Міністерство освіти і науки України

ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

по дисципліні **«Диференційні рівняння»**

Тема: Рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної.

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: ст. викладач кафедри ПЗАС

Гук В.І.

Черкаси, 2025

Теоретичні відомості

Форми запису рівнянь 1-го порядку, не розв’язаних відносно похідної. Повні і неповні рівняння. Розв’язання неповних рівнянь, з яких можна виразити одну із змінних. Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро. Оператори Maple parametricsol, firint, odeadvisor

Опис операторів

restart - ініціалізує дані
odeadvisor - визначає класифікацію рівняння
firint - шукає загальний інтеграл (загальний розв'язок у неявному вигляді)
parametricsol - обчислює параметричні рішення для звичайних диференціальних рівнянь
diff - дозволяє знайти похідну
Int - записує інтеграл у загальному вигляді
int - шукає інтеграл

Задача 1. Розв’язати диференціальні рівняння

14 % 10 = 4

4. $y'(x - \ln y') = 1;$

Розв'язання:
Дано рівняння, що не розв'язане відносно похідної
Виконаємо заміну похідної на параметр а:

$y' = a; dy = a \cdot dx$

$a(x - \ln(a)) = 1$

Розв'яжемо рівняння відносно а:

$x - \ln(a) = \frac{1}{a}$

Це трансцендентне рівняння, аналітично розв'язати його важко,
тому підемо іншим шляхом — знайдемо розв’язок у *параметричній формі.*

якщо $a(x - \ln(a)) = 1$, *тоді*

$x = \frac{1 + a \cdot \ln(a)}{a}$

Отже, ми можемо записати:

$x(a) = \frac{1 + a \cdot \ln(a)}{a}$

Знайдемо dx як похідну $x(a)$:

Обчислимо $dx = \frac{dx}{da}$

$x(a) = \frac{1 + aln(a)}{a} = \frac{1}{a} + lna$

$\frac{dx}{da} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{1 - a}{a^2}$

Обчислимо $dy = a \cdot \frac{dx}{da} da$:

$$dy = a \cdot \left(\frac{1-a}{a^2} \right) da = \frac{1-a}{a} da$$

Інтегруємо dy :

$$y = \int \frac{1-a}{a} da = \int \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \mathrm{d}a = \ln(a) - a + C$$

Параметричний розв'язок :

$$x(a) = \frac{1}{p} + lna$$

$$y(a) = \ln(a) - a + C$$

виконаємо перевірку в *Maple*

Позначимо похідну y':

> $a := 'a'$

$$a := a \tag{1}$$

> $ODE := a \cdot (x - \ln(a)) = 1$

$$ODE := a\ (x - \ln(a)) = 1 \tag{2}$$

розв'язуємо рівняння для $x(a)$

> $x\_a := solve(ODE, x)$

$$x\_a := \frac{1 + a\ln(a)}{a} \tag{3}$$

обчислюємо dx / da

> $dx := diff(x\_a, a);$

$$dx := \frac{\ln(a) + 1}{a} - \frac{1 + a\ln(a)}{a^2} \tag{4}$$

$dy = a \cdot dx$

> $dy := a \cdot dx$

$$dy := a \left(\frac{\ln(a) + 1}{a} - \frac{1 + a\ln(a)}{a^2} \right) \tag{5}$$

> $y\_a := int(dy, a) + C$

$$y\_a := a - \ln(a) + C \tag{6}$$

Відповіді збігаються.

> $restart$

>

Задача 2. *Розв'язати диференціальні рівняння*

14. $y = xy' - \sqrt{1 - y'^2}$.

перепишемо задане диференційне рівняння:

$y = x \cdot y\text{`} - \sqrt{1 - y\text{`}^2}$

Це рівняння Клеро виду $y = xy\text{`} + f(y\text{`})$, де $f(y\text{`}) = -\sqrt{1 - (y\text{`})^2}$

припустимо $y\text{`} = C$. *Підставимо у рівняння:*

$y = Cx - \sqrt{1 - C^2}$

$$\begin{cases} y = Cx - \sqrt{1 - C^2} \\ 0 = x - \dfrac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \end{cases}$$

З другого рівняння:

$$C = \frac{x}{\sqrt{1 - C^2}}$$

Підставляємо C у перше рівняння:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - C^2}} - \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}} = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Остаточна відповідь:

Загальний розв'язок :

$y = Cx - \sqrt{1 - C^2}$

Особливий розв'язок :

$$y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

>

```
> with(Student[ODEs])
```

[*ChangeVariables, DifferentialOrder, Integrate, IntegratingFactor, IsolateHighestDerivative, LinearForm, ODEPlot, ODESteps, ReduceOrder, SeparateVariables, Solve, Test, Type*] **(7)**

```
> ode := y(x) = x * diff(y(x), x) - sqrt(1 - (diff(y(x), x))^2);
```

$$ode := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^{2}} \tag{8}$$

> *dsolve*(*ode*, *y*(*x*));

$$y(x) = x\,c_{1} - \sqrt{-c_{1}^{2} + 1} \tag{9}$$

>

відповіді збігаються.

> *restart*

>

Задача 3. Розв'язати диференціальні рівняння

Варіант 14 % 10 = 4

1) $x = ((y')^2 - 2y' + 2)e^{y'}$;

2) $y = \dfrac{(y')^6}{6}\ln y' - \dfrac{(y')^6}{36}$;

3) $y\ln y' + y'e^{y/y'} - xy' = 0$;

4) 4) $y = x(y' - e^{-y'}) + e^{2e^{y'}}$.

1) $x = ((y')^2 - 2y' + 2)e^{y'}$;

перепишемо задане диференційне рівняння:

$x = \left((y`)^2 - 2\,y`+2 \right) e^{y`}$

$y` = p$

$dy = pdx$

Знайдемо dx через dp:

$dx = \dfrac{d}{dp}\left[\left((p)^2 - 2\,p + 2 \right) e^{p} \right] dp = p^2 e^p dp$

Тоді :

$dy = p^3 \cdot e^p dp$

Інтегруємо dx і dy :

$x = \int p^2 e^p dp \,\mathrm{d}p = \left((p)^2 - 2\,p + 2 \right) e^{p} + C$

$C = 0,$ *отже* :

$x = \left((p)^2 - 2\,p + 2 \right) e^{p}$

Для y :

$$y = \int p^3 e^p dp = \left(p^3 - 3\,p^2 + 6\,p - 6\right) e^p + C$$

Виключити параметр p з системи важко через трансцендентний характер рівнянь. Тому розв'язок залишається у параметричній формі.

$$\begin{cases} x = \left((p)^2 - 2\,p + 2\right) e^p \\ y = \left(p^3 - 3\,p^2 + 6\,p - 6\right) e^p + C \end{cases}$$

виконаємо перевірку в мейпл

```
> ode := x = ((diff(y(x), x))^2 - 2*diff(y(x), x) + 2)*exp(diff(y(x), x));
```

$$ode := x = \left(\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 2\,\frac{d}{dx}\,y(x) + 2\right) e^{\frac{d}{dx}\,y(x)} \quad \textbf{(10)}$$

```
> dsolve(ode, y(x));
```

$$y(x) = \int RootOf\left(e^{\_Z}\,\_Z^2 - 2\,e^{\_Z}\,\_Z + 2\,e^{\_Z} - x\right) dx + c_1 \quad \textbf{(11)}$$

Знайдено параметричний розвя'зок. Будуємо графік :

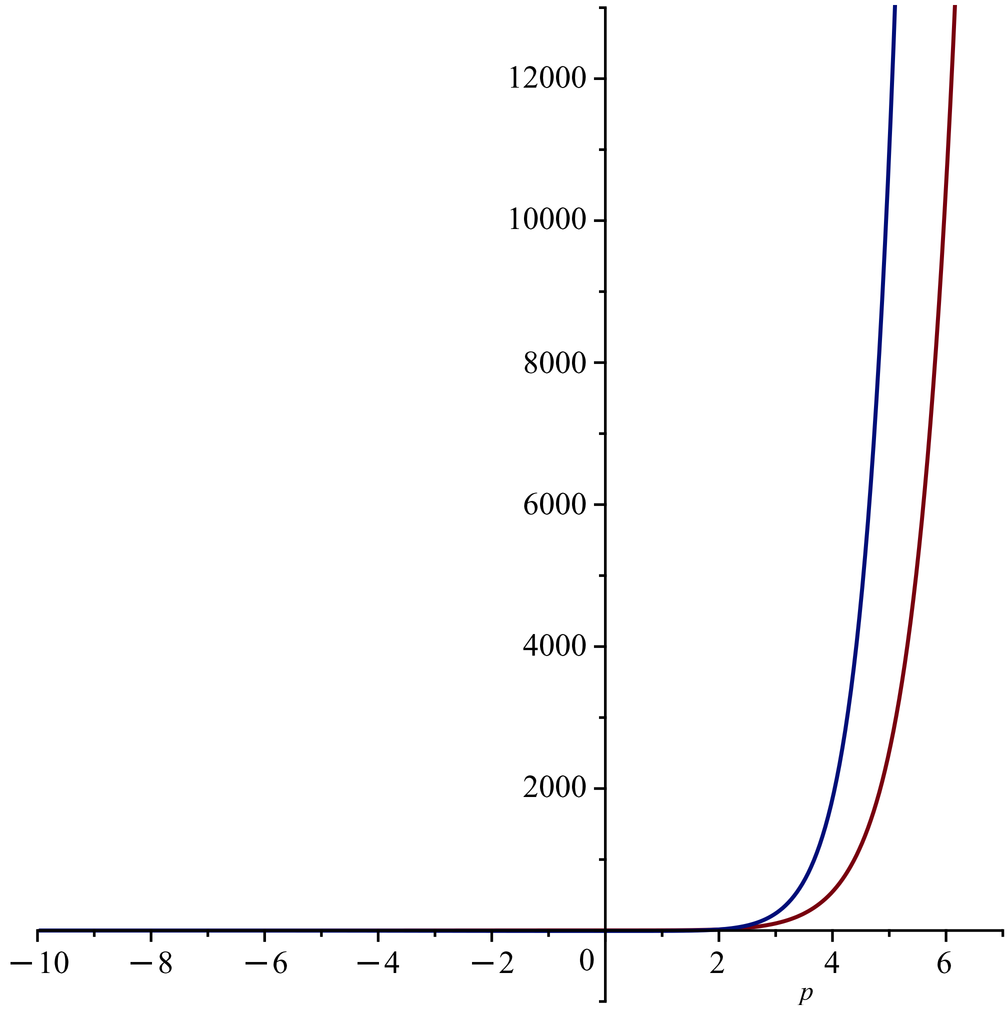
```
> xp := ((p)^2 - 2p + 2)e^p
```

$$xp := \left(p^2 - 2\,p + 2\right) e^p \quad \textbf{(12)}$$

```
> yp := (p^3 - 3p^2 + 6p - 6)e^p
```

$$yp := \left(p^3 - 3\,p^2 + 6\,p - 6\right) e^p \quad \textbf{(13)}$$

```
> plot([xp, yp])
```



>

Висновок : Цей тип ДР оператор dsolve не розв'язує . Розв
'язок був представлений тільки вручну

> *restart*

$$2)\quad y=\frac{(y')^6}{6}\ln y'-\frac{(y')^6}{36};$$

перепишемо задане диференційне рівняння :

$$y=\frac{(y`)^6}{6}\ln(y`)-\frac{(y`)^6}{36}$$

$p=y`;$

$$p=\frac{p^6}{6}\ln(p)-\frac{p^6}{36}$$

Знайдемо диференціал у через параметр р :

$$dy=\frac{d}{dp}\cdot\left(\frac{p^6}{6}\ln(p)-\frac{p^6}{36}\right)dp=p^5\ln(p)dp$$

Інтегруємо dx, використовуючи інтегрування частинами :

$u=\ln(p),\ dv=p^4dp$

$$\int\ln(p)p^4dp=\frac{p^5}{5}\ln(p)-\frac{1}{5}$$

$$\int p^4dp=\frac{p^5}{5}\ln(p)-\frac{p^5}{25}+C$$

$$x=\frac{p^5\ln(p)}{5}-\frac{p^5}{25}+C$$

Отже, Остаточний розв'язок у *параметричній формі* :

$$\begin{cases} x=\dfrac{p^5\ln(p)}{5}-\dfrac{p^5}{25}+C \\ y=\dfrac{p^6}{6}\ln(p)-\dfrac{p^6}{36}\end{cases}$$

Знайдено параметричний розвя'зок. Будуємо графік :

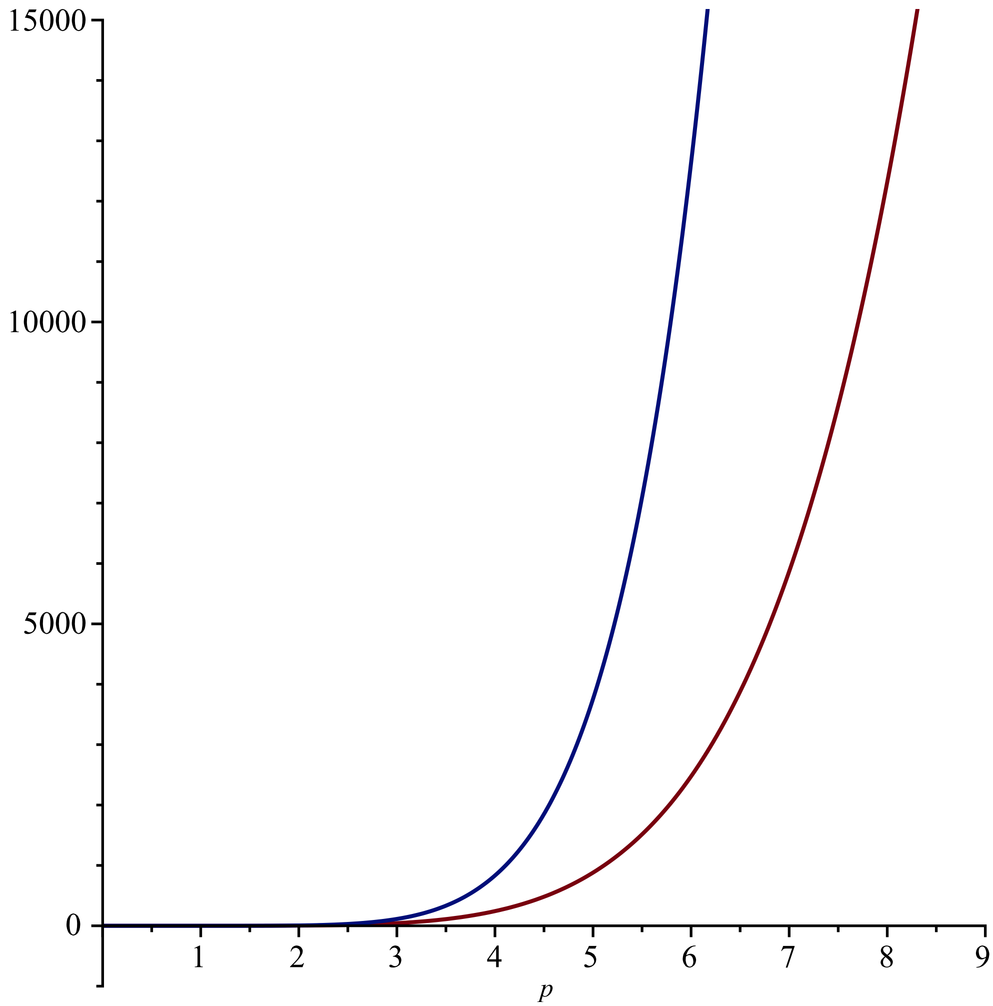
> $xp := \frac{p^5 \ln(p)}{5} - \frac{p^5}{25}$

$$xp := \frac{p^5 \ln(p)}{5} - \frac{p^5}{25} \qquad \textbf{(14)}$$

> $yp := \frac{p^6}{6} \ln(p) - \frac{p^6}{36}$

$$yp := \frac{p^6 \ln(p)}{6} - \frac{p^6}{36} \qquad \textbf{(15)}$$

> $plot([xp, yp])$



>

Графік побудовано. виконаємо перевірку

> $with(Student[ODEs]); with(DETools):$

[*ChangeVariables, DifferentialOrder, Integrate, IntegratingFactor, IsolateHighestDerivative, LinearForm, ODEPlot, ODESteps, ReduceOrder, SeparateVariables, Solve, Test, Type*] **(16)**

> $ode := y(x) = \left(\frac{(diff(y(x), x))^6}{6} \cdot \ln(diff(y(x), x)) - \frac{(diff(y(x), x))^6}{6} \right);$

$$ode := y(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^6 \ln\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)}{6} - \frac{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^6}{6} \tag{17}$$

> $solution := dsolve(ode, y(x))$

$$solution := x - \left(\int^{y(x)} \frac{1}{RootOf(\_Z^6 \ln(\_Z) - \_Z^6 - 6\_a)} \, d\_a \right) - c_1 = 0 \tag{18}$$

>

Висновок : Цей тип ДР оператор dsolve не розв'язує . Розв 'язок був представлений тільки вручну

> *restart*

3) $y \ln y' + y' e^{y/y'} - xy' = 0;$

перепишемо задане диференційне рівняння :

$yln(y`) + y`(\mathrm{e})^{\frac{y}{y`}} - xy`=0$

$p= y`$

$yln(p) + p\cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{p}} - xp = 0$

Введемо $z = \frac{y}{p}$, *тоді* $y = zp$:

$zln(p) + p\cdot \mathrm{e}^{z} - x = 0$

Звідси :

$x = zln(p) + p\cdot e^{z}$

Диференціюємо x *та* y :

Оскільки $y = zp$, *диференціал* y :

$dy = pdz + zdp$

$pdx = pdz + zdp$

$dx = dz + \frac{z}{p} dp$

Вираз для dx :

$dx = \ln(p)dz + \frac{z}{p}dp + e^{z}dz$

$dz = \ln(p)dz + e^{z}dz$

$dz(1 - \ln(p) - e^{z} = 0$

Отримаємо два випадки :

$dz = 0$

$z = C$, *тоді*

$x = Cln\left(p\right) + e^{C}, y = Cp$

Загальний параметричний розв'язок :

$$\begin{cases} x = Cln(p) + e^{C} \\ \quad y = Cp \end{cases}$$

Викогнаємо перевірку в *Maple та побудуємо графік* :

> $del := y(x)\cdot\ln(diff(y(x), x)) + diff(y(x), x)\cdot\exp(y(x) / diff(y(x), x)) - x\cdot diff(y(x), x) = 0;$

(19)

$$del := y(x)\,\ln\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)e^{\frac{y(x)}{\frac{d}{dx}\,y(x)}} - x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \qquad \mathbf{(19)}$$

> $sol := dsolve(del, y(x))$

$$sol := y(x) = c_1\, e^{\frac{x}{c_1} - \frac{e^{c_1}}{c_1}} \qquad \mathbf{(20)}$$

>

Maple автоматично спростив параметричний розв'язок до явного вигляду, використовуючи алгебраїчні перетворення.

> *restart*

4) $y = x(y' - e^{-y'}) + e^{2e^{y'}}$.

перепишемо задане диференційне рівняння :

$$y = x\left(y\text{`-}(e)^{-y\text{`}}\right) + e^{2e^{y\text{`}}}$$

$$p = y\text{`}$$

$$y = x\left(p - (e)^{-p}\right) + e^{2e^{p}}$$

Продиференціюємо ліву та праву частини рівняння по x :

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{d}{dx}\left[x\left(p - e^{-p}\right) + e^{2e^{p}}\right]$$

Похідна від $x\left(p - e^{-p}\right)$:

$$\left(p - e^{-p}\right) + x\frac{d}{dx}\left(p - e^{-p}\right) = \left(p - e^{-p}\right) + \frac{x\left(1 + e^{-p}\right) dp}{dx}$$

$$p = \left(p - e^{-p}\right) + \frac{x\left(1 + e^{-p}\right) dp}{dx} + \frac{2\, e^{p + 2e^{p}} dp}{dx}$$

переносимо $\left(p - e^{-p}\right)$ *вліво* :

$$e^{-p} = \frac{dp}{dx}\left[x\left(p - e^{-p}\right) + 2\, e^{p + 2e^{p}}\right]$$

Виразимо $\frac{dx}{dp}$:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\left(1 + e^{-p}\right) + 2\, e^{p + 2e^{p}}}{e^{-p}} = x\left(1 + e^{-p}\right)e^{p} + 2\, e^{p + 2e^{p}}$$

Лінійне диференціальне рівняння для $x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} - x\left(1 + e^{p}\right) = 2\, e^{p + 2e^{p}}$$

Знайдемо інтегрувальний множник :

$$\mu(p) = e^{-\int\left(1 + e^{p}\right) \mathrm{d}p} = 2\, e^{p + e^{p}}$$

Проінтегруємо :

$$x \cdot e^{-p - e^{p}} = 2e^{e^{p}} + C$$

Виразимо x : $x = e^{p + e^{p}}\left(2^{e^{e^{p}}} + C\right)$

Вираз для $y(p)$
Підставимо $x(p)$ у *вихідне рівняння* :

$$y = e^{e^{p}}\left[e^{e^{p}}(2pe^{p} - 1) + C(pe^{p} - 1)\right]$$

Остаточна відповідь в *параметричній формі* :

$$\begin{cases} x = e^{p + e^{p}}\left(2^{e^{e^{p}}} + C\right) \\ y = e^{e^{p}}\left[e^{e^{p}}(2pe^{p} - 1) + C(pe^{p} - 1)\right] \end{cases}$$

> $f := y(x)$

$$f := y(x) \tag{21}$$

> $f1 := diff(y(x), x)$

$$f1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) \tag{22}$$

> $ode := f = x \cdot (f1 - \exp(-f1)) + \exp(2 \cdot \exp(f1))$

$$ode := y(x) = x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)}\right) + \mathrm{e}^{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)}} \tag{23}$$

> $sol := dsolve(ode, y(x))$

$$sol := \left[x(\_T) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{-\_T}}}\left(2\,\mathrm{e}^{\_T}\,\mathrm{e}^{-\_T}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\_T}} + c_1\right)}{\mathrm{e}^{-\_T}}, y(\_T) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{-\_T}}}\left(2\,\mathrm{e}^{\_T}\,\mathrm{e}^{-\_T}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\_T}} + c_1\right)\left(\_T - \mathrm{e}^{-\_T}\right)}{\mathrm{e}^{-\_T}} + \mathrm{e}^{2\,\mathrm{e}^{\_T}}\right] \tag{24}$$

Maple не може розв'язати це рівняння

>