$admirable$

首先第三种边一定是一条简单路径, 我们考虑枚举这一条路径 (假设这条路径不是返祖路径), 那么这条路径对答案的贡献就是 $f_x * f_y$ 其中,x, y 为路径端点, f_i 表示在 i 的子树中选 k 个点, 任意两点的 LCA 为 i 的方案数

假如是返祖路径, 我们就求出 $g_{i,j}$ 表示以 i 的第 j 个儿子为根方向时的 f_i, 再通过 $f_x * g_{y,j}$ 算出贡献

假设我们可以求得所有的 f 和 g, 那么显而易见的, 我们可以在线性时间内直接通过枚举每一个点来算出它在两种路径下对答案的贡献, 进而得到答案

所以问题所在就是如何算出 f 和 g

我们先考虑 f_i, 为了让 k 个点任意两个点的 LCA 为 i, 那么显然我们选择方案为: 在 i 处选若干点, 每个儿子的子树中选一个或者不选, 根据这个我们可以列出多项式:

$P(x) = \prod_{son}(1 + size_{son}x) \qquad (P(x) * (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots))[k] = f$

求 $P(x)$, 我们可以分治 FFT, 对于一个点复杂度为 $O(deg * log_2^2 n), deg$ 为点不包括父边的度数, 因为度数之和是 $O(n)$ 的, 所以对于每个点我们都可以求出 $P(x)$, 那么求 f 也就直接根据 $f = \sum_{i=0}^{min(k,deg)} A_k^i * P(x)[i]$, 然后这个也是 $O(n)$ 的

我们定义 $Q_i(x)$ 表示以第 i 个儿子为根, 当前节点 u 的 $P(x)$

那么显然 $Q_i(x) = P(x) * \frac{1+(n-size_u)x}{1+size_{son_i}x}$, 那么求一次 $Q_i(x)$ 的复杂度为 $O(deg)$

我们再根据一个点 $size$ 不同的儿子个数最多为 $\sqrt{n}$, 那么一个点最坏复杂度为 $O(\sqrt{n} * deg)$, 累加起来就是 $O(n * \sqrt{n})$, 我们根据这个与 f 同理可以求出 g 来

最终时间复杂度为:$O(n * log_2^2 n + n * \sqrt{n})$