Análisis Matemático II / Cálculo II

Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada - 2024

Práctico 5 - Funciones de varias variables

Dominios y gráficos

(1) Determinar el dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones y graficarlo.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2+9\,y^2-36}$

(2) *Bosquejar* la gráfica de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = y^2$, donde $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

(b) $f(x,y) = x^2+y^2$ (paraboloide)

(c) $f(x,y) = x^2-y^2$ (silla de montar)

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (cono)

Derivadas parciales

(3) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a) $f(x,y) = x-y$, $p = (3,2)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $p = (1,1,1)$

(c) $f(x,y) = xy+x^2$, $p = (2,0)$

(d) $w = \mathrm{e}^{y\ln z}$, $p = (\mathrm{e},2,\mathrm{e})$

(e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $p = (0,-1,-1)$

(f) $w = \ln(1+e^{xyz})$, $p = (2,0,-1)$

(4) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $p = (\pi,4)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, en $p = (1,2)$.

(5) Para las siguientes funciones $f(x,y)$ encontrar:

(a) El gradiente en el punto p indicado.

(b) Una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado.

(i) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, en $p = (1,1)$.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $p = (0,2)$.

(6) Calcular la derivada direccional de f en el punto P y en la dirección del vector $\vec{u}$ dado.

(a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{2y}$, $P = (2,0)$, $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $P = (1,3,2)$, $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(7) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2+(3x-y-6)^2$?

Regla de la cadena

(8) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

(a) $z = x^2(1 + y^2)$ (b) $w = x^3y^3z^3$

(9) Aplique la regla de la cadena para hallar $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$

(a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$
(b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$
(c) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$
(d) $\arctan(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

(10) Sea $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ donde $x = \mathrm{e}^{st}$, $y = 1 + s^2 \cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene reemplazando x e y en u y luego derivar.

(11) Sea $z = f(x, y)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3s - 2t$. Calcular:

(a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

Puntos críticos

(12) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{2 + x^2 + y^2}$

(13) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$

(14) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^4}$

(15) Calcular la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

(16) Calcular los valores máximo y mínimo relativos o puntos sillas de las siguientes funciones

(a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
(b) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 + 8y$
(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
(d) $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x$ en $1 \leq x \leq 7$.

Superficies y curvas de nivel

(17) Para las funciones del Ejercicio (5), hallar una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

(18) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.
(a) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$, en $p = (1, -1, 1)$.
(b) $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$, en $p = (\pi/2, \pi, \pi)$.