solution

WerKeyTom_FTD

March 15, 2018

关于题目名与文件名

题目名是瞎起的，没错，并不像上次一样藏头。
文件名好像是一句话？

阿尔法世界线

这条世界线的内容延续了我曾经出的thuwc模拟赛的故事后续。本题的定位是一道送分题，由于意想不到的在之前YMDragon的模拟赛中就出现了第一步转化，相信本题的送分本质更加暴露无遗。

解法

原本两维息息相关，相当麻烦，容易想到转45度坐标，可以使得两维独立。
那么原本$x^n y^m$会变成$(\frac{x+y}{2})^n(\frac{x-y}{2})^m$。
可以用二项式展开真正使得两维独立，接下来需要解决的是求$E(a^k)$。

可以简单设一个dp。
用$F_{i,j}$表示i步后$E(a^j)$是多少，同样用二项式展开可以得到转移式。
把转移写成矩阵，用矩阵乘法即可解决本题。
复杂度$O((n+m)^3\ log\ t)$。

这条世界线的内容延续了我曾经出的pkuwc模拟赛的故事后续。
本题是本场的代码量担当，具备一定思维与实现难度，但不容易写错。
当然本题可能会被水过。

转化

不妨让我们先换一种方式描述积和式。
一个边权二分图，一个完美匹配的贡献为匹配边边权的乘积。
求所有完美匹配贡献的和。
接下来我们认为矩阵上不为1的位置对应的就是一条关键边。

容斥

假设S是一个关键边集,任意两条属于边集的边没有相同的端点。
令$f(S)$表示有多少种完美匹配方案恰好只包含边集S，也就是不包含多余的关键边。
令$g(S)$表示有多少种完美匹配方案包含边集S，显然$g(S)=(n-|S|)!$。
定义$v(S)$表示边集S内所有边边权的乘积。w_e来表示边e的权值。

首先显然$g(S) = \sum_{S \subset T} f(T)$
则显然有$f(S) = \sum_{S \subset T} g(T) * (-1)^{|T|-|S|}$

首先显然$g(S)=\sum_{S\subset T} f(T)$
则显然有$f(S)=\sum_{S\subset T} g(T)*(-1)^{|T|-|S|}$
我们再来写出答案的式子。
$\sum_S v(S)*f(S)$
$\sum_S v(S)\sum_{S\subset T} g(T)*(-1)^{|T|-|S|}$
$\sum_T g(T)\sum_{S\subset T} v(S)*(-1)^{|T|-|S|}$

容斥

首先显然$g(S)=\sum_{S\subset T} f(T)$
则显然有$f(S)=\sum_{S\subset T} g(T)*(-1)^{|T|-|S|}$
我们再来写出答案的式子。
$\sum_S v(S)*f(S)$
$\sum_S v(S)\sum_{S\subset T} g(T)*(-1)^{|T|-|S|}$
$\sum_T g(T)\sum_{S\subset T} v(S)*(-1)^{|T|-|S|}$
整理一下式子可以发现答案的表达。
$\sum_S (n-|S|)!\prod_{e\in S}(w_e-1)$。
因此我们可以把所有边权减一，那么问题变成计算对于每个k，任选k条不相交的关键边边权乘积和是多少。

算法一

首先显然可以将联通块分开独立来做，最后再背包在一起。
假设一个联通块点数为n，边数为m，因为是二分图，其中一边一定有不超过$\frac{n}{2}$个点。
可以将小的一边状压，假设小的一边是Y部。
设$f_{i,s}$表示做到X部的第i个点，目前对于一端在X部的前i个点的关键边，我们选择了一些，它们没有相同的另一端并覆盖了s这个状态，边权积的和是多少。
转移只需要枚举当前点的一条边即可。
复杂度为$O(m*2^{\frac{n}{2}})$，即$O(n^2*2^{\frac{n}{2}})$。

算法二

考虑对图做出任意一颗生成树。
对于非树边，我们暴力枚举其选或不选。
对于生成树的部分，我们设$dp_{x,i,0/1}$表示x子树内已经做完，一共选了i条关键边，目前x的匹配状态是什么。
合并时需要枚举两个子树的第二维，枚举上界显然不会超过子树的大小。
如果这样枚举，复杂度实际只有n^2，可以发现任意两个点都会在lca处被计算一次。
那么我们的复杂度为$O(n^2 * 2^{m-n+1})$

正解

对于每个联通块，我们只需要选择复杂度小的算法即可。
最终复杂度为$O(n^2 * 2^{\frac{m}{3}})$。

伽马世界线

这条世界线的内容是基于修修要被鼠鼠绿的事实所创作的。
本题有纯推导的做法，以及生成函数意义下的带结论做法。
我们只介绍前者。

式子

首先A与B两维顺序没有关系，我们默认$A \geq B$。
我们来尝试写出一个式子。首先肯定开始飞了之后就不会正常驾驶，容易想到枚举起飞位置。接下来是简单的鸽笼原理。
$\sum_{a=0}^{A} \sum_{b=0}^{B} \binom{a+b}{a} \sum_{x=1}^{min(A-a,B-b,C)} \binom{A-a-1}{x-1} \binom{B-b-1}{x-1} \binom{C-1}{x-1}$

基础知识

$\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}=\binom{a+b}{n}$
从组合意义去理解，有$a+b$个格子，要求给n个格子染上黑色，求方案数。两个式子都能表达。

$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{a}\binom{n-i}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}$
从组合意义去理解，有n个格子，要求给a个格子染上红色，给b个格子染上绿色，最后一个红色格子严格在最前一个绿色格子之前，同时还要选择一条分界线i，使得前i个格子只有红格子，后面只有绿格子。
不妨额外添加一个格子，同样要求给a个格子染红，b个格子染绿，还需要给一个格子染黄，规定一个格子只能染一种颜色。要求黄格子前只有红格子，黄格子后只有绿格子。显然每一种新问题的染色方案对应原问题一种方案。

根据我们得出的答案的表达式，不妨先将A,B,C都减一，接下来设up表示$min(A,B,C)$。
为了方便对比，先贴出答案表达式。
$\sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{B}\binom{a+b}{a}\sum_{x=1}^{min(A-a,B-b,C)}\binom{A-a-1}{x-1}\binom{B-b-1}{x-1}\binom{C-1}{x-1}$
接下来用x代替原来的$x-1$，a代替原来的$A-a$，b代替原来的$B-b$，同时我们已将A,B,C减一。
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}\sum_{a=0}^{A}\binom{a}{x}\sum_{b=0}^{B}\binom{b}{x}\binom{A+B-a-b}{A-a}$

推式子

$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}\sum_{a=0}^{A}\binom{a}{x}\sum_{b=0}^{B}\binom{b}{x}\binom{A+B-a-b}{A-a}$
注意到$b > B$会让$\binom{A+B-a-b}{A-a}$值为0，因此我们可以抬高上界。
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}\sum_{a=0}^{A}\binom{a}{x}\sum_{b=0}^{A+B-a}\binom{b}{x}\binom{A+B-a-b}{A-a}$
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}\sum_{a=0}^{A}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{A-a+x+1}$
使用之前基础知识提到的可以变换成这条式子。

推式子

$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}\sum_{a=0}^{A}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{A-a+x+1}$
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}(\sum_{a=0}^{A+B+1}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{A-a+x+1}-\sum_{a=A+1}^{A+B+1}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{A-a+x+1})$
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}(\sum_{a=0}^{A+B+1}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{B-x}-\sum_{a=A+1}^{A+B+1}\binom{a}{x}\binom{A+B-a+1}{A-a+x+1})$
前面部分可以使用基础知识提到的等式，后面部分我们改枚举$a-(A+1)$。
$\sum_{x=0}^{up}\binom{C}{x}((\binom{A+B+2}{B+1}-\sum_{a=0}^{B}\binom{a+A+1}{x}\binom{B-a}{x-a}))$
容易发现$up, B \leq 10^6$，因此前面部分已经可以快速计算，接下来我们只考虑后面部分。

推式子

$\sum_{x=0}^{up} \binom{C}{x} \sum_{a=0}^{B} \binom{a+A+1}{x} \binom{B-a}{x-a}$
我们用基础知识介绍的等式拆开组合数。
$\sum_{x=0}^{up} \binom{C}{x} \sum_{a=0}^{B} \binom{B-a}{x-a} \sum_{i=0}^{x} \binom{A+1}{i} \binom{a}{x-i}$
$\sum_{x=0}^{up} \binom{C}{x} \sum_{i=0}^{x} \binom{A+1}{i} \sum_{a=0}^{B} \binom{B-a}{x-a} \binom{a}{x-i}$
$\sum_{x=0}^{up} \binom{C}{x} \sum_{i=0}^{x} \binom{A+1}{i} \sum_{a=0}^{B} \binom{B-a}{B-x} \binom{a}{x-i}$
$\sum_{x=0}^{up} \binom{C}{x} \sum_{i=0}^{x} \binom{A+1}{i} \binom{B+1}{B-i+1}$
$\sum_{i=0}^{up} \binom{A+1}{i} \binom{B+1}{B-i+1} \sum_{x=i}^{up} \binom{C}{x}$
后面部分可以预处理后缀和，那么这个式子也可以快速计算。