



# 机 率

---

台大电机系 叶丙成

微博: [weibo.com/yehbo](https://weibo.com/yehbo) 脸书: [facebook.com/prof.yeh](https://facebook.com/prof.yeh)

部落格: [pcyeh.blog.ntu.edu.tw](http://pcyeh.blog.ntu.edu.tw)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成  
Dept. of EE, National Taiwan University

# 本周主题概述

---

- 2-1: 机率公理性质
- 2-2: 条件机率





# 2-1: 机率公理性质

---

第二周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成  
Dept. of EE, National Taiwan University

# 公理 (Axioms)



- 近代数学常以数条公理作为整套理论的基石

– Ex: 线性代数

**8 公理，公理一： $a + b = b + a \dots$**

- 这样的好处是？ **头过身就过啊！（容头过身—后汉书西羌传）**
- 公理可否被证明？ **公理常是不能被证明的基本性质**
- 公理为何常被当废话？ **公理常是非常基本的性质**
- 什么样的数学最厉害？ **公理越少条、公理越基本，越厉害！**



# 机率三公理 (Axioms of Probability)



- 公理 1:

对任何事件  $A$  而言,  $P(A) \geq 0$ .

- 公理 2:

$$P(S) = 1$$

## 神圣三公理

- 公理 3:

事件  $A_1, A_2, \dots$  互斥  $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots)$   
 $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$



# 公理衍生之机率性质

Ex: 从一副 52 张扑克牌抽中一张，结果为 Ace 之机率为何？



$$Ace = \{ \text{A♠}, \text{A♥}, \text{A♦}, \text{A♣} \}$$

$$\Rightarrow P(Ace) = P\{\text{A♠}\} + P\{\text{A♥}\} + P\{\text{A♦}\} + P\{\text{A♣}\}$$

↑ 公理 3

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$



# 公理衍生之机率性质



• 若  $E = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$

则  $P(E) = P(\{o_1\}) + P(\{o_2\}) + \dots + P(\{o_n\})$

证明：  $E = \{o_1\} \cup \{o_2\} \cup \dots \cup \{o_n\}$

因  $\{o_1\}, \{o_2\}, \dots, \{o_n\}$  互斥

$\Rightarrow P(E) = P(\{o_1\}) + P(\{o_2\}) + P(\{o_3\}) + \dots$

↑ 公理 3



# 公理衍生之机率性质

- $P(\phi) = 0$



证明： $S \cap \phi = \phi \Rightarrow S, \phi$  互斥

加以  $S = S \cup \phi$

$$\Rightarrow P(S) = P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi)$$

↑ 公理 3

$$\Rightarrow P(\phi) = 0$$





# 公理衍生之机率性质

- $P(A) = 1 - P(A^c)$



证明： $A \cap A^c = \phi \Rightarrow A, A^c$  互斥

加以  $S = A \cup A^c$

$$\Rightarrow P(S) = P(A) + P(A^c)$$

↑ 公理 3

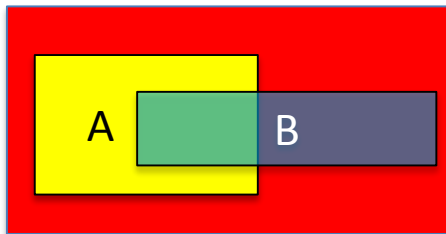
$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

↑ 公理 2



# 公理衍生之机率性质

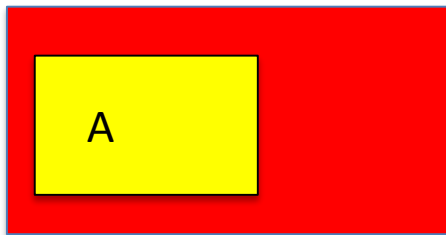
- $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$



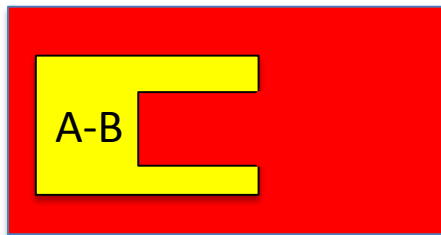
$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

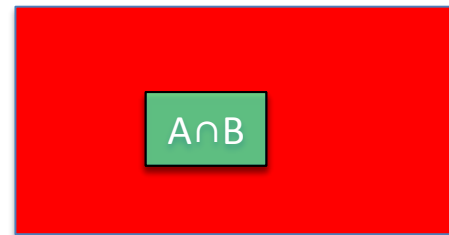
↑ 公理 3



=

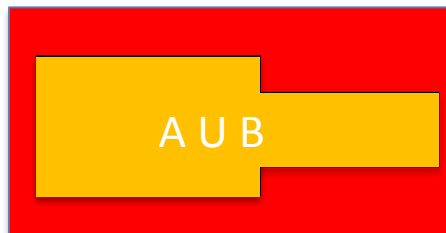


U



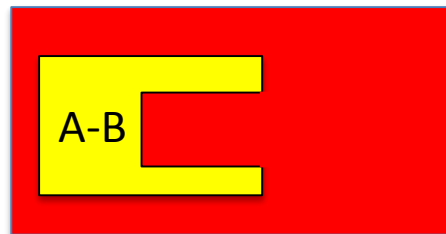
# 公理衍生之机率性质

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

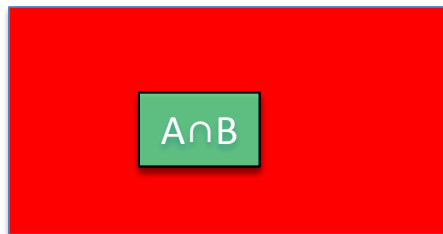


$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \underbrace{P(A - B)}_{P(A) - P(A \cap B)} + \underbrace{P(A \cap B) + P(B - A)}_{P(B)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

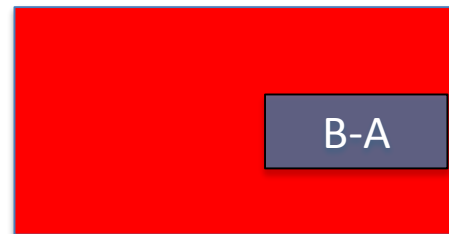
=



∪



∪



# 公理衍生之机率性质

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

– Ex: 在大陆随便碰上一个人，此人爱甜豆花或爱咸豆花  
机率为何？

$$P(\text{爱甜} \cup \text{爱咸}) = P(\text{爱甜}) + P(\text{爱咸}) - P(\text{爱甜} \cap \text{爱咸}) = \dots$$



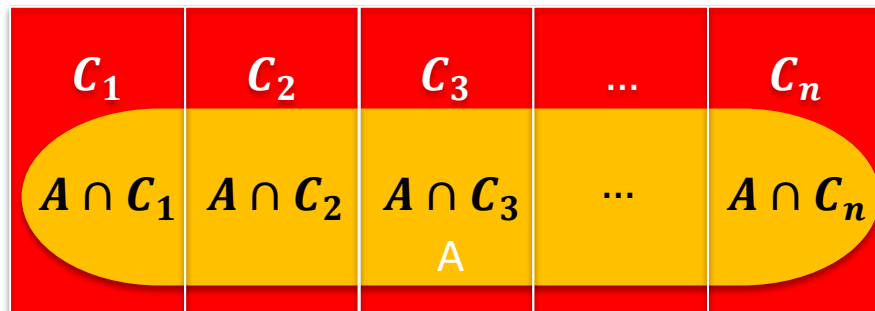
# 公理衍生之机率性质



- 切面包定理：

若  $C_1, C_2, \dots, C_n$  互斥且  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = S$

则对任何事件  $A$ ：
$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \dots + P(A \cap C_n)$$
  
↑ 公理 3



# 公理衍生之机率性质

- Ex: 阿宅心仪某可爱女店员。她的笑容打开了他封闭的心。阿宅注意到她笑容会受生意的影响，于是每天忠实记录该店生意与她有无对他笑。店生意有满、普、惨三态，而她有笑、怒二态。根据记录：

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (\text{满} \cap \text{笑}) \rightarrow \frac{1}{20}, (\text{满} \cap \text{怒}) \rightarrow \frac{2}{20} \\ (\text{普} \cap \text{笑}) \rightarrow \frac{5}{20}, (\text{普} \cap \text{怒}) \rightarrow \frac{4}{20} \\ (\text{惨} \cap \text{笑}) \rightarrow \frac{5}{20}, (\text{惨} \cap \text{怒}) \rightarrow \frac{3}{20} \end{array} \right.$$

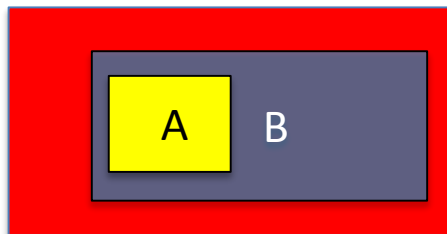
满	普	惨
满∩笑	普∩笑 笑	惨∩笑

$$\Rightarrow P(\text{笑}) = \frac{1}{20} + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$$



# 公理衍生之机率性质

- 若  $A \subset B$ , 则  $P(A) \leq P(B)$ .



证明： $BJ4$ ，同学自己试试看



# Boole's 不等式

- 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  而言,

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

证明：BJ4，高手自己试试看





# Bonferroni's 不等式

- 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  而言,

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i^c)$$

证明：BJ4，高手自己试试看



# 本节回顾

---

- 公理的意义是什么？
- 为何机率三公理很神圣？
- 机率公理如何衍生各样的性质？





# 2-2: 条件机率

---

第二周



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成  
Dept. of EE, National Taiwan University

# 概述与范例

- 机率常反映我们对某些事情的了解程度

- Ex: 没念书的混哥，对其而言，考试选择题正解为 A 或 B 或 C 或 D 的机率皆为  $1/4$
- Ex: 有念书的卷哥，对其而言，考试选择题正解为 A 之机率非 1 即 0



# 概述与范例



- 在得知其他某些事情发生后，我们对事情的了解可能会有所改变
  - Ex: 混哥坐卷哥隔壁，见到



- 在此事发生后，对混哥而言B、D为正解机率为？  
（此即为「条件机率」）



# 条件机率 (Conditional Probability)

- 更精准的说，条件机率的表示法  
 $P(\textcolor{red}{X} \mid \textcolor{blue}{Y})$

$\textcolor{red}{X}$ ：所关心之事件

$\textcolor{blue}{Y}$ ：条件(观察到的, 已发生的事件)

前例：

$P(\textcolor{red}{B} \text{ 为正解} \mid \text{手在蓝色方块})$



# 条件机率怎么算？



- $P(\mathbf{B} \text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = ?$

- 未偷看时，正确答案未知。样本空间为：

$$S = \{A, B, C, D\}$$

- 卷矫漏曲后，新的样本空间变为：

$$S' = \{B, D\}$$



# 条件机率怎么算？



- 卷矫漏之条件发生后，这世界变了，有了新的天地。不符合卷矫漏条件的 outcome 都不可能发生了。

$$P(A \text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = P(C \text{ 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = 0$$

— 延伸：若某实验结果  $o_i$  与某条件  $Y$  不相交，则

$$P(o_i \mid Y) = 0$$





# 条件机率怎么算？



- 至于卷矫漏曲之条件事件发生后，

符合卷矫漏条件事件的实验结果的机率呢？

- 不管卷矫漏发生否，「B为正解」与「D为正解」的机率比例应该一样，故：

$$P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) : P(\text{D 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = P(\text{B 为正解}) : P(\text{D 为正解})$$

- 卷矫漏后只有可能出现「B 为正解」或「D 为正解」，故：

$$S' = \{B, D\}, P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) + P(\text{D 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = 1$$

- 根据上述二式我们得到

$$P(\text{B 为正解} \mid \text{卷矫漏曲}) = \frac{P(\text{B 为正解})}{P(\text{B 为正解}) + P(\text{D 为正解})} = \frac{P(\text{B 为正解})}{P(\text{卷矫漏曲})}$$



# 条件机率怎么算？

- 延伸：若某条件事件  $Y$  包含数个实验结果：

$$Y = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$$

$$P(o_i|Y) = \frac{P(o_i)}{P(o_1) + P(o_2) + \dots + P(o_n)} = \boxed{\frac{P(o_i)}{P(Y)}}$$

考虑某事件  $X = \{o_1, o_2, q_1, q_2\}$ ，已知条件事件  $Y = \{o_1, o_2, o_3\}$  发生了，则

$$P(X|Y) = P(o_1|Y) + P(o_2|Y) = \frac{P(o_1)}{P(Y)} + \frac{P(o_2)}{P(Y)} = \frac{P(\{o_1, o_2\})}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$



# 条件机率怎么算？

- 终极延伸：若已知某条件事件  $Y$  发生了，  
则对于任何事件  $X$ ，我们可计算其条件机率如下：

$$P(X | Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

※ "condition on," "Suppose," "if,"  
"Assuming," "given that"



# 概述与范例



- Ex: 小美同时与小明、小华、小园暗通款曲。
  - Q: 小华赢得小美芳心机率为？

$$\frac{1}{3}$$

- Q: 美生日，华夜携礼至美宅。美不在，华遂于门外候之。子时忽闻美、明于里外争吵，遂匿而窥之。未料，突见美巴明，甩门。明，泣不成声，而华窃喜。

请问在美巴明发生后小华赢得小美芳心机率为？

$$P(\text{华赢美心} \mid \text{美巴明}) = \frac{1}{2}$$



# 条件机率之性质

- 对任何事件  $X$  及任何条件事件  $Y$ ，我们有：

- 性质 1： $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \geq 0$

- 性质 2： $P(Y|Y) = \frac{P(Y \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y)}{P(Y)} = 1$

- 性质 3： $A, B$  互斥  $\Rightarrow P(A \cup B | Y) = \frac{P(A)}{P(Y)} + \frac{P(B)}{P(Y)} = P(A|Y) + P(B|Y)$



# Total Probability 定理

- 若  $C_1, C_2, \dots, C_n$  互斥且  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = S$

则对任意事件  $A$ ，我们有：

$$P(A) = P(A | C_1) P(C_1) + P(A | C_2) P(C_2) + \dots + P(A | C_n) P(C_n)$$

$C_1$	$C_2$	$C_3$	...	$C_n$
$A \cap C_1$	$A \cap C_2$	$A \cap C_3$	...	$A \cap C_n$

$$\begin{aligned} \text{证明：切面包定理} \Rightarrow P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A \cap C_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A | C_i) \cdot P(C_i) \end{aligned}$$



# Total Probability 定理

- Ex: 阿宅 vs. 可爱店员：店员对阿宅笑否，  
受店的生意影响很大。

$$\text{已知 } P(\text{满}) = \frac{1}{4}, P(\text{普}) = \frac{1}{4}, P(\text{惨}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{笑} \mid \text{满}) = \frac{1}{6}, P(\text{笑} \mid \text{普}) = \frac{2}{6}, P(\text{笑} \mid \text{惨}) = \frac{3}{6}$$

问  $P(\text{笑}) = ?$



满	普	惨
满∩笑	普∩笑 笑	惨∩笑

$A$ : 笑    $C_1$ : 满    $C_2$ : 普    $C_3$ : 惨

$$P(\text{笑}) = \sum_{i=1}^3 P(A|C_i) \cdot P(C_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{6}{24} = \frac{9}{24}$$



# 贝氏定理 (Bayes' Rule)

- 若  $C_1, C_2, \dots, C_n$  互斥且  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = S$   
则对任意事件  $A$ ，我们有：

$$P(C_j | A) = \frac{P(A | C_j) P(C_j)}{P(A | C_1) P(C_1) + P(A | C_2) P(C_2) + \dots + P(A | C_n) P(C_n)}$$
$$\parallel$$
$$\frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A | C_j) \cdot P(C_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | C_i) \cdot P(C_i)}$$





# 贝氏定理 (Bayes' Rule)

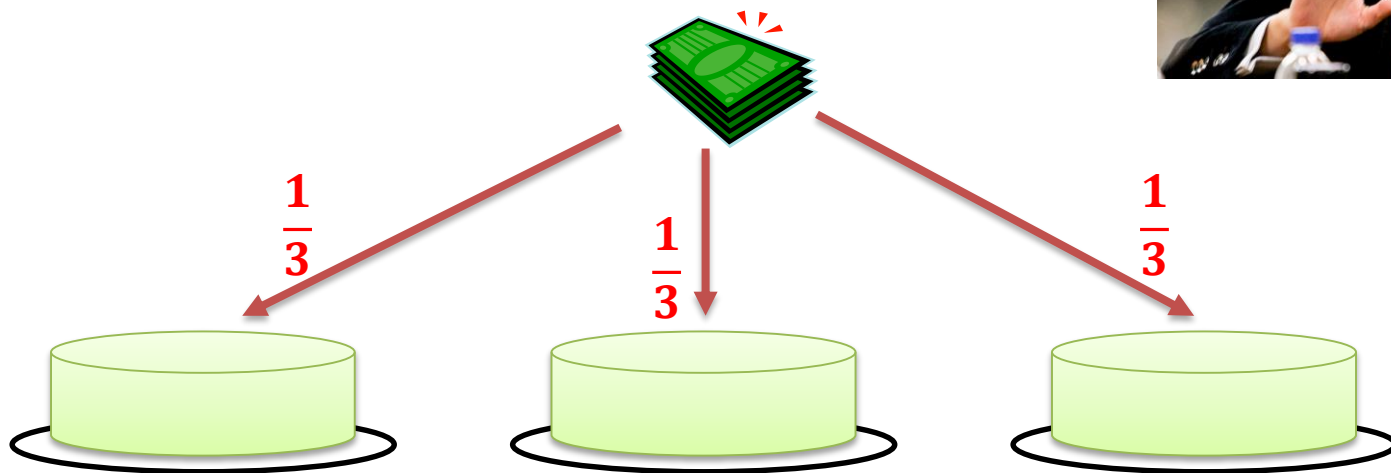


- Ex: 一日，老板见可爱店员笑，  
请问在此情况下，当日生意满座之机率为何？

$$\begin{aligned} P(\text{满} \mid \text{笑}) &= \frac{P(\text{笑} \cap \text{满})}{P(\text{笑})} \\ &= \frac{P(\text{笑} \mid \text{满}) \cdot P(\text{满})}{P(\text{笑} \mid \text{满}) \cdot P(\text{满}) + P(\text{笑} \mid \text{普}) \cdot P(\text{普}) + P(\text{笑} \mid \text{惨}) \cdot P(\text{惨})} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

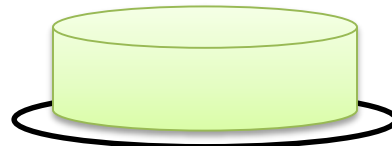
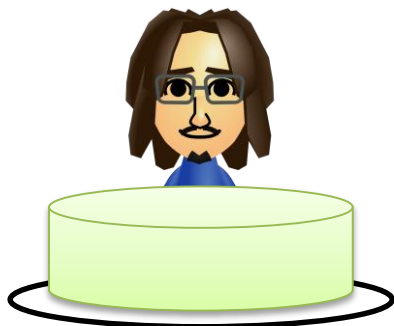


# 进击的钞票

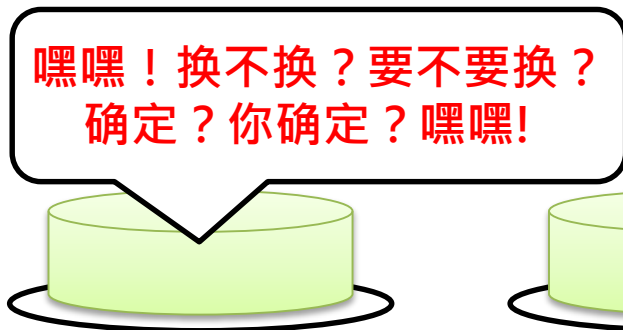
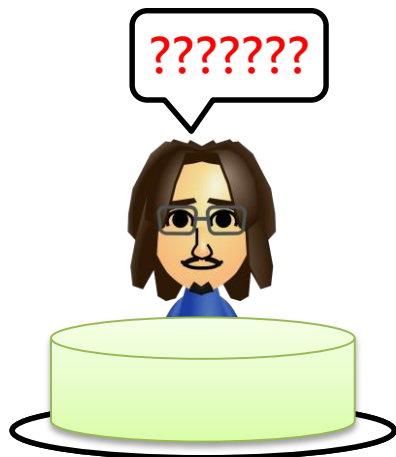


# 进击的钞票

---



# 宪哥的逆袭！



丙绅和他的小伙伴们，究竟该换呢？还是不该换呢？还是没差呢？



# 本节回顾

---

- 条件机率的意義？
- $P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
- 贝氏定理

