1 GCD 7

1.1 第一步

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}d(xy)\\
=&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]
\end{aligned}
$$

证明：

设

$$xy = p_1^{r_{x_1}+r_{y_1}} \times p_2^{r_{x_2}+r_{y_2}} \times \cdots \times p_k^{r_{x_k}+r_{y_k}}$$

有：

$$d(xy) = (r_{x_1}+r_{y_1}+1) \times (r_{x_2}+r_{y_2}+1) \times \cdots \times (r_{x_k}+r_{y_k}+1)$$

若要有 $\gcd(x,y)=1$，则对于某个质因数 p_i，必有 $r_{x_i}=0$ 或 $r_{y_i}=0$，或两者同时满足。依次考虑每个质因数：若 $r_{x_i}\neq 0$，则有 r_{x_i} 种情况；若 $r_{y_i}\neq 0$，则有 r_{y_i} 种情况；都为 0 时只有一种情况。当我们使用乘法原理将各情况合并起来时，原命题得证。

为什么会想到这一步转换，我也不知道。考虑到这道题的重点还是莫比乌斯反演，所以就暂时不要纠结为什么第一步会想到这个了。

更新：想到的原因

设 $x=p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$，$y=p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}$。

令 $d_1=p_1^{z_{11}}p_2^{z_{12}}\cdots p_k^{z_{1k}}$，$d_2=p_1^{z_{21}}p_2^{z_{22}}\cdots p_k^{z_{2k}}$，当 $z_{1i}+z_{2i}<x_i$ 时，我们强制让 $z_{2i}=0$；当 $x_i\le z_{1i}+z_{2i}\le x_i+y_i$ 时，我们强制让 $z_{1i}=x_i$。则 xy 的所有因数都可以使用 d_1d_2 不重不漏地表示出来，一一对应。

由定义必有：

$$
\begin{aligned}
d_1 &\mid x\\
d_2 &\mid y
\end{aligned}
$$

同时可知：

$$\gcd(\frac{x}{d_1},d_2)=1$$

否则不符合我们的定义。

则 xy 的因数个数与以下情况一一对应：

$$\sum_{\frac{x}{d_1}|x}\sum_{d_2|y}[\gcd(\frac{x}{d_1},d_2)=1]$$

即：

$$\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]$$

1.2 第二步

$$\begin{aligned}&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}[\gcd(i,j)=1]\\=&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\sum_{i|x}\sum_{j|y}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)\end{aligned}$$

众所周知，$d\mid\gcd(i,j)$ 等价于 $d\mid i$ 且 $d\mid j$。

$$=\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{x=1,i|x}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{y=1,j|y}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}1$$

上一步的意思是，在最外面枚举 d，然后从内到外考虑贡献。考虑贡献时，首先考虑 i 和 j，再结合 i 和 j 考虑 x 和 y。

$$\begin{aligned}&=\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{id}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{jd}\rfloor}1\\&=\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\left(\left(\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{id}\rfloor}1\right)\left(\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{jd}\rfloor}1\right)\right)\\&=\sum_{d=1}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{id}\rfloor}1\right)\left(\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{jd}\rfloor}1\right)\end{aligned}$$

以上变换可以有一般性的证明。

$$=\sum_{d=1}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\left\lfloor\frac{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}{i}\right\rfloor\right)\left(\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\left\lfloor\frac{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}{i}\right\rfloor\right)$$

用 $O(n\sqrt{n})$ 的时间复杂度内预处理

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}$$

单次查询的时间复杂度为 $O(\sqrt{n})$。