

名前：韓心又

学生番号：1751204

1 本日のスライドの空白を埋め、理由も付記せよ。

問 1

$$\because \ddot{y} = u, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$$

$$\therefore y = 0.5t^2$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} & s^{-2} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\because \mathcal{L}^{-1}[s^{-1}] = 1, \mathcal{L}^{-1}[s^{-2}] = t$$

$$\therefore e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{\Delta} = e^{\mathbf{A}\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\Delta} = \int_0^{\Delta} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} \, d\tau = \begin{bmatrix} 0.5\Delta^2 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \sum_{\tau=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 0.5 + (k-1-\tau)\Delta^2 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= 0.5k^2\Delta^2 = 0.005k^2$$

問 2 (2)

固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\therefore 対角変換行列は

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A}_{\Delta}^k = \left(\mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \right)^k = 2^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}[k] = 2^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2^{k-1} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

問 3 (1)

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3jt} & 0 \\ 0 & e^{-3jt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3j & -3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 3t + j \sin 3t & 0 \\ 0 & \cos 3t - j \sin 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}j \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6}j \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos 3t & \frac{1}{3} \sin 3t \\ -3 \sin 3t & \cos 3t \end{bmatrix} \\
 \because \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \therefore e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -3 \sin 3t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\because \lambda^2 + k_2 \lambda + 9 + k_1 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\therefore k_1 = -4, k_2 = 2$$

スライド 13

$$\Omega = \frac{100}{501} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{スライド 14} & \begin{bmatrix} 1.01 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix} \frac{100}{501} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{501} \begin{bmatrix} 101 & 200 \\ 200 & 401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{401}{501} & -\frac{200}{501} \\ -\frac{200}{501} & \frac{101}{501} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

スライド 15

$$(\mathbf{\Omega} + \mathbf{\xi} \mathbf{\xi}^T)^{-1} = \dots = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Omega^{-1}\xi\xi^T\Omega^{-1}}{1+\xi^T\Omega^{-1}\xi} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3$$

スライド 19

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -K_e \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_\tau}{JL} & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad K_e = 0 \text{ にすれば、行列 } \mathbf{A} \text{ は}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_\tau}{JL} & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -\frac{K_\tau}{JL} & 0 & s + \frac{D}{J} \end{bmatrix}$$

方程式

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から

$$\alpha(s) = \frac{L}{Ls + R}$$

$$\beta(s) = \frac{K_\tau}{LJs^3 + (LD + JR)s^2 + RDs}$$

$$\gamma(s) = \frac{K_\tau}{LJs^2 + (LD + JR)s + RD}$$

がわかる

$$\therefore G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \frac{K_\tau}{LJs^3 + (LD + JR)s^2 + RDs}$$

2 システム分析

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right]$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+4} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos 2t & 0.5\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

$\Delta = 0.1$ 、離散システムにすれば

$$\mathbf{A}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \cos 0.2 & 0.5\sin 0.2 \\ 2\sin 0.2 & \cos 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.25 - 0.25\cos 0.2 \\ 0.5\sin 0.2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{A} の固有値について

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos 0.2 & -0.5\sin 0.2 \\ 2\sin 0.2 & \lambda - \cos 0.2 \end{vmatrix} = (\lambda - \cos 0.2)^2 - \sin^2 0.2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos 0.2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \cos 0.2 \pm j\sin 0.2$$

$$\therefore |\lambda| = 1$$

\therefore このシステムは漸近安定ではありません。