

# 数论函数基础（入门）

Orange

CQ No.11 High

2018 年 4 月 29 日

# 零碎的东西

把定义域为正整数，值域被包含于复数域的函数称为数论函数。

# 零碎的东西

把定义域为正整数，值域被包含于复数域的函数称为数论函数。

将真或假的命题放在方括号中。当命题为真时，命题的结果为 1；为假时，结果为 0。这种表示方法叫作艾弗森约定。

$$[\text{statement } k] = \begin{cases} 0, & k = \text{false} \\ 1, & k = \text{true} \end{cases}$$

# 唯一分解定理

# 积性函数与完全积性函数

# 常见积性函数

$$\epsilon(n) = [n = 1]$$

$$1(n) = 1$$

$$\text{id}(n) = n$$

# 常见积性函数

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$$
$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

# 欧拉筛



# 时间复杂度

# 使用欧拉筛求积性函数

e.g. (有可能有用的一个子问题)

给定一个正整数  $k$ ，有很多组询问，每次询问给定一个正整数  $n (n \leq 10^7)$ ，求：

$$\sum_{i=1}^n i^k$$

结果对 998244353 取模。

e.g. 1306. GCD 1

给定一个正整数  $n (n \leq 10^7)$ , 求满足  $1 \leq x, y \leq n$  且  $\gcd(x, y)$  为素数的数对  $(x, y)$  有多少对。

# 狄利克雷卷积

定义数论函数  $h$ :

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

称  $h$  为  $f$  和  $g$  狄利克雷 (Dirichlet) 卷积。

# 狄利克雷卷积

定义数论函数  $h$ :

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

称  $h$  为  $f$  和  $g$  狄利克雷 (Dirichlet) 卷积。

狄利克雷卷积满足:

$$f * g = g * f$$

$$f * g * h = f * (g * h)$$

$$f * \epsilon = f$$

# 积性

如果  $f$  和  $g$  均为积性函数，则有  $f * g$  为积性函数。

# 积性

如果  $f$  和  $g$  均为积性函数，则有  $f * g$  为积性函数。

如果  $f$  和  $g$  均为完全积性函数，则有  $f * g$  为完全积性函数。



# 积性

如果  $f$  和  $g$  均为积性函数，则有  $f * g$  为积性函数。

如果  $f$  和  $g$  均为完全积性函数，则有  $f * g$  为完全积性函数。

所以积性函数的狄利克雷卷积可以使用欧拉筛计算。

e.g. Longge's problem

给定 unsigned int 范围内的正整数  $n$ , 计算:

$$\sum_{i=1}^n \gcd(i, n)$$

提交人	班级	结果	分数	内存	时间	代码长度	语言	提交时间
李沿橙(Orange Lee)		Accepted	10	128kB	59ms	1329 B	G++	3天前
李沿橙(Orange Lee)		Wrong Answer	0	128kB	28ms	1321 B	G++	3天前
任熙来		Time Limit Exceeded	0	2176kB	1000ms	591 B	G++	3天前
任熙来		Time Limit Exceeded	0	128kB	1000ms	484 B	G++	3天前
杜博		Time Limit Exceeded	0	128kB	1000ms	412 B	G++	6天前
唯莫		Accepted	10	128kB	17ms	358 B	G++	17.5.9
汤淳熙(tot)		Time Limit Exceeded	0	128kB	1000ms	652 B	G++	17.5.9
201830419(陈倚云)		Time Limit Exceeded	0	128kB	1000ms	417 B	G++	17.5.9
201830419(陈倚云)		Accepted	10	128kB	16ms	419 B	G++	17.5.9
李沿橙(Orange Lee)		Accepted	10	128kB	73ms	605 B	G++	17.5.9
汤淳熙(tot)		Time Limit Exceeded	0	128kB	1000ms	742 B	G++	17.5.9
李沿橙(Orange Lee)		Accepted	10	128kB	301ms	743 B	G++	17.5.9
宋梅(minnie)		Accepted	10	128kB	18ms	766 B	G++	17.5.8

TLE 的同学，请复习一下时间复杂度。

e.g. 1311. GCD 6

其中的一个子问题。

计算：

$$\sum_{n=1}^{10^7} \sum_{d|n} d \cdot \varphi(d)$$