BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan real (R) dan i adalah suatu bilangan imaginer dimana $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Bilangan Kompleks biasanya ditulis dalam bentuk:

$$x = x + iy \tag{1}$$

dimana,

- x adalah bagian $Re(z)$, dan
- y adalah bagian $Im(z)$.

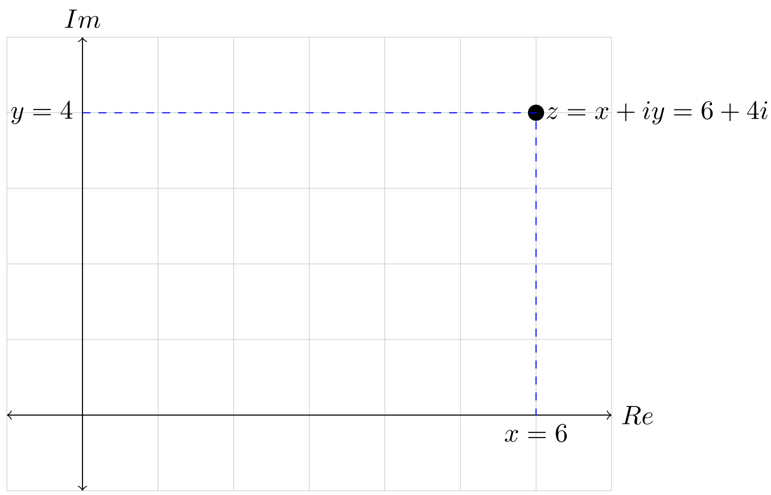
Contoh:

$$\begin{aligned} z &= 6 + \sqrt{-16} \\ &= 6 + \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= 6 + i \times 4 \\ &= 6 + 4i \end{aligned} \tag{2}$$

maka:

- $Re(z) = 6$, dan
- $Im(z) = 4$.

Notasi Bilangan Kompleks



Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka berlaku:

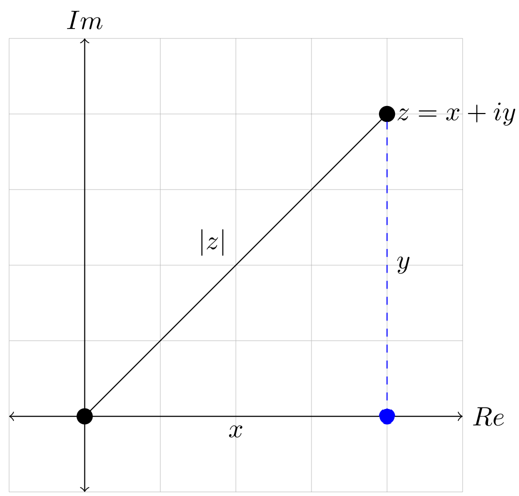
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) + (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) \cdot (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a \cdot z_1 &= a \cdot (x_1\ ,\ y_1) \\ &= (a x_1\ ,\ a y_1) \end{aligned} \tag{5}$$

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai bilangan real tidak negatif yang merupakan panjang vektor posisi dari z (jarak antara z dengan pusat sumbu).



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{7}$$

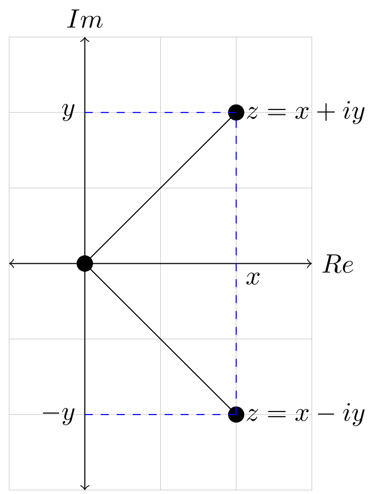
Sifat Modulus

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{8}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{9}$$

Sekawan/*Konjugate* Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$, sekawan dari z (notasi $= \overline{z}$) adalah pencerminan dari z terhadap sumbu real (R).



Sifat Sekawan/*Konjugate*:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| = \overline{z}$
- $\overline{zz} = |z|^2$
- $Re(z) = \dfrac{z + z}{2}$

  $Im(z) = \dfrac{z - z}{2i}$

Representasi Polar

Misalkan r dan adalah koordinat polar dari titik (x, y) bilangan kompleks bukan nol $z = x + iy$. Karena $x = rcos\theta$ dan $y = rsin\theta$, maka bilangan Kompleks z dapat ditulis dalam bentuk polar:

$$z = r(cos\theta + isin\theta) \tag{10}$$

dengan,

- r adalah modulus dari z:
  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ adalah argumen dari z:
  $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Representasi Euler

Notasi matematis formal adalah bentuk Euler:

$$z = re^{i\theta} \tag{11}$$

Identitas Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \tag{12}$$

Perkalian dan Pangkat Bentuk Exponen

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2) \\ &= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) \\ &= cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sin(cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \tag{13}$$

Maka, jika $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, produk $z_1 z_2$ memiliki bentuk eksponensial:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \\ &= (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 \theta_2)} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{e^{-i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}{e^{i0}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1e^{i0}}{re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{r} e^{i(0-\theta)} \\ &= \frac{1}{r} e^{-i\theta} \qquad (16)\end{aligned}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad (17)$$