

NOI2017 模拟题

fuboa

题目名称	区间第 k 小	求和	树
源文件前缀	kth	sum	tree
输入文件	kth.in	sum.in	tree.in
输出文件	kth.out	sum.out	tree.out
时间限制	3s	3s	2s
空间限制	1024MB	1024MB	512MB
测试点数量	10	10	10
测试点分值	10	10	10
是否开启 O2 优化	是	是	是

程序执行时栈空间限制与内存限制相同.

1 区间第 k 小 (kth)

1.1 问题描述

给定一个长度为 n 的序列和一个常数 w , 所给序列中的任意一个数 x 满足 $0 \leq x < n$.

对于一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 定义区间 $[l, r]$ 为序列 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r . 现在每次给你一个询问 (l, r, k) , 表示对所给序列询问区间 $[l, r]$ 中第 k 小的数.

但是需要注意的是, 如果某一个数 x 在这段区间中的出现次数超过了 w , 则在求第 k 小的数时应将区间中所有的数字 x 视为数字 n .

即: 询问某一区间时, 将所有在区间中出现次数超过 w 的数字视为数字 n . 各询问独立.

举例说明:

询问的区间中的数为 $[0, 8, 0, 7, 8, 0]$, $w = 2, n = 9$, 该区间应视为 $[9, 8, 9, 7, 8, 9]$;

询问的区间中的数为 $[9, 7, 8, 2, 3, 3]$, $w = 3, n = 7$, 该区间应视为 $[9, 7, 8, 2, 3, 3]$;

询问的区间中的数为 $[5, 9, 7, 6, 5, 6]$, $w = 1, n = 8$, 该区间应视为 $[8, 9, 7, 8, 8, 8]$.

1.2 输入格式

注意, 本题部分测试点 强制在线.

第一行四个整数 $n, w, q, type$, 其中 q 表示询问的个数, $type$ 为强制在线的参数.

第二行 n 个整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 表示序列中的每一个数.

接下来 q 行, 每行三个正整数 l, r, k , 表示询问区间 $[l, r]$ 中的数在根据题目要求转化后的第 k 小.

注意这里的 l, r, k 是经过加密的. 记上一次询问的答案为 $lastans$ (初始值为 0), 将 l, r, k 分别异或 $type \times lastans$ 后即为本次询问.

1.3 输出格式

共 q 行, 每行一个数, 依次表示每个询问的答案. 保证询问合法且有解.

1.4 样例 0

见下发文件中的 `sample/kth/kth0.in` 和 `sample/kth/kth0.ans`.

1.5 样例 1

见下发文件中的 `sample/kth/kth1.in` 和 `sample/kth/kth1.ans`.

1.6 样例 2

见下发文件中的 `sample/kth/kth2.in` 和 `sample/kth/kth2.ans`.

1.7 数据规模与约定

测试点编号	$n =$	$w =$	$q =$	$type =$
0	100000	100000	100000	0
1	100000	100000	100000	1
2	100000	5000	100000	0
3	100000	5000	100000	1
4	100000	1	100000	0
5	100000	1	100000	1
6	100000	1	100000	1
7	100000	10	100000	0
8	100000	10	100000	1
9	100000	10	100000	1

对于 100% 的数据, 满足 $0 \leq a_i < n \leq 10^5, 0 < q, w \leq 10^5, 0 \leq type \leq 1$.
数据很弱, 欢迎水过.

2 求和 (sum)

2.1 问题描述

众所周知, 当 x 的质因数分解为 $\prod_i p_i^{a_i}$ 时, 有:

$$\mu(x) = \prod_i (-1)^{a_i} [a_i \leq 1]$$

类似地, 定义:

$$f_k(x) = \prod_i (-1)^{a_i} [a_i \leq k]$$

现在给定 n, k , 求

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{d=1}^k f_d(\gcd(i, j)) \pmod{2^{30}}$$

2.2 输入格式

仅两个整数, 分别表示 n, k .

2.3 输出格式

仅输出一个整数, 表示 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{d=1}^k f_d(\gcd(i, j))$ 对 2^{30} 取模后的值.

2.4 样例 0

见下发文件中的 `sample/sum/sum0.in` 和 `sample/sum/sum0.ans`.

2.5 样例 1

见下发文件中的 `sample/sum/sum1.in` 和 `sample/sum/sum1.ans`.

2.6 样例 2

见下发文件中的 `sample/sum/sum2.in` 和 `sample/sum/sum2.ans`.

2.7 数据规模与约定

测试点编号	$n \leq$	$k =$
0	100	40
1	1000	40
2	1000000	40
3	10000000	40
4	100000000	1
5	100000000	40
6	1000000000	1
7	1000000000	40
8	10000000000	40
9	10000000000	40

对于 100% 的数据, $0 < n \leq 10^{10}$, $0 < k \leq 40$.

3 树 (tree)

3.1 问题描述

现有一棵树, 树上有 n 个编号从 1 到 n 的节点及 $2n - 2$ 条有向边. 保证当有向边 $u \rightarrow v$ 存在时, 有向边 $v \rightarrow u$ 也存在. 树上任意两个节点都可以互相到达.

树上任意两个节点之间都可以互相传递消息. 定义 $u \Rightarrow v$ 为 u 作起点, v 作终点的有向简单路径. 当节点 u 向节点 v 传递消息时, 这条消息将会经过路径 $u \Rightarrow v$ 中的所有有向边各一次.

树上每个节点有一个权值, 初始为 0. 当一条消息在传递的过程中经过有向边 $u \rightarrow v$ 时, 如果 $u < v$, 则节点 u, v 的权值各 $+1$, 反之则各 -1 .

在经过 若干次 消息传递后, 树上节点的权值已经发生了变化. 现在给定所有节点最终的权值, 要求你给出一个最终权值与之吻合的传递消息的方案, 并保证该方案是所有合法方案中字典序最小的方案. 具体要求见输出格式.

3.2 输入格式

第一行一个整数 n .

第二行 n 个整数, 依次表示节点 $1 \dots n$ 的最终权值.

接下来 $n - 1$ 行, 每行两个整数 u_i, v_i , 表示存在两条有向树边 $u_i \rightarrow v_i$ 和 $v_i \rightarrow u_i$.

3.3 输出格式

第一行一个非负整数 m .

接下来 m 行, 每行两个数, 其中第 i 行为两个整数 u_i, v_i , 表示一次消息由 u_i 传向 v_i .

本题要求 字典序最小, 具体地:

在满足 m 最小的前提下, 依次保证 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m$ 尽可能小.

3.4 样例 0

见下发文件中的 `sample/tree/tree0.in` 和 `sample/tree/tree0.ans`.

3.5 样例 1

见下发文件中的 `sample/tree/tree1.in` 和 `sample/tree/tree1.ans`.

3.6 样例 2

见下发文件中的 `sample/tree/tree2.in` 和 `sample/tree/tree2.ans`.

3.7 样例 3

3.7.1 样例输入

```
3
1 3 2
2 1
3 2
```

3.7.2 样例输出

```
2
1 3
2 3
```

3.7.3 样例解释

合法方案有无数种, 此处只列举三种.

方案 1: 一条消息从 1 传向 3; 又一条消息从 2 传向 3.

方案 2: 一条消息从 1 传向 2; 又一条消息从 2 传向 3; 又一条消息从 2 传向 3.

方案 3: 一条消息从 2 传向 3; 又一条消息从 1 传向 3.

由于方案 1,3 的消息数更少, 因此排除方案 2;

由于依次比较时, 方案 1 的节点编号更小, 排除方案 3;

答案为方案 1.

3.8 数据规模与约定

测试点编号	$n =$	是否保证树的结构为一条链
0	2	1
1	50	0
2	50	0
3	300	0
4	300	0
5	3000	1
6	100000	1
7	1000000	0
8	1000000	0
9	1000000	0

对于 100% 的数据, $0 < n \leq 10^6$, 保证存在 m 使得 $m \leq n$.