

这是标题

陈烁龙

2022 年 5 月 7 日

# 目录

<b>1</b>	<b>数值模拟</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>要求说明</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>模拟过程说明</b>	<b>4</b>
3.1	轨迹生成 . . . . .	4
3.2	姿态生成 . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Kalman 滤波公式</b>	<b>5</b>
4.1	运动方程 . . . . .	6
4.2	观测方程 . . . . .	6
4.3	Kalman 滤波 . . . . .	7
4.3.1	一步预测 . . . . .	7
4.3.2	二步更新 . . . . .	7

# 插图

1	模拟效果 . . . . .	3
2	轨迹文件 . . . . .	4

# 表格

# 摘要

SLAM 中估计的手段一般有两种：基于滤波的方式和基于非线性优化的方式。本次模拟了一个用于算法开发的位姿轨迹。同时，本文基于卡尔曼滤波的方式，给出了对一个位姿轨迹的估计滤波过程。

**关键词：**卡尔曼滤波，PCL，位姿模拟

## 1 数值模拟

一般，我们 SLAM 后端优化都使用的是非线性优化，我们认为其优化的结果由于传统滤波的方式。所以本次我们使用的卡尔曼滤波主要是用于位姿预测，以加快特征的匹配<sup>1</sup>。

为了实验的进行，我们首先要模拟出一组数据。我们知道，即使对位姿图进行了 BA 优化，但是仍然会出现累积误差<sup>2</sup>。基于此经验，我们会首先设计一条无误差的标准位姿轨迹<sup>3</sup>，此轨迹可用来后续处理结果的评估。同时对于每一帧，我们计算标准轨迹位姿变化量 (使用李代数的形式给出)：

$$\xi_{b_i b_{i-1}}^{update} = \xi_{b_i w}^{truth} (\xi_{b_{i-1} w}^{truth})^{-1}$$

并在标准轨迹位姿变化量的基础上增加误差，得到附有误差的位姿变化量，而后在对观测值进行更新：

$$\xi_{b_i b_{i-1}}^{error} \leftarrow \begin{cases} R_{b_i b_{i-1}}^{error} = R_Z(N_R) R_Y(N_R) R_X(N_R) \\ t_{b_i b_{i-1}}^{error} = \begin{pmatrix} N_t & N_t & N_t \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

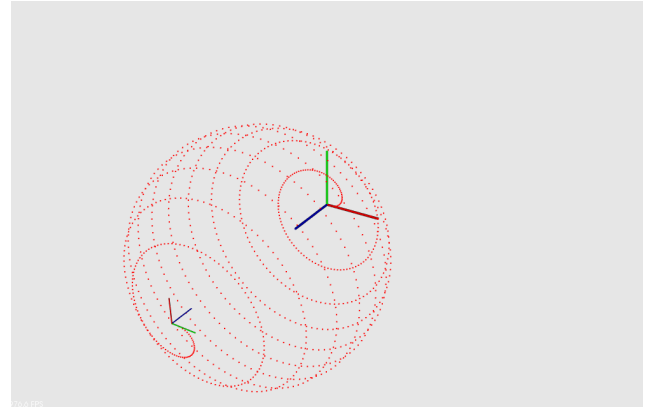
$$\rightarrow \xi_{b_i w}^{obs} = (\xi_{b_i b_{i-1}}^{error} \xi_{b_i b_{i-1}}^{update}) \xi_{b_{i-1} w}^{obs}$$

其中  $N_R$ 、 $N_t$  为服从在正太分布的 0 均值随机

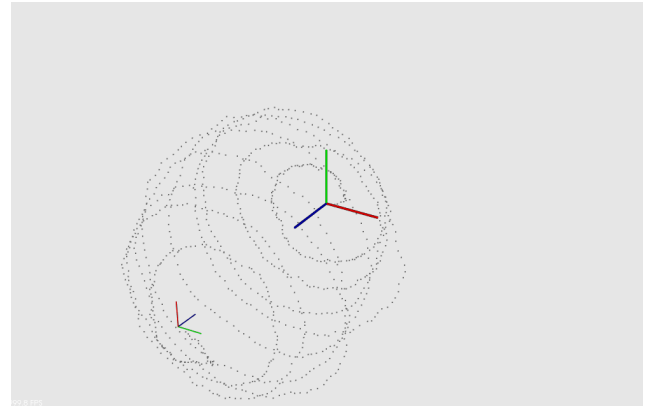
<sup>1</sup>当预测了下一帧的位姿后，我们可以推算出当前地图点在下一帧影像上可能出现的位置。

<sup>2</sup>这也是为什么有回环检测的原因。

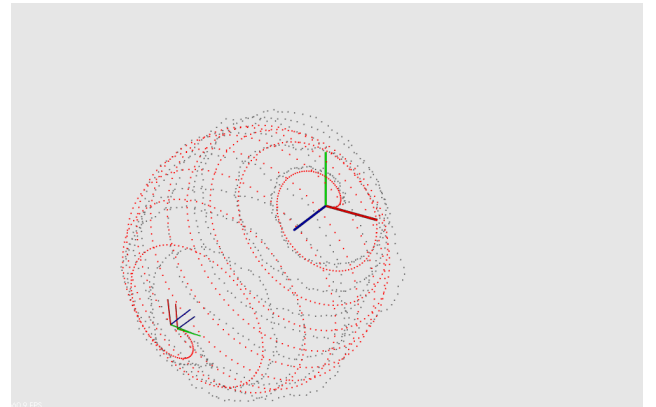
<sup>3</sup>至于如何设计的轨迹，后有详细的描述。



(a) 真实轨迹



(b) 观测轨迹



(c) 综合

图 1: 模拟效果

变量，我们事先假定了其标准差。

$$\begin{cases} N_R \sim N(0, \sigma_R = \frac{\pi}{1800}) \\ N_t \sim N(0, \sigma_t = 0.01) \end{cases}$$

图 1 为本次我们模拟出来的位姿轨迹图<sup>4</sup>。其中红色的位姿轨迹为实（理想）的位姿轨迹，而灰色的则为我们引入累积误差的轨迹，为我们所“观测到的”位姿轨迹。可以看到，随着附带误差的新估计位姿变化量的到来，我们所观测的位姿轨迹逐渐偏离真实的位姿轨迹。这正是我们所需要的。

## 2 要求说明

如下图 2 所示，这是我们要解算的数据文件。头两行是一些数据或格式的相关说明（采样帧率，数据对应关系）。而后的每一行为一个位姿，其中前三维是位移量，后四维是表示旋转的单位四元数。注意每一条数据所给出的是由  $w$  系到当前  $b_i$  系的位姿变换  $\xi_{wb_i}$ 。

你需要做的就是，基于观测值文件，尽可能给出与真实轨迹一致的滤波或优化结果。可以通过真实轨迹数据来评估你的处理结果。例如，我们可以用绝对轨迹误差来描述：

$$ATE_{all} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|\xi_{truth,i}^{-1} \xi_{esti,i}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

对于真实理想轨迹而言，其  $ATE_{all}$  为 0。

<sup>4</sup>此三维场景使用 PCL 绘制，其中坐标轴的对应顺序为  $rgb \rightarrow xyz$ 。

```
output > truth.csv
1 # fps: 30.000000
2 # x,y,z,qx,qy,qz,qw
3 0,0,0,0,0,0,1
4 7.45058e-09,0.0632455,0.0020019,0.0216568,0.0230636,-0.728625,0.684182
5 1.49012e-08,0.0893978,0.00400415,0.029588,0.0335653,-0.749401,0.660602
6 -0.0.109435,0.00600601,0.0349266,0.0422272,-0.769415,0.636394
7 -0.0.126301,0.00800794,0.0387766,0.0500035,-0.788648,0.61158
8 -2.98023e-08,0.141138,0.0100099,0.0415744,0.0572411,-0.807082,0.586186
9 1.49012e-08,0.154531,0.012012,0.0435485,0.0641057,-0.824699,0.560237
10 -2.98023e-08,0.166828,0.0140142,0.0448376,0.0706871,-0.841482,0.533761
11 -2.98023e-08,0.178257,0.016016,0.0455334,0.0770371,-0.857416,0.506783
12 -1.49012e-08,0.188975,0.018018,0.0457025,0.0831883,-0.872486,0.479332
13 -2.98023e-08,0.199096,0.02002,0.0453937,0.0891595,-0.886678,0.451434
14 -0.0.208708,0.0220218,0.0446454,0.0949616,-0.899978,0.423117
15 -5.96046e-08,0.217878,0.0240241,0.0434892,0.100602,-0.912375,0.394411
```

(a) 真实轨迹文件

```
output > obs.csv
1 # fps: 30.000000
2 # x,y,z,qx,qy,qz,qw
3 0,0,0,0,0,0,1
4 0.0047528,0.060226,0.00316593,0.0205149,0.0238283,-0.729554,0.6832
5 -0.00172688,0.0864778,0.00697534,0.0283694,0.0346583,-0.751653,0.658036
6 -0.00127755,0.108026,0.0158429,0.0334087,0.0428998,-0.770631,0.634957
7 -0.00815685,0.141645,0.0297048,0.0367069,0.0503177,-0.790218,0.609653
8 0.00266509,0.163438,0.0452181,0.039434,0.0578571,-0.80902,0.583596
9 0.00719054,0.184641,0.0561375,0.0423925,0.0653653,-0.82635,0.557742
10 -0.00112297,0.186692,0.0583745,0.0447168,0.0708574,-0.843868,0.531241
11 0.00978893,0.197674,0.0487313,0.0453746,0.0788072,-0.858867,0.504062
12 -0.0128298,0.205149,0.0458713,0.0446044,0.083501,-0.873997,0.476621
13 0.00844222,0.192053,0.048471,0.0440906,0.0899142,-0.888179,0.448451
14 0.0174613,0.210187,0.0538521,0.0430476,0.0966161,-0.901376,0.419922
15 -0.00362553,0.219879,0.0651265,0.042646,0.102062,-0.913975,0.390402
```

(b) 观测轨迹文件

图 2: 轨迹文件

## 3 模拟过程说明

### 3.1 轨迹生成

我们模拟的输入是帧率  $f$ 、总共的点数  $n_p$ ，目的是在一个球：

$$\begin{cases} (X - X_c^w)^2 + (Y - Y_c^w)^2 + (Z - Z_c^w)^2 = R_c^2 \\ P_c^w = \begin{pmatrix} X_c^w & Y_c^w & Z_c^w \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ R_c = 1 \end{cases}$$

的表面生成一个环状的轨迹，其中  $P_c^w$  表示的是球的中心在世界坐标系下的投影坐标。为了让轨迹更加均匀，我们假定环绕球圈数是固定的，为  $n_c = 10$ ；且相邻点之间的  $Z$  坐标增量  $\Delta Z$  是相同的。因此，我们有：

$$\begin{cases} \Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1} = 2\pi n_c / (n_p - 1) \\ \Delta Z = Z_i^w - Z_{i-1}^w = 2R_c / (n_p - 1) \\ i \in 0, \dots, n_p - 1 \end{cases}$$

其中  $\theta_i$  表示原点到  $P_i$  在  $X-Y$  面的投影点  $OP_i^{x-o-y}$  的角度。如对于点  $P^w(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$ ，

则该值为  $\theta = \pi/4$ 。至此，我们可以计算每一点的坐标值：

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta \\ Z_i^w = Z_{i-1}^w + \Delta Z \\ R_i = \sqrt{R_c^2 - (Z_i^w - Z_c^w)^2} \\ X_i^w = R_i \cos \theta_i \\ Y_i^w = R_i \sin \theta_i \end{cases}$$

$$\rightarrow P_i^w = \begin{pmatrix} X_i^w & Y_i^w & Z_i^w \end{pmatrix}^T \rightarrow t_{wb_i}$$

而这坐标值向量即为由当前坐标系  $b_i$  转到  $w$  坐标系的平移量  $t_{wb_i}$ 。

### 3.2 姿态生成

对于姿态，我们假定每一个位置处坐标系的  $Z$  轴指向球心， $X$  轴沿以  $R_i$  为半径的截面圆切线方向。我们记点  $P_o^w(0,0,0)$  为世界坐标系原点，点  $P_c^w(0,0,1)$  为球心，点  $P_t^w(0,0,2)$  为球的上部顶点。所以，对于位置  $P_i$ ，我们有：

- 球心  $C$  的坐标对应关系：

$$\begin{cases} P_c^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \leftrightarrow P_c^{b_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

- 世界坐标系原点  $O$  的坐标对应关系：

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_i O^w} = P_o^w - P_i^w \\ \overrightarrow{P_i C^w} = P_c^w - P_i^w \\ \cos \theta_1 = \overrightarrow{P_i O^w} \cdot \overrightarrow{P_i C^w} / (|\overrightarrow{P_i O^w}| |\overrightarrow{P_i C^w}|) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P_o^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \leftrightarrow P_o^{b_i} = \begin{pmatrix} 0 & Y_o^{b_i} & Z_o^{b_i} \end{pmatrix}^T \\ Y_o^{b_i} = |\overrightarrow{P_i O^w}| \sin \theta_1 \\ Z_o^{b_i} = |\overrightarrow{P_i O^w}| \cos \theta_1 \end{cases}$$

- 球的上部顶点  $T$  的坐标对应关系：

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_i T^w} = P_t^w - P_i^w \\ \overrightarrow{P_i C^w} = P_c^w - P_i^w \\ \cos \theta_2 = \overrightarrow{P_i T^w} \cdot \overrightarrow{P_i C^w} / (|\overrightarrow{P_i T^w}| |\overrightarrow{P_i C^w}|) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P_t^w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \leftrightarrow P_t^{b_i} = \begin{pmatrix} 0 & Y_t^{b_i} & Z_t^{b_i} \end{pmatrix}^T \\ Y_t^{b_i} = |\overrightarrow{P_i T^w}| \sin \theta_2 \\ Z_t^{b_i} = |\overrightarrow{P_i T^w}| \cos \theta_2 \end{cases}$$

也就是说，对于每一个位置，该位置坐标系的  $Z$  轴指向球心。至此，我们有坐标变换关系：

$$R_{wb_i} \begin{pmatrix} P_c^{b_i} \\ P_o^{b_i} \\ P_t^{b_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{wb_i} \\ t_{wb_i} \\ t_{wb_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_c^w \\ P_o^w \\ P_t^w \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} P^w \\ 1 \end{pmatrix} = T_{wb_i} \begin{pmatrix} P^{b_i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ T_{wb_i} = \begin{pmatrix} R_{wb_i} & t_{wb_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

它描述的是  $b_i$  坐标系下的坐标  $P^{b_i}$ ，通过从  $b_i$  系到  $w$  系的位姿变换关系，得到了其世界坐标系下的球心  $P^w$ 。

通过上式，我们可以通过非线性优化的方式，也可以通过解析解的方式。非线性优化更为方便，我们使用李代数进行优化。我们定义误差项：

$$e_i = R_{wb_i} P^{b_i} + t_{wb_i} - P^w$$

对旋转量求导：

$$J = \partial e_i / \partial \delta \varphi = -(R_{wb_i} P^{b_i})^\wedge$$

通过高斯-牛顿法求解：

$$J^T J \Delta x = -J^T e_i$$

## 4 Kalman 滤波公式

此部分只作参考，可以有其他方法滤波或优化处理。

## 4.1 运动方程

首先我们得取定我们所研究系统的运动方程。不失一般性，我们假设我们到估计的位姿是均匀变化的，同时考虑模型的系统误差，我们有：

$$\ddot{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_R(t) \\ \ddot{\xi}_t(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_R(t) \\ e_t(t) \end{pmatrix}$$

其中  $\ddot{\xi}(t)$  为 SE3 对应的李代数对时间的二次导数，是一个有六个元素的列向量<sup>5</sup>。 $e(t)$  为白噪声，满足：

$$\begin{cases} E(e(t)) = 0 \\ Cov(e(t), e(\tau)) = D_e(t)\delta(t - \tau) \\ D_e(t) = \begin{pmatrix} D_{e_R}(t) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & D_{e_t}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

其中  $\delta(t - \tau)$  为狄拉克- $\delta$  函数。我们设我们的状态参量为：

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \xi(t) & \dot{\xi}(t) \end{pmatrix}^T$$

则有：

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{1}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{1}_{6 \times 6} \end{pmatrix} e(t)$$

我们将其记为：

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + C(t)e(t)$$

通过解这个微分方程，并将其离散化，我们可以得到：

$$X(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1})X(t_{k-1}) + w(t_{k-1})$$

其中  $\Phi(t_k, \tau)$  为状态转移矩阵：

$$\Phi(t_k, \tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{6 \times 6} & (t_k - \tau)\mathbf{1}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{1}_{6 \times 6} \end{pmatrix}$$

而  $w(t_{k-1})$  为噪声项（系统噪声）：

$$w(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)C(\tau)D_e(\tau)d\tau$$

其方差为：

$$D_w(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)C(\tau)D_e(\tau)C(\tau)^T\Phi(t_k, \tau)^Td\tau$$

易知：

$$\Phi(t_k, \tau)C(\tau) = \begin{pmatrix} (t_k - \tau)\mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & (t_k - \tau)\mathbf{1}_{3 \times 3} \\ \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

所以被积分的矩阵为 ( $f(\tau) = t_k - \tau$ )：

$$\begin{pmatrix} f^2(\tau)D_{e_R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & f(\tau)D_{e_R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & f^2(\tau)D_{e_t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & f(\tau)D_{e_t} \\ f(\tau)D_{e_R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & D_{e_R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & f(\tau)D_{e_t} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & D_{e_t} \end{pmatrix}$$

积分求解可得方差矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \frac{(\Delta t)^3 D_{e_R}}{3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{(\Delta t)^2 D_{e_R}}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{(\Delta t)^3 D_{e_t}}{3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{(\Delta t)^2 D_{e_t}}{2} \\ \frac{(\Delta t)^2 D_{e_R}}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Delta t D_{e_R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{(\Delta t)^2 D_{e_t}}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Delta t D_{e_t} \end{pmatrix}$$

其中  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ 。

## 4.2 观测方程

相较于运动方程。我们的观测方程就变得比较简单了，因为我们所观测的参量中的一部分正是我们所估计的参数。所以，我们有：

$$Z(t_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{1}_{6 \times 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t_k) \\ X_2(t_k) \end{pmatrix} + \Delta(t_k)$$

我们将其记为：

$$Z(t_k) = H(t_k)X(t_k) + \Delta(t_k)$$

其中， $\Delta(t)$  为白噪声，满足：

$$Cov(\Delta(t), \Delta(\tau)) = D_\Delta(t)\delta(t - \tau)$$

<sup>5</sup>其中三维与旋转有关，三维与平移有关。

### 4.3 Kalman 滤波

基于上文，我们有如下的公式：

#### 4.3.1 一步预测

$$\begin{cases} \hat{X}(t_k, t_{k-1}) = \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{X}(t_{k-1}) \\ D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1}) = \Phi(t_k, t_{k-1})D_{\hat{X}}(t_{k-1})\Phi(t_k, t_{k-1})^T \\ \quad + D_w(t_{k-1}) \end{cases}$$

我们基于上一时刻  $t_{k-1}$  的状态量  $\hat{X}(t_{k-1})$ ，通过  $t_{k-1}$  到  $t_k$  的状态转移矩阵  $\Phi(t_k, t_{k-1})$ ，预测当前时刻  $t_k$  的状态量  $\hat{X}(t_k, t_{k-1})$ ，并对给出当前预测状态的方差矩阵  $D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1})$ 。

#### 4.3.2 二步更新

$$\begin{cases} K(t_k) = D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1})H(t_k)^T \\ \quad (H(t_k)D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1})H(t_k)^T + D_{\Delta}(t_k))^{-1} \\ \hat{X}(t_k) = \hat{X}(t_k, t_{k-1}) \\ \quad + K(t_k)(Z(t_k) - H(t_k)\hat{X}(t_{k-1})) \\ D_{\hat{X}}(t_k) = (I - H(t_k)K(t_k))D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1}) \end{cases}$$

我们基于当前预测状态的方差矩阵  $D_{\hat{X}}(t_k, t_{k-1})$  和观测矩阵  $H(t_k)$ 、观测方差矩阵  $D_{\Delta}(t_k)$ ，计算卡尔曼增益  $K(t_k)$ ，而后更新  $t_k$  时刻的状态量  $\hat{X}(t_k)$  和方差矩阵  $D_{\hat{X}}(t_k)$ 。