数学分析 1

作者：UnsunSk8er
组织：ElegantLATEX Program
时间：November 19, 2022
版本：0.1

Everthing starts with a push.

目录

第 1 章 一些必要的前置内容

第 2 章 实数理论与数列极限

内容提要

- 这章主要讲实数构造 blabla

2.1 数列极限的定义和性质

2.1.1 邻域和极限的简单性质

定义 2.1 (邻域)

给定 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$N_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}, \quad \forall r \in \mathbb{R}^*.$$

称 $N_r(a)$ 为以 a 为中心,r 为半径的邻域 (neighbourhood), 在不强调半径的情况下可记作 $N(a)$.

注 在 $\mathbb{R}$ 中, 容易知道 $N_r(a) = (a - r, a + r)$, 然而我们没有用开区间直接定义, 而是用度量对邻域进行定义.

邻域在数学分析中用于描述"局部概念"十分便利. 下面用邻域的观点叙述数列极限的定义.

定理 2.1

设数列 $\{a_n\}$,

(1)$\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R} \iff n$ 充分大时 $\{a_n\}$ 的各项都落在任一给定的邻域 $N_\varepsilon(a)$ 中.

(2)$\{a_n\}$ 收敛于 $a \in \mathbb{R} \iff a$ 的任一邻域外都只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

证明 必要性按数列极限的定义显然成立. 任取 $\varepsilon > 0$, 则 $N_\varepsilon(a)$ 外只有 $\{a_n\}$ 的有限项, 设其中下标最大的那个为 a_N, 则当 $n > N$ 时,$\{a_n\}$ 全都落在了 $N_\varepsilon(a)$ 中. 此即按数列极限定义得证.

注 (1) 注意, 若 a 的任一邻域 $N(a)$ 内都有 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 不能推出 $\{a_n\}$ 收敛. 只能说有极限点. (2) 可视为数列极限的"拓扑定义".

邻域是一个拓扑概念, 从邻域的角度思考可以使问题更加直观. 极限是一个无穷的概念, 上述定理的第 (2) 条, 使得我们将无穷问题转化为有穷问题来解决, 这使得问题变得简单易操作了.

2.1.2 极限的运算法则

定理 2.2 (夹逼定理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

若 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

注 夹逼定理又被称为三明治定理 (sandwich theorem)

证明

Step1. 按数列极限的定义对 $\{a_n\}, \{c_n\}$, 易知 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ s.t.$(\forall n(n > N_1) : a_n \in N_\varepsilon(a)) \wedge (\forall n(n > N_2) :$

$c_n \in N_\varepsilon(a)$).

Step2. 又由数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, n = 1,2,\cdots$.

Step3. 于是当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 成立 $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon$. 这说明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n(n > N) : |b_n - a| < \varepsilon$, 此即按数列极限的定义得证.

2.2 数列的收敛判别法

2.2.1 数列的上极限和下极限

数列的所有极限点组成的集合非空, 即可以是有限集、可数集、不可数集. 从数列来看, 所有子列的极限刻画了数列的趋势, 这个趋势多数情况是个范围. 我们关心的数列极限, 直观上当这个范围越来越小时, 就有可能存在. 既然我们只关心数列的极限, 那么这个范围里面的具体元素并非我们所关心的. 于是为了描述控制数列趋势的这个范围, 我们引入数列的上下极限的概念. 从而, 当范围越来越小时, 数列极限可能被上下极限"夹逼"出来.

笔记 思想方法类比数列极限的夹逼定理??, 类似的思想还将在连续函数的刻画和 Riemann 可积的等价刻画中再度出现.

定义 2.2 (数列的上极限和下极限: 定义方式 1)

设数列 $\{a_n\}$, 记 $\{a_n\}$ 的所有极限点组成的集合为 E, 其中可以包含 $+\infty$ 或 $-\infty$. 令

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup E, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf E.$$

称 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的上极限 (limit superior), $\liminf_{n\to\infty} a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的下极限 (limit inferior).

♣

笔记 从定义不难看出它是由确界原理和列紧性定理确保的.

$E \neq \emptyset$, 即说明任意数列都存在极限点, 从而存在上下极限, 这使得极限点比极限对数列趋势的刻画更容易操作和把握.

关于如何求数列上下极限没有固定的简单方法. 对只有有限个极限点的情况, 可以求出所有极限点, 从而看出上下极限, 它们分别是最大的和最小的极限点, 下举两例.

例题 2.1 设数列

$$\{a_n\} = \frac{(-1)^n}{1 + 1/n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

求 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n$.

例题 2.2 设数列

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

求 $\limsup_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n$.

笔记 按极限点的不同可以对极限点集 E 进行划分.

若数列有无穷多个极限点，则上极限未必是最大极限点. 这是由于上极限是极限点集 E 的上确界，上极限未必属于 E. 下面的命题讨论了这个问题.

命题 2.1

设数列 $\{a_n\}$,E 依然是这个数列所有极限点的集合. 则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \in E, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \in E.$$

证明 即证 $\sup E \in E, \inf E \in E$. 确切地说就是要证明 $\{a_n\}$ 的极限点集 E 的上下确界是极限点, 从而只需要证明存在子列收敛到极限点集 E 的上下确界. 这里只证上极限的情况, 下极限情况类似.

1. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 E 无上界, 即 $\{a_n\}$ 的极限点集没有上界. 这说明存在极限为 $+\infty$ 的 $\{a_n\}$ 的子列, 于是 $+\infty$ 是一个极限点, 从而它在 E 中.
2. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 由于 E 非空, 则 E 中只有 $-\infty$, 从而它在 E 中.
3. 若 $\limsup_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, 这只需证明 $\{a_n\}$ 有一个子列收敛到 a, 这样 a 作为这个子列的极限点必然属于极限点集 E. 由于 a 是 E 的上确界, 于是在 a 的邻域 $N_{\varepsilon_1}(a)$ 可以找到一个极限点 l_1, 存在 l_1 的邻域 $N(l_1) \subset N_{\varepsilon_1}(a)$ 含 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 从中选取一项 a_{k_1}. 同理可以找到极限点 $l_2 \in N_{\varepsilon_2}$, 存在 l_1 的邻域 $N(l_2) \subset N_{\varepsilon_2}(a)$ 含 a_n 的无穷多项, 从中选取一项 a_{k_2}. 这样由数学归纳法, 做下去得到一个数列 a_{k_n}, 令 $\varepsilon = 1/n$, 从而 $a_{k_n} \in N_{1/n}(a)$, 即

$$a - \frac{1}{n} < a_{k_n} < a + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

   由数列极限夹逼性定理, 得到

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$$

综上所述, 命题得证.

笔记 关于 l_n 为什么可以取到: a 是 E 的上确界, 意味着 $\forall x \in E, x < a$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > a - \varepsilon$. 证明中的 ε_n 取为 $1/n$, 这是为了凸显 ε 任意小, 使它趋于 0 以构造子列完成夹逼, 夹逼出来的子列即为我们想要的.

注 上面的命题告诉我们, 上下极限都是数列的极限点, 进一步讲, 上极限就是数列的最大极限点, 下极限就是数列的最小极限点

由上下极限定义由确界原理确保的部分，我们容易得出下列命题.

命题 2.2

设数列 $\{a_n\}$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

等号成立当且仅当 $\{a_n\}$ 极限存在.

证明 由上下确界的定义, 不等式显然成立. 现在看等号成立的情况. 当 a_n 极限存在时, 设极限为 a. 则极限点集为 $E = \{a\}$. 由于上下极限都属于 E, 从而它们都为 a, 于是上下极限相等. 反之, 上下极限相等, 说明 E 中有且仅有一个极限点, 这就说明 $\{a_n\}$ 极限存在. 此即得证.

笔记 证明极限存在只需证明 $\limsup_{n\to\infty} \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n$

数列极限可以用 $\varepsilon - N$(或邻域) 刻画, 也可以看作上下极限相等的特殊情况.

当数列 $\{a_n\}$ 极限为 a 时, 极限唯一且 $\forall \varepsilon, \delta > 0, (a-\varepsilon, a+\delta)$ 中有数列的无穷多项, 此区间外只有有限项. 这是特殊情况. 一般的情况是, 当数列的上下极限存在且分别为 l, L 时,$(l-\varepsilon, L+\delta)$ 中有数列的无穷多项, 此区间外只有有限项. 因而上下极限也可由 $\varepsilon - N$ 和邻域来刻画.

定理 2.3 (数列的上极限和下极限：定义方式 2)

设数列 $\{a_n\}$, 令

$$E_1 = \{\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n < a + \varepsilon\},$$

$$E_2 = \{\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n > a - \varepsilon\}.$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E_1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup E_2.$$

证明 只证明上极限的情况, 下极限的情况类似. 设 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L$.

1. 证明 $L \geqslant \inf E_1$. 用反证法, 假设 $L < \inf E_1$, 即 $L \notin E_1$, 则 $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \exists n > N : a_n \geqslant a + \varepsilon$. 这表明在 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中有数列的无穷多项, 于是由 Bolzano-Weierstrass 定理, 在 $(L+\varepsilon, +\infty)$ 中必然存在一个大于 L 的极限点, 这与 L 是极限点集的上确界矛盾. 因此假设不成立, 于是 $L \geqslant \inf E_1$
2. 证明 $L \leqslant \inf E_1$. 用反证法, 假设 $L > \inf E_1$. 即 $\exists a \in E_1 \text{ s. t. } a < L$. 则 $\exists \varepsilon > 0 \text{ s. t. } a + \varepsilon < L$. 由于 $a \in E_1$, 于是 $\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n < a + \varepsilon$. 这表明 $(a+\varepsilon, +\infty)$ 中有 $\{a_n\}$ 的有限项, 因此 L 不是极限点, 与 L 是上极限矛盾. 因此假设不成立, 于是 $L \leqslant \inf E_1$

综上所述, 命题得证.

笔记

1. Bolzano-Weierstrass 定理表明,$\mathbb{R}$ 中任一数列都有极限点.
2. 这里的上下确界即可看作 E 中最大最小值, 这是由**??**确保的.

注 讲上下极限为无穷的情况也纳入到定义内, 令

$$E_1 = \{\exists a \in \overline{\mathbb{R}} : \forall \xi > a, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n < \xi\}$$

$$E_2 = \{\exists a \in \overline{\mathbb{R}} : \forall \xi < a, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n > \xi\}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf E_1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup E_2.$$

利用上下极限的 $\varepsilon - N$(或邻域) 刻画可以证明上下极限的保序性.

命题 2.3 (上极限和下极限的保序性)

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n \leqslant b_n$, 则

$$(1) \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$(2) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

证明 只证明 (1),(2) 类似可证. 设 $\limsup_{n\to\infty} a_n = A, \limsup_{n\to\infty} b_n = B$.

1. 若 $A = -\infty$ 或 $B = +\infty$, 则显然成立.
2. 当 $A = +\infty$ 时, 由 $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$ 有 $\forall \xi > A, \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N : a_n > \xi$. 由条件可知,$\exists N' = \max\{N, N_1\} \text{ s. t. } \forall n > N' : b_n \geqslant a_n \geqslant \xi$. 这说明 $B = +\infty$, 从而成立 $B \geqslant A$. 类似可证,$B = -\infty$ 的情况.
3. 当 $A, B \in \mathbb{R}$ 时, 用反证法. 假设 $A > B$, 于是 $\exists \varepsilon > 0 \text{ s. t. } A > B + \varepsilon$. 由 $\limsup_{n\to\infty} b_n = B$, 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \text{ s. t. } \forall n > N_2 : b_n < B + \varepsilon$. 于是 $\exists N'' = \max\{N, N_2\} \text{ s. t. } \forall n > N'' : a_n \leqslant b_n < B + \varepsilon < A$. 这说明 $(B+\varepsilon, +\infty)$ 内只有 $\{a_n\}$ 有限项, 则 A 不是极限点, 这与 A 是上极限矛盾. 因此假设不成立, 于是 $A \leqslant B$.

综上所述, 命题得证.

笔记 注意定义的 $\varepsilon - N$ 语言和数列极限的邻域刻画 (拓扑), 即 a 任意邻域外只有 $\{a_n\}$ 的有限项.

任一数列总是有上下极限的, 因此相比于数列极限, 用上下极限可以简化处理问题.

例题 2.3Stolz-Cesalo 定理 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\{b_n\}$ 严格递增, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

已经给出了两种定义上下极限的方式, 它们比较直观, 然而与数列没有“直接挂钩”, 在处理某些问题是并不是很便利. 下面尝试从新角度对上下极限进行定义. 由于研究数列极限不需要关心前面有限项, 我们定义以下数列.

定义 2.3

设数列 $\{a_n\}$, 令

$$L_n := \sup_{k\geqslant n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$l_n := \inf_{k\geqslant n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 $\{L_n\}$ 单调递减,$\{l_n\}$ 单调递增.

证明 只证 $\{L_n\}$ 单调递减,$\{l_n\}$ 单调递增类似.

$$\{a_k : k \geqslant n+1\} \subset \{a_k : k \geqslant n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

此即得证.

笔记 $\{L_n\}$ 为 $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, n = 1, 2, \cdots$ 的上确界数列, 对应的 $\{l_n\}$ 为下确界数列.

定理 2.4 (数列的上极限和下极限: 定义方式 3)

设数列 $\{a_n\}$, 则

$$(1) \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right),$$

$$(2) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right).$$

证明 只证明 (1), 类似可证 (2). 令 $\limsup_{n\to\infty} a_n = L, \sup_{k\geqslant n} a_k = L_n$. 则转化为证明 $\lim_{n\to\infty} L_n = L$.

1. 当 $L = +\infty$ 时,$\{a_n\}$ 有一个极限点为 $+\infty$ 的子列, 因此

$$L_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = +\infty, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

即无论 n 多大 L_n 的上确界总是 $+\infty$. 于是可知,$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. 当 $L = -\infty$ 时,$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 故

$$\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n < -G.$$

于是

$$L_N = \sup\{a_N, a_{N+1}, \cdots\} < -G, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 L_n 单调递减, 于是 $n > N$ 时 $L_n \leqslant L_N < -G$. 这就说明,$\lim_{n\to\infty} = -\infty$.

3. 当 $L \in \mathbb{R}$ 时,

   (a). 证明 $L \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

任取 $\{a_n\}$ 的一个极限点 l, 则存在一个子列 a_{k_i} 收敛于 l. 对给定的 n 选取 $i \geqslant n$, 则 $k_i \geqslant i \geqslant n$. 于是

$$a_{k_i} \leqslant \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{k_i}, \cdots\} = L_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

先令 $i \to +\infty$, 再令 $n \to +\infty$, 得 $l \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$. 由于 l 是任取的, 所以有 $L \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

(b). 证明 $L \geqslant \lim_{n\to\infty} L_n$.

由**??**可知,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n > N : a_n \leqslant L + \varepsilon.$$

由于 L_n 单调递减, 所以当 $n > N$ 时,$a_n \leqslant a_N$, 则 $L_n \leqslant L_N \leqslant a_N \leqslant L + \varepsilon$. 令 $n \to \infty$, 则有 $\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant L + \varepsilon$, 又由于 ε 任意性 (任意小), 于是得 $\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant L$.

于是 $L = \limsup_{n\to\infty} L_n$.

综上所述, 证明了 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right)$

笔记

1,2,3.(b) 的证明思路是类似的, 按定义方式 2 进行证明

尤其注意 3.(a) 的证明中对子列项的控制

注 数列的上下极限也可按此定义方法记作 $\overline{\lim} a_n, \underline{\lim} a_n$. 用这个定义方法处理关于上下极限的不等式较为简便.

上下极限与极限的不同之处在于极限满足“可加性”, 而上下极限分别满足“次可加性”和“超可加性”.

命题 2.4 (上极限的次可加性和下极限的超可加性)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 则

$$(1) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$(2) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

证明 只证明 (1), 类似可证 (2). 对任意 $l \geqslant n$, 有 $\inf_{k\geqslant n} a_n \leqslant a_l, \inf_{k\geqslant n} b_n \leqslant b_l$, 于是

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant a_l + b_l.$$

由于 $l \geqslant n$ 的任意性, 有

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k + b_k).$$

于是可知,

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k \geqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k + b_k) - \inf_{k\geqslant n} b_k + \sup_{k\geqslant n} b_k = \inf_{k\geqslant n}(a_k + b_k).$$

于是

$$\inf_{k\geqslant n} a_k + \inf_{k\geqslant n} b_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(a_k + b_k) \leqslant \inf_{k\geqslant n} a_k + \sup_{k\geqslant n} b_k.$$

再令 $n \to \infty$, 由**??**得,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

此即得证.

注 上面的定理不等式两端需要有意义, 不能出现 $\infty - \infty$ 型.

注 设定义在 A 上的映射 f.

1. 若 $f(a+b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A$, 则称 f 满足可加性 (additivity).

2. 若 $f(a+b) \geqslant f(a)+f(b), \forall a, b \in A$, 则称 f 满足超可加性 (superadditivity).
3. 若 $f(a+b) \leqslant f(a)+f(b), \forall a, b \in A$, 则称 f 满足次可加性 (subadditivity).

第 3 章 函数极限、连续与一致连续

第 4 章 连续函数的导数与微分

第 5 章 Riemann 积分