Лабораторная работа №5
Исследование методов принятия решений при нечетком отношении предпочтения на множестве альтернатив

1. Цель работы: исследовать способы построения систем принятия решений на основе нечеткого отношения предпочтения на множестве альтернатив.

2. Теоретическое введение

Обозначим: X – множество возможных альтернатив (решений). Если $x_i \succ x_j$ вид отношения предпочтения, связывающего два решения x_i и x_j, то $\succ$ – четкое отношение предпочтения, то есть решение x_i является более предпочтительным, чем решение x_j (строго предпочтительным).

Для решений x_i и x_j может быть определено нечеткое отношение предпочтения, определяющее степень предпочтения решения x_i по сравнению с решением x_j. Таким образом принятие решений в условиях неопределённости (при использовании нечетких множеств) основывается на:
1) нечетком описании множества альтернатив (решений);
2) нечетком определении отношения предпочтения (на описании нечеткого отношения предпочтения).

Если X – универсально множество (множество альтернатив); x_i – некоторая текущая рассматриваемая альтернатива, тогда X – множество всех возможных решений рассматриваемой задачи, а $C \subset X$ – множество допустимых альтернатив, обеспечивающих рациональное решение поставленной задачи.

Тогда для каждого $x_i \in X$ может быть определено значение функции принадлежности $\mu_c(x_i) \in [0,1]$, которое определяет степень допустимости выбора альтернативы x_i в качестве рационального решения рассматриваемой задачи.

Обозначим через X^D – подмножество альтернатив, рациональных с точки зрения решаемой задачи, тогда $X^D = \{x \mid x \in X, \mu_c(x) = \sup_{x \in X}(\mu_c(x))\}$, где $\mu_c(x)$ – непрерывная функция, sup – верхний экстремум непрерывной функции $\mu_c(x)$. В случае, если $\mu_c(x_i)$ – дискретная функция для соответствующих решений $x_i \in X$, тогда множество X^D будет определено следующим образом: $X^D = \{x_i \mid x_i \in X, \mu_c(x_i) = \max_{x \in X}(\mu_c(x_i))\}$.

Если $\mu_c(x_i)$ – степень (мера) соответствия решений $x_i \in X$ требованиям задачи, то может быть сформировано отношение предпочтения $x_i R x_j$.

Понятие и свойство четкого отношения нестрогого предпочтения

Обозначим R – подмножество, определенное на множестве $X \times X$ (подмножество множества пар $(x_i, x_j) \in X \times X$)). Таким образом R – некоторая операция сравнения альтернатив (решений) x_i и x_j между собой. Обозначим через R прямое, а через R^{-1} – обратное отношения нестрогого предпочтения. Если R – прямое отношение предпочтения ($\succeq$), то при сравнении двух альтернатив «x_i не хуже x_j» имеем $x_i R x_j$ ($x_i \succeq x_j$). Тогда обратное отношение R^{-1} может быть проинтерпретировано следующим образом: «x_j не лучше x_i», т.е. эквивалентно, либо заведомо хуже (тогда $x_j R^{-1} x_i$).

Через R^s обозначим отношение строгого предпочтения, через R^I – отношение безразличия (несравнимости, эквивалентности). Альтернатива x_i доминирует альтернативу x_j (является строго лучше x_j), если выполняется условие $x_i \succ x_j$. Альтернативы x_i и x_j связаны отношением строгого предпочтения (т.е. $x_i R^s x_j$). Тогда R^s – это множество пар, в которых элемент x_i (альтернатива x_i) строго предпочтительнее альтернативы x_j. Отношение безразличия R^I определяется следующим образом. Альтернатива x_i и x_j находятся в отношении безразличия ($(x_i R^I x_j)$ либо $(x_i, x_j) \in R^I$), если не выполняется ни предпочтение $x_i \succ x_j$, ни предпочтение $x_j \succ x_i$ (т.е. $x_i \overline{\succ} x_j$ и $x_j \overline{\succ} x_i$).

Для четких отношений $R(R^S, R^I)$ при $(x_i R x_j)$ степень предпочтения альтернативы x_i над альтернативой x_j равна 1. Если R – нечеткое отношение предпочтения, то должна быть определена степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j. Степень предпочтения для нечеткого отношения R определяется функцией принадлежности $\mu_R(x_i,x_j)$. Т.о. $\mu_R(x_i,x_j)$ определяет степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j. Свойства функции $\mu_R(x_i,x_j)$:

1) $\mu_R : X \times X \to [0,1]$, т.е. функция $\mu_R(x_i,x_j)$ каждой паре альтернатив $(x_i,x_j) \in X \times X$ ставит в соответствие значение из интервала [0, 1], это значение есть степень предпочтения альтернативы x_i относительно альтернативы x_j;

2) $\mu_R(x_i,x_i) = 1$, т.е. альтернатива x_i не может быть хуже сама себя;

3) $\mu_R(x_j,x_i) = 0$ в том случае, если для пары альтернатив (x_i,x_j)с положительной степенью выполнено отношение R (т.е. $\mu_R(x_i,x_j) > 0$ либо альтернативы x_i, x_j по выбранному критерию не могут быть сравнимы. Таким образом, если $\mu_R(x_i,x_j) > 0$, то $\mu_R(x_j,x_i) = 0$ и если $\mu_R(x_j,x_i) > 0$, $\mu_R(x_i,x_j) = 0$.

Т.о. для каждой пары $(x_i,x_j) \in R$ (либо, в общем виде $x_i R x_j$) определяется степень $\mu_R(x_i,x_j)$.

Виды нечетких отношений

1. Нечеткое отношение безразличия R^I предполагает, что альтернативы x_i и x_j не могут быть сравнимы с использованным отношением предпочтения R (здесь предполагается, что R– это отношение нестрогого предпочтения). Тогда если $x_i R^I x_j$, то $\mu_R^I(x_i,x_j)$ определяет степень безразличия альтернативы x_i по отношению к альтернативе x_j.

2. Отношение эквивалентности альтернатив R^E. Оно предполагает, что $R^E \subseteq R^I$. Отношение R^E определяется следующим образом: $R^E = R \cap R^{-1}$, где R – отношение «не хуже» (x_i не хуже x_j), R^{-1} – отношение «не лучше» (x_j не лучше x_i). Тогда если $(x_i,x_j) \in R^E$, то альтернативы x_i и x_j эквивалентны, а $\mu_R^E(x_i,x_j)$ определяет степень эквивалентности альтернатив x_i и x_j.

3. Нечеткое отношение строгого предпочтения R^S, тогда при $(x_i,x_j) \in R^s$ значение $\mu_R^S(x_i,x_j)$ определяет степень предпочтения альтернативы x_i над альтернативой x_j.

Таким образом отношения R^S, R^E, R^I могут связывать любую пару альтернатив $(x_i,x_j) \in X \times X$. Каждое из отношений R^S, R^E, R^I характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_R(x_i,x_j)$, определяющей степень выполнения отношения для пары альтернатив (x_i,x_j) $\mu_R^S(x_i,x_j)$, $\mu_R^E(x_i,x_j)$, $\mu_R^I(x_i,x_j)$.

Если известны степени выполнения отношений R и R^{-1} (где R – отношение «не хуже» (x_i не хуже x_j), R^{-1} – отношение «не лучше» (x_j не лучше x_i), соответственно $\mu_R(x_i,x_j)$ и $\mu_{R^{-1}}(x_i,x_j)$), то значения, $\mu_R^S(x_i,x_j)$, $\mu_R^E(x_i,x_j)$, $\mu_R^I(x_i,x_j)$ могут быть вычислены следующим образом:

1) для отношения безразличия:

$$\mu_R^I = max[1 - max(\mu_R(x_i,x_j), \mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)); min(\mu_R(x_i,x_j), \mu_{R^{-1}}(x_i,x_j))];$$

2) для отношений эквивалентности:

$$\mu_R^E = min(\mu_R(x_i,x_j), \mu_{R^{-1}}(x_i,x_j));$$

3) для отношения строгого предпочтения:

$\mu_R^S(x_i,x_j) = \mu_R(x_i,x_j) - \mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)$, если $\mu_R(x_i,x_j) > \mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)$ и $\mu_R^S(x_i,x_j) = 0$ в противном случае.

Линейность нечетких отношений

Если R (либо R^{-1}) связывает любые две альтернативны x_i и x_j, то отношение R является линейным. Т.о. в X нет несравнимых с помощью R (R^{-1}) решений, альтернативы из X могут быть упорядоченных с помощью R (R – нечеткое отношение нестрогого предпочтения). Если R – нечеткое отношение нестрого предпочтения (с функцией принадлежности μ_R), то может быть сформулировано свойство, когда R не является линейным: если в X имеются 2 альтернативных x_i и x_j такие, что $\mu_R(x_i,x_j)=\mu_{R^{-1}}(x_i,x_j)=0$.

Понятия сильно линейного нечеткого отношения предпочтения и слабо линейного нечеткого отношения предпочтения

Нечеткое отношение μ_R называется сильно линейным, если его функция принадлежности для любой пары альтернатив $(x_i,x_j)\in X\times X$ выполняется условие: $max\{\mu_R(x_i,x_j),\mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)\}=1$. Нечеткое отношение μ_R называется слабо линейным, если его функция принадлежности удовлетворяет условию: из $\mu_R(x_i,x_j)=0$ следует, что $\mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)>0$ для любой пары альтернатив $(x_i,x_j)\in X\times X$.

Пример сильно линейного отношения нестрогого предпочтения:

$$\mu_R(x_i,x_j)=\begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0.2 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ x_3 & 0 & 0.8 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 0.3 & 1 \end{array}.$$

Пример слабо линейного отношения нестрогого предпочтения:

$$\mu_R(x_i,x_j)=\begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0.55 & 0.6 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ x_3 & 0 & 0.8 & 1 & 0 \\ x_4 & 0.8 & 0 & 0.7 & 1 \end{array}.$$

Решение задачи рационального выбора альтернатив из множества *X* на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения R

Заданными являются:
1) множество альтернатив (решений) X в виде $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$
2) нечеткое отношение предпочтения R (μ_R) с функцией принадлежности $\mu_R(x_i,x_j)$, определяющей степень выполнения нестрогого отношения предпочтения R для пары альтернатив (x_i,x_j) следующим образом: $\mu_R : X\times X\to[0,1]$, т.е. каждой паре (x_i,x_j) из декартового произведения $X\times X$ функция μ_R ставит в соответствие значение из интервала [0,1].

Т.к. множество X счетное и конечное, то должна быть задана матрица $\mu_R(x_i,x_j)$ отношения предпочтения μ_R.

Таким образом, обозначение нечеткого отношения нестрогого предпочтения R выполняется в виде μ_R. Если определено отношение $\mu_R(x_i,x_j)$, то является определенным и отношение $\mu_{R^{-1}}(x_j,x_i)$ (либо $\mu_R(x_j,x_i)$ в дальнейших обозначениях).

Решение задачи предполагает выбор из множества решений X подмножества недоминируемых альтернатив $X^{нд}$ с учетом отношений μ_R. Множество недоминируемых альтернатив $X^{нд}$ является нечетким, т.е. каждой из альтернатив $x_i\in X$ ставиться в соответствие значение, определяющее степень, с которой x_i не доминируют другие альтернативы. Степень доминирования альтернативой x_i альтернативы x_j определяется при учете отношения строгого предпочтения R^S, связывающего эти альтернативы. Т.о. на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения R (связывающего пары альтернатив (x_i,x_j)) должно быть определено отношение R^s строгого предпочтения для пар (x_i,x_j). Т.е. на основе $\mu_R(x_i,x_j)$ и $\mu_R(x_j,x_i)$ должно быть определено $\mu_{R^s}(x_i,x_j)$.

Множество недоминируемых альтернатив $X^{нд}$ формируется следующим образом:

1. Определяется нечеткое отношение строгого предпочтения $R^S(\mu_R^S)$ для каждой пары альтернатив (x_i, x_j) :

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \mu_R(x_i, x_j) - \mu_{R^{-1}}(x_j, x_i),$$

Либо

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \mu_R(x_i, x_j) - \mu_R(x_j, x_i).$$

Т.о. значение $\mu_R^S(x_i, x_j) -$ это степень, с которой альтернатива x_i доминирует альтернативу x_j .

2. Если является заданной величина $\mu_R^S(x_i, x_j)$ и является определенной альтернатива x_j , тогда $\mu_R^S(\cdot) > 0$ может быть использована для определения всех альтернатив x_i , которое доминирует альтернативу x_j .

3. Аналогичным образом может быть определена степень недоминируемости альтернативы x_j какой-либо из альтернатив $x_i \in X$. Степень недоминируемости альтернативой x_i альтернативы x_j определяется следующим образом: $\mu_R^{НД}(x_i, x_j) = 1 - \mu_R^S(x_i, x_j),$ где $x_i \in X, i = \overline{1,n}$. В результате может быть получено n значений $\mu_R^{НД}(x_i, x_j)$ степени недоминируемости альтернативами $x_i \in X$ альтернативы x_j .

4. Если альтернатива x_j не доминируется альтернативой x_i со степенью $\mu_R^{НД}(x_i, x_j)$, то эта альтернатива x_j не доминируется всеми альтернативами x_i со степенью, определяемой следующим образом: $\mu_R^{НД}(x_j) = \min_{i=1,n}(1 - \mu_R^S(x_i, x_j)),$ либо $\mu_R^{НД}(x_j) = \min_{i=1,n}(\mu_R^{НД}(x_i, x_j)).$ Т.е. среди всех альтернатив определяется та (и ее степень $\mu_R^S(x_i, x_j)$ соответственно), которая не доминирует x_j в наименьшей степени (наименьшая степень недоминирования), т.о. получено нечеткое множество $\mu_R^{НД}(x_j)\ (i = \overline{1,n})$, где каждому элементу x_j поставлена в соответствие его степень недоминирования (т.е. с какой степенью x_j не доминируется другими альтернативами).

5. Среди всех элементов $x_j \in X$ с учетом соответствующих значений $\mu_R^{НД}(x_j)$ определяется альтернатива x_h , не доминируемая другими альтернативами, следующим образом:

$$x_h : \mu_R^{НД}(x_h) = \max_{x_i \in x} \mu_R^{НД}(x_j).$$

В результате может быть определена альтернатива x_h , у которой степень недоминирования другими альтернативами x_i максимальна среди всех возможных значений $\mu_R^{НД}(x_j)$. В итоге сформировано подмножество $X^{НД} \subset X$ не- доминируемых альтернатив в виде:

$$X^{НД} = \{x_h \mid x_h \in X \,\&\, \mu_R^{НД}(x_h) = \max_{x_j \in X} \mu_R^{НД}(x_j)\}.$$

Таким образом, альтернативы $x_h \in X^{НД}$ являются наиболее эффективными среди всех альтернатив $x_j \in X$.

Пример реализации метода определения недоминируемых альтернатив. Множество альтернатив X имеет следующий вид: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

На множестве альтернатив X задано отношение нестрогого предпочтения *R* в виде:

$$\mu_R(x_i, x_j) = \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{array} \right| .$$

В соответствии с нечеткими отношениями $\mu_R(\cdot)$ определено нечеткое отношение строгого предпочтения в виде:

$$\mu_R^S(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0 \end{array} .$$

В соответствии с отношением $\mu_R^S(x_i,x_j)$ сформирована матрица (нечеткое множество) $\mu_R^{НД}(x_i,x_j)$ не доминируемых альтернатив в виде:

$$\mu_R^{НД}(x_i,x_j)=\left|\begin{array}{ccc|cc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 0.8 & 1 \\ x_2 & 0.7 & 1 & 1 & 0.5 \\ x_3 & 1 & 0.6 & 1 & 1 \\ x_4 & 0.5 & 1 & 0.8 & 1 \end{array}\right. .$$

Понятно что для каждого столбца матрицы $\mu_R^{НД}(x_i,x_j)$– альтернативы x_j- должна быть выбрана минимальная степень недоминируемости (“наихудший” вариант недоминируемости). В результате получено нечеткое множество $X^{НД}$ недоминируемых альтернатив в следующем виде:

$$\mu_R^{НД}(x_i)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.8 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Наибольшую степень недоминируемости имеет альтернатива $x_3(\mu_R^{НД}(x_3)=0.8)$, которая должна быть выбрана в качестве эффективного решения.

Таким образом, для эффективных альтернатив $x_i \in X$ должно выполняется следующее условие:

$$\mu_R^{НД}(x)=\max_{x_j\in X}(\min_{x_i\in X}\mu_R^{НД}(x_i,x_j)=\max_{x_j\in X}\min_{x_i\in X}(1-\mu_R^S(x_i,x_j)) .$$

Решения задачи принятия решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами

Заданым является количество экспертов, каждый из которых формирует свое отношение предпочтения для множества альтернатив. Количество экспертов обозначим через *K.* Определенно множество альтернатив *X,* имеющих вид $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. На множестве альтернатив *X* определено *K* отношений нестрогого предпочтения $R_k(k=\overline{1,K})$.

Т.о. каждый k-ый эксперт сформировал свое отношение предпочтения для альтернатив, т.е. сформировал матрицу отношения $R_K-\mu_{R_K}(x_i,x_j))$. Тогда элемент $\mu_{R_K}(x_i,x_j)$ определяет степень предпочтительности альтернативы x_i по отношению к альтернативе x_j по мнению k-го эксперта.

ЛПР по разному относится к экспертам, что определяется весовыми коэффициентами λ_K, назначенными каждому из них.

Условия для весовых коэффициентов:

$$0\le\lambda_K\le1;\sum_k\lambda_K=1;$$

Задача состоит в определении эффективных (недоминируемых) альтернатив на основе мнений (отношений предпочтения) группы экспертов.

Алгоритм решения задачи предполагаемое построение двух видов сверток нечетких отношений предпочтений R_K, для каждой из которых определяется множество недоминируемых альтернатив.

1.Формулируется свертка P отношений предпочтения как пересечения нечетких отношений нестрогого предпочтения R_K :

$$P=R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_N=\underline{\min}_{K=\overline{1,N}}(\mu_{R_K}(x_i,x_j))$$

В результате сформировано “новое” обещающее отношение нестрогого предпочтения для пар альтернатив (x_i,x_j).

2.Для полученного нечеткого отношения нестрогого предпочтения P формулируется отношение строгого предпочтения P^S с функцией принадлежности μ_P^S следующим образом:

$$P^S=P\setminus P^{-1};\mu_p(x_i,y_j)=\mu_p(x_i,y_j)-\mu_{p^{-1}}(x_i,y_j)\text{ при }\mu_p(x_i,y_j)>\mu_{p^{-1}}(x_i,y_j))$$

$\mu_P^S(x_i,x_j)=0$ в противном случае.

3.По аналогии с вышеизложенным методом формируется нечеткое множество $x^{НД}$ недоминирующих альтернатив $(x^{НД} \subset x)$ следующим образом:

$$\mu_P^{НД}(x_j) = \min_{x_i \in X}(1 - \mu_P^S(x_i, x_j));$$

4.Формулируется свертка Q отношений R_K, которая определяется следующим образом:

$$Q = \sum_K \lambda_K R_K \Rightarrow \mu_Q(x_i, y_j) = \sum_K \lambda_K \mu_{R_K}(x_i, y_j)$$

В результате получено новое нечеткое отношение нестрогого предпочтения Q для которого д\б сформировано отношение строгого предпочтения Q^S и => множество недоминируемых альтернатив $x^{НД2}$. Формирование множества недоминируемых альтернатив выполняется следующим образом:

$$\mu_Q^{НД2}(x_j) = \min_{x_i \in X}(1 - \mu_Q^S(x_i, x_j))$$

Таким образом, сформировано два множества недоминируемых альтернатив $\mu_P^{НД1}$ и $\mu_Q^{НД2}$.

5.Определяется пересечение полученных множеств $\mu_P^{НД1}$ и $\mu_Q^{НД2}(x^{НД1} \cap x^{НД2}$ соответственно), функция принадлежности результирующего нечеткого множества определяются следующим образом:

$$\mu^{НД}(x_j) = \min(\mu_P^{НД1}(x_j); \mu_Q^{НД2}(x_j))$$

6.Из полученного в результате множества $x^{НД}(x^{НД}(x))$ выбирается та альтернатива x для которой значение $x^{НД}(x)$ является максимальным т.е.:

$$x^* = arq\max_{x_j \in X} \mu^{НД}(x_j),\ j = \overline{1,n}$$

<u>Пример</u> реализации определения эффективной альтернативы при нескольких (N=5) отношениях нестрогого предпочтения $R_K(k = \overline{1,K})$.

На множестве $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ заданы отношения предпочтения $\{R_K(k = \overline{1,N})\}$ матрицы $\mu_R(x_i, x_j)$ которых имеют вид:

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{vmatrix};\ \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};\ \mu_{R_4}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\mu_{R_5}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.3; \lambda_3 = 0.3; \lambda_5 = 0.1$$

В результате преобразований получены отношения P и Q в следующем виде:

$$\mu_P(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \mu_Q(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{vmatrix};$$

Откуда $\mu_P^S(x_i, x_j)$ и $\mu_Q^S(x_i, x_j)$ имеет вид:

$$\mu_P^S(x_i,x_j)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix};\ \mu_Q^S(x_i,x_j)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0.4 & 0.02\\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.77\\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39\\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1\end{vmatrix};$$

Опуская вычисления $\mu_P^{НД1}(x)$ и $\mu_Q^{НД2}(x)$ сформулируем множества $\mu_P^{НД1}(x)$ и $\mu_Q^{НД2}(x)$ в виде:

$\mu_P^{НД1}(x)=[0.5;\ \ 1;\ \ 0.8;\ \ 0.5]$; $\mu_Q^{НД2}(x)=[0.84;\ \ 1;\ \ 0.78\ \ 0.74]$;

Откуда получаем $\mu^{НД}(x)$ в виде

$\mu^{НД}(x)=[0.5;\ \ 1;\ \ 0.78;\ \ 0.5]$;

Следовательно, эффективная альтернатива x_2.

Решение задачи определения эффективной альтернативы группой экспертов, характеризуемых отношением нестрогого предпочтения между ними.

По аналогии с рассмотренной выше задачей заданными являются нечеткие отношения нестрогого предпочтения $\mu_{R_K}(x_i,x_j)$ для группы экспертов $(k=\overline{1,N})$ и задается нечеткое отношение предпочтения для этой группы экспертов (т.е. на сколько мнение *i* -го эксперта является более предпочтительным мнения *j*-го эксперта). Т.о. определимое $\mu_M(e_i,e_j)$, значение которой соответствует степени предпочтительности мнения *i*-го эксперта по сравнению с мнением *j*-го.

Алгоритм определения эффективных решений при заданном нечетком отношении предпочтения для экспертов состоит из следующих шагов:

1.Для каждого $\mu_{R_K}(x_i,x_j)(k=\overline{1,N})$ определяется $\mu_{R_K}^S(x_i,x_j)$ и соответственно $\mu_{R_K}^{НД}(x_i,x_j)$ полученный вектор значений $\mu_{R_K}^{НД}(x_j)$ является соответствующей *K*-ой строкой формулируемой матрицы Ф, т.е.

$$\mu_{R_K}^{НД}(x_j)=\mu_\Phi(k,x_i),\ j=\overline{1,n};k=\overline{1,N}$$

Матрица Ф, сформированная на основе $\mu_{R_K}^{НД}(x_j)$ задает нечеткое соответствие между множеством экспертов $E=\{e_R\mid k=\overline{1,N}\}$ и множеством альтернатив $X=\{x_j\mid j=\overline{1,n}\}$.

2. Т.к заданной является матрица *M*, элементы $\mu_M(e_i,e_j)$ который задают нечеткое соответствие между экспертами (степень предпочтения экспертов), то м\б сформулирована свертка отношений Ф и М следующим образом:

$$\varGamma=\Phi^T\circ M\circ\Phi,$$

где операция $\circ$ представляют собой максимальную композицию для соответствующий матриц Φ^T, M, Φ. В результате формируется отношение Г, а базе которого определяется $\mu_\varGamma^S(x_i,x_j),\ \mu_\varGamma^{НД}(x_j)$.

3. С использованием полученных значений $\mu_\varGamma(x_i,x_j)$ и $\mu_\varGamma(x_j)$ формулируется скорректированное значение $\mu_\varGamma^{НД}(x_j)$ (где $\mu_\varGamma(x_i,x_j)$ - диагональные элементы соответствующей матрицы) следующим образом: $\mu_\varGamma^{НД}(x_j)=\min(\mu_\varGamma^{НД}(x_j),\mu_\varGamma(x_i,x_j))$

4.Среди полученных значений $\mu_\varGamma^{НД}(x_j)$ выбираются максимальное, которое и соответствует эффективной альтернативе:

$$x^*=arq\max_{x_j\in X}\mu_\varGamma^{НД}(x_j),\ j=\overline{1,n}$$

<u>Пример</u> реализации принятия решений при заданном отношении предпочтения.

$\mu_M(e_1,e_j)$ для экспертов. Множество экспертов имеет вид: $E=\{e_j\mid j=\overline{1,5}\}$.

Матрица М задана в виде:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрицы $\mu_{R_K}(x_j)$ отношения предпочтения для N элементов заданы соответствующими этим матрицам из предыдущего примера. Для каждого $\mu_{R_K}(x_j)$ сформулировано $\mu_{\Gamma}^{НД}(x_j)$ все N векторов $\mu_{R_K}^{НД}(x_i)$ сведены в матрице Ф (К – ый вектор – к – ая строка матрицы Ф).

В результате матрица Ф имеет вид:

$$M_{\Phi} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Выполняется максимальная композиция для получения свертки Г в виде:

$$M_{\Gamma} = (M_{\Phi}) \circ (M_M) \circ (M_{\Phi}) = \begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 0 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.5 & 0.7 & 0 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.3 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{vmatrix} \circ$$

$$\begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \end{vmatrix}$$

Отношение Γ^S определяется матрицей:

$$\mu_{\Gamma}^{S}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Откуда $\mu_{\Gamma}^{НД}(x_j) = \{0.9 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.9\}$, скорректированный-вектор $\mu_{\Gamma}^{НД}(x_j)$ имеет вид: $\mu_{\Gamma}^{НД}(x_j) = \{0.8 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.9\}$. Откуда эффективная альтернатива (решение) - x_4

3. Варианты задания

Вариант задания, предполагает определение матриц отношений нестрогого предпочтения для каждого из экспертов, а также матрицы предпочтений для экспертов. Необходимо на основе исходных данных выполнить определение множества недоминируемых альтернатив с учетом отношения нечеткого предпочтения для экспертов.

Вариант 1.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0. \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.33 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_3}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.8 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad M=\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 1 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{array}\right..$$

Вариант 2.

$$\mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_2}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.33 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_3}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad M=\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{array}\right..$$

Вариант 3.

$$\mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_2}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.33 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_3}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_1}(x_i,x_j)=\begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вариант 4.

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_2}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.45 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.33 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_3}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mu_{R_1}(x_i, x_j) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}. \qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Контрольные вопросы

1. Что такое функция принадлежности с точки зрения нечеткого отношения R?
2. Каким образом (с точки зрения формализации) задается степень предпочтения в отношении R– нечетком отношении нестрогого предпочтения?
3. Какие виды нечетких отношений могут быть использованы при принятии решений, как реализуется определение значений их функций принадлежности?
4. Что означает сильная линейность нечеткого отношения нестрогого предпочтения и слабая линейность нечеткого отношения нестрогого предпочтения?
5. Каким образом на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения определяется множество недоминируемых альтернатив?
6. Какой вид имеет формализация способа определения на основе нечеткого отношения нестрогого предпочтения множества недоминируемых альтернатив?
7. В чем состоит процедура определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами?
8. Какой вид имеет формализация процедуры определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами?
9. В чем состоит процедура определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых отношением нестрогого предпочтения?
10. Какой вид имеет формализация процедуры определения множества недоминируемых альтернатив при принятии решений с группой экспертов, характеризуемых отношением нестрогого предпочтения?