数学分析 3

作者：UnsunSk8er
组织：ElegantLaTeX Program
时间：December 29, 2022
版本：0.1

Everthing starts with a push.

目录

第 1 章 含参变量的积分

1.1 含参变量的积分

1.1.1 含参变量积分的概念

定义 1.1 (含参变量的积分)

$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 有定义, 且对每个固定的 $y\in[c,d]$, 关于 x 的函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积. 令

$$I(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y\in[c,d]$$

称为含参变量的积分, 其中 y 是参数. 它对应数列或函数列中的变数 n.

注 $I(y)$ 显然是 y 的函数.

定义 1.2 (一致收敛极限)

设 $y_0\in[c,d]$, 若存在函数 $\varphi(x), x\in[a,b]$, 使得 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in\check{N}(\delta,y_0)$:

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon, \quad \forall x\in[a,b]$$

则称当 $y\to y_0$ 时,$f(x,y)$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$.

注 若 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数, 则由紧集上连续函数的一致连续性可知, 当 $y\to y_0$ 时, $f(x,y)$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x,y_0)$.

以下讨论一致收敛的极限函数的性质 (参照一致收敛函数列的性质).

定理 1.1 (极限函数一致收敛的 Cauchy 准则)

$\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛当且仅当 $\forall\varepsilon, \exists\delta>0$, 当 $y_1,y_2\in\check{N}(\delta,y_0)$ 时,

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon, \quad \forall x\in[a,b].$$

命题 1.1 (极限函数连续的充分条件)

对每个固定的 $y\in[a,b]$, $f(x,y)$ 都是关于 $x\in[a,b]$ 的连续函数, 若极限函数

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

1.2 含参变量的广义积分

1.2.1 一致收敛及其判别法