晚间划水

Sunshine_cfbsl

长沙市雅礼中学

January 11, 2018

Codeforces 773E Perishable Roads

Description:

Codeforces 773E Perishable Roads

Description:

给你一个 n 个点的无向完全图, 每条边有正边权. 对于一个生成有根树, 定义其权值为每个点到根的路径上的最小权值之和. 对于每个点, 求出以它为根的权值最小的生成树.

Codeforces 773E Perishable Roads

Description:

给你一个 n 个点的无向完全图，每条边有正边权。对于一个生成有根树，定义其权值为每个点到根的路径上的最小权值之和。对于每个点，求出以它为根的权值最小的生成树。

$2 \le n \le 2000$，边权不大于10^9.

Codeforces 773E Perishable Roads

仔细观察可以发现三条的性质:

- 一定存在一种最优方案是一条链.

Codeforces 773E Perishable Roads

仔细观察可以发现三条的性质:

- 一定存在一种最优方案是一条链.
- 每个最优方案一定包括了至少一条权值最小的边.

Codeforces 773E Perishable Roads

仔细观察可以发现三条的性质：

- 一定存在一种最优方案是一条链.
- 每个最优方案一定包括了至少一条权值最小的边.
- 一定存在一个链的最优方案, 使得在根到第一条权值最小的边这一段路径上, 除最后一条边外, 边权严格递减.

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

为了方便思考，考虑找到边权最小的边，并把整个图的每一条边减去这个最小值.

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

为了方便思考，考虑找到边权最小的边，并把整个图的每一条边减去这个最小值.

因为链上的边权递减（除去边权为0的边的前一条边），所以整个链的边权和恰为这个链的权值.

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

为了方便思考，考虑找到边权最小的边，并把整个图的每一条边减去这个最小值.

因为链上的边权递减（除去边权为0的边的前一条边），所以整个链的边权和恰为这个链的权值.

设边权为0的边是第k条边:

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

为了方便思考，考虑找到边权最小的边，并把整个图的每一条边减去这个最小值.

因为链上的边权递减（除去边权为0的边的前一条边），所以整个链的边权和恰为这个链的权值.

设边权为0的边是第k条边:

- 如果第$k-2$条边大于第$k-1$条边的边权，那么前k条边都是递减的，就是一个最短路的模型.

Codeforces 773E Perishable Roads

有了这三条性质，我们就可以确定只需要寻找满足包含了权值最小的边且除去最小边的前一条边以外，之前边权递减的链.

为了方便思考，考虑找到边权最小的边，并把整个图的每一条边减去这个最小值.

因为链上的边权递减（除去边权为0的边的前一条边），所以整个链的边权和恰为这个链的权值.

设边权为0的边是第k条边：

- 如果第$k-2$条边大于第$k-1$条边的边权，那么前k条边都是递减的，就是一个最短路的模型.
- 如果第$k-2$条边小于第$k-1$条边的边权，那么第$k-2$条边的边权需要算两遍，因为这是一张完全图，所以我们可以单纯地把每一个点的初始距离赋值为和它相连的最小的边的边权$\times 2$，然后SPFA做多源最短路即可.

胡扯

胡扯

接下来就是这次集训“难题选讲”的最后一题了，

胡扯

接下来就是这次集训“难题选讲”的最后一题了,
那么还是接近一下WC吧.

胡扯

接下来就是这次集训“难题选讲”的最后一题了，
那么还是接近一下WC吧.
这一题

胡扯

接下来就是这次集训“难题选讲”的最后一题了,
那么还是接近一下WC吧.
这一题
自然就是数学题 (并且是极易口胡的生成函数题)
当然这个题没有FASTEST的数学题难. (大佬们可能做过)

UOJ 50 链式反应

Description:(简化版)

一棵n个点的有标号树，标号满足小根堆的性质，每个非叶子节点儿子方向有两条红边，c条黄边($c \in S$)，其中黄边必须连向叶子节点。给出集合S和n_{max}，求对于$1 \le n \le n_{max}$有多少棵这样的树 (对998244353取模).

UOJ 50 链式反应

Description:(简化版)

一棵n个点的有标号树，标号满足小根堆的性质，每个非叶子节点儿子方向有两条红边，c条黄边($c \in S$)，其中黄边必须连向叶子节点．给出集合S和n_{max}，求对于$1 \leq n \leq n_{max}$有多少棵这样的树 (对998244353取模).

$$1 \leq n_{max} \leq 2e5$$

UOJ 50 链式反应

先考虑一下朴素的DP. 设$f(i)$为i个点的这样的树的个数.

UOJ 50 链式反应

先考虑一下朴素的DP. 设$f(i)$为i个点的这样的树的个数.
当$i = 1$时, 容易得出$f(i) = 1$.
当$i \neq 1$时, 根节点必须用红边连接两棵子树, 然后再把剩下的点直接连到根节点上(黄边). 可以重新标号得到转移方程:

$$f(i) = \frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{k}[(i-1-j-k) \in S]\binom{i-1}{j}\binom{i-1-j}{k}f(j)f(k).$$

UOJ 50 链式反应

先考虑一下朴素的DP. 设$f(i)$为i个点的这样的树的个数.
当$i=1$时, 容易得出$f(i)=1$.
当$i\neq 1$时, 根节点必须用红边连接两棵子树, 然后再把剩下的点直接连到根节点上(黄边). 可以重新标号得到转移方程:

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_j\sum_k[(i-1-j-k)\in S]\binom{i-1}{j}\binom{i-1-j}{k}f(j)f(k).$$

这样得到了一个$O(n^3)$的做法. 我们还可以继续优化, 拆开组合数:

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_j\sum_k[(i-1-j-k)\in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-j-k)!}\frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!}$$

UOJ 50 链式反应

$$f(i) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k [(i-1-j-k) \in S] \frac{(i-1)!}{(i-1-j-k)!} \frac{f(j)}{j!} \frac{f(k)}{k!}$$

UOJ 50 链式反应

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_j\sum_k[(i-1-j-k)\in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-j-k)!}\frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!}$$

令$g(i)=\sum_{j+k=i}\frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!}$. 则我们有:

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_s[(i-1-s)\in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-s)!}g(s)$$

这样就变成$O(n^2)$了.

UOJ 50 链式反应

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_j\sum_k[(i-1-j-k)\in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-j-k)!}\frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!}$$

令$g(i)=\sum_{j+k=i}\frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!}$. 则我们有:

$$f(i)=\frac{1}{2}\sum_s[(i-1-s)\in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-s)!}g(s)$$

这样就变成$O(n^2)$了.
然而这样还不够.

UOJ 50 链式反应

我们把这两个转移方程放到一起:

$$\begin{cases} g(i) = \sum_{j+k=i} \frac{f(j)}{j!}\frac{f(k)}{k!} \\ f(i) = \frac{1}{2}\sum_{s}[(i-1-s) \in S]\frac{(i-1)!}{(i-1-s)!}g(s) \end{cases}$$

UOJ 50 链式反应

我们把这两个转移方程放到一起:

$$\begin{cases} g(i) = \sum_{j+k=i} \frac{f(j)}{j!} \frac{f(k)}{k!} \\ f(i) = \frac{1}{2} \sum_s [(i-1-s) \in S] \frac{(i-1)!}{(i-1-s)!} g(s) \end{cases}$$

若设形式幂级数$A(x) = \sum_i \frac{f(i)}{i!} x^i$, $C(x) = \sum_i [i \in S] \frac{1}{i!} x^i$.

UOJ 50 链式反应

我们把这两个转移方程放到一起:

$$\begin{cases} g(i) = \sum_{j+k=i} \frac{f(j)}{j!} \frac{f(k)}{k!} \\ f(i) = \frac{1}{2} \sum_s [(i-1-s) \in S] \frac{(i-1)!}{(i-1-s)!} g(s) \end{cases}$$

若设形式幂级数$A(x) = \sum_i \frac{f(i)}{i!} x^i$, $C(x) = \sum_i [i \in S] \frac{1}{i!} x^i$.
则A和C满足微分方程:

$$\frac{1}{2} C(x) A^2(x) + 1 = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$$

我们需要解出$A(x)$.
设$f(A) = \frac{1}{2} C A^2 + 1$.

UOJ 50 链式反应

怎样解形如$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(A)$的一阶微分方程?

UOJ 50 链式反应

怎样解形如$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(A)$的一阶微分方程?

假设我们已经求得A_n满足$\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) \pmod{x^n}$, 接下来我们要求$A_{2n}$使得$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_{2n}) \pmod{x^{2n}}$. 对$f$在$A_n$进行泰勒展开 (下面的同余式模数为$x^{2n}$):

$$\begin{aligned}
f(A_{2n}) &= f(A_n) + f'(A_n)(A_{2n} - A_n) + f''(A_n)\frac{(A_{2n} - A_n)^2}{2!} + \cdots \\
&\equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n
\end{aligned}$$

UOJ 50 链式反应

怎样解形如$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(A)$的一阶微分方程?

假设我们已经求得A_n满足$\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) \pmod{x^n}$, 接下来我们要求$A_{2n}$使得$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_{2n}) \pmod{x^{2n}}$. 对$f$在$A_n$进行泰勒展开 (下面的同余式模数为$x^{2n}$):

$$\begin{aligned} f(A_{2n}) &= f(A_n) + f'(A_n)(A_{2n} - A_n) + f''(A_n)\frac{(A_{2n} - A_n)^2}{2!} + \cdots \\ &\equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n \end{aligned}$$

那么我们需要求A_{2n}使得:

$$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n$$

UOJ 50 链式反应

$$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n$$

UOJ 50 链式反应

$$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n$$

两边同乘$e^{-\int f'(A_n)\,\mathrm{d}x} \equiv R(x) \pmod{x}^{2n}$:

UOJ 50 链式反应

$$\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x} \equiv f(A_n) + f'(A_n)A_{2n} - f'(A_n)A_n$$

两边同乘$e^{-\int f'(A_n)\,\mathrm{d}x} \equiv R(x) \pmod{x}^{2n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x}R &\equiv f(A_n)R + f'(A_n)A_{2n}R - f'(A_n)A_nR \\
\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x}R - A_{2n}f'(A_n)R &\equiv (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R \\
\frac{\mathrm{d}A_{2n}}{\mathrm{d}x}R + A_{2n}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} &\equiv (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R \\
\frac{\mathrm{d}(A_{2n}R)}{\mathrm{d}x} &\equiv (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R
\end{aligned}$$

UOJ 50 链式反应

因为有:

$$\frac{\mathrm{d}(A_{2n}R)}{\mathrm{d}x} \equiv (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R$$

所以:

$$A_{2n} \equiv R^{-1}\int (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R\,\mathrm{d}x$$

UOJ 50 链式反应

因为有:

$$\frac{\mathrm{d}(A_{2n}R)}{\mathrm{d}x} \equiv (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R$$

所以:

$$A_{2n} \equiv R^{-1} \int (f(A_n) - f'(A_n)A_n)R \, \mathrm{d}x$$

然后只需要多项式求逆和多项式求exp就可以了.
时间复杂度$O(n \log_2 n)$.

完结撒花～

谢谢大家～

完结撒花～

谢谢大家～
Blog: http://sunshine-cfbsl.com
Mail: sunshine_cfbsl@outlook.com