

BASI DEL MOVIMENTO

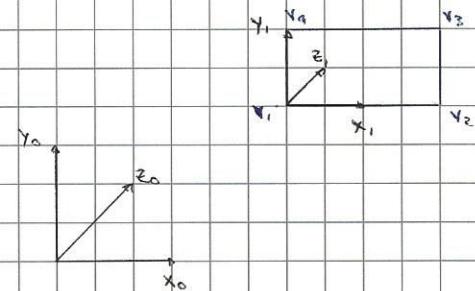
Il movimento è lo spostamento di un insieme di punti, di materia, secondo un ovunque sistema di riferimento cartesiano di 3 assi. I movimenti possibili sono la traslazione e la rotazione e il problema è quello di conoscere la posizione e l'orientamento degli oggetti in riferimento ad un sistema di riferimento esterno.

$${}^t V_1 = (0, 0, 0)^T \Rightarrow {}^e V_1 = ?$$

$${}^t V_2 = (1, 0, 0)^T \Rightarrow {}^e V_2 = ?$$

$${}^t V_3 = (2, 1, 0)^T \Rightarrow {}^e V_3 = ?$$

$${}^t V_4 = (0, -1, 0)^T \Rightarrow {}^e V_4 = ?$$

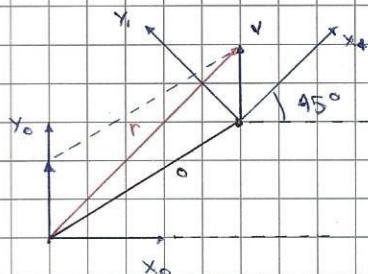


Se due vettori sono nello stesso sistema di riferimento si possono sommare tramite la regola del parallelogramma per stabilire il vettore risultante. Per trasportare un vettore in un altro sistema di riferimento si opera ^{LA} somma fra il vettore, che dal secondo punto al corrente sistema nell'origine, e ~~trasformando~~ questo rappresentato secondo il nuovo sistema:

$${}^e V = O_e + {}^e v$$

Dove ${}^e v$ è l'espressione di ${}^t V$ nel sistema di riferimento e

Ex.

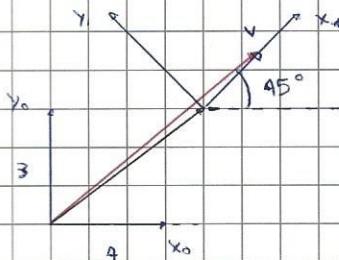


$${}^t V = (1, 1, 0)^T \Rightarrow \|V\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$${}^t r = {}^0 O + {}^t V$$

$${}^e V = (0, \sqrt{2}, 0)^T$$

Ex.



$${}^t V = (\sqrt{2}, 0, 0)^T$$

$$\Rightarrow {}^e x_0 = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ) = 1$$

$${}^e y_0 = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) = 1$$

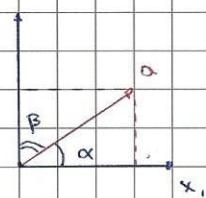
$$\Rightarrow {}^e r = (1, 1, 0)^T$$

Secondo Euler le 3 componenti del vettore possono essere espresse come

$$\alpha \cdot x_1 = |v| \cdot x_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha \cdot y_1 = |v| \cdot y_1 \cdot \sin \alpha$$

Dove x_1, y_1 sono vettori



CHE SI PUÒ SCRIVERE COME

$$\begin{aligned} {}^1\alpha_{x_1} &= {}^1\alpha^T x_1 \\ {}^1\alpha_{y_1} &= {}^1\alpha^T y_1 \\ {}^1\alpha_{z_1} &= {}^1\alpha^T z_1 \end{aligned} \quad \left. \right\} = {}^1\alpha$$

E CON LA STESSA LOGICA

$${}^2\alpha = \begin{bmatrix} {}^2\alpha^T x_2 \\ {}^2\alpha^T y_2 \\ {}^2\alpha^T z_2 \end{bmatrix}$$

L'OBBIETTIVO ORA È DETERMINARE LA MATRICE CHE PERMETTE DI PASSARE DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO AD UN ALTRO.

$${}^1\alpha + [?] {}^2\beta$$

$m \times 1 \quad m \times m \quad m \times 1$

INNANZITUTTO ${}^2\beta$ PUÒ INIZIALMENTE ESSERE DESCRUITO IN QUESTO MODO

$${}^2\beta = b_{x_2} {}^2x_2 + b_{y_2} {}^2y_2 + b_{z_2} {}^2z_2$$

DUNQUE GLI ASI CHE DEFINISCONO IL SECONDO SISTEMA DI RIFERIMENTO DEVONO ESSERE ESPRESI SECONDO IL PRIMO

SECONDO QUANTO STABILITO PRIMA PER UN GENERICO VETTORE

$$\begin{aligned} {}^1x_2 &= \begin{bmatrix} x_2^T x_1 \\ x_2^T y_1 \\ x_2^T z_1 \end{bmatrix} & {}^1y_2 &= \begin{bmatrix} y_2^T x_1 \\ y_2^T y_1 \\ y_2^T z_1 \end{bmatrix} & {}^1z_2 &= \begin{bmatrix} z_2^T x_1 \\ z_2^T y_1 \\ z_2^T z_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^1\beta = ({}^1x_2 \ {}^1y_2 \ {}^1z_2) \cdot \begin{bmatrix} b_{x_1} \\ b_{y_1} \\ b_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^T x_1 & y_2^T x_1 & z_2^T x_1 \\ x_2^T y_1 & y_2^T y_1 & z_2^T y_1 \\ x_2^T z_1 & y_2^T z_1 & z_2^T z_1 \end{bmatrix} \cdot {}^1\beta$$

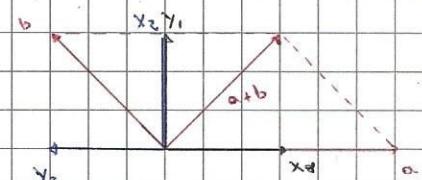
DOVE LA MATRICE TROVATA È LA MATRICE DI ROTAZIONE 1R_2 . ESSA È COMPOSTA DA SOLI VALORI [-1, +1]

DAL MOMENTO CHE TUTTI GLI ELEMENTI SONO VERSORI.

EX.

$${}^1\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^1\alpha + {}^1\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$${}^2R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^2\alpha + {}^2\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DA QUESTO SI PUÒ GENERALIZZARE CHE

$${}^t R_2 = ({}^2 R_1)^t \Rightarrow R^t R = I$$

INOLTRE RICORDANDO CHE

$$1) \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$2) \det(A) = \det(A^t)$$

$$\text{se } (\det(R))^t = \det(I) \text{ allora } \det(R) = \det(R^t) = 1.$$

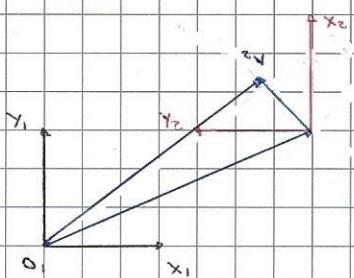
LE OPERAZIONI DI ROTOTRASLACIONE SONO LA COMBINAZIONE APPUNTO DI UNA TRASLACIONE E DI UNA ROTAZIONE

EX.

$${}^1 V = {}^1 O_2 + {}^1 R_2 {}^2 V$$

$${}^1 O_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2 V = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$${}^1 R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 V = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESISTE PER QUESTE OPERAZIONI UNA TECNICA PIÙ DIRETTA CHIAMA LA FUNZIONE DI TRASFORMAZIONE OMogenea.

PER APPLICARLA È NECESSARIO AVERE I VETTORI OMogenei I QUALI HANNO UN ELEMENTO AGGIUNTIVO PARI A 1

COME ULTIMO ELEMENTO, RISPETTO AL VETTORE ORIGINALE.

$${}^1 V = {}^1 O_2 + {}^1 R_2 {}^2 V$$

$${}^1 \tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^1 V \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^2 \tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^2 V \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^1 \tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^1 R_2 & {}^1 O_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^2 \tilde{V}$$

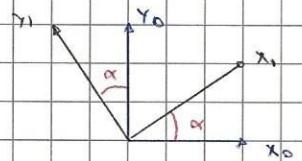
TRASFORMAZIONE OMogenea ${}^1 H_2$

EX

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 7 \\ 1 + 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1 \tilde{V}$$

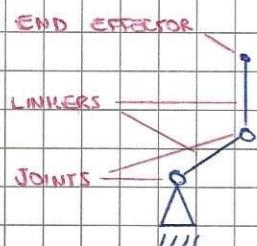
ESISTE ANCHE UN'ALTRA FORMA DELLA MATEMATICA DI ROTAZIONE LA QUALE HA COME RIFERIMENTO L'ANGOLI TRA L'ASSE DELLE ASCISSE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO E QUELLO DELL'ALTRIO SISTEMA.

$$R_e(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



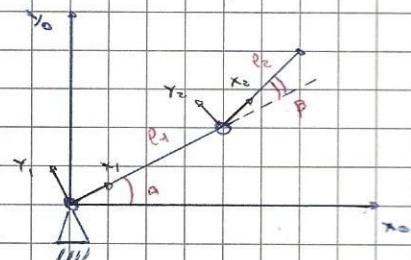
DIRECT KINEMATICS OF A ROBOTIC MANIPULATOR

In generale un manipolatore robotico è un braccio robotico ed in generale si rappresenta così. Esso è generalmente composto da linkers, i quali sono corpi rigidi, joints, i quali contengono meccanismi che permettono il movimento



relativo tra i linker. Esistono due categorie di joints: **PRISMATICI**, i quali permettono una traslazione, e **REVOLUTI**, i quali permettono una rotazione. Entrambi conferiscono → grado di libertà al manipolatore. L'insieme di linkers e di joints formano una catena cinematica che in questo caso è aperta, mentre, se il manipolatore afferrasse un oggetto, si direbbe connessa.

L'interesse principale della cinematica diretta è quello di stabilire a priori la posizione dell'end effector, data una sequenza di comandi espressi sotto forma di angoli (si considerano solo joints revoluti). Più utile è la cinematica inversa per cui, a partire dalla posizione che si vuole raggiungere,



si determina la sequenza di comandi necessari ha è molto più complessa e non verrà trattata. In generale, secondo tale configurazione, la posizione dell'end effector può essere espressa come:

$${}^0E = {}^0O_2 + {}^0R_2 {}^2E$$

$$= {}^0O_2 + {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2E$$

Dove ${}^0O_2 = \begin{bmatrix} p_1 \cos \alpha \\ p_1 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

$${}^2E = \begin{bmatrix} p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0R_E = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta - s\alpha s\beta & -c\alpha s\beta - s\alpha c\beta & 0 \\ s\alpha c\beta + c\alpha s\beta & -s\beta s\alpha + c\alpha c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0E_2 = \begin{bmatrix} p_1 \cos \alpha \\ p_1 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0R_2 \begin{bmatrix} p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) p_2 \\ p_1 \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) p_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso si poteva arrivare al risultato anche attraverso la trigonometria ma nel caso tridimensionale

NALE SI PUÒ PROCEDERE SOLO IN QUESTO MODO E SI FA USO DELLA CONVENZIONE DELLE TAVOLE DI DELAVIS - HARTEN -

BERG.

- Oltre alla posizione e all'orientamento dell'end effector, spesso si controlla la velocità dei joints e dunque

■ LA VELOCITÀ DI QUESTO CHE PUÒ ESSERE ESPRESA COME:

$$\text{Dopo } {}^0\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(\alpha, \beta) \\ F_y(\alpha, \beta) \\ F_z(\alpha, \beta) \end{bmatrix}$$

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = J(\alpha, \beta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{VELOCITÀ LINEARE})$$

Dove $J(\alpha, \beta)$ è una Jacobiana analitica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_z}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\text{E DUNQUE } \dot{x}_e = \frac{d}{dt} F_x(\alpha, \beta)$$

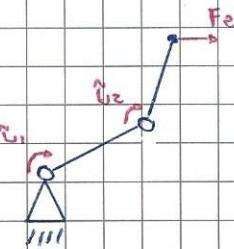
$$= \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial F_x}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt}$$

A PARTIRE DA CIÒ SI PUÒ STABILIRE LA FORZA ESERCITATA SULL'END

EFFECTOR, CONOSCENDO I MOMENTI TORCENTI IN CORRISPONDENZA

DELL JOINTS O LA LORO FORZA.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{U}^T \dot{\theta} = \mathbf{F}_e^T \mathbf{v}_e$$

$$\mathbf{U}^T \ddot{\theta} = \mathbf{F}_e^T J \ddot{\theta}$$

$$\mathbf{U} = J^T \mathbf{F}_e$$

GRASPING

NELLO STUDIO DEL PROBLEMA DEL GRASPING NON SI MODELLERÀ E LAVORERÀ CON IL BRACCIO MA CON LA MANO DAL

MOMENTO CHE L'AZIONE DEL GRASP NON RICHIESTE SOLO DI GESTIRE CONTEMPORANEAMENTE LE DISA MA ANCHE DI

FARLE COLLABORARE. INOLTRE, BRACCI ROBOTICI NON SONO DI INTERESSE DAL MOMENTO CHE NON È DIFFICILE REPE-

RE RIALI SUL MERCATO, A DIFFERENZA DELLE MANI. OGNI DITO PUÒ ESSERE PENSATO COME BRACCIO ROBOTICO E

L'OBBIETTIVO È QUELLO DI MUovere OGGETTI CHE NON POSSONO FARLO DA SOLI. MOLTE AZIENDE DI LOGISTICA,

COME AMAZON, INVESTONO IN QUESTO PER POTER AUTOMATIZZARE ~~MANU~~ L'INTERO PROCESSO PRIMA DEL TRASPORTO.

SE IL CONTROLLO È CENTRALIZZATO, IL CONTROLLORE GESTISCE TUTTO MA SI PARLA DI COLLABORAZIONE SE SI HANNO

PIÙ CONTROLLERI INDIPENDENTI. L'AZIONE DI MANIPOLAZIONE È DIVISIBILE IN 3 PARTI:

1) AVVICINAMENTO ALL'OGGETTO

2) RESTAURAZIONE DEL CONFATTO E INTERAZIONE

3) MOVIMENTO DELL'OGGETTO

E MODELLI

Ci si concentrerà principalmente sulle ultime due e si studieranno tramite metodi algebrici e non ci si

baserà su architetture specifiche. Innanzitutto bisogna distinguere tra i due tipi di grasping:

1) DI POTENZA: l'obiettivo in questo caso è il movimento statico degli oggetti.

2) DI PRECISIONE: permette un movimento relativo tra l'oggetto ed il palmo, evitando il movimento del braccio.

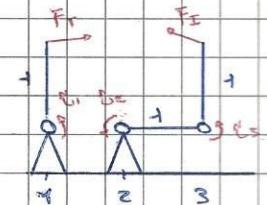
Il controllo è dato dai polpastrelli delle dita in modo che se ne possano sfruttare i gradi di libertà.

L'interazione con un oggetto è resa attraverso le forze esercitate dalle singole dita, infatti posizione e velocità degli oggetti sono conseguenze delle forze, ma ciò dipende anche dal modello del confatto. Si con-

sideri un sistema composto da due dita: poiché le due devono collaborare non

si possono usare due Jacobiane distinte ma bisogna ricongiungere ad un'unica, cioè

bisogna pensare a tutto come un unico robot con due catene cinematiche.



In generale data una forza \vec{F} applicata ad un braccio d , il procedimento per il calcolo del momento torcente è più essere compreso attraverso la screen matrix:

$$\vec{d} \times \vec{F} = S(d) \vec{F}$$

$$\text{Dove } d = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S(d) = \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix}$$

Mentre la direzione del vettore \vec{d} è data dalla regola della mano destra. Tale matrice può essere utilizzata

per qualsiasi prodotto vettoriale. Siano date le forze di confatto e i momenti torcenti nei singoli joints;

si vuole stabilire una relazione che li leggi direttamente.

$$F_c = \begin{bmatrix} F_T \\ F_I \end{bmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

inoltre da ciò che si è visto

$$V_T = J_T \vec{\theta}_1 \quad \text{e} \quad V_I = J_I \cdot \begin{bmatrix} \vec{\theta}_2 \\ \vec{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

DA QUI SI OTTIENE CHE

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_f \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_I & 0 \\ 0 & J_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

DONDE LA MATRICE È LA JACOBIANA DELLA MANO, 3×6 , E LA TRASPOSTA

È QUELLA USATA PER LE FORZE.

LA POTENZA DI CONTATTO È DATA DALLA SOMMA DELLE POTENZE DEI JOINTS SINGOLI, INPARTI LE FORZE SULL'END EFFECTOR CORRISPONDE AI MOMENTI TORCENTI NEI JOINTS E LA VELOCITÀ LINEARE A QUELLE ANGOLARI:

$$v_1 \dot{\theta}_1 + v_2 \dot{\theta}_2 = F_{eI}^T \dot{v}_i$$

$$(v_1 v_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = F_{eI}^T J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$(v_1 v_2) = F_{eI}^T J$$

$$N_I = J^T F_{eI}$$

QUINDI IN GENERALE $N = J^T F_e$ DONDE N È LA POTENZA AL CONTATTO

NEL CASO PROPOSTO SI PIREBEBE CHE

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} F_T \\ F_Y \\ F_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(d_1) & 0 \\ 0 & S(d_2) \\ 0 & S(d_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_T \\ F_Y \\ F_I \end{bmatrix}$$

MA DAL MOMENTO CHE LE FORZE HANNO SEMPRE IL COMPONENTE Z NUOLO NENTRE AL PIÙ ULTIM ELEMENTO DELLE PRIME DUE RIGHE DI $S(d)$ SONO NON NULLI, ALLORA L'UNICO COMPONENTE NON NUOLO DI N È Z, COME SUGGERISCE LA FISICA.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -b \\ -a & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a+b \end{bmatrix}$$

DONDE IL RISULTATO PRECEDENTE PUÒ ESSERE COSÌ RIDOTTO

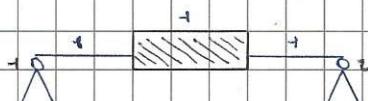
$$\begin{bmatrix} N_{1Z} \\ N_{2Z} \\ N_{3Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(d_1)l_r & 0 \\ 0 & S(d_2)l_r \\ 0 & S(d_3)l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix}$$

3×6 F_{Ty}

IN GENERALE LA JACOBIANA CAMBIA IN BASE ALLA CONFIGURAZIONE DEL MANIPOLATORE (POSIZIONE LINKS) E IN BASE AGLI END EFFECTORS I quali A LORO VOLTA DIPENDONO DA COME VIENE AFFERRATO UN OGGETTO.

EX

$$d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S(d_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$d\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S(d\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1E} \\ N_{2E} \end{bmatrix} = J^T \cdot \begin{bmatrix} F_{C1} \\ F_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IL PROBLEMA DI QUESTA CONFIGURAZIONE CONSISTE NELL'IMPOSSIBILITÀ DI STRINGERE (SQUEEZE) GLI OGGETTI. DA QUESTO ESEMPIO EMERGE IL CONCETTO DI KERNEL DI UNA MATRICE IN PARTICOLARE F È KERNEL DI J DAL MOMENTO CHE $J^T F = 0$, E CIÒ VALE PER TUTTE LE FORZE DIREZIONATE LUNGO I LINK (PUSH / PULL) E LUNGO Z. IN ALTRE PAROLE I KERNEL SONO TUTTE LE FORZE CHE SONO RESISTITE NON ATTRAVERSO UN MOMENTO FORZANTE MA ATTRAVERSO I VINCOLI MECCANICI DEI JOINTS.

GRASP MATRIX

COME SI È VISTO NEL GRASPING ALLE FORZE APPLICATE ALL'OGGETTO SI CONTRAPPONGONO LE FORZE VINCOLARI DERIVANTI DA QUESTO. SI STUDIA ORA IL PROBLEMA DAL PUNTO DI VISTA DELL'OGGETTO. LA MATRICE DI GRASP PERMETTE DI STABILIRE, A PARTIRE DAULE FORZE DI CONTATTO, L'EFFETTO COMPLESSIVO IN TERMINI DI MOVIMENTO. SI CONSIDERA DA ORA COME SI SIANO DI RIFERIMENTO O QUELLO FISSATO NEL BARICENTRO DELL'OGGETTO. LO SPOSTAMENTO IN TERMINI DI TRASLATORIE E DI ROTAZIONE PUÒ ESSERE STABILITO ATTRAVERSO



$$M \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{bmatrix} = \sum \text{TUTTE LE FORZE APPLICATE ALL'OGGETTO}$$

$$I \begin{bmatrix} \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{bmatrix} = \sum \text{TUTTI I MOMENTI FORZANTI APPLICATI ALL'OGGETTO}$$

LE QUALE DEFINISCONO LA DINAMICA DELL'OGGETTO. SI CONSIDERI LA PRIMA EQUAZIONE. INIZIANTURO ESISTONO 3 TIPI DI FORZE:

1) CONTATTO

2) GRAVITÀ

3) AMBIENTALI

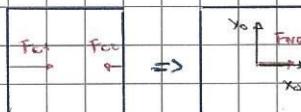
SIZIONE DEI PUNTI DI CONTATTO E NON DAL MECCANISMO CHE ATTUA IL GRASP. SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

$$F_{Cx} = \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{Cz} = \begin{bmatrix} F_{Cz} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = F_{NET}$$

$$\text{MA IN QUESTO CASO } F_{NET} = F_{Cx} + F_{Cz} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}}_{G_F} \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cz} \end{bmatrix}$$

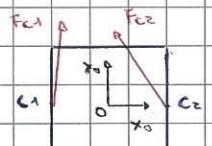


PER QUANTO RIGUARDA LA SECONDA EQUAZIONE, È POSSIBILE GENERARE UNA ROTAZIONE (PLANARE) SIA TRAMITE DUE O PIÙ FORZE, SIA TRAMITE L'APPLICAZIONE DI UN MOMENTO TORCENTE MA PER TRASMETTERE QUESTO È NECESSARIO CHE L'END EFFECTOR SIA UNA SUPERFICIE PIATTA, DUNQUE SI CONSIDERERANNO SOLO LE FORZE. SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

ESEMPIO:

$$\text{MOMENTO} = \overline{C_2 O} \times F_{Cz} = d_2 \times F_{Cz} = s(d_2) F_{Cz}$$

ANALOGAMENTE PER F_{Cx}



$$\Rightarrow \text{NET MOMENT} = \sum_i \text{MOMENTO} = \underbrace{\begin{bmatrix} s(d_1) & s(d_2) \end{bmatrix}}_{M_{NET}} \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cz} \end{bmatrix}$$

UNENDO I DUE RISULTATI SI OTTIENE CHE

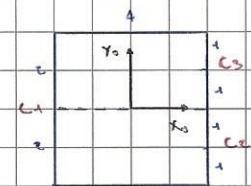
$$\begin{bmatrix} F_{NET} \\ M_{NET} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I \\ s(d_1) & s(d_2) \end{bmatrix}}_{\text{GRASP MATRIX}} \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cz} \end{bmatrix}$$

GRASP MATRIX

DONDE LA MATRICE DI GRASP CONTIENE TANTE COLONNE QUANTI SONO I PUNTI DI CONTATTO DIVERSI.

EX.

$$d_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} I & I & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IN GENERALE LA DINAMICA DELL'OGGETTO È DESCRITA COME

$$\begin{bmatrix} F_{NET} \\ M_{NET} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 & \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{DOVE } M = \begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

SI VOGLIONO TROVARE ORA I KERNEL DI G NEL CASO DI APPLICAZIONE DI DUE FORZE SU UN OGGETTO QUADRATO DI

LATO A.

$$\begin{bmatrix} F_{NET} \\ M_{NET} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ 0 \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

LE RIGHE E LE COLONNE ELIMINATE CONTENGONO SOLI 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Nx} \\ F_{Ny} \\ M_{Nz} \end{bmatrix}$$

CHE CORRISPONDONO ALLE RIGHE RIMANENTI DELLA MATRICE

$$\begin{cases} F_{Cx} + F_{Cz} = 0 \\ F_{Cy} + F_{Cz} = 0 \\ -zF_{Cx} + zF_{Cy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Cx} = -F_{Cz} \\ F_{Cy} = F_{Cz} = 0 \end{cases}$$

I KERNEL HANNO FORMA

$$\begin{bmatrix} F_{Cx} \\ 0 \\ 0 \\ -F_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IN QUESTO CASO NON C'È ALCUN MOVIMENTO DELL'OGGETTO MA CIÒ È PROSPETTIVO AL GRASP, CIÒ È LE FORZE APPLICATE

DEVONO AVERE MODULO E DIREZIONE TALI CHE L'OGGETTO NON SCIVOLI E CHE CI SIA SUFFICIENTE ATTRITO STATICO DA

MANTENERE LA PRESA, ANCHE IN CASO DI FORZE ESTERNE. IN TERMINI VETTORIALI SI DEVE FAR

IN MODO CHE LE RISULTANTI DELLE FORZE AI PUNTI DI CONTATTO RIENTRINO SEMPRE NEL CONO

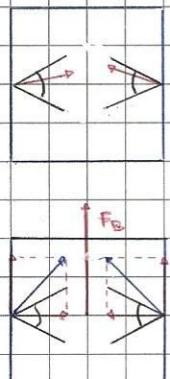
D'ATTRITO. SE UNA FORZA ESTERNA TENTA DI PORRE VIA L'OGGETTO E SE LE FORZE DELLA

PRESA NON AUMENTANO, LA PRESA VIENE PERSA. IN GENERALE PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA

E' NECESSARIO CONOSCERE LA DIREZIONE NORMALE NEI PUNTI DI CONTATTO ED IL COEFFICIENTE DI

ATTRITO. LA FORZA ESTERNA CHE SI TRASFERÀ PRINCIPALMENTE È QUELLA DI GRAVITÀ E CON

\mathbf{W}_{ext} SI INDICA IL VETTORE $\begin{bmatrix} F_{ext} \\ N_{ext} \end{bmatrix}$. IL PROBLEMA PUÒ ESSERE FORMULATO COME



$$G \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix} = -\mathbf{W}_{ext} \quad -\mathbf{W}_{ext} = [0 \ -mg \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

DONDE LE FORZE AL CONTATTO SONO LE INCognite, DUNONE

$$\mathbf{F}_c = G^{\#}(-\mathbf{W}_{ext}) + \mathbf{N}(G) \mathbf{E}$$

DONDE # INDICA PSEUDOUNIVERSA

IN QUESTO CASO $F_c = [0 \text{ mg/z} \ 0 \ | \ 0 \text{ mg/z} \ 0]^T$ MA LE FORZE NON POSSONO ESSERE DIRETTE PARALLELAMENTE

A QUELLA DI GRANITÀ PERCHÉ NOI SI AVREBBE ACCIPIATO CON L'OGGETTO E SCIVOLEREBBE, DUNQUE A QUESTA VAN-

NO SOMMARE ~~LE~~ FORZE DIRETTE VERSO L'INTERNO IN MODO CHE $F_c = F_{cp} + F_{ci}$ RIENTRI NEL CONO D'ATTRITO, PER

QUESTO $F_{ci} \in N(G)$, $G F_{ci} = 0$. PER OTTENERE QUESTO, È NECESSARIO ~~NON~~ APPLICARE IL GIUSCO NOLLENDO TOR-
CENTE. CON LE DUE EQUAZIONI

.) $-W = G - F$ CHE INVERTITA PERMETTE DI STABILIRE LA FORZA AL CONTATTO DA APPLICARE PER IL GRASP.

.) $\Upsilon = J^T F$ CHE PERMETTE DI STABILIRE IL MOMENTO TORCENTE NECESSARIO PER APPLICARE F .

NEL GRASPING, PERO', È IMPORTANTE AVERE MISURE IN FEEDBACK DELLE FORZE APPLICATE, CONOSCENDO IL MOMEN-
TO TORCENTE APPUCATO. PER AVERE QUESTE INFORMAZIONI, DATO IL SISTEMA

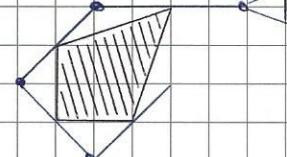
$$\begin{bmatrix} -W \\ \Upsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ch} \\ F_{cz} \end{bmatrix}$$

DOVE $m = \# \text{ JOINTS}$ E $mc = \# \text{ CONTACT POINTS}$

$(m+5) \times 1$ $3mc \times 1$

È NECESSARIO CHE CI SIANO PIÙ EQUAZIONI CHE VARIABILI, CIOÉ $m + 5 \geq 3mc$. NEL CASO RAFFIGURATO DI
ENVELOPING GRASPING È IMPOSSIBILE VALUTARE LE FORZE, INFATI SI HANNO 10 EQUAZIONI

E 12 VARIABILI, MA NON È RILEVANTE CHE ESSE SIANO NEL CONO D'ATTRITO DAL MOMENTO
CHE L'OGGETTO È BLOCCATO DALLA PRESA.



SE IL SISTEMA NON HA UN NULLSPACE, ALLORA ESSO HA UNA SOLA SOLUZIONE E LE FORZE DEVONO TROVARSI NE-
CESSARIAMENTE NEL CONO D'ATTRITO PER FARE PRESA MA, SE NON LO FOSSENDO, NON SI POTREBBE INTERVENIRE ARTIFI-
CIALMENTE. DUNQUE È NECESSARIO CHE CI SIANO INFITE SOLUZIONI, CIOÉ $N(G) \neq \emptyset$. SE G È A RANGO MAS-
SIMO SI HA UN GRASP CHE PUÒ MUOVERE L'OGGETTO IN OGNI DIREZIONE.

HAPTICS

LA TECNOLOGIA HAPTICA È L'ULTIMA FRONIERA DELLA ROBOTICA DEL GRASPING E CONCERNÉ LA RESTITUZIONE ALL'UTENTE
O L'INDIMENTICO DELLA PRESA IN FUNZIONE DEUE FORZE PERCEPITE. IN ALTRE PAROLE "HAPTIC" SIGNIFICA INTERAZIONE
TATILE. I COMPONENTI NECESSARI PER TAUE INTERAZIONE SONO:

- 1) MISURA DEL MOVIMENTO DI UNA CERTA PARTE DEL CORPO TRAMITE UNA TECNOLOGIA APPROPRIATA.
- 2) RILEVAMENTO DEUE COLLISIONI TRAMITE UN'ELABORAZIONE DELLA MISURA, RISPERO AD UNA RAPPRESENTAZIONE DEL OGGETTO.
- 3) RENDERING HAPTICO TRAMITE UN ATTUATORE PER PERMETTERE L'ACKNOWLEDGEMENT ALL'EFFECTIVITÀ DELL'AZIONE SVOLTA, RESTITU-
ENDO UNA SENTIZIONE REALE O SIMULATA A UN DISPLAY HAPTICO.

IN TERMINI MATEMATICI CIÒ SI TRADUCE COME

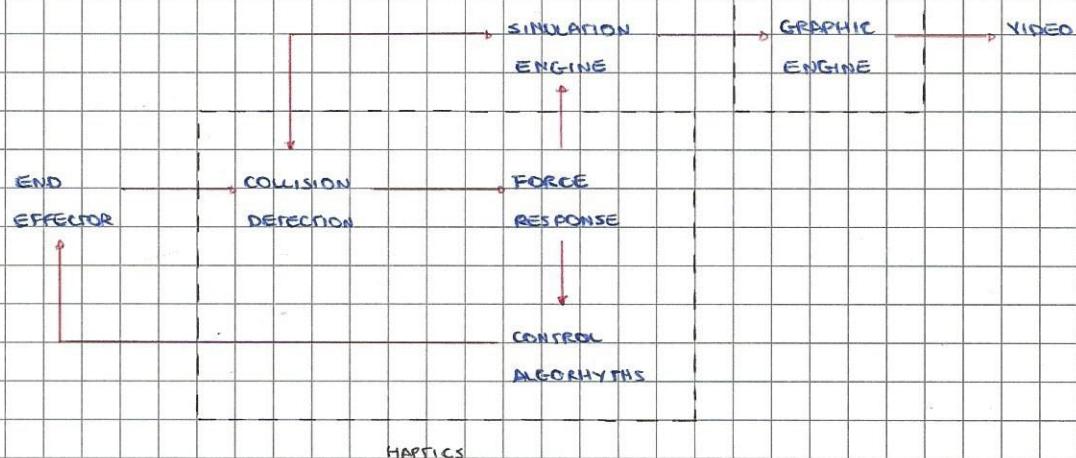
INPUT $\rightarrow K \Delta X \rightarrow F \rightarrow U \rightarrow$ output DOME ΔX È RELATIVO AD UNA SUPERFICIE

IN GENERALE LA QUANTITÀ DI ENERGIA SCAMBIATA NELL'INTERAZIONE ATTICA È MOLTO PIÙ ALTA RISPETTO AGLI ALTRI

TIPI DI INTERAZIONE MINIMA PER QUESTO NON È UN SISTEMA EFFICIENTE PER COMUNICARE. IL TOCCO È ESSENZIALMENTE UNO

SCAMBIO DI FORZE E PER QUESTO LA ROBOTICA È IL CAMPO GIUSTO DA CUI SVILUPPARE INTERFAZIE ATTICHE. IL PROCESSO

PUÒ ESSERE COSÌ SCHEMATIZZATO



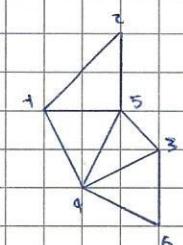
IL SIMULATION ENGINE È QUELLO CHE SVOLGE I CALCOLI AL FINE DI RIVENDRE LA COLLISIONE, E DUNQUE DI RESISTERE IL FEEDBACK, SIA DI MOSTRARE A SCHERMO L'AMBIENTE VIRTUALE.

COLLISION DETECTION

UN OGGETTO VIRTUALE È RAPPRESENTATO DA UNA NUOVA DI PUNTI COLLEGATI DA FORME CHE NE DEFINISCONO E RAPPRESENTANO APPROSSIMATIVAMENTE LA SUPERFICIE E CHE SONO TRIANGOLI. SI È SCELTA TALE FORMA IN QUANTO NON È DETTO CHE SIA SEMPRE POSSIBILE DEFINIRE FIGURE PIÙ COMPLESSE ED IN QUANTO RAPPRESENTANO BENE LE DEFORMAZIONI DELLE SUPERFICI. OGNI TRIANGOLI È IDENTIFICATO DAI PROPRI VERTICI

EX.

T ₁	1	2	5
T ₂	2	4	5
T ₃	3	4	5
T ₄	3	4	6



IL RIVENIMENTO DELLA COLLISIONE CONSISTE NEL DETERMINARE SE SI RIENTRA NELLA BOUNDING BOX CHE CONTIENE PARTE DELLA SUPERFICIE DELL'OGGETTO. LA BOX PIÙ PICCOLA È QUELLA CHE CONTIENE UN TRIANGOLI.

DAL QUA IN POI CON X_h SI IDENTIFICA IL VETTORE AVATAR A 3 DIMENSIONI. SE X_h È FUORI LA BOUNDING BOX, SI È SICURI CHE

LA SUPERFICIE NON VIENE TOCCATA, DUNQUE NON SI NECESSITA DI RISONDERE CON ALCUNA FORZA. SE X_h È DENTRO, È NE-

CESSARIO VERIFICARE UN BOUNDING PIÙ STRINGENTE E SI DEVE CALCOLARE IN OGNI BOX

SI TROVA x_h . CIO' SI RIPETE FINO A CHE NON SI RIcade NEL CASO PRECEDENTE O

FINO A QUANDO NON SI ARRIVA ALLE BOX MINIME. LA VERIFICA DEL TOCCO SI SVOLGE

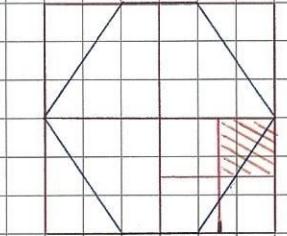
LAVORANDO SUL TRIANGOLI CONE PIANO, DESCRITTO DALL'EQUAZIONE

$$(a b c) x_p = d$$

DONDE x_p È UN PUNTO QUALSIASI DEL PIANO E

DONDE $(a b c)$ SONO COEFFICIENTI LEGATI AI

VERTICI DEL TRIANGOLI



UN TRIANGOLI È DUNQUE DESCRITTO DAL SISTEMA

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ d \end{bmatrix}$$

CHE PUÒ ESSERE NORMALIZZATO, DIVIDENDO PER d , IN MODO CHE

1
1
+

IN GENERALE SE x_h È NEI' EQUAZIONE DEL PIANO, $(a b c) x_h - d = 0$, SI OTTIENE

) > 0 SE È SOPRA IL PIANO, CIOÉ NON C'È CONTATTO.

$$P \xrightarrow{>0} = 0$$

) = 0 SE TOCCA IL PIANO MA HA PROBABILITÀ NULLA COME EVENTO.

) < 0 SE TOCCA L'OGGETTO, CIOÉ SE DEFORMA LA SUPERFICIE.

DUNQUE L'ALGORITMO DI COLLISION DETECTION CONSISTE IN:

1) COSTRUIRE LE BOUNDING BOX: NEL CASO PLANOARE UN TRIANGOLI È UN SEGMENTO E IL PIANO UNA RETTA E SI HA UNA NU-

VOLA DI PUNTI (E MAGUE TRIANGOLARI) INDIVIDUATI DA COORDINATE SECONDO UN QUPICHI

SISTEMA DI RIFERIMENTO. PER COSTRUIRE LA BOX INIZIALE SI CONSIDERANO I VALORI MINI-

MI E MASSIMI DEGLI COORDINATE VERSO TUTTI I COMPONENTI SU TUTTA LA NUVOLO.

2) INDIVIDUARE $x_h(t)$ LA POSIZIONE DELL'AVATAR.

3) ESPRIMERE IL PIANO SECONDO L'EQUAZIONE VISTA, CALCOLANDO $(a b c)$ DAI VERTICI DEL TRIANGOLI.

4) PERFORMARE LA COLLISION DETECTION Ponendo $x_p = x_h$ NEI' EQUAZIONE DEL PIANO E STUDIARE IL SEGNO DEL RISULTATO.

SE LE COORDINATE DI x_h RIENTRANO NEL RANGE DELLA BOX ALLORA PUÒ ESSERCI CONTATTO E SI VERIFICA IN QUESTO
modo, altrimenti non può e non è necessario alcun calcolo aggiuntivo.

5) SUDDIVINIRE LA BOUNDING BOX: SI SUDDIVINE LA BOUNDING BOX IN 2 PER OGNI DIMENSIONE SE SI È POTENZIALMENTE IN CON-

TATTO E SI RIPETE FINO AD AVERE UN SOLO TRIANGOLI (O SEGMENTO). SI ALCALCOLA TUT-

TO A PARTIRE DAL PASSO 2.

In teoria quando l'algoritmo viene eseguito l'oggetto intero ha, conoscendo la posizione iniziale e la velocità di movimento del dito, si può restringere l'area, cioè il numero di triangoli, su cui svolgere i calcoli.

RENDERING ARTICO

Se x_h si trova all'interno della superficie si può rispondere con una forza normale alla superficie. È necessario innanzitutto trovare x_p sul punto a distanza minore a x_h sulla superficie (in avanti)

$$F = \kappa (x_h - x_p)$$

Trovare x_p è un problema di minimizzazione sulla distanza, dunque

$$d = \sqrt{(x_p - x_h)^T (x_p - x_h)}$$

$$\Rightarrow \min_{x_p} \frac{d^2}{2} = \min_{x_p} d \quad \text{ma } x_p \in P, \text{ cioè } (a \ b \ c) x_p = d$$

$$\min_{x_p, \lambda} \frac{1}{2} (x_p - x_h)^T (x_p - x_h) + \lambda [(a \ b \ c) x_p - d]$$

secondo il metodo di Lagrange

$$= \min_{x_p, \lambda} Q(x_p, \lambda)$$

dove λ è uno scalare

L'ultimo si trova risolvendo

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x_p} = (x_p - x_h) - \lambda (a \ b \ c)^T = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = (a \ b \ c) x_p - d = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_p - (a \ b \ c)^T \lambda &= x_h \\ \Rightarrow (a \ b \ c) x_p + \lambda d &= d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \hline a & b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ d \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda κ , esso deve essereato in modo che la forza sia sufficiente a non permettere deformazioni eccessive. Bisogna però distinguere tra il κ del materiale reale e quello assunto nella simulazione il quale sarà sempre minore per le limitazioni nella rappresentazione. κ deve essere sufficientemente alto da evitare l'inerzia quando si hanno più punti di contatto. Si ha un inferiore κ diverso se la superficie è deformabile quando e viene deformata.

Si consideri un oggetto curvo, come una sfera. In generale la differenza temporale tra un'azione ed il

$x_p(t)$

$x_h(t)$

FEEDBACK SENSORIALE NON PUÒ SUPERARE LA FRAZIONE DI SECONDO IN QUANTO SI AVREBBE

LA DISSOCIAZIONE DEI DUE EVENTI. LA COMPUTAZIONE PERÒ POTREBBE IMPIEGARE MOLTO TEMPO

DUNQUE SI DEVE CERCARE DI USARE MENO DATI POSSIBILI. SI IPOTIZI, PER ESEMPIO, DI

VOLER APPROSSIMARE LA SFERA CON UN CUBO: LE FORZE NON POSSONO ESSERE DIRETTE ~~PARALLELE~~

BUTTO SECONDO LE NORMALI A QUESTO IN QUANTO RISULTEREBBE IRREALISTICO. SI POTREBBE AUMENTARE IL NUMERO DI

VERTICI, MIGLIORANDO L'APPROSSIMAZIONE, O ~~MASSIMO~~ SI POTREBBE UTILIZZARE L'INTERPOLAZIONE: SI CONSIDERA UN

PUNTO SULLA SUPERFICIE REALE E SI CALCOLANO I PIANI, CONSIDERANDO I PUNTI ADJACENTI. PER OGNIUNO DI ESSI SI

DETERMINA LA NORMALE DERIVANDO SECONDO X, Y E Z LA FUNZIONE DEL PIANO OPPURE

$$(a, b, c) / (a^2 + b^2 + c^2)$$

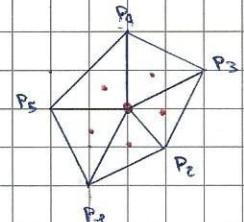
E, FACENDO LA MEDIA DI QUESTE, SI OTTIENE LA NORMALE AL PUNTO INIZIALE. CIO' È

EGUIVALENTE A RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{p5} \end{matrix} & \left[\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right] \\ \hline 5 \times 3 & 3 \times 1 & 5 \times 1 \end{array}$$

DOVE $(a, b, c)^T$ È L'INDOGNICA E CONCISA NELLA NORMALE AL PIANO

DEFINITO DA TUTTI I PUNTI



TENENDO ANCORA CONTO DELLA COSTRUZIONE FATTA, SE SI PENETRA NELLA SUPERFICIE,

BISOGNA STABILIRE LA NORMALE DELLA FORZA DA APPLICARE. SI CONSIDERI INIZIALMENTE

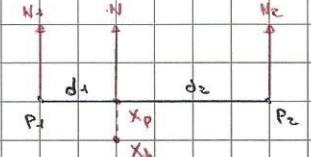
IL CASO BIDIMENSIONALE RAPPRESENTATO: L'INTERPOLAZIONE PERMETTE DI STABILIRE CHE

$$N = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot N_1 + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \cdot N_2 \quad \text{DOVE } d_1 = \frac{x_p p_1}{x_p p_2} \quad d_2 = \frac{x_p p_2}{x_p p_1}$$

IN PARTICOLARE

) SE $d_1 = 0$, $N = N_1$

) SE $d_2 = 0$, $N = N_2$



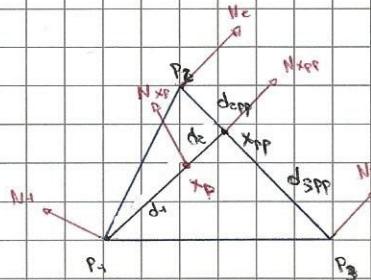
PER IL CASO TRIDIMENSIONALE NON SI FA ALTRO CHE APPLICARE QUESTO DUE VOLTE.

INNANZITUTTO VA SCELTO UN VERTICE E VA PROIESTATO SUL LATO OPPOSTO PASSANDO

PER x_{pp} , IL QUALE È CONOSCIUTO DALLA COLLISION DETECTION. SI CALCOLA Poi LA

NORMALE IN x_{pp} TRAMITE L'INTERPOLAZIONE SUL LATO IN CUI SI TROVA

$$N_{xpp} = \frac{d_{1pp}}{d_{1pp} + d_{2pp}} \cdot N_1 + \frac{d_{2pp}}{d_{1pp} + d_{2pp}} \cdot N_2$$



INFINE SI INTERPORA SULLA PROIEZIONE PER CALCOLARE LA NORMALE A x_p .

$$N_{xp} = \frac{dz}{d_1 + dz} N_1 + \frac{d_1}{d_1 + dz} N_{xpp}$$

SI CONSIDERI ORA UN OGGETTO FINO: SE x_h È TROPPO IN PROFONDITÀ L'ALGORITMO DI COLLISION

DETECTION RICONOSCEREBBE COME PIÙ VICINA LA SUPERFICIE INFERIORE E SI AVREBBE UNA FORZA

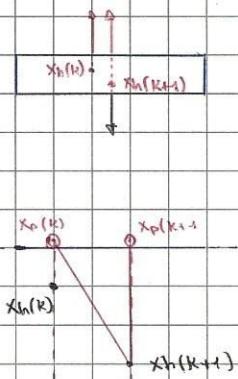
DIRETTA NEL SENSO OPPOSTO. PER CIÒ VA TENUTA MEMORIA DELLO STATO PASSATO. PER RISOLVERE

IL PROBLEMA, INVECE DI PRENDERE x_p SULLA SUPERFICIE, SI CONSIDERA COME CENTRO DI UNA

SFERA DI RAGGIO TRASCURABILE. SI TRACCIA IL SEGMENTO $\overline{x_h(k+1) x_p(k)}$ E IL PIANO

INTERSECATO È QUELLO SU CUI UNICOAMENTE VA SVOLTO L'ALGORITMO DI COLLISION DETECTION.

QUESTA TECNICA È DETTA ALGORITMO DI PROSSIMITÀ VIRTUALE.



FORCE FEEDBACK

FINORA SI È TRASFORMATO L'ATTRITO IN QUANTO LA FORZA APPLICATA SI ASSUMEVA PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE

DUNQUE LA FORZA TANGENTE È NULLA. TENENDO CONTO DELL'ATTRITO, DATA UNA FORZA NON-DIRETTA

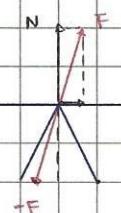
UNGONO LA NORMALE, LA FORZA REATTIVA, LA QUALE È ESATTAMENTE UGUALE E OPPosta,

DEVE RICADERE NEL CONO D'ATTRITO. ESSA DUNQUE È ESPRIMIBILE COME LA SOMMA DEI

COMPONENTI NORMALE E TANGENTE ALLA SUPERFICIE:

$$F_N = N^T F N = N N^T F$$

DOVE $N^T F$ È IL MODULO DELLA COMPONENTE NORMALE E N IL VETTORE NORMALE



$$\text{DA } F = F_N + F_T$$

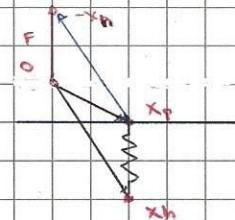
$$F_T = F - F_N = F - N N^T F$$

$$= (I - N N^T) F$$

SECONDO L'ALGORITMO DI RENDERING:

$$F = k_h [x_p(k) - x_h(k)]$$
 È LA FORZA REATTIVA ESECUTATA DAGLI ATTUATORI SUE DICHI.

$$-F = k_h [x_h(k) - x_p(k)]$$
 È LA FORZA ESECUTATA PER MUovere L'OGGETTO VIRTUALE.



UN ESEMPIO SONO $JF = \ddot{x}$ E $F = M\ddot{x}$.

SI CONSIDERI UN OGGETTO RIGIDO E SI RAPPRESENTI IL PONTO DI

CONTATTO COME UNA SFERA DI RAGGIO NUOVO, CIOÈ $x_0(k) = x_p(k)$,

$$r = 0$$

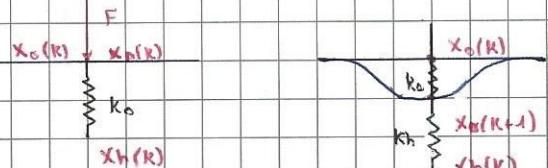
$$x_0(k) \leftarrow x_0(k) \quad x_0(k) \quad x_0(k)$$

$$x_h(k)$$

Allora $x_o(k+1) = x_o(k)$ e non dipende da x_h in quanto la superficie è non deformabile e l'oggetto

è statico. Si consideri ora un oggetto deformabile:

$$x_o(k+1) = f(x_h(k))$$



Il modello più semplice per gli oggetti deformabili è la molla

per la quale $\Delta x = F/k_o$ dove k_o nella simulazione può essere fissato scindendo quello reale dalla deformazione ma è diverso da quello dell'interfaccia artica.

$$\begin{aligned} x_o(k+1) &= k_o x_o(k) + \Delta x = x_o(k) + \frac{F}{k_o} \\ &= x_o(k) + \frac{k_h(x_h(k) - x_o(k))}{k_o} \end{aligned}$$

Dunque la forza necessaria per ottenere tale deformazione è

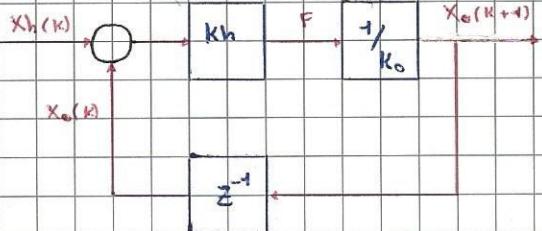
$$\begin{aligned} F &= k_h |x_h(k) - x_o(k)| \\ &= k_o |x_o(k) - x_o(k+1)| \end{aligned}$$

dove per corpi rigidi, $k_h \neq 0$ e $k_o = 0$

per corpi morbidi, $k_h \neq 0$, $k_o \neq 0$ e $k_h = k_o \Rightarrow$ stesso spostamento Δx per entrambe.

Si consideri l'implementazione di questi risultati per creare un simulatore: è necessario costruire un sistema a controllazione che sia asintoticamente stabile.

$$\begin{aligned} z[x_o(k+1)] &= \frac{k_h/k_o}{1 + \frac{k_h z}{k_o}} z[x_h(k)] \\ &= \frac{k_h z}{k_o z + k_h} z[x_h(k)] \end{aligned}$$



Si ha un polo in $-\frac{k_h}{k_o}$ che deve essere stabile, dunque

$$\left| \frac{k_h}{k_o} \right| < 1 \Rightarrow k_h < k_o$$

Per stabilità si intende che al tatto di un oggetto virtuale, la parte di superficie coinvolta si stabilizza ad

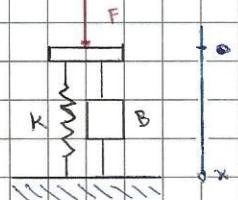
un certo valore. In realtà il sistema non ha dinamica ma lo assume in simulazione dal momento che i

calcolatori campionano e aggiornano il sistema non secondo diversi valori della forza.

OGGETTI DINAMICI

LA DINAMICA IN GENERALE DEGLI OGGETTI È DESCRIVIBILE ATTRAVERSO ODE E IL PROBLEMA PIÙ GRANDE IN SIMULAZIONE È TROVARE RISOLVITORI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI AL FINE DI AVERE IL REAL-TIME. SI FA DUNQUE USO DI SEMPLIFICAZIONI. UN ESEMPIO DI OGGETTO DINAMICO È

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$$



LA QUALE È UN ODE DI 2° ORDINE DIPENDENTE DAL TEMPO. SI APPROSSIMA QUESTA AD UN

SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI 1° ORDINE

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

LA DIMENSIONE DEL VETTORE È PARI ALL'ORDINE DELL'EQUAZIONE

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow M\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Kx_1 = F \quad \dot{x}_2 = \frac{(-Kx_1 - Bx_2 + F)}{M}$$

DUNQUE RICONDUCENDO IL tutto ALLA FORMA $\dot{x} = Ax + Bu$, DOVE $F=0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F$$

SI CONSIDERI ORA LO SPOSTAMENTO DI UN OGGETTO IN UNO SPAZIO 3D (ESEMPIO CASO MULTIVARIALE)

$$M\ddot{x} = F \quad \text{Dove } \dot{x} = [x \ y \ z]^T$$

SI DEFINISCE LO STATO $\lambda = (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T = (\lambda_1 \dots \lambda_6)^T$ PER PASSARE A 6 EQ. DIFFERENZIALI DI GRADO 1.

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \quad \lambda_2 = F_x / m_x$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_5 \quad \lambda_5 = F_y / m_y$$

Dove le componenti m della massa sono uguali ma quelle

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_6 \quad \lambda_6 = F_z / m_z$$

dell'inerzia sono diverse

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0_3 \\ m \ 0 \ 0 \\ 0 \ m \ 0 \\ 0 \ 0 \ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

IN GENERALE $\dot{x}(t) = f(x(t); v(t))$ MA I CALCOLATORI LAVORANO NEL DISCRETO PER CUI $\dot{x}(t)$ NON ESISTE PROPRIMENTE E

$$x(t) \Rightarrow x(t_0 + kh) \Rightarrow f(x(t_0 + kh); v(t_0 + kh)) \quad \text{DOVE } h \text{ È UN INTERVALLO E } k \in \mathbb{N}$$

PER DETERMINARE \dot{x} SI UTILIZZA IL METODO DI EULER IL QUALE CONSISTE NELL'APPROXIMARE f ALLA SUD-ESPLESSIO-

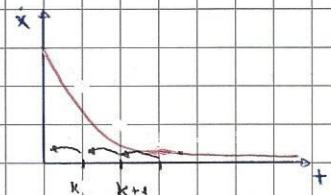
NE DI TAYLOR AL PRIMO ORDINE

$$x(t_0 + h) = x_0 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \cdot h, b = x_0 + f(x(t_0); u(t_0)) \cdot h$$

N.B.: SE SI CONOSSEREO' TUTTE LE DERIVATE DI F IN UN PUNTO SI POTREBBE PREVEDERLA IN UN FUTURO QUALSIASI.

TALE APPROSSIMAZIONE HA PERO' FORTE LIMITAZIONI. SI PREnda PER ESEMPIO UNA MOLA

$$\begin{cases} \dot{x} = -kx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t_0 = 0 \quad \text{CON SOLUZIONE } e^{-kt} x_0$$



SECONDO L'APPROSSIMAZIONE DI EULER

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + f(x(t_0), u(t_0)) \cdot h$$

$$x(k+1) = x(k) + (-kx(k)) \cdot h$$

$$= \underbrace{(1 - kh)}_{A} x(k)$$

A

$$\Rightarrow \text{eig}(A) = (1 - kh) \quad \text{POICHÉ SI È NEL CASO MONODIMENSIONALE}$$

PER LA STABILITÀ SI IMPONE CHE $|1 - kh| < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - kh < 1 \\ 1 - kh > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} h > 0 \\ h < \frac{2}{k} \end{cases} \quad \Rightarrow 0 < h < \frac{2}{k}, k \in \mathbb{R}^+$$

DUNQUE PIÙ K È ALTO, PIÙ H DIVENTA PICCOLO E PEGGIORE È IL REAL-TIME. IL FATTO CHE SI HA UN PROBLEMA

MA NUNERICO FA CAPIRE CHE L'APPROSSIMAZIONE È TROPPO GROSSOLANA. SI VUOLE DUNQUE IL METODO DEL MID-

POINT IL QUALE CONSIDERA ANCHE IL SECONDO TERMINE DERIVATO DELL'ESPANSIONE. SI SUPONGA DI AVERE UN SISTEMA AD EVOLUZIONE LIBERA:

$$x(t_0 + h) = x_0 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \cdot h + \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0} \frac{h^2}{2}$$

LA DERIVATA SECONDA È STABILITA SEMPRE TRAMICHE L'ESPANSIONE DI TAYLOR SVOLTA SU F

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} \cdot \Delta x$$

↓

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} \cdot F(x_0)$$

Dove $\frac{df}{dx} \Big|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ma non si conosce Δx . Secondo il Herodo, $\Delta x = \frac{h}{2} F(x_0)$ in

MODO DA SEMPLIFICARE QUESTA ESPRESSIONE. DUNQUE SOSTITUENDO TUTTO NELL'EQNACIIONE INIZIALE:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + h f(x_0) + \frac{h^2}{2} \left[F\left(x_0 + \frac{h}{2} F(x_0)\right) - F(x_0)\right] \frac{f'(x_0)}{F(x_0)} \frac{z}{h}$$

$$= x(t_0) + h f(x_0) + h \left[F\left(x_0 + \frac{h}{2} F(x_0)\right) - F(x_0)\right]$$

$$= x_0 + h f\left(x_0 + \frac{h}{2} f(x_0)\right)$$

IN PIÙ RISPETTO ALL'APPROXIMAZIONE PRECEDENTE

$$\Rightarrow x(k+1) = x(k) - h k e \cdot \left(x(k) + \frac{h}{2} (-K_e x(k)) \right)$$

$$= x(k) - k_e h x(k) + \frac{h^2}{2} K_e x(k)$$

$$= \left[1 - K_e h + \frac{h^2}{2} K_e^2 \right] x(k)$$

IN PIÙ RISPETTO ALL'APPROXIMAZIONE PRECEDENTE

IL TERMINE NEGATIVO PERMETTE H MAGGIORI.

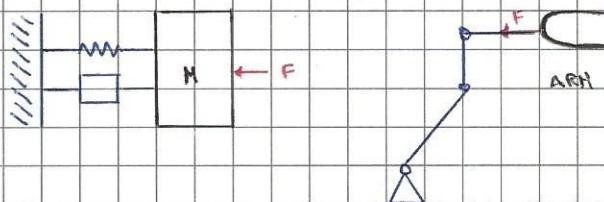
TRANSPARENCE

LA TRASPARENZA È UN CONCETTO LEGATO ALLA DINAMICA DELL'AMBIENTE COMPOSTO DA UN ROBOT, CHE FUNGE DA

INTERFAZIA UMANO, E, IN QUESTO CASO, UN SIMULATORE VIRTUALE DELL'OGGETTO E DELLA SUA DINAMICA. SI DEFINISCE

$$F_h = k_h [x_h(t) - x_p(t)]$$

$$x_p = x_0 + \frac{1}{z}$$



LA DINAMICA NEL SIMULATORE È DESCRIVIBILE ATTRAVERSO

$$M \ddot{x}_0(t) = F - B x_0(t) - K x_0(t)$$

IL PROBLEMA VIENE AFFRONTATO UTILIZZANDO LA TRASFORMATA DI LAPLACE

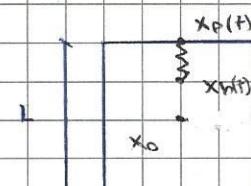
LA QUALE PERMETTE DI TRASFORMARE EQ. DIFFERENZIALI IN ALGEBRICHE. PER CON-

DIZIONI INIZIALI PARI A 0:

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = X_0(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}_0(t)] = s X_0(s) \Rightarrow M s^2 X_0(s) = F_h(s) - B s X_0(s) - K X_0(s)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_0(t)] = s^2 X_0(s)$$



SI DEFINISCE IMPEDIMENTA IL RAPPORTO TRA FORZA E VELOCITÀ DELL'OGGETTO:

$$Z = \frac{F}{V} \Rightarrow F(s) = Z(s)V(s)$$

$$F_h(s) = Z(s) \cdot s \cdot x_0(s)$$

$$\Rightarrow F_h(s) = M_s V(s) + B V(s) + \frac{K V(s)}{s}$$

$$= \left(M_s + B + \frac{K}{s} \right) s x_0(s)$$

IMPEDIMENTA DELLA DINAMICA

IL PROBLEMA È CHE ESISTONO DUE DINAMICHE: QUELLA DEL ROBOT, LA QUALE DEVE ESSERE IMPERCENTIBILE, E QUELLA DEL SIMULATORE CHE È QUELLA INTERESSANTE. UN SISTEMA SI DEFINISCE

TRASPARENTE SE L'UNICA DINAMICA PERCEPIRA È QUELLA DELL'OGGETTO

VIRTUALE. LA DINAMICA REALE È DATA DA

$$I_r \ddot{\theta} = \ddot{U} - J^T F - B_r \dot{\theta}$$

Dove $I_r \ddot{\theta}$ è il momento forzante COMMESSO dall'interfaccia, è quello

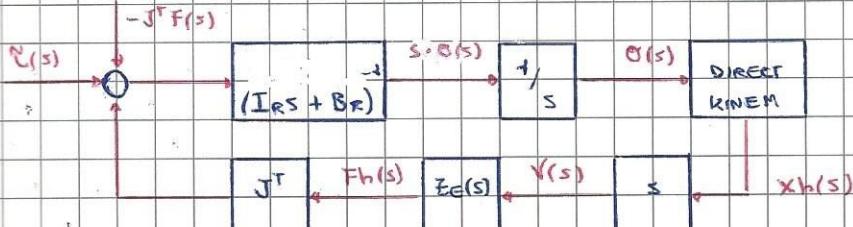
APPLICATO DAL ROBOT, $J^T F$ quello applicato dall'ambiente e $B_r \dot{\theta}$ è l'attrito viscoso dei joint. APPLICANDO LAPLACE A QUESTA EQUAZIONE:

$$I_r s^2 \ddot{\theta}(s) = \ddot{U}(s) - J^T F(s) - B_r s \dot{\theta}(s)$$

$$(I_r s + B_r) s \dot{\theta}(s) = \ddot{U}(s) - J^T F(s)$$

$$s \cdot \dot{\theta}(s) = (I_r s + B_r)^{-1} [\ddot{U}(s) - J^T F(s)]$$

Dove $(I_r s + B_r)^{-1} = Z_J$ JOIN IMPEDIMENTA



SE SI ASSUME KH MOLTO ALTO, ALLORA $K_h(t) = K_p(t)$ E $\dot{x}_h(t) = \dot{x}_p(t) = \dot{x}_0(t)$ IN QUANTO PIÙ RIGIDO.

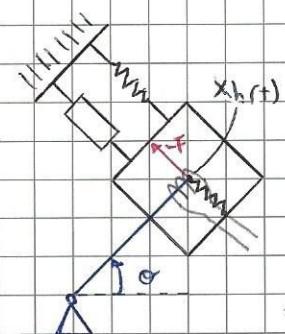
$$F_h(s) = K_h [x_h(s) - x_p(s)]$$

$$= Z_E(s) \cdot s \cdot x_0(s)$$

$$= Z_E(s) \cdot s \cdot x_h(s)$$

$$\Rightarrow F_h(s) = Z_E(s) \cdot s \cdot x_h(s)$$

DINAMICA DELL'AMBIENTE VIRTUALE



IN REALTA' LA FORZA PERCEPIRA' E' $F(s) = Z_{HF}(s) s x_h(s)$. SI RIPRENDE LO STUDIO SULL'EFFETTO COMPLESSIVO:

$$J \cdot s \cdot \Theta(s) = J \cdot Z_J^{-1} \cdot [U(s) - J^T F(s)]$$

DALLA JACOBIANA DELLA MANO

$$\Rightarrow s \cdot x_h(s) = J \cdot Z_J^{-1} U(s) + J \cdot Z_J^{-1} J^T (-F)$$

$$v = J \dot{\theta}$$

POICHÉ $U = J^T Z_E s x_h(s)$

$$\dot{x}_h(t) = J \dot{\theta}(t)$$

$$s \cdot x_h(s) = J \cdot Z_J^{-1} J^T (-F) + J \cdot Z_J^{-1} J^T Z_E s x_h(s)$$

$$s x_h(s) = J s \dot{\theta}(t)$$

$$\Rightarrow (J^T Z_J J^{-1}) s x_h(s) = -F + Z_E s x_h(s)$$

$$(J Z_J^{-1} J^T)^{-1} = (J^T)^{-1} Z_J J^{-1} = J^T Z_J J^{-1}$$

$$F = \underbrace{(-J^T Z_J J^{-1} + Z_E)}_{Z_{HF}} \cdot s \cdot x_h(s)$$

$$Z_{HF}$$

PER OTTENERE F_H SI DEVE PORTARE $-J^T Z_J J^{-1}$ A 0 E CIÒ È POSSIBILE RIDUCENDO L'INERIA, OVINTO IL PESO, DEL

BRACCIO E L'ATTRITO DEI JOINTS.