El Error de Taylor

Fijamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (derivable, etc.) y

- $T_{n,a}(x)$ su **polinomio de Taylor de grado** n **centrado en** a.

Recordemos que esto involucra al valor $f(a)$ y a los valores de las n primeras derivadas de f: $f'(a)$, $f''(a)$, $\ldots$, $f^{(n)}(a)$:

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como $0! = 1$, $1! = 1$ y $2! = 2$ vemos que *simplemente* el polinomio es

la suma, desde $\ell = 0$ hasta $\ell = n$, de las potencias $(x-a)^\ell$, cada una con coeficiente $\dfrac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$.

Este polinomio *aproxima* (en general no es igual), para cada x, el valor $f(x)$: mientras mayor el n o más cerca el x de a, mejor la aproximación.

- La *diferencia* entre el verdadero valor $f(x)$ y el valor $T_{n,a}(x)$ es el **Resto o Error de Taylor**:

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x).$$

Notar que es una función de x, de la que solo sabemos $R_{n,a}(a) = 0$ (el polinomio y la función son iguales en $x = a$ y valen ambos $f(a)$).

- Tenemos una fórmula

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para un c *indeterminado* que está entre x y a (y que depende de x).

Por esto, en general **no nos importa el valor exacto**, sino que buscamos acotarlo o estimarlo:

$$|R_{n,a}(x)| \le \epsilon. \tag{1}$$

Notemos que en esta fórmula hay **tres** datos que podemos modificar: el grado n del polinomio, el punto x en donde comparamos la función y el polinomio y finamente la cota o estimación ϵ.

En general, los problemas que vamos a plantear van a tener que ver con la relación de dos de estos datos, ya dados, con el tercero, por descubrir.

$\star$ **Tipos de problemas.** En general se nos presentan tres tipos de problemas:

(1) Dados una grado n y un valor x fijos:

¿Cuánto vale el error?

No buscamos una respuesta exacta si no una que **buscamos una cota** ϵ que cumpla (1). Es decir:

Tenemos n y x: buscamos ϵ.

(2) Dada una cota ϵ para el error y un valor de x fijos:

¿Qué n necesito para cumplir con esa cota?

Aquí **buscamos un grado** n que nos permita asegurar que vale (1). Es decir:

Tenemos ϵ y x: buscamos n.

(3) Dados una grado n y una cota ϵ fijos:

¿Para qué valores de x me sirve este polinomio?

Aquí queremos **hallar valores de** x para los que se cumpla (1). Es decir:

Tenemos ϵ y n: buscamos x.

Es importante observar que podemos no encontrar *todos* los valores de x, si no que el problema apunta a encontrar un *subconjunto* de estos valores.

⋆ **¿Qué pasa con c?** Como dijimos, el valor de c es *indeterminado*, por lo que no podemos calcular el valor exacto de la función $R_{n,a}(x)$ y buscamos estimarla. De todos modos, $f^{(n+1)}(c)$ aparece en la fórmula. **Tenemos que remover este factor: estimarlo**.

Buscamos una cota $M > 0$ de modo tal que podamos asegurar:

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq M$$

para cualquiera que pueda ser el valor de c (entre a y x). Es decir, en el intervalo (a, x) (si $x > a$) o (x, a) (si $x < a$).

Por ejemplo:

- Si la función $f^{(n+1)}(t)$ (ponemos t para no confundir con x o c) es creciente, entonces $f^{(n+1)}(c) \leq f^{(n+1)}(x)$ si $x > a$ o $f^{(n+1)}(c) \leq f^{(n+1)}(a)$ si $x < a$. Como es creciente, es menor o igual que su valor en el extremo *derecho* del intervalo.
- Si es decreciente, es menor o igual que su valor en el extremo *izquierdo* del intervalo: $f^{(n+1)}(c) \leq f^{(n+1)}(a)$ si $x > a$ o $f^{(n+1)}(c) \leq f^{(n+1)}(x)$ si $x < a$.
- Si $f^{(n+1)}(t) = \cos(t)$ o $f^{(n+1)}(t) = \operatorname{sen}(t)$, podemos usar $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$.
- En cualquier otro caso, *tenemos herramientas de Análisis I* para analizar una función en un intervalo y encontrar su máximo.

Si logramos esto, obtenemos que

$$|R_{n,a}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Así, la ecuación (1) se vuelve:

$$M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \epsilon. \tag{2}$$

Esta es una ecuación con tres datos: x, n, ϵ. Como vimos, los **tres problemas** que queremos resolver son

tengo dos datos, quiero encontrar el otro.

⋆ **Los tres problemas.** Queremos resolver (2), teniendo dos datos y buscando el tercero.

Problema 1: Tenemos el grado n y un x fijo. Entonces puedo hallar ϵ directamente:

$$\epsilon = M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Problema 2: Tenemos la cota ϵ y un x fijo. Entonces debo "despejar" n para que cumpla:

$$\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

Es un problema que se resuelve a mano, con algo de ingenio.

Problema 3: Tenemos la cota ϵ y un n fijo. Se trata entonces de encontrar un intervalo de valores para x que cumplan:

$$M|x-a|^{n+1} \leq \epsilon(n+1)!$$

Es decir, la respuesta es el intervalo

$$\left[a - \sqrt[n+1]{\frac{\epsilon(n+1)!}{M}}\ ,\ a + \sqrt[n+1]{\frac{\epsilon(n+1)!}{M}}\right].$$

Como indicamos antes, estos son algunos valores para los cuales podemos asegurar que vale (2). Si mejoramos la cota M, podemos hallar un intervalo mayor.

Problema 3 (bis): Aquí podemos hacer una aclaración: M es el máximo de $f^{(n+1)}(t)$ en el intervalo (a, x). Como x en este caso es variable, la constante M puede estar en función de x: ser una función $M(x)$. Se trata entonces, más específicamente de encontrar el intervalo de valores para x que cumplan:

$$M(x)|x-a|^{n+1} \leq \epsilon(n+1)!$$

En cualquier caso (sea M una constante o no) esto es nuevamente un problema de Análisis I: analizar cuándo una función $g(x) = M(x)|x-a|^{n+1}$ es menor o igual a un número fijo $\epsilon(n+1)!$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y consideremos su polinomio de Taylor $T_{n,0}(x)$ alrededor de $x = 0$. Entonces

(1) Si $n = 3$ y $x = 0,2$. ¿Cuál es el error que cometo si tomo $T_{3,0}(0,2)$ como valor de $\operatorname{sen}(0,2)$?
(2) ¿Qué grado n necesito si quiero tomar $T_{n,0}(0,2)$ como valor de $\operatorname{sen}(0,2)$ y equivocarme por menos de 10^{-6} (seis decimales correctos)?
(3) ¿Cuáles son los valores de x para los cuales puedo tomar $T_{3,0}(x)$ como valor de $\operatorname{sen}(x)$ y siempre equivocarme por menos de 10^{-2} (dos decimales correctos)?

El error $R_{n,0}(x)$ involucra la derivada $n+1$ de $\operatorname{sen}(x)$, evaluada en algún c entre 0 y x. Dependiendo de n, este valor será $\operatorname{sen}(c), \cos(c), -\operatorname{sen}(c)$ o $-\operatorname{sen}(c)$. Como observamos antes, siempre se cumple

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq M = 1.$$

Por lo tanto, los tres problemas se resumen en que tenemos **dos** de los datos n, x, ϵ y buscamos el que nos falta para que valga (2), que en este caso ($a = 0$) es

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \epsilon.$$

Podemos dar las respuestas. Vamos a usar la identificación $0,2 = \dfrac{1}{5}$:

(1) Si $n = 3$ y $x = 0,2$, entonces el error es a lo sumo

$$\frac{|0,2|^4}{4!} = \frac{1}{5^4 24} = \frac{1}{15000}.$$

Es decir, es menor a 10^{-4}, tiene cuatro dígitos de precisión.

(2) Si $x = 0,2$ y $\epsilon = 10^{-6}$, necesito resolver

$$\frac{|0,2|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10^6} \iff 1000000 \leq 5^{n+1}(n+1)! \iff n \geq 5.$$

(3) Si $n = 3$ y $\epsilon = 10^{-2}$ entonces $\sqrt[n+1]{\frac{\epsilon(n+1)!}{M}} = \sqrt[4]{\frac{24}{100}} \approx 0,7$. Luego la aproximación vale para

$$x \in \left[-\sqrt[4]{\frac{24}{100}}, \sqrt[4]{\frac{24}{100}}\right].$$

$\square$

Analicemos en otro ejemplo el caso (3), en el contexto del *Problema 3 (bis)*.

Ejemplo (bis): Sea $f(x) = e^x$ y consideremos su polinomio de Taylor $T_{n,0}(x)$ alrededor de $x = 0$. Entonces

(3) ¿Cuáles son valores de $x > 0$ para los cuales puedo tomar $T_{3,0}(x)$ como valor de e^x y siempre equivocarme por menos de 10^{-2} (dos decimales correctos)?

Notar que *todas* las derivadas de f coinciden: $f^{(n)}(x) = e^x$. Así, la fórmula del error es, para cada x:

$$R_{3,0}(x) = \frac{e^c x^4}{4!} \qquad \text{para } c \in [0, x].$$

Vemos entonces que no hay una cota única M tal que $e^c \leq M$, ya que la exponencial es una función creciente y no acotada. En este caso, sí podemos observar que

$$e^c \leq e^x.$$

Con un poco de Análisis 1, también podemos usar $e^x \leq x^4$ si $x \leq 8$. Así, llegamos a la cota

$$|R_{3,0}(x)| \leq \frac{e^x x^4}{4!} \leq \frac{x^8}{4!}.$$

Obtenemos entonces que los valores de x para los cuales el error es menor a 10^{-2} son aquellos tales que $x^8 \leq \frac{4!}{10^2} = 0,24$. Es decir $x \in [0, \sqrt[8]{0,24}]$. (Recordar que que con una cota más ajustada podríamos hallar un intervalo mayor). $\square$

$\star$ **Bonus track:** La serie de Taylor.

Recordemos que para identificar el conjunto en donde una función $f(x)$ coincide con su serie de Taylor alrededor de a tenemos que chequear para qué valores de x vale

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0.$$

Si consideramos nuevamente la cota $f^{(n+1)}(c) \leq M(x)$, esto implica buscar los valores de x para los cuales

$$\frac{M(x)|x-a|^{n-1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En este caso, x y a están fijos, se trata entonces de ver si la sucesión

$$a_n = \frac{M(x)|x-a|^{n-1}}{(n+1)!}$$

tiende a cero.

Volvamos al ejemplo anterior, ahora en este contexto.

Ejemplo. ¿Para qué valores de x la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ coincide con la función?

Recordemos que en este caso $|R_{n,0}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Así, vemos que $\operatorname{sen}(x)$ coincide con su serie para cualquier $x \in \mathbb{R}$ ya que, si x está fijo, la sucesión

$$a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tiende a cero.

$\square$