MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

March 2023

1 задание

(a) A открыто тогда и только тогда, когда все точки A – внутренние.

1. Пусть A – открытое. A является окрестностью для каждой своей точки, т.е. для любой точки $x \in A$ существует окрестность $V_x = A$ такая, что $V_x \subseteq A$. Значит, любая точка A – внутренняя.
2. Пусть любая точка $x \in A$ – внутренняя, т.е. существует окрестность $V_x \subseteq A$. Рассмотрим множество $V = \bigcup_{x \in A} V_x$. V – открытое, т.к. является объединением открытых множеств, и $V = A$, т.к. содержит все точки $x \in A$ вместе с окрестностями $V_x \subseteq A$. Значит, A – открытое.

$\square$

$A^\circ = \{x \mid x \in A \ \& \ x \text{ – внутренняя точка}\}$

1. $A^\circ \subseteq A$, т.е. для любой точки $x \in A^\circ$ верно $x \in A$.
2. A° – открытое, для любой точки $x \in A^\circ$ существует окрестность $V_x \subseteq A^\circ \subseteq A$. Тогда $V_x \subseteq A$, т.е. x – внутренняя точка A.

$\square$

(b)

(c)

(d) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B°, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

1. $A^\circ = \{x \mid x \in A \ \& \text{ существует окрестность } V_x \subseteq A\}$
   $A \subseteq B$, тогда для любого $x \in A$ верно $x \in B$ и $V_x \subseteq A \subseteq B$, т.е. все внутренние точки A являются также внутренними точками B. Таким образом, $A^\circ \subseteq B^\circ$
2. $\overline{A} = \{x \mid x \text{ – внутренняя или граничная точка } A\}$
   В любой окрестности точки $x \in \overline{A}$ есть точки A. Если $A \subseteq B$, то в любой окрестности x есть точки B. Тогда $x \in \overline{B}$. Таким образом, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

(e) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?

1. $(A \cap B)^\circ = \{x \mid x \in A \cap B \;\&\; x-$ внутренняя точка $A \cap B\} =$
   $= \{x \mid x \in A \cap B \;\&$ существует окрестность $V_x \subseteq A \cap B\} =$
   $= \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B \;\&\; V_x \subseteq A \;\&\; V_x \subseteq B\} =$
   $= \{x \mid x \in A \,\&\, x-$ внутренняя точка $A\} \cap \{x \mid x \in B \,\&\, x-$ внутренняя точка $B\}$
   $= A^\circ \cap B^\circ$
   $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
2. Пусть $A := [0, 1], B := [1, 2]$. Тогда
   $(A \cup B)^\circ = ([0, 1] \cup [1, 2])^\circ = [0, 2]^\circ = (0, 2)$
   $A^\circ \cup B^\circ = [0, 1]^\circ \cup [1, 2]^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$
   $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

(f) Покажите, что $\overline{(\overline{A^\circ})^\circ} = \overline{A^\circ}$

$\overline{A^\circ} = \{x \mid x$ – внутренняя или граничная точка $A^\circ\}$

$(\overline{A^\circ})^\circ = \{x \mid x$ – внутренняя точка $\overline{A^\circ}\} = \{x \mid x$ – внутренняя точка $A^\circ\}$

$\overline{(\overline{A^\circ})^\circ} = \{x \mid x$ – внутренняя или граничная точка $(\overline{A^\circ})^\circ\} =$
$= \{x \mid x$ – внутренняя или граничная точка $A^\circ\} = \overline{A^\circ}$

Таким образом, $\overline{(\overline{A^\circ})^\circ} = \overline{A^\circ}$

2 задание

(a) Связны ли $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как топологические подпространства $\mathbb{R}$?

1. Пусть $A := (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, B := (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Тогда
   $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \varnothing$ и $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$
   Таким образом, $\mathbb{Q}$ несвязно.
2. Пусть $A := (-\infty, 0) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B := (0, +\infty) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда
   $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, A \cap B = \varnothing$ и $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$
   Таким образом, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ несвязно.

7 задание

(7) A – подмножество упорядоченного множества

$(\preceq)$ – отношение частичного порядка.

Даны высказывания:

(а) наличие наибольшего элемента

(б) наличие супремума

(в) наличие единственного максимального элемента

Выполнено ли в общем случае, что

1. (а) влечёт (б) – Да.

   Пусть x – наибольший элемент A, т.е. при всех $a \in A$ выполнено $a \preceq x$.

   Тогда x является верхней гранью множества A и содержится в нём. Значит, не существует такой верхней грани y, что $y \preceq x$, потому что для $x \in A$ не выполняется $x \preceq y$.

   Таким образом, x – наименьшая верхняя грань, т.е. супремум.

2. (а) влечёт (в) – Да.

   Пусть x – наибольший элемент A и существует другой наибольший элемент $y \in A$.

   Тогда верно, что $x \preceq y$ и $y \preceq x$. По антисимметричности ($\preceq$) получаем $x = y$, т.е. наибольший элемент единственен.

   Наибольший элемент также является максимальным, т.к. для него выполнено определение максимального элемента:

   при всех $a \in A$: $x \preceq a$ влечёт $a = x$

   Таким образом, x – единственный максимальный элемент.

3. (б) влечёт (а) – Нет.

   Пусть $A = (-\infty, 0)$ с отношением ($\leq$).

   Тогда $\sup A = 0$, но наибольшего элемента нет.

4. (б) влечёт (в) – Нет.

   Рассмотрим тот же пример. Супремум есть, но максимального элемента нет.

5. (в) влечёт (а) – Да.

   Докажем от противного. Пусть m – единственный максимальный элемент A и нет наибольшего элемента.

   5.1. В таком случае существует x, не сравнимый с m, т.к. иначе для всех $a \in A$ было бы верно $a \preceq m$ и m был бы наибольшим элементом, что противоречит условию.

   5.2. Если не существует элементов, больших x, то
   для всех $a \in A$: $x \preceq a$ влечёт $a = x$,
   т.е. x является максимальным, что противоречит единственности m.

   5.3. Если существуют элементы, большие x, то будем рассматривать их, пока не найдём самый большой элемент y в этой цепочке.

   5.4. Если y не сравним с m, то по пункту (5.2) снова возникает противоречие с единственностью максимального элемента.
   Если y сравним с m, то либо $y = m$, либо $y \preceq m$.

   5.5. Если $y = m$, то было бы верно $x \preceq y = m$, что противоречит несравнимости x и m.

5.6. Если $y \preceq m$, то по транзитивности ($\preceq$) следует $x \preceq y \preceq m$, т.е. $x \preceq m$, что снова противоречит несравнимости x и m.

Во всех случаях получили противоречия.
Таким образом, в A есть наибольший элемент.

6. (в) влечёт (б) – Да.
Ранее доказано, что (в) влечёт (а) и (а) влечёт (б).
Таким образом, (в) влечёт (б).

8 задание

(a) Монотонность: пусть $a \preceq b, c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$, $a \cdot c \preceq b \cdot d$

$a + c = \sup\{a, c\} =$ наим$(upb\{a, c\}) = x$ – наим. верхняя грань a и c.

$b + d = \sup\{b, d\} =$ наим$(upb\{b, d\}) = y$ – наим. верхняя грань b и d.

Получаем $a \preceq b \preceq y$ и $c \preceq d \preceq y$, т.е. y – верхняя грань a и c.

x – наименьшая верхняя грань a и c, значит, $x \preceq y$.

$x = a + c$, $y = b + d$. Таким образом, $a + c \preceq b + d$.

Аналогично

$a \cdot c = \inf\{a, c\} =$ наиб$(lwb\{a, c\}) = u$ – наиб. нижняя грань a и c.

$b \cdot d = \inf\{b, d\} =$ наиб$(lwb\{b, d\}) = v$ – наиб. нижняя грань b и d.

Получаем $u \preceq a \preceq b$ и $u \preceq c \preceq d$, т.е. u – нижняя грань b и d.

v – наибольшая нижняя грань b и d, значит, $u \preceq v$.

$u = a \cdot c$, $v = b \cdot d$. Таким образом, $a \cdot c \preceq b \cdot d$.

$\square$

(b) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$, $a + (a \cdot b) = a$

$a \cdot (a + b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$

$\sup\{a, b\} =$ наим$\{x \mid a \preceq x, b \preceq x\}$

$a \cdot (a + b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\} = inf\{a, x\} =$ наиб$\{y \mid y \preceq a \preceq x\} = a$

Таким образом, $a \cdot (a + b) = a$.

Аналогично

$a + (a \cdot b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\}$

$\inf\{a, b\} =$ наиб$\{u \mid u \preceq a, u \preceq b\}$

$a + (a \cdot b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\} = \sup\{a, u\} =$ наим$\{v \mid u \preceq a \preceq v\} = a$

Таким образом, $a + (a \cdot b) = a$.

$\square$

(c) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$

1. Пусть $a \preceq b$. Тогда
   $a \cdot 1 = \inf\{a, 1\} =$ наиб$\{x \mid x \preceq a \preceq 1\} = a \preceq b$, т.е. $a \cdot 1 \preceq b$
   $a \to b =$ наиб$\{c \mid a \cdot c \preceq b\} = 1$, т.к. 1 – наибольший элемент решётки и $a \cdot 1 \preceq b$.
   Таким образом, $a \to b = 1$.
2. Пусть $a \to b = 1$. Тогда
   $a \cdot 1 \preceq b$, т.е. $a \cdot 1 = \inf\{a, 1\} = a \preceq b$
   Таким образом, $a \preceq b$.

$\square$

(d) Из $a \preceq b$ следует $b \to c \preceq a \to c$ и $c \to a \preceq c \to b$

1. Пусть $a \preceq b$.
   $b \to c \preceq b \to c$, по монотонности получаем $a \cdot (b \to c) \preceq b \cdot (b \to c)$
   По определению $b \cdot (b \to c) \preceq c$, тогда $a \cdot (b \to c) \preceq c$
   $a \to c =$ наиб$\{x \mid a \cdot x \preceq c\}$ и $a \cdot (b \to c) \preceq c$, тогда
   $b \to c \preceq a \to c$
2. Пусть $a \preceq b$.
   По определению $c \cdot (c \to a) \preceq a \preceq b$
   $c \to b =$ наиб$\{x \mid c \cdot x \preceq b\}$ и $c \cdot (c \to a) \preceq b$, тогда
   $c \to a \preceq c \to b$

$\square$

(e) Из $a \preceq b \to c$ следует $a \cdot b \preceq c$

Пусть $a \preceq b \to c$

$b \preceq b$, по монотонности получаем $b \cdot a = a \cdot b \preceq b \cdot (b \to c)$

По определению $b \cdot (b \to c) \preceq c$

Таким образом, $a \cdot b \preceq c$

$\square$

(f) $b \preceq a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$

1. $\inf(a, b) = a \cdot b \preceq b$
   $a \to b =$ наиб$\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$ и $a \cdot b \preceq b$, тогда
   $b \preceq a \to b$
2. из (1) получаем $a \preceq b \to a$
   $\inf\{a, x\} = a \cdot x \preceq a \preceq b \to a$ для любого x, тогда
   $a \to (b \to a) =$ наиб$\{x \mid a \cdot x \preceq b \to a\} = 1$

$\square$

(g) $a \to b \preceq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$

1. $x \cdot y \cdot z = \inf\{x, y, z\} \preceq \inf\{x, y\} = x \cdot y$ для любых x, y, z.

2. по (1) пусть $x := a, y := (a \to b), z := a \to (b \to c)$, тогда
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq a \cdot (a \to b)$
   По определению $a \cdot (a \to b) \preceq b$, тогда
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq b$
3. по (1) пусть $x := a, y := (a \to (b \to c)), z := a \to b$, тогда
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq a \cdot (a \to (b \to c))$
   По определению $a \cdot (a \to (b \to c)) \preceq b \to c$, тогда
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq b \to c$
4. из (2) и (3) получаем
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq b \cdot (b \to c)$
   По определению $b \cdot (b \to c) \preceq c$, тогда
   $a \cdot (a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq c$
5. $a \to c =$ наиб$\{x \mid a \cdot x \preceq c\}$ и (4), тогда
   $(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \preceq a \to c$, т.е.
   $(a \to (b \to c)) \cdot (a \to b) \preceq a \to c$
6. $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) =$ наиб$\{x \mid (a \to (b \to c)) \cdot x \preceq a \to c\}$ и (5), тогда
   $a \to b \preceq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$

□

(h) $a \preceq b \to (a \cdot b)$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

1. $a \cdot b = b \cdot a \preceq a \cdot b$
   $b \to (a \cdot b) =$ наиб$\{x \mid b \cdot x \preceq a \cdot b\}$, тогда
   $a \preceq b \to (a \cdot b)$
2. из (1) получаем $a \preceq b \to (a \cdot b)$
   $\inf\{a, x\} = a \cdot x \preceq a \preceq b \to a \cdot b$ для любого x, тогда
   $a \to (b \to (a \cdot b)) =$ наиб$\{x \mid a \cdot x \preceq b \to (a \cdot b)\} = 1$

□

(i) $a \to c \preceq (b \to c) \to ((a + b) \to c)$

1. $x \cdot y \cdot z = \inf\{x, y, z\} \preceq \inf\{x, y\} = x \cdot y$ для любых x, y, z
2. по (1) пусть $x := a, y := (a \to c), z := (b \to c)$, тогда
   $a \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \preceq a \cdot (a \to c)$
   По определению $a \cdot (a \to c) \preceq c$, тогда
   $a \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \preceq c$
3. $(a \to c) \cdot (b \to c) \to c =$ наиб$\{x \mid (a \to c) \cdot (b \to c) \cdot x \preceq c\}$ и (2), тогда $a \preceq (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$
4. Аналогично пунктам (2) и (3)
   $b \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \preceq c$
   $b \preceq (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$

5. $a \preceq (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$ и $b \preceq (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$, тогда
$a + b \preceq (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$
6. $(a \to c) \cdot (b \to c) \to c =$ наиб$\{x \mid (a \to c) \cdot (b \to c) \cdot x \preceq c\}$ и (5), тогда $(a \to c) \cdot (b \to c) \cdot (a + b) \preceq c$
7. $(a + b) \to c =$ наиб$\{x \mid (a + b) \cdot x \preceq c\}$ и (6), тогда
$(a \to c) \cdot (b \to c) \preceq (a + b) \to c$
8. $(b \to c) \to ((a + b) \to c) =$ наиб$\{x \mid (b \to c) \cdot x \preceq ((a + b) \to c)\}$ и (7), тогда $a \to c \preceq (b \to c) \to ((a + b) \to c)$

$\square$

(j) Импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Пусть a, b, c – произвольные элементы импликативной решётки.

Для краткости обозначим $d := (a \cdot c) + (b \cdot c)$

$a \cdot c \preceq \sup\{a \cdot c, b \cdot c\} = (a \cdot c) + (b \cdot c) = d$, т.е. $a \cdot c \preceq d$

$c \to d =$ наиб$\{x \mid c \cdot x \preceq d\}$ и $c \cdot a = a \cdot c \preceq d$, значит $a \preceq c \to d$

Аналогично, $b \cdot c \preceq d$ и $b \preceq c \to d$

$a \preceq c \to d$ и $b \preceq c \to d$, значит $a + b = \sup\{a, b\} \preceq c \to d$

$c \preceq c$ и $a + b \preceq c \to d$, по монотонности получаем $c \cdot (a + b) \preceq c \cdot (c \to d)$

По определению $c \to d$ получаем $c \cdot (c \to d) \preceq d$.

Тогда $c \cdot (a + b) \preceq c \cdot (c \to d) \preceq d$, т.е. $c \cdot (a + b) \preceq d$.

$a \preceq \sup\{a, b\} = a + b$

$c \preceq c$ и $a \preceq a + b$, по монотонности получаем $c \cdot a = a \cdot c \preceq c \cdot (a + b)$

Аналогично, по монотонности получаем $c \cdot b = b \cdot c \preceq c \cdot (a + b)$

$\sup\{a \cdot c, b \cdot c\} = (a \cdot c) + (b \cdot c) = d \preceq c \cdot (a + b)$

Итого, получили $d \preceq c \cdot (a + b) \preceq d$

Таким образом, $c \cdot (a + b) = d$, т.е.

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

$\square$

9 задание

(9) Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.

Корректность значит, что если $\vdash \alpha$, то $[\![\alpha]\!] = 1$. Выберем в качестве модели алгебру Гейтинга.

Пусть α, β, γ – произвольные высказывания в ИИВ.

Тогда пусть $[\![\alpha]\!] := a$, $[\![\beta]\!] := b$, $[\![\gamma]\!] := c$.

Алгебра Гейтинга – это импликативная решётка, её свойства (8a)-(8j) доказаны в задании 8. Докажем, что оценки аксиом ИИВ (И1)-(И10) в алгебре Гейтинга истинны.

(И1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(8f) $a \to (b \to c) = 1$

$[\![\alpha \to \beta \to \alpha]\!] = a \to (b \to a) = 1$ по (8f)

(И2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

(8g) $a \to b \preceq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$

из (8g) следует, что для любого x

$(a \to b) \cdot x \preceq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$

Тогда

$(a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)) =$
$=$ наиб$\{x \mid (a \to b) \cdot x \preceq (a \to (b \to c)) \to (a \to c)\} = 1$

Таким образом,

$[\![(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)]\!] =$
$= (a \to b) \to (a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$

(И3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$

(8h) $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

$[\![\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta]\!] = a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$ по (8h)

(И4) $\alpha \& \beta \to \alpha$

(8c) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$

$a \cdot b \preceq a$, тогда по (8c) $(a \cdot b) \to a = 1$

$[\![\alpha \& \beta \to \alpha]\!] = (a \cdot b) \to a = 1$

(И5) $\alpha \& \beta \to \beta$

Аналогично, $a \cdot b \preceq b$, тогда по (8c) $(a \cdot b) \to b = 1$

$[\![\alpha \& \beta \to \beta]\!] = (a \cdot b) \to b = 1$

(И6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

$a \preceq a + b$, тогда по (8c) $a \to (a + b) = 1$

$[\![\alpha \to \alpha \vee \beta]\!] = a \to (a + b) = 1$

(И7) $\beta \to \alpha \vee \beta$

Аналогично, $b \preceq a + b$, тогда по (8c) $b \to (a + b) = 1$

$[\![\beta \to \alpha \vee \beta]\!] = b \to (a + b) = 1$

(И8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

(8i) $a \to c \preceq (b \to c) \to ((a + b) \to c)$

из (8i) следует, что для любого x

$(a \to c) \cdot x \preceq (b \to c) \to ((a + b) \to c)$

Тогда

$(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a + b) \to c)) =$
$= \text{наиб}\{x \mid (a \to c) \cdot x \preceq (b \to c) \to ((a + b) \to c)\} = 1$
Таким образом,
$[\![(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)]\!] =$
$= (a \to c) \to ((b \to c) \to ((a + b) \to c)) = 1$

(И9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
в ВНК-интерпретации (И9) можно записать как
$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \bot)) \to (\alpha \to \bot)$
и воспользоваться аксиомой (И2)
$[\![(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)]\!] =$
$= [\![(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \bot)) \to (\alpha \to \bot)]\!] =$
$= (a \to b) \to ((a \to (b \to 0)) \to (a \to 0)) = 1$

(И10) $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$
в ВНК-интерпретации можно записать как
$\alpha \to (\alpha \to \bot) \to \beta$
(8c) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$
по определению $(a \to 0) \cdot a \preceq 0 \preceq b$
$(a \to 0) \to b = \text{наиб}\{x \mid (a \to 0) \cdot x \preceq b\}$, значит
$a \preceq (a \to 0) \to b$
тогда по (8c) $a \to ((a \to 0) \to b) = 1$
$[\![\alpha \to \neg\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha \to (\alpha \to \bot) \to \beta]\!] = a \to ((a \to 0) \to b) = 1$

Таким образом, модель алгебры Гейтинга корректна для аксиом ИИВ.

Докажем теперь, что правило вывода Modus Ponens $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ выполняется для модели алгебры Гейтинга.

(MP) Пусть выполнены α и $\alpha \to \beta$, т.е.
$[\![\alpha]\!] = a = 1$ и $[\![\alpha \to \beta]\!] = a \to b = 1$.
По определению $a \cdot (a \to b) \preceq b$, тогда
$1 \cdot 1 = 1 \preceq b$, т.е. $b = [\![\beta]\!] = 1$, т.е. β выполнено.
$\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$

Таким образом, правило Modus Ponens выполняется.

Если высказывание α доказуемо в ИИВ, то существует его доказательство, состоящее из последовательности схем аксиом (И1)-(И10) и применений Modus Ponens (MP). Схемы аксиом и правило Modus Ponens корректны в модели алгебры Гейтинга, значит если высказывание доказуемо, то оно общезначимо в этой модели, т.е.

если $\vdash \alpha$, то $[\![\alpha]\!] = 1$.

Таким образом, ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.

$\square$

12 задание

(12) Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда
$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

По дистрибутивности
$(a + b) \cdot (a + c) = ((a + b) \cdot a) + ((a + b) \cdot c)$
По закону поглощения и по дистрибутивности
$((a + b) \cdot a) + ((a + b) \cdot c) = a + ((a \cdot c) + (b \cdot c))$
По ассоциативности сложения
$a + ((a \cdot c) + (b \cdot c)) = (a + (a \cdot c)) + (b \cdot c)$
По закону поглощения
$(a + (a \cdot c)) + (b \cdot c) = a + (b \cdot c)$
Таким образом, $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

$\square$

13 задание

(13) Покажите, что $(\preceq)$ – отношение предпорядка, а $(\approx)$ – отношение эквивалентности.
$\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$

1. $\alpha \vdash \alpha$ – верно, т.е. верно $\alpha \preceq \alpha$ – $(\preceq)$ рефлексивно.
2. Пусть $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \gamma$. Тогда
   2.1. $\alpha \vdash \beta$, по теореме о дедукции $\vdash \alpha \to \beta$
   2.2. $\beta \vdash \gamma$, по теореме о дедукции $\vdash \beta \to \gamma$
   2.3. по схеме аксиом (2)
   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
   2.4. по схеме аксиом (1)
   $(\beta \to \gamma) \to \alpha \to (\beta \to \gamma)$
   2.5. Modus Ponens (2.2) и (2.4)
   $\alpha \to \beta \to \gamma$
   2.6. Modus Ponens (2.1) и (2.3)
   $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
   2.7. Modus Ponens (2.5) и (2.6)
   $\vdash \alpha \to \gamma$
   по теореме о дедукции $\alpha \vdash \gamma$, тогда
   $\alpha \preceq \gamma$ – $(\preceq)$ транзитивно

   Таким образом, $(\preceq)$ – отношение предпорядка.

$\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$

1. $\alpha \preceq \alpha$, тогда $\alpha \approx \alpha$ – $(\approx)$ рефлексивно.
2. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$
   $\beta \approx \alpha$, если $\beta \preceq \alpha$ и $\alpha \preceq \beta$
   Тогда $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \alpha$ – $(\approx)$ симметрично.
3. Пусть $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \gamma$. Тогда
   2.1. $\alpha \preceq \beta$, т.е. $\alpha \vdash \beta$, т.е. $\vdash \alpha \to \beta$
   2.2. $\beta \preceq \alpha$, т.е. $\beta \vdash \alpha$, т.е. $\vdash \beta \to \alpha$
   2.3. $\beta \preceq \gamma$, т.е. $\beta \vdash \gamma$, т.е. $\vdash \beta \to \gamma$
   2.4. $\gamma \preceq \beta$, т.е. $\gamma \vdash \beta$, т.е. $\vdash \gamma \to \beta$
   2.5. по схеме аксиом (2)
   $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
   2.6. по схеме аксиом (1)
   $(\beta \to \gamma) \to \alpha \to (\beta \to \gamma)$
   2.7. Modus Ponens (2.3) и (2.6)
   $\alpha \to \beta \to \gamma$
   2.8. Modus Ponens (2.1) и (2.5)
   $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
   2.9. Modus Ponens (2.7) и (2.8)
   $\alpha \to \gamma$
   2.10. по схеме аксиом (2)
   $(\gamma \to \beta) \to (\gamma \to \beta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha)$
   2.11. по схеме аксиом (1)
   $(\beta \to \alpha) \to \gamma \to (\beta \to \alpha)$
   2.12. Modus Ponens (2.2) и (2.11)
   $\gamma \to \beta \to \alpha$
   2.13. Modus Ponens (2.4) и (2.10)
   $(\gamma \to \beta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha)$
   2.14. Modus Ponens (2.12) и (2.13)
   $\gamma \to \alpha$
   Получаем $\vdash \alpha \to \gamma$, по теореме о дедукции $\alpha \vdash \gamma$, т.е. $\alpha \preceq \gamma$
   Аналогично $\vdash \gamma \to \alpha$, по теореме о дедукции $\gamma \vdash \alpha$, т.е. $\gamma \preceq \alpha$
   $\alpha \approx \gamma$ – $(\approx)$ транзитивно.

   Таким образом, $(\approx)$ – отношение эквивалентности.