生成函数

罗煜楚

Peking University

769519763@qq.com

生成函数

A generating function is a device somewhat similar to a bag. Instead of carrying many little objects detachedly, which could be embarrassing, we put them all in a bag, and then we have only one object to carry, the bag.

—George Polya

极限

极限

- 关于 $+\infty, -\infty, \infty, 0^+, 0^-, o(1)$

- 关于 $+\infty, -\infty, \infty, 0^+, 0^-, o(1)$
- 第二次数学危机：极限与微积分。

极限

- 关于 $+\infty, -\infty, \infty, 0^+, 0^-, o(1)$
- 第二次数学危机：极限与微积分。
- 无穷大：任意给一个数 N，都比 N 大

极限

- 关于 $+\infty, -\infty, \infty, 0^+, 0^-, o(1)$
- 第二次数学危机：极限与微积分。
- 无穷大：任意给一个数 N，都比 N 大
- 无穷小：任意给一个正数 ϵ，绝对值都比 ϵ 小

序列极限与函数极限

- $\epsilon - \delta$ 语言

序列极限与函数极限

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限：a_n

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限：a_n
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限： a_n
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
- $\forall\epsilon, \exists N, s.t. n > N, |a_n - A| < \epsilon$

序列极限与函数极限

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限： a_n
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$
- $\forall \epsilon, \exists N, s.t. n > N, |a_n - A| < \epsilon$
- 函数极限: $f(x)$

序列极限与函数极限

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限：a_n
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
- $\forall \epsilon, \exists N, s.t. n > N, |a_n - A| < \epsilon$
- 函数极限: $f(x)$
- $\lim\limits_{x\to A} f(x) = B$

序列极限与函数极限

- $\epsilon - \delta$ 语言
- 序列极限：a_n
- $\lim_{n\to\infty} a_n = A$
- $\forall\epsilon, \exists N, s.t. n > N, |a_n - A| < \epsilon$
- 函数极限: $f(x)$
- $\lim_{x\to A} f(x) = B$
- $\forall\epsilon, \exists\delta, s.t. \forall x \in U_0(A, \delta), |f(x) - B| < \epsilon$

泰勒公式

- 皮亚诺余项：当 $x \to x_0$ 时

泰勒公式

- 皮亚诺余项：当 $x \to x_0$ 时
- $f(x) = $
$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

泰勒公式

- 皮亚诺余项：当 $x \to x_0$ 时
- $f(x) =$
$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$
- 拉格朗日余项：不需要 $x \to x_0$

泰勒公式

- 皮亚诺余项：当 $x \to x_0$ 时
- $f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$
- 拉格朗日余项：不需要 $x \to x_0$
- $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdot + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

泰勒公式

- $e^x = ?$
- $sin(x) = ?$
- $cos(x) = ?$
- $\ln(1+x) = ?$
- $(1+x)^a = ?$

泰勒公式

泰勒公式

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$

泰勒公式

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

泰勒公式

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

泰勒公式

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$

泰勒公式

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$
- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

普通生成函数

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。
- 将序列元素作为系数，放在函数里 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。
- 将序列元素作为系数，放在函数里 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。
- 将序列元素作为系数，放在函数里 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$
- $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots.$

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。
- 将序列元素作为系数，放在函数里 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$
- $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots.$
- $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{x^5}{7} + 100x^6 + \cdots$? 所表示的序列?

普通生成函数

- 对于一个序列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$，希望能将他们整体表示出来。
- 将序列元素作为系数，放在函数里 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$
- $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots.$
- $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{x^5}{7} + 100x^6 + \cdots$? 所表示的序列？
- $3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \ldots$

普通生成函数

普通生成函数

- 最常见的 Taylor 公式：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

普通生成函数

- 最常见的 Taylor 公式：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- 所以 e^x 可以表示：$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$

- 最常见的 Taylor 公式：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- 所以 e^x 可以表示：$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$
- 全 1 的序列：$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
-xS &= \quad\;\; x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
(1 - x)S &= 1
\end{aligned}
$$

普通生成函数

- 最常见的 Taylor 公式：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- 所以 e^x 可以表示：$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$
- 全 1 的序列：$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ -xS &= \quad\ \ x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ (1-x)S &= 1 \end{aligned}$$

- $1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x}$

普通生成函数

- 最常见的 Taylor 公式：$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- 所以 e^x 可以表示：$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$
- 全 1 的序列：$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
-xS &= \phantom{1 + {}} x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
(1-x)S &= 1
\end{aligned}
$$

- $1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x}$
- 通过 Taylor 公式也能得到：
  $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$
- 如果将 x 替换为 $3x$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$
- 如果将 x 替换为 $3x$
- $\dfrac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, 3, 9, 27, \ldots$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$
- 如果将 x 替换为 $3x$
- $\dfrac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, 3, 9, 27, \ldots$
- 如果想要生成序列 $2, 2, 2, 2, \cdots$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$
- 如果将 x 替换为 $3x$
- $\dfrac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, 3, 9, 27, \ldots$
- 如果想要生成序列 $2, 2, 2, 2, \cdots$
- $\dfrac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$ 生成序列 $2, 2, 2, 2, \ldots$

普通生成函数

- 如果将 x 替换为 $-x$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, -1, 1, -1, \ldots$
- 如果将 x 替换为 $3x$
- $\dfrac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots$ 生成序列 $1, 3, 9, 27, \ldots$
- 如果想要生成序列 $2, 2, 2, 2, \cdots$
- $\dfrac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$ 生成序列 $2, 2, 2, 2, \ldots$
- $\dfrac{3}{1-3x} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 9x^2 + 3 \cdot 27x^3 + \cdots$ 生成序列$3, 9, 27, 81, \ldots$

普通生成函数

- 其他的变量替换

普通生成函数

- 其他的变量替换
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

普通生成函数

- 其他的变量替换
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 如何得到 $0, 1, 0, 1, 0, \cdots$

普通生成函数

- 其他的变量替换
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 如何得到 $0, 1, 0, 1, 0, \cdots$
- $\dfrac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ 生成序列 $0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$

普通生成函数

- 其他的变量替换
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 如何得到 $0, 1, 0, 1, 0, \cdots$
- $\dfrac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ 生成序列 $0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$
- 如果将 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ 与 $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ 序列相加，得到 $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$

普通生成函数

- 其他的变量替换
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 如何得到 $0, 1, 0, 1, 0, \cdots$
- $\dfrac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ 生成序列 $0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$
- 如果将 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ 与 $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ 序列相加，得到 $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$
- 在分式表达上也有体现：

- 其他的变量替换
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots$ 生成序列 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$
- 如何得到 $0, 1, 0, 1, 0, \cdots$
- $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ 生成序列 $0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$
- 如果将 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ 与 $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ 序列相加，得到 $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$
- 在分式表达上也有体现：
- $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$

普通生成函数

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导

- 如果对等号两边各自求导
- $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导
- $(\dfrac{1}{1-x})' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导
- $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$
- $(1+x+x^2+x^3+\cdots)' = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 生成序列 $1, 2, 3, 4, \ldots$

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导
- $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$
- $(1+x+x^2+x^3+\cdots)' = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 生成序列 $1,2,3,4,\ldots$
- 再求一次导

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导
- $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$
- $(1+x+x^2+x^3+\cdots)' = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 生成序列 $1,2,3,4,\ldots$
- 再求一次导
- $\frac{2}{(1-x)^3} = 2+6x+12x^2+20x^3+\cdots$

普通生成函数

- 如果对等号两边各自求导
- $(\dfrac{1}{1-x})' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $(1+x+x^2+x^3+\cdots)' = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$
- $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 生成序列 $1,2,3,4,\ldots$
- 再求一次导
- $\dfrac{2}{(1-x)^3} = 2+6x+12x^2+20x^3+\cdots$
- $\dfrac{1}{(1-x)^3} = 1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$ 生成序列 $1,3,6,10\ldots$

普通生成函数的差分

普通生成函数的差分

- 利用变量代换与求导，从 $\frac{1}{(1-x)}$ 可以得到许多形式的生成函数。

普通生成函数的差分

- 利用变量代换与求导，从 $\frac{1}{(1-x)}$ 可以得到许多形式的生成函数。
- 但是许多序列还是比较复杂不能直接被表示，但是序列的差分一般较为简单。

普通生成函数的差分

- 利用变量代换与求导，从 $\frac{1}{(1-x)}$ 可以得到许多形式的生成函数。
- 但是许多序列还是比较复杂不能直接被表示，但是序列的差分一般较为简单。
- $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots \\
-xA &= 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \cdots \\
(1-x)A &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

普通生成函数的差分

- $(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$

普通生成函数的差分

- $(1-x)A \ = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$
- 已经知道 $2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots = \dfrac{2x}{1-x}$

普通生成函数的差分

- $(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$
- 已经知道 $2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots = \dfrac{2x}{1-x}$
- $(1-x)A = 1 + \dfrac{2x}{1-x}$

普通生成函数的差分

- $(1-x)A \ = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots$
- 已经知道 $2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots = \dfrac{2x}{1-x}$
- $(1-x)A = 1 + \dfrac{2x}{1-x}$
- $A = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

普通生成函数的差分

- $(1-x)A \ = 1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots$
- 已经知道 $2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots = \dfrac{2x}{1-x}$
- $(1-x)A = 1+\dfrac{2x}{1-x}$
- $A = \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$
- $1,3,5,7,9,\ldots$ 可以由 $0,2,4,6,8,10,\ldots$ 与 $1,1,1,1,\ldots$ 相加得到。

小练习：求完全平方数的生成函数 $1, 4, 9, 16, \ldots$

$$\begin{aligned} A &= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots \\ -xA &= 0 + x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots \\ (1-x)A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \end{aligned}$$

我们已经知道了 $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

$A = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

线性递推

线性递推

- 如何通过生成函数产生线性递推的序列

线性递推

- 如何通过生成函数产生线性递推的序列
- 例如要求 *fibonacci* 序列的生成函数。

线性递推

- 如何通过生成函数产生线性递推的序列
- 例如要求 *fibonacci* 序列的生成函数。
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots \\
-xA &= 0 + 1x + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots \\
-x^2A &= 0 + 0x + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots \\
(1 - x - x^2)A &= 1 \\
A &= \frac{1}{1 - x - x^2}
\end{aligned}
$$

线性递推

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1 - x - x^2 = (1 - \phi_1 x)(1 - \phi_2 x)$

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1 - x - x^2 = (1 - \phi_1 x)(1 - \phi_2 x)$
- $\phi_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1 - x - x^2 = (1 - \phi_1 x)(1 - \phi_2 x)$
- $\phi_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$
- $\dfrac{1}{1 - x - x^2} = \dfrac{a}{1 - \phi_1 x} + \dfrac{b}{1 - \phi_2 x}$

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1 - x - x^2 = (1 - \phi_1 x)(1 - \phi_2 x)$
- $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $\dfrac{1}{1-x-x^2} = \dfrac{a}{1-\phi_1 x} + \dfrac{b}{1-\phi_2 x}$
- 解方程 $a(1 - \phi_2 x) + b((1 - \phi_1 x)) = 1$

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1-x-x^2=(1-\phi_1 x)(1-\phi_2 x)$
- $\phi_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\phi_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\dfrac{a}{1-\phi_1 x}+\dfrac{b}{1-\phi_2 x}$
- 解方程 $a(1-\phi_2 x)+b((1-\phi_1 x))=1$
- $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1),b=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_2)$

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1-x-x^2=(1-\phi_1 x)(1-\phi_2 x)$
- $\phi_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\dfrac{a}{1-\phi_1 x}+\dfrac{b}{1-\phi_2 x}$
- 解方程 $a(1-\phi_2 x)+b((1-\phi_1 x))=1$
- $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1), b=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_2)$
- 由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式，就可以得到 *fibonacci* 数列的通项公式。

线性递推

- 如何得到更加直观的数列。
- $1 - x - x^2 = (1 - \phi_1 x)(1 - \phi_2 x)$
- $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $\dfrac{1}{1 - x - x^2} = \dfrac{a}{1 - \phi_1 x} + \dfrac{b}{1 - \phi_2 x}$
- 解方程 $a(1 - \phi_2 x) + b((1 - \phi_1 x)) = 1$
- $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1), b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi_2)$
- 由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式，就可以得到 *fibonacci* 数列的通项公式。
- $a_i = \dfrac{1}{\sqrt{5}}((\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$

小练习：求序列 $\{a\}$ 的生成函数。$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$，且 $a_0 = 1, a_1 = 3$。

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + 3x + 7x^2 + 15x^3 + 31x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
-3xA &= 0 - 3x - 9x^2 - 21x^3 - 45x^4 - \cdots - 3a_{n-1}x^n - \cdots \\
+2x^2A &= 0 + 0x + 2x^2 + 6x^3 + 14x^4 + \cdots + 2a_{n-2}x^n + \cdots \\
(1 - 3x + 2x^2)A &= 1
\end{aligned}
$$

小练习：求序列 $\{a\}$ 的生成函数。$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$，且 $a_0 = 1, a_1 = 3$。

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3x + 7x^2 + 15x^3 + 31x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ -3xA &= 0 - 3x - 9x^2 - 21x^3 - 45x^4 - \cdots - 3a_{n-1}x^n - \cdots \\ +2x^2A &= 0 + 0x + 2x^2 + 6x^3 + 14x^4 + \cdots + 2a_{n-2}x^n + \cdots \\ (1 - 3x + 2x^2)A &= 1 \end{aligned}$$

- 则 $A = \dfrac{1}{(1 - 3x + 2x^2)}$ 就是序列 $\{a\}$ 的生成函数。

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

普通生成函数练习

1. $\dfrac{4}{1-x}$.

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots$.
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
4. $1, 5, 25, 125, \ldots$.
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$.
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots$.
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots$.
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots$.

普通生成函数练习

1. $\dfrac{4}{1-x}$.
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots$.
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
4. $1, 5, 25, 125, \ldots$.
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$.
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots$.
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots$.
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots$.

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x}^{2}.$

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x)^2}.$
4. $\dfrac{1}{1-5x}.$

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x}^{2}.$
4. $\dfrac{1}{1-5x}.$
5. $\dfrac{1}{1+3x}.$

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x}{}^{2}\ .$
4. $\dfrac{1}{1-5x}.$
5. $\dfrac{1}{1+3x}.$
6. $\dfrac{1}{1-5x^2}.$

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x}^{2}.$
4. $\dfrac{1}{1-5x}.$
5. $\dfrac{1}{1+3x}.$
6. $\dfrac{1}{1-5x^2}.$
7. $\dfrac{x}{(1-x^3)^2}.$

普通生成函数练习

1. $4, 4, 4, 4, 4, \ldots.$
2. $2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
3. $0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots.$
4. $1, 5, 25, 125, \ldots.$
5. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots.$
6. $1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, \ldots.$
7. $0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, \ldots.$
8. $4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, \ldots.$

1. $\dfrac{4}{1-x}.$
2. $\dfrac{2}{(1-x)^2}.$
3. $\dfrac{2x^3}{(1-x}^{\,2}\ .$
4. $\dfrac{1}{1-5x}.$
5. $\dfrac{1}{1+3x}.$
6. $\dfrac{1}{1-5x^2}.$
7. $\dfrac{x}{(1-x^3)^2}.$
8. $\dfrac{4}{1-x} + \dfrac{x}{(1-x)^3}.$

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。
- $C = A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。
- $C = A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$
- 对于生成函数的乘法：

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。
- $C = A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$
- 对于生成函数的乘法：
- $C = A \times B = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}(a_i \times b_{n-i}))x^n$

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。
- $C = A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$
- 对于生成函数的乘法：
- $C = A \times B = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}(a_i \times b_{n-i}))x^n$
- $c_n = \sum_{i=0}^{n}(a_i \times b_{n-i})$

普通生成函数的组合应用

- 将 i 次项系数 a_i 看作一个组合问题中选取问题大小为 i 的方案数。
- 那么对于两个普通生成函数的加法，则对应了加法原则。
- $C = A + B = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$
- 对于生成函数的乘法：
- $C = A \times B = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n}(a_i \times b_{n-i}))x^n$
- $c_n = \sum_{i=0}^{n}(a_i \times b_{n-i})$
- C 的 i 次项系数，是两个和为 i 的问题在加法原则下运用乘法原则的答案。

经典例题

有 A,B,C,D 四种水果，每种水果都有无限个，现在要求每种水果拿若干个，要求 A 恰好拿出偶数个，B 恰好拿出 5 个倍数个，C 最多拿 4 个，D 最多拿一个，如果最后恰好拿出 N 个水果，有多少种方案。

使用生产函数求出对于每一个 N 的答案。

例题

例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。

例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。
- $G = A \times B \times C \times D$

例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。
- $G = A \times B \times C \times D$
- $G = \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^5} \times (1+x+x^2+x^3+x^4) \times (1+x)$

例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。
- $G = A \times B \times C \times D$
- $G = \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^5} \times (1+x+x^2+x^3+x^4) \times (1+x)$
- $G = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

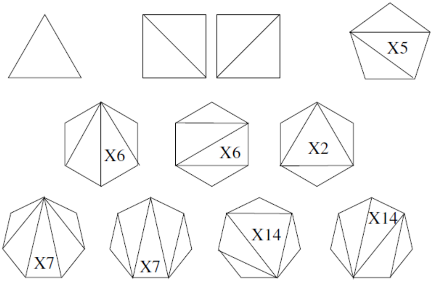
例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。
- $G = A \times B \times C \times D$
- $G = \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^5} \times (1+x+x^2+x^3+x^4) \times (1+x)$
- $G = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- 我们知道了 G 对应的序列为 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

例题

- 对于 4 种水果进行组合，将他们的生成函数相乘。
- $G = A \times B \times C \times D$
- $G = \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^5} \times (1+x+x^2+x^3+x^4) \times (1+x)$
- $G = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- 我们知道了 G 对应的序列为 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$
- 所以恰好选取 N 个水果的方案数为 $N+1$。

一个正 n 边形，顶点标号 $1 \sim n$，现在画 $n-3$ 条不相交的对角线将它画分为一些三角形，有多少种方案。



这个数列被称为 *Catalan* 数，$1, 2, 5, 14, 42, \cdots$

普通生成函数与卡特兰数

- 如何使用生成函数求 *Catalan* 数，c_i 表示 $i+2$ 边形的对角线划分方案数，特殊的令 $c_0 = 1$。

- 如何使用生成函数求 *Catalan* 数，c_i 表示 $i+2$ 边形的对角线划分方案数，特殊的令 $c_0 = 1$。
- 先将递推式写出，考虑 $(n, 1)$ 这条边所在的三角形的另一个点，会将整个多边形分成三个部分，变成三个子问题。

- 如何使用生成函数求 *Catalan* 数，c_i 表示 $i+2$ 边形的对角线划分方案数，特殊的令 $c_0 = 1$。
- 先将递推式写出，考虑 $(n, 1)$ 这条边所在的三角形的另一个点，会将整个多边形分成三个部分，变成三个子问题。
- $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$

普通生成函数与卡特兰数

- 如何使用生成函数求 *Catalan* 数，c_i 表示 $i+2$ 边形的对角线划分方案数，特殊的令 $c_0 = 1$。
- 先将递推式写出，考虑 $(n, 1)$ 这条边所在的三角形的另一个点，会将整个多边形分成三个部分，变成三个子问题。
- $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$
- 这是一个非线性的递推式。

普通生成函数与卡特兰数

- 如何使用生成函数求 *Catalan* 数，c_i 表示 $i+2$ 边形的对角线划分方案数，特殊的令 $c_0=1$。
- 先将递推式写出，考虑 $(n,1)$ 这条边所在的三角形的另一个点，会将整个多边形分成三个部分，变成三个子问题。
- $c_n=\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$
- 这是一个非线性的递推式。
- $G(x)=\sum_{i=0}^{\infty} 1+1x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+\cdots$

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。

普通生成函数与卡特兰数

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。
- 将 $G(x)$ 平方。

普通生成函数与卡特兰数

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。
- 将 $G(x)$ 平方。
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} c_j c_{k-j}$

普通生成函数与卡特兰数

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。
- 将 $G(x)$ 平方。
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} c_j c_{k-j}$
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} x^i$

普通生成函数与卡特兰数

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。
- 将 $G(x)$ 平方。
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} c_j c_{k-j}$
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} x^i$
- 所以将 $G(x)^2$ 每项次数提高一次，然后补上常数 1，就变成了 $G(x)$。

普通生成函数与卡特兰数

- 由于 $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$ 的形式和多项式相乘的系数形式十分相似。
- 将 $G(x)$ 平方。
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} c_j c_{k-j}$
- $G(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} x^i$
- 所以将 $G(x)^2$ 每项次数提高一次，然后补上常数 1，就变成了 $G(x)$。
- $G(x) = 1 + xG(x)^2$

普通生成函数与卡特兰数

- $G(x) = 1 + xG(x)^2$

普通生成函数与卡特兰数

- $G(x) = 1 + xG(x)^2$
- 解得 $G(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

普通生成函数与卡特兰数

- $G(x) = 1 + xG(x)^2$
- 解得 $G(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$
- 如果 $G(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$，当 $x \to 0$ 时，$G(x) \to \infty$，而展开式的常数项并不是无穷大，所以舍去。

- $G(x) = 1 + xG(x)^2$
- 解得 $G(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$
- 如果 $G(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$，当 $x \to 0$ 时，$G(x) \to \infty$，而展开式的常数项并不是无穷大，所以舍去。
- 所以 *Catalan* 数的生成函数是 $G(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

普通生成函数与卡特兰数

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$
- $-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$

普通生成函数与卡特兰数

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n$
- $-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2^k}\frac{(4x)^k}{k!}$

普通生成函数与卡特兰数

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$
- $-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2^k}\frac{(4x)^k}{k!}$
- $c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)}{2^{k+1}}\cdot\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}$

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$
- $-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2^k}\frac{(4x)^k}{k!}$
- $c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)}{2^{k+1}}\cdot\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}$
- $c_k = \frac{(2k)!}{(k+1)(k!)^2} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$

普通生成函数与卡特兰数

- $(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n$
- $-\sqrt{1-4x} = -(1-4x)^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2^k}\frac{(4x)^k}{k!}$
- $c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)}{2^{k+1}}\cdot\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}$
- $c_k = \frac{(2k)!}{(k+1)(k!)^2} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$
- 就求出了 *Catalan* 数的通项公式。

普通生成函数与杨辉三角

现在要求杨辉三角的对角线元素之和。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 **10** 10 5 1
1 6 15 20 **15** 6 1
1 7 21 35 35 21 **7** 1
1 8 28 56 70 56 28 8 **1**

图上的这条对角线之和为：
$34 = 1 + 10 + 15 + 7 + 1 = \binom{4}{0} + \binom{5}{2} + \binom{6}{4} + \binom{7}{6} + \binom{8}{8}$

- 三角中的元素是有 2 维坐标的，不妨先以二元形式写出整个三角的生成函数 (第一行是 $1, 1, 1, 1, \cdots$，第二行是 $1, 2, 3, 4, \cdots$)。

普通生成函数与杨辉三角

- 三角中的元素是有 2 维坐标的，不妨先以二元形式写出整个三角的生成函数 (第一行是 $1, 1, 1, 1, \cdots$，第二行是 $1, 2, 3, 4, \cdots$)。
- $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^a y^b$

普通生成函数与杨辉三角

- 三角中的元素是有 2 维坐标的，不妨先以二元形式写出整个三角的生成函数 (第一行是 $1, 1, 1, 1, \cdots$，第二行是 $1, 2, 3, 4, \cdots$)。
- $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^a y^b$
- $(x+y)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} x^a y^{n-a}$

普通生成函数与杨辉三角

- 三角中的元素是有 2 维坐标的，不妨先以二元形式写出整个三角的生成函数 (第一行是 $1, 1, 1, 1, \cdots$，第二行是 $1, 2, 3, 4, \cdots$)。
- $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^a y^b$
- $(x + y)^n = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a} x^a y^{n-a}$
- $G(x, y) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^a y^b = \sum_{n=0}^{\infty} (x + y)^n = \dfrac{1}{1 - x - y}$

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{2j}$

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{2j} z^m$

- 对角线元素的和是 $\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}z^m$
- 如何联系 $G(x,y)$ 与 $H(z)$，怎样通过 $G(x,y)$ 求出 $H(z)$。

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+j}{2j} z^m$
- 如何联系 $G(x, y)$ 与 $H(z)$，怎样通过 $G(x, y)$ 求出 $H(z)$。
- 我们希望通过对 $\dfrac{1}{1 - x - y}$ 进行变换，使其成为和 $H(z)$

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}z^m$
- 如何联系 $G(x,y)$ 与 $H(z)$，怎样通过 $G(x,y)$ 求出 $H(z)$。
- 我们希望通过对 $\dfrac{1}{1-x-y}$ 进行变换，使其成为和 $H(z)$
- 如果将 y 用关于 x 的式子代入，从二元变成一元，$x^a y^b$ 的系数会根据某些条件合并，如果有 $y=x^k$，则行位置 a 变化 1，列的位置 b 变化 k，观察同一对角线上的元素坐标规律，可以得到 $y=x^2$

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}z^m$
- 如何联系 $G(x,y)$ 与 $H(z)$，怎样通过 $G(x,y)$ 求出 $H(z)$。
- 我们希望通过对 $\dfrac{1}{1-x-y}$ 进行变换，使其成为和 $H(z)$
- 如果将 y 用关于 x 的式子代入，从二元变成一元，$x^a y^b$ 的系数会根据某些条件合并，如果有 $y=x^k$，则行位置 a 变化 1，列的位置 b 变化 k，观察同一对角线上的元素坐标规律，可以得到 $y=x^2$
- 现在将 $y=x^2$ 代入 $G(x,y)$。

普通生成函数与杨辉三角

- 对角线元素的和是 $\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 对角线元素和的生成函数就是 $H(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}z^m$
- 如何联系 $G(x,y)$ 与 $H(z)$，怎样通过 $G(x,y)$ 求出 $H(z)$。
- 我们希望通过对 $\dfrac{1}{1-x-y}$ 进行变换，使其成为和 $H(z)$
- 如果将 y 用关于 x 的式子代入，从二元变成一元，$x^a y^b$ 的系数会根据某些条件合并，如果有 $y=x^k$，则行位置 a 变化 1，列的位置 b 变化 k，观察同一对角线上的元素坐标规律，可以得到 $y=x^2$
- 现在将 $y=x^2$ 代入 $G(x,y)$。
- 得到 $G(x,x^2)=\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$

普通生成函数与杨辉三角

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^m$，是否能将它们对应。

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^{m}$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a = 2j, b = m - j$ 此时两者系数相等，不过 $x = z^{1/2}$。

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^{m}$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a=2j, b=m-j$ 此时两者系数相等，不过 $x=z^{1/2}$。
- 所以在 $G(x,x^2)$ 中，对于 x^{2m} 的系数，是 $a+2b=2m$, 则 $a=2(m-b)$。

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^{m}$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a=2j, b=m-j$ 此时两者系数相等，不过 $x=z^{1/2}$。
- 所以在 $G(x,x^2)$ 中，对于 x^{2m} 的系数，是 $a+2b=2m$, 则 $a=2(m-b)$。
- 所以 x^{2m} 的系数可以表示为和式 $\sum\limits_{b=0}^{m}\binom{2(m-b)+b}{2(m-b)}$

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^m$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a=2j, b=m-j$ 此时两者系数相等，不过 $x=z^{1/2}$。
- 所以在 $G(x,x^2)$ 中，对于 x^{2m} 的系数，是 $a+2b=2m$, 则 $a=2(m-b)$。
- 所以 x^{2m} 的系数可以表示为和式 $\sum\limits_{b=0}^{m}\binom{2(m-b)+b}{2(m-b)}$
- 作简单的变量替换 $j=m-b$，得到 x^{2m} 的系数是 $\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^m$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a=2j, b=m-j$ 此时两者系数相等，不过 $x=z^{1/2}$。
- 所以在 $G(x,x^2)$ 中，对于 x^{2m} 的系数，是 $a+2b=2m$, 则 $a=2(m-b)$。
- 所以 x^{2m} 的系数可以表示为和式 $\sum_{b=0}^{m}\binom{2(m-b)+b}{2(m-b)}$
- 作简单的变量替换 $j=m-b$，得到 x^{2m} 的系数是 $\sum_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 所以 $H(z)$ 中 z^m 的系数等于 $G(x,x^2)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$ 中的 x^{2m} 的系数。

普通生成函数与杨辉三角

- 比较两项 $\binom{a+b}{a}x^{a+2b}$ 与 $\binom{m+j}{2j}z^m$，是否能将它们对应。
- 发现当 $a=2j, b=m-j$ 此时两者系数相等，不过 $x=z^{1/2}$。
- 所以在 $G(x,x^2)$ 中，对于 x^{2m} 的系数，是 $a+2b=2m$, 则 $a=2(m-b)$。
- 所以 x^{2m} 的系数可以表示为和式 $\sum\limits_{b=0}^{m}\binom{2(m-b)+b}{2(m-b)}$
- 作简单的变量替换 $j=m-b$，得到 x^{2m} 的系数是 $\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m+j}{2j}$
- 所以 $H(z)$ 中 z^m 的系数等于 $G(x,x^2)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$ 中的 x^{2m} 的系数。
- 而我们之前知道了 $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ 是 *fibonacci* 数列的生成函数，所以从第 i 行的对角线之和就是 f_{2i}。

指数型生成函数

指数型生成函数

- 普通的生成函数常用来解决无标号的组合问题。

指数型生成函数

- 普通的生成函数常用来解决无标号的组合问题。
- 对于有标号的问题，指数型生成函数是很方便的工具。

指数型生成函数

- 普通的生成函数常用来解决无标号的组合问题。
- 对于有标号的问题，指数型生成函数是很方便的工具。
- $\hat{A} = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + \cdots$

指数型生成函数

- 普通的生成函数常用来解决无标号的组合问题。
- 对于有标号的问题，指数型生成函数是很方便的工具。
- $\hat{A} = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + \cdots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

指数型生成函数

- 普通的生成函数常用来解决无标号的组合问题。
- 对于有标号的问题，指数型生成函数是很方便的工具。
- $\hat{A} = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + \cdots$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
- e^x 是序列 $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的生成函数。

指数型生成函数

指数型生成函数

- 指数型生成函数在处理有标号问题时十分方便。

指数型生成函数

- 指数型生成函数在处理有标号问题时十分方便。
- 例如：有 n 不同个元素的排列数 (记作 p_n，特殊的令 $p_0 = 1$)

指数型生成函数

- 指数型生成函数在处理有标号问题时十分方便。
- 例如：有 n 不同个元素的排列数 (记作 p_n，特殊的令 $p_0 = 1$)
- $\hat{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n$

指数型生成函数

- 指数型生成函数在处理有标号问题时十分方便。
- 例如：有 n 不同个元素的排列数 (记作 p_n，特殊的令 $p_0 = 1$)
- $\hat{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n$
- $\hat{P} = \frac{1}{1-x}$

指数型生成函数

- 指数型生成函数在处理有标号问题时十分方便。
- 例如：有 n 不同个元素的排列数 (记作 p_n，特殊的令 $p_0 = 1$)
- $\hat{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n$
- $\hat{P} = \frac{1}{1-x}$
- 所以指数型生成函数 $\frac{1}{1-x}$

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。

指数型生成函数

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。
- 将 n 个元素的环排列个数记为 c_n，特殊的令 $c_0 = 0$。

指数型生成函数

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。
- 将 n 个元素的环排列个数记为 c_n，特殊的令 $c_0 = 0$。
- $\hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

指数型生成函数

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。
- 将 n 个元素的环排列个数记为 c_n，特殊的令 $c_0 = 0$。
- $\hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$
- 回忆展开 $\ln(1+x)$ 的 *Taylor* 公式。

指数型生成函数

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。
- 将 n 个元素的环排列个数记为 c_n，特殊的令 $c_0 = 0$。
- $\hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- 回忆展开 $\ln(1+x)$ 的 *Taylor* 公式。
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$

指数型生成函数

- 另一些排列问题，例如环排列 (将元素排列在一个环上)。
- 将 n 个元素的环排列个数记为 c_n，特殊的令 $c_0 = 0$。
- $\hat{C} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- 回忆展开 $\ln(1+x)$ 的 *Taylor* 公式。
- $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$
- $\hat{C} = -\ln(1-x) = \ln(\frac{1}{1-x})$

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。
- 例如 $(3, 6, 4, 1, 2, 5) = (3, 1, 4)(6, 2, 5)$

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。
- 例如 $(3,6,4,1,2,5) = (3,1,4)(6,2,5)$
- 如何通过轮换的生成函数，求出排列的生成函数。

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。
- 例如 $(3,6,4,1,2,5) = (3,1,4)(6,2,5)$
- 如何通过轮换的生成函数，求出排列的生成函数。
- 从简单的开始，考虑排列具体是由多少个轮换组成，排列只由 1 个轮换组成是 $\hat{Q} = \hat{C}$。

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。
- 例如 $(3,6,4,1,2,5) = (3,1,4)(6,2,5)$
- 如何通过轮换的生成函数，求出排列的生成函数。
- 从简单的开始，考虑排列具体是由多少个轮换组成，排列只由 1 个轮换组成是 $\hat{Q} = \hat{C}$。
- 排列恰好由 2 个轮换组成，生成函数 $\hat{Q}(x)$。2 个轮换相当于将 n 个元素染成黑色与白色，同种颜色排成一个轮换，然后组合起来。

指数型生成函数

- 此时可以注意到 $\hat{P} = e^{\hat{C}}$，这之间的关系只是巧合吗？
- 任何一个排列都是可以拆分成一些轮换 (环排列)。
- 例如 $(3, 6, 4, 1, 2, 5) = (3, 1, 4)(6, 2, 5)$
- 如何通过轮换的生成函数，求出排列的生成函数。
- 从简单的开始，考虑排列具体是由多少个轮换组成，排列只由 1 个轮换组成是 $\hat{Q} = \hat{C}$。
- 排列恰好由 2 个轮换组成，生成函数 $\hat{Q}(x)$。2 个轮换相当于将 n 个元素染成黑色与白色，同种颜色排成一个轮换，然后组合起来。
- $q_n = \frac{1}{2!} \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} c_t c_{n-t}$

指数型生成函数

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}(x) &= \frac{1}{2!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{n!}x^n \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!(n-t)!}c_t c_{n-t}\Big)x^n \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n=t}^{\infty}\frac{c_t x^t}{t!}\cdot\frac{c_{n-t}x^{n-t}}{(n-t)!} \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{c_t}{t!}x^t\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s}{s!}x^s \qquad (s=n-t) \\
&= \frac{1}{2!}\hat{C}\cdot\hat{C}
\end{aligned}
$$

指数型生成函数

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}(x) &= \frac{1}{2!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{n!}x^n \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!(n-t)!}c_t c_{n-t}\right)x^n \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{n=t}^{\infty}\frac{c_t x^t}{t!}\cdot\frac{c_{n-t}x^{n-t}}{(n-t)!} \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{c_t}{t!}x^t\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s}{s!}x^s \quad (s=n-t) \\
&= \frac{1}{2!}\hat{C}\cdot\hat{C}
\end{aligned}
$$

- 所以恰好由 2 个轮换组合的排列个数的生成函数就是 $\frac{1}{2!}\hat{C}^2$

指数型生成函数

指数型生成函数

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\dfrac{1}{k!}\hat{C}^2$

指数型生成函数

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\dfrac{1}{k!}\hat{C}^2$
- $\sum \dfrac{c_{n1}}{n1!} \cdot \dfrac{c_{n2}}{n2!} \cdots \dfrac{c_{nk}}{nk!} = \dfrac{1}{n!} \sum \binom{n}{n1\, n2 \cdots nk} c_{n1} c_{n2} \cdots c_{nk}$

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\frac{1}{k!}\hat{C}^2$
- $\sum \frac{c_{n1}}{n1!} \cdot \frac{c_{n2}}{n2!} \cdots \frac{c_{nk}}{nk!} = \frac{1}{n!} \sum \binom{n}{n1\ n2 \cdots nk} c_{n1} c_{n2} \cdots c_{nk}$
- 所以最后排列的生成函数 $\hat{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{C}^k$

指数型生成函数

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\dfrac{1}{k!}\hat{C}^2$
- $\sum \dfrac{c_{n1}}{n1!} \cdot \dfrac{c_{n2}}{n2!} \cdots \dfrac{c_{nk}}{nk!} = \dfrac{1}{n!} \sum \binom{n}{n1\ n2 \cdots nk} c_{n1} c_{n2} \cdots c_{nk}$
- 所以最后排列的生成函数 $\hat{P} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!} \hat{C}^k$
- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

指数型生成函数

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\frac{1}{k!}\hat{C}^2$
- $\sum \frac{c_{n1}}{n1!} \cdot \frac{c_{n2}}{n2!} \cdots \frac{c_{nk}}{nk!} = \frac{1}{n!} \sum \binom{n}{n1\ n2 \cdots nk} c_{n1} c_{n2} \cdots c_{nk}$
- 所以最后排列的生成函数 $\hat{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{C}^k$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
- 就是将 e^x 中的 x 替换为 $\hat{C}$。

指数型生成函数

- 可以发现恰好由 k 个轮换组合成的排列的生成函数就是 $\dfrac{1}{k!}\hat{C}^2$
- $\sum \dfrac{c_{n1}}{n1!} \cdot \dfrac{c_{n2}}{n2!} \cdots \dfrac{c_{nk}}{nk!} = \dfrac{1}{n!} \sum \binom{n}{n1\; n2 \cdots nk} c_{n1} c_{n2} \cdots c_{nk}$
- 所以最后排列的生成函数 $\hat{P} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}\hat{C}^k$
- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$
- 就是将 e^x 中的 x 替换为 $\hat{C}$。
- $\hat{P} = e^{\hat{C}}$

- 小练习：求错位排列方案数的生成函数 $\hat{D}(x)$，特殊的令 $d_0 = 1$，错排是指一个排列，且 $\forall i, i$ 不在第 i 个位置上。

指数型生成函数

- 小练习：求错位排列方案数的生成函数 $\hat{D}(x)$，特殊的令 $d_0 = 1$，错排是指一个排列，且 $\forall i, i$ 不在第 i 个位置上。
- 错排不允许有大小为 1 的轮换。

指数型生成函数

- 小练习：求错位排列方案数的生成函数 $\hat{D}(x)$，特殊的令 $d_0 = 1$，错排是指一个排列，且 $\forall i$, i 不在第 i 个位置上。
- 错排不允许有大小为 1 的轮换。
- 在 $\hat{C}$ 中去除大小为 1 的轮换，然后组合。

- 小练习：求错位排列方案数的生成函数 $\hat{D}(x)$，特殊的令 $d_0 = 1$，错排是指一个排列，且 $\forall i, i$ 不在第 i 个位置上。
- 错排不允许有大小为 1 的轮换。
- 在 $\hat{C}$ 中去除大小为 1 的轮换，然后组合。
- $\hat{C} - x = \ln(\frac{1}{1-x}) - x$

指数型生成函数

- 小练习：求错位排列方案数的生成函数 $\hat{D}(x)$，特殊的令 $d_0 = 1$，错排是指一个排列，且 $\forall i, i$ 不在第 i 个位置上。
- 错排不允许有大小为 1 的轮换。
- 在 $\hat{C}$ 中去除大小为 1 的轮换，然后组合。
- $\hat{C} - x = \ln(\dfrac{1}{1-x}) - x$
- $\hat{D}(x) = e^{\hat{C}-x} = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$

指数型生成函数

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。
- 有标号 n 个点的无向图很好求解。

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。
- 有标号 n 个点的无向图很好求解。
- $\hat{B} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\binom{i}{2}} x^i$

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。
- 有标号 n 个点的无向图很好求解。
- $\hat{B} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{\binom{i}{2}} x^i$
- 无向图可以看做无向连通图的组合，与排列/轮换之间关系类似。

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。
- 有标号 n 个点的无向图很好求解。
- $\hat{B} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\binom{i}{2}} x^i$
- 无向图可以看做无向连通图的组合，与排列/轮换之间关系类似。
- $\hat{B} = e^{\hat{A}}$

指数型生成函数

- 小练习：使用生成函数方法求 n 个点的有标号无向联通图 (无重边自环)。
- 如果令 $\hat{A}$ 表示有标号无向连通图的生成函数，$\hat{B}$ 表示有标号无向图的生成函数。
- 有标号 n 个点的无向图很好求解。
- $\hat{B} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{\binom{i}{2}} x^i$
- 无向图可以看做无向连通图的组合，与排列/轮换之间关系类似。
- $\hat{B} = e^{\hat{A}}$
- $\hat{A} = ln(\hat{B})$

指数型生成函数

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum\limits_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{j+1}}{j!} \cdot \frac{B_{n-j}}{(n-j)!}$

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{j+1}}{j!} \cdot \frac{B_{n-j}}{(n-j)!}$
- 可以将右半部分看成另外一个指数生成函数 $\hat{P}$，他的系数是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$。

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{j+1}}{j!} \cdot \frac{B_{n-j}}{(n-j)!}$
- 可以将右半部分看成另外一个指数生成函数 $\hat{P}$，他的系数是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$。
- 可知 $\hat{P} = \dfrac{e^x - 1}{x}$。

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{j+1}}{j!} \cdot \frac{B_{n-j}}{(n-j)!}$
- 可以将右半部分看成另外一个指数生成函数 $\hat{P}$，他的系数是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$。
- 可知 $\hat{P} = \frac{e^x - 1}{x}$。
- $\hat{B} \cdot \hat{P}$ 只有零次项系数不为 0，$\hat{B} \cdots \frac{e^x - 1}{x} = B_0 = 1$

指数型生成函数

- 小练习：求伯努利数的生成函数。
- $B_0 = 1$, 对于 $(n \geq 1)$ 有 $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_i = 0$
- $(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{()n-i+1)!} \cdot \frac{B_i}{i!} = 0$。
- $\sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{1}{j+1}}{j!} \cdot \frac{B_{n-j}}{(n-j)!}$
- 可以将右半部分看成另外一个指数生成函数 $\hat{P}$，他的系数是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$。
- 可知 $\hat{P} = \frac{e^x - 1}{x}$。
- $\hat{B} \cdot \hat{P}$ 只有零次项系数不为 0，$\hat{B} \cdots \frac{e^x - 1}{x} = B_0 = 1$
- $\hat{B} = \frac{x}{e^x - 1}$

多项式乘法

- 直接的多项式乘法需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

多项式乘法

- 直接的多项式乘法需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。
- 通过将多项式从系数表达变成点值表达，在点值表达下做完乘法，再转化回系数表达。

多项式乘法

- 直接的多项式乘法需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。
- 通过将多项式从系数表达变成点值表达，在点值表达下做完乘法，再转化回系数表达。
- 可以通过选取单位根代入，重复利用已知信息，将表达形式的转变优化为 $O(n\log(n))$

$$
\begin{aligned}
A(\omega_n^m) &= A_0((\omega_n^m)^2) + \omega_n^m A_1((\omega_n^m)^2) && (1)\\
&= A_0(\omega_{\frac{n}{2}}^m) + \omega_n^m A_1(\omega_{\frac{n}{2}}^m) && (2)\\
A(\omega_n^{m+\frac{n}{2}}) &= A_0((\omega_n^m)^2) + \omega_n^{m+\frac{n}{2}} A_1((\omega_n^m)^2) && (3)\\
&= A_0(\omega_{\frac{n}{2}}^m) - \omega_n^m A_1(\omega_{\frac{n}{2}}^m) && (4)
\end{aligned}
$$

$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$，时间复杂度：$O(n\log(n))$

牛顿迭代

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。
- 给出函数 f，找到一个多项式 A，使得 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。
- 给出函数 f，找到一个多项式 A，使得 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$
- 在 $\pmod{x}$ 时，可以求出 $A(x)$ 的常数项。

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。
- 给出函数 f，找到一个多项式 A，使得 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$
- 在 $\pmod{x}$ 时，可以求出 $A(x)$ 的常数项。
- 已经求出 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$，现在求 $f(B(x)) \equiv 0 \pmod{x^{2n}}$，$B(x)$ 与 $A(x)$ 前 n 项系数相同。

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。
- 给出函数 f，找到一个多项式 A，使得 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$
- 在 $\pmod{x}$ 时，可以求出 $A(x)$ 的常数项。
- 已经求出 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$，现在求 $f(B(x)) \equiv 0 \pmod{x^{2n}}$，$B(x)$ 与 $A(x)$ 前 n 项系数相同。
- 在 $\pmod{x^{2n}}$ 下，在 $A(x)$ 处展开 $f(B(x))$

牛顿迭代

- 牛顿可以用于寻找数值零点，也能用于解多项式零点。
- 给出函数 f，找到一个多项式 A，使得 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$
- 在 $\pmod{x}$ 时，可以求出 $A(x)$ 的常数项。
- 已经求出 $f(A(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$，现在求 $f(B(x)) \equiv 0 \pmod{x^{2n}}$，$B(x)$ 与 $A(x)$ 前 n 项系数相同。
- 在 $\pmod{x^{2n}}$ 下，在 $A(x)$ 处展开 $f(B(x))$
- $f(B(x)) = f(A(x)) + \frac{f'(A(x))}{1!}(B(x) - A(x)) + \frac{f^{(2)}(A(x))}{2!}(B(x) - A(x))^2 + \cdots$

牛顿迭代

牛顿迭代

- 由于前 n 项系数相同，$\frac{f^{(2)}(A(x))}{2!}(B(x)-A(x))^2$ 非零最低次至少是 x^{2n}，所以直接在 $\pmod{x^{2n}}$ 下变为零。

牛顿迭代

- 由于前 n 项系数相同，$\frac{f^{(2)}(A(x))}{2!}(B(x)-A(x))^2$ 非零最低次至少是 x^{2n}，所以直接在 $\pmod{x^{2n}}$ 下变为零。
- $f(B(x)) \equiv f(A(x)) + \frac{f'(A(x))}{1!}(B(x)-A(x)) \pmod{x^{2n}}$

牛顿迭代

- 由于前 n 项系数相同，$\frac{f^{(2)}(A(x))}{2!}(B(x)-A(x))^2$ 非零最低次至少是 x^{2n}，所以直接在 $\pmod{x^{2n}}$ 下变为零。
- $f(B(x)) \equiv f(A(x)) + \frac{f'(A(x))}{1!}(B(x)-A(x)) \pmod{x^{2n}}$
- $B(x) = A(x) - \frac{f(A(x))}{f'(A(x))}$

- 由于前 n 项系数相同，$\frac{f^{(2)}(A(x))}{2!}(B(x)-A(x))^2$ 非零最低次至少是 x^{2n}，所以直接在 $\pmod{x^{2n}}$ 下变为零。
- $f(B(x)) \equiv f(A(x)) + \frac{f'(A(x))}{1!}(B(x)-A(x)) \pmod{x^{2n}}$
- $B(x) = A(x) - \frac{f(A(x))}{f'(A(x))}$
- 在大多数情况下，多项式的复合都是很难求解的，但是对一些特殊的 f，可以较方便地求出。

多项式逆元

多项式逆元

- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$

多项式逆元

- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$
- $A_0 \cdot B_0 \equiv 1 \pmod{x}$

多项式逆元

- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$
- $A_0 \cdot B_0 \equiv 1 \pmod{x}$
- 如果现在求出了 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$

$$
\begin{aligned}
A(x) \cdot B(x) &\equiv 1 \pmod{x^n} \\
(A(x) \cdot B(x) - 1)^2 &\equiv 0 \pmod{x^{2n}} \\
A(x)^2 B(x)^2 - 2 \cdot A(x)B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}} \\
A(x) \cdot (A(x)B(x)^2 - 2 \cdot B(x)) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}}
\end{aligned}
$$

多项式逆元

- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$
- $A_0 \cdot B_0 \equiv 1 \pmod{x}$
- 如果现在求出了 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$

$$
\begin{aligned}
A(x) \cdot B(x) &\equiv 1 \pmod{x^n} \\
(A(x) \cdot B(x) - 1)^2 &\equiv 0 \pmod{x^{2n}} \\
A(x)^2 B(x)^2 - 2 \cdot A(x) B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}} \\
A(x) \cdot (A(x) B(x)^2 - 2 \cdot B(x)) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}}
\end{aligned}
$$

- $B^*(x) = [A(x)B(x)^2 - 2 \cdot B(x)]$ 就是在 x^{2n} 下新的 $A(x)$ 的逆元。

多项式逆元

- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$
- $A_0 \cdot B_0 \equiv 1 \pmod{x}$
- 如果现在求出了 $B(x)$，使得 $A(x) \cdot B(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$

$$
\begin{aligned}
A(x) \cdot B(x) &\equiv 1 \pmod{x^n} \\
(A(x) \cdot B(x) - 1)^2 &\equiv 0 \pmod{x^{2n}} \\
A(x)^2 B(x)^2 - 2 \cdot A(x)B(x) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}} \\
A(x) \cdot (A(x)B(x)^2 - 2 \cdot B(x)) &\equiv 1 \pmod{x^{2n}}
\end{aligned}
$$

- $B^*(x) = [A(x)B(x)^2 - 2 \cdot B(x)]$ 就是在 x^{2n} 下新的 $A(x)$ 的逆元。
- 时间复杂度：$O(n\log(n))$

多项式对数

多项式对数

- $\ln(1 - A(x)) = -\sum_{i \geq 1} \frac{A^i(x)}{i}$

多项式对数

- $\ln(1 - A(x)) = -\sum_{i \geq 1} \frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv \ln(A(x)) \pmod{x^n}$

多项式对数

- $\ln(1 - A(x)) = -\sum_{i\geq 1} \frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv \ln(A(x)) \pmod{x^n}$
- 对数的导数形式简单。

多项式对数

- $\ln(1 - A(x)) = -\sum_{i\geq 1} \frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv \ln(A(x)) \pmod{x^n}$
- 对数的导数形式简单。
- $(\ln(A(x)))' = \dfrac{A'(x)}{A(x)}$

多项式对数

- $\ln(1-A(x)) = -\sum_{i\ge1}\frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)\equiv\ln(A(x)) \pmod{x^n}$
- 对数的导数形式简单。
- $(\ln(A(x)))' = \dfrac{A'(x)}{A(x)}$
- 已经知道如何求多项式逆元，多项式导数，与不定积分都很好求。

多项式对数

- $\ln(1 - A(x)) = -\sum_{i\geq 1} \frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv \ln(A(x)) \pmod{x^n}$
- 对数的导数形式简单。
- $(\ln(A(x)))' = \dfrac{A'(x)}{A(x)}$
- 已经知道如何求多项式逆元，多项式导数，与不定积分都很好求。
- $\ln(A(x)) = \int \dfrac{A'(x)}{A(x)}$

多项式对数

- $\ln(1-A(x)) = -\sum_{i\geq 1}\frac{A^i(x)}{i}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x)\equiv \ln(A(x)) \pmod{x^n}$
- 对数的导数形式简单。
- $(\ln(A(x)))' = \dfrac{A'(x)}{A(x)}$
- 已经知道如何求多项式逆元，多项式导数，与不定积分都很好求。
- $\ln(A(x)) = \int \dfrac{A'(x)}{A(x)}$
- 时间复杂度 $O(n\log(n))$

多项式 exp

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i(x)}{i!}$

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i(x)}{i!}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv e^{(A(x)} \pmod{x^n}$

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i(x)}{i!}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv e^{(A(x)} \pmod{x^n}$
- 设函数 $f(B(x)) = \ln(B(x)) - A(x)$，用牛顿迭代求零点。

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i(x)}{i!}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv e^{(A(x)} \pmod{x^n}$
- 设函数 $f(B(x)) = \ln(B(x)) - A(x)$，用牛顿迭代求零点。
- $B^*(x) = B(x) - \dfrac{g(B(x))}{g'(B(x))}$

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i(x)}{i!}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv e^{(A(x)} \pmod{x^n})$
- 设函数 $f(B(x)) = \ln(B(x)) - A(x)$，用牛顿迭代求零点。
- $B^*(x) = B(x) - \dfrac{g(B(x))}{g'(B(x))}$
- $B^*(x) = B(x) - B(x)(\ln(B(x) - A))$

多项式 exp

- $\exp(A(x)) = e^{A(x)} = \sum_{i\ge 0} \frac{A^i(x)}{i!}$
- 给出多项式 $A(x)$，求多项式 $B(x) \equiv e^{(A(x)} \pmod{x^n})$
- 设函数 $f(B(x)) = \ln(B(x)) - A(x)$，用牛顿迭代求零点。
- $B^*(x) = B(x) - \dfrac{g(B(x))}{g'(B(x))}$
- $B^*(x) = B(x) - B(x)(\ln(B(x) - A))$
- 时间复杂度 $O(n\log(n))$

多项式除法

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- $x^n A(\frac{1}{x}) = x^{n-m} D(\frac{1}{x}) x^m B(\frac{1}{x}) + x^{n-m+1} x^{m-1} R(\frac{1}{x})$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- $x^n A(\frac{1}{x}) = x^{n-m} D(\frac{1}{x}) x^m B(\frac{1}{x}) + x^{n-m+1} x^{m-1} R(\frac{1}{x})$
- $A^R(x) = D^R(x) B^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- $x^n A(\frac{1}{x}) = x^{n-m} D(\frac{1}{x}) x^m B(\frac{1}{x}) + x^{n-m+1} x^{m-1} R(\frac{1}{x})$
- $A^R(x) = D^R(x) B^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$
- 现在如果将式子放在 $\pmod{x^{n-m+1}}$ 下求解，$R^R(x)$ 就消失了，$D^R(x)$ 次数为 $n - m$ 不收影响。

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- $x^n A(\frac{1}{x}) = x^{n-m} D(\frac{1}{x}) x^m B(\frac{1}{x}) + x^{n-m+1} x^{m-1} R(\frac{1}{x})$
- $A^R(x) = D^R(x) B^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$
- 现在如果将式子放在 $\pmod{x^{n-m+1}}$ 下求解，$R^R(x)$ 就消失了，$D^R(x)$ 次数为 $n - m$ 不收影响。
- $A^R(x) = D^R(x) B^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$ 通过求 $B^R(x)$ 逆元求出 $D(x)$，进而代入原式求出 $R(x)$

多项式除法

- 给出次数分别为 n, m 的多项式 $A(x), B(x)$，求 $A(x) = D(x)B(x) + R(x)$ 中的 $B(x), R(x)$
- $degR < m, degD = (n - m)$
- 定义 $A(x)$ 的反转为 $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x})$
- 例如 $A(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- $A^R(x) = x^n A(\frac{1}{x}) = 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- $x^n A(\frac{1}{x}) = x^{n-m} D(\frac{1}{x}) x^m B(\frac{1}{x}) + x^{n-m+1} x^{m-1} R(\frac{1}{x})$
- $A^R(x) = D^R(x)B^R(x) + x^{n-m+1} R^R(x)$
- 现在如果将式子放在 $\pmod{x^{n-m+1}}$ 下求解，$R^R(x)$ 就消失了，$D^R(x)$ 次数为 $n - m$ 不收影响。
- $A^R(x) = D^R(x)B^R(x) \pmod{x^{n-m+1}}$ 通过求 $B^R(x)$ 逆元求出 $D(x)$，进而代入原式求出 $R(x)$
- 时间复杂度：$O(n\log(n))$

有 n 个物品，价值为别为 x_i 且各不相同，现在一共要取 3 个物品，问 $[1, m]$ 中的每种价值和有多少种取法？

$n, m, x_i \leq 10^5$
SPOJ-TSUM 和此题类似

- 构造关于价值的生成函数，$A(x)$ 表示选一个物品的价值生成函数。

BZOJ3771

- 构造关于价值的生成函数，$A(x)$ 表示选一个物品的价值生成函数。
- 答案并不是 $\frac{A^3(x)}{6}$，可能会因为其中包括了重复取一个物品多次的情况。

BZOJ3771

- 构造关于价值的生成函数，$A(x)$ 表示选一个物品的价值生成函数。
- 答案并不是 $\dfrac{A^3(x)}{6}$，可能会因为其中包括了重复取一个物品多次的情况。
- 令 $A(x), B(x), C(x)$ 分别表示取 $1, 2, 3$ 个物品的价值生成函数。

- 构造关于价值的生成函数，$A(x)$ 表示选一个物品的价值生成函数。
- 答案并不是 $\frac{A^3(x)}{6}$，可能会因为其中包括了重复取一个物品多次的情况。
- 令 $A(x), B(x), C(x)$ 分别表示取 $1, 2, 3$ 个物品的价值生成函数。
- 容斥，$\frac{A^3(x) - 3A(x)B(x) + 2C(x)}{6}$

- 构造关于价值的生成函数，$A(x)$ 表示选一个物品的价值生成函数。
- 答案并不是 $\dfrac{A^3(x)}{6}$，可能会因为其中包括了重复取一个物品多次的情况。
- 令 $A(x), B(x), C(x)$ 分别表示取 $1, 2, 3$ 个物品的价值生成函数。
- 容斥，$\dfrac{A^3(x) - 3A(x)B(x) + 2C(x)}{6}$
- 使用 FFT 得到答案。

51nod problem1728

一张有标号的有向图有 n 个点，每个点有且仅有一条出边 (可以连向自己)，要求确定这张图，使得从任何一个点出发，走 k 步后，一定走到一个点 u，且 u 的出边恰好指向 u。求确定图连边的方案数。

$$n \times k \leq 2 \times 10^6, k \leq 3$$

51nod problem1728

51nod problem1728

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。

51nod problem1728

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。

51nod problem1728

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。
- $k = 0$ 时，森林一定是独立的点组成的，方案只有一种，$f_0(x) = e^x$

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。
- $k = 0$ 时，森林一定是独立的点组成的，方案只有一种，$f_0(x) = e^x$
- 令指数型生成函数 $g_k(x)$ 是深度不超过 k 的有根树的生成函数。

51nod problem1728

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。
- $k = 0$ 时，森林一定是独立的点组成的，方案只有一种，$f_0(x) = e^x$
- 令指数型生成函数 $g_k(x)$ 是深度不超过 k 的有根树的生成函数。
- 一棵树可以看做一个根加上一些森林，$g_k(x) = xf_{k-1}(x)$

51nod problem1728

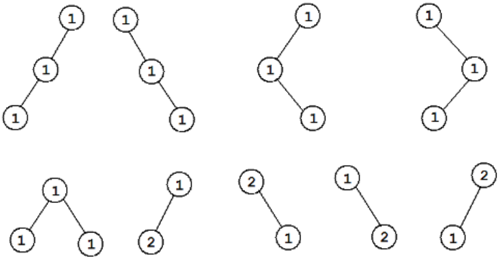
- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。
- $k = 0$ 时，森林一定是独立的点组成的，方案只有一种，$f_0(x) = e^x$
- 令指数型生成函数 $g_k(x)$ 是深度不超过 k 的有根树的生成函数。
- 一棵树可以看做一个根加上一些森林，$g_k(x) = xf_{k-1}(x)$
- 森林又可以看做任意颗树的组合，$f_k(x) = e^{g_k}$

51nod problem1728

- 将指向的点看做父边，则要求最后是一个最大深度不超过 k 的森林。
- 令指数型生成函数 $f_k(x)$ 是深度不超过 k 的森林个数的生成函数。
- $k=0$ 时，森林一定是独立的点组成的，方案只有一种，$f_0(x)=e^x$
- 令指数型生成函数 $g_k(x)$ 是深度不超过 k 的有根树的生成函数。
- 一棵树可以看做一个根加上一些森林，$g_k(x)=xf_{k-1}(x)$
- 森林又可以看做任意颗树的组合，$f_k(x)=e^{g_k}$
- 使用多项式 exp 可求出答案。

BZOJ 3625

给一个大小为 n 的正整数集合 $S = \{c1, c2, \cdots, cn\}$，对于一个节点带权的有根二叉树，我们说他是好的，当且仅当对于每个节点 v，v 的权值在 S 集合内，并且称整棵树的权值是所有节点权值之和。现在给出一个正整数 m，计算出对于 $1 \le s \le m$ 中的 s，有多少不同的好的二叉树满足它的权值恰好是 s，答案 $\pmod{998244353}$。



$n, m, c_i \le 10^5$

BZOJ 3625

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$
- 对于树的生成函数是 $B(x)$

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$
- 对于树的生成函数是 $B(x)$
- 树可以由一个点加上两个树组合得到，或为空

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$
- 对于树的生成函数是 $B(x)$
- 树可以由一个点加上两个树组合得到，或为空
- $B(x) = A(x)B^2(x) + 1$

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$
- 对于树的生成函数是 $B(x)$
- 树可以由一个点加上两个树组合得到，或为空
- $B(x) = A(x)B^2(x) + 1$
- $B(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4A(x)}}{2A(x)}$

BZOJ 3625

- 对于单个节点的生成函数是 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty}[i \in S]x^i$
- 对于树的生成函数是 $B(x)$
- 树可以由一个点加上两个树组合得到，或为空
- $B(x) = A(x)B^2(x) + 1$
- $B(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4A(x)}}{2A(x)}$
- 然后使用多项式开根 (牛顿迭代) 以及多项式逆元求解。

The End