ICP

陈烁龙

2022 年 6 月 10 日

目录

插图

表格

摘要

ICP 算法是求解两帧点之间的位姿变换关系的一种经典方法，其对点间有匹配和点间无匹配的点云帧都有着比较鲁棒的估计结果。

关键词：ICP，点云，位姿变换，李代数

1 ICP 算法原理

如摘要所提，ICP 是一种经典的点云帧间位姿求解算法，中文名为“迭代最近点”。其通过迭代的方式，不断调整位姿，使得转换后的点云位姿间的距离最小。其对于有匹配关系的点云帧或者未知匹配关系的点云帧，都有比较鲁棒的估计。

由于已有匹配关系的点云帧间位姿变换求解比较基础，故由该种场景出发，阐述算法原理。假设现有两帧点云 $PC_1 = \{p_1^1, p_1^2, ..., p_1^n\}$ 和 $PC_2 = \{p_2^1, p_2^2, ..., p_2^n\}$，其中 PC_1 中的 p_1^i 与 PC_2 中的 p_2^i 存在对应关系。两帧之间的位姿变换用 $T_{21}[R_{21}|t_{21}]$ 表示，表示的是点从第 1 帧到第 2 帧的变换关系。我们的目标是最下化下面的损失函数：

$$\min e = \sum_{i=1}^{n} e^i = \sum_{i=1}^{n} (T_{21} p_1^i - p_2^i) \tag{1}$$

为使用高斯-牛顿方法优化误差函数，我们需要对待优化变量进行雅可比矩阵的求解。具体来说，我们需要求解得到：

$$J^i = \frac{\partial e^i}{\partial \xi_{21}} = \frac{\partial (T_{21} p_1^i)}{\partial \xi_{21}}$$

其中，ξ_{21} 为 T_{21} 的李代数表达形式，二者本质上是一致的。

1.1 二维下的雅可比矩阵

对于二维情况，T_{21} 可以显示的表达成下矩阵形式 (齐次坐标下的变换矩阵)：

$$T_{21} = \begin{pmatrix} R_{21} & t_{21} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & t_x \\ \sin\phi & \cos\phi & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则基于变换 T_{21}，将点 $p_1^i = (x_1^i, y_1^i, 1)^T$ 变换到点 $p_1^{i\prime} = (x_1^{i\prime}, y_1^{i\prime}, 1)^T$，可表示为：

$$p_1^{i\prime} = T_{21} p_1^i = \begin{pmatrix} x_1^{i\prime} \\ y_1^{i\prime} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^i \cos\phi - y_1^i \sin\phi + t_x \\ x_1^i \sin\phi + y_1^i \cos\phi + t_x \\ 1 \end{pmatrix}$$

至此，我们基于李代数左扰动模型进行求导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial (T_{21} p_1^i)}{\partial \delta\xi_{21}} =& \frac{\begin{pmatrix} \cos\delta\phi & -\sin\delta\phi & \delta t_x \\ \sin\delta\phi & \cos\delta\phi & \delta t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{i\prime} \\ y_1^{i\prime} \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \delta t_x & \delta t_y & \delta\phi \end{pmatrix}^T} \\ =& \frac{\begin{pmatrix} x_1^{i\prime}\cos\delta\phi - y_1^{i\prime}\sin\delta\phi + \delta t_x \\ x_1^{i\prime}\sin\delta\phi + y_1^{i\prime}\cos\delta\phi + \delta t_y \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \delta t_x & \delta t_y & \delta\phi \end{pmatrix}^T} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1^{i\prime}\sin\delta\phi - y_1^{i\prime}\cos\delta\phi \\ 0 & 1 & x_1^{i\prime}\cos\delta\phi - y_1^{i\prime}\sin\delta\phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \approx& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_1^{i\prime} \\ 0 & 1 & x_1^{i\prime} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最后一步的约等于是考虑到扰动量是小量。所以，我们有：

$$J_{2d}^i = \frac{\partial e^i}{\partial \delta\xi_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_1^{i\prime} \\ 0 & 1 & x_1^{i\prime} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.2 三维下的雅可比矩阵

易得:

$$
\begin{aligned}
J_{3d}^{i} &= \frac{\partial e^{i}}{\partial \delta \xi_{21}} = \begin{pmatrix} I_{3\times 3} & -(T_{21}p_1^i)^{\wedge} \\ 0_{1\times 3}^{T} & 0_{1\times 3}^{T} \end{pmatrix}_{4\times 6} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1^{i\prime} & -y_1^{i\prime} \\ 0 & 1 & 0 & -z_1^{i\prime} & 0 & x_1^{i\prime} \\ 0 & 0 & 1 & y_1^{i\prime} & -x_1^{i\prime} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

该求导过程使用了李代数的左扰动模型。

观察二维和三维下的雅可比矩阵，除了维度不同之外，我们可以看到一些相似之处。如果我们把二维位姿变换移至三维空间进行观察，我们可以发现，二维位姿变换是一种特殊的三维位姿变化，其只绕 Z 轴进行旋转，且不沿 Z 轴方向平移。

所以，如果我们把 J_{3d}^{i} 的第 3 行和第 3、4、5 列移除[1]，那么剩下的矩阵便是二维位姿变换雅克比矩阵。

1.3 高斯牛顿法

对每一对匹配点对计算该雅各比矩阵和误差函数值，而后带入高斯-牛顿迭代方程进行求解。

$$
\begin{cases}
H^{i} = J^{iT} J^{i} \\
H_{6\times 1} = \sum_{i=1}^{n} H^{i} \\
g^{i} = -J^{iT} e^{i} \\
g_{6\times 1} = \sum_{i=1}^{n} g^{i}
\end{cases} \tag{4}
$$

$$
H \Delta X = g \tag{5}
$$

求解上述方程以更新带求参数。

[1]移除第 3 行第三列表示只绕 Z 轴进行旋转，移除第 4、5 列表示不沿 Z 轴方向平移，因为这两列包含 Z 坐标。

2 实验

2.1 基于已知匹配点云的 ICP

通过随机生成点的方式，生成了如下图所示的初始点云。图中灰色虚线的连接关系表示了点云之间已知的变换关系。具体来说，在随即生成的点云 PC_1 的基础上，设定位姿变换为 $T_{21}[R_{21}|t] = (\pi/4, 2, 2)$。同时对转换的结果点云增加小误差。

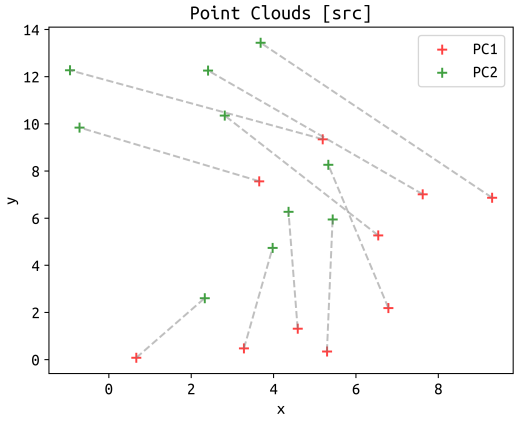


图 1: 初始点云 (有匹配点云)

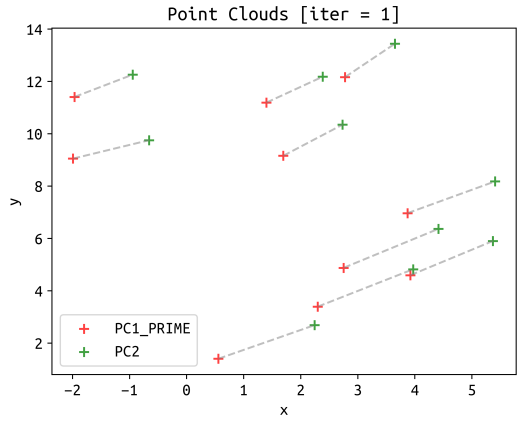
在代码中，我们进行一定次数的迭代。在每一次迭代中，我们基于当前估计的位姿变换，对所有点对计算误差和雅可比矩阵，而后解线性方程求解增量，并对位姿进行更新。

Listing 1: 核心代码

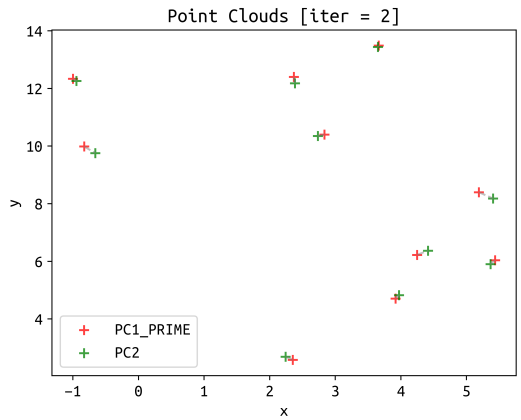
```
Sophus::SE2f T21;
for (int i = 0; i != iter; ++i) {
  Eigen::Matrix3f H = Eigen::Matrix3f::Zero();
  Eigen::Vector3f g(0.0f, 0.0f, 0.0f);
  for (int i = 0; i != pc1.size(); ++i) {
    auto &p1 = pc1.at(i);
    auto &p2 = pc2.at(i);
    auto p1_prime = T21 * p1;
    auto error = p1_prime - p2;
    Eigen::Matrix<float, 2, 3> J;
    J(0, 0) = 1, J(0, 1) = 0, J(0, 2) = -p1_prime(1);
    J(1, 0) = 0, J(1, 1) = 1, J(1, 2) = p1_prime(0);
    H += J.transpose() * J;
    g -= J.transpose() * error;
  }
  auto delta = H.ldlt().solve(g);
```

```
17   T21 = Sophus::SE2f::exp(delta) * T21;
18 }
```

下图展示了每一次迭代的结果。可以看到，当迭代两次之后，位姿估计已经比较精确。



(a) 迭代 1 次



(b) 迭代 2 次

图 2: 迭代求解过程 (有匹配点云)

2.2 基于未知匹配点云的 ICP

对于未知配对关系的点云，为计算误差，我们的策略是将最近的点对作为临时的配对点对。具体来说，对于每一次计算误差，我们先基于当前的位姿估计，将第 1 帧点云中的点进行位姿变换。而后，基于每一个变换后的点，在第 2 帧点云里搜寻最近的一个点作为其匹配点。

当然，直接进行迭代是行不通的，因为极有可能落入局部极小值。为此，我们考虑到两帧点云的结构是相似的，意味者两帧点云在进行点的归一化之后，之间只差了一个旋转，由此我们基于最近点对构建匹配的假设才能行得通。这样，当我们求解得到旋转量之后，再计算位移量。

我们首先对两帧点云求解重心，而后对点云里的每一个点进行归一化：

$$\begin{cases} Center(PC_j) = c_j = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_j^i \\ q_j^i = p_j^i - c_j \end{cases}$$

而后我们对初始的求解优化问题进行变换：

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} \|R_{21}p_1^i + t_{21} - p_2^i\|^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} \|R_{21}(p_1^i - c_1 + c_1) + t_{21} - (p_2^i - c_2 + c_2)\|^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} \|(R_{21}q_1^i - q_2^i) + (R_{21}c_1 + t_{21} - c_2)\|^2 \\ =&\sum_{i=1}^{n} \|R_{21}q_1^i - q_2^i\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|R_{21}c_1 + t_{21} - c_2\|^2 \\ &+\sum_{i=1}^{n} 2(R_{21}q_1^i - q_2^i)(R_{21}c_1 + t_{21} - c_2) \end{aligned}$$

注意到最后一项在求和之后为 0，故我们的策略是先对只含有旋转矩阵的第一项进行优化，而后用得到的结果带入第二式来求解位移量：

$$t_{21} = c_2 - R_{21}c_1$$

下图为初始点云，其和“实验一”的点云是一致的，不过其点之间的配对关系是未知的。

Listing 2: 核心代码

```
1 auto count = pc1.size();
2 auto pc1_new = normalize(pc1), pc2_new = normalize(pc2);
3 Sophus::SO2f R21;
4 for (int i = 0; i != iter; ++i) {
5   float H = 0.0f;
6   float g = 0.0f;
7   for (int i = 0; i != count; ++i) {
8     auto &p1 = pc1_new.at(i);
```

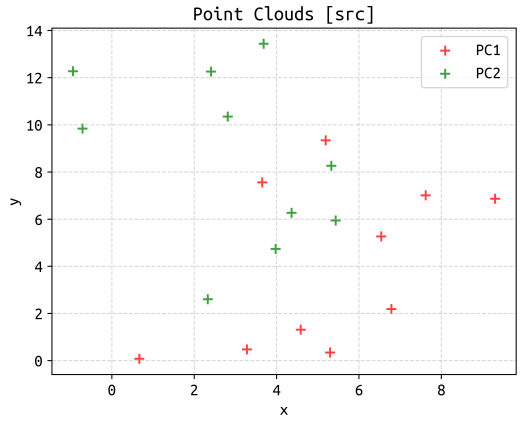
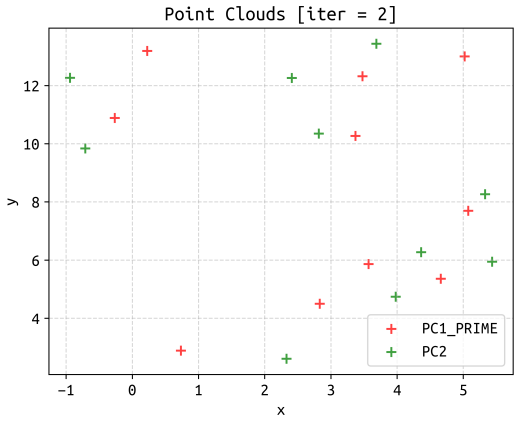


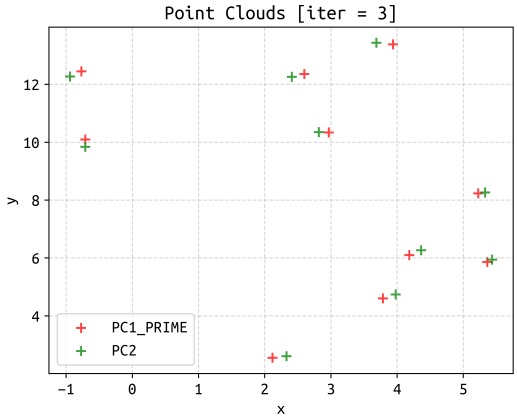
图 3: 初始点云 (无匹配点云)

```
    auto p1_prime = R21 * p1;
    // find min dis point
    auto min_iter = std::min_element(pc2_new.cbegin(), pc2_new
        .cend(), [p1_prime](const Eigen::Vector2f &p2_i,
        const Eigen::Vector2f &p2_j) {
    auto p1_prime_t = ns_geo::Point2f(p1_prime(0), p1_prime(1)
        );
    auto p2_i_t = ns_geo::Point2f(p2_i(0), p2_i(1));
    auto p2_j_t = ns_geo::Point2f(p2_j(0), p2_j(1));
    return ns_geo::distance(p1_prime_t, p2_i_t) < ns_geo::
        distance(p1_prime_t, p2_j_t);
    });
    auto &p2 = *min_iter;
    auto error = p1_prime - p2;
    Eigen::Vector2f J;
    J(0) = -p1_prime(1);
    J(1) = p1_prime(0);
    H += J.transpose() * J;
    g -= J.transpose() * error;
  }
  auto delta = g / H;
  R21 = Sophus::SO2f::exp(delta) * R21;
}
Eigen::MatrixXf A(2 * count, 2);
Eigen::VectorXf l(2 * count);
for (int i = 0; i != count; ++i) {
  auto trans = pc2.at(i) - R21 * pc1.at(i);
  A(2 * i + 0, 0) = 1, A(2 * i + 0, 1) = 0;
  A(2 * i + 1, 0) = 0, A(2 * i + 1, 1) = 1;
  l(2 * i + 0) = trans(0);
  l(2 * i + 1) = trans(1);
}
auto t21 = (A.transpose() * A).inverse() * A.transpose() * l;
Sophus::SE2f T21(R21.matrix(), Eigen::Vector2f(t21(0), t21(1))
    );
```

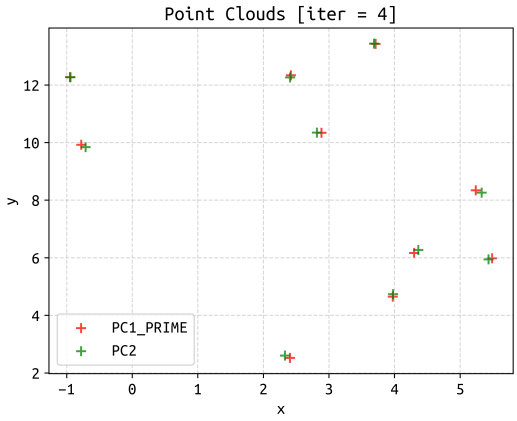
由下图可以看到，基于未知匹配点云的 ICP 在迭代了 4 次之后，才能接近最优解。其相较于基



(a) 迭代 2 次



(b) 迭代 3 次



(c) 迭代 4 次

图 4: 迭代求解过程 (无匹配点云)

于已知匹配点云的 ICP，计算效率更慢，迭代次数也更多。就是因为一个原因：点之间的匹配关系是未知的。