NOI2018 模拟赛题解

Yang Jiaqi

2018 年 6 月 29 日

1 细胞

假设答案为 k。设第 i 轮得到的细胞序列为 s_i，那么 S 是 s_k 的子串。对于 $1 \le i \le k$，我们考虑 S 在 s_i 中的原像：即 s_i 的某个最短的能够生成 S 的子串，设原像的长度为 t_i。注意到 $l_i \ge 2$，因此 S 在 s_{k-1} 中的原像长度不超过 $\frac{|S|}{2}+1$。这就告诉我们，从 s_k 开始往回推 $O(\log|S|)$ 轮所得到的 S 的原像长度一定不超过 2。也就是说，序列 $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ 一定是一串很长的 1 或 2，再加上 $O(\log|S|)$ 次倍增。这促使我们把答案分成两部分计算。

对于前面一段很长的部分，我们可以利用 BFS 得到每一对细胞 x, y 最早在什么时候出现（相当于枚举它从什么时候开始倍增），设这个值为 $g[x][y]$。对于后面的 $O(\log|S|)$ 部分，我们可以设 $f[i][x][j]$ 表示 "某个与目标序列 S 的匹配位置为 j 的串，后面接上细胞 x 繁殖 i 轮的序列" 最终匹配位置是哪里。之后我们可以枚举 x, y, i 并判断 $f[i][y][f[i][x][0]]$ 是否等于 $|S|$（这相当于把细胞 x 繁殖 i 轮的序列与 y 繁殖 i 轮的序列拼接了起来！），然后用 $g[x][y]+i$ 更新答案。注意特殊处理 $x = y$ 的情况。

时间复杂度是 $O(n^2 \log n)$ 的（这里假设 $m = O(n)$）。

2 种草

显然可以按先东西、再南北的顺序吹风。那么如果枚举东南西北各多少轮，然后判断是否能覆盖，就是一个最简单的 $O(n^5 \log n)$ 做法（$O(n^4)$ 枚举，$O(n \log n)$ 扫描线）。

现在我们不分别枚举东西多少轮，改为枚举东与西总共多少轮，设为 a。可以证明，有意义的 a 只有 $O(n^2)$ 个（这个值一定是让 "某一对点恰好能连上"，或者是让 "某个点和边界恰好连上"）。当 a 确定以后，整个图可以看作是有 n 条长度为 a 的东西向线段，然后你要南北向地移动它们，使得它们覆盖整个网格。

接下来我们需要确定东和西具体各多少轮。这相当于用一个宽度为 c 的框去切 n 条长度为 a 的线段，切完之后我们就可以离散化并枚举每一列，然后计算出每一列需要往北吹多少次（由这一列最北端的线段到边界的距离决定），往南吹多少次（由最南端的线段到边界的距离决定），北 + 南至少要吹多少次（由线段与线段间的最大间距决定）。然后我们合并这些信息（取最大值）。注意这些信息只和这列有哪些线段有关，因此都是可以预处理的（只有 $O(n^2)$ 种）。合并这些信息可以借助单调队列，这样就得到了 $O(n^3)$ 的做法。

3 买票

不妨先将 n 到 1 的铁路断开，将环转化为链。然后我们可以求出 $x_i (1 \le i \le n)$ 表示在这种情况下，i 到 $(i+1)$ 的铁路有多少人经过。特别地，我们令一开始 $x_n = 0$。

不妨设 $a_j \le b_j (1 \le j \le m)$，那么现在我们的问题转化为：

有 m 个区间，每个形如 $[a_j,b_j)$。每次你可以选一个区间 $[a_j,b_j)$，然后将区间内的所有 x_i 减去 1，将区间外的所有 x_i 加上 1（以下称这个操作为 “翻转”）。第 j 个区间最多可以被翻转 c_j 次。假设最终得到的序列是 y_i，那么你的目标是最小化 $\max y_i$。

这个问题一眼看上去并不好做。那么我们不妨观察一下我们选出的所有区间，看看它们有什么性质。

首先有一个比较显然的性质

定理 1. *存在一组最优解，使得其中不包含两个交集为空的区间。*

证明. 不妨假设我们选了两个区间 $[a_i,b_i)$ 和 $[a_j,b_j)$，并且 $a_i \le b_i \le a_j \le b_j$。

那么如果我们同时不选这两个区间的话，所有 $[a_i,b_i) \cup [a_j,b_j)$ 中的 x_i 会不变，而在这个集合之外的 x_i 会减 1。因此不选这两个区间不会使答案变劣。 □

由此我们可以得到一个推论

推论 2. *存在一组最优解，使得我们选出的所有区间的交集非空。*

不妨设我们选出的所有区间的交集为 $[l,r)$，那么我们有如下结论

定理 3. *令 $y_t = \max\limits_{l \le i < r} y_i (l \le t < r)$，那么存在一组最优解满足 $y_t = \max y_i$ 或 $y_t = \max y_i - 1$。*

证明. 假设现在有一组不满足上述条件的最优解，即 $y_t \le \max y_i - 2$。

由于 $[l,r)$ 是我们选出的所有区间的交，因此一定存在两个区间 $[a_p,b_p)$ 和 $[a_q,b_q)$，使得 $a_p = l$ 并且 $b_q = r$。

现在我们不再选择这两个区间。可以发现这样操作后，$\max y_i$ 不变，而 y_t 至多增加 2。 □

我们观察所有的 $x_i - y_i$，可以发现这个值越靠近 t 就越大。由于我们的目标是最小化 $\max y_i$，因此我们当然希望 $\max x_i$ 尽可能靠近 t。事实上，我们有

定理 4. *存在一个位置 t，使得 $x_t = \max x_i$。*

证明. 不妨假设命题不成立，即存在某个 $j \notin [l,r)$ 满足 $x_j > x_t$，即

$$x_t + 1 \le x_j$$

由于 $j \notin [l,r)$，因此

$$y_t - x_t + 1 \le y_j - x_j$$

两式相加得

$$y_t + 2 \le y_j$$

这与 $y_t = \max y_i$ 或 $y_t = \max y_i - 1$ 矛盾。 □

综合已有的结论，我们可以得到：假设答案为 ans，那么我们翻转的区间个数为 $\max x_i - ans$ 或 $\max x_i - ans + 1$。

接下来我们先二分答案 ans，然后枚举翻转的区间个数 k，设 $z_i = x_i + k - ans$，那么问题转化为

有 m 个区间，每个形如 $[a_j, b_j)$。每次你可以选一个区间 $[a_j, b_j)$，然后将区间内的所有 z_i 减去 2。第 j 个区间最多可以被翻转 c_j 次，并且你至多可以翻转 k 次区间。问最终能否使得所有 z_i 都小于等于 0?

这个问题可以采用经典的贪心算法来解决：我们从左到右扫描每个位置 i，如果当前位置的 $z_i > 0$ 那么我们就需要选取一些包含 i 的区间，并将区间内的所有 z_i 减 2，显然我们应该选取右端点尽量靠右的区间。这可以通过在扫描的时候同时维护一个以区间右端点为关键字的大根堆来实现，每当我们扫到一个区间的左端点时我们就将对应的区间加到堆里。

这样我们就得到了一个时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 的算法。