# Математическая статистика

20 ноября 2023

Пусть $X = \alpha + \beta Z + e$.
$\widehat{X} = a + bZ + \epsilon$.
Все ошибки независимы и имеют $N(0, \sigma^2)$.

Сколько всего факторов в данной модели? Написать матрицу плана.

$$\overrightarrow{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}.$$

Фактора два, первый фактор $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Составить матрицу плана $Z$ и найти матрицу $A$.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Z^{(1)} & Z^{(2)} & \cdots & Z^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$A = ZZ^T = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n Z^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n Z^{(i)} & \sum_{i=1}^n (Z^{(i)})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n\overline{Z} \\ n\overline{Z} & n\overline{Z^2} \end{pmatrix}$$

Нормальное уравнение:
$AB = ZX$

$$\begin{pmatrix} n & n\overline{Z} \\ n\overline{Z} & n\overline{Z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Z^{(1)} & Z^{(2)} & \cdots & Z^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Нормальная система уравнений:

$$\begin{cases} a + b\overline{Z} = \overline{X} \\ \overline{Z} + b\overline{Z^2} = \overline{XZ} \end{cases}$$

Решим систему матричным способом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{nD(Z)} \begin{pmatrix} \overline{Z^2} & -\overline{Z} \\ -\overline{Z} & 1 \end{pmatrix} B = A^{-1}ZX = \frac{1}{D(Z)} \begin{pmatrix} \overline{Z^2}\,\overline{X} - \overline{Z}\,\overline{ZX} \\ \overline{ZX} - \overline{Z}\,\overline{X} \end{pmatrix}$$

Написать матрицу ковариаций.

$$DB = \sigma^2 A^{-1} = \frac{\sigma^2}{nD(Z)} \begin{pmatrix} \overline{Z^2} & -\overline{Z} \\ -\overline{Z} & 1 \end{pmatrix}$$

$Da = \dfrac{\sigma^2 \overline{Z^2}}{nD(Z)} \to 0$ при $n \to +\infty$

$Db = \dfrac{\sigma^2}{nD(Z)} \to 0$ при $n \to +\infty$

$a \to^p Ea$ и $b \to^p Eb$, а $Ea = \alpha$ и $Eb = \beta$ в силу несмещённости. Значит, оценки $a$ и $b$ состоятельны.

$\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$

## Задача:

В круг сидят 100 куриц. В какой-то момент времени каждая курица клюёт одну из соседок. Случайная величина $\xi$ – число неклюнутых куриц. Найти $E\xi$.

$\xi_i$ – клюнута ли $i$-ая курица? $\xi_i = 1$ , если не клюнута.

$\xi_i$ – независимы. $\xi_i \in B_p$, $E\xi_i = p$, $D\xi_i = pq$.

$E\xi_i = \dfrac{1}{4}$

$E\xi = E(\xi_1 + \dots + \xi_{100}) = 100 * \dfrac{1}{4} = 25.$

$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_{100}) = \sum D\xi_i + 2 \sum cov(\xi_i, \xi_j)$