数论函数选讲

任之洲

.....

PE512

PE530

PE441

杜粉篇

DUCKIT

2...

6-11 7 to 11 6

DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

绍兴市第一中学

2016年3月22日

Content

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

F E 4 3 9 积性函数求利 11 10 66

- 杜教筛
- 一种积性函数求和方法

■ 一些定义与常识

- 各块内容之间关联不大。
- ■可能引起公式恐惧症患者的轻度不适。
- 如何和你了解的不同,请装作没看见。



id=43116906

数论函数

数论函数选讲

任之洲

双比四级

积性函数

Möbius反演 线性等

PE512

PF530

DEAA

DIVICINTS

55.00

积性函数求利

DIVCNT3

数论函数

定义域为正整数的函数。

数论函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

秋性函数 Dirichlet:

Möbius反演 线性筛

PE512

. 200

PE44

1-3271

DIVCNT

PE43

积性函数求本

DIVCNT3

数论函数

定义域为正整数的函数。

积性函数

对于所有gcd(a,b) = 1, 满足f(ab) = f(a)f(b)。

数论函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

Dirichlet 卷 Möbius 反演

DEE10

. _____

1 233

. _---

DIVCNIT

55.00

积性函数求和

DIVCNT

数论函数

定义域为正整数的函数。

积性函数

对于所有gcd(a,b)=1,满足f(ab)=f(a)f(b)。

完全积性函数

对于所有a,b,满足f(ab) = f(a)f(b)。

常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函

积性函数 Dirichlet卷 Möbius反》

Möbius反演 线性筛

PE512

PE53

PE44

DIVCNT

PE43

积性函数求利

DIVCNT3

Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。

 $\varphi(n) = n \prod_{p \in P} \frac{p-1}{p}$, 其中P是n的不同质因子集合。

常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函

积性函数 Dirichlet参和 Möbius反演

PE512

....

44 郵 3

DIVCNT

PE43

积性函数求;

DIVCNT3

Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。 $\varphi(n) = n \prod_{n \in P} \frac{p-1}{n}$, 其中P是n的不同质因子集合。

Möbius函数

若n有平方数因子,则 $\mu(n) = 0$ 。 否则,若n为k个不同质数之积,则 $\mu(n) = (-1)^k$ 。

◆ロト ◆母 ト ◆ 臣 ト ◆ 臣 ト 亳 目 ● 9 Q ()

常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函

秋性函数 Dirichlet卷 Möbius反為 發性鏡

PF512

PE53

PE44

杜教筛

DIVCNT

PE43

积性函数求和

DIVCNT

Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。

 $\varphi(n) = n \prod_{p \in P} \frac{p-1}{p}$, 其中P是n的不同质因子集合。

Möbius函数

若n有平方数因子,则 $\mu(n)=0$ 。

否则,若n为k个不同质数之积,则 $\mu(n) = (-1)^k$ 。

除数函数

 $\sigma_k(n)$ 表示所有正因子的k次幂之和。

 $d(n) = \sigma_0(n)$, 表示n的正因子个数。

 $\sigma(n) = \sigma_1(n)$, 表示n的所有正因子之和。

常见的完全积性函数

数论函数选讲

任之洲

效化的效

訳性函数 つ:::----

Möbius反演 线性筛

PE512

PESS

PE4

1-427

DIVCN 12

PE43

枳性函数求本

DIVCNT3

幂函数

$$Id_k(n) = n^k$$

$$1(n) = Id_0(n) = 1$$

$$Id(n) = Id_1(n) = n$$

常见的完全积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

秋性函数 Dividalati

Möbius反演 线性筛

PE512

n-.

PE44

D. 1 (CN)

积性函数求和

DIVCNT3

幂函数

$$Id_k(n)=n^k$$

$$1(n) = Id_0(n) = 1$$

$$Id(n) = Id_1(n) = n$$

单位函数

$$e(n) = \epsilon(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷8

Dirichlet 卷秋 Möbius 反演 线性筛

PE512

PE53

PE44

DIVCNT

PE43

积性函数求本

DIVCNT3

Dirichlet卷积

定义两个数论函数f,g的Dirichlet卷积

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷积 Möbius反演 ^{线性筛}

PE512

PE530

DEAA

11 4/ /

DIVCNT

PE439

积性函数求和

DIVCNT

Dirichlet卷积

定义两个数论函数f,g的Dirichlet卷积

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

Dirichlet卷积的性质

交换律: f * g = g * f

结合律: (f*g)*h = f*(g*h)

分配律: f*(g+h) = f*g+f*h

单位元: $f * \epsilon = \epsilon * f$

若f,g均为积性函数,则f*g也为积性函数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷积 Möbius反演 ^{线性筛}

PE512

PE530

PE44

11 M. A

DIVCNT

PE43

积性函数求利

DIVCNT3

常见的Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷积 Möbius反演 ^{线性筛}

PE512

PE53

PE44

杜教第

DIVCNT

PE43

积性函数求利

DIVCNT3

常见的Dirichlet卷积

$$\begin{array}{l} d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \mathbb{P} d = 1*1 \text{.} \\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \mathbb{P} \sigma = d*1 \text{.} \\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad \mathbb{P} \varphi = \mu*Id \text{.} \\ \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), \quad \mathbb{P} \epsilon = \mu*1 \text{.} \end{array}$$

■ 设n有k(k > 0)个不同质因子。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} **Dirichlet卷积** *Möbius*反演 ^{我性節}

PE512

PE53

PE44

DIV (CNIT

积性函数求利

DIVCNT3

常见的Dirichlet卷积

$$\begin{split} &d(n) = \sum_{d|n} 1, & \text{ for } d = 1*1 \text{ .} \\ &\sigma(n) = \sum_{d|n} d, & \text{ for } \sigma = d*1 \text{ .} \\ &\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, & \text{ for } \varphi = \mu*Id \text{ .} \\ &\epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), & \text{ for } \epsilon = \mu*1 \text{ .} \end{split}$$

- 设n有k(k > 0)个不同质因子。
- ■那么

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} **Dirichlet卷积** *Möbius*反演 ^{线性筛}

PE512

PE53

PE44

杜教师

DIVCNT:

PE43

积性函数求和

DIVCNT3

常见的Dirichlet卷积

$$\begin{array}{l} d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \operatorname{FP} d = 1*1\circ\\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \operatorname{FP} \sigma = d*1\circ\\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad \operatorname{FP} \varphi = \mu*\operatorname{Id}\circ\\ \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), \quad \operatorname{FP} \epsilon = \mu*1\circ \end{array}$$

- 设n有k(k > 0)个不同质因子。
- ■那么

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} {k \choose i}$$
$$= (1-1)^{k} = 0$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷和

Möbius及演 线性等

PE512

PE53

PE44

.

DIVCNT

PE43

积性函数求和

DIVCNT3

Möbius反演

如果有两个函数f,g满足

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

则它们也满足

$$g(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

反之亦然, 即

$$f = g * 1 \Leftrightarrow g = \mu * f$$

数论函数选讲

■ 设

Möbius反演

f = g * 1

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷积 **Möbius**及演

PF512

PE530

. _---

DIVCNIT

PF43

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ,得

$$\mu*f=\mu*g*1$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 ^{积性函数} Dirichlet卷积 *Möbius*反演

PE512

DEE30

DEA

41 36 :

DIVCNIT

PE43

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$\mu * f = \mu * g * 1$$

■ 整理得

$$\mu * f = \epsilon * g = g$$

数论函数选讲

Möbius反演

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$\mu*f=\mu*g*1$$

■ 整理得

$$\mu * f = \epsilon * g = g$$

■ 两侧都卷上µ,得

$$g * 1 = \mu * f * 1 = \epsilon * f = f$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

Dirichlet卷和 Möbius反演

PE510

DEFO

DE44

. - . .

DIVICINTO

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设pr;为i的最小质因子。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷秒 Möbius反演 线性筛

PE512

DEES

DEAA

DIVICINT

DE/3

积性函数求和

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷积 Möbius反演 **线性筛**

PE512

PE530

PF44

.

DIVICINT

PE43

积性函数求和

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷积 Möbius反演 线性筛

PF512

DEESC

. _ . . .

DIVCNT:

DE//3

积性函数求和

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。
 - 枚举所有不超过pr_i的质数p, 使pr_{ip} = p。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷积 Möbius反演 **线性筛**

PE512

PE53

PE44

イータス カル

DIVCIVI

和战不能长

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。
 - 枚举所有不超过pr;的质数p, 使prip = p。
- 相当于将每个数的质因子降序分解了。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷秒 Möbius反演 线性筛

PE512

PE530

PE44

杜教筛

DIVCNT2

PE43

积性函数求利

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。
 - 枚举所有不超过pr;的质数p, 使prip = p。
- 相当于将每个数的质因子降序分解了。
 - 分解方式是唯一的,于是每个数只会被筛到一次。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷积 Möbius反演 **线性筛**

PE512

PE53

PE44.

DIVCNT

积性函数求利

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。
 - 枚举所有不超过pr;的质数p, 使prip = p。
- 相当于将每个数的质因子降序分解了。
 - 分解方式是唯一的,于是每个数只会被筛到一次。
 - 复杂度O(n)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷秒 Möbius反演 线性筛

PE512

PE53

PE44

DIVCNT

积性函数求和

- 设pr;为i的最小质因子。
- 2 → n枚挙i
 - 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。
 - 枚举所有不超过pr;的质数p, 使prip = p。
- 相当于将每个数的质因子降序分解了。
 - 分解方式是唯一的,于是每个数只会被筛到一次。
 - 复杂度 O(n)。
- 筛出质数的同时,得到了每个数的最小质因子。

数论函数选讲

■ 设pr;为i的最小质因子。

2 → n枚挙i

■ 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。

■ 枚举所有不超过 pr_i 的质数p, 使 $pr_{in} = p$ 。

■ 相当干将每个数的质因子降序分解了。

■ 分解方式是唯一的,于是每个数只会被筛到一次。

■ 复杂度O(n)。

■ 筛出质数的同时, 得到了每个数的最小质因子。

■ 进一步可以得到每个数去除所有最小质因子后的结果。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet卷系 Möbius反演 线性筛

PE512

PE530

PE44

杜教师

DIVCN I.

积性函数求利

DIVCNT3

■ 设pr;为i的最小质因子。

■ 2 → n枚挙i

■ 假如pr;还没有被计算出来,那么i为质数,那么pr; = i。

■ 枚举所有不超过pr;的质数p,使prip = p。

■ 相当于将每个数的质因子降序分解了。

■ 分解方式是唯一的,于是每个数只会被筛到一次。

■ 复杂度O(n)。

■ 筛出质数的同时,得到了每个数的最小质因子。

■ 进一步可以得到每个数去除所有最小质因子后的结果。

■ 方便地计算积性函数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

D==00

PE44.

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

DIVCN⁻

题目大意

设

$$f(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(n^{i})\right) \mod (n+1)$$

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$\log(100) = 2007$$
.

求
$$g(5*10^8)$$
。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE44

.

DIVCNIT

DIVCIVI

DIVCNT3

■ 设n有m个不同质因子 $p_1 \sim p_m$,那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

数论函数选讲

任之洲

数论的 PE512

PE530

r Loot

杜教筛

DIVCN.

积性函数求和

■ 设n有m个不同质因子p₁ ~ p_m, 那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k)=n^{k-1}\varphi(n)$$

数论函数选讲

任之洲

数比的 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

PF439

积性函数求和 DIVCNT3 ■ 设n有m个不同质因子 $p_1 \sim p_m$,那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$, 所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

数论函数选讲

PE512

PE530

PE441 杜教练

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设n有m个不同质因子p₁ ~ p_m, 那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$,所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

■ 当n为奇数时, $f(n) = \varphi(n)$,否则f(n) = 0。利用线性筛可以O(n)计算。

Sums of totients of powers Project Euler 512

数论函数选讲

数论函数 PE512

PE512 PE530

PE441 杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设n有m个不同质因子 $p_1 \sim p_m$,那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$, 所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

- 当n为奇数时, $f(n) = \varphi(n)$,否则f(n) = 0。利用线性筛可以O(n)计算。
 - 数组开不下?

Sums of totients of powers Project Euler 512

数论函数选讲

数论函数

PE512

PE44

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设n有m个不同质因子p₁ ~ p_m, 那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$,所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

- 当n为奇数时, $f(n) = \varphi(n)$,否则f(n) = 0。利用线性筛可以O(n)计算。
 - 数组开不下? 省去偶数位置。

数论函数选讲

壮之》

数论函数

PE512

PE530

PE44

杜教筛

DIVCNT

积性函数求和

DIVCN.

题目大意

设

$$f(n) = \sum_{d|n} gcd(d, \frac{n}{d})$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

如
$$F(10) = 32$$
, $F(1000) = 12776$ 。
求 $F(10^{15})$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE44

イエタス プリ

DIVCNT

和供派粉步和

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEFO

PE530

PE441

科粉金

DIVCNIT

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

1- 0-27

DIVCNI

积性函数求和

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^{2}} \right\rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

$$= \sum_{d} \sum_{d'} d\mu(d') \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{(dd')^{2}} \right\rfloor} \sigma_{0}(i)$$

数论函数选讲

数论函数

PE530

PESSU

PE44.

杜教第

DIVCNT

DIV CIVI.

PE439

积性函数求和

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^{2}} \right\rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

$$= \sum_{d} \sum_{d'} d\mu(d') \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{(dd')^{2}} \right\rfloor} \sigma_{0}(i)$$

$$= \sum_{d} \sum_{d'} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^{2}} \right\rfloor} \sigma_{0}(i)$$

数论函数选讲

任之洲

数论的:

PE530

PE44

杜粉的

DIV (CNIT

2...

DIVCNT3

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PF512

PE530

PE441

DIVICINTS

DIVCIVIZ

积性函数求和

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

■ $\varphi(d)$ 只需要前 \sqrt{n} 项,约数个数和可以 $O(\sqrt{n})$ 计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441 杜教筛

DIVCNT2

PF439

积性函数求和

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

■ $\varphi(d)$ 只需要前 \sqrt{n} 项,约数个数和可以 $O(\sqrt{n})$ 计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■暴力计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i^2}}\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\frac{\sqrt{n}}{i}\right) = O(\sqrt{n} \ln n)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE520

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

题目大意

设R(M)为所有满足以下条件的数对p, q的 $\frac{1}{pq}$ 的和。

■
$$1 \le p < q \le M$$

$$p+q \geq M$$

$$\gcd(p,q)=1$$

设
$$S(N) = \sum_{i=2}^{N} R(i)$$
。
如 $S(2) = R(2) = \frac{1}{2}$, $S(10) \approx 6.9147$, $S(100) \approx 58.2962$ 。求 $S(10^7)$,保留小数点后4位。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教翁

DIVCNT

2.....

积性函数求和

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

PE439

积性函数求和 DIVCNT3 ■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

数论函数选讲

PE441

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

数论函数选讲

PE441

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \geq i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

DIVICALE

DIV CIVI

DE430

积性函数求和

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE441

杜粉節

DIVCNT

DE420

积性函数求和

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

$$= \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=p+1}^{N-1} \frac{1}{pq} ([p+q \ge N-1] - [p+q=N-1])$$

$$+ \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np}$$

数论函数选讲

PE441

 $T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$ $= \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=p+1}^{N-1} \frac{1}{pq} \left([p+q \geq N-1] - [p+q=N-1] \right)$ $+\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{Np}$ $= T(N-1) - G(N-1) + \frac{F(N-1)}{N}$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

41 44 2

DIVCNE

DIVCNI

积性 派数求私

 $G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNIT

DIVCIVI

DE430

积性函数求和

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEESC

PE441

. _ . .

10 40071

DIVCNT2

积性函数求和

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PF530

PE441

杜教筛

DIVCNT

5......

积性函数求和

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np} - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

PE441

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np} - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{F(N-1)}{N} - \frac{2}{N^2} [N \mod 2 = 0]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE530

PE441

杜教》

DIVCNT

2.....

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DE230

PE441

11 44 4

DIVCNT

积性函数求利

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{d \mid gcd(p,q)} \mu(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DE530

PE441

.. .. .

_ .. . _ . . .

DIVCIVIZ

DE420

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{\substack{d \mid gcd(p,q)}} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \mu(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \frac{1}{pqd^{2}} [pd+qd \ge i]$$

数论函数选讲

PE441

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{\substack{d \mid gcd(p,q)}} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \mu(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \frac{1}{pqd^{2}} [pd+qd \ge i]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \left(\frac{1}{pq} [p+q \ge \lfloor \frac{i}{d} \rfloor] \right)$$

$$- \frac{1}{pq} [p+q = \lfloor \frac{i}{d} \rfloor] [i \mod d \ne 0]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PF512

DEE30

. 2000

PE441

杜教筛

DIVCNT:

J., C., . .

和州承縣书五

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^2} \left(T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

数论函数选讲

双化四多 PE512

PE530

PE441

杜教翁

DIVCNT2

.

积性函数求利

积性函数求本 DIVCNT3

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \left(T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$
$$= \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{i=d}^{N} \left(T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

数论函数选讲

数论函数 PE512 PE530 PE441 杜教筛 DIVCNT2 PE439 积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \left(T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$
$$= \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{i=d}^{N} \left(T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

■ 按| ½| 的值分段计算, 复杂度 O(n ln n)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

11 44 4

DIVICINIT

DIVCIVI

PE439

积性函数求和

■ 经过一些复杂的分类讨论可以做到O(n)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441 杜教筛

DIVCNT2

PE439

积性函数求和

- 经过一些复杂的分类讨论可以做到O(n)。
- 还有一个奥妙重重的做法:



 $O(N\log\log N)$ for precomputing Möbius function O(N) for precomputing Harmonic numbers O(N) for overall sum after that

$$S(N) = rac{1}{2} \Biggl(N - 3 + \sum\limits_{g=1}^N \mu(g) rac{1}{g^2} H(\left\lfloor rac{N}{g}
ight
floor)^2 \Biggr) \,, \quad N \geq 2$$

0.6s in C++

一个实用技巧

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

1 2330

PE44:

杜教师

杜教師

π#μ(II)∠

DE420

积性函数求利

DIVCNT:

杜教筛

设f(n)为一个数论函数, $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$ 。 考虑再找到一个合适的数论函数g(n)。

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d)g(\frac{i}{d}) = \sum_{i=1}^{n} g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

可以得到一个S(n)的递推式

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^{n} (f * g)(i) - \sum_{i=2}^{n} g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

计算 $\mu(n)$ 之和

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE10

PE530

....

PE44

杜教员

杜粉篇

计算μ(n)

DIVICALE

积性函数求利

DIVCNT3

■ 考虑计算 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ 。

计算 $\mu(n)$ 之和

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE441

4年9天)

杜教筛

11 9F pc (11) x

积性 函数求法

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于
$$\mu*1=\epsilon$$
, 所以设 $g(n)=1$, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

计算 $\mu(n)$ 之和

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

杜教翁

计算μ(n)之

DIVCNT2

PF430

积性函数求利

DIVCNT

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于 $\mu*1=\epsilon$, 所以设g(n)=1, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

■ 由于 $\lfloor \frac{\left| \frac{\lambda}{a} \right|}{b} \rfloor = \left\lfloor \frac{\lambda}{ab} \right\rfloor$,所以递推时 $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 的取值只有 $O(\sqrt{n})$ 种。

数论函数选讲

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于 $\mu * 1 = \epsilon$, 所以设g(n) = 1, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

- 由于 $\left[\frac{\left|\frac{\lambda}{a}\right|}{a}\right] = \left|\frac{\lambda}{a}\right|$,所以递推时 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 的取值只 有 $O(\sqrt{n})$ 种。
- 设 $m = |\sqrt{n}|$, 那么这些取值为

$$1, 2, 3, \ldots, m-1, m, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor, \lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{1} \rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE13

PE530

DEAA.

11 27 4

計器器

2000

....

DE 40

积性函数求为

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE513

PE530

PF44

杜教员

柱教等 计算µ(n)之和

DIVCNT

PE439

积性函数求和

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

■ 只需要考虑后半部分

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) \approx O(n^{\frac{3}{4}})$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE44

杜教節

计算μ(n)之末

DE420

积性函数求和

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

■ 只需要考虑后半部分

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) \approx O(n^{\frac{3}{4}})$$

■ 利用积性预处理前n33项,可以将复杂度降到O(n33)。

数论函数选讲

DIVCNT2

题目大意

设 $\sigma_0(n)$ 为n的约数个数,

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^2)$$

求 $S_2(n)$ 。

数据范围

 $1 < n < 10^{12}$, 20s, 1536MB.

数论函数选讲

任之洲

数论函数 DEE12

PE512

PE530

PE441

杜教员

DIVCNT2

2...

和供派数步和

DIVCNT3

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

数论函数选讲

DIVCNT2

■ 设ω(n)为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

■ 考虑n的每个约数d,可以在d²中去掉d的一个质因子集 合. 也就是 $2^{\omega(d)}$ 种。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PF441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设ω(n)为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 d^2 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2^{\omega(d)}$ 种。
 - 这样可以枚举出n²的所有约数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE441

杜教筛

DIVCNT2

DE420

积性函数求和

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 d^2 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2\omega(d)$ 种。
 - 这样可以枚举出n²的所有约数。
- 于是,有

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 d^2 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2\omega(d)$ 种。
 - 这样可以枚举出n²的所有约数。
- 于是,有

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■ 可以按|?|分段计算。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PF441

41 36 2

DIVCNT2

积性函数求和

DIVCNT3

■ 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE13

PE530

....

DIVCNT2

DIVCIVI.

DE/130

积性函数求和

现在需要计算的是2ω(i)之和, 2ω(n)相当于n的无平方因子的约数个数。

■ 所以,有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

D= . . .

F L441

THE MAKE STITE

DIVCNT2

和此系数求五

DIVCNT3

- 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。
- 所以,有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

■ 即

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

DIVCNT2

■ 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子

的约数个数。

■ 所以. 有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

■ 即

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

 $\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i)$ 可以这样暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^{2}} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

杜教翁

DIVCNT2

和此系数书和

DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

数论函 PE512

PE530

PE441

41 越 公

DIVCNT2

DIVCIVI.

50 Jul. 27 St. 27 S

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函 PE512

PE530

PE441

杜教员

DIVCNT2

积性函数求和

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$
$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE530 PE441

1- 3-27

DIVCNT2

积性函数求和

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE530 PE441 杜教筛 **DIVCNT2** PE439

■ 整理一下

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor$$

■ 用线性筛预处理n² 以内的函数值, 复杂度O(n²3)

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE530

PE441

杜教筛

DIVCNI

PE439

积性函数求和 DIVCNT3

题目大意

设 $\sigma(n)$ 为n的所有约数之和,

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma(ij)$$

如
$$S(1000) = 563576517282$$
。
求 $S(10^{11}) \mod 10^9$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DEAA.

11 27 4

D. 1. (C.)

PE439

50 M 7 44 47 5.

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE44

.. .. .

在教师

DIVCNI

PE439

积性函数求和

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv\epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

数论函数选讲

任之洲

数论幽

PE512

PE530

PE441

11 44 45

DIVCNI

PE439

积性函数求和

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v, \frac{i}{u})} \mu(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

DE441

11 14 86

DIVCNE

PE439

和性函数求利

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v, \frac{i}{u})} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(d) \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{l=1}^{l} u(vd) \lfloor \frac{n}{ud} \rfloor \lfloor \frac{n}{vd} \rfloor$$

 $S(n) = \sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} k$ $= \sum_{n=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{v \in (gcd(v, \frac{i}{u}))} uv \in (gcd(v, \frac{i}{u}))$ $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v,\frac{i}{u})} \mu(d)$ $= \sum_{n}^{n} \mu(d) \sum_{d}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{d}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} u(vd) \left\lfloor \frac{n}{ud} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{vd} \right\rfloor$ $= \sum_{d=1}^{n} d\mu(d) \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sigma(i) \right)^{2}$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE44

杜教翁

DIVCNT

PE439

积性函数求和

积性函数水7 DIVCNT3 ■ $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教师

DIVCNI

PE439

DIVCNT3

■ $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■ 线性筛预处理前n³ 项后,这一部分复杂度为O(n²)。

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教师

DIVCNT2

PE439

积性函数求和

 $\sum_{i=1}^n \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

- 线性筛预处理前n³3项后,这一部分复杂度为O(n²3)。
- 还需要计算 $\sum_{i=1}^{n} i\mu(i)$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

L F441

_ .. . _ . _

DIVCNI

PE439__

积性函数求和

■ $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

- 线性筛预处理前 $n^{\frac{2}{3}}$ 项后,这一部分复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 。
- 还需要计算 $\sum_{i=1}^{n} i\mu(i)$ 。
- 考虑如下等式

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)g\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$\Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

PE439

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

. 2000

PE441

杜教第

DIVCN.

PE439

积性函数求和

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE20

__...

F L44.

杜教筛

DIVCNT

PE439

积性函数求和

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|i} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

数论函数选讲

数论函数

PE512

PE550

F L441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

数论函数选讲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

$$= g(n)$$

数论函数选讲

PE439

■ 证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

$$= g(n)$$

■ 反之亦然。

数论函数选讲

PE439

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

Sum of sum of divisors Project Euler 439

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DEAN.

11.44.4

PE439

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■那么

$$\sum_{k=1}^n kf(k) = 1$$

Sum of sum of divisors Project Euler 439

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■那么

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = 1$$

■ 可以得到一个f(n)的递推式

$$f(n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} kf(k)$$

Sum of sum of divisors Project Euler 439

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PF44

杜教筛

DIVCNT2

PE439

积性函数求和

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■那么

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = 1$$

■ 可以得到一个f(n)的递推式

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} kf(k)$$

■ f(n)也可以O(n²/₃)完成计算, 总复杂度O(n²/₃)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE10

DEFO

. 2550

. .---

杜教员

DIVCN

PE439

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

NI (CNIT)

■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEET

r Look

PE44:

杜教!

DIVCN.

PF430

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DE513

55500

. _---

1-9271

DIVENT

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
 - 当n为质数时,即n = p,F(p) = G(p)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE10

DEFO

DEAA

DIVCIVI

DE....

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
 - 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
 - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE10

DEFAO

DE44

DIVCNIT

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。

■ 考虑这样来描述一个积性函数:

- 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
- 当n为质数的幂时, 即 $n = p^c Lc > 1$, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
- 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论幽

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

DE/20

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
 - 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
 - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
 - 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。
- $\varphi(n)$ ψ , G(p) = p 1, $T(p^c) = (p 1)p^{c-1}$.

数论函数选讲

任之洲

数论函

DE513

PE530

DEAA.

11 34 85

NIV.CNIT

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 DIVCNT3

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
 - 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
 - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
 - 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。

■
$$\varphi(n)$$
 ψ , $G(p) = p - 1$, $T(p^c) = (p - 1)p^{c-1}$.

■
$$\mu(n)$$
 中 , $G(p) = -1$, $T(p^c) = 0$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论幽

DEE13

PE530

PE441

杜粉絲

DIVICALE

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。

■ 考虑这样来描述一个积性函数:

- 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
- 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
- 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。
- $\varphi(n)$ ψ , G(p) = p 1, $T(p^c) = (p 1)p^{c-1}$.
- $\mu(n)$ 中 , G(p) = -1 , $T(p^c) = 0$ 。
- 当G(p)和 $T(p^c)$ 是项数比较少的关于 p, p^c 的多项式时怎么做?

数论函数选讲

任之洲

数论函 DEE10

PE512

DE441

. . .

杜教筛

DIVC

PE439

积性函数求和 G(p)的计算

DIVCNT3

一个简单的例子

定义一个欧拉函数的变种 $\phi(n,d)$,设 $n=\prod_{k=1}^{m}p_{k}^{c_{k}}$ 。其中 p_{k} 为互不相同的质因子($c_{k}>0$,即把n质因子分解),那么

$$\phi(n,d) = \prod_{k=1}^{m} (p_k^{c_k} + d)$$

特别地,定义 $\phi(1,d)=1$ 。 对于给定的n,d,求

$$\left(\sum_{i=1}^n \phi(i,d)\right) \mod 10^9 + 7$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

仁似

DIVCI

DE//30

积性函数求和

G(p)的针。 F(x)的针

DIVCNT3

$$G(p) = p+d$$

 $T(p^c) = p^c+d$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

PE530

DE///1

针粉盆

DIVCIV

DE....

积性函数求和

G(p)的計算 F(x)的計算

DIVCNT3

■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$

 $T(p^c) = p^c+d$

■ 对于一个正整数 $x(\leq n)$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

PE530

PE441

科粉節

DIVCN.

PE439

积性函数求和

G(p)的计算F(x)的计算

DIVCNT3

$$G(p) = p+d$$

 $T(p^c) = p^c+d$

- 对于一个正整数x(≤ n)。
 - 最多拥有一个> √n的质因子。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

科粉節

DIVCNT

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

$$G(p) = p+d$$

 $T(p^c) = p^c+d$

- 对于一个正整数x(≤ n)。
 - 最多拥有一个> √n的质因子。
 - 如果存在,则幂次一定为1。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

科粉篩

D. 1. (C.)

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

$$G(p) = p+d$$

 $T(p^c) = p^c+d$

- 对于一个正整数x(≤ n)。
 - 最多拥有一个> √n的质因子。
 - 如果存在,则幂次一定为1。
- 所以,有

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \wr f \uparrow f f \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{\frac{1}{2}}}} F(x) \left(1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

DEAA.

.. .. .

DIVCN

DE....

1 1439

积性函数求和

G(p)的针》 F(x)的针》

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \ x \wr f \setminus \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^+}} F(x) \left(1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

致化两

PE512

PE530

PE441

杜粉的

DIVC

PE43

积性函数求和

G(p)的计算F(x)的计算

DIVCNT:

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \exists n \ \text{the foliage}}} F(x) \left(1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

数论函数选讲

任之洲

数比的:

PE512

. 2000

PE441

杜教员

DIVCN

DE42

. L-13.

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNTS

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \wr q \uparrow \uparrow \uparrow f \sqrt{n} \notin \mathbb{B} f}} F(x) \left(1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

双化四

PE512

PE530

PE44:

科粉節

DIVCN

F L43

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \exists n \ \text{the foliage}}} F(x) \left(1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

$$\sum_{\substack{x \le n \\ x \ni x + x = f \text{ field } x^2}} F(x)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PF441

杜教师

DIVCNT

2...

DE420

积性函数求为 **G(p)的计算** F(x)的计算 ■ 需要对每种 | ⁿ/_x | 计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

杜教师

DIVCNT

积性函数求: G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

■ 需要对每种 | ⁿ/_x | 计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 相当于求≤ [n/x]的质数和及质数个数。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE513

DEES

DIVCIVI

积性函数求 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVONTS

■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DE512

DEE30

DE441

针粉鱼

DIVCNT

积性函数求

F(x)的计界

■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

■ 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。

数论函数选讲

任之洲

数论幽

PE512

PE530

PE441

杜粉質

DIVCNT

积性函数求 **G(p)的计算** F(x)的计算

DIVCN I

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设P_k[i][j]为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
 - 需要求的即为P₀[m][j]和P₁[m][j]。

数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

PE530

DE//1

11 14 15

_ .. . _ .

PE439

イバイエ 四 数 ネイ **G(p)**的計算 F(x)的計算

DIVCNI

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
 - 需要求的即为P₀[m][j]和P₁[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ p_i \end{bmatrix}$,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCN

DE/20

PE439

イス (王 1945) (元 イ **G(p) 的 计算** F(x) 的 计算

DIVCNT:

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
 - 需要求的即为P₀[m][j]和P₁[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ p_i \end{bmatrix}$,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

■ 即去掉1~j中还没有被筛掉的p;的倍数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCN

DE//30

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设P_k[i][j]为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
 - 需要求的即为P₀[m][j]和P₁[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ p_i \end{bmatrix}$,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 即去掉1~ j中还没有被筛掉的p;的倍数。
- 递推时只需要计算[n/x]这些状态就能完成转移。

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $< \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

- 设P_k[i][j]为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之 和。
 - 需要求的即为P₀[m][j]和P₁[m][j]。
- 设/= | 1 | , 容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 即去掉1~ j中还没有被筛掉的p;的倍数。
- 递推时只需要计算 [2] 这些状态就能完成转移。
- 递推完成后,也就计算出了我们需要所有值。

数论函数选讲

任之洲

XX 10 D

PE512

PF530

___.

_

2...

积性函数求

F(x)的计算

DIVUNTS

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

数论函数选讲

任之洲

火炬的

F L312

PE530

PE441

杜教师

DIVCNT

积性函数求: G(p)的计算

DIVCNT3

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

■ 考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 考虑对于每个| □ | 计算有多少质数需要转移。
 - 设质数密度为O(¹/_{log n})。

数论函数选讲

数论函 PF512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

J., C., .

积性函数求: G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 考虑对于每个| 门 | 计算有多少质数需要转移。
 - 设质数密度为 $O(\frac{1}{\log n})$ 。
 - 那么计算量可估计为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \approx O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

DE530

___.

DIVCIVI

积性函数求 G(p)的计算

F(x)的计算

DIVCNT3

 \blacksquare 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

DEESU

. _---

_ .. . _ . .

积性函数求 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCN 13

- 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。
- 所以,当 $p_i^2 > j \ge p_i$ 时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 当 $p_{i+1} > i$ 时,一定满足 $P_{k}[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当p_i² > i > p_i时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

■ 因此,不必重新计算p;² > j的情况。

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_{k}[i][i] = 1$ 。

■ 所以, 当p_i² > i > p_i时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此, 不必重新计算p;² > j的情况。
 - 记录/最近一次被更新时的/的值,设为pre;。

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 当 $p_{i+1} > i$ 时,一定满足 $P_{k}[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当 p;² > i > p;时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算p;² > j的情况。
 - 记录/最近一次被更新时的/的值,设为pre;。
 - 在调用P_k[i][j]时,将编号pre;+1~i间的质数计入。

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PF512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNI

PF430

积性函数求和 **G(p)的计算** F(x)的计算 DIVCNT3

- 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。
- 所以,当 $p_i^2 > j \ge p_i$ 时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算 $p_i^2 > j$ 的情况。
 - 记录j最近一次被更新时的i的值,设为prej。
 - 在调用 $P_k[i][j]$ 时,将编号 $pre_j + 1 \sim i$ 间的质数计入。
- 考虑对于每个[n/]计算有多少质数需要转移。

数论函数选讲

G(p)的计算

■ 当 $p_{i+1} > i$ 时,一定满足 $P_{k}[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当p;² > i > p;时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算p;² > j的情况。
 - 记录/最近一次被更新时的/的值,设为pre;。
 - 在调用P_k[i][j]时,将编号pre;+1~i间的质数计入。
- 考虑对于每个| つ| 计算有多少质数需要转移。
 - 那么计算量可估计为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\sqrt{i}}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \sqrt{\frac{n}{i}} \rfloor}{\log n} \approx O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

双印

PE512

DEESC

DE441

DIV (CNI

积性函数求和 G(n)的计算

F(x)的计算

■ 需要对每种[n/x]计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not = f \downarrow f \sqrt{n} \notin B \not = f}} F(x)$$

数论函数选讲

数论函

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 需要对每种 | □ | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \in \Lambda \neq \sqrt{n} \notin B \neq 7}} F(x)$$

■ 由于[元]值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用[元]来表示状态。

数论函数选讲

任之洲

双阳的

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT:

■ 需要对每种 | º | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x$$
没有大于 \sqrt{n} 质因子

- 由于 $\left[\frac{n}{x}\right]$ 值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用 $\left[\frac{n}{x}\right]$ 来表示状态。
 - * 状态数 O(√n)。

数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

■ 需要对每种 | ⁿ/_x | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \in \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x)$$

- 由于 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用 $\lfloor \frac{n}{y} \rfloor$ 来表示状态。
 - 状态数O(√n)。
 - 设 $y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$, 那么转 $8x \to xp$, 等价于 $y \to \lfloor \frac{y}{p} \rfloor$.

数论函数选讲

数论函。 DE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 需要对每种 | □ | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \exists f \downarrow f \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x)$$

- 由于[元]值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用[元]来表示状态。
 - 状态数 O(√n)。
 - $y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$, 那么转移 $x \to xp$, 等价于 $y \to \lfloor \frac{y}{p} \rfloor$.
- 枚举每一个不超过√n的质数进行转移。

数论函数选讲

任之洲

双比四

PE512

DEFAC

. -..

杜教》

DIVCNT

积性函数求利

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVICINTO

■同样考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。

数论函数选讲

任之洲

奴化四分

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

积性函数求 G(p)的计算

F(x)的計算 DIVCNT3

- 同样考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。
 - 转移时需要枚举这种质因子的幂次,看上去计算量是这 样的

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} \log i + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \log n \approx O(n)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE530

PF441

杜教筛

DIVCNT2

DE//30

积性函数求未 G(p)的计算 F(x)的计算 DIVCNT3

- 同样考虑对于每个[n/]计算有多少质数需要转移。
 - 转移时需要枚举这种质因子的幂次,看上去计算量是这 样的

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} \log i + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \log n \approx O(n)$$

■ 考虑有哪些质因子贡献1次、2次、3次...

$$h(n) = \sum_{2 \le i \le \log n} \lfloor n^{\frac{1}{i}} \rfloor \approx O(\sqrt{n})$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i + h(i)}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor + h(\frac{n}{i})}{\log n} \approx O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数 论 幽 多

DEE13

DEESU

杜教》

DIVCNT

积性函数求和 G(n)的计算

F(x)的计算

DIVCNT3

■回想前一部分是如何优化的。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

DEFO

F L44

仁似

DIVCNT

PE439

G(p)的计算

· (x)-2-191

■回想前一部分是如何优化的。

■ 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 时的运算。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE510

DEESO

___.

. . .

DIVCNI

积性函数求: G(p)的计算

1 (X) 100 11 FF

■ 回想前一部分是如何优化的。

■ 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 时的运算。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE///1

L1 347 A4

DIV (CNIT

PE439

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNIS

- 回想前一部分是如何优化的。
- 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{v} \rfloor$ 时的运算。
 - $p_i^2 > y \Rightarrow \lfloor \frac{y}{p_i} \rfloor < p_i \leq \sqrt{n}_{\circ}$
 - 当 $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \leq \sqrt{n}$ 时

$$1+\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

F(x)的计算

■ 回想前一部分是如何优化的。

- 考虑如何省去 $p_i^2 > y = |\frac{n}{v}|$ 时的运算。
 - $p_i^2 > y \Rightarrow \lfloor \frac{y}{p_i} \rfloor < p_i \leq \sqrt{n}$.
 - 当 | ⁿ/₂ | ≤ √n 时

$$1+\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 于是不需要区分转移后的[½]具体是多少, 只要计算对 应的质数和累计入答案即可。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEFO

DE441

DIVCIVI.

积性函数求和

F(x)的计算

DIVCIVI.

■ 同样考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。

$$h(n) = \sum_{2 \le i \le \log n} \lfloor n^{\frac{1}{i}} \rfloor \approx O(\sqrt{n})$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{h(i)}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{h(\frac{n}{i})}{\log n} \approx O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$$

Counting Divisors (cube) SPOJ DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE53

PE44

杜教筛

DIVCNT

积性函数求和

DIVCNT3

题目大意

设 $\sigma_0(n)$ 为n的约数个数,

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^3)$$

求 $S_3(n)$ 。

数据范围

 $1 \le n \le 10^{11}$, 20s, 1536MB.

Counting Divisors (cube) SPOJ DIVENT3

数论函数选讲

任之洲

数论的:

PE512

PE530

PE44

44 abs 3

DIVICINT

DIVCIVIZ

(-11 7 M 1 /

DIVCNT3

■ 设
$$F(n) = \sigma_0(n^3)$$
, 那么

$$G(p) = 4$$

$$T(p^c) = 3c + 1$$

Counting Divisors (cube) SPOJ DIVENT3

数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

DEESU

DE444

DIVCNT:

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设 $F(n) = \sigma_0(n^3)$, 那么

$$G(p) = 4$$

$$T(p^c) = 3c + 1$$

■ 可以直接计算,复杂度 $O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$ 。

To Be Continued

仑函数选讲

任之洲

数论函数

DEESU

DE441

DIVCNT2

DE420

积性函数求和

DIVCNT3



id=31433449

Graph Factorization

Andrew Stankevich Contest 35 F

ASC选讲

任之洲

ASC35F

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

题目大意

对于一张2n个点的无向完全图G。

要求将其拆为m个边集不相交的子图,其中第i张子图的每个点的度数都必须恰好为ai。

构造一组可行解。

数据范围

$$n \le 100$$
, $m \le 2n - 1$, $\sum a_i = 2n - 1$

Graph Factorization

Andrew Stankevich Contest 35 F

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D

ASC24E ASC35H

题目大意

对于一张2n个点的无向完全图G。

要求将其拆为m个边集不相交的子图,其中第i张子图的每个点的度数都必须恰好为ai。

构造一组可行解。

数据范围

$$n \le 100, m \le 2n - 1, \sum a_i = 2n - 1$$

■ 由于m可以取到2n-1, 所以问题等价于a; = 1。

ASC选讲

任之洲

ASC35F

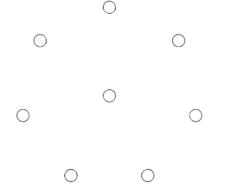
ASC45

ASC47E

ASC24E

A C C SEL

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35F

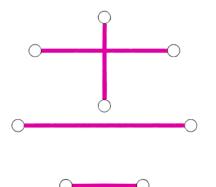
A C C 47F

A3C24E

ASC351

ASC451

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC351

ASC45

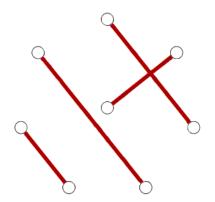
ASC47[

ASC24E

ASC351

A C C 4 E

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35I

.

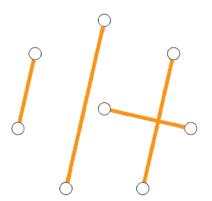
ΔSC47[

A3C24L

ASC351

ASC AEI

.



ASC选讲

任之洲

ASC35F

ASC45[

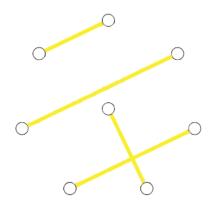
ASC47E

ASC24E

VZC3EF

A3C431

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35F

ASC451

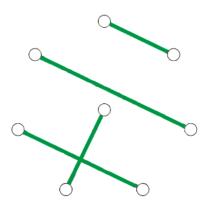
ASC47L

ASC24E

ASC35I

ASC45

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35I

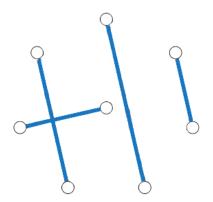
A3C43L

A3C24L

ASCSSI

ASC45

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35I

ASC45

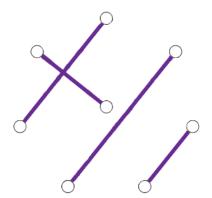
ASC47

ASC24E

ASC35I

V C C V E

ASC18



ASC选讲

任之洲

ASC35

.

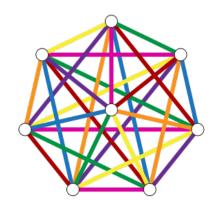
ASC 471

ASC35

ASC45

ASC18

■ 最终整张图会被划分成这样, 问题解决。



Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

ASC35F
ASC45D
ASC47D
ASC24E
ASC35H

题目大意

构造一张n个点的图,除了点n-1和点n外均有两条出边。 一开始的位置在点1,每次等概率选择一条出边走,最终必须 到达n-1或n,并且到n-1的概率为 $\frac{D}{q}$ 。

数据范围

$$1 \le p < q \le 100$$
 要求构造出的 $n \le 1000$

Drunkard's Walk

Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC35I

A C C A E F

ΛS*C*47Γ

A C C 2 4 1

.

ASC18

■ 构造一条q+1个点的链

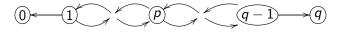


Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ■ 构造一条q+1个点的链



■ 起点设为p, 两个终点分别为0和q。

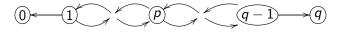
Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC35F
ASC45D
ASC47D
ASC24E
ASC35H
ASC45H

■ 构造一条q+1个点的链



- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 g_i 。

Drunkard's Walk

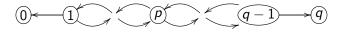
Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC35F
ASC45D
ASC47D
ASC24E
ASC35H
ASC45H

■ 构造一条q+1个点的链



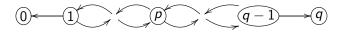
- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 g_i 。
- ■那么有

$$g_i = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{2}$$

任之洲

ASC35F
ASC45D
ASC47D
ASC24E
ASC35H
ASC45H

■ 构造一条q+1个点的链



- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 g_i 。
- ■那么有

$$g_i = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{2}$$

■ 易得 $g_i = \frac{i}{a}$, $g_p = \frac{p}{a}$, 问题解决。

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

题目大意

给出一个长度为n的串,要求构造两个的DFA自动机。

- 状态数不超过n+1。
- 1为起始态,可以自由确定若干接收态。
- 对于字符集(小写字母)中的每种字符都有对应转移。
- 这两个DFA自动机能接受的串的集合的交为给定串。

数据范围

$$1 \le n \le 50$$

ASC选计

任之洲

ASC35

ASC451

ASC471

, ...

A3C2+1

VCCSEI

ASC45I

ASC18

■ 为了帮助理解题意,再给出一些说明。

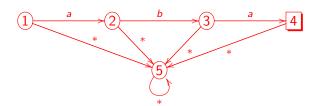
ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E

ASC24E ASC35H ASC45H

- 为了帮助理解题意,再给出一些说明。
- 容易构造一个状态数为n+2的DFA自动机使得它只能接收给定的串。

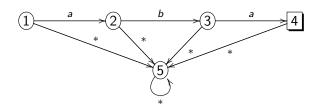


ASC选讲

任之洲

ASC35F
ASC45D
ASC47D
ASC24E
ASC35H
ASC45H

- 为了帮助理解题意,再给出一些说明。
- 容易构造一个状态数为n+2的DFA自动机使得它只能接收给定的串。



■ 整个串由同一种字符构成时, 无解。

ASC选讲

任之洲

ASC451

ΔSC47Γ

A3C411

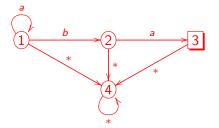
ASC24E

ASC35I

ASC45

ASC18

■ 可以构造出一个点数不超过n+1的DFA来接收将串首字符无限复制的串集。

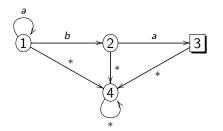


ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D

ASC24E ASC35H ■ 可以构造出一个点数不超过n+1的DFA来接收将串首字符无限复制的串集。



■ 同理可以对串尾字符构造,将这个两个DFA取交即为给 定串。

Andrew Stankevich Contest 24 E

要求还原一个合法的排列a。

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

题目大意

对于一个 $1 \sim n$ 的排列a,定义a/i为在该排列中去掉i后,剩下数相对大小和位置不变构成一个 $1 \sim n-1$ 的排列。 如(1,3,5,2,6,4)/2=(1,2,4,5,3)。 所有 $1 \leq i \leq n$ 的a/i顺序打乱后给出。

数据范围

$$5 \le n \le 300$$

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC45D

ASC24

A3C331

ASC18

■ 移除一个*i*(≥2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 移除一个*i*(≥2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
 - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

- 移除一个 $i(\ge 2)$ 后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
 - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

- 移除一个 $i(\ge 2)$ 后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
 - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。
 - 用hash判断是否和输入符合。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

- 移除一个*i*(≥2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
 - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。
 - 用hash判断是否和输入符合。
- 复杂度O(n³)

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

题目大意

给出两个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列A,B,长度为n,m。 求出一个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列C,使得C既不是A的子序列也不是B的子序列。

要求输出一个最小长度的可行方案。

数据范围

 $n, m, k \le 5000$

ASC选进

任之洲

ASCSSI

ASC451

ASC47

ASC24

ASC351

ASC45I

ASC18

■ 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45E

A3C41L

A3C2+1

A5C351

ASC45l

- 对于一个已知数列, 如何判断它是否是A, B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。

ASC选计

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。

ASC选计

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA_{i,c}为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。

ASC选计

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA_{i,c}为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
 - 这个数组可以O(nk)递推得到。

ASC选讲

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA_{i.c}为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
 - 这个数组可以O(nk)递推得到。
 - 对于一个i, $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。

ASC35F

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA_{i.c}为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
 - 这个数组可以O(nk)递推得到。
 - 对于一个i, $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。
 - 一定能找到一个c, 使得c下次出现在k个位置之后。

ASC35F ASC45D

ASC47D ASC24E ASC35H

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
 - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA_{i,c}为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
 - 这个数组可以O(nk)递推得到。
 - 对于一个i, $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。
 - 一定能找到一个c,使得c下次出现在k个位置之后。
- 可以贪心每次选择一个在A, B中下次出现最靠后的数放到 C末端, 所以答案在 O(\(\frac{n+m}{4}\))范围内。

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45E

ASC47[

ASC24

ASC351

ASC45I

■ 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。

ASC选计

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D

ASC24E

ASC35H

A C C 1 O

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
 - 可以O(k)枚举下一个位置的数。

ASC选计

任之洲

ASC35F ASC45E ASC47E

ASC24E

ASC35H

ASC45I

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
 - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
 - 利用nextA_{i,c}和nextB_{i,c}转移。

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
 - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
 - 利用nextA_{i,c}和nextB_{i,c}转移。
- 这一部分的复杂度为

$$O(|C_{ans}|nk) \le O(\frac{n+m}{k}nk) = O((n+m)n)$$

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
 - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
 - 利用nextA_{i,c}和nextB_{i,c}转移。
- 这一部分的复杂度为

$$O(|C_{ans}|nk) \le O(\frac{n+m}{k}nk) = O((n+m)n)$$

■ 时间复杂度O((n+m)k+(n+m)n)

Hide and Seek

Andrew Stankevich Contest 45 H

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E

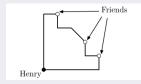
ASC45H

题目大意

给出一个n个点的多边形。

- 1号点所在的角是凸的,即两边多边形内部夹角< 180°。
- 1号点能在多边形内部看见其他所有点。

求一个最大的顶点集合, 使得点集中的点两两不可见。



数据范围

$$3 \le n \le 500, -10^5 \le x_i, y_i \le 10^5$$

Hide and Seek Andrew Stankevich Contest 45 H

■ 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。

Hide and Seek

Andrew Stankevich Contest 45 H

ASC选讲

任之洲

ASC351

.

A C C 475

A3C241

ASC351

ASC451

ASC18

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
 - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。

任之洲

ASC351

A3C431

A3C24L

ASCSSI

ASC451

ASC18

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
 - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
 - 假设选择了点1,设点1能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

任之洲

ASC35F

ASC47D

ASC24E

ASC35I

ASC45H

ASC18

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
 - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
 - 假设选择了点/, 设点/能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

■ 可以参考下图



任之洲

ASC35F ASC45E

ASC47D

ASC24E

ASC351

ASC45H

ASC18

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
 - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
 - 假设选择了点1,设点/能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

■ 可以参考下图



■ 时间复杂度O(n³)或O(n²)

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H

ASC18I

题目大意

给出一个 $1 \sim k$ 的排列B,求有多少 $1 \sim n$ 的排列A满足

- B是A子序列。
- lacksquare $A_{A_i} = i \circ$

数据范围

$$1 \le k \le n \le 200$$
, $B_i \le k$

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F

ASC47[

A3C2+1

.

.00.0

■ 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F ASC45E

ASC47D

ASC24E

A3C331

- 因为B是A的子序列,设A_{bi} = B_i,那么A_{Bi} = b_i。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bj}。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bj}。
- 枚举 $0 \le m \le k$, 强制对于 $i \le m$ 满足 $A_{B_i} \le k$ 。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
 对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举 $0 \le m \le k$, 强制对于 $i \le m$ 满足 $A_{B_i} \le k$ 。
 - 对于i > m满足A_{Bi} > k。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
 对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0≤m≤k,强制对于i≤m满足A_{Bi}≤k。
 对于i>m满足A_{Bi}>k。
- 对于*i* > m的那些B_i,需要将b_i填入A_{Bi}。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选访

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
 对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0≤m≤k,强制对于i≤m满足A_{Bi}≤k。
 对于i>m满足A_{Bi}>k。
- 对于i > m的那些B_i,需要将b_i填入A_{B_i}。
- 剩下的位置必须将i ≤ m的Bi依次填入。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选讲

任之洲

ASC45D ASC47D ASC24E ASC35H ASC45H

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
 对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0≤m≤k,强制对于i≤m满足A_{Bi}≤k。
 对于i>m满足A_{Bi}>k。
- 对于i > m的那些B_i,需要将b_i填入A_{B_i}。
- 剩下的位置必须将 $i \leq m$ 的 B_i 依次填入。
 - 方案是唯一的。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

.

ACC471

A3C471

ASC24I

ASC35I

ΔSC451

ASC18I

■ 考虑i > m的这些A_{Bi}, 这些A_{Bi} > k。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F

ASC/15

ΔSC471

ASC241

ASC35

ASC451

- 考虑i > m的这些 A_{B_i} ,这些 $A_{B_i} > k$ 。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bj}。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35

ASC45

ASC47I

ASC24E

A3C33

ASC45

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bj}。
 - 方案数为(n-k)。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F

ASC47E

ASC24F

,

ASC451

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bi}。
 - 方案数为(n-k) k-m)。
- 考虑i > k且 $A_i > k$ 的那些位置,共有n k m个位置。

ASC选计

任之洲

ASC45E

ASC24E

ASC45H

ASC18I

■ 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。

- 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bi}。
- 方案数为(n-k),
- 考虑i > k且A_i > k的那些位置,共有n-k-m个位置。
 - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

ASC选讲

ASC18I

- 考虑i > m的这些A_{Bi}, 这些A_{Bi} > k。
 - 对于*i* < *j*,一定满足A_B < A_B。
 - 方案数为(^{n-k}/_t)。
- 考虑i > k且 $A_i > k$ 的那些位置,共有n k m个位置。
 - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

■ 至此, 已经完成了所有计算, 只需要枚举m判断后累 $m\binom{n-k}{k}f_{n-m-k}$ 即可。

ASC选讲

任之洲

ASC35F ASC45D ASC47D ASC24E

ASC35F ASC45F ASC18I

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
 - 对于i < j, 一定满足A_{Bi} < A_{Bj}。
 - 方案数为(n-k)。
- 考虑i > k且Ai > k的那些位置,共有n-k-m个位置。
 - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

- 至此,已经完成了所有计算,只需要枚举m判断后累 $m\binom{n-k}{k-m}f_{n-m-k}$ 即可。
- 复杂度 O(n+m²)。

祝大家省选顺利!

ASC选讲

任之洲

ASC35F

7.00.112

ASC24E

ASC35F

VECVE

ASC18



id=44130600