BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $x+iy$, dimana x dan y adalah bilangan real (R) dan i adalah suatu bilangan imaginer dimana $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Bilangan Kompleks biasanya ditulis dalam bentuk:

$$\boxed{z = x + iy}$$

dimana,

- x adalah bagian $Re(z)$, dan
- y adalah bagian $Im(z)$.

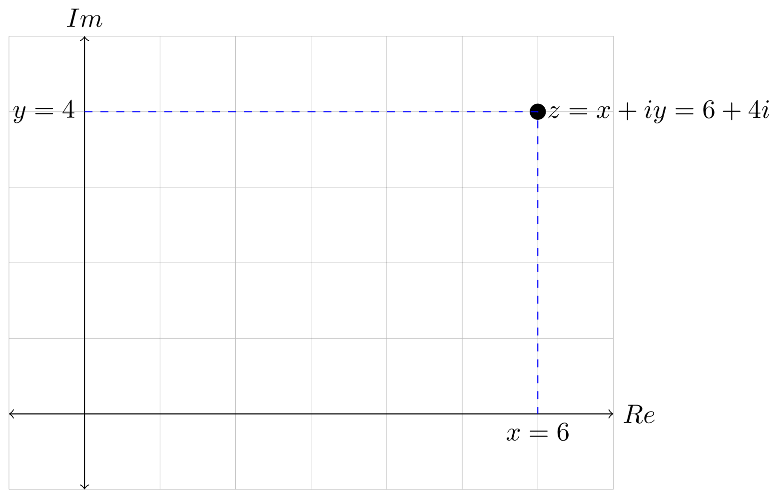
Contoh:

$$\begin{aligned} z &= 6 + \sqrt{-16} \\ &= 6 + \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= 6 + i \times 4 \\ &= 6 + 4i \end{aligned}$$

maka:

- $Re(z) = 6$, dan
- $Im(z) = 4$.

Notasi Bilangan Kompleks



Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) + (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1\ ,\ y_1) \cdot (x_2\ ,\ y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot z_1 &= a \cdot (x_1\ ,\ y_1) \\ &= (a x_1\ ,\ a y_1) \end{aligned}$$

Operasi Aritmatika Pada Bilangan Kompleks

1. **Penjumlahan Bilangan Kompleks**

   Misalkan dua bilangan kompleks:

   $$z_1 = a + bi$$
   $$z_2 = c + di$$

   - $z_1 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$
   - $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $a = b$ dan $b = d$

   Contoh:

   $$2 + 5i = \frac{4}{2} + \frac{10}{2}i$$

   - Jika $z_1 \neq z_2$ maka z_1 tidak dapat dibandingkan lebih besar atau lebih kecil dari z_2

2. **Perkalian bilangan kompleks dengan skalar**

   Jika:

   $$z_1 = (a + bi)$$

   Maka:

   $$\begin{aligned} k \cdot z_1 &= k \cdot (a + bi) \\ &= ka + kbi \end{aligned}$$

   Contoh:

   $$z_1 = 2 + 5i$$
   $$k = 2$$

   Jawab:

   $$\begin{aligned} k \cdot z_1 &= 2 \cdot (2 + 5i) \\ &= 4 + 10i \end{aligned}$$

3. **Perkalian dua bilangan kompleks**

Jika:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi \\ z_2 &= c + di \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 2i \\ z_2 &= 3 + 5i \end{aligned}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 + 5i) \\ &= (3 - 10) + (5 + 6)i \\ &= -7 + 11i \end{aligned}$$

4. **Pembagian dua bilangan kompleks**

Jika

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi \\ z_2 &= c + di \end{aligned}$$

Maka $\frac{z_1}{z_2}$ menyatakan pembagian bilangan kompleks dengan pembilang z_1 dan penyebut z_2. Penyebut dikalikan sekawannya $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{?}{z_2}$. Agar nilai semula tidak berubah, maka pembilang juga harus dikalikan dengan bilangan yang sama: $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{z_2}$. Sekarang pembilang bernilai riil dan pembagian dapat dilakukan.

Contoh:

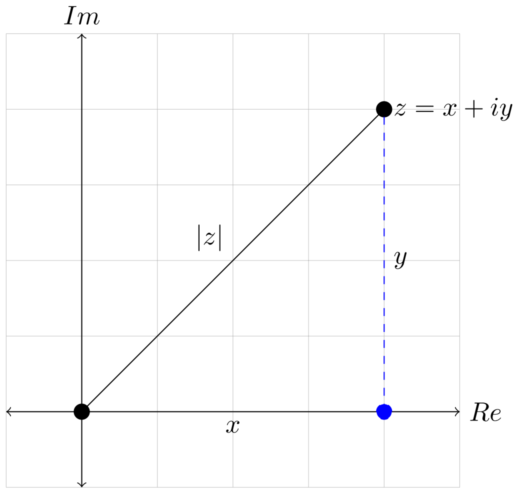
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 2i \\ z_2 &= 2 + 3i \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{2+3i} \\ &= \frac{1+2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{(2+6)+(-3+4)i}{2^2+3^2} \\ &= \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \end{aligned}$$

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai bilangan real tidak negatif yang merupakan panjang vektor posisi dari z (jarak antara z dengan pusat sumbu).



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

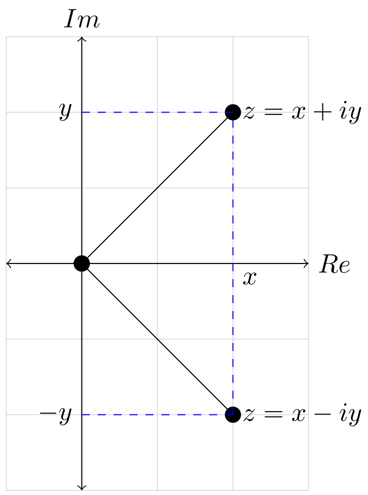
Sifat Modulus

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Sekawan/*Konjugate* Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$, sekawan dari z (notasi $= \overline{z}$) adalah pencerminan dari z terhadap sumbu real (R).



Sifat Sekawan/*Konjugate*:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| = \overline{z}$
- $\overline{zz} = |z|^2$
- $Re(z) = \dfrac{z + z}{2}$

  $Im(z) = \dfrac{z - z}{2i}$

Representasi Polar

Misalkan r dan adalah koordinat polar dari titik (x, y) bilangan kompleks bukan nol $z = x+iy$. Karena $x = rcos\theta$ dan $y = rsin\theta$, maka bilangan Kompleks z dapat ditulis dalam bentuk polar:

$$z = r(cos\theta + isin\theta)$$

$$z = r\angle\theta$$

dengan,

- r adalah modulus dari z:
  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ adalah argumen dari z:
  $\theta = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= tan^{-1}\frac{b}{a} \\ &= tan^{-1}\frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5(\cos 53,1^\circ + \sin 53,1^\circ) \\ &= 5\angle 53,1^\circ \end{aligned}$$

Representasi Euler

Notasi matematis formal adalah bentuk Euler:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

Identitas Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta}$$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= tan^{-1} \frac{b}{a} \\ &= tan^{-1} \frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5e^{i53,1^\circ} \\ 5e^{i53,1^\circ} &= 5(\cos 53,1^\circ + \sin 53,1^\circ) \end{aligned}$$

Perkalian dan Pangkat Bentuk Exponen

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2)\\
&= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2)\\
&= cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sin(cos(\theta_1 + \theta_2))\\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

Maka, jika $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, produk $z_1 z_2$ memiliki bentuk eksponensial:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}\\
&= r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}\\
&= (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 \theta_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{e^{-i\theta_2}}\\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}}\\
&= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= \frac{1}{z}\\
&= \frac{1e^{i0}}{re^{i\theta}}\\
&= \frac{1}{r} e^{i(0-\theta)}\\
&= \frac{1}{r} e^{-i\theta}
\end{aligned}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks $f(z)$ menyatakan pemetaan dari bidang kompleks asal z (domain) ke bidang kompleks hasil w (range) dengan suatu pola yang diatur oleh $f(z)$.

Contoh (titik ke titik):

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z + 1 \\ &= 2(x + iy) + 1 \\ &= 2x + 2iy + 1 \\ &= (2x + 1) + 2iy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = 2x + 1 \\ Im(z) &= v(x, y) = 2y \end{aligned}$$

Contoh (lintasan ke lintasan):

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{z} \\ &= x - iy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= u(x, y) = x \\ Im(z) &= v(x, y) = -y \end{aligned}$$

Contoh (daerah ke daerah):

$$\begin{aligned} f(z) &= z + 1 \\ D &: |z| < 1 \\ f(z) &= z + 1 \\ w &= z + 1 \\ z &= w - 1 \\ |w - 1| &< 1 \end{aligned}$$

Titik Singular

Titik dimana $f(z)$ gagal dipetakan ke titik lain. Contoh pada fungsi $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ gagal dipetakan pada titik asal $z = 1$ karena $\dfrac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

Limit Fungsi Kompleks

Konsep limit pada fungsi kompleks $f(z)$ diperluas dari limit pada fungsi real $f(x)$ sebagai: Pada fungsi kompleks $f(z)$, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ bernilai L atau

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = L}$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika ada ϵ yang memenuhi $|f(z) - L| \leq \epsilon$, maka terilustrasi:

- $|z - z_0| \leq \delta$ adalah disk dengan pusat di z_0 dan jari-jari δ
- $|f(z) - L| \leq \epsilon$ adalah disk dengan pusat di L dan jari-jari ϵ

Turunan Fungsi Kompleks

Perhitungan turunan $f(z)$ dapat melihat dari kemungkinan notasi $f(z)$:

- $f(z)$ dinyatakan secara eksplisit peubah z.
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(i, \theta) + iV(i, \theta)$

$f(z)$ dinyatakan $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ dapat diturunkan di $z_0 = x_0 + iy_0$ bila berlaku **Persamaan Cauchy Riemann (PCR)**:

$$Ux(x_0 + y_0) = Vy(x_0 + y_0)$$
$$Uy(x_0 + y_0) = -Vx(x_0 + y_0)$$

$$f(z_0) = Ux(x_0 + y_0) + iVy(x_0 + y_0)$$

Contoh:
Apakah $f(z) = e^x \cdot e^{iy}$ memiliki turunan di titik $z_o = 1 + i$?

Jawab:
$f'(1+i)$ ada jika:

$$\begin{aligned} Ux(1+i) &= Vy(1+i) \\ Uy(1+i) &= -Vx(1+i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) = f(z) &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ux(x,y) &= e^x \cos y \\ Uy(x,y) &= e^x(-\sin y) \\ &= e^x \sin y \end{aligned}$$

U(x,y) dan V(x,y) memenuhi Persamaan Cauchy Riemann (PCR). Jadi $f'(1+i)$ ada:

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= f'(1,1) \\ &= e'cos1 + ie'sin1 \end{aligned}$$

$f(z)$ dinyatakan sebagai $f(z) = U(i,\theta) + iV(i,\theta)$
PCR dalam koordinat polar:

$$\begin{aligned} Ur &= \frac{1}{r}V\theta \\ \frac{1}{r}U\theta &= -Vr \end{aligned}$$

Turunan dari f(z) dinyatakan :

$$f'(z) = e^{-i\theta}(Ur + iVr)$$

Metode Milne-Thomson

Jika fungsi terurai $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ differentiable atau holomorfik, maka $f(x+iy)$ dapat dijadikan bentuk kompak $f(z)$.

- Tentukan $f'(x+iy)$ yaitu $f'(x+iy) = \dfrac{\partial u}{x} + i\dfrac{\partial v}{x}$
- Ditinjau suku $\dfrac{\partial u}{x}$
- Substitusi $\dfrac{\partial u}{x} \to f'(z), x \to z$ dan $y \to 0$
- Selesaikan $f'(z)$ untuk memperoleh $f(z)$
- Cari konstanta c pada $f(z)$ dengan substitusi $z = x + iy$ pada $f(z)$ dan membandingkannya dengan $f(x+iy)$ semula.

Contoh:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$u_x = e^x \cos y \qquad\qquad v_x = e^x \sin y$$
$$u_y = -e^x \sin y \qquad\qquad v_y = e^x \cos y$$

$$\begin{aligned} u_x &= v_x \\ u_y &= -v_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cdot e^i y \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

$u_x = e^x cosy \to$ ganti x dengan z
y dengan 0

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z cos0 \\ &= e^z \to f(z) = e^z \end{aligned}$$

Aturan penurunan pada fungsi riil berlaku pada fungsi kompleks. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah dua fungsi kompleks, maka:

- penjumlahan

$$\boxed{\frac{d}{dz}(f(z)+g(z)) = f'(z)+g'(z)}$$

- perkalian skalar

$$\boxed{\frac{d}{dz}(kf(z)) = kf'(z)}$$

- aturan rantai

$$\boxed{\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z)}$$

- aturan perkalian

$$\boxed{\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z)+g'(z)f(z)}$$

- aturan pembagian

$$\boxed{\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}}$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Syarat terpenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR):

Diketahui:

$$f(x, y) = x + iy$$

Memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR), jika:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

dimana:

- U adalah bagian $Ref(x, y)$, dan
- V adalah bagian $Imf(x, y)$.

Jika PCR tidak terpenuhi maka $f(x, y)$ tidak differentiable, atau $f'(x, y)$ tidak ada.

Contoh:
Tentukan turunan fungsi $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$

$$U_x = 2x \qquad V_x = 2y$$
$$U_y = -2y \qquad V_y = 2x$$

PCR terpenuhi

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= U_x + iV_x \\ &= 2x + i2y \\ &= 2(x + iy) \end{aligned}$$

Jika dilakukan pada bentuk kompak:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 - y^2 + i2xy \\ f(z) &= z^2 \\ f'(x + iy) &= 2(x + iy) \\ f'(z) &= 2z \end{aligned}$$

Fungsi Harmonik

Misalkan $u(x,y)$ adalah fungsi 2 peubah $u(x,y)$ dikatakan fungsi harmonik jika $u_{xx} + u_{yy}$. Buktikan bahwa $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x$ adalah harmonik?

$$u_x = 6x - 0 + 2 \qquad u_y = -6y$$
$$u_{xx} = 6 \qquad u_{yy} = -6$$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 6 + (-6) \\ &= 0 \\ &(harmonik) \end{aligned}$$

Contoh:
$H(x,y) = 2x^3 - kyx^2$ tentukan nilai k sehingga $H(x,y)$ menjadi fungsi harmonik

$$H_x = 6x^2 - ky^2 \qquad H_y = 0 - 2kxy$$
$$H_{xx} = 12x \qquad H_{yy} = -2kx$$

Agar harmonik

$$\begin{aligned} H_{xx} + H_{yy} &= 0 \\ 12x + (-2kx) &= 0 \\ 12 - 2k &= 0 \\ -2k &= -12 \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Fungsi Analitik

Fungsi $f(z)$ disebut analitik pada D (himpunan buka) bila $f'(z)$ ada untuk $z \epsilon D$ atau $f(z)$. Berlaku PCR untuk $z \epsilon D$.

- **Differentiable** $\rightarrow$ Fungsi $f(z)$ dikatakan terdifferentiable di $z = z_0$ jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$.
- **Analitik** $\rightarrow$ Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada suatu titik z jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$ dan sekitarnya.

Contoh:
Periksa apakah $f(z)$ fungsi analitik pada D.

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$$
$$D = |z+1| < 1$$

$$f'(z) = \frac{g'h - h'g}{h^2}$$
$$g = z^2 + 1$$
$$h = z - 2$$

$f(z)$ tidak ada $\rightarrow$ $f'(z)$ tidak ada.

$$z + 1 < 1$$
$$z - (-1) < 1$$
$$z - z0 < r$$

Himpunan z yang jaraknya terhadap z_0 kurang dari r.

Misal $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ pada D dan berlaku PCR maka $v(x,y)$ disebut konjugate (sekawan) harmonik dari $u(x,y)$ atau sebaliknya.

- $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ masing-masing punya fungsi harmonik.
- $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

Sekawan Harmonik

PCR digunakan untuk mencari Sekawan Harmonik.

Misal:

$$f(x+iy) = xy + iV(x,y)$$

Tentukan $V(x,y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$.
Jawab:

$$\begin{aligned} U_x &= y & U_y &= x \\ U_{xx} &= 0 & U_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Terbukti Harmonik.

$$\begin{aligned} U_x &= y & U_y &= x \\ V_x &= \frac{\partial V}{\partial x} & V_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

PCR Syarat 1:

$$\begin{aligned} U_x &= Vy \\ y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ V &= \frac{1}{2}y^2 + g(x) \end{aligned}$$

Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$$

PCR Syarat 2:

$$\begin{aligned} U_y &= -Vx \\ x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ x &= g'(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= x \\
g(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c
\end{aligned}
$$

Sehingga:

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$$

dengan c suatu konstanta.

Integral Kompleks

Lintasan 1

Misal $z(t) : 1 \to C$ merupakan fungsi kompleks dengan domain real, $1 = [a, b]$, maka fungsi $z(t)$ dinyatakan:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$
$$a \leq t \leq b$$

$z(t)$ merupakan lintasan dari A ke B. Rotasi : Z

Contoh:
Gambarkan lintasan C untuk $-1 \leq t \leq 1$ yang dinyatakan

$$\begin{aligned} &z(t) = t + it^2 \\ &x(t) = t \to y = x^2 \\ &y(t) = t^2 \end{aligned}$$

Lintasan 2

Turunan 2 integral dari persamaan lintasan dinyatakan sebagai berikut: $z(t) = x(t) + iy(t); a \leq t \leq b$

$$\frac{dz}{dt} = z'(t)$$
$$\frac{dz}{dt} = x'(t) + iy'(t)$$
$$\int_a^b z(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt + i \int_a^b y(t)\, dt$$

Contoh:
Hitung turunan dan integral dari persamaan lintasan berikut:

$$z(t) = t + it^2$$
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= 1 + 2it \\
\int_{-1}^{1} t(t)\,dt &= \int_{-1}^{1} [t + it^2]\,dt \\
&= [\frac{1}{2}t^2 + \frac{i}{3}t^3]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3}i
\end{aligned}
$$

Jenis Lintasan:

1. Lintasan buka : Bila ujung lintasan tidak berimpit
2. Lintasan tutup : Bila ujung lintasan berimpit (Sederhana & tidak sederhana)

Integral Lintasan:

Integral dari fungsi kompleks $f(z)$ atas lintasan C disebut integral lintasan atau integral garis atau integral sountour dan dinyatakan:

Integral tergantung lintasan 1:

1. Nyatakan lintasan C dalam $z(t) = t + it2; -1 \leq t \leq 1$
2. Cari turunan $z(t)z'(t)$
3. Substitusi fungsi $f(z)$ terhadap fungsi $z(t)f[z(t)]$
4. Integrasikan $f[z(t)]z'(t)$ terhadap t

Titik Interior:

Titik to disebut titik interior dari lintasan tutup C bila terdapat lingkungan dari to yang termuat di dalam C.

Lintasan tutup C arah positif : bila berjalan menyusuri lintasan maka daerah yang dilingkupi oleh C terletak disebelah kiri.

Integral Cauchy

Misal lintasan C tutup dengan arah berlawanan jarum jam (arah positif), z_0 : interior dari C dan $f(z)$ analitik pada daerah yang dilingkupi oleh C maka integral cauchy:

Jika:

1. C lintasan tutup arah (t)
2. $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$, $f(z)$ analitik di lintasan C
3. z_0 titik interior dari limit C

Maka:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dt = 2\pi i f(z_0)$$

DERET KOMPLEKS I

Deret Taylor

Misal fungsi $f(z)$ analitik pada $|z - z0| < R0$ maka $f(z)$ di deretkan menjadi:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^0}{n!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^0}{0!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^1}{1!} = \frac{f^{(0)}(z_0)(z-z_0)^2}{2!}}$$

Dengan $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Daerah keanalitikan/kekonvergenan $|z - z_0| < R_0$

Contoh:

Tentukan deret taylor dari $f(z) = e^z$ dengan pusat penderetan di $Z_0 = 0$

$f(z) = e^z \rightarrow$ fungsi entire

D.K $= |z - 0| < \infty$

D.K $= |z| < \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)(z-0)}{1!} + \frac{f''(0)(z-0)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(z-0)^3}{3!}.... \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1z}{1!} + \frac{1z^2}{2!} + \frac{1z^3}{3!} + \frac{1z^4}{4!}.... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.... \end{aligned}$$

Deret MacLaurin

Deret MacLaurin merupakan deret Taylor dengan pusat penderetan di titik 0.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f"(0)z^n}{n!}}$$

Jenis Deret MacLaurin:

1. $$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; .... \; (|Z| < \infty)}$$

2. $$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{\infty} \; .... \; (|Z| < 1)}$$

3. $$\boxed{\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \; .... \; (|Z| < 1)}$$

Contoh:

Tentukan deret MacLaurin dari $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$
$f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ analitik dengan titik singular di $Z = -1$
D.K $= |z - 0| < 1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} \\
f'(z) &= (-1)(1+z)^{-2} \cdot 1 \\
f''(z) &= (-2)(-1)(1+z)^{-3} \cdot 1 = 2 \cdot 1(1+z)^{-3} \\
f'''(z) &= (-3) \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-4} \cdot 1 \\
f''''(z) &= (-4)(-3) \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-5} \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(1+z)^{-5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{f(0)z^0}{0!} + \frac{f'(0)z^1}{1!} + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \frac{f'''(0)z^3}{3!} .... \\
&= \frac{1 \cdot 1}{0!} + \frac{(-1)z}{1!} + \frac{2 \cdot 1 \cdot z^2}{2!} + \frac{(-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot z^3}{3!} .... \\
&= \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{0!} + \frac{(-1) \cdot 1! z}{1!} + \frac{(-1)^2 \cdot 2! \cdot z^2}{2!} + \frac{(-1)^3 \cdot 3! \cdot z^3}{3!} .... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n .... (|z| < 1)
\end{aligned}
$$

Perbedaan Deret Taylor dan Deret MacLaurin:

- Deret Taylor memiliki pusat penderetan $|Z - Z_0| < R$
- Deret MacLaurin memiliki pusat penderetan di $|Z - 0| < R$

DERET KOMPLEKS II

Deret MacLaurin

Contoh:

e^{iz}

$\rightarrow e^{iz}$ fungsi analitik

D.K $|Z| < \infty$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} ....(|Z| < \infty) \end{aligned}$$

Deret Taylor

Contoh:

Penderetan $f(z) = e^z$ di $z = i$

$\rightarrow f(z) = e^z$ fungsi entire

D.K $|Z - i| < \infty$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^{z-i+i} \\ &= e^{z.i} \cdot e^i \\ &= e^i \cdot e^{z-i} ....(|Z - i| < \infty) \end{aligned}$$

DERET FUNGSI RASIONAL

Tinjau fungsi rasional dengan bentuk $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{b}{c - dz}$

Disederhanakan menjadi $f(z) = \dfrac{b/c}{1 - d/cZ}$

Diekspansi menjadi $f(z) = \dfrac{b}{c}(1 + \dfrac{d}{c}Z + (\dfrac{d}{c}Z)^2 + (\dfrac{d}{c}Z)^3 ....$

Dengan area kekonvergenan $|\dfrac{d}{c}Z| < 1 \rightarrow |Z| < |\dfrac{d}{c}|$

Contoh:

Penderetan $\dfrac{1}{1-z}$ di daerah $|Z| > 1$

$\rightarrow \dfrac{1}{1-z}$ fungsi analitik

D.K $|Z| > 1$

$\dfrac{|Z|}{|Z|} > \dfrac{1}{|Z|} = |\dfrac{1}{Z}|$

$\dfrac{|Z|}{|Z|} > \dfrac{1}{|Z|}$

$|\dfrac{1}{Z}| < 1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z}(\frac{1}{\frac{1}{z} - 1}) \\
&= \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\cdot 1^n}{z \cdot z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}} ....|Z| > 1
\end{aligned}
$$

RESIDU

Titik Singular Terisolasi

- Z_0 tiitk singular dari $f(z)$, jika di titik $Z_0 f(z)$ gagal analitik maka artinya $f'(Z_0)$ tidak ada atau $f'(z)$ tidak analitik di z_0
- $f(z)$ analitik di Z_0 jika $f'(z)$ ada di Z_0 dan sekitarnya

Contoh:

1. $f(z) = \dfrac{Z+1}{Z^3(Z^2+1)}$
   T.S di $Z = 0, Z = i$, dan $Z = -i$
   Di $Z = 0, Z = i$, dan $Z = -i$ dapat dibuat lingkungan sehingga tidak memuat T.S yang lain
   $\rightarrow$ T.S terisolasi
2. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{n}{2})}$
   Tidak analitik bila $\sin(\frac{\pi}{2}) = 0$
   $\rightarrow Z = \pm\frac{1}{n}$ T.S terisolasi atau $Z = 0$ tidak terisolasi

Residu
Contoh:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{(Z-1)(Z+2)} \\ &= \frac{A}{(Z-1)} + \frac{B}{(Z+2)} \\ &= \frac{1}{(Z-1)} + \frac{(-1)}{(Z+2)} \end{aligned}$$

T.S di 1 dan -2

- Residu $f(z)$ di $z = 1$ adalah 1
  Res $f(z) = 1$
  $Z = 1$
- Residu $f(z)$ di $z = -2$ adalah -1
  Res $f(z) = -1$
  $Z = -2$

Cara menghitung residu di T.S terisolasi:

- Di faktorkan

- Di deretkan
- Menggunakan teorema

Contoh:

$$\frac{z+1}{z(z^2+4)}$$

T.S di $Z = 0$
$Z = 2i$ dan $Z = -2i$
Res $f(z)$ di $Z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q_1(Z)}{z-0} \\ \frac{z+1}{z(z^2+4)} &= \frac{Q_1(Z)}{z} \\ Q_1(Z) &= \frac{z+1}{z^2+4} \\ Resf(z) = Q_1(0) &= \frac{0+1}{0^2+4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

APLIKASI RESIDU

Contoh:
Misalkan $C : |Z| = 2$ arah (t) hitung $\oint_c f(z)dz$ jika:

$$f(z) = \frac{e^x}{Z(Z+1)^3}$$

$\rightarrow$ TS di 0 dan -1

- Residu di $Z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q_1(Z)}{z-0} \\ Q_1 &= \frac{e^x}{Z(Z+1)^3} \\ Resf(z) = Q_1(0) &= \frac{e^0}{(0+1)^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Residu di $Z = -1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Q_2(Z)}{(Z-(-1))} \\ \frac{e^x}{Z(Z+1)^3} &= \frac{Q_2(Z)}{(Z+1)^3} \\ Q_2(Z) &= \frac{e^0}{z} analitik \\ Resf(z) &= \frac{Q^{(3-1)}(-1)}{(3-1)!} \\ &= \frac{Q''(-1)}{2!} \\ &= \frac{-5e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_2'(Z) &= \frac{e^z \cdot Z - 1 \cdot e^z}{Z^3} \\
&= \frac{e^z}{Z} - \frac{e^z}{Z^2} \\
Q_2"(Z) &= \frac{e^z}{Z} - \frac{e^z}{Z^2} - \frac{e^z \cdot Z^2 - 2Z(e^z)}{(Z^2)^2} \\
Q_2"(-1) &= \frac{-e^{-1}}{-1} - \frac{-e^{-1}}{(-1)^2} \\
&= \frac{e^{-1}(-1)^2 - 2(-1)e^{-1}}{(-1)^4} \\
Q_2"(-1) &= -e^{-1} - e^{-1} - \frac{(2e^{-1} + 3e^{-1})}{1} \\
&= -2e^{-1} - 3e^{-1} \\
&= -5e^{-1} \\
jadi \oint_c f(z)dz &= 2\pi i(Resf(z_1) + Resf(z_2)) \\
&= 2\pi i(1 + \frac{(-5e^{-1})}{2}) \\
&= \pi i(2 - 5e^{-1})
\end{aligned}
$$

INTEGRAL TAK WAJAR

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dz = \oint_c f(z)\,dz}$$

Syarat:

- $f(x)$: fungsi rasional $\to f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$
- Pangkat $q(x)$ - pangkat $p(x) \geq 2$
- q(x)0 untuk x (-,)

Contoh:

Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ dengan $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$
$\to f(x) = f(z) \to f(z) = \dfrac{2x}{x^2+4}$, titik singular di $z = 2i$ dan $z = -2i$
$Res f(z)$ di $z = 2i$
$f(z) = \dfrac{Q(z)}{Z-2i} \to Q(z) = \dfrac{2Z}{Z^2-4}$ analitik di $Z = 2i$
$Res f(z) = Q(z) = \dfrac{2(2i)}{2i+2i} = \dfrac{4i}{4i} = 1$

$$\begin{aligned} jadi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i(Res f(z)) \\ &= 2\pi i \cdot 1 \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

DERET FOURIER

Fungsi Periodik

- Fungsi $f(t)$: fungsi periodik bila ada bilangan $P\epsilon R$ sehingga berlaku $f(t+P) = f(t)$ untuk setiap $t\epsilon Df$
- P terkecil disebut periode dari f

Contoh:

1. $f(t) = -1; -2 \leq t < 0$
   $t; 0 \leq 1 < 2$
   fungsi f(t) dipandang periodik dengan periode p=4. Gambaran f(t) pada interval [-6,6]
2. Tentukan persamaan fungsi berikut
   - Periode fungsi adalah 4
   - Diambil interval [04]
   - Persamaan interval tersebut: f(t)=3 untuk 0t2 -3 untuk 2t4
   - Persamaan fungsi periodik: f(t)=3 untuk 0t2 -3 untuk 2t4 P = 4

KOEFISIEN FOURIER

- Fungsi $f(t)$ di definisikan pada $(0, 2L)$
- Periodik dengan periode 2L
- Kontinu bagian demi bagian
- Deret fourier $f(t)$ di definisikan:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(an \cos \frac{\pi nt}{L} + b\pi \sin \frac{\pi nt}{L})$$

- $f(t)$ ganjil:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} bn \sin \frac{\pi nt}{L}$$

- $f(t)$ genap:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} an \cos \frac{\pi nt}{L}$$

Contoh:

Tentukan Deret Fourier cosinus dari fungsi $f(t) = t$; $0 < t < 2$ yang dipandang periodik dengan periode $P = 4$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\ dt \\
&= \int_0^2 t\ dt \\
&= 2 \\
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 t\cos\frac{\pi nt}{2}\ dt \\
&= \frac{2}{n\pi}[t\sin\frac{\pi nt}{2}|_0^2 - \int_0^2 \sin\frac{\pi nt}{2}\ dt] \\
&= \frac{-2}{n\pi}[\frac{2}{\pi nt}\cos\frac{\pi nt}{2}|_0^2] \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \\
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nt}{2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{\pi nt}{2} \\
&= 1 - \frac{8}{n^2}\cos\frac{\pi t}{2} + 0 - \frac{8}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi t}{2} + 0 - \frac{8}{5^2\pi^2}\cos\frac{5\pi t}{2} + \ .... \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}
\end{aligned}
$$

TRANSFORMASI FOURIER

Cara mendapatkan TF dari sebuah fungsi:

- Menggunakan rumus
- Menggunakan tabel
- Menggunakan sifat TF:
  - Sifat shifting dan stretching
  - Sifat konvolusi
  - Turunan

Sifat shifting dan stretching:

- Shifting / pergeseran
  $f(t-b) \leftrightarrow e^{-isb}F(s)$
- Stretching / similaritas
  $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a})$
- Shifting dan Stretching
  $f(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{-isb/a}F(\frac{s}{a})$

Konvolusi dari dua fungsi g(t) dan fungsi f(t) di definisikan:

$$\boxed{(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x)\, dx}$$

Misal diberikan pasangan transformasi:

- $f(t) \to F(s)$
- $g(t) \to G(s)$
- $h(t) = (g * f)(t)$
- maka $h(t) = (g * f)(t) \leftrightarrow H(s) = G(s)F(s)$

Sifat aljabar dari konvolusi fungsi dan konvolusi transformasi:

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- $(fg) * (hk) \leftrightarrow (F * G)(H * K)$
- $(f + g)(h + k) \leftrightarrow (F + G) * (H + K)$
- $f(g * h) \leftrightarrow F * (GH)$

FUNGSI DASAR

1. **Fungi Impulse (Delta Dirac):** $f(t) = \delta(t)$
   Didefinisikan:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 \; untuk \; t \neq 0 \\ \infty \; untuk \; t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \; dt = 1 \end{cases}$$

   Bentuk impulse yang umum:
   $f(t) = k\delta(t - t_0)$
   Menyatakan:

   - Sinyal impulse yang terjadi di $t = t0$
   - Tingginya k
   - Luasnya k satuan

2. **Fungsi Unit Step** $f(t) = u(t)$
   Fungsi unit step didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } t < 0 \end{cases}$$

3. **Fungsi Ramp**
   Fungsi Ramp: $f(t) = tu(t)$ adalah fungsi terpotong dari $f(t) = t$

4. **Fungsi Eksponen**
   $f(t) = e^{at}$ dan bentuk terpotongnya: $f(t) = e^{at}u(t)$

5. **Fungsi Sinus dan bentuk terpotongnya**
   $f(t) = sin(at)$ dan $f(t) = sin(at)u(t)$

6. **Fungsi Kosinus dan bentuk terpotongnya**
   $f(t) = cos(at)$ dan $f(t) = cos(at)u(t)$

TABEL SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI FOURIER

No.	Nama Sifat	f(t)	F(iw)
1.	Impulse	$\delta(t)$	1
2a.	Satuan	1	$2\pi\delta(W)$
2a.	Unit Step	$u(t)$	$\frac{1}{iw} + \pi\delta(W)$
3.	Ramp	$t\ u(t)$	$-\frac{1}{w^2} + \pi\delta'(W)$
4.	Eksponen terpotong	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{iw - a}$
5a.	sinus	$\sin at$	$i\pi[\delta(w + a) - \delta(w - a)]$
5b.	sinus terpotong	$\sin at\ u(t)$	$\frac{a}{(iw)^2 + a^2}$
6a.	kosinus	$\cos at$	$\pi[\delta(w + a) + \delta(w - a)]$
6a.	kosinus terpotong	$\cos at\ u(t)$	$\frac{iw}{(iw)^2 + a^2}$

TABEL SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI FOURIER

No.	**Nama Sifat**	**f(t)**	**F(iw)**
1.	Linier	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(w) + bF_2(w)$
2.	Pengskalaan Waktu	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\Big(\frac{iw}{a}\Big)$
3.	Pergeseran Waktu	$f(t - t_0)$	$F(w - t_0)$
4.	Pergeseran Frekuensi	$e^{at} f(t)$	$F(iw - a)$
5.	Perkalian dengan t	$tf(t)$	$i \frac{dF(iw)}{dw}$
6.	Turunan waktu	$\frac{dt(t)}{dt}$	$(iw)F(iw)$
7.	Modulasi	$f(t) cos\ at$	$\frac{1}{2}[F(iw + a) + F(iw - a)]$
8.	Konvolusi	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(iw)F_2(w)$

FAST FOURIER TRANSFORM (FFT) PADA OFDM

Fast Fourier Transform (FFT) adalah sebuah algoritma yang digunakan untuk menghitung transformasi Fourier diskrit (DFT) dari suatu urutan data atau sinyal. Transformasi Fourier adalah sebuah teknik yang mengubah sinyal dari domain aslinya (seringkali waktu atau ruang) menjadi representasi dalam domain frekuensi. FFT mempercepat proses menghitung DFT dengan memfactorisasi matriks DFT menjadi produk faktor yang kosong (kebanyakan nol). Dengan demikian, FFT dapat mengurangi kompleksitas menghitung DFT dari $O(N^2)$ menjadi $O(NlogN)$, di mana N adalah ukuran data. FFT sangat berguna dalam berbagai aplikasi, termasuk pengolahan sinyal, pemrosesan citra, dan analisis spektrum frekuensi. Rumus FFT adalah sebagai berikut:

$$\boxed{FFT(x) = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi ikn/N}}$$

di mana:

- x_n adalah elemen ke-n dari urutan data x.
- X_k adalah transformasi Fourier dari x pada frekuensi k.
- N adalah ukuran urutan data x.
- i adalah bilangan imajiner ($i^2 = -1$).

FFT menghitung DFT dengan memecah urutan data ke dalam bagian-bagian yang lebih kecil dan menghitung DFT dari setiap bagian tersebut secara terpisah. Kemudian, hasil dari setiap bagian tersebut digabungkan kembali untuk menghitung DFT dari urutan data yang lebih besar. Dengan menggunakan FFT, DFT dapat dihitung dengan kompleksitas $O(NlogN)$ daripada $O(N^2)$ jika menggunakan definisi DFT secara langsung.

OFDM adalah sebuah teknik transmisi dengan banyak frekuensi (multicarrier), menggunakan Discrete Fourier Transfor (DFT). Bagan dasar dari OFDM ditampilkan pada. Cara kerjanya adalah sebagai berikut. Deretan data informasi yang akan dikirim dikonversikan kedalam bentuk parallel, sehingga bila bit rate semula adalah R , maka bit rate di tiap-tiap jalur parallel adalah R/M dimana M adalah jumlah jalur parallel (sama dengan jumlah sub-carrier). Setelah itu, modulasi dilakukan pada tiap-tiap sub-carrier. Modulasi ini bisa berupa BPSK, QPSK, QAM atau yang lain, tapi ketiga teknik tersebut sering digunakan pada OFDM. Kemudian sinyal yang telah termodulasi tersebut diaplikasikan ke dalam Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT), untuk pembuatan simbol OFDM. Penggunaan IDFT ini memungkinkan pengalokasian frekuensi yang saling tegak lurus (orthogonal), mengenai hal ini akan dijelaskan lebih lanjut. Setelah itu simbol-simbol OFDM dikonversikan lagi kedalam bentuk serial, dan kemudian sinyal dikirim. Sinyal yang terkirim tersebut, dalam persamaan matematik bisa diekspresikan sebagai berikut,

$$\boxed{s(t) = Re\Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n f(t - nT) e^{j(\omega_0 t + \psi)} \Big\}}$$

Dimana Re(.) adalah bagian real dari persamaan, f(t) adalah respons implus dari filter transmisi, T adalah periode simbol, v o adalah frekuensi pembawa (carrier frequency) dalam bentuk radian, j adalah fase pembawa (carrier phase), dan bn adalah data informasi yang telah termodulasi yang menjadi input dari IDFT.

Gambar 1. Bagan Dasar OFDM

Untuk mempermudah, maka pembahasan mengenai keadaan sinyal ketika melewai jalur komunikasi (channel) akan dibahas pada bagian lain.

Sedangkan pada stasiun penerima, dilakukan operasi yang berkebalikan dengan apa yang dilakukan di stasiun pengirim. Mulai dari konversi dari serial ke parallel, kemudian konversi sinyal parallel dengan Fast Fourier Transform (FFT), setelah itu demodulasi, konversi parallel ke serial, dan akhirnya kembali menjadi bentuk data informasi.

Apa yang dimaksud dengan Orthogonal ? Istilah orthogonal dalam Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) mengandung makna hubungan matematis antara frekuensi-frekuensi yang digunakan. Dengan persamaan matematika bisa diekspresikan sebagai berikut, dua buah kumpulan sinyal dikatakan orthogonal bila,

$$\boxed{\int_a^b \psi_p(t) * \psi_q(t) dt = 0}$$

untuk:

- $p \neq q$

$$\boxed{\int_a^b \psi_p(t) * \psi_q(t) dt = K}$$

untuk:

- $p = q$

Pemakaian frekuensi yang saling orthogonal pada OFDM memungkinkan overlap antar frekuensi tanpa menimbulkan interferensi satu sama lain. Ada beberapa kumpulan sinyal yang orthogonal, salah satunya yang cukup sering kita gunakan adalah sinyal sinus, sebagaimana diperlihatkan pada gambar.2.