1 GCD 6

1.1 第一步

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\operatorname{lcm}(x,y)$$

设 $f(n)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{lcm}(i,n)$，则原答案为：

$$\sum_{i=1}^{n}(2f(i)-i)$$

1.2 第二步

$$\begin{aligned}
f(n)=&\sum_{x=1}^{n}\operatorname{lcm}(x,n)\\
=&\sum_{x=1}^{n}\frac{xn}{\gcd(x,n)}\\
=&n\sum_{g|n}\frac{1}{g}\sum_{x=1}^{\frac{n}{g}}[\gcd(x,\frac{n}{g})=1](xg)\\
=&n\sum_{g|n}\sum_{x=1}^{\frac{n}{g}}[\gcd(x,\frac{n}{g})=1]x
\end{aligned}$$

等价于：

$$=n\sum_{g|n}\sum_{x=1}^{g}[\gcd(x,g)=1]x$$

如何计算？既然能够想到 $\frac{n}{g}$ 等价于 g，那也应该不难想到若 $\gcd(x,g)=1(x<g)$，则 $\gcd(g-x,g)=1$。不难发现其否命题也成立。我们将 x 与 $g-x$ 合起来处理，则有：

$$\sum_{x=1}^{g}[\gcd(x,g)=1]x=\frac{1}{2}g\cdot\varphi(g)$$

特别地，当 $g=1$ 时，上式为 1。所以我们只需要算出：

$$h(n)=\sum_{g|n}g\cdot\varphi(g)$$

即可。

即：

$$(\mathrm{id}\cdot\varphi)*1$$

根据积性函数的乘积是积性函数，积性函数的卷积是积性函数，我们便知道了 h 可以使用线性筛预处理。

我们有：

$$h(1) = 1$$

$$h(p) = p \cdot (p-1) + 1$$

$$h(p^k) = (p + p^3 + p^5 + \cdots + p^{2k-1})(p-1) + 1$$

如果直接递推，会很复杂，时间复杂度也难以得到保证，所以考虑继续化简：

$$\begin{aligned} h(p^k) =&(p + p^3 + p^5 + \cdots + p^{2k-1})(p-1) + 1 \\ =&\frac{p^{2k+1}+1}{p+1} \end{aligned}$$

可以知道：

$$\begin{aligned} h(p^{k+1}) =&\frac{p^{2k+3}+p^2-p^2+1}{p+1} \\ =&h(p^k) \cdot p^2 - (p-1) \end{aligned}$$

这样，通过维护最小因子出现次数，便能在 $O(1)$ 的时间复杂度内递推出 $h(p^{k+1})$。

1.3 具体实现

一步一步代回：

$$\begin{aligned} &2f(n) - n \\ =&2(\frac{1}{2}n \cdot (h(n)+1)) - n \end{aligned}$$

加 1 是为了统一 $h(1) = 1$ 的情况。

$$\begin{aligned} =&n \cdot (h(n)+1) - n \\ =&n \cdot h(n) \end{aligned}$$

这样问题就很简单了。