$\boxed{\text{Άσκηση}}$ ① Επιλέξτε 4 τυχαία σημεία στον χώρο. Για αυτά τα σημεία υπολογίστε:

α) τις μεταξύ τους αποστάσεις

β) την απόστασή τους από το οπτικό κέντρο.

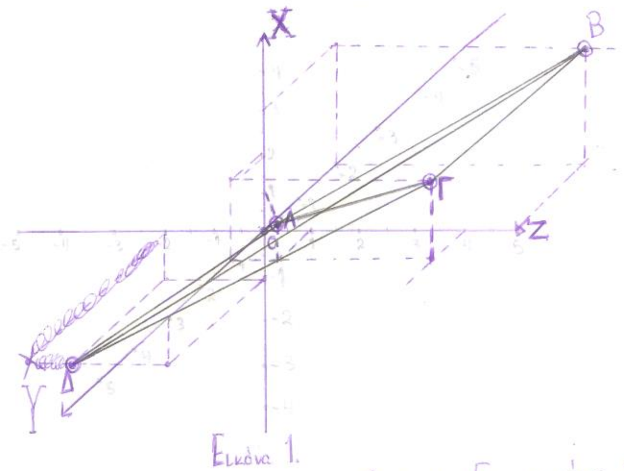
γ) πού προβάλλονται στο επίπεδο για $f = 1\mu$ (Εστιακή απόσταση $= 1\mu$.)

② Για τις προβολές που υπολογίσατε στην πρώτη άσκηση, προσπαθείστε να βρείτε για κάθε μία από αυτές, ακόμα ένα σημείο στον χώρο που της αντιστοιχεί.

Λύση: ① Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ με συντεταγμένες

Α(1, 1, 1) , Β(3, -2, 5), Γ(2, 1, 4) , Δ(-1, 3, -2)

στον χώρο.



Εικόνα 1.

α) Με την αξιοποίηση της αναλυτικής Γεωμετρίας δύναται να υπολογιστούν οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων διά του τύπου:

$$S_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \, ,$$

όπου i, j οποιαδήποτε σημεία του χώρου.

Οι αποστάσεις, που θα υπολογιστούν, είναι: S_{AB}, $S_{A\Gamma}$, $S_{A\Delta}$, $S_{B\Gamma}$, $S_{B\Delta}$, ~~ΓΑ~~, $S_{\Gamma\Delta}$.

Επομένως:

- $S_{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-1)^2 + (5-1)^2}\ \mu. \Rightarrow$
  $\Rightarrow S_{AB} = \sqrt{4 + 9 + 16}\ \mu. \Rightarrow S_{AB} = \sqrt{29}\ \mu. \Rightarrow$
  $\Rightarrow S_{AB} = 5.39\ \mu.$
- $S_{A\Gamma} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (4-1)^2}\ \mu \Rightarrow S_{A\Gamma} = \sqrt{1+9}\ \mu. \Rightarrow$
  $\Rightarrow S_{A\Gamma} = \sqrt{10}\ \mu \Rightarrow S_{A\Gamma} = 3.16\ \mu.$
- $S_{A\Delta} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2 + (-2-1)^2}\ \mu. \Rightarrow S_{A\Delta} = \sqrt{4+4+9}\ \mu \Rightarrow$
  $\Rightarrow S_{A\Delta} = \sqrt{17}\ \mu \Rightarrow S_{A\Delta} = 4.12\ \mu.$
- $S_{B\Gamma} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-(-2))^2 + (4-5)^2}\ \mu \Rightarrow S_{B\Gamma} = \sqrt{11}\ \mu. \Rightarrow S_{B\Gamma} = 3.32\ \mu.$
- $S_{B\Delta} = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-(-2))^2 + (-2-5)^2}\ \mu. \Rightarrow S_{B\Gamma} = \sqrt{90}\ \mu. \Rightarrow S_{B\Gamma} = 9.49\ \mu.$
- $S_{\Gamma\Delta} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2 + (-2-4)^2}\ \mu. \Rightarrow S_{\Gamma\Delta} = \sqrt{49}\ \mu \Rightarrow S_{\Gamma\Delta} = 7\ \mu.$

β) Ορίζεται μια μηχανή σημειακής οπής (pinhole camera model), της οποίας το οπτικό κέντρο συμπίπτει με την Αρχή των Αξόνων του συστήματος συντεταγμένων στον χώρο της Εικόνας 1.

Η απόσταση του εκάστοτε σημείου Α,Β,Γ,Δ από το οπτικό κέντρο Ο(0,0,0) προκύπτει από τον τύπο:

$$S_{Oi} = \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 + (z_i - z_o)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{Oi} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

, όπου x_o, y_o, z_o οι συντεταγμένες του Ο και i τα σημεία Α,Β,Γ,Δ.

Συνεπώς

$$S_{OA} = \sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\mu \Rightarrow S_{OA} = \sqrt{3}\,\mu \Rightarrow S_{OA} = 1.73\mu$$

$$S_{OB} = \sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}\,\mu \Rightarrow S_{OB} = \sqrt{38}\,\mu \Rightarrow S_{OB} = 6.16\mu$$

$$S_{O\Gamma} = \sqrt{2^2+1^2+4^2}\,\mu \Rightarrow S_{O\Gamma} = 4.58\mu$$

$$S_{O\Delta} = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-2)^2}\,\mu \Rightarrow S_{O\Delta} = 3.74\mu$$

γ) Ορίζοντας την Εστιακή απόσταση της μηχανής ως $f = 1\mu$ ~~(σε σημεία)~~, θα προσδιοριστούν οι προβολές των σημείων Α, Β, Γ και Δ, μέσω της συνθήκης συγγραμμικότητας:

$$x_i = f \cdot \frac{X_i}{Z_i}$$

$$y_i = f \cdot \frac{Y_i}{Z_i}$$

, όπου $i = A, B, \Gamma, \Delta$

Οπότε για το Α' έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_{A'} &= 1 \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow x_{A'} = 1 \\ y_{A'} &= 1 \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow y_{A'} = 1 \end{aligned}\right\} A'(1,1)$$

για το Β':

$$\left.\begin{aligned} x_{B'} &= 1 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow x_{B'} = \frac{3}{5} = 0.6 \\ y_{B'} &= 1 \cdot \frac{(-2)}{5} \Rightarrow y_{B'} = -\frac{2}{5} = \cancel{0.4} \end{aligned}\right\} \cancel{B'(0.60, 0.40)}\ B'(0.60, -0.40)$$

για το Γ':

$$\left.\begin{aligned} x_{\Gamma'} &= 1 \cdot \frac{2}{4} \Rightarrow x_{\Gamma'} = \frac{1}{2} = 0.50 \\ y_{\Gamma'} &= 1 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow y_{\Gamma'} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}\right\} \Gamma'(0.50, 0.25)$$

για το Δ':

$$\begin{aligned} x_{\Delta'} &= 1 \cdot \frac{(-1)}{(-2)} \Rightarrow x_{\Delta'} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ y_{\Delta'} &= 1 \cdot \frac{3}{(-2)} \Rightarrow y_{\Delta'} = -\frac{3}{2} = -1.5 \end{aligned} \quad \Delta'(0.5, -1.5)$$

②

Κάθε σημείο μαζί με το οπτικό κέντρο $O(0,0,0)$ σχηματίζει μία ευθεία (ε).

Η ευθεία (ε) στον χώρο έχει παραμετρικές εξισώσεις:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad , \mu\varepsilon \; x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1.$$

▷ Η (ε_{AO}): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow 1-x = 1-y = 1-z$

Για $x=y=z=-1$, το σημείο $A_1(-1,-1,-1)$, επαληθεύει την εξίσωση της (ε_{AO}) και κατά επέκταση ανήκει στην ευθεία, από την οποία το A προβλήθηκε στο επίπεδο του pinhole camera model. Επομένως το $A_1(-1,-1,-1)$ αντιστοιχεί στην προβολή A' του A.

▷ Η (ε_{BO}): $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-5}$

Παρατηρείται πως το σημείο $B_1(6,-4,10)$ επαληθεύει την (ε_{BO}), οπότε αντιστοιχεί στην προβολή B'

▷ Η $(\varepsilon_{\Gamma O})$: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-4}$

Το σημείο $\Gamma_1(4,2,8)$ επαληθεύει την $(\varepsilon_{\Gamma O})$, οπότε αντιστοιχεί στην προβολή Γ'.

▷ Η $(\varepsilon_{\Delta O})$: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}$

Το σημείο $\Delta_1(-2,6,-4)$ επαληθεύει την $(\varepsilon_{\Delta O})$, οπότε αντιστοιχεί στην προβολή Δ'.