

redemption & autosadism

crazy\_cloud

November 1, 2017

# 1 救赎

## 1.1 Excerpt

世上存在着不能流泪的悲哀，这种悲哀无法向人解释，即使解释人家也不会理解。它永远一成不变，如无风夜晚的雪花静静沉积在心底。

——村上春树《世界尽头与冷酷仙境》

## 1.2 Source

原创。

## 1.3 Solution

利用期望的线性即可以得出对于一棵有根树答案是

$$\sum_{x=1}^n \frac{(size_x - 1)(|son(x)| - 1)}{|son(x)|}$$

稍作处理即可以做到利用一个节点的答案推算到其相邻节点的答案。

时间复杂度 $O(n)$ 。

## 2 失格

### 2.1 Excerpt

“我们所认识的阿叶，又诚实又乖巧，要是不喝酒的话，不，即使是喝酒……也是一个神一样的好孩子呐。”

——太宰治《人间失格》

### 2.2 Source

[COCI 2016/2017 Round#6]Sirni

### 2.3 Solution

首先如果有相同的 $p$ ，显然我们可以不花费任何代价地把它们并成同一块。

然后我们考虑对剩下的点求最小生成树。暴力连边肯定是不能接受的，我们考虑这样连边：

将所有的 $p$ 从小到大排序，然后我们对于 $p_i$ ，枚举它的倍数 $p_i, 2p_i, 3p_i, \dots$ 。对于一个倍数 $xp_i$ ，我们第一个大于等于它的 $p_j$ ，然后连上边 $(i, j)$ 。特别地 $x = 1$ 时我们寻找的是第一个严格大于的。

这样我们就会得到总共 $O(n \log P)$ 条边，下面我们来证明一定存在由这些边构成的最小生成树。

采用反证法，假设存在一条边 $(a, b)$ 不满足上面的条件，令 $p_a < p_b$ ，那么有 $xp_a \leq p_b < (x+1)p_a$ 。既然我们这条边不满足上面的条件，那么就存在一系列点 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 满足： $xp_a \leq p_{c_1} < p_{c_2} < \dots < p_{c_m} < p_b$ 。

考虑选取一条路径 $(a, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{m-1}, c_m, b)$ 来代替我们的边 $(a, b)$ ，它们的总代价恰好是 $p_b \bmod p_a$ ，而且这样还可能会给原图造成环，也就是说我们还可能可以删除一些边。因此，选取这条路径之后再任意环切得到的生成树大小肯定不比选取 $(a, b)$ 构成的劣。

那么我们只需要对这些边做Kruscal算法就好了，但是直接排序的话可能会超时，这时我们可以采用计数排序或者直接开个vector按权值存边。这样总的时间复杂度可以做到 $O(n \log P)$ 。