题目选讲

Wearry

Dec 21, 2017

长跑

有一张 N 个点的无向图，每个点有一个点权，现在进行 M 次操作：

- 1 a b 在 a，b 两点之间连一条边
- 2 a b 将点 a 的点权改为 b
- 3 a b 问将所有已有的边任意定向后，从 a 到达 b 经过的点权和最大的路径 (重复经过的点不计算多次点权) 如果无法到达则输出 -1

$N, M \leq 100000$

长跑

- 首先考虑怎样定向
- 那么一定至少需要一条链能够从 a 到达 b
- 对于链之外的点，则需要形成环才能够绕回主链上
- 于是不难发现当边形成环时，可以马上将环上的点缩起来，而且不会影响其他点的联通情况

长跑

解法一 (离线做法)

- 我们可以使用并查集维护每个点所在的联通环标号
- 每次连边时，直接将 a，b 到它们 lca 的路径上的点合并起来，然后将这些点的点权加到所在环的点权中，并清零
- 这样需要离线地将树的形态建出来
- 使用树状数组可以做到复杂度 $O(n\,logn)$

长跑

解法一 (离线做法)

- 我们可以使用并查集维护每个点所在的联通环标号
- 每次连边时，直接将 a，b 到它们 lca 的路径上的点合并起来，然后将这些点的点权加到所在环的点权中，并清零
- 这样需要离线地将树的形态建出来
- 使用树状数组可以做到复杂度 $O(n\,logn)$

解法二 (在线做法)

- 其实这个东西还可以用 LCT 维护
- 主体合并的过程思路都差不多，只是在 $access$ 的时候加入并查集的操作即可

Good 01-Sequence

如果一个 01 串的逆序对数量为奇数，则称它是一个好串。
如果 s 可以写成 $t_1t_2\ldots t_k$，且 t_i 都是好串，则称 k 是合法的:
定义 $f(s)$ 为合法的最小的 k；特别地，如果不存在合法的 k，$f(s)=0$。
给出长为 N 的 01 串 s。
计算它的 2^N-1 个非空子序列的 f 之和，对 10^9+7 取模。
$N \leq 100000$

Good 01-Sequence

不妨考虑 k 最小时 s 的表示：

$$t_1t_2\ldots t_k$$

假设其中每一段 1 和 0 的个数的奇偶性分别为 O_i, Z_i，因为 k 最小，所以不能存在 $L < R$，使得 t_L 到 t_R 之间的串合并后成为一个好串。

Good 01-Sequence

不妨考虑 k 最小时 s 的表示：

$$t_1 t_2 \dots t_k$$

假设其中每一段 1 和 0 的个数的奇偶性分别为 O_i, Z_i，因为 k 最小，所以不能存在 $L < R$，使得 t_L 到 t_R 之间的串合并后成为一个好串。
即：

$$O_1 Z_2 = 0,\ O_2 Z_3 = 0,\ O_1(Z_2 + Z_3) + O_2 Z_3 = 1$$
$$\Rightarrow O_1 Z_2 = 0,\ O_1 Z_3 = 1$$
$$\Rightarrow O_1 = 1,\ Z_2 = 0,\ Z_3 = 1$$

同理：

$$O_2 = 1, Z_3 = 0, Z_4 = 1$$

矛盾，于是发现这样的 k 不大于 3。

Good 01-Sequence

这样问题就变得简单了，考虑使用 dp 套 dp 来解决这个问题。
记录当前的段数，以及当前段中的 1 的个数和逆序对个数的奇偶性。
在外层的 dp 中，记录可能的分段状态集合，就能快速计算最小段数了。

Color

有 N 个球，共 C 种不同的颜色。
每次操作等概率地取出两个球 a, b，然后将 b 球染成 a 球的颜色。
求最后所有球都变成同种颜色的期望步数，精度误差 10^{-9}。
$N \leq 10^{10}, C \leq 10^5$

Color

直接考虑所有的颜色显然是不太好处理的，不妨对于每种颜色分开算贡献。
将某种颜色定为 1，然后将其它颜色定为 0，计算最后全为 1 的期望。
这样子状态就只与 1 的个数相关了，定义：

$$a_i = \frac{i(n-i)}{n(n-1)}$$

$$b_i = 1 - 2a_i$$

一个比较直观的想法就是：

$$f_i = a_i(f_{i-1} + f_{i+1}) + b_i f_i + 1$$

Color

但是这样是错误的。原因在于我们要计算的是当前颜色的贡献，而当前状态下进行的转移可能无法到达最终状态 f_n。
我们还要考虑到当前状态能够到达 f_n 的概率 p_i, 正确的式子是:

$$f_i = a_i(f_{i-1} + f_{i+1}) + b_i f_i + p_i$$

Color

但是这样是错误的。原因在于我们要计算的是当前颜色的贡献，而当前状态下进行的转移可能无法到达最终状态 f_n。
我们还要考虑到当前状态能够到达 f_n 的概率 p_i，正确的式子是：

$$f_i = a_i(f_{i-1} + f_{i+1}) + b_i f_i + p_i$$

有 $p_0 = 0, p_n = 1$，所以：

$$\begin{aligned} p_i &= a_i(p_{i-1} + p_{i+1}) + b_i p_i \\ &= \frac{p_{i-1} + p_{i+1}}{2} \\ &= \frac{i}{n} \end{aligned}$$

Color

化简:

$$
\begin{aligned}
f_i &= a_i(f_{i-1} + f_{i+1}) + b_i f_i + p_i \\
(1 - b_i)f_i &= a_i(f_{i-1} + f_{i+1}) + \frac{i}{n} \\
f_i &= \frac{f_{i-1} + f_{i+1} + \frac{n-1}{n-i}}{2} \\
2f_i &= f_{i-1} + f_{i+1} + \frac{n-1}{n-i} \\
f_{i+1} &= 2f_i - f_{i-1} - \frac{n-1}{n-i}
\end{aligned}
$$

Color

可以线性递推了？计算边界值！

$$
\begin{aligned}
f_2 &= 2f_1 - f_0 - \frac{n-1}{n-1} \\
f_3 &= 2f_2 - f_1 - \frac{n-1}{n-2} \\
&= 3f_1 - 2\frac{n-1}{n-1} - \frac{n-1}{n-2} \\
\cdots \\
f_n &= nf_1 - (n-1)\frac{n-1}{n-1} - (n-2)\frac{n-1}{n-2} \cdots - \frac{n-1}{1} \\
f_1 &= \frac{f_n + (n-1)^2}{n} \\
&= \frac{(n-1)^2}{n}
\end{aligned}
$$

Color

这样还不能通过 $N \le 10^{10}$ 的数据范围，考虑继续化简：

$$f_{i+1} = 2f_i - f_{i-1} - \frac{n-1}{n-i}$$

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} - \frac{n-1}{n-i}$$

$$f_{i+1} - f_i = f_1 - f_0 - \sum_{k=1}^{i} \frac{n-1}{n-k}$$

Color

这样还不能通过 $N \le 10^{10}$ 的数据范围，考虑继续化简：

$$f_{i+1} = 2f_i - f_{i-1} - \frac{n-1}{n-i}$$

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} - \frac{n-1}{n-i}$$

$$f_{i+1} - f_i = f_1 - f_0 - \sum_{k=1}^{i} \frac{n-1}{n-k}$$

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= (i+1)f_1 - \sum_{j=0}^{i}\sum_{k=1}^{j} \frac{n-1}{n-k} \\ &= (i+1)\frac{(n-1)^2}{n} - \sum_{k=1}^{i}(i+1-k)\frac{n-1}{n-k} \end{aligned}$$

Color

接下来考虑如何计算 $\sum_{k=1}^{i}(i+1-k)\frac{n-1}{n-k}$：

$$
\begin{aligned}
g_{i+1} &= \sum_{k=1}^{i}(i+1-k)\frac{n-1}{n-k} \\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{i}(i+1-k)\frac{1}{n-k} \\
&= (n-1)[(i+1)\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n-k} - \sum_{k=1}^{i}\frac{k}{n-k}] \\
&= (n-1)[(i+1)\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n-k} - \sum_{k=1}^{i}\frac{n-(n-k)}{n-k}] \\
&= (n-1)[(i+1-n)\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{n-k} + i]
\end{aligned}
$$

带 $\sum$ 的项其实就是调和级数，能够快速求出精度范围内很好的近似。

谢谢大家