Camera calibration

陈烁龙

2022 年 7 月 28 日

目录

1 算法流程 **3**

2 相机模型 **3**

2.1 求解单应矩阵 3

2.2 求解内参矩阵 4

2.3 求解外参矩阵 5

2.4 畸变参数 6

2.5 整体优化 6

插图

表格

摘要

相机标定是进行视觉 SLAM 的前提，其虽然在 VSLAM 这个大工程中只是一小部分，但是其重要性却是显而易见的。

关键词：相机标定，张正友，单应矩阵

1 算法流程

目前存在多种相机标定的算法和操作方法。不同的方法在精度、复杂度和适应场景都存在差异。在本文中，主要讲解张正友相机标定法。

张正友标定法标定相机的内外参数的思路如下：

1. 求解内参矩阵与外参矩阵的积；
2. 求解内参矩阵；
3. 求解外参矩阵；
4. 求解畸变参数；
5. 整体优化求解；

2 相机模型

对于单孔相机，我们知道：

$$s\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & r_3 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_p\\Y_p\\Z_p\\1\end{pmatrix}$$

其中 $p(u,v,1)$ 为像点，$P(X_p,Y_p,Z_p,1)$ 为在世界平面坐标系上的一物点，s 是该物点在相机坐标系下的深度。矩阵 A 为相机的内参矩阵，是我们求解的目标。

由于物点位于世界平面坐标系上，所以 $Z_p=0$。所以有：

$$s\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_p\\Y_p\\1\end{pmatrix}$$

如果我们令:

$$H=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12} & h_{13}\\h_{21} & h_{22} & h_{23}\\h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{pmatrix}$$

那么我们可以得到：

$$sp=HP$$

矩阵 H 即单应矩阵，其描述了一个平面到另一个平面之间的关系。我们的目标是先求出矩阵 H，而后基于其求出相机 i 内参矩阵 A。

2.1 求解单应矩阵

通过之前的推导，我们不难得出：

$$\begin{cases}su=h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}\\sv=h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}\\s=h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}\end{cases}$$

我们用前两式同时除以第三式，得到：

$$\rightarrow u=\frac{h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}}{h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}}$$

$$\rightarrow\ v=\frac{h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}}{h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}}$$

当然，对于带求解的矩阵 H 其自由度只有 8。对此，我们可以使用 SVD 方法，增加一个额外约束来求解。之后我们有：

$$\begin{cases}u(h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33})=h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}\\v(h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33})=h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}\end{cases}$$

整理成矩阵的形式，有：

$$\begin{pmatrix} X_p & 0 \\ Y_p & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & X_p \\ 0 & Y_p \\ 0 & 1 \\ -uX_p & -vX_p \\ -uY_p & -vY_p \\ -u & -v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

之后使用 SVD 方法，将系数矩阵分解：

$$A = U\Sigma V^T$$

则 V 矩阵的最后一列就对应了待求的参数向量。可以由此构建矩阵 H。注意，由于 H 矩阵包含了外参信息 (旋转和平移)，所以每张像片的 H 矩阵要单独求解。当一张相片上提取的棋盘格网点大于等于 4 个即可求解 H 矩阵。

2.2 求解内参矩阵

求解内参矩阵基于我们之前求解得到的单应矩阵 H。之前我们知道：

$$A\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$$

对于内参矩阵 A，我们已知：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于 A^{-1} 我们同样也可以写得出来[1]。要求解矩阵 A，我们利用旋转矩阵 R 的特性，即：

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

其任何一个向量都是单位向量，且不同向量彼此正交。在这里，我们有：

$$\begin{cases} r_1 = A^{-1}h_1 \rightarrow r_1^T = h_1^T A^{-T} \\ r_2 = A^{-1}h_2 \rightarrow r_2^T = h_2^T A^{-T} \end{cases}$$

所以我们有：

$$\begin{cases} r_1^T r_2 = 0 \\ r_1^T r_1 - r_2^T r_2 = 0 \end{cases}$$

我们记 $B = A^{-T}A$，则有：

$$\begin{cases} h_1^T B h_2 = 0 \\ h_1^T B h_1 - h_2^T B h_2 = 0 \end{cases}$$

注意，我们将 r_1 与 r_2 的单位向量特性通过差值为 0 的形式表现，原因在于我们求解单应矩阵 H 的时候，令 $h_{33} = 1$。换句话说，如果在求解 H 的时候，假定 h_{33} 等于其他的值，我们也同样可以解得 H，只不过不同的 H 矩阵之间差了一个尺度因子。那这映射到旋转矩阵上，列向量虽然正交，可不一定是单位向量[2]。可

由于对于矩阵 A 以及 A^{-1} 我们都能写出其显示的表达形式，因此我们同样可以写出矩阵 B 的表达形式[3]。而且，你会发现 3×3 的矩阵 B 是对称的。换句话说，我们的未知参数只有 6 个 (对角线及其上部或下部元素)。

我们假定 B 为：

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

那么对于 $h_i^T B h_j$，我们可以得到：

$$\begin{aligned} h_i^T B h_j = & (h_{1i}b_{11} + h_{2i}b_{12} + h_{3i}b_{13})h_{1j} + \\ & (h_{1i}b_{12} + h_{2i}b_{22} + h_{3i}b_{23})h_{2j} + \\ & (h_{1i}b_{13} + h_{2i}b_{23} + h_{3i}b_{33})h_{3j} \end{aligned}$$

[1] 此处省略。

[2] 不是说旋转矩阵各向量不是单位向量，而是说我们这里求解的问题特性。

[3] 我们这里不写了

其中:

$$h_i = \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{2i} & h_{3i} \end{pmatrix}^T$$

整理成矩阵的形式，可以得到:

$$h_i^T B h_j = \begin{pmatrix} h_{1i}h_{1j} \\ h_{3i}h_{1j} + h_{1i}h_{3j} \\ h_{2i}h_{2j} \\ h_{3i}h_{2j} + h_{2i}h_{3j} \\ h_{3i}h_{3j} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{13} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

而后我们可以通过 SVD 分解的方法得到待求参数，并利用解析的方式得到参数 A 的各个系数[4]。注意：由于 B 矩阵只包含了内参相关的参数，所以对于不同的棋盘图像，其都是一样的。换句话说，在求解 B 矩阵的时候，我们要用到所有之前求得的单应矩阵 (且每一个单应矩阵可以构建两个方程)。

获得 $B = A^{-T}A^{-1}$ 矩阵:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & -\frac{u_0}{\alpha^2} \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} & -\frac{v_0}{\beta^2} \\ -\frac{u_0}{\alpha^2} & -\frac{v_0}{\beta^2} & \frac{u_0^2}{\alpha^2} + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{pmatrix}$$

所以 A 矩阵的系数为:

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{B_{23}}{B_{22}} \\ \lambda = B_{33} - \dfrac{B_{13}^2 - v_0 B_{11} B_{23}}{B_{11}} \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\lambda}{B_{11}}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{\lambda}{B_{22}}} \\ u_0 = -\dfrac{B_{13}\alpha^2}{\lambda} \end{cases}$$

2.3 求解外参矩阵

求解得到矩阵 A 和 H 之后，我们就可以求解外参矩阵了。下式是我们之前得到的式子:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$$

[4]这是可行的，因为我们具有显示矩阵 B 的解析形式。

即有:

$$\begin{cases} r_1 = \lambda A^{-1} h_1 \\ r_2 = \lambda A^{-1} h_2 \\ r_3 = r_1 \times r_2 \\ t = \lambda A^{-1} h_3 \\ \lambda = \dfrac{2}{\|A^{-1}h_1\|} + \dfrac{2}{\|A^{-1}h_2\|} \end{cases}$$

具体来说，我们求得 λ 之后，通过单位化可以得到 r_1 和 r_2，进而通过正交特性得到 r_3 即:

$$\begin{cases} r_1 = normalized(\lambda r_1) \\ r_2 = normalized(\lambda r_2) \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases}$$

对于 t，我们可以:

$$\begin{cases} \lambda_t = 0.5(norm(\lambda r_1) + norm(\lambda r_2)) \\ t = \lambda A^{-1} h_3 / \lambda_t \end{cases}$$

当然，可能计算得到的矩阵仍然绝对是一个正交矩阵 (旋转矩阵)。我们可以将其 d 当作一个优化问题：在已知 3×3 矩阵 Q 的前提下，求解最佳的正交矩阵 R，满足 $\min \|R - Q\|_2$。对此我们有:

$$\begin{aligned} f(R) =& \|R - Q\|_2 \\ =& tr((R-Q)^T(R-Q)) \\ =& 3 + tr(Q^TQ) - 2tr(R^TQ) \end{aligned}$$

所以，我们有:

$$\max tr(R^TQ)$$

我们对矩阵 Q 进行 SVD 分解，即：$Q = U\Sigma V^T$，则有:

$$\begin{aligned} tr(R^TQ) =& tr(R^TU\Sigma V^T) \\ =& tr(V^TR^TU\Sigma) \\ =& \sum_{i=1}^{3} z_i\sigma_i \le \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \end{aligned}$$

其中：$Z = V^TR^TU$。显然，当 $R = UV^T$ 时，$Z = I_{3\times3}$，$tr(R^TQ) = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i$。

2.4 畸变参数

当然，上述的推导没有考虑畸变模型。为此我们考虑畸变模型。我们假设 $X(x,y,1)$ 为畸变前的归一化像素坐标平面上的点，$X_{dist}(x_{dist},y_{dist},1)$ 为畸变后的归一化像素坐标平面上的点，则之前的相机模型可以拆分成：

$$\rightarrow s\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{x}_{dist} = & x(1+k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6) \\ & +2p_1xy+p_2(r^2+2x^2) \\ \hat{y}_{dist} = & y(1+k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6) \\ & +p_1(r^2+2y^2)+2p_2xy \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

对于畸变像素坐标的获取，可以通过之前求解得到的内参数矩阵：

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \hat{u}_{dist} \\ \hat{v}_{dist} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_{dist} \\ \hat{y}_{dist} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{u}_{dist} = \alpha\hat{x}_{dist} + u_0 \\ \hat{v}_{dist} = \beta\hat{y}_{dist} + v_0 \end{cases}$$

现在我们已有的是畸变前后的归一化坐标 $X(x,y,1)$ 和 $X_{dist}(x_{dist},y_{dist},1)$，要求解的是参数 k_1、k_2、k_3 和 p_1、p_2。如果我们令：

$$\begin{cases} e_u = \hat{u}_{dist} - u \\ e_v = \hat{v}_{dist} - v \end{cases}$$

那么有：

$$\begin{cases} \frac{\partial e_u}{\partial k_1} = \alpha x r^2 \\ \frac{\partial e_u}{\partial k_2} = \alpha x r^4 \\ \frac{\partial e_u}{\partial k_3} = \alpha x r^6 \\ \frac{\partial e_u}{\partial p_1} = 2\alpha xy \\ \frac{\partial e_u}{\partial p_2} = \alpha(r^2+2x^2) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial e_v}{\partial k_1} = \beta y r^2 \\ \frac{\partial e_v}{\partial k_2} = \beta y r^4 \\ \frac{\partial e_v}{\partial k_3} = \beta y r^6 \\ \frac{\partial e_v}{\partial p_1} = \beta(r^2+2y^2) \\ \frac{\partial e_v}{\partial p_2} = 2\beta xy \end{cases}$$

令 $e = \begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix}^T$、$kp = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$，则：

$$J = \frac{\partial e}{\partial kp} = \begin{pmatrix} \alpha x r^2 & \beta y r^2 \\ \alpha x r^4 & \beta y r^4 \\ \alpha x r^6 & \beta y r^6 \\ 2\alpha xy & \beta(r^2+2y^2) \\ \alpha(r^2+2x^2) & 2\beta xy \end{pmatrix}$$

为此，我们可以使用高斯牛顿法进行优化求解，每次迭代的参数增量由下式给出：

$$JJ^T\delta kp = -Je$$

2.5 整体优化

由于上文我们推导是一步一步通过优化得到的各个参数，所以往往不能得到全局的最优解[5]。所以，当我们通过上述的流程得到解的初值之后，需要使用高斯牛顿法或 LM 算法[6]进行整体优化，求得全局最优解。

再一次整理我们相机模型，我们有：

$$\rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{cw} & t_{cw} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X'}{Z'} \\ \frac{Y'}{Z'} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_d = & x_n(1+k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6) \\ & +2p_1x_ny_n+p_2(r^2+2x_n^2) \\ y_d = & y_n(1+k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6) \\ & +p_1(r^2+2y_n^2)+2p_2x_ny_n \\ r = \sqrt{x_n^2+y_n^2} \end{cases}$$

[5]但是这工作确实有用的，其为我们提供了整体优化的良好初值。

[6]一种基于高斯-牛顿方法演化得到的优化算法。

$$\rightarrow \begin{cases} u_d = \alpha x_d + u_0 \\ v_d = \beta y_d + v_0 \end{cases}$$

具体来说，对于一个棋盘格上的点 $P(X, Y, Z)$，我们首先通过相机相对于棋盘坐标系（世界坐标系）的位姿变换量，将其转换到相机坐标系下，得到 $P'(X', Y', Z')$。而后计算得到对应的归一化像素点坐标 $p_n(x_n, y_n)$，之后，引入畸变模型，对点进行畸变处理，得到 $p_d(x_d, y_d)$。最后我们通过相机内参，将其转换到像平面上的点 $p(u_d, v_d)$。

显然，我们的目标就是通过优化待求参数，让我们计算得到的像平面上的点坐标和直接所用角点探测得到的像点坐标之间的距离尽可能的小：

$$e = \begin{pmatrix} e_u \\ e_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_d - u \\ v_d - v \end{pmatrix}$$

其中，$(u, v)^T$ 即为我们直接探测得到的角点像素坐标。开始求导！

首先，我们的待求参数有：

1. 相机的内参，我们将其设为：

$$X_i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & u_0 & v_0 \end{pmatrix}^T$$

则有：

$$\frac{\partial e_i}{\partial X_i} = \begin{pmatrix} x_d & 0 \\ 0 & y_d \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

2. 相机的畸变参数，我们将其设为：

$$X_d = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$$

则有：

$$\frac{\partial e_i}{\partial X_d} = \begin{pmatrix} \alpha x_n r^2 & \beta y_n r^2 \\ \alpha x_n r^4 & \beta y_n r^4 \\ \alpha x_n r^6 & \beta y_n r^6 \\ 2\alpha x_n y_n & \beta(r^2 + 2y_n^2) \\ \alpha(r^2 + 2x_n^2) & 2\beta x_n y_n \end{pmatrix}_{5\times 2}$$

3. 每张像片的位姿，我们用李代数 ξ_{cw} 代替原先的位姿变换矩阵 T_{cw}。李代数表示的位姿变换是一种紧凑的形式，其由 6 个分量构成：三个旋转量和三个平移量（不是位姿变换矩阵里的平移向量）：

$$\frac{\partial e_i}{\partial \delta\xi_{cw}} = \left(\frac{\partial e_i}{\partial p_d} \times \frac{\partial p_d}{\partial p_n} \times \frac{\partial p_n}{\partial P'} \times \frac{\partial P'}{\partial \delta\xi_{cw}} \right)^T_{6\times 2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial e_i}{\partial p_d} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial p_d}{\partial p_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial x_n} & 2p_1 x_n \\ 2p_2 y_n & \frac{\partial y_d}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial x_d}{\partial x_n} &= (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ &+ x_n(2k_1 x_n + 4k_2 r^2 x_n + 6k_3 r^4 x_n) \\ &+ 2p_1 y_n + 6p_2 x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial y_d}{\partial y_n} &= (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ &+ y_n(2k_1 y_n + 4k_2 r^2 y_n + 6k_3 r^4 y_n) \\ &+ 2p_2 x_n + 6p_1 y_n \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial p_n}{\partial P'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z'} & 0 & -\frac{X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{1}{Z'} & -\frac{Y'}{Z'^2} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial P'}{\partial \delta\xi_{cw}} = \begin{pmatrix} I_{3\times 3} & -P'^{\wedge} \end{pmatrix}_{3\times 6}$$

注意：相机的内参和畸变参数对于所有像片都是一致的，但是位姿却是不同的。对于一个具有 n 张像片的批量优化问题，我们有：

$$J_i = \frac{\partial e_i}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_i}{\partial X_i} \\ \frac{\partial e_i}{\partial X_d} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{\partial e_i}{\partial \delta\xi_{cw}^j} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}_{(9+6n)\times 2}$$

其中：

$$X = \begin{pmatrix} X_i & X_d & \dots & \xi_{cw}^j & \dots \end{pmatrix}_{(9+6n)\times 1}^T$$

通过高斯牛顿法进行求解：

$$\begin{cases} H = \sum J_i J_i^T \\ g = -\sum J_i e_i \\ H \Delta X = g \end{cases}$$