Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем

Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3
по дисципліні «Диференціальні рівняння»

Тема: Рівняння з відокремлюваними змінними, і рівняння, що зводяться до них

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2025

Короткі теореитчні відомості:

Означення. Рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.24)$$

називається рівнянням у ***повних диференціалах***, якщо існує функція *u(x,y)*, для яких ліва частина рівняння збігається з диференціалом функції, тобто

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2.25)$$

Слід нагадати, що диференціал функції двох змінних $u = u(x,y)$ (точніше – повний диференціал) дорівнює

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (2.26)$$

Тобто для того, щоб рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ в лівій частині мало повний диференціал деякої функції *u(x,y)* потрібно, щоб частинні похідні цієї функції дорівнювали множникам перед диференціалами змінних, тобто повинні виконуватися умови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

В зв'язку з тим, що ***рівняння в повних диференціалах можна записати у вигляді*** $\boldsymbol{du = 0}$***, воно легко інтегрується і його загальний інтеграл знаходиться інтегруванням і має наступний вигляд***

$$u(x,y) = C \qquad (2.27)$$

<u>Теорема.</u> (***Необхідна та Достатня умова рівняння в повних диференціалах***)

Для того, щоб рівняння (2.24) було рівнянням в повних диференціалах в області G, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}} \qquad (2.28)$$

<u>Випадок 1.</u> Припустимо, що функція

$$\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$$

залежить тільки від *x*. У цьому випадку інтегруючий множник може бути знайдений за формулою

$$\mu = a \cdot e^{\int \psi(x)dx}$$

Де *a* - це константа *(*зазвичай вибирають *a=1)*, а під $\int \psi(x)dx$ розуміють будь-яку конкретну первісну функції $\psi(x)$.

Очевидно, що в цьому випадку інтегруючий множник є функцією, яка залежить від *x*:

$$\mu = \mu(x)$$

Випадок 2. Припустимо, що функція $\psi = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M(x,y)}$ залежить тільки від y і позначимо її як $\psi(y)$.

Тоді інтегруючий множник можна знайти за формулою $\mu = a \cdot e^{\int \psi(y)dy} = \mu(y)$

Якщо вибрати a=1, отримаємо конкретну первісну: $\mu = e^{\int \psi(y)dy}$

10

Випадок 3. Якщо вираз $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$ є функція від змінної $y + x$ тобто

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} = \varphi(x + y)$$

У цьому випадку інтегруючий множник може бути записаний також, як функція від $y + x$:

$$\mu = \mu(x + y)$$

$$t = x + y => \mu(t) = a \cdot e^{\int \psi(t)dt}$$

Практична частина:

Задача 1. Визначити тип рівняння (з поясненнями, як це можна зробити вручну). Перевірити правильність визначення типу з допомогою Maple. Розв'язати задане диференціальне рівняння.

Варіант 14

14. $e^{1+x^2} \cdot tg\, y\, dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0,\ y(1) = \frac{\pi}{2}.$

загальний вигляд рівняння:

M(x,y) dx+ N(x,y)dy = 0

$M(x, y)dx = (\mathrm{e})^{1+(x)^2} \cdot \tan(y)$

$N(x, y)dy = -\frac{(\mathrm{e})^{2x}}{x-1}$

Знайдемо частинні похідні :

$\frac{dM}{dy} = (\mathrm{e})^{1+(x)^2} \cdot \sec^2(y)$, де sec(x) = $\frac{1}{\cos}$

$\frac{dN}{dx} = -\left(\frac{2x(x-1)-(e)^{2x}}{(x-1)^2}\right) \cdot e^{2x}$

Оскільки $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$ рівняння не є повним.

після знаходження похідних, можемо починати розв'язувати рівняння:

Проінтегруємо обидві частини:

Ліва частина:

$\int \frac{dy}{tgy} = \int \cot(y)\, \mathrm{d}y = \ln(\sin(y))$

Права частина:

$\int \mathrm{e}^{x^2-2x+1} \cdot (x-1)\mathrm{d}x$

потрібне підстановлення. Введемо:

$u = 1 + x^2 - 2x$

$du = 2x - 2\, dx$

спростимо вираз:

$\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{x^2-2x+1}}{2} + \mathrm{C}$

Підставимо початкові умови у рівняння:

$\ln(1) = \frac{\mathrm{e}^{x^2-2x+1}}{2} + C$

$$0 = \frac{e^0}{2} + C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

Загальний розв'язок:

$$\ln(\sin(y)) = \frac{e^{x^2-2x+1}}{2} - \frac{1}{2}$$

Виконаємо перевірку у Maple.
Задамо диференціальне рівняння та розв'яжемо ДР вручну:

> $ODE := diff(y(x), x) = e^{x^2+1} \cdot \frac{\tan(y(x)) \cdot (x-1)}{e^{2 \cdot x}}$;

$$ODE := \frac{d}{dx} y(x) = \frac{e^{x^2+1} \tan(y(x)) (x-1)}{e^{2x}} \quad \textbf{(1)}$$

> $with(Student)$

[$Basics$, $Calculus1$, $LinearAlgebra$, $MultivariateCalculus$, $NumericalAnalysis$, $ODEs$, $Precalculus$, $SetColors$, $SetDefault$, $SetDefaults$, $Statistics$, $VectorCalculus$] **(2)**

> $with(ODEs)$

[$ChangeVariables$, $DifferentialOrder$, $Integrate$, $IntegratingFactor$, $IsolateHighestDerivative$, $LinearForm$, $ODEPlot$, $ODESteps$, $ReduceOrder$, $SeparateVariables$, $Solve$, $Test$, $Type$] **(3)**

> $SeparateVariables(ODE, y(x))$

розділимо змінні :

$$\frac{\frac{d}{dx} y(x)}{\tan(y(x))} = \frac{e^{x^2+1} (x-1)}{e^{2x}} \quad \textbf{(4)}$$

> $i1 := Int\left(\frac{1}{\tan(y)}, y\right) = int\left(\frac{1}{\tan(y)}, y\right)$;

запишемо інтеграл і *справа вручну* :

$$i1 := \int \frac{1}{\tan(y)} \, dy = \ln(\sin(y)) \quad \textbf{(5)}$$

> $i2 := Int\left(\frac{e^{x^2+1} (x-1)}{e^{2x}}, x\right) = int\left(\frac{e^{x^2+1} (x-1)}{e^{2x}}, x\right)$;

$$i2 := \int \frac{e^{x^2+1} (x-1)}{e^{2x}} \, dx = \frac{e^{x^2+1}}{2 e^{2x}} \quad \textbf{(6)}$$

> $\ln(\sin(y)) = \frac{e^{x^2+1}}{2 e^{2x}} + C$

Знайдені інтеграли від лівої частини і *від правої частини, тому можна записати розв 'язок ДР* у *вигляді*

Це і є *розв'язок ДР*

$$\ln(\sin(y)) = \frac{e^{x^2+1}}{2\,e^{2x}} + C \tag{7}$$

> $\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{e^{1^2+1}}{2\,e^2} + C$

підставимо амість x *один, замість* y $\frac{\pi}{2}$ і *отримаємо рівняння* :

$$0 = \frac{1}{2} + C \tag{8}$$

>

***Відповідь* :** *остаточний розв'язок рівняння* $C = -\frac{1}{2}$

> *restart*

>

Задача 2. Визначити тип рівняння (з поясненнями, як це можна зробити вручну). Перевірити правильність визначення типу з допомогою Maple. Розв'язати задане диференціальне рівняння.

Варіант 14

14) $(1+y^2)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0;$

поділимо обидві частини рівняння на dx

$$(1+y^2)x + (1+x^2)\frac{dx}{dy} = 0$$

Переносимо перший доданок праворуч:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$$

розділимо змінні:

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{xdx}{1+x^2}$$

тепер, можемо проінтегрувати обидві частини рівняння

ліва частина:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan(y)$$

права частина:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

$$\int -\frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

запишемо загальний розв'язок

arctan(y) = $-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$

Виконаємо перевірку у Maple.

Задамо диференціальне рівняння та розв'яжемо ДР вручну:

> $ODE := diff(y(x), x) = \dfrac{(1+y(x)^2)x}{1+x^2}$

$$ODE := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \frac{(1+y(x)^2)\,x}{x^2+1} \qquad (9)$$

> $res := dsolve(ODE, y(x));$

$$res := y(x) = \tan\left(\frac{\ln(x^2+1)}{2} + c_1\right) \qquad \textbf{(10)}$$

>

Відповідь **:** *Розв'язок Maple збігається* з *нашим розв'язком, тому рівняння розв 'язане правильно.*

> *restart*

>

Задача 3. Визначити тип рівняння (з поясненнями, як це можна зробити вручну). Перевірити правильність визначення типу з допомогою Maple. Розв'язати задане диференціальне рівняння або задачу Коші.

Варіант 14

14. 1) $\sqrt[3]{xy+2y}dx = dy,\ \ y(-3) = \sqrt{8};$

2) $y' = (x+y)^3 + 3(x+y)^2 + 3(x+y);$

3) $\left(y' - \frac{y}{x}\right) ch\frac{y}{x} = sh^2\frac{y}{x};$

4) $y' = \frac{2(2x+13y-15)}{29x+y-30}.$

Розв'яжемо перше диференційне рівняння

1) $\sqrt[3]{xy+2\,y}\,dx = dy, y(-3) = \sqrt{8}$

Спробуємо метод підстановки, щоб зробити рівняння розв'язуваним.
скористаємось Maple

> $ODE := diff(y(x), x) = (x \cdot y(x) + 2 \cdot y(x))^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot y(x)$

$$ODE := \frac{d}{dx}\, y(x) = (x\, y(x) + 2\, y(x))^{1/3} + 2\, y(x) \quad \textbf{(11)}$$

> $res := dsolve(\{ODE, y(-3) = \mathrm{sqrt}(8)\}, y(x));$

$$res := y(x) = \frac{2}{9}\, \frac{1}{(x+2)^{1/3}} \left(\left(3\, e^4 + \int_{-3}^{x} (\_z1 + 2)^{1/3}\, e^{-\frac{4\,\_z1}{3}}\, d\_z1 \right) e^{\frac{8}{3}x} \sqrt{6} \sqrt{e^{-\frac{4}{3}x} (x+2)^{2/3} \left(3\, e^4 + \int_{-3}^{x} (\_z1 + 2)^{1/3}\, e^{-\frac{4\,\_z1}{3}}\, d\_z1 \right)} \right) \quad \textbf{(12)}$$

>

Відповідь **:** *результат не спрощується* в *красиву елементарну форму*,
бо це дуже складне рівняння, частина виразів це невиразні інтеграли,
які мейпл не може спростити до стандартних функцій.

>

Розв'яжемо перше диференційне рівняння

$y` = (x+y)^3 + 3\cdot(x+y)^2 + 3\cdot(x+y)$

В *цьому рівнянні залежить від суми* $x+y$. *Це ключ до розв'язку.*

виконаємо заміну змінної :

$u = x + y \Rightarrow y = u - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

Підставимо у *рівняння* :

$\frac{du}{dx} = u^3 + 3\cdot u^2 + 3\cdot u + 1$

можемо помітити формулу куба суми $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^2$

За формулою, спростимо наше рівняння :

$\frac{du}{dx} = (u+1)^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{(u+1)^3}$

Проінтегруємо обидві частини

Ліва частина :

$\int \frac{du}{(u+1)^3} = dx$

$\int \frac{du}{(u+1)^3} = \frac{(u+1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2\,(u+1)^2}$

Права Частина :

$\int dx = x + C$

Загальний розв'язок :

$-\frac{1}{2\,(u+1)^2} = x + C$

замінимо u на наш вираз $(x+y)$:

$-\frac{1}{2\,(x+y+1)^2} = x + C$

оримали загальний розв'язок рівняння $y` = (x+y)^3 + 3\cdot(x+y)^2 + 3\cdot(x+y)$.

Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $ODE1 := diff(y(x), x) = (x + y(x))^3 + 3\cdot(x + y(x))^2 + 3\cdot(x + y(x))$

$$ODE1 := \frac{d}{dx}\, y(x) = (x + y(x))^3 + 3\,(x + y(x))^2 + 3\,x + 3\,y(x) \qquad \mathbf{(13)}$$

> $dsolve(ODE1, y(x));$

$$y(x) = -\frac{\sqrt{-2\,c_1 - 2\,x}\;x + \sqrt{-2\,c_1 - 2\,x} - 1}{\sqrt{-2\,c_1 - 2\,x}},\; y(x) = \qquad \mathbf{(14)}$$

$$-\frac{\sqrt{-2\,c_1-2\,x}\;x+\sqrt{-2\,c_1-2\,x}+1}{\sqrt{-2\,c_1-2\,x}}$$

>

***Відповідь* :** *Рівняння розв'язано правильно*

>

3) $\left(y' - \frac{y}{x}\right) ch\frac{y}{x} = sh^2\frac{y}{x};$

Перепишемо задане рівняння

$$\left(y\text{`} - \frac{y}{x}\right) ch\left(\frac{y}{x}\right) = sh^2\left(\frac{y}{x}\right);$$

запишемо стандартну підстанову u

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

$$y\text{`} = u \ + x \cdot u\text{`}$$

підставимо y` та u в наше рівняння. Отримаємо:

$$x \cdot u\text{`} \cdot ch(u) = sh^2(u);$$

$$x \cdot u\text{`} = \frac{sh^2(u)}{ch(u)}$$

$$u\text{`} = \frac{sh^2(u)}{x \cdot ch(u)}$$

Розділимо змінні :

$$\frac{ch(u)}{sh^2(u)} du = \frac{1}{x} dx$$

Проінтегруємо обидві частини

Права частина :

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$$

Ліва частина :

$$\int \frac{ch(u)}{sh^2(u)}\, du = \ln(x) + C$$

Замінимо змінну u нашим виразом. Отримаємо :

$$\int \frac{ch\left(\frac{y}{x}\right)}{sh^2\left(\frac{y}{x}\right)}\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + C$$

Отримали неявний розв'язок нашого ДР. Виконаємо перевірку в *Maple*

> $ODE2 := \left(diff(y(x), x) - \frac{y(x)}{x}\right) \cdot ch\left(\frac{y(x)}{x}\right) = sh\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2$

$$ODE2 := \left(\frac{d}{dx} y(x) - \frac{y(x)}{x}\right) ch\left(\frac{y(x)}{x}\right) = sh\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 \tag{15}$$

> $dsolve(ODE2, y(x));$

$$y(x) = RootOf\left(-\int^{\_Z} \frac{ch(\_a)}{sh(\_a)^2} \, d\_a + \ln(x) + c_1\right) x \tag{16}$$

>

Відповідь **:** *Можемо побачити,*
що мейпл також подав наше диференціальне рівняння у *неявному вигляді.*

>

4) $\quad y' = \frac{2(2x+13y-15)}{29x+y-30}.$

Перепишемо задане рівняння

$$y` = \frac{2\cdot(2\,x\,+\,13\,y\,-15)}{29\,x + y - 30}$$

> $ODE3 := diff(y(x), x) = \frac{(2\cdot(2\cdot x\,+\,13\cdot y(x) - 15))}{29\cdot x + y(x)\,-\,30}$

$$ODE3 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x) = \frac{2\,(2\,x + 13\,y(x) - 15)}{29\,x + y(x) - 30} \quad \textbf{(17)}$$

> $res := dsolve(ODE3, y(x));$

$$res := -6\,\ln\left(\frac{-y(x)\,+x}{x-1}\right) + 5\,\ln\left(-\frac{y(x)\,-5+4\,x}{x-1}\right) - \ln(x-1) - c_1 = 0 \quad \textbf{(18)}$$

> $restart$

>

>

Задача 4. Визначити тип рівняння (з поясненнями, як це можна зробити вручну). Перевірити правильність визначення типу з допомогою Maple. Розв'язати задане диференціальне рівняння або задачу Коші.

Варіант 14

14. $x\sqrt{y}dy - 2y\sqrt{y}dx = 4x\sqrt{x}dx,\ \ y(1) = 1.$

перепишемо наше ДР:

$x\sqrt{y}\,dy - 2\,y\sqrt{x}\,dx = 4\,x\sqrt{x}\,dx, y(1) = 1$

$x\sqrt{y}\,dy = \left(4\,x\sqrt{x} + 2\,y\sqrt{x}\right)dx$

розділимо рівняння на $x\sqrt{y}$. *Отримаємо* :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(4\,x\sqrt{x} + 2\,y\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\,x\sqrt{x}}{x\sqrt{y}} + \frac{2\,y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}}$$

Спростимо рівняння:

$$\frac{\sqrt{y}\,dy}{y^{\frac{1}{2}} + 2\,x^{-1}} = \frac{4\,x^{\frac{1}{2}}\,dx}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

Інтегруємо обидві частини

Ліва частина :

$$\int\sqrt{y}\ \mathrm{d}y = \frac{2\cdot y^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Права частина:

$$\int 4\,y^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = 4\,y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{3}$$

отримуємо рівняння:

$$\frac{2 \cdot y^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{3} + \mathrm{C}$$

помножимо на $y^{\frac{1}{2}}$

$$y^2 = 4\,x^{\frac{3}{2}} + C`((y)^{\frac{1}{2}})$$

Підставимо початкові умови $y(1) = 1$:

$$1^2 = 4 \cdot 1 + C`(1)$$
$$1 = 4 + C$$
$$C = -3$$

остаточний розв'язок :

$$\frac{2 \cdot y^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{3} - 3$$

Виконаємо перевірку в *мейпл* :

> $ODE := x \cdot \mathrm{sqrt}(y(x)) \cdot diff(y(x), x) = simplify(\, 2 \cdot y(x) \cdot \mathrm{sqrt}(x) + 4 \cdot x \cdot \mathrm{sqrt}(x))$

$$ODE := x\sqrt{y(x)}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right) = (4\,x + 2\,y(x))\,\sqrt{x} \qquad \textbf{(19)}$$

> $res := dsolve(\{ODE, y(1) = 1\}, y(x));$

$$res := y(x) = RootOf\Bigg(-\left(\int_{\_b}^{x} -\frac{2\,(2\,\_a + \_Z)}{-\_Z^{3/2}\sqrt{\_a} + 4\,\_a^2 + 2\,\_a\,\_Z}\,\mathrm{d}\_a\right) - \Bigg(\int_0^{\_Z} - \big(\sqrt{\_f}\,\big(8\,x^2\,\_f^{3/2} - \sqrt{x}\,\_f^3 + 4\,x\,\_f^{5/2} - 16\,x^{5/2}\,\_f - 16\,x^{7/2} - 4\,x^{3/2}\,\_f^2\big)\big) \Big/ \big(\big(-\_f^{3/2}\sqrt{x} + 2\,x\,\_f + 4\,x^2\big)\,\big(-\_f^{3/2} + 4\,\_b^{3/2} + 2\,\_f\sqrt{\_b}\big)\,\big(-\_f^{3/2} + 4\,x^{3/2} + 2\,\_f\sqrt{x}\big)\big)\,\mathrm{d}\_f\Bigg) + \int_{\_b}^{1} -\frac{2\,(2\,\_a + 1)}{4\,\_a^2 + 2\,\_a - \sqrt{\_a}}\,\mathrm{d}\_a + \int_0^1 -\frac{\sqrt{\_f}\,(8\,\_f^{3/2} + 4\,\_f^{5/2} - \_f^3 - 4\,\_f^2 - 16\,\_f - 16)}{(-\_f^{3/2} + 4 + 2\,\_f)^2\,(-\_f^{3/2} + 4\,\_b^{3/2} + 2\,\_f\sqrt{\_b})}\,\mathrm{d}\_f\Bigg) \qquad \textbf{(20)}$$

>

Відповідь **:** *Можемо побачити,*
що мейпл подав наше диференціальне рівняння у *неявному вигляді.*