MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

March 2023

1 задание

Покажите, что следующие определения противоречивой теории эквивалентны:

(а) Существует формула α, что $\vdash \alpha \& \neg\alpha$

(б) Существует формула α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$

(в) $\vdash A \& \neg A$

(г) Любая формула доказуема.

1. (г) влечёт (в)
   Пусть любая формула доказуема, тогда
   $\vdash A \& \neg A$
2. (в) влечёт (а)
   Пусть $\vdash A \& \neg A$, тогда существует формула $\alpha = A$, что $\vdash \alpha \& \neg\alpha$
3. (а) влечёт (б)
   Пусть существует формула α, что $\vdash \alpha \& \neg\alpha$, тогда
   по схеме аксиом (4)
   $\alpha \& \neg\alpha \to \alpha$
   по теореме о дедукции
   $\alpha \& \neg\alpha \vdash \alpha$
   Аналогично по схеме аксиом (5) и теореме о дедукции
   $\alpha \& \neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   Таким образом, существует формула α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.
4. (б) влечёт (г)
   Пусть существует формула α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.
   4.1) Рассмотрим произвольную формулу β в КИВ или КИП:

1. по схеме аксиомы (1)
   $\alpha \to \neg\beta \to \alpha$
2. Modus Ponens гипотезы и 1
   $\neg\beta \to \alpha$
3. по схеме аксиомы (1)
   $\neg\alpha \to \neg\beta \to \neg\alpha$
4. Modus Ponens гипотезы и 3
   $\neg\beta \to \neg\alpha$
5. по схеме аксиомы (9)
   $(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$
6. Modus Ponens 2 и 5
   $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$
7. Modus Ponens 4 и 6
   $\neg\neg\beta$
8. по схеме аксиомы (10)
   $\neg\neg\beta \to \beta$
9. Modus Ponens 7 и 8
   $\vdash \beta$

4.2) Рассмотрим произвольную формулу β в ИИВ:

1. по схеме аксиомы (10И)
   $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$
2. Modus Ponens гипотезы и 1
   $\neg\alpha \to \beta$
3. Modus Ponens гипотезы и 2
   $\vdash \beta$

Таким образом, любая формула доказуема.

Получили (г) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г), т.е. из любого утверждения можно получить любое другое. Значит, определения эквивалентны.

2 задание

Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то также противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.

По теореме Гливенко
если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_e \neg\neg\alpha$,
т.е. если $\vdash \alpha$ в КИВ, то $\vdash \neg\neg\alpha$ в ИИВ.

Пусть КИВ противоречиво, тогда существует формула α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$.
Тогда по теореме Гливенко в ИИВ $\vdash \neg\neg\alpha$ и $\vdash \neg\neg\neg\alpha$.
Это значит, что в ИИВ существует формула $\beta = \neg\neg\alpha$, что $\vdash \beta$ и $\vdash \neg\beta$.
Таким образом, ИИВ противоречиво.

3 задание

Покажите, что если $\neg\varphi \vdash \varphi$, то $\vdash \varphi$.

1. $\neg\varphi \vdash \varphi$

   по теореме о дедукции

   $\vdash \neg\varphi \to \varphi$

2. доказано ранее

   $\alpha \to \alpha \ [\alpha := \neg\varphi]$

   $\neg\varphi \to \neg\varphi$

3. по схеме аксиом (9)

   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha \ [\alpha := \neg\varphi, \beta := \varphi]$

   $(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$

4. Modus Ponens 1 и 3

   $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$

5. Modus Ponens 2 и 4

   $\neg\neg\varphi$

6. по схеме аксиом (10)

   $\neg\neg\alpha \to \alpha \ [\alpha := \varphi]$

   $\neg\neg\varphi \to \varphi$

7. Modus Ponens 5 и 6

   $\vdash \varphi$

Покажите, что из $\neg\varphi \vdash \alpha\&\neg\alpha$ следует $\vdash \varphi$

1. по теореме о дедукции

   $\neg\varphi \to \alpha\&\neg\alpha$

2. по ранее доказанному

   $\alpha\&\neg\alpha \to \varphi$

3. по схеме аксиом (1)

   $\alpha \to \beta \to \alpha$

   $(\alpha\&\neg\alpha \to \varphi) \to \neg\varphi \to (\alpha\&\neg\alpha \to \varphi)$

4. Modus Ponens 2, 3

   $\neg\varphi \to (\alpha\&\neg\alpha \to \varphi)$

5. по схеме аксиом (2)

   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

   $(\neg\varphi \to \alpha\&\neg\alpha) \to (\neg\varphi \to \alpha\&\neg\alpha \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \varphi)$

6. Modus Ponens 1, 5

   $(\neg\varphi \to \alpha\&\neg\alpha \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \varphi)$

7. Modus Ponens 4, 6

   $\neg\varphi \to \varphi$

8. по ранее доказанному

   $\neg\varphi \to \neg\varphi$

9. по схеме аксиом (9)

   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

   $(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$

10. Modus Ponens 7, 9

    $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$

11. Modus Ponens 8, 10

    $\neg\neg\varphi$

12. по схеме аксиом (10)

    $\neg\neg\alpha \to \alpha$

    $\neg\neg\varphi \to \varphi$

13. Modus Ponens 11, 12

    $\vdash \varphi$