دانشکده مهندسی کامپیوتر

عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

Performance Evaluation of Computer Systems (PECS)

جلسه ۱۴: حل مدلهای صف مجزا

مدرس:

محمد عبداللهی ازگمی

(Mohammad Abdollahi Azgomi)

azgomi@iust.ac.ir

فهرست مطالب

- مقدمه
- حل حالت پایدار صف‌های دارای ظرفیت نامحدود و جمعیت نامتناهی
  - صف M/M/1
  - صف M/M/m
  - صف M/M/∞
- حل حالت پایدار صف‌های دارای ظرفیت محدود و جمعیت نامتناهی
  - صف M/M/1/B
  - صف M/M/m/B
  - صف M/M/m/m

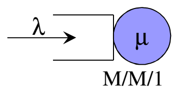
مقدمه

- در این جلسه حل حالت پایدار صفهای مارکوفی دارای ظرفیت محدود یا نامحدود و جمعیت نامتناهی را بررسی می‌کنیم.
- روش مورد استفاده، بدست آوردن زنجیره مارکوف پیوسته-زمان مرتبط به هر مدل و حل حالت پایدار آن از طریق معادلات جریان است.
- معروف‌ترین و پرکاربردترین مدلهای صف را حل می‌کنیم که روش مورد استفاده در مورد سایر مدلها نیز قابل استفاده است.

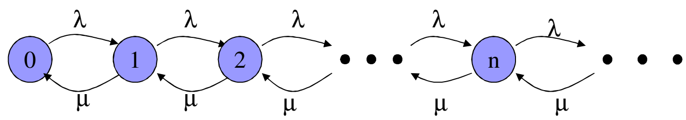
حل حالت پایدار صف‌های دارای ظرفیت نامحدود و جمعیت نامتناهی

- ابتدا صفهای مارکوفی دارای ظرفیت نامحدود و جمعیت نامتناهی زیر را در حالت پایدار با استفاده از زنجیره‌های مارکوف پیوسته-زمان حل می‌کنیم:
  - صف M/M/1
  - صف M/M/m
  - صف M/M/∞

حل حالت پایدار صف M/M/1



- صف M/M/1 دارای مشخصات زیر است:
  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط سرویس‌دهنده طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - یک سرویس‌دهنده وجود دارد.
  - همچنین، ظرفیت سیستم نامحدود، جمعیت نامتناهی و انتظام سرویس FCFS است.
- با استفاده از یک CTMC می‌توان چنین سیستم صفی را مدل‌سازی نمود.
  - در این صورت حالت زنجیره مارکوف، تعداد مشتریان در سیستم صف (n) است.
  - نمودار حالت-گذر این CTMC در شکل زیر ارائه شده است:

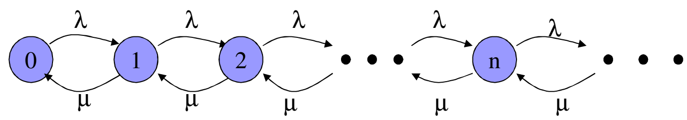


حل حالت پایدار صف M/M/1

- صف M/M/1 در صورتی به حالت پایدار می‌رسد که $\rho=\lambda/\mu<1$ باشد.
  - به بهره‌وری صف یا ρ، اصطلاحاً **شدت ترافیک** (traffic intensity) نیز گفته می‌شود.
  - در صورتی که $\rho\geq1$ باشد که به معنی آن است که $\lambda\geq\mu$، مشتریان موجود در سیستم مدام افزایش می‌یابند و سیستم ناپایدار خواهد بود. در نتیجه احتمالات حالت پایدار در مورد چنین سیستم صفی بی‌معنی خواهد بود.
- **بنا بر این وقتی که $\rho<1$ است می‌توانیم معادلات جریان را برای زنجیره مارکوف بنویسیم.**
  - اگر p_n احتمال وجود n مشتری در سیستم باشد، در این صورت π_n احتمال حالت پایدار وجود n مشتری در سیستم صف خواهد بود.

حل حالت پایدار صف M/M/1

- با فرض ρ<1 معادلات جریان به صورت زیر خواهد بود:



$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$
$$\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1$$
$$\ldots$$
$$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda+\mu)\pi_n$$
$$\ldots$$

- دستگاه معادلات فوق دارای یک معادله افزونه است و در نتیجه جواب یکتا نخواهد داشت. اما با افزودن معادله زیر جواب یکتا خواهد داشت:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

حل حالت پایدار صف M/M/1

- حال برای حل دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \lambda/\mu\pi_0 = \rho\pi_0$$
$$\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1 \Rightarrow \pi_2 = \rho^2\pi_0$$
$$\ldots$$
$$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda+\mu)\pi_n \Rightarrow \pi_n = \rho^n\pi_0, n = 1,2,\ldots$$

- آنگاه:

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n + \ldots = 1$$
$$\Rightarrow \pi_0 + \rho\pi_0 + \rho^2\pi_0 + \ldots + \rho^n\pi_0 + \ldots = 1$$
$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^n+\ldots}$$

- با توجه به شرط ρ<1، مخرج یک تصاعد هندسی است که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\pi_0 = \frac{1}{1/(1-\rho)} = 1-\rho$$

حل حالت پایدار صف M/M/1

- آنگاه می‌توانیم π_1، π_2، ...، π_n را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = \rho\pi_0 = \rho(1-\rho)\\
&\pi_2 = \rho^2\pi_0 = \rho^2(1-\rho)\\
&\ldots\\
&\pi_n = \rho^n\pi_0 = \rho^n(1-\rho), n = 1,2,\ldots
\end{aligned}$$

- حالا با داشتن π_0، π_1، π_2، ...، π_n می‌توانیم میانگین تعداد مشتریان در سیستم یا L را محاسبه کنیم:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\rho^i(1-\rho) \Rightarrow L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

  - برای ساده شدن Σ و بدست آوردن L از همان روشهایی که در مبحث سری‌ها در ریاضیات وجود دارد استفاده می‌شود.

حل حالت پایدار صف M/M/1

- با توجه به برقراری قانون لیتل در حالت پایدار صف مجزا برای محاسبه میانگین زمان صرف شده در سیستم توسط مشتریان یا w خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&L = \lambda w \Rightarrow w = L/\lambda \Rightarrow\\
&w = \frac{\rho}{(1-\rho)}/\lambda \Rightarrow w = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}
\end{aligned}$$

- حال با توجه به تعریف میانگین تعداد مشتریان در صف یا L_Q خواهیم داشت:

$$L_Q = \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\rho^i(1-\rho) \Rightarrow L_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- آنگاه با استفاده از قانون لیتل، میانگین زمان انتظار مشتریان در صف یا w_Q محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&L_Q = \lambda w_Q \Rightarrow w_Q = L_Q/\lambda \Rightarrow\\
&w_Q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}/\lambda \Rightarrow w_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}
\end{aligned}$$

حل حالت پایدار صف M/M/1

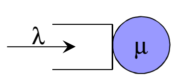
- به‌طور خلاصه معیارهای کارایی حالت پایدار صف M/M/1 در جدول زیر آمده است:

$$\rho = \lambda / \mu, \quad \pi_n = \rho^n (1-\rho)$$

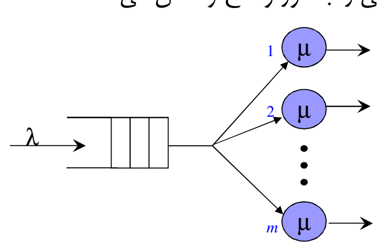
$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$w = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \quad w_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

حل حالت پایدار صف M/M/m

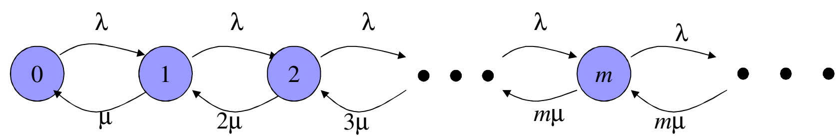


- صف M/M/m دارای مشخصات زیر است:
  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط همه سرویس‌دهنده‌ها مشابه و طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - سیستم دارای m سرویس‌دهنده موازی است.
  - همچنین، ظرفیت سیستم نامحدود، جمعیت نامتناهی و انتظام سرویس FCFS است.
- شکل زیر چنین سیستم صفی را به‌طور واضح‌تر نشان می‌دهد:



حل حالت پایدار صف M/M/m

- با استفاده از یک CTMC می‌توان چنین سیستم صفی را نیز مدل‌سازی نمود.
  - در این صورت مثل مدل قبل، حالت زنجیره مارکوف، تعداد مشتریان در سیستم صف (n) است.
  - نمودار حالت-گذر این CTMC در شکل زیر ارائه شده است:



  - در نمودار حالت-گذر فوق، به دلیل وجود m سرویس‌دهنده، نرخ گذر (برگشت) برای حالتهای ۱ الی m () **وابسته به حالت** (state-dependent) است. به این معنی است که نرخ برگشتن از حالت i به حالت i-1 برابر با $i\mu$ است (برای i=1…m). اما وقتی همه سرویس‌دهنده‌ها مشغول باشند ($i>m$)، این نرخ در $m\mu$ ثابت باقی می‌ماند.

حل حالت پایدار صف M/M/m

- **صف M/M/m در صورتی به حالت پایدار می‌رسد که $\rho=\lambda/m\mu<1$ باشد.**
- **بنا بر این وقتی که $\rho<1$ است می‌توانیم معادلات جریان را برای زنجیره مارکوف بنویسیم:**

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$
$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1$$
$$\ldots$$
$$\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda + n\mu)\pi_n, n < m$$
$$\lambda\pi_{n-1} + m\mu\pi_{n+1} = (\lambda + m\mu)\pi_n, n \geq m$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$$

- **با حل دستگاه معادلات فوق π_n به صورت زیر بدست خواهد آمد:**

$$\pi_n = \left\{\left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\left(\frac{1}{m!}\right)\left(\frac{m\mu}{m\mu-\lambda}\right)\right]\right\}^{-1}$$

حل حالت پایدار صف M/M/m

- با توجه به داشتن π_0 می‌توانیم سایر معیارهای کارایی حالت پایدار صف M/M/m را محاسبه کنیم که در جدول زیر آمده است:

$$\rho = \lambda / m\mu$$

$$\pi_n = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \left(\frac{1}{m!}\right) \left(\frac{m\mu}{m\mu-\lambda}\right) \right] \right\}^{-1}$$

$$L = m\rho + \frac{(m\rho)^{m+1}\pi_0}{m(m!)(1-\rho)^2}$$

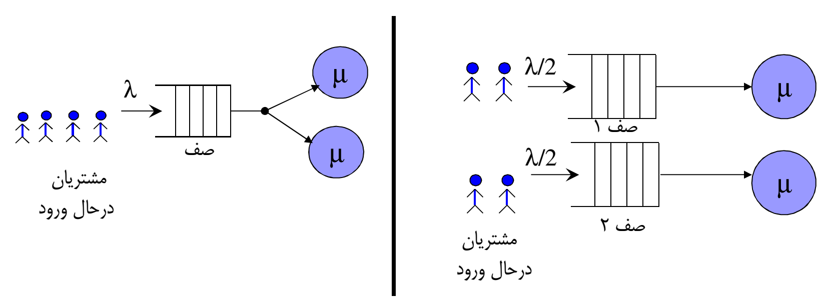
$$w = \frac{L}{\lambda}$$

$$w_Q = w - \frac{1}{m\mu}$$

$$L_Q = \lambda w_Q$$

تمرین ۱: مقایسه صف M/M/2 با دو صف مجزا

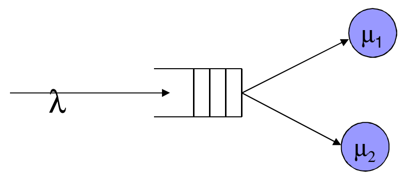
- **شکلهای زیر را مشاهده کنید. کدامیک انتخاب بهتری هستند؟ دو صف مجزا (سمت راست) یا صف دارای خط انتظار مشترک (سمت چپ)(دارای دو سرویس‌دهنده یکسان)؟**



- برای نشان دادن اینکه کدامیک بهتر هستند باید معیارهای کارایی دو مدل را بدست آورده و با هم مقایسه کنیم. از دیدگاه مشتریان، مهمترین معیار، میانگین زمان صرف شده توسط مشتریان در سیستم (w) است که هر قدر کمتر باشد نشان‌دهنده بهتر بودن سیستم صف است. **این کار را خودتان انجام دهید.**

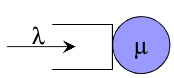
تمرین ۲: صف M/M/2 دارای سرویس‌دهنده‌های ناهمگون

- حالا یک سیستم صف M/M/2 را در نظر می‌گیریم که سرویس‌دهنده‌هایش ناهمگون (heterogeneous) هستند. یعنی نرخهای سرویس‌شان یکسان نیست. نمادی از این سیستم صف در شکل زیر نشان داده شده است:



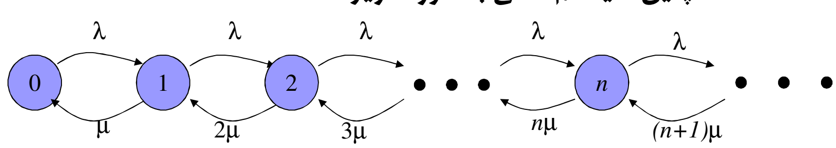
- برای حل این سیستم صف حالت را به چه صورت می‌توان تعریف نمود؟
  - با تعریف حالت، CTMC مربوط به این سیستم را رسم نموده و با بدست آوردن معادلات جریان، معیارهای کارایی این سیستم صف را محاسبه کنید.

حل حالت پایدار صف M/M/∞



M/M/∞

- صف M/M/∞ دارای مشخصات زیر است:
  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط همه سرویس‌دهنده‌ها مشابه و طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - سیستم دارای بی‌نهایت سرویس‌دهنده یکسان موازی است. به این معنی که به هر مشتری یک سرویس‌دهنده تخصیص داده می‌شود (نظیر self-serviceها) و همیشه صف خالی است.
  - همچنین، ظرفیت سیستم نامحدود (چون صف خالی است)، جمعیت نامتناهی و انتظام سرویس هم به‌طور خودکار FCFS است.
- CTMC چنین سیستم صفی به‌صورت زیر است:



حل حالت پایدار صف M/M/∞

- با فرض نمودن λ<μ می‌توانیم معادلات جریان را برای زنجیره مارکوف بنویسیم:

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$$
$$\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1$$
$$\ldots$$
$$\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda+n\mu)\pi_n, n = 1,2,\ldots$$

- با ساده‌سازی معادلات فوق یا با در نظر گرفتن معادلات توازن محلی (LBE: local balance equations) (که بین هر دو گره مجاور نوشته می‌شوند) خواهیم داشت:

$$\lambda\pi_{n-1} = n\mu\pi_n, n = 1,2,\ldots$$
$$\Rightarrow \pi_n = \frac{1}{n}(\frac{\lambda}{\mu})\pi_{n-1}$$
$$\Rightarrow \pi_n = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^n\frac{1}{n!}$$

حل حالت پایدار صف M/M/∞

- حالا با داشتن $\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$ خواهیم داشت:

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = 1 \Rightarrow \pi_0 + \pi_0\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n\frac{1}{n!} = 1$$
$$\Rightarrow \pi_0 = \left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^n\frac{1}{n!}\right\}^{-1} = e^{\frac{-\lambda}{\mu}}$$

  - که همان تعریف e است.

- حالا می‌توانیم L را محاسبه کنیم:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty}n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}n\pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^n\frac{1}{n!} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{\mu}$$

- و با استفاده از قانون لیتل می‌توانیم w را هم محاسبه کنیم:

$$L = \lambda w \Rightarrow w = 1/\mu$$

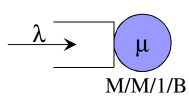
- همانطورکه گفته شد، صف تشکیل نمی‌شود. بنا بر این:

$$L_Q = w_Q = 0$$

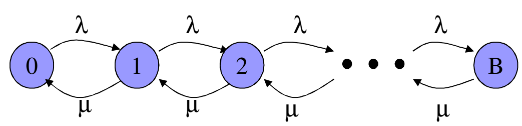
حل حالت پایدار صف‌های دارای ظرفیت محدود و جمعیت نامتناهی

- حالا صفهای مارکوفی دارای ظرفیت محدود و جمعیت نامتناهی زیر را در حالت پایدار با استفاده از زنجیره‌های مارکوف پیوسته-زمان حل می‌کنیم:
  - صف M/M/1/B
  - صف M/M/m/B
  - صف M/M/m/m
- وقتی ظرفیت سیستم محدود باشد، بخشی از مشتریان در موقع ورود سیستم را پر می‌بینند و بنا بر این بلافاصله سیستم را ترک می‌کنند یا اصطلاحاً طرد (reject) می‌شوند.
- در مورد چنین سیستم‌هایی، احتمال پربودن سیستم یا احتمال طرد شدن (rejection probablility) معیار مهمی است که باید محاسبه شود.

حل حالت پایدار صف M/M/1/B



- صف M/M/1/B دارای مشخصات زیر است:
  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط سرویس‌دهنده طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - یک سرویس‌دهنده وجود دارد.
  - همچنین، ظرفیت سیستم محدود (B)، جمعیت نامتناهی و انتظام سرویس FCFS است.
- CTMC چنین سیستم صفی به‌صورت زیر است:



حل حالت پایدار صف M/M/1/B

- معادلات جریان به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
&\lambda\pi_0 = \mu\pi_1\\
&\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1\\
&\dots\\
&\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda+\mu)\pi_n, n = 1,2,\dots, B-1\\
&\lambda\pi_{B-1} = \mu\pi_B
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{B}\pi_i = 1$$

- با ساده‌سازی معادلات فوق (یا در نظر گرفتن معادلات توازن محلی) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\lambda\pi_{n-1} = \mu\pi_n, n = 1,2,\dots, B\\
&\Rightarrow \pi_n = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^n
\end{aligned}$$

حل حالت پایدار صف M/M/1/B

- حالا با داشتن $\sum_{i=0}^{B}\pi_i = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = 1 \Rightarrow \pi_0 + \pi_0\sum_{n=1}^{B}(\frac{\lambda}{\mu})^n = 1\\
&\Rightarrow \pi_0 = \left\{1 + \sum_{n=1}^{B}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right\}^{-1}
\end{aligned}$$

  - که همان احتمال خالی بودن سیستم است.

- حالا می‌توانیم احتمال پر بودن را هم محاسبه کنیم:

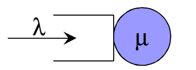
$$\pi_B = \left\{1 + \sum_{n=1}^{B}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right\}^{-1}(\frac{\lambda}{\mu})^B$$

- همانطوری که گفته شد، در چنین سیستم صفی بخشی از جریان ورود فرصت ورود به سیستم را پیدا می‌کنند که به آن **نرخ ورود موثر** (λ_e) گفته می‌شود:

$$\lambda_e = \lambda(1-\pi_B)$$

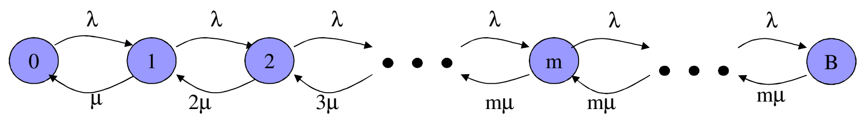
- سایر معیارهای کارایی هم با روشی مشابه سیستم‌های قبلی قابل محاسبه‌اند.

حل حالت پایدار صف M/M/m/B



M/M/m/B

- صف M/M/m/B (m<B) دارای مشخصات زیر است:
  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط سرویس‌دهنده طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - تعداد سرویس‌دهنده‌های موازی یکسان m است.
  - همچنین، ظرفیت سیستم محدود (B)، جمعیت نامتناهی و انتظام سرویس FCFS است.
- CTMC چنین سیستم صفی به‌صورت زیر است:



حل حالت پایدار صف M/M/m/B

- معادلات جریان به صورت زیر خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
&\lambda\pi_0 = \mu\pi_1\\
&\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1\\
&\ldots\\
&\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda+n\mu)\pi_n, n = 1,2,\ldots,m-1\\
&\lambda\pi_{n-1} + m\mu\pi_{n+1} = (\lambda+m\mu)\pi_n, n = m,..,B-1\\
&\lambda\pi_{B-1} = m\mu\pi_B
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=0}^{B} \pi_i = 1$$

حل حالت پایدار صف M/M/m/B

- پس از حل دستگاه معادلات فوق و با در نظر گرفتن $\rho=\lambda/m\mu$ خواهیم داشت:

$$\pi_n=\begin{cases}\dfrac{(m\rho)^n}{n!}\pi_0, n=1,2,\ldots,m-1\\ \dfrac{\rho^n m^m}{m!}\pi_0, n=m,m+1,\ldots,B\end{cases}$$

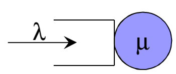
- احتمال خالی بودن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\pi_0=\left[1+\frac{(1-\rho^{B-m+1})(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(m\rho)^n}{n!}\right]^{-1} \qquad \rho\neq 1$$

- سایر معیارهای کارایی هم با روشی مشابه سیستم‌های قبلی قابل محاسبه است.

حل حالت پایدار صف M/M/m/m

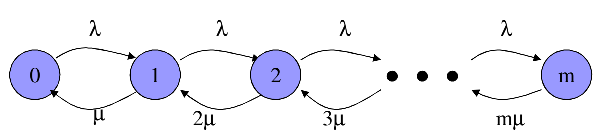
- صف M/M/m/m دارای مشخصات زیر است:



M/M/m/m

  - مشتریان طبق یک فرایند پواسان با نرخ λ وارد سیستم صف می‌شوند.
  - زمان سرویس مشتریان توسط سرویس‌دهنده طبق توزیع نمایی با نرخ μ است.
  - تعداد سرویس‌دهنده‌های موازی یکسان m است.
  - ظرفیت سیستم محدود (m) است و عملاً صف تشکیل نمی‌شود.
  - چنین سیستمی مشابه مرکز تلفن است. چون مشترک در صورت اشغال بودن خط، گوشی را می‌گذارد و در صف منتظر نمی‌شود.

- CTMC چنین سیستم صفی به‌صورت زیر است:



حل حالت پایدار صف M/M/m/m

- معادلات جریان به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
&\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\
&\lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1 \\
&\ldots \\
&\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda+n\mu)\pi_n, n=1,2,\ldots,m-1 \\
&\lambda\pi_{m-1} = m\mu\pi_m
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1$$

- با ساده‌سازی معادلات فوق یا با در نظر گرفتن معادلات توازن محلی **(LBE)** خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\lambda\pi_{n-1} = n\mu\pi_n, n = 1,2,\ldots, m \\
&\Rightarrow \pi_n = \pi_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

حل حالت پایدار صف M/M/m/m

- احتمال خالی بودن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

- احتمال پر بودن هم برابر خواهد بود با:

$$\pi_m = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^m}{m!\sum_{n=0}^{m} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!}}$$

- که همان **فرمول B ارلنگ** (Erlang B Formula) است که در مخابرات دارای کاربرد فراوان است.
- **سایر معیارهای کارایی هم با روشی مشابه سیستم‌های قبلی قابل محاسبه است.**