Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1
по дисципліні «Диференціальні рівняння»

Тема: Обчислення визначників
Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2025

Розв'язання:

Теоретичні відомості:

Оператори системи Maple

2.2.5.1. Використання помічника

Помічник є інструментом для розв’язання ODE зі зручним інтерфейсом типу «point-and-click» («вказав та клацнув»). Він має назву **ODE Analyzer**, є аналогом команди **dsolve**, яку розглянемо наступним пунктом, та викликається з головного меню: **Tools → Assistants → ODE Analyzer**.

Вигляд головного вікна помічника показаний на рис. 2.1.

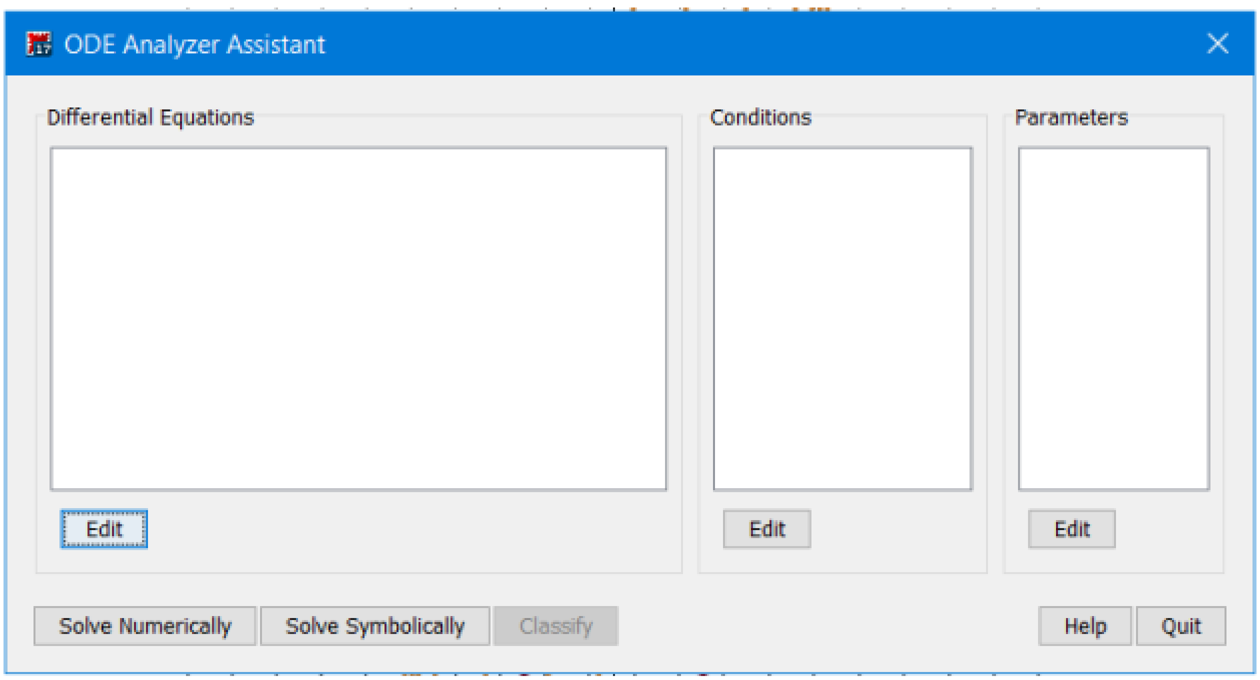
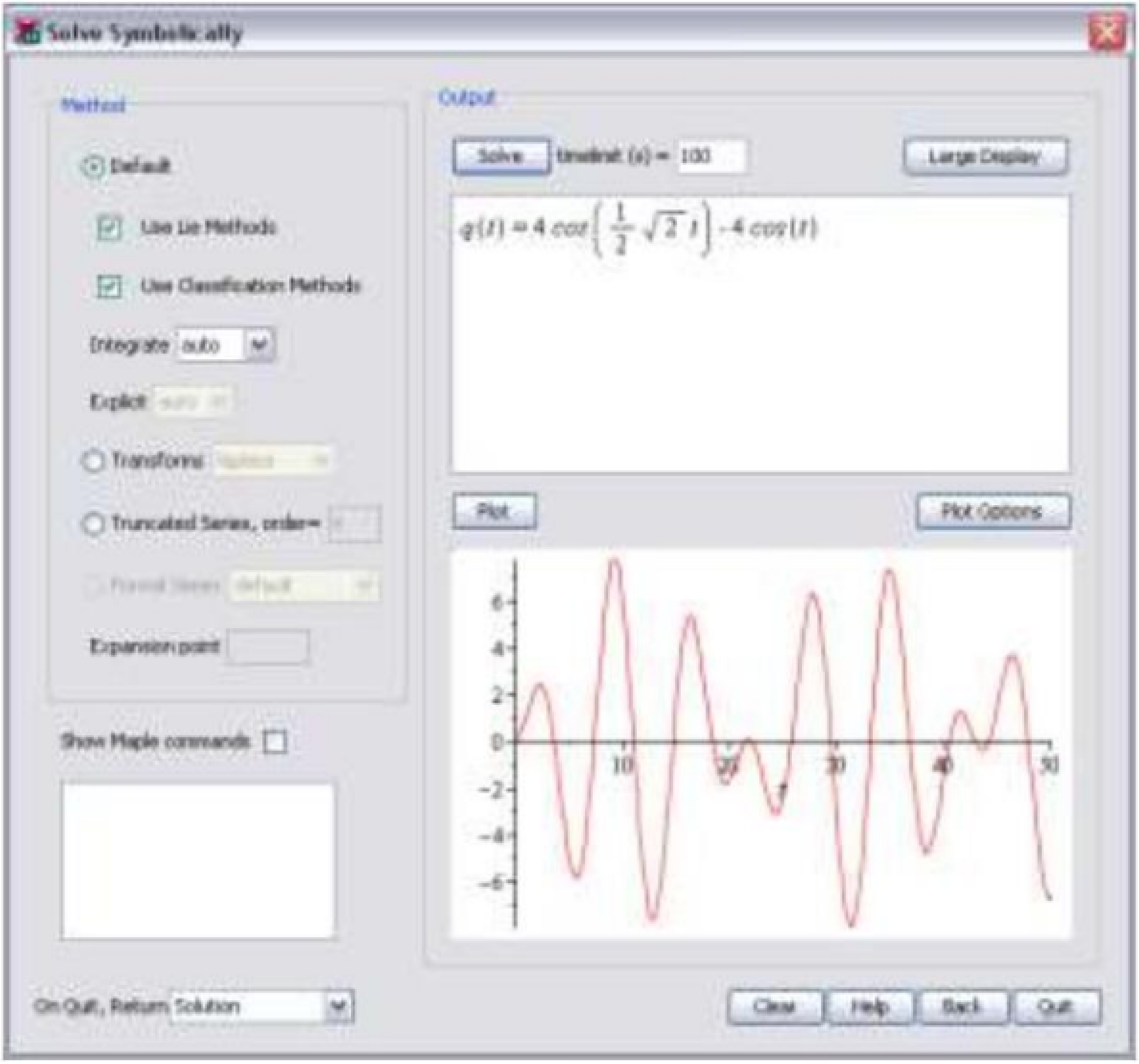
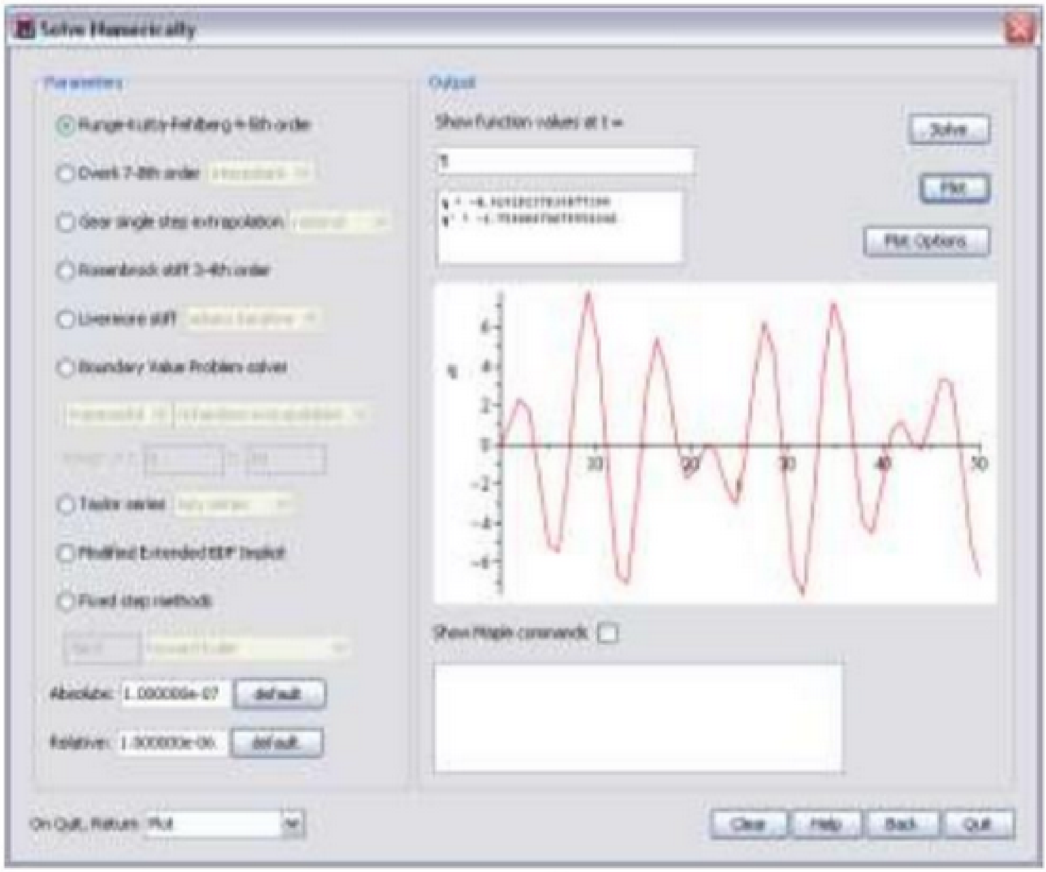


Рис. 2.1. Окно Ассистента **ODE Analyzer**

Воно містить три головні поля:
- Differential equations, в якому задається вигляд рівнянь для розв'язання;
- Conditions, в якому задаються початкові, граничні або крайові умови;
- Parameters, в якому задаються значення параметрів рівнянь, заданих символьно (система їх автоматично розпізнає). Зміст цих полів задається або редагується відповідними кнопками **Edit**.
Після того як необхідні поля заповнені, необхідно обрати спосіб розв'язання – символьний або числовий – шляхом натискання на кнопку Solve Symbolically або Solve Numerically відповідно. Для кожного способу на екрані з'явиться своє віконце (рис. 2.2), в якому обирається метод розв'язання та виводиться сам розв'язок в аналітичному, числовому або графічному виглядах.


Solve Symbolically
Method
Default
Use Lie Methods
Use Classification Methods
Integrate auto
Explicit
Transforms
Truncated Series, order=
Expansion point
Show Maple commands
On Quit, Return Solution
Output
Solve
Large Display
$q(t) = 4\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,t\right) - 4\cos(t)$
Plot
Plot Options
Clear
Help
Back
Quit

a



б

Рисунок 2.2 – Вікна символьного (а) та числового (б) розв’язувань диференціальних рівнянь

Елементи символьного вікна:
- Method – вибір методу розв’язання та за необхідності відповідних до методу параметрів;
- Output – поле для введення незалежної змінної, виведення аналітичного розв’язку, а при натисканні кнопки Plot – побудови графіка знайденої функції, параметри якого можна змінювати кнопкою Plot Options;
- Show Maple Commands – установлення даного прапорця призведе до виведення в лівому нижньому куті віконця Maple-команд, які відповідають діям даного помічника;
- On Quit, Return – вибір способу подання результату, що відобразиться в робочому документі після закриття віконця помічника.

Відмінні елементи числового вікна:
- Parameters – вибір числового методу розв'язання та за необхідності відповідних до методу параметрів; тут поля Absolute та Relative установлюють величину абсолютної та відносної похибок розрахунку;
- Output – поле для введення значення незалежної змінної та виведення розрахованих значень шуканої функції та її похідних у даній точці; при натисканні кнопки Plot будується графік знайденої функції, параметри якого можна змінювати кнопкою Plot Options.
Інші елементи збігаються з елементами символьного вікна.
Параметри, що за замовчуванням зазначені на полях Method або Parameters, є оптимальними для більшості задач.

2.2.5.2. Використання команди dsolve
Універсальною командою для розв'язання ODE та їх систем є команда dsolve, яка може знаходити аналітичні та числові розв'язки, а також розв'язки з розвиненням у ряд.
Синтаксис команди такий:

dsolve ({ODE, InCond}, {y(x)}, options)

Тут ODE – одне або декілька диференціальних рівнянь (в останньому випадку рівняння зазначаються списком [ ] або набором { });
InCond - початкові умови у вигляді y(x0)=y0, D [y][x00]=y00 і т. ін.;
y (x) - шукана функція (одна чи список/набір функцій);
options - необов'язкові опції, що визначають метод розв'язання, наприклад: опція series - якщо використовується - розвинення в ряд, та опція method=laplace - якщо використовується перетворення Лапласа; опція numeric - при числовому розв'язанні.

2.6. Робота з диференціальними рівняннями

Диференціальні рівняння покладені в основу математичних моделей різноманітних фізичних систем, процесів та пристроїв. Система Maple має потужні засоби для розв'язування диференціальних рівнянь і роботи з ними та їх розв'язками. При цьому система дозволяє проводити розв'язування Як символьному, так і в числовому вигляді, для окремих рівнянь та їх систем, для звичайних рівнянь (ordinary differential equations ODE) та рівнянь у частинних похідних (partial differential equations PDE). Крім того, система має спеціальні засоби та пакети команд для виконання специфічних задач, пов'язаних із диференціальними рівняннями.

2.6.1. Символьне розв'язування диференціальних

рівнянь та їх систем. Перевірка розв'язків головні засоби Maple для розв'язування. Існують два диференціальних рівнянь — це команда dsolve та помічник ODE - Analyzer. Використання цих засобів описане в п. 2.2.5. У цьому на прикладах. підрозділі згадаємо використання команди dsolve на прикладах.

Задача 1. Вкажіть розв'язком яких диференціальних рівнянь є функція $y = 8x$. Перевірку виконати класичним способом та за допомогою Maple.

1) $y' - \dfrac{y}{x} = 0;$
2) $y' - 8y = 0;$
3) $y' + y = 8;$
4) $y' - y = 8;$
5) $y'' + y = 8x;$
6) $xy' - 8x = 0;$
7) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}.$

знайдемо похідну функції першого та другого порядку для y = 8x:
y' = 8.

y'' = 0.

Тепер підставимо значення першої та другої похідної у диференціальні рівняння почергово:

1) $y' - \frac{y}{x} = 0$

підставимо значення похідних у рівняння :

$8 - \frac{8x}{x} = 0.$

8 - 8 = 0.

0 = 0.

отримана рівність є тотожністю, отже ця функція є розв'язком диференціального рівняння.

2) $y' - 8y = 0$

$8 - 64x = 0.$

отримана рівність не є тотожністю, отже ця функція не є розв'язком диференціального рівняння.

$3) y' + y = 8$

$8 + 8x = 8$

$8x = 0$

$x = 0$

отримана рівність не є тотожністю, отже ця функція не є розв'язком диференціального рівняння.

$4) y' - y = 8$

$8 - 8x = 8$

$-8x = 0$

$x = 0$

отримана рівність не є тотожністю, отже ця функція не є розв'язком диференціального рівняння.

$5) y'' + y = 8x$

$0 + 8x = 8x$

$8x = 8x$

отримана рівність є тотожністю, отже ця функція є роз'язком диференціального рівняння.

$6) xy' - 8x = 0$

$8x - 8x = 0$

$8x = 8x$

отримана рівність є тотожністю, отже ця функція є роз'язком диференціального рівняння.

$7)\ \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{8}{8\,x} = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

отримана рівність є тотожністю, отже ця функція є роз'язком диференціального рівняння.

перевірка :

> $y := 8 \cdot x;$

знайдемо похідну першого порядку :

$$y := 8\,x \tag{1}$$

> $y1 := diff(y, x)$

$$y1 := 8 \tag{2}$$

> $y2 := diff(y1, x);$

Знайдемо похідну другого порядку :

$$y2 := 0 \tag{3}$$

> $ODE := y1 - \frac{y}{x};$

$$ODE := 0 \tag{4}$$

> $simplify(ODE = 0);$

Рівність є тотожністю. розв'язок правильний.

$$0 = 0 \tag{5}$$

> $ODE1 := y1 - 8 \cdot y;$

$$ODE1 := 8 - 64\,x \tag{6}$$

> $simplify(ODE1 = 0);$

Рівність не є тотожністю. розв'язок правильний.

$$8 - 64\,x = 0 \tag{7}$$

> $ODE2 := y1 + y;$

$$ODE2 := 8 + 8\,x \tag{8}$$

> $simplify(ODE2 = 8);$

Рівність не є тотожністю. розв'язок правильний.

$$8 + 8\,x = 8 \tag{9}$$

> $ODE3 := y1 - y;$

$$ODE3 := 8 - 8\,x \tag{10}$$

> $simplify(ODE3 = 8);$

Рівність не є тотожністю. розв'язок правильний.

$$8 - 8\,x = 8 \tag{11}$$

> $ODE4 := y2 + y;$

$$ODE4 := 8\,x \tag{12}$$

> $simplify(ODE4 = 8 \cdot x);$

Рівність є тотожністю. розв'язок правильний.

$$8\,x = 8\,x \tag{13}$$

> $ODE5 := x \cdot y1 - 8 \cdot y;$

$$ODE5 := -56\,x \tag{14}$$

> $simplify(ODE5 = 0);$

Рівність не є тотожністю. розв'язок правильний.

$$-56\,x = 0 \tag{15}$$

> $ODE6 := \frac{y1}{y}$;

$$ODE6 := \frac{1}{x} \tag{16}$$

> $simplify\left(ODE6 = \frac{1}{x}\right)$;

Рівність є тотожністю. розв'язок правильний.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \tag{17}$$

>

Всі відповіді співпали !

> *restart*

Задача 2. Встановити відповідність між диференціальними рівняннями і заданими функціями, які є розв'язками цього рівняння. Виписати пари (диф.рівняння, функція).

Функції	Рівняння
$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$	$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
$y = Cx + C - C^2$	$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$
$y = 2Cx + C^2$	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy' - xy' + y = 0$
$y = \frac{C_1}{x} + C_2$	$(y')^2 - y' - xy' + y = 0$

Розв'яжемо диференційні рівняння за допомогою функції *dsolve*:

$$> dsolve\left(diff(y(x), x) + y(x)\cdot\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$$

$$y(x) = \sin(x) - 1 + e^{-\sin(x)}\, c_1 \quad \textbf{(18)}$$

$$> dsolve\left(diff(y(x), x\$2) + \frac{2}{x}\cdot diff(y(x), x) = 0\right)$$

$$y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} \quad \textbf{(19)}$$

$$> dsolve\left(y(x)\cdot(diff(y(x), x))^2 + 2\,x\cdot diff(y(x), x) - x\cdot diff(y(x), x) + y(x) = 0\right)$$

$$y(x) = c_1^{\ 2} + 2\,x\,c_1 \quad \textbf{(20)}$$

$$> dsolve\left(diff(y(x), x)^2 - diff(y(x), x) - x\cdot diff(y(x), x) + y(x) = 0\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},\ y(x) = -c_1^{\ 2} + x\,c_1 + c_1 \quad \textbf{(21)}$$

>

Отже, диференціальні рівняння та відповідні функції, що є їх розв'язками :

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$y = Cx + C - C^2 \qquad (y')^2 - y' - xy' + y = 0$$

$$y = 2Cx + C^2 \quad y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy' - xy' + y = 0$$

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$$

> *restart*

>

Задача 3. Перевірити, що функція $y = C \cdot e^{-2x} + \frac{1}{3} \cdot e^{x}$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y' + 2y = e^{x}$ та знайти частинний розв'язок цього рівняння, який задовільняє умові $y(\ln 3) = 2$

> $ODE := diff(y(x), x) + 2 \cdot y(x) = \exp(x)$

$$ODE := \frac{d}{dx}\, y(x) + 2\, y(x) = e^{x} \tag{22}$$

> $func := y(x) = c_1 e^{-2x} + \frac{e^{x}}{3}$

$$func := y(x) = c_1\, e^{-2x} + \frac{e^{x}}{3} \tag{23}$$

>

Скористаємося функцією odetest для перевірки чи є наша функція розв'язком

> *odetest*(*func*, *ODE*)

$$0 \tag{24}$$

>

Отже, наша функція є загальним розв'язком цього рівняння. Для того щоб знайти частинний розв'язок, задовільняючий нашу умову, знайдемо константу C. *Підставимо значення* $x = \ln 3$ *та* $y = 2$:

> $solve\left(C \cdot e^{(-2 \cdot \ln(3))} + \frac{1}{3} e^{\ln(3)} = 2,\ C \right)$

$$9 \tag{25}$$

>

саме цей частинний розв'язок є розв'язком, який здовольняє нашу умову:

$y(x) = 9 \cdot e^{(-2 \cdot \ln(3))} + \frac{1}{3} e^{\ln(3)};$

> *restart*

Задача 4. Визначити, чи є розв'язками заданих диференціальних рівнянь вказані функції

Варіант 14

14) $3xy' - 2y - \frac{x^3}{y^2}$ $\qquad y_1 = x^2 \qquad y_2 = x$

Розв'язання y1:

Похідна функції: y1'=2x

підставимо значення функції y1 та значення похідної y1' у рівняння:

$$3x \cdot 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 - \frac{x^3}{x^4} = 4x^2 - \frac{1}{x}$$

Це не тотожність, тому потрібна перевірка.

Розв'язання y2:

Похідна функції: y2'=1

підставимо значення функції y1 та значення похідної y2' у рівняння:

$$3x - 2 \cdot x - \frac{x^3}{x^2} = x - x = 0$$

$x = x$

маємо тотожність, отже y = x є розв'язком диференціального рівняння

перевірка:

> $y1 := (x)^2$

$$y1 := x^2 \qquad (26)$$

> $y2 := x$

Розв'яжемо диференційне рівняння для першої функції :

$$y2 := x \qquad (27)$$

> $ODE := 3 \cdot x \cdot diff(y1, x) - 2 \cdot y1 - \frac{(x)^3}{(y1)^2}$

Розв'яжемо диференційне рівняння для другої функції :

$$ODE := 4x^2 - \frac{1}{x} \qquad (28)$$

> $ODE := 3 \cdot x \cdot diff(y2, x) - 2 \cdot y2 - \frac{(x)^3}{(y2)^2}$

(29)

$$ODE := 0 \tag{29}$$

>

Отже розв'язком диференційного рівняння є тільки функція $y = x$.

> *restart*

>

Задача 5. Перевірити, чи є для заданих диференціальних рівнянь загальними інтегралами вказані співвідношення.

Варіант 14

14) $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\qquad$ $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

Знайдемо похідні першого та другого порядку заданої функції:

> $y := (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{-2x}$

$$y := (c_2\, x + c_1)\, e^{-2x} \tag{30}$$

> $y1 := diff(y, x)$

$$y1 := c_2\, e^{-2x} - 2\,(c_2\, x + c_1)\, e^{-2x} \tag{31}$$

> $y2 := diff(y1, x)$

$$y2 := -4\, c_2\, e^{-2x} + 4\,(c_2\, x + c_1)\, e^{-2x} \tag{32}$$

>

Підставимо значення похідних у наше рівняння :

> $ODE := y2 + 4 \cdot y1 + 4 \cdot y$

Перевіряємо

$$ODE := 0 \tag{33}$$

> $simplify(ODE = 0)$

$$0 = 0 \tag{34}$$

>

Відповіді співпали!

Висновок: В результаті роботи, ознайомився з перевіркою розв'язків диференційних рівнянь на практиці.