Министерство образования Республики Беларусь

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

Кафедра информатики

О.И. Костюкова

Тестовые задачи

по курсу «Системный анализ и исследование операций»

Минск 2016

Содержание

1. Двойственный метод решения задач линейного программирования с двухсторонними ограничениями

Пример. Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$c'x \to max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, n = 6, \quad m = 3,$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}', \; d_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}'.$$

Решим данную задачу двойственным методом. В качестве начального базиса возьмем множество индексов $J_Б = \{j_1, j_2, j_3\} = \{4,5,6\}$. Ему соответствует базисная матрица $A_Б = (A_j, j \in J_Б) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицу, обратную к базисной, обозначим через B: $B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итерация 1.

1. Найдем m-вектор

$$y' := c'_Б B = (3,-2,-4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-4,3,-2).$$

и оценки

$$\Delta_j := y' A_j - c_j, \quad j \in J;$$

$$\Delta_1 = y'A_1 - c_1 = -8, \quad \Delta_2 = y'A_2 - c_2 = -8, \quad \Delta_3 = y'A_3 - c_3 = 7,$$

$$\Delta_4 := y'A_4 - c_4 = 0, \quad \Delta_5 = y'A_5 - c_5 = 0, \quad \Delta_6 = y'A_6 - c_6 = 0.$$

сформируем множества

$$J_H = J \backslash J_Б; \quad J_H^+ = \{j \in J_H : \Delta_j \ge 0\} = \{3\}, \quad J_H^- = J_H \setminus J_H^+ = \{1,2\}.$$

2. Построим вектор $\aleph = (\aleph_j, j \in J)$ по следующему правилу:

$$\aleph_j = d_{*j}, \quad j \in J_H^+; \quad \aleph_j = d_j^*, \quad j \in J_H^-;$$

$$\aleph_Б = (\aleph_j, j \in J_Б) = B(b - \sum_{j \in J_H^+ \cup J_H^-} A_j \aleph_j). \qquad (д1)$$

В результате получим $\aleph = (\aleph_1 = 2,\ \aleph_2 = 4,\ \aleph_3 = 2,\ \aleph_4 = 1, \aleph_5 = -4, \aleph_6 = -4)$.

3. Проверяем, выполняются ли соотношения (критерий оптимальности)

$$d_{*j} \le \aleph_j \le d_j^*,\ j \in J_Б.$$

Для построенного псевдоплана эти соотношения не выполняются. Поэтому переходим к следующему шагу.

4. Найдем такой индекс $j_k \in J_Б$, что $\aleph_{j_k} \notin [d_{*j_k}, d_{j_k}^*]$. На данной итерации в качестве такого индекса можно взять индекс

$j_k = j_2 = 5.$

5. Поскольку $\aleph_{j_2} = -4 < d_{*j_2} = -1,$ то полагаем $\mu_{j_2} = 1$.

Подсчитаем m-вектор

$$\Delta y' = \mu_{j_2} e_2' B = (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1)$$

и числа $\mu_j = \Delta y' A_j,\ j \in J$:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \mu_3 = 0,\ \mu_4 = 0,\ \mu_5 = 1,\ \mu_6 = 0.$$

6. Найдем шаги $\sigma_j,\ j \in J_H = J_H^+ \cup J_H^-$ по правилу:

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j / \mu_j, \text{ если } j \in J_H^+ \text{ и } \mu_j < 0 \text{ либо } j \in J_H^- \text{ и } \mu_j > 0; \\ \\ \infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В результате получим $\sigma_1 = \infty, \sigma_2 = 8,\ \sigma_3 = \infty.$

Положим $\sigma_0 = \min_{j \in J_H} \sigma_j = \sigma_{j_*} = \sigma_2 = 8$. Здесь $j_* = 2 \in J_H$ --- индекс, на котором достигается минимум в последнем выражении. Поскольку $\sigma_0 < \infty$, идем на шаг 7.

7. Построим новый коплан $\overline{\Delta} = (\overline{\Delta}_j, j \in J)$ по правилу:

$$\overline{\Delta}_j = \Delta_j + \sigma_0 \mu_j, \quad j \in J.$$

В результате получим $\bar{\Delta}_1 = -8,\ \bar{\Delta}_2 = 0,\ \bar{\Delta}_3 = 7,\ \bar{\Delta}_4 = 0,\ \bar{\Delta}_5 = 8, \bar{\Delta}_6 = 0.$

8. Построим новый базис $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_k) \cup j_* = \{4,2,6\}$, соответствующую ему базисную матрицу

$$\bar{A}_Б = (A_j, j \in \bar{J}_Б) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и обратную матрицу $\bar{B} = (\bar{A}_Б)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

9. Построим новые множества $\bar{J}_H$, $\bar{J}_H^-$ и $\bar{J}_H^+$:

$$\bar{J}_H = J \setminus \bar{J}_Б;$$
$$\bar{J}_H^+ = (J_H^+ \setminus j_*) \cup j_k, \text{ если } \mu_{j_k} = 1,\ j_* \in J_H^+;$$
$$\bar{J}_H^+ = (J_H^+ \setminus j_*), \text{ если } \mu_{j_k} = -1,\ j_* \in J_H^+; \qquad (д3)$$
$$\bar{J}_H^+ = (J_H^+ \cup j_k), \text{ если } \mu_{j_k} = 1,\ j_* \notin J_H^+;$$
$$\bar{J}_H^+ = J_H^+, \text{ если } \mu_{j_k} = -1,\ j_* \notin J_H^+;$$
$$\bar{J}_H^- = \bar{J}_H \setminus \bar{J}_H^+.$$

В результате получим $\bar{J}_H = \{1,3,5\}, \bar{J}_H^+ = \{3,5\}, \bar{J}_H^- = \{1\}$.
Идем на шаг 2 следующей итерации, используя новые базис $\bar{J}_Б$, коплан $\bar{\Delta}$, базисную матрицу $\bar{A}_Б$ и обратную к ней матрицу $\bar{B}$.

Итерация 2.

2. Построим вектор $\aleph = (\aleph_j, j \in J)$ по следующему правилу:

$$\aleph_j = d_{*j}, \quad j \in \bar{J}_H^+; \quad \aleph_j = d_j^*, \quad j \in \bar{J}_H^-;$$
$$\aleph_Б = (\aleph_j, j \in \bar{J}_Б) = B(b - \sum_{j \in \bar{J}_H^+ \cup \bar{J}_H^-} A_j \aleph_j).$$

Получим $\aleph = (\aleph_1 = 2, \aleph_2 = 1,\ \aleph_3 = 2,\ \aleph_4 = 1, \aleph_5 = -1,\ \aleph_6 = -2).$

3. Проверяем, выполняются ли соотношения (критерий оптимальности)

$$d_{*j} \le \aleph_j \le d_j^*,\ j \in \bar{J}_Б.$$

Для построенного псевдоплана эти соотношения не выполняются. Поэтому переходим к следующему шагу.

4. Найдем такой индекс $j_k \in J_Б$, что $\aleph_{j_k} \notin [d_{*j_k}, d_{j_k}^*]$. На данной итерации в качестве такого индекса можно взять индекс

$j_k = j_3 = 6.$

5. Поскольку $\aleph_{j_3} = \aleph_6 = -2 < d_{*j_3} = 0$, то полагаем $\mu_{j_3} = 1$.
Подсчитаем m-вектор

$$\Delta y' = \mu_{j_3} e_3' B = (0,0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,0,-1)$$

и числа $\mu_j = \Delta y' A_j,\ j \in J$:

$\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = -1,\ \mu_4 = 0,\ \mu_5 = -1,\ \mu_6 = 1.$

6. Найдем шаги $\sigma_j,\ j \in J_H = J_H^+ \cup J_H^-$ по правилу:

$$\sigma_j = \begin{cases} -\bar{\Delta}_j / \mu_j, \text{ если } j \in \bar{J}_H^+ \text{ и } \mu_j < 0 \text{ либо } j \in \bar{J}_H^- \text{ и } \mu_j > 0; \\ \infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В результате получим $\sigma_1 = 8/2 = 4,\ \sigma_3 = 7/1 = 7,\ \sigma_5 = 8/1 = 8.$
Положим $\sigma_0 = \min\limits_{j \in \bar{J}_H} \sigma_j = \sigma_{j_*} = \sigma_1 = 4$. Здесь $j_* = 1 \in \bar{J}_H$ --- индекс, на котором достигается минимум в последнем выражении. Поскольку $\sigma_0 < \infty$, идем на шаг 7.

7. Построим новый коплан $\bar{\bar{\Delta}} = (\bar{\bar{\Delta}}_j, j \in J)$ по правилу:

$$\bar{\bar{\Delta}}_j = \bar{\Delta}_j + \sigma_0 \mu_j, \quad j \in J.$$

В результате получим $\bar{\bar{\Delta}}_1 = 0,\ \bar{\bar{\Delta}}_2 = 0,\ \bar{\bar{\Delta}}_3 = 3,\ \bar{\bar{\Delta}}_4 = 0,\ \bar{\bar{\Delta}}_5 = 4,\ \bar{\bar{\Delta}}_6 = 4.$

8. Построим новый базис $\bar{\bar{J}}_Б = (\bar{J}_Б \setminus j_k) \cup j_* = \{1,2,6\}$, соответствующую ему базисную матрицу

$$\bar{\bar{A}}_Б = (A_j, j \in \bar{\bar{J}}_Б) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и обратную матрицу } \bar{\bar{B}} = (\bar{\bar{A}}_Б)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Построим новые множества $\bar{\bar{J}}_H$, $\bar{\bar{J}}_H^-$ и $\bar{\bar{J}}_H^+$ по правилам, аналогичным (д3). В результате получим $\bar{\bar{J}}_H = \{3,5,6\}$, $\bar{\bar{J}}_H^+ = \{3,5,6\}$, $\bar{\bar{J}}_H^- = \varnothing$.
Идем на шаг 2 следующей итерации, используя новые базис $\bar{\bar{J}}_Б$, коплан $\bar{\bar{\Delta}}$, базисную матрицу $\bar{\bar{A}}_Б$ и обратную к ней матрицу $\bar{\bar{B}}$.

Итерация 3.

2. Построим вектор $\aleph = (\aleph_j, j \in J)$ по следующему правилу:

$$\aleph_j = d_{*j}, \quad j \in \overline{\overline{J}}_H^+; \quad \aleph_j = d_j^*, \quad j \in \overline{\overline{J}}_H^-;$$

$$\aleph_Б = (\aleph_j, j \in \overline{\overline{J}}_Б) = B(b - \sum_{j \in \overline{\overline{J}}_H^+ \cup \overline{\overline{J}}_H^-} A_j \aleph_j).$$

Получим $\aleph = (\aleph_1 = 3/2, \aleph_2 = 1, \aleph_3 = 2, \aleph_4 = 3/2, \aleph_5 = -1, \aleph_6 = 0).$

3. Для построенного псевдоплана выполняются соотношения (критерий оптимальности)

$$d_{*j} \le \aleph_j \le d_j^*, \; j \in \overline{J}_Б.$$

Следовательно, этот псевдоплан является оптимальным планом исходной задачи линейного программирования.

Ответ: $x^0 = (x_1^0 = 3/2, x_2^0 = 1, x_3^0 = 2, x_4^0 = 3/2, x_5^0 = -1, x_6^0 = 0)$, $c'x^0 = 13$.

Задачи.

Решить задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*$$

двойственным методом.

Задача 1.

Матрица A:

1 -5 3 1 0 0
4 -1 1 0 1 0
2 4 2 0 0 1

Вектор b:

-7
22
30

Вектор c:

7 -2 6 0 5 2

Вектор d_*:

2 1 0 0 1 1

Вектор d^*:

6 6 5 2 4 6

Ответ:
Оптимальный план $x^0 = (5, \; 3, \; 1, \; 0, \; 4, \; 6)'$. Значение целевой функции: 67

Задача 2.

Матрица A:

1 0 2 2 -3 3
0 1 0 -1 0 1
1 0 1 3 2 1

Вектор b:

15
0
13

Вектор c:	Вектор d_*:	Вектор d^*:
3 0.5 4 4 1 5	0 0 0 0 0 0	3 5 4 3 3 4

Ответ:

Оптимальный план $x^0 = (3,\ 0,\ 4,\ 1.1818,\ 0.6364,\ 1.1818)'$. Значение целевой функции: 36.2727.

Задача 3.

Матрица A:								Вектор b:
1	0	0	12	1	-3	4	-1	40
0	1	0	11	12	3	5	3	107
0	0	1	1	0	22	-2	1	61

Вектор c:	Вектор d_*:	Вектор d^*:
2 1 -2 -1 4 -5 5 5	0 0 0 0 0 0 0 0	3 5 5 3 4 5 6 3

Ответ:

Оптимальный план $x^0 = (3,\ 5,\ 0,\ 1.8779,\ 2.7545,\ 3.0965,\ 6,\ 3)'$. Значение целевой функции: 49.6577.

Задача 4.

Матрица A:									Вектор b:
1	-3	2	0	1	-1	4	-1	0	3
1	-1	6	1	0	-2	2	2	0	9
2	2	-1	1	0	-3	8	-1	1	9
4	1	0	0	1	-1	0	-1	1	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

Вектор c:	Вектор d_*:	Вектор d^*:
-1 5 -2 4 3 1 2 8 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0	5 5 5 5 5 5 5 5 5

Ответ:

Оптимальный план $x^0 = (1.1579,\ 0.6942,\ 0,\ 0,\ 2.8797,\ 0,\ 1.0627,\ 3.2055,\ 0)'$.

Значение целевой функции: 38.7218

Задача 5.

Матрица A:

1	7	2	0	1	-1	4
0	5	6	1	0	-3	-2
3	2	2	1	1	1	5

Вектор b:

1
4
7

Вектор c:

1 2 1 -3 3 1 0

Вектор d_*:

-1 1 -2 0 1 2 4

Вектор d^*:

3 2 2 5 3 4 5

Ответ:

задача не имеет решения, т.к. в ней множество допустимых планов пусто.

Задача 6.

Матрица A:

2	-1	1	0	0	-1	3
0	4	-1	2	3	-2	2
3	1	0	1	0	1	4

Вектор b:

1.5
9
2

Вектор c:

0 1 2 1 -3 4 7

Вектор d_*:

0 0 -3 0 -1 1 0

Вектор d^*:

3 3 4 7 5 3 2

Ответ:

Оптимальный план $x^0 = (0, \quad 1, \quad 3.5, \quad 0, \quad 3.5, \quad 1, \quad 0)'$. Значение целевой функции: **1.5.**

Задача 7.

Матрица A:

2	1	0	3	-1	-1
0	1	-2	1	0	3
3	0	1	1	1	1

Вектор b:

2
2
5

Вектор c: 0 -1 1 0 4 3

Вектор d_*: 2 0 -1 -3 2 1

Вектор d^*: 7 3 2 3 4 5

Ответ:

задача не имеет решения, т.к. в ней множество допустимых планов пусто.

Задача 8.

Матрица A:

1	3	1	-1	0	-3	2	1
2	1	3	-1	1	4	1	1
-1	0	2	-2	2	1	1	1

Вектор b:

4
12
4

Вектор c: 2 -1 2 3 -2 3 4 1

Вектор d_*: -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

Вектор d^*: 2 3 1 4 3 2 4 4

Ответ:

Оптимальный план $x^0 = ($-1, 0.4074, 1, 4, -0.3704, 1.7407, 4, 4)'.

Значение целевой функции: 37. 5556.

2. Линейные задачи целочисленного программирования. Метод ветвей и границ

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу ЦЛП:

$$7x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 5x_5 + 2x_6 \to \max$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = -8$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 22$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 30$$
$$d_* \le x_j \le d^*, j = \overline{1,6}$$

$$d_* = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}6 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}'$$

$$x_j - \text{целое}, \; j = \overline{1,6}$$

Положим $r = -\infty$. В список задач включим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования о целочисленности компонент плана.

Итерация 1.

Список состоит из одной задачи – задачи №1

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*.$$

Решаем эту задачу. Она имеет решение:

$$x^0 = \begin{pmatrix}5.077 & 3.077 & 0,769 & 0 & 4 & 6\end{pmatrix}', \; c'x^0 = 66.$$

Так как решение задачи №1 нецелочисленное и $c'x^0 = 66 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_1 для ветвления, т.е. $j_0 = 1$. Задачу №1 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

задача №2: $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$$d_* = \begin{pmatrix}6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}6 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}',$$

задача №3: $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$$d_* = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}5 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}'.$$

Идем на следующую итерацию.

Итерация 2.

Список состоит из задач №2 и №3. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №2:</u>

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №2 имеет вид: $x^0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $c'x^0 = 53$.

Так как решение задачи №2 целочисленное и $c'x^0 = 53 > r = -\infty$, то полагаем $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}'$ и $r = c'x^0 = 53$. Задачу №2 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 3.

Список состоит из <u>задачи №3</u>

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*, \; d_* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}',$$

$$d^* = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Задачи №3 имеет следующее решение:

$x^0 = (5 \quad 3.5 \quad 1.5 \quad 0 \quad 4 \quad 3)'$, $c'x^0 = 63$.

Так как решение задачи №3 нецелочисленное и $c'x^0 = 63 > r = 53$, то выберем нецелочисленную переменную x_2 для ветвления, т.е. $j_0 = 2$. Задачу №3 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №4</u>: $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$,

<u>задача №5</u>: $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$.

Идем на следующую итерацию.

Итерация 4.

Список состоит из задач №4 и №5. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №4

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №4: ограничения этой задачи несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №4 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 5.

Список состоит из задачи №5

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

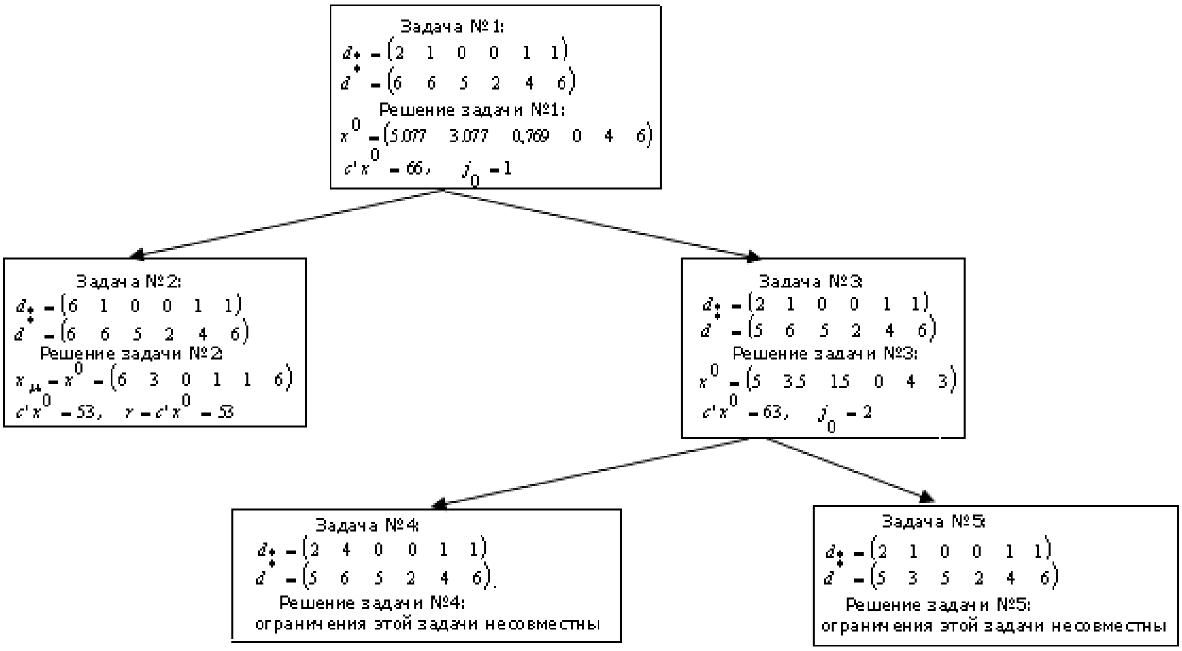
$$d_* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №5: ограничения этой задачи несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №5 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 6.

На новой итерации список пуст. Алгоритм заканчивает работу. Вектор $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}'$ является решением исходной задачи целочисленного программирования.

Ход решения задачи схематично можно представить в виде дерева:



Пример 2. Рассмотрим задачу ЦЛП:

$$7x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 5x_5 + 2x_6 \to \max$$

$$x_1 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$-x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 8$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 10$$

$$d_* \le x_j \le d^*,\ x_j - \text{целое},\ \ j = \overline{1,6},$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',\ d^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Положим $r = -\infty$. В список задач включим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования о целочисленности компонент плана.

Итерация 1.

Список состоит из одной задачи – задачи №1

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^* .$$

Решаем эту задачу. Она имеет решение: $x^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2.333 & 2.333 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}'$,

$c'x^0 = 54.333$.

Так как решение задачи №1 нецелочисленное и $c'x^0 = 54.333 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_2 для ветвления, т.е $j_0 = 2$. Задачу №1 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №2:</u> $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$,

<u>задача №3:</u> $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$.

Идем на следующую итерацию.

Итерация 2.

Список состоит из задач №2 и №3. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №2</u>

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = (3 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 6)'.$$

Решаем ее. Решение задачи №2: $x^0 = (2.4 \quad 2 \quad 2.533 \quad 0 \quad 4 \quad 1.733)'$,

$c'x^0 = 51.467$.

Так как решение задачи №2 нецелочисленное и $c'x^0 = 51.467 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_1 для ветвления, т.е. $j_0 = 1$. Задачу №2 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №4</u>: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$,

<u>задача №5</u>: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$.

Идем на следующую итерацию.

Итерация 3.

Список состоит из задач №3, №4 и №5. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №3</u>

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix}0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}3 & 3 & 6 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}'.$$

В результате решения этой задачи устанавливаем, что ее ограничения несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №3 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 4.

Список состоит из задач №4 и №5. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №4</u>

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №4: $x^0 = \begin{pmatrix}2 & 1.778 & 2.667 & 0 & 4 & 1.556\end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 49.556$.

Так как решение задачи №4 нецелочисленное и $c'x^0 = 49.556 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_2 для ветвления, т.е. $j_0 = 2$. Задачу №4 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №6</u>: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}',$$

<u>задача №7</u>: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix}2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}'.$$

Идем на следующую итерацию.

Итерация 5.

Список состоит из задач №5, №6 и №7. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №5</u>:

$$c'x \to \max,\ \ Ax = b,\ \ d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',\ d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №5: $x^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2.333 & 0 & 1 & 3.333 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 42.667$.

Так как решение задачи №5 нецелочисленное и $c'x^0 = 42.667 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_3 для ветвления, т.е. $j_0 = 3$. Задачу №5 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №8</u>: $c'x \to \max,\quad Ax = b,\quad d_* \le x \le d^*,$

$d_* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',\ d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}',$

<u>задача №9</u>: $c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,\ d_* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',$

$d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$

Идем на следующую итерацию.

Итерация 6.

Список состоит из задач №6, №7, №8 и №9. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №6</u>:

$$c'x \to \max,\ \ Ax = b,\ \ d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',\ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №6: $x^0 = \begin{pmatrix} 0.625 & 1 & 3.125 & 0 & 3.875 & 1 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 42.5$.

Так как решение задачи №6 нецелочисленное и $c'x^0 = 42.5 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_1 для ветвления, т.е. $j_0 = 1$. Задачу №6 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №10</u>: $c'x \to \max,\quad Ax = b,\ \ d_* \le x \le d^*,$

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}',\ d^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}',$

задача №11: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \ d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$.

Идем на следующую итерацию.

Итерация 7.

Список состоит из задач №7, №8, №9, №10 и №11. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №7:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \ d_* \le x \le d^* ,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №7: $x^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2.333 & 1 & 4 & 3.333 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 46.667$.

Так как решение задачи №7 нецелочисленное и $c'x^0 = 46.667 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_3 для ветвления, т.е. $j_0 = 3$. Задачу №7 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

задача №12: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$,

задача №13: $c'x \to \max, \ Ax = b, \ d_* \le x \le d^*$,

$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$, $d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'$.

Идем на следующую итерацию.

Итерация 8.

Список состоит из задач №8, №9, №10, №11, №12 и №13. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №8:

$$c'x \to \max, \ Ax = b, \ d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем эту задачу. Решение задачи №8: $x^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 32$.

Так как решение задачи №8 целочисленное и $c'x^0 = 32 > r = -\infty$, то полагаем $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}'$. Так как $c'x^0 = 32 > r = -\infty$, то $r = c'x^0 = 32$. Задачу №8 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 9.

Список состоит из задач №9, №10, №11, №12 и №13. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №9:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №9: ограничения этой задачи несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №9 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 10.

Список состоит из задач №10, №11, №12 и №13. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №12:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №12: $x^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = 36$.

Так как решение задачи №12 целочисленное и $c'x^0 = 36 > r = 32$, то полагаем $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}'$. Так как $c'x^0 = 36 > r = 32$, то $r = c'x^0 = 36$. Задачу №12 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 11.

Список состоит из задач №10, №11 и №13. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №13:

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №13: ограничения этой задачи несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №13 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 12.

Список состоит из задач №10 и №11. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №10:

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №10: ограничения этой задачи несовместны. Значит, мы вычеркиваем задачу №10 из списка и переходим к новой итерации.

Итерация 13.

Список состоит из задачи №11:

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №11 имеет следующий вид:

$x^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}', \quad c'x^0 = 37.$

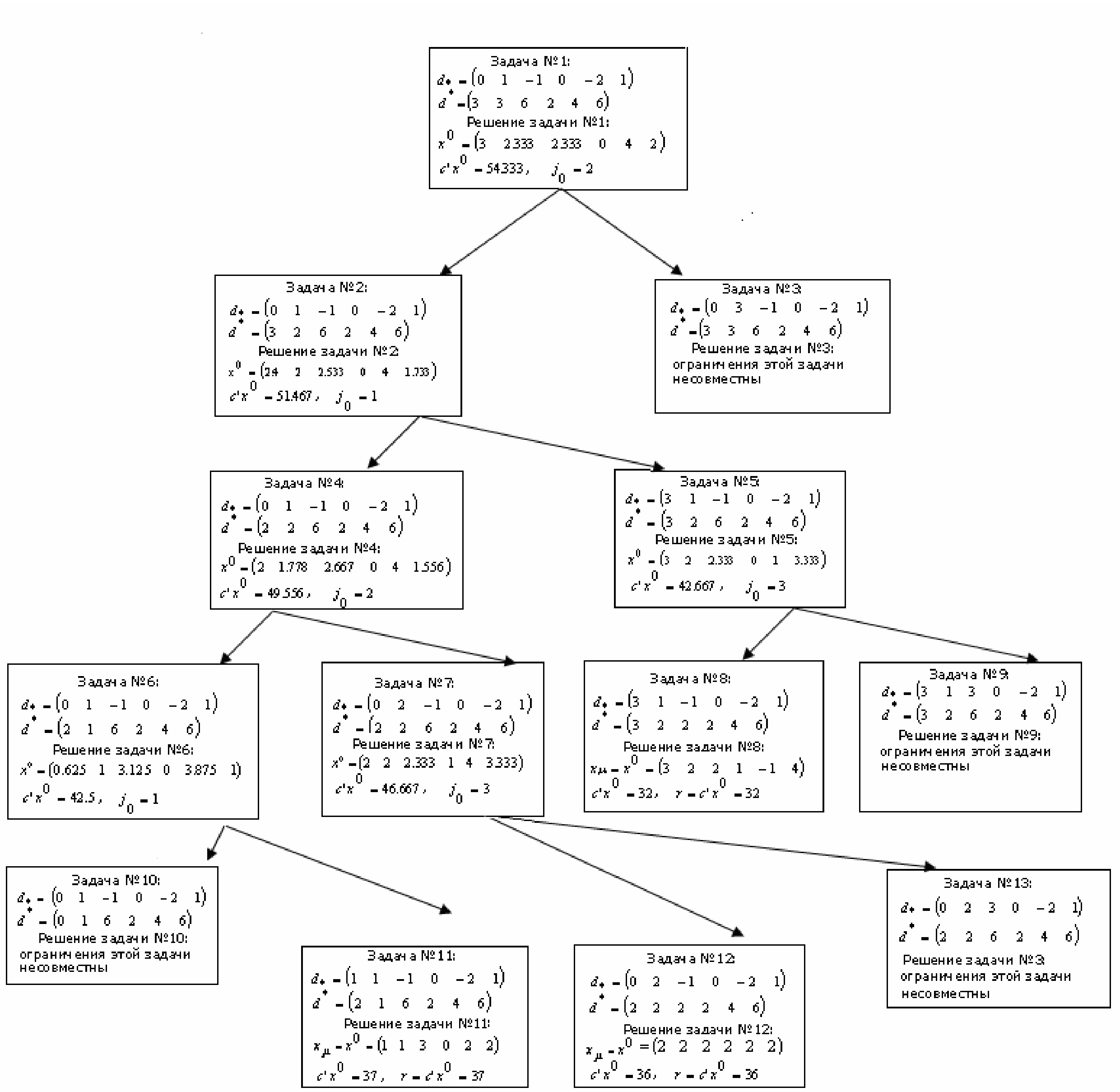
Так как решение задачи №11 целочисленное и $c'x^0 = 37 > r = 36$, то полагаем $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}'$. Так как $c'x^0 = 37 > r = 36$, то

$r = c'x^0 = 37$. Задачу №11 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 14.

На новой итерации список пуст. Алгоритм заканчивает работу. Вектор $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}'$ принимаем за решение исходной задачи.

Ход решения задачи схематично можно представить в виде дерева:



Пример 3. Рассмотрим задачу ЦЛП:

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 5x_5 + 2x_6 \to \max,$$
$$x_1 + x_3 + x_6 = -3,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 3,$$
$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 13,$$
$$d_* \le x_j \le d^*, \ \ x_j - \text{целое}, \quad j = \overline{1,6}$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'$$

Положим $r = -\infty$. В список задач включим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования о целочисленности компонент плана.

Итерация 1.

Список состоит из одной задачи – <u>задачи №1</u>:

$$c'x \to \max, Ax = b, d_* \le x \le d^*.$$

Решаем эту задачу. Она имеет решение:

$$x^0 = \begin{pmatrix} -1.429 & 2.429 & -0.571 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}', \ c'x^0 = 2.143.$$

Так как решение задачи №1 нецелочисленное и $c'x^0 = 2.143 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_1 для ветвления, т.е. $j_0 = 1$. Задачу №1 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

<u>задача №2:</u> $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}',$$

<u>задача №3:</u> $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'.$$

Идем на следующую итерацию.

Итерация 2.

Список состоит из задач №2 и №3. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет задача №2:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №2: $x^0 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = -1$.

Так как решение задачи №2 целочисленное и $c'x^0 = -1 > r = -\infty$, то полагаем $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}'$ **и** $r = c'x^0 = -1$. Задачу №2 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 3.

Список состоит из одной задачи – задачи №3:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'$$

Решаем эту задачу и получаем ее решение:

$$x^0 = \begin{pmatrix} -1.429 & 2.429 & -0.571 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}', \; c'x^0 = 2.143.$$

Так как решение задачи №3 нецелочисленное и $c'x^0 = 2.143 > r = -\infty$, то выберем нецелочисленную переменную x_2 для ветвления, т.е. $j_0 = 2$. Задачу №3 вычеркиваем из списка и формируем две новые задачи:

задача №4: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}',$$

задача №5: $c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \; d^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'.$$

Идем на следующую итерацию.

Итерация 4.

Список состоит из задач №4 и №5. Выбираем любую задачу из списка. Пусть это будет <u>задача №4:</u>

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'.$$

Решаем ее. Решение задачи №4: $x^0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -0.25 & 0 & 3.25 & -1.75 \end{pmatrix}'$, $c'x^0 = -12.75$.

Так как решение задачи №4 нецелочисленное и $c'x^0 = -12.75 < r = -1$, то задачу №4 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 5.

Список состоит из одной <u>задачи №5</u>:

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*,$$

$$d_* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}', \ d^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}'.$$

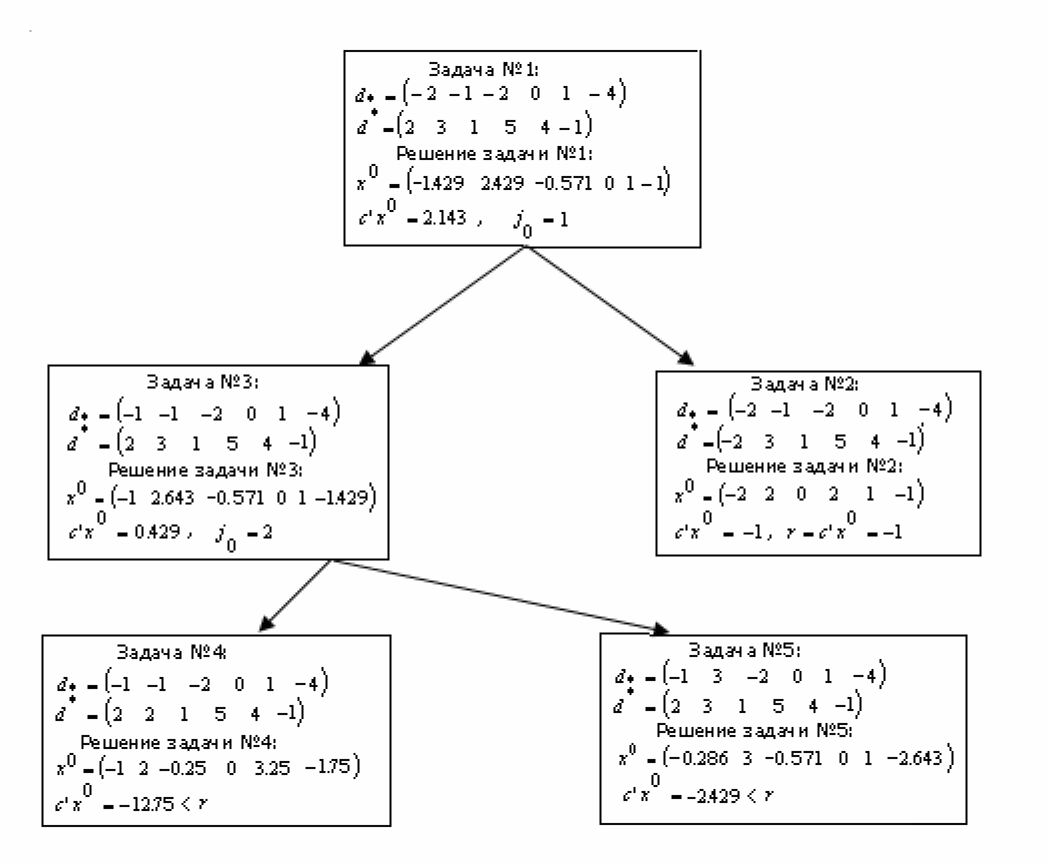
Решаем ее. Решение задачи №5: $x^0 = (-0.286 \quad 3 \quad -0.571 \quad 0 \quad 1 \quad -2.143)'$, $c'x^0 = -2.429$.

Так как решение задачи №5 нецелочисленное и $c'x^0 = -2.429 < r = -1$, то задачу №5 вычеркиваем из списка и переходим на новую итерацию.

Итерация 6.

На новой итерации список пуст. Алгоритм заканчивает работу. Вектор $x_\mu = x^0 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}'$ принимаем за решение исходной задачи.

Ход решения задачи схематично можно представить в виде дерева:



Задачи.

Решить задачи целочисленного программирования

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_{j*} \le x_j \le d_j^*, \quad x_j - \text{целое}, \ j = \overline{1,n}.$$

методом ветвей и границ.

Задача 1.

Матрица A: Вектор b:

1	0	0	12	1	-3	4	-1	40
0	1	0	11	12	3	5	3	107
0	0	1	1	0	22	-2	1	61

Вектор c: 2 1 -2 -1 4 -5 5 5

Вектор d_*: 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*: 3 5 5 3 4 5 6 3

Ответ:

Оптимальный целочисленный план $x^0 = (1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 6\ \ 3)'$.

Значение целевой функции: 39

Задача 2.

Матрица A:

1	-3	2	0	1	-1	4	-1	0
1	-1	6	1	0	-2	2	2	0
2	2	-1	1	0	-3	8	-1	1
4	1	0	0	1	-1	0	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Вектор b: 3 9 9 5 9

Вектор c:

-1 5 -2 4 3 1 2 8 3

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

5 5 5 5 5 5 5 5 5

Ответ:

Оптимальный целочисленный план $x^0 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)'$.

Значение целевой функции: 23

Задача 3.

Матрица A:

1	0	0	12	1	-3	4	-1	2.5	3
0	1	0	11	12	3	5	3	4	5.1
0	0	1	1	0	22	-2	1	6.1	7

Вектор b: 43.5 107.3 106.3

Вектор c:

2 1 -2 -1 4 -5 5 5 1 2

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

2 4 5 3 4 5 4 4 5 6

Ответ:

Оптимальный целочисленный план $x^0 = (1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3)'$.

Значение целевой функции: 29.

Задача 4.

Матрица A:

4	0	0	0	0	-3	4	-1	2	3
0	1	0	0	0	3	5	3	4	5
0	0	1	0	0	22	-2	1	6	7
0	0	0	1	0	6	-2	7	5	6
0	0	0	0	1	5	5	1	6	7

Вектор b: 8 5 4 7 8

Вектор c:

2 1 -2 -1 4 -5 5 5 1 2

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

10 10 10 10 10 10 10 10 10 10

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(2 5 4 7 8 0 0 0 0 0)'.
Значение целевой функции 26.

Задача 5.

Матрица A:

1	-5	3	1	0	0
4	-1	1	0	1	0
2	4	2	0	0	1

Вектор b:

-8
22
30

Вектор c:

7 -2 6 0 5 2

Вектор d_*:

2 1 0 0 1 1

Вектор d^*:

6 6 5 2 4 6

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(6 3 0 1 1 6)'.
Значение целевой функции: 53 .

Задача 6.

Матрица A:

1	0	0	3	1	-3	4	-1
0	1	0	4	-3	3	5	3
0	0	1	1	0	2	-2	1

Вектор b:

30
78
5

Вектор c:

2 1 -2 -1 4 -5 5 5

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

5 5 3 4 5 6 6 8

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(5 5 3 4 0 1 6 8)'.
Значение целевой функции: 70.

Задача 7.

Матрица A:

1	-3	2	0	1	-1	4	-1	0
1	-1	6	1	0	-2	2	2	0
2	2	-1	1	0	-3	2	-1	1
4	1	0	0	1	-1	0	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Вектор b:

18
18
30
15
18

Вектор c:

7 5 -2 4 3 1 2 8 3

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

8 8 8 8 8 8 8 8 8

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(3 5 0 0 0 0 8 2 0)'.
Значение целевой функции: **78**.

Задача 8.

Матрица A:

1	0	1	0	4	3	4
0	1	2	0	55	3.5	5
0	0	3	1	6	2	-2.5

Вектор b:

26
185
32.5

Вектор c:

1 2 3 -1 4 -5 6

Вектор d_*:

0 1 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

1 2 5 7 8 4 2

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(1 2 3 4 3 2 1)'.
Значение целевой функции: 18.

Задача 9.

Матрица A:

2	0	1	0	0	3	5
0	2	2.1	0	0	3.5	5
0	0	3	2	0	2	1.1
0	0	3	0	2	2	-2.5

Вектор b:

58
66.3
36.7
13.5

Вектор c:

1 2 3 1 2 3 4

Вектор d_*:

1 1 1 1 1 1 1

Вектор d^*:

2 3 4 5 8 7 7

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(1 2 3 4 5 6 7)'.
Значение целевой функции: 74

Задача 10.

Матрица A:

1	0	0	1	1	-3	4	-1	3	3
0	1	0	-2	1	1	7	3	4	5
0	0	1	1	0	2	-2	1	-4	7

Вектор b:

27
6
18

Вектор c:

-2 1 -2 -1 8 -5 3 5 1 2

Вектор d_*:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Вектор d^*:

8 7 6 7 8 5 6 7 8 5

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(5 0 6 7 8 0 1 0 0 1)'.
Значение целевой функции: 40.

3. Линейные задачи целочисленного программирования. Метод Гомори

Пример 1. Решить задачу ЦЛП

$$3.5x_1 - x_2 \to \min,$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 = 15,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$$
$$-7x_1 + 2x_2 + x_5 = 0,$$
$$x_j \geq 0, \quad x_j - \text{целое}, \quad j = \overline{1,5}.$$

методом Гомори.

Итерация 1.

Решим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования целочисленности переменных. В результате получим оптимальный план, оптимальный базис и соответствующую базисную матрицу

$$x^0 = (1 \quad 3.5 \quad 13.5 \quad 0 \quad 0), \; J^0_Б = \{j_1 = 1, j_2 = 2, \; j_3 = 3\}, \quad A_Б = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем любую нецелочисленную базисную переменную $x_{j_k}, j_k \in J^0_Б$.

Пусть $j_k = 2, k = 2$. Подсчитаем

$$e'_k A_Б^{-1} b = (0 \quad 1 \quad 0) A_Б^{-1} b = 3.5,$$

$$e'_k A_Б^{-1} A = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.58333 \quad -0.08333),$$

Здесь символом $\{a\}$ обозначена дробная часть числа a.

По полученным данным построим отсекающее ограничение:

$$-0.58333x_4 - 0.917667x_5 + x_6 = -0.5.$$

Добавляем это ограничение к условиям последней задачи линейного программирования. В результате получаем задачу №2.

Итерация 2.

Мы получили задачу №2 со следующими данными:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.58333 & -0.91667 & 1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix},$$

$$c=(3.5,-1,0,0,0,0)'.$$

Решим задачу №2. В результате получим оптимальный план, оптимальный базис и соответствующую базисную матрицу

$$x^0=\begin{pmatrix} 0.85714 & 3 & 13.71429 & 0.85715 & 0 & 0 \end{pmatrix}',$$

$$J_Б=\{j_1=1, j_2=2, j_3=3, j_4=4\}, \qquad A_Б=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.58333 \end{pmatrix}.$$

Выберем любую нецелочисленную базисную переменную $x_{j_k}, j_k \in J_Б^0$.

Пусть $j_k=1,\ k=1$. Вычислим

$$e'_k A_Б^{-1}b=(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)A_Б^{-1}b=0.85714,$$

$$e'_k A_Б^{-1}A=(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4.42886 \quad 0.28572).$$

По полученным данным построим отсекающее ограничение:

$$-0.57114x_5-0.28572x_6+x_7=-0.85714.$$

Добавляем это ограничение к условиям последней задачи линейного программирования. В результате получаем задачу №3.

Итерация 3.

Мы получили задачу №3 со следующими данными:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.58333 & -0.917667 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.57114 & -0.28572 & 1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}15\\ 6\\ 0\\ -0.5\\ -0.85714\end{pmatrix},$$

$$c=(3.5,-1,0,0,0,0,0)'.$$

Решим задачу №3. В результате получим оптимальный план $x^0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 15 & 6 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}'$. Это решение является целочисленным. Следовательно, оно является решением исходной задачи ЦЛП.

Пример 2. Решить задачу линейного целочисленного программирования

$$\begin{aligned}&-x_1+x_2\to \min,\\ &5x_1+3x_2+x_3=4\\ &-x_1+2x_2+x_4=3\\ &x_1-2x_2+x_5=7\\ &x_j\ge 0,\quad x_j-\text{целое},\quad j=\overline{1,5}\end{aligned}$$

методом Гомори.

Итерация 1.

Решим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования целочисленности переменных. В результате получим оптимальный план, оптимальный базис и соответствующую базисную матрицу

$$x^0=\begin{pmatrix}0.8 & 0 & 0 & 3.8 & 6.2\end{pmatrix}',\ J_Б^0=\{j_1=1, j_2=4, j_3=5\},\quad A_Б=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Выберем любую нецелочисленную базисную переменную $x_{j_k}, j_k\in J_Б^0$.

Пусть $j_k=1,\ k=1$. Подсчитаем

$$e'_k A_Б^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}A_Б^{-1}b=0.8,$$

$$e'_k A_Б^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$-\{0\}=0, \quad -\{1\}=0, \quad -\{0.8\}=-0.8, \quad -\{0.8\}=-0.6, \quad -\{0.2\}=-0.2\,.$

Здесь символом $\{a\}$ обозначена дробная часть числа a.

По полученным данным построим отсекающее ограничение:

$$-0.6x_2-0.2x_3+x_6=-0.8\,.$$

Добавляем это ограничение к условиям последней задачи линейного программирования. В результате получаем задачу №2.

Итерация 2.

Мы получили задачу №2 со следующими данными:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.6 & -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ -0.8 \end{pmatrix},$$

$$c=(-1,1,0,0,0,0)'.$$

Решим задачу №2. В результате получим оптимальный план

$x^0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4 & 3 & 7 & 0\end{pmatrix}'$. Это решение является целочисленным.

Следовательно, оно является решением исходной задачи ЦЛП.

Пример 3. Решить задачу ЦЛП

$$2x_1-5x_2\to\max,$$
$$-2x_1-x_2+x_3=-1,$$
$$3x_1+x_2+x_4=10,$$
$$-x_1+x_2+x_5=3,$$
$$x_j\ge 0, \quad x_j - \text{целое}, \quad j=\overline{1,5}.$$

методом Гомори.

Итерация 1.

Решим задачу №1, которая совпадает с исходной задачей, но не содержит требования целочисленности переменных. В результате получим оптимальный план, оптимальный базис и соответствующую базисную матрицу

$$x^0 = \begin{pmatrix} 3.333 & 0 & 5.667 & 0 & 6.333 \end{pmatrix}', \ J_Б^0 = \{j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5\},$$

$$A_Б = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем любую нецелочисленную базисную переменную $x_{j_k}, j_k \in J_Б^0$.

Пусть $j_k = 1,\ k = 1$. Подсчитаем

$$e'_k A_{A'}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{A'}^{-1} b = 3.333,$$

$$e'_k A_{A'}^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0.333 & 0 & 0.333 & 0 \end{pmatrix},$$

$$-\{0\} = 0, \quad -\{1\} = 0, \quad -\{3.333\} = -0.333, \quad -\{0.333\} = -0.333.$$

Здесь символом $\{a\}$ обозначена дробная часть числа a.

По полученным данным построим отсекающее ограничение:

$$-0.333x_2 - 0.333x_4 + x_6 = -0.333.$$

Добавляем это ограничение к условиям последней задачи линейного программирования. В результате получаем задачу №2.

Итерация 2.

Мы получили задачу №2 со следующими данными:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \\ -0.333 \end{pmatrix},$$

$$c = (2, -5, 0, 0, 0)'.$$

Решим задачу №2. В результате получим оптимальный план $x^0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}'$. Это решение является целочисленным. Следовательно, оно является решением исходной задачи ЦЛП.

Задачи.

Решить задачи целочисленного программирования

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x - \text{целое} \ ,$$

методом Гомори.

Задача 1.

Матрица A:

1	-5	3	1	0	0
4	-1	1	0	1	0
2	4	2	0	0	1

Вектор b:

-8
22
30

Вектор c=(7 -2 6 0 5 2)' .

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(0 2 0 2 24 22)'.

Значение целевой функции: 160

Задача 2.

Матрица A:

1	-3	2	0	1	-1	4	-1	0
1	-1	6	1	0	-2	2	2	0
2	2	-1	1	0	-3	8	-1	1
4	1	0	0	1	-1	0	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Вектор b:

3
9
9
5
9

Вектор c=(-1 5 -2 4 3 1 2 8 3) '.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(1 1 1 1 1 1 1 1 1)'.

Значение целевой функции: 23.

Задача 3.

Матрица A: Вектор b:

1	0	0	12	1	-3	4	-1	40
0	1	0	11	12	3	5	3	107
0	0	1	1	0	22	-2	1	61

Вектор c=(2 1 -2 -1 4 -5 5 5) '.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0=(77 2 5 0 0 1 0 34) '.
Значение целевой функции: 311.

Задача 4.

Матрица A: Вектор b:

1	2	3	12	1	-3	4	-1	2	3	153
0	2	0	11	12	3	5	3	4	5	123
0	0	2	1	0	22	-2	1	6	7	112

Вектор c=(2 1 -2 -1 4 -5 5 5 1 2) '.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(188 0 4 0 0 3 0 38 0 0) '.
Значение целевой функции: 543.

Задача 5.

Матрица A: Вектор b:

2	1	-1	-3	4	7	7
0	1	1	1	2	4	16
6	-3	-2	1	1	1	6

Вектор c =(1 2 1 -1 2 3) '.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(5 1 11 0 0 1) '. Значение целевой функции: 21.

Задача 6.

Матрица A: Вектор b:

0	7	1	-1	-4	2	4	12
5	1	4	3	-5	2	1	27
2	0	3	1	0	1	5	19

Вектор c **=(**10 2 1 7 6 3 1) '.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(5 6 0 8 6 1 0) '. Значение целевой функции: 157.

Задача 7.

Матрица A: Вектор b:

0	7	-8	-1	5	2	1	6
3	2	1	-3	-1	1	0	3
1	5	3	-1	-2	1	0	7
1	1	1	1	1	1	1	7

Вектор c =(2 9 3 5 1 2 4)'.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(1 1 1 1 1 1 1) '. Значение целевой функции: 26.

Задача 8.

Матрица A: Вектор b:

1	0	-1	3	-2	0	1	4
0	2	1	-1	0	3	-1	8
1	2	1	4	2	1	1	24

Вектор c =(-1 -3 -7 0 -4 0 -1) $'$.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(1 1 0 3 3 3 0)$'$. Значение целевой функции -16.

Задача 9.

Матрица A: Вектор b:

1	-3	2	0	1	-1	4	-1	0	3
1	-1	6	1	0	-2	2	2	0	9
2	2	-1	1	0	-3	2	-1	1	9
4	1	0	0	1	-1	0	-1	1	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

Вектор c =(-1 5 -2 4 3 1 2 8 3) $'$.

Ответ:

Оптимальный целочисленный план x^0 =(0 1 1 2 0 0 1 0 4)$'$.
Значение целевой функции: 25.

4. Задачи распределения ресурсов

Пример. Рассмотрим пример с данными из таблицы, где *c=6, n=3.*

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	3	4	5	8	9	10
$f_2(x)$	0	2	3	7	9	12	13
$f_3(x)$	0	1	2	6	11	11	13

Используя данные из Таблицы 1, вычислим функции Беллмана $B_k(y),\ y=0,1,...,6,\ k=1,2,3,$ по рекуррентным правилам

$$B_1(y)=f_1(y),\ B_2(y)=\max_{0\le z\le y}[f_2(z)+B_1(y-z)],B_3(y)=\max_{0\le z\le y}[f_3(z)+B_2(y-z)].\quad (4.1)$$

Через $x_k^0(y)$ будем обозначать значение переменной z, на котором достигается максимум при подсчете соответствующего значения функции $B_k(y)$.

Согласно (1) имеем

$B_2(1)=\max\limits_{0\le z\le 1}(f_2(z)+B_1(1-z))=\{f_2(0)+B_1(1),f_2(1)+B_1(0)\}=\{0+3,\ 2+0\}=3,\ x_2^0(1)=0;$

$B_2(2)=\max\limits_{0\le z\le 2}(f_2(z)+B_1(2-z))=\{f_2(0)+B_1(2),f_2(1)+B_1(1),f_2(2)+B_1(0)\}=$

$\{0+4,\ 2+3,\ 3+0\}=5,\ x_2^0(2)=1;$

$B_2(3)=\max\limits_{0\le z\le 3}(f_2(z)+B_1(3-z))=\{f_2(0)+B_1(3),f_2(1)+B_1(2),f_2(2)+B_1(1),f_2(3)+B_1(0)\}=$

$\{0+5,\ 2+4,\ 3+3,\ 7+0\}=7,\ x_2^0(3)=3;$

$B_2(4)=\max\limits_{0\le z\le 4}(f_2(z)+B_1(4-z))=\{f_2(0)+B_1(4),f_2(1)+B_1(3),f_2(2)+B_1(2),f_2(3)+B_1(1),$

$f_2(4)+B_1(0)\}=\{0+8,\ 2+5,\ 3+4,\ 7+3,\ 9+0\}=10,\ x_2^0(4)=3;$

$B_2(5)=\max\limits_{0\le z\le 5}(f_2(z)+B_1(5-z))=\{f_2(0)+B_1(5),f_2(1)+B_1(4),f_2(2)+B_1(3),f_2(3)+B_1(2),$

$f_2(4)+B_1(1),f_2(5)+B_1(0)\}=\{0+9,\ 2+8,\ 3+5,\ 7+4,\ 9+3,\ 12+0\}=12,\ x_2^0(5)=5\vee 4;$

$B_2(6)=\max\limits_{0\le z\le 5}(f_2(z)+B_1(6-z))=\{f_2(0)+B_1(6),f_2(1)+B_1(5),f_2(2)+B_1(4),f_2(3)+B_1(3),$

$f_2(4)+B_1(2),f_2(5)+B_1(1),f_2(6)+B_1(0)\}=$

$=\{0+10,\ 2+9,\ 3+8,\ 7+5,\ 9+4,\ 12+3,13+0\}=15,\ x_2^0(6)=5;$

$B_3(1)=\max\limits_{0\le z\le 1}(f_3(z)+B_2(1-z))=\{f_3(0)+B_2(1), f_3(1)+B_2(0)\}=\{0+3\ ,1+0\}=3,\ x_3^0(1)=0;$

$B_3(2)=\max\limits_{0\le z\le 2}(f_3(z)+B_2(2-z))=\{f_3(0)+B_2(2), f_3(1)+B_2(1), f_3(2)+B_2(0)\}=$

$\{0+5,\ 1+3,\ 2+0\}=5,\ x_3^0(2)=0;$

$B_3(3)=\max\limits_{0\le z\le 3}(f_3(z)+B_2(3-z))=\{f_3(0)+B_2(3), f_3(1)+B_2(2), f_3(2)+B_2(1), f_3(3)+B_2(0)\}=$

$\{0+7,\ 1+5,\ 2+3,\ 6+0\}=7,\ x_3^0(3)=0;$

$B_3(4)=\max\limits_{0\le z\le 4}(f_3(z)+B_2(4-z))=\{f_3(0)+B_2(4), f_3(1)+B_2(3), f_3(2)+B_2(2), f_3(3)+B_2(1),$

$f_2(4)+B_1(0)\}=\{0+10, 1+7,\ 2+5,\ 6+3, 11+0\}=11,\ x_4^0(4)=4;$

$B_3(5)=\max\limits_{0\le z\le 5}(f_3(z)+B_2(5-z))=\{f_3(0)+B_2(5), f_3(1)+B_2(4), f_3(2)+B_2(3), f_3(3)+B_2(2),$

$f_3(4)+B_2(1), f_3(5)+B_2(0)\}=\{0+12, 1+10,\ 2+7,\ 6+5, 11+3, 11+0\}=14,\ x_3^0(5)=4;$

$B_3(6)=\max\limits_{0\le z\le 5}(f_3(z)+B_2(6-z))=\{f_3(0)+B_2(6), f_3(1)+B_2(5), f_3(2)+B_2(4), f_3(3)+B_2(3),$

$f_3(4)+B_2(2), f_3(5)+B_2(1), f_3(6)+B_2(0)\}=\{0+15, 1+12,\ 2+10,\ 6+7,\ 11+5, 11+3, 13+0\}=16,$
$x_3^0(6)=4.$

Значения функций Беллмана запишем в таблицу, где в каждой клетке наряду со значением функции Беллмана $B_k(y)$ в скобках укажем значение $x_k^0(y)$:

y	0	1	2	3	4	5	6
$B_1(y)$	0	3	4	5	8	9	10
$B_2(y)$	0	3(0)	5(1)	7(3)	10(3)	12(5,4)	15(5)
$B_3(y)$	0	3(0)	5(0)	7(0)	11(4)	14(4)	16(4)

Из последней таблицы видно, что максимальная прибыль в рассматриваемой задаче равна $B_3(6)=16$. Найдем оптимальное распределение ресурсов. Поскольку $x_3^0(6)=4$, то третьему технологическому процессу назначается ресурсов в объеме $x_3^0=4$. На остальные процессы 1 и 2 остается ресурсов 6-4=2. Прибыль от реализации процессов 1, 2 при объеме ресурсов 2 равна $B_2(2)=5$ и $x_2^0(2)=1$. Значит, второму процессу назначается ресурс в объеме 1: $x_2^0=1$. Тогда на первый процесс остается ресурса в объеме 2-1=1. Следовательно $x_1^0 = 1$. Таким образом, получен оптимальный план ($x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1,\ x_3^0 = 4$).

Предположим, что условия задачи изменились, например, пусть теперь имеется только два технологических процесса, т.е. пусть $c = 6$ и $n = 2$. Согласно таблице имеем $B_2(6) = 15$ и $x_2^0(6) = 5$. Следовательно, при новых условиях задачи оптимальная прибыль будет равна 15 и второму процессу надо назначить 5 единиц ресурса. Тогда на первый процесс остается ресурса в объеме 6-5=1 единиц. Оптимальный план имеет вид

$$(x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 5).$$

Задачи.

Решить задачи распределения ресурсов, используя данные из таблиц.

Задача 1.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6
f_1 (x)	0	1	2	2	4	5	6
f_2 (x)	0	2	3	5	7	7	8
f_3 (x)	0	2	4	5	6	7	7

Ответ

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6
B_1 (y)	0	1	2	2	4	5	6
B_2 (y)	0	2(1)	3(1)	5(3)	7(4)	8(4)	9(4)
B_3 (y)	0	2(0)	4(1)	6(2)	7(0)	9(1)	11(2)

Оптимальное назначение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 4,\ x_3^0 = 2.$

Задача 2.

f(x) \ x	0	1	2	3	4	5	6
f_1 (x)	0	1	1	3	6	10	11
f_2 (x)	0	2	3	5	6	7	13
f_3 (x)	0	1	4	4	7	8	9

Ответ

B(y) \ y	0	1	2	3	4	5	6
B_1 (y)	0	1	1	3	6	10	11
B_2 (y)	0	2(1)	3(1)	5(3)	6(0)	10(0)	13(6)
B_3 (y)	0	2(0)	4(2)	6(2)	7(2)	10(0)	13(0)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 6,\ x_3^0 = 0.$

Задача 3.

f(x) \ x	0	1	2	3	4	5	6	7
f_1 (x)	0	1	2	4	8	9	9	23
f_2 (x)	0	2	4	6	6	8	10	11
f_3 (x)	0	3	4	7	7	8	8	24

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7
B_1 (y)	0	1	2	4	8	9	9	23
B_2 (y)	0	2(1)	4(2)	6(3)	8(0)	10(1)	12(2)	23(0)
B_3 (y)	0	3(1)	5(1)	7(1)	9(1)	11(1)	13(1)	24(7)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 7.$

Задача 4.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6	7
f_1 (x)	0	3	3	6	7	8	9	14
f_2 (x)	0	2	4	4	5	6	8	13
f_3 (x)	0	1	1	2	3	3	10	11

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7
B_1 (y)	0	3	3	6	7	8	9	14
B_2 (y)	0	3(0)	5(1)	7(2)	8(1)	10(2)	11(2)	14(0)
B_3 (y)	0	3(0)	5(0)	7(0)	8(0)	10(0)	11(0)	14(0)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 7.$

Задача 5.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_1 (x)	0	2	2	3	5	8	8	10	17
f_2 (x)	0	1	2	5	8	10	11	13	15
f_3 (x)	0	4	4	5	6	7	13	14	14
f_4 (x)	0	1	3	6	9	10	11	14	16

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_1 (y)	0	2	2	3	5	8	8	10	17
B_2 (y)	0	2(0)	3(1)	5(3)	8(4)	10(4)	12(5)	13(6)	17(0)
B_3 (y)	0	4(1)	6(1)	7(1)	9(1)	12(1)	14(1)	16(1)	17(0)
B_4 (y)	0	4(0)	6(0)	7(0)	10(3)	13(4)	15(4)	16(0)	18(3)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 4,\ x_3^0 = 1,\ x_4^0 = 3.$

Задача 6.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_1 (x)	0	1	3	4	5	8	9	9	11	12	12	14
f_2 (x)	0	1	2	3	3	3	7	12	13	14	17	19
f_3 (x)	0	4	4	7	7	8	12	14	14	16	18	22
f_4 (x)	0	5	5	5	7	9	13	13	15	15	19	24

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_1 (y)	0	1	3	4	5	8	9	9	11	12	12	14
B_2 (y)	0	1(0)	3(0)	4(0)	5(0)	8(0)	9(0)	12(7)	13(7)	15(7)	17(10)	19(11)
B_3 (y)	0	4(1)	5(1)	7(1)	8(1)	10(3)	12(1)	14(7)	16(1)	17(1)	19(1)	22(11)
B_4 (y)	0	5(1)	9(1)	10(1)	12(1)	13(1)	15(1)	17(1)	19(1)	21(1)	22(1)	24(1)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 2,\ x_2^0 = 7,\ x_3^0 = 1,\ x_4^0 = 1.$

Задача 7.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_1 (x)	0	4	4	6	9	12	12	15	16	19	19	19
f_2 (x)	0	1	1	1	4	7	8	8	13	13	19	20
f_3 (x)	0	2	5	6	7	8	9	11	11	13	13	18
f_4 (x)	0	1	2	4	5	7	8	8	9	9	15	19
f_5 (x)	0	2	5	7	8	9	10	10	11	14	17	21

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_1 (y)	0	4	4	6	9	12	12	15	16	19	19	19
B_2 (y)	0	4(0)	5(1)	6(0)	9(0)	12(0)	13(1)	15(0)	16(0)	19(0)	20(1)	23(10)
B_3 (y)	0	4(0)	6(1)	9(2)	10(2)	12(0)	14(1)	17(2)	18(2)	20(2)	21(1)	24(2)
B_4 (y)	0	4(0)	6(0)	9(0)	10(0)	12(0)	14(0)	17(0)	18(0)	20(0)	21(0)	24(0)
B_5(y)	0	4(0)	6(0)	9(0)	11(1)	14(2)	16(3)	17(0)	19(1)	22(2)	24(3)	25(2)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 7,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 2,\ x_4^0 = 0,\ x_5^0 = 2.$

Задача 8.

x / f(x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_1 (x)	0	1	2	2	2	3	5	8	9	13	14
f_2 (x)	0	1	3	4	5	5	7	7	10	12	12
f_3 (x)	0	2	2	3	4	6	6	8	9	11	17
f_4 (x)	0	1	1	1	2	3	9	9	11	12	15
f_5 (x)	0	2	7	7	7	9	9	10	11	12	13
f_6 (x)	0	2	5	5	5	6	6	7	12	18	22

Ответ:

y / B(y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_1 (y)	0	1	2	2	2	3	5	8	9	13	14
B_2 (y)	0	1(0)	3(2)	4(2)	5(2)	6(3)	7(4)	8(0)	10(8)	13(0)	14(0)
B_3 (y)	0	2(1)	3(0)	5(1)	6(1)	7(1)	8(1)	9(1)	10(0)	13(0)	17(10)
B_4 (y)	0	2(0)	3(0)	5(0)	6(0)	7(0)	9(6)	11(6)	12(6)	14(6)	17(0)
B_5(y)	0	2(0)	7(2)	9(2)	10(2)	12(2)	13(2)	14(2)	16(2)	18(2)	19(2)
B_6(y)	0	2(0)	7(0)	9(0)	12(2)	14(2)	15(2)	17(2)	18(2)	19(2)	22(10)

Оптимальное распределение: $x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 0,\ x_4^0 = 0,\ x_5^0 = 10.$

5. Задачи о потоке минимальной стоимости. Метод потенциалов

Пример. Рассмотрим сеть $S = \{I, U\}$, изображенную на Рис.1, где на каждой дуге (i, j) красными цифрами указаны «стоимости» c_{ij}. Для этой сети задан начальный допустимый базисный поток $\{x, U_Б\}$, $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$, $U_Б \subset U$. На Рис. 5.1 значения дуговых потоков x_{ij} указаны черными цифрами на дугах, дуги множества $U_Б$ выделены красным цветом.

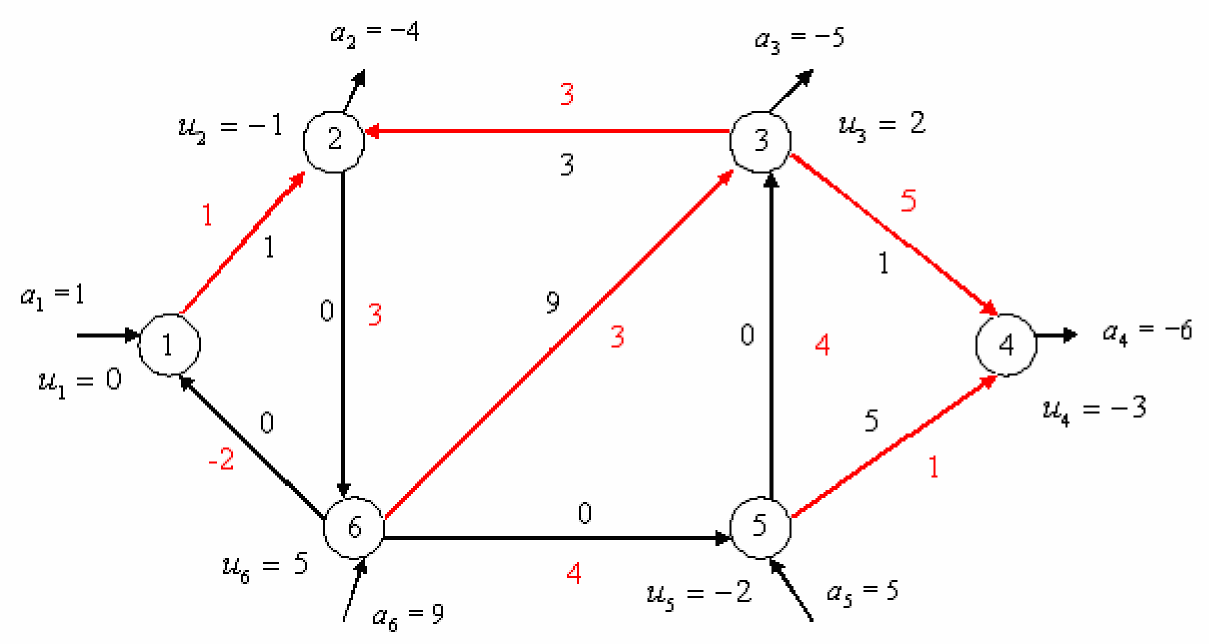


Рис. 5.1.

Итерация 1.

Используя базисное множество дуг $U_Б$, подсчитаем потенциалы $u_i, i \in I$, узлов по правилу

$$u_i - u_j = c_{ij},\ (i, j) \in U_Б,\ u_1 = 0.$$

Найденные потенциалы приведены на Рис. 5.1. Зная потенциалы, подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, (i, j) \in U_Н = U \setminus U_Б$, и проверим выполнение условий

$$\Delta_{ij} \le 0, (i, j) \in U_Н. \qquad (5.1)$$

На данной итерации условия (5.1) не выполняются, поскольку для дуги $(6,1) \in U_Н$ имеем $\Delta_{61} = 5 - 0 - (-2) = 7 > 0$.

Полагаем $(i_0, j_0) = (6,1)$. Во множестве дуг $U_Б \cup (i_0, j_0)$ найдем цикл и выделим в этом цикле множество прямых $U^+_{цикл}$ и обратных $U^-_{цикл}$. Направление движения по циклу задается дугой $(i_0, j_0) = (6,1)$. В результате получим

$$U^+_{цикл} = \{(6,1),(1,2)\}, \ U^-_{цикл} = \{(6,3),(3,2)\}.$$

Найдем $\theta := \min_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij} = x_{32} = 3$. Положим $(i_*, j_*) = (3,2)$.

Построим новый поток $\bar{x} = (\bar{x}_{ij}, (i,j) \in U)$ по правилу

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, (i,j) \in U \setminus U_{цикл}; \bar{x}_{ij} = x_{ij} + \theta, (i,j) \in U^+_{цикл}; \ \bar{x}_{ij} = x_{ij} - \theta, (i,j) \in U^-_{цикл}.$$

Для нового потока построим новое базисное множество дуг по правилу

$$\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0).$$

На Рис. 5.2 приведены новые дуговые потоки $\bar{x}_{ij}, (i,j) \in U$, и новое множество базисный дуг $\bar{U}_Б$.

Переходим к новой итерации, используя новый базисный поток $\{\bar{x}, \bar{U}_Б\}$ в качестве исходного базисного потока $\{x, U_Б\}$.

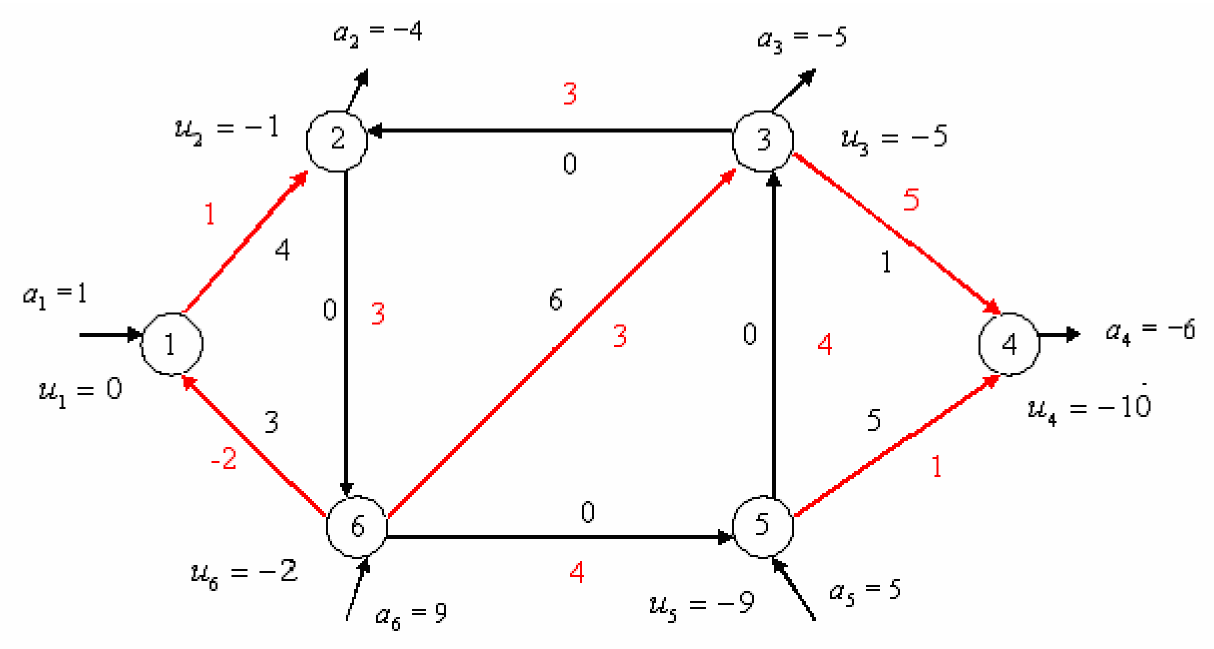


Рис. 5.2.

Итерация 2.

Используя базисное множество дуг $U_Б$, подсчитаем потенциалы $u_i, i \in I$, узлов по правилу $u_i - u_j = c_{ij}$, $(i,j) \in U_Б$, $u_1 = 0$. Найденные потенциалы приведены на Рис. 5.2. Зная потенциалы, подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, (i,j) \in U_H = U \setminus U_Б$, и проверим выполнение условий (5.1). На данной итерации эти условия не выполняются, поскольку для дуги $(6,5) \in U_H$ имеем $\Delta_{65} = -2 - (-9) - 4 = 3 > 0$. Полагаем $(i_0, j_0) = (6,5)$.

Во множестве дуг $U_Б \cup (i_0, j_0)$ найдем цикл и выделим в этом цикле множество прямых $U^+_{цикл}$ и обратных $U^-_{цикл}$. Направление движения по циклу задается дугой $(i_0, j_0) = (6,5)$. В результате получим

$$U^+_{цикл} = \{(6,5),(5,4)\},\ U^-_{цикл} = \{(6,3),(3,4)\}.$$

Найдем $\theta := \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij} = x_{34} = 1$. Положим $(i_*, j_*) = (3,4)$.

Построим новый поток $\overline{x} = (\overline{x}_{ij}, (i,j) \in U)$ по правилу

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij}, (i,j) \in U \setminus U_{цикл}; \overline{x}_{ij} = x_{ij} + \theta, (i,j) \in U^+_{цикл};\ \overline{x}_{ij} = x_{ij} - \theta, (i,j) \in U^-_{цикл}.$$

Для нового потока построим новое базисное множество дуг по правилу

$$\overline{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0).$$

На Рис. 5.3 приведены новые дуговые потоки $\overline{x}_{ij}, (i,j) \in U$, и новое множество базисный дуг $\overline{U}_Б$.

Переходим к новой итерации, используя новый базисный поток $\{\overline{x}, \overline{U}_Б\}$ в качестве исходного базисного потока $\{x, U_Б\}$.

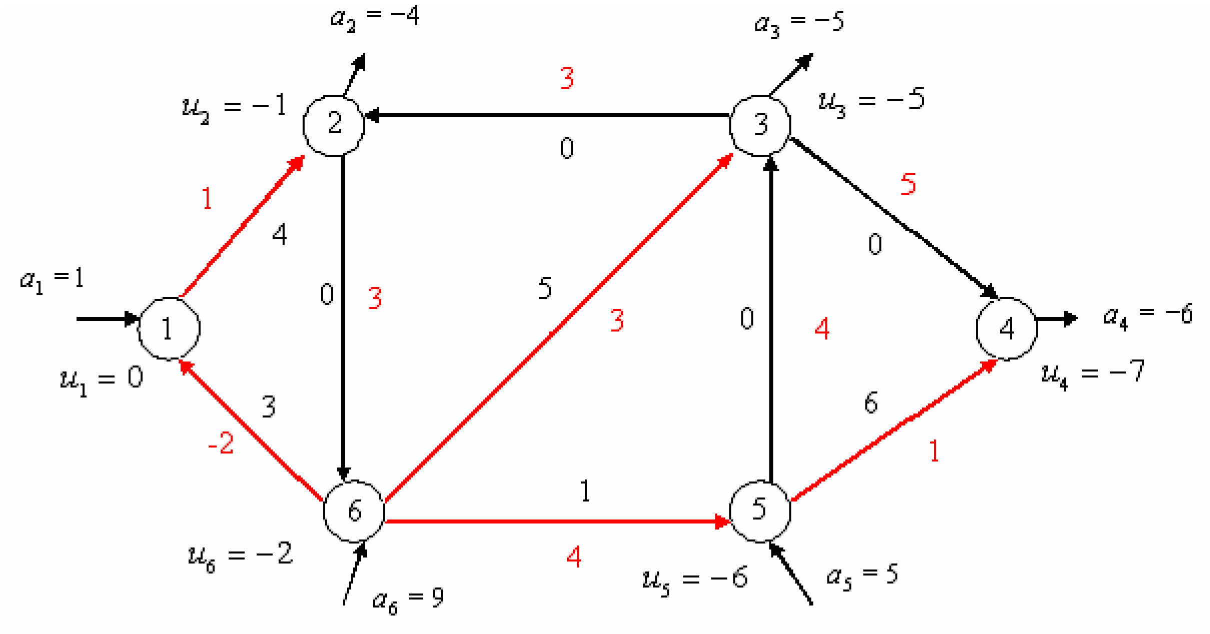


Рис.5.3.

Итерация 3.

Используя текущее базисное множество дуг $U_Б$, подсчитаем потенциалы $u_i, i \in I$, узлов по правилу $u_i - u_j = c_{ij},\ (i,j) \in U_Б,\ u_1 = 0.$

Найденные потенциалы приведены на Рис. 5.3. Зная потенциалы, подсчитаем оценки $\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, (i,j) \in U_Н = U \setminus U_Б$, и проверим выполнение условий (5.1). На данной итерации эти условия выполняются. Следовательно, текущий поток (приведенный на Рис. 5.3) является оптимальным потоком. Задача решена.

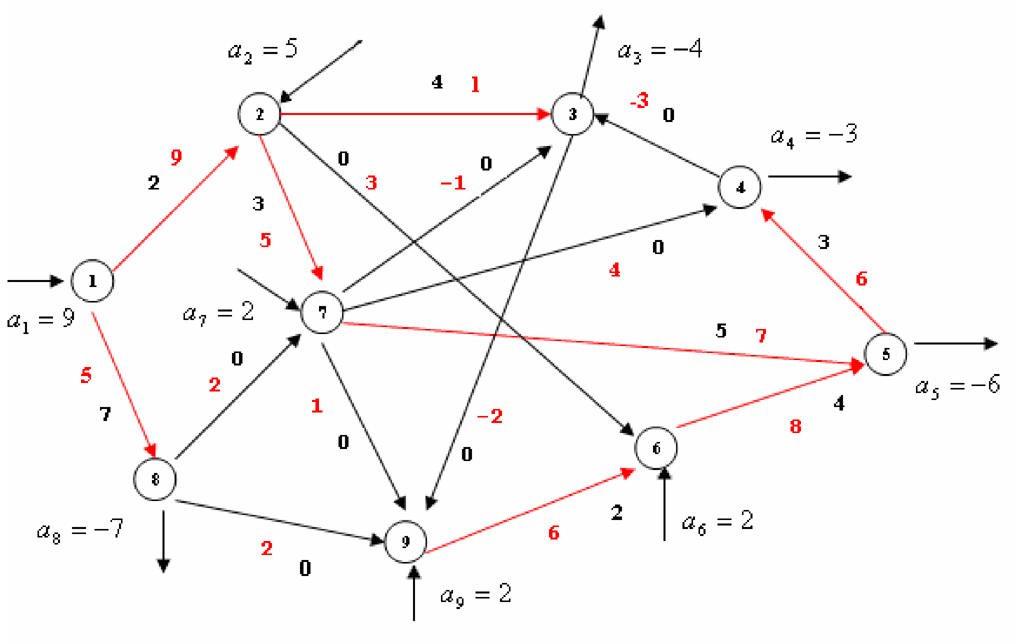
Ответ: оптимальный поток

$$x_{12} = 4, x_{61} = 3, x_{63} = 5, x_{65} = 1, x_{54} = 6, x_{26} = 0, x_{23} = 0, x_{34} = 0, x_{53} = 0.$$

Задачи.

Решить задачи о потоке минимальной стоимости методом потенциалов

Задача 1.

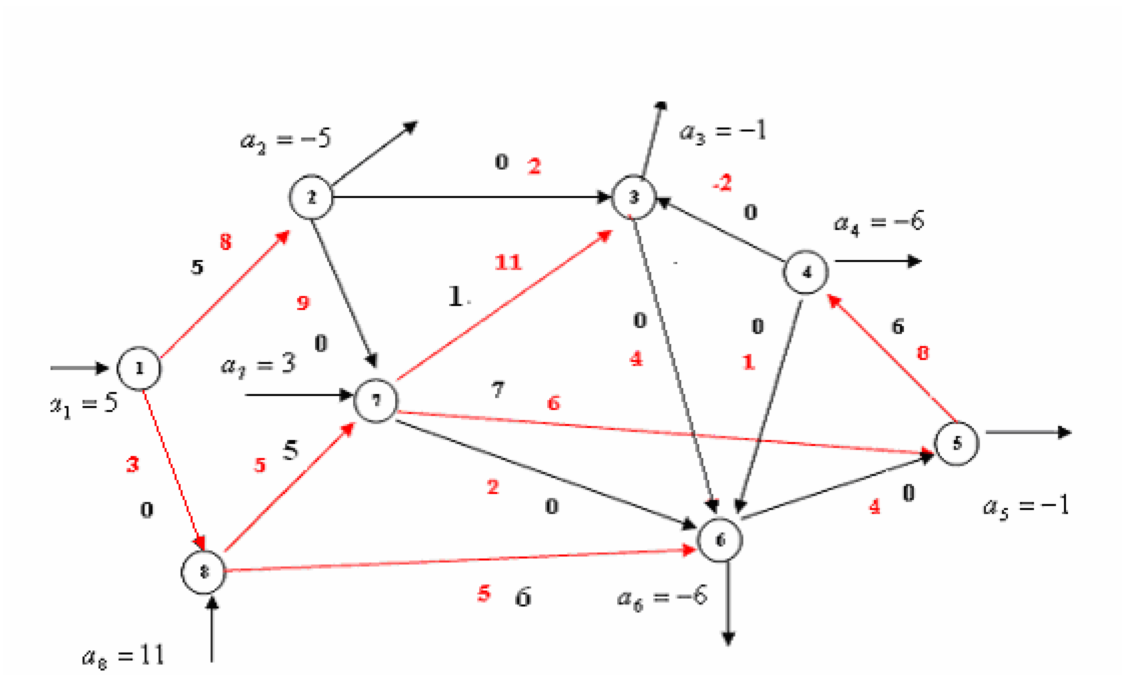


Ответ: оптимальный поток

$x_{23} = 4, x_{26} = 1, x_{74} = 3, x_{65} = 5, x_{96} = 2, x_{87} = 2, x_{18} = 9, x_{75} = 1, x_{12} = 0, x_{73} = 0,$

$x_{43} = 0, x_{54} = 0, x_{39} = 0, x_{79} = 0, x_{89} = 0, x_{27} = 0,$ его стоимость $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} = 127.$

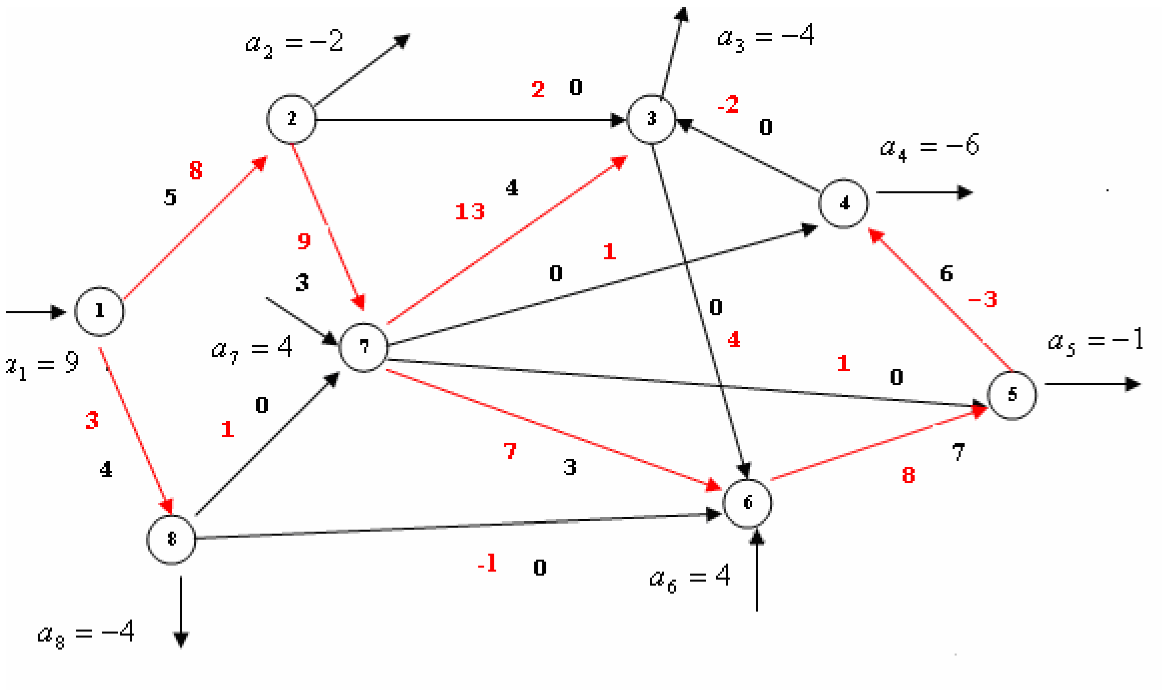
Задача 2.



Ответ: оптимальный поток

$x_{12}=5, x_{73}=1, x_{75}=2, x_{86}=11, x_{65}=5, x_{54}=6, x_{23}=0, x_{27}=0,$
$x_{18}=0, x_{87}=0, x_{43}=0, x_{36}=0, x_{76}=0, x_{46}=0,$ его стоимость $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=186.$

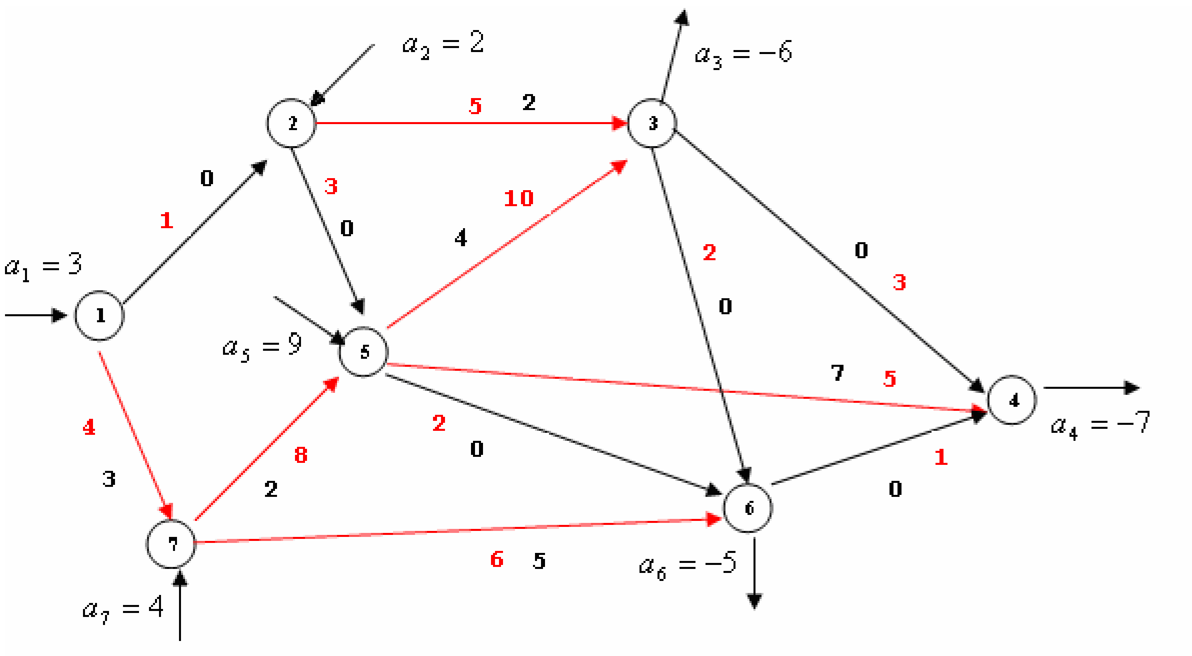
Задача 3.



Ответ: оптимальный поток

$x_{12}=2, x_{18}=7, x_{87}=3, x_{43}=4, x_{75}=7, x_{65}=4, x_{54}=10, x_{23}=0, x_{27}=0,$
$x_{73}=0, x_{74}=0, x_{76}=0, x_{87}=0, x_{36}=0,$ его стоимость $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=41.$

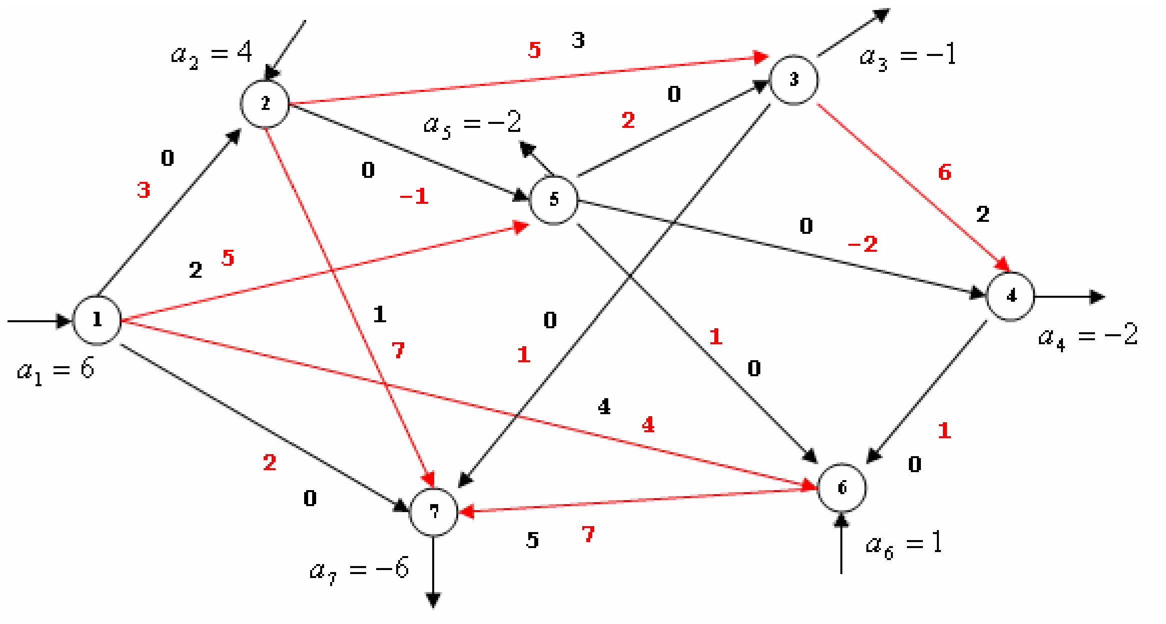
Задача 4.



Ответ: оптимальный поток

$x_{12}=3, x_{23}=5, x_{53}=1, x_{56}=8, x_{76}=4, x_{64}=7, x_{25}=0, x_{17}=0,$
$x_{75}=0, x_{34}=0, x_{54}=0, x_{36}=0,$ его стоимость $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=85.$

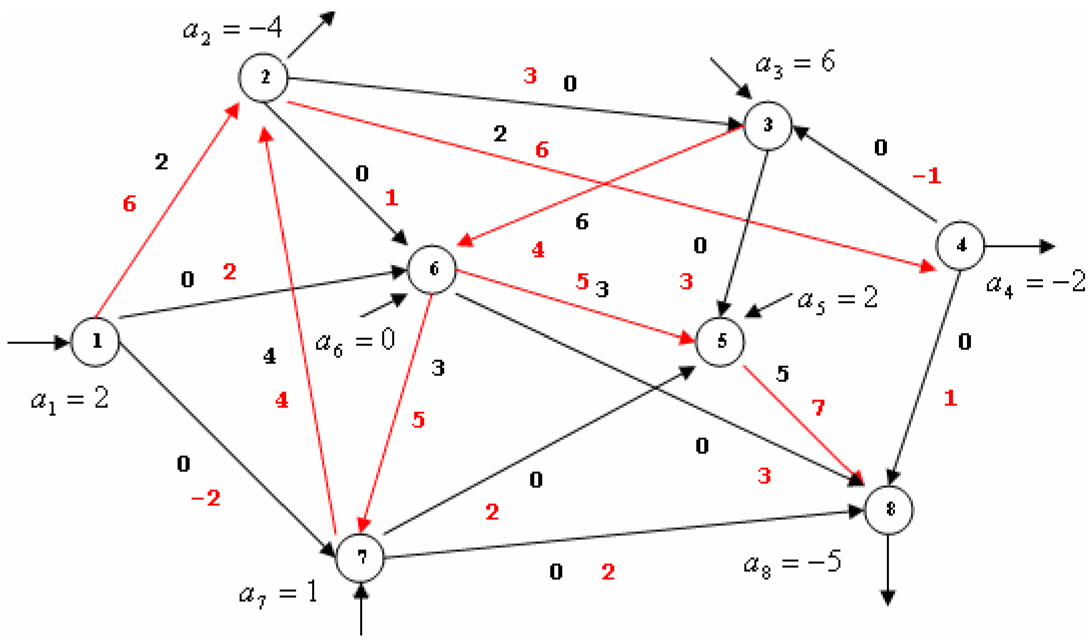
Задача 5.



Ответ: оптимальный поток

$x_{12}=1, x_{17}=5, x_{53}=1, x_{67}=1, x_{54}=2, x_{25}=5, x_{23}=0, x_{27}=0,$
$x_{15}=0, x_{16}=0, x_{56}=0, x_{37}=0, x_{34}=0, x_{64}=0,$ его стоимость $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=13.$

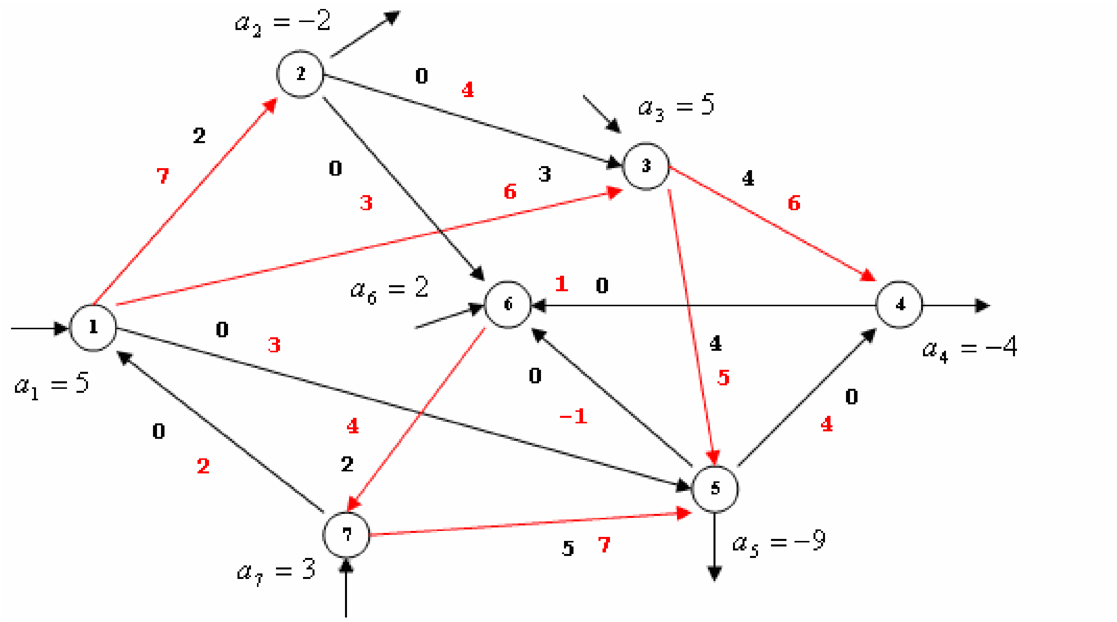
Задача 6.



Ответ: оптимальный поток

$x_{72}=6, x_{17}=2, x_{24}=2, x_{36}=6, x_{67}=3, x_{68}=3, x_{58}=2, x_{12}=0, x_{23}=0, x_{16}=0,$
$x_{65}=0, x_{75}=0, x_{78}=0, x_{43}=0, x_{35}=0, x_{26}=0,$ его стоимость $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=94.$

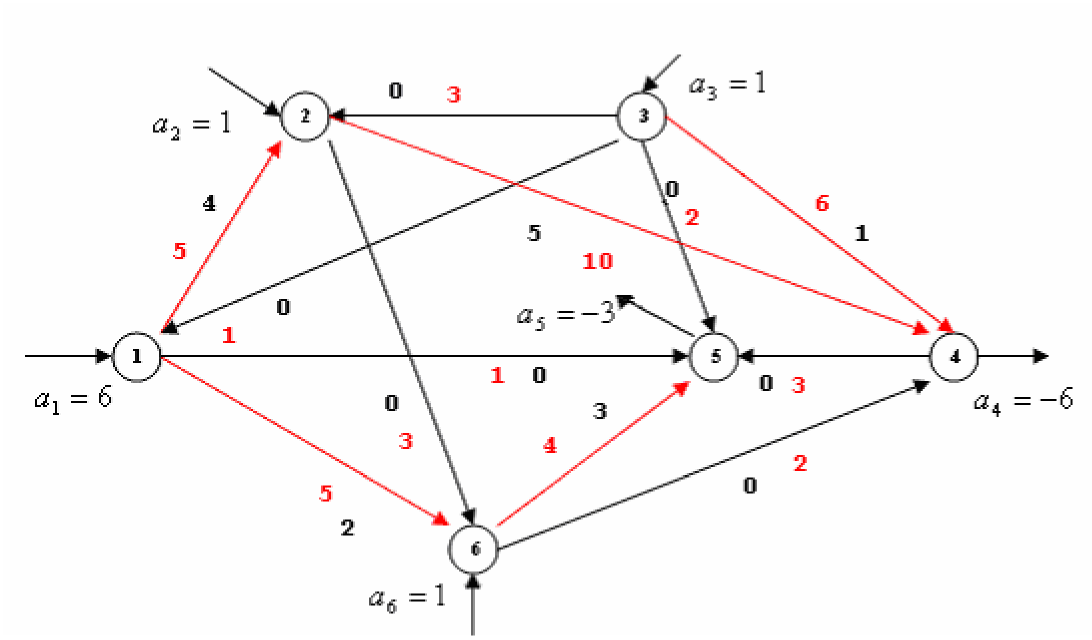
Задача 7.



Ответ: оптимальный поток

$x_{12}=2, x_{15}=8, x_{71}=5, x_{34}=4, x_{35}=1, x_{67}=2, x_{23}=0, x_{13}=0,$
$x_{75}=0, x_{56}=0, x_{46}=0, x_{54}=0, x_{26}=0,$ его стоимость $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=85.$

Задача 8.



Ответ: оптимальный поток

$x_{26}=1, x_{16}=3, x_{15}=3, x_{64}=5, x_{34}=1, x_{12}=0, x_{32}=0, x_{24}=0,$

$x_{45}=0, x_{31}=0, x_{65}=0, x_{35}=0,$ его стоимость $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}=37.$

6. Задачи о нахождении дерева кратчайших путей из заданного узла s

Пример. На сети, изображенной на Рис. 6.1, найти кратчайший путь из узла $s=1$ в узел $t=4$. Воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Перед началом работы алгоритма полагаем

$$I_* = \{s\}, B_s = 0, f(s) = s,\ B_j{}' = \infty, f(j) = 0,\ j \in I \setminus I_*, i_* = s.$$

Итерация 1. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}^+_{i_*} = \tilde{I}^+_1 = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ (i_*, j) \in U\} = \{2,6\}.$$

Поскольку $\infty = B^{'}_j > B_1 + c_{1j}$, $j \in \tilde{I}^+_1$, то меняем временные метки узлов $j \in \tilde{I}^+_1$:

$$B^{'}_2 := B_1 + c_{12} = 12,\ f\,'(2) := 1, \quad B^{'}_6 := B_1 + c_{16} = 1,\ f\,'(6) := 1.$$

Временные метки остальных узлов не меняем:

$$B^{'}_j := B^{'}_j, f^{'}(j) = f^{'}(j),\ j \in I \setminus \{1,2,6\}.$$

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ (т.е. узлов с временными метками) находим узел j_* с минимальной временной меткой:

$$B^{'}_{j_*} = \min_{j \in I \setminus I_*} B^{'}_j = B^{'}_6 = 1.$$

Полагаем $B_6 := B^{'}_6 = 1,\quad f(6) = f^{'}(6) = 1$, т.е. узлу $j_* = 6$ приписываем постоянные метки и относим узел j_* к множеству I_*, заменяя I_* на $I_* := I_* \cup j_* = \{1,6\}$. Полагаем $i_* := j_* = 6$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 2. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}^+_{i_*} = \tilde{I}^+_6 = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ (i_*, j) \in U\} = \{2,5,7\}.$$

Поскольку для узлов $\tilde{I}_6^+$ имеем

$$12 = B_2^{'} > 11 = B_6 + c_{62}, \quad \infty = B_7^{'} > B_6 + c_{67} = 9, \quad \infty = B_5^{'} > B_6 + c_{65} = 6,$$

то меняем временные метки этих узлов:

$$B_2^{'} := 11,\ f\,'(2) := 6, \quad B_5^{'} := 5,\ f\,'(5) := 6,\ B_7^{'} := 9,\ f\,'(7) := 6.$$

Временные метки остальных узлов не меняем.

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ (т.е. узлов с временными метками) находим узел j_* с минимальной временной меткой. Это узел $j_* = 5$. Полагаем

$$B_5 := B_5^{'} = 6, \quad f(5) = f^{'}(5) = 6,$$

т.е. узлу $j_* = 5$ приписываем постоянные метки и относим узел j_* к множеству I_*, заменяя I_* на $I_* := I_* \cup j_* = \{1,5,6\}$. Полагаем $i_* := j_* = 5$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 3. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}_{i_*}^+ = \tilde{I}_5^+ = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ \ (5, j) \in U\} = \{4,7\}.$$

Поскольку для узлов $\tilde{I}_5^+$ имеем

$$9 = B_7^{'} > B_5 + c_{57} = 8, \quad \infty = B_4^{'} > B_5 + c_{54} = 21,$$

то меняем временные метки этих узлов:

$$B_7^{'} := 8,\ f\,'(7) := 5, \quad B_4^{'} := 21,\ f\,'(4) := 5.$$

Временные метки остальных узлов не меняем.

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ (т.е. узлов с временными метками) находим узел j_* с минимальной временной меткой. Теперь это узел $j_* = 7$. Полагаем $B_7 := B_7^{'} = 8,\quad f(7) = f^{'}(7) = 5$, и относим узел $j_* = 7$ к множеству I_*, заменяя I_* на $I_* := I_* \cup j_* = \{1,5,6,7\}$. Полагаем $i_* := j_* = 7$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 4. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}_{i_*}^+ = \tilde{I}_7^+ = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ \ (7, j) \in U\} = \{2,3\}.$$

Поскольку для узлов $\tilde{I}_7^+$ выполняются соотношения

$$11 = B_2^{'} > B_7 + c_{72} = 10, \infty = B_3^{'} > B_7 + c_{73} = 14,$$

то меняем временные метки этих узлов:

$$B_2^{'} := 10,\ f\,'(2) := 7, \quad B_3^{'} := 14,\ f\,'(3) := 7.$$

Временные метки остальных узлов не меняем.

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ находим узел j_* с минимальной временной меткой. Теперь это узел $j_* = 2$. Полагаем

$$B_2 := B_2^{'} = 10, \quad f(2) = f^{'}(2) = 7,$$

и относим узел $j_* = 2$ к множеству I_*, заменяя I_* на $I_* := I_* \cup j_* = \{1,2,5,6,7\}$. Полагаем $i_* := j_* = 2$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 5. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}_{i_*}^+ = \tilde{I}_2^+ = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ (2, j) \in U\} = \{3\}.$$

Поскольку для узла $\tilde{I}_2^+ = \{3\}$ выполняется соотношение

$$14 = B_3^{'} > B_2 + c_{23} = 12,$$

то меняем временную метку этого узла: $B_3^{'} := 12,\ f\,'(3) := 2.$ Временные метки остальных узлов не меняем.

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ находим узел j_* с минимальной временной меткой. Теперь это узел $j_* = 3$. Полагаем

$$B_3 := B_3^{'} = 12, \quad f(3) = f^{'}(3) = 2,$$

и относим узел $j_* = 3$ к множеству I_*, заменяя I_* на множество $I_* := I_* \cup j_* = \{1,2,3,5,6,7\}$. Полагаем $i_* := j_* = 3$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 6. Рассмотрим узлы

$$\tilde{I}_{i_*}^+ = \tilde{I}_3^+ = \{j \in I \setminus I_* : \exists\ (3, j) \in U\} = \{4\}.$$

Поскольку для узла $\tilde{I}_2^+ = \{4\}$ выполняется соотношение

$$21 = B_4^{'} > B_3 + c_{34} = 13,$$

то меняем временную метку этого узла:

$$B_4^{'} := 13,\ f'(4) := 3.$$

Временные метки остальных узлов не меняем.

Среди всех узлов $j \in I \setminus I_*$ находим узел j_* с минимальной временной меткой. Теперь это узел $j_* = 4$. Полагаем

$$B_4 := B_4^{'} = 13, \quad f(4) = f^{'}(4) = 3,$$

и относим узел $j_* = 4$ ко множеству I_*, заменяя I_* на $I_* := I_* \cup j_* = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Узел $t = 4$ является помеченным.

Алгоритм заканчивает свою работу. Длина кратчайшего пути из узла $s = 1$ в узел $t = 4$ равна $B_4^{'} = 13$. Сам путь восстанавливаем с помощью вторых меток по правилу

$$f(t) = 3,\ f(3) = 2,\ f(2) = 7,\ \ f(7) = 5,\ f(5) = 5,\ f(6) = 1 = s. \tag{6.1}$$

Путь из s в t имеет вид:

$$1 = s \to 6 \to 5 \to 7 \to 2 \to 3 \to 4 = t. \tag{6.2}$$

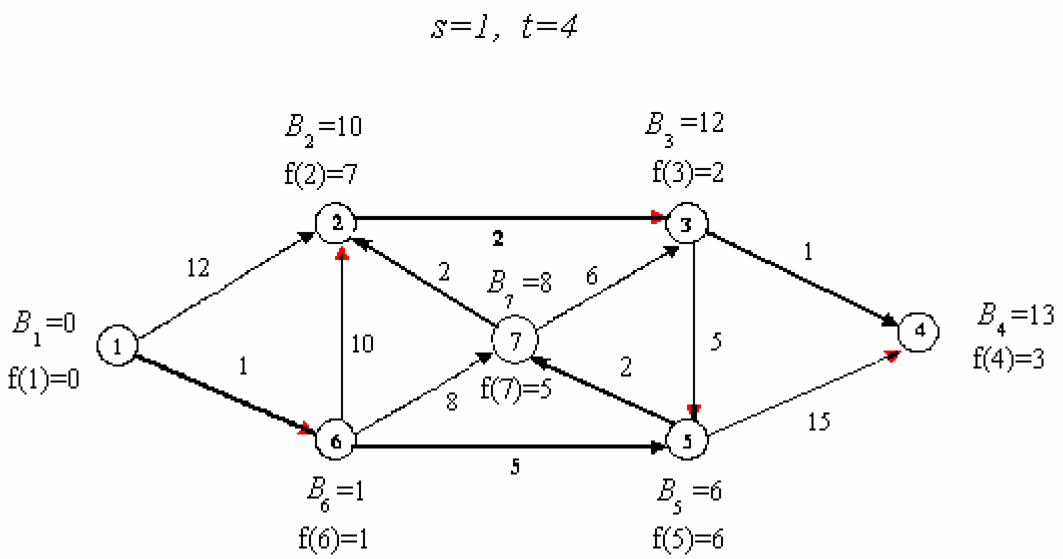
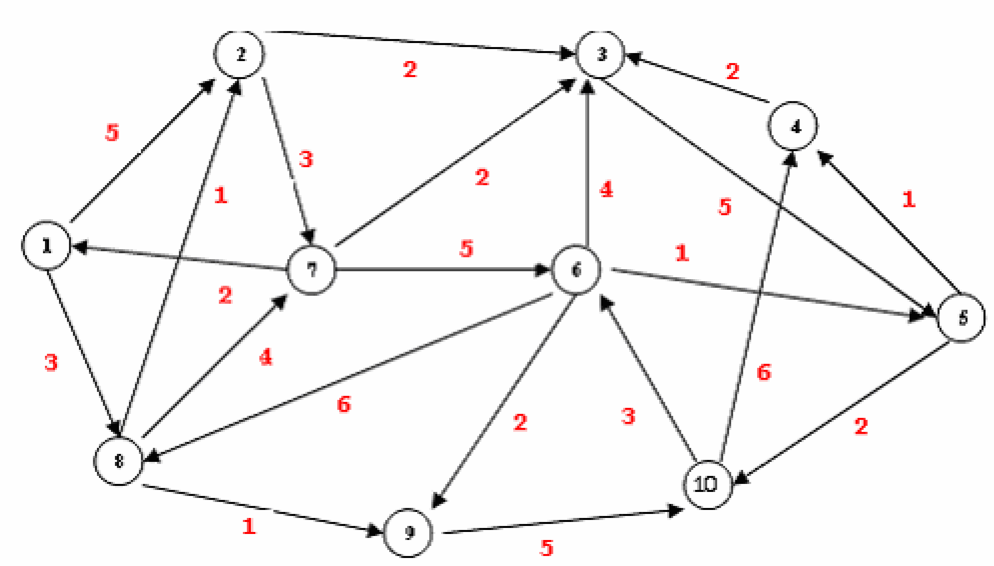


Рис. 6.1.

Задачи.

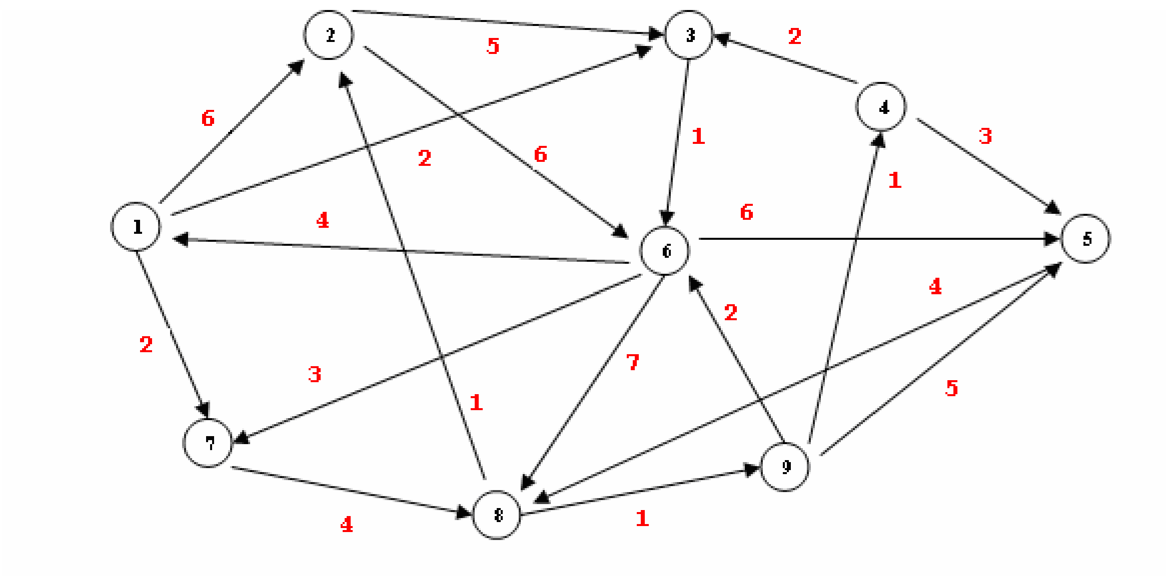
Решить задачи о нахождении дерева кратчайших путей из узла s = 1.

Задача 1.



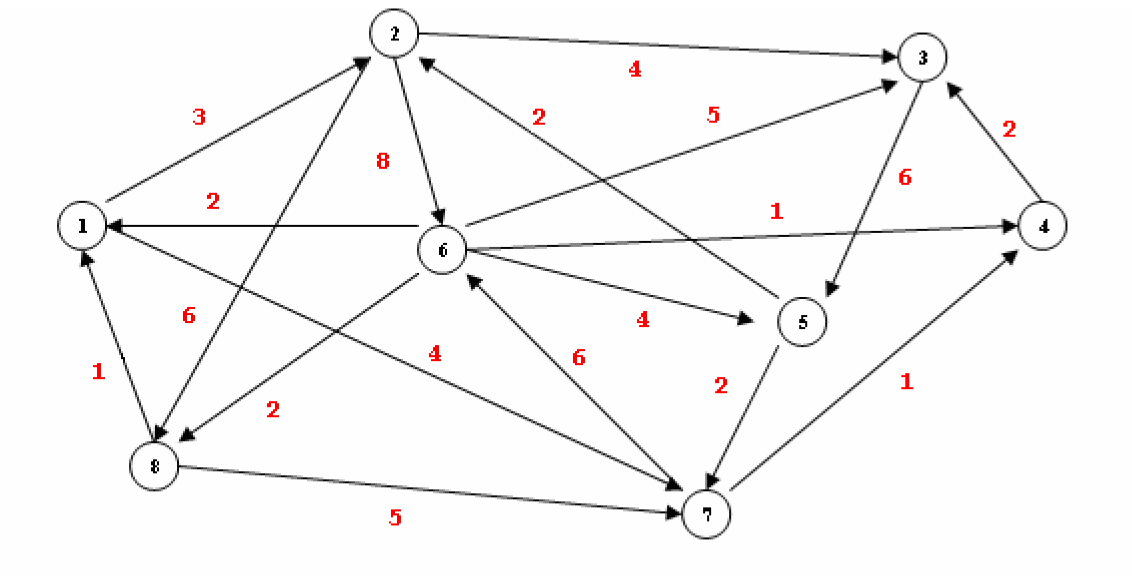
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 4, B_3 = 6, B_4 = 13, B_5 = 12, B_6 = 12, B_7 = 7, B_8 = 3, B_9 = 4, B_{10} = 9$. Здесь и далее через B_j обозначена длина минимального пути из узла $s = 1$ в узел j.

Задача 2.



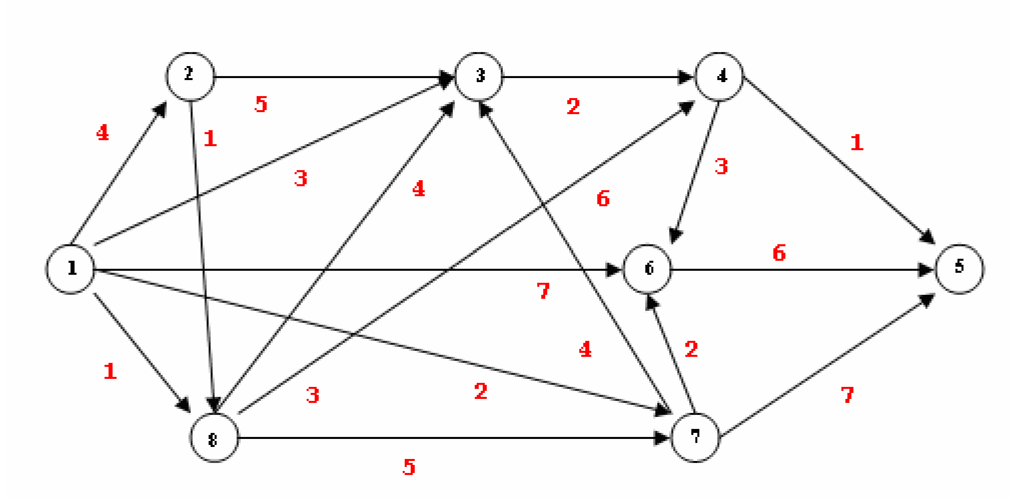
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 6, B_3 = 10, B_4 = 8, B_5 = 11, B_6 = 9, B_7 = 2, B_8 = 6, B_9 = 7.$

Задача 3.



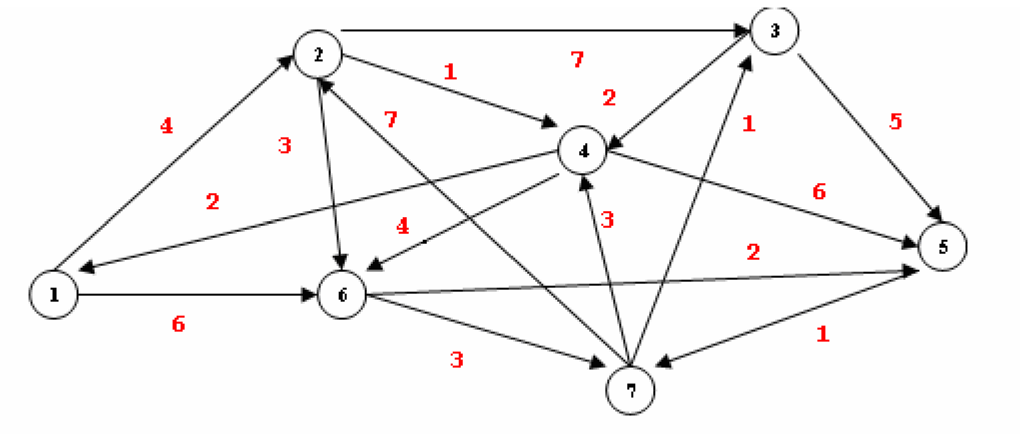
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 3, B_3 = 7, B_4 = 5, B_5 = 13, B_6 = 10, B_7 = 4, B_8 = 9.$

Задача 4.



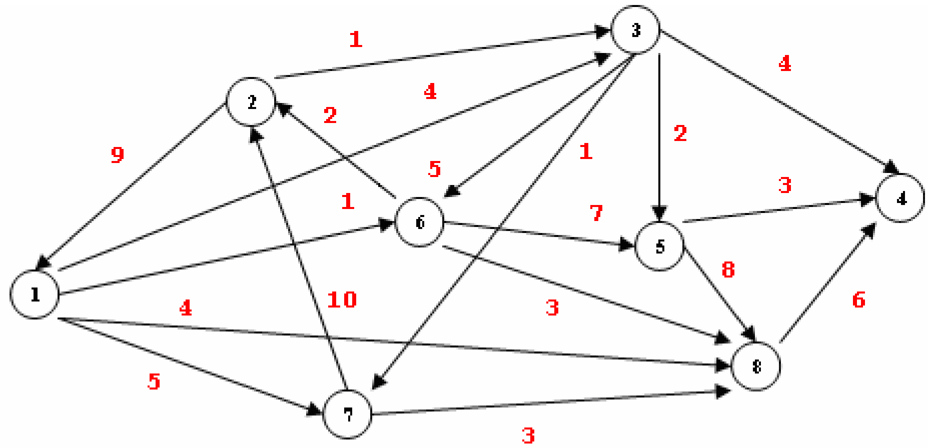
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 4, B_3 = 5, B_4 = 4, B_5 = 5, B_6 = 4, B_7 = 2, B_8 = 1.$

Задача 5.



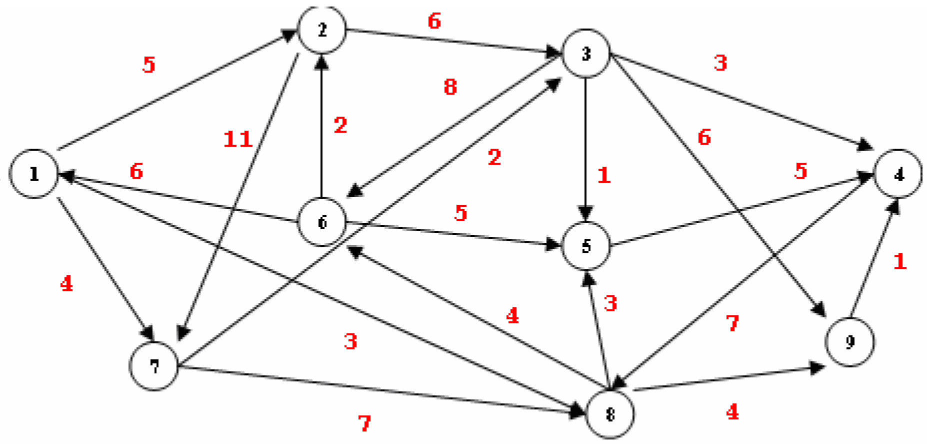
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 4, B_3 = 10, B_4 = 5, B_5 = 8, B_6 = 6, B_7 = 9.$

Задача 6.



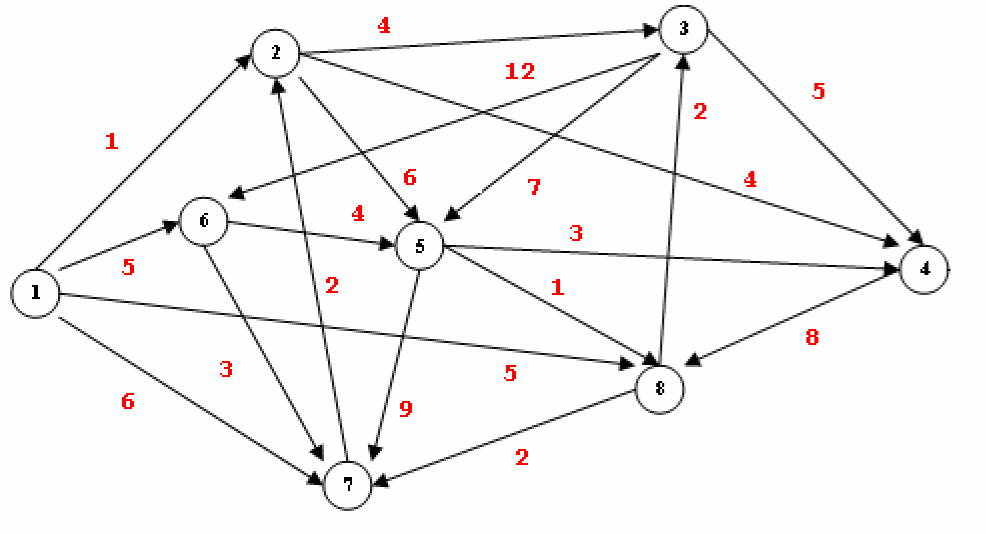
Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 3, B_3 = 4, B_4 = 8, B_5 = 6, B_6 = 1, B_7 = 5, B_8 = 4.$

Задача 7.



Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 5, B_3 = 6, B_4 = 8, B_5 = 6, B_6 = 7, B_7 = 4, B_8 = 3, B_9 = 7.$

Задача 8.



Ответ: $B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = 5, B_4 = 5, B_5 = 7, B_6 = 5, B_7 = 6, B_8 = 5.$

7. Задачи о нахождении пути максимальной длины из узла s в узел t

Пример. На сети, изображенной на Рис. 7.1, требуется найти максимальный путь из узла $s=1$ в узел $t=4$. Числа, указанные на дугах, равны длине соответствующей дуги. Решим эту задачу методом пометок.

На **первой итерации** множество помеченных узлов $I_* = \{s\}$ содержит только узел $s=1$, метки которого равны $B_1 = 0,\ f(1) = 0.$ Рассмотрим множество узлов, соседних с I_*. Это множество $w(I_*) = \{2,6\}$. Во множестве $w(I_*)$ находим узел j_*, для которого $I_{j_*}^- \subset I_*$. Это узел $j_* = 6$. Помечаем этот узел, приписывая ему метки $B_6 = \min_{i \in I_6^-}\{B_i + c_{i6}\} = 1$ и $f(6) = 1$. Переходим к следующей итерации.

На **второй итерации** множество помеченных узлов имеет вид $I_* = \{s,6\}$. Ему соответствует множество соседних узлов $w(I_*) = \{2,3,5\}$. Во множестве $w(I_*)$ находим узел $j_* = 2$, для которого $I_{j_*}^- = \{1,6\} \subset I_*$. Помечаем этот узел, приписывая ему метки $B_2 = \min_{i \in I_2^-}\{B_i + c_{i2}\} = 5$ и $f(2) = 6$. Переходим к следующей итерации.

На **третьей итерации** множество помеченных узлов имеет вид $I_* = \{s,2,6\}$. Ему соответствует множество соседних узлов $w(I_*) = \{3,5\}$. Во множестве $w(I_*)$ находим узел $j_* = 5$, для которого $I_{j_*}^- = \{2,6\} \subset I_*$. Помечаем этот узел, приписывая ему метки $B_5 = \min_{i \in I_5^-}\{B_i + c_{i5}\} = 12$ и $f(5) = 2$. Переходим к следующей итерации.

На **четвертой итерации** множество помеченных узлов имеет вид $I_* = \{s,2,5,6\}$. Ему соответствует множество соседних узлов $w(I_*) = \{3,4\}$. Во множестве $w(I_*)$ находим узел $j_*=3$, для которого $I_{j_*}^-=\{2,5,6\}\subset I_*$. Помечаем этот узел, приписывая ему метки $B_3=\min\limits_{i\in I_3^-}\{B_i+c_{i3}\}=13$ и $f(3)=5$. Переходим к следующей итерации.

На **пятой итерации** множество помеченных узлов имеет вид $I_*=\{s,2,3,5,6\}$. Ему соответствует множество соседних узлов $w(I_*)=\{4\}$. Для узла $j_*=4\in w(I_*)$ имеем $I_{j_*}^-=\{3,5\}\subset I_*$. Помечаем этот узел, приписывая ему метки $B_4=\min\limits_{i\in I_4^-}\{B_i+c_{i4}\}=21$ и $f(4)=3$. Переходим к следующей итерации.

На **шестой итерации** выполняется включение $t=4\in I_*=\{s,2,3,4,5,6\}$. Значит, максимальный пусть найден, его длина равна $B_4=21$. Вторые метки $f(j),\ \ j=\overline{1,6}$, позволяют восстановить критический путь из s в t по правилу:

$$i_1:=f(t)=3,\quad i_2:=f(3)=5,\quad i_3:=f(5)=2,\quad i_4:=f(2)=6,\ i_6:=f(6)=1.$$

Следовательно, искомый путь имеет вид: $s=1\to 6\to 2\to 5\to 3\to 4=t$.

На Рис. 7.1. приведены значения функции Беллмана $B_j,\ \ j=\overline{1,6}$, и вторых меток $f(j), j=\overline{1,6}$.

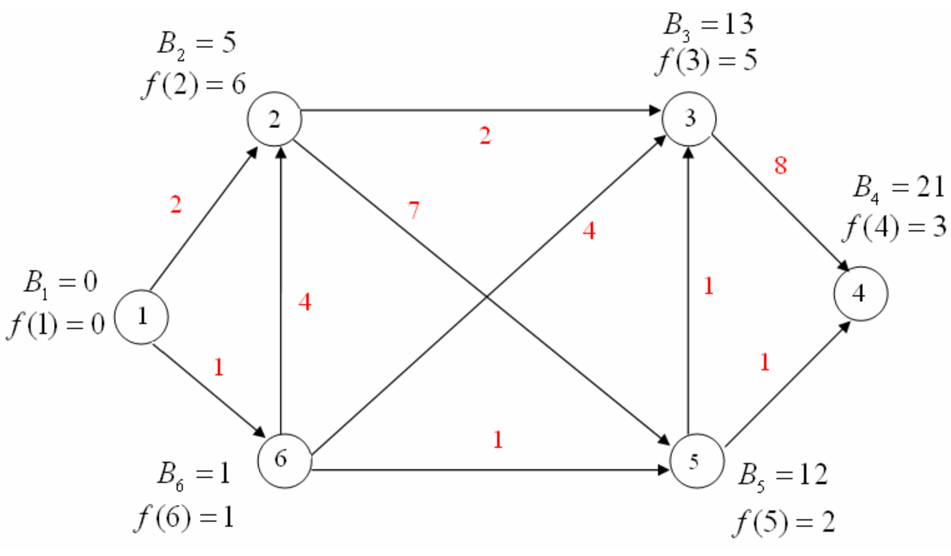
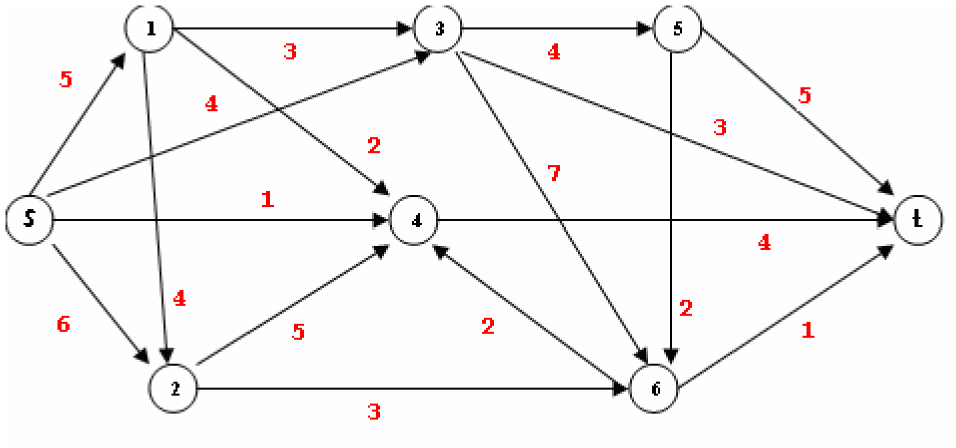


Рис. 7.1.

Задачи.

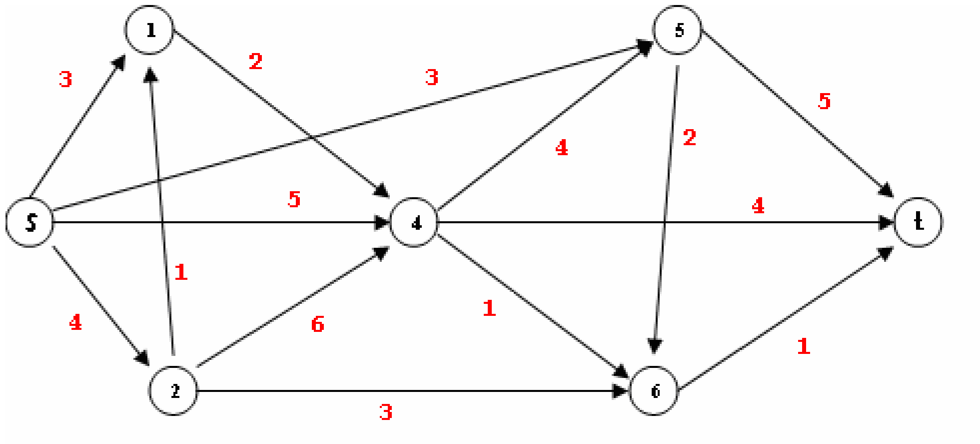
Решить задачи о нахождении пути максимальной длины из узла s в узел t.

Задача 1.



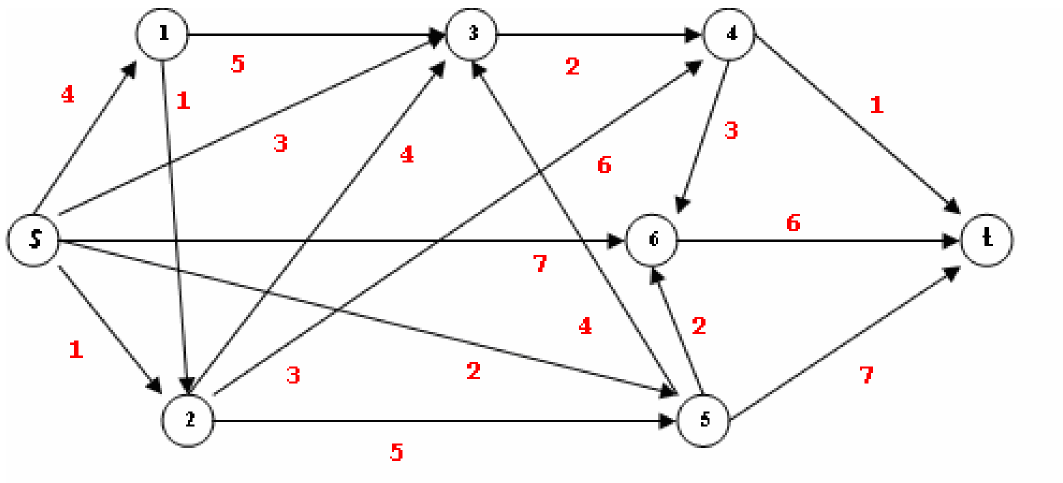
Ответ: длина максимального пути равна 21.

Задача 2.



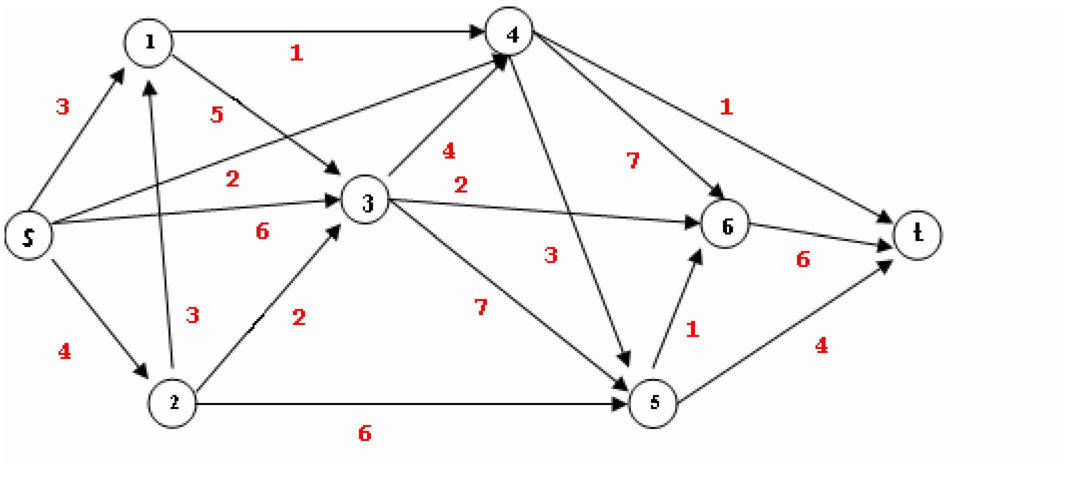
Ответ: длина максимального пути равна 17.

Задача 3.



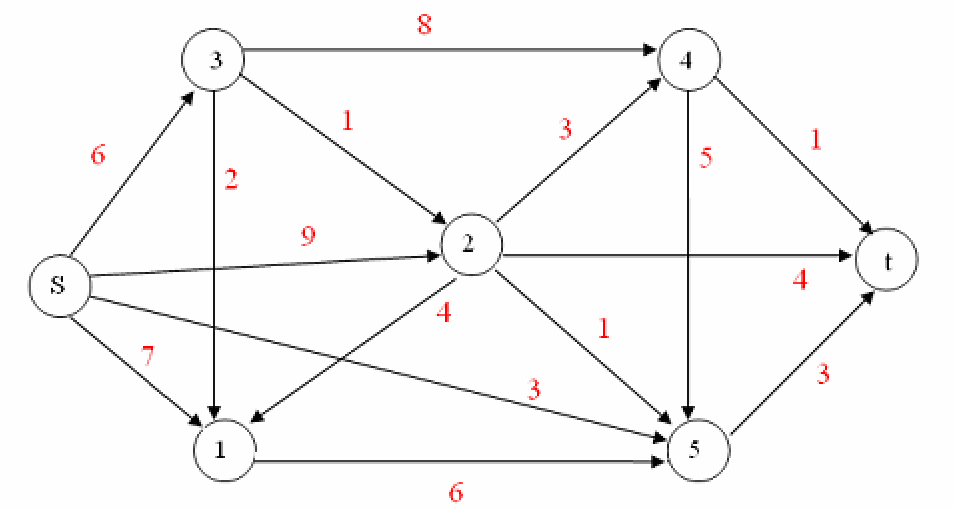
Ответ: длина максимального пути равна 25.

Задание 4.



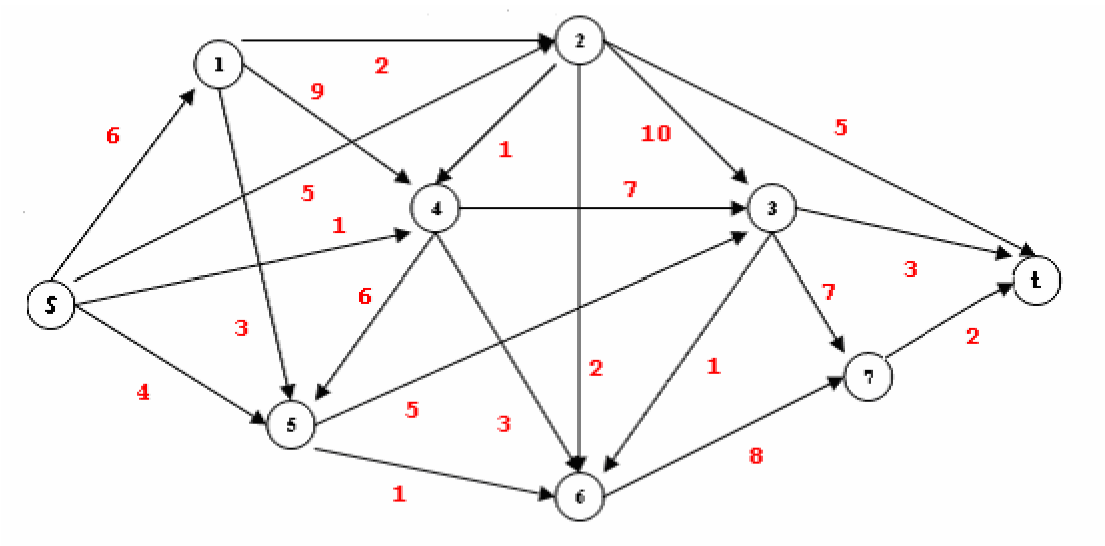
Ответ: длина максимального пути равна 29.

Задача 5.



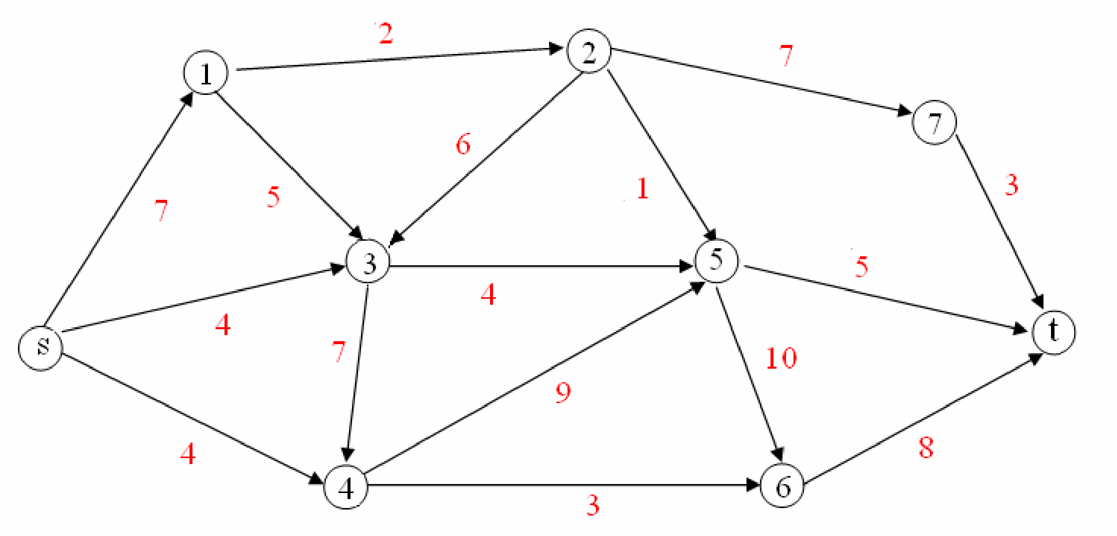
Ответ: длина максимального пути равна 22.

Задача 6.



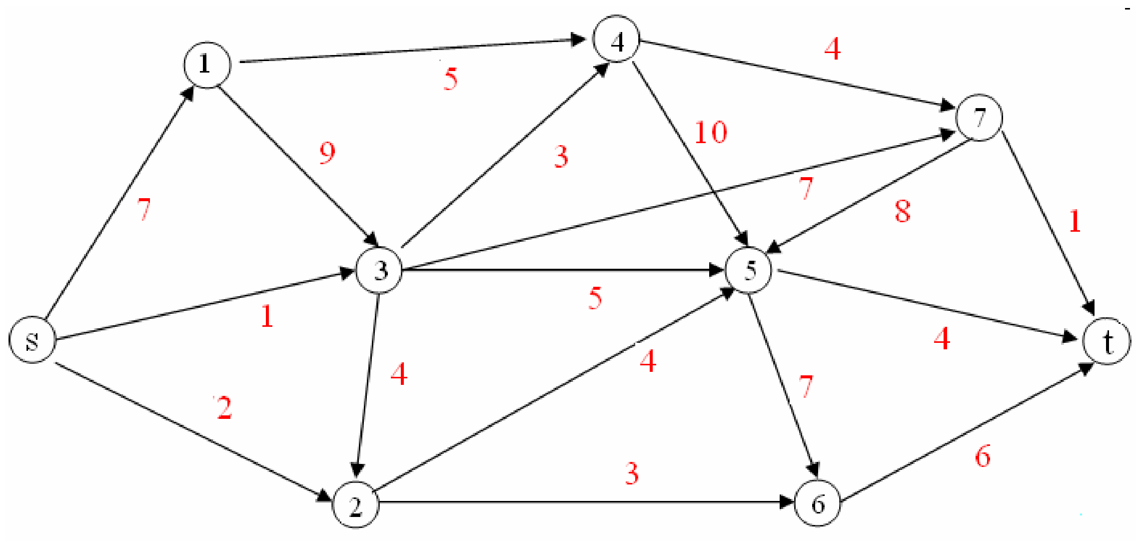
Ответ: длина максимального пути равна 37.

Задача 7.



Ответ: длина максимального пути равна 49.

Задача 8.



Ответ: длина максимального пути равна 44.

8. Задачи о нахождении максимального потока из узла s в узел t

Пример 1. Рассмотрим сеть, приведенную на Рис. 8.1. Пропускные способности дуг d_{ij} указаны на дугах красными цифрами. Требуется найти максимальный поток, который можно пропустить из узла s в узел t.

Пусть на данной сети уже имеется допустимый поток $x=(x_{ij},(i,j)\in U)$ величины $v=9$. Дуговые потоки x_{ij} указаны на дугах черными цифрами. Проверим, является ли данный поток максимальным, и если нет, то построим новый поток, для которого $\overline{v}>v=9$. Для этого осуществим итерации метода Форда-Фалкерсона.

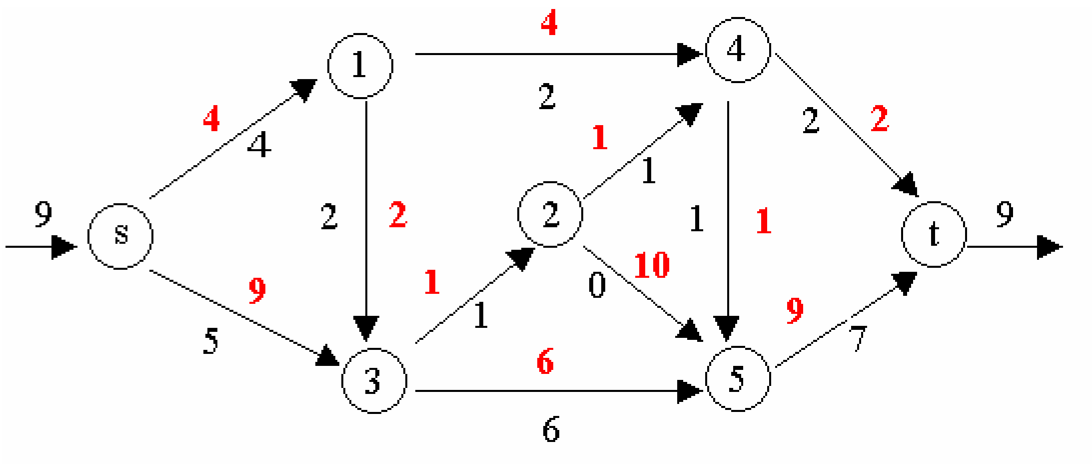


Рис. 8.1.

Построение увеличивающего пути.

Итерация 1.

Шаг 1. Полагаем

$$I_c=1, I_t=1, L=\{s\},\quad g(s)=0,\quad i=s,\quad p_s=1.$$

Шаг 2. Из узла $i=s$ есть только одна дуга $(s,3)\in U$, для которой $x_{s3}=5<9=d_{s3}$. Помечаем узел 3, полагая $I_t=2, L=\{s,3\}$, $g(3)=s$, $p_3=2$.

Шаг 3. Для узла $i = s$ нет ни одной дуги $(j,i) \in U$, для которой $x_{ji} > 0.$ Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Поскольку $t \notin L$, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1$ и поскольку $p_3 = I_c$, то полагаем $j_0 = 3.$

Переходим к шагу 2 итерации 2, положив $i = j_0$.

Итерация 2.

Шаг 2. Из узла $i = 3$ нет дуг $(i, j) \in U$, для которых $x_{ij} < d_{ij}$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Для узла $i = 3$ есть одна дуга $(1,3) \in U$, для которой $x_{13} > 0.$ Помечаем узел 1, полагая $I_t = 3,\ \ L = \{s,3,1\},\ \ g(1) = -3,\ \ p_1 = 3.$

Шаг 4. Поскольку $t \notin L$, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1$=3 и находим узел $j_0 \in L,$ для которого $p_{j_0} = I_c$. На данной итерации $j_0 = 1.$ Переходим к шагу 2 итерации 3, полагая $i = j_0 = 1.$

Итерация 3.

Шаги 2 - 3. С помощью узла $i = 1$ помечаем узел 4, полагая

$$I_t = 4, L = \{s,3,1,4\}, g(4) = 1, p_4 = 4\,.$$

Шаг 4. Узел $t \notin L$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1$ = 4 и находим узел $j_0 \in L,$ для которого $p_{j_0} = I_c$. На данной итерации $j_0 = 4$. Переходим к шагу 2 итерации 4, полагая $i = j_0 = 4.$

Итерация 4.

Шаги 2 - 3. С помощью узла i = 4 помечаем узел 2, полагая

$$I_t = 5, L = \{s,3,1,4,2\}, g(2) = -4, p_2 = 5\,.$$

Шаг 4. Узел $t \notin L$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1 = 5,\ j_0 = 2$. Переходим к шагу 2 итерации 5, заменив *i* на $j_0 = 2$.

Итерация 5.

Шаги 2 - 4. С помощью узла $i = 2$ помечаем узел 5, полагая

$$I_t = 6, L = \{s,3,1,4,2,5\}, g(5) = 2, p_5 = 6.$$

Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1 = 6,\ j_0 = 5$. Переходим к шагу 2 итерации 6, заменив *i* на $j_0 = 5$.

Итерация 6.

Шаги 2 - 4. С помощью узла $i = 5$ помечаем узел *t*, полагая $L = \{s,3,1,4,2,5,t\}, g(t) = 5.$ Узел $t \in L$. STOP – увеличивающий путь построен. Значит, имеющийся поток можно увеличить.

Переходим к алгоритму восстановления пути и увеличения потока. Применяя **алгоритм восстановления пути и увеличения потока**, получаем

$$q(t) = 5, \quad \alpha_1 = d_{5t} - x_{5t} = 2,$$

$$q(5) = 2, \quad \alpha_2 = \min\{\alpha_1, 10\} = 2,$$

$$q(2) = -4, \quad \alpha_3 = \min\{\alpha_2, 1\} = 1,$$

$$q(4) = 1, \quad \alpha_4 = \min\{\alpha_3, 2\} = 1,$$

$$q(1) = -3, \quad \alpha_5 = \min\{\alpha_4, 2\} = 1,$$

$$q(3) = s, \quad \alpha_6 = \min\{\alpha_5, 4\} = 1.$$

Увеличиваем поток вдоль построенного увеличивающего пути

$$U_n = \{ (s,3),(1,3),(1,4),(2,4),(2,5),(5,t) \},$$

изменяя дуговые потоки на дугах $(i, j) \in U$: по правилу

$$\bar{x}_{s3} = x_{s3} + \alpha_6 = 6,\ \ \bar{x}_{13} = x_{13} - \alpha_6 = 1,\ \bar{x}_{14} = x_{14} + \alpha_6 = 3,$$

$$\bar{x}_{24} = x_{24} - \alpha_6 = 0,\ \ \bar{x}_{25} = x_{25} + \alpha_6 = 1,\ \ \bar{x}_{5t} = x_{5t} + \alpha_6 = 8,$$

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}, (i, j) \in U \therefore U_n, \quad \bar{v} = v + \alpha_6.$$

Сеть S с новым потоком $\bar{x}$ приведена на Рис. 8.2.

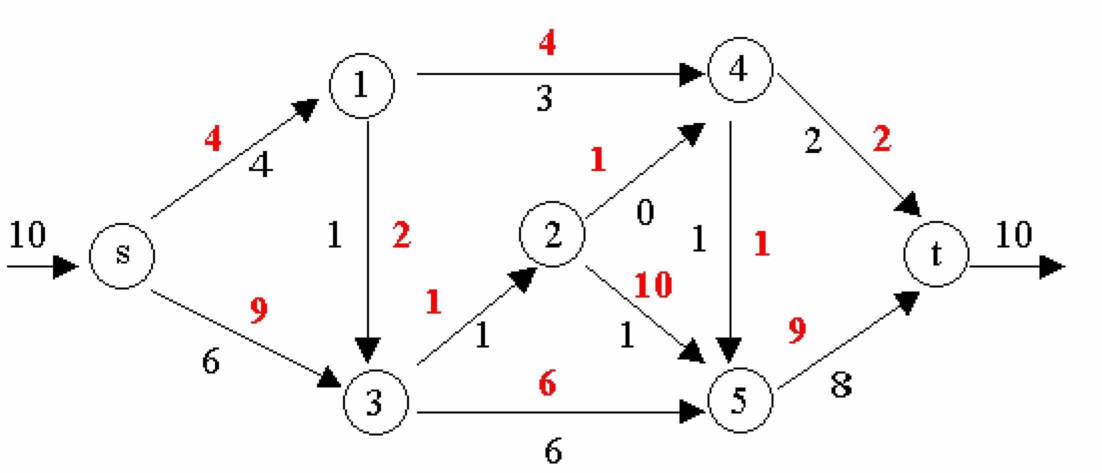


Рис. 8.2

Поток $\bar{x}$ является максимальным. Действительно, применив к сети S с потоком $\bar{x}$ алгоритм построения увеличивающего пути, мы можем пометить только узлы $L = \{\ s, 3, 1, 4,\ \}$. После чего на шаге 5 не удается найти узел j_0, для которого $p_{j_0} = I_c$. Легко проверить, что множество узлов L задают разрез

$$\omega(L) = \{\ (3,2), (3,6), (4,5), (2,t)\ \},$$

пропускная способность которого равна

$$\rho(\omega(L)) = 1 + 6 + 1 + 2 = 10 = \bar{v}.$$

Согласно теореме, $\bar{x}, \bar{v}$ – максимальный поток, $\omega(L)$ – минимальный разрез.

Пример 2. Рассмотрим сеть, приведенную на Рис.8.3, где черными цифрами указаны пропускные способности дуг. Требуется найти максимальный поток, который можно пропустить из узла $s = 1$ в узел $t = 4$.

Решим данную задачу методом Форда-Фалкерсона.

Итерация 1.

В качестве начального допустимого потока возьмем нулевой поток. На Рис.8.3 и далее в данном примере дуговые потоки указаны красными цифрами около соответствующих дуг.

В исходной сети с нулевым потоком ищем увеличивающий путь из узла $s=1$в узел $t=4$. Пусть это будет путь, отмеченный на Рис.8.3 розовыми линиями.

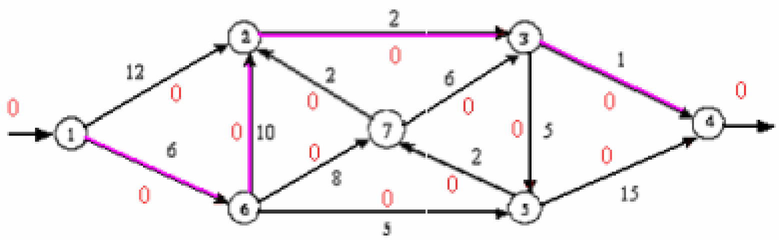


Рис. 8.3.

По найденному увеличивающему пути пропускаем поток максимально допустимой величины. Для данного пути эта величина равна $\alpha=1$. Изменяем дуговые потоки вдоль увеличивающего пути: к «старым» дуговым потокам на прямых дугах пути прибавляем величину $\alpha=1$, от «старых» дуговых потоков на обратных дугах пути вычитаем величину $\alpha=1$. Дуговые потоки дуг, не принадлежащих увеличивающему пути, не меняются. В результате в исходной сети будет построен новый поток величины $v=1$ с дуговыми потоками, указанными на Рис.8.4. Переходим к следующей итерации.

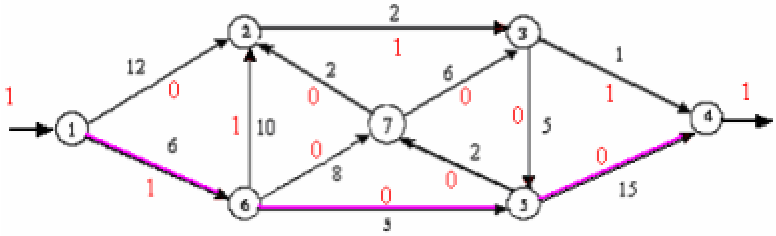


Рис. 8.4.

Итерация 2.

В исходной сети с текущим потоком, приведенным на Рис. 8.4, ищем увеличивающий путь из узла $s=1$ в узел $t=4$. Пусть это будет путь, отмеченный на Рис. 8.4 розовыми линиями.

По найденному увеличивающему пути пропускаем поток максимально допустимой величины. Для данного пути эта величина равна $\alpha=5$. Изменяем дуговые потоки вдоль увеличивающего пути: к «старым» дуговым потокам на прямых дугах пути прибавляем величину $\alpha=5$, от «старых» дуговых потоков на обратных дугах пути вычитаем величину $\alpha=5$. Дуговые потоки дуг, не принадлежащих увеличивающему пути, не меняются. В результате в исходной сети будет построен новый поток величины $v=6$ с дуговыми потоками, указанными на Рис. 8.5. Переходим к следующей итерации.

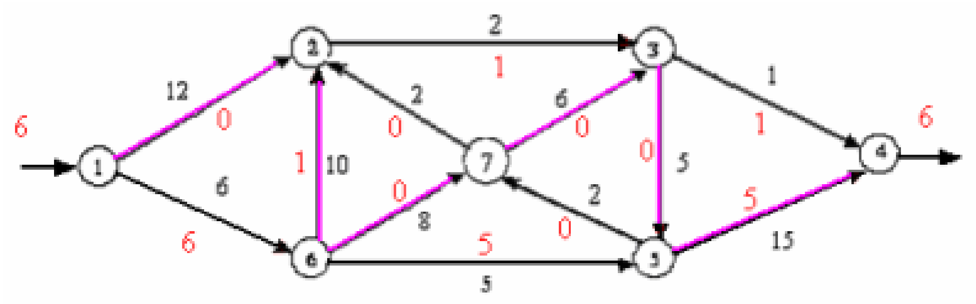


Рис. 8.5.

Итерация 3.

В исходной сети с текущим потоком, приведенным на Рис. 3, ищем увеличивающий путь из узла $s=1$ в узел $t=4$. Пусть это будет путь, отмеченный на Рис. 3 розовыми линиями. Заметим, что в данном увеличивающем пути присутствует обратная дуга. Это дуга $(6,2)$.

По найденному увеличивающему пути пропускаем поток максимально допустимой величины. Для данного пути эта величина равна $\alpha = 1$. Изменяем дуговые потоки вдоль увеличивающего пути: к «старым» дуговым потокам на прямых дугах пути прибавляем величину $\alpha = 1$, от «старых» дуговых потоков на обратных дугах пути вычитаем величину $\alpha = 1$. Дуговые потоки дуг, не принадлежащих увеличивающему пути, не меняются. В результате в исходной сети будет построен новый поток величины $v = 7$ с дуговыми потоками, указанными на Рис. 8.6. Переходим к следующей итерации.

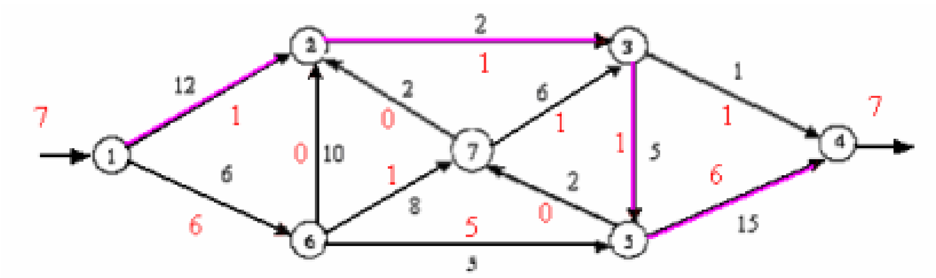


Рис. 8.6.

Итерация 4.

В исходной сети с текущим потоком, приведенным на Рис. 4, ищем увеличивающий путь из узла $s = 1$ в узел $t = 4$. Пусть это будет путь, отмеченный на Рис. 3 розовыми линиями. Все дуги данного пути являются прямыми.

По найденному увеличивающему пути пропускаем поток максимально допустимой величины. Для данного пути эта величина равна $\alpha = 1$. Изменяем дуговые потоки вдоль увеличивающего пути: к «старым» дуговым потокам на прямых дугах пути прибавляем величину $\alpha = 1$. Как отмечалось выше, обратных дуг в данном пути нет. Дуговые потоки дуг, не принадлежащих увеличивающему пути, не меняются. В результате в исходной сети будет построен новый поток величины $v = 8$ с дуговыми потоками, указанными на Рис. 8.7. Переходим к следующей итерации.

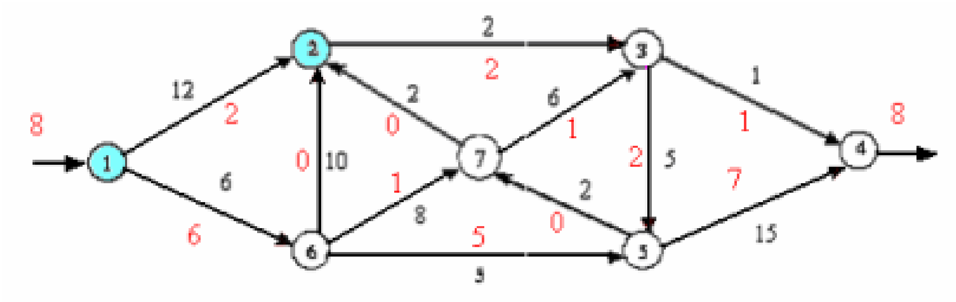


Рис. 8.7.

Итерация 5.

В исходной сети с текущим потоком, приведенным на Рис. 8.7, ищем увеличивающий путь из узла $s=1$ в узел $t=4$. В процессе построения увеличивающего пути методом Форда-Фалкерсона удается пометить только множество узлов $I_* = \{1,2\}$. Остальные узлы, включая и узел $t=4$, нельзя пометить. Это говорит о том, что в сети с данным потоком нельзя построить увеличивающий путь, что, в свою очередь, означает, что простроенный поток является максимальным потоком для данной сети.

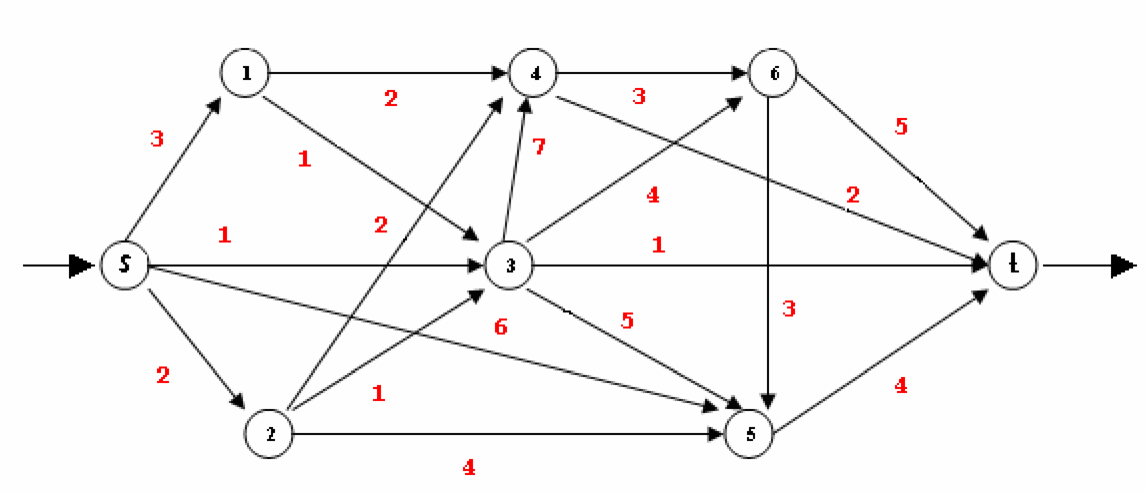
Согласно теории, величина максимального потока величины $v=8$ должна равняться пропускной способности разреза, построенного по множеству помеченных узлов $I_* = \{1,2\}$. Действительно, имеем

$$\omega(I_*) = \{(1,6),\ (2,3)\}, \qquad \sum_{(i,j)\in\omega(I_*)} d_{ij} = 6+2=8=v.$$

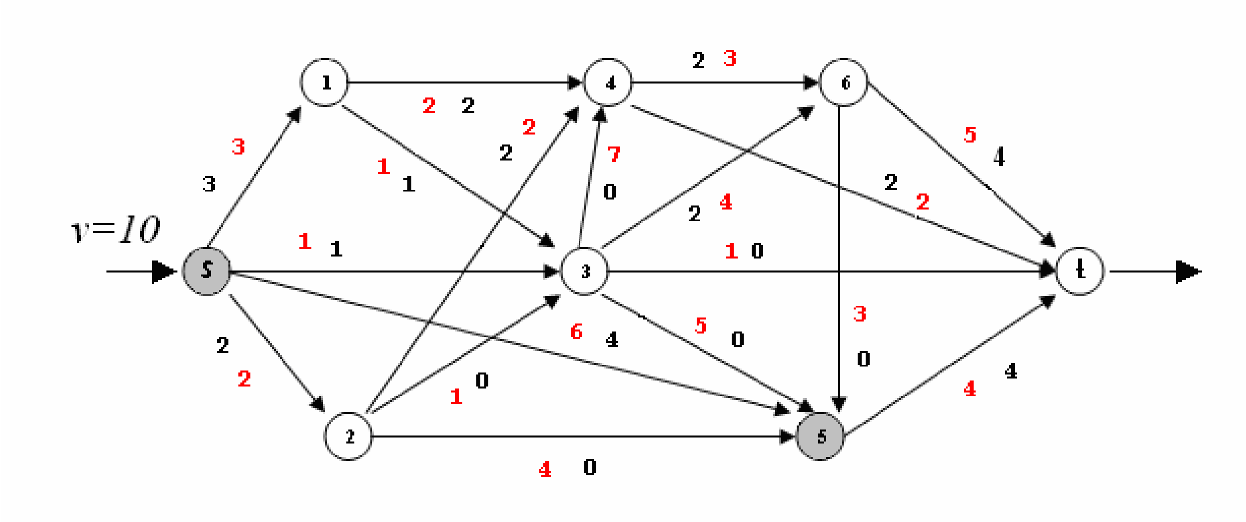
Задачи.

Решить задачи о максимальном потоке из узла s в узел t. Красными цифрами на дугах обозначены пропускные способности дуг.

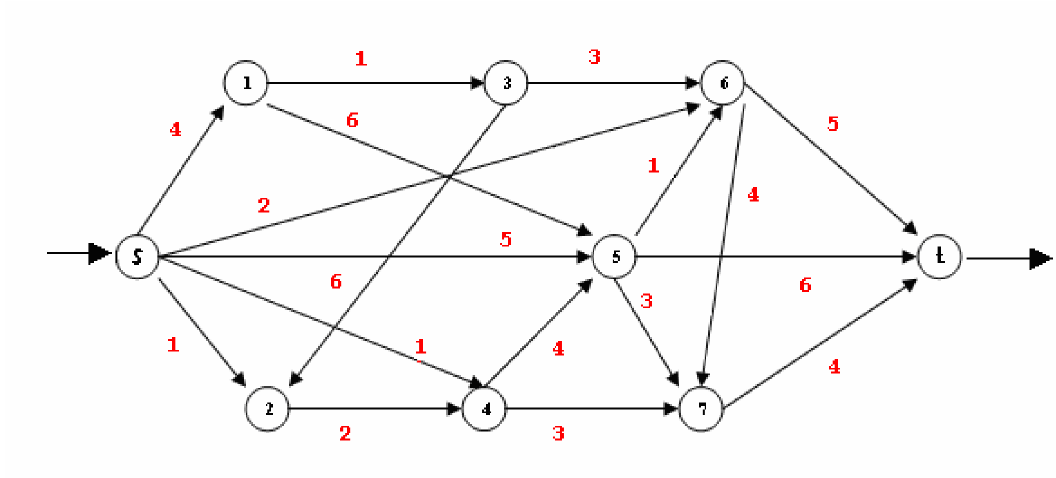
Задача 1.



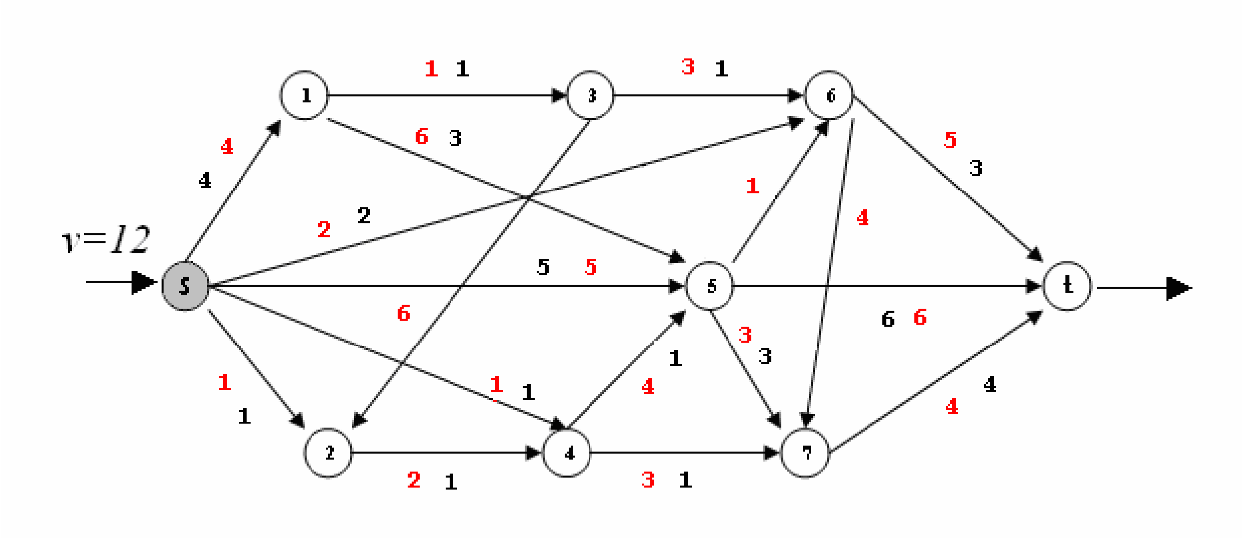
Ответ: величина максимального потока равна $v = 10$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже. Здесь и далее дуговые потоки указаны на дугах черными цифрами.



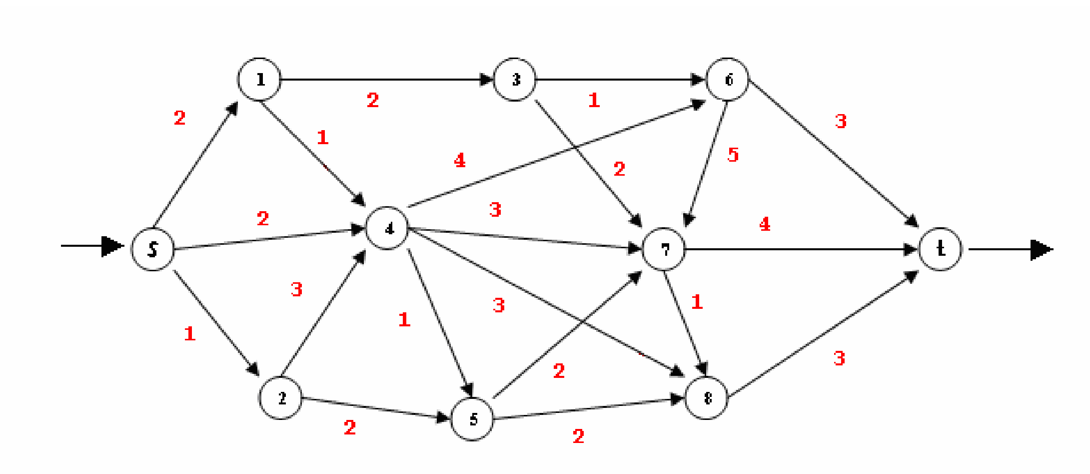
Задание 2.



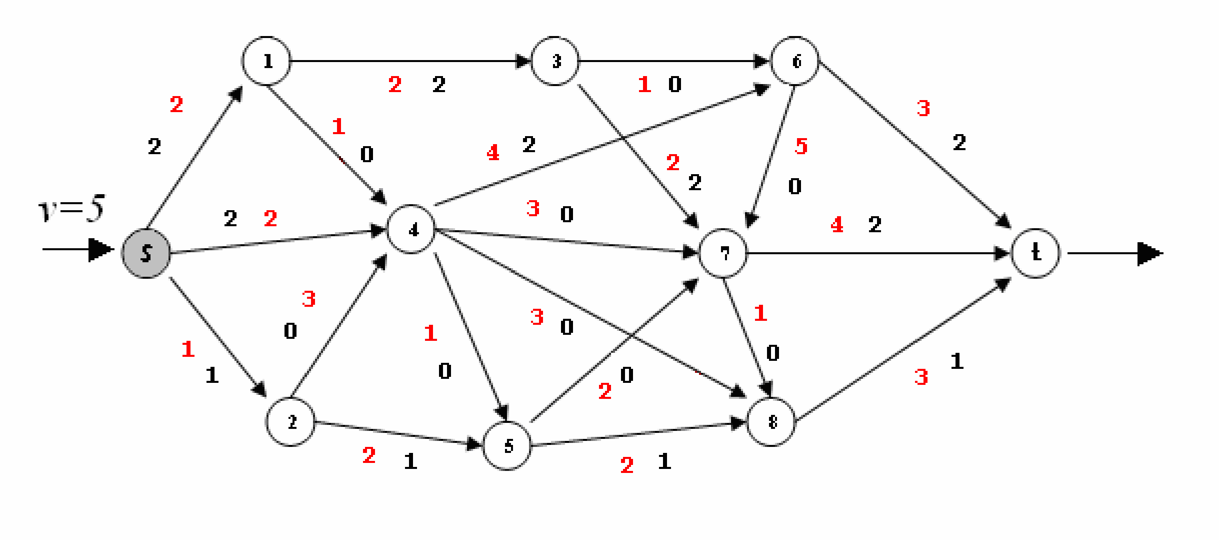
Ответ: величина максимального потока равна $v = 12$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



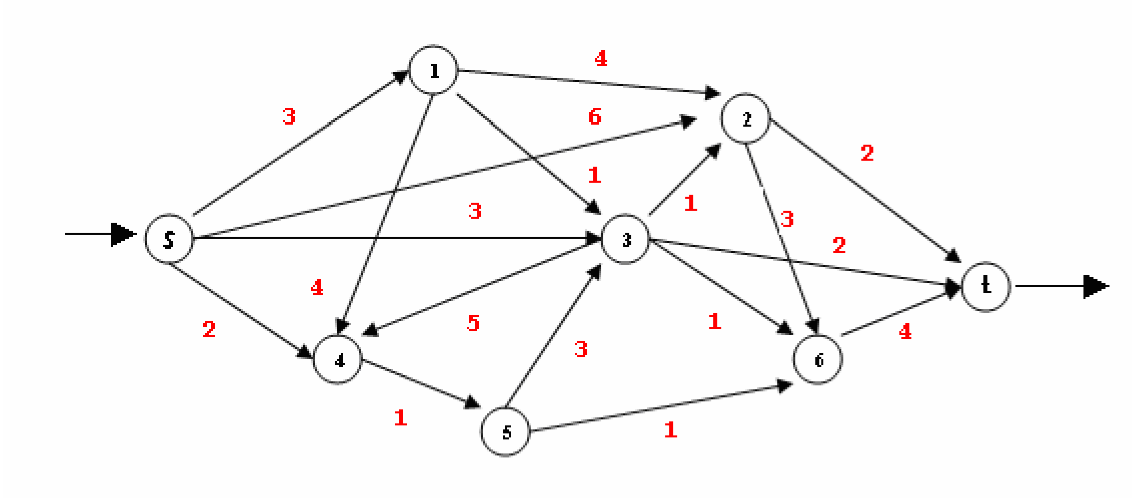
Задача 3.



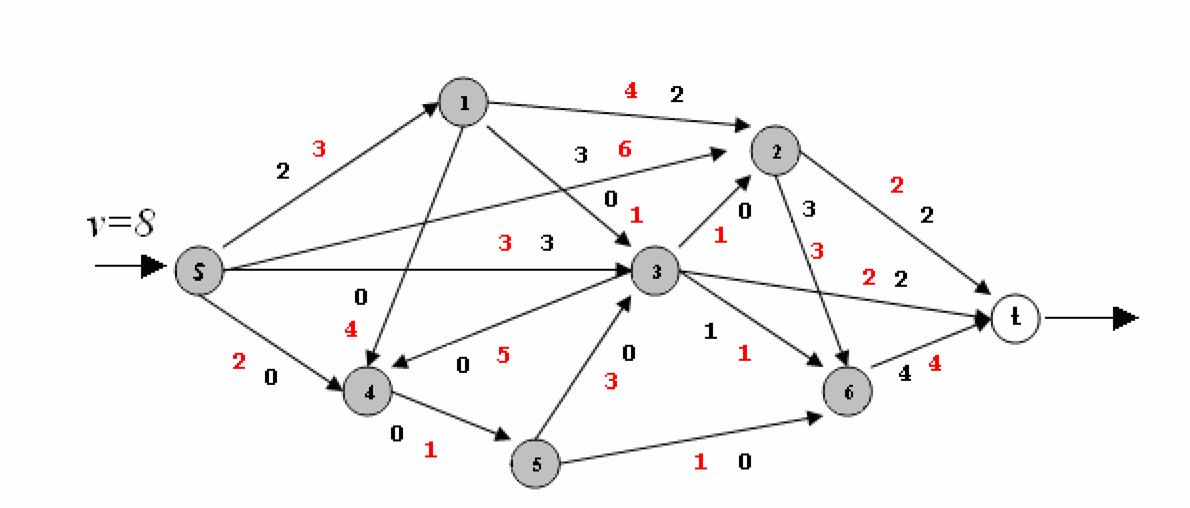
Ответ: величина максимального потока равна $v = 5$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



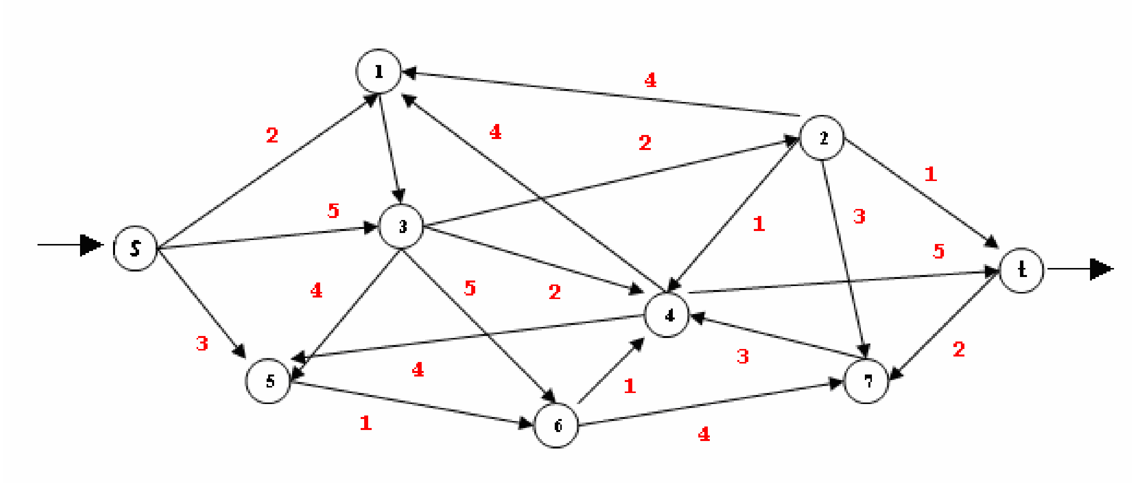
Задача 4.



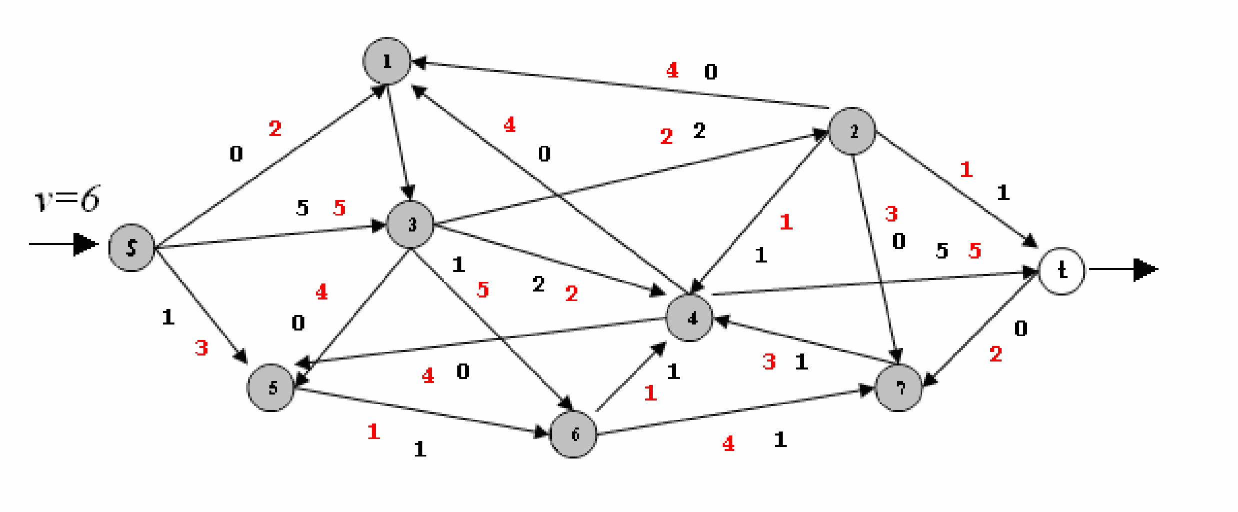
Ответ: величина максимального потока равна $v=8$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



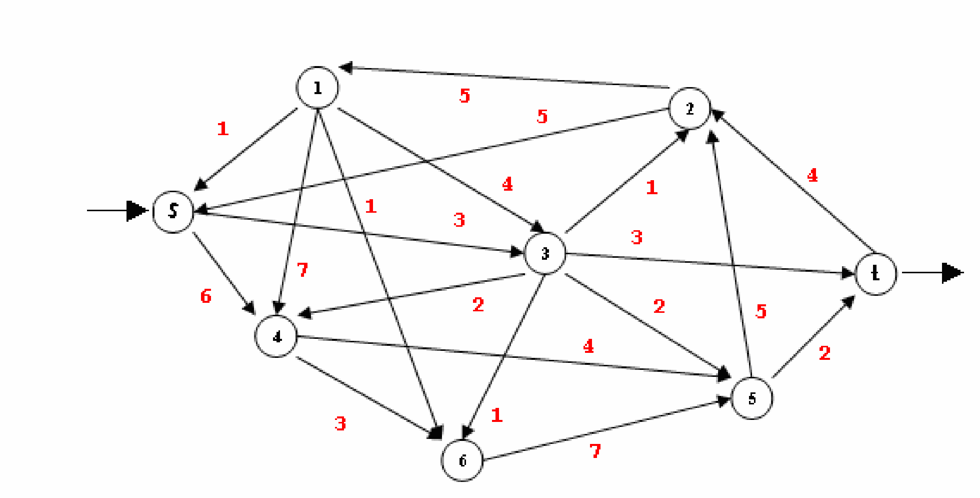
Задача 5.



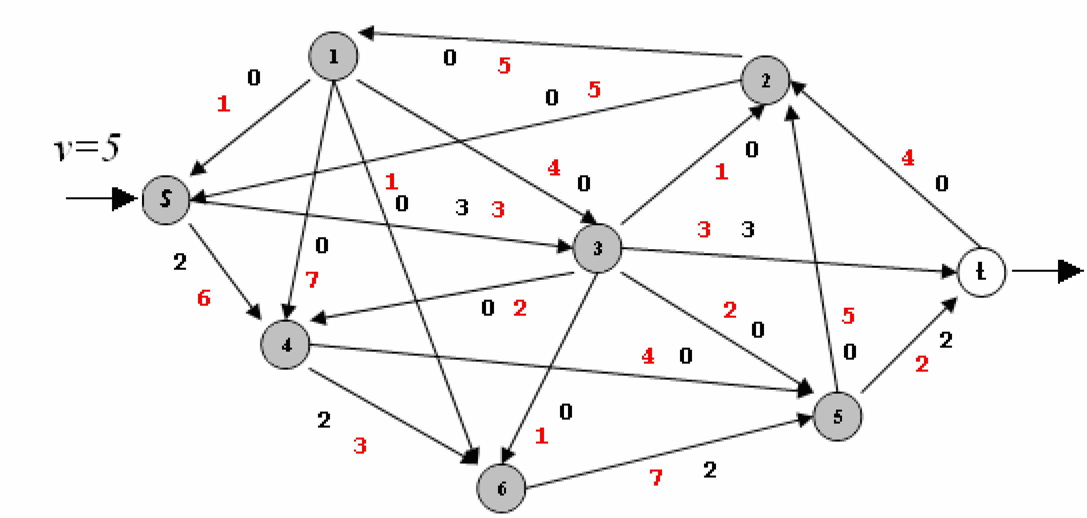
Ответ: величина максимального потока равна $v=6$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



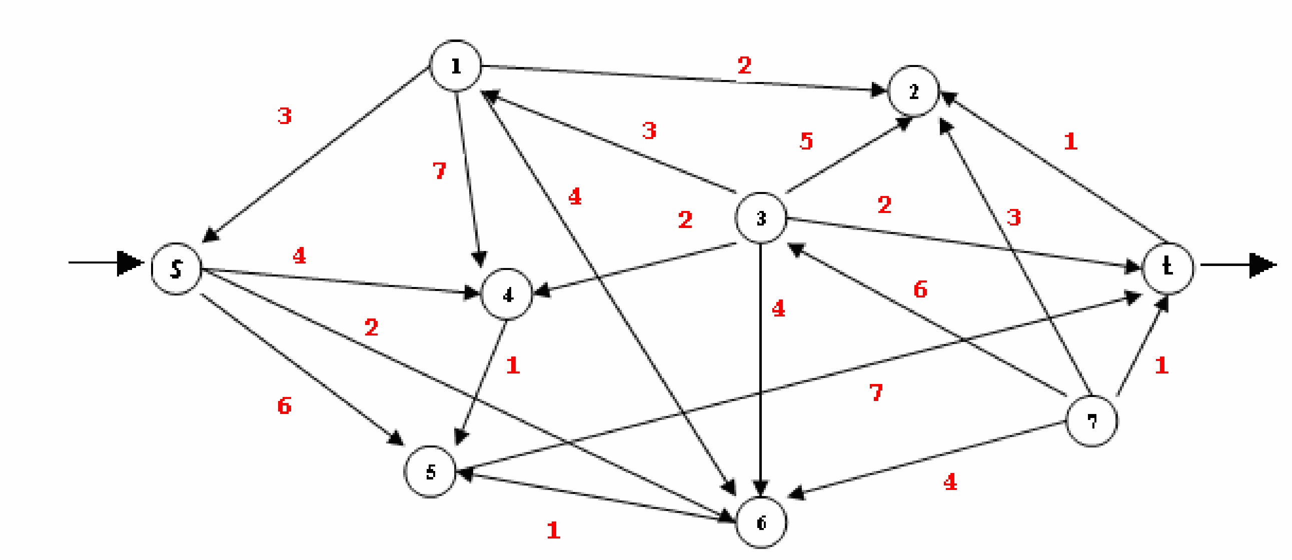
Задача 6.



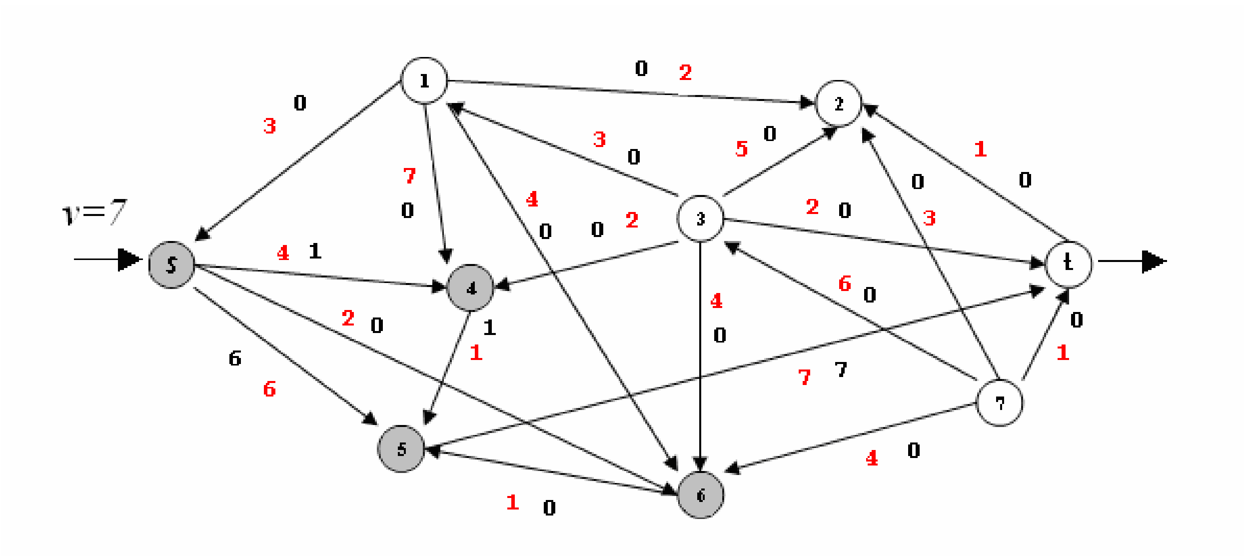
Ответ: величина максимального потока равна $v = 5$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



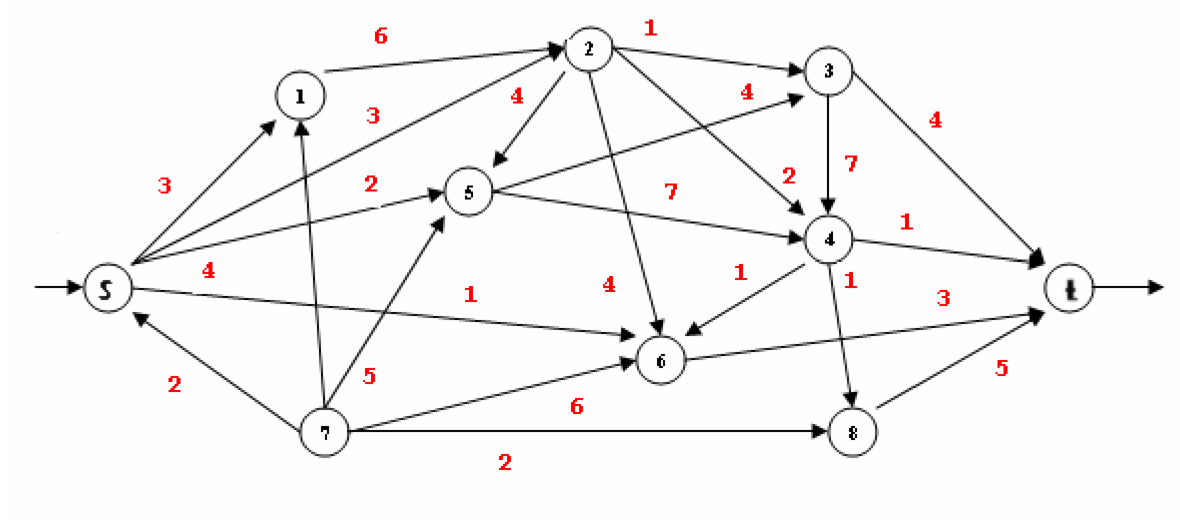
Задача 7.



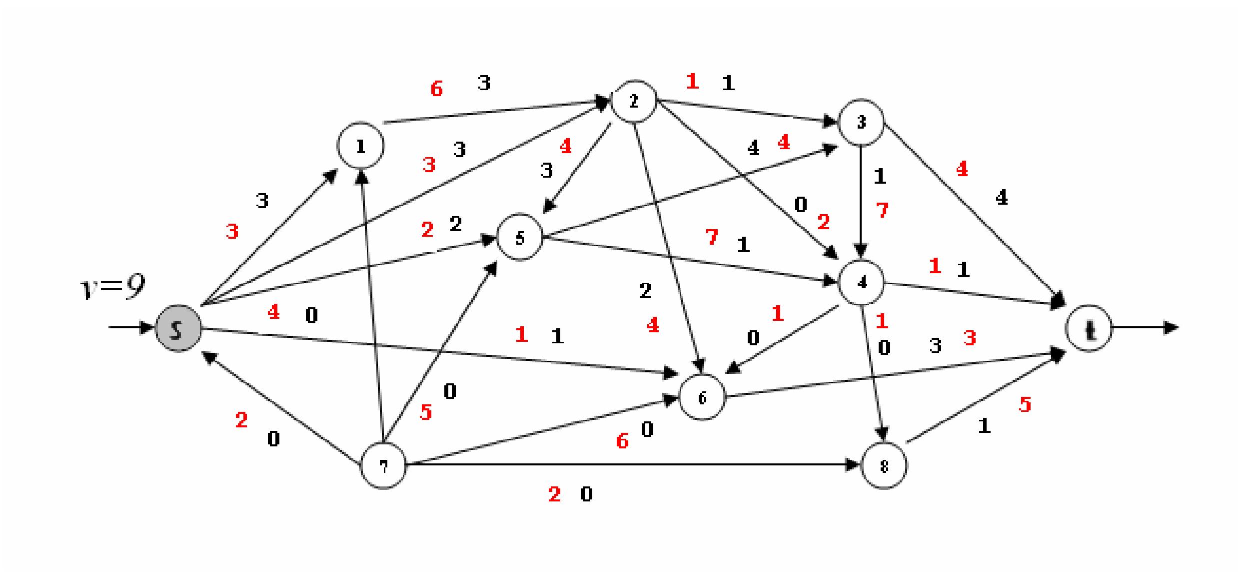
Ответ: величина максимального потока равна $v = 7$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



Задача 8.



Ответ: величина максимального потока равна $v = 9$, пример максимального потока приведен на рисунке ниже



9. Задачи о нахождении кратчайших путей между всеми парами узлов данной сети. Метод Флойда

Пример. Крупное учреждение планирует разработать систему внутренней доставки почты, основанную на использовании линии пневматической связи, для распределения корреспонденции между 8 отделами. Некоторые отделы будут только отсылать корреспонденцию в другие отделы, не имея при этом возможности получать почту. Все остальные отделы могут получать и отправлять почту. Расположение линий пневматической связи изображено на рис. 9.1.

Каждому отделу соответствует узел, каждая дуга – это линия связи. Числа на дугах – расстояния между отделами.

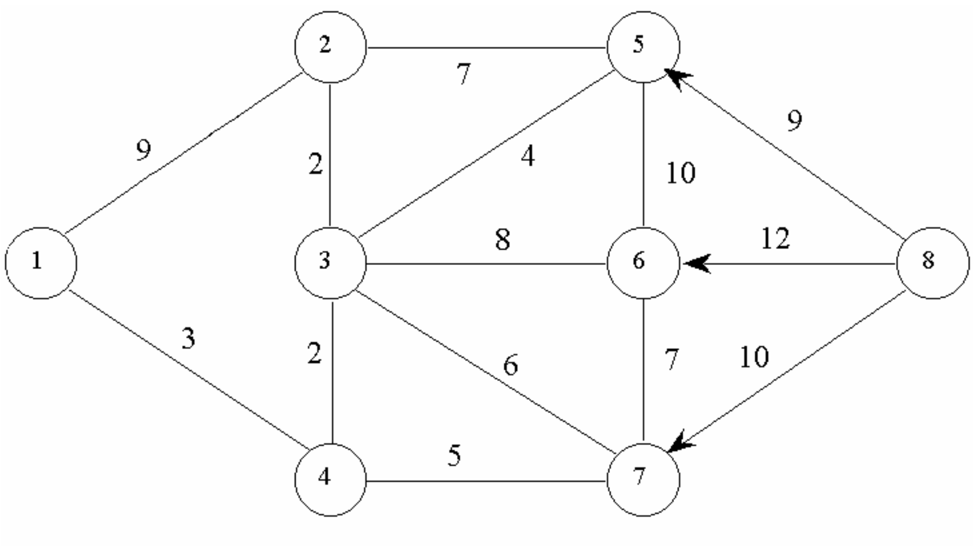


Рис. 9.1.

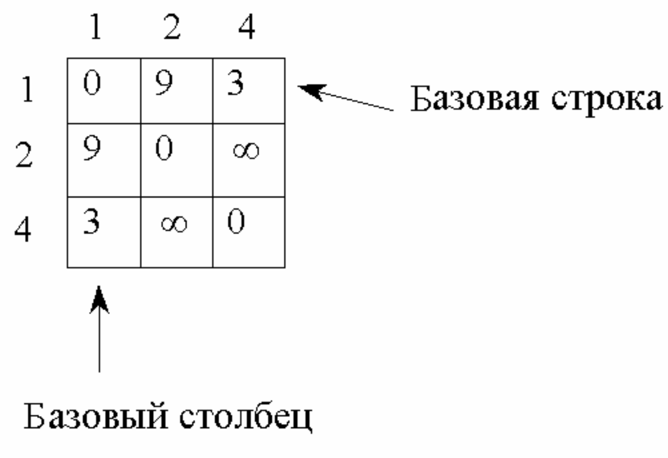
Для того чтобы каждый отдел при пересылке почты в другой отдел смог бы определить оптимальный путь, необходимо заготовить таблицу, указывающую кратчайший путь между каждой парой отделов. Для построения такой таблицы воспользуемся алгоритмом Флойда.

Согласно алгоритму, начальные матрицы кратчайших путей и маршрутов имеют вид

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \; R^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итерация 1.

На этой итерации $j=1$ – базовый элемент. Из матрицы D^0 вычёркиваем 1-й столбец и 1-ю строку. Кроме того, столбцы 3, 5, 6, 7, 8 и строки 3, 5, 6, 7, 8 также можно вычеркнуть, так как в базовой строке и в базовом столбце на соответствующих местах стоят ∞. Следовательно, рабочая матрица имеет вид



Диагональные элементы матрицы D^0 можно не рассматривать. Значит, необходимо исследовать две оценки d_{24}^0 и d_{42}^0. Применение трёхместной операции даёт следующие результаты:

$$d_{24}^1 = min\ \{d_{24}^0, d_{21}^0 + d_{11}^0\} = min\ \{\infty, 9+3\} = 12,$$

$$d_{42}^{1} = min\ \{d_{42}^{0}, d_{41}^{0} + d_{12}^{0}\} = min\ \{\infty, 3+9\} = 12\,.$$

Новые оценки лучше старых: $d_{24}^{1} < d_{24}^{0}$, $d_{42}^{1} < d_{42}^{0}$, поэтому полагаем $r_{24}^{1} = 1$, $r_{42}^{1} = 1$. Все остальные элементы матриц D^1 и R^1 остаются прежними. Выпишем матрицы D^1 и R^1

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & 12 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 12 & 2 & 0 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix},\ R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итерация 2.

Определим узел $j = 2$ как базовый и выделим в D^1 вторую строку и второй столбец – это базовые строка и столбец. Кроме того, можно вычеркнуть столбцы 6, 7, 8 и строки 6, 7, 8, так как в базовых строке и столбце на соответствующих местах стоят ∞. «Рабочая» матрица D_p^1 имеет вид

$$D_p^1 = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 9 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & 9 & 0 & 2 & 12 & 7 \\ 3 & \infty & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 0 & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 4 & \infty & 0 \end{array}.$$

Применяем трёхместную операцию к элементам матрицы D_p^1 (диагональные элементы не пересчитываем):

$$d_{13}^{2} = min\left\{d_{13}^{1}, d_{12}^{1} + d_{23}^{1}\right\} = min\{\infty, 9+2\} = 11 < d_{13}^{1},$$

$$d_{14}^2 = min\left\{d_{14}^1,\, d_{12}^1 + d_{24}^1\right\} = min\{3,\, 9+12\} = 3 < d_{14}^1,$$

$$d_{15}^2 = min\left\{d_{15}^1,\, d_{12}^1 + d_{25}^1\right\} = min\{\infty,\, 9+7\} = 16 < d_{15}^1,$$

$$d_{31}^2 = min\left\{d_{31}^1,\, d_{32}^1 + d_{23}^1\right\} = min\{\infty,\, 9+2\} = 11 < d_{31}^1,$$

$$d_{34}^2 = min\{2,\, 12+2\} = 2 = d_{34}^1,$$

$$d_{35}^2 = min\{4,\, 2+7\} = 4 = d_{35}^1,$$

$$d_{41}^2 = min\{3,\, \infty+12\} = 3 = d_{41}^1,$$

$$d_{43}^2 = min\{2,\, 12+0\} = 2 = d_{43}^1,$$

$$d_{45}^2 = min\{\infty,\, 12+7\} = 19 < d_{45}^1,$$

$$d_{51}^2 = min\{\infty,\, 9+7\} = 16 < d_{51}^1,$$

$$d_{53}^2 = min\{4,\, 7+2\} = 4 = d_{53}^1,$$

$$d_{54}^2 = min\{\infty,\, 7+12\} = 2 < d_{54}^1.$$

Остальные $d_{ik}^2 = d_{ik}^1$! Следовательно, полагаем $r_{13}^2 = r_{15}^2 = r_{31}^2 = r_{45}^2 = r_{51}^2 = r_{54}^2 = 2$ и все остальные r_{ik}^2 не меняем: $r_{ik}^2 = r_{ik}^1$. Запишем матрицы D^2 и R^2:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 11 & 3 & 16 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & 12 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 12 & 2 & 0 & 19 & \infty & 5 & \infty \\ 16 & 7 & 4 & 19 & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix},\; R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Выполняя аналогичные операции на итерациях 3, 4, 5, 6, 7, 8, мы получим матрицы D^i, R^i, $i = \overline{3,8}$. Матрицы D^8 и R^8 приведены ниже:

$$D^8 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 3 & 9 & 13 & 8 & \infty \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 10 & 8 & \infty \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 & 10 & 5 & \infty \\ 9 & 6 & 4 & 6 & 0 & 10 & 10 & \infty \\ 13 & 10 & 8 & 10 & 10 & 0 & 7 & \infty \\ 8 & 8 & 6 & 5 & 10 & 7 & 0 & \infty \\ 18 & 15 & 13 & 15 & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \; R^8 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

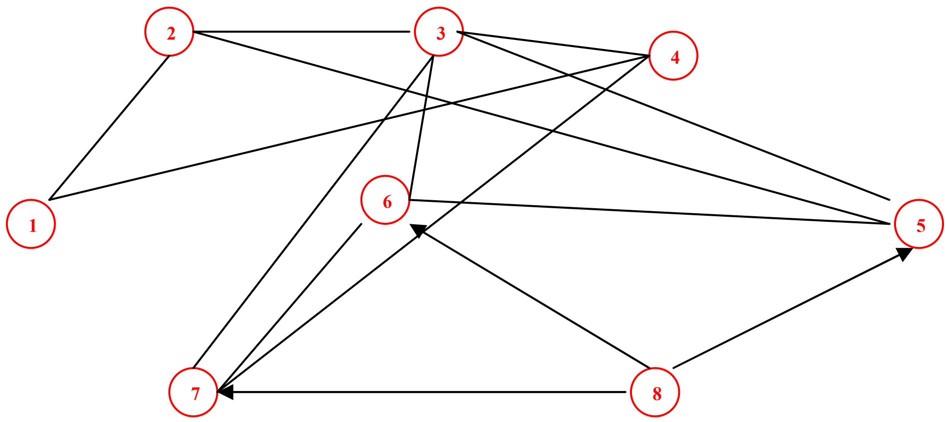
Для иллюстрации результатов, содержащихся в матрицах D^8, R^8, рассмотрим кратчайший путь из узла 1 в узел 5. Длина этого пути равна $d_{15}^8 = 9$. Для того чтобы найти сам путь из 1 в 5, обратимся к матрице R^8. Поскольку r_{15}^8 равно 4, то узел 4 является первым промежуточным узлом пути из 1 в 5. Затем, для того чтобы найти узел, следующий за узлом 4 в пути, ведущем в 5, определяем значение r_{45}^8. Данное значение равно 3. Значит, за узлом 4 следует узел 3. Далее находим $r_{35}^8 = 5$. Следовательно, кратчайший путь из 1 в 5 проходит через узлы

$$1 \to 4 \to 3 \to 5.$$

Задачи.

Для сетей, приведенных на рисунках, решить задачи о нахождении кратчайших путей между всеми парами узлов методом Флойда.

Задача 1.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	9	∞	3	∞	∞	∞	∞
2	9	0	2	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	2	0	2	4	8	6	∞
4	3	∞	2	0	∞	∞	5	∞
5	∞	7	4	∞	0	10	∞	∞
6	∞	∞	8	∞	10	0	7	∞
7	∞	∞	6	5	∞	7	0	∞
8	∞	∞	∞	∞	9	12	10	0

Ответ:

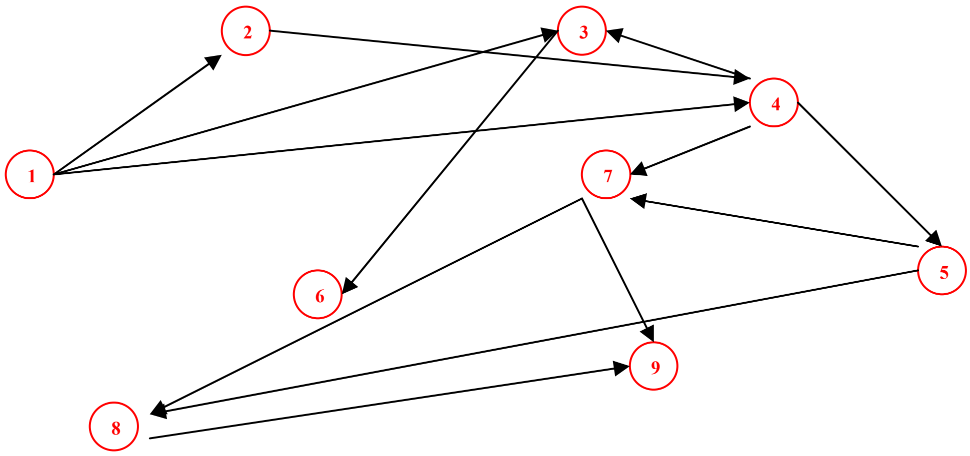
$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	7	5	3	9	13	8	∞
2	7	0	2	4	6	10	8	∞
3	5	2	0	2	4	8	6	∞
4	3	4	2	0	6	10	5	∞
5	9	6	4	6	0	10	10	∞
6	13	10	8	10	10	0	7	∞
7	8	8	6	5	10	7	0	∞
8	18	15	13	15	9	12	10	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	4	4	4	4	4	8
2	3	2	3	3	3	3	3	8
3	4	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	3	4	3	3	7	8
5	3	3	3	3	5	6	3	8
6	3	3	3	3	5	6	7	8
7	4	3	3	4	3	6	7	8
8	5	5	5	5	5	6	7	8

Задача 2.



$D^0 =$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	3	2	6	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	∞	4	∞	∞	∞
4	∞	∞	3	0	1	∞	6	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	7	5	∞
6	∞	∞	∞	∞	5	0	∞	4	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	4
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

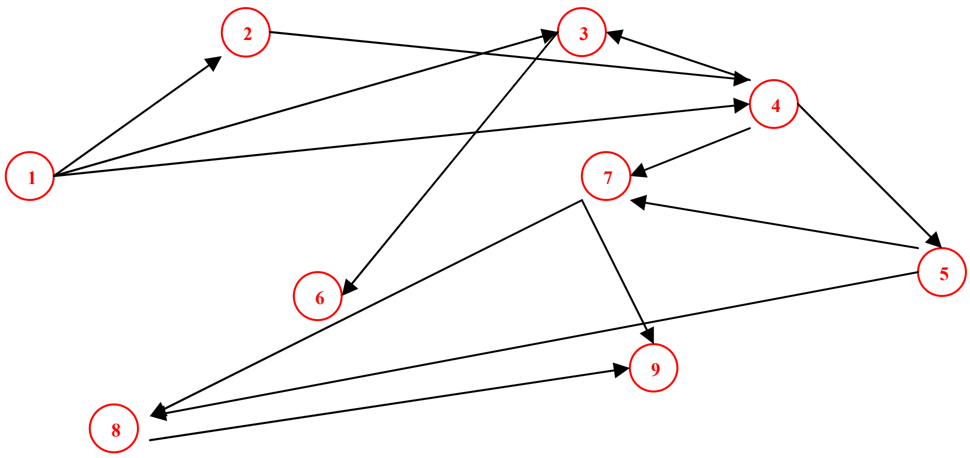
$D^n =$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	3	2	5	6	6	11	10	14
2	∞	0	5	2	3	9	8	8	12
3	∞	∞	0	∞	9	4	16	8	12
4	∞	∞	3	0	1	7	6	6	10
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	7	5	9
6	∞	∞	∞	∞	5	0	12	4	8
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	4
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	2	2	3	2	3	3
2	1	2	4	4	4	4	4	4	4
3	1	2	3	4	6	6	6	6	6
4	1	2	3	4	5	3	7	5	7
5	1	2	3	4	5	6	7	8	8
6	1	2	3	4	5	6	5	8	8
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Задача 3.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	3	2	6	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	∞	4	∞	∞	∞
4	∞	∞	3	0	1	∞	6	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	7	5	∞
6	∞	∞	∞	∞	5	0	∞	4	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	4
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	15
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

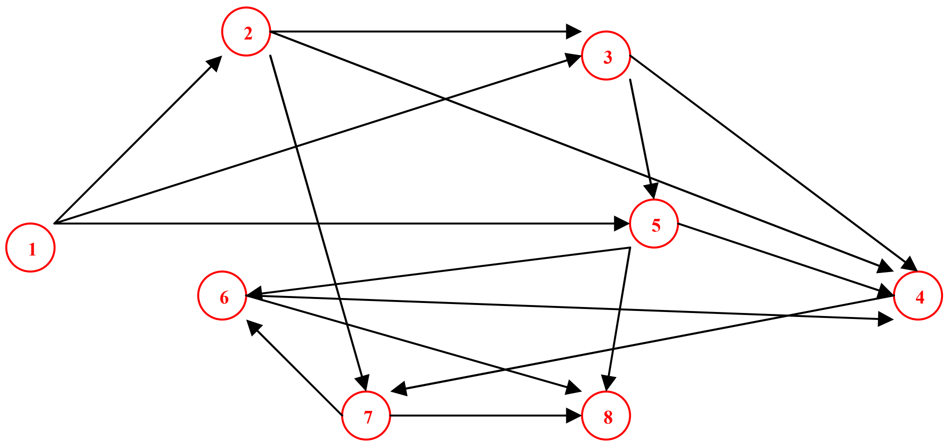
$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	3	2	5	6	6	11	10	15
2	∞	0	5	2	3	9	8	8	12
3	∞	∞	0	∞	9	4	16	8	20
4	∞	∞	3	0	1	7	6	6	10
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	7	5	11
6	∞	∞	∞	∞	5	0	12	4	16
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	4
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	15
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	2	2	3	2	3	2
2	1	2	4	4	4	4	4	4	4
3	1	2	3	4	6	6	6	6	6
4	1	2	3	4	5	3	7	5	7
5	1	2	3	4	5	6	7	8	7
6	1	2	3	4	5	6	5	8	5
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Задача 4.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	4	∞	5	∞	∞	∞
2	∞	0	2	1	∞	∞	4	∞
3	∞	∞	0	3	2	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	3	∞
5	∞	∞	∞	4	0	8	∞	3
6	∞	∞	∞	5	∞	0	∞	2
7	∞	∞	∞	∞	∞	2	0	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

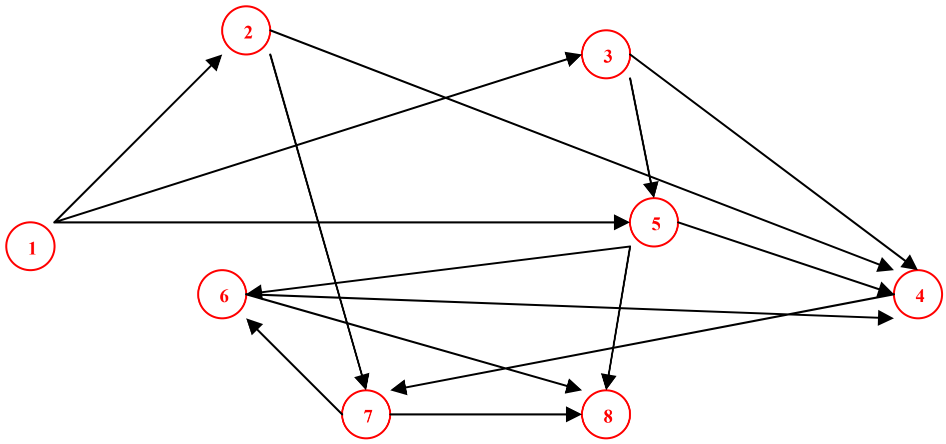
$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	4	4	5	9	7	8
2	∞	0	2	1	4	6	4	5
3	∞	∞	0	3	2	8	6	5
4	∞	∞	∞	0	∞	5	3	4
5	∞	∞	∞	4	0	8	7	3
6	∞	∞	∞	5	∞	0	8	2
7	∞	∞	∞	7	∞	2	0	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	2	5	2	2	5
2	1	2	3	4	3	7	7	7
3	1	2	3	4	5	4	4	5
4	1	2	3	4	5	7	7	7
5	1	2	3	4	5	6	4	8
6	1	2	3	4	5	6	4	8
7	1	2	3	6	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Задача 5.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	4	∞	5	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	1	∞	∞	4	∞
3	∞	∞	0	3	2	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	1	∞
5	∞	∞	∞	4	0	8	∞	3
6	∞	∞	∞	5	∞	0	∞	2
7	∞	∞	∞	∞	∞	2	0	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

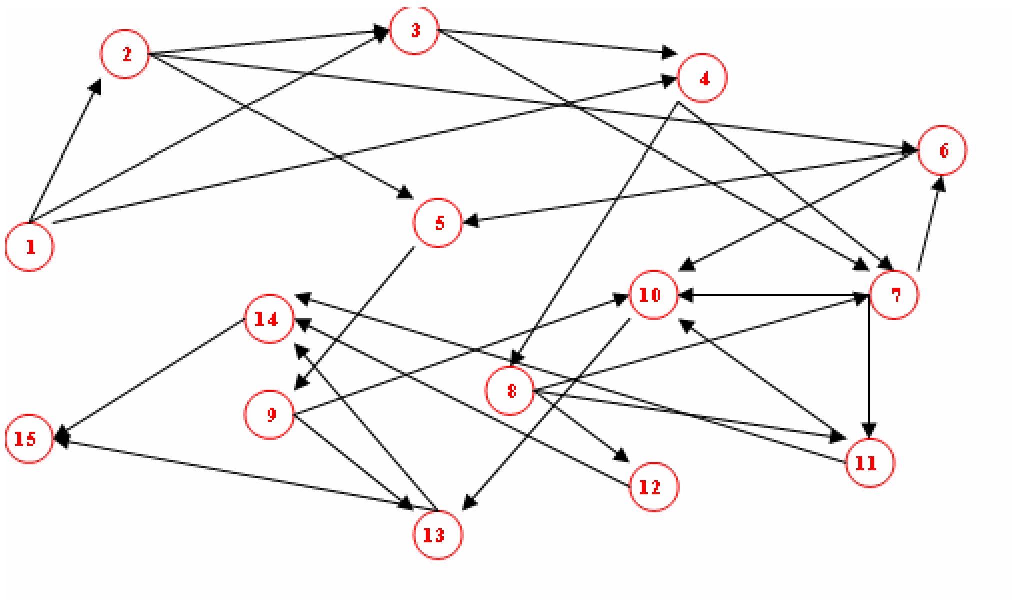
$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	3	4	4	5	7	5	6
2	∞	0	∞	1	∞	4	2	3
3	∞	∞	0	3	2	6	4	5
4	∞	∞	∞	0	∞	3	1	2
5	∞	∞	∞	4	0	7	5	3
6	∞	∞	∞	5	∞	0	6	2
7	∞	∞	∞	7	∞	2	0	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	2	5	2	2	2
2	1	2	3	4	5	4	4	4
3	1	2	3	4	5	4	4	5
4	1	2	3	4	5	7	7	7
5	1	2	3	4	5	4	4	8
6	1	2	3	4	5	6	4	8
7	1	2	3	6	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Задача 6.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	6	1	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	4	∞	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	2	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	6	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	10	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	20	0	∞	∞	10	5	∞	∞	∞	∞
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2	0	∞	∞	3	4	∞	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	1	∞	∞	3	∞	∞
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	2	∞	∞
11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8	0	∞	∞	2	∞
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1	∞
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	4
14	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
15	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

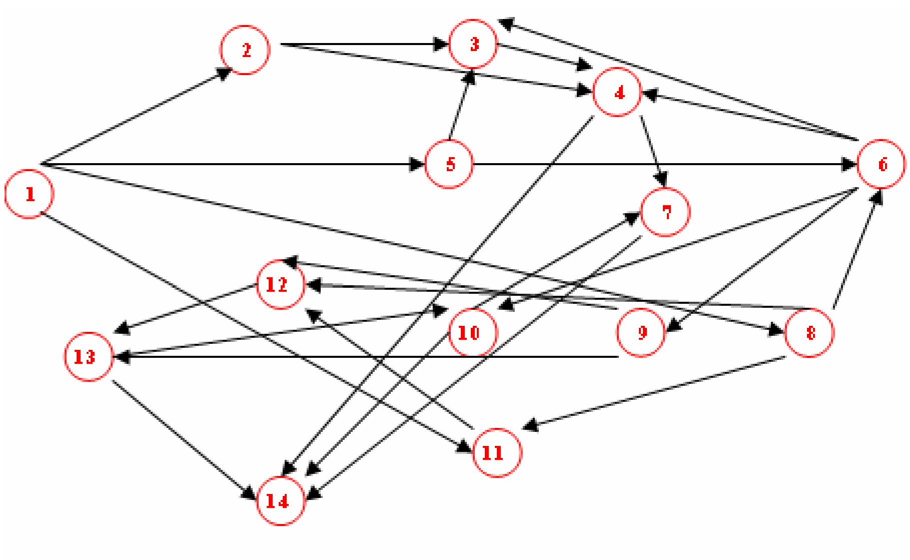
$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	6	1	3	8	9	6	9	18	16	11	13	18	13	18
2	∞	0	4	6	2	3	9	12	12	10	14	16	12	15	16
3	∞	∞	0	2	29	25	5	8	39	15	10	12	17	12	17
4	∞	∞	∞	0	30	26	6	6	40	16	9	10	18	11	16
5	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	10	11	∞	∞	13	16	17
6	∞	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	14	7	∞	∞	9	12	13
7	∞	∞	∞	∞	24	20	0	∞	34	10	5	∞	12	7	12
8	∞	∞	∞	∞	26	22	2	0	36	11	3	4	13	5	10
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	1	∞	∞	3	6	7
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	2	5	6
11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8	0	∞	10	2	7
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1	6
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	4
14	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
15	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	3	3
2	1	2	3	3	5	6	3	3	5	6	3	3	6	6	6
3	1	2	3	4	7	7	7	4	7	7	7	4	7	7	7
4	1	2	3	4	7	7	7	8	7	7	8	8	7	8	8
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	11	12	9	9	9
6	1	2	3	4	5	6	7	8	5	10	11	12	10	10	10
7	1	2	3	4	6	6	7	8	6	10	11	12	10	11	11
8	1	2	3	4	7	7	7	8	7	11	11	12	11	11	11
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13	13
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13	13
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	10	14	14
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	14
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Задача 7.



$D^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	2	∞	∞	5	∞	∞	7	∞	∞	3	∞	∞	∞
2	∞	0	3	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
5	∞	∞	1	∞	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	5	8	∞	0	∞	∞	2	3	∞	∞	∞	∞
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5
8	∞	∞	∞	∞	∞	1	∞	0	∞	∞	4	2	∞	∞
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	7	1	∞
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞	0	∞	∞	∞	2
11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	∞
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	4	∞
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	∞	∞	0	4
14	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Ответ:

$D^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	2	5	12	5	7	14	7	9	10	3	9	10	12
2	∞	0	3	10	4	6	13	∞	8	9	∞	15	9	11
3	∞	∞	0	7	∞	∞	16	∞	∞	∞	∞	∞	∞	10
4	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
5	∞	∞	1	8	0	2	9	∞	4	5	∞	11	5	7
6	∞	∞	5	8	∞	0	7	∞	2	3	∞	9	3	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5
8	∞	∞	6	9	∞	1	8	0	3	4	4	2	4	6
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8	∞	0	4	∞	7	1	5
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞	0	∞	∞	∞	2
11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	17	∞	∞	13	0	6	10	14
12	∞	∞	∞	∞	∞	∞	11	∞	∞	7	∞	0	4	8
13	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7	∞	∞	3	∞	∞	0	4
14	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

$R^n =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	2	2	5	5	5	8	5	5	11	8	5	5
2	1	2	3	3	5	5	5	8	5	5	11	5	5	5
3	1	2	3	4	5	6	4	8	9	10	11	12	13	4
4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	1	2	3	3	5	6	6	8	6	6	11	6	6	6
6	1	2	3	4	5	6	10	8	9	10	11	9	9	10
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	1	2	3	6	5	6	6	8	6	6	11	12	6	6
9	1	2	3	4	5	6	13	8	9	13	11	12	13	13
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
11	1	2	3	4	5	6	12	8	9	12	11	12	12	12
12	1	2	3	4	5	6	13	8	9	13	11	12	13	13
13	1	2	3	4	5	6	10	8	9	10	11	12	13	14
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

10. Задачи о назначениях

Пример. Пусть начальная матрица стоимостей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 13 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итерация 1.

Шаг 1. После просмотра строк и соответствующих преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 16 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После просмотра столбцов и соответствующих преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 14 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Используя последнюю матрицу, сформируем сеть *S*, приведенную на рис. 10.1.

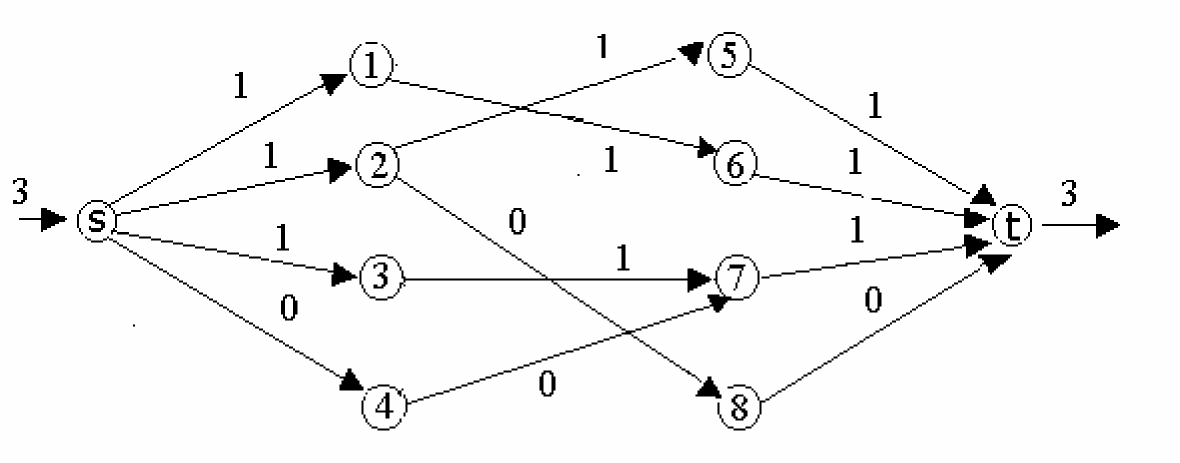


Рис.10.1.

На сети *S* с пропускными способностями

$$d_{si}=1,\ i=\overline{1,4};\ \ d_{it}=1,\ i=\overline{5,8};\ d_{16}=d_{25}=d_{28}=d_{37}=d_{47}=\infty$$

решим задачу о максимальном потоке. Дуговые потоки x_{ij} максимального потока приведены на дугах сети S на рис. 10.1. Множество помеченных узлов I_* состоит из узлов $I_*=\{s, 3, 4, 7\}$. Поскольку $v^0=3<n=4$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Построим множество $N^{(1)}=\{3,4\}$ и $N^{(2)}=\{3\}$. Подсчитаем число α (30) для нашего примера

$$\alpha=\min\{\ c_{3j},\ \ c_{4j}, j=1,2,4\ \}=\min\{\ 14,2,3,5,7,1\ \}=1.$$

Используя α, $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$, построим новую матрицу стоимостей $\overline{C}$ по правилам

$\overline{c}_{ij}=c_{ij}$, если $i\in N^{(1)},\ \ j\in N^{(2)}$ **либо** $i\notin N^{(1)},\ \ j\notin N^{(2)}$**;**
$\overline{c}_{ij}=c_{ij}-\alpha$, если $i\in N^{(1)},\ \ j\notin N^{(2)}$**;**
$\overline{c}_{ij}=c_{ij}+\alpha$, если $i\notin N^{(1)},\ \ j\in N^{(2)}$**.**

Матрица $\overline{C}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 13 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С новой матрицей $\overline{C}$ переходим к шагу 2 новой итерации.

Итерация 2.

Шаг 2. Сеть S, соответствующая $\overline{C}$, приведена на рис. 10.2.

Пропускные способности дуг задаются соотношениями

$$d_{si}=1,\ i=\overline{1,4};\ \ d_{it}=1,\ i=\overline{5,8};\ d_{16}=d_{25}=d_{28}=d_{37}=d_{47}=d_{48}=\infty\ .$$

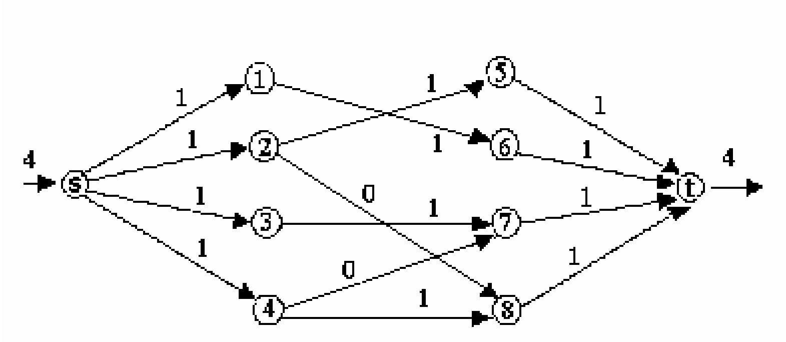


Рис. 10.2.

На этом же рисунке приведены и дуговые потоки x_{ij} максимального потока. Величина этого потока равна $v^0 = 4 = n$. Используя найденный максимальный поток, построим оптимальное назначение:

$$x_{12}^0 = 1, \;\; x_{21}^0 = 1, \;\; x_{33}^0 = 1, \;\; x_{44}^0 = 1,$$

$$x_{ij}^0 = 0, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}; \; (i,j) \notin \{ \; (1,2), \; (2,1), \; (3,3), \; (4,4) \; \}.$$

Таким образом, 1-й работник назначается на 2-ю работу, 2-й работник – на 1-ю работу, 3-й работник – на 3-ю работу и 4-й работник назначается на 4-ю работу.

Задачи.

Решить задачи о назначениях с заданными матрицами стоимостей C.

Задача 1.

Матрица C:

6	4	13	4	19	15	11	8
17	15	18	14	0	7	18	7
3	5	11	9	7	7	18	16
17	10	16	19	9	6	1	5
14	2	10	14	11	6	4	10
17	11	17	12	1	10	6	19
13	1	4	2	2	7	2	14
12	15	19	11	13	1	7	8

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0

Оптимальные назначение:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 8 & 1 & 7 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{array}$$

Стоимость оптимальных назначений: 23

Задача 2.

Матрица C: Ответ: Матрица X^0 :

9 6 4 9 3 8 0	0 0 0 0 0 0 1
5 8 6 8 8 3 5	0 0 0 0 0 1 0
5 2 1 1 8 6 8	0 0 0 1 0 0 0
1 0 9 2 5 9 2	0 1 0 0 0 0 0
9 2 3 3 0 3 0	0 0 0 0 1 0 0
7 3 0 9 4 5 6	0 0 1 0 0 0 0
0 9 6 0 8 8 9	1 0 0 0 0 0 0

Оптимальные назначение:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

Стоимость оптимальных назначений: 4

Задача 3.

Матрица C: Ответ: Матрица X^0 :

6 6 2 4 7 1 9 4 6	0 0 0 0 0 1 0 0 0
5 0 2 4 9 2 9 2 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1
7 6 0 5 2 3 0 5 5	0 0 1 0 0 0 0 0 0
9 5 8 9 2 3 1 5 7	0 0 0 0 0 0 1 0 0
3 1 7 3 0 2 2 8 1	0 0 0 0 1 0 0 0 0

3	0	0	6	1	7	2	4	7		0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	6	1	9	9	8	4	1	8		0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	4	5	2	2	6	6	5	6		0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	6	1	6	3	0	5	2	2		1	0	0	0	0	0	0	0	0

Оптимальные назначение:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
6	9	3	7	5	2	8	4	1

Стоимость оптимальных назначений: 8

Задача 4.

Матрица C: Ответ: Матрица X^0 :

6	5	6	8	4	0	4	6		0	0	0	0	0	1	0	0
5	7	8	7	4	4	0	9		0	0	0	0	0	0	1	0
0	7	9	2	8	7	0	3		1	0	0	0	0	0	0	0
6	6	6	3	0	3	0	8		0	0	0	0	1	0	0	0
7	4	7	1	1	1	8	9		0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	7	5	0	9	1	3		0	1	0	0	0	0	0	0
3	2	4	7	1	7	3	4		0	0	0	0	0	0	0	1
9	2	4	3	2	4	3	9		0	0	1	0	0	0	0	0

Оптимальные назначение:

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
6	7	1	5	4	2	8	3

Стоимость оптимальных назначений: 9

Задача 5.

Матрица C:

7	4	5	3	8	9	6	5	5	3	2
5	6	9	4	9	0	0	4	4	7	2
8	8	3	2	7	3	7	6	7	4	6
7	4	9	9	3	7	3	8	1	5	8
5	2	4	3	3	9	6	2	5	1	3
9	4	5	8	6	3	3	1	7	6	5
9	1	0	3	1	2	7	6	9	4	6
5	6	8	0	9	9	1	9	3	0	8
4	6	5	6	4	7	5	3	8	0	1
2	3	7	8	4	9	5	0	2	8	0
7	6	7	1	9	5	7	4	2	3	0

<u>Ответ:</u> Матрица X^0 :

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Оптимальные назначение:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	6	4	9	5	8	3	7	10	1	11

Стоимость оптимальных назначений: 14

Задача 6.

Матрица C:

7	-4	5	3	8	9	6	5
5	6	9	4	9	0	0	4
8	8	3	-2	7	-3	7	6
7	4	9	9	3	7	3	8
5	2	4	3	3	9	6	2
9	4	5	8	6	3	3	1
9	1	0	-3	1	2	7	6
5	6	8	0	9	9	1	9

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0

Оптимальные назначение:

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	7	6	5	1	6	3	4

Стоимость оптимальных назначений: 2

Задача 7.

Матрица C:

2	6	5	-1	6	1	8	4	6
2	1	2	7	9	-2	8	2	0
0	6	0	5	1	3	4	3	5
7	0	8	9	2	4	1	6	7
-1	1	0	-3	0	2	2	2	1
3	0	6	6	1	-2	2	4	0
1	7	1	9	4	8	2	6	8
5	1	5	2	2	6	-1	5	4
3	6	0	6	3	0	9	1	2

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0

Оптимальные назначение: Стоимость оптимальных

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
4	9	3	2	5	6	1	7	8

Стоимость оптимальных назначений: -2

Задача 8.

Матрица C:

2	4	0	3	8	-1	6	5
8	6	3	4	2	0	0	4
8	-4	3	2	7	3	1	0
2	4	9	5	3	0	3	8
5	2	7	3	-1	0	3	2
3	2	5	1	5	3	0	1
2	1	0	-3	1	2	7	0
1	6	4	0	0	9	1	7

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

Оптимальные назначение

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	7	2	6	5	8	4	1

Стоимость оптимальных назначений: -6.

11. Задачи коммивояжера

Пример 1. Пусть имеется $n = 5$ городов, связанных системой дорог. Обозначим через $d_{ij} > 0$ длину пути из города i в город j. Числа $d_{ij}, i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,5},$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

∞	2	1	10	6
4	∞	3	1	3
2	5	∞	8	4
6	7	13	∞	3
10	2	4	6	∞

Требуется найти маршрут, обладающий следующими свойствами:

А) маршрут заканчивается в том городе, с которого он начался,

В) маршрут должен включать все города и ни один город (кроме начального) не может быть включен в маршрут дважды,

С) маршрут имеет минимально возможную длину.

Решение. Выберем любой маршрут, удовлетворяющий свойствам А) и В). Пусть это будет маршрут

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1. \qquad (11.1)$$

Длина данного маршрута равна $r^0 = 2 + 3 + 8 + 3 + 10 = 26$. Запоминаем маршрут (11.1). Число $r^0 = 26$ берем в качестве рекорда. В список задач о назначениях включает задачу <u>№1, </u>с матрицей с матрицей стоимостей, приведенной в таблице 1.

Итерация 1.

Решим задачу о назначениях №1. Получим ответ: оптимальное назначение

$$1 \to 3, \quad 3 \to 1, \quad 2 \to 4, \quad 4 \to 5, \quad 5 \to 2,$$

его стоимость равна $1 + 2 + 1 + 3 + 2 = 9 < r^0 = 29$. Также получим последнюю приведенную матрицу стоимостей:

$$C^1 = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 3 & \infty & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \infty & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & \infty & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Дуги (1,3), (3,1), (2,4), (4,5), (5,2), соответствующие оптимальному назначению, образуют два контура:

$$1 \to 3 \to 1 \text{ и } 2 \to 4 \to 5 \to 2. \tag{11.2}$$

Поэтому решение задачи о назначениях не может быть использовано в качестве решения исходной задачи коммивояжера.

Из контуров (11.2) выберем контур с минимальным количеством дуг. В данном примере это контур $1 \to 3 \to 1$, состоящий из двух дуг (1,3) и (3,1). Каждой дуге выбранного контура поставим в соответствие задачу о назначениях по правилу: дуге (i, j) из выделенного контура соответствует задача о назначениях с матрицей стоимостей, полученной из матрицы C^1 заменой коэффициента d_{ij} на $d_{ij} = \infty$. С рассматриваемом примере мы получаем две задачи:

<u>задача</u> <u>№2</u> с матрицей стоимостей $C^2 = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 9 & 6 \\ 3 & \infty & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & \infty & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & \infty & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 4 & \infty \end{pmatrix}$

и <u>задача</u> <u>№3</u> с матрицей стоимостей $C^3 = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 0 & 9 & 6 \\ 3 & \infty & 2 & 0 & 2 \\ \infty & 3 & \infty & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & \infty & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 4 & \infty \end{pmatrix}$.

Задачу №1 вычеркиваем из списка задач, полученные задачи №2 и №3 включаем в список. Переходим к следующей итерации.

Итерация 2.

Из списка задач о назначениях выберем задачу №2 и решим ее. Получим ответ: оптимальное назначение

$$3 \to 1,\ 1 \to 2,\ 2 \to 4,\ 4 \to 5,\ 5 \to 3,$$

его стоимость равна $2+1+3+4+2=12<r^0=29$. Дуги (3,1), (1,2), (2,4), (4,5), (5,3), соответствующие оптимальному назначению, образуют один контур. Этому контуру соответствует допустимый маршрут

$$3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3\ , \tag{11.3}$$

длина которого равна $12<r^0=29$. Поэтому меняем рекорд, положив $r^0=12$, и запоминаем найденный допустимый маршрут (11.3). Задачу №2 вычеркиваем из списка и идем на следующую итерацию.

Итерация 3.

Из списка задач о назначениях выбираем задачу №3 с матрицей стоимостей C^3. В результате решения этой задачи получаем оптимальное назначение

$$1 \to 3, 3 \to 5,\ 5 \to 2,\ 2 \to 4,\ 4 \to 1,$$

стоимость которого равна $1+4+2+1+6=14$. Поскольку $14>r^0=12$, то вычеркивает задачу №3 из списка и идем на следующую итерацию.

Итерация 4.

Список задач о назначениях пуст. Исходная задача коммивояжера решена: оптимальным является маршрут (11.3), соответствующий рекорду $r^0=12$.

Пример 2. Решить задачу коммивояжера с матрицей расстояний

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ \hline 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 30 \\ \hline 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ \hline 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ \hline 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ \hline 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \\ \hline \end{array}$$

Решение. Для решения данной задачи будем использовать метод задания маршрутов.

Перед началом первой итерации найдем оценку сверху r_0^1 оптимального значения целевой функции. Для этого выберем какой-либо допустимый маршрут и подсчитаем его длину. Пусть это будет маршрут (1,4), (4,5), (5,3), (3,6), (6,2), (2,1). Его длина равна $r_0^1 = 73$.

Следующим шагом процедуры является выбор звена, на котором будет базироваться ветвление. Пусть это будет дуга (1,4). Используя эту дугу, сформируем список задач, включив в него две задачи №1 и №2.

Задача №1 получается из исходной задачи при дополнительном условии, что дуга (1,4) обязательно включается в маршрут. Такую дугу назовем **зафиксированной,** и будем помечать ее в матрице длин темным квадратом. В матрице длин помечаем первую строку и четвертый столбец. В дальнейшем элементы помеченных строк и помеченных столбцов, кроме элементов, соответствующих зафиксированным дугам, использоваться не будут. Поэтому в матрицах длин в помеченных строках и столбцах будем указывать только коэффициенты, соответствующие зафиксированным дугам (см. темные клетки).

Включение дуги (1,4) в маршрут означает, что дуга (4,1) не войдет в маршрут, так как это привело бы к образованию цикла, число дуг которого меньше n. Поэтому полагаем $c_{41} = \infty$. Матрица длин, соответствующая задаче №1 имеет вид

$C_1 =$

			16		
7	∞	16		30	30
20	13	∞		5	0
∞	16	25		18	18
12	46	27		∞	5
23	5	5		5	∞

Задача №2 получается из исходной задачи при дополнительном условии, что дуга (1,4) обязательно исключается из маршрута. Следовательно, в исходной матрице C надо положить $c_{14} = \infty$. Матрица длин, соответствующая задаче №2 имеет вид

$C_2 =$

∞	27	43	∞	30	26
7	∞	16	1	30	30
20	13	∞	35	5	0
∞	16	25	∞	18	18
12	46	27	48	∞	5
23	5	5	9	5	∞

Ход решения задачи будет изображать в виде дерева, узлы которого соответствую рассматриваемым задачам. Начальное дерево имеет вид, приведенный на Рис. 11.1. Запись $\overline{(i,\ j)}$ означает, что дуга $(i,\ j)$ исключается из маршрута.

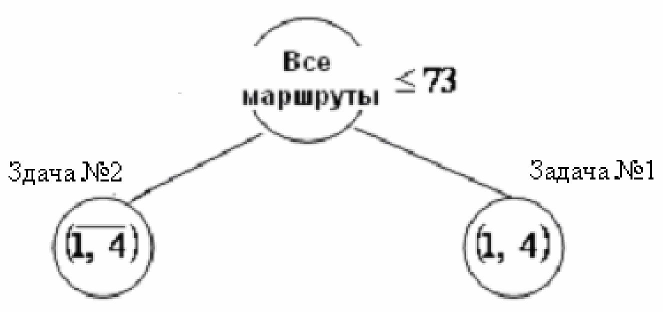


Рис. 11.1.

Итерация 1.

Выберем задачу из списка. Пусть это будет задача №1 с матрицей C_1. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции. Для этого в каждой неотмеченной i-ой строке матрицы C_1 находится минимальный элемент α_i вычитается из всех элементов данной строки. В результате получим матрицу $\overline{C}_1$, которая имеет вид

				16			
	0	∞	9		23	23	$\alpha_2 = 7$
	20	13	∞		5	0	$\alpha_3 = 0$
$\overline{C}_1 =$	∞	0	9		2	2	$\alpha_4 = 16$
	7	41	22		∞	0	$\alpha_5 = 5$
	18	0	0		0	∞	$\alpha_6 = 5$

Далее, в матрице $\overline{C}_1$ в каждом неотмеченном столбце находим минимальный элемент β_j:

				16			
	0	∞	9		23	23	$\alpha_2 = 7$
	20	13	∞		5	0	$\alpha_3 = 0$
$\overline{C}_1 =$	∞	0	9		2	2	$\alpha_4 = 16$
	7	41	22		∞	0	$\alpha_5 = 5$
	18	0	0		0	∞	$\alpha_6=5$
	$\beta_1=0$	$\beta_2=0$	$\beta_3=0$		$\beta_5=0$	$\beta_6=0$	

Для подсчета нижней оценки суммируем найденные числа α_i, β_j и числа c_{ij}, соответствующие зафиксированным дугам: 7+0+16+5+5+0+0+0+0+0+16=49. Данная оценка меньше рекорда $r_0^1 = 73$. Зафиксированные дуги не образуют цикл, состоящий из n дуг. Поэтому найти такую дугу (i_0, j_0):

1) которая до текущего момента не принадлежала множеству зафиксированных дуг;

2) для которой текущее $c_{i_0 j_0} < \infty$;

3) во множестве фиксированных дуг нет дуг вида (i, j_0), (i_0, j);

4) добавление дуги (i_0, j_0) к множеству зафиксированных дуг (i, j) не образует цикла с количеством дуг меньше, чем n.

В данном примере в качестве дуги (i_0, j_0) можно выбрать дугу (2,1).

Задачу №1 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №3 и №4, которые строятся по задаче №1 и выбранной дуге (2,1).

Задача №3 получается из задачи №1 при дополнительном условии, что дуга (2,1) обязательно включается в маршрут. В матрице длин помечаем вторую строку и первый столбец и помечаем темным квадратом клетку (2,1). При этом мы точно знаем, что дуги (1,2) и (4,2) не войдут в маршрут, содержащий отмеченные дуги (1,4) и (2,1), так в противном случае получился бы цикл, содержащий меньше, чем n дуг. Поэтому в соответствующей матрице полагаем $c_{12} = c_{42} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №3 имеет вид

$C_3 =$

			16		
7					
	13	∞		5	0
	∞	25		18	18
	46	27		∞	5
	5	5		5	∞

Задача №4 получается из задачи №1 при дополнительном условии, что дуга (2,1) не включается в маршрут. Следовательно, в матрице C_1 надо положить $c_{21} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №4 имеет вид

$C_4 =$

			16		
∞	∞	16		30	30
20	13	∞		5	0
∞	16	25		18	18
12	46	27		∞	5
23	5	5		5	∞

Полагаем $r_0^2 = r_0^1$ и идем на следующую итерацию.

Дерево, полученное после первой итерации, приведено на Рис. 2.8.

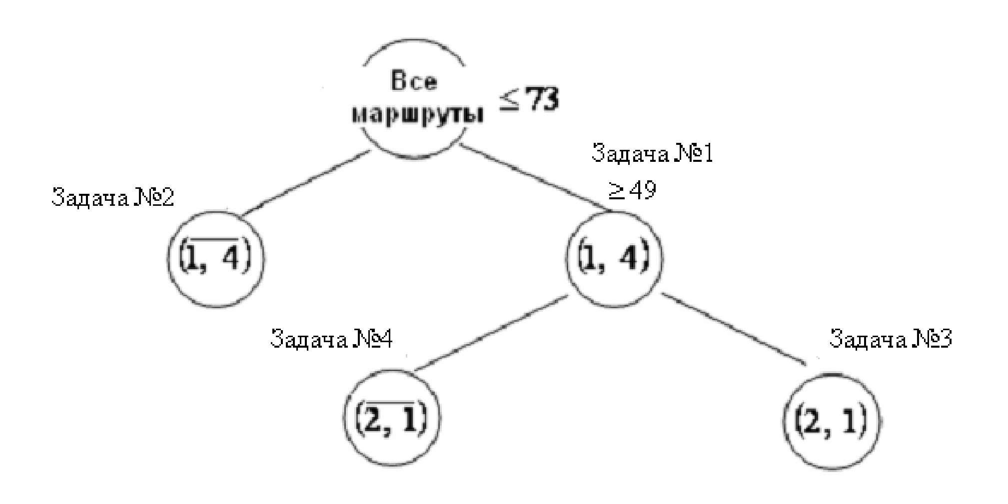


Рис. 11.2.

Итерация 2.

Список задач состоит из задач № 2, №3, №4. Выберем из этого списка задачу №3 с матрицей C_3. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции. Для этого в каждой неотмеченной i-ой строке матрицы C_3 находится минимальный элемент α_i и этом элемент вычитается из всех элементов данной строки. В результате получим матрицу $\overline{C}_3$, которая имеет вид

$\overline{C}_3 =$

			16			
7						
	13	∞		5	0	$\alpha_3 = 0$
	0	7		0	0	$\alpha_4 = 18$
	41	22		∞	0	$\alpha_5 = 5$
	0	0		0	∞	$\alpha_6 = 5$
	β_2=0	β_3=0		β_5=0	β_6=0	

Далее, в матрице $\overline{C}_3$ в каждом неотмеченном столбце находим минимальный элемент β_j.

Для подсчета нижней оценки суммируем найденные числа α_i, β_j и числа c_{ij}, соответствующие зафиксированным дугам: 0+18+5+5+0+0+0+0+16+7=51. Данная оценка меньше рекорда $r_0^2 = 73$. Зафиксированные дуги не образуют цикл, состоящий из n дуг. Поэтому найти дугу (i_0, j_0), обладающую указанными выше свойствами 1) - 4). В качестве дуги (i_0, j_0) выберем дугу (5,6).

Задачу №3 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №5 и №6, которые строятся по задаче №3 и выбранной дуге (5,6) по следующим правилам.

Задача №5 получается из задачи №3 при дополнительном условии, что дуга (5,6) обязательно включается в маршрут. В матрице длин помечаем пятую строку и шестой столбец и помечаем темным квадратом клетку (5,6). При этом мы точно знаем, что дуга (6,5) не войдет в маршрут, содержащий отмеченные дуги (1,4) , (2,1) и (5,6), так в противном случае получился бы цикл, состоящий меньше, чем из n дуг. Поэтому в матрице C_3 полагаем $c_{65} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №5 имеет вид

$C_5 =$

			16		
7					
	13	∞		5	
	∞	25		18	
					5
	5	5		∞	

Задача №6 получается из задачи №3 при дополнительном условии, что дуга (5,6) не включается в маршрут. Следовательно, в матрице C_3 надо положить $c_{56} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №6 имеет вид

$C_6 =$

			16		
7					
	13	∞		5	0
	∞	25		18	18
	46	27		∞	∞
	5	5		5	∞

Полагаем $r_0^3 = r_0^2$ и идем на следующую итерацию.

Итерация 3 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №5, №6. Выберем из этого списка задачу №5 с матрицей C_5. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции. Для этого в каждой неотмеченной i-ой строке матрицы C_5 находится минимальный элемент α_i и этом элемент вычитается из элементов данной строки. В результате получим матрицу $\overline{C}_5$

$\overline{C}_5 =$

			16			
7						
	8	∞		0		$\alpha_3 = 5$
	∞	7		0		$\alpha_4 = 18$
					5	
	0	0		∞		$\alpha_6 = 5$
	$\beta_2=0$	$\beta_3=0$		$\beta_5=0$		

Далее, в матрице $\overline{C}_5$ в каждом неотмеченном столбце находим минимальный элемент β_j.

Для подсчета нижней оценки суммируем найденные числа α_i, β_j и числа c_{ij}, соответствующие зафиксированным дугам: 5+18+5+0+0+0+16+7+5=56. Данная оценка меньше рекорда $r_0^3 = 73$. Зафиксированные дуги не образуют цикл длина n. Поэтому найти дугу (i_0, j_0), обладающую указанными выше свойствами 1)-4). В качестве дуги (i_0, j_0) выберем дугу (3,5).

Задачу №5 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №7 и №8, которые строятся по задаче №5 и выбранной дуге (3,5) по следующим правилам

Задача №7 получается из задачи №5 при дополнительном условии, что дуга (3,5) обязательно включается в маршрут --- в матрице длин помечаем третью строку и пятый столбец и помечаем темным квадратом клетку (3,5). При этом мы точно знаем, что дуги (5,3) и (6,3) не войдут в маршрут, содержащий отмеченные дуги (1,4) , (2,1), (5,6) и (3,5), так в противном случае получился бы цикл длине меньше, чем n. Поэтому в соответствующей матрице полагаем $c_{63} = c_{53} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №7 имеет вид

C_7

$C_7 =$

			16		
7					
				5	
	∞	25			
					5
	5	∞			

Задача №8 получается из задачи №5 при дополнительном условии, что дуга (3,5) не включается в маршрут. Следовательно, в матрице C_5 надо положить $c_{35} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №8 имеет вид

$C_8 =$

			16		
7					
	13	∞		∞	
	∞	25		18	
					5
	5	5		∞	

Полагаем $r_0^4 = r_0^3$ и идем на следующею итерацию.

Итерация 4 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №7, №8. Выберем из этого списка задачу №7 с матрицей C_7. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции. Для этого в каждой неотмеченной строке i-ой строке матрицы C_7 находится минимальный элемент α_i и этом элемент вычитается из всех элементов данной строки. В результате получим матрицу $\bar{C}_7$

$\overline{C}_7 =$

			16			
7						
				5		
	∞	0				$\alpha_4 = 25$
					5	
	0	∞				$\alpha_6 = 5$
	$\beta_2=0$	$\beta_3=0$				

Далее, в матрице $\overline{C}_7$ в каждом неотмеченном столбце находим минимальный элемент β_j.

Для подсчета нижней оценки суммируем найденные числа α_i, β_j и числа d_{ij}, соответствующие зафиксированным дугам: 25+5+0+0+16+7+5+5=63. Данная оценка меньше рекорда $r_0^4 = 73$. Зафиксированные дуги не образуют цикл длина n. Поэтому найти дугу (i_0, j_0), обладающую указанными выше свойствами 1)-4). В качестве дуги (i_0, j_0) выберем дугу (4,3).

Задачу №7 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №9 и №10, которые строятся по задаче №7 и выбранной дуге (4,3).

Задача №9 получается из задачи №7 при дополнительном условии, что дуга (4,3) обязательно включается в маршрут, т.е. теперь дуга (4,3) становится фиксированной. В матрице длин помечаем четвертую строку и третий столбец и помечаем темным цветом клетку (4,3). При этом мы точно знаем, что дуга (3,4) не войдет в маршрут, содержащий отмеченные дуги (1,4) , (2,1), (5,6), (3,5) и (4,3), так в противном случае получился бы цикл, содержащий меньше, чем n дуг. Поэтому в соответствующей матрице полагаем $c_{34} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №9 имеет вид

$C_9 =$

			16		
7					
				5	
		25			
					5
	5				

Задача №10 получается из задачи №7 при дополнительном условии, что дуга (4,3) не включается в маршрут. Следовательно, в матрице C_7 надо положить $c_{43} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №10 имеет вид

$C_{10} =$

			16		
7					
				5	
	∞	∞			
					5
	5	∞			

Полагаем $r_0^5 = r_0^4$ и идем на следующею итерацию.

Итерация 5 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №8, №9, №10. Выберем из этого списка задачу №9 с матрицей C_9. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 5+16+7+5+5+25=63.

Данная оценка меньше рекорда $r_0^5 = 73$. Зафиксированные дуги не образуют цикл длина n. Поэтому найти дугу (i_0, j_0), обладающую указанными выше свойствами 1)-4). В качестве дуги (i_0, j_0) можем выбрать только дугу (6,2).

Задачу №9 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №11 и №12, которые строятся по задаче №9 и выбранной дуге (6,2).

Задача №11 получается из задачи №9 при дополнительном условии, что дуга (6,2) обязательно включается в маршрут. В матрице длин помечаем шестую строку и второй столбец и помечаем темным цветом клетку (6,2), которая соответствует фиксированной дуге маршрута. Полагаем $c_{26} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №11 имеет вид

$C_{11} =$

			16		
7					
				5	
		25			
					5
	5				

Задача №12 получается из задачи №9 при дополнительном условии, что дуга (6,2) обязательно исключается из маршрута. Следовательно, полагаем $c_{62} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №12 имеет вид

$C_{12} =$

			16		
7					
				5	
		25			
					5
	∞				

Полагаем $r_0^6 = r_0^5$ и идем на следующую итерацию.

Итерация 6 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №8, №10, №11, №12. Выберем из этого списка задачу №11 с матрицей C_{11}. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 5+16+7+5+5+25=63.

Данная оценка меньше рекорда $r_0^5 = 73$. Зафиксированные дуги **образуют** цикл из n дуг. Поэтому запоминаем дуги этого цикла

$$(1,4),\ (2,1),\ (3,5),\ (4,3),(5,6),\ (6,2) \qquad (11.4)$$

и меняем рекорд, полагая $r_0^7 = 63$. Задачу №11 вычеркиваем из списка. При этом в список не добавляем новых задач. Переходим к следующей итерации.
Дерево, отражающее ход решения задачи после шестой итерации, приведено на Рис. 11.3.

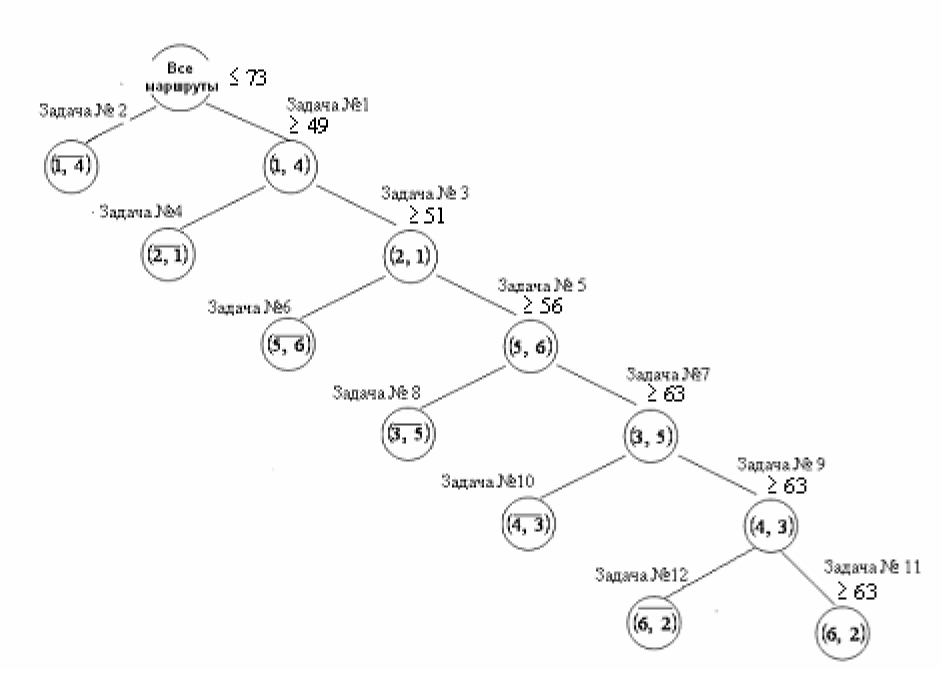


Рис. 11.3.

Итерация 7 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №8, №10, №12. Выберем из этого списка задачу №12 с матрицей C_{12}. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна ∞+16+7+5+5+25=∞.

Данная оценка больше рекорда $r_0^7 = 63$. Поэтому задачу №12 вычеркиваем из списка, новые задачи не добавляем в список, полагаем $r_0^8 = r_0^7 = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 8 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №8, №10. Выберем из этого списка задачу №10 с матрицей C_{10}. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна ∞+5+∞+16+7+5+5=∞.

Данная оценка больше рекорда $r_0^7 = 63$. Поэтому задачу №10 вычеркиваем из списка, новые задачи не добавляем в список, полагаем $r_0^9 = r_0^8 = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 9 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6, №8. Выберем из этого списка задачу №8 с матрицей C_8. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 13+18+5+16+7+5=64.

Данная оценка больше рекорда $r_0^9 = 63$. Поэтому удаляем задачу №8 из списка. Полагаем $r_0^{10} = r_0^9 = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 10 .

Список задач состоит из задач № 2, №4, №6. Выберем из этого списка задачу №6 с матрицей C_6. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 0+18+27+5+16+7=73.

Данная оценка больше рекорда $r_0^{10} = 63$. Поэтому задачу №6 вычеркиваем из списка. Полагаем $r_0^{11} = r_0^{10} = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 11 .

Список задач состоит из задач № 2, №4. Выберем из этого списка задачу №4 с матрицей C_4. Определим для этой задачи нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 16+0+16+12+5+16=65. Данная оценка больше рекорда $r_0^{13} = 63$. Поэтому задачу №4 вычеркиваем из списка. Полагаем $r_0^{12} = r_0^{11} = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 12 .

Список задач состоит из задачи № 2. Выберем эту задачу из списка. Определим для нее нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 26+1+0+16+5+5=58. Данная оценка меньше рекорда $r_0^{13} = 63$. Множество зафиксированных дуг пусто. Поэтому найдем дугу (i_0, j_0), обладающую указанными выше свойствами 1)-4). В качестве дуги (i_0, j_0) можем выбрать только дугу (6,3).

Задачу №2 вычеркиваем из списка, заменив ее двумя новыми задачами №13 и №14, которые строятся по задаче №2 и выбранной дуге (6,3).

Задача №13 получается из задачи №2 при дополнительном условии, что дуга (6,3) обязательно включается в маршрут. Эта дуга считается фиксированной. В матрице длин помечаем шестую строку и третий столбец и помечаем темным цветом клетку (6,3). При этом полагаем $c_{36} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №13 имеет вид

$C_{13} =$

∞	27		∞	30	26
∞	∞		1	30	30
20	13		35	5	0
∞	16		∞	18	18
12	46		48	∞	5
		5			

Задача №14 получается из задачи №2 при дополнительном условии, что дуга (6,3) обязательно не включается в маршрут, т.е. полагаем $c_{63} = \infty$. Матрица, соответствующая задаче №14 имеет вид

$C_{14} =$

∞	27	43	∞	30	26
7	∞	16	1	30	30
20	13	∞	35	5	∞
21	16	25	∞	18	18
12	46	27	48	∞	5
23	5	∞	9	5	∞

Полагаем $r_0^{15} = r_0^{14} = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 13 .

Список задач состоит из задач № 13, №14. Выберем из списка задачу № 14. Определим для нее нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 26+1+5+16+5+5+5+9=72. Данная оценка больше рекорда $r_0^{13} = 63$. Поэтому задачу №14 удаляем из списка, не меняем рекорд $r_0^{14} = r_0^{13} = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 14 .

Список задач состоит задачи № 13. Выберем эту задачу. Определим для нее нижнюю оценку целевой функции по описанным выше правилам. Эта оценка равна 26+1+5+16+5+5+5=63. Данная оценка равна рекорду $r_0^{16} = 63.$ Поэтому задачу №13 удаляем из списка, не меняем рекорд $r_0^{15} = r_0^{14} = 63$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 15 .

Список задач пуст. Исходная задача решена. Длина оптимального маршрута равна текущему значению рекорда $r_0^{15} = 63$, оптимальный маршрут состоит из дуг (11.4).

Дерево, отражающее ход всех итераций, приведено на Рис.4.8

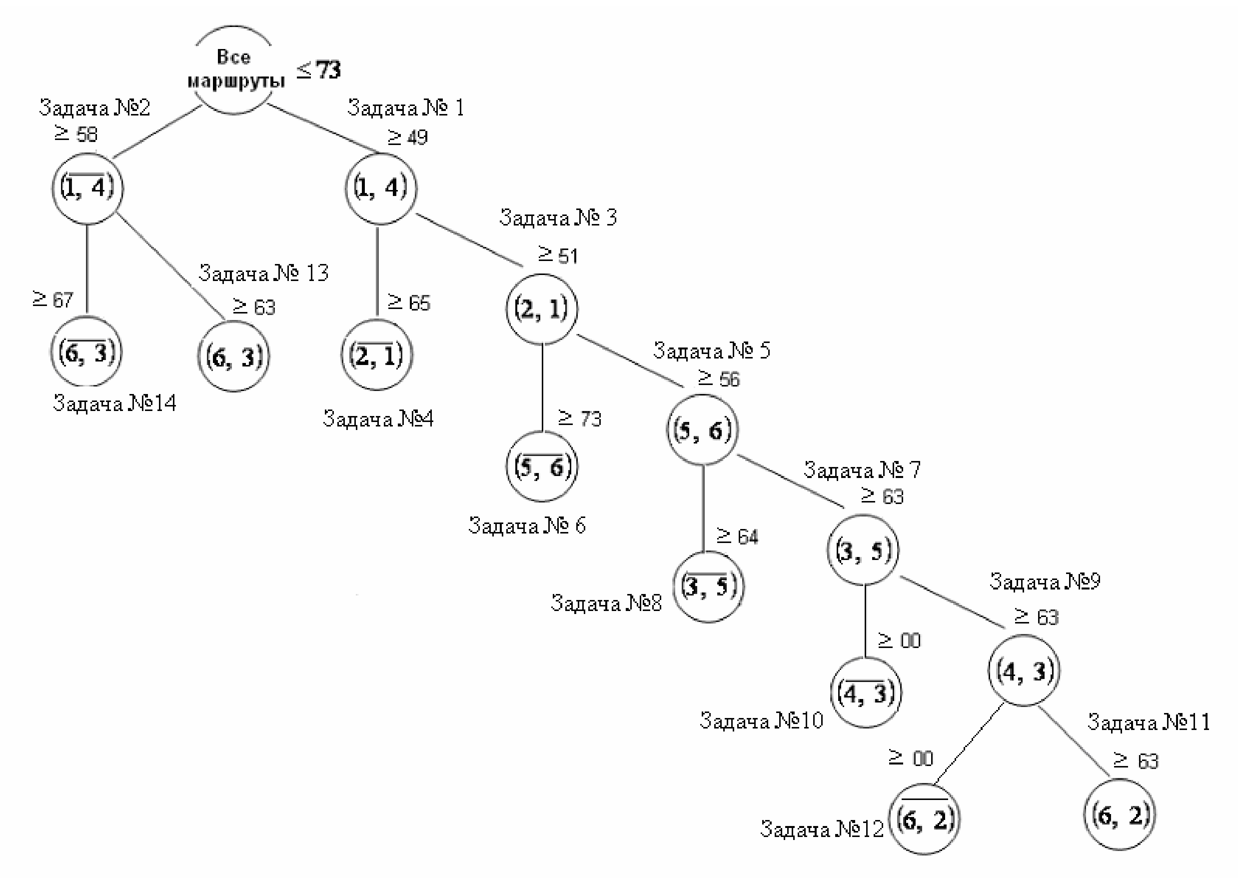


Рис.11.4.

Задачи.

Решить задачи коммивояжера

Задача 1.

Матрица C:

$$\begin{array}{ccccc} \infty & 10 & 25 & 25 & 10 \\ 1 & \infty & 10 & 15 & 2 \\ 8 & 9 & \infty & 20 & 10 \\ 14 & 10 & 24 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & 25 & 27 & \infty \end{array}$$

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Оптимальный маршрут:

$1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 62

Задача 2.

Матрица C:

$$\begin{array}{cccccc} \infty & 10 & 10 & 8 & 13 & 1 \\ 3 & \infty & 1 & 17 & 17 & 7 \\ 1 & 10 & \infty & 6 & 1 & 17 \\ 6 & 3 & 2 & \infty & 5 & 12 \\ 8 & 17 & 8 & 13 & \infty & 11 \\ 11 & 14 & 12 & 6 & 11 & \infty \end{array}$$

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Оптимальный маршрут:

$1 \to 6 \to 4 \to 2 \to 3 \to 5 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 20

Задача 3.

Матрица C:

$$\begin{array}{ccccccc} \infty & 8 & 0 & 1 & 18 & 16 & 5 \\ 19 & \infty & 12 & 5 & 11 & 8 & 17 \\ 10 & 19 & \infty & 17 & 11 & 15 & 5 \\ 1 & 8 & 9 & \infty & 11 & 2 & 2 \\ 11 & 12 & 14 & 8 & \infty & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 17 & 15 & \infty & 19 \\ 13 & 6 & 15 & 13 & 18 & 10 & \infty \end{array}$$

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Оптимальный маршрут:

$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 6 \to 2 \to 4 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 31

Задача 4.

Матрица C:

∞	18	13	18	8	16	11	0
0	∞	1	8	2	15	19	11
1	10	∞	18	5	15	12	12
15	16	10	∞	16	10	6	9
2	18	14	16	∞	18	13	1
5	19	1	19	1	∞	7	4
5	7	16	0	0	8	∞	6
10	8	13	10	12	3	13	∞

<u>Ответ</u>: Матрица X^0:

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 8 \to 6 \to 3 \to 2 \to 4 \to 7 \to 5 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 30

Задача 5.

Матрица C:

∞	13	2	17	14
11	∞	11	8	2
4	10	∞	3	6
9	4	6	∞	19
3	7	12	18	∞

<u>Ответ</u>: Матрица X^0:

0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 14

Задача 6.

Матрица C:

∞	6	16	16	4	12	11	1	4	10
1	∞	16	9	17	5	3	2	6	19
19	4	∞	11	17	8	10	4	15	11
7	1	17	∞	17	2	5	6	10	17
8	18	18	13	∞	0	19	6	12	14
3	5	13	19	16	∞	12	17	2	19
1	4	1	18	2	17	∞	8	12	10
6	14	19	7	19	19	10	∞	2	9
2	14	18	0	16	17	13	15	∞	1
1	12	2	6	19	4	13	7	0	∞

Ответ: Матрица X^0 :

0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 8 \to 4 \to 7 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 3 \to 2 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 25

Задача 7.

Матрица C:

∞	12	11	1	18	4	14	3	18
9	∞	14	12	7	10	4	18	9
7	8	∞	18	1	6	1	9	19
10	18	0	∞	3	14	3	11	4
7	3	17	10	∞	14	14	9	8
17	16	17	16	8	∞	9	3	19
13	19	8	19	12	0	∞	13	4
3	3	7	6	9	15	16	∞	15
5	13	15	19	6	5	5	2	∞

Ответ: Матрица X^0 :

0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 2 \to 7 \to 9 \to 6 \to 8 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 24

Задача 8.

Матрица C:

∞	1	14	18	11	5	13	18	17	5	11
4	∞	19	14	5	3	6	15	14	15	14
12	6	∞	16	19	15	6	2	12	15	8
14	4	18	∞	15	0	18	13	6	2	8
19	15	19	14	∞	12	9	15	3	11	16
10	6	11	4	15	∞	10	9	0	9	6
16	0	10	17	18	6	∞	4	4	1	0
7	17	17	6	7	12	10	∞	14	9	17
19	5	7	6	16	4	6	17	∞	13	14
2	11	11	16	12	7	14	12	15	∞	0
1	14	10	0	10	3	1	0	5	6	∞

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 10 \to 11 \to 4 \to 6 \to 9 \to 3 \to 8 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 32

Задача 9.

Матрица C:

∞	8	12	7	5	0	11	5	13	9	18	1
10	∞	14	4	7	4	10	10	6	6	4	3
4	16	∞	13	3	2	5	5	15	7	11	19
3	7	11	∞	7	6	14	3	3	8	8	18
11	15	18	12	∞	19	12	13	11	16	1	12
8	7	16	19	1	∞	3	16	12	11	0	5
5	10	8	0	17	10	∞	6	13	1	0	6
6	6	6	5	1	5	17	∞	7	14	11	5
19	8	4	19	13	2	5	14	∞	12	15	16
11	8	8	3	4	3	4	11	2	∞	4	15
9	6	12	0	18	13	14	3	12	16	∞	4
18	10	8	3	18	17	16	19	7	0	12	∞

<u>Ответ</u>: Матрица X^0 :

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Оптимальный маршрут:

$1 \to 6 \to 7 \to 4 \to 8 \to 5 \to 11 \to 2 \to 12 \to 10 \to 9 \to 3 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 27

Задача 10.

Матрица C:

∞	10	17	15	0	15	2	16	10	2	6	19	10
1	∞	9	5	13	4	13	9	18	10	14	2	9
7	9	∞	12	13	12	7	7	9	15	0	3	12
6	1	19	∞	9	17	4	1	0	10	10	15	18
13	9	9	8	∞	2	6	4	14	2	0	17	9
17	10	10	13	1	∞	14	8	14	17	14	14	2
17	18	3	2	6	0	∞	19	14	3	13	3	13
0	4	1	9	6	6	16	∞	3	19	8	15	4
15	7	5	14	6	10	1	4	∞	4	16	17	19
1	9	18	7	16	16	1	19	16	∞	1	6	12
7	6	7	13	8	18	10	5	19	9	∞	5	10
10	16	10	5	2	5	9	13	6	7	9	∞	7
18	19	4	14	13	12	7	11	8	11	12	13	∞

Ответ: Матрица X^0 :

$$\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}$$

Оптимальный маршрут:

$1 \to 5 \to 10 \to 7 \to 6 \to 13 \to 3 \to 11 \to 2 \to 12 \to 4 \to 9 \to 8 \to 1$

Длина оптимального маршрута: 26