高等数学微积分公式大全

一、基本导数公式

⑴ $(c)'=0$ ⑵ $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ ⑶ $(\sin x)'=\cos x$

⑷ $(\cos x)'=-\sin x$ ⑸ $(\tan x)'=\sec^2 x$ ⑹ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

⑺ $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ ⑻ $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

⑼ $(e^x)'=e^x$ ⑽ $(a^x)'=a^x\ln a$ ⑾ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

⑿ $(\log_a{}^x)'=\frac{1}{x\ln a}$ ⒀ $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ⒁ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⒂ $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ ⒃ $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ ⒄ $(x)'=1$ ⒅ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

二、导数的四则运算法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ $(uv)'=u'v+uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

三、高阶导数的运算法则

（1） $[u(x)\pm v(x)]^{(n)}=u(x)^{(n)}\pm v(x)^{(n)}$ （2） $[cu(x)]^{(n)}=cu^{(n)}(x)$

（3） $[u(ax+b)]^{(n)}=a^n u^{(n)}(ax+b)$ （4） $[u(x)\cdot v(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$

四、基本初等函数的 n 阶导数公式

（1） $(x^n)^{(n)}=n!$ （2） $(e^{ax+b})^{(n)}=a^n\cdot e^{ax+b}$ (3) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

(4) $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ (5) $[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(6) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ (7) $[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{a^n\cdot(n-1)!}{(ax+b)^n}$

五、微分公式与微分运算法则

⑴ $d(c)=0$ ⑵ $d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$ ⑶ $d(\sin x)=\cos xdx$

⑷ $d(\cos x)=-\sin xdx$ ⑸ $d(\tan x)=\sec^2 xdx$ ⑹ $d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

⑺ $d(\sec x)=\sec x\cdot\tan xdx$ ⑻ $d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot xdx$

⑼ $d(e^x)=e^xdx$ ⑽ $d(a^x)=a^x\ln adx$ ⑾ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

⑿ $d(\log_a{}^x)=\frac{1}{x\ln a}dx$ ⒀ $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ⒁ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15) $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$　　(16) $d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

六、微分运算法则

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$　　(2) $d(cu)=cdu$

(3) $d(uv)=vdu+udv$　　(4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

七、基本积分公式

(1) $\int kdx=kx+c$　　(2) $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$　　(3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

(4) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$　　(5) $\int e^{x}dx=e^{x}+c$　　(6) $\int\cos xdx=\sin x+c$

(7) $\int\sin xdx=-\cos x+c$　　(8) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

(9) $\int\frac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+c$　　(10) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

(11) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

八、补充积分公式

$\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+c$　　$\int\cot xdx=\ln|\sin x|+c$

$\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+c$　　$\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$　　$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$　　$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

九、下列常用凑微分公式

积分型	换元公式
$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$	$u=ax+b$
$\int f(x^{\mu})x^{\mu-1}dx=\frac{1}{\mu}\int f(x^{\mu})d(x^{\mu})$	$u=x^{\mu}$
$\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$	$u=\ln x$
$\int f(e^{x})\cdot e^{x}dx=\int f(e^{x})d(e^{x})$	$u=e^{x}$
$\int f(a^{x})\cdot a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}\int f(a^{x})d(a^{x})$	$u=a^{x}$
$\int f(\sin x)\cdot\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x)$	$u=\sin x$

$\int f(\cos x)\cdot\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x)$	$u=\cos x$
$\int f(\tan x)\cdot\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x)$	$u=\tan x$
$\int f(\cot x)\cdot\csc^2 xdx=\int f(\cot x)d(\cot x)$	$u=\cot x$
$\int f(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)$	$u=\arctan x$
$\int f(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$	$u=\arcsin x$

十、分部积分法公式

⑴形如$\int x^n e^{ax}dx$，令$u=x^n$，$dv=e^{ax}dx$

形如$\int x^n\sin xdx$令$u=x^n$，$dv=\sin xdx$

形如$\int x^n\cos xdx$令$u=x^n$，$dv=\cos xdx$

⑵形如$\int x^n\arctan xdx$，令$u=\arctan x$，$dv=x^n dx$

形如$\int x^n\ln xdx$，令$u=\ln x$，$dv=x^n dx$

⑶形如$\int e^{ax}\sin xdx$，$\int e^{ax}\cos xdx$令$u=e^{ax},\sin x,\cos x$均可。

十一、第二换元积分法中的三角换元公式

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ $x=a\sin t$ (2) $\sqrt{a^2+x^2}$ $x=a\tan t$ (3) $\sqrt{x^2-a^2}$ $x=a\sec t$

【特殊角的三角函数值】

（1）$\sin 0=0$ （2）$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ （3）$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （4）$\sin\frac{\pi}{2}=1$） （5）$\sin\pi=0$

（1）$\cos 0=1$ （2）$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （3）$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ （4）$\cos\frac{\pi}{2}=0$） （5）$\cos\pi=-1$

（1）$\tan 0=0$ （2）$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （3）$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ （4）$\tan\frac{\pi}{2}$不存在 （5）$\tan\pi=0$

（1）$\cot 0$不存在 （2）$\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ （3）$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （4）$\cot\frac{\pi}{2}=0$ （5）$\cot\pi$不存在

十二、重要公式

（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （3）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>o)=1$

（4）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （5）$\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ （6）$\lim_{x\to-\infty}arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$

（7）$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arc}\cot x=0$ （8）$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc}\cot x=\pi$ （9）$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

（10） $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$ （11） $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

（12） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m \end{cases}$ （系数不为 0 的情况）

十三、下列常用等价无穷小关系（$x \to 0$）

$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\arctan x \sim x$ $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x) \sim x$ $e^x - 1 \sim x$ $a^x - 1 \sim x\ln a$ $(1+x)^{\partial} - 1 \sim \partial x$

十四、三角函数公式

1.两角和公式

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cdot\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$ $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cdot\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

2.二倍角公式

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

3.半角公式

$\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$

$\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A}$ $\cot\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

4.和差化积公式

$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$

5.积化和差公式

$\sin a\sin b = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$ $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

6.万能公式

$$\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \cos a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

7.平方关系

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad \sec^2 x-\tan^2 x=1 \qquad \csc^2 x-\cot^2 x=1$$

8.倒数关系

$\tan x\cdot\cot x=1$ $\sec x\cdot\cos x=1$ $\csc x\cdot\sin x=1$

9.商数关系

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

十五、几种常见的微分方程

1.可分离变量的微分方程：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ ， $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

2.齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

3.一阶线性非齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ 解为：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$