Міністерство освіти і науки України

ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 9

по дисципліні **«Диференційні рівняння»**

Тема:Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: ст. викладач кафедри ПЗАС

Гук В.І.

Черкаси, 2025

Короткі теоретичні відомості

Загальний вигляд лінійного неоднорідного диференціального рівняння із постійними коефіцієнтами. Фундаментальна система розв'язків ЛОДР. Загальний розв'язок ЛОДР. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих) для пошуку розв'язку ЛНДР. Метод невизначених коефіцієнтів для пошуку розв'язку ЛНДР із правими частинами спеціального виду.

Оператори ***Maple:***

***factor**, **dsolve**, Student[ODEs][Solve]**SecondOrder**,*
Student[ODEs][Solve]HighOrder**, Student[Basics]**OutputStepsRecord

Лінійне неоднорідне рівняння n-го порядка з постійними коефіцієнтами має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$*- задані дійсні числа.*

Спочатку потрібно знайти функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Розв'язок неоднорідного рівняння може бути знайдений наступними методами:

1. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

При використанні цього методу загальний розв'язок шукається у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n$$

Функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ знаходяться по своїм похідним, які знаходяться з лінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \cdots + c_n'(x) y_n(x) = 0 \\ c_1'(x) {y_1}'(x) + c_2'(x) {y_2}'(x) + \cdots + c_n'(x) {y_n}'(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1'(x) {y_1}^{(n-2)}(x) + c_2'(x) {y_2}^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x) {y_n}^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x) {y_1}^{(n-1)}(x) + c_2'(x) {y_2}^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x) {y_n}^{1}(x) = f(x) \end{cases}$$

2. Метод невизначених коефіцієнтів.

В цьому методі загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами записується у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_ч$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукається в різному вигляді в залежності від виду правої частини.

Окремо розглядаються випадки:

1) $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cdot \cos\beta x + R_n(x) \cdot \sin\beta x)$

Домашнє завдання

Задача 1. Розв'язати диференціальні рівняння

варіант 14 % 12 = 2

2. 1) $y'' - 14y' + 50y = \dfrac{e^{7x}}{\cos x}$;

2) $y'' + y' - 6y = -2(1+5x)e^{2x}$;

3) $y^{(100)} + y^{(99)} = 2\sin x$;

4) $y'' + 14y' + 65y = 2x^2 + x + e^{-7x}(\cos(4x) + 2\sin(4x))$.

1) $y'' - 14y' + 50y = \dfrac{e^{7x}}{\cos x}$;

Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння:

$y`` + 14\,y` + 50y = 0$

Характеристичне рівняння:

$k^2 - 14\,k + 50 = 0$

Знаходимо корені:

$$k = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 1\cdot 50}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 200}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{-4}}{2} = 7 \pm i$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$y_0 = e^{7x}\left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right)$

Шукаємо частинний розв'язок у вигляді:

$y_p = e^{7x}\left(u_1(x)\cos(x) + u_2(x)\sin(x)\right)$

де u1(x) та u2(x) — невідомі функції, які знаходимо з системи:

Система рівнянь для u1' та u2':

$$\begin{cases} u_1`\,cos(x) + u_2`sin(x) = 0 \\ -u_1`sin(x) + u_2`cos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

З першого рівняння:

$u1` = -u2`\tan(x)$

Підставляємо у друге рівняння:

$u2`tan(x)\sin(x) + u_2`cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$u2`\left(tan(x)\sin(x) + \cos(x) \right) = \frac{1}{\cos(x)}$

Спрощуємо вираз у *дужках* :

$\tan(x)\sin(x) + \cos(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\cos(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)};$

$\frac{u2`}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$

u2` = 1, тоді u2` $= -\tan(x)$

Інтегруємо u1' та u2':

$u2(x) = \int 1 \, dx = x + C_2$

$u1(x) = \int -\tan(x) \, dx = \ln|\cos(x)| + C_1$

Константи C1, C2, можна опустити, оскільки вони вже враховані в *y0.*

Частинний розв'язок :

$y_p = e^{7x}(\ln|\cos(x)| \cdot \cos(x) + x\sin(x))$

Загальний розв'язок. Складаємо однорідний і *частинний розв'язки* :

$y = y0 + y_p = e^{7x}(C1cos(x) + C2sin(x)) + e^{7x}(\ln|\cos(x)| \cdot \cos(x) + xsin(x))$

$y = e^{7x}(C1cos(x) + C2sin(x) + \ln|\cos(x)| \cdot \cos(x) + xsin(x))$

Знайдено загальний розв'язок. Виконаємо перевірку в *Maple* :

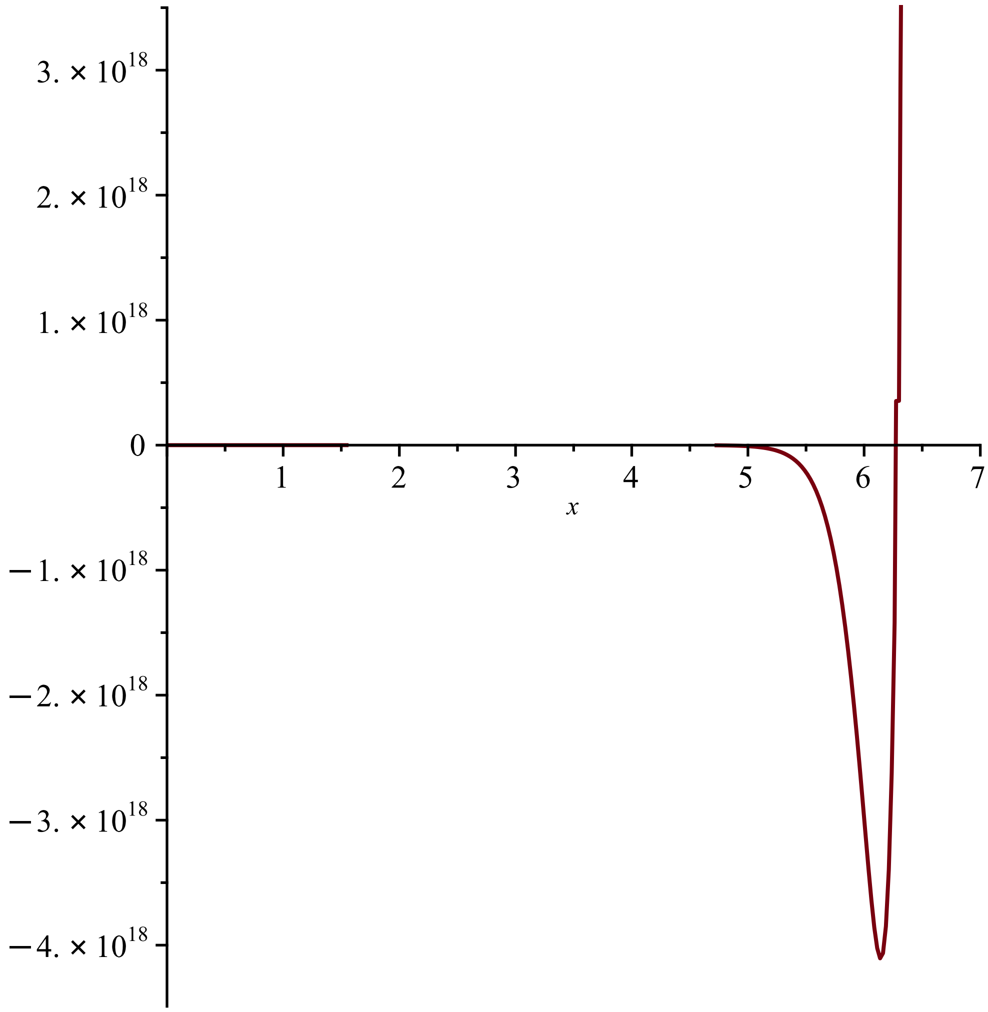
```
> ode := diff(y(x), x, x) − 14· diff(y(x), x) + 50· y(x) = exp(7· x) / cos(x);
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 14 \frac{d}{dx} y(x) + 50\, y(x) = \frac{e^{7x}}{\cos(x)} \quad \textbf{(1)}$$

```
> res := dsolve(ode, y(x))
```

$$res := y(x) = e^{7x}\sin(x)\, c_2 + e^{7x}\cos(x)\, c_1 + e^{7x}\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) + \sin(x)\, x\right) \quad \textbf{(2)}$$

```
> plot(subs(c1 = 0, c2 = 0, rhs(res)), x = 0 ..10);
```



> *restart*

Завдання виконано.

2) $y'' + y' - 6y = -2(1 + 5x)e^{2x}$;

МаємоДля цього рівняння доцільно використати метод невизначених коефіцієнтів оскільки права частина має спеціальний вигляд :

$-2(1+5x)e^{2x}$

однорідне рівняння :
$y`` + y`-6y=0$

Характеристичне рівняння :

$k^2 + k - 6 = 0$

Знаходимо корені :

$$k = -\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = -\frac{1 \pm 5}{2}$$

$k1 = 2,\ k2 = -3$

Повертаємось до правої частини рівняння.
Оскільки e^{2x} *входить до розв'язку однорідного рівняння, частинний розв'язок шукаємо* у *вигляді* :
$y_p = xe^{2x}(A + Bx)$

Обчислення похідних :
Перша похідна :

$$y`_p = e^{2x}(A + Bx) + xe^{2x}(B) + 2xe^{2x}(A + Bx) = e^{2x}[A + Bx + Bx + 2Ax + 2Bx^2]$$

Спростимо :

$$y`_p = e^{2x}[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2]$$

Друга похідна :

$$y``_p = e^{2x}[2A + (4A + 4B)x + 4Bx^2 + 2A + 2B + 4Bx]$$
$$y``_p = e^{2x}[4A + 2B + (4A + 8B)x + 4Bx^2]$$

Підстановка $y_p, y`_p, y``_p$ у *рівняння* :
$y``_p + y`_p - 6y_p = -2(1 + 5x)e^{2x}$

Підставляємо :

$$e^{2x}[4A + 2B + (4A + 8B)x + 4Bx^2] + e^{2x}[A + (2A + 2B)x + 2Bx^2] - 6e^{2x}[Ax + Bx^2] = -2(1 + 5x)e^{2x}$$

Скорочуємо e^{2x} :

$(4A+2B)+(4A+8B)x+4Bx^2+A+(2A+2B)x+2Bx^2-6Ax-6Bx^2=-2(1+5x)$

Збираємо подібні доданки та отримаємо рівняння :

$10Bx+5A+2B=-2-10x$

Частинний розв'язок :

$y_p=xe^{2x}(0-x)=-x^2e^{2x}$

Загальний розв'язок :

$y=y0+\ y_p=C1e^{2x}+C2e^{-3x}-x^2e^{2x}$

$y=\left(C1-x^2\right)e^{2x}+C2e^{-3x}$

Загальний розв'язок знайдено. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $ode := diff(y(x),x,x)+diff(y(x),x)-6\cdot y(x)=-2\cdot(1+5\cdot x)\cdot \exp(2\cdot x);$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x)+\frac{d}{dx}\, y(x)-6\,y(x)=-2\,(1+5\,x)\,e^{2x} \tag{3}$$

> $dsolve(ode);$

$$y(x)=e^{2x}\,c_2+e^{-3x}\,c_1-x^2\,e^{2x} \tag{4}$$

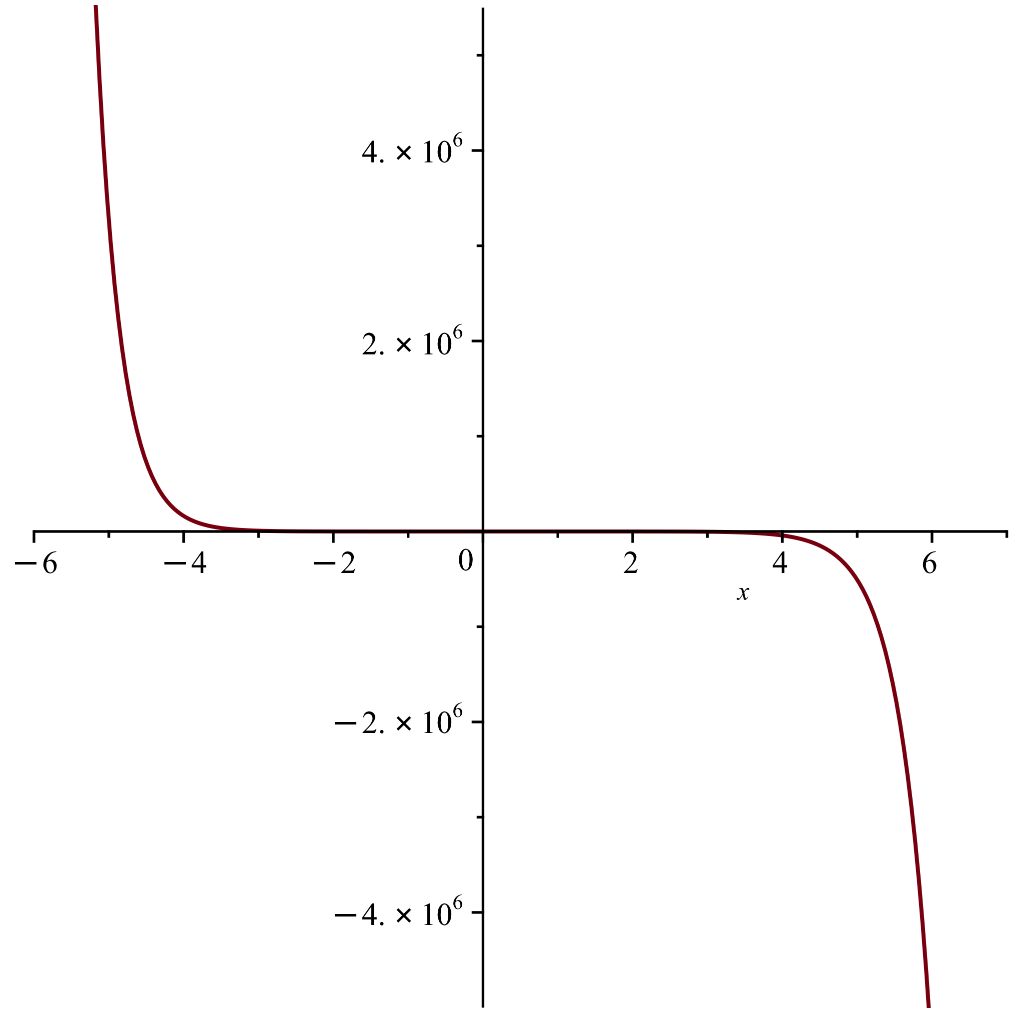
> $C_1=1;$
> $C_2=2$

$$C_1=1$$
$$C_2=2 \tag{5}$$

> $res := e^{2x}\,C_2+e^{-3x}\,C_1-x^2\,e^{2x}$

$$res := e^{2x}\,C_2+e^{-3x}\,C_1-x^2\,e^{2x} \tag{6}$$

> $plot\left(\exp(2\cdot x)\cdot 2+\exp(-3\cdot x)\cdot 1-x^2\cdot \exp(2\cdot x), x=-10..10\right)$



>

Диференціальне рівняння розв'язано правильно. завдання виконано.

> *restart*

3) $y^{(100)} + y^{(99)} = 2\sin x;$

$k^{100} + k^{99} = 0$

$k^{99}(k+1) = 0$

корені рівняння :

$k\,1 = 0$ (*тому що кратність* 99)

$k2 = -1$ (*кратність* 1)

Права частина рівняння :

$2\sin(x)$

скільки права частина містить sinxsinx, частинний розв'язок шукаємо у *вигляді* :

$y_{част}(x) = Asinx + Bcosx$

Обчислення похідних :

$y_{част}^{(99)}(x) = Asin\left(x + 99\dfrac{\pi}{2}\right) + Bcos\left(x + 99\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y_{част}^{(100)}(x) = Asin\left(x + 100\dfrac{\pi}{2}\right) + Bcos\left(x + 100\dfrac{\pi}{2}\right)$

Спростимо тригонометричні функції :

$\sin\left(x + 99\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 49\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{49}\cos(x) = -\cos(x)$

$\sin\left(x + 100\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 50\pi) = \sin(x)$

$\cos\left(x + 99\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 49\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{49}(-\sin(x)) = \sin(x)$

$\cos\left(x + 100\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x + 50\pi) = \cos(x)$

$y_{част}^{(99)}(x) = -Acos(x) + B\sin(x)$

$y_{част}^{(100)}(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$

Підстановка у *рівняння* :

$(Asin(x) + B\cos(x)) + (-Acos(x) + B\sin(x)) = 2\sin(x)$

$(A + B)\sin(x) + (B - A)\cos(x) = 2\sin(x)$

Прирівнюємо коефіцієнти :

$A + B = 2$

$A - B = 0$

$A = 1; B = 1;$

Частинний розв'язок :

$y_{част}(x) = \sin(x) + \cos(x)$

Загальний розв'язок :
$y(x) = y_{одн}(x) + y_{част}(x)$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{98} \left(C_k x^k + C_{99} e^{-x} + \sin(x) + \cos(x) \right)$$

Однорідний розв'язок містить многочлен 98 − *го ступеня.*
Частинний розв'язок для 2 *sinx знайдено методом невизначених коефіцієнтів.*

Розв'язок знайдено. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $ode := diff(y(x), [x\$100]) + diff(y(x), [x\$99]) = 2\cdot \sin(x);$

$$ode := \frac{d^{100}}{dx^{100}} y(x) + \frac{d^{99}}{dx^{99}} y(x) = 2 \sin(x) \tag{7}$$

> $own\_sol := y(x) = add\left(C[k]\cdot x^k, k = 0..98\right) + C[99]\cdot \exp(-x) + \sin(x) + \cos(x)$

$$own\_sol := y(x) = C_0 + \cos(x) + \sin(x) + C_{13} x^{13} + C_{14} x^{14} + C_{15} x^{15} + C_{16} x^{16} + C_{17} x^{17} + C_{18} x^{18} + C_{19} x^{19} + C_{20} x^{20} + C_{21} x^{21} + C_{22} x^{22} + C_{23} x^{23} + C_{24} x^{24} + C_{25} x^{25} + C_{26} x^{26} + C_{27} x^{27} + C_{28} x^{28} + C_{29} x^{29} + C_{30} x^{30} + C_{31} x^{31} + C_{32} x^{32} + C_{33} x^{33} + C_{34} x^{34} + C_{35} x^{35} + C_{36} x^{36} + C_{37} x^{37} + C_{38} x^{38} + C_{39} x^{39} + C_{40} x^{40} + C_{41} x^{41} + C_{42} x^{42} + C_{43} x^{43} + C_{44} x^{44} + C_{45} x^{45} + C_{46} x^{46} + C_{47} x^{47} + C_{48} x^{48} + C_{49} x^{49} + C_{50} x^{50} + C_{51} x^{51} + C_{52} x^{52} + C_{53} x^{53} + C_{54} x^{54} + C_{55} x^{55} + C_{56} x^{56} + C_{57} x^{57} + C_{58} x^{58} + C_{59} x^{59} + C_{60} x^{60} + C_{61} x^{61} + C_{62} x^{62} + C_{63} x^{63} + C_{64} x^{64} + C_{65} x^{65} + C_{66} x^{66} + C_{67} x^{67} + C_{68} x^{68} + C_{69} x^{69} + C_{70} x^{70} + C_{71} x^{71} + C_{72} x^{72} + C_{73} x^{73} + C_{74} x^{74} + C_{75} x^{75} + C_{76} x^{76} + C_{77} x^{77} + C_{78} x^{78} + C_{79} x^{79} + C_{80} x^{80} + C_{81} x^{81} + C_{82} x^{82} + C_{83} x^{83} + C_{84} x^{84} + C_{85} x^{85} + C_{86} x^{86} + C_{87} x^{87} + C_{88} x^{88} + C_{89} x^{89} + C_{90} x^{90} + C_{91} x^{91} + C_{92} x^{92} + C_{93} x^{93} + C_{94} x^{94} + C_{95} x^{95} + C_{96} x^{96} + C_{97} x^{97} + C_{98} x^{98} + C_{99} e^{-x} + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7 + C_8 x^8 + C_9 x^9 + C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} + C_{12} x^{12} \tag{8}$$

> $odetest(own\_sol, ode)$

$$0 \tag{9}$$

Odetest повернув 0, *отже рівняння розв'язано правильно. Завдання виконано*

> *restart*

4) $y'' + 14y' + 65y = 2x^2 + x + e^{-7x}(\cos(4x) + 2\sin(4x))$.

$y`` + 14\,y` + 65y = 0$

Характеристичне рівняння :

$(k)^2 + 14\,k + 65 = 0$

Корені :

$k = -\dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 260}}{2} = -7 \pm 4\,i$

Загальний розв'язок однорідного рівняння :

$y_h(x) = e^{-7\,x}\big(C_1 \cos(4\,x) + C_2 \sin(4\,x)\big)$

Частинні розв'язки неоднорідного рівняння :

Для правої частини :

$y_{p1}(x) = Ax^2 + Bx + C$

Похідні : $y``_{p1} + 14\,y`_{p1} + 65y_{p1} = 65\,Ax^2 + (28\,A + 65\,B)x + (2\,A + 14\,B + 65\,C)$

Прирівнюємо до $2\,x^2 + x$:

1. $65\,A = 2 \Rightarrow A = \dfrac{2}{65}$

2. $28\,A + 65\,B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1 - \dfrac{56}{65}}{65} = \dfrac{9}{4225} = \dfrac{1}{469}$

3. $2\,A + 14\,B + 65\,C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{-2\,A + 14\,B}{65} = -\dfrac{\dfrac{4}{65} + \dfrac{14}{469}}{65} = -\dfrac{109}{21125}$

Результат :

$y_{p1}(x) = \dfrac{2}{65}x^2 + \dfrac{1}{469}x - \dfrac{109}{21125}$

Для правої частини :

оскільки $e^{-7\,x}(\cos(4\,x) + \sin(4\,x))$ *виходять до* $y_h(x)$, *множимо на* x :

$y_{p2}(x) = xe^{-7\,x}(D\cos(4\,x) + E\sin(4\,x))$

$\mathrm{D} = \dfrac{1}{8}; E = \dfrac{1}{4}$

Результат :

$$y_{p2}(x) = xe^{-7x}\left(\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + \frac{1}{16}e^{-7x}\sin(4x)$$

Загальний розв'язок :
$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$

$$y(x) = e^{-7x}\sin(4x)\,C_2 + e^{-7x}\cos(4x)\,C_1 - \frac{386}{274625} + \frac{((2x+1)\sin(4x) - 4\cos(4x)\,x)\,e^{-7x}}{16} + \frac{2x^2}{65} + \frac{9x}{4225}$$

Однорідний розв'язок враховує загальну структуру розв'язку.
Частинні розв'язки знайдені методом невизначених коефіцієнтів .

Диф. рівняння розв'язано. Виконаємо перевірку в *мейпл* :

> $ode := diff(y(x), x\$2) + 14\cdot diff(y(x), x) + 65\cdot y(x) = 2\cdot x^2 + x + \exp(-7\cdot x)\cdot(\cos(4\cdot x) + 2\cdot\sin(4\cdot x));$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 14\,\frac{d}{dx}\,y(x) + 65\,y(x) = 2x^2 + x + e^{-7x}\,(\cos(4x) + 2\sin(4x)) \qquad \mathbf{(10)}$$

> $sol := y(x) = e^{-7x}\sin(4x)\,C_2 + e^{-7x}\cos(4x)\,C_1 - \frac{386}{274625} + \frac{((2x+1)\sin(4x) - 4\cos(4x)\,x)\,e^{-7x}}{16} + \frac{2x^2}{65} + \frac{9x}{4225} + \frac{1}{32}\cdot\exp(-7\cdot x)\cdot(\cos(4\cdot x) + 2\cdot\sin(4\cdot x));$

$$sol := y(x) = 2\,e^{-7x}\sin(4x) + e^{-7x}\cos(4x) - \frac{386}{274625} + \frac{((2x+1)\sin(4x) - 4\cos(4x)\,x)\,e^{-7x}}{16} + \frac{2x^2}{65} + \frac{9x}{4225} + \frac{e^{-7x}\,(\cos(4x) + 2\sin(4x))}{32} \qquad \mathbf{(11)}$$

> $odetest(sol, ode)$

$$0 \qquad \mathbf{(12)}$$

Рівняння розв'язано правильно. Побудуємо графік для диф.рівняння :

> $C_1 := 1$

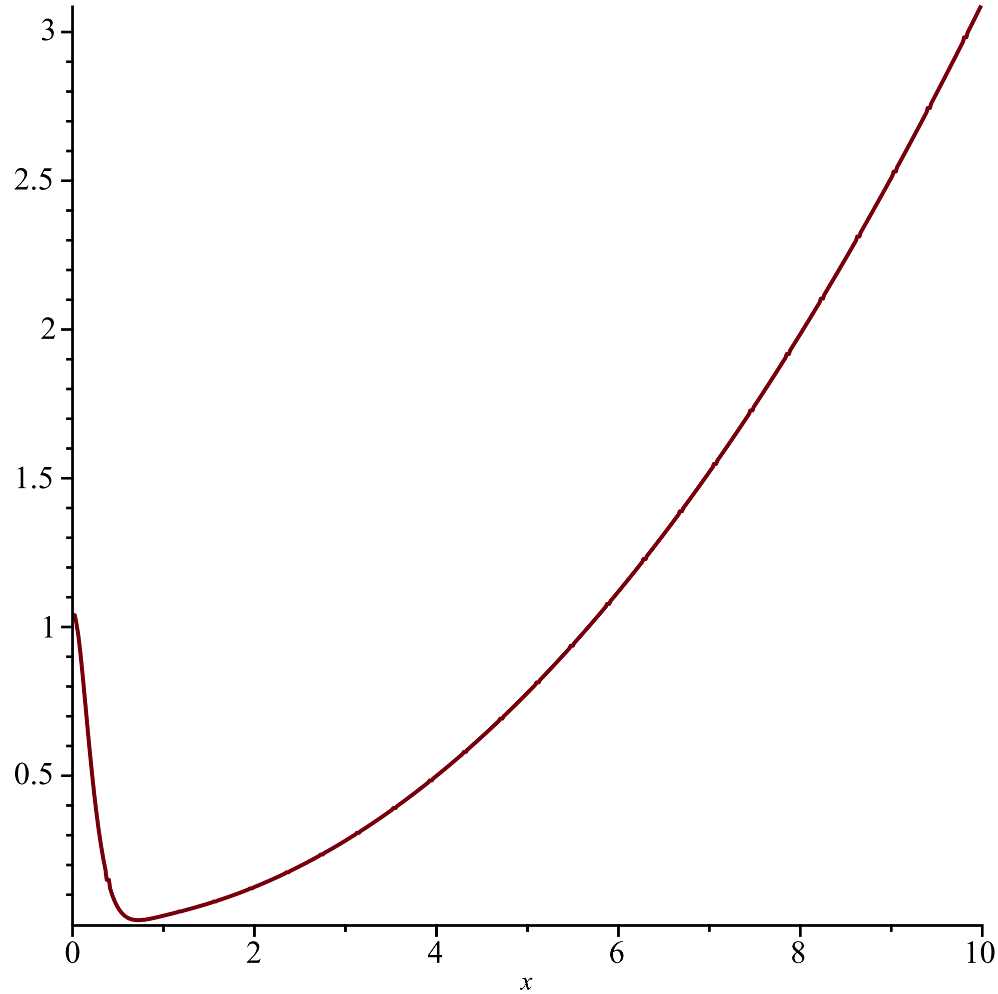
$$C_1 := 1 \qquad \mathbf{(13)}$$

> $C_2 := 2$

$$C_2 := 2 \qquad \mathbf{(14)}$$

> $plot\Big(\Big[e^{-7x}\sin(4x)\,C_2 + e^{-7x}\cos(4x)\,C_1 - \frac{386}{274625} + \frac{((2x+1)\sin(4x) - 4\cos(4x)\,x)\,e^{-7x}}{16} + \frac{2x^2}{65} + \frac{9x}{4225} + \frac{1}{32}\cdot\exp(-7\cdot x)$

$\cdot (\cos(4 \cdot x) + 2 \cdot \sin(4 \cdot x)) \Big], x = 0 ..10 \Big)$



\>

Завдання виконано.