Математическая статистика

25 сентября 2023

1 задача:

Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения B_p. Найти оценку максимального правдоподобия параметра p.

$L(X,p) = \prod_{i=1}^n P_p(X = X_i) = p^k(1-p)^{n-k}$

$k = \sum_{i=1}^n X_i = \overline{x}n$ – число 1 в выборке.

$L(X,p) = p^{n\overline{x}}q^{n-n\overline{x}}$

$\ln L(X,p) = n\overline{x}\ln p + (n - n\overline{x})\ln(1-p)$

$\dfrac{d}{dp}\ln L(X,p) = \dfrac{n\overline{x}}{p} - \dfrac{n - n\overline{x}}{1-p} = 0$

$p = \overline{x}$ – точка максимума. Проверим с помощью второй производной.

2 задача:

Имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения E_α. Найти оценку максимального правдоподобия параметра α.

$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

$L(X,\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha e^{-\alpha x_i} = \alpha^n e^{-n\alpha\sum x_i}$

$\ln L(X,\alpha) = n\ln\alpha - n\alpha\overline{x}$

$\dfrac{d}{d\alpha}\ln L(X,\alpha) = \dfrac{n}{\alpha} - n\overline{x} = 0$

$\alpha = \dfrac{1}{\overline{x}}$

3 задача:

Является ли семейство показательных распределений E_α регулярным? Найти информацию Фишера.

$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$

$C = (0, +\infty)$

$\ln f(x) = \ln\alpha - \alpha x$

$\dfrac{d}{d\alpha}\ln f(x) = \dfrac{1}{\alpha} - x$ – непрерывно по α (условие 1).

$I(\alpha) = E(\dfrac{d}{d\alpha}\ln f(x))^2 = E(x - Ex)^2 = Dx = \dfrac{1}{\alpha^2}$ – непрерывна при $\alpha > 0$ (условие 2).

Значит, E_α – регулярное семейство.
$\widehat{\alpha} = \dfrac{1}{\overline{x}}$ – смещённая оценка
$\widetilde{\alpha} = \dfrac{n}{n-1}\dfrac{1}{\overline{x}}$ – несмещённая оценка
$D\widetilde{\alpha} = \dfrac{\alpha^2}{n-2} > \dfrac{1}{nI(\alpha)} = \dfrac{\alpha^2}{n}$

4 задача:

Пусть имеется выборка $X = (X_1, ..., X_n) \in U(0, \theta)$. Проверить регулярность семейства $U(0, \theta)$. Найти информацию Фишера. Проверить неравенство Рау-Крамера.

$f(x) = \dfrac{1}{\theta}$, при $0 \leqslant x \leqslant \theta$
$C = (0, +\infty)$
$\dfrac{d}{d\theta}\ln f(x) = -\theta\dfrac{1}{\theta^2} = -\dfrac{1}{\theta}$ – непрерывно по θ (условие 1).
$I(\theta) = E(-\dfrac{1}{\theta})^2 = \dfrac{1}{\theta^2}$
$\dfrac{1}{nI(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n}$
$\theta^* = 2\overline{x}$
$D\theta^* = \dfrac{\theta^2}{3n} < \dfrac{\theta^2}{n}$
$\widetilde{\theta} = \dfrac{n-1}{n}X_{(n)}$
$D\widetilde{\theta} = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)} < \dfrac{\theta^2}{n}$

Так как плотность имеет разрыв в любой точке носителя, то она не дифференцируема и условие 1 регулярности не выполнено.

5 задача:

Доказать, что критическая точка из лекции для нормального распределения действительно является точкой максимума и оценкой максимального правдоподобия.

$M(\overline{\alpha}, D*)$
$\dfrac{d}{da}\ln L(X, a, \sigma) = \dfrac{n\overline{x} - n\overline{a}}{\sigma^2}$ $\dfrac{d}{d\sigma}\ln L(X, a, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \dfrac{n}{\sigma}$
$\dfrac{d^2}{da^2}\ln L(X, a, \sigma) = -\dfrac{n}{D*}$ $\dfrac{d^2}{d\sigma^2}\ln L(X, a, \sigma) = -\dfrac{2n}{D^*}$ $\dfrac{d^2}{dad\sigma}\ln L(X, a, \sigma) = 0$
$d^2 \ln L(X, a, \sigma)(M) = -\dfrac{n}{D^*}(da)^2 - \dfrac{2n}{D^*}(d\sigma)^2 < 0$ – точка максимума.

6 задача:

Пусть имеется подсемейство распределений Коши

$f_\theta(x) = \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$, $x \in \mathbb{R}$

$C = \mathbb{R}$

$\dfrac{d}{d\theta} \ln \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)} = \pi(1+(x-\theta)^2) \cdot (-\dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{(1+(x-\theta)^2)^2}) \cdot (-2(x-\theta)) =$

$= \dfrac{2(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2}$ – непрерывна по θ.

$I(\theta) = E(\dfrac{2(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2})^2 = E\dfrac{4(x-\theta)^2}{(1+(x-\theta)^2)^2} = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{4(x-\theta)^2}{(1+(x-\theta)^2)^2} \cdot \dfrac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)} dx =$

$= ...$ – удачи