Math Solution

fuboat

2017 年 1 月 18 日

其实 $S(x)$ 就是平常说的 $d(x)$… 只是变量重名不爽所以换了个名字.
首先, 显然有:

$$\begin{aligned} S(ij) &= \sum_{x|i}\sum_{y|j}[(x, \frac{j}{y}) = 1] \\ &= \sum_{x|i}\sum_{y|j}[(x, y) = 1] \end{aligned}$$

特殊地, 当 $(i, j) = 1$ 时, $S(ij) = S(i) \times S(j)$. 这可以说明 $S(x)$ 是一个积性函数.
于是就可以推式子了:

$$\begin{aligned} F(N, M) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} S(i^2)S(j^2)S(ij) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} S(i^2)S(j^2)\sum_{x|i}\sum_{y|j}[(x, y) = 1] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} S(i^2)S(j^2)\sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{d|x,d|y}\mu(d) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} S(i^2)S(j^2)\sum_{d|i,d|j}\sum_{x|\frac{i}{d}}\sum_{y|\frac{j}{d}}\mu(d) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} S(i^2)S(j^2)\sum_{d|i,d|j} S(\frac{i}{d})S(\frac{j}{d})\mu(d) \\ &= \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{M}{d}\rfloor} S(i^2d^2)S(j^2d^2)S(i)S(j)\mu(d) \\ &= \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{d}\rfloor} S(i^2d^2)S(i)\right)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{M}{d}\rfloor} S(i^2d^2)S(i)\right) \end{aligned}$$

由于 $S(x)$ 是积性函数, 那么 $h(x)=S(x^2)$ 也是积性函数.

所以有:

$$F(N,M)=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{d}\rfloor}h(id)S(i)\right)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{M}{d}\rfloor}h(id)S(i)\right)$$

首先线性筛筛出 $S(x),h(x)$.

暴力求是单次 $O(n\log n)$ 的. 这样就有 40 分了.

可以预处理一下前缀和, 做到预处理 $O(n\log n)$, 单次询问 $O(n)$, 但是需要 $O(n\log n)$ 的辅助空间. 50 分到手.

到目前为止还是太水了.

接下来 10 分的部分分, 由于 $N=M$, 任意时刻 $\lfloor\frac{N}{d}\rfloor=\lfloor\frac{M}{d}\rfloor$, 所以可以分块.

接下来 10 分的部分分, 由于 M 唯一, 所以可以离线出所有的答案. 因为对于所有的 d, 当 N 从 1 取到 10^5 时, $\lfloor\frac{N}{d}\rfloor$ 一共也只会变化 $2\times10^5\log2\times10^5$ 次, 所以复杂度一定是正确的.

我的做法:

由于当 d 取 $[5\times10^3,2\times10^5]$ 时, $\lfloor\frac{N}{d}\rfloor$ 一共只会有 20 种取值, 所以 N,M 组合起来也不过 400 种取值, 不妨全部预处理出来, 当枚举到的 d 在 $[5\times10^3,2\times10^5]$ 中时, 用预处理好的答案分块做; 否则暴力做. 暴力做的规模变为了原来的 $\frac{1}{20}$, 可以接受.

垃圾出题人卡常?

模数是 2^{30}, 自然溢.

至于为什么要卡常, 主要是因为卡常之后的暴力跑得太快了, 也是为了避免被水过去.