1 GCD 5

1.1 60 分做法

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\operatorname{lcm}(x,y)\\
=&\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\frac{xy}{\gcd(x,y)}\\
=&\sum_{g=1}\frac{1}{g}\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{g}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{g}\rfloor}[\gcd(x,y)=1](xg)(yg)\\
=&\sum_{g=1}g\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{g}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{g}\rfloor}xy\sum_{d|\gcd(x,y)}\mu(d)\\
=&\sum_{g=1}g\sum_{d=1}\mu(d)\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{gd}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{gd}\rfloor}(xd)(yd)\\
=&\sum_{g=1}g\sum_{d=1}d^2\mu(d)\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{gd}\rfloor}\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{gd}\rfloor}xy\\
=&\sum_{g=1}g\sum_{d=1}d^2\mu(d)(\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{gd}\rfloor}x)(\sum_{y=1}^{\lfloor\frac{m}{gd}\rfloor}y)\\
=&\frac{1}{4}\sum_{g=1}g\sum_{d=1}d^2\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{gd}\right\rfloor(\left\lfloor\frac{n}{gd}\right\rfloor+1)\left\lfloor\frac{m}{gd}\right\rfloor(\left\lfloor\frac{m}{gd}\right\rfloor+1)
\end{aligned}
$$

可以知道：

$$F(n)=n^2\mu(n)$$

是积性函数，预处理后加上分块能够得到 60 分。

1.2 100 分做法

继续化简：

$$
=\frac{1}{4}\sum_{t=1}\left\lfloor\frac{n}{t}\right\rfloor(\left\lfloor\frac{n}{t}\right\rfloor+1)\left\lfloor\frac{m}{t}\right\rfloor(\left\lfloor\frac{m}{t}\right\rfloor+1)\sum_{g|t}g\cdot(\frac{t}{g})^2\mu(\frac{t}{g})
$$

右边的和式是一个狄利克雷卷积的形式，且原函数均为积性函数，所以可以使用欧拉筛。

设：

$$G(n)=\sum_{d|n} d\cdot(\frac{n}{d})^2\mu(\frac{n}{d})$$

可以知道：

$$G(n)=1$$

$$G(p)=p-p^2$$

$$G(p^k)=p^k-p^{k+1}$$

$$G(p^{k+1})=pG(p^k)$$