Ψηφιακή Τοπολογία

Παναγιώτης Μακρής

2020

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Εργασία για το μάθημα της Γενικής Τοπολογίας

1 Εισαγωγή

Η ψηφιακή τοπολογία μελετάει τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά δισδιάστατων και τρισιδιάστατων ψηφιακών εικόνων, οι οποίες αντιστοιχούν σε τοπολογικές ιδιότητες και τοπολογικά χαρακτηριστικά αντικειμένων. Οι έννοιες και τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό σημαντικών αλγορίθμων, χαμηλού επιπέδου, ανάλυσης εικόνας. Το πεδίο αυτό είναι αναπόσπαστο σε όλες τις εφαρμογές της τεχνητής νοημοσύνης, οι οποίες ασχολούνται με χωρικές δομές. Σε αυτή την εργασία θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες της ψηφιακής τοπολογίας. Μία από τις έννοιες αποτελεί ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου Επιπέδου, το επονομαζόμενο "ψηφιακό επίπεδο". Το ζήτημα είναι η εύρεση μιας χρήσιμης τοπολογίας σε αυτό.

Υπάρχουν γενικά τρεις προσεγγίσεις για τη θεμελίωση μιας ανάλογης τοπολογίας με αυτή του Ευκλείδειου επιπέδου για το ψηφιακό επίπεδο:

- Η προσέγγιση μέσω της θεωρίας γραφημάτων
- Η προσέγγιση της ενσωμάτωσης
- Η αξιωματική προσέγγιση

Οι τρεις αυτές προσεγγίσεις έχουν διάφορα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα:

- Η αξιωματική προσέγγιση δημιουργεί τα απαραίτητα μαθηματικά θεμέλια, αλλά δεν παρέχει κάποιον άμεσο τρόπο εφαρμογής.
- Η προσέγγιση μέσω της θεωρίας γραφημάτων επιτρέπει την εύκολη μελέτη της συνεκτικότητας αλλά γίνεται δύσχρηστη όσον αφορά τη μελέτη τοπολογικών ιδιοτήτων όπως αυτές της συνέχειας και της ομοτοπίας.
- Η προσέγγιση της ενσωμάτωσης περιορίζει αρκετά τις προς μελέτη δομές, επειδή για κάθε δομή πρέπει να βρούμε τρόπο να την ενσωματώσουμε στον Ευκλείδειο χώρο.

Ιστορικά στοιχεία

Το 1935 ο Alexandroff και ο Hopf εξέδωσαν ένα βιβλίο σχετικά με την τοπολογία. Σε αυτό δόθηκαν κάποια αξιώματα για τη θεωρία των συμπλόκων ομοιομορφικών εικόνων μπάλας ή αλλιώς συνδυαστική τοπολογία. Το 1937 ο Alexandroff δημοσίευσε μια εργασία με τίτλο "Discrete Topology". Ο Klaminsky ερευνώντας τους συνεκτικούς τοπολογικούς χώρους έγραψε ένα βιβλίο το 1977. Αργότερα αποδείχθηκε ότι οι διατεταγμένοι συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι είναι ισοδύναμοι με τους χώρους Alexandroff. Το 1980 ο Kovalensky θεμελίωσε την ψηφιακή τοπολογία και αποδείχθηκε ότι ήταν μέρος της θεωρίας του Alexandroff. Το 1979 ο Rosenfeld δημοσίευσε μια εργασία με τίτλο "Digital Topology", όπου μέσω αυτής απαντήθηκαν πολλά ανοικτά ερωτήματα. Τέλος, το 1982 ο Θεοδόσιος Παυλίδης πρότεινε τη χρήση των αλγορίθμων της Θεωρίας Γραφημάτων.

2 Το ψηφιακό επίπεδο και η προσέγγιση με τη Θεωρία Γραφημάτων

2.1 Το ψηφιακό επίπεδο

Ορισμός: Ορίζουμε το ψηφιακό επίπεδο να είναι το $\mathbb{Z}^2$, δηλαδή το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^2$που έχουν ακέραιες συντεταγμένες.

Η ψηφιακή τοπολογία ασχολείται με τις τοπολογικές ιδιότητες υποσυνόλων του ψηφιακού επιπέδου, τα οποία τα ονομάζουμε ψηφιακά σύνολα. Αν θεωρήσουμε ότι το ψηφιακό επίπεδο αποτελεί μια ηλεκτρονική οθόνη από pixel, τότε τα ψηφιακά σύνολα έχουν την ιδιότητα να δίνουν μάυρο χρώμα στα στοιχεία τους, τα οποία στοιχεία τους αποτελούν pixel με συντεταγμένες από το $\mathbb{Z}^2$.

Ορισμός: Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ονομάζεται ψηφιακό σύνολο όταν ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή κάθε στοιχείο του αποτυπώνεται ως ένα μαύρο pixel ενώ το S^cπεριέχει όλα εκείνα τα στοιχεία τα οποία αντιστοιχούνται στα λευκά pixel της οθόνης.

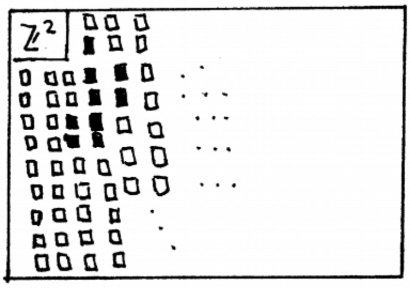

Figure 1: Το ψηφιακό σύνολο Sείναι εκείνο που περιέχει τα μαύρα pixel, άρα $|S| = 9$.

Δεδομένου ενός σημείου $P = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Υπάρχουν οκτώ γειτονικά σημεία του P, τα οποία είναι και αυτά σημεία του $\mathbb{Z}^2$με συντεταγμένες $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$έτσι ώστε:

$$\max\{|m - k|, |n - l|\} \leq 1.$$

Έχουμε:

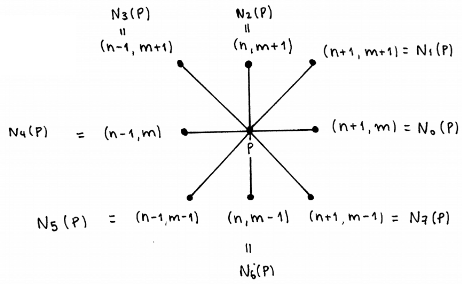

Figure 2: Τα γειτονικά σημεία του σημείου P.

Ονομάζουμε το σύνολο που περιέχει όλους τους γείτονες με άρτιους δείκτες 4-γειτονιά του Pκαι συμβολίζουμε $\mathcal{N}_4(P)$, ενώ το σύνολο που περιέχει όλους τους γείτονες με περιττούς δείκτες, 8-γειτονιά του Pκαι το συμβολίζουμε $\mathcal{N}_8(P)$ αντίστοιχα.

Έστω ότι $k = 4$ ή 8 και $I = 0, 1, ..., n$. Τότε:

Ορισμός: Ονομάζομουμε ψηφιακό k-μονοπάτι μια ακολουθία $\{P_i\}_{i \in I}$από σημεία του $\mathbb{Z}^2$ώστε P_iκαι P_jνα είναι k-γείτονες όταν $|i - j| = 1$. Παρατηρούμε ότι η αρίθμηση των δεικτών είναι σημαντική. Συμβολίζουμε το μονοπάτι αυτό $\mathcal{P}$.

Ορισμός: Έστω σημείο Pπου ανήκει σε κάποιο k-μονοπάτι $\mathcal{P}$, τότε ορίζουμε τον k-βαθμό να είναι ο αριθμός $|\mathcal{P} \cap \mathcal{N}_k(P)|$. Αν ένα σημείο του $\mathcal{P}$ έχει βαθμό 1, τότε ονομάζεται τελικό σημείο. Υπάρχουν το πολύ δύο τελικά σημεία σε κάθε μονοπάτι $\mathcal{P}$. Στα τελικά σημεία αντιστοιχούν οι δείκτες 0 και n. Αν έχουμε P_0, P_nδύο σημεία με $P_0 = P_n$τότε το μονοπάτι καλείται κλειστό.

Ορισμός: Ορίζουμε k-τόξο ένα k-μονοπάτι, αν κάθε σημείο αυτού έχει βαθμό 1 ή 2.

Μια πολύ βασική ιδιότητα της τοπολογίας του επιπέδου είναι το Θεώρημα καμπυλών του Jordan. Δηλαδή, κάθε κανονική κλειστή καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε δύο χωρία, το εσωτερικό και το εξωτερικό. Για τους σκοπούς της ψηφιακής τοπολογίας θα χρειαστούμε πολυγωνικές καμπύλες. Τέτοιου είδους καμπύλες έχουν σημεία $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, τα οποία καλούνται κορυφές έτσι ώστε δύο διαδοχικές κορυφές να συνδεόνται με μια ακμή. Μια πολύγωνη καμπύλη λέγεται κανονική, αν κάθε ακμή της τέμνει μόνο κορυφές και αν για κάθε κορυφή υπάρχουν το πολύ δύο ακμές.

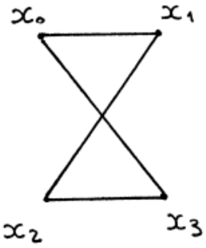

Figure 3: Όχι κανονική κλειστή πολυγωνική καμπύλη

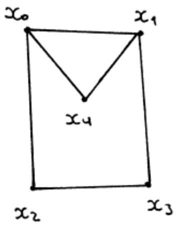

Figure 4: Όχι κανονική, κλειστή πολυγωνική καμπύλη

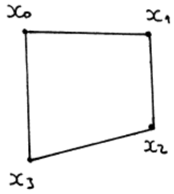

Figure 5: Κανονική, κλειστή πολυγωνική καμπύλη

Κάθε μονοπάτι του $\mathbb{Z}^2$ θεωρείται μια πολυγωνική καμπύλη στο Ευκλείδειο επίπεδο, με κορυφές στο $\mathbb{Z}^2$, επίσης κάθε τόξο θεωρείται κανονική επίπεδη καμπύλη στο Ευκλείδειο επίπεδο. Οπότε αντίστοιχα κάθε κλειστό μονοπάτι/ τόξο αντιστοιχεί σε μια κλειστή πολυγωνική καμπύλη/ κανονική κλειστή πολυγωνική καμπύλη.

Στην προσπάθεια μας να βρούμε μια έκφραση του θεωρήματος του Jordan για πολυγωνικές καμπύλες του $\mathbb{Z}^2$, δημιουργούνται προβλήματα λόγω των ιδιάζουσων περιπτώσεων. Λόγω των παραπάνω, ο Rosenfeld απέδειξε ότι πράγματι το θεώρημα καμπυλών του Jordan ισχύει για ψηφιακές καμπύλες αν η καμπύλη και το συμπλήρωμά της, είναι εφοδιασμένα με διαφορετικές τοπολογίες.

Έχουμε ότι $k \in \{4, 8\}$, τότε ορίζουμε

$$\bar{k} = \begin{cases} 4 & , k = 8 \\ 8 & , k = 4 \end{cases}.$$

Θεώρημα: (Ψηφιακή Έκφραση του Θεωρήματος Jordan) Έστω μια κανονική κλειστή k-καμπύλη $\mathcal{P}$στο ψηφιακό επίπεδο $\mathbb{Z}^2$. Τότε το σύνολο $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{P}$ περιέχει ακριβώς δύο $\bar{k}$-συνδεδεμένα σύνολα. Ένα από αυτά τα δύο σύνολα είναι φραγμένο και ονομάζεται εσωτερικό της $\mathcal{P}$ και το άλλο ονομάζεται εξωτερικό.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι για να αποθηκεύσουμε δυαδικές φωτογραφίες (μόνο λευκά ή μαύρα pixel) , αρκεί να αποθηκεύσουμε μόνο τα σύνορα του μαύρου ψηφιακού συνόλου.

Μια δυαδική φωτογραφία που αποτελείται από $n \times n$ pixel μπορεί να αποθηκευτεί χρησιμοποιώνται $n \times n$ bit. Δηλαδή, θα αποθηκεύει πληροφορία για το κάθε pixel της. Παρόλα αυτά, αν αποθηκεύσουμε μόνο την πληροφορία των μαύρων pixel, δηλαδή το μαύρο ψηφιακό σύνολο, τότε ο συνολικός χώρος αποθήκευσης μπορεί να πάρει και αισθητά μικρότερες τιμές από n^2 bits. Συγκεκριμένα, θα χρειαστούν μόνο $3n_b$bits, όπου n_bπαριστάνει το πλήθος των μαύρων συνοριακών pixel. Τα παραπάνω βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή, αφού για παράδειγμα οι εικόνες αρχιτεκτονικών σχεδίων είναι δυαδικού τύπου.

2.2 Προσέγγιση με τη Θεωρία Γραφημάτων

Με αυτήν την προσέγγιση, θα ασχοληθούμε με τα pixel και τις γειτονιές τους. Κάθε pixel αποτελεί μια κορυφή και συνδεέται με το γειτονικό του μέσω μιας ακμής. Δηλαδή μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε εικόνα μέσω ενός γράφου.

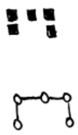

Figure 6: Αναπαράσταση εικόνας μέσω γράφου

Για να μεταβούμε από την εικόνα στον γράφο, θα χρειαστούμε μια σχέση "γειτνίασης". Μέσω αυτής της σχέσης θα μελετήσουμε και τη συνεκτικότητα ψηφιακών συνόλων. Έστω ότι για παράδειγμα έχουμε ένα ψηφιακό σύνολο. Θεωρούμε την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών pixel να είναι 1.

Ορίζουμε μια τέτοια σχέση να είναι η k_1:

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow y \Leftrightarrow \text{αν}\, |b-d| \leq 1\, \text{και}\;\; a = d \\ \text{ή}\;\; |a-c| \leq 1\, \text{και}\, b = d. \end{aligned}$$

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη σχέση να είναι η k_2:

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow d(x, y) \leq 1,$$

όπου d είναι η Ευκλείδεια απόσταση.

Για παράδειγμα αν έχουμε την παρακάτω ψηφιακή εικόνα:

Τότε θα μπορούσε να μετατραπεί σε γράφο, όπως φαίνεται παρακάτω:

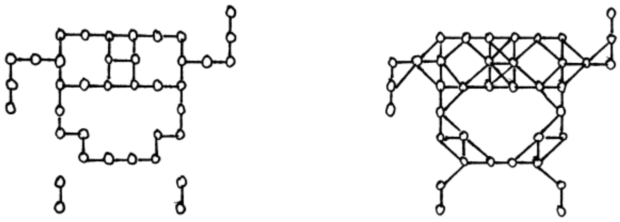

Figure 7: Στο αριστερά σχήμα χρησιμοποιήσαμε την σχέση k_1και στο δεξία την k_2.

3 Αξιωματική Ψηφιακή Τοπολογία

Με την αξιωματική ψηφιακή τοπολογία επιδιώκουμε να βρούμε κάποιον συσχετισμό ανάμεσα στην προσέγγιση με τη θεωρία γραφημάτων και της κλασικής τοπολογίας.

Ένας τρόπος για να το πετύχουμε, είναι να προσαρμόσουμε τα αξιώματα της κλασικής τοπολογίας για ψηφιακούς σύνολα και να συγκρίνουμε την ιδιότητα της συνεκτικότητας μιας ψηφιακής εικόνας, με τον αντίστοιχο τοπολογικό χώρο. Μέσα από αυτό το σύνολο νεών προσαρμοσμένων αξιωμάτων, ορίζονται οι τοπικά πεπερασμένοι τοπολογικοί χώροι. Μια σημαντική ιδιότητα των τοπικά πεπερασμένων τοπολογικών χώρων που ικανοποιούν τα αξιώματα είναι μια σχέση "γειτνίασης" είναι αντισυμμετρική και ανακλαστική. Έτσι, κάθε συνεκτικός μη-τετριμμένος, τοπικά πεπερασμένος τοπολογικός χώρος είναι ισόμορφος με ένα cell complex. Μπορούμε άμεσα να καταλάβουμε τον συσχετισμό εννοιών της κλασικής Τοπολογίας με την ψηφιακή Τοπολογία, καθώς οι τοπικά πεπερασμένοι τοπολογικοί χώροι μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση ψηφιακών εικόνων σε ορθοκανονικά πλέγματα από pixel.

References

[1] Vladimir Kovalensky: "Axiomatic Digital Topology", 2006

[2] P. Christopher Staecker: "A Borsuk-Ulam theorem for digital images", 2018

[3] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, A. Rosenfeld: "Concepts of Digital Topology", 1990

[4] Ulrich Eckhardt, Longin Latecki: "Digital Topology", 2008