

## 斜率优化

Orange

CQ No.11 High

2018 年 6 月 7 日

# 写在前面

啊大家都知道动态规划是这么个简单玩意儿。相信大家都会最基础的动态规划了。

其实，大多数动态规划的难点并不在于设计状态，而在于优化。这节课将主要介绍一种常用的优化方法——斜率优化。

由于我看不懂网上别人的讲解，因此这里的内容都是我瞎编出来的，不过恰巧能够拿来做题。我的意思是，这里的内容与网上的内容有出入是很正常的事情。

e.g. 1040 烽火传递

## e.g. 1040 烽火传递

有一个数列  $w_{1 \sim n}$ , 我们规定选择第  $i$  个数的代价为  $w_i$ 。现要求每连续  $m$  个数中至少要选择个数, 求满足条件的最小代价。

$1 \leq m \leq n \leq 10^5$ , 保证最后结果不会溢出。

## e.g. 1040 烽火传递

考虑 DP。设  $f_i$  表示前  $i$  个数满足题意并且一定选第  $i$  个数时的最小代价。则答案显然为  $\min\{f_{(n-m+1) \sim n}\}$ ，边界条件显然为  $f_i = w_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )。

状态转移方程为：

$$f_i = \min_{i-m \leq j < i} \{f_j + w_i\} \quad (m < i \leq n)$$

时间复杂度为  $O(nm)$ ，不足以通过此题。

## e.g. 1040 烽火传递

感性理解，如果  $f_j < f_k$ ，并且  $j > k$ ，那么我们一定不会从决策  $k$  进行转移。因为决策  $k$  在可转移时，决策  $j$  也一定可以转移，且决策  $j$  比决策  $k$  优。这就好比 “如果一个选手比你强，又比你小的话，那你就打不过他。”

上面的分析告诉我们，我们可以永久地抛弃决策  $k$ ，换句话说，我们只保留决策  $j$ 。当我们计算出  $f_i$  后， $i$  就会成为之后的决策，我们用  $i$  去淘汰在  $i$  前面又比  $i$  的劣的决策。

e.g. 1040 烽火传递

## e.g. 1040 烽火传递

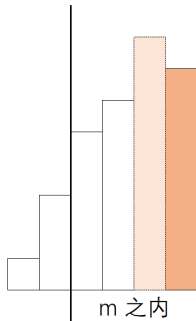


图: 深色的部分将浅色虚线部分淘汰。不难发现, 这其实是一个单调栈。

## e.g. 1040 烽火传递

发现，如果我们像这样做的话，决策点对应的  $f$  将呈单调栈结构，显然，我们要选择尽量靠前的状态。

然而，我们必须在  $i - m \sim i - 1$  的范围内选择决策，所以我们只能选择粗线后的决策。反映到代码上，我们只需要将栈变成双端队列，将前部（头部）超出范围的决策出队即可。我们称这种双端队列为**单调队列**。事实上，**单调队列是一个漏了底的单调栈，栈底只会弹出，不会压入新元素**。后面提到的单调栈可能指单调队列。

像这样，直接使用单调队列进行转移的做法，我们称之为**单调队列优化**。可以证明，单调队列优化的时间复杂度是**均摊**  $O(n)$  的。

## 单调队列优化的一般方法

### 1 处理边界

计算出边界的答案，并将边界作为决策放入单调队列中。

### 2 弹出队首

将队首无法成为有效决策的元素弹出。

### 3 计算答案

利用当前的队首计算答案。当前的队首就是决策点。

### 4 插入决策

在计算完当前状态的答案后，当前状态将成为后续状态的决策。根据单调队列的性质将当前状态插入队尾。重复第 2 步至第 4 步。



## 单调队列优化的时间复杂度

由于每个元素只会入队一次，最多只会出队一次，将元素入队出队的时间复杂度均为  $O(1)$ ，计算一个状态的答案的时间复杂度为  $O(1)$ ，因此我们认为单调队列优化的时间复杂度是  $O(n)$  的。

## 单调队列优化的实质

再次回到我们一开始感性的理解，我们发现，单调队列优化的实质是**用一个决策去永久淘汰另外一个决策，我们只保留有用的决策，从而优化了时间复杂度。**

我们来理性地计算一下。

设决策  $j$  和决策  $k$ ，不妨设  $j > k$ ，我们假设它们都在  $i - m \sim i - 1$  的范围内。若决策  $j$  比决策  $k$  优，则必须满足：

$$f_j + w_i < f_k + w_i$$

否则决策  $j$  比决策  $k$  劣。其中是否取等号无关紧要。

## 单调队列优化的实质

整理得：

$$f_j < f_k$$

虽然看上去这个计算并不理性，但是整理后的不等式告诉了我们一个重要的信息：**我们判断决策优劣的方式与当前要计算的状态  $i$  无关**。这是一般的单调队列优化的重要特征。

另外，若决策  $j$  比决策  $k$  更劣，我们却没法说明决策  $j$  永远比决策  $k$  更劣，因为决策  $k$  可能会因为超出范围而无效，此时我们可以将决策  $k$  视为无穷劣。

——一会儿你们就知道真正的理性的计算了。——

## 例题

(按题号排序)

- 925 修剪草坪
- 1042 猴子

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

有  $n$  个棍状玩具排成一根长棍，第  $i$  件玩具的长度为  $c_i$ ，相对顺序不得改变。现要将玩具分成若干段，段数不受限制。对于每一段，设包含第  $l$  个玩具到第  $r$  个玩具，规定这一段的长度  $X$  为：

$$X = r - l + \sum_{i=l}^r c_i$$

规定这一段的费用为  $(X - L)^2$ 。其中  $L$  为题目给定常量。 $X$  的取值不受  $L$  限制。

求最小总费用。

$$n \leq 5 \times 10^4。$$

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

很自然想到用 DP 解决这个问题。设  $f_i$  表示以第  $i$  个玩具结尾时的最小代价，边界条件为  $f_0 = 0$ ，最终答案为  $f_n$ 。状态转移方程为：

$$f_i = \min_{0 \leq j < i} \{f_j + (i - j - 1 + s_i - s_j - L)^2\}$$

其中  $s_i$  表示玩具长度的前缀和。需要注意  $j$  可以等于 0， $j = 0$  相当于把第一个玩具到第  $i$  个玩具分成了一段。

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

由于这道题的操作与单调队列优化例题类似，都是选上一个决策点进行转移，因此我们可以尝试来感性理解一下，看看能否如法炮制。

发现，我们并不能像上一道题一样，选择  $f$  最小的决策点进行转移，因为可能当前段的代价会很大。当然，也不能选择使得当前段代价最小的决策点进行转移，因为  $f$  可能会很大。而且  $f$  与当前段的代价的关系似乎无法确定。换句话说，**我们判断决策优劣的方式不仅与决策点有关，还与当前要计算的状态  $i$  有关，而且这个关系并不容易摸清。**

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

不如来理性的计算。

设决策点  $j > k$ 。若  $j$  比  $k$  更优，则意味着：

$$f_j + (i - j - 1 + s_i - s_j - L)^2 < f_k + (i - k - 1 + s_i - s_k - L)^2$$

显然暴力展开不妥，我们先合理分类：

$$f_j + ((i + s_i - 1 - L) - (j + s_j))^2 < f_k + ((i + s_i - 1 - L) - (k + s_k))^2$$

显然  $(i + s_i - 1 - L)$  只与  $i$  有关， $(j + s_j)$  只与  $j$  有关。我们不妨令  $P_i = i + s_i - 1 - L$ ，令  $Q_j = j + s_j$ ，则上式化为：

$$f_j + (P_i - Q_j)^2 < f_k + (P_i - Q_k)^2$$



## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

展开平方式，得：

$$f_j + P_i^2 - 2P_iQ_j + Q_j^2 < f_k + P_i^2 - 2P_iQ_k + Q_k^2$$

将含  $i$  的项移至不等式右边，其余项移至不等式左边：

$$f_j - f_k + Q_j^2 - Q_k^2 < 2P_i(Q_j - Q_k)$$

因为  $Q_j = j + s_j$ ，前缀和是单调递增的， $g(x) = x$  也是单调递增的，所以  $Q_j > Q_k$ 。因此有：

$$\frac{(f_j + Q_j^2) - (f_k + Q_k^2)}{Q_j - Q_k} < 2P_i$$

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

我们得到了：

$$\frac{(f_j + Q_j^2) - (f_k - Q_k^2)}{Q_j - Q_k} < 2P_i$$

若该式成立，则决策  $j$  比决策  $k$  更优，否则决策  $j$  比决策  $k$  更劣。

令  $Y_j = f_j + Q_j^2$ ,  $X_j = Q_j$ , 则有：

$$\frac{Y_j - Y_k}{X_j - X_k} < 2P_i$$

因为左式可以看作  $(X_j, Y_j)$  和  $(X_k, Y_k)$  两点间的斜率，故有名斜率优化。

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

令  $slope(j, k) = \frac{Y_j - Y_k}{X_j - X_k}$ , 规定  $j$  必须大于  $k$ 。我们可以得到如下定理:

## 定理

设  $j > k > l$ 。若  $slope(j, k) < slope(k, l)$ , 则  $k$  永远不是最优决策点。

## 证明.

对于任一状态  $i$ , 若  $slope(j, k) < 2P_i$ , 则  $j$  比  $k$  更优; 若  $slope(j, k) > 2P_i$ , 则  $slope(k, l) > slope(j, k) > 2P_i$ , 即  $l$  比  $k$  更优。□

需要注意的是, **这个定理显然与状态  $i$  无关, 只与不等式最终的不等号有关。**

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

当我们计算出  $f_i$  后,  $i$  就会成为之后的决策, 我们用  $i$  去淘汰在  $i$  前面又比  $i$  的劣的决策。

斜率优化也是如此。当我们计算出  $f_i$  后, 我们用之前的定理去淘汰之前的决策。

```
while (tail - head > 1 &&  
    slope(i, deque[tail - 1]) <  
    slope(deque[tail - 1], deque[tail - 2]))  
{  
    tail--;  
}
```

不同的是, 此时栈 (或双端队列) 中至少要有 2 个元素。

## e.g. 1226 [HNOI 2008] 玩具装箱

## 定理

对于  $\text{slope}(j, k) < 2P_i$ , 若  $P_i$  递增 ( $P_i = i + s_i - 1 - L$ , 的确递增), 则只要在某个时刻满足了该不等式, 那么  $k$  永远不会再次成为最优决策。证明显然。

根据定理 1, 双端队列中不存在  $\text{slope}(j, k) < \text{slope}(k, l)$  的情况, 换句话说, **斜率是递增的**。我们只需要不断把队首使得斜率小于  $P_i$  的元素弹出队首, 则最后队首剩下的元素就是状态  $i$  的决策。

```
while (tail - head > 1 &&
      slope(deque[head + 1], deque[head]) < K(i))
{
    head++;
}
f[i] = DP(i, deque[head]);
```

## 斜率优化的一般方法

- 1 得出状态转移方程  
如果这步错了，你可以去爆零了。
- 2 比较决策  
设决策  $j > k$ ，写出  $j$  比  $k$  优的不等式。
- 3 化简不等式  
就目前为止，必须满足两个条件：

- 1 能够化简成斜率形式，即分母符号确定。
- 2 不等式右侧使得定理 2 成立。

- 4 按单调队列优化的方法敲代码  
这也说明，斜率优化的时间复杂度为**均摊**  $O(n)$ 。

# 例题

## ■ 1121 遥远的金字塔

在历史课上，你有一个金字塔的侧视图。这个金字塔一共有  $n$  层，从下至上编号为 1 至  $n$ 。除了第一层外，其余层均被它底下的一层包含，所以金字塔并不会垮掉。即如果  $x_i, y_i$  分别表示第  $i$  层的左、右端点，则对于任意的  $i \geq 2$ ，都有  $x_i \geq x_{i-1}$ ，且  $y_i \leq y_{i-1}$ 。每一层矩形的高度均为 1。现在的问题是，在整个侧视图中选择恰好  $k$  个不相交的矩形（边缘可以重合，矩形高度不一定是 1），覆盖的面积最大是多少。

## ■ UOJ 104 [APIO 2014] 序列分割

## e.g. 1120 逗气

在一根数轴上，有  $n$  个能量塔，能够放出能量。它们的位置分别在  $a_i$ ，能量值分别为  $b_i$ 。在这根数轴上还有  $m$  个收集塔，能够收集能量，它们的位置分别在  $c_i$ ，能量收集能力为  $d_i$ 。 $i$  号收集塔实际能够从  $j$  号能量塔收集的能量为：

$$\max(b_j - |a_j - c_i| \times d_i, 0)$$

若每个收集塔只能收集一个能量塔的能量，问每个收集塔能够收集的最大能量是多少。能量塔能被多个收集塔收集并且互不影响。

$$n, m \leq 2 \times 10^5, \quad a, b, c, d \leq 10^9。$$



e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

对于一座收集塔，我们把左右两边的能量塔分开处理。下面只讨论收集塔左边的能量塔。

对于收集塔  $j$ ，它能从左边的能量塔收集到的最大能量为：

$$\max_{a_j < c_i} \{b_j - (c_i - a_j) \times d_i\}$$

(我们就不管那个 0 了)

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

根据套路，我们设  $a_j > a_k$ 。若  $j$  比  $k$  更优，则有：

$$b_j - (c_i - a_j) \times d_i > b_k - (c_i - a_k) \times d_i$$

根据套路化简得：

$$(b_j - b_k) > -d_i \times (a_j - a_k)$$

由于  $a_j > a_k$ ，所以：

$$\frac{b_j - b_k}{a_j - a_k} > -d_i$$

显然左侧跟我们之前的斜率优化的形式如出一辙，如果  $-d_i$  递减，那么这道题就跟前面完全一样了。因为只要在某一时刻满足了上式，那么上式就会一直满足。

然而  $d_i$  变化莫测.....

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

所以先就着这道题讲一下斜率优化的几何意义。

$$\frac{b_j - b_k}{a_j - a_k} > -d_i$$

我们把决策  $j$  看作平面直角坐标系上的一点  $(a_j, b_j)$ ，那么上式的几何意义就是：若  $j > k$ ，且  $j, k$  两点的斜率大于  $-d_i$ ，那么  $j$  比  $k$  优；若小于  $-d_i$ ，那么  $j$  比  $k$  劣。

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

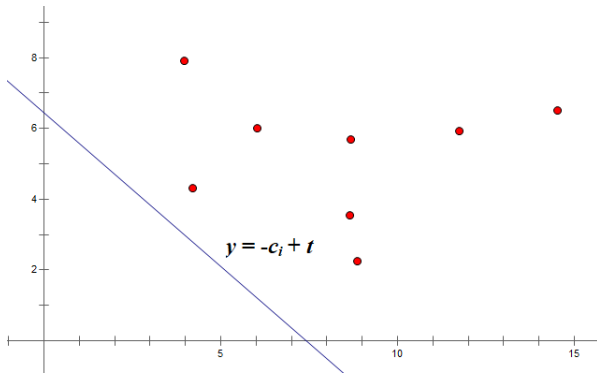


图: 斜率固定的直线与坐标固定的决策点们。

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

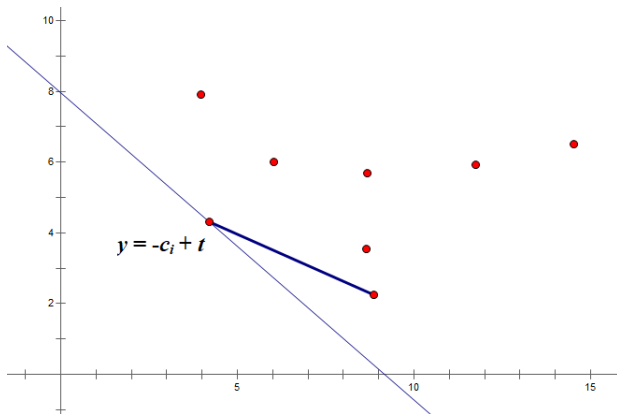


图: 由于两点斜率大于  $-d_i$ , 因此左边的那个点更劣。

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

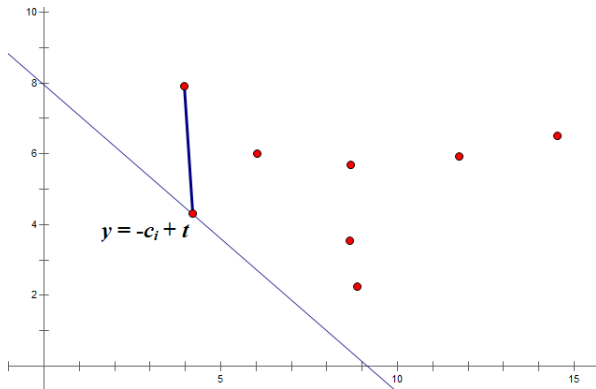


图: 由于两点斜率小于  $-d_i$ , 因此右边的那个点更劣。

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

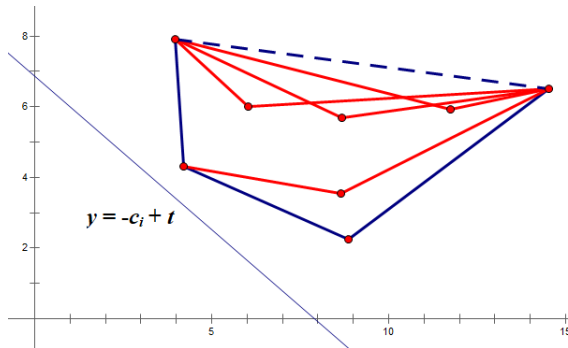


图: 无论  $-d_i$  是多少, 被蓝线包围了的点似乎永远不会最优。

e.g. 1120 逗气

e.g. 1120 逗气

## 定理

设  $a_j > a_k > a_l$ ,  $\text{slope}(j, k) = \frac{b_j - b_k}{a_j - a_k}$ 。

若  $\text{slope}(j, k) > \text{slope}(k, l)$ , 则  $k$  永远不是最优决策点。

可以发现, 在蓝线中的这些点正好就是上面说的永远不是最优决策点的点。

我们称蓝线上的点为凸包。



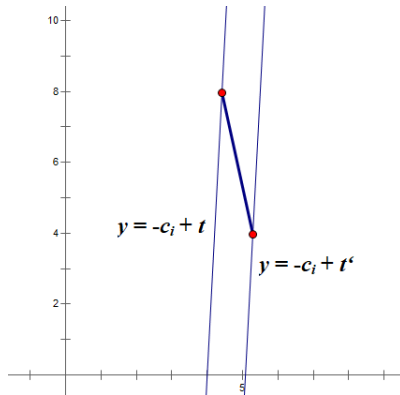
## 斜率优化的几何意义

我们实际上是要找一个决策点，使得直线正好过该点与凸包相切。  
相切的意思是与凸包只有一个交点。

这个东西可以二分。设二分到的决策点为  $mid$ 。若  $mid$  左边的点到  $mid$  的斜率与  $mid$  右边的点到  $mid$  的斜率都小于  $-d_i$ ，说明还要往右；如果都大于  $-d_i$ ，说明还要往左。

## 实现

实际上我们不写二分，因为你会发现边界情况似乎很含糊。



图：到底谁是切点？

## 实现

我们只需要回归本质，若满足了不等式，就向右走。

```
if (top)
{
    int t = 0;
    int k = 0;
    while (1 << k < (top - 1)) k++;
    for (int j = k; ~j; j--) if (t + (1 << j) < top)
    {
        if (slope(stack[t + (1 << j)], stack[t + (1 << j) - 1]) > -tb.d)
            t += 1 << j;
    }
    f[idx[i]] = std::max(f[idx[i]], DP1(idx[i], stack[t]));
}
```

图：一个倍增实现，实质上跟二分一样。

## 为什么不能用单调队列优化

与第一个例题对比一下哪里不同，应该就知道为什么不能用单调队列，而只能用单调栈了。

时间复杂度显然为  $O(n \log n)$ 。

## e.g. Luogu 3994 高速公路

C 国有  $n$  个城市，构成一棵以首都（1 号城市）为根的树。假设一个人要从  $i$  号城市到  $j$  号城市，规定  $j$  只能为  $i$  的祖先，那么它要花费的金钱为：

$$P_i \times \text{dist}(i, j) + Q_i$$

其中  $\text{dist}(i, j)$  表示  $i$  到  $j$  的距离。

由于距离首都越远，国家的监管就越松，所以祖先的  $P_i$ （单位距离价格）一定比子孙的  $P_i$  大。求每一个城市到 1 号城市需要花费的最少金钱。

$n \leq 10^6$ ，保证结果不超过 long long。

## e.g. Luogu 3994 高速公路

练习：假设这不是一棵树，而是一条链。推出斜率优化的不等式，并写出一个决策点永远不会称为最优决策点的条件。指出这道题应该使用单调队列还是单调栈，并说明理由。

e.g. Luogu 3994 高速公路

## e.g. Luogu 3994 高速公路

如果这道题是一条链，就是一个裸的斜率优化。现在变成树了，其实质并没有改变，**因为一个位置的决策点只会是它的祖先们，它们的结构还是构成一条链。**

但由于这道题是一棵树，因此我们在退出子树时要把单调栈还原成没有进入过这棵子树的样子。

练习：想一想，为什么？

我们可以保存进入子树前的栈顶位置等信息，元素出栈时不把它从数组中清空，只改变栈顶位置。当离开子树时直接恢复栈顶位置等信息。**由于每次只会入栈一个元素**，因此我们只需要保存入栈时被覆盖的元素的位置与这个位置之前的值，以便恢复。当然，这要求我们用数组实现这个栈。

练习：这道题能够用  $O(n)$  的方法处理入栈时其它元素的出栈吗？说明理由。

e.g. Luogu 3994 高速公路

e.g. Luogu 3994 高速公路

练习：这么做的时间复杂度是多少？



e.g. Luogu 3994 高速公路

e.g. Luogu 3994 高速公路

讨论：还有更高级的斜率优化吗？

# 基础

- 1040 烽火传递
- 925 修剪草坪
- 1042 猴子
- 1226 玩具装箱
- 1121 遥远的金字塔
- UOJ 104 [APIO 2014] 序列分割
- 1228 [APIO 2010] 特别行动队
- 1229 土地购买
- Luogu 4360 锯木厂选址
- 1120 逗气

# 高级

(选做)

- *Luogu 3994* 高速公路
- *Luogu 2305 [NOI 2014]* 购票