**TD5 – Rapport**

Description du code

Pour représenter et trier les simplexes, nous avons créer une classe Simplex, sur laquelle nous avons mis un ordre permettant de les trier selon leur ordre d’apparition en conservant toujours le principe qu’un simplexe ne peut apparaître qu’après ses faces.

Afin de construire la matrice, nous prenons chaque simplexe et nous générons la liste des faces, chaque face étant la liste des sommets qui la composent. Il faut alors retrouver le simplexe correspondant et son index dans la liste triée. Pour que cette étape soit rapide, nous commençons par trier les simplexes selon l’ordre lexicographique (en se basant sur la liste triée des sommets) avant de les trier selon l’ordre de la filtration, tout en gardant en mémoire la table d’association entre ces deux listes. Ainsi, pour rechercher l’index d’une face dans la liste, il suffit de générer les simplexes composant les faces, puis de chercher par dichotomie leur occurrence dans la liste triée de manière lexicographique, puis de le convertir grâce à la table d’association. On obtient en temps pseudo-linéaire () la liste des indices des faces de chaque simplexe.

La matrice est représentée par une liste de colonnes qui utilise chacune une représentation creuse. Ainsi, chaque colonne est représentée par la liste des indices valant 1. Pour accélérer la recherche des pivots, nous gardons la liste des indices ordonnée. La position des pivots est stockée dans une liste *pivots* qui indique pour chaque ligne, la colonne contenant le pivot de cette ligne. Si cette ligne n’a pas encore trouvé son pivot, la valeur est alors de -1.

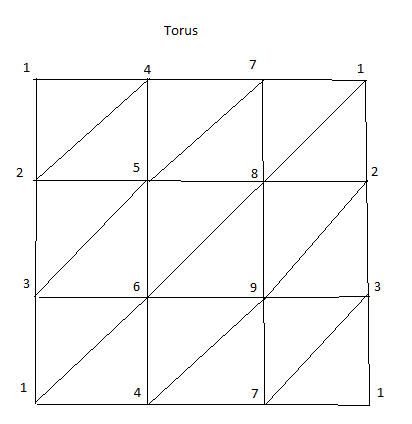
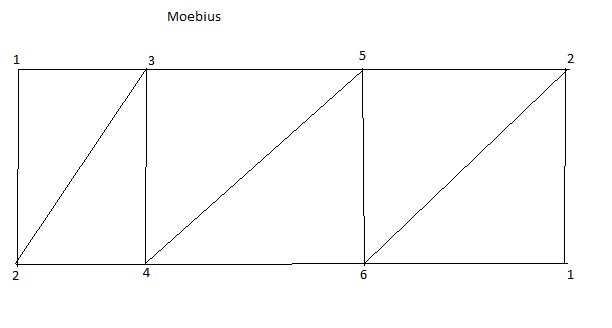
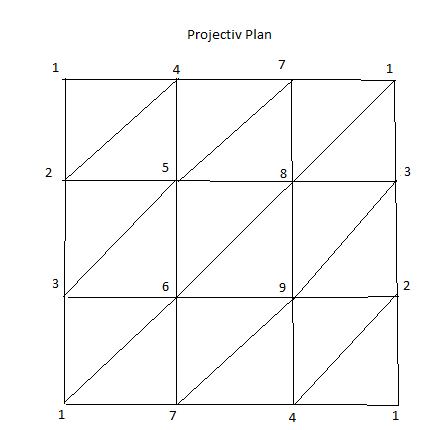
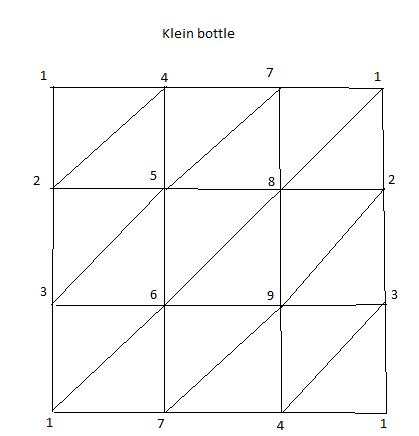
Complexité

La réduction de la matrice est effectivement en . En effet, on itère sur chaque colonne, et sur chacune, on itère sur le plus haut coefficient non nul, ce qui donne au plus opérations. Enfin, à chacun de ces tours de boucle, on effectue une addition, qui prend au plus opération. Notons, que cette dernière approximation est très grossière. Chaque colonne contient au départ coefficient non nul (où est la dimension du simplexe codé par la colonne), et l’on peut considérer que cela reste à peu près le cas tout au long des opération. Or la représentation creuse fait que le nombre d’opérations effectuées lors d’une addition entre colonnes est au plus égale à la somme du nombre d’indices non nuls. On voit donc que l’on peut s’attendre à une complexité plus proche d’être quadratique que cubique.

À part cela, l’étape de création de la structure est en pour le tri des simplexes, et également en *O(m\*ln(m))* pour la construction de la matrice. Dans la pratique, c’est cette étape qui est la plus longue. En effet, il nous faut une dizaine de minute pour construire la matrice sur la filtration B, et quelques minutes pour la réduction. L’étape de réduction fonctionne donc en temps quasi linéaire ce qui signifie que le nombre effectif de coefficient non nul sur une colonne reste très bas sur toute la durée de la réduction. Pour les autres filtrations, qui comportent plus de points, il faut autour d’une heure pour les réaliser.

Analyse

Les filtrations choisies pour les formes sont les suivantes :



Pour chacune, nous avons pris la convention de mettre la valeur égale à la dimension, ce qui assure la consistance de la filtration. Pour les sphères et les boules, nous avons fait un petit code qui construit les filtrations en s’appuyant sur une structure de tétraèdre vide ou plein de la dimension souhaitée.

On retrouve les nombres attendus pour les exemples connus que sont les sphères, les boules et le tore.

En ce qui concerne les filtrations A, B, C et D, nos analyses sont les suivantes :

* Pour A, on peut imaginer que la structure originelle est celle d’une boule. Il faut un certain temps pour que tous les points fusionnent ensemble, d’où l’apparition de nombreuses composantes connexes et de petits cycles. Une fois tous les points liés et les faces apparues, on peut observer la structure de sphère par la large barre sur H2. Enfin, la boule finit par se remplir, d’où la fin de la barre.
* Sur le B, on voit plusieurs, phénomènes : d’abord 8 trous d’ordre 2 faisant penser à 8 petites sphères, puis l’apparition de 5 trous de dimension 1 et enfin, au moment où ils disparaissent, l’apparition d’un trou de dimension 2. Cela fait penser à la structure que l’on obtiendrait en disposant 8 sphères dont les centres seraient les sommets d’un cube et qui auraient toutes un point en commun avec chacune de ses voisines. Il y aurait donc un trou par face, le sixième est linéairement dépendant des 5 autres, d’où l’apparition de 5 barres. Au moment où ces 5 cycles disparaissent, cela signifie que les faces sont maintenant pleines. Mais au centre du cube, un espace n’est pas encore atteint, d’où l’apparition d’un trou d’ordre 2. La forme sous-jacente est donc celle de 8 sphères placées au sommet d’un cube (le cube ne sert qu’à se représenter la disposition, il n’est pas réellement tracé).
* Les filtrations C et D ont toutes les deux des diagrammes similaires, avec deux principaux trous d’ordre 1 et d’ordre 2. On reconnait là la structure d’un tore. De plus, le fait qu’un trou disparait en même temps que le vide de dimension 2 correspond au moment où le tore devient plein pour prendre une structure “d’anneau plein” (de cercle). La différence entre les deux provient du fait que le C est beaucoup plus fin que le D.