MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

March 2023

1 Покажите, что не выполнимо в интуиционистской логике

1. $\neg\neg A \to A$

   Рассмотрим топологическую модель.

   $[\![\neg\alpha]\!] = (X \setminus [\![\alpha]\!])^\circ$

   $[\![\neg\neg A]\!] = (X \setminus [\![\neg A]\!])^\circ = (X \setminus (X \setminus [\![A]\!])^\circ)^\circ$

   $[\![\alpha \to \beta]\!] = ((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^\circ$

   $[\![\neg\neg A \to A]\!] = ((X \setminus [\![\neg\neg A]\!]) \cup [\![A]\!])^\circ = (X \setminus (X \setminus (X \setminus [\![A]\!])^\circ)^\circ \cup [\![A]\!])^\circ$

   Пусть $X = \mathbb{R}, A = (0,1) \cup (1,2)$. Тогда

   $[\![\neg\neg A \to A]\!] = (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (1,2)))^\circ)^\circ \cup (0,1) \cup (1,2))^\circ$

   Проведя вычисления

   $(\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (1,2)))^\circ = ((-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty))^\circ =$
   $= (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

   $(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (1,2)))^\circ)^\circ = (\mathbb{R} \setminus ((-\infty, 0) \cup (2, +\infty)))^\circ = [0,2]^\circ =$
   $= (0,2)$

   $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (1,2)))^\circ)^\circ = \mathbb{R} \setminus (0,2) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

   $(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (1,2)))^\circ)^\circ \cup (0,1) \cup (1,2))^\circ =$
   $= ((-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \cup (0,1) \cup (1,2))^\circ = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

   получаем

   $[\![\neg\neg A \to A]\!] = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \neq \mathbb{R} = X$

   Оценка не истинна, значит $\neg\neg A \to A$ не доказуемо в ИИВ.

2. $((A \to B) \to A) \to A$

   $[\![\alpha \to \beta]\!] = ((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^\circ$

   $[\![((A \to B) \to A) \to A]\!] = ((X \setminus [\![(A \to B) \to A]\!]) \cup [\![A]\!])^\circ =$
   $= ((X \setminus ((X \setminus [\![A \to B]\!]) \cup [\![A]\!])^\circ) \cup [\![A]\!])^\circ =$
   $= ((X \setminus ((X \setminus ((X \setminus [\![A]\!]) \cup [\![B]\!])^\circ) \cup [\![A]\!])^\circ) \cup [\![A]\!])^\circ$

Пусть $X = \mathbb{R}, A = (2,3), B = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Тогда

$[\![((A \to B) \to A) \to A]\!] =$
$= (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (2,3) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ \cup (2,3))^\circ \cup (2,3))^\circ$

Проведя вычисления

$(\mathbb{R} \setminus (2,3) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ = ((-\infty,2] \cup [3,+\infty) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ$
$= (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

$(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (2,3) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ \cup (2,3))^\circ =$
$= (\mathbb{R} \setminus ((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \cup (2,3))^\circ = ([0,1] \cup (2,3))^\circ = (0,1) \cup (2,3)$

$(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (2,3) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ \cup (2,3))^\circ \cup (2,3))^\circ =$
$= (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (2,3)) \cup (2,3))^\circ = ((-\infty,0] \cup [1,2] \cup [3,+\infty) \cup (2,3))^\circ =$
$= ((-\infty,0] \cup [1,+\infty))^\circ = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

получаем

$[\![((A \to B) \to A) \to A]\!] = (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \neq \mathbb{R} = X$

Оценка не истинна, значит $((A \to B) \to A) \to A$ не доказуемо в ИИВ.

3. $(A \to B) \vee (B \to A)$

   Рассмотрим топологическую модель.

   $[\![\alpha \to \beta]\!] = ((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^\circ$

   $[\![A \to B]\!] = ((X \setminus [\![A]\!]) \cup [\![B]\!])^\circ$

   $[\![B \to A]\!] = ((X \setminus [\![B]\!]) \cup [\![A]\!])^\circ$

   $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$

   $[\![(A \to B) \vee (B \to A)]\!] = [\![A \to B]\!] \cup [\![B \to A]\!] =$
   $= ((X \setminus [\![A]\!]) \cup [\![B]\!])^\circ \cup ((X \setminus [\![B]\!]) \cup [\![A]\!])^\circ$

   Пусть $X = \mathbb{R}, A = (0,1), B = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$. Тогда

   $[\![(A \to B) \vee (B \to A)]\!] =$
   $= (\mathbb{R} \setminus (0,1) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus ((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \cup (0,1))^\circ$

   Проведя вычисления

   $(\mathbb{R} \setminus (0,1) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ = ((-\infty,0] \cup [1,+\infty) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ$
   $= (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

   $(\mathbb{R} \setminus ((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \cup (0,1))^\circ = ([0,1] \cup (0,1))^\circ = (0,1)$

   $(\mathbb{R} \setminus (0,1) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty))^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus ((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \cup (0,1))^\circ =$
   $= (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$

   получаем

   $[\![(A \to B) \vee (B \to A)]\!] = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty) \neq \mathbb{R} = X$

   Оценка не истинна, значит $(A \to B) \vee (B \to A)$ не доказуемо в ИИВ.

4.

2 Докажите или опровергните

1.

2. $\neg A \& \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ и $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B$

   Воспользуемся ВНК-интерпретацией:

   $\neg\alpha$ можно записать как $\alpha \to \perp$

   2.1. $(A \to \perp)\&(B \to \perp) \vdash A \vee B \to \perp$

      2.1.1. по схеме аксиом (4)
      $\alpha \& \beta \to \alpha\ [\alpha := A \to \perp, \beta := B \to \perp]$
      $(A \to \perp)\&(B \to \perp) \to A \to \perp$

      2.1.2. Modus Ponens гипотезы и (2.1.1)
      $A \to \perp$

      2.1.3. по схеме аксиом (5)
      $\alpha \& \beta \to \beta\ [\alpha := A \to \perp, \beta := B \to \perp]$
      $(A \to \perp)\&(B \to \perp) \to B \to \perp$

      2.1.4. Modus Ponens гипотезы и (2.1.3)
      $B \to \perp$

      2.1.5. по схеме аксиом (8)
      $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)\ [\alpha := A, \beta := B, \gamma := \perp]$
      $(A \to \perp) \to (B \to \perp) \to (A \vee B \to \perp)$

      2.1.6. Modus Ponens (2.1.2) и (2.1.5)
      $(B \to \perp) \to (A \vee B \to \perp)$

      2.1.7. Modus Ponens (2.1.4) и (2.1.6)
      $A \vee B \to \perp$

      Таким образом,
      $(A \to \perp)\&(B \to \perp) \vdash A \vee B \to \perp$
      то есть
      $\neg A \& \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

   2.2. $A \vee B \to \perp \vdash (A \to \perp)\&(B \to \perp)$

      2.2.1. по схеме аксиом (6)
      $\alpha \to \alpha \vee \beta\ [\alpha := A, \beta := B]$
      $A \to A \vee B$

      2.2.2. по схеме аксиом (7)
      $\beta \to \alpha \vee \beta\ [\alpha := A, \beta := B]$
      $B \to A \vee B$

      2.2.3. по схеме аксиом (1)
      $\alpha \to \beta \to \alpha\ [\alpha := A \vee B \to \perp, \beta := A$
      $(A \vee B \to \perp) \to A \to (A \vee B \to \perp)$

      2.2.4. Modus Ponens гипотезы и (2.2.3)
      $A \to (A \vee B \to \perp)$

2.2.5. по схеме аксиом (1)
$\alpha \to \beta \to \alpha$ $[\alpha := A \vee B \to \perp, \beta := B$
$(A \vee B \to \perp) \to B \to (A \vee B \to \perp)$

2.2.6. Modus Ponens гипотезы и (2.2.5)
$B \to (A \vee B \to \perp)$

2.2.7. по схеме аксиом (2)
$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
$[\alpha := A, \beta := A \vee B, \gamma := \perp]$
$(A \to A \vee B) \to (A \to A \vee B \to \perp) \to (A \to \perp)$

2.2.8. Modus Ponens (2.2.1) и (2.2.7)
$(A \to A \vee B \to \perp) \to (A \to \perp)$

2.2.9. Modus Ponens (2.2.4) и (2.2.8)
$A \to \perp$

2.2.10. по схеме аксиом (2)
$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
$[\alpha := B, \beta := A \vee B, \gamma := \perp]$
$(B \to A \vee B) \to (B \to A \vee B \to \perp) \to (B \to \perp)$

2.2.11. Modus Ponens (2.2.2) и (2.2.10)
$(B \to A \vee B \to \perp) \to (B \to \perp)$

2.2.12. Modus Ponens (2.2.6) и (2.2.11)
$B \to \perp$

2.2.13. по схеме аксиом (3)
$\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$ $[\alpha := A \to \perp, \beta := B \to \perp$
$(A \to \perp) \to (B \to \perp) \to (A \to \perp)\&(B \to \perp)$

2.2.14. Modus Ponens (2.2.9) и (2.2.13)
$(B \to \perp) \to (A \to \perp)\&(B \to \perp)$

2.2.15. Modus Ponens (2.2.12) и (2.2.13)
$(A \to \perp)\&(B \to \perp)$

Таким образом,
$A \vee B \to \perp \vdash (A \to \perp)\&(B \to \perp)$
то есть
$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B$

3. $A \to B \vdash \neg A \vee B$ и $\neg A \vee B \vdash A \to B$

3.1. $A \to B \vdash \neg A \vee B$
Пусть $X = \mathbb{R}, A = B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$[\![A \to B]\!] = (X \setminus [\![A]\!] \cup [\![B]\!])^\circ =$
$= (\mathbb{R} \setminus ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cup (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))^\circ =$
$= (\{0\} \cup (-\infty, 0) \cup (0, +\infty))^\circ = \mathbb{R} = X$
$[\![\neg A \vee B]\!] = (X \setminus [\![A]\!])^\circ \cup [\![B]\!] =$
$= (\mathbb{R} \setminus ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)))^\circ \cup (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) =$
$= \{0\}^\circ \cup (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \neq \mathbb{R} = X$

Таким образом,

$[\![A \to B]\!] = X, [\![\neg A \vee B]\!] \neq X$

значит, не выполняется $A \to B \vdash \neg A \vee B$

3.2. $\neg A \vee B \vdash A \to B$

Пусть $X = \mathbb{R}, A = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), B = (0, 3)$

$[\![\neg A \vee B]\!] = (X \setminus [\![A]\!])^\circ \cup [\![B]\!] = (\mathbb{R} \setminus ((-\infty, 1) \cup (2, +\infty)))^\circ \cup (0, 3) =$
$[1, 2]^\circ \cup (0, 3) = (0, 3$