Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 8
з дисципліни «Диференціальні рівняння»

Тема: Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами

Варіант 14

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Перевірив: старший викладач
кафедри ПЗАС
Гук В.І.

Черкаси, 2025

>

Короткі Теоретичні відомості **:**

Загальний вигляд лінійного однорідного рівняння із постійними коефіцієнтами. Характеристичне рівняння та його корні. Вид функцій, що є розв'язком ДР залежно від кореня характеристичного рівняння та його кратності. Фундаментальна система розв'язків ЛОДР. Загальний розв'язок ЛОДР.

Оператори Maple:

factor*,* ***dsolve****, Student[ODEs][Solve]****SecondOrder,***

*Student[Basics]****OutputStepsRecord***

Лінійне однорідне рівняння n-го порядка з постійними коефіцієнтами має вигляд:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$*- задані дійсні числа.*

Для розв'язання рівняння (1) потрібно спочатку найти всі корені (взагалі кажучи, комплексні) відповідного ***характеристичного рівняння***:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

Функції, зіставленні вказаним образом всім дійсним корінням і всім парам комплексно-спряжених коренів рівняння (2), утворюють ***фундаментальну систему розв'язків*** диференціального рівняння (1). Взяв лінійну комбінацію цих функцій з довільними дійсними коефіцієнтами, отримаємо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1).

разом з їх кратностями.

Якщо γ – дійсний корінь рівняння (2) деякої кратності k. Поставимо йому у відповідність функції $e^{\gamma x}, xe^{\gamma x}, \dots, x^{k-1}e^{\gamma x}$.

Якщо $\alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$ – пара комплексно-спряжених коренів рівняння (2) кратності s. Поставимо цим кореням у відповідність функції $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$;
$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \dots, x^{s-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

>

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Розв'язати диференціальні рівняння.

варіант 14 % 12 = 2

2) 1) $y^{(4)} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = 0;$
2) $y^{(6)} + 5y^{(4)} + 8y'' + 4y = 0;$
3) $y^{(7)} + 8y^{(4)} + 40y''' + 320y = 0.$

1) $y^{(4)} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = 0;$

перепишемо диф. рівняння

$y^{(4)} + 5\,y``` + 9y`` + 7y` + 2\,y = 0$

Знаходимо корені характеристичного рівняння
Перевіряємо раціональні корені. Підстановкою $r = -1$:

$$(-1)^4 + 5(-1)^3 + 9(-1)^2 + 7(-1) + 2 = 1 - 5 + 9 - 7 + 2 = 0$$

Отже, $r = -1$ *— корінь.*

Ділимо поліном на $(r+1)$ *за схемою Горнера та отримуємо поліном третього степеня* :

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2$$

Підставляємо $r = -1$ *ще раз* :
$-1 + 4 - 5 + 2 = 0$
Отже, $\lambda = -1$ *— повторний корінь.*

Ділимо новий поліном на $(\lambda + 1)$ *та отримуємо квадратне рівняння* :
$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$\lambda 1 = -1$ $\lambda 2 = -2$

Загальний розв'язок диференціального рівняння для двох коренів :
Для кореня $\lambda = -1$ з *кратністю* 3 :

$$e^{-x}\left(C1 + C2x + C3x^2\right)$$

Для кореня $\lambda=-2$:
$C4e^{-2x}$

Остаточний розв'язок :
$y(x)=e^{-x}(C1+C2x+C3x^2)+C4e^{-2x}$

виконаємо перевірку в *Maple* :

> $char := \lambda^4+5\lambda^3+9\lambda^2+7\lambda+2=0$

$$char := \lambda^4+5\lambda^3+9\lambda^2+7\lambda+2=0 \quad (1)$$

> $factor(char)$
розкладемо на множники :

$$(\lambda+2)(\lambda+1)^3=0 \quad (2)$$

> $f := y(x);$

$$f := y(x) \quad (3)$$

> $ode := diff(f, x\$4)+5\cdot diff(f, x\$3)+9\cdot diff(f, x\$2)+7\,diff(f, x)+2f=0$

$$ode := \frac{d^4}{dx^4}y(x)+5\frac{d^3}{dx^3}y(x)+9\frac{d^2}{dx^2}y(x)+7\frac{d}{dx}y(x)+2y(x)=0 \quad (4)$$

> $simplify(dsolve(ode))$

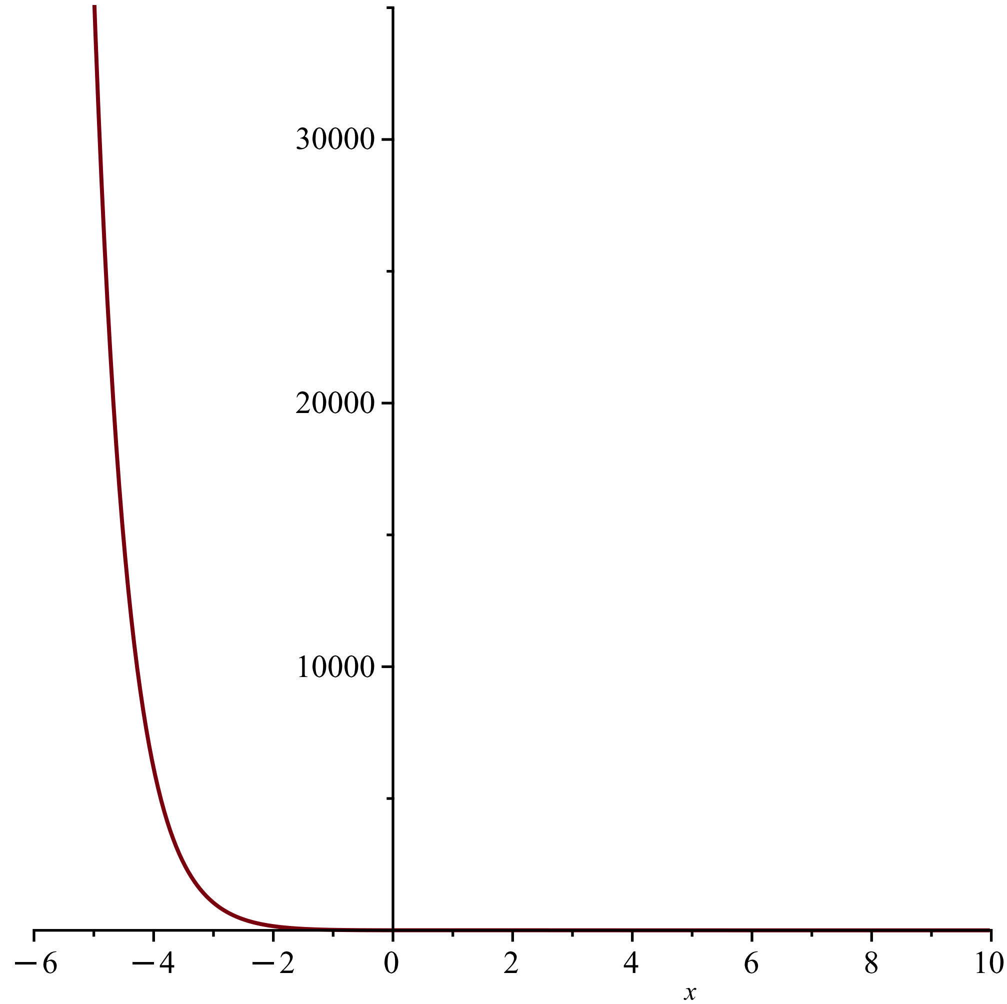
$$y(x)=\left(x^2 c_4+x c_3+c_2\right)e^{-x}+c_1 e^{-2x} \quad (5)$$

> $C_1 := 1;$
$C_2 := 2;$
$C_3 := 2;$
$C_4 := 4$

$$C_1 := 1$$
$$C_2 := 2$$
$$C_3 := 2$$
$$C_4 := 4 \quad (6)$$

>
Побудуємо графік при $C_1=1,\ C_2=2,\ C_3=3,\ C_4=4$:

> $plot\left(\left(x^2\cdot C_4+x\cdot C_3+C_2\right)e^{-x}+C_1\cdot e^{-2x}, x=-10..10\right)$



>

завдання виконано.

>

2) $y^{(6)} + 5y^{(4)} + 8y'' + 4y = 0;$

Перепишемо диф. рівняння:
$y^{(6)} + 5\,y^{(4)} + 8\,y^{``} + 4\,y = 0$

находимо корені характеристичного рівняння
Виконаємо заміну $z = r^2$:

$\lambda^3 + 5\,\lambda^2 + 8\,\lambda + 4 = 0$
Підстановкою визначаємо корені :

$\lambda = -1 \ : \lambda^2 = -1 \Rightarrow r = \pm\, i$
$\lambda = -2 \ : \lambda^2 = -2 \Rightarrow r = \pm\, \sqrt{2}\, i$

для $r = \pm\, i$:
$\cos(x), \sin(x)$

для $r = \pm\, \sqrt{2}\, i$:

$\cos(\sqrt{2}\,x), \sin(\sqrt{2}\,x), x\cos(\sqrt{2}\,x), x\sin(\sqrt{2}\,x)$

Загальний розв'язок :

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot x) + C_5 \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x) + C_5 \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot x) \cdot x + C_6 \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x)$$

Виконаємо перевірку в *Maple* :

> *restart*

> $char := \lambda^6 + 5 \cdot \lambda^4 + 8 \cdot \lambda^2 + 4 = 0$

$$char := \lambda^6 + 5\,\lambda^4 + 8\,\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

>

розкладемо на множники :

> $factor(char)$

$$(\lambda^2 + 1)\,(\lambda^2 + 2)^2 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

> $ode := diff(y(x), x\$6) + 5 \cdot diff(y(x), x\$4) + 8 \cdot diff(y(x), x\$2) + 4 \cdot y(x) = 0;$

$$ode := \frac{d^6}{dx^6}\, y(x) + 5\, \frac{d^4}{dx^4}\, y(x) + 8\, \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 4\, y(x) = 0 \tag{9}$$

> $sol := dsolve(ode, y(x));$

$$sol := y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + c_3 \sin\left(\sqrt{2}\, x\right) + c_4 \cos\left(\sqrt{2}\, x\right) + c_5 \sin\left(\sqrt{2}\, x\right) x + c_6 \cos\left(\sqrt{2}\, x\right) x \tag{10}$$

> $simplify(eval(ode, sol));$

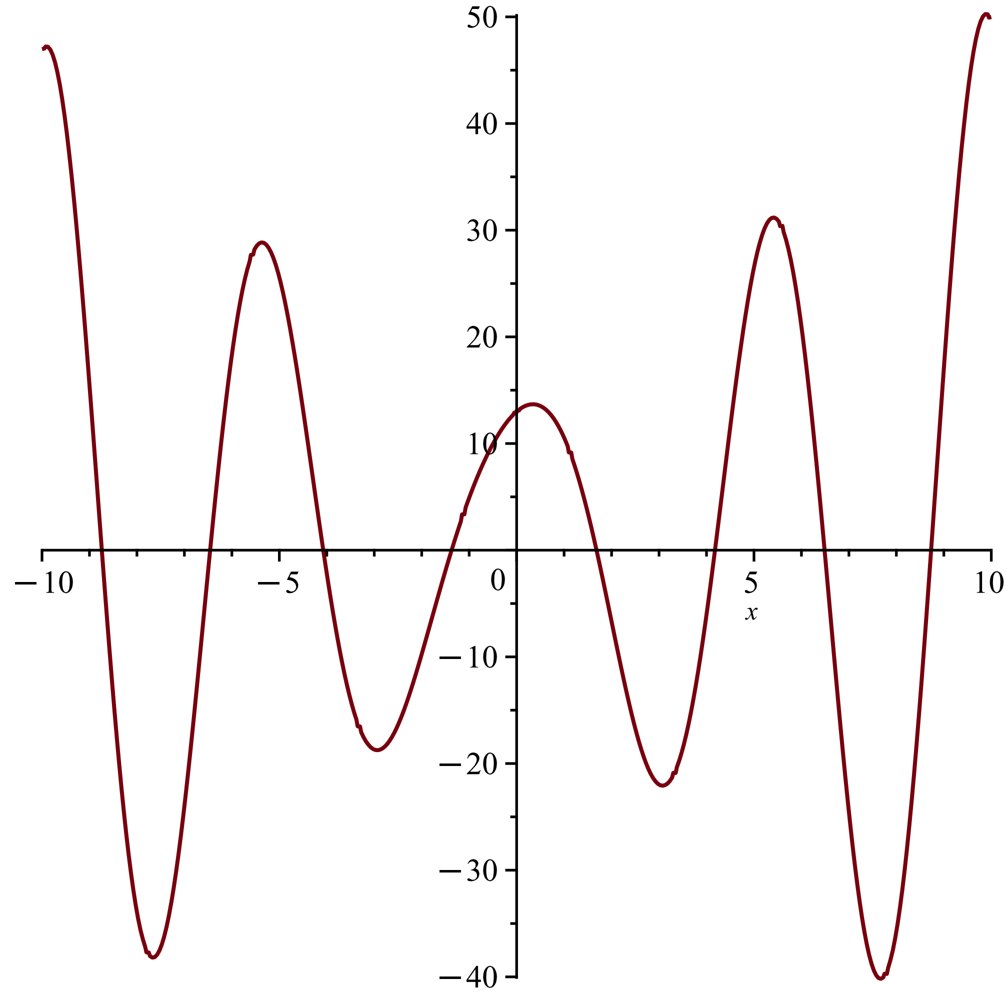
$$0 = 0 \tag{11}$$

> $C_1 := 1;$
> $C_2 := 2;$
> $C_3 := 2;$
> $C_4 := 4;$
> $C_5 := 5;$
> $C_6 := 6;$

Побудуємо графік при $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 4, C_5 := 5, C_6 := 6$:

$$C_1 := 1$$
$$C_2 := 2$$
$$C_3 := 2$$
$$C_4 := 4$$
$$C_5 := 5$$
$$C_6 := 6 \tag{12}$$

> $plot\left(C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot x\right) + C_5 \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot x\right) + C_5 \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot x\right) \cdot x + C_6 \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot x\right), x = -10 ..10\right)$



>

Завдання виконано.

> *restart*

3) $y^{(7)} + 8y^{(4)} + 40y''' + 320y = 0.$

$\lambda^7 + 8\lambda^4 + 40\lambda^3 + 320\lambda = 0$

$(\lambda^6 + 8\lambda^3 + 40\lambda^2 + 320)\lambda = 0$

Корені : $\lambda_1 = 0$

Поліном : $\lambda^6 + 8\lambda^3 + 40\lambda^2 + 320 = 0$

Використаємо заміну $r = \lambda^3$:

$r^2 + 8r + 40\lambda^2 + 320 = 0$

поліном має комплексні корені :

$\lambda = \alpha \pm \beta i$, *де* $\alpha = 0, \beta = 2\sqrt{2}$

$\lambda = \pm 2i, \pm (1 \pm i\sqrt{3})$

Для $\lambda = 0$:

$y1 = e^{0x} = 1$

Для $\lambda = \pm 2i$:

$y2 = \cos(2x), y3 = \sin(2x)$

Для $\lambda = (1 \pm i\sqrt{3})$:

$y4 = e^x \cos(\sqrt{3}x), y5 = e^x \sin(\sqrt{3}x)$

Для $\lambda = (-1 \pm i\sqrt{3})$:

$y6 = e^{-x} \cos(\sqrt{3}x), y7 = e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$

Загальний розв`язок:

$$y(x) = C_1 + C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x) + e^x\left(C_4\cos(\sqrt{3}x) + C_5\sin(\sqrt{3}x)\right) + e^{-x}\left(C_6\cos(\sqrt{3}x) + C_7\sin(\sqrt{3}x)\right)$$

Виконаємо перевірку в *Maple* :

> $char := \lambda^7 + 8\lambda^4 + 40\lambda^3 + 320 = 0$

$$char := \lambda^7 + 8\lambda^4 + 40\lambda^3 + 320 = 0 \quad \textbf{(13)}$$

> *factor*(*char*)

$$(\lambda + 2)\,(\lambda^2 - 2\lambda + 4)\,(\lambda^4 + 40) = 0 \tag{14}$$

> $solve((\lambda + 2));$
> $solve((\lambda^2 - 2\lambda + 4));$
> $solve((\lambda^4 + 40))$

$$-2$$

$$1 + I\sqrt{3},\, 1 - I\sqrt{3}$$

$$\frac{40^{1/4}\sqrt{2}}{2} + \frac{I\,40^{1/4}\sqrt{2}}{2},\ \frac{I\,40^{1/4}\sqrt{2}}{2} - \frac{40^{1/4}\sqrt{2}}{2},\ -\frac{40^{1/4}\sqrt{2}}{2} - \frac{I\,40^{1/4}\sqrt{2}}{2},\ -\frac{I\,40^{1/4}\sqrt{2}}{2} + \frac{40^{1/4}\sqrt{2}}{2} \tag{15}$$

> $ode := diff(y(x), x\$7) + 8 * diff(y(x), x\$4) + 40 * diff(y(x), x\$3) + 320 * y(x) = 0;$

$$ode := \frac{d^7}{dx^7}\,y(x) + 8\,\frac{d^4}{dx^4}\,y(x) + 40\,\frac{d^3}{dx^3}\,y(x) + 320\,y(x) = 0 \tag{16}$$

> $dsolve(ode)$

$$y(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{x}\sin(\sqrt{3}\,x) + c_3\,e^{x}\cos(\sqrt{3}\,x) - c_4\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) - c_5\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_6\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_7\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) \tag{17}$$

> $sol := y(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{x}\sin(\sqrt{3}\,x) + c_3\,e^{x}\cos(\sqrt{3}\,x) - c_4\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) - c_5\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_6\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_7\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right)$

$$sol := y(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{x}\sin(\sqrt{3}\,x) + c_3\,e^{x}\cos(\sqrt{3}\,x) - c_4\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) - c_5\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_6\,e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + c_7\,e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}}\cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) \tag{18}$$

> $odetest(sol, ode)$

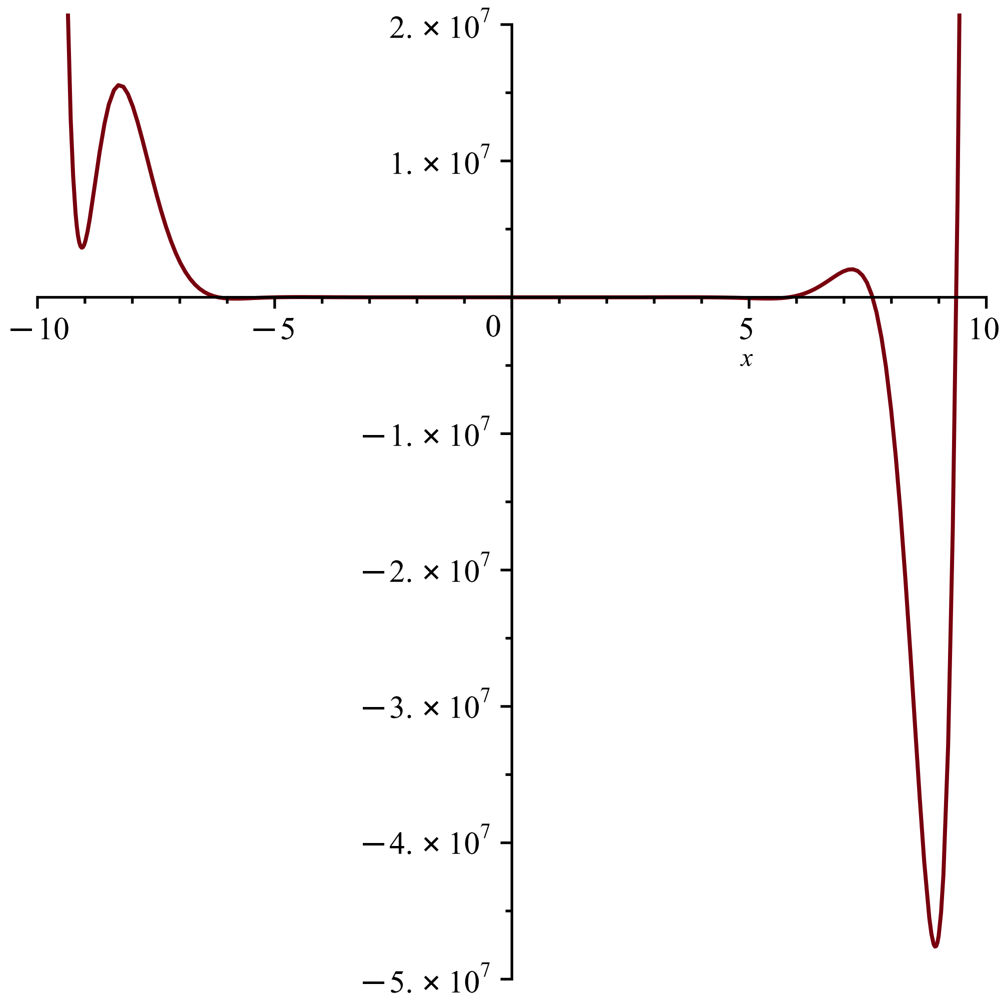
$$0 \tag{19}$$

загальний розв'язок дифю рівняння знайдено. побудуємо графік при $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3,$
$C_4 = 4, C_5 := 5, C_6 := 6, \ C_7 := 7:$

> $C_1 := 1;$
$C_2 := 2;$
$C_3 := 2;$
$C_4 := 4;$
$C_5 := 5;$
$C_6 := 6;$
$C_7 := 7;$

$$C_1 := 1$$
$$C_2 := 2$$
$$C_3 := 2$$
$$C_4 := 4$$
$$C_5 := 5$$
$$C_6 := 6$$
$$C_7 := 7 \qquad \textbf{(20)}$$

> $$plot\left(C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} \sin\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3 e^{x} \cos\left(\sqrt{3}\,x\right) - C_4 e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}} \sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) - C_5 e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}} \sin\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + C_6 e^{-\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}} \cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right) + C_7 e^{\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}} \cos\left(\frac{40^{1/4}\sqrt{2}\,x}{2}\right), x = -10..10\right)$$



>

рішення знайдено.