Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4
по дисципліні «Диференціальні рівняння»

Тема: Диференціальні рівняння в повних диференціалах.
Інтегруючий множник.

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2025

>

Короткі теоретичні відомості :

Диференціальним рівнянням у повних диференціалах називається рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ , \tag{2.30}$$

ліва частина якого є повним диференціалом деякої функції:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)\ . \tag{2.31}$$

Рівняння (2.30) із урахуванням (2.31) запишеться так:

$$du(x,y)=0\ , \tag{2.32}$$

тому його загальний інтеграл матиме вигляд

$$u(x,y)=C\ . \tag{2.33}$$

Функція $u(x,y)$ знаходиться із системи рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\ .$$

Рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.34}$$

є необхідною і достатньою умовою того, що ліва частина рівняння (2.30) є повним диференціалом деякої функції.

Якщо ліва частина рівняння (2.30) не є повним диференціалом та існує така функція $\mu=\mu(x,y)$, що

$$\mu(Pdx+Qdy)=du\ ,$$

то функція $\mu=\mu(x,y)$ називається ***інтегруючим множником.***

Функція $\mu(x,y)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)\ . \tag{2.35}$$

Якщо

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x), \qquad (2.36)$$

то інтегруючий множник залежить тільки від x, тобто $\mu=\mu(x)$.

Якщо

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\varphi(y), \qquad (2.37)$$

то інтегруючий множник залежить тільки від y, тобто $\mu=\mu(y)$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння $y^2dx+2xydy=0$.

◀Ліва частина даного рівняння є повним диференціалом функції $u(x,y)=y^2x$, тобто $y^2dx+2xydy=d(y^2x)$. Початкове рівняння перепишемо у вигляді $d(y^2x)=0$, звідки одержуємо його загальний інтеграл $y^2x=C$.▶

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $x^2dx+xy^2dx+yx^2dy-y^3dy=0$.

◀Перетворюючи ліву частину рівняння, одержуємо

$$d\left(\frac{x^3}{3}\right)+d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)-d\left(\frac{y^4}{4}\right)=0, \text{ або } d\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)=0,$$

звідки знаходимо загальний інтеграл

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}=C.▶$$

Приклад 3. Проінтегрувати рівняння $(y^2-3x^2y)\,dx+(2yx-x^3)\,dy=0$.

◀Це рівняння вигляду (2.30), де

$$P(x,y)=y^2-3x^2y,\ Q(x,y)=2yx-x^3.$$

Знаходимо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2y-3x^2,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2y-3x^2,$$

звідки

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(y^2-3x^2y)\,dx+(2yx-x^3)\,dy,$$

тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-3x^2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2yx-x^3. \qquad (A)$$

Інтегруємо по x перше з рівнянь (А), вважаючи y сталим, при цьому замість сталої інтегрування поставимо $\varphi(y)$ — невідому функцію від y:

$$u(x,y)=\int(y^2-3x^2y)\,dx=y^2x-x^3y+\varphi(y).$$

Диференціюючи функцію $u(x,y)$ по y, одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2yx-x^3+\varphi'(y).$$

Але $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2yx-x^3$, тому $2yx-x^3+\varphi'(y)=2yx-x^3$, звідки $\varphi'(y)=0$ і $\varphi(y)=C_1$. Отже, $u(x,y)=y^2x-x^3y+C_1$.

З іншого боку, згідно з формулою (2.33) $u(x,y)=C_2$, тому загальний інтеграл має вигляд

$$y^2x-x^3y=C, \text{ де } C=C_2-C_1. ►$$

Приклад 4. Проінтегрувати рівняння $(x^3+3x^2y^2)\,dx+(2x^3y+y^3)\,dy=0$.

◄У даному випадку

$$P(x,y)=x^3+3x^2y^2,\ Q(x,y)=2x^3y+y^3,$$

звідки

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Умова (2.34) виконується, тому дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3+3x^2y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y+y^3.$$

З першої рівності одержуємо

$$u(x,y)=\int(x^3+3x^2y^2)\,dx, \text{ або } u(x,y)=\frac{x^4}{4}+x^3y^2+\varphi(y).$$

Диференціюючи по y функцію $u(x,y)$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y+\varphi'(y).$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y+y^3$, то $2x^3y+\varphi'(y)=2x^3y+y^3$, звідки $\varphi'(y)=y^3$ і

$$\varphi(y)=\int y^3dy=\frac{y^4}{4}+C_1.$$

Підставляючи знайдений вираз для $\varphi(y)$ у формулу для $u(x,y)$, одержимо

$$u(x,y)=\frac{x^4}{4}+x^3y^2+\frac{y^4}{4}+C_1=C_2, \text{ або } \frac{x^4}{4}+x^3y^2+\frac{y^4}{4}=C_3.$$

Отже, загальний інтеграл запишеться у вигляді

$$x^4+4x^3y^2+y^4=C, \text{ де } C=4C_3. ►$$

>

Розв`язання:

>

Варіант 14

Домашнє завдання

Задача 1. Перевірити, чи є вказані рівняння рівняннями в повних диференціалах, або такими, що приводяться до них. Якщо так, то знайти загальний розв'язок заданих диференціальних рівнянь.

14) $\left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\sin x^2 \ln y\right)dx + \left(\frac{\cos x^2}{y} + 2y\sqrt{1-x^2}\, e^{1-y^2}\right)dy = 0$

Перепишемо рівняння дял перевірки на повний диференціал:

$$\left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\,x\cdot sinx^2\cdot\ln(y)\right)dx + \left(\frac{cosx^2}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2}\right)dy = 0.$$

$u(x, y) = 0$

позначимо :

$$P(x, y) = \left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\,x\cdot sinx^2\cdot\ln(y)\right)$$

$$Q(x, y) = \left(\frac{cosx^2}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2}\right)$$

Знайдемо відповідні частинні похідні для P(x,y) та Q(x,y):

Для P(x,y):

$$\frac{dP(x, y)}{dy} = -\frac{2\,x\cdot y}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{1-y^2} - \frac{2\cdot x\cdot\sin\left(x^2\right)}{y}$$

Для Q(x,y):

$$\frac{dQ(x, y)}{dx} = -\frac{2\,x\cdot y}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{1-y^2} - \frac{2\cdot x\cdot\sin\left(x^2\right)}{y}$$

Оскільки $\frac{dQ(x, y)}{dx} = \frac{dP(x, y)}{dy}$,То це диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Отже ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції u(x,y):

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = \left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y) \right)dx + \left(\frac{cosx^2}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2} \cdot e^{1-y^2} \right)dy$$

Тобто :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y) \right)$$

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{cosx^2}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2} \cdot e^{1-y^2} \right)$$

Інтегруємо по x перше рівняння, вважаючи y − сталою, при цьому
замість сталої інтегрування поставимо $\gamma(x)$:

$$\frac{du}{dy} = \int \left(\frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y) \right) \mathrm{d}x = \int \frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y)\,\mathrm{d}x$$

знайдемо перший інтеграл $\int \frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{xe^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -e^{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

знайдемо другий інтеграл $\int 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y)\,\mathrm{d}x$:

$$\int 2\,x\cdot sinx^2\cdot \ln(y)\,\mathrm{d}x = -\cos\left(x^2\right)\ln(y)$$

Маємо :

$$\frac{du}{dy} = -e^{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \cos\left(x^2\right)\ln(y) + \gamma(x)$$

Тепер проінтегруємо друге рівняння по y :

Маємо :

$$\frac{du}{dy} = \int \left(\frac{cosx^2}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2} \cdot e^{1-y^2} \right) \mathrm{d}y = \int \frac{cosx^2}{y}dy + \int 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2} \cdot e^{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

Розбиваємо інтеграл на декілька частин :

Перший інтеграл :

$$\int \frac{cosx^2}{y}dy = cosx^2 \cdot \ln(y)$$

Другий інтеграл :

$$\int 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2}\,\mathrm{d}y = -\sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2}$$

Отримали :

$$\frac{du}{dy} = cosx^2\cdot\ln(y) - \sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2} + \psi(x)$$

Зіставляємо обидва вирази для $u(x,y)u(x,y)$

. *Вони повинні відрізнятись тільки на константу*.

У *обох є однакові доданки* : $-e^{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}$ *та* $\cos(x^2)\ln(y)$

Це означає, що $\gamma(y)=0$ і $\psi(x)=0$

тобто додаткові функції від однієї змінної насправді не додають нічого нового (*або просто*

згортаються в *константу*).

$$u(x,y) = -e^{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \cos(x^2)\ln(y)$$

$du = 0$

Остаточна відповідь : $u(x,y) = C$

Загальний інтеграл буде мати вигляд $-e^{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \cos(x^2)\ln(y) = C$

Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $P := \frac{x\cdot e^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2\cdot x\cdot\sin(x^2)\cdot\ln(y)$

$$P := \frac{x\,e^{-y^2+1}}{\sqrt{-x^2+1}} - 2\,x\sin(x^2)\,\ln(y) \quad \textbf{(1)}$$

> $Q := \left(\frac{\cos(x^2)}{y} + 2\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot e^{1-y^2}\right)$

$$Q := \frac{\cos(x^2)}{y} + 2\,y\sqrt{-x^2+1}\,e^{-y^2+1} \quad \textbf{(2)}$$

Обчислимо часткові похідні :

> $dP := diff(P, y)$:

> $dQ := diff(Q, x)$:

> $simplify(dP - dQ)$;

так як різниця 0 − рівняння у повних диференціалах

$$0 \qquad (3)$$

> $ux := int(P, x) + \text{gamma}(y)$:

> $uy := int(Q, y) + \text{psi}(x)$:

> $simplify(ux)$;

$$-\mathrm{e}^{-(y-1)\,(y+1)}\sqrt{-x^2+1} + \ln(y)\cos(x^2) + \gamma \qquad (4)$$

> $simplify(uy)$;

$$-\mathrm{e}^{-(y-1)\,(y+1)}\sqrt{-x^2+1} + \ln(y)\cos(x^2) + \psi(x) \qquad (5)$$

> $u := simplify(ux)$:

> $u = C$;

$$-\mathrm{e}^{-(y-1)\,(y+1)}\sqrt{-x^2+1} + \ln(y)\cos(x^2) + \gamma = C \qquad (6)$$

> *restart*

Відповідь : *Диференціальні рівняння розв'язані правильно*
. *також рівняння* є в *повних диференціалах*.

>

Задача 2. Впевнитися, що задані диференціальні рівняння є рівняннями в повних диференціалах. Знайти загальні інтеграли або розв'язати задачу Коші.

1.232. $\left(\dfrac{x e^{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\sin x^2 \ln y\right)dx + \left(\dfrac{\cos x^2}{y} + 2y\sqrt{1-x^2}e^{1-y^2}\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

варіант 14

З попереднього завдання, ми знаємо, що диференціальні рівняння є рівняннями в повних диференціалах, тому перепишемо ще раз загальний інтеграл:

$u(x, y) = -e^{1-y^2} \cdot \sqrt{1-x^2} + \cos(x^2)\ln(y)$, *де* $u(x, y) = \mathrm{C}$

Підставимо в умову y(0)=1, та обчислимо значення C для цієї точки.

Отримаємо:

$\mathrm{C} = -e^{1-1^2} \cdot \sqrt{1-0^2} + \cos(0^2)\ln(1)$

$\mathrm{C} = e^{0} \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1.$

Отже остаточна відповідь : $\mathrm{C} = -1$.

виконаємо перевірку в *Maple.*

> $ODE := -\mathrm{e}^{-(y-1)\,(y+1)}\sqrt{-x^2+1} + \ln(y)\cos(x^2)$

$$ODE := -\mathrm{e}^{-(y-1)\,(y+1)}\sqrt{-x^2+1} + \ln(y)\cos(x^2) \qquad \textbf{(7)}$$

> $x := x : y := y :$

> $eval(ODE, [x = 0, y = 1]);$

$$-1 \qquad \textbf{(8)}$$

> *restart*

> Q

Задача 3. **(по 2 задачі на варіант)**

Перевірити, чи є наведені диференціальні рівняння рівняннями в повних диференціалах. Якщо так, то розв'язати диференціальні рівняння. Якщо ні – підібрати інтегруючий множник, а потім розв'язати рівняння.

14

3) $\left(2xy - \dfrac{\sin x \sin y}{y}\right) dx + \left(2x^2 + \dfrac{\cos x \cos y}{y}\right) dy = 0;$

4) $\left(1 + x - ye^{-2(x+y)}\right) dx + \left(x + e^{-2(x+y)} - ye^{-2(x+y)}\right) dy = 0.$

Варіант 14

перепишемо рівняння 3:

$$\left(2 \cdot x \cdot y - \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{y}\right) dx + \left(2 \cdot x^2 + \frac{\cos(x) \cdot \cos(y)}{y}\right) \mathrm{dy} = 0$$

Знайдемо відповідні частинні похідні для P(x,y) та Q(x,y):

$$P(x, y) = \left(2 \cdot x \cdot y - \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{y}\right)$$

$$Q(x, y) = \left(2 \cdot x^2 + \frac{\cos(x) \cdot \cos(y)}{y}\right)$$

$$\frac{dP(x, y)}{dy} = \frac{d\left(2 \cdot x \cdot y - \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{y}\right)}{dy} =$$

$$2 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot (y \cdot \cos(y) - \sin(y))}{y^2}$$

$$\frac{dQ(x, y)}{dy} = \frac{d\left(2 \cdot x^2 + \frac{\cos(x) \cdot \cos(y)}{y}\right)}{dy} = 4 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{y}$$

$\text{так як } \dfrac{dP(x, y)}{dy} \neq \dfrac{dQ(x, y)}{dy}, \text{маємо справу з не повним диференціалом.}$

Спробуємо знайти множник у *вигляді функції* $u(y)$

Використаємо рівність часткових похідних :

$$u(y) P(x, y) = u(y) \cdot \left(\frac{dQ(x, y)}{dx} - \frac{dP(x, y)}{dy}\right);$$

$$\frac{u`(y)}{u(y)} = \frac{\dfrac{dQ(x,y)}{dx} - \dfrac{dP(x,y)}{dy}}{P(x,y)}$$

$$\frac{dP(x,y)}{dy} = 2 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot (y \cdot \cos(y) - \sin(y))}{y^2}$$

$$\frac{dQ(x,y)}{dy} = 4 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{y}$$

$$P(x,y) = \left(2 \cdot x \cdot y - \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{y}\right)$$

$$\frac{dQ(x,y)}{dx} - \frac{dP(x,y)}{dy} = \left(4 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{y}\right) - \left(2 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot (y \cdot \cos(y) - \sin(y))}{y^2}\right)$$

$$\frac{dQ(x,y)}{dx} - \frac{dP(x,y)}{dy} = 2 \cdot x - \frac{\sin(x) \cdot \cos(y)}{y} + \frac{\sin(x) \cdot (y \cdot \cos(y) - \sin(y))}{y^2}$$

видно, що права частина справді залежить лише від y,
отже інтегруючий множник існує

$$y\left(2xy - \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{y}\right)dx + y\left(2x^2 + \frac{\cos(x) \cdot \cos(y)}{y}\right)dy = 0$$

Спрощуємо :

$$\left(2xy^2 - \sin(x)\sin(y)\right)dx + \left(2x^2y + \cos(x)\cos(y)\right)dy = 0$$

позначимо :

$$P'(x,y) = \left(2xy^2 - \sin(x)\sin(y)\right)$$

$$Q'(x,y) = \left(2x^2y + \cos(x)\cos(y)\right)$$

Знову знайдемо відповідні частинні похідні для $P'(x,y)$ *та* $Q'(x,y)$:

$$\frac{dP(x,y)}{dy} = 4xy - \cos(x)\sin(y)$$

$$\frac{dQ(x,y)}{dy} = 4xy - \cos(x)\sin(y)$$

Бачимо, що частинні похідні збігаються.
Тепер ми отримали диференційне рівняння у *повних диференціалах.*

проінтегруємо P`(x,y):

$$f(x, y) = \int 2\,xy^2 - \sin(x)\sin(y)\;\mathrm{d}x = x^2y^2 + \cos(x)\sin(y) + C(y);$$

Знайдемо $\frac{df}{dy}$:

$$\frac{df}{dy} = 2\,x^2 y + \cos(x)\cos(y) + C(y)$$

Знайдене розв'язання :

$$f(x, y) = x^2y^2 + \cos(x)\sin(y) = C$$

Виконаємо перевірку в *Maple* :

Задаємо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$

> $P := \left(2\cdot x\cdot y - \frac{\sin(x)\cdot\sin(y)}{y}\right)$

$$P := 2\,x\,y - \frac{\sin(x)\,\sin(y)}{y} \qquad \textbf{(9)}$$

> $Q := \left(2\cdot x^2 + \frac{\cos(x)\cdot\cos(y)}{y}\right)$

$$Q := 2\,x^2 + \frac{\cos(x)\,\cos(y)}{y} \qquad \textbf{(10)}$$

>

перевіримо, чи рівняння повне :

> $dP := diff(P, y)$:

> $dQ := diff(Q, x)$:

(11)

> $simplify(expand(dQ - dP))$;

$$2\,x - \frac{\sin(x)\,\sin(y)}{y^2} \qquad \textbf{(12)}$$

>

Бачимо, що різниця відмінна від нуля, це значить що рівняння не повне.
Підбираємо інтегруючий множник

> mu := $y \rightarrow y$:

> $P1 := (x, y) \rightarrow simplify(\mathrm{mu}(y)\cdot P)$;

$$P1 := (x, y) \mapsto simplify(\mu(y)\cdot P) \qquad \textbf{(13)}$$

> $Q1 := (x, y) \rightarrow simplify(\mathrm{mu}(y)\cdot Q)$;

$$Q1 := (x, y) \mapsto simplify(\mu(y)\cdot Q) \qquad \textbf{(14)}$$

>

Перевірка повноти після множення

> $dP1 := diff(P1(x, y), y)$

$$dP1 := 4\,x\,y - \sin(x)\,\cos(y) \tag{15}$$

> $dQ1 := simplify(diff(Q1(x, y), x));$

$$dQ1 := 4\,x\,y - \sin(x)\,\cos(y) \tag{16}$$

> $simplify(dQ1 - dP1);$

$$0 \tag{17}$$

>

Тепер ми бачимо, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах
Знайдемо потенціальну функцію $f(x, y)$

> $Fx := simplify(int(P1(x, y), x))$

$$Fx := y^2\,x^2 + \cos(x)\,\sin(y) \tag{18}$$

>

Перевіримо похідну по y і добудуємо функцію

> $dF := diff(Fx, y)$

$$dF := 2\,x^2\,y + \cos(x)\,\cos(y) \tag{19}$$

> $Q1exp := simplify(Q1(x, y));$

$$Q1exp := 2\,x^2\,y + \cos(x)\,\cos(y) \tag{20}$$

> $C = simplify(Q1exp - dF);$

$$C = 0 \tag{21}$$

> $simplify(Fx + int(C, y));$

$$y^2\,x^2 + \cos(x)\,\sin(y) + C\,y \tag{22}$$

>

відповіді співпали.

> $restart$

>

4) $\left(1+x-ye^{-2(x+y)}\right)dx+\left(x+e^{-2(x+y)}-ye^{-2(x+y)}\right)dy=0.$

перепишемо 4 рівняння

$$\left(1+x-y\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(x+y)}\right)dx+\left(x+\mathrm{e}^{-2\cdot(x+y)}-y\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(x+y)}\right)\mathrm{dy}=0$$

Позначимо функції P(x,y) і Q(x,y):

> $with(ODETools):with(Student):with(ODEs):$

> $P := \left(1+x-y(x)\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(x+y(x))}\right)$

$$P := 1+x-y(x)\,\mathrm{e}^{-2x-2y(x)} \quad \textbf{(23)}$$

> $Q := \left(x+\mathrm{e}^{-2\cdot(x+y(x))}-y(x)\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(x+y(x))}\right)$

> $ODE := diff(y(x),x) = -\frac{P}{Q}:$

> $dsolve(ODE, y(x), implicit);$

$$y(x)\,\mathrm{e}^{-x-y(x)}+x\,\mathrm{e}^{x+y(x)}-c_1=0 \quad \textbf{(24)}$$

>

знайдено вигляд розв'язаного диференціаьльного рівняння в *повних диференціалах*.