F: Flags

「i 番の旗を x_i か y_i のどちらかに設置する，という操作を N 回行ったときの旗同士の距離の最小値を最大化せよ」という問題です．求める答えが d だとして，旗同士の距離が $d-1, d-2, \dots, 0$ となるように設置することが可能であったとみなしても問題ありません．そこで二分法を用いて d を求めていくことを考えます g．d を固定したとき，この問題は以下のように表せます．

> N 本の旗があり，i 番の旗は x_i か y_i のどちらかに設置しなくてはならない．どの 2 つの旗も距離が d 以上になるように設置することは可能か判定せよ．

2 つの旗の距離が d 未満にならないかどうかにのみ着目すればよくなり，見通しがよくなりました．旗同士の距離は 2 つの旗の位置関係のみに依存しており，その他の旗は関係ないことは明らかです．すると「i 番の旗を x_i に置いたとき，j 番の旗は y_j に置いてはならない」というような制約が最大 $O(N^2)$ 個与えられるので，条件を満たすように旗を設置することが可能か？という問題になります．これを 2-SAT に帰着させて解いていきます．

まず「i 番の旗を x_i と y_i のどちらに置くか」という N 個の変数に関する 2-SAT ではなく，z を x と y を連結して昇順に並び替えた数列として「i 番の旗を座標 z_i に設置するかどうか」という $2N$ 個の変数に関する 2-SAT として考えます．このようにすると z は昇順の数列となっているため「距離 d 未満に別の旗があってはならない」という制約が扱いやすくなります．2-SAT として考えやすいよう，問題を以下のように言い換えます．

> 真偽値をとる論理変数 $v_1, v_2, \dots, v_{2N}$ と以下に示されるようないくつかの論理式が与えられたとき，全ての論理式が真となるような真偽値の割り当てが存在するか判定せよ．
>
> - $\neg(v_i \land v_j), \neg(\neg v_i \land \neg v_j)$ (ただし i, j は旗としての対応関係がある)
> - $\neg(v_i \land v_l), \neg(v_i \land v_{l+1}), \dots, \neg(v_i \land v_{i-1})$ (l は $|z_i - z_l| < d$ となる最小の l)
> - $\neg(v_i \land v_{i+1}), \neg(v_i \land v_{i+2}), \dots, \neg(v_i \land v_r)$ (r は $|z_i - z_r| < d$ となる最大の r)

このままでは最大で $O(N^2)$ 個程度の節からなる 2-SAT となってしまいます．ここで，v_i が 真のとき，偽となる必要がある論理変数たちが区間をなすことに着目します．論理変数をさらに 2 倍程度の個数になるよう増やし，旗であった論理変数と葉が対応するように論理変数をセグメント木状に配置し，以下のルールで節を作ることで変数の数を $O(N)$，節の数を $O(N \log N)$ に抑えることが可能です．

1. セグメント木の葉であるような i と旗の対応関係がある j について $\neg(v_i \land v_j), \neg(\neg v_i \land \neg v_j)$
2. セグメント木上で親の頂点の番号を p として $(v_i \to v_p)$
3. $[l, i), [i+1, r+1)$ をセグメント木上で $O(\log N)$ 個の頂点 $u_1, u_2, \dots, u_k$ に分割したとして $\neg(v_i \land u_1), \neg(v_i \land u_2), \dots, \neg(v_i \land u_k)$

図 1 にルール 2,3 の具体例として v_{26} に着目した場面を示します．v_{26} に真を割り当てるとき，ルール 2 から先祖である赤色の頂点たちもまた真が割り当てられる必要があります．この「ある頂点に真が割り当てられたならば，その先祖たちは全て真」という性質を「ある頂点に偽が割り当てられたならば，その子孫たち全てもまた偽が割り当てられている」という性質だと考えると，ルール 3 のように図中の濃い青色の頂点 $v_{19}, v_5, v_{12}, v_{27}, v_{28}$ に対して節を追加することで「v_{26} に真が割り当てられたとき，$v_{19}, v_{20}, \ldots, v_{25}, v_{27}, v_{28}$ は偽が割り当てられる必要がある」という条件を $O(\log N)$ 個の節で表すことが可能となることが分かります．

変数の数 $O(N)$，節の数 $O(N \log N)$ の 2-SAT は 1 回あたり $O(N \log N)$ で調べることが可能なので，二分法と合わせて $O(N \log N \log \max z_i)$ で解くことが可能となります．

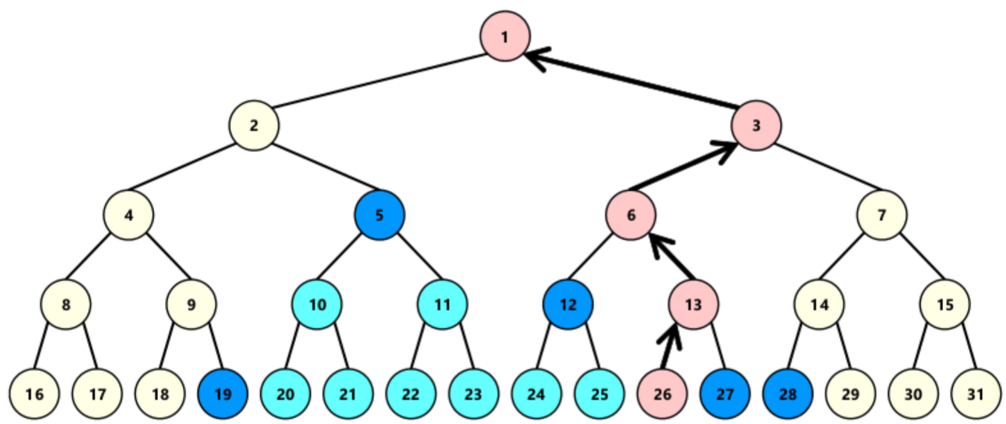

図 1　v_{26} に着目したときの節の追加ルール