دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده مهندسی کامپیوتر

عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

Performance Evaluation of Computer Systems (PECS)

جلسه ۸: فرآیندهای تصادفی

مدرس:

محمد عبداللهی ازگمی

(Mohammad Abdollahi Azgomi)

azgomi@iust.ac.ir

فهرست مطالب

- مقدمه
- تعاریف اعداد، متغیرها و فرآیندهای تصادفی
- بررسی دقیق‌تر توزیع نمایی
- فرآیند شمارشی (counting process)
- فرآیند تصادفی (stochastic process)
- فرآیند پواسان (Poisson process)
- فرآیند مارکوف (Markov process)
- فرآیند تولد و مرگ (birth-death process)
- جمع‌بندی

مقدمه

- در این جلسه ابتدا تعاریف اعداد، متغیرها و فرآیندهای تصادفی را ارائه می‌کنیم.
- آنگاه، به دلیل کاربردهای مهم توزیع نمایی در مدل‌سازی و ارزیابی کارایی، به بررسی دقیق‌تر این توزیع و تعریف مفهوم بی‌حافظه بودن (memorylessness) می‌پردازیم.
- سپس، فرآیندهای شمارشی (counting) و پواسان (Poisson) را معرفی نموده و خاصیت‌های اصلی فرآیند پواسان را ذکر می‌کنیم.
- در خاتمه هم اشاره‌ای به فرآیند مارکوف (Markov) خواهیم نمود.

تعریف اعداد تصادفی

- اعداد تصادفی (random numbers) اعداد حقیقی مستقلی هستند که به‌صورت یکنواخت در بازه $[0, 1)$ توزیع شده‌اند:
  - این اعداد حاصل **مولدهای اعداد تصادفی** (RNG: R. N. Generator) هستند. چنین مولدهایی باید مبتنی بر مکانیسم‌هایی باشند که **اعداد تصادفی خالص** (pure R. N.) را تولید کنند.
  - در عمل هم در شبیه‌سازی و هم در رمزنگاری، اعداد تصادفی خالص، کاربرد زیادی ندارند، بلکه **اعداد شبه‌تصادفی** (PRN: Pseudorandom N.) اهمیت دارند که حاصل روشها و الگوریتمهایی هستند که به آنها **مولدهای اعداد شبه‌تصادفی** (PRNG) گفته می‌شود.

مولد اعداد شبه تصادفی تصادفی

- **انواع زیادی از مولدهای اعداد شبه‌تصادفی وجود دارد.**
- یک روش ساده، روش **همنهشتی خطی** (LCM: Linear Congruence Method) است:
  - $X_{i+1} = (aX_i+b) \bmod c$ (ex. $a=3, b=5, c=7, x_0=2$)
- تابع فوق **اعداد صحیح تصادفی** (random integer) تولید می‌کند. برای بدست آوردن اعداد تصادفی کافی است که اعداد صحیح حاصله بر c تقسیم شوند.
- **معیارهای برتری مولد:** هر قدر دوره تناوب روش بزرگتر باشد و دو خصوصیت استقلال و یکنواختی را با اطمینان بیشتری داشته باشد، روش بهتری محسوب خواد شد.
- توابع موجود در زبانهای C++ و جاوا از این نوع هستند.
- در کاربردهای ساده، اعداد تصادفی در قالب جدولهایی در کتابها در دسترس هستند.

تعریف متغیر تصادفی

- **متغیر تصادفی (random variable):** یک تابع ریاضی است که برآمدهای (outcome) یک آزمایش تصادفی را به اعداد نگاشت می‌کند.
  - برای مثال یک متغیر تصادفی می‌تواند برای توصیف فرآیند پرتاب یک تاس و برآمدهای احتمالی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ استفاده شود.
- **تعریف ریاضی متغیر تصادفی:** تابعی به‌صورت زیر است:

$$X : \Omega \to R_X$$

که در آن X یک متغیر تصادفی، Ω یک فضای احتمالی (probability space) یا فضای نمونه (sample space) و R_X یک فضای برد (range space) است.

  - اگر فضای احتمالی گسسته باشد، متغیر تصادفی گسسته خواهد بود.
  - اگر فضای احتمالی پیوسته باشد، متغیر تصادفی پیوسته خواهد بود.

تعریف متغیر تصادفی (ادامه)

- توزیع احتمالی (probability distribution):
  - اگر متغیر تصادفی گسسته باشد:
    - $p(x_i)$ = probability X is x_i = $P(X = x_i)$ is called ***pmf*** (تابع جرم احتمالی)
    - $[x_i, p(x_i)]$ is called *discrete probability distribution*
  - اگر متغیر تصادفی پیوسته باشد:
    - $p(x) = \quad P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$ is called ***pdf*** (تابع چگالی احتمالی)

تعریف فرآیند تصادفی

- **فرآیند تصادفی (stochastic or random process):** اگر به هرکدام از مقادیر متغیر تصادفی X یک اندیس زمان منتسب کنیم، X یک فرآیند تصادفی خواهد بود، که به‌صورت $X=\{X(t), t\in T\}$ یا $X=\{X_t, t\in T\}$ نشان داده می‌شود.
  - اگر X یک فرآیند تصادفی باشد، X(t) یک متغیر تصادفی است.
  - در نتیجه فرآیند تصادفی X عناصر فضای دو بعدی $T \times \Omega$ را به عناصر R_X نگاشت می‌کند: $X: \Omega \times \boldsymbol{T} \rightarrow R_X$
  - **به t پارامتر زمان (time parameter) گفته می‌شود که می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد:**
    - پارامتر گسسته (discrete-parameter): $T = N_0 = \{0, 1, \ldots\}$
    - پارامتر پیوسته (continuous-parameter): $T = (0, \infty)$ *(مجموعه اعداد حقیقی مثبت)*
  - به مجموعه مقادیر X(t)، **فضای حالت** (state space) فرایند تصادفی گفته می‌شود که با S نشان داده می‌شود و می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد:

$$S = \{y \mid y=X(t), \text{ for some } t \in T\}.$$

  - در حالتی که فضای حالت گسسته باشد، به فرآیند، **زنجیره** (chain) گفته می‌شود.

دسته‌بندی فرآیندهای تصادفی: (۱) براساس ویژگیهای زمان (T)

- **اگر تعداد نقاط زمانی یک فرآیند تصادفی (یعنی |T|) متناهی یا قابل شمارش (شمارا) (countable) باشد، آنگاه به آن فرآیند تصادفی گسسته-زمان (discrete-time stochastic process) گفته می‌شود.**
  - **مثال:** اگر X(t) تعداد خطاها اتفاق افتاده در یک سیستم در روزهای مختلف سال باشد، آنگاه X={X(t), t∈{1..365}} یک فرآیند تصادفی گسسته-زمان خواهد بود.
- **اما اگر تعداد نقاط زمانی یک فرآیند تصادفی (یعنی |T|) غیر قابل شمارش (uncountable) باشد، آنگاه به آن فرآیند تصادفی پیوسته-زمان (continuous-time stochastic process) گفته می‌شود.**
  - **مثال:** اگر X(t) تعداد خطاها اتفاق افتاده در یک سیستم تا زمان t باشد، آنگاه، X={X(t), t∈R} یک فرآیند تصادفی پیوسته-زمان خواهد بود.

دسته‌بندی فرآیندهای تصادفی: (۲) براساس نوع فضای حالت

- **فرض کنید که X یک فرآیند تصادفی باشد. فضای حالت (state space) فرآیند تصادفی که با S نشان داده می‌شود، مجموعه همه مقادیر ممکنی است که X می‌تواند داشته باشد. یعنی:**

$$S = \{y \mid y=X(t), \text{ for some } t \in T\}$$

- **اگر فضای حالت یک فرآیند تصادفی X متناهی و قابل شمارش باشد (یعنی {…, 3, 2, 1}=S) آنگاه گفته می‌شود که X یک فرآیند تصادفی گسسته-حالت (discrete-state S.P.) است.**
  - **مثال:** اگر X یک فرآیند تصادفی باشد که تعداد بسته‌های خراب دریافت شده را نمایش می‌دهد، آنگاه X یک فرآیند تصادفی گسسته-حالت خواهد بود.
- **اگر فضای حالت یک فرآیند تصادفی X غیر قابل شمارش باشد (مثلاً $S=R$) آنگاه گفته می‌شود که X یک فرآیند تصادفی پیوسته-حالت (continuous-state S.P.) است.**
  - **مثال:** اگر X یک فرآیند تصادفی باشد که ولتاژ خط تلفن را نشان می‌دهد، آنگاه X یک فرآیند تصادفی پیوسته-حالت خواهد بود.

بررسی دقیق‌تر توزیع نمایی

- **تعریف: یک متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ که λ>0 است، اگر تابع چگالی احتمالی آن به‌صورت زیر باشد:**

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

  - **یا اگر CDF آن به‌صورت زیر باشد:**

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}, x\geq 0$$

  - **و امیدریاضی آن به‌صورت زیر خواهد بود:**

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

  - **و واریانس آن:**

$Var(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$

$$\boxed{E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}}$$

خاصیت بی‌حافظه بودن

- **یک متغیر تصادفی X را بی‌حافظه (memoryless) گویند اگر برای تمام مقادیر s ≥0 و t≥0 داشته باشیم:**

P{X>t+s|X>s} = P{X>t}

- **مثال:**
  - اگر ما X را متغیر تصادفی متناظر با طول عمر یک دستگاه تصور کنیم، آنوقت این رابطه می‌گوید که احتمال اینکه دستگاه حداقل s+t ساعت کار کند، وقتی بدانیم برای s ساعت کار کرده، درست برابر است با همان احتمال اولیه‌ای که دستگاه از ابتدا حداقل t ساعت کار کند.
  - به عبارت دیگر اگر دستگاه در زمان s هنوز قابل استفاده باشد، آنوقت توزیع زمان باقیمانده عمر آن، همان توزیع عمر اولیه آن است.
  - یعنی، دستگاه به‌خاطر نمی‌آورد که قبلاً برای مدتی به‌طول s مورد استفاده قرار گرفته است.

خاصیت بی‌حافظه بودن (ادامه)

- رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$P[X>t+s|X>s]=\frac{P[\underbrace{X>t+s,X>s}_{X>t+s}]}{P[X>s]}$$

$$=\frac{P[X>t+s]}{P[X>s]}$$

$$=\frac{1-F_X(t+s)}{1-F_X(s)}$$

- با جاگذاری CDF توزیع نمایی می‌توان بی‌حافظه بودن آنرا تحقیق نمود:

$$=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}}$$

$$=e^{-\lambda t}$$

$$=P[X>t]$$

بررسی دقیق‌تر توزیع نمایی (ادامه)

- **مثال: فرض کنید مدت زمانی که یک مشتری در بانک صرف می‌کند، دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه باشد:**
  1. احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۱۵ دقیقه وقت در بانک صرف کند چقدر است؟
  2. احتمال اینکه یک مشتری بیش از ۱۵ دقیقه در بانک صرف کند، وقتی بدانیم که بعد از ۱۰ دقیقه هنوز در بانک است چقدر است؟
- **حل:**

1. اگر X نماینده مدت زمانی باشد که مشتری در بانک صرف می‌کند، خواهیم داشت:

$\lambda=1/10 \quad \Rightarrow P\{X>15\} = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} = e^{-1.5} \approx 0.220$

2. احتمال اینکه "یک مشتری که ۱۰ دقیقه در بانک بوده ، حداقل ۵ دقیقه دیگر در بانک بماند" را می‌خواهیم بدست بیاوریم.

چون توزیع نمایی "به‌خاطر نمی‌آورد" که مشتری ۱۰ دقیقه در بانک بوده، پس این احتمال برابر است با احتمال اینکه یک مشتری تازه وارد حداقل ۱۵ دقیقه در بانک بماند:

$P\{X>15|X>10\} = P\{X>5\} = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0.664$

توزیع جمع دو یا چند متغیر تصادفی نمایی

- یک خاصیت مهم دیگر توزیع نمایی:
  - فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان با میانگین $1/\lambda$ هستند. آنگاه می‌توان ثابت نمود که تابع توزیع X_1+X_2 برابر است با:

$$F_{X_1+X_2}(t) = P\{X_1+X_2 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$$

  - با مشتق‌گیری از دو طرف خواهیم داشت:

$$f_{X_1+X_2}(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}, t \ge 0$$

  - یعنی X_1+X_2 دارای توزیع گاما (یا ارلنگ) با پارامترهای 2 و λ است.
- **به‌طور کلی:** اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با میانگین $1/\lambda$ باشند، آنگاه $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ خواهد بود، که با روش استقراء قابل اثبات است:

$$f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}/(n-1)!$$

رقابت نمایی

- نکته مهم دیگر در مورد توزیع نمایی: "احتمال کوچکتر بودن یک متغیر تصادفی نمایی از متغیر دیگر" یا رقابت نمایی (exponential competetion):
  - یعنی اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با میانگین‌های $1/\lambda_1$ و $1/\lambda_2$باشند، آنگاه:

$$P\{X_1 < X_2\} = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$$

* این نکته هم قابل اثبات است.

فرآیند شمارشی

- رخدادهای تصادفی (random events) نظیر موارد زیر را در نظر بگیرید:
  - ورود سفارشها به یک کارگاه،
  - ورود هواپیماها به یک باند فرودگاه،
  - ورود کشتی‌ها به یک بندرگاه،
  - ورود مکالمات به یک سوئیچ مخابراتی،
  - خرابی‌های دستگاهها در یک خط تولید،
  - و ...
- رخدادهای فوق را می‌توان با یک تابع شمارشی (counting function) نشان داد:
  - اگر $t\geq0$ باشد آنگاه $N(t)$ نشان دهنده تعداد رخدادهایی است که در مدت $[0, t]$ رخ می‌دهند.
  - اگر در هر فاصله زمانی (t)، مقدار $N(t)$ از یک متغیر تصادفی بدست آید، آنگاه به $N=\{N(t), t\geq0\}$ یک فرآیند شمارشی (counting process) می‌گوییم.

فرآیند پواسان

- تعریف: به فرآیند شمارشی $P=\{N(t), t\geq0\}$ یک فرآیند پواسان (Poisson process) با نرخ λ $(\lambda>0)$ گفته می‌شود، اگر:
  1. $N(0) = 0$ (شمارش رخدادها از زمان صفر شروع شود یا در بازه به طول صفر رخدادی نداشته باشیم).
  2. فرآیند $\{N(t), t\geq0\}$ دارای افزایشهای پایدار (ثابت) (stationary increments) باشد.
  3. فرآیند $\{N(t), t\geq0\}$ دارای افزایشهای مستقل (independent increments) باشد.
  4. ورودها (arrivals) (وقوع رخدادها) یکی در هر زمان اتفاق بیفتند (ورود دسته‌ای نداشته باشیم).
- توزیع تعداد رخدادها در فرآیند پواسان:
  - تعداد رخدادها در هر فاصله زمانی به طول t دارای توزیع پواسان با میانگین λt است. یعنی برای تمام مقادیر $s,t\geq0$ داریم:

$$P\{N(t) =n\} = P\{N(t)-N(0)=n\} = P\{N(t+s)-N(s)=n\} = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!,\ n=0, 1, 2, ...$$

  - $E[N(t)] = V[N(t)] = \alpha = \lambda t$، که نشان می‌دهد که چرا به λ نرخ فرآیند می‌گویند.

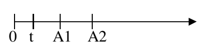
فرآیند پواسان (ادامه)

- برای اینکه تعیین کنیم که یک فرایند شمارشی واقعاً یک فرایند پواسان است، باید نشان دهیم که شرایط (۱) الی (۴) صادق هستند.
- شرط (۱) به‌طور ساده می‌گوید که شمارش رخدادها در زمان $t=0$ شروع می‌شود.
- شرط (۲) را معمولاً می‌توان به‌طور مستقیم با اطلاعاتی که در مورد فرایند داریم تحقیق نمود (تحلیل داده‌های پدیده مرتبط با فرآیند).
- اما روش ساده‌ای برای تحقیق شرط (۳) وجود ندارد (شاید با انجام آزمونهای استقلال روی داده‌ها امکان‌پذیر باشد).

توزیع زمان ورود فرآیند پواسان

- اگر فاصله زمانی $[0, t]$ را در نظر بگیریم، احتمال اینکه در این فاصله رخدادی اتفاق نیافتد:

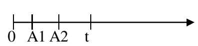
$$P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0! = e^{-\lambda t}$$



  - A_1 زمان اولین رخداد، A_2 زمان دومین رخداد، ...
- فرمول فوق در واقع یعنی:

$$P\{A_1>t\} = P\{N(t)=0\}$$

- حال می‌توانیم احتمال رخداد A_1 را قبل از t بدست آوریم:
- در این صورت حداقل A_1 قبل از t رخ داده است. پس:



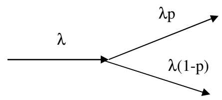
$$P\{A_1 \le t\} = 1 - P\{A_1 > t\} = 1\text{-}P\{N(t)=0\} = 1\text{-} e^{-\lambda t}$$

که CDF توزیع نمایی است و نشان می‌دهد که احتمال رخداد A_1، طبق توزیع نمایی با نرخ λ است.

- همین طور می‌توان نشان داد که توزیع زمان بین رخدادهای بعدی، یعنی: A_2-A_1، A_3-A_2، ... A_n-A_{n-1}، نیز نمایی با نرخ λ است.
- از اینرو نتیجه‌گیری می‌کنیم که توزیع زمانهای بین ورود در فرآیند پواسان دارای توزیع نمایی است.

خواص فرآیند پواسان

- خاصیت ۱: انشعاب تصادفی (random splitting):
  - فرآیند پواسان $\{N(t), t\geq 0\}$ را با نرخ λ در نظر بگیرید.
  - همچنین، فرض کنید که این فرآیند شامل دو نوع رخداد است: نوع ۱ و نوع ۲.
  - این دو نوع رخداد مستقل از هم اتفاق می‌افتند و احتمال اولی p و احتمال دومی $1-p$ است.
  - حال فرض کنید که $N_1(t)$ و $N_2(t)$ به‌ترتیب معرف تعداد رخدادهای نوع ۱ و ۲ باشند که در $[0, t]$ اتفاق می‌افتند.
  - در این‌صورت خواهیم داشت: $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$



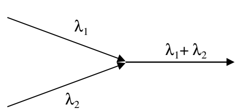
  - در این صورت می‌توان نشان داد که $N_1(t)$ و $N_2(t)$ هم فرآیندهای پواسان با نرخ‌های λp و $\lambda(1-p)$ هستند.
  - انشعاب به بیش از دو نیز امکان‌پذیر است. ولی در هر حال باید $\sum p_i = 1$.

خواص فرآیند پواسان (ادامه)

- خاصیت ۲: فرآیند ادغامی (pooled process):
  - حالت عکس انشعاب هم وجود دارد. یعنی دو فرآیند پواسان مستقل با هم ادغام شوند.
  - یعنی اگر دو فرآیند پواسان $N_1(t)$ و $N_2(t)$ با نرخ‌های λ_1 و λ_2 با هم ترکیب شوند، آنگاه حاصل:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

نیز یک فرآیند پواسان با نرخ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ خواهد بود.



  - حالت بیش از دو نیز امکان‌پذیر است. یعنی بیش از دو فرآیند پواسان مستقل با هم ادغام شوند. در این صورت باید $\lambda = \sum \lambda_i$.

فرآیندهای مارکوف

- یک نوع خاص از فرآیندهای تصادفی فرآیند مارکوف (Markov processes) است.
- یک فرآیند مارکوف به‌طور غیرصوری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
  - با داشتن حالت (state) یا مقدار (value) یک فرآیند مارکوف X در زمان t (یعنی X(t))، رفتار آینده X به‌طور کامل بر حسب X(t) قابل توصیف خواهد بود.
- فرآیند مارکوف دارای این خاصیت سودمند است که رفتار آینده آن مستقل از مقادیر گذشته آن است. *یعنی بی‌حافظه است.*
- فرآیندهای مارکوف نظریه مبنایی حل سیستم‌های صف هستند و به‌طور گسترده برای مدل‌سازی کارایی سیستم‌های کامپیوتری و ارتباطی استفاده می‌شوند.
- این فرآیندها را بعداً و به‌طور مفصل مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فرآیندهای تولد و مرگ

- فرآیندهای تولد و مرگ (birth-death processes) حالتهای خاصی از فرآیندهای مارکوف هستند که در حل سیستم‌های صف استفاده می‌شوند.
- این فرآیندها نیز در صورت لزوم بعداً معرفی خواهند شد.

جمع‌بندی

- در این جلسه ابتدا تعاریف اعداد، متغیرها و فرآیندهای تصادفی را ارائه نمودیم.
- آنگاه، به بررسی دقیق‌تر توزیع نمایی و تعریف مفهوم بی‌حافظه بودن پرداختیم.
- سپس، فرآیندهای شمارشی و پواسان را معرفی نموده و خاصیت‌های اصلی فرآیند پواسان را ذکر کردیم.
- در خاتمه هم اشاره‌ای به فرآیند مارکوف و فرآیند تولد و مرگ نمودیم.