## 这是标题

陈烁龙 2022 年 10 月 19 日

# 目录

插	插图	
3	四元素姿态与优化	1
2	Ceres 局部参数化	1
1	PnP 描述	1

#### 1 PnP 描述

对于已知位置的三维点  $P_w = [X_w, Y_w, Z_w]^T$ , 其可通过相机的位姿  ${}^W_C \mathbf{T} = [{}^W_C \mathbf{R}|^W \mathbf{t}_C]$ , 将其变换到局部相机坐标系下:

$$\boldsymbol{P}_C = {}_C^W \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{P}_W - {}_C^W \boldsymbol{R}^{-1W} \boldsymbol{t}_C$$

进而将其变换到相机的归一化坐标平面上:

$$m{p}_n = egin{bmatrix} x_n \ y_n \end{bmatrix} = egin{bmatrix} X_C/Z_C \ Y_C/Z_C \end{bmatrix}$$

如果我们测得了对应的特征点图像坐标,并通过一定的相机模型,将其转换到相机的归一化坐标平面上,得到  $\tilde{p}_n$ ,那么可以建立误差函数:

$$oldsymbol{e}(oldsymbol{p}_n) = oldsymbol{p}_n - ilde{oldsymbol{p}}_n$$

基于误差函数,对待求参数求导(旋转量使用李代数右扰动模型):

$$\begin{cases}
\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\delta_C^W \boldsymbol{R}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_n}{\partial \boldsymbol{P}_C} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}_C}{\partial_W^C \boldsymbol{R}} \times \frac{\partial_C^W \boldsymbol{R}}{\partial_W^C \boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} 1/Z_C & 0 & -X_C/Z_C^2 \\ 0 & 1/Z_C & -Y_C/Z_C^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -_W^W \boldsymbol{R}^{-1} \left\lfloor \boldsymbol{P}_W \right\rfloor_{\times} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -_W^W \boldsymbol{R}^$$

使用高斯-牛顿法求解迭代量:

$$egin{cases} oldsymbol{J}_i = \left[rac{\partial oldsymbol{e}}{\delta_C^W oldsymbol{R}} \; rac{\partial oldsymbol{e}}{\partial^W oldsymbol{t}_C}
ight]_{2 imes 6} \ oldsymbol{H}_{6 imes 6} = \sum oldsymbol{J}_i^T oldsymbol{J}_i \ oldsymbol{g}_{6 imes 1} = \sum -oldsymbol{J}_i^T oldsymbol{e} \ oldsymbol{H} \Delta oldsymbol{x} = oldsymbol{g} \end{cases}$$

## 2 Ceres 局部参数化

对于位姿优化而言,要仔细处理,因为迭代更新的时候,不是简单的相加。另外,如果使用单位正交阵或者四元素进行优化的时候,有另外的约束。这时,需要在优化问题中对参数进行约束,以及指定迭代更新策略。可以通过继承 ceres:: LocalParameterization,并重载 Plus 和 ComputeJacobian 虚函数来实现。

### 3 四元素姿态与优化

对于轴角<sup>1</sup> $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$ , 其四元素表示为:

$$\mathbf{q} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z & q_w \end{bmatrix}^T \quad \theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$$

 $<sup>^{1}</sup>$ 李代数 so3 在  $R^{3}$  下的表示。

那么四元素对轴角的导数为有:

$$\begin{cases} c_0 = q_w/2 & c_1 = q_z/2 & c_2 = -c_1 \\ c_3 = q_y/2 & c_4 = q_x/2 & c_5 = -c_4 \\ c_6 = -c_3 & \end{cases}$$

$$rac{\partial m{q}}{\partial m{ heta}} = m{J} = egin{bmatrix} c_0 & c_2 & c_3 \ c_1 & c_0 & c_5 \ c_6 & c_4 & c_0 \ c_5 & c_6 & c_2 \end{bmatrix}$$