Integralai

Be je, čia neįdėjau paprastų integralų lentelės. Ir dar, per KD, gali tekti $\int (x+5)^2 \ dx$ paversti $\int (x^2 + 10x + 25) \ dx$

Integravimas keičiant kintamąjį

Sudėtinėms funkcijoms

$\int f(x) \ dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \ \mathrm{dt}$

$\int e^{5x} \ dx = \quad [\ t = 5x, x = \frac{1}{5}t, dx = \left(\frac{1}{5}t\right)' \ dt, dx = \frac{1}{5} \ dt \ ] \quad = \int \frac{1}{5}e^t \ \mathrm{dt} = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

Dalinis integravimas

Funkcijų daugybai ir ln x

$\int \mathrm{u} \ \mathrm{dv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{v} \ \mathrm{du}$ $\qquad\qquad$ $\int f(x) \cdot g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \ dx$

Tipai (kuri funkcija yra u, kuri v, *beje funkcija būna tada kai kas nors padaryta su x, pats x irgi yra funkcija*):

	u funkcija	v funkcija
$\int$	$\ln x, \arcsin x, \arccos x, arctg \ x, arcctg \ x$	$\ldots \ dx$
$\int$	$\ldots \ dx$	$e^{ax}, \sin ax, \cos ax$
$\int$	$e^{ax}, \sin ax, \cos ax$ $\quad$ (u ir v nesvarbu)	$e^{ax}, \sin ax, \cos ax \ dx$

$\int x^2 \cdot \ln x \ dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \ dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \ dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$

$\Big[u = \ln x,$

$dv = x^2,$

$v = \int dv \ dx = \int x^2 \ dx = \frac{x^3}{3},$

$du = u' = (\ln x)' = \frac{1}{x}\Big]$

Kreivinės trapecijos

2D figūros plotui: $\qquad S = \int_a^b y \ dx$

kai persmeigtas per x ašį: $\qquad V_x = \pi \int_a^b y^2 \ dx \qquad$ (tada reikės, pvz.: $y = 1 + 2x + x^3$)

kai persmeigtas per y ašį: $\qquad V_y = \pi \int_a^b x^2 \ dx \qquad$ (tada reikės, pvz.: $x = 1 + 2y + y^3$)

Plotas figūros, kurią kerta: $-x^2 - 3x + 4 = 0$, $x = 0$, $y = 3x$.

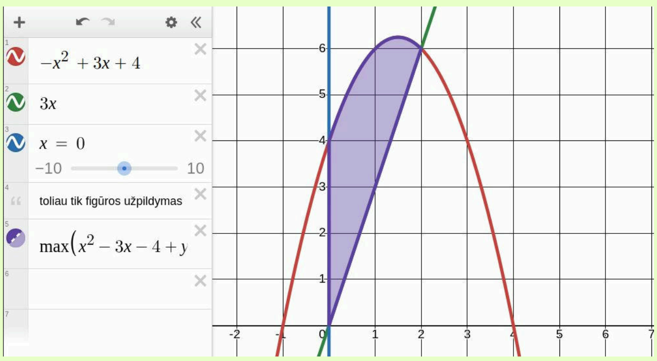
Nubraižyti parabolę:

Iš šonų: $-x^2 + 3x + 4 = 0, D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x_1 = \frac{-3-5}{-2} = 4, x_2 = \frac{2}{-2} = -1$

centro/simetrijos/viršutinis taškas: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-2} = -1.5$

Paskui reikia suskaičiuoti kur kertasi parabolė ir violetinė linija (nes iš grafiko nesimato):

$\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 4 \\ y = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = -x^2 - 3x + 4 \\ y = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -x^2 + 4 \\ y = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{4} = 2 \\ y = \text{nesvarbu} \end{cases}$



Tada, nes parabolė virš tiesės: $S_{\text{visko}} = S_{\text{parabolė}} - S_{\text{tiesė}}$

$S = \int_0^2 -x^2 + 3x + 4 \ dx - \int_0^2 3x \ dx =$

$= \frac{-x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 4x \Big|_0^2 - \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^2 =$

$= -\frac{8}{3} + 6 + 8 - 6 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

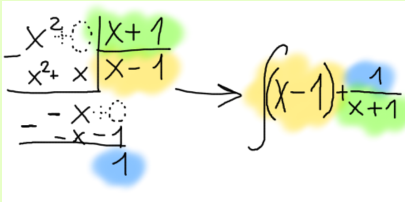
Racionaliųjų funkcijų integravimas

Trupmenos kur x yra ir skaitiklyje, ir vardiklyje

Netaisyklingosios trupmenos (x'ų laipsniai viršuje yra didesni arba vienodi apatiniams)

Reikia „ilgąją dalyba“ dalinti viršų iš apačios.

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \qquad \Longrightarrow$$



$$\Longrightarrow \qquad \int \left((x-1)+\frac{1}{x+1}\right)\,dx$$

Beje, mišrios trupmenos yra tiesiog praleista ***sudėtis****, aš nežinau kodėl jos iš vis egzistuoja...*

Daugianarių vardiklyje integralai

$$\int \frac{f(x)}{(x\pm a)^k}\,dx$$

Reikia išreikšti „paprasčiausių“ trupmenų suma. (trupmena – paprasčiausia kai skačius vardiklyje)

$\frac{A_1}{x\pm a}+\frac{A_2}{(x\pm a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x\pm a)^k}\equiv A_1(x\pm a)^{k-1}+A_1(x\pm a)^{k-2}+\ldots+A_1(x\pm a)+A_k$

Po to, pavyzdžiui:

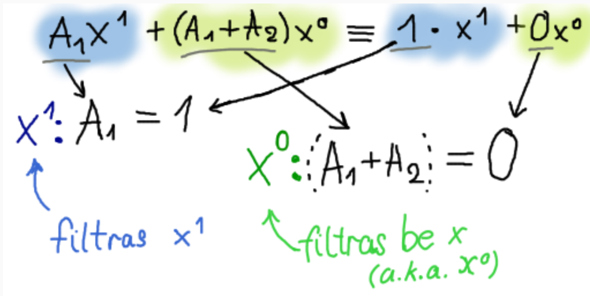
$x\equiv A_1(x+1)+A_2\equiv A_1x+A_1+A_2$

$\qquad A_1x^1+(A_1+A_2)x^0\equiv x^1$

$x^1\!:\;\; A_1=1$

$x^0\!:\;\; A_1+A_2=0,\, A_2=x_0-A_2=-1$

$\equiv$ *yra „tapačiai“ arba proporcingai lygu*



Kvadratinės lygties vardiklyje integralai

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$$

$$\int \frac{x+4}{x^2-x-2}\,dx$$

$x^2-x-2=0 \qquad x_1=-1,$

$D=1+8=9 \qquad x_2=2$

$$\int \frac{x+4}{(x+1)(x-2)}\,dx,\; \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$x+4\equiv Ax-2A+Bx+B$

$\begin{cases}1=A+B\\4=-2A+B\end{cases} \begin{cases}1-B=A\\4=-2(1-B)+B\end{cases} \begin{cases}A=1-B\\4=-2--2B+B\end{cases} \begin{cases}A=1-B\\6=3B\end{cases} \begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}$

$$\int \frac{A}{x+1}\,dx+\int \frac{B}{x-2}\,dx=\int \frac{-1}{x+1}\,dx+\int \frac{2}{x-2}\,dx=$$

$$\text{Ats.:}\;=-1\cdot 1\cdot \ln|x+1|+2\cdot 1\cdot \ln x|x-2|+C$$

Kvadratinės lygties vardiklyje integralai $(D < 0)$

Gavus: $x^2 + px + q$,

Suskaičiuokite diskriminantą ($D = b^2 - 4ac$)

Jei $D \geq 0$, sugrįžkite prie praeito žingsnio.

jei $D < 0$:

Įstatykite p ir q į formulę: $\boldsymbol{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}}$
Turbūt gausite, ką nors panašaus į $(x+3)^2 + 4$

Tada, tiesiog suintegruokite ką gavote: $\int \ldots \, dx$