这是标题

陈烁龙

2022 年 9 月 17 日

目录

1 概述 **1**

2 论文算法 **1**

插图

表格

1 概述

对于激光里程计而言，帧间匹配对于位姿估计是比较重要的。一般的帧间匹配有点到点的、点到线的、点到面的 (三维空间)。其基本的步骤都是需要先进行数据关联，而后构建损失函数进行优化。而本次论文里的 NDT 方法，不需要进行数据关联，其通过将点云格网化，并建立对应的正太分布模型，在进行帧间位姿估计。

2 论文算法

本次主要记录三维空间的 NDT(论文里是二维的)。

首先，对于拿到的第一帧点云，我们将其划分成小的规则格网 (正方体)。然后对其里面的点 p_i, $\quad i \in [0, n-1]$ 进行相关统计，得到其正太发布模型：

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{p}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} {}^{L_1}\boldsymbol{p}_i \\ \boldsymbol{\Sigma} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} ({}^{L_1}\boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}})({}^{L_1}\boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}})^T \end{cases}$$

那么，在这一个格网内的任意点，都可以计算得到其概率密度：

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}) = \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{p}})}{2}\right)$$

当然，为了减轻离散化效应，我们可以让划分的格网有重叠。比如，对于规定边长为 l 的正方体，在其右方错开 $\frac{l}{2}$ 的地方放一个正方体，在其前方错开 $\frac{l}{2}$ 的地方放一个正方体，在其前右方错开 $\frac{l}{2}$ 的地方放一个正方体，然后此结构在往上方 $\frac{l}{2}$ 的地方再放这样的一个结构。那么对于中心小格网的点，其落入了 8 个规则格网中，计算的时候，其概率就为 8 个规则格网计算得到的概率的和。

通过上文的处理，我们进行对第一帧点云进行了建模。当第二帧到来的时候，我们通过一个两帧之间的位姿初值，将第二帧的点云里的每一个点 ${}^{L_2}\boldsymbol{p}_j$ 变换到第一帧坐标系中，得到 ${}^{L_1}\boldsymbol{p}_j$，然后计算每一个点的概率 $\boldsymbol{P}({}^{L_1}\boldsymbol{p}_j)$，然后求和，得到总的分数 s。让这个分数最大即可以优化位姿 ${}^{L_1}_{L_2}\boldsymbol{R}$、${}^{L_1}\boldsymbol{t}_{L_2}$：

$$\begin{cases} s_j = \exp\left(-\dfrac{\left({}^{L_1}\boldsymbol{p}_j - \bar{\boldsymbol{p}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left({}^{L_1}\boldsymbol{p}_j - \bar{\boldsymbol{p}}\right)}{2}\right) \\ {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j = {}^{L_1}_{L_2}\boldsymbol{R}\,{}^{L_2}\boldsymbol{p}_j + {}^{L_1}\boldsymbol{t}_{L_2} \end{cases}$$

通过利用高斯-牛顿发可以优化求解位姿。首先我们的损失函数为：

$$f(\boldsymbol{x})_j = \frac{1}{s_j}$$

求解雅克比矩阵 (姿态处求导采用右扰动)：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})_j}{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j} = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial s_j} \times \dfrac{\partial s_j}{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j} \\ \qquad\qquad = s_j^{-1} \times \left({}^{L_1}\boldsymbol{p}_j - \bar{\boldsymbol{p}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\ \dfrac{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j}{\partial \delta^{L_1}_{L_2}\boldsymbol{\theta}} = -{}^{L_1}_{L_2}\boldsymbol{R}\left\lfloor {}^{L_2}\boldsymbol{p}_j \right\rfloor_\times \\ \dfrac{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j}{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{t}_{L_2}} = I \end{cases}$$

而后求解：

$$\begin{cases} \boldsymbol{J_j} = \left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})_j}{\partial {}^{L_1}\boldsymbol{p}_j}\right)\left(-{}^{L_1}_{L_2}\boldsymbol{R}\left\lfloor {}^{L_2}\boldsymbol{p}_j \right\rfloor_\times \quad \boldsymbol{I}\right) \\ \boldsymbol{H} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{J_j}^T \boldsymbol{J_j} \\ \boldsymbol{g} = -j = 0^{m-1} \boldsymbol{J_j} f(\boldsymbol{x})_j \\ \boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x} = g \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} \end{cases}$$

需要注意的是，由于姿态求解我们使用了右扰动，所以姿态更新时，要右乘更新量。