

1. กำหนดให้เมตริกซ์ A และ B เป็นดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบแบ่งเมตริกซ์ย่อยพร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

1.2 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบอัลกอริทึม Strassen พร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

1.3 จาก Pseudo Code ต่อไปนี้ จงเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลคูณของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B เก็บผลลัพธ์ในเมตริกซ์ C

```

Input:  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 

1: if  $n = 1$  then
2:    $C = A \cdot B$ 
3: else
4:    $M_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$ 
5:    $M_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$ 
6:    $M_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$ 
7:    $M_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$ 
8:    $M_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$ 
9:    $M_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$ 
10:   $M_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$ 
11:   $C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$ 
12:   $C_{12} = M_3 + M_5$ 
13:   $C_{21} = M_2 + M_4$ 
14:   $C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$ 
    
```

ข้อมูลนำเข้า

บรรทัดที่ 1 จำนวนเต็ม n แทนขนาดของเมตริกซ์ A และ B โดยที่ $2 \leq n \leq 10$

$n+1$ บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ A คั่นด้วยช่องว่าง โดยมีค่าอยู่ระหว่าง -10 ถึง 10

$n+1$ บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ B คั่นด้วยช่องว่าง โดยมีค่าอยู่ระหว่าง -10 ถึง 10

ข้อมูลส่งออก

$n+1$ บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ C ซึ่งเกิดจากการคูณ A และ B คั่นด้วยช่องว่าง

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า	ตัวอย่างข้อมูลส่งออก
4	-1 1 1 1
1 0 1 0	-2 2 2 2
2 0 2 0	-3 3 3 3
3 0 3 0	-4 4 0 0
4 0 0 0	
-1 1 0 0	
1 1 0 0	
0 0 1 1	
1 1 0 0	

2. กำหนดให้ $P = \{ (7, 2), (3, 1), (9, 3), (4, 5), (1, 4), (6, 9), (2, 6), (5, 7), (8, 6) \}$ จงวาด recursive tree เพื่อแสดงขั้นตอนการค้นหา maxima set ด้วยวิธี divide and conquer พร้อมหาจำนวนครั้งทั้งหมดในการเปรียบเทียบแต่ละสมาชิกของเซตย่อย M1 และ M2 เพื่อรวมคำตอบ

3. จากอัลกอริทึม Karatsuba ด้านล่าง

Multiply(a, b) :

1. WLOG assume $n = \text{length}(a) = \text{length}(b)$, can pad 0's for shorter number
2. if $\text{length}(a) \leq 1$ then return $a * b$
3. Partition a,b into $a = a1 * 10^{n/2} + a2$ and $b = b1 * 10^{n/2} + b2$
4. $A = \text{Multiply}(a1, b1)$
5. $B = \text{Multiply}(a2, b2)$
6. $C = \text{Multiply}(a1 + a2, b1 + b2)$
7. Return $A * 10^n + (C - A - B) * 10^{n/2} + B$

- 3.1 จงวิเคราะห์เวลา $T(n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนหลักของเลข a และ b

- 3.2 จงเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงผลคูณของ $a = 4568$ และ $b = 3275$ พร้อมแสดงขั้นตอนในแต่ละ step อย่างละเอียด