

# Análisis Matemático II - Lic. en Computación

## Capítulo 1: Integrales

En AMI se introduce el concepto de derivada de una función.  
 Dada  $f$  se define la función  $f'$  como  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

Algunas de las propiedades de la derivada son:

- 1) Si  $f(x) = c$  (constante)  $\Rightarrow f'(x) = 0$ .

Por otra parte, si  $f$  es derivable en  $I = (a, b)$  y  $f'(x) = 0 \forall x \in I \Rightarrow f(x) = c$ .

- 2)  $(af)'(x) = a f'(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .

- 3)  $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

- 4)  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

- 5)  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Regla de la cadena})$

Ahora nos interesa estudiar el concepto "inverso" a la derivación, esto es:

Dada una función  $f$ , encontrar  $F$  tal que  $F'(x) = f(x)$

Sabemos dada  $F$  encontrar  $F'$  (derivación).

Problema a resolver, dada  $f = F'$  encontrar  $F$  (integración).

Definición: Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Decimos <sup>(2)</sup> que  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una antiderivada o primitiva de  $f$  en  $I$  si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Observación: las primitivas NO son únicas. Por ejemplo, si  $f(x) = x$  entonces  $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$  y  $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 3$  son primitivas de  $f$  ya que  $F_1'(x) = x = f(x)$  y  $F_2'(x) = x = f(x)$ .

El siguiente teorema nos dice que las primitivas de una función  $f$  difieren en una constante.

Teorema: Si  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $I$ , entonces toda primitiva de  $f$  en  $I$  es de la forma  $F(x) + C$  para alguna cte.  $C \in \mathbb{R}$ .

Dem: Sea  $G$  una primitiva de  $f$  en  $I$ , o sea,  $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ .

Queremos ver que  $G(x) = F(x) + C$ .

Sea  $H(x) = G(x) - F(x)$ . Utilizando las propiedades de la derivación se cumple que para todo  $x \in I$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por lo tanto  $H(x) = C \quad \forall x \in I$ , o sea  $G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$  ■

Definición: Dado  $I \subseteq \mathbb{R}$  y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama integral indefinida <sup>(3)</sup> de  $f$  al conjunto de todas las primitivas de  $f$  y se denota

$$\int f(x) dx.$$

Observaciones:

- 1) El símbolo  $\int$  se llama integral y  $dx$  se llama diferencial ( $de x$ ). Además, denotamos por diferencial de una función  $F$  a  $d(F(x)) = F'(x) dx$ .
- 2) En la definición de integral indef. podríamos usar otra letra. Por ejemplo,  $\int f(y) dy$ ,  $\int f(t) dt$ , etc.

Ejemplos

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C, \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ ya que } (\sin(x) + C)' = \cos(x).$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ ya que } \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = 2 \frac{x}{2} = x.$$

En general, si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \neq -1$  tenemos que  $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ , con lo cual

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

$$\int t x \underline{dx} = t \frac{x^2}{2} + C, \text{ pero } \int t x \underline{dt} = x \frac{t^2}{2} + C$$

El diferencial nos indica qué es la variable de integración.

## Algunas propiedades de la integral indefinida

$$1) \int 0 \, dx = c$$

$$2) \int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$3) \int (f \pm g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

### Ejemplo

$$\int (e^x + 4x^2 + 3) \, dx = \int e^x \, dx + 4 \int x^2 \, dx + \int 3 \, dx = e^x + \frac{4}{3}x^3 + 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (5) de derivación.

Teorema (Método de Sustitución). Sean  $f: (d, e) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: (a, b) \rightarrow (d, e)$  derivable en su dominio. Entonces, si  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $(d, e)$ ,  $H(x) = (F \circ g)(x)$  es primitiva de  $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$  en  $(a, b)$ . O sea,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in (a, b).$$

Dem: Basta verificar que  $H'(x) = h(x) \quad \forall x \in (a, b)$ . Por la regla de la cadena tenemos que

$$H'(x) = F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = h(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

↓ definición      ↓ Regla de la cadena      ↓   
 F es primitiva de f

Observación: el teorema anterior nos provee un método para calcular ⑤ primitivas para funciones de la forma  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ . En efecto, hagamos la siguiente sustitución:  $u = g(x)$  y  $du = d(g(x)) = g'(x) dx$ .

Luego,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

F primitiva de f

### Ejemplos

•  $\int \sin(x^2) 2x dx$ . Sea  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx$ . Entonces

$$\int \sin(x^2) 2x dx = \int \sin(u) du = -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C.$$

•  $\int e^{3x} dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C$ .

$u = 3x$   
 $du = 3dx$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (4) de derivación.

Teorema (Método de integración por partes): Si  $f'$  y  $g'$  son continuas, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad (\star)$$

Dem: Por la regla de derivación del producto de funciones (Prop. 4) tenemos

que  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , o equivalentemente

$$f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x)g(x).$$

Integrando a ambos lados obtenemos

por  $f \cdot g$  primitiva de  $(f \cdot g)'$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int (f \cdot g)'(x) dx - \int f'(x)g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Observación: la ecuación (\*) se llama fórmula de integración por partes. ⑥  
Resulta más fácil recordarla utilizando la siguiente notación.

Si  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$

entonces  $du = f'(x)dx$  y  $dv = g'(x)dx$ ,

Luego (\*) se escribe como  $\int u dv = uv - \int v du$ .

### Ejemplos

•  $\int x e^x dx$  . Si  $u = x$ , entonces  $du = 1 \cdot dx$ , con lo cual  
 $dv = e^x dx$   $v = e^x$

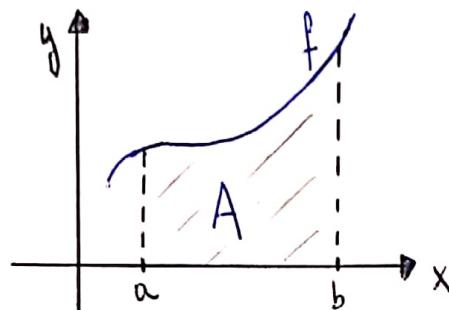
$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = x e^x - e^x + C$$

•  $\int x \underbrace{\sin(x)}_{\downarrow u} dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C.$   
 $du = dx \quad v = -\cos(x)$

•  $\int \ln(x) dx = \int \underbrace{\ln(x)}_u \underbrace{1 dx}_{dv} = \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln(x) \cdot x - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.$   
 $du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$

# Integral definida

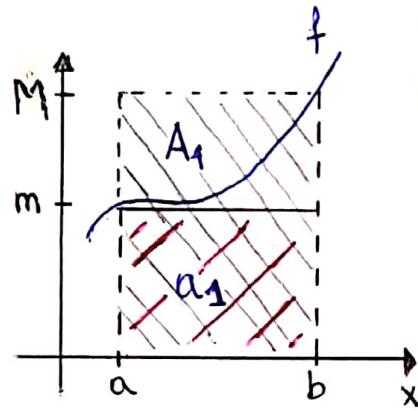
Área bajo una curva: sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función cont. y tq  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ . ¿Cuál es el valor del área  $A$  comprendida entre la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x=a$  y  $x=b$ ?



① **1<sup>da</sup> Aproximación.** Sean  $m = \min\text{ de } f \text{ en } [a, b]$   
 $M = \max\text{ de } f \text{ en } [a, b]$

Entonces

$$\| a_1 = m \cdot (b-a) \leq A \leq M \cdot (b-a) = A_1 \|$$



② **2<sup>da</sup> Aproximación.** Particionamos el intervalo  $[a, b]$  como

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2].$$

Si  $m_k = \min\text{ de } f \text{ en } [x_k, x_{k+1}]$   
 $M_k = \max\text{ de } f \text{ en } [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$ .

Entonces

$$a_1 \leq a_2 = m_0(x_1-x_0) + m_1(x_2-x_1) \leq A \leq M_0(x_1-x_0) + M_1(x_2-x_1) = A_2 \leq A_1$$

De manera gen., tomamos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  una partición de  $[a, b]$ .

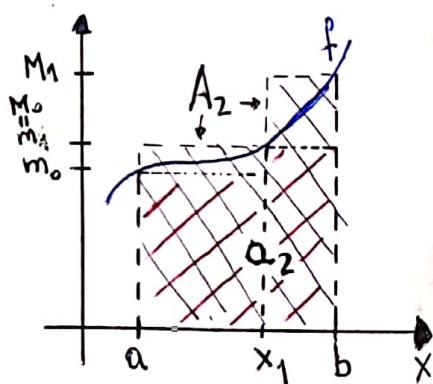
Si denotamos  $\Delta_k = x_k - x_{k+1}$  y  $\Delta$  al mayor de todos los  $\Delta_k$

$$m_k = \min\text{ de } f \text{ en } [x_k, x_{k+1}], k=0, \dots, n-1$$

$$M_k = \max\text{ de } f \text{ en } [x_k, x_{k+1}]$$

entonces es claro que

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k \leq A \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k \rightarrow \begin{matrix} \text{suma} \\ \text{inferior} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{suma} \\ \text{superior} \end{matrix}$$



Definición: Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y tq  $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ , se define<sup>⑧</sup> el área encerrada por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  por

$$A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k \right).$$

Llamaremos a este número integral definido de  $f$  en  $[a, b]$  y lo denotaremos por  $\int_a^b f(x) dx$ .

### Observaciones

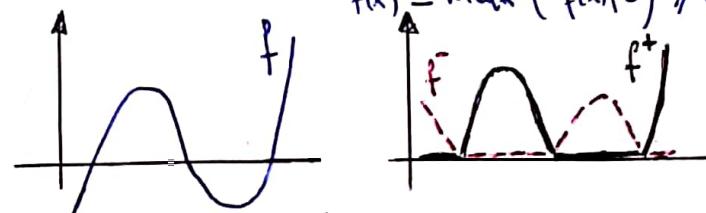
1) Se puede probar que tomar el límite de las sumas superiores coincide con tomar el límite de las sumas inferiores, i.e.

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k \right).$$

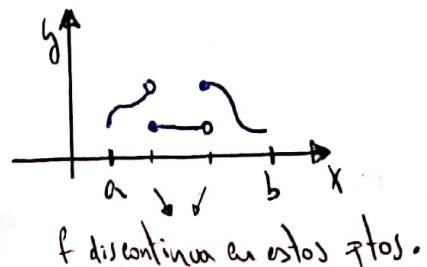
2) Para el caso  $a = b$ , se define  $\int_a^a f(x) dx = 0$ . Además de la definición se puede probar que  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

3) La integral definida se puede extender a funciones que tomen valores positivos y negativos, escribiendo  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  con  $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$

$$\text{y haciendo } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$$



4) También se puede extender la definición a funciones continuas en  $[a, b]$  salvo un número finito de pts. y siempre que  $f$  esté acotada en  $[a, b]$ .



## Algunas propiedades de la integral definida

Sean  $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de pts. Las siguientes son válidas:

- 1) Si  $f \geq 0$  en  $[a,b]$   $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
- 2)  $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- 4) Si  $d \in [a,b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$
- 5) Si  $f \leq g$  en  $[a,b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## Relación entre integral definida e integral indefinida / primitiva.

### Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  cont. y  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $\forall x \in [a,b]$ . Entonces,

(i)  $F$  es derivable y  $F'(x) = f(x)$   $\forall x \in (a,b)$ . O sea,  $F$  es primitiva de  $f$ .

(ii) Si  $G$  es una primitiva de  $f$  en  $[a,b]$ , entonces  $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) \doteq G(x) \Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Demo:

(i) (Sólo la idea.) Queremos ver que  $F'(x) = f(x)$ .

Sean  $h > 0$  y  $m_h = \min f$  en  $[x, x+h]$   $\therefore m_h \leq f(x) \leq M_h \quad \forall x \in [x, x+h]$

$$M_h = \max f \text{ en } [x, x+h]$$

Tenemos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Entonces  $m_h \cdot h \leq F(x+h) - F(x) \leq M_h \cdot h$ , o equiv.  $m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h$ .

Luego, como  $f$  es cont.  $m_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(x)$  y  $M_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(x)$   $\therefore f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$ .

(ii) Por la parte (i) sabemos que  $F$  es primitiva de  $f$ . Luego, si  $G$  es otra primitiva de  $f$   $\exists c \in \mathbb{R}$  tq  $G(x) = F(x) + c$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Entonces tenemos que

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} = \int_a^b f(t) dt.$$

Observación: Si  $f$  es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en  $[a, b]$ , también podemos aplicar (ii) del Teorema en cada subintervalo donde  $f$  es continua gracias al siguiente teorema.

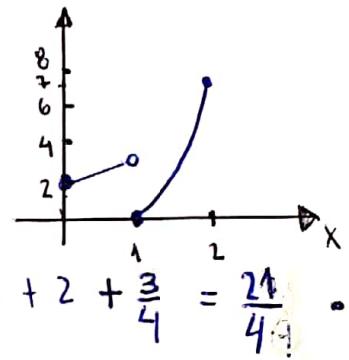
Teorema: Sean  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f$  continua y  $g$  tq  $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$  salvo un  $c \in [a, b]$ . Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Ejemplo: Aplicemos la Regla de Barrow a  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$  (11)

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 0 + 2 + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$



Teorema (Mét. de Sust.): Sean  $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  tq  $f$  y  $g'$  son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si  $u = g(x)$  vale que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

En particular, si  $F$  es primitiva de  $f$  tenemos que  $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a))$ .

Ejemplo: Calcular  $\int_0^2 2x \sin(x^2) dx$ .

Sea  $u = x^2$ , entonces  $du = 2x dx$ ,  $u(0) = 0^2 = 0$  y  $u(2) = 2^2 = 4$ . Luego,

$$\int_0^2 2x \sin(x^2) dx = \int_0^4 \sin(u) du = -\cos(u) \Big|_0^4 = -\cos(4) + \cos(0).$$

Teorema (Int. por Partes): Sean  $f$  y  $g$  derivables en  $(a, b)$  y tq  $f'$  y  $g'$  tienen a lo sumo un número finito de discont. en  $[a, b]$  y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g'(x) f'(x) dx$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ejemplo:}} \quad \int_1^e \ln(x) dx &= \int_1^e \ln(x) \cdot 1 dx = \ln(x) \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 0 - x \Big|_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

## Área entre gráficos de funciones

- Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es no negativa, acotada y con un nro. finito de discontinuidades, hemos definido el área  $A$  entre el gráfico de  $f$ , el eje  $x$  y las rectas vert.  $x=a$  y  $x=b$  como

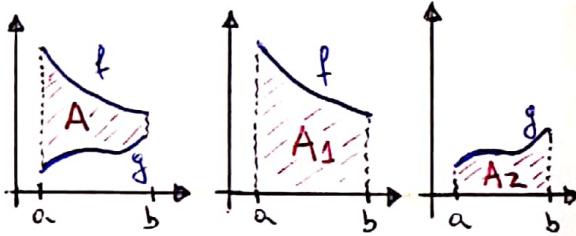
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

- Si  $f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  es razonable definir el área entre los gráficos de  $f$  y  $g$ , (y las rectas  $x=a$  y  $x=b$ ) como

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx, \text{ ya que } f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Además por las propiedades de int. definido

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = A_1 - A_2$$



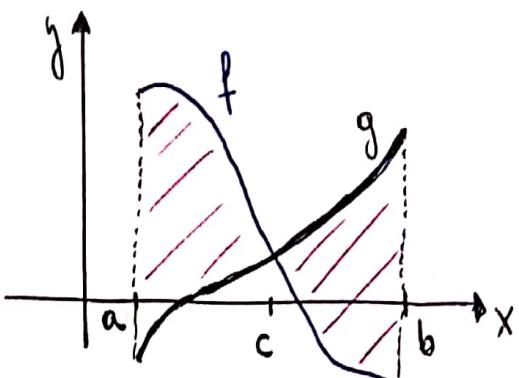
De manera general:

Teorema: Sea  $f$  y  $g$  funciones acotadas, con un nro. finito de discontin. y tales que  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Entonces, el área entre los gráficos de  $f$  y  $g$  y las rectas  $x=a$  y  $x=b$  es

$$A = \int_a^b \underbrace{(f(x) - g(x))}_{\geq 0} dx$$

Notar que  $f(x) \geq g(x)$   
nos dice que  $f(x) - g(x) \geq 0$   
 $\forall x \in [a, b]$ .

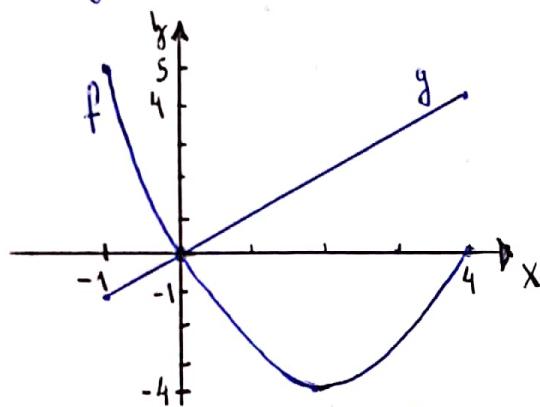
Observación: en el caso en que los gráficos se crucen, calculando el área por partes.



$$A = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

Ejemplo: Calcular el área entre los gráficos de  $f(x) = x^2 - 4x$  y  $g(x) = x$  en el intervalo  $[-1, 4]$ . (13)

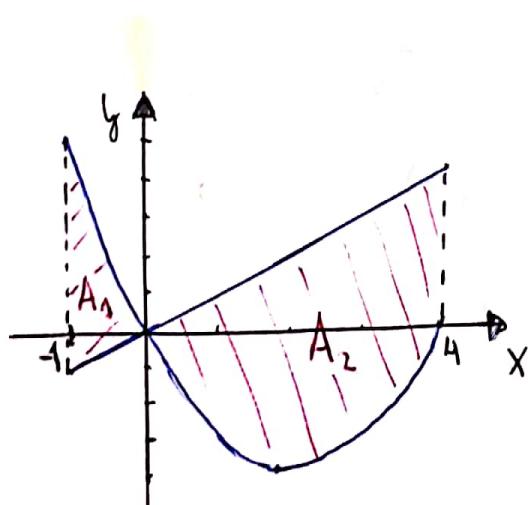
Primero grafiquemos  $f$  y  $g$  en  $[-1, 4]$ .



Tenemos que  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [-1, 0]$   
y que  $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, 4]$

Entonces debemos calcular el área A por partes.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 ((x^2 - 4x) - x) dx + \int_0^4 (x - (x^2 - 4x)) dx \quad (A = A_1 + A_2) \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 5x) dx + \int_0^4 (5x - x^2) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 \\ &= -\left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(40 - \frac{64}{3}\right) = \end{aligned}$$



# Integración de funciones racionales usando fracciones simples.

(14)

Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios (func. racionales), es decir,  $\int \frac{P(x)}{q(x)} dx$ .

Hay algunas que ya sabemos integrar, por ejemplo

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln(|x-2|) + C, \quad \int \frac{1}{(x+3)^3} dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C,$$

pero otras más complicadas no sabemos, por ejemplo  $\int \frac{x^2+3x}{x^3-1} dx$ .

De ahora en más vamos a suponer que la func. racional  $\frac{P(x)}{q(x)}$  satisface:

①  $\text{gr}(P) < \text{gr}(q)$

Ya que si no fuera cierto haremos la división de  $P(x)$  por  $q(x)$  y por lo tanto

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\substack{\text{polinomio fácil} \\ \text{de integrar}}} + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{donde } r(x) \text{ es el resto que satisface } \text{gr}(r) < \text{gr}(q)$$

$\Rightarrow$  saber integrar  $\frac{P(x)}{q(x)}$  se traduce en saber integrar  $\frac{r(x)}{q(x)}$  con  $\text{gr}(r) < \text{gr}(q)$ .

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de  $q$  es 1.

Ya que si no fuera cierto haremos

$$\int \frac{P(x)}{q(x)} = \int \frac{P(x)}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0} = \int \frac{P(x)}{a_n \underbrace{(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n})}_{\tilde{q}(x)}} = \int \frac{P(x)/a_n}{\tilde{q}(x)} = \int \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

con  $\tilde{q} \neq q$   $\tilde{a}_n = 1$  (es decir es monómico).

Utilizaremos el siguiente teorema para factorizar al polinomio  $q(x)$ .

Teorema: Todo polinomio monómico se puede escribir como producto de pol. de grado 1 y/o pol. de grado 2 sin raíces reales.

O sea, si  $q(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , ent.  $q(x) = (x - r_1) \dots (x - r_k) (x^2 + dx + \beta_1) \dots (x^2 + dx + \beta_l)$

Ejemplos:  $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3)$ ;

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2;$$

$$3x^3 + 3x = 3x(x^2 + 1)$$

↓  
sin raíces reales

• Para calcular  $\int \frac{P(x)}{q(x)} dx$ , suponemos  $\text{gr}(P) < \text{gr}(q)$  y q monómico (si no hacemos lo que dijimos antes). Vamos a separar en fracciones según cómo se factoriza q.

Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos. O sea,

$$q(x) = (x - r_1) \dots (x - r_k), \text{ con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i.$$

En este caso buscamos constantes  $A_1, \dots, A_k$  (una cte. por cada pol. de gr=1) tales que

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \dots + \frac{A_k}{x - r_k}, \text{ luego cada término } \frac{A_i}{(x - r_i)} \text{ es muy fácil de integrar}$$

Ejemplo: calcular  $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx$

Tenemos que  $q(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ . Entonces debemos hallar  $A_1$  y  $A_2$  tq

$$\frac{7x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2) + A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2)x + (2A_1-3A_2)}{(x-3)(x+2)}$$

Igualando los coeficientes de los numeradores tenemos que

$$7 = A_1 + A_2 \rightarrow A_1 = 7 - A_2$$

$$-1 = 2A_1 - 3A_2 \rightarrow -1 = 14 - 2A_2 - 3A_2 \rightarrow -15 = -5A_2 \Rightarrow A_2 = 3 \text{ y } A_1 = 4$$

$$\text{Luego } \int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{4}{x-3} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = 4 \ln(|x-3|) + 3 \ln(|x+2|) + C.$$

Caso 2: q es producto de pol. de grado 1 todos iguales). O sea  $q(x) = (x-r)^k$

En este caso buscamos constantes  $A_1, \dots, A_k$  (tantas como grado de q) tales que

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}, \text{ luego cada término } \frac{A_i}{(x-r)^i} \text{ es fácil de integrar}$$

Ejemplo: Calcular  $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3} dx$ .

Escribimos que  $q(x) = (x+2)^3$ , entonces buscamos  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$  tq

$$\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x^2+4x+4) + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3}$$

Luego, igualando los coeficientes de los numeros res tenemos que

$$0 = A_1 \quad \checkmark$$

$$-2 = 4A_1 + A_2 \rightarrow A_2 = -2 \quad \checkmark$$

$$1 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 \longrightarrow A_3 = 5 \quad \checkmark$$

Entonces,

$$\int \frac{1-2x}{(x+2)^3} dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2} dx + \int \frac{5}{(x+2)^3} dx = -2 \frac{(x+2)^{-2+1}}{(-2+1)} + 5 \frac{(x+2)^{-3+1}}{(-3+1)} + C = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2(x+2)^2} + C.$$

Caso 3: q es producto de pols. de grado 1 algunos de los cuales se repiten, O sea

$$q(x) = (x-\gamma_1) \dots (x-\gamma_{i-1})^{k_i} (x-\gamma_i) \dots (x-\gamma_n)^{k_n}.$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1 y 2.

Ejemplo: Si  $\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$ , entonces buscamos  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$  tq

$$\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3}.$$

Caso 4: q es producto de factores  $(x - r_i)^{k_i}$  y/o de polinomios de grado 2

(17)

sin raíces reales y no se repiten. O sea,

$$q(x) = (x - r_1)^{k_1} \cdots (x - r_n)^{k_n} \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 + \alpha_m x + \beta_m)$$

En este caso  $\frac{P}{q}$  se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2; y para cada "factor cuadrático" aparecen términos de la forma  $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ , con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: Si  $\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$ , entonces debemos hallar constantes  $A_1, A_2, A_3, B, C$  tq

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

*Fácil de integrar* ✓      *Integral?* ?

Observación: para integrar términos de la forma  $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ , debemos hallar

constantes  $K_1$  y  $K_2$  tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1 \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + K_2 \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta} .$$

*Fácil de integrar usando*  
*la sust.  $u = x^2 + \alpha x + \beta$*       (★)

Igualando los coef. de los numeradores  
se obtiene  $K_1 = B/2$   
 $K_2 = C - K_1\alpha$

(★) Se debe completar cuadrado y se usa sustitución para llegar a algo de la forma

$$\frac{1}{y^2+a^2} \quad \text{y} \quad \text{luego usar que } \int \frac{1}{y^2+a^2} dy = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right) + C$$

Ejemplo: Calcular  $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$  (estamos suponiendo  $B=1$  y  $C=-1$ ) ⑩

Debemos hallar  $K_1$  y  $K_2$  tq

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{K_1(2x-4)}{x^2-4x+5} + \frac{K_2}{x^2-4x+5} \Rightarrow \begin{aligned} \text{Igualando los coeficientes de los numeradores} \\ \bullet 1 = 2K_1 \rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \\ \bullet -1 = -4K_1 + K_2 \rightarrow K_2 = 1 \end{aligned}$$

Luego, debemos resolver

$$\bullet \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(|u|) + C = \frac{1}{2} \ln(|x^2-4x+5|) + C$$

Sust.  $u = x^2 - 4x + 5$   
 $du = (2x-4)dx$

$$\bullet 1 \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctg(y) + C = \arctg(x-2) + C$$

Sustitución  
 $y = x-2$   
 $dy = dx$

Finalmente,  $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(|x^2-4x+5|) + \arctg(x-2) + C$ .

Case 5: q es producto de términos lineales y cuadráticos algunos de los cuales (incluyendo los cuadráticos) se repiten.

Este caso no lo veremos.

## Integrales Impropias

Hemos definido  $\int_a^b f(x) dx$  para el caso en que  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  es acotada y continua sobre la suma en un nro. finito de pts. Ahora extendemos la definición para el caso en que  $a \neq b \notin \mathbb{R}$  o en que  $f$  no sea acotada en  $[a, b]$ .

Integrales Impropias de tipo I: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

Definición: Sea  $a \in \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  es continua en  $[a, \infty)$ , definimos  $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ , si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge; si no decimos que  $\int_a^\infty f(x) dx$  diverge.
- Si  $f$  es continua en  $(-\infty, a]$ , definimos  $\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ ; y decimos que converge o diverge según corresponda.
- Si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , definimos  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$ , siempre que estos últimos dos integrales converjan. y en tal caso decimos que  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  converge. Si alguna no converge, decimos que  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  diverge.

Observación: se puede ver que la definición de  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  no depende del valor de  $a$ .

Ejemplos:

$$\textcircled{1} \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^0) = 1 < \infty, \text{ por lo tanto}$$

la integral impropia converge.

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[ \ln(|x|) \right]_t^{-1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\ln(1) - \ln(|t|)) = -\infty, \quad (20)$$

Por lo tanto la integral impropia diverge (el límite no es un nro. finito).

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx . \text{ Elegimos } a=0 \text{ (por comodidad ya que la función es par)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg(x) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctg(t) - \arctg(0)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctg(x) \Big|_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctg(0) - \arctg(t)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Por lo tanto } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ (es convergente).}$$

Ejercicio: Ver que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ , converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$ .

Integrales Improperas de tipo II: Límites de integración finitos ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto  $c \in [a, b]$ .

Definición:

$$\bullet \text{ Sea } f \text{ continua en } [a, b) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty. \text{ Definimos } \int_a^b f(x) dx \doteq \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

si este límite existe y es finito.

$$\bullet \text{ Sea } f \text{ continua en } (a, b] \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty. \text{ Definimos } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

si el límite existe y es finito.

$$\bullet \text{ Sea } c \in (a, b). \text{ Si } f \text{ es continua en } [a, c) \cup (c, b] \text{ y los integrales existen y son finitos definimos } \int_a^b f(x) dx \doteq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

• Cuando las integrales que hemos definido existe y son  $< \infty$ , decimos que convergen, si no decimos que divergen

Ejemplos: decidir si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. 21

①  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ . Tenemos que  $f(x) = \frac{1}{x}$  es cont. en  $(0, 1]$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ . Aplicando la definición tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \ln(|x|) \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(t)) = \infty, \text{ y}$$

por lo tanto la integral diverge.

②  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ , con  $0 < p < 1$  (por ejemplo si  $p = \frac{1}{2}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ) (Recien viimos que para  $p = 1$  diverge)

Aplicamos la definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_t^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{x^{1-p}}_{>0} \Big|_t^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - t^{1-p}) = \frac{1}{1-p} < \infty$$

Por lo tanto la integral impropia converge

Ejercicio: Ver que  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ , es divergente para  $p > 1$ .

Criterio de Comparación para integrales impropias.

En algunos casos encontrar la primitiva de una función puede ser muy difícil y por lo tanto se complica decidir si una integral impropia converge o diverge utilizando directamente la definición. A continuación veremos un criterio que nos servirá para determinar si una integral impropia es convergente o divergente (sin hacer el cálculo directo, si no que lo haremos con una función más fácil de integrar).

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo I). Sea  $f$  y  $g$  funct. continuas y  $a \in \mathbb{R}$ . (2)

• Si  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ . Entonces  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  converge  $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$  converge.

o equivalentemente si  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  diverge  $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx$  diverge.

De manera análoga

• Si  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in (-\infty, a]$ . Entonces  $\int_{-\infty}^a g(x) dx$  conv.  $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x) dx$  conv.

o equiv. si  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  div.  $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x) dx$  div.

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo II)

Sean  $f, g$  func. cont en  $[a, b]$  y tq  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$

Entonces, si  $\int_a^b g(x) dx$  converge  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  converge, o equiv.  $\int_a^b f(x) dx$  div.  $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$  diverge

• Vale un resultado análogo para  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ .

Observación: en todos los casos si  $f(x) > 0$ , la hipótesis se reduce a  $f(x) \leq g(x)$ .

Ejemplo: Decidir si la integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  converge o diverge.

Notemos que no podemos calcular directamente la integral ya que la primitiva de  $e^{-x^2}$  NO es una función elemental. Utilicemos el teorema anterior.

Primero notemos que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2} dx}_{I_2}$$

- Tenemos que  $I_1$  converge ya que  $f(x) = e^{-x^2}$  es cont. en  $[0, 1]$

(Notar que es una integral definida)

- Para ver que  $I_2$  converge utilizaremos el teorema anterior

Como nos interesa  $1 \leq x \Rightarrow x \leq x^2$   $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  para  $x \in [1, \infty)$

Sean  $f(x) = e^{-x^2}$  y  $g(x) = e^{-x}$ , tenemos que  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [1, \infty)$ .

Además  $\int_1^\infty g(x) dx = \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1} < \infty$

es decir, ~~que~~ la integral  $\int_1^\infty g(x) dx$  es convergente. Entonces

por el teorema anterior  $I_2$  es convergente.

Luego, como  $I_1$  e  $I_2$  son convergentes,  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  es convergente.