MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

April 2023

Пусть n-местное отношение R выразимо в формальной арифметике. Покажите, что тогда его характеристическая функция C_R представима в формальной арифметике:

$$C_R(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} 1, \ \overrightarrow{x} \in R \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Отношение R выразимо, значит для него существует формула ρ
Пусть $\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, u) := \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$
Проверим, что выполняется определение представимости функции:

1. если $C_R(a_1, \dots, a_n) = u$, то $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$

   1.1. $C_R(a_1, \dots, a_n) = 1$, т.е. $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$

      1.1.1. из выразимости R
      $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

      1.1.2. по условию
      $\vdash u = 1$

      1.1.3. по схеме аксиом (3)
      $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
      $\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \to u = 1 \to \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1$

      1.1.4. Modus Ponens 1.1.1, 1.1.3
      $u = 1 \to \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1$

      1.1.5. Modus Ponens 1.1.2, 1.1.4
      $\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1$

      1.1.6. по схеме аксиом (6)
      $\alpha \to \alpha \vee \beta$
      $\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to$
      $\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

      1.1.7. Modus Ponens 1.1.5, 1.1.6
      $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

   Таким образом, $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{1})$

1.2. $C_R(a_1, \dots, a_n) = 0$, т.е. $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$

1.2.1. из выразимости R
$\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

1.2.2. по условию
$\vdash u = 0$

1.2.3. по схеме аксиом (3)
$\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
$\neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \to u = 0 \to \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

1.2.4. Modus Ponens 1.2.1, 1.2.3
$u = 0 \to \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

1.2.5. Modus Ponens 1.2.2, 1.2.4
$\neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

1.2.6. по схеме аксиом (7)
$\beta \to \alpha \vee \beta$
$\neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0 \to$
$\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

1.2.7. Modus Ponens 1.2.5, 1.2.6
$\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0$

Таким образом, $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{0})$

2. если $C_R(a_1, \dots, a_n) \neq u$, то $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$

2.1. $u = 0$, $C_R(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, т.е. $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$

2.1.1. по схеме аксиом (1)
$\alpha \to \beta \to \alpha$
$\neg u = 1 \to \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to \neg u = 1$

2.1.2. Modus Ponens условия и 2.1.1
$\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to \neg u = 1$

2.1.3. по схеме аксиом (5)
$\alpha \& \beta \to \beta$
$\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to u = 1$

2.1.4. по схеме аксиом (9)
$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
$(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to u = 1) \to$
$(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to \neg u = 1) \to \neg(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1)$

2.1.5. Modus Ponens 2.1.3, 2.1.4
$(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1 \to \neg u = 1) \to \neg(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1)$

2.1.6. Modus Ponens 2.1.2, 2.1.5
$\neg(\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 1)$

2.1.7. по схеме аксиом (2)
$\alpha \to \beta \to \alpha$
$\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \to \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \ \& \ u = 0 \to \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

2.1.8. Modus Ponens условия и 2.1.7
$\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0 \to \rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})$

2.1.9. по схеме аксиом (4)
$\alpha\&\beta \to \alpha$
$\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0 \to \neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})$

2.1.10. по схеме аксиом (9)
$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
$(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0 \to \rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})) \to$
$(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0 \to \neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})) \to$
$\neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.11. Modus Ponens 2.1.8, 2.1.10
$(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0 \to \neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})) \to$
$\neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.12. Modus Ponens 2.1.9, 2.1.11
$\neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.13. по схеме аксиом (3)
$\alpha \to \beta \to \alpha\&\beta$
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1) \to \neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0) \to$
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1)\ \&\ \neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.14. Modus Ponens 2.1.6, 2.1.13
$\neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0) \to$
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1)\ \&\ \neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.15. Modus Ponens 2.1.12, 2.1.14
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1)\ \&\ \neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.16. по закону Де Моргана
$\neg\alpha\&\neg\beta \to \neg(\alpha \vee \beta)$
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1)\ \&\ \neg(\neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0) \to$
$\neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

2.1.17. Modus Ponens 2.1.15, 2.1.16
$\vdash \neg(\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 1 \vee \neg\rho(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n})\ \&\ u = 0)$

Таким образом, $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},0)$

2.2. $u = 1$, $C_R(a_1,\ldots,a_n) \neq 1$, т.е. $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \notin R$
Аналогично, $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},\overline{1})$

2.3. $u \neq 0$, $u \neq 1$, $C_R(a_1,\ldots,a_n) \neq u$
Аналогично, $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},\overline{u})$

3. для всех $a_i \in \mathbb{N}_0$ выполнено
$\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},x))\ \&\ (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},p)\ \&\ \varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},q) \to$
$p = q)$

3.1. для любых $a_i \in \mathbb{N}_0$ верно
либо $C_R(a_1,\ldots,a_n) = 1$, либо $C_R(a_1,\ldots,a_n) = 0$, т.е.
$\exists x.\varphi(\overline{a_1},\ldots,\overline{a_n},x)$

3.2. для любых $a_i \in \mathbb{N}_0$

   если $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 1$, т.е. $\langle a_1, \ldots a_n \rangle \in R$, то
   $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{1})$ и для $u \neq 1 \vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{u})$
   тогда если $\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p)$ и $\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q)$, то $p = q = 1$.

   иначе $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 0$, т.е. $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin R$,
   $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, 0)$ и для $u \neq 0 \vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{u})$
   тогда если $\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p)$ и $\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q)$, то $p = q = 0$.

   Итого, $\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q$

3.3. по схеме аксиом (3)

   $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$

   $(\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, x)) \to (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q) \to (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, x)) \;\&\; (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

3.4. Modus Ponens 3.1, 3.3

   $(\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q) \to (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, x)) \;\&\; (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

3.5. Modus Ponens 3.2, 3.4

   $\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, x)) \;\&\; (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, p) \;\&\; \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

Таким образом, характеристическая функция C_R выразимого отношения R представима в формальной арифметике.