Análisis Matemático II / Cálculo II

Lic. en Ciencias de la Computación / Matemática Aplicada - 2024

Práctico 1 - Integración

(0) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33 - 2x)^{\frac{4}{3}}$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = \ln(7 - x)$
e) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$
f) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$
h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

(1) Dar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^3 - 5x$
b) $g(x) = \mathrm{e}^{0.3x}$
c) $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$
d) $g(x) = 2x\cos(x^2)$
e) $g(x) = x^{3/2}$
f) $g(x) = \sqrt{x+2}$

(2) Encontrar la primitiva F de $f(x) = \dfrac{3}{x}$ tal que $F(1) = 5$.

(3) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$
b) $\displaystyle\int 2^x\,dx$
c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{33-2x}\,dx$
d) $\displaystyle\int \frac{dx}{7-x}$
e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx$
g) $\displaystyle\int \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}\,dx$
h) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$

Ayuda: usa el Ejercicio (0)

(4) Sin realizar el cálculo de la integral, justificar las siguientes igualdades y desigualdades:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\,dx = 0$
b) $\displaystyle\pi/6 \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx \leq \pi/3$
c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x}\,dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$

(5) Calcular la derivada de las siguientes funciones donde sea posible:

a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{1+\cos^2 t}\,dt$
b) $\displaystyle f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$
c) $\displaystyle f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \frac{t+1}{\sqrt{1+2^t}}\,dt$

(6) Calcular las siguientes integrales usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

a) $\displaystyle\int_1^2 2^x\,dx$
b) $\displaystyle\int_3^5 \sqrt[3]{33-2x}\,dx$
c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$
d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$
e) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$
f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}\,dx$

(7) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x\,e^{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\ dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$ g) $\displaystyle\int_0^2 x\ \ln(x^2+4)\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-2x)\ e^{-2x}\ dx$ e) $\displaystyle\int_3^9 x\ \ln(x-1)\ dx$ h) $\displaystyle\int e^{-x}\ \operatorname{sen}(2x)\ dx$

c) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\ dx$ f) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\ dx$ i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\ dx$

(8) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$ g) $\displaystyle\int e^{x}\,(1-\ e^{x})^{-1}\ dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\ dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \arccos(x)\ dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ \ln(x+1)\ dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 x^3\ e^{x^2}\ dx$ i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\ dx$

(9) Trazar la región limitada por las curvas dadas y calcular su área:
a) $y=4x^2, \quad y=x^2+3$
b) $y=\cos(x), y=\operatorname{sen}(x),\ x=0, x=\pi/2.$
c) $y=|x|, \quad y=(x+1)^2-7, \quad x=-4$

(10) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\ dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\ dx$ c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\ dx$

(11) La sustitución $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, o equivalentemente, $x=2\arctan(t)$, transforma cualquier integral que involucre sólo senos y cosenos vinculados por suma, producto o cociente, en la integral de una función racional. Verificar que con esta sustitución resulta

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen}(x)=\frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Utilizar esta sustitución en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2}{1+\cos(x)}\ dx$ b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\ dx$

(12) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \tan^2(x)\ dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

(13) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}}\ ds$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^{2/3}}\ dy$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,e^{-x^2}\ dx$

(14) Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge o no.

a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}-1}\ ds$ c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$ e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x-2}$

Ejercicios adicionales

(1) Encontrar la primitiva F de $f(x) = x + \cos(x)$ que pasa por el punto $(0, 4)$.

(2) Sin realizar el cálculo de la integral, justificar las siguientes igualdades y desigualdades:

a) $\displaystyle\int_{-5}^5 x^4\ dx = 2\int_0^5 x^4\ dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 (x-2)^3\ dx = 0$

c) $\displaystyle\int_{-99}^{99} (ax^3 + bx^2 + cx)\ dx = 2\int_0^{99} bx^2\ dx$

(3) Trazar la región limitada por las curvas dadas y calcular su área:

a) $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$

b) $y = \mathrm{e}^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = -2, \quad x = 1$

c) $y = x + 6, \quad y = x^3, \quad x = -2, \quad 2y + x = 0$

(4) Usar el cálculo integral para calcular el área de los triángulos con vértices:

a) (0,0); (1,8); (4,3). b) (-2,5); (0,-3); (5,2).

(5) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto (1,1) y el eje x.

(6) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\ dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\ dx$

Ayuda: en el inciso (c) sustituya $u = x^2 + 1$.

(7) Calcular las siguientes integrales:

b) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\ dx$ d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{12x-8-3x^2}}$ f) $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos(2x)}\ dx$

(8) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

d) $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ f) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ dx$

(9) Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge o no.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(x)\ dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\ dx$ f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\ dx$