首先容斥一下, 发现就是要求

$$\begin{aligned}ans &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{s}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{j-ti-1}{m-1}[j-ti-1\ge 0]\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{s-ti}{m}\end{aligned}$$

看见 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(i)$, 想到 n 阶前向差分的这个公式:

$$\Delta^n[f](x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(x+i)$$

利用这个, 设 $f(x)=\binom{s-tx}{m}$, 则

$$\begin{aligned}(-1)^n ans &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{s-ti}{m}\\ &= \Delta^n[f](0)\end{aligned}$$

已经将答案表示为一个函数 f 的差分后, 尝试将 f 转化为 $\sum_{i=0}^{m} b_i\binom{x}{i}$ 的表达形式. 因为有这么个式子

$$\Delta^n[f](x) = \sum_{i=0}^{m}\binom{x}{i-n}b_i$$

然后就变成这样了:

$$\Delta^n[f](0) = b_n$$

这里由于 $f(x)=\binom{s-tx}{m}=\frac{1}{m!}(s-xt)^{\underline{m}}$, 可以先用第一类 Stirling 数将下降幂转为通常幂, 也就是平时常用的那种系数表示; 再用第二类 Stirling 数将通常幂转为下降幂, 再转为组合数. 之所以要这么做, 是为了消去下降幂里的东西, 只留下一个 x.

经过一系列无聊的转化

$$b_n = \sum_{j=n}^{m}\begin{Bmatrix}j\\n\end{Bmatrix}\frac{n!}{m!}\sum_{i=j}^{m}(-1)^{m-i+j}\begin{bmatrix}m\\i\end{bmatrix}\binom{i}{j}s^{i-j}t^j$$

然后问题就在于如何快速求出第一类第二类 Stirling 数 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix},\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}$, 满足 $n-k\le 1000$. 这个要从组合意义入手, 以第二类 Stirling 数为例.

容易发现一个重要的性质: 大小超过 2 的集合的个数不超过 $n-k$ 个.

然后, 设 $f(i,j)$ 表示将 i 个元素划分为 j 个大小 ≥ 2 的集合的方案数.

不妨枚举有 i 个集合的大小 ≥ 2, 有

$$\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{n-k+i}f(n-k+i,i)$$

(这里相当于 choose 有哪些元素是包含在大小 ≥ 2 的集合里面的)

至于 f, 也是很好递推的, 跟 Stirling 数的递推式类似

$$f(i,j) = f(i-1,j)j + f(i-2,j-1)(i-1)$$