机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成

Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 5-1: 机率密度函数 PDF
- 5-2: 连续机率分布 I

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

5-1: 机率密度函数 PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

第五周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

人家有，我也想要有…

- 离散的随机变数有 PMF 告诉我们某个数字发生的机率
- 连续变数的机率分布常有不均等的情况发生，Ex: 睡觉的时间长度
- 对连续的随机变量，我们也想知道某个数字发生的机会多大，可以用 PMF 吗?

连续R.V. 的先天问题

- 以幸运之轮为例 $X \sim [0,1)$,

$$p_X(0.7) = ?$$

$[0,1)$ 中每个数字发生机率均等，令其为 p
$[0,1)$ 中有没有超过 10^6 个数字？ 有！$\Rightarrow 10^6 \times p \le 1 \Rightarrow p \le 10^{-6}$
$[0,1)$ 中有没有超过 10^8 个数字？ 有！$\Rightarrow 10^8 \times p \le 1 \Rightarrow p \le 10^{-8}$
…
所以 $p_X(0.7) = p = 0$?!!!!!

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

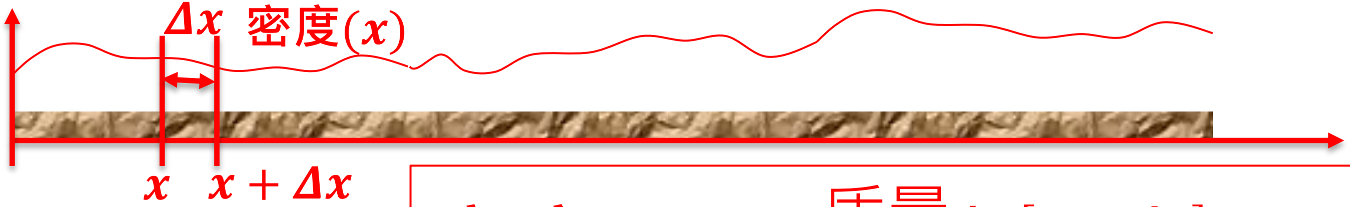
悲哀啊...

- 连续随机变量跟 PMF 注定就是没办法在一起，悲哀啊！
- 关键于每个数字发生的机率都是 0！
- 还是很想知道在某个数字发生的机会多大，怎么办?

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

先看个乱七八糟的例子

- 因为拍戏，特别订做合金宝剑
- 铜、金打造，如何得知有无偷工减料?
- 整根有质量，但是每点质量都是零？好熟悉！
- 不看质量看什么？看密度！



$$\text{密度 } at\ x \approx \frac{\text{质量 } in\ [x, x+\Delta x]}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

连续的东西，关键是密度！

- 宝剑有密度，机率也可有密度！
- 对随机变数 $\boldsymbol{X}$ 而言，其机率密度：

$$PDF\text{: } f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

$$= F'_X(x)$$

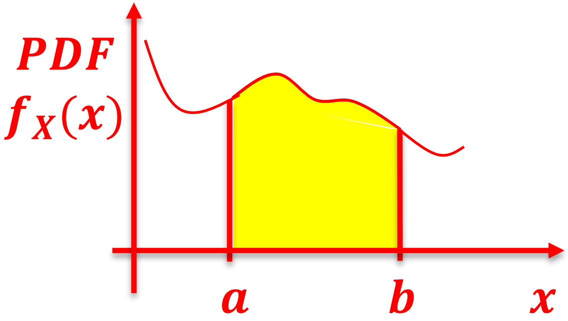
$$CDF\ \ F_X(x) \underset{\int_{-\infty}^{x}}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} PDF\ f_X(x)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 跟机率的关系

- 因为我们习惯处理机率，看到 PDF 如何把它跟机率连结呢?

$$
\begin{aligned}
P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\
&= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \\
&= \int_{a}^{b} f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

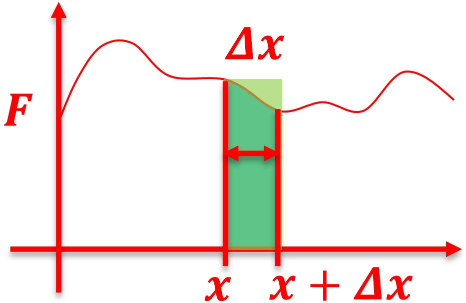


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 跟机率的关系

- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$
- 当 Δx 很小时：

$$P(x \le X \le x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 有哪些性质呢?

- $f_X(x) = F'_X(x)$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
- $f_X(x) \geq 0$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 连续随机变数每点发生机率是？
- 什么是机率密度函数 PDF？
- PDF 跟 CDF 的关系？
- PDF 的性质？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

5-2: 连续机率分布 I
(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

第五周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 机率分布

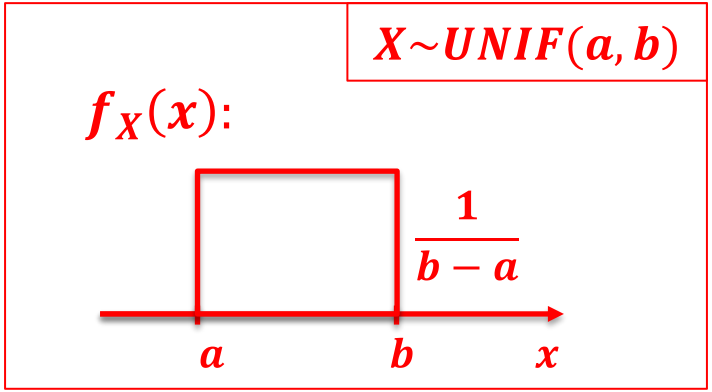
- PDF:

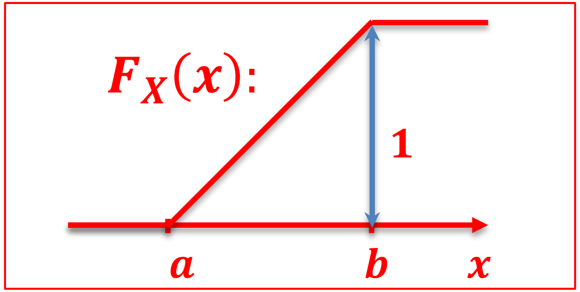
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 机率分布

- Ex: 已知1路公交车每十分钟一班。

  小美随意出发到公车站，小美须等候公交车

  之时间为 $\boldsymbol{X}$

$$X \sim UNIF(0,10)$$

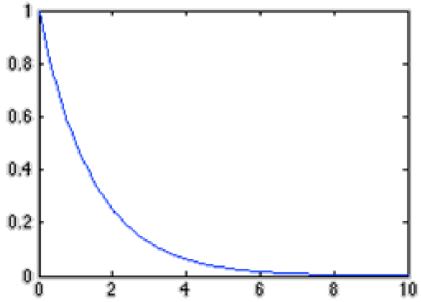
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Exponential 机率分布

- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$X \sim Exponential(\lambda)$



- CDF:
  - If $x \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du$$
$$= -\int_0^x e^{-\lambda u} d(-\lambda u)$$
$$= -\left[e^{-\lambda u}\right]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x}}$$

  - If $x < 0$: $F_X(x) = 0$.

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Exponential 机率分布

- Exponential 分布有失忆的性质 (memoryless)，常被用来 model 有这种性质的事情
  - Ex: 小美出门化妆所需之时间
  - Ex: 某宅打LOL所花的时间

Erlang 机率分布

- $X \sim Erlang(n, \lambda)$ **Gamma Distribution**

$$\text{PDF: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

※ $f_X(x) = \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) * (\lambda e^{-\lambda x}) * \cdots * (\lambda e^{-\lambda x})}_{n \text{ 次 } convolution}$

Erlang 机率分布

- CDF: $\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}} & \boldsymbol{, x \geq 0;} \\ \boldsymbol{0} & \textbf{, otherwise.} \end{cases}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 机率分布

- $\boldsymbol{Erlang(n,\lambda)}$ 常被用来 model 一件有多个关卡事情的总时间，而每个关卡所需时间都是随机的
  - 关卡数：$\boldsymbol{n}$
  - 每关卡所需时间之机率分布 $\boxed{\boldsymbol{Exponential(\lambda)}}$
  - Ex: 打电动过三关所需时间 $\boxed{\boldsymbol{Erlang(3,\lambda)}}$
  - Ex: 写完五科作业所需时间 $\boxed{\boldsymbol{Erlang(5,\lambda)}}$

本节回顾

- Uniform 机率分布？
- Exponential 机率分布？
  - 有失忆性（以后会证明）
- Erlang 机率分布？
  - 跟 Exponential 的关系？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University