# SLAM Trick 1: Epipolar Constraints

陈烁龙

2022 年 4 月 28 日

# 目录



# 插图

# 表格

# 摘要

在使用单目相机进行 $SLAM$ 的时候，必不可少的一步就是初始化。由于单目相机的尺度是未知的，所以一般初始化的方式是通过对极几何约束，解算出两帧图像之间的位姿变换，来进行初始化。



**关键词**：卡方检验，单目相机，对极几何


# 1 对极几何

对极几何描述了两张影像之间的位姿变换关系，通过解算得到的基础矩阵或者本质矩阵，我们可以从中恢复出位姿。

假设有两张影像 $Frame_1$ 和 $Frame_2$，其上有一已配对的特征点对 $p_1(u_1, v_1)$ 和 $p_2(u_2, v_2)$，且 $p_1$ 对应的空间点在 $Frame_1$ 的相机坐标系下为 $P$。现在我们要求解的是从 $Frame_1$ 到 $Frame_2$ 的位姿变化 $R_{21}$ 和 $t_{21}$。我们基于相机的帧孔模型，很容易写出如下的方程组：

$$\begin{cases} s_1 p_1 = KP \\ s_2 p_2 = K(R_{21}P + t_{21}) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $s_1$、$s_2$ 代表空间点 $P$ 在各相机坐标系下对应的深度，$K$ 表示相机的内参矩阵 (其描述了像平面和归一化像素坐标平面的对应关系)。如果我们将像素点转到对应的归一化像素坐标平面上，也可以得到：

$$\begin{cases} s_1 X_1 = P \\ s_2 X_2 = R_{21}P + t_{21} \end{cases} \tag{2}$$

其中：

$$\begin{cases} X_1 = K^{-1} p_1 \\ X_2 = K^{-1} p_2 \end{cases} \tag{3}$$

即：

$$s_2 X_2 = s_1 R_{21} X_1 + t_{21} \tag{4}$$

对于上式，我们在其左右两边同时左乘 $t_{21}$ 对应的反对称矩阵[1]，则有：

$$s_2 t_{21}^{\wedge} X_2 = s_1 t_{21}^{\wedge} R_{21} X_1 \tag{5}$$

由于我们并不知道点对应的深度，所以我们需要将深度因子 $s_1$、$s_2$ 消除。为此我们在上式左右两边同时左乘 $X_2^T$，由于 $X_2^T t_{21}^{\wedge} X_2 = 0$，所以有：

$$0 = s_2 X_2^T t_{21}^{\wedge} X_2 = s_1 X_2^T t_{21}^{\wedge} R_{21} X_1$$

$$\to \begin{cases} X_2^T t_{21}^{\wedge} R_{21} X_1 = 0 \\ p_2^T K^{-T} t_{21}^{\wedge} R_{21} K^{-1} p_1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

如果我们记：$E = t_{21}^{\wedge} R_{21}$、$F = K^{-T} t_{21}^{\wedge} R_{21} K^{-1}$，则有：

$$\begin{cases} X_2^T E X_1 = 0 \\ p_2^T F p_1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

其中矩阵 $E$ 被称为本质矩阵，矩阵 $F$ 被成为基础矩阵，它们只相差了一个相机内参。

# 2 恢复运动

假设我们要利用基础矩阵 $F$ 来恢复运动，我们可以先基于最小二乘法求解得到矩阵 $F$，而后再利用 $SVD$ 方法得到旋转矩阵 $R_{21}$ 和平移向量 $t_{21}$。

## 2.1 基础矩阵的求解

基础矩阵 $F$ 的求解是基于上文的对极几何关系式 7 中的第二式来进行的。对于一对已配对的特征点对 $p_1(u_1, v_1)$ 和 $p_2(u_2, v_2)$，我们很容

[1] 假设有向量 $v(x, y, z)$，则其对应的反对称矩阵为：

$$v^{\wedge} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

且有：$v^{\wedge} v = v \times v = 0$

易可以写出如下的关系式：

$$\begin{pmatrix} u_2 & v_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

由于对于式 7 左右乘以任意标量都不会破坏关系，因此我们直接将矩阵 $F$ 的最后一个元素设为 1，这不会产生任何影响，只会方便我们求解。基于 8 我们可以得到：

$$\begin{aligned} & u_1u_2f_1 + u_1v_2f_4 + u_1f_7 + v_1u_2f_2 + v_1v_2f_5 \\ & + v_1f_8 + u_2f_3 + v_2f_6 + 1 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

即：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1u_2 \\ v_1u_2 \\ u_2 \\ u_1v_2 \\ v_1v_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix} = -1 \\ \rightarrow AX = l \end{aligned} \tag{10}$$

若有 8 对已配对的点对，即可求解常规的线性方程组即可解得基础矩阵 $F$，若有多于 8 对已配对的点对，可使用最小二乘法求解：

$$X = (A^TA)^{-1}A^Tl$$

求解出元素后，最后再拼得矩阵 $F$。