数学分析 1

作者：UnsunSk8er
组织：ElegantLaTeX Program
时间：December 19, 2022
版本：0.1

Everthing starts with a push.

目录

第 1 章 数理逻辑与集合论

这章主要讨论数学的基础——集合论、数理逻辑.

1.1 集合论基础

1.1.1 引入

1.1.1.1 Baby 集合论

笔记 集合论讨论的对象是集合. 我们始终关注的是集合.

集合（set），可以简单理解为一个不计大小的篮子，它可以装东西，也可以不装。如果装东西，那么里面装的东西可以粗略分为篮子即集合，和其他东西比如苹果、数字等等.

集合是一系列东西的采集，这些东西称为这个集合的成员（member）或元素（element）. 这一系列东西被看作一个单独的对象，即集合。若 t 是集合 A 的一个元素, 写作

$$t \in A.$$

若 t 不是集合 A 的一个元素, 写作

$$t \notin A.$$

$\in$ 读作属于. 需要指出的是 t 可以是包含集合在内的一切东西.

例题 1.1

$$1 \in \{1\}, \quad \{1\} \notin \{1\}.$$

若集合 A 和集合 B 有相同的元素, 即 A 中的任意元素也是 B 中的元素, 则称集合 A 和集合 B 是相等的. 这被称为外延原理.

命题 1.1 (外延原理)

若集合 A 和集合 B, 对任意的对象 t,t 在集合 A 中当且仅当 t 在集合 B 中，即

$$t \in A \iff t \in B,$$

则 $A = B$, 否则 $A \neq B$.

反过来（converse）, 若 $A = B$, 则 $t \in A \iff t \in B$.

例题 1.2

$$1 \neq \{1\}, \quad \{1\} = \{1\}.$$

笔记 外延原理保证了一些集合若存在则唯一，刻画的是集合的唯一性。而集合的存在完全决定于集合的元素或者元素的性质，因而集合存在性的刻画是由元素的罗列或者是对元素性质的描述. 这对应了集合的两个表示法，即列举法和描述法，其实描述法包含了列举法，只要描述一个集合的元素是确切的哪些，即确定了集合.

上面的讨论似乎都是对有元素的集合，是否存在不含任何元素的集合？用描述法即可构造这样的集合，只要把这个集合描述为：不含任何元素的集合. 这样的集合称为空集，记作 $\emptyset$.

笔记 空集的存在性由性质描述保证, 空集的唯一性由外延公理保证。

若将空集作为元素可以构造一个新集合 $\{\emptyset\}$，像这样只有一个元素的集合称为单元素集. 若再将这个集合作为元素可以构造另一个新集合 $\{\{\emptyset\}\}$, 这样下去可以构造一列集合：

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots .$$

取出前面几个，比如取出前 3 个，那么它们可以构成一个新的集合 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$，这是个三元素集合.

笔记 这告诉我们不管有多少集合，每个集合有没有元素，有多少元素，总能从它们构造出新的更"大"的集合。

关于这个三元素集合有另一种重要的看法，即它的元素是上述构造的一列集合的第二个、第三个、第四个这三个集合中的所有元素. 这就引出了并集的概念，A 和 B 的并集记作 $A \cup B$，它包含 A, B 的所有元素, 以上面的三元素为例:

例题 1.3

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\emptyset\}\}\}.$$

集合的并（union）可以看作是是集合间的一种运算（operation）.A 和 B 的并 $A \cup B$ 中的元素的描述也可以叙述为属于 A 或者属于 B 或者同时属于 A, B 的元素. 集合间另一种熟悉的运算是集合间的交（intersection）.A 和 B 的交记作 $A \cap B$, 其中的元素对应地可叙述为属于 A 并且属于 B 的元素.

例题 1.4

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad \emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset.$$

笔记 可以看出并产出的集合比交产出的集合更" 大".

笔记 上面的讨论都是从集合的元素本身入手去构造新的集合，即使是集合间的运算. 下面引入子集的概念, 以便于讨论集合间的关系和构造更大的集合.

若 A 的所有元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$, 读作 A 包含于 B. 集合间的这种关系称为包含 (inclusion) 关系, 注意这要区别于元素和集合间的属于 (membership) 关系.

例题 1.5

$$\emptyset \in \{\emptyset\}, \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}.$$

例题 1.6

$$A \subseteq B \quad \text{且} \quad B \subseteq A \iff A = B$$

空集是任何集合的子集，因此任何集合至少有一个子集. 更确切地说，除空集外的所有集合至少有两个子集. 事实上，一个含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集.

将一个集合 A 的所有子集拿过来，立即可以构成一个新的集合, 称为 A 的幂集（power set），记作 $\mathscr{P}A$.

例题 1.7

$$\mathscr{P}\emptyset = \{\emptyset\}, \quad \mathscr{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \mathscr{P}\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

讨论这三个集合的属于关系和包含关系.

关于集合的表示，前面提到有列举法和描述法。描述法形如:

$$\{x \mid \_\_x\_\_\}.$$

这种集合表示存在两个潜在风险，第一个风险来自于描述本身，这里不讨论。第二个风险则是来自 Baby 集合论本身, 考虑以下” 集合”:

$$\{x \mid x \notin x\}.$$

这来自罗素悖论（Russel's Parodox），它告诉我们不能存在包含所有集合的集合. 有些集合过于“大”而不能称之为集合，我们称其为类（class），每个集合都是一个类，那些过“大”的不能称为集合的为真类（proper class），比如包含所有集合的集合. 随着集合和类的区分, 这种风险被避免。

1.1.1.2 集合——非正式观点

下面我们将用非正式的观点讨论如何得到一些集合. 首先我们引入原子（atom）的概念. 原子是那些自身不是集合但我们想让它们作为集合的元素的东西. 令 A 包含所有的原子,A 在我们的描述下的第一个集合. 现在可以建立一个阶梯:

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$$

令 $V_0 = A$, 即 $V_0 = \{atoms\}$. 那么下一个层会包含所有原子的集合:

$$V_1 = V_0 \cup \mathscr{P}V_0 = A \cup \mathscr{P}A.$$

第三层包含所有低层的东西，加上说有低层东西的集合:

$$V_2 = V_1 \cup \mathscr{P}V_1.$$

并且一般地有:

$$V_{n+1} = V_n \cup \mathscr{P}V_n.$$

于是我们得到了接续的 $V_0, V_1, V_2, \cdots$. 但即使是这样一个无穷的阶梯，也没有包含足够多的集合.

例题 1.8

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots\}$$

不包含在上面的阶梯中.

为了弥补这个缺陷, 取

$$V_\omega = V_0 \cup V_1 \cup \cdots,$$

然后令

$$V_{\omega+1} = V_\omega \cup \mathscr{P} V_\omega,$$

一般地，对任意的 α,

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathscr{P} V_\alpha,$$

这个过程可以持续做下去。对每个集合 a, 存在某个 α 有 $a \in V_{\alpha+1}$,α 称为这个集合的级别（rank）. 这就是集合的本质，集合是某些阶梯中某些阶层的元素.

笔记 *真类不是集合，不在这个阶梯的某个阶层中出现.*

由于在集合论中讨论的对象是集合，我们排除考虑原子，原子在数学中没有明确的必要目的。取 $A = \emptyset$, 这样我们排除了原子，简化了阶梯.

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathscr{P} V_\alpha,$$

被简化为了

$$V_{\alpha+1} = \mathscr{P} V_\alpha.$$

1.1.1.3 类

不存在含有所有集合的集合，含有所有集合的这个东西我们称为类. 在公理化集合论中我们将不会提起类的概念，而在示性论述中会提起类的概念。

1.2 数理逻辑入门

第 2 章 实数理论与数列极限

这章主要讨论如何从有理数集构造实数集, 构造完成后将用数列作为工具研究实数集.

笔记 实数集与自然数集、整数集、有理数集的区别在哪里? 构造实数集的动机是什么?

在集合论中, 由集合和映射出发, 构造出了自然数集, 它是可数的. 由等价关系和自然数集上的加法乘法运算出发, 从自然数集构造了整数集, 再从整数集构造了有理数集, 它们也是可数的. 有理数集具有稠密性, 它的元素虽然已经很多, 但仍然有间隙, 是"离散"的数集.

对于实数集的构造, 本质上区别于前三个数集的构造, 即要从"离散"的有理数集构造出一个"连续"的数集.

不可数个数组成的集合和至多可数个数组成的集合的区别, 就像在纸上画一条线不需要提笔, 和在纸上按这条线的轨迹画至多可数个点至少需要提笔一次的区别一样. 从这样的类比来看, 实数集完全区别于有理数集、整数集和自然数集.

但从乘方逆运算的角度, 却和整数集、有理数集的构造有动机上的联系. 即要从"不完备"的数集构造出一个"完备"的数集.

整数集的构造, 从加法逆运算的角度, 将加法逆元素纳入自然数集. 有理数集的构造, 从乘法逆运算的角度, 将乘法逆元纳入整数集. 而实数集的构造, 从乘方逆运算的角度, 是要将乘方的逆元纳入到有理数集中.

注 虽然从"离散"和"连续"的角度, 实数集和前三个数集是本质不同的, 但仍然有些联系, 即它们都是无限集. 这给我们提供了研究实数集（不可数集）的切口——数列（可数集）.

注 这里数的乘方保证了乘方逆运算作用在一个非负数上, 而对于负数, 涉及到复数集. 数学分析中不予讨论.

笔记 实数的构造方法有哪些? 用数列极限来研究实数集的原因是什么? 怎么研究?

实数构造的方法有 Dedekind 分割、无限十进制小数、闭区间套、Cauchy 列、无穷级数等, 本讲义选用 Dedekind 分割. 这些构造方法的核心思想是"无限过程", 数列极限的核心思想是"可数无限".

我们将从 Dedekind 定理、确界定理、Heine-Borel 定理三个角度阐述实数的完备性, 然后从数列角度介绍单调有界定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理刻画实数的完备性, 最后证明七个完备性定理是等价的.

注 实数理论形成于 19 世纪末, 完善于 20 世纪初, 理解难度远远大于 16、17 世纪牛顿莱布尼兹时代建立的微积分.

2.1 实数域的构建及其结构

2.1.1 无理数的历史

例题 2.1 证明二次方程 $x^2 = 2$ 没有有理根.

证明 即证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 用反证法. 假设 $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, 则 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$, 其中 $p,q\in\mathbb{Z}$ 互素且 $p\neq 0$. 从而

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2=2\iff q^2=2p^2.$$

于是 q 为偶数, 从而 $q=2k, k\in\mathbb{Z}$, 于是

$$(2k)^2=2p^2\iff p^2=2k^2.$$

这说明按假设 p 也是偶数, 这与 p,q 互素矛盾. 假设不成立, 从而命题得证.

注 这个例子说明,$\mathbb{Q}$ 中仍然有间隙, 是不连续的.

笔记 关于超越数与实数的构造

虽然 $\sqrt{2}$ 不是有理数, 但它还是一个代数方程的根. 而更多无理数是不能表示成代数方程的根的, 比如圆周率 π, 因为代数方程终归是"有限的游戏". 虽然如此, 代数方程可以表示许多无理数,"有限的游戏"构造出"无限的结果", 这是多么美妙.

而像圆周率 π 这样能表示成代数方程的根的无理数, 称为超越数, 结合上面的讨论知道, 它不能通过有限次运算得到. 因此更多的无理数, 像超越数不能用有限的过程来构造, 只能通过无限的过程! 这就表明, 实数集的构造用整数集和有理数集的构造方法是行不通的. 即若用整数集和有理数集的构造方法构造实数, 是构造不出超越数的.

注 上面的讨论说明, 有限次的乘方逆运算, 并不能囊括所有的无理数!

2.1.2 Dedekind 分割

定义 2.1 (Dedekind 分割)

设数集 K 的一个划分 $\{\alpha,\beta\}$, 若满足:

1. α"向下封闭":$\forall x,y\in K, x<y: y\in\alpha\implies x\in\alpha$.
2. α"无最大元":$\forall x\in\alpha, \exists y\in\alpha \text{ s.t. } y>x$.

则称该划分为 K 上的一个 Dedekind 分割 (Dedekind cut), 记作 $\alpha\mid\beta$. 其中 α 称为这个 Dedekind 分割的下集 (lower set),β 称为这个 Dedekind 分割的上集 (upper set).

注 $\{\alpha,\beta\}$ 是 K 的一个划分, 于是 α,β 满足:

1. $\alpha,\beta\neq\emptyset$
2. $\alpha\cap\beta=\emptyset$
3. $\alpha\cup\beta=K$

注 也可以规定 β"向上封闭"且"无最小元", 本质是一样的, 只是后面的证明会因为定义而改变, 只要讲法自洽都是可以的.

定义 2.2 (实数集)

有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的所有 Dedekind 分割的下集所组成的集合称为实数集 (set of real numbers), 记作 $\mathbb{R}$. 其中每个 Dedekind 分割的下集表示一个实数 (real number).

♣

注 这个下集确定的实数也可以看作是这个 Dedekind 分割或者上集. 从而实数就定义为一个 Dedekind 分割或者它对应的上集或者它对应的下集.

笔记 Dedekind 分割体现了一个"无限过程", 实数本质上是一个"无限过程".

由于 α 中无最大元, 且 $\mathbb{Q}$ 具有稠密性, 于是任取一个数 $a_0 \in \alpha$ 总能取到一个数大于它, 记这个数为 a_1, 反复进行下去, 我们就得到了一列有序的数字 $a_1, a_2, \cdots$(后面我们将会定义数列). 直观上这列数是越来越大的, 但又不能大到跑出 α, 于是这列数会逼近一个数, 即我们要定义的实数.

注 这列数所逼近的数可能在 $\mathbb{Q}$ 中, 此时即为 β 的最小元, 也可能不在 $\mathbb{Q}$ 中, 此时这个数是个无理数.

注 这列数越来越大与后面的数列单调性有关, 不能大到跑出 α, 与后面的有界性有关, 这两者结合可以联想到数列的单调有界收敛定理, 这是后话.

2.1.3 实数集上的序结构和代数结构

定义 2.3 (实数集上的序关系)

♣

定义 2.4 (实数集上的加法运算)

♣

命题 2.1 (实数加法是良定义的)

♠

命题 2.2 (实数加法的运算律)

♠

命题 2.3 (实数加法的保序性)

♠

定义 2.5 (实数集上的乘法运算)

♣

2.2 数列极限的定义和性质

2.2.1 邻域和极限的简单性质

定义 2.6 (邻域)

给定 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$N_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}, \quad \forall r \in \mathbb{R}^*.$$

称 $N_r(a)$ 为以 a 为中心,r 为半径的邻域 (neighbourhood), 在不强调半径的情况下可记作 $N(a)$.

注 在 $\mathbb{R}$ 中, 容易知道 $N_r(a) = (a-r, a+r)$, 然而我们没有用开区间直接定义, 而是用度量对邻域进行定义.

邻域在数学分析中用于描述"局部概念"十分便利. 下面用邻域的观点叙述数列极限的定义.

定理 2.1

设数列 $\{a_n\}$,

(1)$\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R} \iff n$ 充分大时 $\{a_n\}$ 的各项都落在任一给定的邻域 $N_\varepsilon(a)$ 中.

(2)$\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R} \iff a$ 的任一邻域外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

证明 必要性按数列极限的定义显然成立. 任取 $\varepsilon > 0$, 则 $N_\varepsilon(a)$ 外只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 设其中下标最大的那个为 a_N, 则当 $n > N$ 时,$\{a_n\}$ 全都落在了 $N_\varepsilon(a)$ 中. 此即按数列极限定义得证.

注 (1) 注意, 若 a 的任一邻域 $N(a)$ 内都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 不能推出 $\{a_n\}$ 收敛. 只能说有极限点. (2) 可视为数列极限的"拓扑定义".

邻域是一个拓扑概念, 从邻域的角度思考可以使问题更加直观. 极限是一个无穷的概念, 上述定理的第 (2) 条, 使得我们将无穷问题转化为有穷问题来解决, 这使得问题变得简单易操作了.

2.2.2 极限的运算法则

定理 2.2 (夹逼定理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

注 夹逼定理又被称为三明治定理 (sandwich theorem)

证明

Step1. 按数列极限的定义对 $\{a_n\}, \{c_n\}$, 易知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ s. t.$(\forall n(n > N_1) : a_n \in N_\varepsilon(a)) \wedge (\forall n(n > N_2) : c_n \in N_\varepsilon(a))$.

Step2. 又由数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, n = 1, 2, \cdots$.

Step3. 于是当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 成立 $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon$. 这说明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n(n > N) : |b_n - a| < \varepsilon$, 此即按数列极限的定义得证.

2.3 数列的收敛判别法

2.3.1 数列的上极限和下极限

数列的所有极限点组成的集合非空, 即可以是有限集、可数集、不可数集. 从数列来看, 所有子列的极限刻画了数列的趋势, 这个趋势多数情况是个范围. 我们关心的数列极限, 直观上当这个范围越来越小时, 就有可能存在. 既然我们只关心数列的极限, 那么这个范围里面的具体元素并非我们所关心的. 于是为了描述控制数列趋势的这个范围, 我们引入数列的上下极限的概念. 从而, 当范围越来越小时, 数列极限可能被上下极限“夹逼”出来.

笔记 思想方法类比数列极限的夹逼定理??, 类似的思想还将在连续函数的刻画和 Riemann 可积的等价刻画中再度出现.

定义 2.7 (数列的上极限和下极限: 定义方式 1)

设数列 $\{a_n\}$, 记 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合为 E, 其中可以包含 $+\infty$ 或 $-\infty$. 令

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup E, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf E.$$

称 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的上极限 (limit superior),$\liminf_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的下极限 (limit inferior).

♣

笔记 从定义不难看出它是由确界原理和列紧性定理确保的.

$E \neq \emptyset$, 即说明任意数列都存在极限点, 从而存在上下极限, 这使得极限点比极限对数列趋势的刻画更容易操作和把握.

关于如何求数列上下极限没有固定的简单方法. 对只有有限个极限点的情况, 可以求出所有极限点, 从而看出上下极限, 它们分别是最大的和最小的极限点, 下举两例.

例题 2.2 设数列

$$\{a_n\} = \frac{(-1)^n}{1 + 1/n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n$.

例题 2.3 设数列

$$a_n = \frac{n^2}{1 + n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n$.

笔记 按极限点的不同可以对极限点集 E 进行划分.

若数列有无穷多个极限点, 则上极限未必是最大极限点. 这是由于上极限是极限点集 E 的上确界, 上极限未必属于 E. 下面的命题讨论了这个问题.

命题 2.4

设数列 $\{a_n\}$,E 依然是这个数列所有极限点的集合. 则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \in E, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \in E.$$

证明 即证 $\sup E \in E, \inf E \in E$. 确切地说就是要证明 $\{a_n\}$ 的极限点集 E 的上下确界是极限点, 从而只需要证明存在子列收敛到极限点集 E 的上下确界. 这里只证上极限的情况, 下极限情况类似.

1. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 E 无上界, 即 $\{a_n\}$ 的极限点集没有上界. 这说明存在极限为 $+\infty$ 的 $\{a_n\}$ 的子列, 于是 $+\infty$ 是一个极限点，从而它在 E 中.
2. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 由于 E 非空, 则 E 中只有 $-\infty$，从而它在 E 中.
3. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 这只需证明 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛到 a, 这样 a 作为这个子列的极限点必然属于极限点集 E. 由于 a 是 E 的上确界, 于是在 a 的邻域 $N_{\varepsilon_1}(a)$ 可以找到一个极限点 l_1, 存在 l_1 的邻域 $N(l_1) \subset N_{\varepsilon_1}(a)$ 含 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 从中选取一项 a_{k_1}. 同理可以找到极限点 $l_2 \in N_{\varepsilon_2}$, 存在 l_1 的邻域 $N(l_2) \subset N_{\varepsilon_2}(a)$ 含 a_n 的无穷多项, 从中选取一项 a_{k_2}. 这样由数学归纳法, 做下去得到一个数列 a_{k_n}, 令 $\varepsilon = 1/n$, 从而 $a_{k_n} \in N_{1/n}(a)$, 即

$$a - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由数列极限夹逼性定理, 得到

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$$

综上所述, 命题得证.

笔记 关于 l_n 为什么可以取到：a 是 E 的上确界, 意味着 $\forall x \in E, x < a$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > a - \varepsilon$. 证明中的 ε_n 取为 $1/n$, 这是为了凸显 ε 任意小, 使它趋于 0 以构造子列完成夹逼, 夹逼出来的子列即为我们想要的.

注 上面的命题告诉我们, 上下极限都是数列的极限点, 进一步讲, 上极限就是数列的最大极限点, 下极限就是数列的最小极限点

由上下极限定义由确界原理确保的部分，我们容易得出下列命题.

命题 2.5

设数列 $\{a_n\}$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

等号成立当且仅当 $\{a_n\}$ 极限存在.

证明 由上下确界的定义, 不等式显然成立. 现在看等号成立的情况. 当 a_n 极限存在时, 设极限为 a. 则极限点集为 $E = \{a\}$. 由于上下极限都属于 E, 从而它们都为 a, 于是上下极限相等. 反之, 上下极限相等, 说明 E 中有且仅有一个极限点, 这就说明 $\{a_n\}$ 极限存在. 此即得证.

笔记 证明极限存在只需证明 $\limsup_{n\to\infty} \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n$

数列极限可以用 $\varepsilon - N$(或邻域) 刻画, 也可以看作上下极限相等的特殊情况.

当数列 $\{a_n\}$ 极限为 a 时, 极限唯一且 $\forall\varepsilon,\delta > 0, (a-\varepsilon, a+\delta)$ 中有数列的无穷多项, 此区间外只有有限项. 这是特殊情况. 一般的情况是, 当数列的上下极限存在且分别为 l, L 时,$(l-\varepsilon, L+\delta)$ 中有数列的无穷多项, 此区间外只有有限项. 因而上下极限也可由 $\varepsilon - N$ 和邻域来刻画.

定理 2.3 (数列的上极限和下极限：定义方式 2)

设数列 $\{a_n\}$, 令

$$E_1 = \{\exists a \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n < a+\varepsilon\},$$

$$E_2 = \{\exists a \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n > a-\varepsilon\}.$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E_1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup E_2.$$

证明 只证明上极限的情况, 下极限的情况类似. 设 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

1. 证明 $L \geqslant \inf E_1$. 用反证法, 假设 $L < \inf E_1$, 即 $L \notin E_1$, 则 $\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \exists n > N : a_n \geqslant a+\varepsilon$. 这表明在 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中有数列的无穷多项, 于是由 Bolzano-Weierstrass 定理, 在 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中必然存在一个大于 L 的极限点, 这与 L 是极限点集的上确界矛盾. 因此假设不成立, 于是 $L \geqslant \inf E_1$
2. 证明 $L \leqslant \inf E_1$. 用反证法, 假设 $L > \inf E_1$. 即 $\exists a \in E_1 \text{ s.t. } a < L$. 则 $\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t. } a+\varepsilon < L$. 由于 $a \in E_1$, 于是 $\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n < a+\varepsilon$. 这表明 $(a+\varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此 L 不是极限点, 与 L 是上极限矛盾. 因此假设不成立, 于是 $L \leqslant \inf E_1$

综上所述, 命题得证.

笔记

1. Bolzano-Weierstrass 定理表明,$\mathbb{R}$ 中任一数列都有极限点.
2. 这里的上下确界即可看作 E 中最大最小值, 这是由**??**确保的.

注 讲上下极限为无穷的情况也纳入到定义内, 令

$$E_1 = \{\exists a \in \overline{\mathbb{R}} : \forall\xi > a, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n < \xi\}$$

$$E_2 = \{\exists a \in \overline{\mathbb{R}} : \forall\xi < a, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n > \xi\}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E_1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup E_2.$$

利用上下极限的 $\varepsilon - N$(或邻域) 刻画可以证明上下极限的保序性.

命题 2.6 (上极限和下极限的保序性)

设 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\exists N\in\mathbb{N}^*\ \text{s.t.}\ \forall n>N: a_n\leqslant b_n$, 则

$$(1)\quad \limsup_{n\to\infty} a_n\leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$(2)\quad \liminf_{n\to\infty} a_n\leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

证明 只证明 (1),(2) 类似可证. 设 $\limsup_{n\to\infty} a_n=A, \limsup_{n\to\infty} b_n=B$.

1. 若 $A=-\infty$ 或 $B=+\infty$, 则显然成立.
2. 当 $A=+\infty$ 时, 由 $\limsup_{n\to\infty} a_n=A$ 有 $\forall\xi>A, \exists N_1\in\mathbb{N}^*\ \text{s.t.}\ \forall n>N: a_n>\xi$. 由条件可知,$\exists N'=\max\{N,N_1\}\ \text{s.t.}\ \forall n>N': b_n\geqslant a_n\geqslant\xi$. 这说明 $B=+\infty$, 从而成立 $B\geqslant A$. 类似可证,$B=-\infty$ 的情况.
3. 当 $A,B\in\mathbb{R}$ 时, 用反证法. 假设 $A>B$, 于是 $\exists\varepsilon>0\ \text{s.t.}\ A>B+\varepsilon$. 由 $\limsup_{n\to\infty} b_n=B$, 有 $\forall\varepsilon>0, \exists N_2\in\mathbb{N}^*\ \text{s.t.}\ \forall n>N_2: b_n<B+\varepsilon$. 于是 $\exists N''=\max\{N,N_2\}\ \text{s.t.}\ \forall n>N'': a_n\leqslant b_n<B+\varepsilon<A$. 这说明 $(B+\varepsilon,+\infty)$ 内只有 $\{a_n\}$ 有限项, 则 A 不是极限点, 这与 A 是上极限矛盾. 因此假设不成立, 于是 $A\leqslant B$.

综上所述, 命题得证.

笔记 注意定义的 $\varepsilon-N$ 语言和数列极限的邻域刻画 (拓扑), 即 a 任意邻域外只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

任一数列总是有上下极限的, 因此相比于数列极限, 用上下极限可以简化处理问题.

例题 2.4Stolz-Cesalo 定理 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

已经给出了两种定义上下极限的方式, 它们比较直观, 然而与数列没有“直接挂钩”, 在处理某些问题是并不是很便利. 下面尝试从新角度对上下极限进行定义. 由于研究数列极限不需要关心前面有限项, 我们定义以下数列.

定义 2.8

设数列 $\{a_n\}$, 令

$$L_n:=\sup_{k\geqslant n} a_k=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$l_n:=\inf_{k\geqslant n} a_k=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $\{L_n\}$ 单调递减,$\{l_n\}$ 单调递增.

证明 只证 $\{L_n\}$ 单调递减,$\{l_n\}$ 单调递增类似.

$$\{a_k:k\geqslant n+1\}\subset\{a_k:k\geqslant n,\quad n=1,2,\cdots.$$

此即得证.

笔记 $\{L_n\}$ 为 $\{a_n,a_{n+1},\cdots\}, n=1,2,\cdots$ 的上确界数列, 对应的 $\{l_n\}$ 为下确界数列.

定理 2.4 (数列的上极限和下极限: 定义方式 3)

设数列 $\{a_n\}$, 则

$$(1)\quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right),$$

$$(2)\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right).$$

证明 只证明 (1), 类似可证 (2). 令 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L, \sup_{k\geqslant n} a_k = L_n$. 则转化为证明 $\lim_{n\to\infty} L_n = L$.

1. 当 $L=+\infty$ 时,$\{a_n\}$ 有一个极限点为 $+\infty$ 的子列, 因此

$$L_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

即无论 n 多大 L_n 的上确界总是 $+\infty$. 于是可知,$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. 当 $L=-\infty$ 时,$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 故

$$\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n < -G.$$

于是

$$L_N = \sup\{a_N, a_{N+1}, \cdots\} < -G, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 L_n 单调递减, 于是 $n > N$ 时 $L_n \leqslant L_N < -G$. 这就说明,$\lim_{n\to\infty} = -\infty$.

3. 当 $L \in \mathbb{R}$ 时,

(a). 证明 $L \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

任取 $\{a_n\}$ 的一个极限点 l, 则存在一个子列 a_{k_i} 收敛于 l. 对给定的 n 选取 $i \geqslant n$, 则 $k_i \geqslant i \geqslant n$. 于是

$$a_{k_i} \leqslant \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{k_i}, \cdots\} = L_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

先令 $i \to +\infty$, 再令 $n \to +\infty$, 得 $l \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$. 由于 l 是任取的, 所以有 $L \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

(b). 证明 $L \geqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

由**??**可知,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n \leqslant L + \varepsilon.$$

由于 L_n 单调递减, 所以当 $n > N$ 时,$a_n \leqslant a_N$, 则 $L_n \leqslant L_N \leqslant a_N \leqslant L+\varepsilon$. 令 $n \to \infty$, 则有 $\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant L+\varepsilon$, 又由于 ε 任意性 (任意小), 于是得 $\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant L$.

于是 $L = \limsup_{n\to\infty} L_n$.

综上所述, 证明了 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right)$

笔记

1,2,3.(b) 的证明思路是类似的, 按定义方式 2 进行证明

尤其注意 3.(a) 的证明中对子列项的控制

注 数列的上下极限也可按此定义方法记作 $\overline{\lim} a_n, \underline{\lim} a_n$. 用这个定义方法处理关于上下极限的不等式较为简便.

上下极限与极限的不同之处在于极限满足“可加性”,而上下极限分别满足“次可加性”和“超可加性”.

命题 2.7 (上极限的次可加性和下极限的超可加性)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 则

$$(1)\quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$(2)\quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

证明 只证明 (1), 类似可证 (2). 对任意 $l \geqslant n$, 有 $\inf_{k\geqslant n} a_n \leqslant a_l, \inf_{k\geqslant n} b_n \leqslant b_l$, 于是

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant a_l + b_l.$$

由于 $l \geqslant n$ 的任意性, 有

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k).$$

于是可知,

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k \geqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k) - \inf_{k\geqslant n} b_k + \sup_{k\geqslant n} b_k = \inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k).$$

于是

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k+b_k) \leqslant \inf_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k.$$

再令 $n\to\infty$, 由**??**得,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

此即得证.

注 上面的定理不等式两端需要有意义, 不能出现 $\infty-\infty$ 型.

注 设定义在 A 上的映射 f.

1. 若 $f(a+b)=f(a)+f(b), \forall a,b\in A$, 则称 f 满足可加性 (additivity).
2. 若 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b), \forall a,b\in A$, 则称 f 满足超可加性 (superadditivity).
3. 若 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b), \forall a,b\in A$, 则称 f 满足次可加性 (subadditivity).

第 3 章 函数极限、连续与一致连续

第 4 章 连续函数的导数与微分

第 5 章 Riemann 积分