名前：韓心又

学生番号：1751204

1　本日のスライドの空白を埋め、理由も付記せよ。

問 1

$\because \ddot{y} = u, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

$\therefore y = 0.5t^2$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$$

$\because \mathscr{L}^{-1}[s^{-1}] = 1, \mathscr{L}^{-1}[s^{-2}] = t$

$$\therefore e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}_\Delta = e^{\boldsymbol{A}\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_\Delta = \int_0^\Delta e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} 0.5\Delta^2 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 0.5 + (k-1-\tau)\Delta^2 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$= \cdots$

$= 0.5k^2\Delta^2 = 0.005k^2$

問 2 (2)

固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 対角変換行列は

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}_\Delta^k = \left(\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\right)^k = 2^{k-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}[k] = 2^{k-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2^{k-1}\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

問 3 (1)

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3jt} & 0 \\ 0 & e^{-3jt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 3t + j\sin 3t & 0 \\ 0 & \cos 3t - j\sin 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}j \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6}j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3t & \frac{1}{3}\sin 3t \\ -3\sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

$$\because \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -3\sin 3t \end{bmatrix}$$

(2)

$$\because \lambda^2 + k_2\lambda + 9 + k_1 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\therefore k_1 = -4, k = 2$$

スライド 13

$$\Omega = \frac{100}{501} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix}$$

スライド 14

$$\begin{bmatrix} 1.01 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix} \frac{100}{501} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{501} \begin{bmatrix} 101 & 200 \\ 200 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix}$$

スライド 15

$$\left(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\right)^{-1} = \cdots = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$\frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}}{1+\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_3$

スライド 19

$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -K_e \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_\tau}{JL} & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$

$K_e = 0$ にすれば、行列 $\boldsymbol{A}$ は

$\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_\tau}{JL} & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}$

$\therefore (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -\frac{K_\tau}{JL} & 0 & s + \frac{D}{J} \end{bmatrix}$

方程式

$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

から

$\alpha(s) = \frac{L}{Ls+R}$

$\beta(s) = \frac{K_\tau}{LJs^3+(LD+JR)s^2+RDs}$

$\gamma(s) = \frac{K_\tau}{LJs^2+(LD+JR)s+RD}$

がわかる

$\therefore G(s) = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \frac{K_\tau}{LJs^3+(LD+JR)s^2+RDs}$

2　システム分析

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u,$

$y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right]$

$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$

$\therefore e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} \cos 2t & 0.5\sin 2t \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$

$\Delta = 0.1$、離散システムにすれば

$\boldsymbol{A}_\Delta = \begin{bmatrix} \cos 0.2 & 0.5\sin 0.2 \\ -2\sin 0.2 & \cos 0.2 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{b}_\Delta = \begin{bmatrix} 0.25 - 0.25\cos 0.2 \\ 0.5\sin 0.2 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}$ の固有値について

$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos 0.2 & -0.5\sin 0.2 \\ 2\sin 0.2 & \lambda - \cos 0.2 \end{vmatrix} = (\lambda - \cos 0.2)^2 - \sin^2 0.2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos 0.2 + 1 = 0$

$\lambda = \cos 0.2 \pm j\sin 0.2$

$\because |\lambda| = 1$

$\therefore$ このシステムは漸近安定でありません。