机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 7-1: 期望值 II
- 7-2: 随机变量之函数
- 7-3: 条件机率分布与失忆性

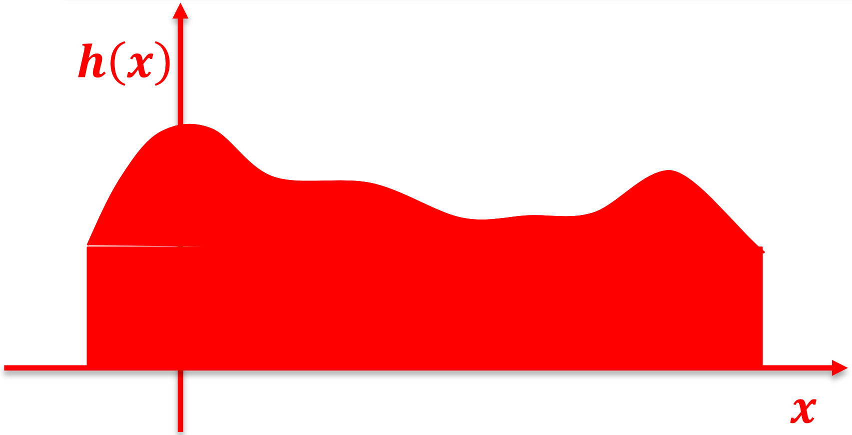
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-1: 期望值 II (EXPECTATION)

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

积分的近似概念



面积$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$

面积 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$

$$\Rightarrow \text{面积} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)

- 对连续的随机变数 X 而言，想求期望值，
  我们用类似离散随机变量的方式出发
- 将 X 的值以 Δ 为单位无条件舍去来近似
  结果：离散随机变数 Y （当$\Delta\rightarrow 0$ 时，$X\approx Y$)
- 根据第五周：
  - $p_Y(n\Delta)=P(n\Delta\leq X<n\Delta+\Delta)\approx f_X(n\Delta)\cdot\Delta$

$$X\in[0,\Delta)\rightarrow Y=0\Delta$$
$$X\in[1\Delta,2\Delta)\rightarrow Y=1\Delta$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\boxed{X\in[n\Delta,(n+1)\Delta)}\rightarrow Y=n\Delta$$

- $E[X]=\lim\limits_{\Delta\rightarrow 0}E[Y]=\lim\limits_{\Delta\rightarrow 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\Delta\cdot P_Y(n\Delta)$

$$=\lim_{\Delta\rightarrow 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\Delta\cdot f_X(n\Delta)\cdot\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变量的函数之期望值

- 对于任一连续随机变数 X 而言，其任意函数 $g(X)$ 亦是一随机变量，亦有期望值
- $g(X)$ 期望值定义为

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

※ 离散随机变数：$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值运算的性质

- $E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha\, g(x) + \beta\, h(x)] \cdot f_X(x)\, dx$$

- $= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx + \beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\, dx$

$$= \alpha \cdot E[g(X)] + \beta \cdot E[h(X)]$$

- Ex: $E\left[6\, X + 8\, X^2\right] = 6\, E[X] + 8\, E[X^2]$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值运算的性质

- $\boldsymbol{E[\alpha]}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot f_X(x)\, dx = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \alpha$$

Ex: $\boldsymbol{E[6] = 6}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见的随机变量函数期望值

- $\boldsymbol{X}$的 n^{th} moment：

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}^n\, \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$$

  - Ex: $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^2]$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{2^{nd}}$ $\boldsymbol{moment}$
  - Ex: $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}^5]$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{5^{th} moment}$

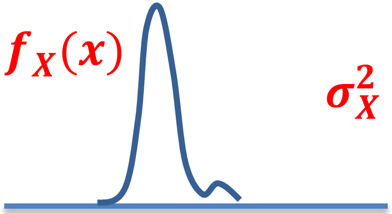
- $\boldsymbol{X}$的变异数 (variance)：

$$\boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X})^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})^2\, \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$$

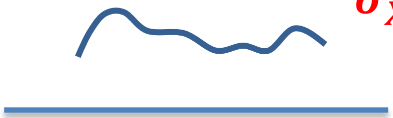
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

变异数 (Variance)

- Variance 通常符号表示为 $\boldsymbol{\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]}$
- 变异数隐含关于随机变数 $\boldsymbol{X}$ 多「乱」的信息



σ_X^2 小 $(\because x \approx \mu_X)$



σ_X^2 大 $(\because X$ 不见得接近 $\mu_X)$

- 变异数的开根号便是标准差 (standard deviation)： $\boldsymbol{\sigma_X}$

$$\sigma_X = \sqrt{Variance}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法

- $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$

$$= E\left[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E\left[X^2\right] \underbrace{- 2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2}_{-2\mu_X^2+\mu_X^2} = \boxed{E\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

$$\Rightarrow E\left[X^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续分布之期望值/变异数

- $X \sim Exponential(\lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim Erlang\ (n, \lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{n}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{n}{\lambda^2}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常见连续分布之期望值/变异数

- $X \sim Gaussian\ (\mu, \sigma)$：
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- $X \sim UNIF\ (a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值推导范例

分部积分：

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

- $X \sim Exponential(\lambda)$： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= -\int_0^{\infty} -x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\int_0^{\infty} \underbrace{x}_{U}\, d\, \underbrace{e^{-\lambda x}}_{V}$$

$$= -\left[x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$= -\left[0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 连续随机变数的期望值定义？
- 连续随机变量的函数的期望值？
- 「凑」字诀！
- 常见连续机率分布之期望值、变异数？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-2: 随机变量之函数

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

随机变数的函数

- 随机变数 $\boldsymbol{X}$ 的任意函数 $\boldsymbol{g(X)}$ 也是一个随机变数
- 通常被称为 Derived Random Variable

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如何求 $g(X)$ 机率分布？

- 若 X 为离散：
  - 直接推 $g(X)$ 的PMF
- 若 X 为连续：
  - 先推 $g(X)$ 的 CDF，再微分得到PDF

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 X 之函数

- Ex：某宅宅超爱战LOL。每次一战就连续战 X 场不可收拾，已知 $X \sim GEO(0.2)$。某宅宅内心仍有一点清明，其良心亦会因战过度而内疚，依战的次数多寡，内疚程度 Y 分别为 $1, 2, 3$ 不同等级:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \leq X \leq 3; \\ 2, & if\ 4 \leq X \leq 6; \\ 3, & if\ X \geq 7. \end{cases}$$

问 $Y = g(X)$ 的机率分布？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 X 之函数

- $Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \leq X \leq 3; \\ 2, & if\ 4 \leq X \leq 6; \\ 3, & if\ X \geq 7. \end{cases}$
- $X \sim GEO(0.2) \Rightarrow p_X(x) = (1 - 0.2)^{x-1} \cdot 0.2$
- $p_Y(1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)$
  $= 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.2$
- $p_Y(2) = p_X(4) + p_X(5) + P_X(6)$
  $= (0.8)^3 \cdot 0.2 + (0.8)^4 \cdot 0.2 + (0.8)^5 \cdot 0.2$
- $p_Y(3) = P(Y = 3) = 1 - p_Y(1) - p_Y(2)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

离散 $\boldsymbol{X}$ 之函数

- 当 $\boldsymbol{X}$ 为离散随机变数时，
  $\boldsymbol{Y = g(X)}$ 亦为离散随机变数
- $\boldsymbol{Y = g(X)}$ 之 PMF 为

$$\boldsymbol{p_{g(X)}(y) = \sum_{\substack{\text{会让}\\ g(x)=y\\ \text{的所有 } x}} p_X(x)}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数

- $Y = g(X)$ 且 X 为连续随机变数时

  先算 $g(X)$ 的CDF：

$$F_{g(X)}(y) = P[g(X) \leq y]$$

- 若 $g(X)$ 可微分，再对 y 微分得到PDF：

$$f_{g(X)}(y) = \frac{d}{dy} F_{g(X)}(y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $Y = 3X + 2$ ，请问 Y 的 PDF 跟 $f_X(x)$ 之关系为何？

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(3X + 2 \le y) \\
&= P\left(X \le \frac{y-2}{3}\right) \\
&= F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \\
&= \frac{dF_X\left(\frac{y-2}{3}\right)}{d\left(\frac{y-2}{3}\right)} \cdot \frac{d\,\frac{y-2}{3}}{dy} \\
&= f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX + b)$

- 若 $Y = aX + b$ 且 $a > 0$，则

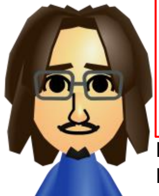
$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

what if $a < 0$?

$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(\frac{aX + b - b}{a} \ge \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = -\frac{dF_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{d\left(\frac{y-b}{a}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{y-b}{a}\right)}{dy} = -f_X\left(\frac{y-a}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX + b)$

- Ex：若 $X \sim Exponential(\lambda)$，且 $Y = 2X$，
  请问 Y 之机率分布为何？

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, u(x), Y = 2X\ (a = 2, b = 0)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda \frac{y}{2}} \cdot u\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} y} \cdot u(y)$$

$$\Rightarrow Y \sim Exponential\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

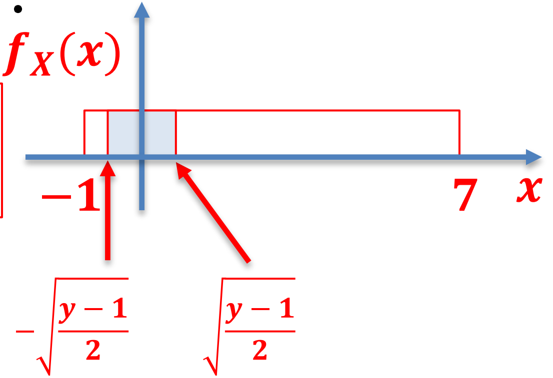
连续 X 之函数 $(g(X) = aX^2 + b)$

- Ex：若 $Y = 2X^2 + 1$ ，且已知 $X \sim UNIF(\text{-}1, 7)$。请问 Y 的 PDF 为何？

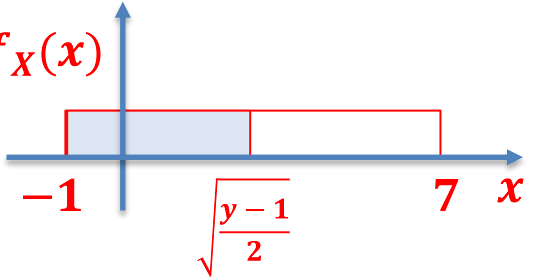
$$F_Y(y) = P(Y = 2X^2 + 1 \le y)$$
$$= P\left(X^2 \le \frac{y-1}{2}\right)$$
$$= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$
$$= \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} f_X(x)\, dx$$

$$\boxed{-1 = -\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow y = 3}$$

$y \le 3$: $f_X(x)$



$y > 3$: $f_X(x)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续 X 之函数 $(g(X) = aX^2 + b)$

$$y \le 3: F_Y(y) = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8}\, dx = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$$y > 3: F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8}\, dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow y \le 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$

$$y > 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 随机变量的函数又称？
- 若随机变数为离散，可直接推 $g(X)$ 之 PMF
- 若随机变数为连续，先推 $g(X)$ 之 CDF 再微分得到 PDF 比较好算

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

7-3: 条件机率分布与失忆性

第七周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

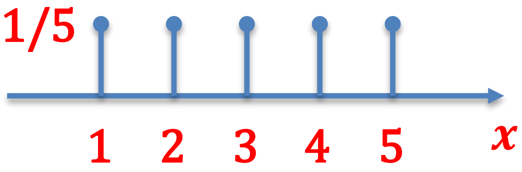
把条件机率用在机率分布上

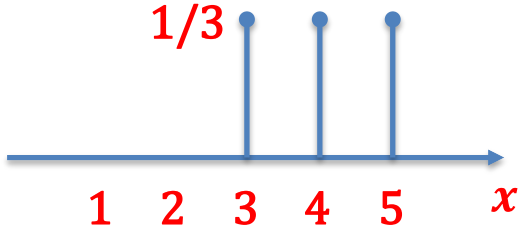
- Ex：为了更了解宅宅的心，店员妹亦开始战 LOL。
  已知店员妹战LOL场数 $X \sim UNIF\,(1,5)$。若已知店员妹战了两场仍战意甚浓、继续战。请问在此情况下，店员妹今日战LOL场数 X 之机率分布为何？

B：已战两场仍想战

$$p_{X|B}(x) = P(X = x|B) = \frac{P(X = x, B)}{P(B)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X = x)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}, & x \in B: x = 3, 4, 5 \\ 0, & x \notin B, x = otherwise \end{cases}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率分布 (Conditional Distribution)

- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一离散随机变数，其 PMF 为 $\boldsymbol{p_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已发生，则在此情况下之条件机率分布为：
  - PMF: $\boldsymbol{p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: \dfrac{p_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: \quad 0. \end{cases}}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x) = \boxed{\sum_{u \le x} p_{X|B}(u)} = \sum_{u \le x, u \in B} \frac{p_X(u)}{P(B)}}$

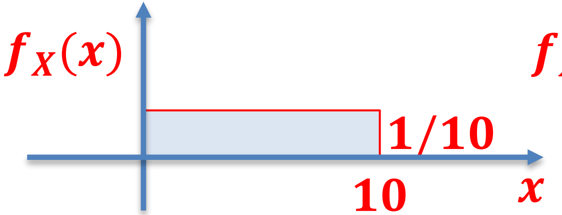
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

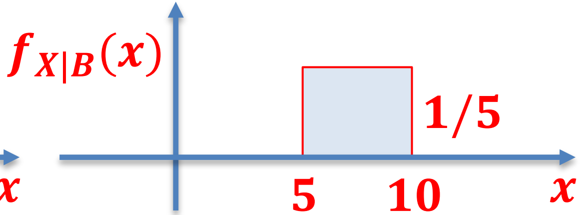
把条件机率用在机率分布上

- Ex：店员妹等公交车上班。通常等公交车的时间 X，从零到十分钟间可能性均等。若店员妹已等了五分钟车还没来。请问在此情况下，等车时间 X 之机率分布为何？

$X \sim UNIF(0, 10)$

$\boxed{B: X > 5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$





$$f_{X|B}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta] | B)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(X \in [x, x+\Delta], X \in B)}{P(X \in B)}$$

$$= \begin{cases} x \in B: \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta \cdot P(B)} = \boxed{\dfrac{f_X(x)}{P(B)}}, \\ x \notin B: \quad 0. \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件机率分布 (Conditional Distribution)

- 若 X 是一连续随机变量，其 PDF 为 $f_X(x)$。若已知某事件 B 已发生，则在此情况下之条件机率分布为：
  - PDF: $f_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: & \dfrac{f_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: & 0. \end{cases}$
  - CDF: $F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(u)du = \int_{-\infty \le u \le x, u \in B} \dfrac{f_X(u)}{P(B)} du$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知$\boldsymbol{B}$已发生，则此情况下条件期望值为：

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}\,|\boldsymbol{B}] = \begin{cases} \sum_{\boldsymbol{x}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) & (\text{离散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} & (\text{连续}) \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已发生，则此情况下条件期望值为：

$$E[g(X)\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p_{X|B}(x) & \text{(离散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_{X|B}(x)dx & \text{(连续)} \end{cases}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

条件期望值 (Conditional Expectation)

- 若知B已发生，则此情况下条件期望值为：

$$Var(X\,|B) = E\left[\left(X_{|B} - \mu_{X|B}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu_{X|B}\right)^2 \middle| B\right]$$

$$= E\left[X^2 \middle| B\right] - \left(\mu_{X|B}\right)^2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

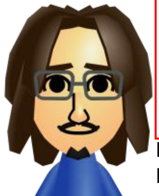
失忆性 (Memoryless)

- 宅宅与店员妹相约出门。宅宅出门前在战LOL，场数 $X \sim GEO\,(0.2)$ 。店员妹等了两场后，宅宅还在玩。店员妹甚怒，怒催宅宅。宅宅曰「快好了、快好了」。问宅宅剩余场数 X' 之机率分布为何？ $B: X > 2, X' = X_{|B} - 2$

$$p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B(x > 2): & \dfrac{P_X(x)}{P(B)} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{\sum_{x=3}^{\infty} 0.8^{x-1} \cdot 0.2} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{0.8^2 \cdot 0.2 \cdot \dfrac{1}{1-0.8}} = 0.8^{x-3} \cdot 0.2 \\ x \le 2: & 0 \end{cases}$$

$$p_{X'}(x) = P(X' = x) = P\left(X_{|B} - 2 = x\right) = P(X_{|B} = x + 2)$$

$$P_{X|B}(x+2) = 0.8^{x+2-3} \cdot 0.2 = 0.8^{x-1} \cdot 0.2 \Rightarrow X' \sim GEO(0.2)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

- 店员妹与宅宅相约出门。店员妹出门前化妆时间为 X（小时），$X \sim Exponential(1)$。经过一小时后，仍未完成。宅宅甚怒，怒催店员妹。店员妹曰「快好了、快好了」。问店员妹剩余化妆时间 X' 机率分布为何？ $B: X > 1, X' = X_{|B} - 1$

$$F_{X'}(x) = P(X' \le x) = P\left(X_{|B} - 1 \le x\right) = P(X_{|B} \le x + 1)$$

$$F_{X|B}(x+1) = \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = ? \quad F_{X'}(x) = ? \quad f_{X'}(x) = ?$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

$B: X > 1$

$$f_{X|B}(u) = \begin{cases} u \in B: \; (u > 1) & \dfrac{f_X(u)}{P(B)} = \dfrac{1 \cdot e^{-1u}}{P(X > 1)} = \dfrac{e^{-u}}{1 - F_X(1)} \\ & = \dfrac{e^{-u}}{1 - (1 - e^{-1})} = \dfrac{e^{-u}}{e^{-1}} = e^{-(u-1)} \\ u \notin B: & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'_X(x) = P(X' \le x) = P\left(X_{|B} - 1 \le x\right) = P\left(X_{|B} \le x + 1\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = \int_{1}^{x+1} e^{-(u-1)}du = \left[-e^{-(u-1)}\right]_1^{x+1}$$

$$= -e^{-x+1-1} - \left(-e^{-(1-1)}\right) = 1 - e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_{X'}(x) = 1 \cdot e^{-1 \cdot x}, x \ge 0; 0\ otherwise. \Rightarrow X' \sim Exponential(1)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失忆性 (Memoryless)

- Geometric 跟 Exponential 机率分布皆有失忆性的性质
- 不管事情已经进行多久，对于事情之后的进行一点影响都没有！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 某个事件发生后，随机变量的行为跟其机率分布也会改变：条件机率分布
- 条件随机变量也是一个健全、可爱的随机变数！
- 身为一个健全、可爱的随机变数，人家一般随机变数该有的条件随机变数也应该都有！PMF (PDF)、CDF、期望值、Mean、Variance 等
- 随机变数中会失忆的是？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University