

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и  
радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

**В. Я. Анисимов**

## **МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и  
радиоэлектроники для специальности 1-40 01 03 (1-40 04 01)  
«Информатика и технологии программирования» в качестве пособия*

Минск БГУИР 2017

УДК 519.6(076.5)  
ББК 22.193я73  
А67

Рецензенты:

Кафедра высшей математики №2  
Белорусского национального технического университета  
(протокол №15 от 21.03.2016);

заведующий центром «Диагностические системы»  
государственного научного учреждения «Институт физики  
им. Б. И. Степанова Национальной академии наук  
Беларуси» В. Н. Белый

**Анисимов В. Я.**

А67      Методы численного анализа. Лабораторный практикум: пособие  
/ В.Я. Анисимов – Минск.: БГУИР, 2017. – 78с.: ил.

ISBN 978-985-543-332-4.

Рассмотрены приближенные методы решения интегральных уравнений. Приведено описание шести лабораторных работ по курсу Методы численного анализа.

**УДК 519.6(076.5)**  
**ББК 22. 193 я73**

**ISBN 978-985-543-332-4.**  
2017

© Анисимов В. Я.,

© УО «Белорусский государственный  
университет информатики и  
радиоэлектроники», 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
<b>1. Теоретическая часть.....</b>	<b>5</b>
1.1. Приближенные методы решения интегральных уравнений.....	5
1.1.1. Замена ядра вырожденным.....	5
1.1.2. Метод последовательных приближений .....	9
1.1.3. Метод Бубнова – Галеркина.....	11
1.2. Приближенные методы отыскания характеристических чисел.....	13
1.2.1. Метод Ритца.....	13
1.2.2. Метод следов.....	15
1.1.3. Метод Келлога.....	17
<b>2. Лабораторный практикум.....</b>	<b>20</b>
2.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11. Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина.....	20
2.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №12. Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций .....	28
2.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №13. Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.....	37
2.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №14. Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей на примере уравнения теплопроводности.....	55
2.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №15. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.....	63
2.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №16. Метод сеток решения волнового уравнения.....	70
Список используемой литературы.....	74

## **Введение.**

При изучении курса «Методы численного анализа» студенты должны освоить методы решения классических элементарных задач. С этой целью необходимо выполнить под руководством преподавателя на лабораторных занятиях индивидуальные задания, предлагаемые в данном пособии и охватывающие основные темы:

- Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина.
- Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций.
- Методы численного решения задач математической физики.

По результатам работы студентом должен быть представлен и защищен отчет. В отчет должно быть включено:

1. Введение, содержащее постановку задачи, обзор имеющихся методов ее решения, их сравнительная характеристика.
2. Детальное описание и схема алгоритма выбранного метода.
3. Распечатку программы (каждый метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы, в головной программе предусмотреть ввод исходных данных и обращение к подпрограмме),
4. Таблицы полученных результатов, графики сходимости приближенного решения к точному решению.
5. Анализ полученных результатов, включающий аналитическую оценку точности метода и ее сравнение с численно полученными результатами (т.е. оценку разности между точным и приближенным решением при различных параметрах метода). При выполнении работ не предполагается использование готовых программных продуктов.

## 1. Теоретическая часть

### 1.1. Приближенные методы решения интегральных уравнений.

#### 1.1.1. Замена ядра вырожденным.

Пусть имеем интегральное уравнение [9]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.1)$$

с произвольным ядром  $K(x, t)$ . Простота разыскания решения уравнения с вырожденным ядром, естественно, приводит к мысли о замене данного произвольного ядра  $K(x, t)$  приближенно на вырожденное  $L(x, t)$  и принятии решения уравнения (1.2)

$$\hat{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int L(x, t) \hat{\varphi}(t) dt \quad (1.2)$$

в качестве приближения к решению исходного уравнения (1.1).

В качестве вырожденного ядра  $L(x, t)$ , близкого к данному  $K(x, t)$  можно брать отрезок ряда Тейлора для функции  $K(x, t)$ , отрезок ряда Фурье для  $K(x, t)$  по любой полной ортонормированной в  $L_2(a, b)$  системе функций  $\{u_n(x)\}$  и т.д. Укажем некоторые оценки погрешностей в решении (1.1), возникающие от замены данного ядра на вырожденное.

Пусть даны два ядра  $L(x, t)$  и  $K(x, t)$  и известно, что

$$\int_a^b |K(x, t) - L(x, t)| dt < h$$

и что резольвента  $R_L(x, t, \lambda)$  уравнения с ядром  $L(x, t)$  удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |R_L(x, t, \lambda)| dt < R,$$

а также, что  $|f(x) - f_1(x)| < \eta$ . Тогда если выполнено условие

$$1 - |\lambda|h(1 + |\lambda|R) > 0,$$

уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + f(x)$$

имеет единственное решение  $\varphi(x)$  и разность между этим решением и решением  $\hat{\varphi}(x)$  уравнения

$$\hat{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int L(x, t) \hat{\varphi}(t) dt$$

не превосходит

$$|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)| < \frac{N|\lambda|(1+|\lambda|R)^3 h}{1 - |\lambda|h(1 + |\lambda|R)} + \eta, \quad (1.3)$$

где  $N$  – верхняя граница  $|f(x)|$ .

Отметим, что для вырожденного ядра  $L(x, t)$  резольвента  $R_L(x, t, \lambda)$  находится просто (с точностью до вычисления интегралов), а именно, если  $L(x, t) = \sum_{k=1}^n X_k(x) T_k(t)$ ,

то полагая

$$\int_a^b X_k(x) T_s(x) dx = \alpha_{sk},$$

получаем

$$R_L(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (1.4)$$

где

$$D(x, t, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & X_k(x) & \cdots & X_n(x) \\ T_1(t) & 1 - \lambda \alpha_{1t} & \cdots & -\lambda \alpha_{1n} \\ T_n(t) & -\lambda \alpha_{n1} & \cdots & 1 - \lambda \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

а

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \alpha_{11} & -\lambda \alpha_{12} & \cdots & -\lambda \alpha_{1n} \\ -\lambda \alpha_{21} & 1 - \lambda \alpha_{22} & \cdots & -\lambda \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda \alpha_{n1} & -\lambda \alpha_{n2} & \cdots & 1 - \lambda \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где корни  $D(\lambda)$  суть собственные значения ядра  $L(x, t)$ .

Приведем еще одну оценку ( $\lambda = 1$ ). Пусть [6]

$$K(x, t) = L(x, t) + \Lambda(x, t),$$

где  $L(x, t)$  – вырожденное ядро, а  $\Lambda(x, t)$  имеет малую норму в используемой метрике. Пусть, далее,  $R_k(x, t)$ ,  $R_L(x, t)$  резольвенты ядер

$K(x, t)$  и  $L(x, t)$  соответственно и  $\|A\|$ ,  $\|R_k\|$ ,  $\|R_L\|$  – нормы операторов с соответствующими ядрами. Тогда

$$\|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)\| \leq \|A\|(1 + \|R_k\|)(1 + \|R_L\|)\|f\|. \quad (1.7)$$

Причем норма в формуле (1.7) может быть взята в любом функциональном пространстве. Для нормы резольвенты  $R$  любого ядра  $K(x, t)$  справедлива оценка (1.8)

$$\|R\| \leq \frac{\|K\|}{1 - \|\lambda\|\|K\|}. \quad (1.8)$$

При этом в пространстве  $C(0, 1)$  непрерывных функций на отрезке  $[0, 1]$  нормы равны

$$\|K\| = \max_{0 < x < 1} \int_0^1 |K(x, t)| dt \quad \|f\| = \max_{0 < x < 1} |f(x)| \quad (1.9)$$

В пространстве функций, суммируемых с квадратом по  $\Omega \{a < x, t < b\}$  нормы равны

$$\|K\| \leq (\iint_a^b K^2(x, t) dx dt)^{1/2} \quad \|f\| = (\int_a^b f^2(x) dx)^{1/2} \quad (1.10)$$

### Пример 1.1

Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos(xt)) \varphi(t) dt$$

заменяя его ядро на вырожденное.

### Решение.

Разлагая в степенной ряд ядро  $K(x, t) = 1 - x \cos(xt)$ , получим

$$K(x, t) = 1 - x + \frac{(x^3 t^2)}{2} - \frac{x^5 t^4}{24} + \dots$$

Возьмем в качестве вырожденного ядра  $L(x, t)$  первые три члена этого разложения и будем решать уравнение

$$\hat{\varphi}(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}) \hat{\varphi}(x) dt$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде

$$\hat{\varphi}(x) = \sin x + C_1 (1 - x) + C_2 x^3, \quad (1.11)$$

где

$$C_1 = \int_0^1 \hat{\varphi}(t) dt,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 2 \hat{\varphi}(t) dt.$$

Подставляя решение (1.11) в коэффициенты, получим систему для определения констант  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 = \int_0^1 [\sin t + C_1(1-t) + C_2 t^3] dt = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + 1 - \cos t$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [t^2 \sin t + C_1(t^2 - t^3) + C_2 t^5] dt = \frac{1}{24} C_1 + \frac{1}{12} C_2 + \sin t - t + \frac{1}{2} \cos t.$$

Решив эту систему, найдем

$$C_1 = 1,0031 \quad C_2 = 0,1674.$$

Тогда

$$\hat{\varphi}(x) = 1,0031(1-x) + 0,1674x^3 + \sin x.$$

Точное решение уравнения исходного уравнения  $\varphi(x) = 1$ . Оценим теперь норму  $\|\varphi - \hat{\varphi}\|$  по формуле (1.8)

$$\|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)\| \leq \|A\|(1 + \|R_k\|)(1 + \|R_L\|)\|f\|.$$

В метрике пространства  $L_2$  получим

$$\|A\| \leq \frac{1}{24} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (x^{10} t^8 dx dt) \right\}^{\frac{1}{8}} = 1/(72\sqrt{11}) < 1/238,$$

$$\|K\| \leq \left\{ \int_0^1 (1 - x \cos xt)^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \sin^2 x dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{5}.$$

Нормы резольвент  $R_K$  и  $R_L$  оценим по формулам

$$\|R_K\| \leq \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \|K\|},$$

$$\|R_L\| \leq \frac{\|L\|}{1 - |\lambda| \|L\|},$$

где  $|\lambda|$  равно единице, значит,  $\|R_K\| \leq \frac{3}{2}$ ,  $\|R_L\| \leq \frac{3}{2}$ . Тогда



$$\|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)\| < \frac{1}{238} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\right) < 0,016.$$

### **Задание 1.1.**

Найти решение интегрального уравнения с помощью замены ядра вырожденным и дать оценку погрешности полученного решения:

а)  $\varphi(x) = \exp^x - x - \int_0^1 x(\exp^{xt} - 1)\varphi(t)dt;$

б)  $\varphi(x) = x + \cos x + \int_0^1 x(\sin xt - 1)\varphi(t)dt;$

в)  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\exp^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (\exp^{xt^2} - 1)x\varphi(t)dt;$

г)  $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \int_0^1 (1 - \cos xt^2)x\varphi(t)dt.$

### **1.1.2. Метод последовательных приближений.**

Метод последовательных приближений (метод итераций) состоит в следующем. Имеем интегральное уравнение [9]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.12)$$

Строим последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  с помощью рекуррентной формулы

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt. \quad (1.13)$$

Функции  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения, причем нулевое приближение  $\varphi_0(x)$  может быть выбрано произвольно. При выполнении условия  $|\lambda| < \frac{1}{B}$ , где

$$B = \sqrt{\iint_a^b K^2(x, t)dxdt} \quad (1.14)$$

последовательность (1.13) сходится к решению исходного интегрального уравнения. Величина погрешности  $(m + 1)$ -го приближения определяется неравенством

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leq FC_1 b^{-1} * \frac{|\lambda B|^{m+1}}{1 - |\lambda B|} + \Phi C_1 B^{-1} |\lambda B|^{m+1},$$

где

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx},$$

$$\Phi = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx},$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{a < x < b} \int_a^b K^2(x, t) dt}.$$

### **Задание 1.2**

1. Методом последовательных приближений решить уравнения:

a).  $\varphi(x) = 1 + \int_0^1 x t^2 \varphi(t) dt.$

b).  $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 x t \varphi(t) dt.$

2. Найти третье приближение  $\varphi_3(x)$  к решению интегрального уравнения.

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geq t, \\ x, & x \leq t, \end{cases}$$

и оценить погрешность полученного решения.

Отметим, что основная трудность применения метода последовательных приближений состоит в вычислении интегралов в формуле (1.13). Его, как правило, приходится производить при помощи формул

приближенного интегрирования. Поэтому и здесь целесообразно заменить данное ядро вырожденным с помощью его разложения в ряд Тейлора, а затем уже ввести метод итераций.

### 1.1.3. Метод Бубнова - Галеркина

Приближенное решение интегрального уравнения [9]

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.15)$$

по методу Бубнова – Галеркина ищется так. Выбираем систему функций  $\{u_n(x)\}$  полную в  $L_2(a,b)$  и такую, чтобы при любом  $n$  функции  $u_1(x)$ ,  $u_2(x) \dots u_n(x)$  были линейно независимы, а приближенное решение  $\varphi_n(x)$  ищем в виде (1.16) [10]:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x) \quad (1.16)$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) определяются из следующей линейной системы:

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda (\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, u_k(x)), \quad (1.17)$$

где ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), а скалярное произведение  $(f, g)$  равно

интегралу  $\int_a^b f(x)g(x)dx$ , где вместо  $\varphi_n(x)$  надо подставить сумму  $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x)$ .

Если значение  $\lambda$  в (1.15) не является характеристическим, то при достаточно больших  $N$  система (1.17) однозначно разрешима и при  $n$ , стремящимся к бесконечности, приближенное решение  $\varphi_n(x)$  (1.16) стремится в метрике  $L_2(a,b)$  к решению уравнения (1.15)

#### **Пример: 1.2**

Методом Бубнова - Галеркина решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^1 xt\varphi(t)dt$$

#### **Решение**

В качестве полной системы функций на  $(-1, 1)$  выбираем систему полиномов Лежандра  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Приближенное решение ищем в виде

$$\varphi_3(x) = a_1 + a_2x + \frac{a_3(3x^2-1)}{2}.$$

Подставляя  $\varphi_3(x)$  вместо  $\varphi(x)$  в интегральное уравнение, получим

$$a_1 + a_2x + \frac{a_3(3x^2-1)}{2} = x + \int_{-1}^1 xt(a_1 + a_2t + \frac{a_3(3t^2-1)}{2}) dt,$$

или после интегрирования

$$a_1 + a_2x + \frac{a_3(3x^2-1)}{2} = x + \frac{x^2}{3}a_2.$$

Умножая обе части этого равенства последовательно на 1,  $x$ ,  $\frac{a_3(3x^2-1)}{2}$  и интегрируя его по  $x$  в пределах от минус один до единицы, найдем:

$$2a_1 = 0,$$

$$\frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2,$$

$$\frac{2}{5}a_3 = 0.$$

Откуда  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 0$ , а значит  $\varphi_3(x) = 3x$ . Нетрудно проверить, что это точное решение искомого уравнения

### **Задание 1.3.**

Методом Бубнова-Галеркина решить следующие интегральные уравнения:

а).  $\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)\varphi(t)dt;$

б).  $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 + x^3)\varphi(t)dt;$

в).  $\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^1 x^2 e^{xt}\varphi(t)dt.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для вырожденных ядер метод Бубнова-Галеркина дает точное решение, а для общего случая он эквивалентен замене ядра  $K(x, t)$  на вырожденное  $L(x, t)$ .

## 1.2. Приближенные методы отыскания характеристических чисел

### 1.2.1.. Метод Ритца

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.18)$$

с симметричным ядром  $K(x,t) \equiv K(t,x)$ . Выберем последовательность функций  $\psi_n(x)$ ,  $\psi_n(x) \in L_2(a,b)$ , такую, что система  $\{\psi_n(x)\}$  полна в  $L_2(a,b)$  и для любого  $n$  функции  $\psi_{n1}(x) \dots \psi_n(x)$  линейно независимы на  $[a,b]$ . Полагая

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x).$$

Причем коэффициенты  $a_k$  подчиним условию  $||\varphi_n|| = 1$  и при этом условии ищем стационарные значения квадратичной формы  $(K\varphi_n, \varphi_n)$ .

Приходим к однородной линейной системе относительно коэффициентов  $a_k$  (здесь  $\sigma$  – множитель Лагранжа)

$$\sum_{k=1}^n \{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\} a_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.19)$$

Для существования ненулевого решения уравнения (1.18) определитель системы (1.19) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & (K\psi_1, \psi_2) - \sigma(\psi_1, \psi_2) & \dots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & (K\psi_2, \psi_2) - \sigma(\psi_2, \psi_2) & \dots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & (K\psi_n, \psi_2) - \sigma(\psi_n, \psi_2) & \dots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.20)$$

Корни уравнения (1.20) дают приближенные значения собственных чисел ядра  $K(x,t)$ . Наибольший из корней уравнения (1.20) дает приближенное значение наибольшего собственного числа с недостатком. Находя  $\sigma$  из (1.20) и подставляя в (1.19), ищем ненулевое решение  $a_k$ , получаем приближенное выражение собственной функции, отвечающей найденному собственному значению  $\sigma$ .

### Пример 1.3

Найти по методу Ритца приближенное значение наименьшего характеристического числа ядра

$$K(x,t) = xt; \quad a = 0, \quad b = 1.$$

## Решение

В качестве координатной системы функций  $\psi_n(x)$  выбираем систему полиномов Лежандра:  $\psi_n(x) = P_n(2x - 1)$ . Ограничимся двумя слагаемыми, так что

$$\varphi_2(x) = a_1 P_0(2x - 1) + a_2 P_1(2x - 1).$$

Отмечая, что

$$\psi_1 \equiv P_0(2x - 1) = 1; \quad \psi_2 \equiv P_1(2x - 1) = 2x - 1,$$

находим

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1,$$

$$(\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int_0^1 (2x - 1) dx = 0,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x - 1)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Далее

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left( \int_0^1 K(x, t) \psi_1(t) dt \right) \psi_1(x) dx = \iint_0^1 x t dx dt = 1/4,$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \iint_0^1 x t (2x - 1) dx dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \iint_0^1 x t (2t - 1) (2x - 1) dx dt = \frac{1}{36}.$$

Система (1.20) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\sigma^2 - \sigma \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Отсюда  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \frac{1}{3}$ . Наибольшее собственное значение  $\sigma_2 = \frac{1}{3}$ ,

значит, наименьшее характеристическое число  $\lambda = \frac{1}{\sigma_2} = 3$ .

### Задание 1.4

По методу Ритца найти наименьшие характеристические числа ядер на отрезке  $[0,1]$

a)  $K(x, t) = x^2 t^2$

b)  $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geq t \\ x, & x \leq t. \end{cases}$

c)  $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leq t \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geq t. \end{cases}$

#### 1.2.2. Метод следов.

Назовем  $m$ -м следом ядра  $K(x, t)$  число

$$A_m = \int_a^b K_m(t, t) dt,$$

где  $K_m(x, t)$  означает  $m$ -е итерированное ядро.

Для наименьшего характеристического числа  $\lambda_1$  при достаточно большом  $m$  справедлива следующая приближенная формула:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \quad (1.21)$$

Формула (1.21) дает значение  $|\lambda_1|$  с избытком.

Следы четного порядка для симметричного ядра вычисляются по формуле (1.22):

$$A_{2m} = \iint_a^b K^2_m(x, t) dx dt = \int_a^b \int_a^x K^2_m(x, t) dx dt. \quad (1.22)$$

#### Пример 1.4

Найти по методу следов первое характеристическое число ядра

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geq t \\ x, & x \leq t \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

#### Решение



Так как ядро  $K(x, t)$  симметрично, то достаточно найти  $K(x, t)$  только при  $t$  меньших  $x$ .

Имеем

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, z)K(z, t)dz = \int_0^1 z^2 dz + \int_1^x ztdz + \int_x^1 xtdz = xt - \frac{x^2 t}{2} - t^3/6.$$

Далее, по формуле (1.22) для  $m = 1$  и  $m = 2$  соответственно находим:

$$A_2 = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_1^2(x, t)dt = 2 \int_0^1 dx \int_0^x t^3 dt = \frac{1}{6},$$

$$A_4 = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, t)dt = \frac{17}{630}.$$

Тогда, согласно формулы (1.21)

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}} = 2.48.$$

### ***Задание 1.5***

Методом следов найти первое характеристическое число следующих ядер на отрезке  $[0, 1]$ .

a) 1.  $K(x, t) = xt;$

b) 2.  $K(x, t) = x^2 t^2;$

c) 3.  $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leq t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geq t; \end{cases}$

d) 4.  $K(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{xt}\ln(t), & x \leq t, \\ -\sqrt{xt}\ln(x), & x \geq t. \end{cases}$

### 1.2.3.. Метод Келлога.

Пусть  $K(x, t)$  – симметричное ядро, которое для определенности будем считать положительно определенным, и пусть  $\omega(x)$  – произвольная функция из  $L_2(a, b)$ . Строим последовательность функций (1.23):

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \int_a^b K(x, t)\omega(t)dt, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x, t)\omega_1(t)dt, \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, t)\omega_{n-1}(t)dt,\end{aligned}\tag{1.23}$$

и рассматриваем числовую последовательность (1.24)

$$\left\{ \frac{||\omega_{n-1}||}{||\omega_n||} \right\}.\tag{1.24}$$

Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  – ортонормированные собственные функции ядра  $K(x, t)$  и  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  – соответствующие характеристические числа. Пусть далее функция  $\omega(x)$  ортогональна к функциям  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$ , но не ортогональна к собственной функции  $\varphi_k(x)$ . Тогда последовательность (1.23) имеет своим пределом  $k$ -е характеристическое число  $\lambda_k$

Последовательность функций  $\{\omega_n(x)/||\omega_{n-1}(x)||\}$  сходится в этом случае к некоторой функции, являющейся линейной комбинацией собственных функций, отвечающей характеристическому числу  $\lambda_k$ . К тому же пределу, что и последовательность (1.24), сходится последовательность (1.25):

$$\left\{ \frac{1}{n\sqrt{||\omega_n||}} \right\}.\tag{1.25}$$

Если  $(\omega, \varphi_1) \neq 0$ , получаем две приближенные формулы для наименьшего характеристического числа:

$$\lambda_1 \approx \frac{||\omega_{n-1}||}{||\omega_n||}, \quad \lambda_1 \approx \frac{1}{n\sqrt{||\omega_n||}}.$$

Причем первая формула дает значение  $\lambda_1$  с избытком. Если ядро  $K(x, t)$  не является положительно определенным, то формулы (1.24), (1.25) дают значение наименьшей абсолютной величины характеристического числа данного ядра. При удачном выборе  $\omega(x)$  метод Келлога сравнительно прост для вычислений.

Недостаток метода в том, что заранее не известно, какое из характеристических чисел удалось определить.

### Пример 1.5

По методу Келлога вычислить наименьшее характеристическое число ядра  $K(x, t) = x^2 t^2$ ,  $0 \leq x, t \leq 1$

### Решение

Возьмем  $\omega(x) = x$ . Тогда

$$\omega_1(x) = \int_0^1 x^2 t^2 t dt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 \frac{x^2 t^4}{4} dt = \frac{1}{5} x^2,$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{20} x^2 t^4 dt = \frac{1}{4 \cdot 5^3} x^2,$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} x^2.$$

Далее

$$||\omega_n(x)|| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}}.$$

Таким образом, согласно (1.24)

$$\lambda_1 \approx \frac{\frac{1}{4} * \frac{1}{5^{n-2}}}{\frac{1}{4} * \frac{1}{5^{n-1}}} = 5$$

### ***Задание 1.6***

По методу Келлога найти наименьшие характеристические числа следующих ядер:

a) 1.  $K(x, t) = xt; \quad 0 \leq x, t \leq 1;$

b) 2.  $K(x, t) = \sin x \sin t; \quad -\pi \leq x, t \leq \pi;$

c) 3.  $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geq t \\ x, & x \leq t \end{cases} \quad 0 \leq x, t \leq 1.$

## 2. Лабораторный практикум

### 2.1. Лабораторная работа №11.

Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина

#### Цель работы:

- изучить методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина, составить алгоритмы методов и программы их реализаций, составить алгоритм решения краевых задач указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программу решения краевых задач по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение заданной краевой задачи.

#### Краткие теоретические сведения

Будем рассматривать дифференциальное уравнение второго порядка [3].

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  – заданные непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции.

Напомним, что задача Коши для уравнения (2.1) сводится к нахождению решения  $y(x)$ , удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y'(a) = A_1. \end{cases}$$

*Краевой задачей* называется задача нахождения решения  $y(x)$ , удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{cases} y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases}$$

Краевая задача отличается от задачи Коши непредсказуемостью. Ее решение может существовать, не существовать, быть единственным, может быть бесконечно много решений.

Часто вместо граничных условий используют обобщенные граничные условия:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = A, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = B. \end{cases}$$

Граничные условия называются *однородными*, если  $A = B = 0$ .

Соответственно, краевая задача называется *однородной*, если у нее однородные граничные условия и правая часть уравнения  $f(x) \equiv 0$ . Следующая теорема имеет важное теоретическое значение.

**Теорема.** Краевая задача имеет решение, причем единственное тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная краевая имеет только нулевое решение (тривиальное решение однородной краевой задачи).

### Способы решения краевой задачи

Поскольку достаточно хороших аналитических методов нет, то для отыскания решения краевой задачи используются приближенные методы. Приближенное решение строят в виде линейной комбинации функций [4]:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x), \quad (2.2)$$

где  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет граничному условию, а функции  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – линейно независимы на  $[a, b]$  и удовлетворяют однородным граничным условиям.

Такая система дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  называется *базисной системой*. Задача сводится к выбору коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  таких, чтобы функция  $y_n(x)$  удовлетворяла граничному условию и была в некотором смысле близкой к точному решению.

Подставим приближенное решение (2.2) в уравнение (2.1). Полученное выражение

$$\psi(x, a_1, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) + q(x)y_n(x) - f(x) \quad (2.3)$$

называют невязкой. Очевидно, что, если бы  $\psi(x, a_1, \dots, a_n) \equiv 0$ , то  $y_n(x)$  было бы точным решением. К сожалению, так бывает очень редко. Следовательно, необходимо выбрать коэффициенты таким образом, чтобы невязка была в некотором смысле минимальной.

## Метод коллокаций

На отрезке  $[a, b]$  выбираются точки  $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$  ( $n \geq m$ ), которые называются точками коллокации. Точки коллокации последовательно подставляются в невязку. Считая, что невязка должна быть равна нулю в точках коллокации, в итоге получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ .

$$\begin{cases} \psi(x_1, a_1, \dots, a_n) = 0, \\ \dots \\ \psi(x_m, a_1, \dots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Обычно  $m = n$ . Получается система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными (коэффициентами  $a_1, \dots, a_n$ ):

$$\begin{cases} \psi(x_1, a_1, \dots, a_n) = 0, \\ \dots \\ \psi(x_n, a_1, \dots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем приближенное решение  $y_n(x)$ . Для повышения точности расширяем систему базисных функций. В значительной степени успех в применении метода зависит от удачного выбора базисной системы.

### Тестовый пример 2.1

Пусть

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Выберем базисную систему:

$$\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_1(x) = 1 - x^2,$$

$$\varphi_2(x) = x^2(1 - x^2).$$

Поскольку  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{1}{x^2} \neq \text{const}$ , функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  линейно независимы.

Строим приближенное решение:

$$y_2(x) = a_1(1 - x^2) + a_2(x^2 - x^4).$$

Выберем точки коллокации:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \psi\left(-\frac{1}{2}, a_1, a_2\right) = \frac{17}{16}a_1 + \frac{49}{64}a_2 - 1 = 0, \\ \psi(0, a_1, a_2) = a_1 - 2a_2 - 1 = 0, \\ \psi\left(\frac{1}{2}, a_1, a_2\right) = \frac{17}{16}a_1 + \frac{49}{64}a_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$y_2(x) = 0,957(1 - x^2) - 0,022(x^2 - x^4).$$

### Метод наименьших квадратов (МНК)

**1. Интегральный МНК.** Как и в методе коллокаций, приближенное решение строится по базисной системе. Но для нахождения коэффициентов при базисных функциях минимизируется интеграл от квадрата невязки [5]

$$I(a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \psi^2(x, a_1, \dots, a_n) dx. \quad (2.4)$$

Для нахождения минимума интеграла  $I(a_1, \dots, a_n)$  вычисляем первые производные от интеграла по параметрам и, приравнивая их нулю, строим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_1} = 2 \int_a^b \psi(x, a_1, \dots, a_n) \frac{\partial \psi(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_1} dx = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial I}{\partial a_n} = 2 \int_a^b \psi(x, a_1, \dots, a_n) \frac{\partial \psi(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_n} dx = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Решая ее, находим  $a_1, \dots, a_n$ .

**2. Дискретный МНК.** Выбирают  $N > n$  точек и решают задачу минимизации суммы:



$$S = \sum_{i=1}^N \psi^2(x_i, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \min.$$

Для ее решения строится система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \end{cases}$$

### Тестовый пример 2.2

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$y(-1) = 0,$$

$$y(1) = 0.$$

Выберем базисную систему:

$$\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_1(x) = 1 - x^2,$$

$$\varphi_2(x) = x^2(1 - x^2).$$

Применяя метод наименьших квадратов, можно найти

$$y_2(x) = 0,985(1 - x^2) - 0,078(x^2 - x^4).$$

### Метод Галеркина

По базисной системе вновь строим приближенное решение в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Рассматриваем невязку  $\psi(x, a_1, \dots, a_n)$  и для определения коэффициентов при базисных функциях строим систему

$$\begin{cases} \int_a^b \psi(x, a_1, \dots, a_n) \varphi_1(x) dx = 0, \\ \dots \\ \int_a^b \psi(x, a_1, \dots, a_n) \varphi_n(x) dx = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим значение  $a_1, \dots, a_n$ .

### Тестовый пример 2.3

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Возьмем

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_i(x) = x^i(1-x), \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда, применяя метод Галеркина, получим

$$y_1(x) = \frac{5}{18}x(x-1),$$

$$y_2(x) = \frac{71}{369}x(1-x) + \frac{7}{41}x^2(1-x).$$

Сравним значения точного решения  $y(x)$  со значениями приближенных решений  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  в отдельных точках.

$x_i$	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0,25	0,044	0,052	0,044
0,5	0,07	0,069	0,062
0,75	0,06	0,052	0,06

### ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №11

Методами коллокаций, галеркина, интегральным и дискретным методами наименьших квадратов и получить численное решение краевой задачи:

$$ay'' + (1 + bx^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Исходные данные:

$$a = \sin(k), b = \cos(k),$$

где  $k$  номер варианта. Базисную систему выбрать в виде:

$$\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_i(x) = x^i(1-x^2), \quad i = 1, 2, \dots$$

Граничные условия:

$$y(-1) = 0,$$

$$y(1) = 0.$$

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:**

1. Постановка краевой линейной задачи для ОДУ 2-го порядка.
2. Краевые условия первого, второго, третьего рода.
3. Метод стрельбы для нелинейной краевой задачи.
4. Вариационные методы (Ритца, наименьших квадратов, Галеркина).

## 2.2. Лабораторная работа № 12.

### Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций

#### Цель работы:

- изучить метод разностных аппроксимаций, составить алгоритм метода и программу их реализации, получить численное решение заданной краевой задачи;
- составить алгоритм решения краевых задач указанными методами, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программу решения краевых задач по разработанному алгоритму;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.

#### Краткие теоретические сведения

#### Разностный метод решения краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b], \\ y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases} \quad (2.6)$$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  одинаковых частей с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$  точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Заменяем производные на разностные отношения

$$\begin{aligned} y'(x_k) &\approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \\ y''(x_k) &\approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

где  $y_k = y(x_k)$ .

Получим для любого внутреннего узла  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  уравнение

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) \quad (2.7)$$

и для граничных узлов

$$y_0 = A, \quad y_n = B.$$

То есть, мы имеем систему из  $(n+1)$  уравнений с  $(n+1)$  неизвестными  $y_k$ . Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи. Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

$$y'' - p(x)y = f(x), \quad p(x) > 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.8)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

В этом случае получаем

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - p(x_k)y_k = f(x_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (2.9)$$

$$y_0 = A, \quad y_n = B.$$

Домножая (2.9) на  $h^2$ , получим трехдиагональную систему линейных уравнений

$$y_{k-1} - (2 + h^2 p(x_k))y_k + y_{k+1} = h^2 f(x_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

$$2 + p(x_k) > 1 + 1.$$

Такая система легко решается методом прогонки.

## ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №12

**Задача 1.** Составить разностную схему и получить численное решение краевой задачи с точностью  $10^{-3}$

$$ay'' + (1 + bx^2)y = -1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

Исходные данные:

$$a = \sin(k), b = \cos(k),$$

где  $k$ -номер варианта.

Граничные условия выбрать однородными:

$$y(-1) = 0,$$

$$y(1) = 0.$$

**Задача 2. Найти приближенное решение краевой задачи методом конечных разностей:**

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = UA, & u(b) = UB. \end{cases}$$

с заданной точностью  $\varepsilon$  и построить его график. Исходные данные указаны в таблице 2.1.

### **ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ**

1. Составить разностную схему второго порядка точности и выписать коэффициенты матрицы системы уравнений и коэффициенты правой части.

2. Подготовить тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

3. Для отыскания решения задачи с заданной точностью произвести расчет с начальным шагом  $h$ , затем уменьшить шаг вдвое. Вывести на экран два соседних приближенных решения и сравнить результаты. Если заданная точность не достигнута, то продолжить уменьшение шага.

4. Построить график найденного решения и указать шаг, при котором заданная точность достигается.

**Задача 3.** Методом конечных разностей найти приближенное решение указанной в индивидуальном варианте краевой задачи смотри таблицу 2.4 с точностью  $\varepsilon$  и построить его график. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

### **ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ**

1. Использовать разностную схему второго порядка точности. Для аппроксимации производных в граничных условиях воспользоваться разностными отношениями:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad \text{и} \quad y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

2. Организовать компактное хранение ненулевых элементов трехдиагональной матрицы системы разностных уравнений.

3. Подготовить самостоятельно тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

**Задача 4.** Методом конечных разностей найти приближенное решение краевой задачи с тремя верными значащими цифрами. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки. Исходные данные указаны в таблице 2.3.

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ -k(a)u'(a) + 0.5u(a) = 0, \\ k(b)u'(b) + 0.5u(b) = 0. \end{cases}$$

#### ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

- а. 1.Использовать разностную схему второго порядка точности.
- б. 2.При аппроксимации производных в граничных условиях использовать метод баланса.

**Таблица исходных данных к задаче 2**

Таблица 2.1

№ задания	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	$a$	$b$	$U_A$	$U_B$	$\epsilon$
2.2.1	$0.5 + \sin^2 x$	$2(1 + x^2)$	$10(1 + \sin^2 x)$	0	2	0	4	0.02
2.2.2	$e^{-x^2}$	$5(2 + \sin 2x)$	$e^x(1 + \sin 2x)$	0	2	0	5	0.05
2.2.3	$e^{-(x^2+1)}$	$10(1 + e^{-x})$	$e^{2.5x}(0.5 + x)$	0	1	4	0	0.03
2.2.4	$e^{-2x}$	$16/(1 + x^2)$	$e^{3x}(2 - x^2)$	0	1	1	3	0.05

№ задания	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	$a$	$b$	$U_A$	$U_B$	$\varepsilon$
2.2.5	$\ln(1+x)$	$10/(1+x)$	$x+9/(1+x)$	0	2	5	0	0.01
2.2.6	$\cos^2(x)$	$\frac{10}{1+\sin^2(x)}$	$e^{-0.5x}(12-x^2)$	0	2	3	0	0.05
2.2.7	$\ln(1+x^2)$	$e^{-x}(8+x^2)$	$8-x^2$	0	2	4	0	0.01
2.2.8	$1+\cos^2(x)$	$x^2+1$	$(x^2+1)\cos(x)$	1	3	-1	4	0.05
2.2.9	$0.5(1.5-x^2)$	$e^x(4-x)$	$5x^2e^{-x}$	1	2	0	3.5	0.02
2.2.10	$\sin(2x)$	$8(1+\sin^2 x)$	$10\cos x$	1	3	0	0	0.05
2.2.11	$0.25(1-x^2)$	$5(1+\cos^2(x))$	$15\cos x$	0	2	0	4	0.02
2.2.12	$-0.5+\sin x$	$\frac{8}{1+0.25x^2}$	$5(1-x^2)$	0	2	0	0	0.01
2.2.13	$\sin(x-2)$	$5(x+1/x)$	8	1	3	0	5	0.04
2.2.14	$1/(1+x^2)$	$10-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	0	5	0.05
2.2.15	$0.5e^{-x}$	$10(1+\sin^2 x)$	12	0	1	-1	4	0.02
2.2.16	$0.5(1-0.4x^2)$	$e^{-x}(9+x)$	$10\sin x$	0	1.5	0	4	0.03
2.2.17	$0.5\sin x$	$7(1+\sin^2 x)$	$6(1+x^2)$	0	2	4	0	0.05
2.2.18	$0.4\sqrt{1+x^2}$	$4(1+x^2)$	$20e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.05
2.2.19	$0.3\sqrt{4-x^2}$	$5(1+x^2)$	$8e^{0.5x}$	0	2	-1	3	0.1
2.2.20	$0.5/(1+x^2)$	$7(1+\sin^2 x)$	$20/(1+0.5x^2)$	0	1.5	2	-1	0.005
2.2.21	$\sin x$	$4(1+x^2)$	$6e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.05
2.2.22	$\sin x$	$6\sqrt{1+x^2}$	$7(1+\sin^2 x)$	0	2	0	0	0.05
2.2.23	$\cos(x)$	$5(1+\cos^2 x)$	$10/(1+0.5x^2)$	0	1.5	5	0	0.05
2.2.26	$0.5e^x$	$5(1+\sin^2 x)$	$5e^{-0.5x}$	0	1	1	4	0.02
2.2.24	$\cos(x)$	$5(1+\sin^2 x)$	$4e^{0.5x}$	0	2	0	4	0.02



№ задания	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	$a$	$b$	$U_A$	$U_B$	$\varepsilon$
2.2.27	$2/(1+x^2)$	$2-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	2	5	0.05
2.2.28	$\ln(1+x)$	$5/(1+x)$	$5/(1+x)$	0	2	5	0	0.05
2.2.29	$5\sin x$	$5(1+x^2)$	$5e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.2
2.2.30	$0.5\sqrt{1+x^2}$	$5(1+x^2)$	$10e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.2

**Таблица исходных данных к задаче 3**

Таблица 2.2

№ задания	Задача	$\varepsilon$	№ задания	Задача	$\varepsilon$
2.3.1	$u'' - xu' + 0.2u = x + 1$ $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 2$ $u(2.9) = 1$	0.04	2.3.11	$u'' + u' + 2xu = x^2 + 1$ $u(0.3) + 0.5u'(0.3) = 3$ $u(2.7) = 1$	0.03
2.3.2	$u'' - 0.5xu' + u = 2$ $u(0.4) = 1.2$ $u(1.4) + 2u'(1.4) = 3.2$	0.05	2.3.12	$u'' - xu = 2x$ $u(1.5) - 2u'(1.5) = 4.5$ $u'(3.5) = 3$	0.01
2.3.3	$u'' - 0.5u' + 0.5xu = 2x$ $u'(1) = 0.5$ $2u(3) - u'(3) = 2$	0.05	2.3.13	$u'' + xu' - u = x$ $u'(3) = 6$ $u(4) + u'(4) = 2$	0.01
2.3.4	$u'' - xu' + 2xu = 2.8$ $u(1.2) - 0.2u'(1.2) = 0.2$ $u'(2.2) = 4$	0.07	2.3.14	$u'' - u' / x + u = 2x$ $u(1.5) + 0.5u'(1.5) = 1.5$ $u'(4.5) = 5$	0.05
2.3.5	$u'' - u' + 2x^2u = x + 1$ $u(1.3) = 1$ $u(2.4) + u'(2.4) = 3.2$	0.01	2.3.15	$u'' - xu' + 2xu = x^2 + 1$ $u(1.2) + 10u'(1.2) = 2.2$ $u(3.6) = 1$	0.03
2.3.6	$u'' - 3u' + 8xu = 8$ $u(1.8) - 0.5u'(1.8) = 2$ $u(3.8) = 5$	0.1	2.3.16	$u'' + u' - x^2u = 2$ $u(1) + 0.5u'(1) = 2$ $u(4) = 4$	0.02

№ задания	Задача	$\varepsilon$	№ задания	Задача	$\varepsilon$
2.3.7	$u'' - 4xu' + 5u = 2x$ $u'(2) = 0$ $u(4) - 3u'(4) = 2$	0.07	2.3.17	$u'' - \cos(x^2)u = 2x + 1$ $u'(1) - 3u(1) = 1$ $u(3) = 10$	0.02
2.3.8	$u'' - 6xu' + 0.5u = -3$ $u(2.2) + 0.1u'(2.2) = 0.2$ $u'(4.2) = 4$	0.03	2.3.18	$u'' - 5u = e^x$ $u'(2) = 0$ $u(4) = 2$	0.2
2.3.9	$u'' - 1.5u' - 5xu = 0.5$ $2u(1.3) - 0.5u'(1.3) = 1$ $u(3.9) = 4$	0.05	2.3.19	$u'' + 2u' - 1.5xu = 2/x$ $u'(0.8) = 1$ $u(3.8) + 2u'(3.8) = 1$	0.1
2.3.10	$u'' - 3u'/x + xu = 3$ $u'(0.7) = 0.2$ $u'(3.6) + 20u(3.6) = 4$	0.03	2.3.20	$u'' - u'/4 + 2u/x = x/2$ $1.5u(1.3) - u'(1.3) = 0.6$ $u(2.6) = 2$	0.03

**Таблица исходных данных к задаче 4**

Таблица 2.3

№ задания	$a$	$b$	$c$	$k(x)$		$q(x)$		$f(x)$
				$a < x < c$	$c < x < b$	$a < x < c$	$c < x < b$	
2.4.1	0	1.5	1.125	0.5	1.4	3.2	8.5	$8x^2(2-x)$
2.4.2	0	1.8	1.275	0.4	1.4	3.2	12	$8x(2-x^2)$
2.4.3	0	2.0	1.515	0.5	1.8	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$
2.4.4	0	2.3	1.875	0.4	1.8	3.5	12.8	$10x(1.2-x^2)$
2.4.5	0	2.5	1.875	1.2	0.5	8.3	3.5	$9/(1+0.5x^2)$
2.4.6	0	1.5	1.125	0.5	1.4	3.2	8.5	$8x^2(2-x)$
2.4.7	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$

№ задания	$a$	$b$	$c$	$k(x)$		$q(x)$		$f(x)$
				$a < x < c$	$c < x < b$	$a < x < c$	$c < x < b$	
2.4.8	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
2.4.9	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5 - x)$
2.4.10	0	1.5	0.925	1.5	0.4	7.5	12	$7e^{-x}$
2.4.11	0	1.7	0.925	1.8	0.4	7.0	12	$8x/(2 + x^3)$
2.4.12	0	2	1.125	1.8	0.6	6.5	7.8	$8x(2.5 - x)$
2.4.13	0	2.2	1.125	0.5	1.8	3.5	7.8	$10x^2(2.5 - x)$
2.4.14	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5 - 0.3x^2)$
2.4.15	0	2.7	1.815	0.5	1.2	5.6	12.3	$9(x + 1/(1 + x^3))$
2.4.16	0	3	1.815	0.3	1.2	5.6	2	$9x(3.5 - x)$
2.4.17	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5 - x)$
2.4.18	0	1.8	1.215	0.4	1.2	3.2	8.5	$8x(2 - x)$
2.4.19	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5 - 0.5x^2)$
2.4.20	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5 - x)$
2.4.21	0	2.5	1.725	0.5	1.5	3.5	12.08	$10x(1.3 - 0.2x^2)$
2.4.22	0	2.8	1.725	1.5	0.4	8.3	3.5	$9e^{-x}$
2.4.23	0	3.0	2.015	1.5	0.5	8.3	2.8	$8/(1 + x^2)$
2.4.24	0	1.5	0.925	1.2	0.4	8.3	12	$7(x + 1/(x + 0.5))$
2.4.25	0	1.7	0.925	1.2	0.5	7.5	12	$7e^{-x}$
2.4.26	0	2.0	1.215	1.8	0.4	7.0	12	$8x(2.5 - x)$
2.4.27	0	2.2	1.215	1.8	0.5	6.5	12	$8x(1.5 + 0.2x^2)$
2.4.28	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5 - 0.3x^2)$

№ задания	$a$	$b$	$c$	$k(x)$		$q(x)$		$f(x)$
				$a < x < c$	$c < x < b$	$a < x < c$	$c < x < b$	
2.4.29	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5 - 0.5x^2)$
2.4.30	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5 - x)$

### Варианты заданий к лабораторной работе № 12.

Таблица 2.4

N варианта	Выполняемые задания	N варианта	Выполняемые задачи	N варианта	Выполняемые задания
1	2.2.1, 2.3.1, 2.4. 1	11	2.2.11, 2.3.6, 2.4.11	21	2.2.11, 2.3.21, 2.4.21,
2	2.2.3, 2.3.2, 2.4. 2	12	2.2.12, 2.3.6, 2.4.12	22	2.3.22, 2.3.12, 2.4.22
3	2.2.3, 2.3.3, 2.4.3,	13	2.2.7, 2.4.13, 2.3.13	23	2.3.23, 2.2.12, 2.4.23
4	2.2.4, 2.3.2, 2.4.4,	14	2.2.14, 2.3.7 2.4.14,	24	2.2.24, 2.3.12, 2.4.24
5	2.2.5, 2.2.3, 2.4.5	15	2.2.15, 2.3.8, 2.4.15	25	2.3.25, 2.2.13, 2.4.25,
6	2.2.6, 2.3.3, 2.4.6	16	2.2.16, 2.3.8, 2.4.16	26	2.2.26, 2.3.13, 2.4.26
7	2.3.7, 2.2.4, 2.4.7,	17	2.3.17, 2.2.9 2.4.17,	27	2.3.27, 2.2.14, 2.4.27,
8	2.2.8, 2.3.4, 2.4.8	18	2.2.18, 2.3.9, 2.4.18	28	2.2.28, 2.3.14, 2.4.28
9	2.3.9, 2.2.5, 2.4.9	19	2.3.19, 2.2.2, 2.4.19	29	2.2.29, 2.3.15, 2.4.29,
2	2.2.2, 2.3.5, 2.4.2	20	2.2.20, 2.3.2, 2.4.20	30	2.2.30, 2.3.15, 2.4.30

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Постановка краевой линейной задачи для ОДУ второго порядка.
2. Краевые условия первого, второго, третьего рода.
3. Порядки точности разностных схем.
4. Метод прогонки.
5. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?

## Лабораторная работа № 13

### Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

#### Цель работы:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности;
- составить алгоритмы решения уравнения теплопроводности методом сеток, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения уравнения теплопроводности по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ;
- получить численное решение заданного уравнения теплопроводности.

#### Краткие теоретические сведения

Требуется найти непрерывную на замкнутом прямоугольнике  $\bar{D}$  функцию  $u(x, t)$ , которая на  $D'$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (2.10)$$

которое при  $t = 0$  удовлетворяет начальному условию

$$u(x, 0) = s(x), \quad (2.11)$$

а при  $x = 0$  и  $x = 1$  подчиняется краевым условиям

$$u(0, t) = p(t), \quad u(1, t) = q(t), \quad (2.12)$$

где  $f(x, t)$ ,  $s(x)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$  – заданные достаточно гладкие функции, причем  $s(0) = p(0)$ ,  $s(1) = q(1)$ .

Задача (2.10) – (2.12) называется *смешанной задачей*, поскольку она содержит как *начальные условия*, так и *краевые условия*. Известно, [11] что у поставленной задачи существует единственное решение  $u(x, t)$ . Мы будем

предполагать, что это решение имеет на замкнутом прямоугольнике  $\bar{D}$  непрерывные частные производные  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial^2 u / \partial t^2$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^4 u / \partial x^4$ .

### Сетки и нормы.

Пусть  $h = 1/N$ ,  $\tau = T/M$  – шаги по  $x$  и  $t$ , где  $N, M$  – натуральные числа, а  $x_k = kh$ ,  $t_\nu = \nu\tau$ ,  $u_k^\nu = u(x_k, t_\nu)$ . Построим сетки (рис. 2.1)

$$\omega_h = \{ (x_k, t_\nu) : k = 0, 1, \dots, N, \nu = 0, 1, \dots, M \},$$

$$\omega'_h = \{ (x_k, t_\nu) : k = 1, 2, \dots, N-1, \nu = 1, 2, \dots, M \},$$

$$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega'_h.$$

Сетка  $\omega_h^*$  состоит из узлов сетки  $\omega_h$ , обозначенных на рис. 2.1 крестиками. Эти узлы расположены на трех сторонах прямоугольника  $\bar{D}$ , на которых заданы начальное и краевые условия. Сетка  $\omega'_h$  состоит из остальных узлов сетки  $\omega_h$ . Зададим для сеточных функции определенных на  $\omega_h$  или на  $\omega'_h$ , следующие нормы:

$$\|y\|_h = \max_{\omega_h} |y_k^\nu|, \quad \|y\|'_h = \max_{\omega'_h} |y_k^\nu|. \quad (2.13)$$

### Разностные схемы.

Введем разностный оператор  $\Lambda$ :

$$\Lambda y_k^\nu = - \frac{y_{k-1}^\nu - 2y_k^\nu + y_{k+1}^\nu}{h^2}. \quad (2.14)$$

Здесь под выражением  $\Lambda y_k^\nu$  подразумевается значение сеточной функции  $\Lambda u$  в точке с координатами  $(x_k, t_\nu)$ , т. е.  $(\Lambda u)_k^\nu$ .

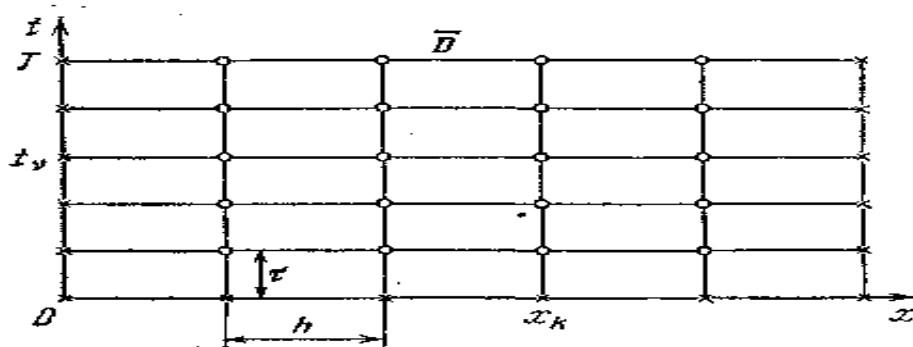


Рис. 2.1

Скобки в выражении (2.14) опущены для упрощения записи. Аналогичные упрощения в записи будем допускать и при введении других операторов. Зададим на сетке  $\omega_h^*$  тождественный оператор

$$l^h y \equiv y \quad (2.15)$$

и сеточную функцию

$$g = \begin{cases} s(x_k), & x = x_k, \quad t = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ p(t_\nu), & x = 0, \quad t = t_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, M, \\ q(t_\nu), & x = 1, \quad t = t_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, M. \end{cases} \quad (2.16)$$

Рассмотрим две разностные схемы:

$$L_1^h y_k^\nu \equiv \frac{y_k^\nu - y_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{\nu-1} = f_k^{\nu-1}, \quad (2.17)$$

$$l^h y = g, \quad (2.18)$$

$$L_2^h y_k^\nu \equiv \frac{y_k^\nu - y_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda y_k^\nu = f_k^\nu, \quad (2.19)$$

$$l^h y = g. \quad (2.20)$$

Здесь и далее индекс  $k$  изменяется от 1 до  $N-1$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, M$ . Шаблоны разностных уравнений (2.17) и (2.19) представлены соответственно на рис. (2.2) и (2.3). Обе разностные

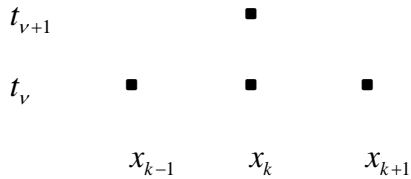


Рис. 2.2

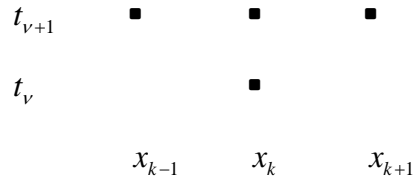


Рис. 2.3

схемы (2.17)–(2.18) и (2.19)–(2.20) называются *двухслойными*, так как шаблоны разностных уравнений (2.17) и (2.19) содержат узлы, лежащие только на двух временных *слоях* – подмножествах сетки  $\omega_h$ , отвечающих значениям времени  $t = t_{\nu-1}$  и  $t = t_\nu$ . Слой, находящийся на горизонтальной прямой  $t = t_{\nu-1}$ , называется *нижним*, а слой, находящийся на горизонтальной

прямой  $t=t_\nu$ , – *верхним*. Разностные схемы (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20) отличаются тем, что в уравнении (2.17) оператор  $\Lambda$  действует на нижнем слое, а в уравнении (2.19) оператор  $\Lambda$  вынесен на верхний слой, и, кроме того, значения правой части  $f_k^{\nu-1}=f(x_k, t_{\nu-1})$  и  $f_k^\nu=f(x_k, t_\nu)$  берутся на разных слоях. Ограничимся пока предложенным формальным описанием двух разностных схем. Их качественное различие будет описано далее в данной лабораторной работе.

### **Аппроксимация.**

Сопоставляя, с одной стороны, дифференциальное уравнение (2.10), а, с другой стороны, разностные уравнения (2.17) и (2.19), видим, что частной производной  $u'_t$  отвечает разностная производная  $\frac{y_k^\nu - y_k^{\nu-1}}{\tau}$ , а частной производной  $-u''_{xx}$  соответствует разностная производная второго порядка в направлении  $x$ , образуемая с противоположным знаком с помощью оператора  $\Lambda$  (2.14).

Пусть  $u(x,t)$  – решение задачи (2.10) – (2.12). Поскольку частные производные  $\partial^2 u / \partial t^2$  и  $\partial^4 u / \partial x^4$  по предположению непрерывны и, следовательно, ограничены на замкнутом прямоугольнике  $\bar{D}$ , то согласно (2.14),

$$\Lambda y_k^{\nu-1} = -u''_{xx}(x_k, t_{\nu-1}) + r_k^\nu, \quad (2.21)$$

$$\frac{u_k^\nu - u_k^{\nu-1}}{\tau} = u'_t(x_k, t_{\nu-1}) + \rho_k^\nu, \quad (2.22)$$

где  $k = 1, 2, \dots, M-1$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$ ,

$$|r_k^\nu| \leq c_1 h^2, \quad |\rho_k^\nu| \leq c_2 \tau, \quad (2.23)$$

а  $c_1, c_2$  – некоторые постоянные, не зависящие от  $h, \tau, k, \nu$ . В силу непрерывности частных производных  $u'_t$  и  $u''_{xx}$ , на  $\bar{D}$  решение задачи (2.10) – (2.12) удовлетворяет уравнению (2.10) на замкнутом прямоугольнике  $\bar{D}$ .

Следовательно, выполняется равенство



$$u'_t(x_k, t_{v-1}) - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) = f_k^{v-1} \quad (2.24)$$

для  $k = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $v = 1, 2, \dots, M$ , т. е., в частности, и для  $t_{v-1} = 0$ .

Согласно (2.21), (2.22), (2.23) невязка  $\psi_1$  решения  $u$  задачи (2.10) — (2.12) для разностного уравнения (2.17) имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_{1k}^v &= L_1^h y_k^v - f_k^{v-1} = \frac{u_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{v-1} - f_k^{v-1} = \\ &= u'_t(x_k, t_{v-1}) + \rho_k^v - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) + r_k^v - f_k^{v-1} = r_k^v + \rho_k^v. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.23) получаем

$$\|\Psi_1\|'_h = \max_{\omega_h^*} |\Psi_{1k}^v| = \max_{1 \leq v \leq M} \max_{1 \leq k \leq N-1} |r_k^v + \rho_k^v| = O(h^2 + \tau). \quad (2.25)$$

Аналогично находим

$$\|\Psi_2\|'_h = O(h^2 + \tau), \quad (2.26)$$

где  $\Psi_2$  — невязка решения  $u$  задачи (2.10) — (2.12) для разностного уравнения (2.19).

Таким образом, оба разностных уравнения (2.17) и (2.19) аппроксимируют дифференциальное уравнение (2.10) на решении  $u$  задачи (2.10) — (2.12) со вторым порядком по  $h$  и с первым порядком по  $\tau$ .

Дополнительные условия, т. е. начальное условие (2.11) и краевые условия (2.12), аппроксимируются на сетке  $\omega_h^*$  с помощью тождественного оператора  $l^h$  условием (2.18) или соответственно условием (2.20) точно, т. е. невязка решения  $u$  задачи (2.10) — (2.12) для условий (2.18) и (2.20) равна нулю на сетке  $\omega_h^*$ .

Итак, обе разностные схемы (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20), с точки зрения аппроксимации задачи (2.10) — (2.12), обладают одинаковой по порядку относительно  $h$  и  $\tau$  гарантируемой точностью.

### Вычислительные алгоритмы

Разрешив разностное уравнение (2.17) относительно  $y_k^v$ , получим

$$y_k^v = \frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^{v-1} + (1 - \frac{2\tau}{h^2}) y_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^{v-1} + \mathcal{F}_k^{v-1}. \quad (2.27)$$

Поскольку  $y_k^0, y_0^\nu, y_N^\nu, k = 1, 2, \dots, N-1, \nu = 0, 1, \dots, M$  известны (они задаются на  $\omega_h^*$  условием (2.18)), решение разностной схемы (2.17), (2.18) находится по формуле (2.27) явно, слой за слоем. Поэтому разностная схема (2.17), (2.18) называется *явной*.

Разностное уравнение (2.19) с учетом (2.14) может быть записано в виде

$$\frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^\nu - (1 + \frac{2\tau}{h^2}) y_k^\nu + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^\nu = -y_k^{\nu-1} - \mathcal{F}_k^\nu. \quad (2.28)$$

Согласно (2.15), (2.16), (2.20) имеем также

$$y_0^\nu = \rho_\nu, \quad y_N^\nu = q_\nu \quad (2.29)$$

Таким образом, если  $y_k^{\nu-1}, k = 1, 2, \dots, N-1$ , известны (в частности,  $y_k^0, k = 1, 2, \dots, N-1$ , заданы условием (2.20)), то для нахождения решения разностной схемы (2.19), (2.20) на следующем  $\nu$ -м слое нужно решить трехточечное разностное уравнение (2.28) с краевыми условиями первого рода (2.29), т. е. разностную краевую задачу. Поэтому разностная схема (2.19), (2.20) называется *неявной*.

Для нахождения разностного решения на  $\nu$ -м слое может быть применен метод прогонки, [2] поскольку для задачи (2.28), (2.29) достаточные условия выполнены (проверьте, положив  $k = j, y_k^\nu = z_j, y_{k\pm 1}^\nu = z_{j\pm 1}, -y_k^{\nu-1} - \mathcal{F}_k^\nu = F_j$ ). При этом число выполняемых арифметических действий для нахождения разностного решения на одном слое имеет величину порядка  $O(N)$ , т. е. по порядку относительно  $N$  не больше, чем при применении явной формулы (2.27) для схемы (2.17), (2.18).

### **Устойчивость и сходимость**

Так как дополнительные условия (2.11), (2.12) аппроксимируются в разностных схемах (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20) на сетке  $\omega_h^*$  точно, то нам будет достаточно исследовать устойчивость только по правой части. Остановимся сначала на разностной схеме (2.17), (2.18). Для исследования ее

устойчивости по правой части нужно рассмотреть решение  $z$  вспомогательной разностной задачи:

$$L_1^h z_k^\nu \equiv \frac{z_k^\nu - z_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda z_k^{\nu-1} = \xi_k^\nu, \quad (2.30)$$

$$l^h z = 0, \quad (2.31)$$

где  $\xi$  — произвольная заданная на  $\omega'_h$  сеточная функция.

Разрешив разностное уравнение (2.30) относительно  $z_k^\nu$ , аналогично (2.27) получаем

$$z_k^\nu = \frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^{\nu-1} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) z_k^{\nu-1} + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^{\nu-1} + \tau \xi_k^\nu, \quad (2.32)$$

где  $K = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, M$ .

Кроме того, в соответствии с (2.22) имеем

$$\begin{aligned} z_k^0 &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \\ z_0^\nu &= z_N^\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Предположим, что  $\tau$  и  $h$  удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\tau}{h^2} + \left|1 - \frac{2\tau}{h^2}\right| + \frac{\tau}{h^2} = 1.$$

Отсюда и из (2.32), (2.33) вытекает неравенство

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^\nu| \leq \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^{\nu-1}| + \tau \max_{1 \leq k \leq N-1} |\xi_k^\nu|, \quad (2.35)$$

и поскольку  $\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^0| = 0$ , то

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^\nu| \leq \nu \tau \|\xi\|_h'.$$

Следовательно,

$$\|z\|_h = \max_{0 \leq \nu \leq M} \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^\nu| \leq M \tau \|\xi\|_h' = T \|\xi\|_h'$$

или, окончательно,

$$\|z\|_h \leq T \|\xi\|_h' . \quad (2.36)$$

Полученное неравенство (2.36) для решения задачи (2.30), (2.31), в котором постоянная  $T$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ , а также от функции  $\xi$ , означает устойчивость разностной схемы (2.17), (2.18) по правой части при условии (2.34). Можно доказать, что нарушение условия (2.34) может привести к нарушению устойчивости разностной схемы (2.17), (2.18). В частности, если  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , а  $\tau/h^2 \geq \text{const} > 1/2$ , то разностная схема (2.17), (2.18) будет неустойчива.

Для исследования устойчивости разностной схемы (2.19), (2.20) зададим на  $\omega_h'$  произвольную сеточную функцию  $\xi$  и рассмотрим разностную задачу

$$L_2^h z_k^\nu \equiv \frac{z_k^\nu - z_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda z_k^\nu = \xi_k^\nu , \quad (2.37)$$

$$l^h z = 0 , \quad (2.38)$$

не накладывая никаких ограничений на соотношение шагов  $\tau$  и  $h$ . Задачу (2.37), (2.38) можно аналогично (2.28), (2.29) записать в следующем виде:

$$\frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^\nu - (1 + \frac{2\tau}{h^2}) z_k^\nu + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^\nu = - z_k^{\nu-1} - \tau \xi_k^\nu , \quad (2.39)$$

$$z_0^\nu = 0 , \quad z_N^\nu = 0 . \quad (2.40)$$

Если  $z_k^{\nu-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , известны (в частности, по условию (2.38)  $z_k^0 = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ), то, как отмечалось ранее, для разностной задачи (2.39), (2.40), где  $\nu$  фиксировано, выполнены условия (2.12). Следовательно, по лемме эта задача однозначно разрешима на  $\nu$ -м слое.

Очевидно, имеется такое  $k'$ ,  $0 < k' < N$ , что

$$|z_{k'}^\nu| = \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^\nu| . \quad (2.41)$$

Так как  $|z_{k'-1}^\nu| \leq |z_{k'}^\nu|$ ,  $|z_{k'+1}^\nu| \leq |z_{k'}^\nu|$ , то

$$\left| z_{k'}^v \right| \leq \left| z_{k'}^v \left( 1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) - \frac{\tau}{h^2} (z_{k'-1}^v + z_{k'+1}^v) \right|$$

и, следовательно, согласно (2.39)

$$\left| z_{k'}^v \right| \leq \left| z_{k'}^{v-1} \right| + \tau \left| \xi_{k'}^v \right|.$$

Из полученного неравенства с учетом (2.41) вытекает неравенство (2.35) и, в конечном счете, оценка (2.36), что и означает устойчивость по правой части разностной схемы (2.19), (2.20) при любом соотношении шагов  $\tau$  и  $h$ .

Итак, поскольку дополнительные условия (2.11), (2.12) аппроксимируются на  $\omega_h^*$  точно, то из аппроксимации (см. (2.25), (2.26)) и установленной устойчивости по правой части в силу основной теоремы теории разностных схем вытекает сходимость решений разностных схем (2.17), (2.18) и (2.19), (2.20) к решению задачи (2.10) – (2.12) со вторым порядком по  $h$  и с первым порядком по  $\tau$ , т. е.

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau). \quad (2.42)$$

При этом в случае явной схемы (2.17), (2.18) предполагается выполнение условия (2.34).

**Определение.** Разностная схема, устойчивая при любом соотношении шагов  $\tau$  и  $h$ , называется *абсолютно устойчивой*, а устойчивая при ограничениях на  $\tau$  и  $h$  – *условно устойчивой*.

Недостатком разностной схемы (2.17), (2.18) является ее условная устойчивость (ограничение (2.34) является жестким для шага  $\tau$  по времени). Преимущество – простота счета по явной формуле (2.27) и возможность распространения на задачу Коши (когда условие (2.11) задано на всей оси  $x$ , а краевые условия (2.12) отсутствуют). В случае смешанной задачи (2.10) – (2.12) предпочтение отдают неявной абсолютно устойчивой разностной схеме (2.19), (2.20). Разностная краевая задача (2.28), (2.29) при переходе на каждый следующий слой решается методом прогонки весьма эффективно.

## ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №13

**Задача 1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_A, \quad u(b) = U_B. \end{cases}$$

**Порядок решения задачи:**

1. Представить коэффициент теплопроводности  $K(x)$  в виде функции двух переменных  $x$  и  $c$ :  $K(x) = K(x, c)$ , где  $c$  – параметр.
2. При заданных в индивидуальном варианте функциях  $K(x)$  (что соответствует  $K(x, 1)$ ),  $f(x)$  и значениях  $U_A$ ,  $U_B$  найти аналитическое решение.
3. Изменяя значения параметра  $c$  в коэффициенте теплопроводности, найти решения задачи для наборов параметров 1–3 (табл. 2.5).
4. На одном чертеже построить графики найденных решений. Сравнить полученные результаты.
5. Аналогично п. 2, найти аналитическое решение для четвертого набора параметров. На одном чертеже построить графики решений для наборов один и четыре. Сравнить полученные результаты.
6. Изменяя граничные условия  $U_A$ ,  $U_B$ , построить решения для наборов параметров 5–7.

Таблица наборов параметров

Таблица 2.5

Параметры	1 набор	2 набор	3 набор	4 набор	5 набор	6 набор	7 набор
$c$	1	2	0.1	1	1	1	1
$K(x)$	$k(x)$	$ck(x)$	$ck(x)$	$1/k(x)$	$k(x)$	$k(x)$	$k(x)$
$U_A$	$ua$	$ua$	$ua$	$ua$	$-ua$	$ua$	$-ua$
$U_B$	$ub$	$ub$	$ub$	$ub$	$ub$	$-ub$	$-ub$

**Задача 2. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности  $k(x)$  и плотности источников тепла  $f(x)$ :**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = U_A, \quad u(b) = U_B. \end{cases}$$

## ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

Составить разностную схему второго порядка точности для решения указанной задачи.

1. Взять исходные данные из первого набора параметров для первой задачи.
2. Шаг сетки положить равным  $h = (b - a)/150$ .
3. Промоделировать процесс в зависимости от коэффициента теплопроводности  $k(x)$ :

4а. Полагать, что стержень состоит из двух материалов с различными коэффициентами теплопроводности  $k(x)$ :

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & a \leq x \leq 0.5 \cdot (b + a) \\ k_2, & 0.5(b + a) < x \leq b \end{cases}, \text{ при } \text{ а) } k_1 < k_2; \quad \text{ б) } k_1 > k_2.$$

4б. Пусть стержень состоит из трех материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & a \leq x \leq a + (b - a)/3, \\ k_2, & a + (b - a)/3 \leq x \leq a + 2(b - a)/3, \\ k_3, & a + 2(b - a)/3 < x \leq b. \end{cases}$$

- при      а)  $k_1 < k_2 < k_3$ ;                      б)  $k_1 > k_2 > k_3$ ;  
             в)  $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = k$ ;              г)  $k_1 = 20k, k_2 = k, k_3 = 20k$ .

5. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции  $f(x)$ , предполагая, что  $f(x)$  – точечный источник

тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом:  $f(x) = c \cdot \delta(x - x_0)$ , где  $c$  – некоторая константа (мощность источника);  $\delta(x)$  – дельта-функция;  $x_0$  – точка из отрезка  $[a, b]$ , в которой располагается источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

- а) точечный источник поставлен в середину отрезка  $[a, b]$ ;
- б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;
- в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;
- г) предложить свой вариант расположения источников.

**Задача 3. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи – коэффициента теплопроводности и начальной температуры:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)(1 - e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = U_A, \quad u(l, t) = U_B, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

### ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Найти приближенное решение задачи с шагами  $\tau = 0.05$  и  $h = 0.01$ , используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях  $t = 0, 5\tau, 20\tau, 200\tau$ .
2. Экспериментально определить момент времени  $t$ , при котором происходит установление процесса (визуально).
3. Произвести анимацию процесса установления.
4. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв другие функции  $\phi(x)$  (согласованные с граничными условиями).



Таблица исходных данных к задаче 3

Таблица 2.6

№задания	$k(x)$	$f(x)$	$a$	$U_A$	$b$	$U_B$
2.3.1	$x^3$	$10x^{1/4}$	1	3	2	0
2.3.2	$x$	$\sqrt{x} + 4$	0.5	0	1.5	5
2.3.3	$x^{-2}$	$-2x^2 - 2x$	0.5	2	1.5	6
2.3.4	$x^3$	$1 + x^{1/3}$	0.2	4	1.2	1
2.3.5	$x$	$x^3 + 2$	0.1	2	1.1	4
2.3.6	$e^x$	$e^{2x}$	0.5	1	1.5	5
2.3.7	$x$	$3x + x^2$	1	3	2	3
2.3.8	$x$	$x + x^{\frac{1}{3}}$	0.1	6	0.8	0.6
2.3.9	$\cos(x)$	$10\sin(x)$	0.1	3	0.8	1
2.3.10	$x$	$\ln(x)$	0.1	1	0.6	5
2.3.11	$\cos(x)$	$10\cos(x)$	1	2	1.5	1
2.3.12	$x$	$x^{-1}$	1	3	2	3
2.3.13	$x^{-2}$	$6x^2 - 3x$	1	-2	2.2	2
2.3.14	$e^x$	$x + e^x$	1	2	2.5	-2
2.3.15	$x^{-1/3}$	$x + \sqrt{x}$	1.5	3	2.5	-3
2.3.16	$x^3$	$10x^{-1/4}$	0.1	3	1.1	0
2.3.17	$x^{-1}$	$4 - \sqrt{x}$	1.5	-2	2.5	-4
2.3.18	$x^2$	$2x^2 + 2x$	0.5	2	1.6	6
2.3.19	$x^{-3}$	$4x^3 + 6$	0.2	4	1.2	1
2.3.20	$x^{-2}$	$5x^4 - 5$	1.5	-1	2.5	4
2.3.21	$e^x$	$2 - e^{2x}$	0.3	-1	2.3	1
2.3.22	$x^{-1}$	$x$	1	3	2	3
2.3.23	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$	0.5	1	1.5	1

№ задания	$k(x)$	$f(x)$	$a$	$U_A$	$b$	$U_B$
2.3.24	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$	0.5	2	1.3	2
2.3.25	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$	0.2	-1	1.2	-1
2.3.26	$x^{-1}$	$3\ln(x)$	0.3	3	2.3	1
2.3.27	$x^{-1}$	$2x^2 - x$	2	-4	3	2
2.3.28	$x^{-2}$	$3x^2 + 4$	1.2	-4	2.4	1
2.3.29	$x^{1/2}$	$15(x - \sqrt{x})$	0.5	1	1.5	1
2.3.30	$e^{-x}$	$3 + e^{3x}$	0.3	3	2.3	1

**Задача 4. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

В задаче взять входные данные  $ua, ub$  из задачи 3. Использовать явную разностную схему. Взять  $h = (b - a)/10$ ; шаг  $\tau$  выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от  $x$  при  $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots, T$ .

**УКАЗАНИЕ.**

Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид  $\tau \leq 0.5(h^2 / k)$ .

**Таблица исходных данных к задаче 4**

Таблица 2.7

Номер задания	$a$	$b$	$k$	$T$	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x, t)$
2.4.1	0	1	1	0.5	0	0	0	$x$
2.4.2	-1	1	0.5	0.4	$ x $	1	1	0
2.4.3	0	1	0.1	0.5	$x(1-x)$	$5t$	$5t$	0
2.4.4	0	2	1	0.2	0	0	0	$x$
2.4.5	0	1	0.1	0.5	$x$	$2\sin(t)$	$\cos(t)$	0
2.4.6	-1	1	2	0.1	$x^2$	1	1	0
2.4.7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x(1-x)$
2.4.8	-1	1	0.5	0.4	$1-x^2$	0	0	$x$
2.4.9	0	1	0.1	0.5	$x^2$	0	1	$t$
2.4.10	-1	1	0.2	1	0	0	0	$1-x^2$
2.4.11	0	1	1	0.05	$ x-0.5 $	0.5	0.5	0
2.4.12	-1	1	0.5	0.4	$x^2$	1	1	$x$
2.4.13	0	1	0.2	0.25	$\sin(x)$	0	$\sin(1+2t)$	$1-x$
2.4.14	0	2	1	0.2	$\sin(x)$	0	$\sin(2)$	$2-x$
2.4.15	0	1	1	0.05	1	$e^t$	$e^{10t}$	0
2.4.16	0	2	1	0.2	1	$e^{10t}$	$e^t$	0
2.4.17	0	1	0.5	0.1	1	$e^{-t}$	$e^{-10t}$	2
2.4.18	0	2	0.5	0.4	1	$e^{-t}$	$e^{-5t}$	2
2.4.19	0	1	0.2	0.2	$1-x^2$	1	0	0
2.4.20	0	2	2	0.1	0	0	$10t$	1
2.4.21	0	1	0.5	0.1	0	0	$10t$	$t$
2.4.22	0	2	1	0.2	1	$e^{-5t}$	$\cos(t)$	1
2.4.23	0	1	0.4	0.1	$x$	0	1	1
2.4.24	-1	1	1	0.2	$1-x^2$	0	$5t$	0

Номер задания	$a$	$b$	$k$	$T$	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
2.4.25	0	1	0.4	0.1	$1-x$	1	0	2
2.4.26	0	2	1	0.2	$x$	0	2	$x$
2.4.27	0	1	0.25	0.2	$x^3$	0	1	5
2.4.28	0	2	1	0.2	$x$	0	2	$x$
2.4.29	0	1	0.5	0.1	0	0	$e^{10t} - 1$	1
2.4.30	-1	1	0.2	1	$1- x $	0	0	1

### Схема выбора вариантов к лабораторной работе 13

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	2.3.1, 2.4.1	11	2.3.11, 2.4.6	21	2.3.21, 2.4.11
2	2.3.2, 2.4.2	12	2.3.12, 2.3.6	22	2.3.12, 2.4.22
3	2.3.3, 2.4.3	13	2.3.13, 2.4.13	23	2.3.23, 2.4.12
4	2.3.4, 2.4.4	14	2.3.14, 2.4.7	24	2.3.24, 2.4.12
5	2.3.5, 2.4.5	15	2.3.15, 2.4.8	25	2.3.25, 2.4.13
6	2.3.3, 2.4.6	16	2.3.16, 2.4.16	26	2.3.26, 2.4.13
7	2.3.7, 2.4.7	17	2.3.17, 2.4.9	27	2.3.27, 2.4.14
8	2.3.8, 2.4.8	18	2.3.18, 2.4.19	28	2.3.28, 2.4.14
9	2.3.5, 2.4.9	19	2.3.19, 2.4.2	29	2.3.9, 2.4.15
10	2.3.5, 2.4.2	20	2.3.20, 2.4.2	30	2.3.30, 2.4.30

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для нахождения решения стационарного уравнения

теплопроводности  $-\frac{d}{dx}\left(k(x,c)\frac{du}{dx}\right) = f(x)$  дважды проинтегрируем его.

Первое интегрирование дает следующий результат:

$$u'(x) = -\frac{1}{k(x,c)} \int f(x) dx + c_1.$$

Проинтегрируем полученное соотношение, еще раз и получим:

$$u(x) = -\int \left( \frac{\int f(x)dx}{k(x,c)} \right) dx + c_1 x + c_2.$$

Константы  $c_1, c_2$  находятся из граничных условий:

$$u(a) = ua, \quad u(b) = ub.$$

### Пример решения задачи 2.1

Пусть  $k(x, c) = cx$ .

$$-\frac{d}{dx} \left( cx \frac{du}{dx} \right) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}},$$

$$u(0.5) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Проинтегрируем уравнение  $cxu' = -x^{\frac{4}{3}} + c_1$ . Повторное интегрирование

$$\text{дает соотношение: } u(x) = -\frac{3}{4c} x^{\frac{4}{3}} + \frac{c_1}{c} \ln x + c_2.$$

Найдем константы  $c_1$  и  $c_2$ , при условии, что  $c = 1$ :

$$u(1) = -\frac{3}{4} + c_2 = 2; \quad c_2 = 2.75 \quad u(0.5) = -\frac{3}{4} (0.5)^{4/3} + c_1 \cdot \ln(0.5) + 2.75 = 1,$$

поэтому  $c_1 = 1.780827$ .

Окончательно решение примет вид:

$$u(x, k(x, 1)) = -\frac{3}{4} x^{4/3} + 1.780827 \ln x + 2.75.$$

Для проверки можно подставить найденное решение в исходное уравнение и проверить выполнение граничных условий.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Понятие невязки решения задачи.
2. Краевые условия второго, первого, третьего рода.
3. Порядки точности разностных схем.
4. Явные и неявные разностные схемы.
5. Что понимают под сходимостью процесса решения задачи? Ответ поясните на примере решенной задачи.

## Лабораторная работа № 14.

### Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей на примере уравнения теплопроводности.

**Цель работы** - ознакомиться с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий (ГУ) Неймана) в методе конечных разностей (на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности).

#### Постановка задачи

Задачи, которые будут использоваться для анализа свойств численных решений с ГУ второго рода, формулируются так: в стержне длиной  $L$  с теплоизолированной боковой поверхностью торец  $x = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $T_0$  (ГУ первого рода), а торец  $x = 1$  – теплоизолирован (ГУ второго рода); температуропроводность материала стержня постоянна и равна  $a$ ; в начальный момент времени  $t = 0$  стержень нагрет до температуры  $T_{\text{нач}}(x)$  (координата  $x$  отсчитывается от левого торца стержня (рис. 2.4)). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т. е. найти функцию  $T(x, t)$  для  $0 < x \leq L$  и  $t > 0$ .

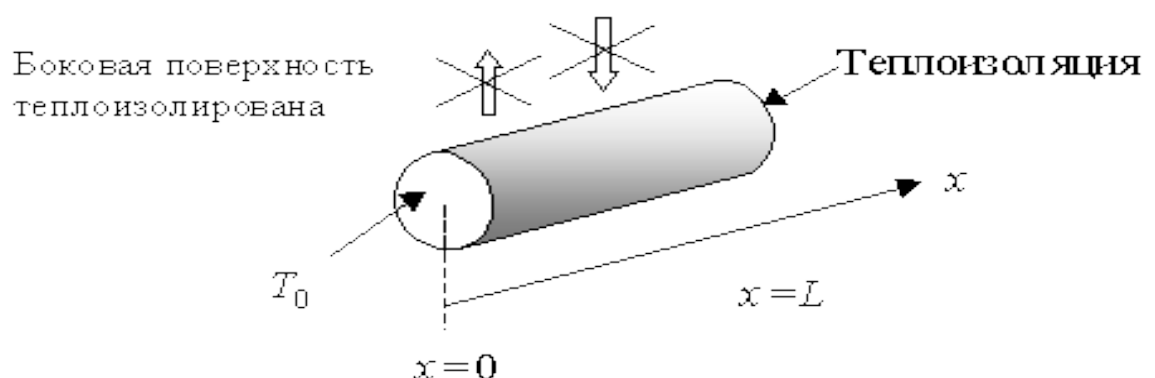


Рис. 2.4.

Стержень круглого сечения нарисован условно – сечение может иметь любую форму, и если боковая поверхность теплоизолирована, то температура любой точки стержня может зависеть только от координаты  $x$  и не будет зависеть от координаты поперек стержня).

Искомая функция  $T(x,t)$  является решением одномерного уравнения теплопроводности, которое в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T.$$

Граничные условия:

$$T(0,t) = T_0, \quad \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{для } 0 < t \leq T$$

(на границе  $x = 0$  граничное условие первого рода, а при  $x = 1$  – второго).

Начальные условия:  $T(x,0) = T_{\text{нач}}(x)$  при  $0 < x < 1$ .

### Способы реализации ГУ второго рода

Методы конечных разностей, применяемые для численного решения задач с граничными условиями второго (и третьего) рода, не имеют *никаких принципиальных отличий* от методов, применяемых для задач с ГУ первого рода. Для решения поставленной задачи методом конечных разностей необходимо представить граничное условие второго рода в «естественном» для этого метода виде, т. е. с использованием численного решения (величин  $T_i^n$ ). Иными словами, производную в граничном условии надо заменить ее разностной аппроксимацией, а это можно сделать многими способами. Рассмотрим только два способа реализации ГУ второго рода, которые будут использованы в расчетах. При рассмотрении используем ту же равномерную сетку, что и в лабораторной работе №13.

**Первый способ.** Приблизенно значение производной при  $x = 1$  можно записать, используя аппроксимацию производной по  $x$  левой разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_N^n - T_{N-1}^n}{h}, \quad (2.43)$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n - T_{N-1}^n = 0. \quad (2.44)$$

Численное решение ДУ с граничным условием второго рода при  $x = 1$  происходит почти так же, как и с ГУ первого рода: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все  $T_i^n$  при,  $1 \leq i \leq N-1$ , а значение  $T_N^n$  (на границе) вычисляется по формуле (2.44). Это и есть первый способ реализации граничного условия второго рода. Следует обратить внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной левой разностью (формула (2.43)) имеет первый порядок точности по  $h$ , т. е.  $O(h)$ .

**Второй способ** можно пояснить на примере явной разностной схемы аппроксимации уравнения теплопроводности. Алгоритм явной схемы можно записать так:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\tau}{h^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (2.45)$$

Из этого выражения следует, что для вычисления величины  $T_1^0$  требуется какая-то величина  $T_{N+1}^n$ , которая *не входит* в расчетную область. Однако ее можно вычислить, используя аппроксимацию производной в граничном условии центральной разностью:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h}, \quad (2.46)$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n = T_{N-1}^n. \quad (2.47)$$



Способ реализации граничного условия здесь несколько иной: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все  $T_i^{n+1}$  при,  $1 \leq i \leq N-1$ , а при вычислении  $T_1^0$  в разностной схеме заменяются  $T_{N+1}^n$  на  $T_{N-1}^n$  (используется равенство (2.45)).

Обратите внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной центральной разностью (формула (2.46)) имеет второй порядок точности по  $h$ , т.е.  $O(h^2)$ . Рассмотренному выше второму способу реализации ГУ второго рода можно дать другую интерпретацию, которая может оказаться более наглядной и полезной в сложных задачах. Эта другая интерпретация связана с введением «фиктивных» узлов (узлов вне зоны расчета). На рис.(2.5) показаны такие узлы (линия узлов, находящихся на

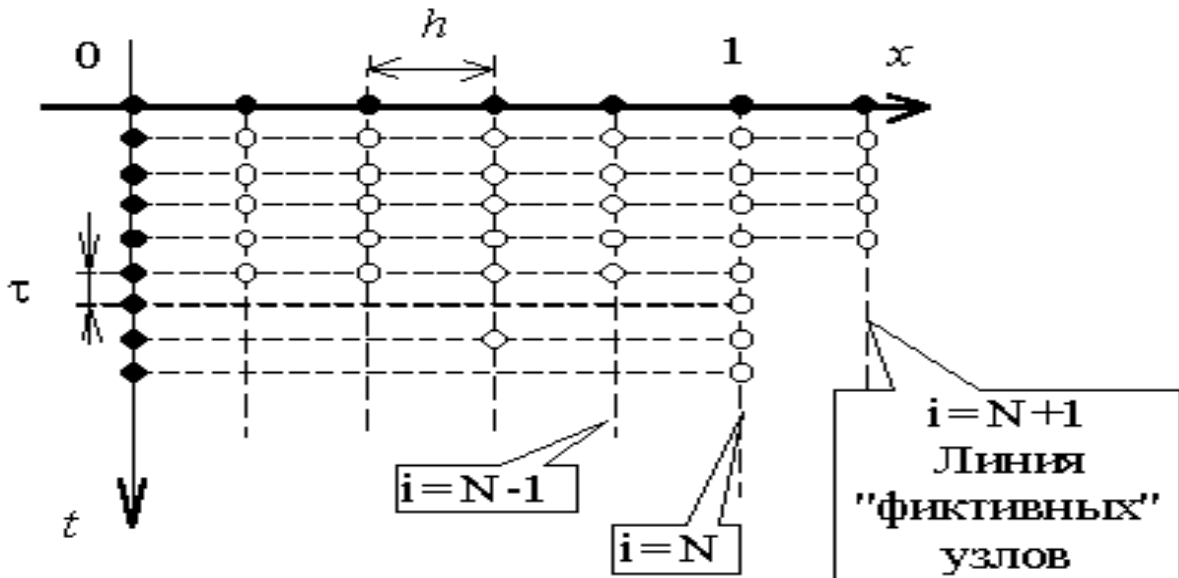


рис.(2.5)

расстоянии  $h$  от границы, на которой поставлено ГУ второго рода).

Если температуру в этих узлах задавать равной значениям температуры в соответствующих симметричных относительно границы узлах (согласно равенству (2.45)), то для расчета будет использоваться одна и та же разностная схема для всех узлов (включая и узлы при  $i=N$ ). В работе должна быть предусмотрена возможность численного решения уравнения теплопроводности с помощью неявной и явной разностных схем.

Возможность использования различных граничных и начальных условий ограничена задачами, которые позволяют в достаточной мере познакомиться с основными способами реализации ГУ второго рода и их свойствами.

Шаги сетки выбираются также как и в лабораторной работе №13. Расчетная область по времени, реализованная в программе, составляет во всех случаях отрезок  $[0, 1]$ . Результаты расчета выводятся в виде таблицы (2.10). После расчета необходимо построить такие же, как в лабораторной работе №13, графики решений.

### ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №14

**ЗАДАЧА1. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(a,t) = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(b,t) = g_2(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

используя явную и неявную разностные схемы. Исходные данные указаны в табл. 2.9. Изобразить графики зависимости приближенного решения от  $x$  при  $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots T$ .

**Таблица исходных данных к задаче 1**

Таблица 2.9

№	$a$	$b$	$k$	$T$	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x,t)$
1	0	1	1	0.5	0	0	0	$x$
2	-1	1	0.5	0.4	$ x $	1	1	0
3	0	1	0.1	0.5	$x(1-x)$	$5t$	$5t$	0
4	0	2	1	0.2	0	0	0	$x$
5	0	1	0.1	0.5	$x$	$2\sin(t)$	$\cos(t)$	0
6	-1	1	2	0.1	$x^2$	1	1	0
7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x(1-x)$

№	$a$	$b$	$k$	$T$	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x, t)$
8	-1	1	0.5	0.4	$1-x^2$	0	0	$x$
9	0	1	0.1	0.5	$x^2$	0	1	$t$
10	-1	1	0.2	1	0	0	0	$1-x^2$
11	0	1	1	0.05	$ x-0.5 $	0.5	0.5	0
12	-1	1	0.5	0.4	$x^2$	1	1	$x$
13	0	1	0.2	0.25	$\sin(x)$	0	$\sin(1+2t)$	$1-x$
14	0	2	1	0.2	$\sin(x)$	0	$\sin(2)$	$2-x$
15	0	1	1	0.05	1	$e^t$	$e^{10t}$	0
16	0	2	1	0.2	1	$e^{10t}$	$e^t$	0
17	0	1	0.5	0.1	1	$e^{-t}$	$e^{-10t}$	2
18	0	2	0.5	0.4	1	$e^{-t}$	$e^{-5t}$	2
19	0	1	0.2	0.2	$1-x^2$	1	0	0
20	0	2	2	0.1	0	0	$10t$	1
21	0	1	0.5	0.1	0	0	$10t$	$t$
22	0	2	1	0.2	1	$e^{-5t}$	$\cos(t)$	1
23	0	1	0.4	0.1	$x$	0	1	1
24	-1	1	1	0.2	$1-x^2$	0	$5t$	0
25	0	1	0.4	0.1	$1-x$	1	0	2
26	0	2	1	0.2	$x$	0	2	$x$
27	0	1	0.25	0.2	$x^3$	0	1	5
28	0	2	1	0.2	$x$	0	2	$x$
29	0	1	0.5	0.1	0	0	$e^{10t}-1$	1
30	-1	1	0.2	1	$1- x $	0	0	1

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид  $\tau \leq 0.5(h^2/k)$ .

## ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

Для обеих разностных схем выполните расчеты, результаты которых позволят определить порядок сходимости для первого способа реализации ГУ второго рода. Результаты расчетов для *каждой* схемы запишите в виде таблицы 2.10.

$N$	$\tau$	$s(t=t_{n1})$	$s(t=t_{n2})$	Макс. мод. при $t=t_{n1}$	Макс. мод. при $t=t_{n2}$

В двух первых колонках находятся задаваемые вами параметры сетки, а в остальных – числа из таблиц результатов расчета. Кроме указанных расчетов, дополнительно сделать такие же расчеты для явной схемы при выполнении соотношения  $\tau = h^2/6$ .

По результатам всех расчетов определить порядки сходимости по  $h$  и  $\tau$  примененных разностных схем. Построить в логарифмическом масштабе графики зависимостей ошибки численных решений от  $h$  или  $\tau$ . Повторить все предыдущие расчеты и задания для аппроксимации ГУ второго рода вторым способом. Обратить внимание на то, как сильно влияет на точность решения понижение порядка точности аппроксимации лишь в одном (граничном) узле сетки. Вспомните, что и явная и неявная схемы имеют второй порядок сходимости по  $h$ .

По результатам всех этих расчетов проанализировать влияние порядка точности аппроксимации ГУ второго рода на порядок сходимости.

**Отчет.** В отчете должны быть приведены таблицы расчетов, построенные вами графики для определения порядка сходимости и сделаны соответствующие выводы о свойствах примененных способов

аппроксимации ГУ второго рода (с точки зрения их влияния на порядок сходимости и точность численного решения).

Обратите внимание на четыре замечания.

**Первое** – касается выбора  $N$  и  $\tau$ . Запись погрешности аппроксимации в виде  $O(\tau, h^2)$  (например, для неявной схемы) является чисто условной и не означает, что для постоянного  $\tau$  при уменьшении  $h$  вдвое погрешность аппроксимации уменьшится в 4 раза всё зависит от соотношения величин  $\tau$  и  $h$ ). Поэтому при исследовании порядка сходимости приходится одновременно изменять и  $h$  и  $\tau$ , ориентируясь на формулы для погрешности аппроксимации. Например, если Вы в первом расчете для неявной схемы задали величины  $N$  и  $\tau$ , а во втором расчете решили увеличить  $N$  вдвое, то  $\tau$  надо уменьшить в 4 раза, тогда можно ожидать, что и ошибка численного расчета уменьшится в 4 раза. Для схемы Кранка-Николсона – другое соотношение (в соответствии с  $O(\tau^2, h^2)$ ) и, даже при его выполнении, исследование порядка сходимости может дать только приближенный результат – может повлиять слагаемое с  $h^4$ ).

**Второе** замечание касается выбора моментов времени  $t_{n1}$  и  $t_{n2}$ . Вы можете выбрать их произвольно. Но они, разумеется, должны быть одинаковыми для всех расчетов по данной разностной схеме.

**Третье** замечание: число расчетов по одной схеме должно быть не меньше трёх (желательно 4 – 5).

**Четвёртое**. Не забывайте посмотреть на графики, которые строит программа – они позволяют наглядно видеть сходство и различие численного и точного решений.

Кроме указанных расчетов для всех трёх разностных схем, дополнительно сделайте такие же расчеты для явной схемы при выполнении соотношения  $\tau = h^2/6$ . Из ф-лы видно, что в этом случае главная часть погрешности аппроксимации "равна нулю". Естественно, что при  $\tau = h^2/6$  главной частью погрешности аппроксимации становится следующее слагаемое в разложении (пропорциональное шестой производной по координате), имеющее порядок  $O(\tau^2, h^4)$ . По результатам всех четырех групп расчетов определите порядки сходимости по  $h$  и  $\tau$  всех разностных схем. Желательно сделать это по обеим характеристикам ошибки численного решения – и по среднеквадратичному отклонению и по максимуму модуля разности. Постройте в логарифмическом масштабе графики зависимостей ошибки численных решений от  $h$  или  $\tau$ .

### ***КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ***

1. Способы реализации ГУ второго рода.
2. Краевые условия первого, второго, третьего рода.
3. Порядки точности разностных схем.
4. Метод прогонки.
5. Условие устойчивости для явной разностной схемы.
6. Из каких соображений выбирают шаг сетки в методе конечных разностей?

## Лабораторная работа №15.

### Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

#### Цель выполнения задания:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения Пуассона;
- составить алгоритмы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ;
- получить численное решение заданной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

#### Краткие теоретические сведения

Пусть  $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  – открытый квадрат,  $\Gamma$  – его граница,  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  – замкнутый квадрат,  $f(x, y)$  – заданная на  $\bar{D}$  достаточно гладкая функция. Задача Дирихле состоит в следующем. Требуется найти непрерывную на  $\bar{D}$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую на открытом квадрате  $D$  уравнению Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) \quad (2.48)$$

и принимающую на границе квадрата значение равное нулю, т. е.

$$u(x, y) = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2.49)$$

Задача Дирихле (2.48), (2.49) имеет единственное решение  $u(x, y)$ . Положим  $h = l/N$ ,  $x_k = kh$ ,  $y_m = mh$ ,  $f_{km} = f(x_k, y_m)$ . Построим сетки

$$\omega_h = \{(x_k, y_m): k, m = 0, 1, \dots, N\},$$

$$\omega'_h = \{(x_k, y_m): k, m = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega_h'$  ( $\omega_h^*$  — множество узлов, лежащих на  $\Gamma$ ). Зададим нормы

$$\|v\|_h = \max_{\omega_h} |v_{km}|, \quad \|v\|'_h = \max_{\omega_h'} |v_{km}|.$$

**Разностная схема:**

$$\Delta v_{km} = f_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.50)$$

$$v_{km} = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h^*, \quad (2.51)$$

Разностное уравнение (2.50) в более подробной записи имеет вид

$$-\frac{v_{k-1,m} - 2v_{km} + v_{k+1,m}}{h^2} - \frac{v_{k,m-1} - 2v_{km} + v_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}. \quad (2.52)$$

Его шаблон изображен на рис. 2.6

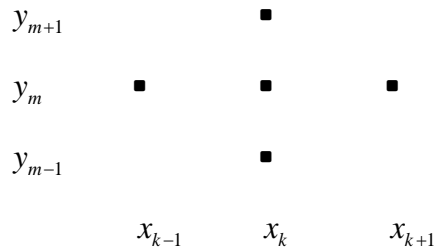


Рис. 2.6

Решение  $v$  разностной задачи Дирихле находится методом последовательных приближений по схеме переменных направлений, где  $f_{km}^{v-1/2} = f(x_k, y_m)$ ,  $v_{km}^0$  — произвольные. Можно доказать, что  $\lim_{v \rightarrow \infty} v_{km}^v = v_{km}$ ,  $k, m = 1, 2, \dots, N-1$ , при любых начальных приближениях  $v_{km}^0$ , причем наибольшая скорость сходимости достигается при  $\tau \approx h/\pi$ . Здесь положена в основу идея о стабилизации при  $t \rightarrow +\infty$  решения уравнения теплопроводности к решению уравнения Пуассона, если  $f$  не зависит от  $t$ .

Разностная схема (2.51), (2.52) устойчива по правой части, т. е. разностная задача

$$\Delta z_{km} = \xi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$z_{km} = 0 \quad \text{на} \quad \omega^*$$



при любом  $h = 1/N$ ,  $N \geq 2$ , имеет единственное решение  $z$  и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|z\|_h \leq c \|\xi\|_h', \quad (2.53)$$

где  $c$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $h$  и сеточной функции  $\xi$ .

Предположим, что решение задачи Дирихле (2.48), (2.49) достаточно гладкое на замкнутом квадрате  $\bar{D}$ , а именно,  $u(x, y) \in C_4(\bar{D})$ . Тогда разностное уравнение (2.51) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.48) на решение задачи (2.48), (2.49) со вторым порядком относительно  $h$ , т. е.

$$\|\psi\|_h' = O(h^2), \quad (2.54)$$

где

$$\psi_{km} = \Lambda u_{km} - f_{km}, \quad (2.55)$$

есть невязка для разностного уравнения. При получении оценки (2.54) используется тот факт, что частным производным  $u''_{xx}$  и  $u''_{yy}$ , входящим в уравнение (2.48), в разностном уравнении (2.52) отвечают вторые разностные производные, аппроксимирующие указанные частные производные с точностью второго порядка по  $h$ . Поскольку краевое условие (2.49) аппроксимируется на сетке  $\omega_h^*$  согласно (2.53) точно, то из (2.54) и устойчивости разностной схемы (2.50), (2.52) по правой части вытекает сходимость ее решения  $v$  к решению  $u \in C_4(\bar{D})$  задачи (2.48), (2.49) со вторым порядком относительно  $h$ , т. е.

$$\|u - v\|_h = O(h^2). \quad (2.56)$$

Действительно, из уравнения (2.52), равенства (2.56) и условий (2.49), (2.53) вытекает, что погрешность  $r = u - v$  на сетке  $\omega_h$  является решением разностной задачи

$$\begin{aligned} \Lambda r_{km} &= \psi_{km}, & k, m &= 1, 2, \dots, N-1, \\ r_{km} &= 0 \text{ на } \omega_h^*. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.54), (2.55) следует (2.56). Разностная схема (2.50), (2.52) обладает вторым порядком точности.

### **Случай произвольной области.**

Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{на } G, \quad (2.57)$$

где

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{на } \Gamma, \quad (2.58)$$

где  $G$  – некоторая конечная область (рис.2.7),  $\Gamma$  – граница области  $G$ ;

$f(x, y)$  – заданная на области  $G$  функция;  $\varphi(x, y)$  – заданная на границе  $\Gamma$  функция.

Строится, как и ранее, квадратная сетка с шагом  $h$ . Во всех расположенных в области  $G$  узлах сетки, которые можно соединить с четырьмя ближайшими узлами отрезками прямых, не пересекая границу  $\Gamma$ , разностное уравнение задается в следующем виде:

$$\Lambda v_{km} = f_{km}, \quad (2.59)$$

где  $\Lambda$  – оператор (2.52). Указанные узлы обозначены на рис. 2.7 точками. Шаблон разностного уравнения (2.57) показан на рис. 2.6. В узлах, находящихся в области  $G$  вблизи ее границы  $\Gamma$  (отмеченных на рис. 2.7 треугольниками), для задания разностных уравнений применяется линейная интерполяция в направлении оси  $x$  или оси  $y$ . Например, в точке с номером 0 уравнение имеет вид

$$v_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \varphi_1, \quad (2.60)$$

где  $\rho_1$  – расстояние от точки 0 до точки 1 на границе  $\Gamma$ , в которой берется заданное значение функции  $\varphi$ , обозначенное через  $\varphi_1$ ;  $v_0, v_2$  – неизвестные в точках 0, 2;  $\rho_2 = h$  – расстояние между этими точками.

Здесь для простоты используется один индекс. Формула (2.60) означает линейную интерполяцию между точками 1, 2 в точку 0.



для нахождения которого могут быть применены методы простых итераций и Зейделя.

Если  $u(x, y) \in C_4(\bar{G})$ , решение задачи Дирихле то справедлива оценка

$$\max_{G_h} |u - v| = O(h^2), \quad (2.62)$$

где  $G_h$  – множество всех узлов, обозначенных кружками и треугольниками.

Решение  $u(x, y)$  принадлежит классу  $C_4(\bar{G})$ , например, если граница  $\Gamma$  обладает трижды непрерывно дифференцируемой производной, функция  $\varphi$  длины  $s$  дуги границы  $\Gamma$  имеет ограниченную пятую производную, а  $f(x, y) \in C_3(\bar{G})$ .

### ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №15

Пластина прямоугольной формы с вырезом на одной из сторон жестко закреплена по краям и равномерно нагружена по площади рис 2.8. Прогиб пластины определяется из уравнения Пуассона. Рассчитать прогиб  $W(x, y)$  по данным, приведенным в табл. 2.11  $A, B$  – размеры пластины;  $h$  – ее толщина;  $R$  – радиус выреза;  $P$  – нагрузка;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Граничное условие  $W = 0$ .

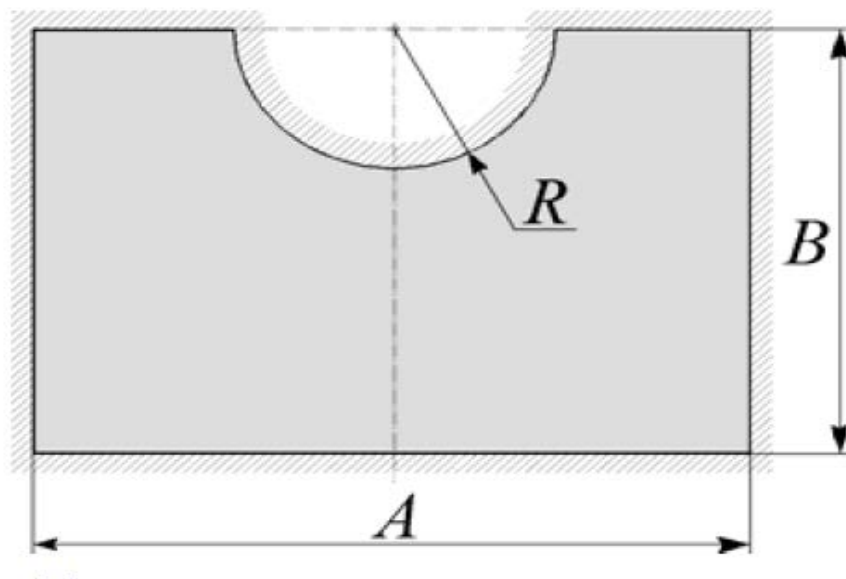


Рис 2.8

$$\left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = P / D ,$$

где  $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  - изгибная жесткость,  $E$  – модуль упругости,  $h$  – толщина пластины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

**Таблица исходных данных к заданию**

**Таблица 2.11**

Номер варианта	Параметры						
	$A$ , мм	$B$ , мм	$R$ , мм	$h$ , мм	$P$ ,	$E$ , Н/м <sup>2</sup>	$\nu$
1	180	65	25	2	$70 \cdot 10^9$	40	0.3
2	150	75	15	5	$55 \cdot 10^9$	70	0.3
3	200	140	40	4	$65 \cdot 10^9$	140	0,28
4	120	100	45	6	$80 \cdot 10^9$	50	0.33
5	180	90	35	5	$110 \cdot 10^9$	120	0.3
6	180	100	30	2	$70 \cdot 10^9$	60	0.28
7	180	100	40	4	$55 \cdot 10^9$	70	0.3
8	150	90	45	6	$65 \cdot 10^9$	140	0.28
9	200	100	35	5	$110 \cdot 10^9$	120	0.3
10	200	140	40	2	$70 \cdot 10^9$	60	0.28
11	180	100	25	2	$65 \cdot 10^9$	140	0.28
12	150	90	15	5	$80 \cdot 10^9$	50	0.33
13	200	140	35	5	$70 \cdot 10^9$	40	0.3
14	120	100	30	2	$55 \cdot 10^9$	70	0.3
15	150	90	45	6	$110 \cdot 10^9$	120	0.3

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:**

1. Из каких соображений выбирают шаг сетки в методе конечных разностей?

2. Каковы источники погрешности при решении задачи с дифференциальными уравнениями с частными производными? Каким образом можно оценить погрешность результата численного решения?
3. В каких случаях может возникать неустойчивость решения задачи?
4. Как влияет выбор параметров сетки на устойчивость?
5. Порядки точности разностных схем.

## Лабораторная работа № 16.

### Метод сеток решения волнового уравнения

#### Цель выполнения работы:

- изучить метод разностных аппроксимаций для волнового уравнения, составить алгоритмы решения волнового уравнения методом сеток, применимым для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы волнового уравнения по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение волнового уравнения.

#### Краткие теоретические сведения

##### Волновое уравнение

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.63)$$

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad u'_t(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.64)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.65)$$

где  $f(x, t)$ ,  $\rho(x)$ ,  $q(x)$  – заданные достаточно гладкие функции, причем  $\rho(0) = \rho(1) = q(0) = q(1) = 0$ .

Будем предполагать, что задача (2.63) – (2.65) имеет единственное решение  $u(x, t) \in C_4(\bar{D})$ ,  $\bar{D} = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$  – замкнутый прямоугольник.

#### Разностная схема.

Будем использовать сетки, построенные на замкнутом прямоугольнике  $\bar{D}$  в лабораторной работе №14, и соответствующие обозначения сеточных

функций. Заменяем в уравнении (2.63) частную производную  $u''_{tt}$  приближенно второй разностной производной в направлении  $t$ , а частную производную —  $u''_{xx}$  второй разностной производной в направлении  $x$  и, заменив  $u$  на  $y$ , приходим к разностному уравнению

$$\frac{y_k^{\nu+1} - 2y_k^\nu + y_k^{\nu-1}}{\tau^2} + \Lambda y_k^\nu = f_k^\nu, \quad (2.66)$$

$k = 1, 2, \dots, N-1, \nu = 1, 2, \dots, M-1$ . Шаблон разностного уравнения (2.66) показан на рис. 2.9.

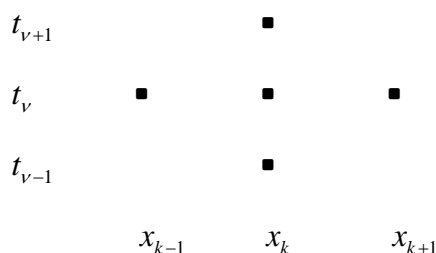


Рис. 2.9

Это уравнение можно разрешить явно относительно  $y_k^{\nu+1}$ . Но для того, чтобы находить значения разностного решения на  $(\nu + 1)$ -м слое, требуется иметь уже вычисленные значения искомого решения на двух предыдущих слоях. Поэтому нужно получить разностное решение сначала отдельно на слоях, отвечающих значениям  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$ . В этом нам помогут начальные условия.

Прежде всего, используя первое начальное условие (2.64), задаем

$$y_k^0 = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.67)$$

Кроме того, полагаем при  $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$y_k^1 = \rho_k + \tau q_k + \frac{\tau^2}{2} (f_k^0 - \Lambda \rho_k). \quad (2.68)$$

Правая часть формулы (2.68) аппроксимирует многочлен Тейлора  $u(x_k, 0) + \tau u'_t(x_k, 0) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x_k, 0)$ , поскольку согласно (2.64)  $u(x_k, 0) = \rho_k$ ,  $u'_t(x_k, 0) = q_k$ , а из уравнения (2.63) для частных производных решения задачи (2.63) —



(2.65) вытекает связь  $u''_h(x_k, 0) = f(x_k, 0) + u''_{xx}(x_k, 0)$ . Наконец, согласно краевым условиям (2.65) имеем

$$y_0^\nu = 0, \quad y_N^\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, M. \quad (2.69)$$

Теперь разностная схема (2.63) – (2.65) полностью определена. Эта схема явная трехслойная (см. шаблон на рис. 2.7), условно устойчивая в некоторых естественных нормах.

Если  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , причем  $\tau/h \leq c < 1$ ,  $c = \text{const}$ , то решение  $u$  разностной схемы (2.66) сходится к рассматриваемому решению  $u$  задачи (2.63) – (2.65) в следующем смысле:

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau^2). \quad (2.70)$$

где  $\|u - y\|_h = \max_{0 \leq \nu \leq M} \left( h \sum_{k=1}^{N-1} (u_k^\nu - y_k^\nu)^2 \right)^{1/2}.$

Схема (2.66) имеет второй порядок точности и по  $h$ , и по  $\tau$ .

### Понятие о методе прямых.

Если в задаче (2.63) – (2.65) ввести дискретность только по  $x$ , то мы приходим к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = f(x_k, t), \quad (2.71)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N-1$

с начальными условиями

$$y_k(0) = \rho_k, \quad y'_k(0) = q_k, \quad (2.72)$$

причем  $y_0(t) \equiv y_N(t) \equiv 0$ .

При сделанном предположении относительно гладкости решения задачи (2.63) – (2.65) имеем

$$\|u - y\|_h = O(h^2), \quad (2.73)$$

где  $\|u - y\|_h = \max_{0 \leq t \leq T} \left( h \sum_{k=1}^{N-1} (u(x_k, t) - y_k(t))^2 \right)^{1/2}$ ,  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t)$  – решение

задачи Коши (2.63) – (2.65). Данный метод называется *методом прямых*, поскольку приближенное решение задачи (2.63) – (2.65) ищется на прямых

$x = x_k, k = 1, 2, \dots, N-1$ , расположенных в плоскости  $xt$ . Разностный же метод часто называется *методом сеток*.

## ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №16

### Задача 1

Продольные колебания  $u(x,t)$  тяги описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.73)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.74)$$

где  $E$  –модуль упругости,  $\rho$  –плотность материала стержня. Тяга имеет длину  $L$  и закреплена на концах. Захватив тягу в центре (см. рис. 2.10),



Рис. 2.10

ее деформируют так, что продольное перемещение становится равным  $\Delta u$ :

$$u(x,0) = -\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Затем тяга освобождается.

Рассчитайте колебания  $u(x,t)$  при заданных в таблице 2.12 параметрах.

**Таблица исходных данных к задаче 1**

Таблица 2.12

Параметр	В а р и а н т					
	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6
$L$ , см	10	18	32	15	25	6
$\Delta u$ , см	0,1	0,2	0,15	0,1	0,2	0,15
$E$ , Н/м <sup>2</sup>	$110 \cdot 10^9$	$120 \cdot 10^9$	$97 \cdot 10^9$	$86 \cdot 10^9$	$120 \cdot 10^9$	$82 \cdot 10^9$
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$4,3 \cdot 10^3$	$5,9 \cdot 10^3$	$6,7 \cdot 10^3$	$8,5 \cdot 10^3$	$7,4 \cdot 10^3$	$9,7 \cdot 10^3$

## Задача 2 Рассчитать колебания тонкой пластины

Колебания тонкой пластины (см. рис.2.11) без учета потерь на трение описываются нормированным волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

где  $u(x, y, t)$  – деформация пластины,  $x, y$  – координаты,  $t$  – время.

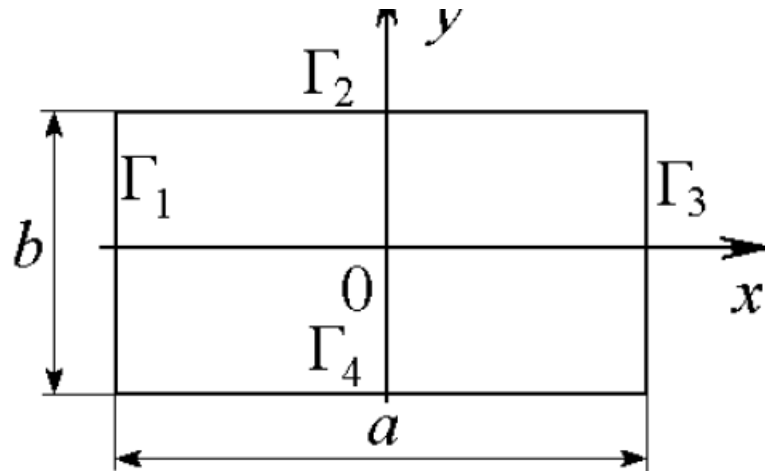


Рис.2.11

Рассчитать колебания пластины при заданных в таблице размерах  $a$  и  $b$ , граничных  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , и начальных  $u(x, y, 0)$  и  $\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t}$  условиях.

**Таблица исходных данных к задаче 2**

**Таблица 2.13**

Параметр		В а р и а н т					
		10-1	10-2	10-3	10-4	10-5	10-6
$a$ , см		1	2	3	2	3	2
$b$ , см		2	1	2	3	1	2
Граничные условия	$\Gamma_1$	$u = 0$		$\partial u / \partial n = 0$		$u = 0$	
	$\Gamma_2$	$\partial u / \partial n = 0$		$u = 0$		$\partial u / \partial n = 0$	
	$\Gamma_3$	$u = 0$		$\partial u / \partial n = 0$		$u = 0$	
	$\Gamma_4$	$\partial u / \partial n = 0$		$u = 0$		$\partial u / \partial n = 0$	
$u(t=0)$		$\arctg[\cos(\pi x/a)]$		$\operatorname{tg}[\cos(\pi y/b)]$		$2\cos(\pi x/a)$	
$\partial u / \partial t _{t=0}$		$\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$		$\exp\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$		$\operatorname{tg}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$	

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Приведите классификацию дифференциальными уравнениями с частными производными в зависимости от их математической природы и физического смысла.
2. Какого вида граничные условия используют в задачах с дифференциальными уравнениями с частными производными?
3. Каковы особенности численного решения дифференциальными уравнениями с частными производными гиперболического типа?
4. Какие виды сеток используются в методе конечных разностей? Каким образом строят на этих сетках разностные аппроксимации и соответствующие им шаблоны?
5. Какие прямые и итерационные методы используют для решения систем алгебраических уравнений в задачах с дифференциальными уравнениями с частными производными?
6. Опишите метод прогонки и его роль в решении задач с дифференциальными уравнениями с частными производными.
7. Из каких соображений выбирают шаг сетки в методе конечных разностей? Краевые условия первого, второго, третьего рода.
8. Порядки точности разностных схем.

## Список использованной литературы

### Основная

1. Тынкевич, М.А. Численные методы. М.А. Тынкевич - Кемерово: КузГТУ. 1997. - 122 с.
2. Тынкевич, М. А. Система MATLAB: справ. пособие / М. А. Тынкевич. – Кемерово КузГТУ, 2001. – 47 с.
3. Плис, А. И. MATHCAD 2006 практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, Н. А. Славина. – М. Финансы и статистика, 2000. – 656 с.
4. Мирошниченко, Г. П. Численные методы: учеб. пособие / Г. П. Мирошниченко, А. Г. Петрашень. – СПб СПбГУИТМО, 2007. –120 с.
5. Руководство к лабораторным работам по курсу «Методы математической физики». – Таганрог Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. –52 с.
6. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. – М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
7. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. –М. Высш. шк., 2000. – 192 с.
8. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения/ В. М. Вержбицкий. – М. Высшая школа, 2000. – 268 с.
9. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В. М. Вержбицкий. – М. Высш. школа, 2001. – 383 с.
10. Волков, Е. А. Численные методы /Е. А. Волков. – СПб. Лань, 2004. – 248 с.
11. Мудров, А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А. Е. Мудров. – Томск МП «РАСКО», 1991. 272 с.
12. Шуп, Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике / Т. Е. Шуп. – М.: Высш. шк., 1990. – 255 с.

## Дополнительная

1. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений / И. П. Мысовских. – М.: Наука, 1993. – 496 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. Наука, 1978. – 612 с.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы /Н. С. Бахвалов. – М. Наука, 1976. – 632 с.
4. Численные методы анализа / В. П. Демидович [и др.]. – М. Физматгиз, 1963. – 400 с.
5. Сборник задач по методам вычислений под ред. Монастырного П.И. – М. Наука, 1994. – 318 с.
6. Самарский, А. А. Введение в численные методы /А. А. Самарский. – М. Наука, 1987. – 288 с.
7. Рындин, Е.А. Методы математической физики : учеб. пособие / Е. А. Рындин. – Таганрог Изд-во ТРТУ, 2003. – 120 с.
8. Мэтьюз Джон Г. Численные методы. Использование MATLAB: Пер. с англ., 3-е изд. /Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. – М. Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
9. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов 13-е изд., испр. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. / – М.: Наука: Физматлит, 1986. – 544 с.
10. Мартынов, Н. Н. MATLAB 5.x. Вычисления, визуализация, программирование / Н. Н. Мартынов, А. П. Иванов. – М. КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000. – 336 с.
11. R2010b Documentation. MATLAB. [Электронный ресурс].Режим доступа: <http://www.mathworks.com/help/techdoc/>
12. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков., Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ, 2004. – 636 с.
13. Мирошниченко, Г. П. Численные методы : учеб. пособие /Г.П. Мирошниченко, А. Г. Петрашень. – СПб. : СПбГУИТМО, 2007. –120 с.

*Учебное издание*

Анисимов Владимир Яковлевич

**МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА. ЛАБОРАТОРНЫЙ  
ПРАКТИКУМ.**

**ПОСОБИЕ**