1) Έστω 4 σημεία $A(5,3,2)$ $B(7,2,5)$ $\Gamma(1,8,4)$ $\Delta(9,4,6)$

α) Για να βρούμε την απόσταση δύο σημείων θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cdot\, d(A,B)=\sqrt{(7-5)^2+(2-3)^2+(5-2)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{4+1+9}$$
$$=\sqrt{14}\simeq 3{,}741657387\simeq 3{,}74$$

$$\cdot\, d(A,\Gamma)=\sqrt{(1-5)^2+(8-3)^2+(4-2)^2}$$
$$=\sqrt{(-4)^2+5^2+2^2}$$
$$=\sqrt{16+25+4}$$
$$=\sqrt{45}=6{,}708203932\simeq 6{,}71$$

$$\cdot\, d(A,\Delta)=\sqrt{(9-5)^2+(4-3)^2+(6-2)^2}$$
$$=\sqrt{4^2+1^2+4^2}$$
$$=\sqrt{16+1+16}$$
$$=\sqrt{33}=5{,}744562647\simeq 5{,}74$$

$\cdot\, d(B,\Gamma) = \sqrt{(1-7)^2 + (8-2)^2 + (4-5)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{36+36+1}$

$= \sqrt{73} = 8{,}544003745 \simeq 8{,}54$

$\cdot\, d(B,\Delta) = \sqrt{(9-7)^2 + (4-2)^2 + (6-5)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+4+1}$

$= \sqrt{9} = 3$

$\cdot\, d(\Gamma,\Delta) = \sqrt{(9-1)^2 + (4-8)^2 + (6-4)^2}$

$= \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{64+16+4}$

$= \sqrt{84} = 9{,}16515139 \simeq 9{,}17$

β) Το οπτικό κέντρο είναι το σημείο O(0,0,0) και για να βρούμε την απόσταση των σημείων από αυτό θα πάρουμε τον τύπο:

$$\boxed{d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\cdot\, d(A,O) = \sqrt{5^2+3^2+2^2} = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38} \simeq 6{,}16$

$\cdot\, d(B,O) = \sqrt{7^2+2^2+5^2} = \sqrt{49+4+25} = \sqrt{78} \simeq 8{,}83$

$\cdot\, d(\Gamma, O) = \sqrt{1^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{1+64+16} = \sqrt{81} = 9$

$\cdot\, d(\Delta, O) = \sqrt{9^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{81+16+36} = \sqrt{133} \simeq 11{,}53$

γ) Για να βρούμε που προβάλλονται τα σημεία στο επίπεδο για $f=1$ θα πάρουμε τους τύπους:

$\boxed{x = \frac{fX}{Z}}$, $\boxed{y = \frac{fY}{Z}}$

$\cdot\, A'(5,3,2)$: $x = \frac{1 \cdot 5}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$

$y = \frac{1 \cdot 3}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$

$\cdot\, B'(7,2,5)$: $\boxed{x = \frac{7}{5}}$, $\boxed{y = \frac{2}{5}}$

$\cdot\, \Gamma'(1,8,4)$: $\boxed{x = \frac{1}{4}}$ $\boxed{y = 2}$

$\cdot\, \Delta'(9,4,6)$: $\boxed{x = \frac{3}{2}}$ $\boxed{y = \frac{2}{3}}$

) Ουσιαστικά εμείς θέλουμε ένα νέο σημείο στο οποίο αν εφαρμόσουμε τους τύπους της προβολής να μας εμφανήσει τα ίδια ακριβώς νούμερα. Κάτι τέτοιο για να επιτευχθεί θα πρέπει το νέο σημείο που θα πάρουμε να έχει τιμές ανάλογες με τις προηγούμενες

Έστω ότι τα πολλαπλασιάζουμε όλα με το 2. Τότε θα έχουμε:

$A(5,3,2) \xrightarrow{x2} A_2(10,6,4)$

$B(7,2,5) \xrightarrow{x2} B_2(14,4,10)$

$\Gamma(1,8,4) \xrightarrow{x2} \Gamma_2(2,16,8)$

$\Delta(9,4,6) \xrightarrow{x2} \Delta_2(18,8,12)$

Επαναλαμβάνουμε το ερώτημα 1γ με τα νέα σημεία για επαλήθευση:

$A_2'(10,6,4): \; x_2 = \frac{10}{4} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{2}}$

$y_2 = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{3}{2}}$

$B_2'(14,4,10)$: $x_2 = \frac{14}{10} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{7}{5}}$

$y_2 = \frac{4}{10} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{2}{5}}$

$\Gamma_2'(2,16,8)$: $x_2 = \frac{2}{8} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{4}}$

$y_2 = \frac{16}{8} \Rightarrow \boxed{y_2 = 2}$

$\Delta_2'(18,8,12)$: $x_2 = \frac{18}{12} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3}{2}}$

$y_2 = \frac{8}{12} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{2}{3}}$

Παρατηρούμε ότι οι προβολές των νέων σημείων είναι ίδιες με τις προβολές των παλαιών σημείων άρα λύσαμε το ερώτημα.