这是标题

陈烁龙

2022 年 10 月 19 日

目录

插图

表格

1 PnP 描述

对于已知位置的三维点 $P_w = [X_w, Y_w, Z_w]^T$，其可通过相机的位姿 ${}^W_C\boldsymbol{T} = \left[{}^W_C\boldsymbol{R}|{}^W\boldsymbol{t}_C\right]$，将其变换到局部相机坐标系下：

$$\boldsymbol{P}_C = {}^W_C\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{P}_W - {}^W_C\boldsymbol{R}^{-1W}\boldsymbol{t}_C$$

进而将其变换到相机的归一化坐标平面上：

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C/Z_C \\ Y_C/Z_C \end{bmatrix}$$

如果我们测得了对应的特征点图像坐标，并通过一定的相机模型，将其转换到相机的归一化坐标平面上，得到 $\tilde{\boldsymbol{p}}_n$，那么可以建立误差函数：

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{p}_n - \tilde{\boldsymbol{p}}_n$$

基于误差函数，对待求参数求导 (旋转量使用李代数右扰动模型)：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{e}}{\delta^W_C\boldsymbol{R}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}_n}{\partial \boldsymbol{P}_C} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{P}_C}{\partial^C_W\boldsymbol{R}} \times \dfrac{\partial^W_C\boldsymbol{R}}{\partial^C_W\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} 1/Z_C & 0 & -X_C/Z_C^2 \\ 0 & 1/Z_C & -Y_C/Z_C^2 \end{bmatrix} \times \left[-{}^W_C\boldsymbol{R}^{-1}\lfloor \boldsymbol{P}_W \rfloor_\times\right] \times \left[-{}^W_C\boldsymbol{R}\right] \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial^W\boldsymbol{t}_C} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}_n}{\partial \boldsymbol{P}_C} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{P}_C}{\partial^W\boldsymbol{t}_C} = \begin{bmatrix} 1/Z_C & 0 & -X_C/Z_C^2 \\ 0 & 1/Z_C & -Y_C/Z_C^2 \end{bmatrix} \times \left[-{}^W_C\boldsymbol{R}^{-1}\right] \end{cases}$$

使用高斯-牛顿法求解迭代量：

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\delta^W_C\boldsymbol{R}} & \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial^W\boldsymbol{t}_C} \end{bmatrix}_{2\times 6} \\ \boldsymbol{H}_{6\times 6} = \sum \boldsymbol{J}_i^T\boldsymbol{J}_i \\ \boldsymbol{g}_{6\times 1} = \sum -\boldsymbol{J}_i^T\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} \end{cases}$$

2 Ceres 局部参数化

对于位姿优化而言,要仔细处理,因为迭代更新的时候,不是简单的相加。另外,如果使用单位正交阵或者四元素进行优化的时候,有另外的约束。这时,需要在优化问题中对参数进行约束,以及指定迭代更新策略。可以通过继承 $\boldsymbol{ceres :: LocalParameterization}$,并重载 $\boldsymbol{Plus}$ 和 $\boldsymbol{ComputeJacobian}$ 虚函数来实现。

3 四元素姿态与优化

对于轴角[1] $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$，其四元素表示为：

$$\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z & q_w \end{bmatrix}^T \quad \theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$$

[1] 李代数 so3 在 R^3 下的表示。

那么四元素对轴角的导数为有：

$$
\begin{cases}
c_0 = q_w/2 \quad c_1 = q_z/2 \quad c_2 = -c_1 \\
c_3 = q_y/2 \quad c_4 = q_x/2 \quad c_5 = -c_4 \\
c_6 = -c_3
\end{cases}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_0 & c_5 \\ c_6 & c_4 & c_0 \\ c_5 & c_6 & c_2 \end{bmatrix}
$$