机　　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 1-1: 机率概论
- 1-2: 集合论
- 1-3: 机率名词介绍

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

1-1: 机率概论

第一周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率范例

- 丢铜板看到正面机率为 0.52
- 明天下雨机率为 60%
- 丢四颗骰子得到一色的机率为 1/216
- 那...椅子单脚站三天三夜的机率为？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我和我的小伙伴们都惊呆了！

yes123求職網 | 新聞發言台 | 爆料

自由時報 電子報
The Liberty Times ・社會新聞

自由新聞 | 影音娛樂 | 讀者園地 | 旅遊玩樂 | 好康報報 | TAIPEI TIMES | Blog | 新聞

頭版新聞
證券表格
焦點新聞
政治新聞
社會新聞
生活新聞
國際新聞
愛心暖流
自由言論
爆料投訴
財經新聞
體育新聞
運動彩券
教育新聞
健康醫療
地方新聞
影視名人
流行消費
藝術文化
生活副刊

首頁 > 社會新聞

2009-2-10

字型：+ − | 看推薦 | 發言 | 列印 | 轉寄

奇…神轎單腳站3天

新竹縣北埔鄉水石祭村順天宮6日深夜辦法事時，住持溫振松突然起乩，隨手拿碗蓋在桌上，讓小神轎單腳站立，持續3天3夜後，獲神明同意才請下來。消息傳出，信眾嘖嘖稱奇，北埔鄉代會主席姜良明說，這如同擲出立筊一樣罕見。

（圖文：記者陳儀珊）

新竹縣北埔鄉水石祭村順天宮6日深夜辦法事時，住持溫振松突然起乩，隨手拿碗蓋在桌上，讓小神轎單腳站立，持續3天3夜後，獲神明同意才請下來。消息傳出，信眾嘖嘖稱奇，北埔鄉代會主席姜良明說，這如同擲出立筊一樣罕見。
（圖文：記者陳儀珊）

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

先忘了被惊呆了小伙伴们...

- 机率 ＝ 0.6 代表什么意思？
- 在回答这个问题前我们先问：
  - 距离 ＝ 1.23 公尺是什么意思？

    代表 $1.23 \times \frac{1}{299792458}$ 秒中光所走的距离

  - 时间 ＝ 8.2 秒是什么意思？

    代表 8.2×919263170 倍的铯原子震荡周期

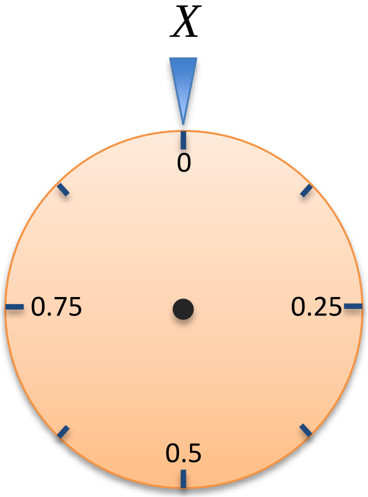
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我们该怎么理解机率 = 0.6?

幸运之轮

Wheel of Fortune

（圆周长度为 1 ）

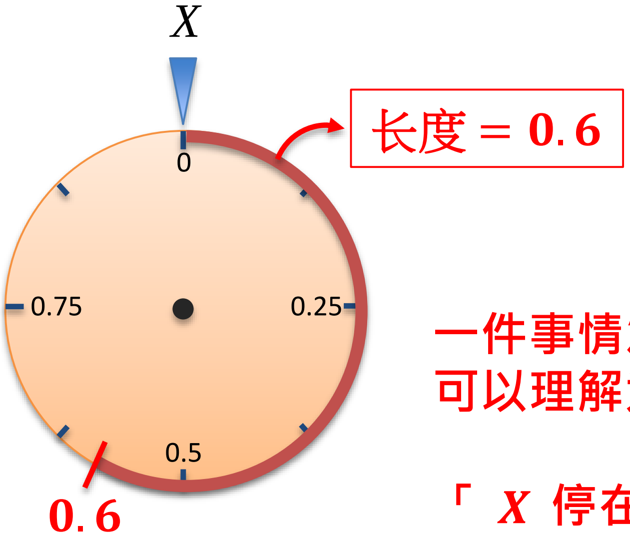


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我们该怎么理解机率 = 0.6?

幸运之轮
Wheel of Fortune

（圆周长度为 1 ）



一件事情发生的机率 = 0.6
可以理解为可能性跟幸运之轮

「 X 停在长度为 0.6 的红边上」

这件事情发生机率是一样的！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

为什么我们要研究机率？

- 我们对这个世界了解的太少
  这世界的运作有很多是未知的
- 世间事不见得都是必然的（deterministic）
  有很多事情是有随机性的（random）

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率与统计的差异

- 机率：
  - 机率模型已知，要学会怎么算某些事件的机率
  - Ex: 已知一骰子为公平骰，看到偶数的机率为何？
- 统计：
  - 机率模型未知，要学会怎么从大量的实验结果中去建立机率模型
  - Ex: 不知一骰灌铅否，欲知各点出现之机率模型？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

1-2: 集合论

第一周

「学生上课不规矩」的机率＝0.1
P(学生上课不规矩)＝0.1
机率函数的自变量是：事件，而事件，是一种集合

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合论名词复习

- 元素 (Element)
  - Ex: 小黑、小冀、小湘、小鄂、小美
- 集合 (Set)
  - Ex: 咸豆腐脑党 $\boldsymbol{A}$ = $\boxed{\{黑, 冀\}}$
  - Ex: 甜豆腐脑党 $\boldsymbol{B}$ = $\boxed{\{湘, 鄂\}}$
- 子集合 (Subset)
  - Ex: 嫌咸党 $\boldsymbol{C}$ = $\boxed{\{湘, 鄂, 美\}}$
  - $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的子集，表示为：$\boxed{\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合论名词复习

- 宇集 (Universal Set)
  - Ex: $\boldsymbol{S} = \boxed{\{黑, 冀, 湘, 鄂, 美\}}$
- 空集合 (Empty Set)
  - Ex: $\boldsymbol{\phi} = \boxed{\{\ \}}$
- 交集 (Intersection)
  - Ex: 喜欢甜豆腐脑且咸豆腐脑者 $= \boxed{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\ \} = \boldsymbol{\phi}}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合论名词复习

- 联集 (Union)
  - Ex: 喜欢甜豆腐脑或咸豆腐脑者 =

    $\boxed{A \cup B = \{\text{黑, 冀, 湘, 鄂}\}}$
- 补集 (Complement)
  - Ex:嫌咸党 C = 咸党 A 之补集 $\boxed{C = A^c}$
- 差集 (Difference)：$X-Y=\{$有在 X 但不在 Y 中的东西$\}$
  - Ex:嫌咸党− 甜党 = $\boxed{C - B = \{\text{美}\}}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合论名词复习

- 不相交 (Disjoint)：

  如果 $X \cap Y = \phi \rightarrow X, Y$ 不相交

  - Ex:

    甜党∩咸党={ }，亦即甜党、咸党不相交!

- 互斥 (Mutually Exclusive)：若一群集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 中任选两个集合 X_i, X_j 都不相交，则我们称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 这群集合互斥

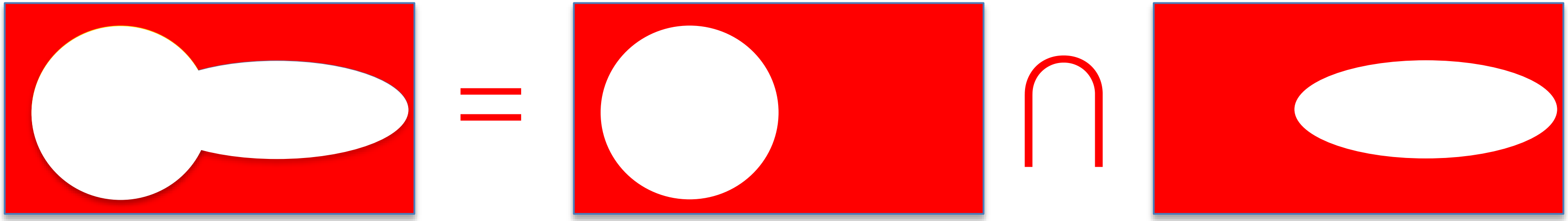
  - Ex: **甜党、咸党、小美党，三者两两不相交，故三者互斥!**

De Morgan’s Law 定理

- De Morgan’s Law：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

  - Ex:



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

De Morgan's Law 证明

- De Morgan's Law：

$$\boxed{(A \cup B)^C = A^C \cap B^C}$$

- 证明：

$\rightarrow$:

Assume $x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ *and* $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ *and* $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow \boxed{(A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)}$

$\leftarrow$:

Assume $x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ *and* $x \notin B$

If $x \notin (A \cup B)^c$

$\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ *or* $x \in B$ $\rightarrow\leftarrow$

Thus $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow \boxed{(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c}$

1-3: 机率名词

第一周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

实验 (Experiment)

- 一个机率「实验」包含了：
  步骤 (procedures)、模型 (model)、观察(observations)
  - Ex: 丢两公平骰
    - 步骤：「伸手取起桌上二骰，紧握后，手微微开口后向内吹口气。之后默祷，再将骰丢入碗中，直至停止为止。」
    - 模型：(1, 1)、(1, 2) 、… 、(6, 6) 等发生机会均等
    - 观察：(6, 6)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

结果 (Outcome)

- 「结果」是实验中可能的结果
  - Ex: 约心仪店员

    成功、失败

  - Ex: 看到华南虎

    立体的、平面的

  - Ex: 转幸运之轮

    $X = 0.4008823823\ldots$、$X = 0.0800080080\ldots$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

样本空间 (Sample Space)

- 「样本空间」是机率实验所有可能的结果的集合，通常用 S 来表示
  - Ex: 约心仪店员

$$\boxed{S = \{\text{成功、失败}\}}$$

  - Ex: 连丢三次铜板，记录正反面结果

$$\boxed{S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

样本空间 (Sample Space)

– Ex: 幸运之轮转一次

$$\boxed{S = [0, 1)}$$

– Ex:幸运之轮转两次

$$\boxed{S = [0, 1) \times [0, 1)}$$

事件 (Event)

- 「事件」指的是对于实验结果的某种叙述。
- 机率就是在讲实验结果符合某事件叙述的机会多大
- 在数学上，「事件」可以看成是「结果」的集合，亦即是「样本空间」的子集。
  - Ex:台大生的上课出席状况
    - 「结果」有哪几种：准时、迟到、旷课
    - 事件1：有出席；E_1= {准时、迟到}
    - 事件2：没规矩；E_2= {迟到、旷课}

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件 (Event)

（小明点数、小华点数）

- Ex: 小明、小华各丢一次公平骰，比点数大小，大者赢
  - 事件1：小明赢；$E_1 =$
    $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$
  - 事件2：小华赢；$E_2 =$
    $\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$
  - 事件3：平手；$E_3 =$
    $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

对于一个实验而言，究竟有多少个可能的事件呢？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空间 (Event Space)

- Ex: 台大生上课出席
  - $S =$ $\boxed{\{准时、迟到、旷课\}}$
- 「事件空间」=

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\{\ \},\{准时\},\{迟到\},\{旷课\},\\ \{准时,迟到\},\{迟到,旷课\},\{准时,旷课\},\\ \{准时,迟到,旷课\}\end{array}\right\}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空间 (Event Space)

- 「事件空间」是包含所有事件的集合
- 若「样本空间」$S=\{o_1,o_2,\dots,o_n\}$ 有 n 个「结果」
  - 「事件空间」=

$$\left[\begin{array}{l} \{\ \},\{o_1\},\{o_2\},\dots,\{o_n\}, \\ \{o_1,o_2\},\{o_1,o_3\},\{o_1,o_n\},\{o_2,o_3\},\dots,\{o_2,o_n\},\dots,\{o_{n-1},o_n\}, \\ \{o_1,o_2,o_3\},\dots,\{o_1,o_2,o_3,o_4\},\dots,\{o_1,o_2,\dots,o_{n-1}\},\dots.\{o_1,o_2,\dots,o_n\} \end{array}\right]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空间 (Event Space)

- 机率是一个函数，其自变量是：

P(事件) = 0.6 ⇒ 机率函数的自变量是：事件！

- 所以机率可以看成是一个映像

机率函数是从「事件空间」映射到 [0, 1]

P:「事件空间」→ [0, 1]

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题回顾

- 1-1: 机率概论
  - 如何理解机率 = 0.6 的意义?
- 1-2: 集合论
  - 集集复集集、不相交、互斥、De Morgan's Law
- 1-3: 机率名词介绍
  - 实验、结果、样本空间、事件、事件空间
  - 机率函数的本质：
    它是事件的函数(你给一个事件，它吐回一个数字给你)