题目选讲

by XZK

注：由于制作者水平有限，可能会出现错误，还请大家多多包涵
使用的所有素材均来自网络
公式很丑，注意保护眼睛

清橙A1210. 光棱坦克

- 一个平面直角坐标系上，有N个点，标号为1到N，其中第i个点的坐标为(x[i], y[i])。
- 求满足以下两个条件的点列{p[i]}的数目(假设{p[i]}的长度为M)
- 1) 对任意1 <= i < j <= M，必有y[p[i]] > y[p[j]]；
- 2) 对任意3 <= i <= M，必有x[p[i-1]] < x[p[i]] < x[p[i-2]]或者x[p[i-2]] < x[p[i]] < x[p[i-1]]。
- 求满足条件的非空序列{p[i]}的数目，结果对一个整数Q取模。
- n<=7000,保证有当i != j时，有x[i] != x[j]且y[i] != y[j]。

清橙A1210. 光棱坦克

- 先将所有点按横坐标从小到大排序。
- 设dp[i][j][0/1]代表只考虑前i个点，以第j个点为起点，且下一个点在第j个点的左边/右边的方案数。
- 对于每个i，从右往左考虑之前的每个点：
- 如果这个点在i号点的上面，就用i号点的dp值更新这个点的；
- 如果这个点在i号点的下面，就用这个点的dp值更新i号点的。
- 可以滚动数组。
- 复杂度O(n^2)，常数很小。

清橙A1304. sine

- 定义f(m,n,x)为：

$$\sum_{\substack{K_1+K_2+\ldots+K_m=n \\ K_1,\ldots,K_m\in N}} \sin(K_1x)\times\sin(K_2x)\times\ldots\times\sin(K_mx)$$

- 给定m,n,x,求f(m,n,x),与答案误差不超过0.01时视为正确。
- T组数据， T<=300,m<=30,n<=10^9,0<=x<=6.283
- 时限1s,内存64M

清橙A1304. sine

- 定义g(m,n,x)为：

$$\sum_{\substack{K_1+K_2+\ldots+K_m=n \\ K_1,\ldots,K_m\in N}} \sin(K_1x)\times\sin(K_2x)\times\ldots\times\cos(K_mx)$$

- 定义h(n,m,x)为：

$$\sum_{\substack{K_1+K_2+\ldots+K_m=n \\ K_1,\ldots,K_m\in N}} \cos(K_1x)\times\sin(K_2x)\times\ldots\times\cos(K_mx)$$

清橙A1304. sine

- 考虑折半。当n为偶数时，分一下几种情况：
- f(m,n,x):
- 1、折半的位置在两个函数中间
- 2、折半的位置在某个函数内部
- g(m,n,x):
- 1、折半的位置在两个函数中间
- 2、折半的位置在某个sin函数内部
- 3、折半的位置在cos函数内部

清橙A1304. sine

- h(m,n,x):
- 1、折半的位置在两个函数中间
- 2、折半的位置在某个sin函数内部
- 3、折半的位置在开头或结尾的cos函数内部。
- 注意到
- cos(x+y)=cos(x)*cos(y)-sin(x)*sin(y);
- sin(x+y)=sin(x)*cos(y)+sin(y)*cos(x).
- 这样就可以在函数间方便地合并，复杂度$O(m^2*\log_2 n)$

Jason曾不想做的数论题

- 给定n,m,求：

$$\prod_{X\in S} lcm(X_1, X_2, ..., X_n)^{\gcd(X_1, X_2, ..., X_n)}$$

- 其中X是一个序列，S是所有满足长度为n，且∀1<=i<=n   Xi∈[1,m]的序列的集合。显然，有m^n种序列。
- 答案对1e9+7取模，n<=1e9,m<=1e8
- 时间限制9s,空间限制1024M

Jason曾不想做的数论题

- 设

$$G(p)=\prod_{Xi<=p} lcm(X_1,\dots,X_n)^{[\gcd(X_1,\dots,X_n)=1]}$$

$$G1(p)=\sum_{Xi<=p}[\gcd(X_1,\dots,X_n)=1]$$

- 那么答案可以表示为

$$ans=\prod_{d=1}^{m} G\left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)^{d} \times \left(d^{d}\right)^{G1\left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)}$$

- 求出G和G1之后就可以用O($m^{1/2}$*logn)的时间求答案

Jason曾不想做的数论题

- 由以下式子,可以O(m)预处理后求d^d的前缀乘积。

$$\prod_{i=1}^{n} i^{i} = (n!)^{n} \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} i!\right)^{-1}$$

- 接下来求G和G1

$$\text{求}\ G1(p)=\sum_{X_i<=p}[\gcd(X_1,\ldots,X_n)=1]$$

- 由于

$$\sum_{t=1}^{p} G1\left(\frac{p}{t}\right)=p^n$$

- 得到

$$G1(p)=p^n-\sum_{t=2}^{p} G1\left(\frac{p}{t}\right)$$

- 便可以用O($m^{3/4}$)时间处理出所有会用到的G1.

求 $G(p)=\prod_{X_i<=p} lcm(X_1,...,X_n)^{[\gcd(X_1,...,X_n)=1]}$

- 令 $S(p)=\prod_{Xi<=p} lcm(X_1,...,X_n)$
- 那么：

$$\prod_{t=1}^{p} G\left(\left\lfloor \frac{p}{t} \right\rfloor\right)\times t^{G1\left(\left\lfloor \frac{p}{t} \right\rfloor\right)} = S(p)$$

$$G(p)=S(p)\times\left(\prod_{t=2}^{p} G\left(\left\lfloor \frac{p}{t} \right\rfloor\right)\times t^{G1\left(\left\lfloor \frac{p}{t} \right\rfloor\right)}\right)^{-1}$$

- 这个部分的复杂度如果不考虑计算S,就是O($m^{3/4}$×logn)

$$\text{求}\ S(p)=\prod_{X_i<=p} lcm(X_1,\dots,X_n)$$

$$S(m)=\prod_{p\in prime,p<=m} p^{m^n-(m-\left\lfloor \frac{m}{p}\right\rfloor)^n+m^n-(m-\left\lfloor \frac{m}{p^2}\right\rfloor)^n+\dots}$$

- 这个式子的含义是考虑每个质因子的贡献，$(m-m/p)^n$代表p这个质因子不出现的方案数，$(m-m/p^2)^n$代表p^2不出现的方案数……
- 单次计算的时间复杂度为$O(m^{1/2}*logn)$,总复杂度为$O(m^{3/4}\times logn)$

Jason曾不想做的数论题

- 至此，我们就用$O(m^{3/4} * \log n)$的时间解决了这个问题。
- 但是，这道题十分卡常数，实测较为直接的写法至少要16s。感兴趣的同学可以去51nod的交一交这道题卡常数玩。

感谢观看