BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan real (R) dan i adalah suatu bilangan imaginer dimana $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Bilangan Kompleks biasanya ditulis dalam bentuk:

$$x = x + iy \tag{1}$$

dimana,

- x adalah bagian $Re(z)$, dan
- y adalah bagian $Im(z)$.

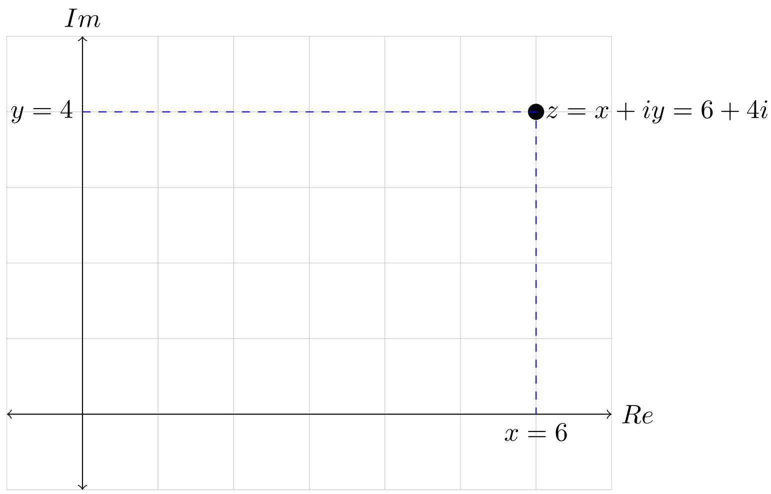
Contoh:

$$\begin{aligned} z &= 6 + \sqrt{-16} \\ &= 6 + \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= 6 + i \times 4 \\ &= 6 + 4i \end{aligned} \tag{2}$$

maka:

- $Re(z) = 6$, dan
- $Im(z) = 4$.

Notasi Bilangan Kompleks



Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) + (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) \cdot (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a \cdot z_1 &= a \cdot (x_1\ ,\ y_1) \\ &= (a x_1\ ,\ a y_1) \end{aligned} \tag{5}$$

Operasi Aritmatika Pada Bilangan Kompleks

1. Penjumlahan Bilangan Kompleks

Misalkan dua bilangan kompleks:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a + bi \\
z_2 &= c + di
\end{aligned}
$$

- $z_1 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$
- $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $a = b$ dan $b = d$

Contoh:

$$2 + 5i = \frac{4}{2} + \frac{10}{2}i$$

- Jika $z_1 \neq z_2$ maka z_1 tidak dapat dibandingkan lebih besar atau lebih kecil dari z_2

2. Perkalian bilangan kompleks dengan skalar

Jika:

$$z_1 = (a + bi)$$

Maka:

$$k \cdot z_1 = k \cdot (a + bi) = ka + kbi$$

Contoh:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + 5i \\
k &= 2
\end{aligned}
$$

Jawab:

$$
\begin{aligned}
k \cdot z_1 &= 2 \cdot (2 + 5i) \\
&= 4 + 10i
\end{aligned}
$$

3. Perkalian dua bilangan kompleks

Jika:

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

Maka:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Contoh:

$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = 3 + 5i$$

Jawab:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 + 5i) \\ &= (3 - 10) + (5 + 6)i \\ &= -7 + 11i \end{aligned}$$

4. Pembagian dua bilangan kompleks

Jika

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

Maka $\frac{z_1}{z_2}$ menyatakan pembagian bilangan kompleks dengan pembilang z_1 dan penyebut z_2. Penyebut dikalikan sekawannya $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{?}{z_2}$. Agar nilai semula tidak berubah, maka pembilang juga harus dikalikan dengan bilangan yang sama: $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{z_2}$. Sekarang pembilang bernilai riil dan pembagian dapat dilakukan.

Contoh:

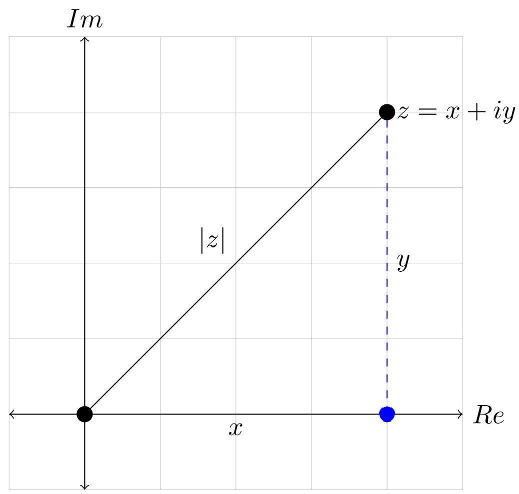
$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = 2 + 3i$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \\ &= \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{(2 + 6) + (-3 + 4)i}{2^2 + 3^2} \\ &= \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \end{aligned}$$

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai bilangan real tidak negatif yang merupakan panjang vektor posisi dari z (jarak antara z dengan pusat sumbu).



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{7}$$

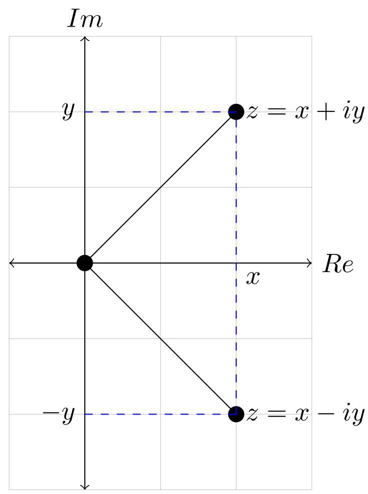
Sifat Modulus

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{8}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{9}$$

Sekawan/*Konjugate* Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$, sekawan dari z (notasi $= \overline{z}$) adalah pencerminan dari z terhadap sumbu real (R).



Sifat Sekawan/*Konjugate*:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| = \overline{z}$
- $\overline{zz} = |z|^2$
- $Re(z) = \dfrac{z + z}{2}$

  $Im(z) = \dfrac{z - z}{2i}$

Representasi Polar

Misalkan r dan adalah koordinat polar dari titik (x, y) bilangan kompleks bukan nol $z = x + iy$. Karena $x = rcos\theta$ dan $y = rsin\theta$, maka bilangan Kompleks z dapat ditulis dalam bentuk polar:

$$z = r(cos\theta + isin\theta) \tag{10}$$

$$z = r\angle\theta \tag{11}$$

dengan,

- r adalah modulus dari z:
  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ adalah argumen dari z:
  $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= tan^{-1}\frac{b}{a} \\ &= tan^{-1}\frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5(\cos 53,1^\circ + \sin 53,1^\circ) \\ &= 5\angle 53,1^\circ \end{aligned} \tag{12}$$

Representasi Euler

Notasi matematis formal adalah bentuk Euler:

$$z = re^{i\theta} \tag{13}$$

Identitas Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \tag{14}$$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= tan^{-1}\frac{b}{a} \\ &= tan^{-1}\frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5e^{i53,1^\circ} \\ 5e^{i53,1^\circ} &= 5(\cos 53,1^\circ + \sin 53,1^\circ) \end{aligned}$$

Perkalian dan Pangkat Bentuk Exponen

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2) \\ &= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) \\ &= cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sin(cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \tag{15}$$

Maka, jika $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, produk z_1z_2 memiliki bentuk eksponensial:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ &= (r_1r_2)e^{i(\theta_1\theta_2)} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{e^{-i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}} \\ &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1e^{i0}}{re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{r}e^{i(0-\theta)} \\ &= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{18}$$

$$z^n = r^ne^{in\theta} \tag{19}$$

Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks $f(z)$ menyatakan pemetaan dari bidang kompleks asal z (domain) ke bidang kompleks hasil w (range) dengan suatu pola yang diatur oleh $f(z)$.

Contoh (titik ke titik):

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z + 1 \\ &= 2(x + iy) + 1 \\ &= 2x + 2iy + 1 \\ &= (2x + 1) + 2iy \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = 2x + 1 \\ Im(z) &= v(x, y) = 2y \end{aligned}$$

Contoh (lintasan ke lintasan):

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{z} \\ &= x - iy \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = x \\ Im(z) &= v(x, y) = -y \end{aligned}$$

Contoh (daerah ke daerah):

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 1 \\ D : |z| &< 1 \\ f(z) &= z + 1 \\ w &= z + 1 \\ z &= w - 1 \\ |w - 1| &< 1 \end{aligned} \tag{22}$$

Titik Singular

Titik dimana $f(z)$ gagal dipetakan ke titik lain. Contoh pada fungsi $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ gagal dipetakan pada titik asal $z = 1$ karena $\dfrac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

Limit Fungsi Kompleks

Konsep limit pada fungsi kompleks $f(z)$ diperluas dari limit pada fungsi real $f(x)$ sebagai: Pada fungsi kompleks $f(z)$, $\lim_{z \to z_0} f(z)$ bernilai L atau

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \tag{23}$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika ada ϵ yang memenuhi $|f(z) - L| \leq \epsilon$, maka terilustrasi:

- $|z - z_0| \leq \delta$ adalah disk dengan pusat di z_0 dan jari-jari δ
- $|f(z) - L| \leq \epsilon$ adalah disk dengan pusat di L dan jari-jari ϵ

Turunan Fungsi Kompleks

Perhitungan turunan $f(z)$ dapat melihat dari kemungkinan notasi $f(z)$:

- $f(z)$ dinyatakan secara eksplisit peubah z.
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(i, \theta) + iV(i, \theta)$

$f(z)$ dinyatakan $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ dapat diturunkan di $z_0 = x_0 + iy_0$ bila berlaku **Persamaan Cauchy Riemann (PCR)**:

$$Ux(x_0 + y_0) = Vy(x_0 + y_0)$$
$$Uy(x_0 + y_0) = -Vx(x_0 + y_0)$$

$$f(z_0) = Ux(x_0 + y_0) + iVy(x_0 + y_0) \tag{24}$$

Contoh:
Apakah $f(z) = e^x \cdot e^{iy}$ memiliki turunan di titik $z_o = 1 + i$?

Jawab:
$f'(1 + i)$ ada jika:

$$\begin{aligned} Ux(1+i) &= Vy(1+i) \\ Uy(1+i) &= -Vx(1+i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) = f(z) &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ux(x, y) &= e^x \cos y \\ Uy(x, y) &= e^x(-\sin y) \\ &= e^x \sin y \end{aligned}$$

U(x,y) dan V(x,y) memenuhi Persamaan Cauchy Riemann (PCR). Jadi $f'(1 + i)$ ada:

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= f'(1,1) \\ &= e'cos1 + ie'sin1 \end{aligned}$$

$f(z)$ dinyatakan sebagai $f(z) = U(i, \theta) + iV(i, \theta)$
PCR dalam koordinat polar:

$$\begin{aligned} Ur &= \frac{1}{r}V\theta \\ \frac{1}{r}U\theta &= -Vr \end{aligned}$$

Turunan dari f(z) dinyatakan :

$$f'(z) = e^{-i\theta}(Ur + iVr) \tag{25}$$

Metode Milne-Thomson

Jika fungsi terurai $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ differentiable atau holomorfik, maka $f(x+iy)$ dapat dijadikan bentuk kompak $f(z)$.

- Tentukan $f'(x+iy)$ yaitu $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{x} + i\frac{\partial v}{x}$
- Ditinjau suku $\frac{\partial u}{x}$
- Substitusi $\frac{\partial u}{x} \to f'(z), x \to z$ dan $y \to 0$
- Selesaikan $f'(z)$ untuk memperoleh $f(z)$
- Cari konstanta c pada $f(z)$ dengan substitusi $z = x + iy$ pada $f(z)$ dan membandingkannya dengan $f(x+iy)$ semula.

Contoh:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$u_x = e^x \cos y \qquad v_x = e^x \sin y$$
$$u_y = -e^x \sin y \qquad v_y = e^x \cos y$$

$$\begin{aligned} u_x &= v_x \\ u_y &= -v_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cdot e^i y \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

$u_x = e^x cosy \to$ ganti x dengan z
y dengan 0

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z cos0 \\ &= e^z \to f(z) = e^z \end{aligned}$$

Aturan penurunan pada fungsi riil berlaku pada fungsi kompleks. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah dua fungsi kompleks, maka:

- penjumlahan

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z) \tag{26}$$

- perkalian skalar

$$\frac{d}{dz}(kf(z)) = kf'(z) \tag{27}$$

- aturan rantai

$$\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z) \tag{28}$$

- aturan perkalian

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + g'(z)f(z) \tag{29}$$

- aturan pembagian

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)} \tag{30}$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Syarat terpenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR):

Diketahui:

$$f(x, y) = x + iy$$

Memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR), jika:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{31}$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{32}$$

dimana:

- U adalah bagian $Ref(x, y)$, dan
- V adalah bagian $Imf(x, y)$.

Jika PCR tidak terpenuhi maka $f(x, y)$ tidak differentiable, atau $f'(x, y)$ tidak ada.

Contoh:
Tentukan turunan fungsi $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\begin{aligned} U_x &= 2x & V_x &= 2y \\ U_y &= -2y & V_y &= 2x \end{aligned}$$

PCR terpenuhi

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= U_x + iV_x \\ &= 2x + i2y \\ &= 2(x + iy) \end{aligned}$$

Jika dilakukan pada bentuk kompak:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 - y^2 + i2xy \\ f(z) &= z^2 \\ f'(x + iy) &= 2(x + iy) \\ f'(z) &= 2z \end{aligned}$$

Fungsi Harmonik

Misalkan $u(x, y)$ adalah fungsi 2 peubah $u(x, y)$ dikatakan fungsi harmonik jika $u_{xx} + u_{yy}$. Buktikan bahwa $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x$ adalah harmonik?

$$\begin{aligned} u_x &= 6x - 0 + 2 & u_y &= -6y \\ u_{xx} &= 6 & u_{yy} &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 6 + (-6) \\ &= 0 \\ &(harmonik) \end{aligned}$$

Contoh:

$H(x, y) = 2x^3 - kyx^2$ tentukan nilai k sehingga $H(x, y)$ menjadi fungsi harmonik

$$\begin{aligned} H_x &= 6x^2 - ky^2 & H_y &= 0 - 2kxy \\ H_{xx} &= 12x & H_{yy} &= -2kx \end{aligned}$$

Agar harmonik

$$\begin{aligned} H_{xx} + H_{yy} &= 0 \\ 12x + (-2kx) &= 0 \\ 12 - 2k &= 0 \\ -2k &= -12 \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Fungsi Analitik

Fungsi $f(z)$ disebut analitik pada D (himpunan buka) bila $f'(z)$ ada untuk $z \epsilon D$ atau $f(z)$. Berlaku PCR untuk $z \epsilon D$.

- **Differentiable** $\rightarrow$ Fungsi $f(z)$ dikatakan terdifferentiable di $z = z_0$ jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$.
- **Analitik** $\rightarrow$ Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada suatu titik z jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$ dan sekitarnya.

Contoh:
Periksa apakah $f(z)$ fungsi analitik pada D.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2+1}{z-2} \\ D &= |z+1| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{g'h - h'g}{h^2} \\ g &= z^2+1 \\ h &= z-2 \end{aligned}$$

$f(z)$ tidak ada $\rightarrow f'(z)$ tidak ada.

$$\begin{aligned} z+1 &< 1 \\ z-(-1) &< 1 \\ z - z0 &< r \end{aligned}$$

Himpunan z yang jaraknya terhadap z_0 kurang dari r.

Misal $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ pada D dan berlaku PCR maka $v(x,y)$ disebut konjugate (sekawan) harmonik dari $u(x,y)$ atau sebaliknya.

- $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ masing-masing punya fungsi harmonik.
- $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

Sekawan Harmonik

PCR digunakan untuk mencari Sekawan Harmonik.

Misal:

$$f(x+iy) = xy + iV(x,y)$$

Tentukan $V(x,y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$.
Jawab:

$$U_x = y \qquad\qquad U_y = x$$
$$U_{xx} = 0 \qquad\qquad U_{yy} = 0$$

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$
$$0 + 0 = 0$$

Terbukti Harmonik.

$$U_x = y \qquad\qquad U_y = x$$
$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad\qquad V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

PCR Syarat 1:

$$U_x = Vy$$
$$y = \frac{\partial V}{\partial y}$$
$$V = \frac{1}{2}y^2 + g(x)$$

Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$$

PCR Syarat 2:

$$U_y = -Vx$$
$$x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$x = g'(x)$$

$$g'(x) = x$$
$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Sehingga:

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$$

dengan c suatu konstanta.

Integral Kompleks

Lintasan 1

Misal $z(t) : 1 \to C$ merupakan fungsi kompleks dengan domain real, $1 = [a, b]$, maka fungsi $z(t)$ dinyatakan:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$
$$a \leq t \leq b$$

$z(t)$ merupakan lintasan dari A ke B. Rotasi : Z

Contoh:
Gambarkan lintasan C untuk $-1 \leq t \leq 1$ yang dinyatakan

$$z(t) = t + it^2$$
$$x(t) = t \to y = x^2$$
$$y(t) = t^2$$

Lintasan 2

Turunan 2 integral dari persamaan lintasan dinyatakan sebagai berikut: $z(t) = x(t) + iy(t); a \leq t \leq b$

$$\frac{dz}{dt} = z'(t)$$
$$\frac{dz}{dt} = x'(t) + iy'(t)$$
$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

Contoh:
Hitung turunan dan integral dari persamaan lintasan berikut:

$$z(t) = t + it^2$$
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned}
z'(t) &= 1 + 2it \\
\int_{-1}^{1} t(t)\, dt &= \int_{-1}^{1} [t + it^2]\, dt \\
&= [\frac{1}{2}t^2 + \frac{i}{3}t^3]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3}i
\end{aligned}$$

Jenis Lintasan:

1. Lintasan buka : Bila ujung lintasan tidak berimpit
2. Lintasan tutup : Bila ujung lintasan berimpit (Sederhana & tidak sederhana)

Integral Lintasan:

Integral dari fungsi kompleks $f(z)$ atas lintasan C disebut integral lintasan atau integral garis atau integral sountour dan dinyatakan:

Integral tergantung lintasan 1:

1. Nyatakan lintasan C dalam $z(t) = t + it2; -1 \leq t \leq 1$
2. Cari turunan $z(t)z'(t)$
3. Substitusi fungsi $f(z)$ terhadap fungsi $z(t)f[z(t)]$
4. Integrasikan $f[z(t)]z'(t)$ terhadap t

Titik Interior:

Titik to disebut titik interior dari lintasan tutup C bila terdapat lingkungan dari to yang termuat di dalam C.

Lintasan tutup C arah positif : bila berjalan menyusuri lintasan maka daerah yang dilingkupi oleh C terletak disebelah kiri.

Integral Cauchy

Misal lintasan C tutup dengan arah berlawanan jarum jam (arah positif), z_0 : interior dari C dan $f(z)$ analitik pada daerah yang dilingkupi oleh C maka integral cauchy:

Jika:

1. C lintasan tutup arah (t)
2. $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, $f(z)$ analitik di lintasan C
3. z_0 titik interior dari limit C

Maka:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dt = 2\pi i f(z_0)$$

DERET KOMPLEKS I

Deret Taylor

Misal fungsi $f(z)$ analitik pada $|z-z0| < R0$ maka $f(z)$ di deretkan menjadi:

$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^0}{n!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^0}{0!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^1}{1!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^2}{2!}$$

Dengan $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Daerah keanalitikan/kekonvergenan $|z - z_0| < R_0$

Contoh:

Tentukan deret taylor dari $f(z) = e^z$ dengan pusat penderetan di $Z_0 = 0$

$f(z) = e^z \rightarrow$ fungsi entire

D.K $= |z - 0| < \infty$

D.K $= |z| < \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)(z-0)}{1!} + \frac{f''(0)(z-0)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(z-0)^3}{3!} .... \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1z}{1!} + \frac{1z^2}{2!} + \frac{1z^3}{3!} + \frac{1z^4}{4!} .... \\ &= \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .... \end{aligned}$$

Deret MacLaurin

Deret MacLaurin merupakan deret Taylor dengan pusat penderetan di titik 0

$$f(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{f"(0)z^n}{n!}$$

Jenis Deret MacLaurin:

- $$e^z = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ....(|Z| < \infty)$$
- $$\frac{1}{1-z} = \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{\infty} ....(|Z| < 1)$$
- $$\frac{1}{1+z} = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n ....(|Z| < 1)$$

Contoh: Tentukan deret MacLaurin dari $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$
$f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ analitik dengan titik singular di $Z = -1$
D.K $= |z - 0| < 1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} \\
f'(z) &= (-1)(1+z)^{-2} \cdot 1 \\
f''(z) &= (-2)(-1)(1+z)^{-3} \cdot 1 = 2 \cdot 1(1+z)^{-3} \\
f'''(z) &= (-3) \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-4} \cdot 1 \\
f''''(z) &= (-4)(-3) \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-5} \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{f(0)z^0}{0!} + \frac{f'(0)z^1}{1!} + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \frac{f'''(0)z^3}{3!}.... \\
&= \frac{1 \cdot 1}{0!} + \frac{(-1)z}{1!} + \frac{2 \cdot 1 \cdot z^2}{2!} + \frac{(-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot z^3}{3!}.... \\
&= \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{0!} + \frac{(-1) \cdot 1!z}{1!} + \frac{(-1)^2 \cdot 2! \cdot z^2}{2!} + \frac{(-1)^3 \cdot 3! \cdot z^3}{3!}.... \\
&= \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^n....(|z| < 1)
\end{aligned}
$$

Perbedaan Deret Taylor dan Deret MacLaurin:

- Deret Taylor memiliki pusat penderetan $|Z - Z_0| < R$
- Deret MacLaurin memiliki pusat penderetan di $|Z - 0| < R$

DERET KOMPLEKS II

Deret MacLaurin
Contoh:
e^{iz}
$\rightarrow e^{iz}$ fungsi analitik
D.K $|Z| < \infty$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &= \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} ....(|Z| < \infty) \end{aligned}$$

Deret Taylor
Contoh:
Penderetan $f(z) = e^z$ di $z = i$
$\rightarrow f(z) = e^z$ fungsi entire
D.K $|Z - i| < \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^{z-i+i} \\ &= e^{z.i} \cdot e^i \\ &= e^i \cdot e^{z-i} ....(|Z - i| < \infty) \end{aligned}$$

DERET FUNGSI RASIONAL

Tinjau fungsi rasional dengan bentuk $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b}{c-dz}$

Disederhanakan menjadi $f(z) = \frac{b/c}{1-d/cZ}$

Diekspansi menjadi $f(z) = \frac{b}{c}(1 + \frac{d}{c}Z + (\frac{d}{c}Z)^2 + (\frac{d}{c}Z)^3....$

Dengan area kekonvergenan $|\frac{d}{c}Z| < 1 \rightarrow |Z| < |\frac{d}{c}|$

Contoh:

Penderetan $\frac{1}{1-z}$ di daerah $|Z| > 1$

$\rightarrow \frac{1}{1-z}$ fungsi analitik

D.K $|Z| > 1$

$\frac{|Z|}{|Z|} > \frac{1}{|Z|} = |\frac{1}{Z}|$

$\frac{|Z|}{|Z|} > \frac{1}{|Z|}$

$|\frac{1}{Z}| < 1$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z}(\frac{1}{\frac{1}{z}-1}) \\
&= \frac{-1}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \\
&= \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\cdot 1^n}{z \cdot z^n} \\
&= \Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}}....|Z| > 1
\end{aligned}$$