

# 행 렬

쿠재아이

김재경

# 행렬(Matrix)이란?

- $m \times n$  행렬  $M$ 은  $m$ 개의 행과  $n$ 개의 열로 이루어진 실수들의 정사각 배열
- 행(row)들의 개수와 열(column)들의 개수의 곱을 행렬의 차원이라고 부름  
ex)  $4 \times 4$
- 행렬을 구성하는 수들을 성분(entry) 또는 원소(element; 또는 요소)라고 부름
- 행렬의 한 성분을 나타낼 때에는  $M_{ij}$  형태의 표기를 사용  
 $i$  = 행,  $j$  = 열

# 행렬(Matrix)이란?

- $A = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & -5 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$      $u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$      $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ \pi \end{bmatrix}$
- 행렬 A는  $4 \times 4$  행렬이고 B는  $3 \times 2$  행렬이다. u는  $1 \times 3$  행렬이고 v는  $4 \times 1$  행렬이다
- 행렬 A의 4행 2열의 성분(-5)을  $A_{42}$ 라고 표기한다
- 행렬 u와 v 같이 행이나 열이 하나인 행렬을 행벡터나 열벡터라고 부른다
- 벡터  $(x, y, z)$ 를  $[x \quad y \quad z]$ 로 표기하여 사용할 수 있다

# 행렬(Matrix)이란?

- 한 행렬의 행들을 벡터들로 간주하는 것이 편리할 때가 있다

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow & A_{1,*} & \rightarrow \\ \leftarrow & A_{2,*} & \rightarrow \\ \leftarrow & A_{3,*} & \rightarrow \end{bmatrix}$$

- $A_{1,*} = [A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13}]$  이고  $A_{2,*} = [A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23}]$ ,  $A_{3,*} = [A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33}]$  이다
- $A_{1,*}$ 에서 1은 해당 행을 나타내고 \*는 그 행의 모든 성분을 뜻한다

# 행렬(Matrix)이란?

- 열벡터들도 마찬가지로 표기할 수 있다

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{*,1} & A_{*,2} & A_{*,3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

- $A_{*,1} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$  이고  $A_{*,2} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix}$ ,  $A_{*,3} = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix}$  이다

- $A_{*,1}$ 에서 1은 해당 열을 나타내고 \*는 그 열의 모든 성분을 뜻한다

# 행렬 연산

- 1) 두 행렬은 오직 대응되는 성분들이 상등일 때에만 상등이다. (두 행렬의 차원이 같아야 한다)
- 2) 두 행렬을 더할 때에는 대응되는 성분들을 더한다. 따라서 차원이 같은 행렬들만 더할 수 있다
- 3) 행렬에 하나의 스칼라를 곱할 때에는 행렬의 모든 성분에 그 스칼라를 곱한다
- 4) 행렬의 뺄셈은 스칼라 곱셈과 행렬 덧셈으로 정의한다.  
Ex)  $A - B = A + (-1 \cdot B) = A + (-B)$

# 행렬 연산

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1) \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 5+2 \\ -2+5 & 3+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = C \text{ (서로 같다)}$$

$$3) \quad 3D = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) & 3(1) & 3(-3) \\ 3(-6) & 3(3) & 3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -9 \\ -18 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 & 5-2 \\ -2-5 & 3-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

# 행렬 연산

- 행렬 덧셈과 스칼라 곱셈은 다음과 같은 성질들을 만족한다

1.  $A + B = B + A$

덧셈의 교환법칙

2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$

덧셈의 결합법칙

3.  $r(A + B) = rA + rB$

행렬들에 대한 스칼라의 분배법칙

4.  $(r + s)A = rA + sA$

스칼라들에 대한 행렬의 분배법칙



# 행렬 곱셈

- A가  $m \times n$  행렬이고 B가  $n \times p$  행렬이면 둘의 곱 AB가 정의된다.
- 곱 AB는 하나의  $m \times p$  행렬이다.
- 곱 AB를 C라고 할 때, C의  $ij$ 번째 성분은 A의  $i$ 번째 행벡터와 B의  $j$ 번째 열벡터의 내적이다

$$C_{ij} = A_{i,*} \cdot B_{*,j}$$

# 행렬 곱셈

$$\begin{aligned} \bullet \quad AB &= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1,5,4) \cdot (2,0,-1) & (-1,5,-4) \cdot (1,-2,2) & (-1,5,-4) \cdot (0,1,3) \\ (3,2,1) \cdot (2,0,-1) & (3,2,1) \cdot (1,-2,2) & (3,2,1) \cdot (0,1,3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -19 & -7 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 곱 BA는 정의되지 않는다. B의 열 수와 A의 행 수가 같지 않기 때문이다.
- 일반적으로 행렬 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다. ( $AB \neq BA$ )

# 벡터와 행렬의 곱셈

$$uA = [x, y, z] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = [x, y, z] \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{*,1} & A_{*,2} & A_{*,3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} uA &= [u \cdot A_{*,1} \quad u \cdot A_{*,2} \quad u \cdot A_{*,3}] \\ &= [xA_{11} + yA_{21} + zA_{31}, xA_{12} + yA_{22} + zA_{32}, xA_{13} + yA_{23} + zA_{33}] \\ &= [xA_{11}, xA_{12}, xA_{13}] + [yA_{21}, yA_{22}, yA_{23}] + [zA_{31}, zA_{32}, zA_{33}] \\ &= x[A_{11}, A_{12}, A_{13}] + y[A_{21}, A_{22}, A_{23}] + z[A_{31}, A_{32}, A_{33}] \\ &= xA_{1,*} + yA_{2,*} + zA_{3,*} \end{aligned}$$

따라서  $uA = xA_{1,*} + yA_{2,*} + zA_{3,*}$  이다

이 식은 선형결합의 한 예이다.

# 벡터와 행렬의 곱셈

이전 페이지의 식을 일반화하면

$$[u_1, \dots, u_n] \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} = u_1 A_{1,*} + \cdots + u_n A_{n,*}$$

이렇게 된다

# 결합법칙

---

$$(AB)C = A(BC)$$

# 전치행렬

- 전치행렬 (transpose matrix)은 행렬의 행들과 열들을 맞바꾼 행렬이다
- $m \times n$  행렬의 전치는  $n \times m$  행렬이다
- 행렬  $M$ 의 전치행렬을  $M^T$ 로 표기한다

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, \quad C^T = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

# 단위행렬

- 열 수와 행 수가 같은 정사각형의 행렬을 정방행렬 (square matrix)라고 부른다
- 좌상에서 우하로의 주된 대각선에 있는 성분들을 주대각 (main diagonal) 성분이라고 부른다
- 단위행렬은 주대각 성분들만 1이고 나머지는 모두 0인 정방행렬이다

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 단위행렬

- 단위행렬은 곱셈의 항등원 역할을 한다.  
A가  $m \times n$  행렬이고 B가  $n \times p$  행렬, I가  $n \times n$  단위행렬이면

$$AI = A \text{ 이고 } IB = B$$

- M이 정방 행렬일 때 단위행렬과의 곱셈은 교환법칙을 만족한다

$$MI = IM = M$$



# 행렬식

- 행렬식(determinant)은 정방행렬을 입력받아서 실숫값을 출력하는 특별한 함수이다
- 정방행렬  $A$ 의 행렬식은 흔히  $\det A$ 로 표기한다
- 기하학적으로 행렬식이 3차원 입체의 부피와 관련이 있다는 점과 행렬식이 선형변환 하에서 그 부피가 변하는 방식에 대한 정보를 제공한다는 점을 증명하는 것이 가능하다
- 크라메르의 법칙을 이용해서 1차 연립방정식을 푸는 데에도 쓰인다
- 정방행렬  $A$ 는  $\det A \neq 0$ 일 때에만 역행렬이 존재한다

# 소행렬

- $n \times n$  행렬  $A$ 가 주어졌을 때, 그 소행렬 (minor matrix)  $\overline{A_{ij}}$ 는  $A$ 의  $i$ 번째 행과  $j$ 번째 열을 삭제해서 나온  $(n - 1) \times (n - 1)$  행렬이다
- 다음 행렬의 소행렬  $\overline{A_{11}}$ ,  $\overline{A_{22}}$ ,  $\overline{A_{13}}$ 을 구해보자

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

# 소행렬

- $\overline{A_{11}}$ 은 첫 행과 첫 열을 제거한 것이다

$$\overline{A_{11}} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- $\overline{A_{22}}$ 은 둘째 행과 둘째 열을 제거한 것이다

$$\overline{A_{22}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- $\overline{A_{13}}$ 은 첫 행과 셋째 열을 제거한 것이다

$$\overline{A_{13}} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

# 행렬식의 정의

- 행렬식은 재귀적으로 정의된다
- 예를 들어  $4 \times 4$  행렬의 행렬식은  $3 \times 3$  행렬의 행렬식들로 정의되고,  $3 \times 3$  행렬의 행렬식은  $2 \times 2$  행렬의 행렬식들로,  $2 \times 2$  행렬의 행렬식은  $1 \times 1$  행렬의 행렬식들로 정의된다
- $1 \times 1$  행렬  $A = [A_{11}]$ 의 행렬식  $\det [A_{11}] = A_{11}$ 이다
- $A$ 가  $n \times n$  행렬이고  $n > 1$ 이라고 할 때,  $A$ 의 행렬식은 다음과 같이 정의된다

$$\det A = \sum_{j=1}^n A_{1j} (-1)^{1+j} \det \overline{A_{1j}}$$

# 행렬식의 정의

- $2 \times 2$  행렬의 소행렬  $\overline{A_{ij}}$ 의 정의를 적용하면 다음과 같은 행렬식 공식이 나온다

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11} \det[A_{22}] - A_{12} \det[A_{21}] = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

흔히 말하는  $ad - bc$  이다

# 딸림행렬

- $A$ 가  $n \times n$  행렬이라고 할 때, 곱  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \overline{A_{ij}}$ 를  $A_{ij}$ 의 여인수(cofactor)라고 한다
- $A$ 의 각 성분의  $C_{ij}$ 를 계산해서 해당  $ij$ 번째 위치에 배치한 행렬  $C_A$ 를 행렬  $A$ 의 여인수행렬(cofactor matrix)이라고 부른다

$$C_A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- 그리고 이  $C_A$ 의 전치행렬을  $A$ 의 딸림행렬(adjoint matrix, 수반행렬)이라고 부르고 다음과 같이 표기한다. 이 딸림행렬을 이용하면 행렬의 역을 계산하는 공식을 구할 수 있다

$$A^* = C_A^T$$

# 역행렬

- 행렬 대수는 나눗셈 연산을 정의하지 않으나, 곱셈의 역원은 정의한다
  - 곱셈의 역원을 행렬의 역(inverse) 또는 역행렬이라고 부른다
1. 역행렬은 정방행렬에만 있다
  2.  $n \times n$  행렬  $M$ 의 역은  $n \times n$  행렬이며,  $M^{-1}$ 로 표기한다
  3. 모든 정방행렬에 역행렬이 있는 것은 아니다. 역행렬이 있는 행렬을 가역행렬 (invertible matrix)이라고 부르고, 역행렬이 없는 행렬을 특이행렬 (singular matrix)이라고 부른다
  4. 역행렬이 존재하는 경우 그 역행렬은 고유하다
  5. 행렬에 그 역행렬을 곱하면 단위행렬이 나온다. 즉,  $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ 이다.  
행렬과 그 역행렬의 곱셈은 행렬 곱셈에서 교환법칙이 성립하는 특별한 사례 중 하나이다

# 역행렬

- $p' = pM$ 이라는 행렬 방정식이 있다  
 $p'$ 과  $M$ 은 이미 알고 있고  $p$ 를 구해야 한다고 하자  
 $M$ 이 가역행렬이라고 할 때,  $p$ 를 다음과 같이 구할 수 있다
- $p' = pM$   
 $p'M^{-1} = pMM^{-1}$       등식의 양변에  $M^{-1}$ 을 곱한다  
 $p'M^{-1} = pI$       역행렬의 정의에 의해  $MM^{-1} = I$  이다  
 $p'M^{-1} = p$       단위행렬의 정의에 의해  $pI = p$  이다
- 딸림행렬과 행렬식을 이용해서 역행렬을 구할 수 있다

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$



# 역행렬

- $2 \times 2$  행렬  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 의 역행렬에 대한 일반식을 구해보자

$$\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$C_A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det \overline{A_{11}} & (-1)^{1+2} \det \overline{A_{12}} \\ (-1)^{2+1} \det \overline{A_{21}} & (-1)^{2+2} \det \overline{A_{22}} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = \frac{C_A^T}{\det A} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

# 역행렬

- 이 공식을 이용해서  $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  의 역행렬을 구해보자

$$M^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 0 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

# 역행렬

---

- A와 B가 같은 차원의 가역 정방행렬이라 할 때 다음이 성립한다

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$