BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan real (R) dan i adalah suatu bilangan imaginer dimana $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Bilangan Kompleks biasanya ditulis dalam bentuk:

$$x = x + iy \tag{1}$$

dimana,

- x adalah bagian $Re(z)$, dan
- y adalah bagian $Im(z)$.

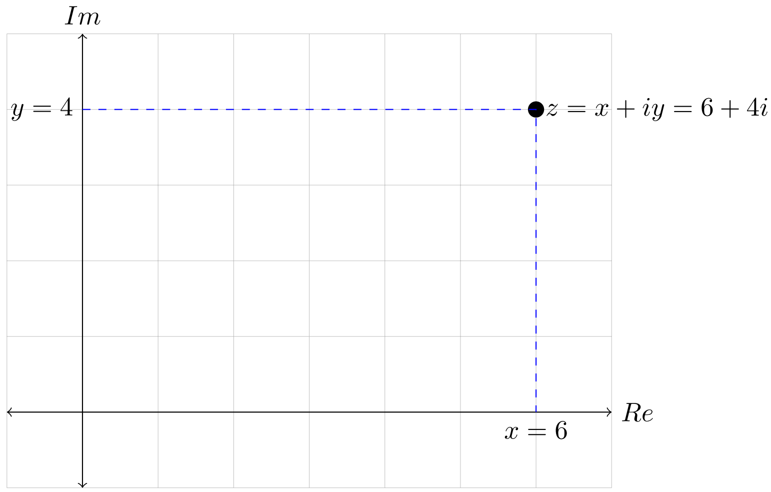
Contoh:

$$\begin{aligned} z &= 6 + \sqrt{-16} \\ &= 6 + \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= 6 + i \times 4 \\ &= 6 + 4i \end{aligned} \tag{2}$$

maka:

- $Re(z) = 6$, dan
- $Im(z) = 4$.

Notasi Bilangan Kompleks



Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka berlaku:

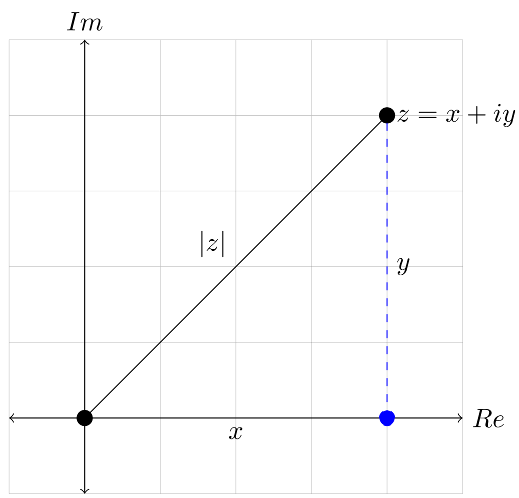
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) + (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) \cdot (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2\ ,\ x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a \cdot z_1 &= a \cdot (x_1\ ,\ y_1) \\ &= (ax_1\ ,\ ay_1) \end{aligned} \tag{5}$$

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai bilangan real tidak negatif yang merupakan panjang vektor posisi dari z (jarak antara z dengan pusat sumbu).



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{7}$$

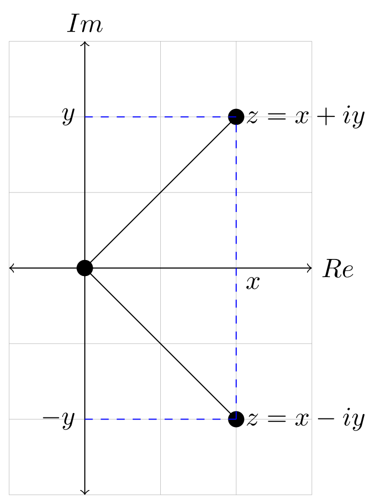
Sifat Modulus

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{8}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{9}$$

Sekawan/*Konjugate* Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$, sekawan dari z (notasi $= \overline{z}$) adalah pencerminan dari z terhadap sumbu real (R).



Sifat Sekawan/*Konjugate*:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| = \overline{z}$
- $\overline{z z} = |z|^2$
- $Re(z) = \dfrac{z + z}{2}$

  $Im(z) = \dfrac{z - z}{2i}$

Representasi Polar

Misalkan r dan adalah koordinat polar dari titik (x, y) bilangan kompleks bukan nol $z = x + iy$. Karena $x = rcos\theta$ dan $y = rsin\theta$, maka bilangan Kompleks z dapat ditulis dalam bentuk polar:

$$z = r(cos\theta + isin\theta) \tag{10}$$

dengan,

- r adalah modulus dari z:
  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ adalah argumen dari z:
  $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Representasi Euler

Notasi matematis formal adalah bentuk Euler:

$$z = re^{i\theta} \tag{11}$$

Identitas Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \tag{12}$$

Perkalian dan Pangkat Bentuk Exponen

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2) \\ &= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) \\ &= cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sin(cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \tag{13}$$

Maka, jika $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, produk z_1z_2 memiliki bentuk eksponensial:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ &= (r_1r_2)e^{i(\theta_1\theta_2)} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{e^{-i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}} \\ &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1e^{i0}}{re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{r}e^{i(0-\theta)} \\ &= \frac{1}{r}e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{16}$$

$$z^n = r^ne^{in\theta} \tag{17}$$

Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks $f(z)$ menyatakan pemetaan dari bidang kompleks asal z (domain) ke bidang kompleks hasil w (range) dengan suatu pola yang diatur oleh $f(z)$.

Contoh (titik ke titik):

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z + 1 \\ &= 2(x + iy) + 1 \\ &= 2x + 2iy + 1 \\ &= (2x + 1) + 2iy \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = 2x + 1 \\ Im(z) &= v(x, y) = 2y \end{aligned}$$

Contoh (lintasan ke lintasan):

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{z} \\ &= x - iy \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = x \\ Im(z) &= v(x, y) = -y \end{aligned}$$

Contoh (daerah ke daerah):

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 1 \\ D &: |z| < 1 \\ f(z) &= z + 1 \\ w &= z + 1 \\ z &= w - 1 \\ |w - 1| &< 1 \end{aligned} \tag{20}$$

Titik Singular

Titik dimana $f(z)$ gagal dipetakan ke titik lain. Contoh pada fungsi $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ gagal dipetakan pada titik asal $z = 1$ karena $\dfrac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

Limit Fungsi Kompleks

Konsep limit pada fungsi kompleks $f(z)$ diperluas dari limit pada fungsi real $f(x)$ sebagai: Pada fungsi kompleks $f(z)$, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ bernilai L atau

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \tag{21}$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika ada ϵ yang memenuhi $|f(z) - L| \leq \epsilon$, maka terilustrasi:

- $|z - z + 0| \leq \delta$ adalah disk dengan pusat di z_0 dan jari-jari δ
- $|f(z) - L| \leq \epsilon$ adalah disk dengan pusat di L dan jari-jari ϵ

Turunan Fungsi Kompleks

Aturan penurunan pada fungsi riil berlaku pada fungsi kompleks. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah dua fungsi kompleks, maka:

- penjumlahan

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z) \tag{22}$$

- perkalian skalar

$$\frac{d}{dz}(kf(z)) = kf'(z) \tag{23}$$

- aturan rantai

$$\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z) \tag{24}$$

- aturan perkalian

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + g'(z)f(z) \tag{25}$$

- aturan pembagian

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)} \tag{26}$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Syarat terpenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR):

Diketahui:

$$f(x, y) = x + iy$$

Memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR), jika:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{27}$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{28}$$

dimana:

- U adalah bagian $Ref(x, y)$, dan
- V adalah bagian $Imf(x, y)$.

Jika PCR tidak terpenuhi maka $f(x, y)$ tidak differentiable, atau $f'(x, y)$ tidak ada.

Sekawan Harmonik

PCR digunakan untuk mencari Sekawan Harmonik.

Misal:

$$f(x + iy) = xy + iV(x, y)$$

Tentukan $V(x, y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$.
Jawab:

$$\begin{aligned} U_x &= y & \qquad U_y &= x \\ U_{xx} &= 0 & \qquad U_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti Harmonik.

$$
\begin{aligned}
U_x &= y & U_y &= x \\
V_x &= \frac{\partial V}{\partial x} & V_y &= \frac{\partial V}{\partial y}
\end{aligned}
$$

PCR Syarat 1:

$$
\begin{aligned}
U_x &= Vy \\
y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\
V &= \frac{1}{2}y^2 + g(x)
\end{aligned}
$$

Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$$

PCR Syarat 2:

$$
\begin{aligned}
U_y &= -Vx \\
x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\
x &= g'(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= x \\
g(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c
\end{aligned}
$$

Sehingga:

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$$

dengan c suatu konstanta.