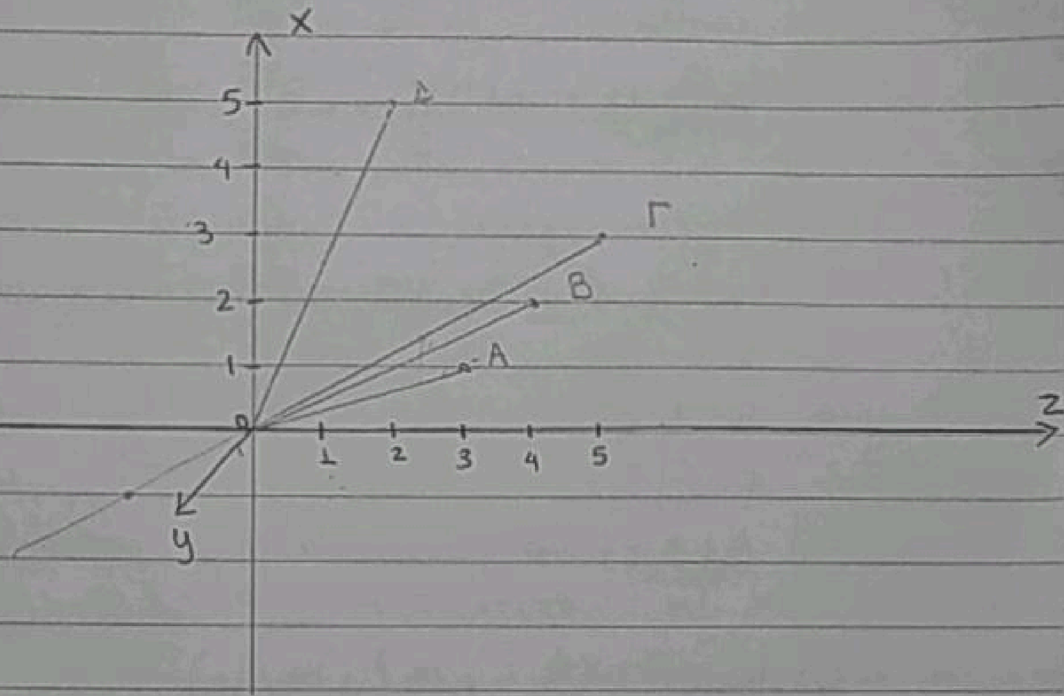
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Φιλοθέη Πάτερου
Α.Μ.: 23391115
(4ο εξάμηνο)

Άσκηση 1η

1) Σημεία: $A(\overset{x}{1}, 2, \overset{z}{3})$, $B(\overset{x}{2}, 3, \overset{z}{4})$, $\Gamma(\overset{x}{3}, 4, \overset{z}{5})$, $\Delta(\overset{x}{5}, 1, \overset{z}{2})$



α) Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$S_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$S_{A\Delta} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$S_{A\Gamma} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{B\Gamma} = \sqrt{(3-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$S_{B\Delta} = \sqrt{(5-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$S_{\Gamma\Delta} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

β)

$$S_{AO} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (z_O - z_A)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$S_{BO} = \sqrt{x_B^2 + z_B^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$S_{\Gamma O} = \sqrt{x_\Gamma^2 + z_\Gamma^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$S_{\Delta O} = \sqrt{x_\Delta^2 + z_\Delta^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους: $x = \frac{f \cdot X}{Z}$ και $y = \frac{f \cdot Y}{Z}$

Για το A: $x = \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$ και $y = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}$

Για το B: $x = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}$ και $y = \frac{1 \cdot 3}{4} = \frac{3}{4}$

Για το Γ : $x = \frac{1 \cdot 3}{5} = \frac{3}{5}$ και $y = \frac{1 \cdot 4}{5} = \frac{4}{5}$

Για το Δ : $x = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$ και $y = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

Άρα, για $f = 1$ προβάλλονται στο επίπεδο τα σημεία

$A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$B(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$Γ(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

$Δ(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

2) Για το $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \rightsquigarrow A(x_A, y_A)$

$x_A = f \cdot \frac{X}{Z} \Rightarrow x_A = \frac{X}{Z} \Rightarrow Z = \frac{X}{x_A}$ (1)

$y_A = f \cdot \frac{Y}{Z} \Rightarrow y_A = \frac{Y}{Z} \Rightarrow Y = y_A Z$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y = y_A \cdot \frac{X}{x_A} \xrightarrow[y_A = \frac{2}{3}]{x_A = \frac{1}{3}} Y = \frac{2}{3} \cdot \frac{X}{\frac{1}{3}} \Rightarrow Y = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} X \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Y = 2X}$ (2)

(1) $\Rightarrow Z = \frac{X}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{Z = 3X}$ (3)

Εφόσον το σημείο αντιστοιχεί στην ίδια προβολή στον χώρο, τότε οποιοδήποτε X ικανοποιεί τη παράπανω συνθήκη.
Επιλέγουμε ως $X = \frac{1}{5}$ και άρα:

(2) $\Rightarrow Y = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(3) $\Rightarrow Z = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

Τελικά έχουμε το σημείο $A'(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5})$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τα υπόλοιπα σημεία έχουμε:

Για το $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$:

$$x_B = 1 \cdot \frac{X}{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{X}{Z} \Rightarrow Z = 2X \xRightarrow{X=1} Z = 2 \quad (1)$$

$$y_B = 1 \cdot \frac{Y}{Z} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{Y}{Z} \Rightarrow Y = \frac{3Z}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} Y = \frac{3}{4} \cdot 2 \Rightarrow Y = \frac{3}{2}$$

Τελικά, $B'(1, \frac{3}{2}, 2)$

Για το $\Gamma(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$:

$$x_\Gamma = 1 \cdot \frac{X}{Z} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{X}{Z} \Rightarrow Z = \frac{5X}{3} \xRightarrow{X=2} Z = \frac{5}{3} \cdot 2 \Rightarrow Z = \frac{10}{3} \quad (1)$$

$$y_\Gamma = 1 \cdot \frac{Y}{Z} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{Y}{Z} \Rightarrow Y = \frac{4Z}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} Y = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} \Rightarrow Y = \frac{8}{3}$$

Τελικά, $\Gamma'(2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3})$

Για το $\Delta(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

$$x_\Delta = 1 \cdot \frac{X}{Z} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{X}{Z} \Rightarrow Z = \frac{2X}{5} \xRightarrow{X=4} Z = \frac{2}{5} \cdot 4 \Rightarrow Z = \frac{8}{5} \quad (1)$$

$$y_\Delta = 1 \cdot \frac{Y}{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{Y}{Z} \Rightarrow Y = \frac{Z}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} Y = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow Y = \frac{8^{:2}}{10_{:2}} \Rightarrow Y = \frac{4}{5}$$

Τελικά, $\Delta'(4, \frac{4}{5}, \frac{8}{5})$

Ουσιαστικά, η διαδικασία που ακολουθήσαμε ήταν η εξής:

1) Γράψαμε τις εξισώσεις συγγραμμικότητας για κάθε σημείο, αντικαθιστώντας $f=1$ και τις συντεταγμένες (x,y) που υπολογίσαμε για κάθε σημείο στο επίπεδο στο υποερώτημα (1γ).
2) Διαλέξαμε αυθαίρετα ένα X, σημείο που ανήκει στην προβολή του κάθε σημείου στον χώρο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση διάλεξα ένα X που έχει τιμή μικρότερη του σημείου προβολής X στον χώρο του κάθε σημείου(πχ. για το $X_A = 1$, διάλεξα $X = \frac{1}{5} < X_A = 1$).