SLAM Trick 1: Undistort Image And Point

陈烁龙 2022 年 4 月 28 日

目录

表格

1	畸变模型		
	1.1	径向畸变	3
	1.2	切向畸变	3
	1.3	综合畸变	3
2	问题	的引出	3
3	求解		4
	3.1	畸变过程描述	4
	3.2	误差函数	5
	3.3	雅可比矩阵求解	5
4	实践		6
	4.1	图像去畸变	6
	4.2	像素点去畸变	8
5	GitI	Hub	9
插	图		
	1	对整张图像去畸变	8

2

摘要

在使用相机的时候,为了获取更好的摄影效果,我们一般会在相机上安装透镜组。透镜的使用使得相机成像更加鲁棒,但是也带来了畸变问题。所以当我们拿到相机的成像照片时,需要通过去畸变技术,才能得到原始没有畸变的相片。

关键词:畸变,去畸变,高斯-牛顿法

1 畸变模型

对于镜头带来的畸变,我们可以将其分为两种:径向畸变和切向畸变。

1.1 径向畸变

在针孔相机模型中,我们认为光线是直线传播进入相机到达像平面的。但是在现实中,由于透镜的作用,光线不再是一条直线,而是一条在透镜处发生转向的曲线。而且在像平面上,离像主点越远的像素点,受该种效应的影响越明显。该种畸变效应可用如下的数学公式描述:

$$\begin{cases} x_{dist} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ y_{dist} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$
 (1)

其中 X(x,y) 表示的是一个未经过径向畸变的归一化像素点坐标, $X_{dist}(x_{dist},y_{dist})$ 表示的是该点经过径向畸变的归一化像素点坐标。可以从公式 1 清晰的看到,当归一化像素点坐标离中心点越远,由于半径 r 越大,因而造成了 X_{dist} 相比 X 差别更大,也就是我们所说的畸变比较大。

另外我们注意到,当对于中心点 X_c 而言,由于其 $X_{cx}=0$, $X_{cy}=0$,故 $r_c=0$,所以 $X_{dist,c}=X_c$ 。即:径向畸变对中心点不造成畸变效应 1 。

1.2 切向畸变

对于切向畸变,我们直接给出畸变模型数学 公式:

$$\begin{cases} x_{dist} = x + 2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ y_{dist} = y + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$
 (2)

同样地,X(x,y) 表示的是一个未经过径向畸变的归一化像素点坐标, $X_{dist}(x_{dist},y_{dist})$ 表示的是该归一化像素点经过切向畸变的坐标。

但是,和径向畸变不一样的一点是,即使是中心点,其 $r_c = 0$,但是仍然会遭受切向畸变的影响。

1.3 综合畸变

基于上文的介绍, 我们综合径向畸变和切向 畸变的数学模型, 给出最终的综合畸变数学模型:

$$\begin{cases} x_{dist} = x(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\ + 2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ y_{dist} = y(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\ + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$
(3)

该综合畸变数学模综合考虑了径向畸变和切向 畸变。

2 问题的引出

由上面所给出的径向畸变和切向畸变的模型公式可知,当我们知道了一个未发生畸变的像素点,为求得其畸变后的像素位置,我们可以先基于相机的内参,将其转换到归一化像素坐标平面上。而后基于已有的畸变参数,对其增添畸变效应,得到在归一化像素坐标平面上的畸变后的

¹注意: 我们所谈论的畸变模型都是在归一化像素坐标平面上的,并不是像素坐标平面。

点,而后再基于相机的内参得到畸变后的像素坐 标。

但是,这个过程是畸变发生的过程。对于我们而言,我们一开始拿到的是一张已经畸变后的像片,我们的目的是要通过去畸变处理,得到无畸变的像片。这个过程和刚刚所描述的过程刚好相反。

目前,对于去畸变,我们有两种措施2:

• 整个图像去畸变

对于该种需求,我们其实很好解决。首先我们准备一张用来存储去畸变后像素的图像,然后对于该图像上的每一个像素 p_i ,我们通过畸变模型计算得到其畸变后应该在畸变图像上的位置。这个位置对应了我们一开始拿到的那张已畸变的原始图像上的位置。

当然,这个求得的位置一般不再是整数,而是浮点数,所以不会和某个畸变像素 Pdist,j对应上。这时我们可以通过插值操作,获得该浮点位置的像素值,然后直接赋值给去畸变后的像素。一般的插值方法有:最邻近法、双线性插值法3。这种方法在数字图象处理中被成为间接法。

当然,如果通过畸变模型计算得到的畸变像素超过了图像的边界,我们可以简单的将其像素值设置为 0 或 255 或某一值的常数即可。

• 部分点去畸变

我们的需求是给定一个已畸变的像素点 $p_{dist,i}$ 坐标,通过已有的相机模型和畸变参数,计算其对应的未畸变的像素点 p_i 坐标。一般我们是通过迭代的方式计算的。在

本文中, 我们通过高斯-牛顿法进行迭代求解。

3 求解

高斯-牛顿法首先通过计算误差函数对待求解参数的雅可比矩阵,以此构造一个线性方程。进而求解这个线性方程得到的每一次迭代更新的变化量。所以,求解雅可比矩阵就变得比较重要。

3.1 畸变过程描述

对于我们这个待求解的问题,我们要求解的 参数是去畸变后的像素点坐标 p(u,v)。对于相机针孔模型,我们知道:

$$\begin{cases} u = f_x x + c_x \\ v = f_y y + c_y \end{cases} \tag{4}$$

其中 X(x,y) 仍然表示的是归一化像素坐标平面 上的点, f_x 、 f_y 、 c_x 、 c_y 表示的是相机的内参。

所以从未畸变像素点 p(u,v) 到已畸变像素点 $p_{dist}(u_{dist},v_{dist})$, 我们有如下的转换公式:

$$\begin{cases} x = (u - c_x)/f_x \\ y = (v - c_y)/f_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
x_{dist} = x(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\
+ 2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\
y_{dist} = y(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\
+ p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy \\
r = \sqrt{x^2 + y^2}
\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_{dist} = f_x x_{dist} + c_x \\ v_{dist} = f_y y_{dist} + c_y \end{cases}$$

²或者说需求更加合适。

³最邻近法速度最快,但是效果不佳。相比而言,双线性插值法速度虽然较其慢,但是能够得到比较鲁棒的插值结果。

3.2 误差函数

基于上文的分析, 我们很容易写出误差函数, 即:

$$\begin{cases}
e_u = \tilde{u}_{dist} - u_{dist} \\
e_v = \tilde{v}_{dist} - v_{dist}
\end{cases}$$
(5)

其中 $p_{dist}(u_{dist}, v_{dist})$ 是我们通过模型计算得到的畸变像素坐标, $\tilde{p}_{dist}(\tilde{u}_{dist}, \tilde{v}_{dist})$ 是真实的畸变像素坐标。

3.3 雅可比矩阵求解

首先明确我们的误差项为 e_u 、 e_v , 我们的待求解参数为 u、v。接下来我们基于每一个误差项,分别对每一个带求解参数进行求到,得到最终的雅可比矩阵。

1. e_u 对 u 的求导 $\partial e_u/\partial u$

$$\frac{\partial e_u}{\partial u} = \frac{\partial e_u}{\partial u_{dist}} \times \frac{\partial u_{dist}}{\partial x_{dist}} \times \frac{\partial x_{dist}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial e_u}{\partial u_{dist}} \times \frac{\partial x_{dist}}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial e_u}{\partial u_{dist}} = -1$$

 $2. e_u$ 对 v 的求导 $\partial e_u/\partial v$

$$\frac{\partial e_u}{\partial v} = \frac{\partial e_u}{\partial v_{dist}} \times \frac{\partial v_{dist}}{\partial y_{dist}} \times \frac{\partial y_{dist}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}$$

由于:

$$\frac{\partial e_u}{\partial v_{dist}} = 0$$

所以:

$$\to J_{uv} = \frac{\partial e_u}{\partial v} = 0$$

3. e_v 对 u 的求导 $\partial e_v/\partial u$

$$\frac{\partial e_v}{\partial u} = \frac{\partial e_u}{\partial u_{dist}} \times \frac{\partial u_{dist}}{\partial x_{dist}} \times \frac{\partial x_{dist}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u}$$

由于:

$$\frac{\partial e_v}{\partial u_{dist}} = 0$$

所以:

$$\to J_{vu} = \frac{\partial e_v}{\partial u} = 0$$

 $4. e_v$ 对 v 的求导 $\partial e_v/\partial v$

$$\frac{\partial e_v}{\partial v} = \frac{\partial e_v}{\partial v_{dist}} \times \frac{\partial v_{dist}}{\partial y_{dist}} \times \frac{\partial y_{dist}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}$$

可以得到:

综上可知:

$$J = \begin{pmatrix} J_{uu} & J_{vu} \\ J_{uv} & J_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_u}{\partial u} & 0 \\ 0 & \frac{\partial e_v}{\partial v} \end{pmatrix}$$
(6)

令

$$\delta X = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}$$

则对于高斯牛顿法,有:

$$H\delta X = g \tag{7}$$

其中:

$$\begin{cases} H = JJ^T = \begin{pmatrix} J_{uu}^2 & 0\\ 0 & J_{vv}^2 \end{pmatrix} \\ g = -Je(u, v) = \begin{pmatrix} -J_{uu}e_u\\ -J_{vv}e_v \end{pmatrix} \end{cases}$$

进而对公式 7 求解,得到:

$$\begin{cases} \delta u = -e_u/J_{uu} \\ \delta v = -e_v/J_{vv} \end{cases}$$
(8)

所以每一次迭代时,进行的增量为:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \delta u \\ v_{i+1} = v_i + \delta v \end{cases}$$
 (9)

当 δX 降低到一定的程度时,认为迭代收敛,可跳出循环,得到最终的结果。

4 实践

针对本文, 我们进行了两个实验: 基于整个 图像的去畸变 (直接法) 和基于单个像素点的去 畸变 (间接法 + 高斯牛顿)。

4.1 图像去畸变

首先描述以下我们自定义的一些结构体:

Listing 1: 自定义结构体

```
namespace ns_st1 {
2
      * @brief a structure for camera' inner parameters'
3
           organization
4
     struct CameraInnerParam {
5
       float fx, fy, cx, cy;
       CameraInnerParam(const float &fx, const float &fy, const
            float &cx, const float &cy)
8
           : fx(fx), fy(fy), cx(cx), cy(cy) {}
9
     };
10
     /**
```

```
* @brief a structure for camera' distortion parameters'
            organization
13
14
      struct CameraDistCoff {
       float k1, k2, k3;
       float p1, p2;
17
       CameraDistCoff(const float &k1, const float &k2, const
            float &k3,
19
                     const float &p1, const float &p2)
20
           : k1(k1), k2(k2), k3(k3), p1(p1), p2(p2) {}
21
     };
22
      * @brief the different interpolation choices
25
26
     enum class Interpolation {
       NEAREST_NEIGHBOR,
28
       BILINEAR
29
     };
30 }
```

以下代码是对于整张图像去畸变的关键代码。在该代码函数中,我们首先使用 CV_Assert 宏对传入的图像数据进行判断。而后基于用户传入的插值算法,构建相应的插值函数 (传入浮点像素位置和图像头部指针,返回插值结果)。而后基于构建的去畸变图像对象,遍历其每一个像素,通过直接法和畸变模型,得到其在畸变图像上的浮点位置,并插值得到最终的结果。

Listing 2: 图像去畸变

```
namespace ns_st1 {
       * @brief undistort a gray image
       * @param src the distorted gray image [CV_8UC1]
       * @param innerParam the camera's inner parameters
       * @param distCoff the camera's distortion parameters
       * @param methods the interpolation choice
       * @return cv::Mat the undistorted gray image [CV_8UC1]
10
11
     static cv::Mat undistortImage(
12
         cv::Mat src.
13
         const CameraInnerParam &innerParam,
14
         const CameraDistCoff &distCoff,
15
         Interpolation methods = Interpolation::NEAREST NEIGHBOR)
16
        // assert
17
       CV_Assert(src.type() == CV_8UC1);
18
       CV_Assert(!src.empty());
19
       // get parameters
```

```
21
       int rows = src.rows, cols = src.cols;
                                                                                  uchar v3 = (v - int(v)) * v2 + (1 - v + int(v)) * v1
22
       float fx = innerParam.fx, fy = innerParam.fy, cx =
                                                                      65
            innerParam.cx, cy = innerParam.cy;
                                                                                      + 0.5;
23
       float k1 = distCoff.k1, k2 = distCoff.k2, k3 = distCoff.k3
                                                                      66
                                                                      67
                                                                                  return v3;
24
       float p1 = distCoff.p1, p2 = distCoff.p2;
                                                                      68
                                                                                };
25
                                                                              } break;
                                                                      69
26
       // define the interpolation function
                                                                      70
                                                                              default: {
       std::function<char((float, float, uchar *))> interpolation
27
                                                                                interpolation = [cols, rows](float u, float v, uchar *
                                                                      72
                                                                                 if (u < 0 || u > cols - 1 || v < 0 || v > rows - 1) {
28
29
       switch (methods) {
                                                                      73
                                                                                   return uchar(0);
       case Interpolation::NEAREST_NEIGHBOR: {
30
                                                                      74
                                                                                 } else {
                                                                      75
31
         interpolation = [cols, rows](float u, float v, uchar *
                                                                                   return *(headPtr + int(v) * cols + int(u));
                                                                      76
                                                                                 }
           return *(headPtr + int(v + 0.5) * cols + int(u + 0.5))
                                                                      77
                                                                                };
32
                                                                      78
                                                                              } break;
33
         };
                                                                      79
                                                                              }
       } break;
34
                                                                      80
35
       case Interpolation::BILINEAR: {
                                                                      81
                                                                              // the undistorted image
         interpolation = [cols, rows](float u, float v, uchar *
                                                                              cv::Mat dst(rows, cols, CV_8UC1);
36
                                                                      82
              headPtr) {
                                                                      83
                                                                              uchar *srcHead = src.ptr<uchar>(0);
37
           // four corners
                                                                      84
38
                                                                      85
                                                                              for (int v = 0; v != rows; ++v) {
           int u_lt = int(u), v_lt = int(v);
39
           int u_rt = u_lt + 1, v_rt = v_lt;
                                                                      86
                                                                                auto dstPtr = dst.ptr<uchar>(v);
40
           int u_lb = u_lt, v_lb = v_lt + 1;
                                                                      87
41
           int u_rb = u_lt + 1, v_rb = v_lt + 1;
                                                                      88
                                                                                for (int u = 0; u != cols; ++u) {
                                                                      89
42
           // range check for u
43
                                                                      90
                                                                                  // transfrom to the normalized pixel coordinate
           (u_lt < 0) ? (u_lt = 0) : (0), (u_lt > cols - 1) ? (
                                                                                  float x = (u - cx) / fx;
44
                                                                      91
                u_{t} = cols - 1) : (0);
                                                                      92
                                                                                  float y = (v - cy) / fy;
45
           (u_rt < 0) ? (u_rt = 0) : (0), (u_rt > cols - 1) ? (
                                                                      93
                                                                                  float r2 = x * x + y * y, r4 = r2 * r2, r6 = r4 * r2;
                u_rt = cols - 1) : (0);
                                                                      94
                                                                      95
           (u_lb < 0)? (u_lb = 0): (0), (u_lb > cols - 1)? (
                                                                                  // the distortion model
46
                u_lb = cols - 1) : (0);
                                                                      96
                                                                                  float x dist = x * (1 + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) +
47
           (u_rb < 0) ? (u_rb = 0) : (0), (u_rb > cols - 1) ? (
                                                                                        2 * p1 * x * y + p2 * (r2 + 2 * x * x);
                u_rb = cols - 1) : (0);
                                                                                  float y_dist = y * (1 + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) +
                                                                      97
48
                                                                                        2 * p2 * x * y + p1 * (r2 + 2 * y * y);
49
           // range check for v
                                                                      98
           (v_lt < 0) ? (v_lt = 0) : (0), (v_lt > rows - 1) ? (
                                                                      99
                                                                                  // transfrom to pixel coordinate
50
                v_{lt} = rows - 1) : (0);
                                                                     100
                                                                                  float u_dist = x_dist * fx + cx;
51
           (v_rt < 0) ? (v_rt = 0) : (0), (v_rt > rows - 1) ? (
                                                                     101
                                                                                  float v_dist = y_dist * fy + cy;
                v_rt = rows - 1) : (0);
                                                                     102
52
           (v_lb < 0) ? (v_lb = 0) : (0), (v_lb > rows - 1) ? (
                                                                     103
                                                                                  // range check
                v_{lb} = rows - 1) : (0);
                                                                     104
                                                                                  if (u_dist < 0 || u_dist > cols - 1 || v_dist < 0 ||</pre>
53
           (v_rb < 0) ? (v_rb = 0) : (0), (v_rb > rows - 1) ? (
                                                                                       v_{dist} > rows - 1) {
                v_rb = rows - 1) : (0);
                                                                     105
                                                                                   dstPtr[u] = 0;
54
                                                                     106
                                                                                  } else {
55
           // the gray values for four corners
                                                                     107
                                                                                   // interpolation
56
           uchar lt = *(headPtr + v_lt * cols + u_lt);
                                                                     108
                                                                                   dstPtr[u] = interpolation(u_dist, v_dist, srcHead);
57
           uchar rt = *(headPtr + v_rt * cols + u_rt);
                                                                     109
                                                                                 }
           uchar lb = *(headPtr + v_lb * cols + u_lb);
58
                                                                     110
                                                                                }
59
           uchar rb = *(headPtr + v_rb * cols + u_rb);
                                                                     111
60
                                                                     112
           // bilinear
                                                                              return dst;
61
                                                                     113
62
           float v1 = (u - int(u)) * rt + (1 - u + int(u)) * lt;
                                                                     114
63
           float v2 = (u - int(u)) * rb + (1 - u + int(u)) * lb; 115
                                                                          } // namespace ns_st1
```



(a) 原始畸变图像



(b) 去畸变图像 (最近邻插值)



(c) 去畸变图像 (双线性插值)

图 1: 对整张图像去畸变

图 1 为对整张图像去畸变得到的结果,其中图 1(a) 为原始的已畸变图像,图 1(b) 为使用最邻近插值法获得的去畸变图像,而图 1(c) 为使用双线性插值法获得的去畸变图像。可以明显的看到,相较于最邻近插值,双线性插值处理德更加精细,但是其耗时也更多。在本人的电脑上,使用 Release 编译模式时,最邻近插值法耗时 5.18229(MS),而双线性插值法耗时 8.25476(MS),基本上相差了 1.5 倍。结果如下

列表所示。

Listing 3: 不同插值方法对比

{ 'undistorted—nearest': 5.18229(MS)} { 'undistorted—bilinear': 8.25476(MS)}

4.2 像素点去畸变

以下代码列表时基于我们之前推导的高斯牛顿法,求解一个已畸变点对应的未畸变像素坐标。首先我们使用已畸变像素点的坐标作为待求解去畸变像素点的初值。而后在每一次迭代计算中,我们首先将现有的去畸变点的坐标转换到归一化像素坐标平面上,而后计算相应的雅各比矩阵,畸变模型,再将其转到畸变后的像素坐标里,得到误差。最后根据雅各比矩阵和误差,求解更新量,并对带估计参数进行更新。当更新量小到一定程度或者达到迭代次数限制的时候,结束循环,返回结果。

Listing 4: 像素点去畸变

```
namespace ns st1 {
 3
       * @brief undistort a pixel point
       * @param srcPt the distorted point
       * @param innerParam the camera's inner parameters
       * @param distCoff the camera's distortion parameters
       * @param threshold the threshold to stop iterator
       * @param iterator the interator times
10
       * @return cv::Point2f the undistoerted pixel point
11
12
      static cv::Point2f undistortPoint(
13
         cv::Point2f srcPt,
14
         const CameraInnerParam &innerParam,
15
         const CameraDistCoff &distCoff.
         float threshold = 1E-5,
17
         int iterator = 5) {
18
        // check input parameters
19
        CV_Assert(threshold > 0.0f);
20
       CV_Assert(iterator > 0);
21
22
       // get parameters
23
       float fx = innerParam.fx, fy = innerParam.fy, cx =
             innerParam.cx, cy = innerParam.cy;
       float k1 = distCoff.k1, k2 = distCoff.k2, k3 = distCoff.k3
       float p1 = distCoff.p1, p2 = distCoff.p2;
       float x_est = srcPt.x, y_est = srcPt.y;
```

```
27
       for (int i = 0; i != iterator; ++i) {
28
         // transform to normalized pixel coordinate plane
29
30
         float x = (x_est - cx) / fx;
         float y = (y_est - cy) / fy;
31
32
         float r2 = x * x + y * y, r4 = r2 * r2, r6 = r4 * r2;
33
34
         // compute the jacobian matrix
         float Juu = -(1.0f + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) -
36
                    x * (2.0f * k1 * x + 4.0f * k2 * r2 * x + 6.0)
                         f * k3 * r4 * x) -
37
                    2.0f * p1 * y - 6.0f * p2 * x;
38
         float Jvv = -(1.0f + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) -
39
                    y * (2.0f * k1 * y + 4.0f * k2 * r2 * y + 6.0
                         f * k3 * r4 * y) -
                    2.0f * p2 * x - 6.0f * p1 * y;
41
42
         // the distortion model
43
         float x_dist = x * (1 + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) + 2
44
               * p1 * x * y + p2 * (r2 + 2 * x * x);
45
         float y_dist = y * (1 + k1 * r2 + k2 * r4 + k3 * r6) + 2
               * p2 * x * y + p1 * (r2 + 2 * y * y);
46
47
         // transfrom to pixel coordinate plane
         float u dist = x dist * fx + cx;
48
49
         float v_dist = y_dist * fy + cy;
50
         // comput the error
51
         float eu = srcPt.x - u_dist;
52
         float ev = srcPt.y - v_dist;
53
54
55
         // the variation
         float delte_u = -eu / Juu;
56
57
         float delte_v = -ev / Jvv;
58
59
         // update
         x_est += delte_u;
60
61
         y_est += delte_v;
62
63
         float variation = delte_u * delte_u + delte_v * delte_v;
64
         if (variation < threshold) {</pre>
65
66
           break;
67
68
69
70
       return cv::Point2f(x_est, y_est);
71
72
   } // namespace ns_st1
```

如下列表所示,我在同一台机器上统计了使用 OpenCV 内置的去畸变函数 cv :: undistortPoints 和我实现的去畸变算法。可以看到,对于同一个待去畸变的像素点,通过高

斯-牛顿法解算的结果误差是 OpenCV 版本的 1/15 左右, 且速度比其快 5 倍, 效果非常鲁棒。

Listing 5: 不同像素点去畸变版本对比

5 GitHub

以下链接为该项目在 *GitHub* 上的地址,点击他,克隆它,使用它:

https://github.com/Unsigned-Long/slam-tricks/tree/master/st1-undistort