

平面计算几何入门

orbitingflea

June 22, 2018

目录

1 基础内容

- 预备知识
- 极角扫描

2 扩展内容选讲

- 两圆的公切线
- 简单多边形
- 凸包
- 平面最近点对
- 数值积分

3 两道好题

二维向量

- 几何意义
- 复数意义

二维向量

- 长度
 - 长度的平方
 - 单位向量
- 极角
- 夹角
- 标量乘除
- 加减
- 点积
- 叉积
- 复数积

点、直线、圆

- 点：直接用向量表示
- 直线：直线上的一个点、一个方向向量

$$l = (\vec{u}, \vec{v}) = \{\vec{u} + c\vec{v} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

- 射线和线段：改变 c 的范围
 - 角： $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$
- 圆：圆心、半径

点、直线、圆

- 点和直线（线段）的位置关系
- 点和圆的位置关系
- 两条线段是否相交
- 过定点，直线的垂线、平行线
- 点到直线的距离
- 点到直线的垂足
- 垂直平分线
- 角平分线
- 两直线的交点
- 圆和直线的交点
- 两圆的交点

计算几何六合一 (UVa 12304)

进行 10^5 次询问:

- 三角形的内切圆
- 三角形的外接圆
- 点到圆的切线
- 给定半径、圆的两条切线, 作这个圆
- 给定半径、圆上一点、圆的一条切线, 作这个圆
- 给定半径、圆的两个外切圆, 作这个圆

计算几何六合一 (UVa 12304)

- 直接按照题意模拟就可以了。
- 注意精度问题，不要滥用除法和 `sqrt`，以及三角函数。

Red And Blue Points

- 给定平面上的 n 个红点和 m 个蓝点。
- 你需要删去尽可能少的点（两种颜色都可以删），使得删去后存在一条直线可以将两种颜色的点分开，即直线一侧只有红色的点，另一侧只有蓝色的点。
- $n, m \leq 1000$ 。

Red And Blue Points

- 决策等价于：先确定直线，再删除直线左边的红点和右边的蓝点。
- 只考虑直线贴着一个点的特殊情况。
- 枚举这个点，极角扫描。
- 时间复杂度 $O(n^2 \log n)$ 。

技巧：极角扫描

这是一种比较常见的解题技巧。下面是实现细节（仅供参考）。

- 如果你使用 `atan2` 函数来判断极角的话，在第二象限与第三象限的交界位置，函数值是从 π 到 $-\pi$ 的突变，要小心因此造成的精度误差或 bug。
- 同时，你也要注意你的程序能够处理相邻两个关键的极角跨度较大（如超过 π ）的情况，有时这个也会让你程序出现一些莫名错误。
- **crazy_cloud** 建议写的时候分两次扫，一次扫 x 轴负半轴（含）以及一直逆时针到 x 轴正半轴（不含）的区间，另一次扫剩下的区间，这样极角的跨度就不会很大，能够少考虑一些特殊情况。而且我们只需要写一个扫描线过程，做第二次时直接将所有角度旋转 π 再套用同一个过程做一次就能无缝衔接了。

- 给定一个二维向量的集合 S ，求它的一个子集，最大化这个子集的和的长度。
- $n \leq 2 \times 10^5$ 。

- 设 \vec{a} 是这个子集的和。
- 假设我们确定了 \vec{a} 的方向，那么我们会贪心选择所有和 \vec{a} 夹角小于 $\pi/2$ 的向量。
- 极角扫描方向向量。把所有向量按照极角排序，在扫描的过程中，我们选择的部分是连续的一段。
- 用双指针维护我们选择的部分，以及这些向量的和。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

两圆的公切线

(这是对预备知识的一点补充。)

- 两圆在切线同侧：同时缩小两个圆的半径，则切线向圆心方向平移。
- 两圆在切线异侧：缩小圆 1 的半径，扩大圆 2 的半径，则切线向圆 1 方向平移。

简单多边形

- 判断一个点是否在简单多边形内部
- 求多边形的面积

Get Out (ASC 1)

- 平面上有 n 个圆，被至少一个圆覆盖的区域为黑色，其余部分为白色。
- 保证原点为白色，求从原点出发，是否存在一条白色路径，能够到达无限远的点。
- $n \leq 300$ 。

Get Out (ASC 1)

- 如果两个圆相交，就用红色线段连接它们的圆心。
- 如果无法到达无限远的点，那么红色线段一定形成了一个包含原点的多边形。
- 考虑转角法判断原点是否在某个多边形内部，对于一条线段 AB ，建一条有向边 $A \rightarrow B$ ，权值为 OA 旋转到 OB 转过的角度，反过来也一样。
- 用 Floyd 找出图中的最大环。如果图中存在一个大小为 2π 的环，则存在这样的多边形。
- 时间复杂度 $O(n^3)$ 。

凸包

- 动态凸包
- 旋转卡壳 (qiǎ ké)
 - 最远点对
 - 两个凸包的最远、最近点对
 - 两个凸包的公切线
- 半平面交

Average Convex Hull (ASC 40)

- 平面上有 n 个点，随机删除一个点，求剩余 $n - 1$ 个点形成的凸包顶点数的期望。
- $n \leq 2 \times 10^5$ 。

Average Convex Hull (ASC 40)

- 如果删除的点在凸包内部，则凸包面积不变。
- 如果删除的点是凸包的顶点。设这个点是 A ，它左边和右边的点分别是 B 和 C ，三角形 ABC 内的点的集合是 S 。
- 原来凸包中的三角形 ABC ，现在缩减为 $S - \{A\}$ 的凸包。
- 每个点只会出现在不超过三个这样的三角形中，可以暴力计算。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

平面最近点对

- 分治: $O(n \log n)$
- 一个投机取巧的好办法: $O(n^2)$

数值积分

- 一元积分的应用
 - 封闭图形面积
 - 曲线长度
 - 旋转体的体积、表面积
- Simpson 积分公式
 - 对于不超过 3 次的多项式函数，能求出精确值
- 圆弧的精确积分

圆的面积并 (BZOJ 2178)

- 给出 n 个圆，求其面积并。
- Small: $n \leq 1000$ ，要求误差在 10^{-3} 以内。
- Large: $n \leq 2000$ ，要求误差在 10^{-9} 以内。

圆的面积并 (BZOJ 2178)

- 我们要求一个封闭区域的面积，它等于（所有）上边缘的积分减下边缘的积分。
- 边缘一定是由圆弧拼接而成的。枚举圆，计算圆周对答案的贡献。
- 极角扫描。

圆的面积并 (BZOJ 2178)

利用相同的做法，可以解决一些扩展问题：

- Extra-1: 对于 $1 \leq k \leq n$ ，求出恰好被 k 个圆覆盖的面积。
- Extra-2: 求圆环的面积并。
- Extra-3: 求简单多边形的面积并，总顶点数为 n 。
- $n \leq 2000$ 。

两道好题

接下来准备了两道好题，大家可以娱乐一下。

其实不是特别好，过于简单，但我实在找不到会做的题了。

Airport Construction (WF 2017)

- 给定一个简单多边形 (n 个顶点), 求一条最长的线段, 使得这条线段上的每一个点 (含端点) 都位于多边形内部 (含边界)。
- $n \leq 200$, 要求误差在 10^{-6} 以内。

Airport Construction (WF 2017)

- 只考虑包含至少两个顶点的情况，这些情况一定包含最优解。
- 枚举两个顶点，确定一条直线，假设答案是这条直线的一部分。
- 我们需要知道这条直线的哪些部分在多边形内部。
- 让一个动点沿着多边形的边界移动一圈，记录下动点穿过直线的位置，这些位置就是切换点。
- 注意处理多边形的顶点在直线上的情况。
- 时间复杂度 $O(n^3 \log n)$ 。

Cherry Orchard (BSUIR Final 2015)

- 有一个正方形，左下角坐标是 $(0,0)$ ，右上角坐标是 $(1,1)$ 。
- 正方形内部有 n 个关键点，严格在正方形内部，且不重合。
- 均匀随机选择一个满足以下条件的点对 (A,B) ：
 - A, B 都在正方形的边界上，且都不在正方形的顶点上。
 - A, B 不在正方形的同一条边上。
- 连接 AB ，这条线段把正方形划分成两个部分。设两部分严格包含的关键点的数量分别为 c_1 和 c_2 。
- 求 $\max(c_1, c_2)$ 的期望。
- $n \leq 50$ ，要求误差在 10^{-9} 以内。

Cherry Orchard (BSUIR Final 2015)

- 从正方形的四条边中选择两条，本质上只有两种不同的情况：相邻和相对。
- 假设底边上有一个定点 A ，那么我们可以用极角扫描来处理 B 在上面或左边的情况。
- 当关键点的顺序发生改变时，极角扫描的过程发生变化。
- 假设底边上有一个动点 A ，从 $(0,0)$ 移动到 $(0,1)$ 。
- 找出所有关键点的连线与底边的交点，设它们为特殊点。
- 两个相邻的特殊点之间，极角扫描的过程不会发生变化。
- 用积分计算这个极角区间对答案的贡献。
- 时间复杂度 $O(n^3)$ 。