# 这是标题

陈烁龙

2022 年 9 月 10 日

# 目录



# 插图

# 表格

# 1 双目相机测量模型

问题描述：在某时刻，有两相机同时观测到某个世界坐标系下的特征点 $p$，其在左相机 $C_1$ 的归一化像素坐标为 (测量值)：

$$p^{C_1} = \begin{pmatrix} u^{C_1} & v^{C_1} \end{pmatrix}^T$$

其在右相机 $C_2$ 的归一化像素坐标 (测量值) 为：

$$p^{C_2} = \begin{pmatrix} u^{C_2} & v^{C_2} \end{pmatrix}^T$$

且已知两相机之间的位姿变换关系矩阵 $R_{C_1}^{C_2}$ 和 $r_{C_1}^{C_2}$、相机 1 相对于 e 系的初始位姿变换关系矩阵 $R_{C_1}^{e}$ 和 $r_{C_1}^{e}$。设特征点 $p$ 在两相机坐标系下的坐标为：

$$r^{C_1} = \begin{pmatrix} X^{C_1} & Y^{C_1} & Z^{C_1} \end{pmatrix}^T$$
$$r^{C_2} = \begin{pmatrix} X^{C_2} & Y^{C_2} & Z^{C_2} \end{pmatrix}^T$$

特征点 $p$ 的初始 e 系坐标为：

$$r^{e} = \begin{pmatrix} X^{e} & Y^{e} & Z^{e} \end{pmatrix}$$

那么，有如下的关系式：

$$\begin{cases} r^e = R_{C_1}^{e} r^{C_1} + r_{C_1}^{e} \\ r^{C_1} = R_{C_2}^{C_1} r^{C_2} + r_{C_2}^{C_1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^{C_1} = [R_{C_1}^{e}]^T (r^e - r_{C_1}^{e}) \\ r^{C_2} = R_{C_1}^{C_2} (r^{C_1} - r_{C_2}^{C_1}) \end{cases}$$

定义如下的误差方程：

$$\begin{pmatrix} e^{C_1} \\ e^{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_u^{C_1} \\ e_v^{C_1} \\ e_u^{C_2} \\ e_v^{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X^{C_1}}{Z^{C_1}} \\ \frac{Y^{C_1}}{Z^{C_1}} \\ \frac{X^{C_2}}{Z^{C_2}} \\ \frac{Y^{C_2}}{Z^{C_2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{C_1} \\ v^{C_1} \\ u^{C_2} \\ v^{C_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_u^{C_1} \\ n_v^{C_1} \\ n_u^{C_2} \\ n_v^{C_2} \end{pmatrix}$$

我们的优化目标参数为 $R_{C_1}^{e}$(用轴角 $\theta_{C_1}^{e}$ 来表示)、$r_{C_1}^{e}$、$r^e$。所以，我们的雅克比矩阵为：

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial e^{C_1}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} & \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r_{C_1}^{e}} & \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r^{e}} \\ \frac{\partial e^{C_2}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} & \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r_{C_1}^{e}} & \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r^{e}} \end{pmatrix}_{4\times 9}$$

其中第一行的偏导数为：

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_1}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} &= \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_1}}{Z^{C_1}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_1}}{Z^{C_1}} \end{pmatrix} \cdot (r^{C_1} \times) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r_{C_1}^{e}} &= \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial r_{C_1}^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_1}}{Z^{C_1}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_1}}{Z^{C_1}} \end{pmatrix} \cdot (-[R_{C_1}^{e}]^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r^{e}} &= \frac{\partial e^{C_1}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial r^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_1}}{Z^{C_1}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_1}}{Z^{C_1}} \end{pmatrix} \cdot [R_{C_1}^{e}]^T \end{aligned}$$

第二行的偏导数为：

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_2}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} &= \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r^{C_2}} \cdot \frac{\partial r^{C_2}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial \theta_{C_1}^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_2}}{Z^{C_2}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_2}}{Z^{C_2}} \end{pmatrix} \cdot R_{C_1}^{C_2} \cdot (r^{C_1} \times) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r_{C_1}^{e}} &= \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r^{C_2}} \cdot \frac{\partial r^{C_2}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial r_{C_1}^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_2}}{Z^{C_2}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_2}}{Z^{C_2}} \end{pmatrix} \cdot R_{C_1}^{C_2} \cdot (-[R_{C_1}^{e}]^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r^{e}} &= \frac{\partial e^{C_2}}{\partial r^{C_2}} \cdot \frac{\partial r^{C_2}}{\partial r^{C_1}} \cdot \frac{\partial r^{C_1}}{\partial r^{e}} \\ &= \frac{1}{Z^{C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{X^{C_2}}{Z^{C_2}} \\ 0 & 1 & -\frac{Y^{C_2}}{Z^{C_2}} \end{pmatrix} \cdot R_{C_1}^{C_2} \cdot [R_{C_1}^{e}]^T \end{aligned}$$