Análisis Matemático II / Cálculo II

Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada - 2024

Práctico 2 - Sucesiones y Series Numéricas

Sucesiones

(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

(a) $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

(b) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

(c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(d) $a_n = n \operatorname{sen}(6/n)$

(e) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$

(f) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2(n)}{4^n}$

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$

(d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

Series Numéricas

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $4 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{16}{25} + \dfrac{32}{125} + \dots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

(4) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

(5) Determinar si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente, o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

(6) Utilizar el criterio de la integral para series numéricas y determinar si las siguientes integrales convergen o no.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^x}$

Ejercicios adicionales

(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

(a) $a_n = n - \sqrt{n^2-4n}$ (b) $a_n = 20\,(-1)^{n+1}$ (d) $a_n = \cos(n\pi)$

(c) $a_n = n^3\,\mathrm{e}^{-n}$ (e) $a_n = \pi/4 - \arctan(n)$

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $a_n = \dfrac{\ln(n+3)}{n+3}$ (c) $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} - \dfrac{2}{81} + \ldots$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(10^{-n} + 9^{-n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}\cos(j\pi)$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}$

(4) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n\ln n}$

(5) Determinar si las series convergen absolutamente, convergen condicionalmente, divergen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

(6) Expresar los siguientes números en términos de una serie y como una relación entre números enteros.

(a) $0,\overline{5} = 0,55555\ldots$ (b) $0,\overline{307} = 0,307307307\ldots$ (c) $6,123\overline{456}$