

# NOIP2017 模拟赛题解

June 29, 2017

## 1 A

结论:  $a_n = n + 1$

下面归纳地进行证明。

对于  $n = 0, n = 1$ , 有  $a_0 = 1, a_1 = 2$ , 满足  $a_n = n + 1$ 。

当  $n > 1$  时,

$$a_n = E(a_i + a_j), \text{ for } i, j \in [0, n)$$

$$a_n = E(a_i) + E(a_j), \text{ for } i, j \in [0, n)$$

$$a_n = 2E(a_i), \text{ for } i \in [0, n)$$

$$E(a_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = n + 1$$

证毕。

## 2 piano

算法一：

首先我们要知道 LCS(最长公共子序列)，然后直接 DP 就行了～

记小 T 的乐谱为 A，比较乐谱为 B

设  $dp(i, j)$  表示乐谱 A 的前  $i$  个音符与乐谱 B 的前  $j$  个音符的 LCS

$$dp(i, j) = \max\{\max\{dp(i-1, j), dp(i, j-1)\}, (dp(i-1, j-1) + 1) * (A_i == B_j)\}$$

时间复杂度:  $O(R * S * L)$

期望得分：30 分

算法二：

注意到数据是随机的，所以先将乐谱 A 中的字符串哈希，转成数值，  
(总共只有  $5^7 * 10^6$  种哈希值，所以哈希值之间没有冲突。)

然后通过哈希值判断，将乐谱 B 中无效的音符去除。DP 部分结合算法一。

相比算法一，比较音符可以直接比较哈希值，所以常数更小。

时间复杂度:  $O(R * S * L)$

期望得分：30 ~ 70 分

算法三：

“保证小 T 的乐谱中每个音符都不会重复出现。”

注意到这个条件，我们可以把 LCS 问题转换成 LIS(最长上升子序列)问题。

预处理与算法二相同，然后根据在 A 中出现的位置，给乐谱 B 中的有效音符标号。

记  $\{C_i\}$  为标号序列，若  $A_i = B_j$ ，那么  $C_j = i$

接下来对序列 C 做 LIS 就可以啦～！

时间复杂度:  $O(S + R * L * (\log L + \log S))$  (记得加读入优化。)

期望得分：100 分

### 3 gift

算法一：

枚举选取物品的集合，判断是否符合条件。

时间复杂度:  $O(n \cdot 2^n)$

期望得分: 30 分

算法二：

枚举最终无法选取的最小物品，那么显然比这个物品代价小的物品都必须选。

对于比这个物品代价大的物品，DP 计算方案数即可。

至于物品价值相同的根据排序之后的顺序视为不同就可以了。

假设此时无法选取的最小物品为  $x$ 。

设  $dp(i, j)$  表示选取前  $i$  个物品，花费  $j$  元的方案数，

$dp(0, 0) = 1$ ， $dp(i, j) = dp(i - 1, j) \cdot (i > x) + dp(i - 1, j - c[i])$

那么此时的方案数为  $\sum_{r=0}^{c[x]-1} dp(n, m-r)$ ，把方案数累加起来就是答案啦 ~

另外要特判一种情况： $m \geq \sum_{i=1}^n c[i]$ ，

此时只有一种方案，将礼物全部选完，答案为 1。

时间复杂度:  $O(n \cdot n \cdot d)$

期望得分: 60 分

算法三：

在算法二的基础上改进。

设  $dp(i, j)$  表示选取  $i \sim n$  个物品，花费  $j$  元的方案数，

$dp(n+1, 0) = 1$ ， $dp(i, j) = dp(i+1, j) + dp(i+1, j - c[i])$

假设此时无法选取的最小物品为  $x$ ，除去必须要选的物品剩余空间为  $rem$

那么此时的方案数为  $\sum_{r=0}^{c[x]-1} dp(x+1, rem-r)$

把方案数累加起来就是答案啦 ~ 另外也要特判。

时间复杂度:  $O(n*d)$

期望得分: 100 分