

Математическая статистика

9 октября 2023

1 задача:

Пусть случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$.

При обработке выборки объёма $n = 17$ получили $S = 1,5$.

Найти доверительный интервал для параметра σ надёжности $\gamma = 0,9$.

Доверительный интервал в этом случае (III случай):

$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2})$, где χ_1^2 и χ_2^2 – квантили уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения H_{n-1} .

$$\frac{1-\gamma}{2} = 0,05$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,95$$

$$\chi_1^2 = 7,96$$

$$\chi_2^2 = 26,3$$

$$1,37 < \sigma^2 < 4,5$$

$$1,17 < \sigma < 2,12 \text{ с вероятностью } \gamma = 0,9$$

Работа с выборкой

Найти доверительные интервалы для прибыли, считая её распределение нормальным.

$$n = 50$$

$$\bar{x} = 97,27$$

$$S^2 = 59,08$$

$$S = 7,686$$

1) Найти доверительный интервал для параметра a надёжности $\gamma = 0,9$, если параметр $\sigma = 7,7$.

Доверительный интервал в этом случае (I случай):

$(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\gamma)$, где t_γ – квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения N.

$$t_\gamma = \text{НОРМ.СТ.ОБР}(\frac{\gamma}{2} + 0,5) = 1,64$$

$$95,48 < a < 99,07 \text{ с вероятностью } \gamma = 0,9$$

2) Найти доверительный интервал параметра a надёжности $\gamma = 0,9$ при неизвестном σ .

Доверительный интервал в этом случае (II случай):

$$(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_\gamma; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_\gamma), \text{ где } t_\gamma - \text{квантиль уровня } \frac{1+\gamma}{2} \text{ распределения } T_{n-1}$$

$$t_\gamma = \text{СТЮДЕНТ.ОБР}(\frac{1+\gamma}{2}; n-1) = \\ = \text{СТЮДЕНТ.ОБР.2X}(1-\gamma; n-1) = 1,677 \\ 92,618 < a < 101,931 \text{ с вероятностью } \gamma = 0,9$$

3) Найти доверительный интервал для параметра σ , считая неизвестным параметр a , надёжности $\gamma = 0,9$.

Доверительный интервал в этом случае (III случай):

$$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}), \text{ где } \chi_1^2 \text{ и } \chi_2^2 - \text{квантили уровней } \frac{1-\gamma}{2} \text{ и } \frac{1+\gamma}{2} \\ \text{распределения } H_{n-1}.$$

$$\chi_1^2 = \text{ХИ2.ОБР}(\frac{1-\gamma}{2}; n-1) = 33,93$$

$$\chi_2^2 = \text{ХИ2.ОБР}(\frac{1+\gamma}{2}; n-1) = 66,34$$

$$43,64 < \sigma^2 < 85,32$$

$$6,6 < \sigma < 9,23 \text{ с вероятностью } \gamma = 0,9$$

4) Найти доверительный интервал для параметра σ надёжности $\gamma = 0,9$, если параметр $a = 97,5$.

Доверительный интервал в этом случае (IV случай):

$$(\frac{n\sigma^{2*}}{\chi_2^2}; \frac{n\sigma^{2*}}{\chi_1^2}), \text{ где } \chi_1^2 \text{ и } \chi_2^2 - \text{квантили уровней } \frac{1-\gamma}{2} \text{ и } \frac{1+\gamma}{2} \text{ распределе-} \\ \text{ния } H_n.$$

$$n\sigma^{2*} = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (c_i - a)^2 n_i = 2897,469$$

$$\chi_1^2 = \text{ХИ2.ОБР}(\frac{1-\gamma}{2}; n) = 34,76$$

$$\chi_2^2 = \text{ХИ2.ОБР}(\frac{1+\gamma}{2}; n) = 67,5$$

$$42,92 < \sigma^2 < 83,35$$

$$6,55 < \sigma < 9,13 \text{ с вероятностью } \gamma = 0,9$$