机　　率

台大电机系 叶丙成

微博: weibo.com/yehbo　脸书: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本周主题概述

- 3-1: 机率的独立性
- 3-2: 图解繁复机率
- 3-3: 数数算机率

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

3-1: 机率的独立性

第三周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

机率的独立性 (Independence)

- 常见定义：若两事件A、B之机率满足

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

则A、 B 两事件称为机率上的独立事件。

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Mmm...到底什么叫独立呢？

- 天冷、老妈、穿衣服...超中二！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

另一个更好的定义

- 常见定义：若两事件A、B之机率满足

$$P(A\mid B)=P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

则A、B两事件称为机率上的独立事件。

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例

- 已知某生秦始皇作业表现与机率作业表现相互独立。若秦始皇作业未作机率为 0.2，机率作业未作机率为 0.3。问两科作业同时未作之机率为？

$$\boxed{0.2 \times 0.3 = 0.06}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例：水源阿伯的逆袭！！

台大学生最敬畏的水源阿伯们

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例：水源阿伯的逆袭！！

- 已知某校生爱乱停车。水源阿伯拖车时常有车主赶回求情。出现愤宅求情之机率为0.3。一般而言被人求情阿伯会放行的机率为 0.2 。水源阿伯，大公无私，天下皆知。问某日阿伯拖某车时出现愤宅求情且车未放行的机率？

$\underline{\text{出现愤宅求情}}$：$P=0.3$；$\underline{\text{车未放行}}$：$P=1-0.2=0.8$

$$\boxed{0.3\times 0.8=0.24}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例：古锥姊 vs. 水源阿伯

- 某古锥姊有时会在活大停车不当。被拖时若及时赶回求情，古锥姊常一手摀嘴，一手指着车曰：「啊，那是我的车！」巧笑倩兮。
- 若以 A 代表古锥姊实时赶回求情之事件，B 代表阿辈放回古锥姊车的事件。根据某愤宅多日观察古锥姊行为：

P(古锥姊未能求情 且 车未放行) = 0.85	**P(古锥姊未能求情 且 车放行) = 0.05**
P(古锥姊及时求情 且 车未放行) = 0.01	**P(古锥姊及时求情 且 车放行) = 0.09**

$\cancel{= P(\text{古锥姊求情}) \times P(\text{车放行})?}$

愤宅泪眼悲愤控诉阿伯：「你不公平！！！」。

问：水源阿伯清誉，岂容愤宅任意污蔑！愤宅悲愤有理否？吾人该否为其一掬同情之泪？

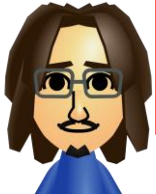
{古锥姊求情} = {古锥姊求情 **且** 车未放行} ∪ {古锥姊求情 **且** 车放行}

P(古锥姊求情) = **0.01 + 0.09 = 0.1**

前页曾述一般而言： P(车放行) = **0.2**

$\Rightarrow P(\text{古锥姊求情}) \times P(\text{车放行}) = \mathbf{0.1 \times 0.2 = 0.02 \neq 0.09}$ **不独立！**

$$P(\text{车放行}|\text{古锥姊求情}) = \frac{P(\text{古锥姊求情 且 车放行})}{P(\text{古锥姊求情})} = \frac{0.09}{0.1} = 0.9$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

多事件之独立

- 若事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$满足下列条件，则称此 n 事件独立 $(n > 2)$ ：

  从中任选 m 事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ 均满足

  $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}),\ m = 2, 3, \ldots, n.$$

Ex: $n = 5,\ A_1, A_2, \ldots, A_5$

$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$

$+ \binom{n}{n}$

$m = 2$: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$? $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$? …

$m = 3$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$? …

$m = 4$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$? …

$m = 5$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$?

全都相等⇒此五事件独立　　有任一不相等⇒此五事件不独立

本节回顾

- 3-1: 机率的独立性
  - 哪两种定义？
  - 如何判断事件之间是否机率上相互独立？

3-2: 图解繁复机率

第三周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

当碰到很复杂的机率问题时…

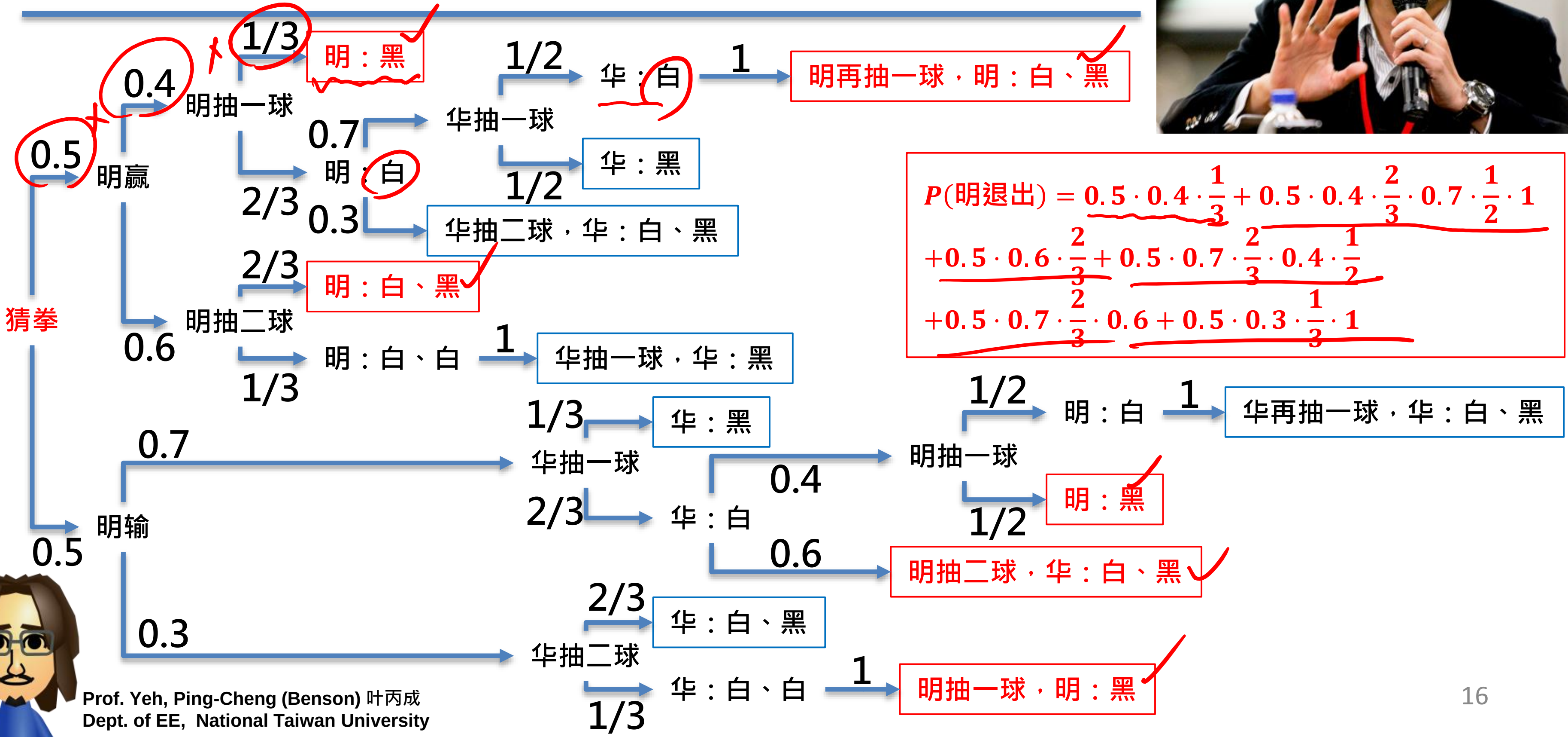
- 先观察这个问题的实验结构
- 这实验是否能分解成数个子实验？
- 若可以，则可以利用图解法！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例：兄弟情

- 明、华兄弟情笃。故决定一人放弃追求小美以免伤情谊。于罐中放入两白球、一黑球。游戏规则如下：「猜拳决定谁先，之后轮流罐中取球；每次可取一至二球，直至有人抽中黑球为止。抽中黑者退出追求。」
- 已知猜拳输赢机率为 **0.5**，每次明取球取一颗之机率为 **0.4**，取两颗机率为 **0.6** 。每次华取球取一颗之机率为 **0.7**，取两颗机率为 **0.3**。
- 问最后小明退出追求之机率为？

范例：兄弟情



$$P(\text{明退出}) = 0.5\cdot 0.4\cdot\frac{1}{3} + 0.5\cdot 0.4\cdot\frac{2}{3}\cdot 0.7\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$
$$+0.5\cdot 0.6\cdot\frac{2}{3} + 0.5\cdot 0.7\cdot\frac{2}{3}\cdot 0.4\cdot\frac{1}{2}$$
$$+0.5\cdot 0.7\cdot\frac{2}{3}\cdot 0.6 + 0.5\cdot 0.3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 3-2: 图解繁复机率
  - 适用哪类问题？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

3-3: 数数算机率

第三周

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

身为一个热爱机率的青年，喜欢数数也是非常合理的！

- 古典机率常假设每个实验结果 (outcome) 发生机率相同
  - Ex: 包子摊肉包、菜包、豆沙包产量相同，外表一致。

$$\boldsymbol{P}(\text{买到咸包子}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \mathbf{2}$$

- 故计算某事件机率之问题，等同于计算此事件包含多少实验结果 (outcome)。故计算器率等价于数数问题！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数数基本原则 (Fundamental Principle of Counting)

- 若某种实验有 n 种不同结果，而另一种实验有 m 种不同结果。若操作此两实验将有 nm 种不同结果。
  - Ex: 下午茶有 5 种甜点的选择， 10 种饮料的选择。共有多少种下午茶组合？

$$\boxed{\begin{array}{c} 5 \times 10 = 50 \\ n \quad\; m \quad\; nm \end{array}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数数前的重要判断

- 所有的对象是否可区分？(Distinguishable?)
- 实验中抽选的对象是否放回供下次抽选？(With/Without Replacement?)
- 实验中被抽选的东西，抽选顺序是否有差异？(Order matters or not?)

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

排列 (Permutation)

- Ex: 小美周末两日惯购物。小美常自明华园三兄弟找人接送。若两日司机不可重复，问有多少种结果？
  - 可区分兮？ **Yes**
  - 有放回兮? **No**
  - 顺序差异兮? **Yes**

六　　日

$3 \times 2 = 6$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

排列 (Permutation)

- 若有 n =3 异物，从中依序取出 k =2 物共有多少种结果？

第几次取物：#1 #2 #3 … #k

$$\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{n-1} \times n-2 \times \cdots \times n-(k-1) = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

重复选取
(Choose with Replacements)

- Ex: 小美周末两日惯购物。小美常自明华园三兄弟找人接送。无耻小美竟敢不排除连续凹人两天，问有多少种结果？
  - 可区分兮？ **Yes**
  - 有放回兮? **Yes**
  - 顺序差异兮? **Yes**

六　　日

3 × 3 = 9

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

重复选取
(Choose with Replacements)

- 若有 $n \,{=3}$ 异物，从中选取一物，每次取完放回。依序选取 $k \,{=2}$ 次，共有多少种结果？

第几次取物：	#1		#2		#3		…		#k	
	n	$\times$	n	$\times$	n	$\times\cdots\times$			n	$=\boxed{n^k}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

组合 (Combination)

- Ex: 小美爱玩跳棋。小美常自明华园三兄弟找两人下棋。问有多少种对战组合？
  - 可区分兮？ **Yes**
  - 有放回兮? **No**
  - 顺序差异兮? **No**

$$\frac{3 \quad \times \quad 2}{2!} = 3 = \binom{3}{2}$$

念作：*3 choose 2*

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

组合 (Combination)

- 若有 $\boldsymbol{n}$ 异物，从中取出 $\boldsymbol{k}$ 物
  共有多少种结果？

第几次取物：#1　　#2　　#3　…　#k

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1)) \boxed{/k!}$$

$$= \frac{n \times n-1 \times n-2 \times \cdots \times (n-(k-1))}{k!} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

※ $\binom{n}{k}$: 二项式系数 (*binomial coefficients*)

来自二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

组合 (Combination)

- Ex: 某系队共有12个篮球队员。
  问有多少种先发组合？

共有 $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} = 792$ 种组合

※ 这...肯定是个烂队...

多项组合 (Multinomial)

- Ex: 费雯兄惯于网络八卦版上发废文。第一楼推文常有四类
  - 你妈知道你在发废文吗
  - 见此唉滴必嘘
  - 在五楼…
  - 妈！我在这！
- 问：费雯兄发文 10 次，一楼推文共有多少种组合？

$$\underbrace{\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}\times\overline{4}}_{10} = 4^{10}$$

- 问：有多少组合会看到 4 次「你…」，3 次「见…」，2 次「在五楼…」，1 次「妈…」？

见 你 五 你 妈 五 见 你 见 你

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

多项组合 (Multinomial)

- 若有 m =4 种异物，每次选物从中选一后放回，依序选 n =10 次。如此共有 m^n 种实验结果。其中在这 m^n 种实验结果中，第 1 种异物出现 n_1 =4 次且第 2 种异物出现 n_2 =3 次且… 且第 m 种异物出现 n_m 次，这样的实验结果共有多少种？

$$\#\text{组合} = \underbrace{\binom{n}{n_1}}\underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}\underbrace{\binom{n-n_1-n_2}{n_3}}\cdots\underbrace{\binom{n_m}{n_m}}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(\cancel{n-n_1})!}\,\frac{\cancel{n-n_1}!}{n_2!\,(\cancel{n-n_1-n_2})!}\,\frac{\cancel{n-n_1-n_2}!}{n_3!\,(\cancel{n-n_1-n_2-n_3})!}\cdots\frac{\cancel{n_m}!}{n_m!}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_m!}} \leftarrow \textit{multinomial coefficient}$$

※ $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$

$$= \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n}\cdots\sum_{n_m=0}^{n}\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_m!}}\,x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_m^{n_m}$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

数数如何应用在算机率上呢？

- 若一事件包含数个实验结果(outcome)，且每个实验结果发生的机率都一样
  - 先计算任一个实验结果 的机率
  - 再计算该事件共包含多少个实验结果
  - 两者相乘便得到该事件的机率！

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

范例：费雯兄

- 继前述费雯兄好发废文之例。若根据统计，费雯兄一楼推文不同型态之出现机率为：
  - P(「你妈知道你在发废文吗」) = 0.4
  - P(「见此唉滴必嘘」) = 0.2
  - P(「在五楼…」) = 0.1
  - P(「妈！我在这！」) = 0.3
- 问：若费雯兄发文 6 次，会在一楼推文看到 2 次「你…」，2 次「见…」，1 次「在五楼…」，1次「妈…」。这样的机率为？

$$P(\text{你 你 见 见 五 妈}) = 0.4 \times 0.4 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.3$$

$$0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.000192$$

$$P(2\text{你}, 2\text{见}, 1\text{五}, 1\text{妈}) = \frac{6!}{2!2!1!1!} \cdot 0.000192 = 0.0346$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本节回顾

- 3-3: 数数算机率
  - 古典机率的概念？
  - 为何数数可以算机率？
  - 如何区分不同型态的数数？

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 叶丙成
Dept. of EE, National Taiwan University