Міністерство освіти і науки України

ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

по дисципліні **«Диференційні рівняння»**

Тема: Лінійні рівняння 1-го порядку та рівняння, що зводяться до них

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: ст. викладач кафедри ПЗАС

Гук В.І.

Черкаси, 2025

Короткі теоретичні відомості

Канонічний вид диференціального рівняння 1-го порядку. Розв’язання однорідного диференціального рівняння 1-го порядку. Метод варіації довільної сталої (**метод Лагранжа**) для інтегрування неоднорідного рівняння.

Метод введення довільних функцій (**метод Бернуллі**) для інтегрування неоднорідного рівняння.

Метод інтегруючого множника.

Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккаті та його форми, для яких відомі способи інтегрування.

Оператори Maple ***odeadvisor***

*Student[ODEs]**DifferentialOrder***

Student[ODEs]***Type***

Student[*ODEs*]***LinearForm***

*Student[ODEs]**ODESteps***

*Student[ODEs]**Test***

Практична частина

Задача 1. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку методом Лагранжа

14. $(x + xy^2 - y^2)dy = y(1 + y^2)dx$

перепишемо диф. рівняння

$(x + xy^2 - y^2)\,dy = y(1 + y^2)\,dx$

Перепишемо рівняння, вважаючи x функцією від y :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(1 + y^2) - y^2}{y(1 + y^2)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{1 + y^2}$$

Це лінійне рівняння для $x(y)$ *виду* :

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y),\ \text{де}$$

$$P(y) = -\frac{1}{y}$$

$$Q(y) = -\frac{y}{1 + y^2}$$

Знайдемо інтегруючий множник :

$$u(y) = e^{\int P(y)\,\mathrm{d}y} = e^{-\ln(y)} = \frac{1}{y}$$

Помножимо обидві частини рівняння на $u(y)$:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2} = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Ліва частина стає похідною :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Інтегруємо обидві частини :

$$\frac{x}{y} - \int \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y + C = -\arctan(y) + C$$

$$x = -y \cdot \arctan(y) + Cy$$

остаточна відповідь :
$x = Cy - y \cdot \arctan(y)$

відповідь знайдено. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $with(DEtools)$:

> $ode := diff(x(y), y) = \frac{x(y)}{y} - \frac{y}{(1 + y^2)}$

$$ode := \frac{d}{dy} x(y) = \frac{x(y)}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} \quad \textbf{(1)}$$

> $dsolve(ode, x(y))$

$$x(y) = \left(-\arctan(y) + c_1\right) y \quad \textbf{(2)}$$

> $sol := x(y) = (-\arctan(y) + C1)\, y$

$$sol := x(y) = (-\arctan(y) + C1)\, y \quad \textbf{(3)}$$

> $odetest(sol, ode);$

$$0 \quad \textbf{(4)}$$

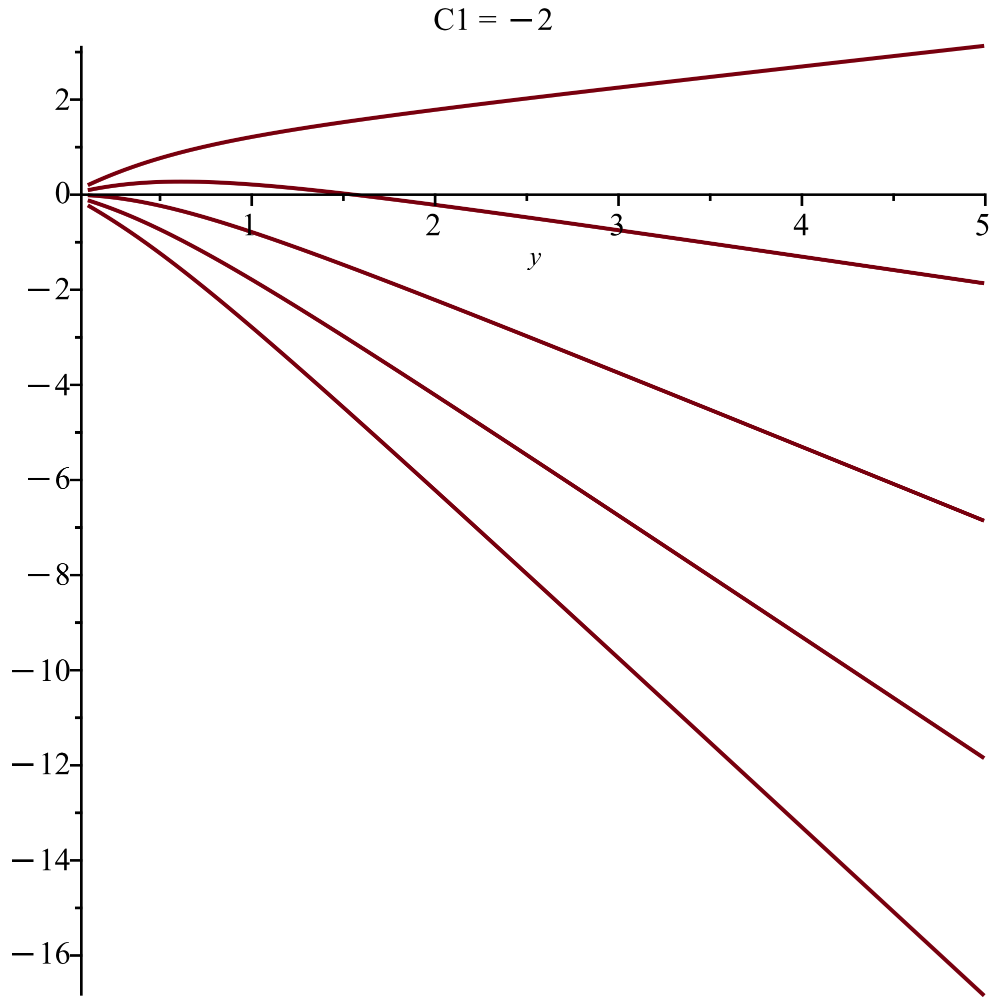
>

Odetest повернув 0, *отже рівняння розв'язано правильно. Побудуємо графік рівняння.*

> $C1\_val := [-2, -1, 0, 1, 2]$

$$C1\_val := [-2, -1, 0, 1, 2] \quad \textbf{(5)}$$

> $plots\text{:-}display(seq(plot(subs(C1 = val, rhs(sol)), y = 0.1\,..5,\ val \textbf{ in } C1\_val));$



>

Завдання виконано.

> *restart*

Задача 2. Розв’язати лінійні диференціальні рівняння або задачу Коші.

14.	1) $y' + \dfrac{y}{x\ln x} = 2x\ln x \quad y(e) = 0$ 2) $e^{y}(e^{y} - x)\, y' = 1$ 3) $5y' + \dfrac{y}{x\ln x} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{4}$ 4) $y' - \dfrac{4y}{x} + 3y^{2} = \dfrac{50}{x^{2}}$

$1\Big)\, y` + \dfrac{y}{xin(x)} 2\, xln(x),\, y(e) = 0$

рівняння у *стандартній формі лінійного рівняння* :

$y`+P(x)y \;\; = Q(x),\, де$

$P(x) = \dfrac{1}{xln(x)}$

$Q(x) = 2\, xln(x)$

Знайдемо інтегруючий множник :

$u(x) = e^{\int P(x)\, \mathrm{d}x} = e^{\int \frac{1}{xln(x)}\, \mathrm{d}x}$

$u = \ln(x)$

$du = \dfrac{dx}{x}$

$\displaystyle\int \frac{1}{u}\, \mathrm{d}u = \ln(u) + C = \ln(\ln(x)) + C$

$u(x) = \ln(x)\;\, де\;\, (x > 1)$

Помножимо обидві частини рівняння на $u(x)$:

$\ln(x) \cdot y` + \dfrac{y}{x} = 2\, x(\ln(x))^{2}$

Ліва частина є *похідною* :

$\dfrac{d(yln(x))}{dx} = 2\, x(\ln(x))^{2}$

Інтегруємо обидві частини :

$yln(x) = \displaystyle\int 2\, x(\ln(x))^{2}\, \mathrm{d}x + C$

Обчислимо інтеграл частинами :

$u = (\ln(x))^{2}$

$$du = 2\ln(x)\cdot\frac{dx}{x}$$

$$dv = 2\,xdx$$
$$v = x^2$$
$$\int 2\,x(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x = x^2(\ln(x))^2 - 2\int xln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$u = \ln(x)$$
$$du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = xdx$$
$$v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int xln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

Повертаємося :

$$\int 2\,xln(x)^2\,\mathrm{d}x = x^2(\ln(x))^2 - x^2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + C$$

загальний розв'язок :
$$yln(x) = x^2(\ln(x))^2 - x^2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + C$$

відносно y :

$$y = x^2(\ln(x))^2 - x^2 + \frac{x^2}{2\ln(x)} + \frac{C}{\ln(x)}$$

Використаємо початкову умову $y(e) = 0$:
$$0 = e^2\cdot 1 - e^2 + \frac{e^2}{2} + C$$
$$C = -\frac{e^2}{2}$$
Підставимо C у *загальний розв'язок* :

$$y = x^2\ln(x) - x^2 + \frac{x^2 - e^2}{2\ln(x)}$$

Остаточна відповідь : $y = x^2\ln(x) - x^2 + \dfrac{x^2 - e^2}{2\ln(x)}$

Рівняння розв'язано. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> *restart*

> *with*(*DEtools*) :

> $ode := diff(y(x), x) + \frac{y(x)}{(x \cdot \ln(x))} = 2 \cdot x \cdot \ln(x);$

$$ode := \frac{d}{dx}\, y(x) + \frac{y(x)}{x \ln(x)} = 2\, x \ln(x) \qquad \textbf{(6)}$$

> $ic := y(\exp(1)) = 0;$

$$ic := y(e) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

> $dsolve(\{ode, ic\}, y(x));$

$$y(x) = \frac{2\, x^2 \ln(x)^2 - 2\, x^2 \ln(x) + x^2 - e^2}{2 \ln(x)} \qquad \textbf{(8)}$$

> $sol := y(x) = \frac{2\, x^2 \ln(x)^2 - 2\, x^2 \ln(x) + x^2 - e^2}{2 \ln(x)}$

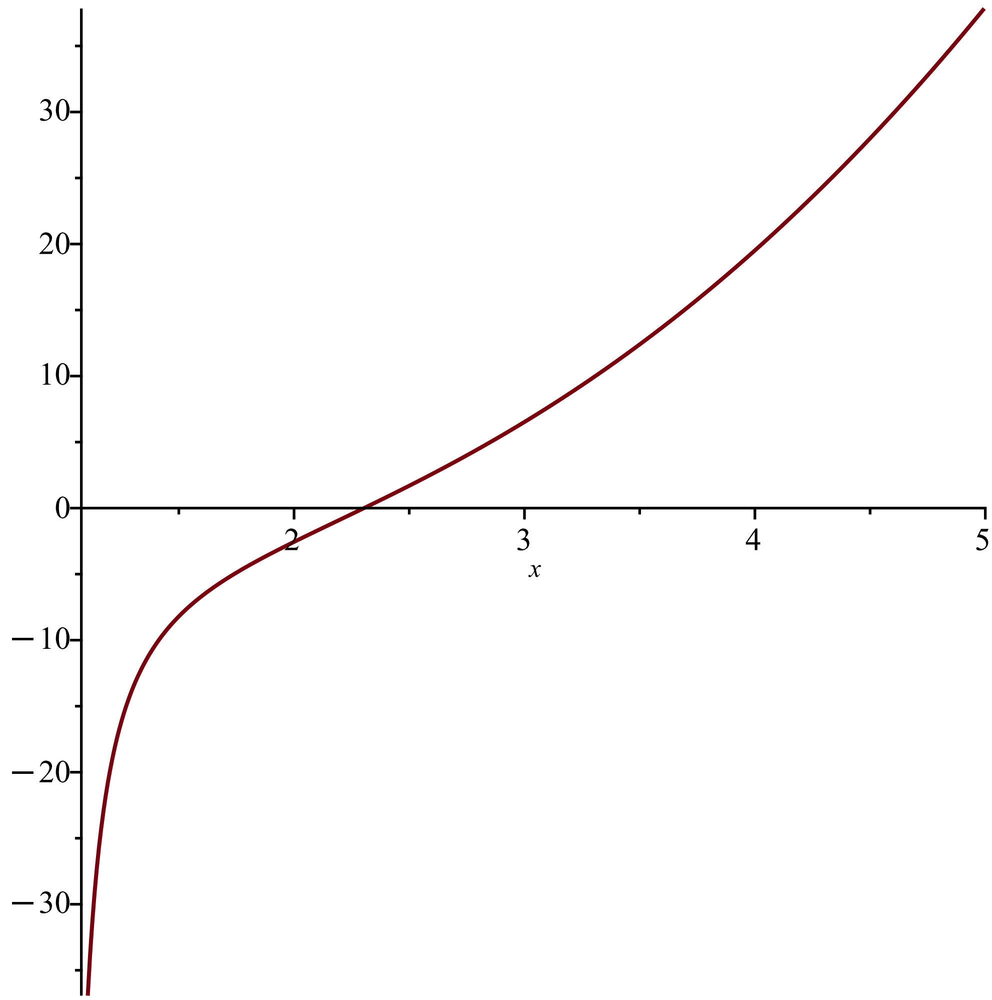
$$sol := y(x) = \frac{2\, x^2 \ln(x)^2 - 2\, x^2 \ln(x) + x^2 - e^2}{2 \ln(x)} \qquad \textbf{(9)}$$

> $odetest(sol, ode);$

$$0 \qquad \textbf{(10)}$$

> *Odetest повернув* 0, *отже рівняння розв'язано правильно. Побудуємо графік рівняння.*

> $plot\left(x^2 \ln(x) - x^2 + \left(x^2 - \frac{e^2}{(2 \ln(x))} \right), x = 1.1 ..5 \right);$



>

Завдання виконано.

> *restart*

$2\Big)\, e^{y}(e^{y}-x)y`=1;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^{y}(e^{y}-x)}$$

$$\frac{dx}{dy}=e^{y}(e^{y}-x)$$

$$\frac{dx}{dy}+e^{y}x=e^{2y}$$

Знайдемо інтегруючий множник :

$$u(y)=e^{\int e^{y}\,\mathrm{d}y}=e^{e^{y}}\cdot e^{2y}$$

Помножимо обидві частини на $u(y)$:

$$\frac{\exp(\exp(y))dx}{dy}+\exp(\exp(y))\cdot\exp(y)x=\exp(\exp(y))\cdot\exp(2y)$$

Інтегруємо обидві частини :

$$x\cdot\exp(\exp(y))=\int\exp(2y+\exp(y))\,\mathrm{d}y+C$$

Для обчислення інтеграла використаємо заміну $u=\exp(y)$, $du=\exp(y)dy$:

$$\int\exp(2y+\exp(y))\,\mathrm{d}y\int\exp(u)u\,\mathrm{d}u=\exp(u)(u-1)+C=\exp(\exp(y))\cdot(\exp(y)-1)+C$$

Підставимо результат інтегрування :

$$x\cdot\exp(\exp(y))=\exp(\exp(y))(\exp(y)-1)+C$$

$$x=e^{y}-1+Ce^{-e^{y}}$$

Відповідь : $x=e^{y}-1+Ce^{-e^{y}}$

Рівняння розв'язано. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> *restart*

> $ode := diff(x(y),y)=\exp(y)\cdot(\exp(y)-x(y));$

$$ode := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x(y)=\mathrm{e}^{y}\left(\mathrm{e}^{y}-x(y)\right) \qquad \textbf{(11)}$$

> $dsolve(ode, x(y))$

$$x(y)=\mathrm{e}^{y}-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{y}}c_{1} \qquad \textbf{(12)}$$

> $sol := x(y)=\mathrm{e}^{y}-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{y}}c_{1}$

(13)

$$sol := x(y) = e^{y} - 1 + e^{-e^{y}} c_1 \tag{13}$$

> $odetest(sol, ode)$

$$0 \tag{14}$$

>

розв'язок диф. рівняння знайдено.

> *restart*

$$3\Big)\, 5\,y` + \frac{y}{x\ln(x)} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

Приведення до рівняння Бернуллі .

Поділимо рівняння на 5 :

$$y` + \frac{y}{5\,x\ln(x)} = \frac{x^4}{5\,y^4}$$

Це рівняння Бернуллі з $n = -4$.

$z = y^5$

тоді $z` = 5(y)^4 y`$

$$y` = \frac{z`}{5\,y^4}$$

Підставимо в *рівняння* і *отримаємо лінійне рівняння для* z :

$$z` + \frac{z}{x\ln(x)} = x^4$$

$u(x) = \ln(x)$ $-$ *інтегруючий множник*

$$\frac{d(z\ln(x))}{dx} = x^4\ln(x)$$

Обчислимо інтеграл правої частини :

$$\int x^4 \ln(x)dx = \frac{x^5}{5}\ln(x) - \frac{x^5}{25} + C$$

$$z\ln(x) = \frac{x^5}{5}\ln(x) - \frac{x^5}{25} + C$$

Повертаємося до y :

$$y^5 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{25\,\ln(x)} + \frac{C}{\ln(x)}$$

Відповідь : $y^5 = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^5}{25\,\ln(x)} + \dfrac{C}{\ln(x)}$

Рівняння розв'язано. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $ode := 5\cdot diff(y(x), x) + \dfrac{y(x)}{(x\cdot\ln(x))} = \left(\dfrac{x}{y(x)}\right)^4$

(15)

$$ode := 5\frac{d}{dx}y(x) + \frac{y(x)}{x\ln(x)} = \frac{x^4}{y(x)^4} \quad \textbf{(15)}$$

> $subs\_z := z(x) = y(x)^5$

Перетворюємо рівняння Бернуллі до лінійного через підстановку

$$subs\_z := z(x) = y(x)^5 \quad \textbf{(16)}$$

> $ode\_z := eval\left(ode, \left\{y(x) = z(x)^{\frac{1}{5}}, diff(y(x), x) = \frac{diff(z(x), x)}{\left(5 \cdot z(x)^{\frac{4}{5}}\right)}\right\}\right)$

$$ode\_z := \frac{\frac{d}{dx}z(x)}{z(x)^{4/5}} + \frac{z(x)^{1/5}}{x\ln(x)} = \frac{x^4}{z(x)^{4/5}} \quad \textbf{(17)}$$

> $ode\_z := simplify\left(ode\_z \cdot 5 \cdot z(x)^{\frac{4}{5}}\right);$

$$ode\_z := \frac{5\left(\frac{d}{dx}z(x)\right)x\ln(x) + 5z(x)}{x\ln(x)} = 5x^4 \quad \textbf{(18)}$$

>

Розв'язуємо лінійне рівняння для $z(x)$

> $sol\_z := dsolve(ode\_z, z(x))$

$$sol\_z := z(x) = \frac{\frac{x^5\ln(x)}{5} - \frac{x^5}{25} + c_1}{\ln(x)} \quad \textbf{(19)}$$

>

Повертаємося до $y(x)$

> $sol\_y := eval(subs\_z, sol\_z)$

$$sol\_y := \frac{\frac{x^5\ln(x)}{5} - \frac{x^5}{25} + c_1}{\ln(x)} = y(x)^5 \quad \textbf{(20)}$$

> $sol\_y := simplify(sol\_y, symbolic)$ assuming $x > 1$

$$sol\_y := \frac{5x^5\ln(x) - x^5 + 25c_1}{25\ln(x)} = y(x)^5 \quad \textbf{(21)}$$

> $odetest(sol\_y, ode)$

$$0 \quad \textbf{(22)}$$

> *розв'язок диф. рівняння знайдено.*

> *restart*

$$4\Big)\; y` - \frac{4\,y}{x} + 3\,y^2 = \frac{50}{x^2}$$

Припустимо, що частковий розв'язок має вигляд $y_p = \frac{k}{x}$. *Підставляємо* у *рівняння* :

$$-\frac{k}{x^2} - \frac{4\,k}{x^2} + \frac{3\,k^2}{x^2} = \frac{50}{x^2}$$

Отримуємо квадратне рівняння :

$$3\,k^2 - 5\,k - 50 = 0$$

$$k = 5$$

$$k = -\frac{10}{3}$$

Використовуємо заміну $y = y_p + \frac{1}{v} = \frac{5}{x} + \frac{1}{v}$

Підставляємо у *вихідне рівняння* :

$$-\frac{5}{x^2} - \frac{v`}{v^2} - \frac{20}{x^2} - \frac{4}{xv} + \frac{75}{x^2} + \frac{30}{xv} + \frac{3}{v^2} = \frac{50}{x^2}$$

отримуємо лінійне рівняння для v

$$v` - \frac{v26}{x} = 3$$

Інтегруючий множник :

$$u(x) = x^{-26}$$

Помножуємо обидві частини на $u(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-26}v\right) = 3\,x^{-26}$$

Інтегруємо :

$$x^{-26}v = -\frac{3}{25}x^{-25} + C$$

$$v = -\frac{3\,x}{25} + Cx^{26}$$

Повернення до змінної y :

$$v = -\frac{3\,x}{25} + Cx^{26}$$

$$y = \frac{5}{x} + \frac{1}{-\frac{3\,x}{25} + Cx^{26}}$$

Спрощуємо :

$$y = \frac{5(Cx^{25} - 2)}{x(Cx^{25} + 3)}$$

Остаточна відповідь : $y = \dfrac{5(Cx^{25} - 2)}{x(Cx^{25} + 3)}$

Рівняння розв'язано. Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $ode := diff(y(x), x) - 4\cdot\dfrac{y(x)}{x} + 3\cdot y(x)^2 = \dfrac{50}{x^2}$

$$ode := \frac{d}{dx}\, y(x) - \frac{4\, y(x)}{x} + 3\, y(x)^2 = \frac{50}{x^2} \quad \textbf{(23)}$$

знаходимо частковий розв'язок

> $part\_sol := y(x) = \dfrac{5}{x}$

$$part\_sol := y(x) = \frac{5}{x} \quad \textbf{(24)}$$

Робимо підстановку $y(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{v(x)}$

> $subs\_v := y(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{v(x)}$

$$subs\_v := y(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{v(x)} \quad \textbf{(25)}$$

> $ode\_v := eval(ode, subs\_v)$

$$ode\_v := -\frac{5}{x^2} - \frac{\frac{d}{dx}\, v(x)}{v(x)^2} - \frac{4\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{v(x)}\right)}{x} + 3\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{v(x)}\right)^2 = \frac{50}{x^2} \quad \textbf{(26)}$$

> $ode\_v := simplify(ode\_v)$

$$ode\_v := \frac{-\left(\frac{d}{dx}\, v(x)\right) x^2 + 50\, v(x)^2 + 26\, x\, v(x) + 3\, x^2}{x^2\, v(x)^2} = \frac{50}{x^2} \quad \textbf{(27)}$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння для $v(x)$

> $dsolve(ode\_v, v(x))$

$$v(x) = -\frac{3}{25}\, x + x^{26}\, c_1 \quad \textbf{(28)}$$

> $res\_v := v(x) = -\dfrac{3}{25}\, x + x^{26}\, c_1$

$$res\_v := v(x) = -\frac{3}{25}\, x + x^{26}\, c_1 \quad \textbf{(29)}$$

Повертаємось до $y(x)$

> $sol := eval(subs\_v, res\_v)$

$$sol := y(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{-\frac{3}{25}\,x + x^{26}\,c_1} \tag{30}$$

> $simplify(sol)$

$$y(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{-\frac{3}{25}\,x + x^{26}\,c_1} \tag{31}$$

Розв'язок знайдено.