# Integralai

Paprastas integravimas bus pagal lentelę. Gali tekti paversti  $\int (x+5)^2 dx \Rightarrow \int x^2 + 10x + 25 dx$ 

## Integravimas keičiant kintamąjį

Sudėtinėms funkcijoms

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$\int e^{5x} dx = \left[ t = 5x, x = \frac{1}{5}t, dx = \left(\frac{1}{5}t\right)' dt, dx = \frac{1}{5} dt \right] = \int \frac{1}{5} e^{t} dt = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

### Dalinis integravimas

Funkcijų daugybai ir  $\ln x$ 

$$\int$$
u dv = uv  $-\int$ v du arba 
$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$$

Tipai (kuri funkcija yra "u", kuri "v"):

"u" funkcija "v" funkcija "v" funkcija 
$$\int \ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x x \qquad \dots dx$$
 
$$\int \dots dx \qquad e^{ax}, \sin ax, \cos ax$$
 
$$\int e^{ax}, \sin ax, \cos ax \qquad (\text{u ir v nesvarbu}) \qquad e^{ax}, \sin ax, \cos ax dx$$

### Kreivinės trapecijos

2D figūros plotui: 
$$S = \int_a^b y \ dx$$

kai persmeigtas per x ašį: 
$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \ dx$$
 (tada reikės, pvz.:  $y = 1 + 2x + x^3$ )

kai persmeigtas per y ašį: 
$$V_y=\pi\int_a^b x^2\;dx$$
 (tada reikės, pvz.:  $x=1+2y+y^3$ )

Racionaliųjų funkcijų integravimas yra kitame puslapyje

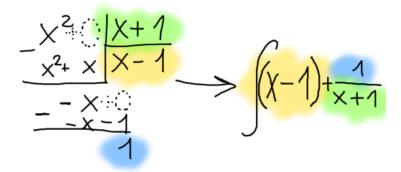
## Racionaliųjų funkcijų integravimas

Trupmenos kur x yra ir skaitiklyje, ir vardiklyje

**Netaisyklingosios trupmenos** (x'ų laipsniai viršuje yra didesni arba vienodi apatiniams)

$$\int \frac{x^2}{x+1} \ dx$$

Reikia "ilgąją dalyba" dalinti viršų iš apačios.



#### Daugianarių integralai

$$\int \frac{f(x)}{(x \pm a)^k} \ dx$$

Reikia išreikšti "paprasčiausių" trupmenų suma. (trupmena – paprasčiausia kai skačius vardiklyje)

$$\tfrac{A_1}{x\pm a} + \tfrac{A_2}{(x\pm a)^2} + \ldots + \tfrac{A_k}{(x\pm a)^k} \equiv A_1(x\pm a)^{k-1} + A_1(x\pm a)^{k-2} + \ldots + A_1(x\pm a) + A_k$$

≡ yra "tapačiai"/proporcingai lygu

Po to, pavyzdžiui:

$$\begin{split} x &\equiv A_1(x+1) + A_2 \equiv A_1x + A_1 + A_2 \\ A_1x^1 + (A_1 + A_2)x^0 &\equiv x^1 \\ x^1 \colon \ A_1 &= 1 \\ x^0 \colon \ A_1 + A_2 &= 0, A_2 = x_0 - A_2 = -1 \end{split}$$

#### Kvadratinės lygties integralai

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}$$

Išspręsti kvadratinę lygtį, gauti  $x_1$  ir  $x_2$ , tada:

 $\int \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \int \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} = \int \frac{A_1(x-x_1)+A_2(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} \stackrel{\Rightarrow}{\Rightarrow} \int \frac{A_1x-A_1x_1+A_2x-A_2x_2}{1(\text{aš irgi nežinau})} \rightarrow \text{daugianarių integralo pabaiga}$  arba, jei D < 0:  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$ . Beje,  $\frac{4q-p^2}{4}$  bus tiesiog koks nors skaičius.