1 GCD 7

1.1 第一步

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}d(xy)\\
=&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]
\end{aligned}
$$

证明：

设

$$xy=p_1^{r_{x_1}+r_{y_1}}\times p_2^{r_{x_2}+r_{y_2}}\times\cdots\times p_k^{r_{x_k}+r_{y_k}}$$

有：

$$d(xy)=(r_{x_1}+r_{y_1}+1)\times(r_{x_2}+r_{y_2}+1)\times\cdots\times(r_{x_k}+r_{y_k}+1)$$

若要有 $\gcd(x,y)=1$，则对于某个质因数 p_i，必有 $r_{x_i}=0$ 或 $r_{y_i}=0$，或两者同时满足。依次考虑每个质因数：若 $r_{x_i}\neq 0$，则有 r_{x_i} 种情况；若 $r_{y_i}\neq 0$，则有 r_{y_i} 种情况；都为 0 时只有一种情况。当我们使用乘法原理将各情况合并起来时，原命题得证。

为什么会想到这一步转换，我也不知道。考虑到这道题的重点还是莫比乌斯反演，所以就暂时不要纠结为什么第一步会想到这个了。

1.2 第二步

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]\\
=&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)
\end{aligned}
$$

众所周知，$d\mid\gcd(i,j)$ 等价于 $d\mid i$ 且 $d\mid j$。

$$=\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{x=1,i|x}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{y=1,j|y}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}1$$

上一步的意思是，在最外面枚举 d，然后从内到外考虑贡献。考虑贡献时，首先考虑 i 和 j，再结合 i 和 j 考虑 x 和 y。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d=1} \mu(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{id} \right\rfloor} \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{m}{jd} \right\rfloor} 1 \\
&= \sum_{d=1} \mu(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} \left(\left(\sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{id} \right\rfloor} 1 \right) \left(\sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{m}{jd} \right\rfloor} 1 \right) \right) \\
&= \sum_{d=1} \mu(d) \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{id} \right\rfloor} 1 \right) \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} \sum_{y=1}^{\left\lfloor \frac{m}{jd} \right\rfloor} 1 \right)
\end{aligned}
$$

以上变换可以有一般性的证明。

$$
= \sum_{d=1} \mu(d) \left(\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}{i} \right\rfloor \right) \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor}{i} \right\rfloor \right)
$$

用 $O(n\sqrt{n})$ 的时间复杂度内预处理

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}
$$

单次查询的时间复杂度为 $O(\sqrt{n})$。