

这是标题

陈烁龙

2022 年 9 月 16 日

目录

1 概述 1

2 前置知识 1

2.1 贝塞尔曲线 1

2.2 B 样条曲线 1

插图

1 贝塞尔曲线 1

2 准 B 样条曲线 2

表格

1 概述

本次论文为：《Targetless Calibration of LiDAR-IMU System Based on Continuous-time Batch Estimation》，其是一篇关于传感器标定的文章。其使用 B 样条曲线，在连续时间上对传感器的轨迹进行建模（主要是 IMU 和激光雷达）。其不需要靶标，适应的场景较多。

2 前置知识

2.1 贝塞尔曲线

贝塞尔曲线主要用于二维图形应用程序中的数学曲线，曲线由起始点，终止点（也称锚点）和控制点组成，通过调整控制点，通过一定方式绘制的贝塞尔曲线形状会发生变化¹。

贝塞尔曲线的性质：曲线总是通过第一个点和最后一个点；第一个点的切线即为第一个点和第二个点的连线；最后一个点的切线即为最后一个点和倒数第二个点的连线。

对于 n 次的贝塞尔曲线，其有 $n + 1$ 个控制点，曲线上点的位置由控制点和参数 $t \in [0, 1]$ 决定。其公式为：

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-i} t^i P_i \quad t \in [0, 1]$$

其中：

$$C_n^i = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

例如，对于 3 次的贝塞尔曲线，其公式为：

$$B_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

另外，对于计算机适合的计算贝塞尔曲线递推方法为：

$$\begin{aligned} B_n(t|P_0, P_1, \dots, P_n) = \\ (1-t)B_{n-1}(t|P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) \\ + tB_{n-1}(t|P_1, P_2, \dots, P_n) \end{aligned}$$

¹注意是整体曲线，这和后面的 B 样条曲线不同。

比如，同样对于 3 阶的贝塞尔曲线，其公式为：

$$\begin{cases} B_3(t|P_0, P_1, P_2, P_3) = (1-t)B_2(t|P_0, P_1, P_2) \\ \quad + tB_2(t|P_1, P_2, P_3) \\ B_2(t|P_0, P_1, P_2) = (1-t)B_1(t|P_0, P_1) \\ \quad + tB_1(t|P_1, P_2) \\ B_2(t|P_1, P_2, P_3) = (1-t)B_1(t|P_1, P_2) \\ \quad + tB_1(t|P_2, P_3) \\ B_1(t|P_i, P_j) = (1-t)B_0(t|P_i) + tB_0(t|P_j) \\ \quad = (1-t)P_i + tP_j \end{cases}$$

贝塞尔曲线如下图所示：

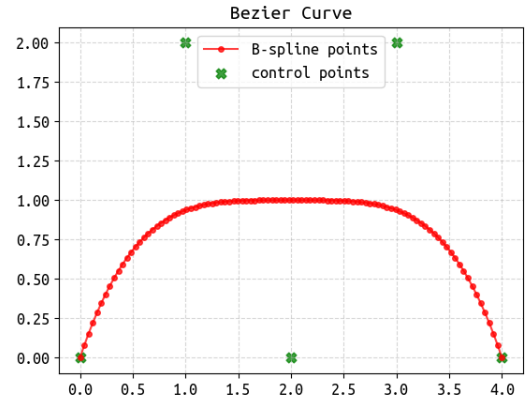


图 1: 贝塞尔曲线

2.2 B 样条曲线

B 样条是通过一组指定点集而生成平滑曲线的柔性带。简单地说，B 样条曲线就是通过控制点局部控制形状的曲线²。

对于 k 次³的 B 样条曲线，其有 $n + 1$ 个控制点、 $m + 1 = (n + k + 1) + 1$ 个节点，即： $t_0 < \dots < t_m$ 。其公式为：

$$B_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot b_{i,k}(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_{m-k+1}]$$

²注意是局部控制，因为其多项式的次数 (k) 独立于控制点的数目 ($n + 1$)，但是有一定的限制。

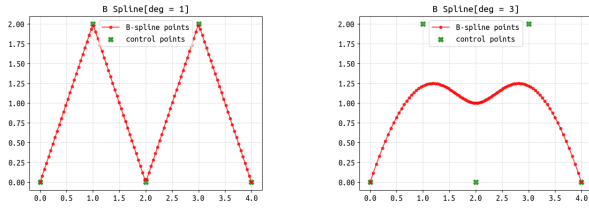
³阶数等于次数加 1。

其中 $b_{i,n}(t)$ 可以通过 de Boor 递归公式得到:

$$b_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \dots \end{cases}$$

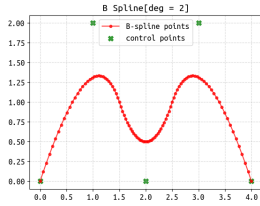
$$b_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} b_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} b_{i+1,k-1}(t)$$

当节点等距, 称 B 样条为均匀。如果节点的重
复度为 $k+1$ (即 $t_0 = \dots = t_k, t_{m-k} = \dots = t_m$)
时, 为准 B 样条均匀。



(a) degree = 1

(b) degree = 2



(c) degree = 3

图 2: 准 B 样条曲线