Water Party(水党)

Demerzel

2017 年 12 月 31 日

都是水题。

AGC014 Black and White Tree

小 A 和小 B 在树上做游戏，小 A 先手，每一轮中：

- 小 A 选择一个未被染色的点染成白色。
- 小 B 选择一个未被染色的点染成黑色。

所有点都染完之后，再将所有与黑色点相邻的白色点染成黑色。之后若还存在白色点，则小 A 赢，否则小 B 赢。

假设小 A 和小 B 都足够聪明，请你计算出最后的赢家。

$n \leq 10^6$

分析

- 显然最后必须有一个白点周围没有黑点，小 A 才能获胜。

分析

- 显然最后必须有一个白点周围没有黑点，小 A 才能获胜。
- 首先枚举这个白点 p。那么最后一步的情形一定是这样的，这要求小 A 在根节点的所有儿子都被染白的情况下能保持先手。

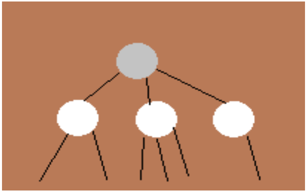


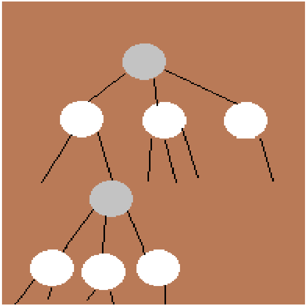
Figure: 灰点表示未染色

分析

观察下图，我们设 f_p 代表考虑以 p 为根的子树，在 p 被染白的情况下小 A 是否能保持先手。

再设 $g_p = f_{son_1} \quad \& \quad f_{son_2} \quad \& \quad \cdots \quad \& \quad f_{son_k}$

则有 $f_p = g_{son_1} \quad | \quad g_{son_2} \quad | \quad \cdots \quad | \quad g_{son_k}$



分析

- 最后如果 $g_{root} = ture$ 那么就可行。这样我们得到一个 n^2 算法。

分析

- 最后如果 $g_{root} = ture$ 那么就可行。这样我们得到一个 n^2 算法。
- 然后，如果已知以某个点为根时的 dp 值，显然可以方便地求出以“与这个点相邻的另一个点”为根的 dp 值。
- 所以我们只需要一开始以某个点为根算一遍，然后从这个点开始 dfs 整棵树就可以了。

分析

- 最后如果 $g_{root} = ture$ 那么就可行。这样我们得到一个 n^2 算法。
- 然后，如果已知以某个点为根时的 dp 值，显然可以方便地求出以“与这个点相邻的另一个点”为根的 dp 值。
- 所以我们只需要一开始以某个点为根算一遍，然后从这个点开始 dfs 整棵树就可以了。
- 时间复杂度 $O(n)$。

AGC007 Pushing Balls

在一条直线上有 n 个球和 $n+1$ 个坑共 $2n+1$ 个“物品”，i 个球在第 i 和第 $i+1$ 个坑之间。

球与坑之间是有距离的，这些距离组成了首项为 a，公差为 x 的等差数列。即第 i 个物品和第 $i+1$ 个物品之间的距离是 $a+(i-1)x$。

小 A 会进行 n 轮操作，每轮操作中，先从剩下的球中等概率地选择一个，然后等概率地选择一个方向，这个球将会朝这个方向滚，直到遇到一个里面没有球的坑并落进去留在里面。然后这一轮的收益为球滚的距离。

请求出期望收益。

分析

- 首先把“操作”换一种表述：等概率选择相邻的两个物品，并拿走他们，收益为两物品之间的距离，这样就不必区分球和坑了。

分析

- 首先把“操作”换一种表述：等概率选择相邻的两个物品，并拿走他们，收益为两物品之间的距离，这样就不必区分球和坑了。
- 我们会发现，每次操作之后的“期望局面”仍然是一个等差数列。

分析

- 首先把“操作”换一种表述：等概率选择相邻的两个物品，并拿走他们，收益为两物品之间的距离，这样就不必区分球和坑了。
- 我们会发现，每次操作之后的“期望局面”仍然是一个等差数列。
- 记 m 为现在剩下的区间数，一开始 $m = 2 \cdot n$。计算得到

$$a\prime = \frac{(m+2)a+5x}{m}$$

$$x\prime = \frac{m+4}{m}x$$

分析

- 首先把“操作”换一种表述：等概率选择相邻的两个物品，并拿走他们，收益为两物品之间的距离，这样就不必区分球和坑了。
- 我们会发现，每次操作之后的“期望局面”仍然是一个等差数列。
- 记 m 为现在剩下的区间数，一开始 $m = 2 \cdot n$。计算得到

$$a\prime = \frac{(m+2)a + 5x}{m}$$

$$x\prime = \frac{m+4}{m}x$$

- 这样就可以 $O(n)$ 计算了。

为什么可以用“期望局面”

因为对一个局面操作后
所有可能的新局面的结构都是一样的
能进行的操作也是一样的。
所以可以把这些新局面求平均值来计算。
我是觉得很神奇的。

AGC006 Blackout

有一个 n 行 n 列的网格，其中 m 个格子已经被染黑。小 A 根据以下规则染黑新的格子直到没有格子可以被染黑为止。

若 (x, y) 和 (y, z) 均被染黑，那么将 (z, x) 染黑。

请问最后有多少个被染黑的格子。

$n, m \leq 10^5$

分析

- 明显要把格子当成有向边。

分析

- 明显要把格子当成有向边。
- 对于每一个弱联通块可以分开计算。

分析

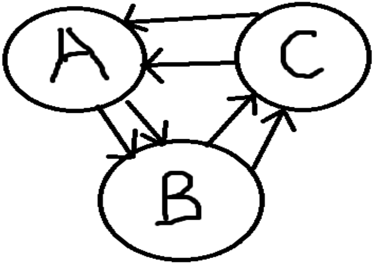
- 明显要把格子当成有向边。
- 对于每一个弱联通块可以分开计算。
- 先考虑自环和双向边（即 (a, b) 和 (b, a)）。

分析

- 明显要把格子当成有向边。
- 对于每一个弱联通块可以分开计算。
- 先考虑自环和双向边（即 (a, b) 和 (b, a)）。
- 可以说自环和双向边“像瘟疫一样蔓延”，最终会把这个联通块变成一个完全有向图。

研究一下

如果能把点分成三部分，使得只存在 $A \to B$，$B \to C$，$C \to A$ 三种边，并且 A，B，C 非空。那么可归纳证明得最终的边数 $= |A||B| + |B||C| + |C||A|$。



否则一定有自环或双向边。

那么只要对于每个联通块判断是否可以被三染色即可。
当然还要考虑特殊情况即 A，B，C 中有一个空集。
时间复杂度 $O(n+m)$。