Count 题解

题目大意

“令$f(x)$表示$\le x$的正整数中与x互质的数的平均数$\times 2$，请计算$\sum_{i=L}^{R} f(i)^k$。”

题解

主要思路：配对+拉格朗日插值法

考虑当$x \ge 2$时$\varphi(x)$为一个偶数，并且对于一个$\le x$的正整数y，如果$gcd(x,y)=1$则有$gcd(x,x-y)=1$。此时不难发现$f(x)=x$。

因此题目变成$\sum_{i=L}^{R} i^k$。不妨考虑$\sum_{i=1}^{R} i^k$。

对于R较小的情况，我们考虑快速幂直接计算。

对于R较大的情况，我们知道答案$ans(R)$是一个$k+1$次多项式。

我们考虑快速幂计算出所有的$1 \le i \le k+2, ans(i)$。

根据拉格朗日插值法有：

$$ans(x)=\sum_{i=1}^{k+2} ans(i) \times \frac{\prod_{j=1,j\ne i}^{k+2}(x-j)}{\prod_{j=1,j\ne i}^{k+2}(i-j)}$$

枚举i，不难发现分子和分母都是连续两段数字的乘积。

随着i的增大，发现两段数字只有端点的数字发生了变化。

值得注意的一点是$f(1)=2$。