机　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh
部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 8-1: 联合机率分布
- 8-2: 边际机率分布
- 8-3: 双变数期望值

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

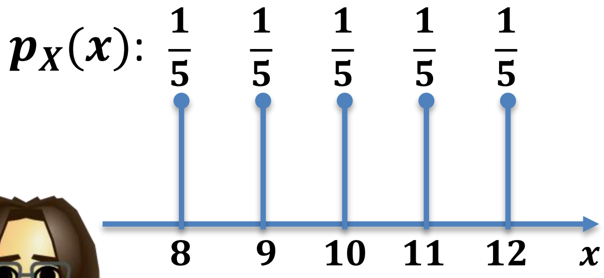
8-1: 联合机率分布
(JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION)

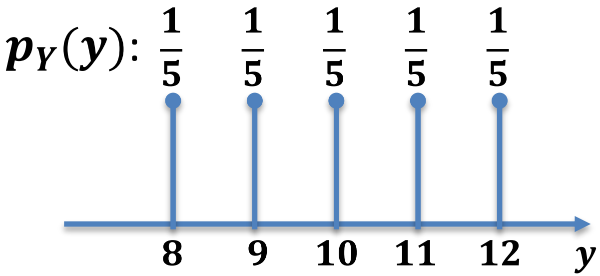
第八周

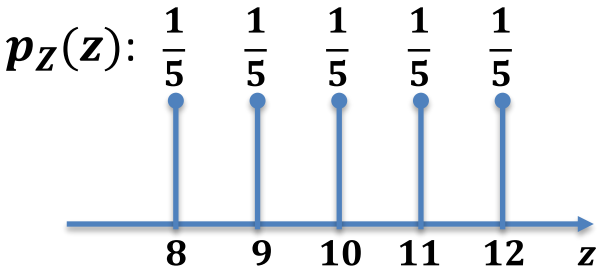
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当小明出国去交换时

- $\boldsymbol{X}$: 小美脸书/QQ 脱机时间，$\boldsymbol{X \sim UNIF(8,12)}$
- $\boldsymbol{Y}$: 小华脸书/QQ 脱机时间，$\boldsymbol{Y \sim UNIF(8,12)}$
- $\boldsymbol{Z}$: 小园脸书/QQ 离线时间，$\boldsymbol{Z \sim UNIF(8,12)}$
- 假设 $\boldsymbol{X, Y, Z}$ 都是离散随机变数



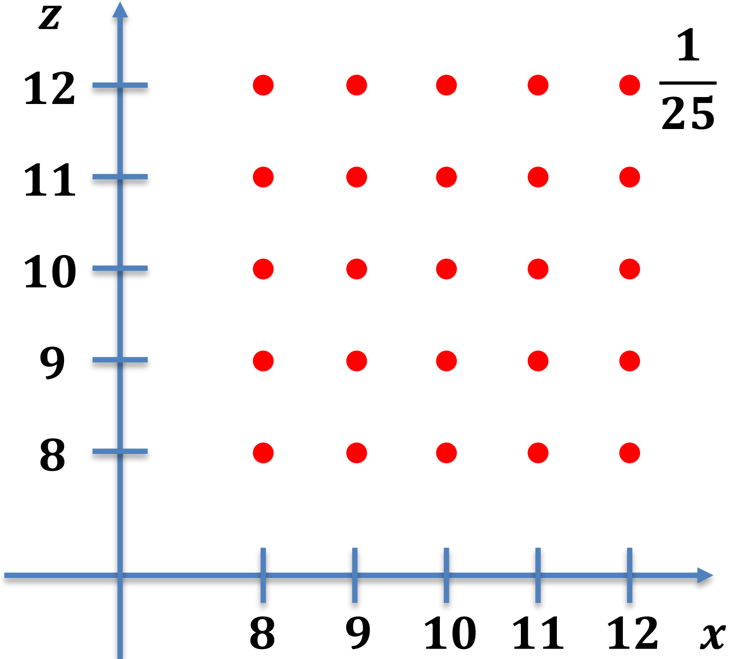




Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当小明出国去交换时

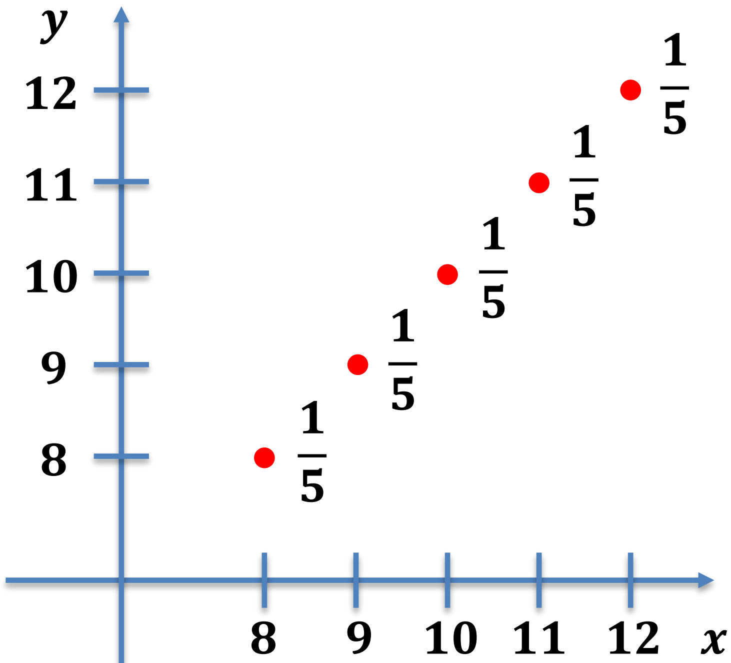
- 若将小美脱机时间 X 与小园脱机时间 Z 一起看呢？
- 画出 $P(X = x, Z = z)$：



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

满山尽是君雅照！

- 若将小美脱机时间 X 与小园脱机时间 Y 一起看呢？
- 画出 $P(X=x, Y=y)$，赫然发现！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合机率分布

- 同时将多个随机变量的行为一起拿来看，我们可以看出更多以往看不到的信息！
- 同时考虑多个随机变量的机率分布称之为联合机率分布 (joint probability distribution)
- 联合机率分布亦有离散与连续的分别

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF (Joint PMF)

- 若 X, Y 皆为离散随机变量，我们可以定义他们的联合PMF

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ 且 } Y = y)$$

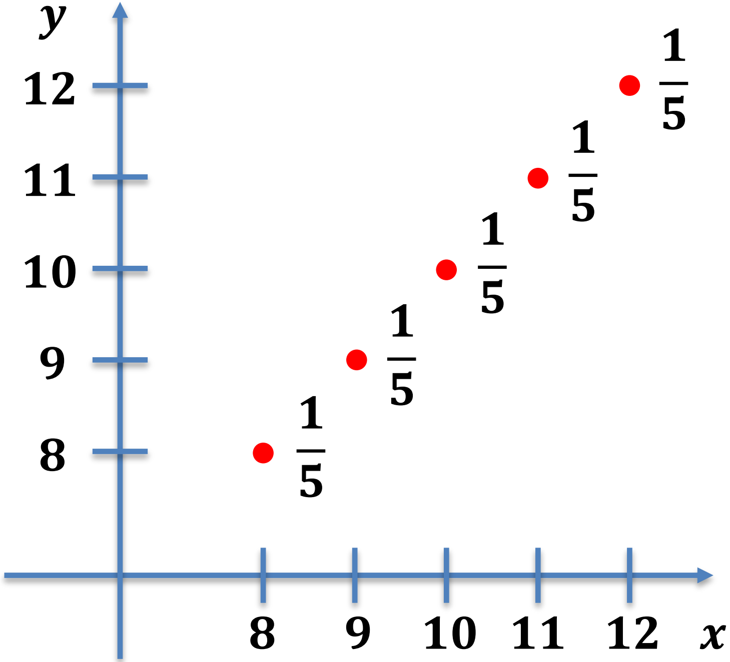
- 联合PMF 决定了X, Y 的联合机率分布

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF (Joint PMF)

Ex: 小美脱机时间 X 与小华脱机时间 Y 的联合 PMF：

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)：$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

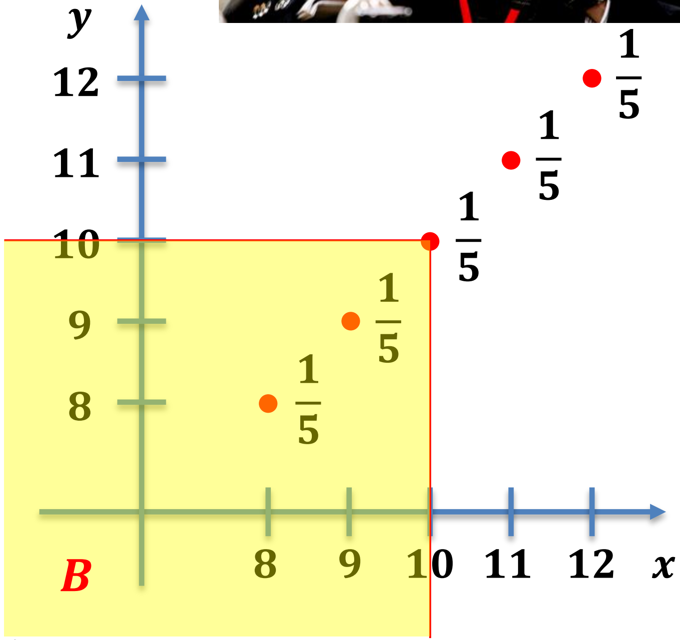
联合 PMF 的性质

- $0 \le p_{X,Y}(x,y) \le 1$
- $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = 1$
- X, Y 独立

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$
$$= P(X = x) \cdot P(Y = y)$$
$$= P_X(x) P_Y(y)$$

- 对任何事件 B： $P(B) = \sum_{(x,y)\in B} P_{X,Y}(x,y)$

Ex: B：美、华下线时间不晚于十点



$$P(B) = P_{X,Y}(8,8) + P_{X,Y}(9,9) + P_{X,Y}(10,10)$$

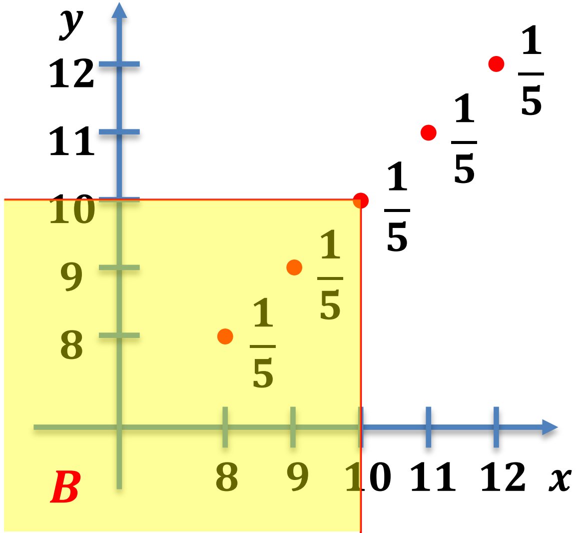
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- 若考虑两个随机变数 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 的联合机率分布，我们也可定义出所谓的联合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}(10, 10) =$



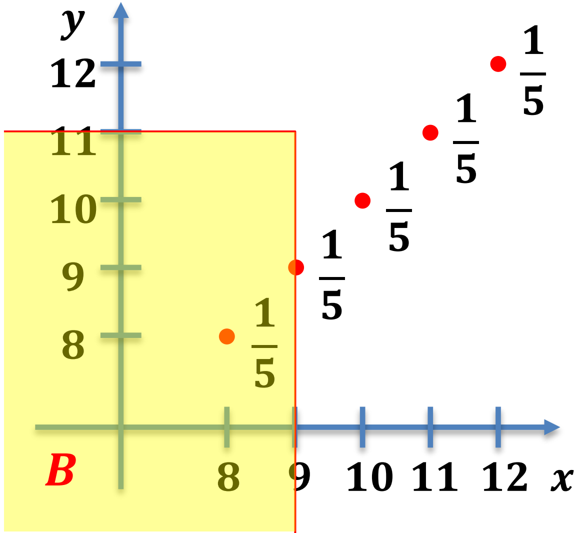
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- 若考虑两个随机变数 X,Y 的联合机率分布，
  我们也可定义出所谓的联合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \text{ 且 } Y \le y) = P(X \le x, Y \le y)$$

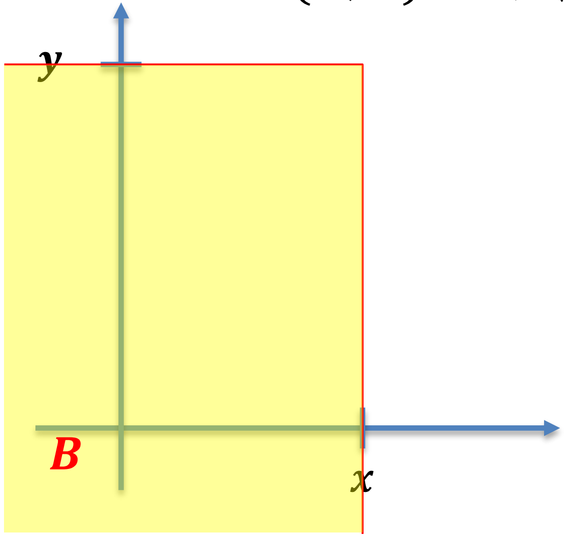
$$F_{X,Y}(9, 11) =$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF (Joint CDF)

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
  $= (X,Y)$ 会落在黄色区域的机率



$1D$: $F_X(x) \overset{\text{def}}{=} P(X \leq x)$
$= (X,Y)$ 会落在黄色区域的机率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

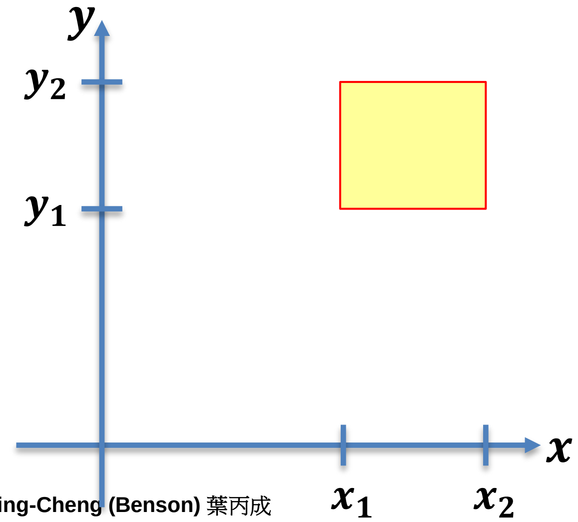
联合 CDF 的性质

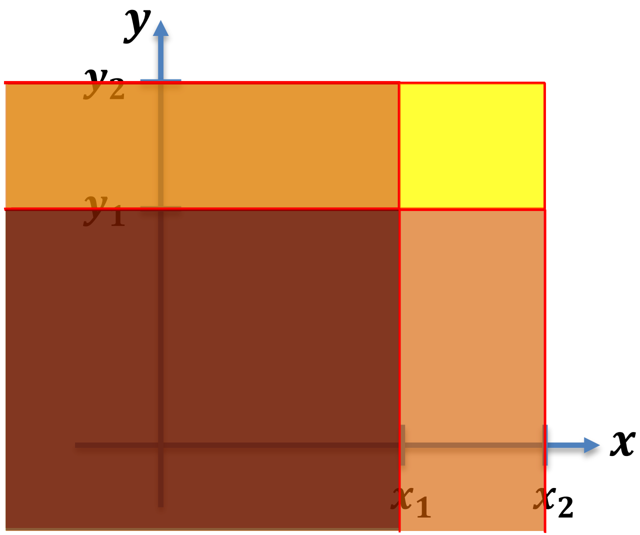
- $\mathbf{0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1}$
- 若 $\boldsymbol{x_1 \le x_2}$ 且 $\boldsymbol{y_1 \le y_2}$, 则$\boldsymbol{F_{X,Y}(x_1,y_1) \le F_{X,Y}(x_2,y_2)}$
- $\boldsymbol{F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \le x, Y \le \infty) = P(X \le x) = F_X(x)}$
- $\boldsymbol{F_{X,Y}(\infty,y) = P(X \le \infty, Y \le y) = P(Y \le y) = F_Y(y)}$
- $\boldsymbol{F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \le \infty, Y \le \infty) = 1}$
- $\boldsymbol{F_{X,Y}(x,-\infty) = P(X \le x, Y \le -\infty) \le P(Y \le -\infty) = 0}$
- $\boldsymbol{F_{X,Y}(-\infty,y) = P(X \le -\infty, Y \le y) \le P(X \le -\infty) = 0}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 CDF 的性质

- 四方格性质：
  $$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
  $$= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$$



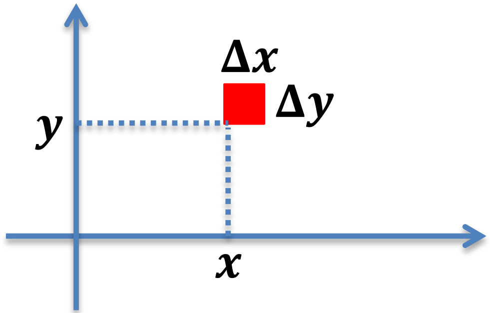


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若X,Y 皆为连续随机变数怎办？

- 回想之前一个变量时PDF怎么定义？
- $f_X(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x}$

- 如何延伸到两个变数的情况？
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X,Y) \in \blacksquare)}{\Delta x \Delta y}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF (Joint PDF)

- 若 X, Y 皆为连续随机变量，我们可以定义联合 PDF：

$$f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\big((X,Y) \in \blacksquare\big)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x \text{ 且 } y < Y \leq y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y) + F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x}\right]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

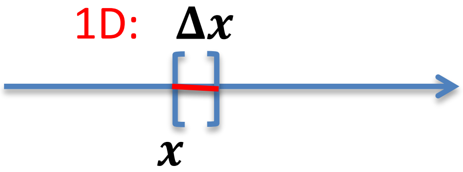
联合 PDF (Joint PDF)

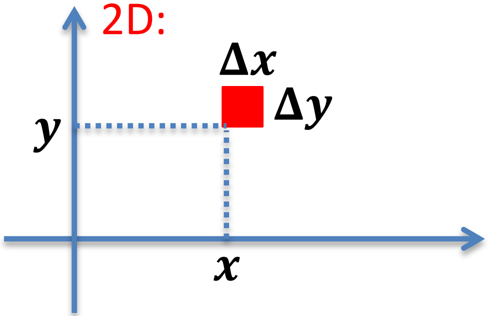
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial F_{X,Y}(x,y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right]$

  $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

  $\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

- 1D: Δx 极小时 $\Rightarrow P(X \in [x, x+\Delta x]) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$
- 2D: $\Delta x, \Delta y$ 极小时 $\Rightarrow P((X,Y) \in \blacksquare) \approx f_{X,Y}(x,y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$





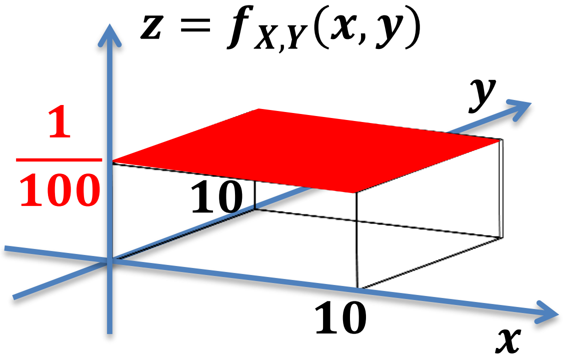
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF

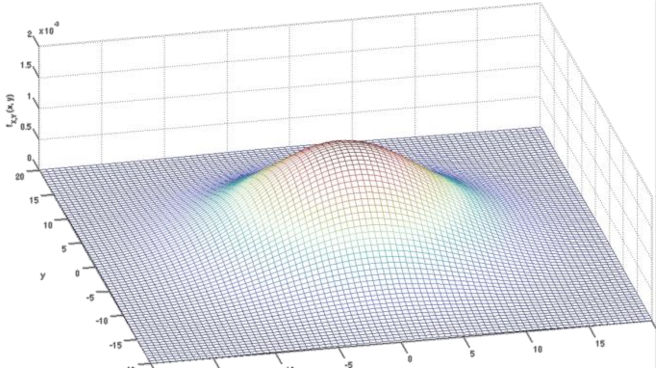
Ex：小美等公交车时间为 $\boldsymbol{X}$, 小园等公交车时间为

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 两者独立且皆为连续之机率分布 $\boldsymbol{UNIF}(0, 10)$。则

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 之联合 PDF 为



其他联合 PDF 的例子：
Bivariate Gaussian



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF (Joint PDF)

- 联合 PDF 亦决定了 X, Y 的联合机率分布
- 联合 PDF 跟联合 CDF 之间的关系：

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

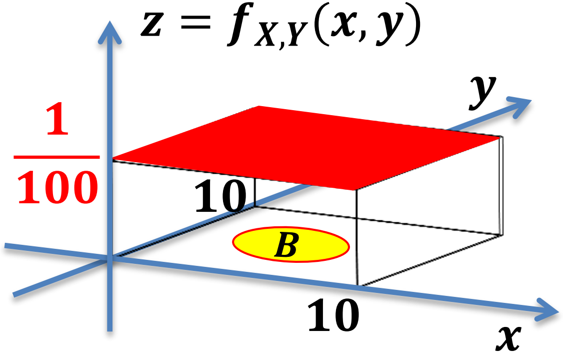
$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 的性质

- $f_{x,y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$
- 若 X,Y 独立 $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$
- 对任何事件 B,

$$P(B) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 何谓联合机率分布？
- 为何要看联合机率分布？
- 联合 PMF 的定义？
- 联合 CDF 的定义？
- 联合 PDF 的定义？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-2: 边际机率分布
(MARGINAL PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

已知联合 PMF，欲得个别 PMF

- Ex：$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 分别为小美、小丽脸书/QQ 脱机时间。联合 PMF 如下：

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{p_X(x)=?\ p_Y(y)=?}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PMF (Marginal PMF)

- 已知联合 PMF $p_{X,Y}(x,y)$，则可求得 $p_X(x)$、$p_Y(y)$，称之为边际 PMF
- 边际 PMF 算法：
  - $p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$
  - $p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PDF (Marginal PDF)

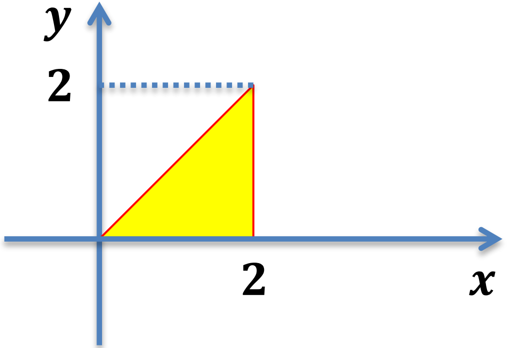
- 已知联合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，则可求得 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，称之为边际 PDF
- 边际 PDF 算法：
  - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
  - $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

边际 PDF (Marginal PDF)

- Ex：已知

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & \text{if } 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^x 0.5\,dy = 0.5\,x & \text{if } 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

- $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^2 0.5\,dx = 1-0.5y & \text{if } 0\le y\le 2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 边际 PMF 的定义？怎么算？
- 边际 PDF 的定义？怎么算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

8-3: 双变量期望值

第八周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF 下的期望值

- 回想只考虑一个离散随机变数 X 时其任意函数 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, p_X(x)$$

- 若同时考虑两个离散随机变量 X, Y 时，他们的任意函数 $h(X,Y)$ 的期望值是

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PMF 下的期望值

- Ex：$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 分别为小美、小丽脸书/QQ 脱机时间。联合 PMF 如下

$p_{X,Y}(x,y)$	$\boldsymbol{X=8}$	$\boldsymbol{X=9}$	$\boldsymbol{X=10}$
$\boldsymbol{Y=8}$	0.2	0.1	0.05
$\boldsymbol{Y=9}$	0.05	0.2	0.1
$\boldsymbol{Y=10}$	0.05	0.1	0.15

- $\boldsymbol{E[|X-Y|]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} |x-y| \cdot p_{X,Y}(x,y)$

$$= 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1$$

$$= 0.55$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 下的期望值

- 回想只考虑一个连续随机变量 X 时其任意函数 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

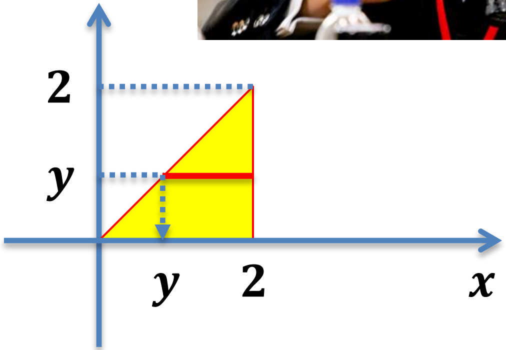
- 若同时考虑两个连续随机变数 X, Y 时，他们的任意函数 $h(X, Y)$ 的期望值是

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y) dxdy$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

联合 PDF 下的期望值

- Ex：已知 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & if\ 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$



$$E[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=\int_{0}^{2}\int_{y}^{2}(x+y)\cdot 0.5dxdy$$

$$=\int_{0}^{2}\left[\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{2}\right]_y^2 dy=\int_0^2\left(1+y-\frac{3}{4}y^2\right)dy=\left[y+\frac{y^2}{2}-\frac{3}{12}y^3\right]_0^2=2+2-2=2$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

证明 (离散)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)]\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \underbrace{\alpha \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_1(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_2(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

证明 (连续)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)] \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \underbrace{\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- 若X, Y独立，则

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

证明(离散)：

$$E[g(X)h(Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \left[\sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p_X(x)\right] \cdot \left[\sum_{y=-\infty}^{\infty} h(y) \cdot p_Y(y)\right] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性质

- 若X,Y独立，则

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\cdot E[h(Y)]$$

证明(连续)：

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot h(y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\cdot f_Y(y)\,dy = E[g(X)]\cdot E[h(Y)]$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 相关的性质

- $Var(X+Y) = E[(X+Y-\underbrace{E[X+Y]}_{\mu_X+\mu_Y})^2]$

$$= E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2]$$
$$= E[(\underbrace{X-\mu_X}_{A}+\underbrace{Y-\mu_Y}_{B})^2]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2]+E[(Y-\mu_Y)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= Var(x)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

※ X,Y独立 $\Rightarrow 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
$= 2E[(X-\mu_X)]E[(Y-\mu_Y)] = 0$
$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 期望值的定义？
- 期望值的性质？
- 两随机变量独立的话，期望值的计算？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University