

NOI模拟赛

SDSZ

2018 年 6 月 21 日

1 LiaPo

这是一道签到题，起这个名字只是为了有那么 10^{-10} 的可能性误导大家。

LiaPo如果是人名的话，一定是这个世界上最难听的人名。

这道题是搬的，原题为UOJ Round 16 T1 (那我是不是可以不写题解子)

1.1 问题描述

长度为 n 的环，每个点染色，有 m 种颜色，要求相邻相对不能同色，求方案数。

1.2 问题求解

1.2.1 算法1

如果 n 为奇数，那么没有相对的情况，考虑 f_{ij} (j 为0或1)的dp表示当前这位是否和第一位相同，用矩阵转移即可。

复杂度 $O(\log n)$

1.2.2 算法2

优秀的搜(song)一搜(song)。

复杂广

1.2.3 算法3

将相对的两颗珠子同时考虑，那么只用考虑转半周。

状态中记录当前的 $(i, i + \frac{n}{2})$ 和 $(1, \frac{n}{2})$ 的颜色是否相同，为一个二位三进制的状态。

矩阵转移一下就好了。

预处理转移除了分类讨论/打表可能也没什么好的方法，比较繁琐。

复杂度 $O(\log n)$

2 最小拓扑序

这道题其实也不是我们原创的，本来想放在好题选讲里，但发现题目不够子，就只好放在考试里了。

可能这道题的部分分都是假的（逃

题目来源：2015-2016 ACM-ICPC, NEERC, Northern Subregional Contest, G

2.1 问题描述

你有一个有向无环图，你可以加至多 k 条有向边，使得：

A.新的图仍然是有向无环图

B.这个图的最小拓扑序字典序最大

请你求出这个最小拓扑序，并输出连边方案。

2.2 问题求解

2.2.1 算法1

枚举每条边加不加+玄学剪枝或是随机化，应该可以通过?个测试点，时间复杂度 $O(???)$

2.2.2 算法2

考虑对每个点加边的时候，实际上每个点作为终点的边只会被加一条(我们可以让最终答案在它前面的某一个位置的点向它连边)，因此其实要搜索的状态不是很多，应该可以过不少的测试点，时间复杂度 $O(???)$

2.2.3 算法3

考虑拓扑排序的过程，我们维护一个小根堆来维护每个当前度数为0的点，每次从小根堆中选择根节点弹出，并将它所发出的边从原图中删去。这道题有所不同的是，在弹出之前，我们可以进行加边操作，使得最小字典序变大。当我们要从小根堆弹出一个点的时候，我们不直接删除它，而改为将其加入另外一个大根堆，相当于标识要加一条新的边并指向它，并把我们的能加的边数-1。但当出现以下几种情况的时候，我们要单独处理：

A.当前小根堆没有点了，这时大根堆里我们就可以随便安排拓扑序了，我们为了让字典序最大，显然让最大的点出堆，并在所连的边加上一条 pre 到 x 的边，其中 pre 为上一次拓扑排序的点， x 为这一次弹出的点。

*B.*当前小根堆只有1个点，并且大根堆里没有元素，或者大根堆里的元素比小根堆里的元素还要小，此时加边是不允许的（第二种情况是不优的），我们就不再加边，改为直接让小根堆里的元素弹出。

*C.*无边可加，此时处理方法与*B*类似。

时间复杂度 $O((n + k)\log n)$

3 构筑法阵

终于到原创题了！不过，这题却是一道良心（毒瘤）提交答案题。

3.1 问题描述

给出 n, m, t , 和矩阵 A 。要求构造一个序列 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ ，使满足 $0 \leq B_i \leq \text{limit}_i, \sum_{i=1}^n B_i \cdot \text{Cost}_i \leq t$ ，最大化 $\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot B_j \right|$ ，提交答案，按答案优劣程度给分。

3.2 问题求解

3.2.1 测试点1和2

n, m 较小，随机化贪心即可获得非常好的答案。

3.2.2 测试点3

A 矩阵全部都是正数，因为 B 非负，答案的表达式中绝对值可以去掉，贪心取贡献较大的元素即可。

3.2.3 测试点4

A 矩阵中全部都是负数，与测试点3类似。

3.2.4 测试点5

A 矩阵中大多数位置都是0，每列恰好有一个位置非0，不同的 B_i 对答案贡献独立，贪心取贡献较大的元素即可。

3.2.5 测试点6

A 矩阵中大多数位置数比较小，有很少部分位置数的绝对值很大，贪心时加入一些随机因素即可获得非常好的答案。

3.2.6 测试点7

n 只有2，可以通过 2^m 枚举每行乘积和值为正或负，增加 m 条限制，每条限制相当于一个半平面， B_1, B_2 能取值的范围即这些半平面的交。因为枚举了每行的正负，最后每种情况最后答案的表达式也可以确定出来，让答案最大化即让对应直线的 y 轴截距最大，这时该直线一定过半平面交的某个顶点。遗传算

法，蒙特卡罗算法和其他一些非完美算法在 $n = 2$ 时表现也比较出色，能得到不错的答案。

3.2.7 测试点8,9,10

仿照测试点7的思路，枚举每行乘积和值为正或负，每条限制都是一条不等式，最后答案表达式也可以确定出来，问题转化为一个线性规划问题，使用单纯形算法求解即可。