

MathLog

Ивченков Дмитрий М32341

February 2023

1 Докажите

1. $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Доказано в прошлый раз

2. $\vdash \neg(A \& \neg A)$

Доказано в прошлый раз

3. $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$

3.1. по схеме аксиомы (5)

$$\alpha \& \beta \rightarrow \beta \quad [\alpha := A, \beta := B]$$
$$A \& B \rightarrow B$$

3.2. по схеме аксиомы (3)

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta \quad [\alpha := B, \beta := A \& B]$$
$$B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B$$

3.3. по схеме аксиомы (1)

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha := B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B, \beta := A \& B]$$
$$(B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B) \rightarrow A \& B \rightarrow (B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B)$$

3.4. Modus Ponens (3.2) и (3.3)

$$A \& B \rightarrow B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B$$

3.5. по схеме аксиомы (2)

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$
$$[\alpha := A \& B, \beta := B, \gamma := A \& B \rightarrow B \& A \& B]$$
$$(A \& B \rightarrow B) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B)$$

3.6. Modus Ponens (3.1) и (3.5)

$$(A \& B \rightarrow B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B)$$

3.7. Modus Ponens (3.4) и (3.6)

$$A \& B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B$$

- 3.8. по ранее доказанному
 $(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) [\alpha := A \& B, \beta := B \& A \& B]$
 $(A \& B \rightarrow A \& B \rightarrow B \& A \& B) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \& A \& B)$
- 3.9. Modus Ponens (3.7) и (3.8)
 $A \& B \rightarrow B \& A \& B$
- 3.10. по схеме аксиомы (4)
 $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha [\alpha := B \& A, \beta := B]$
 $B \& A \& B \rightarrow B \& A$
- 3.11. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha [\alpha := B \& A \& B \rightarrow B \& A, \beta := A \& B]$
 $(B \& A \& B \rightarrow B \& A) \rightarrow A \& B \rightarrow (B \& A \& B \rightarrow B \& A)$
- 3.12. Modus Ponens (3.10) и (3.11)
 $A \& B \rightarrow B \& A \& B \rightarrow B \& A$
- 3.13. по схеме аксиомы (2)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 $[\alpha := A \& B, \beta := B \& A \& B, \gamma := B \& A]$
 $(A \& B \rightarrow B \& A \& B) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \& A \& B \rightarrow B \& A) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \& A)$
- 3.14. Modus Ponens (3.9) и (3.13)
 $(A \& B \rightarrow B \& A \& B \rightarrow B \& A) \rightarrow (A \& B \rightarrow B \& A)$
- 3.15. Modus Ponens (3.12) и (3.14)
 $A \& B \rightarrow B \& A$
4. $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- 4.1. по схеме аксиомы (7)
 $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta [\alpha := B, \beta := A]$
 $A \rightarrow B \vee A$
- 4.2. по схеме аксиомы (6)
 $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta [\alpha := B, \beta := A]$
 $B \rightarrow B \vee A$
- 4.3. по схеме аксиомы (8)
 $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) [\alpha := A, \beta := B, \gamma := B \vee A]$
 $(A \rightarrow B \vee A) \rightarrow (B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A)$
- 4.4. Modus Ponens (4.1) и (4.3)
 $(B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A)$
- 4.5. Modus Ponens (4.2) и (4.4)
 $A \vee B \rightarrow B \vee A$
5. $A \& \neg A \vdash B$

- 5.1. по схеме аксиомы (4)
 $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha := A, \beta := \neg A]$
 $A \& \neg A \rightarrow A$
- 5.2. по схеме аксиомы (5)
 $\alpha \& \beta \rightarrow \beta \ [\alpha := A, \beta := \neg A]$
 $A \& \neg A \rightarrow \neg A$
- 5.3. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := A \& \neg A, \beta := A]$ и (5.1)
 $A \& \neg A \vdash A$
- 5.4. аналогично по теореме о дедукции
 $[\alpha := A \& \neg A, \beta := \neg A]$ и (5.2)
 $A \& \neg A \vdash \neg A$
- 5.5. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha := A, \beta := \neg B]$
 $A \rightarrow \neg B \rightarrow A$
- 5.6. Modus Ponens (5.3) и (5.5)
 $\neg B \rightarrow A$
- 5.7. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha := \neg A, \beta := \neg B]$
 $\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
- 5.8. Modus Ponens (5.4) и (5.7)
 $\neg B \rightarrow \neg A$
- 5.9. по схеме аксиомы (9)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha \ [\alpha := \neg B, \beta := A]$
 $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$
- 5.10. Modus Ponens (5.6) и (5.9)
 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$
- 5.11. Modus Ponens (5.8) и (5.10)
 $\neg \neg B$
- 5.12. по схеме аксиомы (10)
 $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha \ [\alpha := B]$
 $\neg \neg B \rightarrow B$
- 5.13. Modus Ponens (5.11) и (5.12)
 $A \& \neg A \vdash B$

2 Докажите

1. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - 1.1. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := A, \beta := \neg\neg A]$
достаточно доказать $A \vdash \neg\neg A$
 - 1.2. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := A, \beta := \neg A]$
 $A \rightarrow \neg A \rightarrow A$
 - 1.3. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := A, \beta := \neg A \rightarrow A]$
 $A \vdash \neg A \rightarrow A$
 - 1.4. по ранее доказанному
 $\alpha \rightarrow \alpha$ $[\alpha := \neg A]$
 $\neg A \rightarrow \neg A$
 - 1.5. по схеме аксиомы (9)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ $[\alpha := \neg A, \beta := A]$
 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A$
 - 1.6. Modus Ponens (1.3) и (1.5)
 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$
 - 1.7. Modus Ponens (1.4) и (1.6)
 $A \vdash \neg\neg A$
 - 1.8. по теореме о дедукции
 $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
2. $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
 - 2.1. по схеме аксиомы (4)
 $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := A, \beta := B]$
 $A \& B \rightarrow A$
 - 2.2. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := \neg A, \beta := A \& B]$
 $\neg A \rightarrow A \& B \rightarrow \neg A$
 - 2.3. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := \neg A, \beta := A \& B \rightarrow \neg A]$ и (2.2)
 $\neg A \vdash A \& B \rightarrow \neg A$

- 2.4. по схеме аксиомы (9)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha [\alpha := A \& B, \beta := A]$
 $(A \& B \rightarrow A) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$
- 2.5. Modus Ponens (2.1) и (2.4)
 $(A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$
- 2.6. Modus Ponens (2.3) и (2.5)
 $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- 3.
4. $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- 4.1. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha [\alpha := A, \beta := A \rightarrow B]$
 $A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$
- 4.2. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := A, \beta := (A \rightarrow B) \rightarrow A]$ и (4.1)
 $A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A$
- 4.3. по ранее доказанному
 $\alpha \rightarrow \alpha [\alpha := A \rightarrow B]$
 $(A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$
- 4.4. по схеме аксиомы (2)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 $[\alpha := (A \rightarrow B), \beta := A, \gamma := B]$
 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
- 4.5. Modus Ponens (4.2) и (4.4)
 $((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
- 4.6. Modus Ponens (4.3) и (4.5)
 $(A \rightarrow B) \rightarrow B$
- 4.7. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha [\alpha := \neg B, \beta := A \rightarrow B]$
 $\neg B \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$
- 4.8. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := \neg B, \beta := (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B]$ и (4.7)
 $\neg B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$
- 4.9. по схеме аксиомы (9)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha [\alpha := A \rightarrow B, \beta := B]$
 $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

- 4.10. Modus Ponens (4.6) и (4.9)
 $((A \rightarrow B) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
- 4.11. Modus Ponens (4.8) и (4.10)
 $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
5. $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
- 5.1. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ [$\alpha := \neg A, \beta := A$]
 $\neg A \rightarrow A \rightarrow \neg A$
- 5.2. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := \neg A, \beta := A \rightarrow \neg A]$ и (5.1)
 $\neg A \vdash A \rightarrow \neg A$
- 5.3. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ [$\alpha := B, \beta := \neg A$]
 $B \rightarrow \neg A \rightarrow B$
- 5.4. по теореме о дедукции
 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 $[\alpha := B, \beta := \neg A \rightarrow B]$ и (5.3)
 $B \vdash \neg A \rightarrow B$
- 5.5. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ [$\alpha := \neg A \rightarrow B, \beta := A$]
 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
- 5.6. Modus Ponens (5.4) и (5.5)
 $A \rightarrow \neg A \rightarrow B$
- 5.7. по схеме аксиомы (2)
 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
 $[\alpha := A, \beta := \neg A, \gamma := B]$
 $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 5.8. Modus Ponens (5.2) и (5.7)
 $(A \rightarrow \neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 5.9. Modus Ponens (5.6) и (5.8)
 $A \rightarrow B$

3 Докажите

- 1.
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2.1. по теореме о дедукции

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

$[\alpha := A \rightarrow B, \beta := \neg B \rightarrow \neg A]$

Достаточно доказать $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

2.2. по схеме аксиомы (9)

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$ $[\alpha := A, \beta := B]$

$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

2.3. по теореме о дедукции

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

$[\alpha := A \rightarrow B, \beta := (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$

$A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

2.4. по схеме аксиомы (1)

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := \neg B, \beta := A]$

$\neg B \rightarrow A \rightarrow \neg B$

2.5. по схеме аксиомы (1)

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A, \beta := \neg B]$

$((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

2.6. Modus Ponens (2.3) и (2.5)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

2.7. по схеме аксиомы (2)

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

$[\alpha := \neg B, \beta := A \rightarrow \neg B, \gamma := \neg A]$

$(\neg B \rightarrow A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2.8. Modus Ponens (2.4) и (2.7)

$(\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

2.9. Modus Ponens (2.6) и (2.8)

$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

3.

4.

5.

6. $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$

6.1. по схеме аксиомы (4)

$\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$ $[\alpha := A, \beta := B]$

$A \& B \rightarrow A$

6.2. по схеме аксиомы (2)

$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ $[\alpha := A \& B, \beta := A, \gamma := A \vee B]$

$(A \& B \rightarrow A) \rightarrow (A \& B \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \vee B)$

- 6.3. Modus Ponens (6.1) и (6.2)
 $(A \& B \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)) \rightarrow (A \& B \rightarrow A \vee B)$
- 6.4. по схеме аксиомы (6)
 $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \ [\alpha := A, \beta := B]$
 $A \rightarrow A \vee B$
- 6.5. по схеме аксиомы (1)
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \ [\alpha := A \rightarrow A \vee B, \beta := A \& B]$
 $(A \rightarrow A \vee B) \rightarrow A \& B \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)$
- 6.6. Modus Ponens (6.4) и (6.5)
 $A \& B \rightarrow (A \rightarrow A \vee B)$
- 6.7. Modus Ponens (6.6) и (6.3)
 $A \& B \rightarrow A \vee B$