这是标题

陈烁龙

2022 年 9 月 8 日

目录

插图

表格

1 前言

记录惯导课程的学习！

2 惯性导航和惯性器件

导航是指：运动物体随时间变化的位置 (Position)、速度 (Velocity) 和姿态 (Attitude)，这三者构成了导航姿态 (PVA)。导航主要有两种原理：

1. 航位推算 (Dead Reckoning)：通过推断连续帧间导航状态的变换量得到航迹，如视觉里程计 (VO)、惯导 (INS)；
2. 直接定位 (Direct Fixing)：直接获得运动物体在参考坐标系下的导航状态，如卫导 (GNSS)。

对于惯导而言，借助加速度计和陀螺仪测定载体相对于惯性空间的加速度和角速度。具体来说：

1. 加速度计 (Accelerometer)：测量相对于惯性参考系的加速度 (即比力) 的传感器。公式：

   $$f = a - g$$

   其中：f 即为比力，为加速度计的直接输出；a 为载体相对于惯性参考空间的运动加速度；g 为万有引力加速度[1]；
2. 陀螺仪 (Gyroscope)：测量相对于惯性参考系的角速率的传感器。是惯导系统中最为关键的器件。

将二者结合在一起，就得到了惯性测量单元 (IMU)，其是由一个三轴加速度计和一个三轴陀螺构成。将惯性导航算法与 IMU 结合，就得到了惯性导航系统 (INS)。

惯性导航系统有两类：平台式系统和捷联式系统。前者通过闭环的控制系统感知 IMU 中陀螺仪的输出变化来保证 IMU 中的加速度计的朝向始终保持一致。此种系统对于算法要求较低，精度较高，但是十分昂贵，一般只使用到高精度的场景下。而后者则通过复杂的算法来计算运动物体的导航状态，而不在要求要保证 IMU 中的加速度计的朝向始终保持一致。该类系统价格便宜，精度可行但不及平台式系统，但是应用广泛。

3 惯性器件的误差和标定

考虑这样一个场景：假设有一辆车在地表行驶，海拔高为 h，其载体里的 IMU 坐标系统 xyz 与当地的导航坐标系 NED 对齐。该辆小车的北向速度为 v_N，东向速度为 v_E，则该小车上的 IMU 输出为多少？

很明显，由于：

$$\begin{aligned} &\to \dot{\varphi} = \frac{v_N}{R+h} \\ &\to \dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R+h)\cos\varphi} \end{aligned}$$

所以，陀螺仪的输出为：

$$\begin{aligned} \to \omega_E &= -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R+h} \\ \to \omega_N &= \dot{\lambda}\cos\varphi + \omega_e\cos\varphi \\ &= \frac{v_E}{R+h} + \omega_e\cos\varphi \\ \to \omega_D &= -\dot{\lambda}\sin\varphi - \omega_e\sin\varphi \\ &= -\frac{v_E}{R+h}\tan\varphi - omega_e\sin\varphi \end{aligned}$$

接下来介绍常用的坐标系：

1. 惯性坐标系 (i-frame)：原点为地球质心，z 轴沿地球自转轴指向协议地极，x 轴指向春分点；
2. 地固坐标系 (e-frame)：和地球固连在一起，x 轴指向赤道与本初子午线的交点；

[1]注意：加速度计的直接输出是物体运动加速度减去万有引力加速度，是减号，不是加号。

3. 导航坐标系 (n-frame)：x 轴沿参考椭球北向，y 轴沿参考参考椭球东向，z 轴沿椭球法线向下；
4. IMU 坐标系 (载体坐标系 b-frame)：原点为 IMU 中心，x 轴为陀螺正前方，y 轴为陀螺右方，z 轴为陀螺下方，即"xyz" 对应" 前右下"。

陀螺的测量值为：

$$\widetilde{\omega} = \omega + b_\omega + S_\omega + N\omega + \varepsilon_\omega$$

其中：$\widetilde{\omega}$ 为实际陀螺的输出，ω 为真实的角速度，b_ω 为陀螺的零偏，S 为陀螺的比例因子误差矩阵，N 为陀螺交轴耦合误差矩阵，ε_ω 为陀螺噪声矢量。且有：

$$b_\omega = \begin{pmatrix} b_{\omega,x} \\ b_{\omega,y} \\ b_{\omega,z} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & 0 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

加速度计的测量值为：

$$\widetilde{f} = f + b_f + S_1 f + S_2 f^2 + Nf + \delta g + \varepsilon_f$$

其中：$\widetilde{f}$ 为实际加速度计的输出，f 为真实的角速度，b_f 为加速度计的零偏，S_1 为加速度计的线性比例因子误差矩阵，S_2 为加速度计的非线性比例因子误差矩阵，N 为加速度计交轴耦合误差矩阵，δg 为重力异常，ε_f 为加速度计噪声矢量。

4 姿态更新

以四元素为例，问题为已知：

1. $\boldsymbol{q}_b^n(t_{k-1})$，前一时刻 b 系相对于 n 系的姿态；
2. $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$，$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}$，当前时刻和前一时刻的陀螺角增量输出，即：

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt$$

3. $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$，地球自转角速率在 n 系下的投影，$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$，n 系相对于 e 系的角速率在 n 系下的投影：

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \omega_e \cos\varphi & 0 & -\omega_e \sin\varphi \end{pmatrix}^T$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \frac{v_E}{R_N+h} & -\frac{v_N}{R_M+h} & -\frac{v_E \tan\varphi}{R_N+h} \end{pmatrix}^T$$

求解：

1. $\boldsymbol{q}_b^n(t_k)$，当前时刻 b 系相对于 n 系的姿态。

以四元素为例：姿态递推计算的运算式子为：

$$\boldsymbol{q}_b^n(t_k) = \boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes \boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

其中：

1. 使用等效旋转矢量更新 b 系从 t_{k-1} 到 t_k 时刻的姿态变换 (最后一项)：

$$\rightarrow \boldsymbol{\phi}_k = \Delta\boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

$$\rightarrow \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{pmatrix} \cos\|\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_k\| \\ \sin\|\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_k\| \frac{\boldsymbol{\phi}_k}{\|\boldsymbol{\phi}_k\|} \end{pmatrix}$$

2. 使用等效旋转矢量更新 n 系从 t_{k-1} 到 t_k 时刻的姿态变换 (第一项)：

$$\rightarrow \boldsymbol{\zeta}_k = [\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t_{k-1}) + \boldsymbol{\omega}_{en}^n(t_{k-1})]\Delta t$$

$$\rightarrow \boldsymbol{q}_{n(k)}^{n(k-1)} = \begin{pmatrix} \cos\|\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}_k\| \\ \sin\|\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}_k\| \frac{\boldsymbol{\zeta}_k}{\|\boldsymbol{\zeta}_k\|} \end{pmatrix}$$

3. 带入公式进行递推，最后对得到的结果姿态四元素进行归一化。

5 速度更新算法

总的速度更新算法公式：

$$\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$$

其中公式左边为当前时刻载体在 n 系的速度，公式右边第一项为上一时刻载体在 n 系的速度，中间项为比力积分项，最后一项为重力/哥氏积分项。

1. 计算重力/哥氏积分项：

$$\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n = [\boldsymbol{g}_l^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}_e^n]_{t_{k-1/2}}(t_k - t_{k-1})$$

其中，$\boldsymbol{g}_l^n$ 为当地重力加速度在导航系下的投影。

2. 计算比力积分项：

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = [\boldsymbol{I} - (\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times)]\boldsymbol{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k} = [\boldsymbol{\omega}_{en}^n(t_{k-1/2}) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t_{k-1/2})](t_k - t_{k-1})$$

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} =& \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \\ & \frac{1}{12}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{v}_k + \Delta\boldsymbol{v}_{k-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_k)\end{aligned}$$

需要注意的是，我们求解当前时刻的速度向量时，用到了上一时刻和当前时刻的速度来求解中间量 (求解重力/哥氏积分项和计算比力积分项当中都出现了)。对于这种，我们使用线性递推即可 (即使用 t_{k-2} 和 t_{k-1} 的状态来推测 t_k 的状态，线性递推是最简单的方式)。

6 位置更新

如果令：

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \frac{1}{2}(h_k + h_{k-1}) \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k-1}) \\ v_{N,k-1/2} &= \frac{1}{2}(v_{N,k} + v_{N,k-1}) \\ v_{E,k-1/2} &= \frac{1}{2}(v_{E,k} + v_{E,k-1}) \\ v_{D,k-1/2} &= \frac{1}{2}(v_{D,k} + v_{D,k-1})\end{aligned}$$

那么位置更新的公式为：

$$\begin{aligned}&\rightarrow h_k = h_{k-1} - v_{D,k-1/2}(t_k - t_{k-1}) \\ &\rightarrow \varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{v_{N,k-1/2}}{R_{M,k-1/2} + \bar{h}}(t_k - t_{k-1}) \\ &\rightarrow \lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{v_{E,k-1/2}}{(R_{N,k-1/2} + \bar{h})\cos\bar{\varphi}}(t_k - t_{k-1})\end{aligned}$$