Camera calibration

陈烁龙

2022 年 7 月 26 日

目录

插图

表格

摘要

相机标定是进行视觉 SLAM 的前提，其虽然在 VSLAM 这个大工程中只是一小部分，但是其重要性却是显而易见的。

关键词：相机标定，张正友，单应矩阵

1 算法流程

目前存在多种相机标定的算法和操作方法。不同的方法在精度、复杂度和适应场景都存在差异。在本文中，主要讲解张正友相机标定法。

张正友标定法标定相机的内外参数的思路如下：

1. 求解内参矩阵与外参矩阵的积；
2. 求解内参矩阵；
3. 求解外参矩阵；
4. 求解畸变参数；
5. 整体优化求解；

2 相机模型

对于单孔相机，我们知道：

$$s\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & r_3 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_p\\Y_p\\Z_p\\1\end{pmatrix}$$

其中 $p(u,v,1)$ 为像点，$P(X_p,Y_p,Z_p,1)$ 为在世界平面坐标系上的一物点，s 是该物点在相机坐标系下的深度。矩阵 A 为相机的内参矩阵，是我们求解的目标。

由于物点位于世界平面坐标系上，所以 $Z_p=0$。所以有：

$$s\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_p\\Y_p\\1\end{pmatrix}$$

如果我们令:

$$H=A\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12} & h_{13}\\h_{21} & h_{22} & h_{23}\\h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{pmatrix}$$

那么我们可以得到：

$$sp=HP$$

矩阵 H 即单应矩阵，其描述了一个平面到另一个平面之间的关系。我们的目标是先求出矩阵 H，而后基于其求出相机 i 内参矩阵 A。

2.1 求解单应矩阵

通过之前的推导，我们不难得出：

$$\begin{cases}su=h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}\\sv=h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}\\s=h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}\end{cases}$$

我们用前两式同时除以第三式，得到：

$$\rightarrow u=\frac{h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}}{h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}}$$

$$\rightarrow v=\frac{h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}}{h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33}}$$

当然，对于带求解的矩阵 H 其自由度只有 8。对此，我们可以使用 SVD 方法，增加一个额外约束来求解。之后我们有：

$$\begin{cases}u(h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33})=h_{11}X_p+h_{12}Y_p+h_{13}\\v(h_{31}X_p+h_{32}Y_p+h_{33})=h_{21}X_p+h_{22}Y_p+h_{23}\end{cases}$$

整理成矩阵的形式，有：

$$\begin{pmatrix} X_p & 0 \\ Y_p & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & X_p \\ 0 & Y_p \\ 0 & 1 \\ -uX_p & -vX_p \\ -uY_p & -vY_p \\ -u & -v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

之后使用 SVD 方法，将系数矩阵分解：

$$A = U\Sigma V^T$$

则 V 矩阵的最后一列就对应了待求的参数向量。可以由此构建矩阵 H。注意，由于 H 矩阵包含了外参信息 (旋转和平移)，所以每张像片的 H 矩阵要单独求解。当一张相片上提取的棋盘格网点大于等于 4 个即可求解 H 矩阵。

2.2 求解内参矩阵

求解内参矩阵基于我们之前求解得到的单应矩阵 H。之前我们知道：

$$A\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$$

对于内参矩阵 A，我们已知：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于 A^{-1} 我们同样也可以写得出来[1]。要求解矩阵 A，我们利用旋转矩阵 R 的特性，即：

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

其任何一个向量都是单位向量，且不同向量彼此正交。在这里，我们有：

$$\begin{cases} r_1 = A^{-1}h_1 \rightarrow r_1^T = h_1^T A^{-T} \\ r_2 = A^{-1}h_2 \rightarrow r_2^T = h_2^T A^{-T} \end{cases}$$

所以我们有：

$$\begin{cases} r_1^T r_2 = 0 \\ r_1^T r_1 - r_2^T r_2 = 0 \end{cases}$$

我们记 $B = A^{-T}A$，则有：

$$\begin{cases} h_1^T B h_2 = 0 \\ h_1^T B h_1 - h_2^T B h_2 = 0 \end{cases}$$

注意，我们将 r_1 与 r_2 的单位向量特性通过差值为 0 的形式表现，原因在于我们求解单应矩阵 H 的时候，令 $h_{33} = 1$。换句话说，如果在求解 H 的时候，假定 h_{33} 等于其他的值，我们也同样可以解得 H，只不过不同的 H 矩阵之间差了一个尺度因子。那这映射到旋转矩阵上，列向量虽然正交，可不一定是单位向量[2]。可

由于对于矩阵 A 以及 A^{-1} 我们都能写出其显示的表达形式，因此我们同样可以写出矩阵 B 的表达形式[3]。而且，你会发现 3×3 的矩阵 B 是对称的。换句话说，我们的未知参数只有 6 个 (对角线及其上部或下部元素)。

我们假定 B 为：

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

那么对于 $h_i^T B h_j$，我们可以得到：

$$\begin{aligned} h_i^T B h_j = & (h_{1i}b_{11} + h_{2i}b_{12} + h_{3i}b_{13})h_{1j} + \\ & (h_{1i}b_{12} + h_{2i}b_{22} + h_{3i}b_{23})h_{2j} + \\ & (h_{1i}b_{13} + h_{2i}b_{23} + h_{3i}b_{33})h_{3j} \end{aligned}$$

[1]此处省略。

[2]不是说旋转矩阵各向量不是单位向量，而是说我们这里求解的问题特性。

[3]我们这里不写了

其中：

$$h_i = \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{2i} & h_{3i} \end{pmatrix}^T$$

整理成矩阵的形式，可以得到：

$$h_i^T B h_j = \begin{pmatrix} h_{1i}h_{1j} \\ h_{2i}h_{1j} + h_{1i}h_{2j} \\ h_{3i}h_{1j} + h_{1i}h_{3j} \\ h_{2i}h_{2j} \\ h_{3i}h_{2j} + h_{2i}h_{3j} \\ h_{3i}h_{3j} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

而后我们可以通过 SVD 分解的方法得到待求参数，并利用解析的方式得到参数 A 的各个系数[4]。注意：由于 B 矩阵只包含了内参相关的参数，所以对于不同的棋盘图像，其都是一样的。换句话说，在求解 B 矩阵的时候，我们要用到所有之前求得的单应矩阵 (且每一个单应矩阵可以构建两个方程)。

获得 $B = A^{-T}A^{-1}$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{v_0\gamma - u_0\beta}{\alpha^2\beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} & -\frac{\gamma(v_0\gamma-u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{v_0\gamma-u_0\beta}{\alpha^2\beta} & -\frac{\gamma(v_0\gamma-u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(v_0\gamma-u_0\beta)^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{pmatrix}$$

所以 A 矩阵的系数为：

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \\ \lambda = B_{33} - \dfrac{B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})}{B_{11}} \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\lambda}{B_{11}}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{\lambda B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}} \\ \gamma = -\dfrac{B_{12}\alpha^2\beta}{\lambda} \\ u_0 = -\dfrac{B_{13}\alpha^2}{\lambda} \end{cases}$$

[4]这是可行的，因为我们具有显示矩阵 B 的解析形式。

2.3 求解外参矩阵

求解得到矩阵 A 和 H 之后，我们就可以求解外参矩阵了。下式是我们之前得到的式子：

$$\rightarrow \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$$

虽然我们不知道尺度因子 λ，但是我们可以利用旋转矩阵的特性求解。具体来说，我们求得 λr_1 和 λr_2 之后，通过单位化可以得到 r_1 和 r_2，进而通过正交特性得到 r_3 即：

$$\begin{cases} r_1 = normalized(\lambda r_1) \\ r_2 = normalized(\lambda r_2) \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases}$$

对于 t，我们可以：

$$\begin{cases} \lambda_t = 0.5(norm(\lambda r_1) + norm(\lambda r_2)) \\ t = \lambda A^{-1} h_3 / \lambda_t \end{cases}$$

这样做的目的是考虑了误差。

2.4 畸变参数

当然，上述的推导没有考虑畸变模型。为此我们考虑畸变模型。我们假设 $X(x, y, 1)$ 为畸变前的归一化像素坐标平面上的点，$X_{dist}(x_{dist}, y_{dist}, 1)$ 为畸变后的归一化像素坐标平面上的点，则之前的相机模型可以拆分成：

$$\rightarrow s \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_{dist} = x(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\ \qquad + 2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ y_{dist} = y(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\ \qquad + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{dist} \\ y_{dist} \\ 1 \end{pmatrix}$$

现在我们已有的是畸变前后的归一化坐标 $X(x,y,1)$ 和 $X_{dist}(x_{dist}, y_{dist}, 1)$，要求解的是参数 k_1、k_2、k_3 和 p_1、p_2。如果我们令：

$$\begin{cases} e_x = x_{dist} - x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ \qquad - 2p_1 xy - p_2(r^2 + 2x^2) \\ e_y = y_{dist} - y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ \qquad - p_1(r^2 + 2y^2) - 2p_2 xy \end{cases}$$

那么有：

$$\begin{cases} \frac{\partial e_x}{\partial k_1} = -xr^2 \\ \frac{\partial e_x}{\partial k_2} = -xr^4 \\ \frac{\partial e_x}{\partial k_3} = -xr^6 \\ \frac{\partial e_x}{\partial p_1} = -2xy \\ \frac{\partial e_x}{\partial p_2} = -(r^2 + 2x^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial e_y}{\partial k_1} = -yr^2 \\ \frac{\partial e_y}{\partial k_2} = -yr^4 \\ \frac{\partial e_y}{\partial k_3} = -yr^6 \\ \frac{\partial e_y}{\partial p_1} = -(r^2 + 2y^2) \\ \frac{\partial e_y}{\partial p_2} = -2xy \end{cases}$$

令 $e = \begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix}^T$、$kp = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$，则：

$$J = \frac{\partial e}{\partial kp} = -\begin{pmatrix} xr^2 & yr^2 \\ xr^4 & yr^4 \\ xr^6 & yr^6 \\ 2xy & (r^2 + 2y^2) \\ (r^2 + 2x^2) & +2xy \end{pmatrix}$$

为此，我们可以使用高斯牛顿法进行优化求解，每次迭代的参数增量由下式给出：

$$JJ^T \delta kp = -Je$$

2.5 整体优化

由于上文我们推导是一步一步通过优化得到的各个参数，所以往往不能得到全局的最优解[5]。所以，当我们通过上述的流程得到解的初值之后，需要使用 LM 算法[6]进行整体优化，求的全局最优解。

[5]但是这写工作确实有用的，其为我们提供了整体优化的良好初值。

[6]一种基于高斯-牛顿方法演化得到的优化算法。