1. Mengjafræði

Látum A og B vera hlutmengi alsherjarmengisins U. Notið skilgreiningar á mengjahugtökum og þekktar umritunarreglur til að sýna að:

a. Sýnið að sniðmengi $A \cap B$ má skrifa sem

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

Svar:

Byrjum á því að skilgreina sniðmengi ($\cap$) og mismengi ($\setminus$): Sniðmengi $A \cap B$ er samansett af öllum gildum sem tilheyra bæði hlutmengis A og B, það er táknað með eftirfarandi formúlunni $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$

Mismengi tveggja mengja A og B er mengi þeirra staka sem eru í A en ekki í B, samanber formúlunni $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\}$

Næst skoðum við mengið $A \setminus (A \setminus B)$: Þetta mengi er úr öllum þeim stökum sem tilheyra A en ekki mismenginu $(A \setminus B)$. Mengið $(A \setminus B)$ er úr gildum hlutmengisins A en ekki B. Því getum við sagt að mengið $A \setminus (A \setminus B)$ er samansett af öllum gildunum sem eru í A og í B sem jafngildir sniðmenginu $A \cap B$.

b. Sýnið að sammengi $(A \cup B)$ má skrifa með hjálp mismunamengja:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

Svar:

Sammengi $A \cup B$ er mengi allra þeirra staka sem tilheyra hlutmengis A, B eða þeim báðum. $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ eða } x \in B\}$

Eins og í lið a. þá er mengið $(A \setminus B)$ úr stökum hlutmengisins sem er í A en ekki í B. $(A \setminus B) \cup B$ er því mengi stakana sem eru annaðhvort í $A \setminus B$ eða B. Því er jafngilt því að segja $A \cup B$ og $(A \setminus B) \cup B$.

2. Veldismengi

Látum $P(A)$ vera veldismengið af menginu A. Sýnið hvort að $P(A) \subseteq P(P(A))$ sé alltaf það sama. Rökstyðjið af hverju eða af hverju ekki.

Svar:

Við skulum fyrst byrja á því að skilgreina mengin okkar: $P(A)$ er veldismengi sem er venslað af mengi A svo að stök A eru öll hlutmengi mengisins A, $P(A)$. Sem dæmi ef að $A = \{1,2,3\}$ þá er $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. $P(P(A))$ er veldismengi af veldismenginu $P(A)$ og inniheldur því öll hlutmengi $P(A)$.

Næst skoðum við $P(A) \subseteq P(P(A))$: Til að setningin sé sönn þá þarf hvert einasta stak í $P(A)$ einnig stak í $P(P(A))$, þ.e.a.s hvert stak í $P(A)$ þarf að vera hlutmengi í $P(P(A))$.

Skoðum dæmi:

Látum $A = \{7\}$.

- Þá er $P(A) = \{\emptyset, \{7\}\}$.
- Þá er $P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{7\}\}, \{\emptyset, \{7\}\}\}$.

Ef við tökum nú setninguna $P(A) \subseteq P(P(A))$ og niðurstöðurnar að ofan þá sést að:

- $\emptyset \in P(A)$
- $\{7\} \in P(A)$
- $\emptyset \in P(P(A))$
- $\{7\} \notin P(P(A))$

Þá er í þessi tilfelli er $P(A)$ ekki hlutmengi af $P(P(A))$, því $\{7\} \in P(A)$ en $\{7\} \notin P(P(A))$. Því getum við fullyrt að $P(A) \subseteq P(P(A))$ er **ekki** alltaf sönn.

Liður 3

Sýnið og skýrið eftirfarandi: a. Dæmi um vensl á mengi sem eru bæði samhverf og andsamhverf. (10 stig)

b. Munur á milli falla og vensla. (5 stig)

Skýrið ítarlega hvað gerir vensl samhverf og andsamhverf og nefnið dæmi. Skýrið einnig muninn á falli og vensli og gefið gott sýnidæmi um muninn.

Svar:

A

Þegar vensl eru samhverf, þá þýðir það að ef eitt par er í venslinu, þá er gagnstæða parið líka í því:

$$(a,b) \in R \implies (b,a) \in R \text{ fyrir öll } (a,b) \in R$$

Þegar vensl eru andsamhverf, þá þýðir það að ef a tengist b og b tengist a, þá þarf a og b að vera sama gildið, a = b

Til dæmis er mengið:

$$A = \{(1, 2, 3)\}$$

og vensli:

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

ekki andsamhverft þar sem 1 bendir á 2 og öfugt, en það er ekki sama gildi.

Tökum nú dæmi um mengi og vensl sem að eru bæði samhverf og andsamhverf

Höfum eftirfarandi mengi:

$$A = \{(1, 2, 3)\}$$

og eftirfarandi vensl:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Þetta er samhverft þar sem að fyrir hvert par í venslinu gildir að a = b, svo að fyrir hvert par er "andhverfa parið" alltaf til, svo það brýtur ekki reglu um samhverf pör

Þetta er andsamhverft þar sem að það er ekkert tilvik þar sem a er ekki sama gildi og b, því er venslið bæði samhverft og andsamhverft

B

Vensl á mengi A er hlutmengi af vörpunum úr AxA. Vensl getur tengt eitt gildi við annað eða sjálft sig Til dæmis A = {1, 2, 3} og venslið R = {(1, 2), (1, 3)}. Hér tengist 1 bæði 2 og 3, getur sem sagt tengst nokkrum gildum

Fall er sérstakt vensl þar sem hvert gildi í frummenginu A tengist nákvæmlega einu gildi í myndmenginu B Til dæmis

$$f : A \to B$$

þar sem A = {1, 2, 3} og B = {a, b} og f = {(1, a), (2, b), (3, a)}

Þannig að sérhvert stak í mengi A, getur aðeins tengst einu staki úr myndmengi B.

Sem sagt í stuttu máli, vensl er almennt hugtak sem lýsir samböndum milli staka, þau geta tengst við eitt gildi, mörg önnur eða jafnvel sjálft sig. Fall er sérstakt vensl þar sem að hvert gildi tengist nákvæmlega einu öðru gildi í myndmengi þess.

Liður 4

Hægt er að sjá kóðann betur í skjalinu "Mengi og vensl - liður 4.py".
import numpy as np import networkx as nx import matplotlib.pyplot as plt

def athuga_vensli_og_teikna(dd, mm, yyyy): # Búa til slembifræ út frá dagsetningu seed = int(f"{dd:02}{mm:02}{yyyy}") np.random.seed(seed)

```
# Búa til 4x4 slembifylki með 0 eða 1
fylki = np.random.randint(0, 2, size=(4, 4))

# Endirskrifa dagssetninguna á formið "dd-mm-yyyy"
formatted_date = f"{dd:02}-{mm:02}-{yyyy}"

# Prenta niðurstöður:
print(f"Fylkið fyrir dagsetninguna {formatted_date} og seed {seed}:")
print(fylki)
print()


# Sjálfhverf: Sérhvert stak er venslað af sjálfu sér (a ~ a)
# Samhverf:  Fyrir öll stök a og b í S gildir (a ~ b <=> b ~ a)
# Andsamhverf: Andstæða við samhverft, má aðeins ganga í eina átt (ekki báðar áttir)
# Gegnvirk: Fyrir öll a, b og c í X að ef a er venslað við b er venslað við c, þá er a og c

# Athugar hvort fylkið sé sjálfhverft
def er_sjalfhverft(fylki):
    return all(fylki[i][i] == 1 for i in range(len(fylki)))

# Athugar hvort fylkið sé samhverft
def er_samhverft(fylki):
    return np.array_equal(fylki, fylki.T)

# Athugar hvort fylkið sé andsamhverft
def er_andsamhverft(fylki):
    return all(fylki[i][j] != fylki[j][i] or fylki[i][j] == 0 for i in range(len(fylki)) for

# Athugar hvort fylkið sé gegnvirkt
def er_gegnvirkt(fylki):
    return all(fylki[i][k] == 1 for i in range(len(fylki)) for j in range(len(fylki)) for k

# Skoða eiginleika venslanna
print(f"Fylkið fyrir dagsetninguna {dd:02d}-{mm:02d}-{yyyy}:")
print(fylki)
print("\nEiginleikar venslanna:")
print(f"Sjálfhverf: {er_sjalfhverft(fylki)}")
print(f"Samhverf: {er_samhverft(fylki)}")
```

```
print(f"Andsamhverf: {er_andsamhverft(fylki)}")
print(f"Gegnvirk: {er_gegnvirkt(fylki)}")
print("=" * 40)

# Myndræn framsetning á venslunum með örvaneti
G = nx.DiGraph()

for i in range(4):
    for j in range(4):
        if fylki[i][j] == 1:
            G.add_edge(i+1, j+1)

pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=2000, font_size=16, font
plt.title(f"Örvanet fyrir dagsetninguna {dd:02d}-{mm:02d}-{yyyy}")
plt.show()
```

Afmælisdagar hópmeðlima dagsetningar = [(15, 10, 2002), # 15. október 2002 (Alda) (27, 5, 2001), # 27. maí 2001 (Elísabet) (14, 7, 2003) # 14. júlí 2003 (Benni)]

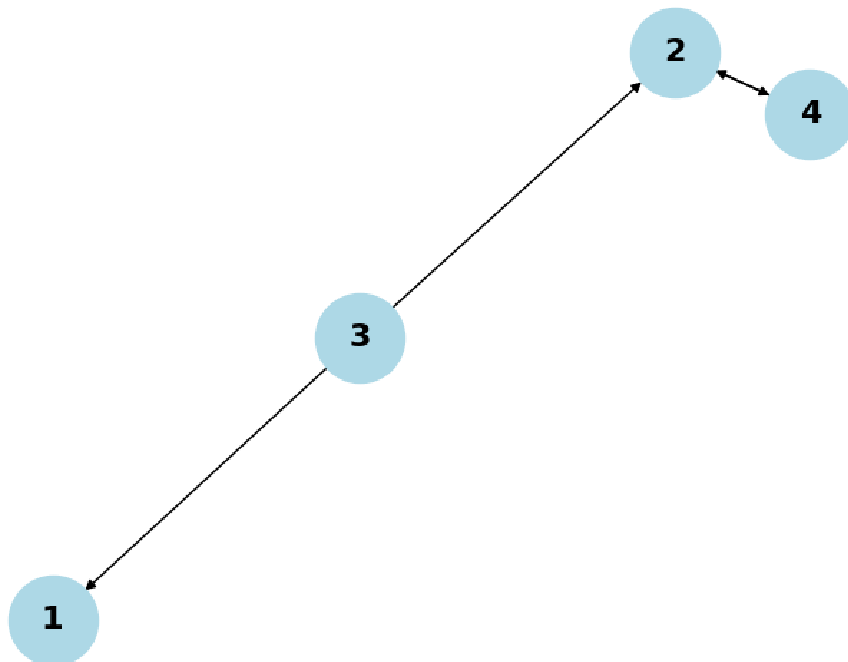
Keyra fyrir alla afmælisdagsetningar og teikna örvanet for dd, mm, yyyy in dagsetningar: athuga_vensli_og_teikna(dd, mm, yyyy)

Útkoma og myndir (örvanet) Hér að neðan má sjá útkomu fyrir hvern afmælisdag:

Fylkið fyrir dagsetninguna : 15-10-2002 og seed 15102002:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

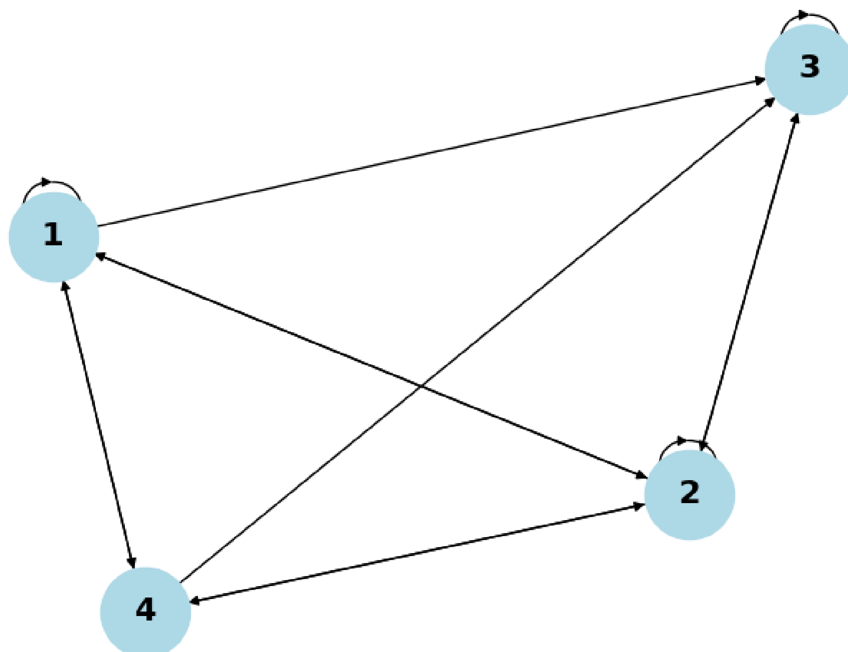
Eiginleikar venslanna: Sjálfhverf: False Samhverf: False Andsamhverf: False Gegnvirk: False



Fylkið fyrir dagsetninguna 27-05-2001 og seed 27052001:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

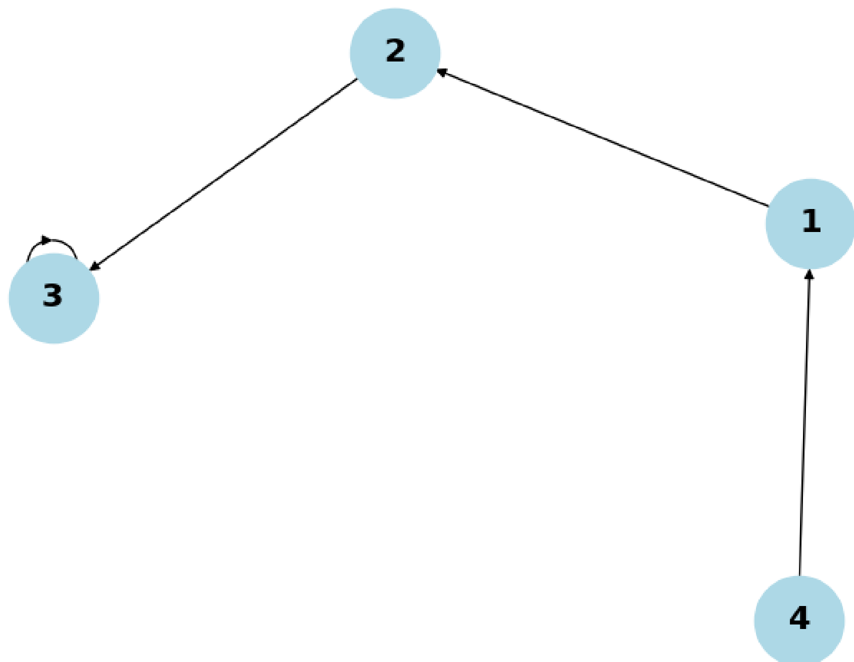
Eiginleikar venslanna: Sjálfhverf: False Samhverf: False Andsamhverf: False Gegnvirk: False



Fylkið fyrir dagsetninguna 14-07-2003 og seed 14072003:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eiginleikar venslanna: Sjálfhverf: False Samhverf: False Andsamhverf: True Gegnvirk: False



Fylkin lýsir nákvæmlega þeim tengingum sem eru sýndar í örvanetinu. Með því að skoða fylkin getum við séð hvaða hnútar eru tengdir í gegnum örvar í sjálfu netinu.