Alkane Solution

___debug

2017 年 1 月 18 日

1 $T = 1, n \leq 8$ 时的做法 (5 pts)

你学过有机化学吗...

2 $T = 1, n \leq 2000$ 时的做法 (30 - 40 pts)

首先考虑计算对应的有根树的个数.

考虑 DP. 设状态为 $f(i, j)$, 表示当前共有 i 个点, 且根的度数为 j.

先 $1...n$ 枚举 $size$, 表示现在用最大子树大小为 $size$ 的情形来转移. 不妨设 $s = \sum_{k=0}^{3} f(size, k)$, 那么对于一个 $f(i, j)$, 再枚举一个最大子树 (即子树大小为 $size$ 的子树) 的个数 k, 我们便有转移

$$f(i, j) \leftarrow f(i, j) + f(i - size \times k, j - k)\binom{s + k - 1}{k}$$

这是 $O(n^2)$ 的.

计算烷烃的个数可以用枚举重心的技巧.

首先只要某个点 u 满足其子树大小都 $\leq \frac{n}{2}$, 那么这个点是这颗树的重心. 比较显然的是, 重心最多只会有两个, 并且有两个重心的情形, 两个重心一定相邻, 并且另一个重心做根的时候, 这个重心的子树大小为 $\frac{n}{2}$ (当然 n 必须要是偶数). 然后很多无根树同构的问题就可以通过重心转化为有根树同构.

我们可以在 DP 的时候, 强制 $size < \frac{n}{2}$ (注意是小于), 这样求出的 $f(i, j)$ 就是点数为 i 且重心度数为 j 的无根树个数. 那么答案为

$$\sum_{k=0}^{4} f(n, k) + [n \bmod 2 = 0]\binom{\sum_{k=0}^{3} f(\frac{n}{2}, k) + 1}{2}$$

前一项为一个重心的情形, 后一项为两个重心的情形.

总时间复杂度还是 $O(n^2)$.

3 $T = 1, n \leq 10^5$ 时的做法 (60 pts)

先算烷基, 即有根树并且根的度数 ≤ 3.

设 $A(x)$ 为烷基的个数的生成函数. 根据 Pólya 定理, 我们有

$$A(x) = 1 + x\frac{A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3)}{6}$$

这个可以用分治 FFT $O(n \log^2 n)$ 解, 需要用到一些技巧. (可不可以牛顿迭代?)

同样地, 我们可以再次运用重心方法和 Pólya 定理算出烷烃的个数.

4 $T=10^5, n \le 10^5$ 时的做法 (100 pts)

考虑烷烃个数的生成函数 $B(x)$. 但是并不方便直接用 $A(x)$ 表示出 $B(x)$.

对于一棵无根树, 令 p 和 q 分别表示这棵树的点等价类个数和边等价类个数. 定义对称边为满足连接的两个点是等价的的边 (显然这种边最多只有 1 条). 令 s 表示对称边的个数.

那么有下面这个式子恒成立:

$$p-q+s=1$$

证明十分简单. $s=0$ 时, 选任意一个重心做根, 容易证明没有其它点与这个根等价; 然后再考虑每个点及其父边的贡献即可. $s=1$ 时的情况还更简单一些.

有了这个式子, 接下来的事情就好办了. 对于所有 n 个点的烷烃, 有:

$$\sum p-\sum q+\sum s=\sum 1$$

右边就是我们要求的.

令 $P(x)$ 表示烷烃的 $\sum p$ 的生成函数. 对于一个无根树, 选 n 个点中的任意一个点做根形成互不同构的的有根树的数量就是 p.

用一下 Pólya 定理, 我们有

$$P(x)=x\frac{A(x^4)+3A(x^2)^2+6A(x)^2A(x^2)+8A(x)A(x^3)+6A(x^4)}{24}$$

再令 $Q(x)$ 表示烷烃的 $\sum q$ 的生成函数. 对于一个无根树, 选 $n-1$ 条边中的任意一条边劈开, 插入一个度数为 2 的点形成的互不同构的有根树的数量就是 q.

类似地, 我们有

$$Q(x)=\frac{(A(x)-1)^2-(A(x^2)-1)}{2}$$

然后显然 $\sum s$ 的生成函数就是 $A(x^2)$.

所以最终烷烃的数量的生成函数为

$$B(x)=P(x)-Q(x)+A(x^2)$$

时间复杂度为 $O(n\log^2 n+T)$.