计数与期望

___debug

2018 年 1 月 7 日

虽然课件的名字叫做计数与期望, 但是大部分都是计数.
然后计数里大部分是容斥.

容斥: 引入

关于容斥, 大家可能会有这样几种看法:

容斥：引入

关于容斥，大家可能会有这样几种看法：

- 容斥就是隔一个数加上一个负号，然后答案正好就对了

容斥: 引入

关于容斥, 大家可能会有这样几种看法:

- 容斥就是隔一个数加上一个负号, 然后答案正好就对了
- 容斥就是 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = [n = 0]$

容斥: 引入

关于容斥, 大家可能会有这样几种看法:

- 容斥就是隔一个数加上一个负号, 然后答案正好就对了
- 容斥就是 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i = [n=0]$

容斥到底是什么?

容斥：引入

关于容斥，大家可能会有这样几种看法：

- 容斥就是隔一个数加上一个负号，然后答案正好就对了
- 容斥就是 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i=[n=0]$

容斥到底是什么?
在接着讲之前，我们先来看几道经典的例题.

容斥: 引入

经典问题 1

给定 n 个数 $a_1, ..., a_n$, 要求将所有数分成两组, 使得两组中元素 or 和相同.

$n \leq 50, 0 \leq a_i \leq 2^{20}$

容斥：引入

经典问题 1 - 题解

按位考虑，如果所有的数在某一位上都为 0，显然可以不用考虑.

容斥: 引入

经典问题 1 - 题解

按位考虑, 如果所有的数在某一位上都为 0, 显然可以不用考虑.
对于其它的位, 如果要满足题目的要求, 则必须满足所有这一位为 1 的数不能全部在同一组里.

按位考虑, 如果所有的数在某一位上都为 0, 显然可以不用考虑.
对于其它的位, 如果要满足题目的要求, 则必须满足所有这一位为 1 的数不能全部在同一组里. 虽然这个条件不好计数, 但是它的反面是很好计数的!

容斥：引入

经典问题 1 - 题解

按位考虑，如果所有的数在某一位上都为 0，显然可以不用考虑.
对于其它的位，如果要满足题目的要求，则必须满足所有这一位为 1 的数不能全部在同一组里. 虽然这个条件不好计数，但是它的反面是很好计数的！
所以，枚举至少有哪些二进制位不满足条件，然后用并查集维护一下就行了.

容斥: 引入

经典问题 2

给你一个 N 维超立方体, 第 i 个维度的长度为 r_i, 同时给你一个 N 维超平面 $x_1 + x_2 + ... + x_n = S$. 这个超平面把超立方体切成至多两部分, 求原点所在的那一部分的面积.

$N \leq 500, A_i \leq 500, S \leq 10^9$

容斥: 引入

经典问题 2 - 题解

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.

容斥: 引入

经典问题 2 - 题解

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分.

经典问题 2 - 题解

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分. 利用基本的微积分知识, 我们可以得到 $A_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

容斥: 引入

经典问题 2 - 题解

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分. 利用基本的微积分知识, 我们可以得到 $A_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.
接下来考虑坐标的限制.

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S=x$，且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0,x]$ 上的定积分. 利用基本的微积分知识，我们可以得到 $A_n(x)=\frac{x^n}{n!}$.
接下来考虑坐标的限制.
题目就是要求 $\sum x_i \le S$，其中每个 $x_i \in [0,r_i]$.

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S=x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0,x]$ 上的定积分. 利用基本的微积分知识, 我们可以得到 $A_n(x)=\frac{x^n}{n!}$.
接下来考虑坐标的限制.
题目就是要求 $\sum x_i \le S$, 其中每个 $x_i \in [0,r_i]$.
考虑容斥. 我们把没有限制的情况, 分别减去 $1,2,..,n$ 超过限制的情况, 再加上 $1,2$, $1,3$ 等同时超过限制的情况...

容斥: 引入

经典问题 2 - 题解

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分. 利用基本的微积分知识, 我们可以得到 $A_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.
接下来考虑坐标的限制.
题目就是要求 $\sum x_i \leq S$, 其中每个 $x_i \in [0, r_i]$.
考虑容斥. 我们把没有限制的情况, 分别减去 $1, 2, .., n$ 超过限制的情况, 再加上 $1, 2$, $1, 3$ 等同时超过限制的情况...
注意到 $N \times \max A_i$ 不会很大, 上面的容斥很容易利用 DP 优化.

容斥: 引入

UOJ 185

给你一个 n 个点 m 条边的无向图, 再给你一棵 n 个点的树, 问有多少种点编号的映射方式, 使得 n 个点恰好匹配, 且树上的边均存在于原图中.

$n \leq 17, m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

容斥: 引入

UOJ 185 - 题解

首先考虑一个错误的树形 DP.

容斥: 引入

UOJ 185 - 题解

首先考虑一个错误的树形 DP. 设 $dp(u,p)$ 表示考虑了以 u 为根的这个子树, 并且根映射到原图的 p 点.

容斥: 引入

UOJ 185 - 题解

首先考虑一个错误的树形 DP. 设 $dp(u, p)$ 表示考虑了以 u 为根的这个子树, 并且根映射到原图的 p 点. 这个显然可以 $O(n^3)$ 转移, 但是有什么问题呢?

容斥: 引入

UOJ 185 - 题解

首先考虑一个错误的树形 DP. 设 $dp(u,p)$ 表示考虑了以 u 为根的这个子树, 并且根映射到原图的 p 点. 这个显然可以 $O(n^3)$ 转移, 但是有什么问题呢?
不同的点可能映射到同一个点.

容斥: 引入

UOJ 185 - 题解

首先考虑一个错误的树形 DP. 设 $dp(u,p)$ 表示考虑了以 u 为根的这个子树, 并且根映射到原图的 p 点. 这个显然可以 $O(n^3)$ 转移, 但是有什么问题呢?

不同的点可能映射到同一个点. 于是考虑容斥.

首先考虑一个错误的树形 DP. 设 $dp(u,p)$ 表示考虑了以 u 为根的这个子树, 并且根映射到原图的 p 点. 这个显然可以 $O(n^3)$ 转移, 但是有什么问题呢?
不同的点可能映射到同一个点. 于是考虑容斥.
求出 $dp(S)$ 表示映射的点集至多为 S 时的答案, 然后就可以 $O(2^n n^3)$ 做了.

容斥: 引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?

容斥：引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

容斥: 引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

- $=$ 和 $\neq$

容斥：引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用？
大家可以感受一下：

- $=$ 和 $\neq$
- $\min$ 和 $\max$

容斥: 引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

- $=$ 和 $\neq$
- $\min$ 和 $\max$
- $\gcd$ 和 lcm

容斥: 引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

- $=$ 和 $\neq$
- $\min$ 和 $\max$
- $\gcd$ 和 lcm
- “恰好” 和 “至少”

容斥: 引入

为什么容斥会有用

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

- $=$ 和 $\neq$
- $\min$ 和 $\max$
- $\gcd$ 和 lcm
- “恰好” 和 “至少”
- ...

容斥: 凑系数

刚才见到的是一种最经典的容斥:

给定一些条件, 问全部满足的对象的个数.
答案 = 所有对象 - 至少不满足其中一个的 + 至少不满足其中两个的 - 至少不满足其中三个的 + ...

容斥: 凑系数

刚才见到的是一种最经典的容斥:

给定一些条件, 问全部满足的对象的个数.
答案 = 所有对象 - 至少不满足其中一个的 + 至少不满足其中两个的 - 至少不满足其中三个的 + ...

对于更加一般的容斥, 我们可以这样认为:

在所有物品中, 问在某个条件 C_0 下所有物品的贡献之和.
构造一些相对容易计算贡献的条件 $C_1, ..., C_n$, 再对于每个条件构造容斥系数 $f_1, ..., f_n$, 满足对于每个物品

$$\sum_{i=1}^{n} s(C_i) f_i = s(C_0)$$

其中 $s(C_i)$ 表示这个物品在条件 C_i 下所产生的贡献.
对于常见的计数问题, 物品的贡献只会是 $0/1$, 表示这个物品是否满足此条件.

容斥: 凑系数

这样理解有什么用呢?

容斥: 凑系数

这样理解有什么用呢?
先看经典的的错排问题

求长度为 n 的排列 $a_1,...a_n$ 的个数, 满足 $a_i \neq i$

容斥: 凑系数

这样理解有什么用呢?
先看经典的的错排问题

求长度为 n 的排列 $a_1, ...a_n$ 的个数, 满足 $a_i \neq i$

构造 n 个条件: C_i 表示有多少个物品, 至少有 i 个位置满足 $a_j = j$.
我们用刚才的理解方式来构造容斥系数.

容斥: 凑系数

这样理解有什么用呢?
先看经典的的错排问题

求长度为 n 的排列 $a_1, ...a_n$ 的个数, 满足 $a_i \neq i$

构造 n 个条件: C_i 表示有多少个物品, 至少有 i 个位置满足 $a_j = j$.
我们用刚才的理解方式来构造容斥系数.
对于任意一个恰好有 m 个位置满足 $a_j = j$ 的排列, 需要满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = [m = 0]$$

容易看出 $f_i = (-1)^i$.

容斥: 凑系数

这样理解有什么用呢?
先看经典的的错排问题

求长度为 n 的排列 $a_1, ...a_n$ 的个数, 满足 $a_i \neq i$

构造 n 个条件: C_i 表示有多少个物品, 至少有 i 个位置满足 $a_j = j$.
我们用刚才的理解方式来构造容斥系数.
对于任意一个恰好有 m 个位置满足 $a_j = j$ 的排列, 需要满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = [m = 0]$$

容易看出 $f_i = (-1)^i$.
感觉没什么用啊?

容斥: 凑系数

其实还是有用的.

首先这是证明容斥的一种方式.

容斥: 凑系数

其实还是有用的.
首先这是证明容斥的一种方式.
然后, 它还给了我们一种 $O(n^2)$ 递推容斥系数的一般方法.(!)

容斥: 凑系数

其实还是有用的.
首先这是证明容斥的一种方式.
然后, 它还给了我们一种 $O(n^2)$ 递推容斥系数的一般方法.(!)
举个例子:

定义每个排列的价值为 a_k, 其中 k 为这个排列的错排数.
求所有排列的价值之和.

容斥: 凑系数

其实还是有用的.
首先这是证明容斥的一种方式.
然后, 它还给了我们一种 $O(n^2)$ 递推容斥系数的一般方法.(!)
举个例子:

定义每个排列的价值为 a_k, 其中 k 为这个排列的错排数.
求所有排列的价值之和.

我们只用构造 f 满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = a_m$$

容斥: 凑系数

其实还是有用的.
首先这是证明容斥的一种方式.
然后, 它还给了我们一种 $O(n^2)$ 递推容斥系数的一般方法.(!)
举个例子:

定义每个排列的价值为 a_k, 其中 k 为这个排列的错排数.
求所有排列的价值之和.

我们只用构造 f 满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = a_m$$

然后答案直接就是

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)! f_i$$

容斥: 凑系数

"玲珑杯" 线上赛 Round 17 B

给定 m 个数 $a_1, ..., a_m$, 统计 $[1, n]$ 的整数中, 满足 $a_1, ..., a_m$ 中有奇数个数整除它的数的个数.

$n \leq 10^9, m \leq 15$

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集, 算出 lcm, 然后容斥一下.

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集, 算出 lcm, 然后容斥一下.
这不就是小学奥数题吗?

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集，算出 lcm，然后容斥一下.
这不就是小学奥数题吗?
这道题跟小学奥数题的唯一区别就是要求 “奇数个”.

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集, 算出 lcm, 然后容斥一下.
这不就是小学奥数题吗?
这道题跟小学奥数题的唯一区别就是要求 “奇数个”.
也就是要求容斥系数满足对于每个数, 如果它被 k 个数整除, 则有

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i = k \bmod 2$$

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集, 算出 lcm, 然后容斥一下.
这不就是小学奥数题吗?
这道题跟小学奥数题的唯一区别就是要求 “奇数个”.
也就是要求容斥系数满足对于每个数, 如果它被 k 个数整除, 则有

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i = k \bmod 2$$

$O(n^2)$ 算就足够了.

容斥: 凑系数

“玲珑杯” 线上赛 Round 17 B - 题解

首先肯定枚举 m 个数的一个子集，算出 lcm，然后容斥一下.
这不就是小学奥数题吗?
这道题跟小学奥数题的唯一区别就是要求 “奇数个”.
也就是要求容斥系数满足对于每个数，如果它被 k 个数整除，则有

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f_i = k \bmod 2$$

$O(n^2)$ 算就足够了.
不过也可以打表找规律:

$$f_i = [i \neq 0](-2)^{i-1}$$

容斥: 凑系数

BZOJ 4671

定义两个结点数相同的图 G_1 与 G_2 的异或为一个新的图 G, 其中如果 (u,v) 在 G_1 与 G_2 中的出现次数之和为 1, 那么边 (u,v) 在 G 中, 否则这条边不在 G 中.
现在给定 s 个结点数均为 n 的图 $G_1,...,G_s$, 设 $S=G_1,...,G_s$, 求 S 有多少个子集的异或为一个连通图.

$n \le 10, s \le 60$

容斥: 凑系数

BZOJ 4671 - 题解

连通图计数的一个经典思路就是容斥.

容斥: 凑系数

BZOJ 4671 - 题解

连通图计数的一个经典思路就是容斥.

对于这道题, 我们先用贝尔数的时间来枚举子集划分, 强制连通性 "至少" 是这个划分. 也就是说, 不同子集的两个点之间一定没有边, 相同子集的两个点则任意.

容斥: 凑系数

BZOJ 4671 - 题解

连通图计数的一个经典思路就是容斥.
对于这道题, 我们先用贝尔数的时间来枚举子集划分, 强制连通性"至少"是这个划分. 也就是说, 不同子集的两个点之间一定没有边, 相同子集的两个点则任意.
对于一个有 m 个连通块的图, 容斥系数需要满足

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ {m \atop i} \right\} f(i) = [m = 1]$$

容斥: 凑系数

BZOJ 4671 - 题解

连通图计数的一个经典思路就是容斥.
对于这道题, 我们先用贝尔数的时间来枚举子集划分, 强制连通性 "至少" 是这个划分. 也就是说, 不同子集的两个点之间一定没有边, 相同子集的两个点则任意.
对于一个有 m 个连通块的图, 容斥系数需要满足

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ {m \atop i} \right\} f(i) = [m = 1]$$

打表发现规律

$$f(i) = (-1)^{i-1}(i-1)!$$

容斥: 二项式反演

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i \implies b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i$$

$$a_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} b_i \implies b_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_i$$

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622

给两组 n 个数 $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$, 保证数字互不不相同. 问有多少种将它们配对的方式, 使得 $a_i > b_i$ 的对数恰好为 k.

$k \leq n \leq 2000$

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622 - 题解

恰好为 k 的不好算, 那就来算 $\geq k$ 的.

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622 - 题解

恰好为 k 的不好算, 那就来算 $\geq k$ 的.

首先对两个队的数组分别从小到大排序, 记 t_i 表示 a_i 比 b_i 中多少元素大.

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622 - 题解

恰好为 k 的不好算, 那就来算 $\geq k$ 的.

首先对两个队的数组分别从小到大排序, 记 t_i 表示 a_i 比 b_i 中多少元素大.

设 $f(i,j)$ 表示考虑了 $a_1,...,a_i$, 在其中选出 j 个, 且这 j 对都满足 $a>b$.

显然有

$$f(i,j)=f(i-1,j)+(t_j-j+1)f(i-1,j-1)$$

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622 - 题解

恰好为 k 的不好算, 那就来算 $\geq k$ 的.

首先对两个队的数组分别从小到大排序, 记 t_i 表示 a_i 比 b_i 中多少元素大.

设 $f(i,j)$ 表示考虑了 $a_1,...,a_i$, 在其中选出 j 个, 且这 j 对都满足 $a > b$.

显然有

$$f(i,j) = f(i-1,j) + (t_j - j + 1)f(i-1,j-1)$$

然后可以发现, $f(n,i)(n-i)!$ 表示的就是大于的情况 $\geq i$ 的方案数, 不过大于恰好 j 次的会被算 $\binom{j}{i}$ 次.

容斥: 二项式反演

BZOJ 3622 - 题解

恰好为 k 的不好算, 那就来算 $\geq k$ 的.
首先对两个队的数组分别从小到大排序, 记 t_i 表示 a_i 比 b_i 中多少元素大.
设 $f(i,j)$ 表示考虑了 $a_1,...,a_i$, 在其中选出 j 个, 且这 j 对都满足 $a>b$.
显然有

$$f(i,j)=f(i-1,j)+(t_j-j+1)f(i-1,j-1)$$

然后可以发现, $f(n,i)(n-i)!$ 表示的就是大于的情况 $\geq i$ 的方案数, 不过大于恰好 j 次的会被算 $\binom{j}{i}$ 次.
可以直接二项式反演, 也可以设 $g(i)$ 为大于次数 $=i$ 的方案数:

$$g(i)=f(n,i)(n-i)!-\sum_{j>i}\binom{j}{i}g(j)$$

容斥: 最值反演

$$\max\{S\} = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \min\{T\}$$

容斥: 最值反演

HDU 4624

n 个白球排成一行, 每次会均匀等概率地随机一个区间 $[l, r]$, 将区间中的球染黑.
问所有球都被染黑的期望.

$n \le 50$

容斥: 最值反演

HDU 4624 - 题解

记 X_i 为第 i 个球被染黑的时间, 题目就是要求 $\mathrm{E}[\max\{X_i\}]$. 可以转化为, 对所有集合 S, 计算 $\mathrm{E}[\min_{i \in S}\{X_i\}]$.

容斥：最值反演

HDU 4624 - 题解

记 X_i 为第 i 个球被染黑的时间，题目就是要求 $\mathrm{E}[\max\{X_i\}]$. 可以转化为，对所有集合 S，计算 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$.

如果已知点集 S，显然 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$ 就等于 $\frac{\binom{n}{2}}{\text{覆盖的点中至少一个属于}S}$.

容斥: 最值反演

HDU 4624 - 题解

记 X_i 为第 i 个球被染黑的时间，题目就是要求 $\mathrm{E}[\max\{X_i\}]$. 可以转化为，对所有集合 S，计算 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$.

如果已知点集 S，显然 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$ 就等于 $\frac{\binom{n}{2}}{\text{覆盖的点中至少一个属于}S}$.

然后这个可以通过一个简单的 DP 来计算.

容斥: 最值反演

HDU 4624 - 题解

记 X_i 为第 i 个球被染黑的时间, 题目就是要求 $\mathrm{E}[\max\{X_i\}]$. 可以转化为, 对所有集合 S, 计算 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$.

如果已知点集 S, 显然 $\mathrm{E}[\min_{i\in S}\{X_i\}]$ 就等于 $\frac{\binom{n}{2}}{\text{覆盖的点中至少一个属于}S}$.

然后这个可以通过一个简单的 DP 来计算. 设 $dp(i,k,0/1)$ 表示最后一个选择的球为 i, i 之前有 k 个可以选的区间, 球数的奇偶性为 $0/1$ 的方案数.

容斥: 图计数

很多图计数问题都需要用到容斥.

容斥: 图计数

很多图计数问题都需要用到容斥.
比如说:

容斥: 图计数

很多图计数问题都需要用到容斥.
比如说:

- 连通图计数, 枚举 1 号点所在的连通块大小来容斥

容斥: 图计数

很多图计数问题都需要用到容斥.
比如说:

- 连通图计数, 枚举 1 号点所在的连通块大小来容斥
- DAG 计数, 枚举入度为 0 的点来容斥

容斥: 图计数

很多图计数问题都需要用到容斥.
比如说:

- 连通图计数, 枚举 1 号点所在的连通块大小来容斥
- DAG 计数, 枚举入度为 0 的点来容斥

这些东西跟讲生成函数的时候应该会有一系列的题...

技巧: 平方处理

BZOJ 1566

已知现在有两个 “输入管道”, 分别有 n, m 个珠子. 每个珠子是黑色或白色, 相同颜色的珠子被视作是相同的. 每个珠子的颜色也是已知的.
你每次可以从任意一个输入管道中取出最前面的那个珠子放入输出序列. 一共要取 $n+m$ 次, 将这些珠子都取完, 顺序任意.
现在定义两种取法不同, 当且仅当某一次操作中两种取法是在不同的管道里取的. 显然即使取法不同也有可能输出序列相同.
设最终可能产生的不同的输出序列有 k 种, 产生第 i 种输出序列的方案有 a_i 个, 现在要求:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) \bmod 1024523$$

$n \leq 500$

统计平方的和, 转化成统计有序对.

技巧: 平方处理

BZOJ 1566 - 题解

统计平方的和, 转化成统计有序对.
即统计有多少对 (way_A, way_B) 使得 way_A, way_B 均能得到相同的结果.

统计平方的和, 转化成统计有序对.
即统计有多少对 (way_A, way_B) 使得 way_A, way_B 均能得到相同的结果.
$O(n^3)$ DP 即可.

技巧: 反射法

经典问题 3

给定 S, T, K, 求每次 $+1, -1$, 用不超过 K 次操作从 S 变成 T 的方案数. 每一时刻都不能为负.

$S, T, K \leq 10^5$

技巧: 反射法

经典问题 3 - 题解

在平面直角坐标系中画出图像 (x 轴代表时间, y 轴代表当前的数值), 发现所有不合法的路径都可以沿 $y=-1$ 反射到一条从 $(-(S+2),0)$ 到 $(T,0)$ 的路径.

技巧: 反射法

经典问题 3 - 题解

在平面直角坐标系中画出图像 (x 轴代表时间, y 轴代表当前的数值), 发现所有不合法的路径都可以沿 $y=-1$ 反射到一条从 $(-(S+2),0)$ 到 $(T,0)$ 的路径.
直接组合数计算即可. 当然直接减一下转化为不能穿过对角线也是一样的.

技巧: Prufer 序列

LOJ 2320

在一个 s 个点的图中，存在 $s-n$ 条边，使图中形成了 n 个连通块，第 i 个连通块中有 a_i 个点.

现在我们需要再连接 $n-1$ 条边，使该图变成一棵树. 对一种连边方案，设原图中第 i 个连通块连出了 d_i 条边，那么这棵树 T 的价值为:

$$\mathrm{val}(T) = \left(\prod_{i=1}^{n} {d_i}^m\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {d_i}^m\right)$$

你的任务是求出所有可能的生成树的价值之和，对 998244353 取模.

$n \leq 30000, m \leq 30$

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.

$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^m$ 这个部分, 可以拆开之后用一些处理出来, 先忽略掉.

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.
$\sum_{i=1}^{n} d_i{}^m$ 这个部分, 可以拆开之后用一些处理出来, 先忽略掉.
记

$$F_i(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)^m A_i^{k+1}}{k!} x^k$$

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.

$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^m$ 这个部分, 可以拆开之后用一些处理出来, 先忽略掉.

记

$$F_i(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)^m A_i^{k+1}}{k!} x^k$$

则答案为

$$(n-2)![x^{n-2}] \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.

$\sum_{i=1}^n {d_i}^m$ 这个部分，可以拆开之后用一些处理出来，先忽略掉.

记

$$F_i(x) = \sum_{k \ge 0} \frac{(k+1)^m A_i^{k+1}}{k!} x^k$$

则答案为

$$(n-2)![x^{n-2}] \prod_{i=1}^n F_i(x)$$

可以发现

$$F_i(x) = A_i(c_0 + c_1 x^{\underline{1}} + c_2 x^{\underline{2}} + \ldots + c_m x^{\underline{m}}) e^{A_i x}$$

技巧: Prufer 编码

LOJ 2320 - 题解

一个点的度数等于其在 Prufer 序列中出现的次数 $+1$.
$\sum_{i=1}^{n} {d_i}^m$ 这个部分, 可以拆开之后用一些处理出来, 先忽略掉.
记

$$F_i(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+1)^m A_i^{k+1}}{k!} x^k$$

则答案为

$$(n-2)![x^{n-2}] \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

可以发现

$$F_i(x) = A_i(c_0 + c_1 x^{\underline{1}} + c_2 x^{\underline{2}} + \ldots + c_m x^{\underline{m}}) e^{A_i x}$$

其中 $c_0, c_1, \ldots c_m$ 可以用组合数和第二类斯特林数求出来, 也可以直接递推.

技巧: 考虑贡献

AGC005 F

给定一棵 N 个节点的树与一个整数 K. 对于一个顶点集合 S, 定义 $f(S)$ 为最小的包含 S 中所有点的连通块大小.
有 $\binom{N}{K}$ 种方案从 N 个点中选取一个大小为 K 的点集, 设被选择的点集为 S, 求出 $\binom{N}{K}$ 种方案中 $f(S)$ 的和.
对于 $K = 1, ..., N$, 求出这个它模 924844033 的值.

$N \leq 2 \times 10^5$

技巧：考虑贡献

AGC005 F - 题解

首先一个连通块的点数等于这个连通块的边数 $+1$. $+1$ 很好处理，就是 $\binom{N}{K}$.

技巧: 考虑贡献

AGC005 F - 题解

首先一个连通块的点数等于这个连通块的边数 $+1$. $+1$ 很好处理, 就是 $\binom{N}{K}$.
所以我们只用考虑边的贡献.

首先一个连通块的点数等于这个连通块的边数 $+1$. $+1$ 很好处理, 就是 $\binom{N}{K}$.
所以我们只用考虑边的贡献.
对于一条边, 它会将整颗树分为大小分别为 $a, N-a$ 的两个部分, 对于一个固定的 K, 它的贡献显然是 $\binom{N}{K} - \binom{a}{K} - \binom{N-a}{K}$.

技巧：考虑贡献

AGC005 F - 题解

首先一个连通块的点数等于这个连通块的边数 $+1$. $+1$ 很好处理，就是 $\binom{N}{K}$.
所以我们只用考虑边的贡献.
对于一条边，它会将整颗树分为大小分别为 $a, N-a$ 的两个部分，对于一个固定的 K，它的贡献显然是 $\binom{N}{K} - \binom{a}{K} - \binom{N-a}{K}$.
考虑优化. 记一个子树大小的出现次数，然后转化为求

$$ans_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \binom{i}{k}$$

首先一个连通块的点数等于这个连通块的边数 $+1$. $+1$ 很好处理，就是 $\binom{N}{K}$.
所以我们只用考虑边的贡献.
对于一条边，它会将整颗树分为大小分别为 $a, N-a$ 的两个部分，对于一个固定的 K，它的贡献显然是 $\binom{N}{K} - \binom{a}{K} - \binom{N-a}{K}$.
考虑优化. 记一个子树大小的出现次数，然后转化为求

$$ans_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \binom{i}{k}$$

这个式子可以 FFT.

技巧: Polya 定理

Burnside 引理:

$$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} \mathcal{C}(f)$$

技巧: Polya 定理

ARC062 F

给定一张 N 个点 M 条边简单图, 并把它带回了家.
现在要把图中所有边染上 K 种颜色中的一种, 两条边颜色可以相同. 对于任意一个简单环, 你可以将这个换上的颜色进行循环移位. 两种染色方案 A, B 是本质相同的当且仅当 A 能够在有限次循环移位之后变成 B. 求出求出本质不同的染色方案数, 对 $10^9 + 7$ 取模.

$N \leq 50, M, K \leq 100$

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.
三种情况:

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.
三种情况:

- 不在点双里的边直接贡献 K

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.
三种情况:

- 不在点双里的边直接贡献 K
- 一个点双中的点数等于边数 (只有一个环), 用 Polya 定理算

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.
三种情况:

- 不在点双里的边直接贡献 K
- 一个点双中的点数等于边数 (只有一个环), 用 Polya 定理算
- 否则, 可以证明任意一种置换都可以循环移位出来, 直接用组合数算

技巧: Polya 定理

ARC062 F - 题解

首先求出点双连通分量.
三种情况:

- 不在点双里的边直接贡献 K
- 一个点双中的点数等于边数 (只有一个环), 用 Polya 定理算
- 否则, 可以证明任意一种置换都可以循环移位出来, 直接用组合数算

不知道数据范围为什么这么小...

期望杂题

很多期望题，实际上都是计数题…

期望杂题

很多期望题，实际上都是计数题...
常用性质：期望的和等于和的期望.

期望杂题

很多期望题，实际上都是计数题...
常用性质：期望的和等于和的期望.
一个很基础的问题：为什么期望常常要倒推?

期望杂题：DP

BZOJ 4008

给你 N 张牌，每张牌有一个发动概率 P_i 以及伤害 D_i. 共有 R 回合，每回合会按编号从小到大依次考虑本次游戏中还未发动的卡牌，依次尝试发动；如果成功发动，进入下一回合. 求期望伤害之和. 共 T 组数据.

$T \leq 444, N \leq 220, R \leq 132$

期望杂题：DP

BZOJ 4008 - 题解

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.

期望杂题: DP

BZOJ 4008 - 题解

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.

不妨依次考虑每个卡牌而非每局, 分别计算对答案的贡献.

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.

不妨依次考虑每个卡牌而非每局, 分别计算对答案的贡献.

注意到对于卡牌 i, 之前具体那些卡牌已经发动了是不需记录的, 我们所需要知道的仅仅是之前有多少张卡牌已经发动, 也即还剩下多少局会考虑到第 i 张牌.

期望杂题: DP

BZOJ 4008 - 题解

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.
不妨依次考虑每个卡牌而非每局, 分别计算对答案的贡献.
注意到对于卡牌 i, 之前具体那些卡牌已经发动了是不需记录的, 我们所需要知道的仅仅是之前有多少张卡牌已经发动, 也即还剩下多少局会考虑到第 i 张牌.
那么我们设状态 $dp(i,j)$ 表示考虑到第 i 张牌时, 还剩下 j 局没有发动过卡牌的概率 (即前 $i-1$ 张牌都没有在这 j 局中发动).

期望杂题: DP

BZOJ 4008 - 题解

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.

不妨依次考虑每个卡牌而非每局, 分别计算对答案的贡献.

注意到对于卡牌 i, 之前具体那些卡牌已经发动了是不需记录的, 我们所需要知道的仅仅是之前有多少张卡牌已经发动, 也即还剩下多少局会考虑到第 i 张牌.

那么我们设状态 $dp(i,j)$ 表示考虑到第 i 张牌时, 还剩下 j 局没有发动过卡牌的概率 (即前 $i-1$ 张牌都没有在这 j 局中发动).

转移也是很显然的, 考虑 $i-1$ 有没有发动即可:

$$dp(i,j) = dp(i-1,j)(1-p_{i-1})^j + dp(i-1,j+1)(1-(1-p_{i-1})^{j+1})$$

按行 DP $\rightarrow$ 按列 DP.
不妨依次考虑每个卡牌而非每局, 分别计算对答案的贡献.
注意到对于卡牌 i, 之前具体那些卡牌已经发动了是不需记录的, 我们所需要知道的仅仅是之前有多少张卡牌已经发动, 也即还剩下多少局会考虑到第 i 张牌.
那么我们设状态 $dp(i,j)$ 表示考虑到第 i 张牌时, 还剩下 j 局没有发动过卡牌的概率 (即前 $i-1$ 张牌都没有在这 j 局中发动).
转移也是很显然的, 考虑 $i-1$ 有没有发动即可:

$$dp(i,j) = dp(i-1,j)(1-p_{i-1})^j + dp(i-1,j+1)(1-(1-p_{i-1})^{j+1})$$

最后答案的计算就十分简单了, 直接枚举 i,j, 考虑贡献即可.

期望杂题：高斯消元

CF 113D

有一个 n 个点 m 条边的无向图，两个人分别从 x, y 出发，每个人每分钟有 p_i 的概率不动，有 $1 - p_i$ 的概率走到随机一个相邻的点。当他们在同一时刻选择前往同一个房间，他们就会在那个房间相遇并停止。
求在每个点相遇的概率。

$n \leq 22$

期望杂题：高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.

期望杂题: 高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.

第一个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j, 此时开始, 之后在 t 点相遇的概率.

期望杂题：高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.

第一个做法是，设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i，第二个人在 j，此时开始，之后在 t 点相遇的概率.

枚举终点，做 n 次高斯消元即可，不过直接这样做是 $O(n^7)$ 的.

期望杂题: 高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.
第一个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j, 此时开始, 之后在 t 点相遇的概率.
枚举终点, 做 n 次高斯消元即可, 不过直接这样做是 $O(n^7)$ 的. 注意到每次高斯消元时, $Ax=B$ 只有 B 发生了变化. 于是把 B 改成一个矩阵就可以 $O(n^6)$ 了.

期望杂题: 高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.
第一个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j, 此时开始, 之后在 t 点相遇的概率.
枚举终点, 做 n 次高斯消元即可, 不过直接这样做是 $O(n^7)$ 的. 注意到每次高斯消元时, $Ax=B$ 只有 B 发生了变化. 于是把 B 改成一个矩阵就可以 $O(n^6)$ 了.
第二个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j 这种情况的期望出现次数.

期望杂题: 高斯消元

CF 113D - 题解

这道题有两个做法.

第一个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j, 此时开始, 之后在 t 点相遇的概率.

枚举终点, 做 n 次高斯消元即可, 不过直接这样做是 $O(n^7)$ 的. 注意到每次高斯消元时, $Ax = B$ 只有 B 发生了变化. 于是把 B 改成一个矩阵就可以 $O(n^6)$ 了.

第二个做法是, 设 $f(i,j)$ 为第一个人在 i, 第二个人在 j 这种情况的期望出现次数.

因为终止状态只会出现 $0/1$ 次, 于是期望就是概率了...

期望杂题: 概率生成函数

BZOJ 1152

给定一个数 n 与一个长度为 m 的串 S(字符集为 $1 \ldots N$). 一开始 T 为空串, 每次随机产生一个字符加入 T 的末尾, 当 T 的某个后缀等于 S 是, 过程停止.
求期望步数.

$m \le 10^5, n \le 10^9$

结论:

KMP 求出 fail 数组，答案为

$$n^m + n^{fail(m)} + n^{fail(fail(m))} + \dots$$

期望杂题：概率生成函数

BZOJ 1152 - 题解

结论:
KMP 求出 fail 数组，答案为

$$n^m + n^{fail(m)} + n^{fail(fail(m))} + \dots$$

https://www.zhihu.com/question/59895916/answer/196874145