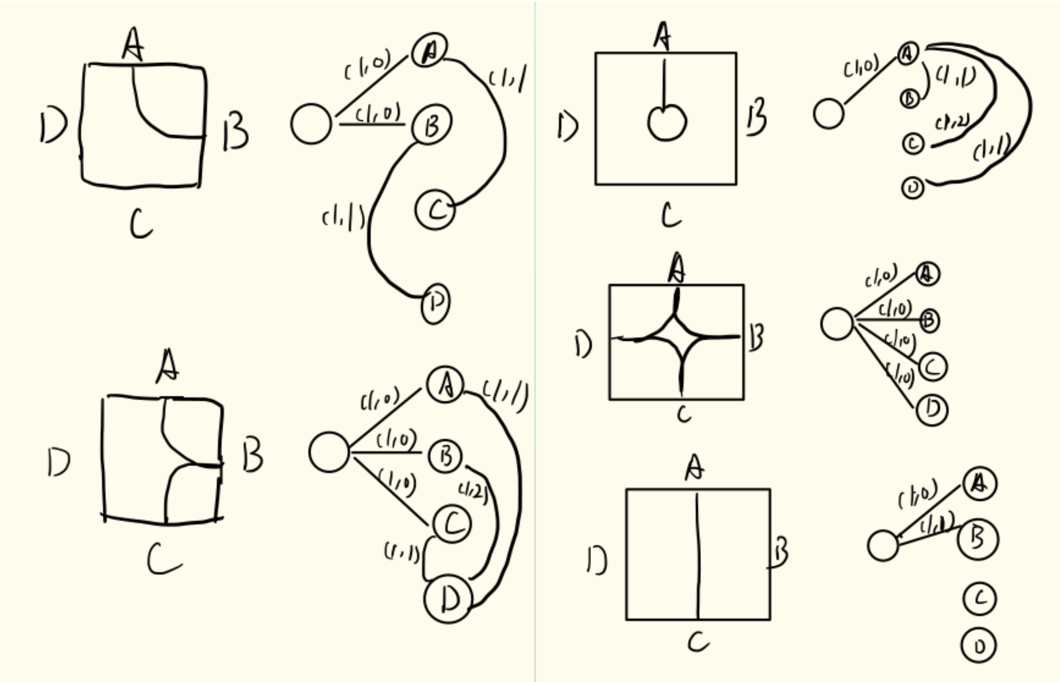
1 「清华集训 2017」无限之环

匹配问题, 可以用费用流解决.

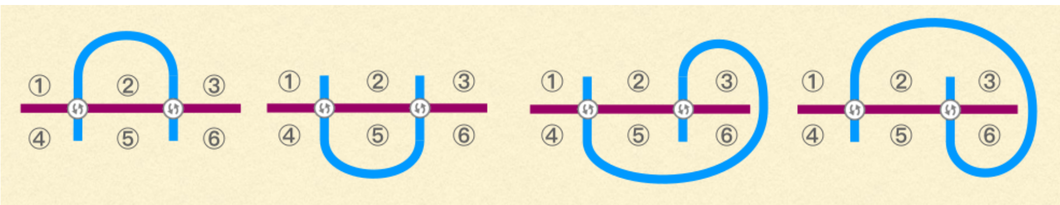
首先将网格黑白染色, 对每个方格四个方向的接口建立四个新点. 显然白色点的接口只能和黑色点的接口相连. 对于每个方格中的水管, 有 5 种本质不同的形状. 白方格和源点在一侧, 对不同的形状建图如下:



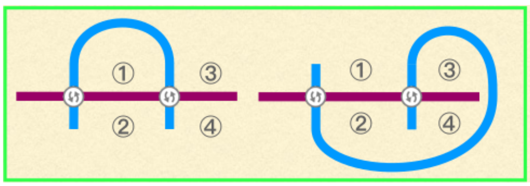
黑点的建图方式和白点对称. 将黑白点能相连的接口对应的点连一条容量为 1, 费用为 0 的边跑最小费用最大流. 如果 S 和 T 均满流, 最小费用就是答案, 否则无解.

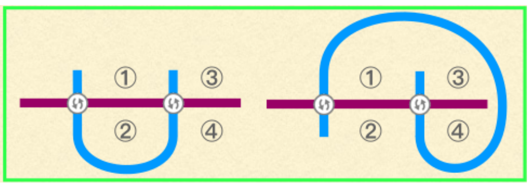
2 「清华集训 2017」小 Y 和地铁

首先只出现一次的线路无用. 对剩下的每条线路, 可以证明, 只有 4 种本质不同的连接方式: (只取决于对答案产生贡献的方式)



按照第一个换乘站的顺序从左到右枚举线路, 可以发现对后续线路的贡献不同的决策只有两种: (贡献相同是因为该决策中, 线路对 1, 2, 3, 4 这些集合的划分相同)





所以只需在 4 种决策中, 两两取 min, 再继续 dfs.

3 「清华集训 2017」小 Y 和二叉树

首先可以预处理出 $f(u,v)$ 表示以 u 为根并断开 (u,v) 时, 最小的中序遍历的第一位. 然后问题转化为确定一个根使得中序遍历最小.

找到度数 < 3 且编号最小的节点, 记为 B.

显然答案的第一位一定是 B. 考虑从 B 开始贪心.

设当前所在的点为 u, $d(u)$ 表示与 u 相邻且没有走过的点的个数:

- 若 $d(u) = 1$, 结束过程
- 若 $d(u) = 2$, 如果 $f(v,u) < v$, 结束过程; 否则, 将 v 当作父亲, $u = v$
- 若 $d(u) = 3$, 比较 $f(v_1,u)$ 和 $f(v_2,u)$ 的大小关系, 将较小的那个当作右儿子, 较大的当作父亲, $u = v$