$

- برای محاسبه w می‌توانیم از قانون لیتل استفاده کنیم:

$L = \lambda w \quad => \quad w = L/\lambda$

قضیه لیتل برای شبکه‌های صف

- قانون لیتل برای هر محدوده‌ای (Ω) از یک شبکه باز یا بسته برقرار است:



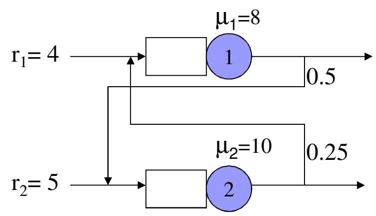
- آنگاه قانون لیتل برای محدوده فوق:

$$L_\Omega = \lambda_\Omega * w_\Omega$$

  - λ_Ω: نرخ ورود مشتریان به محدوده
  - L_Ω: میانگین تعداد مشتریان در محدوده
  - w_Ω: میانگین زمان اقامت مشتریان در محدوده (میانگین زمان سرویس توسط محدوده)

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- یک شبکه از تعدادی صف را در نظر بگیرید که از بعضی از صفها به صفهای دیگر بازخورد (feedback) داریم.
- برای مثال در شبکه زیر، صف (۱) از بیرون دارای ورودی است و ضمناً بخشی از خروجی صف (۲) هم به آن بازخورد می‌شود. همین وضعیت در مورد صف (۲) هم وجود دارد.



- در چنین وضعیتی آیا هنوز می‌توان صفها را مستقل از هم فرض نمود؟

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- حال می‌خواهیم که با حل این نوع شبکه‌های صف آشنا شویم.
- برای این منظور شبکه‌ای از k صف را در نظر می‌گیریم که هر کدام از صفها دارای زمان سرویس نمایی با نرخ μ_i هستند.
- ورودیها از بیرون به صفها نیز طبق فرآیند پواسان با نرخ r_i است.
- از بعضی از صفها به صفهای دیگر بازخورد (feedback) داریم. در این صورت احتمال انشعاب (branching probability) یا احتمال مسیریابی (routing probability) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنید:
  - $p_{i,j}$: احتمال اینکه یک مشتری که صف i را ترک می‌کند وارد صف j بشود.
- آنگاه احتمال اینکه یک مشتری که صف i را ترک می‌کند از شبکه صف خارج شود:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{i,j} \le 1 \Rightarrow P(customer\ leaves\ system\ after\ i) = 1 - \sum_{j=1}^{k} p_{i,j}$$

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- در این صورت نرخ ورود به صف j، که به λ_j نشان می‌دهیم، از معادله زیر بدست می‌آید، که به آن معادله ترافیک (traffic equation) گفته می‌شود:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_{i,j} \qquad 1 \le j \le k$$

نرخ ورود از خارج به گره

مجموع ترافیک‌های ورودی از سایر صفها به این صف

- معادلات ترافیک را می‌توانیم برای همه گره‌های صف نوشته و با حل دستگاه معادلات حاصله، نرخ ورود به هر صف (λ_j) را بدست آوریم.
- احتمال حالت پایدار تعداد مشتریان در شبکه صف برابر است با:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k) \qquad n_i \ge 0$$

  - این احتمال چگونه قابل محاسبه است؟ به‌دلیل وابستگی جریانهای ورودی گره‌ها به جریانهای خروجی از صف‌های دیگر، نمی‌توانیم به‌راحتی فرض کنیم که هر کدام از آنها یک صف مجزای M/M/1 هستند.

قضیه جکسون برای شبکه‌های باز

- ما می توانیم در اینجا هم از CTMC استفاده کنیم.
- اما، قضیه جسکون (Jackson) برای شبکه‌های باز می‌گوید که در حالت کلی و برای شبکه‌های صف بزرگ می‌توانیم فرض کنیم که هرکدام از صفها هنوز یک صف M/M/1 هستند و به حالت پایدار رسیده‌اند و ما می‌توانیم آنها را به‌طور مجزا درنظر گرفته و حل کنیم.
- فرضیات قضیه جکسون:
  1) شبکه صف باز متشکل از تعداد زیادی گره است.
  2) به تعداد زیادی از گره‌ها ورودی از خارج داریم.
  3) هر کدام از صفها به حالت پایدار رسیده‌اند.
- در این صورت نتایجی که بدست خواهیم آورد با تقریب بسیار خوبی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی برابر خواهند بود.
- هر قدر که شبکه بزرگتر باشد و میزان ورود از خارج به صفها بیشتر باشد، تقریب فوق به جواب دقیق نزدیکتر خواهد بود.

قضیه جکسون برای شبکه‌های باز

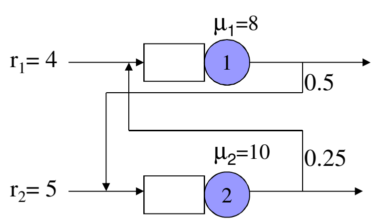
- قضیه جکسون (Jackson's theorem): هرکدام از صفهای شبکه باز، همانند یک صف مجزا رفتار می‌کنند و داریم:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i} \qquad n_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq k$$

- با نوشتن معادلات جریان، می‌توان با جایگذاری نتیجه فوق درستی آنرا نشان داد.
- بحثهای بیشتر در مورد این قضیه را می‌توانید در مراجع درس مطالعه کنید.

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- حالا مثالی از یک شبکه باز دارای بازخورد ارائه نموده و با استفاده از نتایج گفته شده آنرا حل می‌کنیم.
- شبکه زیر را در نظر بگیرید:



- معادلات ترافیک برای آن عبارتند از:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= r_1 + \lambda_2 p_{2,1} \\ \lambda_2 &= r_2 + \lambda_1 p_{1,2}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}\lambda_1 &= 4 + 0.25\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 5 + 0.5\lambda_1\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}\lambda_1 &= 6 \\ \lambda_2 &= 8\end{aligned}$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- مشاهده می شود که داریم : $\lambda_1/\mu_1 = 6/8 < 1$ و $\lambda_2/\mu_2 = 8/10 < 1$
  - یعنی هر دو صف به حالت پایدار می رسند.
- آنگاه با استفاده از نتایج قضیه جکسون خواهیم داشت:

$$\pi(n_1, n_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_1} \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n_2}$$

$$L = \sum_{i=1}^{2} L_i = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} = 3 + 4 = 7$$

$$w = L / \lambda = 7/9 = 0.78$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- همچنین می‌توانیم زمان صرف شده برای مشتریانی که از طریق گره (۱) یا (۲) وارد می‌شوند را هم بدست آوریم:

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= w_1 + 0.5 w^{(2)} \\ w^{(2)} &= w_2 + 0.25 w^{(1)} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} w^{(1)} &= 1/(\mu_1 - \lambda_1) + 0.5 w^{(2)} \\ w^{(2)} &= 1/(\mu_2 - \lambda_2) + 0.25 w^{(1)} \end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= 1/(8-6) + 0.5 w^{(2)} \\ w^{(2)} &= 1/(10-8) + 0.25 w^{(1)} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} w^{(1)} &= 0.5 + 0.5 w^{(2)} \\ w^{(2)} &= 0.5 + 0.25 w^{(1)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} w^{(1)} &= 0.86 \\ w^{(2)} &= 0.71 \end{aligned}$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- نکته مهمی که در حل با استفاده از روش فوق باید به آن دقت کنیم این است که با حل معادلات ترافیک و بدست آوردن λ_i، باید شرط پایداری صفهای مجزا برقرار باشد:

$$\lambda_i / \mu_i < 1$$

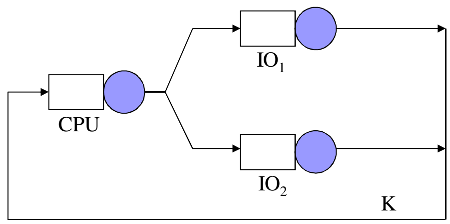
- در غیر این صورت نتایج گفته شده قابل استفاده نخواهد بود.

بسطهای قضیه جکسون

- نتایج قضیه جکسون برای شرایط زیر هم برقرار است:
  - در صورتی که صفهای مجزا M/M/m باشند.
  - در صورتی که صفهای مجزا M/M/m/k باشند.
  - سرویس‌دهنده‌های تک صفها دارای انتظام اشتراک پردازنده (PS) و دارای توزیع زمان سرویس دلخواه باشند.
- همچنین، بسطهایی (extensions) نظیر بسط BCMP برای قضیه جکسون وجود دارد که شرایط کاربرد آنها آسانتر از قضیه جکسون است.

شبکه‌های صف بسته

- همانگونه که قبلاً گفتیم، در شبکه‌های بسته، تعداد مشتریان محدود و متناهی است و مشتریان موجود هرگز شبکه را ترک نمی‌کنند.
- برای مثال، شبکه بسته زیر یک سیستم کامپیوتری را مدل‌سازی می‌کند که K کار در آن وجود دارد:



- در ادامه می‌خواهیم که با روش حل اینگونه شبکه‌ها آشنا شویم.

شبکه‌های صف بسته

- فرض می‌کنیم جمعیت متناهی از N مشتری مابین M صف در یک شبکه بسته دور می‌زنند:
  - هرکدام از صفها، تک سرویس‌دهنده بوده و زمان سرویس آنها نمایی با نرخ μ_i است.
  - احتمالات مسیریابی بین گره‌ها $p_{i,j}$ $(i, j \leq M)$ است.
  - نسبت ملاقات (visit ratio)، که با v_i نشان داده می‌شود، مشخص می‌کند که چه بخشی از مشتریان که وارد یک گره خاص (مثلاً گره اول) می‌شوند وارد گره iام هم می‌شوند.
- آنگاه می‌توانیم معادلات ملاقات را برای گره‌های مختلف بنویسیم:

$$v_i = \sum_{j=1}^{M} v_j p_{j,i} \qquad i = 2,\ldots,M$$

- به دلیل وابستگی دستگاه معادلات حاصله، با فرض یک مقدار ثابت برای یکی از v_iها (مثلاً: $v_1=1$) و با حل دستگاه معادلات حاصله می‌توانیم سایر v_iها را بدست آوریم.

شبکه‌های صف بسته

- آنگاه می‌توانیم توان عملیاتی گره‌ها را بدست آوریم:

$$\frac{X_i}{X_j} = \frac{v_i}{v_j} \qquad 1 \le i, j \le M$$

- در این صورت، نسبت ملاقات مشخص کننده توان عملیاتی نسبی گره‌ها خواهد بود.

حل حالت پایدار شبکه‌های صف بسته با CTMC

- برای حل یک مدل شبکه صف بسته می‌توانیم از یک CTMC استفاده کنیم حالت با بردار تعداد مشتریان در گره‌های مختلف شبکه تعریف می‌شود:

$$(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_M(t))$$

- آنگاه در حالت پایدار:

$$(N_1, N_2, \ldots, N_M) = \mathrm{Lim}_{t\to\infty}(N_1(t), N_2(t), \ldots, N_M(t))$$

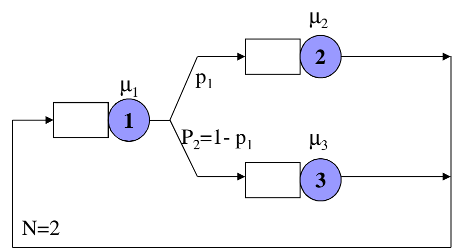
- احتمالات حالت پایدار مشتریان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_M) = P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_M = n_M) \qquad n_i \ge 0,$$

- آنگاه می‌توانیم معادلات جریان را نوشته و حل کنیم.

مثالی از شبکه‌های صف بسته

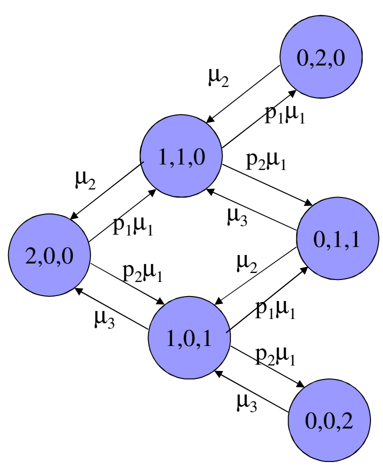
- مدل شبکه بسته زیر را در نظر بگیرید:



- برای بدست آوردن CTMC برای این شبکه، حالت را تعریف می‌کنیم که یک سه‌تایی خواهد بود: (N_1, N_2, N_3)

مثالی از شبکه‌های صف بسته

- آنگاه CTMC زیر را بدست می‌آوریم:



مثالی از شبکه‌های صف بسته

- حالا می‌توانیم دستگاه معادلات جریان را بنویسیم:
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(2, 0, 0) = \mu_2\pi(1, 1, 0)+\mu_3\pi(1, 0, 1)$
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(1, 1, 0) = \mu_2\pi(0, 2, 0)+\mu_3\pi(0, 1, 1)$
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(1, 0, 1) = \mu_2\pi(0, 1, 1)+\mu_3\pi(0, 0, 2)$
  - $p_1\mu_1\pi(1, 1, 0) = \mu_2\pi(0, 2, 0)$
  - $(\mu_2+ \mu_3)\,\pi(0, 1, 1) = p_2\mu_1\pi(1, 1, 0)+ p_2\mu_1\pi(1, 0, 1)$
  - $p_2\mu_1\pi(0, 0, 2) = \mu_3\pi(0, 0, 2)$
  - $\pi(2, 0, 0)+\pi(1, 1, 0)+\pi(1, 0, 1)+\pi(0, 2, 0)+\pi(0, 1, 1)+\pi(0, 0, 2)=1$
- با حل این دستگاه معادلات (هفت معادله و شش مجهول)، می‌توانیم احتمالات حالت پایدار را بدست آوریم.

حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- علاوه بر روش فوق راه حل دیگری که وجود دارد، استفاده از قضیه گوردن و نیول (Gordon and Newell) است.
- قضیه گوردن و نیول:

$$\pi(\vec{n}) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{v_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \qquad \vec{n} \geq \vec{0}, \sum_{i=1}^{M} n_i = N$$

- که در آن داریم:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$$

- همچنین، G(N) یک مقدار ثابت است که باید طوری انتخاب شود که داشته باشیم:

$$\sum \pi(\vec{n}) = 1$$

مثالی از حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- حالا همان مثال قبلی را با استفاده از این قضیه حل می‌کنیم.
- برای این منظور فرض می‌کنیم که $\mu_1=2$، $\mu_2=3$ و $\mu_3=2$ است.
- همچنین فرض می‌کنیم که: $p_1=3/4$ و $p_2=1/4$ است.
- آنگاه با انتخاب $V_1= 1$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned} v_2 &= v_1 p_1 \\ v_3 &= v_1 p_2 \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} V2&=3/4 \\ V3&=1/4 \end{aligned}}$$

- حالا می‌توانیم نتایج قضیه گوردن و نیول را بنویسیم:

$$\pi(\vec{n}) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^{n_1}(1/4)^{n_2}(1/8)^{n_3}$$

مثالی از حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- سپس با استفاده از $\sum \pi(\vec{n}) = 1$ می‌توانیم G(N) را بدست آوریم:

$$\pi(2,0,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^2(1/4)^0(1/8)^0$$

$$\pi(1,1,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^1(1/4)^1(1/8)^0$$

$$\pi(1,0,1) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^1(1/4)^0(1/8)^1$$

$$\pi(0,2,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^2(1/8)^0$$

$$\pi(0,1,1) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^1(1/8)1$$

$$\pi(0,0,2) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^0(1/8)^2$$

$$\pi(2,0,0)+\pi(1,1,0)+\pi(1,0,1)+\pi(0,2,0)+\pi(0,1,1)+\pi(0,0,2)=1$$

$\rightarrow$ G(N) = ?

محاسبه معیارهای کارایی

- حال با داشتن احتمالات حالت پایدار، معیارهای کارایی گره‌ها قابل محاسبه است:
  - بهره‌وری هر گره:
    - $\rho_1 = \pi(2,0,0) + \pi(1,1,0) + \pi(1,0,1)$
    - $\rho_2 = \pi(0,2,0) + \pi(1,1,0) + \pi(0,1,1)$
    - $\rho_3 = \pi(0,0,2) + \pi(1,0,1) + \pi(0,1,1)$
  - میانگین تعداد مشتریان در هر گره:
    - $L_1 = 2\pi(2,0,0) + \pi(1,1,0) + \pi(1,0,1)$
    - $L_2 = 2\pi(0,2,0) + \pi(1,1,0) + \pi(0,1,1)$
    - $L_3 = 2\pi(0,0,2) + \pi(1,0,1) + \pi(0,1,1)$

نکات آخر

- همانگونه که در فصل قوانین عملیاتی اشاره کردیم، به $D_i=v_i/\mu_i$، تقاضای سرویس (service demand) گفته می‌شود.
- قضیه گوردن و نیول هم دارای بسطهایی برای سایر انواع صفها است.

ابزار حل مدلهای صف

- برای حل و شبیه‌سازی مدلهای صف مجزا و شبکه‌های صف می‌توانید از ابزار قدرتمند WinPEPSY استفاده کنید.
- نگارش رایگان این نرم‌افزار موجود است. اما نگارش جدید آن تجاری بوده و باید خریداری شود.