Математическая статистика

2 октября 2023

1 задача

Пусть имеются ξ и η, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение и независимы. Будут ли независимы случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$?

Первый способ:
$Ax = y$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования
$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$– ортогональная матрица
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta)$ – независимые стандартные нормальные случайные величины.

Второй способ:
$cov(\xi + \eta, \xi - \eta) = E(\xi + \eta)(\xi - \eta) - E(\xi + \eta)E(\xi - \eta) = E(\xi^2 - \eta^2) - (E\xi + E\eta)(E\xi - E\eta) = 0$ – так как они имеют нормальное распределение, то они независимы.

2 задача

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют стандартное нормальное распределение.
$\eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3$
$\eta_2 = 2\xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$
$\eta_3 = \gamma\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$

При каких значениях параметров α, β, γ эти случайные величины будут независимы?
$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & \alpha & \beta \\ \gamma & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Чтобы случайные величины были независимы, нужна ортогональность матрицы, т.е. попарная ортогональность её столбцов.

$\begin{cases} 2 + 2\alpha + \gamma = 0 \\ -2 + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -4 + \alpha\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$\alpha = -2$ $\beta = -1$ $\gamma = 2$

3 задача

Пусть случайная величина $\xi \in N(0,2)$, $\eta \in N(1,2)$, $r_{\xi,\eta} = -\frac{1}{2}$.

Найти плотность совместного распределения.

$f_{a,K}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det K}} \exp(-\frac{1}{2}(x-a)^T K^{-1}(x-a))$

$K = \begin{pmatrix} D\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\eta,\xi) & D\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma\xi\sigma\eta}$

$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_{a,K}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}) =$

$= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 1))$

4 задача

Многомерная случайная величина ξ.

Вектор средних $a = \mathbb{O}$.

Матрица ковариаций $K = D\xi = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти линейное преобразование, которое переводит данный вектор в вектор из независимых стандартных нормальных величин.

$\eta = B^{-1}(\xi - a)$ – состоит из независимых стандартных нормальных случайных величин, где $B = \sqrt{K}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

5 задача

Даны случайные величины ξ и η и плотность их совместного распределения
$f_{\xi,\eta}(x, y) = Ce^{-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})}$

Найти параметр C и преобразование, которое переводит данный вектор в стандартный нормальный вектор с независимыми компонентами.

$a = \mathbb{O}$

$K^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{pmatrix}$

$K = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

$\sqrt{K} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\det K = a^2b^2$

$C = \dfrac{1}{2\pi ab}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}$

6 задача

Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти $P(\xi^2 + \eta^2 < r^2)$

$K = E\ f_{\xi,\eta}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi}\exp(-\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2))$

$P(\xi^2 + \eta^2 < r^2) = \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} \dfrac{1}{2\pi}\exp(-\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2))dxdy =$

$\begin{bmatrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{bmatrix}$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \dfrac{1}{2\pi}\exp(-\dfrac{1}{2}r^2)dr = 1 - e^{-\dfrac{r^2}{2}}$