Исследование методов принятия решений в условиях полной неопределенности

1. Цель работы: изучить и исследовать методы принятия решений при отсутствии какой либо информации о связях принимаемых решений и исходов.

2. Теоретические сведения

Принятие решения в условиях неопределенности предполагает, что однозначная связь между принимаемыми решениями, возможными исходами для этих решений, значениями критериев для исходов отсутствует. В случае, если заданы вероятностные характеристики связи между принимаемыми решениями, исходами и значениями критериев, тогда такая связь является стохастической и решения принимаются в условиях вероятностной неопределенности, связь между решениями, исходами, значениями критериев не является детерминированной, а является стохастической. В том случае, если вероятностные характеристики связи между решениями и исходами не являются заданными, тогда решения принимаются в условиях полной неопределенности. Следует отметить, что неоднозначный характер связей между решениями, исходами (и, соответственно, значениями критериев) определяется воздействием на систему внешних факторов (воздействием на систему внешней среды). Тогда структура задачи принятия решения (ЗПР) включает в себя множество допустимых альтернатив X, множество состояний среды Y, множество исходов A и функцию реализации $F{:}X{\times}Y{\to}A$. Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что при выборе альтернативы принимающему решение неизвестно наличное состояние среды и он не имеет информации о вероятностях их появления. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известны множество возможных состояний среды (множество Y) и функция реализации F.

Оценочная структура ЗПР в условиях неопределенности задается в виде оценочной функции. Композиция функции реализации и оценочной функции представляет собой целевую функцию f. При этом число $f(x,y)$ указывает полезность (ценность, эффективность) того исхода, который получается в ситуации, когда принимающий решение выбирает альтернативу $x \in X$, а среда принимает состояние $y \in Y$. Напомним, что если оценка исходов выражает затраты, убытки или другие негативные факторы, то в этом случае функция f называется ***функцией потерь***.

Итак, *математическая модель* ЗПР *в условиях неопределенности может быть задана в виде* следующей тройки объектов (X,Y,f), где X – множество допустимых альтернатив, Y – множество возможных состояний среды, $f{:}X{\times}Y{\to}R$ – целевая функция (например, функция потерь).

Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности состоит в том, что, выбирая одну из допустимых альтернатив, принимающий решение не знает имеющегося состояния среды; в то же время, получающийся исход зависит от того, в каком состоянии находится среда. Формально, целевая функция $f(x, y)$ является функцией двух аргументов x и y; принимающий решение должен выбирать значение аргумента $x \in X$, не зная значения аргумента $y \in Y$.

Ограничимся случаем, когда множества X и Y являются конечными; тогда целевая функция (функция потерь) может быть задана табличным способом (либо в виде матрицы потерь).

	y_1	y_2	…	y_n
x_1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1n}
x_2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	f_{m1}	f_{m2}	…	f_{mn}

Элементы таблицы f_{ij} будем интерпретировать как выигрыш принимающего решение в ситуации (i,j), т.е. когда ЛПР выбирает альтернативу x_i, а среда принимает состояние y_j. Таблица называется также ***матрицей выигрышей*** или ***платежной матрицей***.

Эта функция может иметь разный вид в зависимости от позиции лица принимающего решения (ЛПР). В теории принятия решений различают следующие основные позиции: оптимистическую, пессимистическую, позиции компромисса и нейтралитета. *Оптимистическая позиция* предполагает, что не принимаются во внимание плохие результаты, надеясь на наступление наиболее благоприятных внешних условий. Поэтому в качестве компоненты вектора результатов, соответствующей каждому решению, определяется максимальный результат, т.е. максимальное значение строки: $f_i = \max_j f_{ij}$ – это оптимистическая позиция.

Пессимистическая позиция оправдана там, где риск недопустим. Выбор решение в соответствии с этой позицией гарантирует результат, не меньший, чем выбранный. Если реализуются более выгодные внешние условия, то можно получить максимальный в данной строке результат. Вектор результатов записывается следующим образом: $f_i = \min_j f_{ij}$ – это *пессимистическая позиция*. *Позиция компромисса* имеет вид: $f_i = \min_j f_{ij} + \max_j f_{ij}$. Т.о., формируя желаемый результат в таком виде, мы исходим из компромисса между оптимистической и пессимистической позициями.

Позиция нейтралитета учитывает все последствия принимаемого решения и поэтому выглядит следующим образом:

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} .$$

Для того, чтобы получить более ясную и наглядную интерпретацию перейдем к графическому представлению оценочных функций. Случай с двумя внешними условиями (m=2) при n вариантах решений будет простейшим. Результат такого рассмотрения можно распространить на случай большего количества внешних факторов (условий).

Введем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата f_{i1} решения x_i, соответствующего внешнему состоянию y_1, а по оси ординат − значения f_{i2}, соответствующего состоянию y_2, i=1,...,n. При таких обозначениях каждый вариант решения x_i соответствует точке на плоскости с координатами (f_{i1},f_{i2}), i=1,..,n соответственно. Все точки образуют множество, которое можно вписать в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, расположение которых соответствует максимальным и минимальным значениям среди всех элементов матрицы. Точку с координатами (max(f_{i1},i), max(f_{i2},i)), соответствующей верхнему правому углу, мы назовем ***утопической точкой*** (УТ). Смысл этого названия в том, что координаты всех точек (f_{i1},f_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений x1,..., xn, не могут быть больше, чем у утопической точки.

Аналогичное значение имеет и так называемая ***антиутопическая точка*** (АУТ), имеющая координаты (minx(f_{i1},i), min(f_{i2},i)), соответствующая нижнему левому углу. Координаты всех точек (f_{i1},f_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений x1,..., xn, не могут быть меньше, чем у точки АУТ. Построенный прямоугольник называется полем полезности решений (рисунок 1).

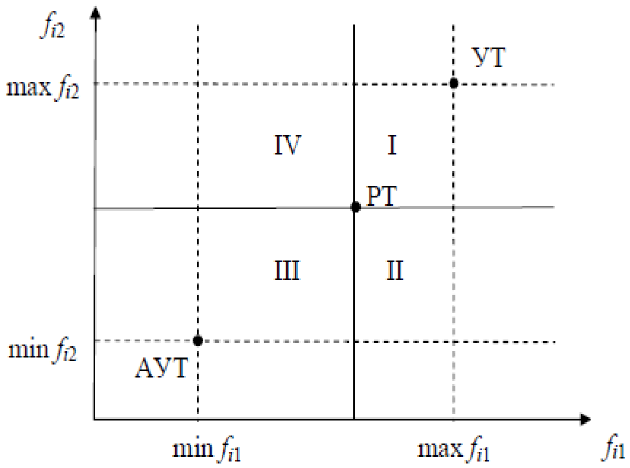

Рисунок 1– Поле полезности решений

На поле полезности выполним выбор произвольной точки и назовем ее ***рабочей точкой*** (РТ) − $x_{рт}$. Обозначим ее координаты ($f_{рт1}$,$f_{рт2}$). С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III и IV. В рассматриваемом нами двумерном случае каждая из этих частей имеет вид квадранта.

Все точки x_i из матрицы вариантов решений, лежащие в квадранте I заведомо или гарантировано лучше, чем рассматриваемая точка РТ. Это преимущество решений из квадранта I по отношению к решению, находящемуся в РТ не зависит от того, какой фактор − y_1 или y_2 реализуется, то есть не важно по какой координате это преимущество реализуется. Поэтому мы называем конус I ***конусом предпочтения***.

Соответственно все точки конуса III хуже точки РТ ($f_{рт1}$>=f_{i1} и $f_{рт2}$>=f_{i2}), и мы будем называть область III ***антиконусом***. Таким образом, оценка качества точек из этих двух конусов в сравнении с точкой РТ проста и однозначна.

Оценка же точек в конусах II и IV является неопределенной, так как соотношения их координат с РТ является противоречивым. Вследствие этого их называют областями неопределенности и варианты решений в этих конусах связаны с допущением некоторого риска принятия решений.

Таким образом, значения, лежащие внутри конуса I, обеспечивают гарантированный результат и могут считаться безрисковыми (пессимистическими) критериями ПР. Линии, проходящие через II и IV квадранты, соответствуют значениям критерия с риском. Линии, лежащие внутри III конуса соответствуют критерию азартного игрока или оптимистичной позиции. Рассмотрим линии, соответствующие трем группам критериев (рисунок 2).

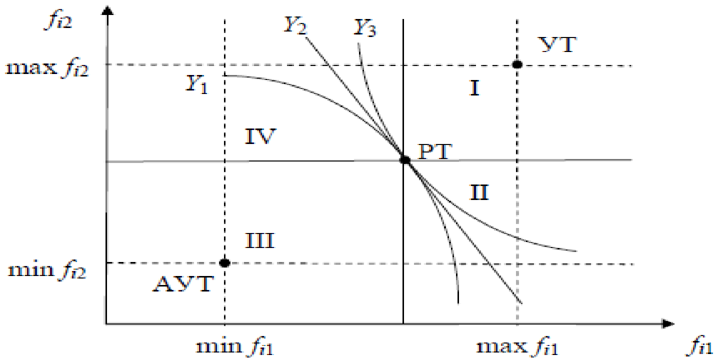

Рисунок 2– Функции предпочтения при принятии решений
Y_1 – оптимистические; Y_2 –нейтральные; Y_3 – безрисковые (пессимистические).

Все точки из областей неопределенности, лежащие справа и выше каждой линии функций предпочтения, лучше точек, лежащих слева и ниже. Всякая функция (линия) предпочтения объединяет все точки, соответствующие одному и тому же значению критерия (точки равной эффективности); справа и выше ее располагаются все лучшие точки, то есть точки более эффективных решений, а слева и ниже − худшие, то есть точки менее эффективных решений.

Таким образом, критериальная функция делит плоскость на две части. В соответствии с рассмотренным полем полезности, критериальные функции, проходящие ближе к границам I квадранта соответствуют безрисковой политике принятия решения или тенденции избегания риска, как например, вогнутая линия на рисунке 2. Линии, проходящие через квадрант III, соответствуют азартной стратегии с максимальным риском. Соответственно, прямая линия, проходящая через рабочую точку и квадранты II и IV, соответствует нейтральной или объективной стратегии в приятии решений.

Всякое техническое или экономическое решение в условиях неполной информации − сознательно или неосознанно − принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией описанного выше типа. При этом выбор оценочных функций всегда должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения.

Виды критериев принятия решений

Критерий принятия решений − это функция, выражающая предпочтения лица принимающего решения (ЛПР) и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Минимаксный критерий (ММ-критерий), или критерий Вальда. ММ-критерий отражает позицию крайней осторожности, или крайнего пессимизма. Оценочная функция ММ-критерия:

$$Z_{MM} = \max_i (\min_j f_{ij})$$

Правило выбора решения в соответствии с ММ-критерием можно интерпретировать следующим образом: матрица решений (f_{ij}) дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов f_{ir} каждой строки. Выбрать следует те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения f_{ir} этого столбца. Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что ЛПР не может столкнуться с результатом хуже, чем тот, на который он ориентируется. Поэтому ММ-критерий считается одним из фундаментальных, в технических задачах он применяется чаще всего.

Применение ММ-критерия оправдано, если ситуация в которой принимается решение следующая:
1) о возможности появления внешних состояний y_j ничего не известно;
2) приходится считаться с появлением различных внешних состояний y_j;
3) решение реализуется один раз;
4) необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 3.

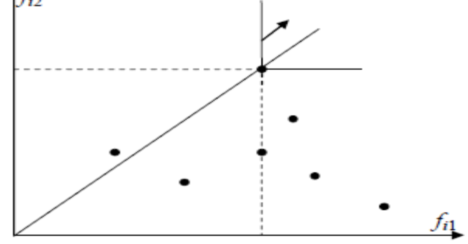

Рисунок 3– Геометрическое представление минимаксного критерия

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 2. Линия, соответствующая критерию, (прямой угол) движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий). Пусть q_j– вероятность появления внешнего состояния y_j.

Тогда для BL-критерия оценочная функция имеет вид (где f_{ij} – матрица получаемой прибыли):

$$Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} f_{ij} q_j \right)$$

где q_j – вероятности условий. Если q_j не заданы, то считаем, что условия равновероятны.

Правило выбора. Матрица решений (f_{ij}) дополняется еще одним столбцом, содержащим математические ожидания результатов каждой строки. Выбираются те варианты x_i, в строках которых стоит наибольшее значение f_{ir} этого столбца.

Критерий Байеса-Лапласа используется, если:

1) вероятности появления состояний известны и не зависят от времени;
2) решение реализуется бесконечно (теоретически) много раз;
3) для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций значение постепенно стабилизируется. Поэтому риск практически стремится к нулю.

Исходная позиция ЛПР, применяющего критерий BL, оптимистичнее, чем при минимаксном критерии, однако предполагает более высокий уровень информированности и достаточно много реализаций.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 4.

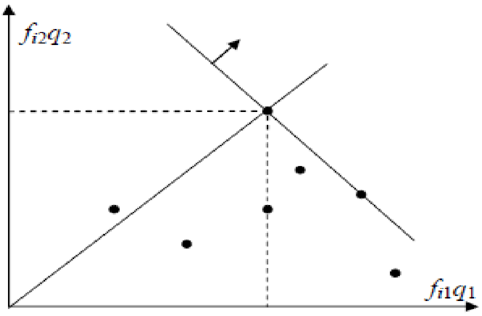

Рис.23.4. Геометрическое представление критерия Байеса-Лапласа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1. Строим точки с координатами $f_{i1}q_1$ и $f_{i2}q_2$.
Шаг 2. Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45^0.
Шаг 3. Линия, соответствующая критерию, – прямая, перпендикулярная направляющей, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Критерий Сэвиджа. Это критерий относительного пессимизма, который оперирует понятием риска, или остатка.

Оценочная функция критерия выглядит следующим образом:

$$a_{ij} = \max_i (f_{ij}) - f_{ij};$$

$$f_{ij} = \max_j a_{ij} = \max_j (\max_i (f_{ij}) - f_{ij});$$

$$Z_s = \min_i f_{ir} = \min_i (\max_j (\max_i (f_{ij}) - f_{ij})).$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии y_j вместо варианта x_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы) возникающие в состоянии y_j при замене оптимального для него варианта на вариант x_i. В последнем случае f_{ir} представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям y_j, $j = \overline{1,n}$) потери в случая выбора варианта x_i.

Соответствующее критерию Сэвиджа **правило выбора** трактуется следующим образом:

1) каждый элемент платежной матрицы (f_{ij}) вычитается из наибольшего результата $max\ f_{ij}$ соответствующего столбца.
2) разности a_{ij} образуют матрицу остатков (f_{ij}). Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей f_{ir}. Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 5.

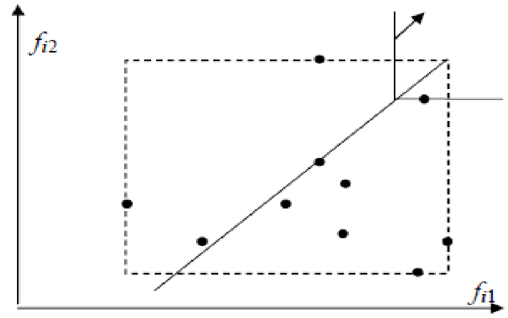

Рис.23.5 Геометрическое представление критерия Сэвиджа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1. Строим направляющую – прямую, проходящую через утопическую точку под 45^0.

Шаг 2. Линия, соответствующая критерию, – прямой угол, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением.

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям, становится ясно, что вследствие их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же если вирус вовремя обнаружен не будет, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

x_1 – полная проверка;

x_2 – минимальная проверка;

x_3 – отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

y_1 – вирус отсутствует;

y_2 – вирус есть, но он не успел повредить информацию;

y_3 – есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации имеют вид (таблица 1):

Таблица 1.

	y_1	y_2	y_3	ММ-критерий		критерий BL	
				$f_{ij} = \min\limits_j f_{ij}$	$\max\limits_i f_{ir}$	$f_{ir} = \sum\limits_{j=1}^{m} f_{ij} q_j$	$\max\limits_i f_{ir}$
x_1	-20	-22	-25	-25	**-25**	-22,11	
x_2	-14	-23	-31	-31		-22,44	
x_3	0	-24	-40	-40		-21,12	**-21,12**

Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку. Критерий Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны

$$P(y_j) = q_j = 0{,}33,$$

рекомендуется отказаться от проверки. Матрица остатков для этого примера и их оценка (в тысячах) согласно критерию Сэвиджа имеет вид (таблица 2):

Таблица 2

	y_1	y_2	y_3	Критерий Сэвиджа	
				$f_{ir} = \min\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_j f_{ir}$
x_1	+20	0	0	+20	
x_2	+14	+1	+6	+14	**+14**
x_3	0	+2	+15	+15	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать. Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

Критерий Гурвица. В соответствии с этим критерием правила максимакс и максимин сочетаются связыванием максимума минимальных значений альтернатив. Это правило называют ещё правилом оптимизма – пессимизма. Оптимальной альтернативе соответствует значение критерия, определяемое следующим образом:

$$Z_g = \max_i ((1-\alpha)\min_j (f_{ij}) + \alpha \max_j (f_{ij})).,$$

где α- коэффициент оптимизма, α =0…1 при α =1 альтернатива выбирается по правилу максимакс, при α =0 – по правилу максимин. Учитывая боязнь риска, целесообразно задавать α =0,3. Наибольшее значение целевой величины и определяет необходимую альтернативу.

Правило Гурвица применяют, учитывая более существенную информацию, чем при использовании правил максимин и максимакс.

Таким образом, при принятии решения в общем случае необходимо:

1) спрогнозировать будущие условия, например, уровни спроса;
2) разработать список возможных альтернатив;
3) оценить окупаемость всех альтернатив;
4) определить вероятность каждого условия (из данного пункта вытекает значение коэффициент оптимизма;
5) оценить альтернативы по выбранному критерию решения.

3. Программа выполнения работы

3.1. Для каждого из вариантов сформировать платежную матрицу для системы принятия решений.

3.2. Выполнить определение эффективных решений вручную, для этого сформировать таблицы соответствующего вида, включив в них столбцы для промежуточных (вспомогательных) результатов и столбцы для значений критериев на заключительной стадии принятия решений.

3.3. Выполнить формирование программного кода соответствующей процедуры определения эффективных решений.

3.4. Выполнить вывод результатов работы процедуры и сравнить полученные в процедуре результаты с результатами, сформированными аналитически.

3.5. Изменить исходные данные программы (платежные матрицы либо вероятности реализации внешних воздействий). С помощью разработанной процедуры реализовать определение эффективных решений.

4. Задание на работу

Вариант 1. Одно из предприятий должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников (уровень предложения услуг соответственно a_1, a_2, a_3, a_4. Точное число клиентов не известно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: 200, 250, 300 или 350 клиентов (воздействия внешней среды, соответственно, q_j). Для каждого из этих возможных значений существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса. В таблице приведены потери в тысячах долларов.

	q 1	*q 2*	*q 3*	*q 4*
a1	*5*	*10*	*18*	*25*
a2	*8*	*7*	*8*	*23*
a3	*21*	*18*	*12*	*21*
a4	*30*	*22*	*19*	*15*

Предполагается, что вероятности для воздействий внешней среды распределены следующим образом: $p_{q1}=0.4$, $p_{q2}=0.25$, $p_{q3}=0.2$, $p_{q4}=0.15$. Определить эффективное решение с использованием критерия Байеса-Лапласа.

Вариант 2. Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки - 10 станков. Минимальный объем поставок - 20 станков. Соответственно, вектор решений об объеме поставок X = (20,30,40,50). Ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка, составляет 21.9 тыс.руб. Оптовая цена одного станка 4.775 тыс. руб., эксплуатационные расходы - 3.6 тыс. руб. Затраты на подготовку производства составляют 25.5 тыс.руб. и не зависят от числа станков и объема выпуска. Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с S работающих станков, и для простоты ограничимся вектором состояний спроса S = (0,10,20,30,40,50).

Если решающее правило сформулировать как "доход - издержки", то можно рассчитать элементы матрицы полезности:

$$W_{ij} = (21.9 - 3.6) * min(x_i, s_j) - 4.775x_i - 25.5 \cdot$$

Тогда вид платежной матрицы следующий:

	S1=0	S2=10	S3=20	S4=30	S5=40	S6=50
X1=20	-121	62	245	245	245	245
X2=30	-168.75	14.25	197.25	380.25	380.25	380.25
X3=40	-216.5	-33.5	149.5	332.5	515.5	515.5
X4=50	-264.25	-81.25	101.75	284.75	467.75	650.75

Задав коэффициент оптимизма равным 0.3, определить эффективное решение по закупке оборудования. Определить эффективные решения с использованием критерия Гурвица.

Вариант 3. Для рассмотренной в варианте 2 постановки задачи закупки оборудования в соответствии с приведенной ниже платежной матрицей, выполнить определение эффективных решений с использованием критерия Сэвиджа.

	S_1=0	S_2=10	S_3=20	S_4=30	S_5=40	S_6=50
X_1=20	0	0	0	-135.25	-270.5	-405.75
X_2=30	-47.75	-47.75	-47.75	0	-135.25	-270.5
X_3=40	-95.5	-95.5	-95.5	-47.75	0	-135.25
X_4=50	-143.25	-143.25	-143.25	-95.5	-47.75	0

5. Контрольные вопросы.

5.1. Почему рассматриваемый подход называется принятием решений в условиях полной неопределенности?

5.2. Что из себя представляет математическая модель принятия решений в условиях полной неопределенности?

5.3. Чем при принятии решений пессимистическая позиция отличается от оптимистической?

5.4. В чем заключается позиция компромисса и позиция нейтралитета при принятии решений?

5.5. Какой из позиций (пессимиста или оптимиста) соответствуют безрисковые стратегии и стратегии с риском?

5.6. Какой вид имеет критерий Вальда, какой позиции при принятии решений он соответствует?

5.7. Какой вид имеет критерий Байеса-Лапласа, что означают вероятности в выражении для критерия ?

5.8. Какой вид имеют критерии Сэвиджа и Гурвица, каким позициям при принятии решений они соответствуют.