

BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai $x + iy$, dimana x dan y adalah bilangan real (R) dan i adalah suatu bilangan imajiner dimana $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$.

Bilangan Kompleks biasanya ditulis dalam bentuk:

$$x = x + iy \tag{1}$$

dimana,

- x adalah bagian $Re(z)$, dan
- y adalah bagian $Im(z)$.

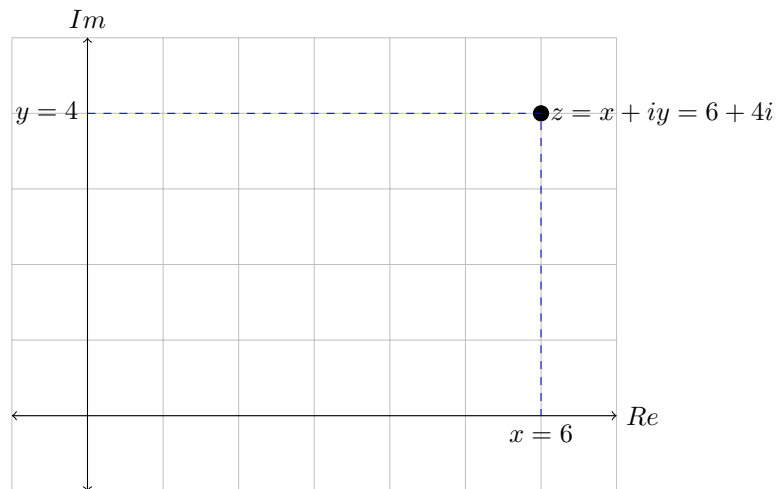
Contoh:

$$\begin{aligned} z &= 6 + \sqrt{-16} \\ &= 6 + \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= 6 + i \times 4 \\ &= 6 + 4i \end{aligned} \tag{2}$$

maka:

- $Re(z) = 6$, dan
- $Im(z) = 4$.

Notasi Bilangan Kompleks



Misal $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a \cdot z_1 &= a \cdot (x_1, y_1) \\ &= (ax_1, ay_1) \end{aligned} \tag{5}$$

Operasi Aritmatika Pada Bilangan Kompleks

1. Penjumlahan Bilangan Kompleks

Misalkan dua bilangan kompleks:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

- $z_1 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$
- $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$

Contoh:

$$2 + 5i = \frac{4}{2} + \frac{10}{2}i$$

- Jika $z_1 \neq z_2$ maka z_1 tidak dapat dibandingkan lebih besar atau lebih kecil dari z_2

2. Perkalian bilangan kompleks dengan skalar

Jika:

$$z_1 = (a + bi)$$

Maka:

$$k \cdot z_1 = k \cdot (a + bi) = ka + kbi$$

Contoh:

$$z_1 = 2 + 5i$$

$$k = 2$$

Jawab:

$$\begin{aligned} k \cdot z_1 &= 2 \cdot (2 + 5i) \\ &= 4 + 10i \end{aligned}$$

3. Perkalian dua bilangan kompleks

Jika:

$$\begin{aligned}z_1 &= a + bi \\z_2 &= c + di\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\&= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Contoh:

$$\begin{aligned}z_1 &= 1 + 2i \\z_2 &= 3 + 5i\end{aligned}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 + 5i) \\&= (3 - 10) + (5 + 6)i \\&= -7 + 11i\end{aligned}$$

4. Pembagian dua bilangan kompleks

Jika

$$\begin{aligned}z_1 &= a + bi \\z_2 &= c + di\end{aligned}$$

Maka $\frac{z_1}{z_2}$ menyatakan pembagian bilangan kompleks dengan pembilang z_1 dan penyebut z_2 . Penyebut dikalikan sekawannya $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{?}{z_2}$. Agar nilai semula tidak berubah, maka pembilang juga harus dikalikan dengan bilangan yang sama: $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$. Sekarang pembilang bernilai riil dan pembagian dapat dilakukan.

Contoh:

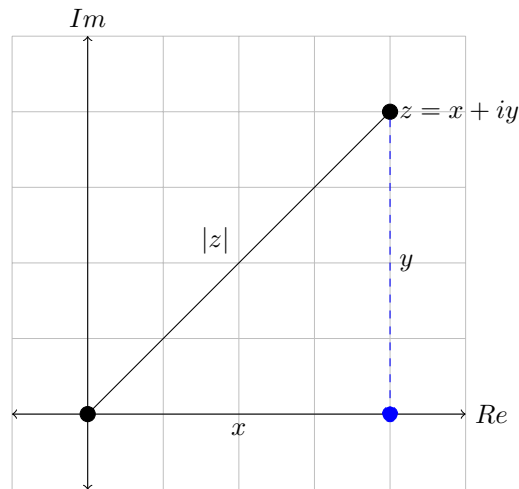
$$\begin{aligned}z_1 &= 1 + 2i \\z_2 &= 2 + 3i\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \\&= \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\&= \frac{(2 + 6) + (-3 + 4)i}{2^2 + 3^2} \\&= \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i\end{aligned}$$

Modulus Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai bilangan real tidak negatif yang merupakan panjang vektor posisi dari z (jarak antara z dengan pusat sumbu).



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (7)$$

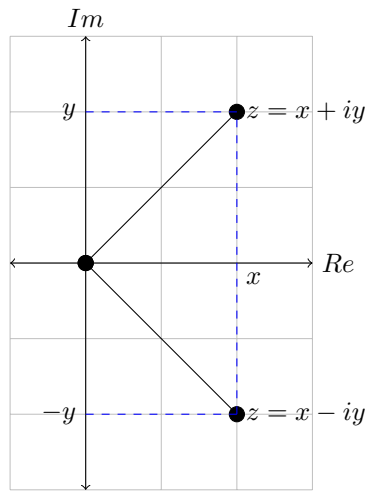
Sifat Modulus

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (8)$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (9)$$

Sekawan/*Konjugate* Bilangan Kompleks

Misalkan $z = x + iy$, sekawan dari z (notasi = \bar{z}) adalah pencerminan dari z terhadap sumbu real (R).



Sifat Sekawan/*Konjugate*:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

- $|z| = \bar{z}$

- $\bar{z}\bar{z} = |z|^2$

- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Representasi Polar

Misalkan r dan θ adalah koordinat polar dari titik (x, y) bilangan kompleks bukan nol $z = x + iy$. Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka bilangan Kompleks z dapat ditulis dalam bentuk polar:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (10)$$

$$z = r\angle\theta \quad (11)$$

dengan,

- r adalah modulus dari z :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- θ adalah argumen dari z :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\frac{b}{a} \\ &= \tan^{-1}\frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5(\cos 53,1^\circ + \sin 53,1^\circ) \\ &= 5\angle 53,1^\circ \end{aligned} \quad (12)$$

Representasi Euler

Notasi matematis formal adalah bentuk Euler:

$$z = re^{i\theta} \quad (13)$$

Identitas Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (14)$$

Contoh:

$$z = 3 + 4i$$

Modulus:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Argumen:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{b}{a} \\ &= \tan^{-1} \frac{4}{3} \\ &= 53,1^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i \\ &= 5e^{i53,1^\circ} \\ 5e^{i53,1^\circ} &= 5(\cos 53,1^\circ + i\sin 53,1^\circ) \end{aligned}$$

Perkalian dan Pangkat Bentuk Exponen

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
 &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\cos(\theta_1 + \theta_2)) \\
 &= e^{i(\theta_1+\theta_2)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Maka, jika $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, produk z_1z_2 memiliki bentuk eksponensial:

$$\begin{aligned}
 z_1z_2 &= r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} \\
 &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\
 &= (r_1r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} \cdot \frac{e^{-i\theta_2}}{e^{-i\theta_2}} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i0}} \\
 &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 z^{-1} &= \frac{1}{z} \\
 &= \frac{1e^{i0}}{re^{i\theta}} \\
 &= \frac{1}{r}e^{i(0-\theta)} \\
 &= \frac{1}{r}e^{-i\theta}
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{19}$$

Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks $f(z)$ menyatakan pemetaan dari bidang kompleks asal z (domain) ke bidang kompleks hasil w (range) dengan suatu pola yang diatur oleh $f(z)$.

Contoh (titik ke titik):

$$\begin{aligned}f(z) &= 2z + 1 \\&= 2(x + iy) + 1 \\&= 2x + 2iy + 1 \\&= (2x + 1) + 2iy\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}Re(z) &= u(x, y) = 2x + 1 \\Im(z) &= v(x, y) = 2y\end{aligned}$$

Contoh (lintasan ke lintasan):

$$\begin{aligned}f(z) &= \bar{z} \\&= x - iy\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}Re(z) &= u(x, y) = x \\Im(z) &= v(x, y) = -y\end{aligned}$$

Contoh (daerah ke daerah):

$$\begin{aligned}f(z) &= z + 1 \\D : |z| &< 1 \\f(z) &= z + 1 \\w &= z + 1 \\z &= w - 1 \\|w - 1| &< 1\end{aligned}\tag{22}$$

Titik Singular

Titik dimana $f(z)$ gagal dipetakan ke titik lain. Contoh pada fungsi $f(z) = \frac{1}{z+1}$ gagal dipetakan pada titik asal $z = 1$ karena $\frac{0}{0}$ tidak terdefinisi.

Limit Fungsi Kompleks

Konsep limit pada fungsi kompleks $f(z)$ diperluas dari limit pada fungsi real $f(x)$ sebagai: Pada fungsi kompleks $f(z)$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ bernilai L atau

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \quad (23)$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika ada ϵ yang memenuhi $|f(z) - L| \leq \epsilon$, maka terilustrasi:

- $|z - z_0| \leq \delta$ adalah disk dengan pusat di z_0 dan jari-jari δ
- $|f(z) - L| \leq \epsilon$ adalah disk dengan pusat di L dan jari-jari ϵ

Turunan Fungsi Kompleks

Perhitungan turunan $f(z)$ dapat melihat dari kemungkinan notasi $f(z)$:

- $f(z)$ dinyatakan secara eksplisit peubah z .
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$
- $f(z)$ dinyatakan : $f(z) = U(i, \theta) + iV(i, \theta)$

$f(z)$ dinyatakan $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ dapat diturunkan di $z_0 = x_0 + iy_0$ bila berlaku **Persamaan Cauchy Riemann (PCR)**:

$$\begin{aligned} Ux(x_0 + y_0) &= Vy(x_0 + y_0) \\ Uy(x_0 + y_0) &= -Vx(x_0 + y_0) \end{aligned}$$

$$f(z_0) = Ux(x_0 + y_0) + iVy(x_0 + y_0) \quad (24)$$

Contoh:

Apakah $f(z) = e^x \cdot e^{iy}$ memiliki turunan di titik $z_o = 1 + i$?

Jawab:

$f'(1 + i)$ ada jika:

$$\begin{aligned} Ux(1 + i) &= Vy(1 + i) \\ Uy(1 + i) &= -Vx(1 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ux(x, y) &= e^x \cos y \\ Uy(x, y) &= e^x (-\sin y) \\ &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

$U(x, y)$ dan $V(x, y)$ memenuhi Persamaan Cauchy Riemann (PCR). Jadi $f'(1 + i)$ ada:

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= f'(1, 1) \\ &= e' \cos 1 + ie' \sin 1 \end{aligned}$$

$f(z)$ dinyatakan sebagai $f(z) = U(i, \theta) + iV(i, \theta)$
PCR dalam koordinat polar:

$$\begin{aligned} Ur &= \frac{1}{r} V\theta \\ \frac{1}{r} U\theta &= -Vr \end{aligned}$$

Turunan dari $f(z)$ dinyatakan :

$$f'(z) = e^{-i\theta}(Ur + iVr) \quad (25)$$

Metode Milne-Thomson

Jika fungsi terurai $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ differentiable atau holomorfik, maka $f(x+iy)$ dapat dijadikan bentuk kompak $f(z)$.

- Tentukan $f'(x+iy)$ yaitu $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$
- Ditinjau suku $\frac{\partial u}{\partial x}$
- Substitusi $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow f'(z), x \rightarrow z$ dan $y \rightarrow 0$
- Selesaikan $f'(z)$ untuk memperoleh $f(z)$
- Cari konstanta c pada $f(z)$ dengan substitusi $z = x + iy$ pada $f(z)$ dan membandingkannya dengan $f(x+iy)$ semula.

Contoh:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & v_x &= e^x \sin y \\ u_y &= -e^x \sin y & v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= v_x \\ u_y &= -v_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

$u_x = e^x \cos y \rightarrow$ ganti x dengan z
 y dengan 0

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z \cos 0 \\ &= e^z \rightarrow f(z) = e^z \end{aligned}$$

Aturan penurunan pada fungsi riil berlaku pada fungsi kompleks. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah dua fungsi kompleks, maka:

- penjumlahan

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z) \quad (26)$$

- perkalian skalar

$$\frac{d}{dz}(kf(z)) = kf'(z) \quad (27)$$

- aturan rantai

$$\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z) \quad (28)$$

- aturan perkalian

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + g'(z)f(z) \quad (29)$$

- aturan pembagian

$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)} \quad (30)$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Syarat terpenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR):

Diketahui:

$$f(x, y) = x + iy$$

Memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR), jika:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (31)$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (32)$$

dimana:

- U adalah bagian $Re f(x, y)$, dan
- V adalah bagian $Im f(x, y)$.

Jika PCR tidak terpenuhi maka $f(x, y)$ tidak differentiable, atau $f'(x, y)$ tidak ada.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$

$$\begin{aligned} U_x &= 2x & V_x &= 2y \\ U_y &= -2y & V_y &= 2x \end{aligned}$$

PCR terpenuhi

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= U_x + iV_x \\ &= 2x + i2y \\ &= 2(x + iy) \end{aligned}$$

Jika dilakukan pada bentuk kompak:

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 - y^2 + i2xy \\ f(z) &= z^2 \\ f'(x + iy) &= 2(x + iy) \\ f'(z) &= 2z \end{aligned}$$

Fungsi Harmonik

Misalkan $u(x, y)$ adalah fungsi 2 peubah $u(x, y)$ dikatakan fungsi harmonik jika $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Buktikan bahwa $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x$ adalah harmonik?

$$\begin{aligned}u_x &= 6x - 0 + 2 & u_y &= -6y \\u_{xx} &= 6 & u_{yy} &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 6 + (-6) \\&= 0 \\&\text{(harmonik)}\end{aligned}$$

Contoh:

$H(x, y) = 2x^3 - kyx^2$ tentukan nilai k sehingga $H(x, y)$ menjadi fungsi harmonik

$$\begin{aligned}H_x &= 6x^2 - ky^2 & H_y &= 0 - 2kxy \\H_{xx} &= 12x & H_{yy} &= -2kx\end{aligned}$$

Agar harmonik

$$\begin{aligned}H_{xx} + H_{yy} &= 0 \\12x + (-2kx) &= 0 \\12 - 2k &= 0 \\-2k &= -12 \\k &= 6\end{aligned}$$

Fungsi Analitik

Fungsi $f(z)$ disebut analitik pada D (himpunan buka) bila $f'(z)$ ada untuk $z \in D$ atau $f(z)$. Berlaku PCR untuk $z \in D$.

- **Differentiable** \rightarrow Fungsi $f(z)$ dikatakan terdifferentiable di $z = z_0$ jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$.
- **Analitik** \rightarrow Fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada suatu titik z jika $f'(z)$ ada untuk $z = z_0$ dan sekitarnya.

Contoh:

Periksa apakah $f(z)$ fungsi analitik pada D .

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 2}$$
$$D = |z + 1| < 1$$

$$f'(z) = \frac{g'h - h'g}{h^2}$$
$$g = z^2 + 1$$
$$h = z - 2$$

$f(z)$ tidak ada $\rightarrow f'(z)$ tidak ada.

$$z + 1 < 1$$
$$z - (-1) < 1$$
$$z - z_0 < r$$

Himpunan z yang jaraknya terhadap z_0 kurang dari r .

Misal $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ pada D dan berlaku PCR maka $v(x, y)$ disebut konjugate (sekawan) harmonik dari $u(x, y)$ atau sebaliknya.

- $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ masing-masing punya fungsi harmonik.
- $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

Sekawan Harmonik

PCR digunakan untuk mencari Sekawan Harmonik.

Misal:

$$f(x + iy) = xy + iV(x, y)$$

Tentukan $V(x, y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$.

Jawab:

$$\begin{array}{ll} U_x = y & U_y = x \\ U_{xx} = 0 & U_{yy} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{array}$$

Terbukti Harmonik.

$$\begin{array}{ll} U_x = y & U_y = x \\ V_x = \frac{\partial V}{\partial x} & V_y = \frac{\partial V}{\partial y} \end{array}$$

PCR Syarat 1:

$$\begin{array}{l} U_x = V_y \\ y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ V = \frac{1}{2}y^2 + g(x) \end{array}$$

Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$$

PCR Syarat 2:

$$\begin{array}{l} U_y = -V_x \\ x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ x = g'(x) \end{array}$$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Sehingga:

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$$

dengan c suatu konstanta.

Integral Kompleks

Lintasan 1

Misal $z(t) : 1 \rightarrow C$ merupakan fungsi kompleks dengan domain real, $1 = [a, b]$, maka fungsi $z(t)$ dinyatakan:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + iy(t) \\ a &\leq t \leq b \end{aligned}$$

$z(t)$ merupakan lintasan dari A ke B . Rotasi : Z

Contoh:

Gambarkan lintasan C untuk $-1 \leq t \leq 1$ yang dinyatakan

$$\begin{aligned} z(t) &= t + it^2 \\ x(t) &= t \rightarrow y = x^2 \\ y(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Lintasan 2

Turunan 2 integral dari persamaan lintasan dinyatakan sebagai berikut:
 $z(t) = x(t) + iy(t); a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= z'(t) \\ \frac{dz}{dt} &= x'(t) + iy'(t) \\ \int_a^b z(t) dt &= \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt \end{aligned}$$

Contoh:

Hitung turunan dan integral dari persamaan lintasan berikut:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + it^2 \\ -1 &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z'(t) &= 1 + 2it \\
\int_{-1}^1 t(t) dt &= \int_{-1}^1 [t + it^2] dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{i}{3}t^3 \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{3}i
\end{aligned}$$

Jenis Lintasan:

1. Lintasan buka : Bila ujung lintasan tidak berimpit
2. Lintasan tutup : Bila ujung lintasan berimpit (Sederhana & tidak sederhana)

Integral Lintasan:

Integral dari fungsi kompleks $f(z)$ atas lintasan C disebut integral lintasan atau integral garis atau integral contour dan dinyatakan:

Integral tergantung lintasan 1:

1. Nyatakan lintasan C dalam $z(t) = t + it^2; -1 \leq t \leq 1$
2. Cari turunan $z(t)z'(t)$
3. Substitusi fungsi $f(z)$ terhadap fungsi $z(t)f[z(t)]$
4. Integrasikan $f[z(t)]z'(t)$ terhadap t

Titik Interior:

Titik to disebut titik interior dari lintasan tutup C bila terdapat lingkungan dari to yang termuat di dalam C .

Lintasan tutup C arah positif : bila berjalan menyusuri lintasan maka daerah yang dilingkupi oleh C terletak disebelah kiri.

Integral Cauchy

Misal lintasan C tutup dengan arah berlawanan jarum jam (arah positif), z_0 : interior dari C dan $f(z)$ analitik pada daerah yang dilingkupi oleh C maka integral cauchy:

Jika:

1. C lintasan tutup arah (t)
2. $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$, $f(z)$ analitik di lintasan C
3. z_0 titik interior dari limit C

Maka:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dt = 2\pi i f(z_0)$$