MathLog

Ивченков Дмитрий M32341

April 2023

1 Докажите

(a) $a \cdot b = b \cdot a$

1. Докажем, что $(a+b)+c = a+(b+c)$
   База: $(a+b)+0 = a+b = a+(b+0)$
   Переход: пусть $(a+b)+c = a+(b+c)$
   $(a+b)+c' = ((a+b)+c)'$ – по определению $(+)$
   $= (a+(b+c))'$ – по индукционному предположению
   $= a+(b+c)'$ – по определению $(+)$
   $= a+(b+c')$ – по определению $(+)$

   Таким образом, $(a+b)+c = a+(b+c)$

2. Докажем, что $0 \cdot a = 0$
   База: $0 \cdot 0 = 0$ – верно.
   Переход: пусть $0 \cdot x = 0$
   $0 \cdot x' = 0 \cdot x + 0 = 0 + 0 = 0$

   Таким образом, $0 \cdot a = 0$

3. Докажем, что $a' \cdot b = a \cdot b + b$
   База: $a' \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ – верно
   Переход: пусть $a' \cdot x = a \cdot x + x$
   $a' \cdot x' = a' \cdot x + a'$ – по определению $(\cdot)$
   $= (a \cdot x + x) + a'$ – по индукционному предположению
   $= a \cdot x + (x + a')$ – по ассоциативности $(+)$
   $= a \cdot x + (x + a)'$ – по определению $(+)$
   $= a \cdot x + (a + x)'$ – по коммутативности $(+)$
   $= a \cdot x + (a + x')$ – по определению $(+)$
   $= (a \cdot x + a) + x'$ – по ассоциативности $(+)$
   $= (a \cdot x') + x'$ – по определению $(\cdot)$

   Таким образом, $a' \cdot b = a \cdot b + b$

4. Докажем, что $a \cdot b = b \cdot a$
   База: $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
   Переход: пусть $a \cdot x = x \cdot a$
   $a \cdot x' = a \cdot x + a$ – по определению $(\cdot)$
   $= x \cdot a + a$ – по индукционному предположению
   $= x' \cdot a$ – из ранее доказанного (2)

   Таким образом, $a \cdot b = b \cdot a$

$\square$

(b) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

База: $(a + b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$

Переход: пусть $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

$(a + b) \cdot x' = (a + b) \cdot x + (a + b)$ – по определению $(\cdot)$

$= a \cdot x + b \cdot x + (a + b)$ – по индукционному предположению

$= (a \cdot x + b \cdot x + a) + b$ – по ассоциативности $(+)$

$= (a \cdot x + a + b \cdot x) + b$ – по коммутативности $(+)$

$= (a \cdot x' + b \cdot x) + b$ – по определению $(\cdot)$

$= a \cdot x' + (b \cdot x + b)$ – по ассоциативности $(+)$

$= a \cdot x' + b \cdot x'$ – по определению $(\cdot)$

Таким образом, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(c) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

1. Докажем, что $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
   База: $(a \cdot b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0)$
   Переход: пусть $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
   $(a \cdot b) \cdot x' = (a \cdot b) \cdot x + a \cdot b$ – по определению $(\cdot)$
   $= a \cdot (b \cdot x) + a \cdot b$ – по индукционному предположению
   $= (b \cdot x) \cdot a + b \cdot a$ – по коммутативности $(\cdot)$
   $= (b \cdot x + b) \cdot a$ – по дистрибутивности $(\cdot)$
   $= (b \cdot x') \cdot a$ – по определению $(\cdot)$
   $= a \cdot (b \cdot x')$ – по коммутативности $(\cdot)$

   Таким образом, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. Докажем, что $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
   База: $a^{b+0} = a^b = 0 + a^b = a^b \cdot 0 + a^b = a^b \cdot 0' = a^b \cdot 1 = a^b \cdot a^0$
   Переход: пусть $a^{b+x} = a^b \cdot a^x$
   $a^{b+x'} = a^{(b+x)'}$ – по определению $(+)$
   $= a^{b+x} \cdot a$ – по определению возведения в степень

$= (a^b \cdot a^x) \cdot a$ – по индукционному предположению
$= a^b \cdot (a^x \cdot a)$ – по ассоциативности $(\cdot)$
$= a^b \cdot a^{x'}$ – по определению возведения в степень

Таким образом, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

(d) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

База: $(a^b)^0 = 1 = a^0 = a^{b \cdot 0}$

Переход: пусть $(a^b)^x = a^{b \cdot x}$

$(a^b)^{x'} = (a^b)^x \cdot a^b$ – по определению возведения в степень

$= a^{b \cdot x} \cdot a^b$ – по индукционному предположению

$= a^{b \cdot x + b}$ – по ранее доказанному

$= a^{b \cdot x'}$ – по определению $(\cdot)$

Таким образом, $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

2 Докажите

(a) $x \leqslant x + y$

База: $0 \leqslant 0 + y$

Переход: пусть $z \leqslant z + y$

$z' \leqslant (z + y)'$ – по определению $(\leqslant)$

$z' \leqslant (y + z)'$ – по коммутативности $(+)$

$z' \leqslant y + z'$ – по определению $(+)$

$z' \leqslant z' + y$ – по коммутативности $(+)$

Таким образом, $x \leqslant x + y$

(b) $x \leqslant x \cdot y$

1. при $x \neq 0$ & $y = 0$
   Пусть $x = 1, y = 0$
   $1 \leqslant 0$ – противоречие
2. иначе
   при $x = 0$: $0 \leqslant 0 \cdot y$ – верно

   при $y \neq 0$:
   База: y = 1
   $x \leqslant x$
   $x \leqslant 0 + x$
   $x \leqslant x \cdot 0 + x$

$x \leqslant x \cdot 0'$

$x \leqslant x \cdot 1$

Переход: пусть $x \leqslant x \cdot z$

$x \leqslant x \cdot z + x$ – по ранее доказанному

$x \leqslant x \cdot z'$ – по определению $(\cdot)$

Таким образом, $x \leqslant x \cdot y$

3 Докажите

(a) $a + b \dot{-} b = a$

База: $a + 0 \dot{-} 0 = a + 0 = a$

Переход: пусть $a + x \dot{-} x = a$

$a + x' \dot{-} x' = a + x \dot{-} x$ – по определению $(\dot{-})$

$a + x \dot{-} x = a$ – по индукционному предположению

Таким образом, $a + b \dot{-} b = a$

(b) $(a \dot{-} b) \cdot c = a \cdot c \dot{-} b \cdot c$

1. Докажем, что $a' \dot{-} b = (a \dot{-} b)'$
   База:

4 Докажите

(a) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6}$

1. $\overline{2} \cdot \overline{3} = (\overline{1})' \cdot \overline{3}$ – по определению
2. $(\overline{1})' \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})'$ – по коммутативности $(\cdot)$
3. (A1) $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
   $(\overline{1})' \cdot \overline{3} = \overline{2} \cdot \overline{3} \rightarrow (\overline{1})' \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})' \rightarrow \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})'$
4. Modus Ponens 1, 3
   $(\overline{1})' \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})' \rightarrow \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})'$
5. Modus Ponens 2, 4
   $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot (\overline{1})'$
6. (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$
   $\overline{3} \cdot (\overline{1})' = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3}$
7. (A1) $a = b \rightarrow a = c \rightarrow b = c$
   $\overline{3} \cdot (\overline{1})' = \overline{2} \cdot \overline{3} \rightarrow \overline{3} \cdot (\overline{1})' = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} \rightarrow \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3}$
8. Modus Ponens 5, 7
   $\overline{3} \cdot (\overline{1})' = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} \rightarrow \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3}$

9. Modus Ponens 6, 8
   $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3}$
10. $\overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3}$ – по определению
11. (A1) $a = b \to a = c \to b = c$
    $\overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} = \overline{2} \cdot \overline{3} \to \overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3} \to \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3}$
12. Modus Ponens 9, 11
    $\overline{3} \cdot \overline{1} + \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3} \to \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3}$
13. Modus Ponens 10, 12
    $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{3} \cdot 0' + \overline{3}$
14. (A8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$
    $\overline{3} \cdot 0' + \overline{3} = \overline{3} \cdot 0 + \overline{3} + \overline{3} =$
    (A7) $a \cdot 0 = 0$
    $= 0 + \overline{3} + \overline{3} =$
    по коммутативности $(+)$
    $= \overline{3} + \overline{3} + 0 =$
    (A5) $a + 0 = a$
    $= \overline{3} + \overline{3} =$
    по определению
    $= (\overline{2})' + (\overline{2})' = (\overline{1})'' + (\overline{1})'' = 0''' + 0'''$
15. (A1) $a = b \to a = c \to b = c$
    $\overline{3} \cdot 0' + \overline{3} = \overline{2} \cdot \overline{3} \to \overline{3} \cdot 0' + \overline{3} = 0''' + 0''' \to \overline{2} \cdot \overline{3} = 0''' + 0'''$
16. Modus Ponens 13, 15
    $\overline{3} \cdot 0' + \overline{3} = 0''' + 0''' \to \overline{2} \cdot \overline{3} = 0''' + 0'''$
17. Modus Ponens 14, 16
    $\overline{2} \cdot \overline{3} = 0''' + 0'''$
18. (A6) $a + b' = (a + b)'$
    $0''' + 0''' = (0''' + 0'')'$
19. (A1) $a = b \to a = c \to b = c$
    $0''' + 0''' = \overline{2} \cdot \overline{3} \to 0''' + 0''' = (0''' + 0'')' \to \overline{2} \cdot \overline{3} = (0''' + 0'')'$
20. Modus Ponens 17, 19
    $0''' + 0''' = (0''' + 0'')' \to \overline{2} \cdot \overline{3} = (0''' + 0'')'$
21. Modus Ponens 18, 20
    $\overline{2} \cdot \overline{3} = (0''' + 0'')'$
22. Далее аналогично
    $\overline{2} \cdot \overline{3} = \cdots = (0''' + 0)''' =$
    (A5) $a + 0 = a$
    $= (0''')''' = 0'''''' =$
    по определению
    $= (\overline{1})''''' = (\overline{2})'''' = (\overline{3})''' = (\overline{4})'' = (\overline{5})' = \overline{6}$

    Таким образом, $\vdash \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6}$

5

(a) "полное" отношение $R = \mathbb{N}^2$ (любые два числа состоят в отношении)

$\rho = (x_1 \cdot 0 = 0)\ \&\ (x_2 \cdot 0 = 0)$

Для всех $\langle a_1, a_2 \rangle \in R = \mathbb{N}^2$

1. (A7) $a \cdot 0 = 0$
   $\overline{a_1} \cdot 0 = 0$
2. Аналогично
   $\overline{a_2} \cdot 0 = 0$
3. схема аксиом (3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
   $\overline{a_1} \cdot 0 = 0 \to \overline{a_2} \cdot 0 = 0 \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)$
4. Modus Ponens 1, 3
   $\overline{a_2} \cdot 0 = 0 \to (\overline{a_1} \cdot 0 = 0) \& (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)$
5. Modus Ponens 2, 4
   $(\overline{a_1} \cdot 0 = 0)\ \&\ (\overline{a_2} \cdot 0 = 0)$

Таким образом,

для всех $\langle a_1, a_2 \rangle \in R = \mathbb{N}^2 \vdash \rho[x_1 := \overline{a_1}, x_2 := \overline{a_2}]$

и нет таких $\langle a_1, a_2 \rangle \notin R = \mathbb{N}^2$

Значит, отношение $R = \mathbb{N}^2$ выразимо в формальной арифметике.