射影变换

陈烁龙

2022 年 7 月 9 日

目录

插图

表格

摘要

是的，没错，本次要分享的是射影变换，其是最一般的几何变换。

关键词：射影变换

1 射影变换的描述

射影变换是最一般的几何变换。对于二维平面的变换而言，其有 8 个自由度：

$$P' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$$

注意到：虽然矩阵有 9 个元素，但是如果将矩阵最后一个元素归化为 1，则一共有 8 个元素。我们将矩阵进行归化，同时除以 i'，则有：

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix}$$

假设我们有从点 $p_1(x_1, y_1)$ 到点 $p_2(x_2, y_2)$ 的射影变换，则有：

$$\alpha p_2 = Pp_1 \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注意：α 为一个比例因子，因为最后一个乘积出来的元素不会为 1：

$$gx_1 + hy_1 + 1 \neq 1$$

2 通过高斯牛顿法求解

基于上文的公式，我们有：

$$\rightarrow x_2 = \frac{ax_1 + by_1 + c}{gx_1 + hy_1 + 1}$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{dx_1 + ey_1 + f}{gx_1 + hy_1 + 1}$$

这里我们使用比值的方式，消除了比例因子 α。进一步，我们有：

$$\rightarrow 0 = ax_1 + by_1 + c - x_1x_2g - x_2y_1h - x_2$$

$$\rightarrow 0 = dx_1 + ey_1 + f - x_1y_2g - y_1y_2h - y_2$$

我们定义我们的误差函数为：

$$e(X) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + c - x_1x_2g - x_2y_1h - x_2 \\ dx_1 + ey_1 + f - x_1y_2g - y_1y_2h - y_2 \end{pmatrix}$$

其中：

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{pmatrix}^T$$

那么，误差函数对待求参数的雅可比矩阵为：

$$\frac{\partial e(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1x_2 & -x_2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1y_2 & -y_1y_2 \end{pmatrix}^T$$

采用高斯牛顿法，即可求解得到射影变换矩阵 P：

$$J(X)J^T(X)\Delta X = -J(X)e(X)$$

3 通过 SVD 分解求解

3.1 利用原始射影矩阵进行求解

当我们不归化射影矩阵时，有：

$$\beta p_2 = Pp_1 \rightarrow \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到：

$$\rightarrow x_2 = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{g'x_1 + h'y_1 + i'}$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{d'x_1 + e'y_1 + f'}{g'x_1 + h'y_1 + i'}$$

最后化简可以得到：

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & x_1 \\ 0 & y_1 \\ 0 & 1 \\ -x_1x_2 & -x_1y_2 \\ -x_2y_1 & -y_1y_2 \\ -x_2 & -y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \\ g' \\ h' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这是对于一个点对构造的方程，多个点对时，用相同的方法构建。利用 SVD 法求解的时候，会有约束：

$$\|X\|^2 = 1$$

3.2 求解 AX=0

对于一个 m 行、n 列的矩阵 $A_{m\times n}$，可以通过 SVD 分解，得到：

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}^T$$

且满足：

$$\begin{cases} U^TU = I \\ V^TV = I \end{cases}$$

易知，当 $m < n$ 时，该方程有无数多解，这是我们不感兴趣的。通常使用 SVD 方法求解该种问题时，我们都会有一个额外的条件：

$$\|X\|^2 = 1$$

即：待求参数向量的二范数为 0。在该种情况下，我们的最小二乘解为：

$$X = Col(V, n)$$

即：解为 V 矩阵的最后一列。

举例，对于方程：

$$x + y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

在使用 SVD 分解法求解的时候，我们会附加条件：

$$x^2 + y^2 = 1$$

最后的结果为：

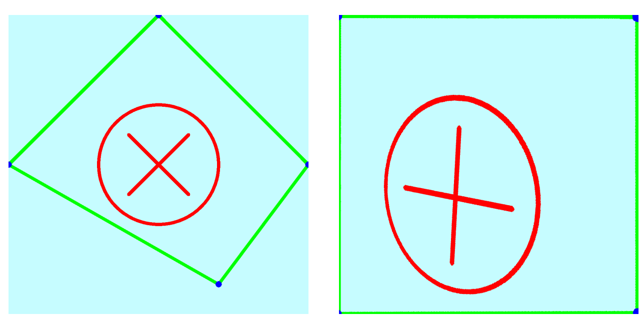
$$U_{1\times 1} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma_{1\times 2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$V_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

显然有：

$$\begin{cases} A = U\Sigma V^T \\ U^TU = 1 \\ V^TV = 1 \\ Col(V) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4 案例

我们首先构造一个图像，然后在该图像上取 4 个点构造一个感兴趣区域 (绿色框所示范围)。然后把在个感兴趣区域通过射影变换，让其充满整个空间。具体的结果如下图所示。



(a) 原始图像 (b) 射影变换后的图像

图 1: 射影变换

具体的射影变换细节如下表所示。

Listing 1: 高斯牛顿法求解

```
// 求解得到的射影矩阵
-- trans:
```

```
0.600816 0.600816 -300.408
-0.946573 0.94468 473.286
-0.000346103 -0.000106854 1

// 利用求解得到的射影矩阵将pc2转为pc1的结果
-- p1: [500, 0], p2: [0, 0], trans(p2): [500, -5.00253e-14]
-- p1: [999, 500], p2: [999, 0], trans(p2): [999, 500]
-- p1: [700, 900], p2: [999, 999], trans(p2): [700, 900]
-- p1: [0, 500], p2: [0, 999], trans(p2): [1.07613e-13, 500]
```

Listing 2: SVD 法求解

```
// 求解得到的射影矩阵
-- trans:
0.00107178 0.00107178 -0.535889
-0.00168856 0.00168519 0.844282
-6.17404e-07 -1.90615e-07 0.00178387

// 利用求解得到的射影矩阵将pc2转为pc1的结果
-- p1: [500, 0], p2: [0, 0], trans(p2): [500, 2.02693e-11]
-- p1: [999, 500], p2: [999, 0], trans(p2): [999, 500]
-- p1: [700, 900], p2: [999, 999], trans(p2): [700, 900]
-- p1: [0, 500], p2: [0, 999], trans(p2): [-4.26567e-11, 500]
```