MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

April 2023

1. Покажите, что омега-непротиворечивая теория непротиворечива.

2. Предложите пример омега-противоречивой теории, являющейся расширением формальной арифметики.

   Добавим к формальной арифметике новую константу C и аксиомы $\Gamma_0 := \neg C = 0$, $\Gamma_1 := \neg C = \overline{1}$, ..., $\Gamma_n := \neg C = n$, ..., т.е. для любого натурального числа n верно $C \neq n$.

   Тогда теория $\mathcal{S} := \text{Ф.А.} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots$ является расширением формальной арифметики, т.к. из $\vdash_{\text{Ф.А.}} \alpha$ следует $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$.

   Существует формула $\phi(x) := \neg C = x$, что для неё выполнено

   $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\overline{1}), \vdash \phi(\overline{2}), \dots$

   Но

   2.1. $C = C$

   2.2. по ранее доказанному

   $\alpha \to \neg\neg\alpha$

   $C = C \to \neg\neg C = C$

   2.3. Modus Ponens 2.1, 2.2

   $\neg\neg C = C$, т.е.

   $\neg\phi(x)[x := C]$

   2.4. по схеме аксиом (12)

   $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$

   $\neg\phi(x)[x := C] \to \exists x.\neg\phi(x)$

   2.5. Modus Ponens 2.3, 2.4

   $\vdash \exists x.\neg\phi(x)$

   Таким образом, теория $\mathcal{S}$ омега-противоречива и является расширением формальной арифметики.