MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

March 2023

1 задание

(a) $(\forall x.\phi) \to (\forall y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ.

1. по схеме аксиом (11)
   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := \theta]$, если θ свободен для подстановки вместо x в ϕ
   Пусть $\theta := y$
   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := y]$
2. правило вывода для $\forall$
   $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall z.\psi}$, если z не входит свободно в φ
   Пусть $\varphi := (\forall x.\phi), \psi := \phi[x := y], z := y$
   $\dfrac{(\forall x.\phi) \to \phi[x := y]}{(\forall x.\phi) \to \forall y.\phi[x := y]}$
   Тогда из (1)
   $(\forall x.\phi) \to \forall y.\phi[x := y]$

(b)

(c) $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$

1. по схеме аксиом (11)
   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := \theta]$, если θ свободен для подстановки вместо x в ϕ
   Пусть $\theta := x$
   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := x]$
   $(\forall x.\phi) \to \phi$
2. по схеме аксиом (12)
   $\phi[x := \theta] \to \exists x.\phi$, если θ свободен для подстановки вместо x в ϕ
   Пусть $\theta := x$
   $\phi[x := x] \to \exists x.\phi$
   $\phi \to \exists x.\phi$

3. по схеме аксиом (1)
   $\alpha \to \beta \to \alpha$
   Пусть $\alpha := \phi \to \exists x.\phi, \beta := \forall x.\phi$
   $(\phi \to \exists x.\phi) \to (\forall x.\phi) \to (\phi \to \exists x.\phi)$
4. Modus Ponens 2 и 3
   $(\forall x.\phi) \to \phi \to \exists x.\phi$
5. по схеме аксиом (2)
   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
   Пусть $\alpha := \forall x.\phi, \beta := \phi, \gamma := \exists x.\phi$
   $((\forall x.\phi) \to \phi) \to ((\forall x.\phi) \to \phi \to \exists x.\phi) \to ((\forall x.\phi) \to \exists x.\phi)$
6. Modus Ponens 1 и 5
   $((\forall x.\phi) \to \phi \to \exists x.\phi) \to ((\forall x.\phi) \to \exists x.\phi)$
7. Modus Ponens 4 и 6
   $(\forall x.\phi) \to \exists x.\phi$

(d) $(\forall x.\forall x.\phi) \to \forall x.\phi$

1. по схеме аксиом (11)
   $(\forall x.\psi) \to \psi[x := \theta]$,
   если θ свободен для подстановки вместо x в ψ
   Пусть $\psi := \forall x.\phi, \theta := x$
   $(\forall x.(\forall x.\phi)) \to (\forall x.\phi)[x := x]$
   $(\forall x.\forall x.\phi) \to \forall x.\phi$

(e) $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

1. независимо доказано в (f)
   $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$
2. по правилу контрапозиции
   $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
   Пусть $\alpha := \exists x.\neg\phi, \beta := \neg\forall x.\phi$
   $((\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)) \to ((\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi))$
3. Modus Ponens 1 и 2
   $(\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$
4. доказано ранее
   $\alpha \to \neg\neg\alpha$
   Пусть $\alpha := \forall x.\phi$
   $(\forall x.\phi) \to (\neg\neg\forall x.\phi)$
5. по схеме аксиом 1
   $\alpha \to \beta \to \alpha$
   Пусть $\alpha := (\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi), \beta := \forall x.\phi$
   $((\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)) \to (\forall x.\phi) \to ((\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi))$

6. Modus Ponens 3 и 5

   $(\forall x.\phi) \to (\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

7. по схеме аксиом (2)

   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

   Пусть $\alpha := \forall x.\phi, \beta := \neg\neg\forall x.\phi, \gamma := \neg\exists x.\neg\phi$

   $((\forall x.\phi) \to (\neg\neg\forall x.\phi)) \to ((\forall x.\phi) \to (\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)) \to ((\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi))$

8. Modus Ponens 4 и 7

   $((\forall x.\phi) \to (\neg\neg\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)) \to ((\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi))$

9. Modus Ponens 6 и 8

   $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

(f) $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$

1. по схеме аксиом (11)

   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := \theta]$, если θ свободен для подстановки вместо x в ϕ

   Пусть $\theta := x$

   $(\forall x.\phi) \to \phi[x := x]$

   $(\forall x.\phi) \to \phi$

2. по правилу контрапозиции

   $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

   Пусть $\alpha := \forall x.\phi, \beta := \phi$

   $((\forall x.\phi) \to \phi) \to (\neg\phi \to (\neg\forall x.\phi))$

3. Modus Ponens 1 и 2

   $\neg\phi \to (\neg\forall x.\phi)$

4. правило вывода для $\exists$

   $\dfrac{\chi \to \psi}{(\exists z.\chi) \to \psi}$, если z не входит свободно в ψ

   Пусть $\chi := \neg\phi, \psi := \neg\forall x.\phi, z := x$

   Тогда из 3

   $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$

(g) $(\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\neg\exists x.\neg\alpha)\&(\neg\exists x.\neg\beta)$

Зададим оценку:

$D := \mathbb{R}$

$F_0 := 0$

$P_{(>)}$, $P_{(\leq)}$ – отношения порядка на $\mathbb{R}$

Пусть $\alpha := x \leq 0, \beta := x > 0$

$[\![\forall x.x \leq 0 \vee x > 0]\!] = \text{И}$, но

$[\![\neg(x \le 0)]\!]^{x:=1} = И$, т.е

$[\![\exists x.\neg(x \le 0)]\!] = И$, т.е.

$[\![\neg\exists x.\neg(x \le 0)]\!] = Л$, значит

$[\![(\neg\exists x.\neg(x \le 0))\&(\neg\exists x.\neg(x > 0))]\!] = Л$

Таким образом,

$[\![(\forall x.x \le 0 \vee x > 0) \to (\neg\exists x.\neg(x \le 0))\&(\neg\exists x.\neg(x > 0))]\!] = Л$, т.е.

$(\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\neg\exists x.\neg\alpha)\&(\neg\exists x.\neg\beta)$ – неверно.

(h)

(i) $(\alpha \to \beta) \to \forall x.(\alpha \to \beta)$

Зададим оценку:

$D := \mathbb{R}$

$F_0 := 0,\ F_1 := 1$

$F_{(-)}$ – вычитание на $\mathbb{R}$

$P_{(>)}$ – отношение порядка на $\mathbb{R}$

Пусть $\alpha := x > 0, \beta := x - 1 > 0$

$[\![x > 0 \to x - 1 > 0]\!]^{x:=2} = И$

но $[\![x > 0 \to x - 1 > 0]\!]^{x:=1} = Л$, т.е. $[\![\forall x.(x > 0 \to x - 1 > 0)]\!] = Л$

Таким образом,

$[\![(x > 0 \to x - 1 > 0) \to \forall x.(x > 0 \to x - 1 > 0)]\!] = Л$, т.е.

$(\alpha \to \beta) \to \forall x.(\alpha \to \beta)$ – неверно.

2 задание

Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

Зададим оценку:
$D := \mathbb{R}$
$F_0 := 0$
$P_{(>)}$ – отношение порядка на $\mathbb{R}$
Пусть $\phi := x > 0$

(a) $\phi \to \forall x.\phi$

$[\![x > 0]\!]^{x:=1} = И$

но $[\![x > 0]\!]^{x:=-1} = Л$, т.е. $[\![\forall x.x > 0]\!] = Л$

Тогда

$[\![x > 0 \to \forall x.x > 0]\!] = Л$, т.е.

$x > 0 \to \forall x.x > 0$ – неверно.

(b) $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

$[\![x > 0]\!]^{x:=1} =$ И, т.е. $[\![\exists x.x > 0]\!] =$ И

но $[\![x > 0]\!]^{x:=-1} =$ Л, т.е. $[\![\forall x.x > 0]\!] =$ Л

Тогда

$[\![(\exists x.x > 0) \to (\forall x.x > 0)]\!] =$ Л, т.е.

$(\exists x.x > 0) \to (\forall x.x > 0)$ – неверно.

3 задание

Докажите или опровергните

(a) $(\forall x.\exists y.\phi) \to (\exists y.\forall x.\phi)$

Зададим оценку:

$D := \mathbb{R}$

$P_{(=)}$ – равенство на $\mathbb{R}$

Пусть $\phi := x = y$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$[\![x = y]\!]^{y:=x} =$ И, значит

$[\![\exists y.x = y]\!] =$ И для любого x, т.е.

$[\![\forall x.\exists y.x = y]\!] =$ И

С другой стороны,

фиксируем $y \in \mathbb{R}$,

$[\![x = y]\!]^{x:=y+1} =$ Л, значит

$[\![\forall x.x = y]\!] =$ Л для любого y, т.е.

$[\![\exists y.\forall x.x = y]\!] =$ Л

Таким образом,

$[\![(\forall x.\exists y.\phi) \to (\exists y.\forall x.\phi)]\!] =$ Л, т.е.

$(\forall x.\exists y.\phi) \to (\exists y.\forall x.\phi)$ – неверно.

(b) $(\exists x.\forall y.\phi) \to (\forall y.\exists x.\phi)$

1. $(\forall y.\phi) \to (\exists x.\phi)$ – доказано ранее.
2. Правило вывода для $\exists$

   $\dfrac{\chi \to \psi}{(\exists z.\chi) \to \psi}$, если z не входит свободно в ψ

   Пусть $\chi := \forall y.\phi, \psi := \exists x.\phi, z := x$

   Тогда из (1)

   $(\exists x.\forall y.\phi) \to (\exists x.\phi)$

3. Правило вывода для $\forall$

   $\dfrac{\chi \to \psi}{\chi \to (\forall z.\psi)}$, если z не входит свободно в χ

   Пусть $\chi := \exists x.\forall y.\phi, \psi := \exists x.\phi, z := y]$
   Тогда из (2)
   $(\exists x.\forall y.\phi) \to (\forall y.\exists x.\phi)$